Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Quebra de simetria de calibre no modelo de Chern-Simons supersimétrico

André Carlos Lehum

Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física
para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Comissão examinadora: Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)
Dr. Adriano Antonio Natale (IFT-UNESP)
Dr. Clóvis José Wotzasek (UFRJ)
Dr. José Roberto Soares do Nascimento (UEPB)
Dr. Josif Frenkel (IFUSP)

São Paulo
2008

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Lehum, André Carlos

Quebra de simetria de calibre no modelo de Chern-Simons Supersimétrico - São Paulo, 2008.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teoria Quântica Relativística;
2. Teoria Quântica de Campo; 3. Campos de Padrão;
4. Supersimetria

USP/IF/SBI-015/2008

Agradecimentos

Ao Professor Adilson José da Silva pela orientação paciente, pela conversa amiga, e pela confiança no doutorado direto. Foi um enorme prazer esses quase cinco anos sob sua orientação.

Ao Professor Marcelo Otávio Caminha Gomes pela atenção sempre prestativa e gentil que dispensou durante nossa colaboração nesses anos no IFUSP.

Aos amigos Alysson Fábio Ferrari e Fernando Teixeira, cuja colaboração renderam bons frutos.

Ao Professor Jair Lucinda (UFPR), pela amizade desde os tempos de iniciação científica.

Aos amigos Ezequiel Burkarter e Fabiano Thomazi pelas longas tardes de “coca-cola”.

Aos “andorinhas” Armando Heillmann, Carlos Jousseph, Gustavo Zampier, Joel Cervantes e Rogério Mazur, companheiros de estudo, caminhada e “Régis Bittencourt”.

À Ivone Pires, minha mãe, por todo sacrifício em função da minha formação. Não há palavras que descrevam meu amor e gratidão.

À Luzia Siqueira Lehum, minha esposa, por todo o amor, paciência e entusiasmo.

Aos meus filhos Marco Antonio e Carlos Eduardo, que todos os dias me ensinam que nada é mais importante do que a verdadeira amizade.

Ao Departamento de Física Matemática do IFUSP pela infra-estrutura e ao CNPq pelo suporte financeiro.

André Carlos Lehum
São Paulo, dezembro de 2007.

Aos meus pais, esposa e filhos...

"A ciência é feita de fatos, da mesma forma que uma casa é feita de tijolos. Contudo, um agrupamento de fatos não constitui ciência, da mesma forma que um monte de tijolos não é uma casa."

- Henri Poincaré

Resumo

Através do formalismo de supercampos, estudamos as propriedades ultravioletas da eletrodinâmica quântica supersimétrica no espaço-tempo tridimensional. Mostramos que esta teoria é finita em todas as ordens de perturbação num calibre particular. Também apresentamos uma análise perturbativa do modelo de Chern-Simons supersimétrico acoplado a um supercampo escalar complexo. Com isso, estudamos a quebra da simetria de calibre $U(1)$ e calculamos as primeiras correções quânticas à ação efetiva na fase quebrada. Mostramos que a renormalização da equação de *gap* é suficiente para assegurar a renormalizabilidade do modelo em um laço de aproximação. Nós também verificamos que quando acoplado a um supercampo escalar sem massa, o modelo de Chern-Simons supersimétrico apresenta geração dinâmica de massa, um mecanismo que em $D = 2 + 1$ dimensões do espaço-tempo, diferentemente do modelo não-supersimétrico quadridimensional (Coleman-Weinberg), só ocorre a partir da aproximação de dois laços. Alguns outros resultados relacionados são também incluídos nesta tese, tais como um estudo do modelo $CP^{(N-1)}$ não-comutativo supersimétrico e a equivalência entre os modelos de Maxwell-Chern-Simons e Auto-Dual supersimétricos. Em todo nosso trabalho, supersimetria é manifesta.

Abstract

Within the superfield formalism, we study the ultraviolet properties of the three-dimensional supersymmetric quantum electrodynamics. The theory is shown to be finite at all loops orders in a particular gauge. We also present a perturbative analysis of the supersymmetric Chern-Simons model coupled to a Higgs field. We study the spontaneous symmetry breaking of the $U(1)$ gauge symmetry and evaluate the first quantum corrections to the effective action in the broken phase. We show that the infinite renormalization of the gap equation is enough to ensure the renormalizability of the model at the first loop level. We also verify that when coupled to a massless scalar superfield, the supersymmetric Chern-Simons model present dynamical generation of mass, a mechanism that in $D = 2 + 1$ spacetime dimensions, differently from the four-dimensional non-supersymmetric model (Coleman-Weinberg), only occurs from two loops order. Some other related results are also enclosed in this thesis, such as a study of the supersymmetric noncommutative $CP^{(N-1)}$ model and the equivalence between Maxwell-Chern-Simons and Self-Dual supersymmetric models. In whole work, supersymmetry is manifest.

Sumário

Introdução	1
1 Supersimetria em $2 + 1$ dimensões do espaço-tempo	7
1.1 Notações e convenções	7
1.1.1 Convenções de índices	7
1.1.2 Superespaço	9
1.2 Supersimetria e supercampos	10
1.2.1 Componentes por expansão e componentes por projeção	12
1.2.2 Multipleteo escalar	14
1.2.3 Multipleteo vetorial	15
1.3 Quantização e regras de Feynman	19
1.4 Um exemplo simples : o modelo de Wess-Zumino	21
1.5 O modelo $CP^{(N-1)}$ não-comutativo	23
1.5.1 Ação em componentes	27
1.5.2 A equação de gap	29
1.5.3 Propagadores efetivos em ordem dominante	31
1.5.4 Correções em ordem subdominante à ação efetiva $\bar{\Phi}\Phi$	36
2 Eletrodinâmica quântica supersimétrica em $D = 2 + 1$ dimensões	39
2.1 Descrição do modelo	40
2.2 Estrutura geral das divergências	41
2.3 Contribuições em um laço para a ação efetiva	42
2.4 Contribuições em dois laços à função de dois pontos do supercampo de calibre	44
2.5 Sumário	46
3 Quebra de simetria de calibre no modelo de SUSY Chern-Simons	47
3.1 Definição do modelo	48

3.2	A fase espontaneamente quebrada	51
3.2.1	A equação de <i>gap</i>	52
3.2.2	Correções radiativas à parte quadrática da ação efetiva	52
3.2.3	Estrutura geral das divergências	59
3.3	Quebra dinâmica de simetria de calibre	63
3.4	Sumário	67
Conclusões		69
Apêndices		70
A	Teoria quântica de campos em espaço-tempo não-comutativo	71
A.1	O Produto Moyal	72
A.2	A Correspondência Weyl-Moyal	73
A.3	Teoria de perturbação não-comutativa	76
A.3.1	O vértice de campos escalares	76
A.3.2	O vértice de campos fermiônicos	78
A.4	O Mecanismo IV/UV	79
A.5	Unitariedade da matriz S em teorias não-comutativas	81
B	Sobre a equivalência entre os modelos Auto-Dual e Maxwell-Chern-Simons supersimétricos	83
B.1	Equivalência dos geradores funcionais	84
B.1.1	Obtendo a ação de Maxwell-Chern-Simons	84
B.1.2	Obtendo a ação Auto-Dual	85
B.1.3	Comparando os geradores funcionais	86
B.2	Alguns comentários	88
C	Cálculos em dois laços no modelo de SUSY Chern-Simons	89
C.1	Integrais úteis	89
C.2	Contribuições em dois laços à equação de tadpole	90
Referências Bibliográficas		93

Introdução

Muitos dos progressos obtidos na física de partículas e campos se deve ao estudo das simetrias que a natureza possui. Devemos lembrar que muitas grandezas conservadas dependem da lagrangiana possuir uma certa simetria. Em nível clássico, simetrias globais dão conta de muitas regularidades que observamos na natureza, enquanto simetrias locais (calibre) explicam e unificam as interações dos constituintes básicos da matéria.

Uma simetria interessante para unificar bósons e férmions, constituintes e forças, numa só entidade, é a chamada *Supersimetria*. Aparentemente, a primeira menção a supersimetria foi feita por Myazawa [1], que descobriu o supergrupo $SU(M/N)$ em 1966. Sua motivação foi tentar encontrar um “grupo mestre” que combinaria grupos de simetria internos com grupos de simetria não-compactos do espaço-tempo de uma maneira não trivial. De fato, supergrupos são o único jeito conhecido de evitar o teorema de Coleman-Mandula [2], que proíbe uniões ingênuas de grupos compactos e não-compactos. Porém, esses trabalhos foram ignorados pela comunidade científica.

A supersimetria foi redescoberta em 1971 a partir de duas abordagens completamente diferentes. Na primeira, foi observado que na supercorda de Neveu-Schwarz-Ramond [3] uma nova simetria de calibre anti-comutante emergia. A partir daí, foi escrita a primeira ação supersimétrica, a ação bidimensional de supercordas [4]. A segunda abordagem foi através do trabalho de Gol’fand e Likhtman [5], que encontraram uma generalização da álgebra usual do espaço-tempo, a álgebra de super Poincaré. É atribuída a Wess e Zumino [6] a primeira ação supersimétrica escrita como uma teoria de campo no espaço-tempo quadridimensional.

A partir de então, muitos modelos supersimétricos têm sido estudados, e supersimetria passou de ferramenta matemática para proposta física de solução para problemas encontrados em teorias de grande unificação (GUT), como o problema da hierarquia, que nada mais é do que a mistura de escalas de energia muito distintas, GUT e escala eletrofraca, através de correções radiativas. Supersimetria aparece como uma solução do problema da

$$\begin{aligned}
& \text{Diagram (a): } \text{H} \text{---} \text{H} \text{ (dashed line with a loop labeled } \lambda^2 \text{)} + \text{H} \text{---} \text{H} \text{ (dashed line with a fermion loop labeled } f \text{ and } h_f \text{)} \sim (n_h \lambda^2 - n_f h_f^2) \Lambda^2 \\
& \text{(a)} \\
& \text{Diagram (b): } \text{H} \text{---} \text{H} \text{ (dashed line with a loop labeled } h_f^2 \text{)} + \text{H} \text{---} \text{H} \text{ (dashed line with a fermion loop labeled } f \text{ and } h_f \text{)} \sim h_f^2 [2 \Lambda^2 - 2 m_s^2 \ln(\Lambda^2/m_s^2) \\
& \quad - 2 \Lambda^2 + 3 m_f^2 \ln(\Lambda^2/m_f^2)] \\
& \text{(b)}
\end{aligned}$$

Figura 1: Correções radiativas em um laço à massa do campo de Higgs devido a auto-interação e interação com os férmions. Note que no modelo padrão, (a), a correção é proporcional ao quadrado do *cut-off* ultravioleta Λ da teoria, fazendo com que ΔM_H^2 seja muito grande. Numa extensão supersimétrica do modelo padrão, (b), as constantes de acoplamento entre bósons e férmions são iguais, havendo um cancelamento de divergências mais altas, fazendo com que a correção ΔM_H^2 seja no máximo dependente do logaritmo de Λ .

hierarquia devido ao cancelamento de divergências ultravioletas (UV) mais altas, pois trata campos bosônicos e fermiônicos em pé de igualdade, como mostra a Figura 1.

Se a supersimetria fosse uma simetria exata na natureza, então, deveríamos observar os parceiros supersimétricos das partículas elementares conhecidas, e.g., o elétron possuiria seu parceiro supersimétrico, o *seletron*, ou ainda o fóton possuiria o *fotino*, etc.. O fato de não observarmos estas superpartículas, indica que a supersimetria deve ser quebrada espontaneamente¹ [7]. Porém, devido a teoremas de não-renormalização, quebra espontânea de supersimetria está descartada para uma grande classe de modelos [7], além de que férmions de Goldstone (*goldstinos*²) aparecem em teorias com supersimetria quebrada espontaneamente [8]. Por algum tempo, acreditou-se que esses *goldstinos* pudessem ser na realidade os neutrinos, mas hoje, esta hipótese está descartada devido a evidência (oscilações de neutrinos) de que os neutrinos possuem massa, e não há até o momento evidência

¹Entende-se por quebra espontânea de simetria a quebra que acontece já na ação clássica que descreve o modelo, ou seja, a nível de árvore. Em contraste a quebra dinâmica de simetria, acontece devido a correções radiativas (quânticas) ao potencial clássico.

²Os férmions de Goldstone, ou *goldstinos*, são férmions sem massa que aparecem devido a quebra espontânea de supersimetria global.

experimental de sua existência. É portanto essencial entender sob quais condições a supersimetria pode ser quebrada, mas são os dados experimentais que vão nos contar por qual mecanismo isso deve acontecer.

A presença de divergências é certamente uma das principais características da teoria quântica de campos. Uma maneira de tratarmos essas divergências é através do uso de métodos de renormalização, ou procurar teorias de campos finitas. A esperança de encontrar tais teorias está fortemente relacionada com supersimetria, que como é bem conhecido melhora o comportamento UV das teorias por conta de um cancelamento de contribuições bosônicas e fermiônicas. Alguns exemplos notáveis deste tipo de teoria são encontradas em teorias supersimétricas extendidas tais como $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills [9] e alguns modelos $\mathcal{N} = 2$ superconformes (veja e.g. [10]). A discussão da existência de teorias de campos não-comutativas finitas pode ser encontrada em [11].

Modelos tridimensionais exibem um melhor comportamento UV, e portanto são candidatos naturais a serem finitos. Por exemplo, a teoria (não-supersimétrica) pura de Yang-Mills em $D = 2 + 1$ foi mostrada ser finita [12]. Outro exemplo é o modelo super-renormalizável de Yang-Mills-Chern-Simons supersimétrico [13], que foi também mostrado ser finito. Quando minimamente acoplado com matéria, teorias de calibre supersimétricas em $D = 2 + 1$ são ainda super-renormalizáveis, com divergências superficiais aparecendo até a ordem de dois laços. Em [14], os modelos abeliano e não-abeliano não-comutativos foram mostrados serem finitos em um laço. O problema natural é estudar correções radiativas nessas teorias na aproximação de dois laços, que nos permitirá estabelecer ou não a finitude de tais modelos. Assim, um dos nossos objetivos nesta tese é mostrar a finitude em todas as ordens de perturbação da eletrodinâmica quântica supersimétrica em $D = 2 + 1$ dimensões do espaço-tempo (SQED₃), ao menos num calibre especial, por cálculos diretos das funções de Green relevantes.

Nos últimos trinta anos o estudo de teorias quântica de campos em $D = 2 + 1$ dimensões do espaço-tempo tem revelado resultados importantes e interessantes. Tais teorias de campo têm sido utilizadas para descrever a física da matéria condensada de sistemas planares, como o efeito Hall quântico. Também têm sido utilizadas como laboratório teórico para a modelagem de fenômenos que surgem no mundo quadridimensional como a quebra dinâmica de simetria quiral, além, de exibirem propriedades e comportamento, às vezes, muito peculiares. Para teorias de calibre, em particular, é permitido que se tenha termos de massa invariantes de calibre da forma de Chern-Simons, que podem estar relacionados com os fenômenos de estatística fracionária e o efeito Hall quântico [15]. Numa teoria

não-abeliana, a invariância da ação sob transformações de calibre requer que o coeficiente do termo de Chern-Simons seja quantizado [16], um aspecto que pode ser explicitamente verificado utilizando teoria de perturbação [17, 18].

Uma possibilidade interessante que foi considerada na literatura é o acoplamento do termo de Chern-Simons com um campo escalar, permitindo assim o estudo da quebra espontânea de sua simetria de calibre. Foi verificado que o termo de Chern-Simons surge da quebra de simetria de calibre para um modelo onde o campo escalar está acoplado com o campo de calibre de Maxwell de uma forma não-minimal [19]. Foi também verificado que um termo de Maxwell é gerado quando começamos com um termo puramente topológico de Chern-Simons [20]. Ainda na lagrangiana clássica do modelo Chern-Simons acoplado ao campo escalar na fase espontaneamente quebrada, obtêm-se para a parte quadrática do campo de calibre o modelo Auto-Dual, que é equivalente ao modelo de Maxwell-Chern-Simons [21, 22], cuja equivalência permanece válida para extensões supersimétricas do modelo (veja Apêndice B). A quantização do coeficiente de Chern-Simons para teorias não-abelianas na fase quebrada é ainda verificada se a simetria resultante após a quebra é ainda não-abeliana [23, 24]. A verificação da quantização do coeficiente de Chern-Simons no caso abeliano ou onde a simetria não-abeliana é completamente quebrada, parece ser mais complicada [25, 26, 27, 28].

Para um modelo cujo campo escalar interage através de uma auto-interação sêxtupla, além, obviamente, da interação com o campo de calibre via acoplamento mínimo, a simetria de calibre é quebrada dinamicamente somente após correções em dois laços para o potencial efetivo [29], diferentemente do modelo quadridimensional cuja quebra dinâmica aparece já em um laço [30]. Também, para uma forma específica do potencial sêxtuplo, o modelo de Chern-Simons-Higgs (CSH) possui soluções que satisfazem uma equação de Bogomol'nyi [31, 32]. A forma exata deste potencial pode ser obtida impondo uma condição de auto-dualidade sobre o campo de matéria [33] ou pela extensão do campo de CSH para obter uma teoria supersimétrica com $\mathcal{N} = 2$ [34].

Nossa outra proposta é investigar algumas propriedades perturbativas do modelo supersimétrico de Chern-Simons (SCS) com $\mathcal{N} = 1$ em $2 + 1$ dimensões do espaço-tempo acoplado a um supercampo escalar complexo. Vamos investigar a renormalizabilidade do modelo na fase onde a simetria de calibre é espontaneamente quebrada [57], e mostrar em dois laços, como no modelo não-supersimétrico [29], a simetria de calibre é dinamicamente quebrada nesta ordem de aproximação. Usamos principalmente o formalismo de supercampo, que preserva explicitamente a estrutura supersimétrica do modelo.

A tese está organizada da seguinte maneira: no capítulo 1 discutimos supersimetria e introduzimos o formalismo de supercampos num espaço-tempo tridimensional ($D = 2 + 1$). Ainda no capítulo 1, na seção 1.4, resolvemos como exemplo de cálculos perturbativos em um laço, as funções de dois e quatro pontos no modelo de Wess-Zumino, e na seção 1.5, foi discutida a função de dois pontos e a idéia de propagador induzido no modelo $CP^{(N-1)}$ não-comutativo³ supersimétrico. No capítulo 2, mostramos que a eletrodinâmica quântica supersimétrica em $D = 2 + 1$ dimensões do espaço-tempo, é finita em todas as ordens de perturbação num calibre específico. No capítulo 3, discutimos a renormalizabilidade em um laço do modelo de Chern-Simons supersimétrico, na fase em que sua simetria de calibre é quebrada espontaneamente. Também no capítulo 3, seção 3.3, mostramos que o modelo de Chern-Simons supersimétrico exibe geração dinâmica de massa devido a uma quebra de simetria de calibre, que ocorre após correções perturbativas em dois laços de aproximação ao potencial efetivo. No apêndice A apresentamos uma breve introdução a teorias quântica de campos formuladas num espaço-tempo não-comutativo. No apêndice B discutimos alguns resultados sobre a equivalência entre os modelos de Maxwell-Chern-Simons e Auto-Dual supersimétricos, um trabalho que está atualmente em progresso. No apêndice C é calculada a equação de *tadpole* do modelo de Chern-Simons (capítulo 3) em dois laços de aproximação. Finalmente, nas Conclusões e perspectivas, discutimos os resultados obtidos e apresentamos algumas propostas de continuidade do presente trabalho.

³Veja Apêndice A.

Capítulo 1

Supersimetria em $2 + 1$ dimensões do espaço-tempo

Muitos dos progressos obtidos na física de partículas e campos se deve ao estudo das simetrias que a natureza possui. Devemos lembrar que muitas grandezas conservadas dependem da lagrangiana possuir uma certa simetria. Em nível clássico, simetrias globais dão conta de muitas regularidades que observamos na natureza, enquanto simetrias locais (calibre) “explicam” e unificam as interações dos constituintes básicos da matéria. Uma simetria interessante proposta para unificar bósons e férmions, constituintes e forças, numa só entidade, é a chamada *Supersimetria*. Neste capítulo vamos apresentar uma introdução à Supersimetria em três dimensões do espaço-tempo.

1.1 Notações e convenções

Nesta seção, como em todo resto do capítulo, usamos as notações e convenções utilizadas em [35], cujo primeiro capítulo trata o assunto de supersimetria em $2 + 1$ dimensões do espaço-tempo. Porém, boas referências para primeira leitura de supersimetria em $D = 2 + 1$ estão em [36], e em $D = 3 + 1$ estão nos livros das referências [37, 38].

1.1.1 Convenções de índices

No espaço-tempo tridimensional ($D = 1 + 2$, com assinatura $-++$) o grupo de Lorentz é $SL(2, R)$ e a correspondente representação fundamental age sobre um espinor de duas componentes real (Majorana) $\psi^\alpha = (\psi^+, \psi^-)$. Em geral, usamos notação espinorial para todas

representações de Lorentz, denotando espinores por índices gregos, onde cada componente de um espinor satisfaz

$$\{\psi_\alpha, \psi_\beta\} \equiv \psi_\alpha \psi_\beta + \psi_\beta \psi_\alpha = 0 , \quad (1.1)$$

com $\alpha, \beta = +, -$. Em particular esta relação implica em $\psi_+^2 = \psi_-^2 = 0$.

Assim, um vetor será representado por um espinor de posto 2 simétrico $V^{\alpha\beta}$ ou um espinor de posto 2 de traço nulo V^α_β . Todos os espinores são anticomutantes (variáveis de Grassman). Os vetores são representados através de bi-espinores da seguinte forma:

$$V^{\alpha\beta} = (\gamma^M)^{\alpha\beta} V_M , \quad (1.2)$$

onde índices latinos com letras maiúsculas representam as coordenadas do espaço-tempo variando de 0 até 2, e as matrizes de Dirac com índices contravariantes são dadas por

$$(\gamma^0)^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (\gamma^1)^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (\gamma^2)^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

fazendo com que qualquer vetor $V^{\alpha\beta}$ seja

$$V^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} V^0 + V^1 & V^2 \\ V^2 & V^0 - V^1 \end{pmatrix} .$$

Índices espinoriais são “levantados” e “abaixados” pelo símbolo antissimétrico $C_{\alpha\beta}$,

$$C_{\alpha\beta} = -C_{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -C^{\alpha\beta} , \quad (1.3)$$

onde o produto de duas matrizes C satisfaz

$$C_{\alpha\beta} C^{\gamma\delta} = \delta_\alpha^\gamma \delta_\beta^\delta - \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\delta ; \quad (1.4)$$

que é também usado para definir o “quadrado” de um espinor,

$$\psi_\alpha = \psi^\beta C_{\beta\alpha} , \quad \psi^\alpha = C^{\alpha\beta} \psi_\beta , \quad \psi^2 = \frac{1}{2} \psi^\alpha \psi_\alpha . \quad (1.5)$$

O quadrado de um bi-espinor segue também a mesma regra, sendo definido por

$$V^2 = \frac{1}{2} V^{\alpha\beta} V_{\alpha\beta} . \quad (1.6)$$

O uso de $C_{\alpha\beta}$ em vez do símbolo real $\epsilon_{\alpha\beta}$ simplifica as regras de conjugação hermiteana. Em particular $C_{\alpha\beta}$ faz ψ^2 hermiteano. Note que enquanto ψ^α é real, ψ_α é imaginário.

A partir da Eq.(1.4) é fácil verificar que a matriz identidade $\mathbf{I}$ é dada por $C_\beta^\alpha = -C^\alpha_\beta \equiv \delta_\beta^\alpha$.

1.1.2 Superespaço

O superespaço para supersimetria simples ($\mathcal{N} = 1$) é composto por três coordenadas espaço-temporais $x^{\alpha\beta}$ e duas coordenadas espinoriais anticomutantes θ^α , denotado por $z^5 = (x^{\alpha\beta}, \theta^\alpha)$, e tem as propriedades de hermiticidade $(z^5)^\dagger = z^5$. Definimos derivadas como sendo

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \theta^\beta &= \delta_\alpha^\beta , \\ \partial_{\alpha\beta} x^{\sigma\tau} &= (\delta_\alpha^\sigma \delta_\beta^\tau + \delta_\alpha^\tau \delta_\beta^\sigma) . \end{aligned} \quad (1.7)$$

Com isso a divergência $1/2 \partial^{\alpha\beta} x_{\alpha\beta}$ é 3.

A integração sobre uma única variável de Grassmann η é definida tal que a integral seja invariante por translação, assim

$$\int d\eta \, 1 = 0 , \quad \int d\eta \, \eta \equiv 1 . \quad (1.8)$$

Observamos que uma função $f(\eta)$ tem uma expansão em série de Taylor com o número de termos finito, ou seja,

$$f(\eta) = f(0) + \eta f'(0) , \quad (1.9)$$

uma vez que $\eta^2 = 0$.

A propriedade dada na Eq.(1.9) faz com que a operação de integração seja equivalente a derivação,

$$\int d\eta \, f(\eta) = f'(0) . \quad (1.10)$$

Para a nossa coordenada espinorial vale

$$\int d\theta_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta , \quad (1.11)$$

e a integral dupla é definida como:

$$\int d^2\theta \theta^2 = -1 . \quad (1.12)$$

Como a integral dupla de θ^2 é -1 , podemos a partir desta propriedade definir a função- δ como

$$\delta^{(2)}(\theta) = -\theta^2 = -\frac{1}{2}\theta^\alpha\theta_\alpha . \quad (1.13)$$

1.2 Supersimetria e supercampos

Definimos funções $\Phi \dots (x, \theta)$ sobre o superespaço (onde os pontos significam algum índice interno de simetria) que transformam de maneira usual sob o grupo de Poincaré com geradores de translações ($P_{\mu\nu}$) e transformações de Lorentz ($M_{\alpha\beta}$). Construimos a super álgebra de Poincaré introduzindo um gerador espinorial adicional de supersimetria Q_α , que satisfaz

$$\begin{aligned} [Q_\alpha, M_{\beta\sigma}] &= 0 , \\ \{Q_\mu, Q_\nu\} &= 2P_{\mu\nu} , \\ [Q_\mu, P_{\beta\sigma}] &= 0 . \end{aligned} \quad (1.14)$$

Esta álgebra é realizada sobre os supercampos $\Phi \dots (x, \theta)$ em termos de derivadas dadas por:

$$\begin{aligned} P_{\mu\nu} &= i\partial_{\mu\nu} , \\ Q_\mu &= i(\partial_\mu - i\theta^\nu\partial_{\nu\mu}) . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Uma transformação de supercoordenada é gerada através do operador $\xi^{\lambda\rho}P_{\lambda\rho} + \epsilon^\lambda Q_\lambda$,

$$\psi(x^{\mu\nu} + \xi^{\mu\nu} - \frac{i}{2}[\epsilon^\mu\theta^\nu + \epsilon^\nu\theta^\mu], \theta^\mu + \epsilon^\mu) = \exp\{-i(\xi^{\lambda\rho}P_{\lambda\rho} + \epsilon^\lambda Q_\lambda)\}\psi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu) , \quad (1.16)$$

ou seja, $\xi^{\lambda\rho}P_{\lambda\rho} + \epsilon^\lambda Q_\lambda$ gera a translação

$$\begin{aligned} x'^{\mu\nu} &= x^{\mu\nu} + \xi^{\mu\nu} - \frac{i}{2}[\epsilon^\mu\theta^\nu + \epsilon^\nu\theta^\mu] , \\ \theta'^\mu &= \theta^\mu + \epsilon^\mu , \end{aligned} \quad (1.17)$$

em que $\xi^{\lambda\rho}$ e ϵ^λ são parâmetros reais e constantes.

Note que uma translação no superspaço mistura “coordenadas bosônicas” ($x^{\mu\nu}$) com “coordenadas fermiônicas” (θ^μ). Podemos notar também que não somente Φ carrega uma representação de supersimetria (é um supercampo), mas derivadas espaço-temporais $\partial_{\mu\nu}\Phi$ são também supercampos. Entretanto, isto não é o caso da derivada espinorial $\partial_\mu\Phi$. Derivadas espinoriais supersimetricamente invariantes podem ser definidas por

$$D_\mu = \partial_\mu + \theta^\nu i\partial_{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

As derivadas covariantes¹ obedecem as seguintes relações de comutação (anticomutação):

$$\begin{aligned} \{D_\mu, D_\nu\} &= 2i\partial_{\mu\nu} , \\ [D_\mu, \partial_{\nu\alpha}] &= [\partial_{\mu\beta}, \partial_{\nu\alpha}] = 0 , \end{aligned} \quad (1.19)$$

e satisfazem as seguintes identidades

$$\begin{aligned} \partial^{\mu\nu}\partial_{\alpha\nu} &= \delta_\alpha{}^\mu \square , \\ D_\mu D_\nu &= i\partial_{\mu\nu} - C_{\mu\nu}D^2 , \\ D^\mu D_\nu D_\mu &= 0 \quad (D^2)^2 = \square , \\ D^2 D_\mu &= -D_\mu D^2 = i\partial_{\mu\nu}D^\nu . \end{aligned} \quad (1.20)$$

¹Aqui a denominação covariante está relacionada à invariância supersimétrica.

As derivadas também satisfazem a regra de Leibnitz e podem ser integradas por partes quando integradas em $d^3x d^2\theta$. A seguinte identidade é útil

$$\int d^3x d^2\theta \Phi(x, \theta) = \int d^3x \partial^2 \Phi(x, \theta) = \int d^3x D^2 \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0} . \quad (1.21)$$

1.2.1 Componentes por expansão e componentes por projeção

Supercampos podem ser expandidos numa série de Taylor (finita) em θ . Por exemplo,

$$\Phi(x, \theta) = A(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x) , \quad (1.22)$$

em que escolhemos um supercampo escalar, sem índices de Lorentz, por simplicidade.

A transformação de supersimetria pura ($\xi^{\mu\nu} = 0$, ϵ^μ infinitesimal)

$$\begin{aligned} \delta\Phi(x, \theta) &= i\epsilon^\mu Q_\mu \Phi(x, \theta) \\ &- \epsilon^\mu (\partial_\mu - i\theta^\nu \partial_{\mu\nu}) \Phi(x, \theta) \\ &\equiv \delta A(x) + \theta^\alpha \delta\psi_\alpha(x) - \theta^2 \delta F(x) , \end{aligned} \quad (1.23)$$

nos dá, quando igualamos as potências de θ ,

$$\begin{aligned} \delta A(x) &= -\epsilon^\alpha \psi_\alpha(x) , \\ \delta\psi_\alpha(x) &= -\epsilon^\beta [C_{\alpha\beta} F(x) + i\partial_{\alpha\beta} A(x)] , \\ \delta F(x) &= -\epsilon^\alpha i\partial_\alpha{}^\beta \psi_\beta(x) , \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde é importante notar que uma transformação de supersimetria relaciona um campo bosônico com um campo fermiônico e vice-versa.

De acordo com a álgebra supersimétrica, o comutador de duas transformações sucessivas de supersimetria é uma translação. Vejamos:

$$\begin{aligned} \delta' \delta A(x) &= -\epsilon^\alpha \delta' \psi_\alpha(x) , \\ &= +\epsilon^\alpha \epsilon'^\beta [C_{\alpha\beta} F(x) + i\partial_{\alpha\beta} A(x)] . \end{aligned} \quad (1.25)$$

Assim,

$$\begin{aligned} [\delta(\epsilon'), \delta(\epsilon)]A(x) &= 2i\epsilon^\alpha \epsilon'^\beta \partial_{\alpha\beta} A(x) \\ &= -2\epsilon^\alpha \epsilon'^\beta P_{\alpha\beta} A(x) . \end{aligned} \quad (1.26)$$

As outras propriedades das transformações de supersimetria podem ser verificadas facilmente.

A construção de integrais invariantes é facilitada pela observação que transformações de supersimetria são transformações de coordenadas no superespaço. Por isso, podemos ignorar derivadas totais em θ , pois $(\partial)^3 = 0$, e em derivadas espaço-temporais, portanto qualquer integral no superespaço

$$S = \int d^3x d^2\theta f(\Phi, D_\alpha \Phi, \dots) \quad (1.27)$$

que não dependa explicitamente das coordenadas é invariante sobre toda a álgebra.

Em geral, obter a expressão em componentes pela expansão direta em θ pode ser um pouco trabalhoso, um procedimento mais eficiente é observar que as componentes na Eq.(1.22) podem ser definidas pela *projeção*:

$$\begin{aligned} A(x) &= \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0} , \\ \psi_\alpha(x) &= D_\alpha \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0} , \\ F(x) &= D^2 \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0} . \end{aligned} \quad (1.28)$$

Isto pode ser usado, por exemplo, na Eq.(1.27) obtendo a ação em termos das componentes Eq.(1.22).

Num referencial apropriado, podemos falar sobre “helicidade”, isto é, os autovalores dos geradores $SO(2)$, $\pm 1/2$ para os índices espinoriais. A representação irredutível será chamada “superhelicidade”. Expandindo um supercampo de superhelicidade h em componentes, vemos que as componentes tem helicidades $h, h \pm 1/2, h$. No caso de um multipletto escalar consistindo de “spins” 0 e $1/2$ (helicidades 0, $\pm 1/2$), é descrito por um supercampo de superhelicidade 0. Num supercampo A_α que possui superhelicidade $1/2$, o multipletto vetorial possui componentes com helicidades 0, $\pm 1/2$ e 1.

1.2.2 Multipleteo escalar

A mais simples representação de supersimetria é o multipleteo escalar descrito por um supercampo real $\Phi(x, \theta)$, contendo os campos escalares $A(x)$ e $F(x)$, e o espinor de duas componentes ψ_α . Por razões de dimensões canônicas dos supercampos, esperamos que a ação cinética (sem massa) para o multipleteo escalar real seja dada pela expressão

$$S_{kin} = -\frac{1}{2} \int d^3x \, d^2\theta \, \frac{1}{2} D^\alpha \Phi D_\alpha \Phi . \quad (1.29)$$

A expressão em componentes pode ser obtida pela integração em θ , com isso podemos verificar se a ação escrita na Eq.(1.29) reproduz a ação em termos dos campos “físicos”. Assim

$$\begin{aligned} S_{kin} &= \frac{1}{2} \int d^3x \, d^2\theta \, \Phi D^2 \Phi \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \, D^2 [\Phi D^2 \Phi] \Big|_{\theta=0} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \, [D^2 \Phi D^2 \Phi + D^\alpha \Phi D_\alpha D^2 \Phi + \Phi (D^2)^2 \Phi] \Big|_{\theta=0} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \, (F^2 + \psi^\alpha i \partial_\alpha{}^\beta \psi_\beta + A \square A) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \, (F^2 + \tilde{\psi} i \gamma^M \partial_M \psi + A \square A) , \end{aligned} \quad (1.30)$$

onde $\tilde{\psi}$ é o espinor transposto de ψ , e usamos as definições das componentes por projeção Eq.(1.28) do supercampo Φ . O campo auxiliar F pode ser eliminado usando sua equação de movimento, $F = 0$, e a ação ainda é invariante sob transformações bóson-férmion, porém não é invariante por transformações de supersimetria, ou seja, não é representação de uma álgebra supersimétrica, exceto na camada de massa. O comutador de duas transformações não dá uma translação a não ser que ψ_α satisfaça sua equação de movimento. Esse não fechamento da álgebra fora da camada de massa é típico de transformações em que o campo auxiliar é eliminado.

Termos de massa e interação podem ser adicionados à ação, por exemplo podemos adicionar um termo

$$S_I = \int d^3x \, d^2\theta \, \left[\frac{1}{2} m \Phi^2 + \frac{g}{6} \Phi^3 \right] , \quad (1.31)$$

cuja integração em θ nos leva à seguinte ação de interação:

$$S_I = \int d^3x \left[m(\psi^2 + AF) + g \left(A\psi^2 + \frac{1}{2}A^2F \right) \right] . \quad (1.32)$$

Assim, a ação total é

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int d^3x d^2\theta \left\{ \Phi(D^2 + m)\Phi + \frac{g}{3}\Phi^3 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ F^2 + \psi^\alpha i\partial_\alpha{}^\beta \psi_\beta + A\Box A + m(\psi^2 + AF) + g \left(A\psi^2 + \frac{1}{2}A^2F \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ F^2 + \tilde{\psi} i\gamma^M \partial_M \psi + A\Box A + m(\psi^2 + AF) + g \left(A\psi^2 + \frac{A^2F}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

O campo F pode ser eliminado usando sua equação de movimento, levando à termos usuais de massa e interações quárticas para o campo escalar A .

1.2.3 Multipleteo vetorial

Vamos nos restringir aqui a teoria de calibre abeliana. Considere um supercampo escalar complexo,

$$\Phi(x, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Phi_1(x, \theta) + i\Phi_2(x, \theta)] , \quad (1.34)$$

em que $\Phi_1(x, \theta)$ e $\Phi_2(x, \theta)$ são supercampos escalares reais, que transformam sob uma fase constante K da forma

$$\begin{aligned} \Phi &\longrightarrow \Phi' = e^{iK} \Phi , \\ \bar{\Phi} &\longrightarrow \bar{\Phi}' = \bar{\Phi} e^{-iK} . \end{aligned} \quad (1.35)$$

A lagrangiana livre $|D_\alpha \Phi|^2$ é invariante sob estas transformações.

Agora, se K for um supercampo real escalar dependente de x e θ ,

$$K(x, \theta) = \omega(x) + \theta^\alpha \zeta_\alpha(x) - \theta^2 \tau(x) , \quad (1.36)$$

a lagrangiana que fica invariante sob as transformações Eq.(1.35) é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \overline{\nabla^\alpha \Phi} \nabla_\alpha \Phi , \quad (1.37)$$

em que

$$\nabla_\alpha \Phi = (D_\alpha - iA_\alpha)\Phi , \quad (1.38)$$

onde o supercampo espinorial A_α se transforma da seguinte maneira

$$A_\alpha(x, \theta) \longrightarrow A'_\alpha(x, \theta) = A_\alpha(x, \theta) + D_\alpha K(x, \theta) . \quad (1.39)$$

A expansão de $A_\alpha(x, \theta)$ em série de Taylor em θ é dada por

$$A_\alpha(x, \theta) = \chi_\alpha(x) + \theta^\beta [C_{\alpha\beta}B(x) - iV_{\alpha\beta}(x)] - \theta^2 \lambda'_\alpha(x) , \quad (1.40)$$

a partir da qual podemos definir as seguintes componentes por projeção:

$$\begin{aligned} \chi_\alpha &= A_\alpha \Big|_{\theta=0} , \\ B &= \frac{1}{2} D^\alpha A_\alpha \Big|_{\theta=0} , \\ V_{\alpha\beta} &= -\frac{i}{2} (D_\alpha A_\beta + D_\beta A_\alpha) \Big|_{\theta=0} , \\ \lambda'_\alpha &= D^2 A_\beta \Big|_{\theta=0} . \end{aligned} \quad (1.41)$$

Podemos introduzir o supercampo

$$W_\alpha = \frac{1}{2} D^\beta D_\alpha A_\beta , \quad (1.42)$$

que satisfaz a identidade de Bianchi $D^\alpha W_\alpha = \frac{1}{2} D^\alpha D^\beta D_\alpha A_\beta = 0$ e é invariante sob a transformação de calibre Eq.(1.39). Sua decomposição em componentes é dada por

$$W_\alpha = \frac{1}{2} (i\partial_\alpha{}^\beta \chi_\beta + \lambda'_\alpha) + \theta^\beta f_{\beta\alpha} - \theta^2 \frac{1}{2} (i\partial_\alpha{}^\beta \lambda'_\beta + \square \chi_\alpha) , \quad (1.43)$$

em que $f_{\alpha\beta} = (\partial_{\alpha\lambda} V^\lambda_\beta + \partial_{\beta\lambda} V^\lambda_\alpha)$ é a forma espinorial do tensor intensidade de campo eletromagnético usual $F_{MN} = (\partial_M A_N - \partial_N A_M)$ ².

Podemos redefinir $\lambda'_\alpha \equiv (\lambda_\alpha - i\partial_\alpha{}^\beta \chi_\beta)$, obtendo assim as seguintes expansões em

²Lembrando que em nossa convenção M e N são índices que variam de 0 a 2 no espaço-tempo $(2+1)D$.

componentes:

$$\begin{aligned} W_\alpha &= \frac{1}{2}\lambda_\alpha + \theta^\beta f_{\beta\alpha} - \frac{i}{2}\theta^2 \partial_\alpha{}^\beta \lambda_\beta , \\ A_\alpha &= \chi_\alpha + \theta^\beta (C_{\alpha\beta}B - iV_{\alpha\beta}) - \theta^2 (\lambda_\alpha - i\partial_\alpha{}^\beta \chi_\beta) . \end{aligned} \quad (1.44)$$

Uma ação invariante de calibre construída a partir desse objeto pode ser escrita como

$$S = \int d^5z W^2 = \int d^5z \frac{1}{2} W^\alpha W_\alpha , \quad (1.45)$$

onde integrando em $d^2\theta$ obtemos

$$\begin{aligned} S &= \int d^3x D^2 W^2 = \int d^3x \left[W^\alpha D^2 W_\alpha - \frac{1}{2} (D^\alpha W^\beta)(D_\alpha W_\beta) \right] \Big|_{\theta=0} \\ &= \int d^3x \left[\lambda^\alpha i \partial_\alpha{}^\beta \lambda_\beta - \frac{1}{2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right] \\ &= \int d^3x \left[\tilde{\lambda} i \gamma^M \partial_M \lambda - \frac{1}{4} F^{MN} F_{MN} \right] , \end{aligned} \quad (1.46)$$

que nada mais é do que o termo de Maxwell e seu parceiro supersimétrico, um campo espinorial real de Majorana.

Podemos encontrar as transformações de calibre para as componentes de A^α a partir da Eq.(1.39) comparando potências de θ ; esse procedimento resulta em

$$\begin{aligned} \delta\chi_\alpha &= \zeta_\alpha , \\ \delta B &= \tau , \\ \delta V_{\alpha\beta} &= \partial_{\alpha\beta}\omega , \\ \delta\lambda_\alpha &= 0 . \end{aligned} \quad (1.47)$$

Note que χ^α e B sofrem deslocamentos arbitrários, e em particular podemos escolher uma transformação que elimine completamente esses campos da teoria, essa escolha é conhecida por *calibre de Wess-Zumino*. Esse calibre quebra a supersimetria explicitamente, porém revela o conteúdo físico do multiplete vetorial A^α .

Agora vamos estudar como o acoplamento do supercampo de calibre com a matéria se

desdobra em componentes. Poderíamos olhar para a ação

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{2} \int d^5 z \, \bar{\nabla}^\alpha \Phi \nabla_\alpha \Phi \\
&= -\frac{1}{2} \int d^3 x \, D^2 \, \overline{(D^\alpha - iA^\alpha) \Phi} (D_\alpha - iA_\alpha) \Phi \Big|_{\theta=0}, \tag{1.48}
\end{aligned}$$

e escrever a lagrangiana em termos das componentes definidas pela projeção. Porém, uma forma mais eficiente e com o mesmo conteúdo físico é trabalhar com componentes covariantes de Φ através da seguinte definição:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0}, \\
\psi_\alpha(x) &= \nabla_\alpha \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0}, \\
F(x) &= \nabla^2 \Phi(x, \theta) \Big|_{\theta=0}. \tag{1.49}
\end{aligned}$$

Assim, podemos também usar

$$\int d^3 x d^2 \theta \, f(x, \theta) = \int d^3 x D^2 \, f(x, \theta) \Big|_{\theta=0} = \int d^3 x \nabla^2 \, f(x, \theta) \Big|_{\theta=0} \tag{1.50}$$

quando agindo sobre um invariante $f(x, \theta)$, assim³

$$\begin{aligned}
S &= \int d^3 x \nabla^2 [\bar{\Phi} \nabla^2 \Phi] \Big|_{\theta=0} \\
&= \int d^3 x [\nabla^2 \bar{\Phi} \nabla^2 \Phi + \nabla^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\alpha \nabla^2 \Phi + \bar{\Phi} (\nabla^2)^2 \Phi] \Big|_{\theta=0} \\
&= \int d^3 x \left\{ \bar{F} F + \bar{\psi}^\alpha (i\partial_\alpha{}^\beta + V_\alpha{}^\beta) \psi_\beta + (i\bar{\psi}^\alpha \lambda_\alpha A + c.h.) \right. \\
&\quad \left. - (\partial^{\alpha\beta} + iV^{\alpha\beta}) \bar{A} (\partial_{\alpha\beta} - iV_{\alpha\beta}) A \right\} \\
&= \int d^3 x \, Tr \left\{ \bar{F} F + \bar{\psi} (i\not{\partial} + \not{V}) \psi + (i\bar{\psi} \lambda A + c.h.) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (\not{\partial} + i\not{V}) \bar{A} (\not{\partial} - i\not{V}) A \right\}, \tag{1.51}
\end{aligned}$$

³Em que um dado operador “slashed” $\not{\mathcal{O}}$ é uma contração de uma matriz gamma com um operador vetorial da forma usual $\not{\mathcal{O}} = \gamma^M \mathcal{O}_M$.

onde usamos as seguintes relações

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \nabla^2 &= i \nabla_\alpha{}^\beta \nabla_\beta + i W_\alpha , \\
\nabla^2 \nabla_\alpha &= -i \nabla_\alpha{}^\beta \nabla_\beta - 2i W_\alpha , \\
\nabla^2 &= \frac{1}{2} (\partial^{\alpha\beta} + i V^{\alpha\beta}) (\partial_{\alpha\beta} - i V_{\alpha\beta}) - i W^\alpha A_\alpha .
\end{aligned} \tag{1.52}$$

1.3 Quantização e regras de Feynman

Existem várias vantagens em derivar regras de Feynman para teorias supersimétricas usando o formalismo de supercampos (superespaço). Os vários campos encontrados “dentro” de um supercampo são facilmente manipuladas em bloco. Além disso, o cancelamento das divergências no formalismo de supercampos é feita naturalmente; além disso as regras usuais de integração funcional podem ser naturalmente generalizadas para tal formalismo.

Vamos considerar o gerador funcional para o supercampo escalar massivo Φ com uma interação arbitrária:

$$\begin{aligned}
Z(J) &= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ i \int d^5 z \left[\frac{1}{2} \Phi (D^2 + m) \Phi + f(\Phi) + J\Phi \right] \right\} \\
&= \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ i S_0(\Phi) + i S_I(\Phi) + i \int J\Phi \right\} \\
&= \exp \left\{ i S_I \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right) \right\} \int \mathcal{D}\Phi \exp \left\{ i \int \left[\frac{1}{2} \Phi (D^2 + m) \Phi + J\Phi \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Da maneira usual, completamos o quadrado e fazemos a integral gaussiana sobre Φ , obtendo

$$Z(J) = \exp \left\{ i S_I \left(\frac{\delta}{i\delta J} \right) \right\} \exp \left\{ -i \int d^5 z \frac{1}{2} J \frac{(D^2 - m)}{\square - m^2} J \right\} . \tag{1.54}$$

No espaço dos momenta, obtemos o seguinte propagador

$$\langle T \Phi(p, \theta_1) \Phi(-p, \theta_2) \rangle = -i \frac{(D^2 - m)}{p^2 + m^2} \delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2) . \tag{1.55}$$

Ao calcularmos um gráfico específico, teremos um produto de operadores D atuando

Figura 1.1: Correção à auto-energia do supercampo Φ numa teoria $g\Phi^3$.

em $\delta(\theta)$'s. Para tal função é útil observar as seguintes regras:

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}(\theta_n - \theta_m)\delta^{(2)}(\theta_n - \theta_m) &= 0, \\ \delta^{(2)}(\theta_n - \theta_m)D^\alpha\delta^{(2)}(\theta_n - \theta_m) &= 0, \\ \delta^{(2)}(\theta_n - \theta_m)D^2\delta^{(2)}(\theta_n - \theta_m) &= \delta^{(2)}(\theta_n - \theta_m).\end{aligned}\tag{1.56}$$

Como exemplo, vamos calcular a função de dois pontos num modelo com interação Φ^3 não massivo, para mostrarmos como deve ser a manipulação de D 's e $\delta(\theta)$'s. Um processo típico de correção à auto-energia, Fig(1.1), é dado por:

$$S_{\Phi\Phi} = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \Phi(-p, \theta_2) \Phi(p, \theta_1) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{D^2\delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)}{k^2} \frac{D^2\delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)}{(k+p)^2}.\tag{1.57}$$

Os termos que envolvem D 's atuando em δ 's podem ser manipulados por integração por partes da seguinte forma:

$$\begin{aligned}& D^2\delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)D^2\delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)\Phi(p, \theta_1) \\ &= \frac{1}{2}D_\alpha\delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)[D^\alpha D^2\delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)\Phi(p, \theta_1) + D^2\delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)D^\alpha\Phi(p, \theta_1)] \\ &= \delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)[(D^2)^2\delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2) + D^\alpha D^2\delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)D_\alpha + D^2\delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)D^2]\Phi(p, \theta_1),\end{aligned}\tag{1.58}$$

onde abandonamos os termos em derivadas total por estes estarem atuando dentro de uma integral em θ , e assim resultarem nulos.

Usando as relações conhecidas, $(D^2)^2 = -k^2$ e $D^\alpha D^2 = k^{\alpha\beta}D_\beta$, vemos que somente o último termos da Eq.(1.58) contribui para o gráfico. Assim,

$$S_{\Phi\Phi} = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \Phi(-p, \theta) D^2\Phi(p, \theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2(k+p)^2}.\tag{1.59}$$

O procedimento de manipulação dos operadores D 's por integração por partes é chamado

de D -álgebra.

1.4 Um exemplo simples : o modelo de Wess-Zumino

O modelo de Wess-Zumino é definido pela seguinte ação:

$$S = \int d^5z \left[\frac{1}{2} \Phi(z)(D^2 + m)\Phi(z) + \frac{g}{4!} \Phi^4(z) \right], \quad (1.60)$$

quando integrada em $d^2\theta$ revela a existência de um modelo que possui um campo escalar real $A(x)$ em interação com um férmion de Majorana $\psi^\alpha(x)$ e um campo auxiliar escalar real $F(x)$. O modelo é escrito em termos dessas componentes como sendo

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} A \square A + \frac{i}{2} \psi^\alpha \partial_\alpha{}^\beta \psi_\beta + \frac{F^2}{2} + m(AF + \psi^2) + \frac{g}{3!} F A^3 + \frac{g}{2} \psi^2 A^2 \right]. \quad (1.61)$$

Como já sabemos, o campo auxiliar F pode ser eliminado através de sua equação de movimento, $F = -mA - gA^3/3!$, resultando numa ação, que é invariante sob transformações de supersimetria na camada de massa, dada por

$$S = \int d^3x \left[\frac{1}{2} A(\square - m^2)A + \frac{1}{2} \psi^\alpha (i\partial_\alpha{}^\beta + C_\alpha{}^\beta m) \psi_\beta - \frac{g^2}{72} A^6 + \frac{g}{2} \psi^2 A^2 \right]. \quad (1.62)$$

A grande vantagem de se usar o formalismo de supercampos está nos cálculos perturbativos. Podemos notar que enquanto na Eq.(1.62) a ação de interação é composta por dois termos, um de auto-interação A^6 e outro tipo Yukawa, na Eq.(1.60) existe somente um vértice de auto-interação Φ^4 . Este formalismo permite uma grande diminuição do número de gráficos presentes num processo físico. É nesta vantagem que vamos nos apoiar agora, e como exemplo, calcular correções radiativas para a auto-energia de Φ e para o vértice Φ^4 em um laço. Os diagramas que contribuem para tais processos estão desenhados na Figura 1.2.

A correção radiativa em um laço para a auto-energia do supercampo Φ , Figura 1.2a, é dada por

$$S_{\Phi\Phi} = -i \frac{g}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \Phi(p, \theta) \Phi(-p, \theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(D^2 - m)}{k^2 + m^2} \delta^{(2)}(\theta - \theta') \Big|_{\theta'=\theta}, \quad (1.63)$$

onde a prescrição $|_{\theta'=\theta}$ é tomada após a D -álgebra ser efetuada. A partir da definição da

Figura 1.2: Correções radiativas à auto-energia do supercampo Φ e ao vértice $g\Phi^4$ na aproximação de um laço. Linhas cortadas representam campos externos, enquanto linhas contínuas representam propagadores de Φ .

função δ para variáveis de Grassmann, Eq.(1.13), é fácil ver que $\delta^{(2)}(\theta - \theta) = \delta^{(2)}(0) = 0$. Assim, a correção à auto-energia de Φ é somente uma correção da massa deste supercampo, que pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 S_{\Phi\Phi} &= -i\frac{g}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \Phi(p, \theta) \Phi(-p, \theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m^2} \\
 &= -\frac{g}{8\pi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta m \Phi(p, \theta) \Phi(-p, \theta) .
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

A correção em um laço ao vértice $g\Phi^4$, Figura 1.2b, é dada por

$$\begin{aligned}
 S_{\Phi^4} &= \frac{g^2}{4} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3} d^2\theta d^2\theta' (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
 &\quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(D^2 - m)}{(k^2 + m^2)} \delta^{(2)}(\theta - \theta') \frac{(D^2 - m)}{[(p_1 + p_2 - k)^2 + m^2]} \delta^{(2)}(\theta - \theta') \\
 &\quad \Phi(p_1, \theta) \Phi(p_2, \theta) \Phi(p_3, \theta') \Phi(p_4, \theta') .
 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Integrando por partes como na Eq.(1.58), obtemos

$$\begin{aligned}
 S_{\Phi^4} &= \frac{g^2}{4} \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3} d^2\theta d^2\theta' (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\
 &\quad \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \delta^{(2)}(\theta - \theta') \frac{D^2 \delta^{(2)}(\theta - \theta')}{(k^2 + m^2)[(p_1 + p_2 - k)^2 + m^2]} \\
 &\quad (D^2 + 2m) [\Phi(p_1, \theta) \Phi(p_2, \theta)] \Phi(p_3, \theta') \Phi(p_4, \theta') ,
 \end{aligned} \tag{1.66}$$

Figura 1.3: Um diagrama com quatro pernas externas do supercampo Φ é equivalente a seis diagramas com quatro pernas externas das componentes de Φ .

que resolvendo as derivadas e integrando em θ' resultam em

$$S_{\Phi^4} = \frac{g^2}{4} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3} d^2 \theta (2\pi)^3 \delta^{(3)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) f(p_1, p_2, m)(D^2 + 2m)[\Phi(p_1, \theta)\Phi(p_2, \theta)]\Phi(p_3, \theta)\Phi(p_4, \theta) , \quad (1.67)$$

onde

$$f(p_1, p_2, m) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + m^2)[(p_1 + p_2 - k)^2 + m^2]} . \quad (1.68)$$

A Eq.(1.67) representada por somente um diagrama no formalismo de supercampos, é equivalente a seis diagramas se calculados através da ação em componentes Eq.(1.61), como mostra a Figura 1.3.

A seguir, na seção que trata do modelo $CP^{(N-1)}$ supersimétrico, vamos mostrar um exemplo de cálculo de diagramas de Feynman envolvendo o supercampo espinorial de calibre acoplado com a matéria representada por um supercampo escalar complexo.

1.5 O modelo $CP^{(N-1)}$ não-comutativo

O modelo $CP^{(N-1)}$ em $2 + 1$ dimensões do espaço-tempo é estudado desde o fim da década de 1970, principalmente por ser um modelo escalar razoavelmente simples que possui invariância de calibre, e reproduz vários efeitos típicos de teorias de calibre num espaço-

tempo quadridimensional mais complicadas, como soluções de *instantons* e confinamento [39, 40]. O aspecto crucial de simplificação do modelo $CP^{(N-1)}$ é que o campo de calibre não é um campo dinâmico em nível clássico, sua dinâmica sendo inteiramente gerada por correções radiativas. A possibilidade de ser um bom laboratório para compreender aspectos importantes de teorias de calibre é a principal origem do interesse neste modelo.

Por outro lado, nos últimos anos a comunidade científica tem demonstrado um grande interesse em teorias quânticas de campos definidas num espaço-tempo não-comutativo (veja Apêndice A).

Nesta seção vamos apresentar o modelo SUSY $CP^{(N-1)}$ não-comutativo na representação fundamental [41] como outro exemplo de aplicação das técnicas de supercampo desenvolvidas até aqui.

O modelo $CP^{(N-1)}$ bosônico, num espaço-tempo comutativo, com o campo de matéria na representação fundamental, é definida pela ação [42]

$$S = \int d^3x \left\{ \overline{D^M \phi_a} D_M \phi_a + \sigma \left(\phi_a \bar{\phi}_a - \frac{N}{g_0} \right) \right\}, \quad (1.69)$$

onde ϕ_a é uma N-upla de campos escalares e σ é um multiplicador de Lagrange escalar que força o vínculo $\phi \bar{\phi} = N/g_0$. A derivada covariante é $D^M = \partial^M - iA^M$, A^M sendo um campo vetorial de calibre auxiliar, cuja equação de movimento clássica resulta no campo composto $A^M = i\phi \overleftrightarrow{\partial^M} \bar{\phi} / 2\phi \bar{\phi}$.

O modelo definido por Eq.(1.69) pode ser generalizado para um espaço-tempo não-comutativo onde as coordenadas satisfazem

$$[x^M, x^N] = i\Theta^{MN} \quad (1.70)$$

pela substituição do produto usual de funções na Eq.(1.69) pelo produto *-Moyal [43]. A estrutura de divergências deste modelo foi extensivamente discutida em [44, 45].

Aqui, vamos nos focar numa extensão SUSY não-comutativa do modelo Eq.(1.69) definida por

$$S = - \int d^5z \left\{ \frac{1}{2} \overline{\nabla^\alpha \Phi_a} * \nabla_\alpha \Phi_a + \Sigma * \left(\Phi_a * \bar{\Phi}_a - \frac{N}{g_0} \right) \right\}, \quad (1.71)$$

em que Φ_a é uma n-upla de supercampos escalares, Σ é um supercampo escalar multiplicador de Lagrange, e A_α é um supercampo espinorial auxiliar de calibre.

Vamos enfatizar que o produto $\ast$ -Moyal em (1.71) é definido por [46]

$$f(x, \theta) \ast g(x, \theta) = \exp \left(\frac{i}{2} \Theta^{MN} \frac{\partial}{\partial x^M} \frac{\partial}{\partial y^N} \right) f(x, \theta) g(y, \theta)|_{x=y}, \quad (1.72)$$

afetando somente coordenadas bosônicas x^M , que são não-comutativas, onde as coordenadas grassmanianas satisfazem a regra de anticomutação usual $\{\theta^a, \theta^b\} = 0$ ⁴. Para contornar possíveis problemas com unitariedade, vamos restringir a não-comutatividade às coordenadas bosônicas espaciais, considerando $\Theta^{0i} = 0$ [49] ⁵.

A ação escrita acima é invariante $U(N)$ global e invariante de calibre $U(1)$. As transformações de calibre infinitesimais são dadas por,

$$\begin{aligned} \Phi_a &\rightarrow \Phi'_a = (1 + iK) \ast \Phi_a, \\ \bar{\Phi}_a &\rightarrow \bar{\Phi}'_a = \bar{\Phi}_a \ast (1 - iK), \\ A_\alpha &\rightarrow A'_\alpha = A_\alpha + D_\alpha K + i[K, A_\alpha]_\ast, \\ \Sigma &\rightarrow \Sigma' = \Sigma + i[K, \Sigma]_\ast, \end{aligned} \quad (1.73)$$

onde K é um supercampo escalar real, definido como na Eq.(1.36). O ordenamento de Φ e $\bar{\Phi}$ escolhido na definição do termo de vínculo na Eq.(1.71) implica na necessidade de Σ ser um campo que se transforma por calibre, mas podemos observar que sua transformação desaparece ao tomarmos o limite comutativo $\Theta \rightarrow 0$, como era de se esperar.

Escrevendo os supercampos originais (não-renormalizados) em termos dos supercampos renormalizados, $\Phi = Z_1^{1/2} \bar{\Phi}_r$, $A^\alpha = Z_3 A_r^\alpha$, e $\Sigma = Z_2 \Sigma_r$, temos

$$\begin{aligned} S &= - \int d^5 z \left\{ \frac{Z_1}{2} D^\alpha \bar{\Phi}_{ra} D_\alpha \Phi_{ra} + Z_2 \Sigma \left(Z_1 \Phi_{ra} \bar{\Phi}_{ra} - \frac{N}{g_0} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i Z_1 Z_3}{2} \left(D_\alpha \bar{\Phi}_{ra} A_{r\alpha} \Phi_{ra} + \bar{\Phi}_{ra} A_{ra} D^\alpha \Phi_{ra} \right) + \frac{1}{2} Z_1 Z_3^2 \bar{\Phi}_{ra} A_r^2 \Phi_{ra} \right\}. \end{aligned} \quad (1.74)$$

Nesta equação e daqui por diante, não explicitaremos o produto $\ast$ -Moyal, que deve ser subentendido quando há multiplicação de campos no espaço de configuração. Contra-

⁴Note que uma extensão de não-comutatividade para coordenadas grassmanianas em quatro dimensões do espaço-tempo pode ser definida [47]. Recentemente, essa idéia foi também estendida para um espaço-tempo tridimensional [48]

⁵É interessante lembrar que violação de unitariedade é um aspecto peculiar de nossa abordagem para teorias não-comutativas (veja Apêndice A.5).

termos de função de onda e constantes de acoplamento são definidos por

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 1 + \delta_\Phi , \\
Z_1 Z_3 &= (1 + \delta_\Phi)(1 + \delta_A) = 1 + \delta_e , \\
Z_1 Z_3^2 &= (1 + \delta_\Phi)(1 + \delta_A)^2 = 1 + \delta_b , \\
Z_1 Z_2 &= (1 + \delta_\Phi)(1 + \delta_\Sigma) = 1 + \delta_c , \\
Z_2/g_o &= \mu/g + \delta_g ,
\end{aligned} \tag{1.75}$$

onde μ é um parâmetro arbitrário com dimensão de massa e g é a constante de acoplamento adimensional renormalizada. Substituindo essas expressões na Eq.(1.74) temos

$$\begin{aligned}
S &= - \int d^5 z \left\{ \frac{1}{2} D^\alpha \bar{\Phi}_a D_\alpha \Phi_a + \Sigma \left(\Phi_a \bar{\Phi}_a - \frac{N\mu}{g} \right) \right. \\
&+ \frac{\delta_\Phi}{2} D^\alpha \bar{\Phi}_a D_\alpha \Phi_a - i \frac{\delta_e}{2} (D^\alpha \bar{\Phi}_a A_\alpha \Phi_a + \bar{\Phi}_a A_\alpha D^\alpha \Phi_a) \\
&+ \left. \frac{\delta_b}{2} \bar{\Phi}_a A^\alpha A_\alpha \Phi_a - N \delta_g \Sigma + \delta_c \Sigma \Phi_a \bar{\Phi}_a \right\} ,
\end{aligned} \tag{1.76}$$

onde omitimos o sub-índice r (como faremos daqui por diante) que indica os campos renormalizados.

Para estudar a estrutura de fase do modelo vamos supor que os supercampos Σ e Φ adquirem valores esperados no vácuo constantes não-nulos (VEVs) $\langle \Sigma_a(x, \theta) \rangle = m$ e $\langle \Phi(x, \theta) \rangle = \sqrt{N}v$, onde por simplicidade, tomamos o valor não nulo na N -ésima componente. Esses VEVs farão o papel de parâmetros de ordem identificando as diferentes fases do modelo. Pela redefinição dos campos em termos dos novos campos com VEVs nulos,

$$\begin{aligned}
\Phi_a(x, \theta) &\longrightarrow \Phi_a(x, \theta) , \quad a = 1, \dots, N-1, \\
\Phi_N(x, \theta) &\longrightarrow \Phi_N(x, \theta) + v\sqrt{N} , \\
\bar{\Phi}_N(x, \theta) &\longrightarrow \bar{\Phi}_N(x, \theta) + \bar{v}\sqrt{N} , \\
\Sigma(x, \theta) &\longrightarrow \Sigma(x, \theta) + m , \\
A_\alpha(x, \theta) &\longrightarrow A_\alpha(x, \theta) ,
\end{aligned} \tag{1.77}$$

a ação Eq.(1.76) é escrita como

$$\begin{aligned}
S = & \int d^5z \left\{ \bar{\Phi}_a(D^2 - m)\Phi_a - \Sigma(\Phi_a\bar{\Phi}_a - \frac{N\mu}{g} + Nv\bar{v}) - \frac{1}{2}\bar{\Phi}_a A^\alpha A_\alpha \Phi_a \right. \\
& + \frac{i}{2} [D^\alpha \bar{\Phi}_a A_\alpha \Phi_a + \bar{\Phi}_a A_\alpha D^\alpha \Phi_a + v\sqrt{N}D^\alpha \bar{\Phi}_n A_\alpha - \bar{v}\sqrt{N}A^\alpha D_\alpha \Phi_n] \\
& - \frac{\sqrt{N}}{2}\bar{v}A^\alpha A_\alpha \Phi_n + \frac{\sqrt{N}}{2}v\bar{\Phi}_n A^\alpha A_\alpha + \frac{N}{2}\bar{v}vA^\alpha A_\alpha - m\sqrt{N}(v\bar{\Phi}_n + \bar{v}\Phi_n) \\
& \left. - \Sigma\Phi_n\bar{v}\sqrt{N} + \Sigma\bar{\Phi}_n v\sqrt{N} \right\} + S_{CT},
\end{aligned} \tag{1.78}$$

onde S_{CT} é a ação de contra-termos. O propagador para as primeiras $(N-1)$ componentes de Φ_a é dado por

$$\langle T \Phi_a(p, \theta_1) \bar{\Phi}_b(-p, \theta_2) \rangle = -i\delta_{ab} \left(\frac{D^2 + m}{p^2 + m^2} \right) \delta_{12}, \tag{1.79}$$

onde $\delta_{12} \equiv \delta^2(\theta_1 - \theta_2)$. Os vértices de interação da teoria são

$$\begin{aligned}
\Sigma\Phi\bar{\Phi} & \longrightarrow -ie^{-ik_2 \wedge k_3} \Sigma(1)\Phi(2)\bar{\Phi}(3), \\
\bar{\Phi}A^\alpha D_\alpha \Phi + \dots & \longrightarrow \frac{1}{2}e^{-ik_2 \wedge k_3} A^\alpha(1) D_\alpha [\Phi(2)\bar{\Phi}(3)], \\
\bar{\Phi}A^\alpha A_\alpha \Phi & \longrightarrow \frac{i}{2} \cos(k_1 \wedge k_2) e^{-ik_3 \wedge k_4} A^\alpha(1) A_\alpha(2)\Phi(3)\bar{\Phi}(4),
\end{aligned} \tag{1.80}$$

onde $k \wedge p \equiv \frac{1}{2}k_M \Theta^{MN} p_N$ representa o produto Moyal no espaço dos momenta, e $A^\alpha(1)$ denota $A^\alpha(k_1, \theta)$, e similarmente para os outros campos.

1.5.1 Ação em componentes

Vamos verificar como a ação do modelo SUSY $CP^{(N-1)}$ não-comutativo pode ser escrita em termos das componentes dos supercampos envolvidos. Seja

$$\begin{aligned}
\chi_\alpha(x) &= A_\alpha(\theta, x)|, \\
B(x) &= \frac{1}{2}D^\alpha A_\alpha(\theta, x)|, \\
V_{\alpha\beta}(x) &= -\frac{i}{2}(D_\alpha A_\beta + D_\beta A_\alpha)(\theta, x)|, \\
\lambda_\alpha(x) &= \frac{1}{2}D^\beta D_\alpha A_\beta(\theta, x)|,
\end{aligned} \tag{1.81}$$

as componentes do superpotencial espinorial de calibre A^α , e vamos definir as componentes de Φ e Σ através da seguinte forma covariante de calibre

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \Phi(x, \theta)|, \\ \psi_\alpha(x) &= \nabla_\alpha \Phi(x, \theta)|, \\ F(x) &= \nabla^2 \Phi(x, \theta)|,\end{aligned}\tag{1.82}$$

e

$$\begin{aligned}\kappa(x) &= \Sigma(x, \theta)|, \\ \zeta_\alpha(x) &= \nabla_\alpha \Sigma(x, \theta)|, \\ \sigma(x) &= \nabla^2 \Sigma(x, \theta)|,\end{aligned}\tag{1.83}$$

onde a instrução ($|$) significa tomar $\theta = 0$ após as derivadas terem sido feitas. Usando tais definições, a ação na Eq.(1.71) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}S &= \int d^3x \left\{ \bar{F}_a F_a + \bar{\psi}_a^\alpha (i\partial_\alpha^\beta + V_\alpha^\beta) \psi_{a\beta} + (i\bar{\psi}_a^\alpha \lambda_\alpha \phi_a + c.h.) \right. \\ &\quad + (\partial_{\alpha\beta} \bar{\phi}_a + i\bar{\phi}_a V_{\alpha\beta}) (\partial_{\alpha\beta} \phi_a - iV_{\alpha\beta} \phi_a) - \sigma \left(\phi_a \bar{\phi}_a - \frac{N}{g_0} \right) \\ &\quad \left. - \zeta^\alpha (\psi_{a\alpha} \bar{\phi}_a + \phi_a \bar{\psi}_{a\alpha}) - \kappa (F_a \bar{\phi}_a + \phi_a \bar{F}_a + \psi_a^\alpha \bar{\psi}_{a\alpha}) \right\}.\end{aligned}\tag{1.84}$$

Como comentamos anteriormente, o produto $*$ -Moyal está implícito no produto de campos. Os campos auxiliares F e $\bar{F}$ podem ser eliminados por meio de suas equações de movimento e, deste modo, Eq.(1.84) é reduzida para

$$\begin{aligned}S &= \int d^3x \left\{ \bar{\psi}_a^\alpha (i\partial_\alpha^\beta + V_\alpha^\beta) \psi_{a\beta} + (\partial_{\alpha\beta} \bar{\phi}_a + i\bar{\phi}_a V_{\alpha\beta}) (\partial_{\alpha\beta} \phi_a - iV_{\alpha\beta} \phi_a) \right. \\ &\quad \left. - \sigma \left(\phi_a \bar{\phi}_a - \frac{N}{g_0} \right) - \bar{\phi}_a (\zeta^\alpha + i\lambda^\alpha) \psi_{a\alpha} - \bar{\psi}_{a\alpha} (\zeta^\alpha - i\lambda^\alpha) \phi_a - \kappa^2 \phi_a \bar{\phi}_a - \kappa \psi_a^\alpha \bar{\psi}_{a\alpha} \right\}.\end{aligned}\tag{1.85}$$

Finalmente, escrevendo bi-espinores em termos dos usuais 3-vetores através da definição $V_{\alpha\beta} = (\gamma^M)_{\alpha\beta} A_M$ e $\partial_{\alpha\beta} = (\gamma^M)_{\alpha\beta} \partial_M$, obtemos

$$\begin{aligned}S &= \int d^3x \left\{ \bar{\phi}_a \square \phi_a - \sigma \left(\phi_a \bar{\phi}_a - \frac{N}{g_0} \right) - \frac{i}{2} \left(\bar{\phi}_a \overleftrightarrow{\partial}^M \phi_a \right) A_M + \frac{1}{2} \bar{\phi}_a A^2 \phi_a \right. \\ &\quad \left. + i\bar{\psi}_a \gamma^M (\partial_M - iA_M) \psi_a - \bar{\phi}_a (\zeta + i\lambda) \psi_a - \bar{\psi}_a (\zeta - i\lambda) \phi_a - \kappa^2 \phi_a \bar{\phi}_a - \kappa \psi_a \bar{\psi}_a \right\}.\end{aligned}\tag{1.86}$$

$$- \text{---} \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \text{---} + - \text{---} \text{---} \text{---} \bullet (\bar{v} v - \mu / g) = 0$$

Figura 1.4: Equação de gap para o supercampo Σ . Linhas sólidas representam propagadores de Φ_a . Linhas tracejadas cortadas representam o supercampo Σ .

Devemos salientar que a primeira linha da equação acima corresponde ao modelo bosônico Eq.(1.69), extendido para um espaço-tempo não-comutativo, mas agora nós temos graus de liberdade fermiônicos adicionais, necessários para supersimetria, e novos vínculos impostos pela combinação $\zeta + i\lambda$, e κ sendo um campo composto classicamente dado por $\kappa = -\psi_a \bar{\psi}_a / 2\phi_a \bar{\phi}_a$. A eliminação de κ na Eq.(1.86) nos leva a uma auto-interação de quatro férmions, típica da extensão supersimétrica do modelo $CP^{(N-1)}$ [50].

1.5.2 A equação de gap

A condição que em ordem dominante de $1/N$ os campos redefinidos Σ e Φ possuam VEVs nulos, implicam nas seguintes condições:

$$i \int_{\epsilon} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m^2} + \frac{\mu}{g} + \delta_g(\epsilon) - v\bar{v} = 0 ,$$

$$m\bar{v} = mv = 0 . \quad (1.87)$$

onde o ϵ no símbolo da integral e em δ_g representa um regulador ultravioleta (UV). A primeira equação de gap está graficamente representada na Figura(1.4). A dependência em Θ devido a não-comutatividade do espaço-tempo, manifestada através dos fatores de fase que aparecem nos vértices, desaparecem devido ao fato de que o *momentum* entrando no gráfico através da perna externa Σ é nulo. A integral na Eq.(1.87) pode ser calculada usando redução dimensional [51], levando ao resultado finito

$$i \int_{\epsilon} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m^2} = \frac{|m|}{4\pi} . \quad (1.88)$$

Como consequência o contra-termo δ_g se torna finito, levando a uma renormalização arbi-

trária finita da equação de gap,

$$\frac{|m|}{4\pi} + \frac{\mu}{g} + \delta_g - v\bar{v} = 0 ,$$

$$m\bar{v} = mv = 0 . \quad (1.89)$$

Uma escolha conveniente para o contra-termo é $\delta_g = -\mu/4\pi$, onde $\mu > 0$ é a mesma escala de massa introduzida na Eq.(1.75). Logo as soluções da primeira das Eqs(1.89) pode ser escrita como

$$g = \frac{\mu}{\bar{v}v + \frac{\mu-|m|}{4\pi}} . \quad (1.90)$$

Da segunda das Eqs(1.89) vemos que o modelo possui duas fases,

1. Uma fase quebrada $U(N)$ em que Φ_N possui um VEV $\langle \Phi_N \rangle = N^{1/2}v \neq 0$ e os campos Φ permanecem sem massa ($m = 0$). Isto acontece para

$$g = \frac{4\pi}{(1 + 4\pi\bar{v}v/\mu)} < 4\pi . \quad (1.91)$$

2. Uma fase simétrica em que Φ possui uma massa induzida $m \neq 0$ mas $\langle \Phi \rangle = 0$. Isto acontece para

$$g = \frac{4\pi}{1 - |m/\mu|} > 4\pi . \quad (1.92)$$

A partir da Eq.(1.92) podemos imediatamente calcular a função β na fase simétrica,

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{dg}{d\mu} = 4\pi \frac{|m/\mu|}{(1 - |m/\mu|)^2} = g \left(1 - \frac{g}{4\pi} \right) . \quad (1.93)$$

Como podemos ver, β vai a zero para $\mu \rightarrow \infty$, caracterizando um ponto fixo UV em $g = 4\pi$. Este resultado é o mesmo para o correspondente modelo comutativo [52]. A mesma análise para o comportamento da função β na fase quebrada leva à conclusões similares.

Vamos deixar claro que a escolha $\delta_g = -\mu/4\pi$ é conveniente, mas não essencial. Qualquer valor δ_g tal que $\delta_g < 0$ leva à mesma estrutura de fases, somente o valor crítico de g é que muda. Se $\delta_g > 0$, por outro lado, a fase simétrica não existe, enquanto para $\delta_g = 0$, o modelo não possui fase quebrada. Finalmente, poderíamos escolher outra regularização para calcular a integral divergente na Eq.(1.88); neste caso seria necessário que o contra-termo δ_g contivesse uma renormalização infinita para que a equação de gap Eq.(1.87) fosse

finita. Mesmo assim, não haveria mudanças nas considerações acima.

1.5.3 Propagadores efetivos em ordem dominante

Como estamos interessados em apresentar aqui um estudo da renormalização do modelo, e as duas fases possuem o mesmo comportamento UV [53], vamos trabalhar na fase simétrica. Nesta fase a ação é dada por

$$S = \int d^5z \left\{ \bar{\Phi}_a (D^2 - m) \Phi_a - \Sigma \left(\Phi_a \bar{\Phi}_a - \frac{N\mu}{g} \right) - \frac{1}{2} \bar{\Phi}_a A^\alpha A_\alpha \Phi_a + \frac{i}{2} [D^\alpha \bar{\Phi}_a A_\alpha \Phi_a + \bar{\Phi}_a A_\alpha D^\alpha \Phi_a] \right\} + S_{CT}, \quad (1.94)$$

onde g está relacionado com m e μ pela Eq.(1.92), e

$$S_{CT} = \int d^5z \left\{ \delta_\Phi \bar{\Phi}_a D^2 \Phi_a - m \delta_c \bar{\Phi}_a \Phi_a - i \frac{\delta_e}{2} (D^\alpha \bar{\Phi}_a A_\alpha \Phi_a + \bar{\Phi}_a A_\alpha D^\alpha \Phi_a) - \frac{\delta_b}{2} \bar{\Phi}_a A^\alpha A_\alpha \Phi_a + N \delta_g \Sigma - \delta_c \Sigma \Phi_a \bar{\Phi}_a \right\}. \quad (1.95)$$

A partir dessas equações, vemos que o propagador de Φ_N é também dado pela Eq.(1.79). Isto simplifica os cálculos perturbativos mostrados a seguir.

Ação efetiva de dois pontos do supercampo Σ

Como podemos observar da Eq.(1.94), classicamente o supercampo Σ é puramente um multiplicador de Lagrange, um supercampo sem dinâmica. Entretanto, em ordem dominante de $1/N$ ele adquire um termo cinético (não-local) se tornando um supercampo propagante. Nesta aproximação, a contribuição a ação efetiva de dois pontos de Σ (veja Figura (1.5)) devido as correções radiativas em um laço é dada por:

$$S_\Sigma = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \Sigma(-p, \theta) [N f(p)(D^2 + 2m)] \Sigma(p, \theta). \quad (1.96)$$

As fases não-comutativas presentes nos vértices cancelam entre si e o resultado é similar

Figura 1.5: Contribuição em ordem dominante de $1/N$ ao propagador efetivo do supercampo Σ .

$$\theta \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \bullet \text{---} \text{---} \theta' = -\delta^2(\theta - \theta')$$

Figura 1.6: Esta identidade, discutida em [42] no modelo $CP^{(N-1)}$ não-supersimétrico, assegura o cancelamento de várias divergências quando a teoria de perturbação é expandida para incluir gráficos *redutíveis* de uma partícula. Sem esta identidade, a prova da renormalizabilidade do modelo $CP^{(N-1)}$ em ordem mais altas se tornaria impraticável.

ao do caso comutativo. O caráter não-local desta ação está explicitada no fator $f(p)$,

$$\begin{aligned} f(p) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \\ &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{p^2}} \arctg\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2}{m^2}}\right) = \begin{cases} -1/8|p| & \text{para } p \rightarrow \infty \\ -1/8\pi m & \text{para } p \rightarrow 0 \end{cases} . \end{aligned} \quad (1.97)$$

A finitude de S_Σ é consistente com a ausência de um contra-termo Σ^2 na ação original, Eq.(1.71). Invertendo o núcleo da Eq.(1.96), obtemos o seguinte propagador Σ ,

$$\langle T \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) \rangle = \frac{i}{N} \frac{(D^2 - 2m)}{f(p)(p^2 + 4m^2)} \delta_{12} , \quad (1.98)$$

que é regular no infravermelho (IV) ($p^2 \rightarrow 0$) e cai com $1/p$ no limite UV ($p^2 \rightarrow \infty$).

Uma vez que o propagador efetivo de Σ é igual a *menos* o inverso do núcleo da Eq.(1.96), no formalismo de supercampos ainda possuímos a identidade representada graficamente na Figura (1.6), que é bem conhecida no caso bosônico comutativo [42]. Esta é uma identidade importante no estudo de correções quânticas em ordem subdominante, como comentaremos na Seção 1.5.4.

Figura 1.7: Contribuição em ordem dominante de $1/N$ ao propagador efetivo do superpotencial espinorial A^α . Linhas onduladas cortadas representam o supercampo A^α .

A ação efetiva de dois pontos do superpotencial espinorial de calibre

Outro supercampo cuja dinâmica é gerada somente a nível quântico é o superpotencial espinorial A_α . A correção radiativa para sua ação efetiva de dois pontos em ordem dominante de $1/N$ está representada na Figura (1.7). A contribuição do diagrama da Figura (1.7a) é dada por

$$S_{1.7a} = \frac{N}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int_\epsilon \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{C^{\alpha\beta}}{k^2 + m^2} A_\alpha(p, \theta) A_\beta(-p, \theta) , \quad (1.99)$$

enquanto a contribuição do diagrama da Figura (1.7b) é

$$\begin{aligned} S_{1.7b} = & -\frac{N}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int_\epsilon \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} \\ & \times \left[(k^2 + m^2)C^{\alpha\beta} + (k^{\alpha\beta} + mC^{\alpha\beta})D^2 + \frac{1}{2}(k^{\gamma\beta} + mC^{\gamma\beta})D_\gamma D^\alpha \right] \\ & \times A_\alpha(p, \theta) A_\beta(-p, \theta) . \end{aligned} \quad (1.100)$$

Somando as duas contribuições obtemos

$$\begin{aligned} S_{1.7} = & -\frac{N}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int_\epsilon \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} (k^{\alpha\beta} + mC^{\alpha\beta}) \\ & \times \left(D^2 A_\alpha(p, \theta) A_\beta(-p, \theta) + \frac{1}{2} D_\alpha D^\gamma A_\gamma(p, \theta) A_\beta(-p, \theta) \right) . \end{aligned} \quad (1.101)$$

Individualmente, os dois diagramas são linearmente divergentes no UV, mas há um cancelamento de suas divergências lineares quando somamos as duas contribuições. De fato, estes diagramas se tornam finitos, uma vez que a contribuição logaritmicamente divergente

é proporcional a $\int_{\epsilon} d^3k \frac{k^{\alpha\beta}}{(k^2)^2} = 0$ devido a simetria do integrando e devido a identidade:

$$\int_{\epsilon} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^{\alpha\beta}}{[(k+p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} = -\frac{p^{\alpha\beta}}{2} \int_{\epsilon} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} , \quad (1.102)$$

Resulta que a Eq.(1.101) pode ser escrita como

$$S_{1.7} = \frac{N}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta f(p) (-p^{\alpha\beta} + 2mC^{\alpha\beta}) A_{\beta}(p, \theta) W_{\alpha}(-p, \theta) , \quad (1.103)$$

onde $f(p)$ é dado pela Eq.(1.97), e onde W^{α} é definido por

$$W^{\alpha} = \frac{1}{2} D^{\beta} D^{\alpha} A_{\beta} = \frac{1}{2} D^{\alpha} D^{\beta} A_{\beta} + D^2 A^{\alpha} , \quad (1.104)$$

corresponde a parte linear (não-comutativa) do supercampo de Maxwell. Usando a relação $D^2 W_{\alpha} = -p_{\alpha}{}^{\beta} W_{\beta}$ [35], podemos escrever Eq.(1.103) como

$$S_{3a+3b} = \frac{N}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta f(p) (W^{\alpha} W_{\alpha} + 2mA^{\alpha} W_{\alpha}) , \quad (1.105)$$

onde omitimos os argumentos explícitos dos campo externos desde que eles seguem a mesma forma das equações anteriores. Na Eq.(1.105) o primeiro e segundo termos são os termos induzidos não-locais de Maxwell e Chern-Simons. O limite local obtido pela aproximação $f(p) \simeq f(0) = -1/8\pi m$ resulta para o coeficiente induzido de Chern-Simons o valor $N/16\pi$.

Para calcular o propagador de A^{α} precisamos fixar o calibre. Uma escolha freqüente na literatura é o calibre de Wess-Zumino, onde as componentes χ_{α} e B do superpotencial A^{α} são escolhidas como sendo nulas. Esta escolha simplifica razoavelmente os cálculos em termos de componentes, mas quebra explicitamente a supersimetria. Vamos, ao invés, escolher um termo de fixação de calibre não-local, porém SUSY covariante, dado por

$$S_{GF} = \frac{N}{8\xi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta f(p) D^{\beta} A_{\beta} D^2 D^{\alpha} A_{\alpha} , \quad (1.106)$$

e a correspondente ação de Faddeev-Popov,

$$S_{FP} = -\frac{N}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta f(p) (c' D^2 c - ic' D^{\alpha} [A_{\alpha}, c]) . \quad (1.107)$$

Com essa escolha, a parte quadrática da ação em A^α é dada por

$$S_A = -\frac{N}{8} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta f(p) A_\alpha \left[D^\beta D^\alpha (D^2 + 2m) + \frac{1}{\xi} D^\alpha D^\beta D^2 \right] A_\beta , \quad (1.108)$$

a partir da qual segue o propagador

$$\langle T A^\alpha(p, \theta_1) A^\beta(-p, \theta_2) \rangle = \frac{i}{N f(p)} \left[\frac{(D^2 - 2m) D^\beta D^\alpha}{p^2(p^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D^2 D^\alpha D^\beta}{p^4} \right] \delta_{12} , \quad (1.109)$$

ou escrita de uma forma mais útil em nossos cálculos,

$$\begin{aligned} \langle T A^\alpha(p, \theta_1) A^\beta(-p, \theta_2) \rangle &= \frac{i}{N f(p)} \left[-\frac{2mp^{\alpha\beta}}{p^2(p^2 + 4m^2)} + \left(\frac{1}{p^2 + 4m^2} - \frac{\xi}{p^2} \right) C^{\alpha\beta} \right. \\ &\quad \left. + \frac{p^{\alpha\beta}}{p^2} \left(\frac{1}{p^2 + 4m^2} + \frac{\xi}{p^2} \right) D^2 + \frac{2mC^{\alpha\beta}}{p^2(p^2 + 4m^2)} D^2 \right] \delta_{12}. \end{aligned} \quad (1.110)$$

O propagador dos fantasmas obtidos a partir da ação de Faddeev-Popov é

$$\langle T c'(p, \theta_1) c(-p, \theta_2) \rangle = -i \frac{4\pi}{N} \frac{D^2}{f(p)p^2} \delta_{12} , \quad (1.111)$$

e sua contribuição aparece somente em ordem $1/N^2$. Portanto na ordem de aproximação que estamos considerando, sua contribuição não aparecerá.

Existe mistura $A^\alpha \Sigma$?

A partir da ação Eq.(1.94), podemos ver que é possível ocorrer em ordem de $1/N$ uma mistura de A^α e Σ , que resultaria num propagador misturado. O diagrama que representa o processo está desenhado na Figura (1.8). A amplitude de Feynman correspondente é dada por

$$\begin{aligned} S_{A\Sigma} &= \langle T : -i \int d^5z \Sigma(z) \Phi_a(z) \bar{\Phi}_a(z) : \\ &\quad \times : \frac{i}{2!} \int d^5z' \frac{i}{2} \left[D^\alpha \bar{\Phi}_b(z') A_\alpha(z') \Phi_b(z') + \bar{\Phi}_b(z') A_\alpha(z') D^\alpha \Phi_b(z') \right] : \rangle , \end{aligned} \quad (1.112)$$

que pode ser separada em dois termos, $S_{A\Sigma} = S_{A\Sigma,1} + S_{A\Sigma,2}$, o primeiro dado por

$$S_{A\Sigma,1} = i \frac{N}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int_\epsilon \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(k^{\beta\alpha} - mC^{\beta\alpha})}{[(k+p)^2 + m^2](k^2 + m^2)} D_\beta A_\alpha(-p, \theta) \Sigma(p, \theta) , \quad (1.113)$$

Figura 1.8: Supergráfico que poderia implicar numa mistura entre os supercampos A^α e Σ .

enquanto, para o segundo termo, encontramos $S_{A\Sigma,2} = -S_{A\Sigma,1}$, sendo assim $S_{A\Sigma}$ se anula. O essencial para este resultado é a escolha do ordenamento do produto entre os campos $\Sigma\Phi_a\bar{\Phi}_a$, em vez de $\Sigma\bar{\Phi}_a\Phi_a$, na ação Eq.(1.94). Esta escolha, entretanto, requer que Σ mude por uma transformação de calibre, para manter a ação invariante, como comentado anteriormente.

Nós poderíamos ter escolhido o ordenamento $\Sigma\bar{\Phi}\Phi$ mantendo Σ invariante de calibre, porém a fase Moyal nos dois vértices na Eq.(1.112) não se compensariam entre si, consequentemente $S_{A\Sigma,1}$ e $S_{A\Sigma,2}$ não se cancelariam. Assim, um termo misto $A\Sigma$ seria gerado na ação efetiva, dificultando os cálculos dos propagadores e correções radiativas, além de que estaríamos lidando com outro modelo, uma vez que o ordenamento do produto entre os campos faz parte da definição do modelo numa teoria não-comutativa.

1.5.4 Correções em ordem subdominante à ação efetiva $\bar{\Phi}\Phi$

Vamos calcular as contribuições em ordem subdominante em $1/N$ para a parte quadrática da ação efetiva do supercampo Φ , cujos diagramas são mostrados na Figura (1.9). As correspondentes amplitudes de Feynman são dadas por

$$S_{1.9a} = -\frac{i}{2} \left(\sum_{j=1}^4 \int \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \right) \int d^2\theta (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + k_3) C^{\alpha\beta} \\ \times \exp \left\{ -i[k_2 \wedge (k_3 + k_4) + k_3 \wedge k_4] \right\} \left\langle T A_\beta(k_2, \theta) A_\alpha(k_3, \theta) \right\rangle \bar{\Phi}_a(k_1) \Phi_a(k_4) . \quad (1.114)$$

Integrando em k_3 e k_4 , renomeando $k_1 = p$, $k_2 = k$ e usando que $\delta^{(2)}(\theta - \theta) = 0$, obtemos

$$S_{1.9a} = \frac{1}{N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2\theta \bar{\Phi}_a(-p, \theta) \Phi_a(p, \theta) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{-2m}{f(k)k^2(k^2 + 4m^2)} . \quad (1.115)$$

Figura 1.9: Contribuições em ordem subdominante em aproximação $1/N$ à parte quadrática da ação efetiva do supercampo Φ .

A amplitude correspondente ao diagrama Figura (1.9b) é dado por

$$\begin{aligned}
S_{1.9b} &= \frac{1}{N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \bar{\Phi}_a(-p, \theta) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k)[(k+p)^2 + m^2]} \\
&\times \left\{ \frac{k^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}}{k^2(k^2 + 4m^2)} (D^2 + m) + \xi \frac{k^{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}}{k^4} (D^2 - m) + \frac{2D^2}{(k^2 + 4m^2)} \right. \\
&+ \left. \xi \frac{1}{k^2} (D^2 - m) - \frac{4m}{k^2(k^2 + 4m^2)} D^2 (D^2 - m) \right\} \Phi_a(p, \theta), \quad (1.116)
\end{aligned}$$

e finalmente a contribuição da Figura (1.9c) é

$$S_{1.9c} = -\frac{1}{N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(D^2 - m) \Phi_a(p, \theta) \bar{\Phi}_a(-p, \theta)}{f(k)[(k+p)^2 + m^2](k^2 + m^2)}. \quad (1.117)$$

Somando as três contribuições obtemos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
S_{1.9} &= \frac{1}{N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \bar{\Phi}(-p, \theta) \int_{\epsilon} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k)} \left\{ \frac{(D^2 - m)^2}{k^2(k^2 + 4m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{k^2(k^2 + 4m^2)} + \xi \frac{k^2 + 2k \cdot p}{k^4[(k+p)^2 + m^2]} \right\} (D^2 - m) \Phi(p, \theta), \quad (1.118)
\end{aligned}$$

que é planar e, portanto, não gera mistura UV/IV. Mesmo sendo uma ação não-local, ainda compartilha um fator comum $(D^2 - m)$ que aparece na ação clássica. Separando a parte divergente,

$$\begin{aligned}
S_{1.9} &= \frac{1}{N} \left[(1 + \xi) \int_{\epsilon} \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{f(k)} \frac{1}{k^2(k^2 + m^2)} + \text{termos finitos} \right] \\
&\times \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \bar{\Phi}_a(-p, \theta) (D^2 - m) \Phi_a(p, \theta) \quad (1.119)
\end{aligned}$$

vemos que uma renormalização de função de onda $\Phi \longrightarrow \sqrt{Z} \Phi$ dá conta da divergência logarítmica UV na Eq.(1.119). Ainda é fácil ver que $S_{1.9}$ é finita no calibre $\xi = -1$. Um

ponto importante que obtivemos aqui é que a renormalização foi obtida de forma que a invariância supersimétrica foi mantida, diferentemente do obtido anteriormente no calibre de Wess-Zumino [52], onde as componentes bosônicas e fermiônicas do supercampo Φ receberam diferentes fatores de renormalização de função de onda.

Um cálculo completo das contribuições subdominantes do modelo está fora do objetivo desta seção, porém é válido mencionar que a identidade gráfica representada na Figura (1.6) é essencial para assegurar o cancelamento de várias divergências UV. No modelo comutativo não supersimétrico, a prova da renormalização numa ordem arbitrária de aproximação $1/N$ está fortemente relacionada com o uso de tal identidade [42].

Capítulo 2

Eletrodinâmica quântica supersimétrica em $D = 2 + 1$ dimensões

A presença de divergências é certamente uma das principais características da teoria quântica de campos. Uma maneira de tratarmos essas divergências é através do uso de métodos de renormalização, ou procurar teorias de campos finitas. A esperança de encontrar tais teorias está fortemente relacionada com supersimetria, que como é bem conhecido melhora o comportamento UV das teorias por conta de um cancelamento de contribuições bosônicas e fermiônicas. Alguns exemplos notáveis deste tipo de teoria são encontrados em teorias supersimétricas extendidas tais como $\mathcal{N} = 4$ super-Yang-Mills [9] e alguns modelos $\mathcal{N} = 2$ superconformes (veja e.g. [10]). A discussão da existência de teorias de campos não-comutativas finitas pode ser encontrada em [11].

Modelos tridimensionais exibem um melhor comportamento UV, e portanto são candidatos naturais a serem finitos. Por exemplo, a teoria pura de Yang-Mills em $D = 2 + 1$ (não-supersimétrica) foi mostrada ser finita [12]. Outro exemplo, agora de um modelo supersimétrico, é o modelo super-renormalizável de Super-Yang-Mills-Chern-Simons [13] que foi mostrado ser finito. Quando minimamente acoplado com matéria, teorias de calibre supersimétricas em $D = 2 + 1$ são ainda super-renormalizáveis, com divergências superficiais aparecendo até a ordem de dois laços. Em [14], os modelos abeliano e não-abeliano não-comutativo foram mostrados serem finitos em um laço [13, 14]. O problema natural é estudar correções radiativas nessas teorias na aproximação de dois laços, que nos permitirá estabelecer ou não a finitude de tais modelos. Neste capítulo, vamos mostrar a finitude em dois laços da eletrodinâmica quântica supersimétrica em $D = 2 + 1$ dimensões do espaço-tempo (SQED₃), ao menos num calibre especial, por cálculos diretos das funções de

Green relevantes [54]. Como o modelo é super-renormalizável e só apresenta divergências primitivas em até dois laços de aproximação, nossa prova é também uma prova da finitude do modelo em todas as ordens de perturbação.

2.1 Descrição do modelo

O ponto de partida de nosso estudo é a ação [35],

$$S = \int d^5z \left\{ \frac{1}{2} W^\alpha W_\alpha - \frac{1}{2} \bar{\nabla}^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\alpha \Phi + M \bar{\Phi} \Phi \right\}, \quad (2.1)$$

onde W^α já definido na Eq.(1.42) é dado por $W^\alpha = 1/2 D^\beta D^\alpha A_\beta$, e $\nabla^\alpha = D^\alpha - ieA^\alpha$.

Usando a definição de ∇^α , podemos reescrever Eq.(2.1) como sendo

$$S = \int d^5z \left\{ \frac{1}{2} W^\alpha W_\alpha + \bar{\Phi} (D^2 + M) \Phi + i \frac{e}{2} [D^\alpha \bar{\Phi} A_\alpha \Phi - \bar{\Phi} A^\alpha D_\alpha \Phi] - \frac{e^2}{2} \bar{\Phi} \Phi A^\alpha A_\alpha \right\}. \quad (2.2)$$

Esta ação é invariante sob as seguintes transformações infinitesimais de calibre:

$$\delta \bar{\Phi} = -ie \bar{\Phi} K, \quad \delta \Phi = ie K \Phi, \quad \delta A_\alpha = -D_\alpha K, \quad (2.3)$$

onde o parâmetro de calibre $K = K(x, \theta)$ é um supercampo escalar real.

A quantização desta teoria requer a inclusão na Eq.(2.2) um termo de fixação de calibre e a correspondente ação dos fantasmas de Fadeev-Popov,

$$S_{GF+FP} = \int d^5z \left[-\frac{1}{4\alpha} D^\alpha A_\alpha D^2 D^\beta A_\beta - \bar{c} D^2 c \right]. \quad (2.4)$$

Os propagadores do modelo podem ser escritos como,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(k, \theta_1) \bar{\Phi}(-k, \theta_2) \rangle &= -i \frac{(D^2 - M)}{k^2 + M^2} \delta_{12}, \\ \langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle &= \frac{i}{2} \frac{D^2}{(k^2)^2} (D_\beta D_\alpha - \alpha D_\alpha D_\beta) \delta_{12}, \\ \langle c(k, \theta_1) \bar{c}(-k, \theta_2) \rangle &= i \frac{D^2}{k^2} \delta_{12}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde $\delta_{12} = \delta^2(\theta_1 - \theta_2)$ e $D^2 \equiv D^2(k, \theta)$. Note que, como esta teoria é abeliana e comutativa, os fantasmas não interagem com os outros campos do modelo.

2.2 Estrutura geral das divergências

Para estudarmos as propriedades de renormalização do modelo, devemos calcular o grau de divergência superficial $\mathcal{D}$ de um diagrama arbitrário. Denotaremos o número de vértices da forma $(D^\alpha \bar{\Phi} A_\alpha \Phi - \bar{\Phi} A_\alpha D^\alpha \Phi)$ e $\bar{\Phi} \Phi A^2$ por V_1 e V_2 , respectivamente, o número de propagadores dos supercampos Φ e A^α por P_Φ e P_A . Cada operador D^α aplicado numa perna externa contribui com $-1/2$. Assim, para um diagrama arbitrário com L laços, o grau de divergência superficial $\mathcal{D}$ é dado por

$$\mathcal{D} = 2L - 2P_A - P_\Phi + \frac{V_1}{2} - \frac{N_D}{2} , \quad (2.6)$$

onde N_D é o número de operadores D^α agindo numa perna externa do diagrama.

Cada laço contribui para $\mathcal{D}$ com 3 vindo da integral em d^3k e -1 da contração de um laço num ponto. Cada propagador do supercampo de calibre contribui com -2 , e cada propagador do supercampo de matéria com -1 . O número de propagadores em um dado diagrama de Feynman pode ser escrito em termos do número de supercampos externos (E_Φ e E_A) e dos números de vértices como

$$P_\Phi = \frac{1}{2}(2V_1 + 2V_2 - E_\Phi) , \quad P_A = \frac{1}{2}(V_1 + 2V_2 - E_A) .$$

Usando a identidade topológica $L = P - (V - 1)$, obtemos,

$$\mathcal{D} = 2 - V_2 - \frac{V_1}{2} - \frac{E_\Phi}{2} - \frac{N_D}{2} . \quad (2.7)$$

Segue desta relação que qualquer diagrama com número não nulo de pernas externas de Φ , em particular, cada diagrama desenhado em Figura 2.1 é finito. Os únicos diagramas com $\mathcal{D} = 1$ são mostrados na Figura 2.2, verificaremos que a soma desses diagramas é finita. Diagramas com mais de duas pernas externas são finitos, e nenhuma divergência superficial é encontrada em diagramas calculados em três ou mais laços de aproximação. Os diagramas que possuem grau de divergência superficial logarítmica estão desenhados na Figura 2.3. Assim, para obtermos a resposta para a questão sobre a finitude da teoria, devemos calcular explicitamente os diagramas “perigosos” e verificar se estes diagramas são realmente divergentes.

Figura 2.1: Contribuição em um laço para a função de dois pontos do supercampo escalar Φ . Linhas contínuas representam campos externos de Φ e $\bar{\Phi}$, enquanto linhas onduladas representam propagadores do supercampo de calibre A^α .

2.3 Contribuições em um laço para a ação efetiva

Nesta seção vamos calcular contribuições em um laço para a parte quadrática da ação efetiva da teoria. Aqui vamos perseguir dois objetivos, primeiro, verificar a finitude do modelo em um laço, segundo, procurar possíveis supergráficos divergentes que poderiam aparecer em cálculos em ordens de aproximação mais elevadas.

Os diagramas em um laço que contribuem para a função de vértice de dois pontos de Φ estão desenhados na Figura 2.1. A expressão correspondente ao diagrama 2.1(a) é dado por

$$S_{\Phi\bar{\Phi}a} = \frac{e^2}{8} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2)^2[(k-p)^2 + M^2]} \quad (2.8)$$

$$\times \bar{\Phi}(p, \theta) [7(1-\alpha)(k \cdot p)(D^2 + M) + 3\alpha k^2(D^2 + M) - 7k^2 D^2 + \alpha M k^2] \Phi(-p, \theta) .$$

O diagrama 2.1(b) é nulo, pois sua expressão é proporcional a $(1+\alpha)\square\delta^{(2)}(\theta-\theta)$, que é obviamente zero.

A função de dois pontos do supercampo escalar, dado pela Eq.(2.8), é finita em qualquer calibre, similarmente à [14], mas assume sua forma mais simples no calibre de Feynman ($\alpha = 1$),

$$S_{\Phi\bar{\Phi}} = \frac{e^2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{\Phi}(p, \theta)(D^2 + M)\Phi(-p, \theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2[(k-p)^2 + M^2]} . \quad (2.9)$$

Dois diagramas contribuem para as correções radiativas da função de dois pontos do supercampo de calibre A^α . Eles estão desenhados na Figura 2.2. A contribuição do diagrama

Figura 2.2: Correções em um laço à função de dois pontos do supercampo A_α . Linhas continuas representam o propagador do supercampo de matéria, enquanto linhas onduladas cortadas representam supercampos externos de calibre.

2.2(a) é dada por

$$\begin{aligned}
S_{AAa} &= -\frac{e^2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M^2)[(k-p)^2 + M^2]} \\
&\times \left\{ (k^2 + M^2) A^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta) + \frac{M}{2} A^\beta(p, \theta) (p_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha D^2) A_\alpha(-p, \theta) \right. \\
&\left. - \frac{1}{4} A^\beta(p, \theta) (\delta_\beta^\alpha p^2 + p_\beta^\alpha D^2) A_\alpha(-p, \theta) \right\}, \quad (2.10)
\end{aligned}$$

enquanto, para o diagrama 2.2(b), temos

$$S_{AAb} = \frac{e^2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta A^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + M^2}. \quad (2.11)$$

Somando as Eqs.(2.10,2.11), e efetuando algumas manipulações algébricas, obtemos a seguinte parte quadrática da ação efetiva para o supercampo de calibre,

$$S_{AA} = e^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta f(p, M) \left\{ W^\alpha W_\alpha - M A^\alpha W_\alpha \right\}, \quad (2.12)$$

onde

$$f(p, M) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M^2)[(k-p)^2 + M^2]}. \quad (2.13)$$

É importante que as divergências lineares que aparecem nas Eqs. (2.10) e (2.11), que corresponderia à geração de um termo de massa ao supercampo de calibre, cancelam entre si, fazendo com que o resultado seja manifestamente invariante de calibre. A correção S_{AA} se torna finita, assim como em [14, 41, 45], e corresponde às contribuições não-locais aos termos de Maxwell e Chern-Simons.

Figura 2.3: Diagramas de dois pontos que possuem divergência superficial logarítmica.

2.4 Contribuições em dois laços à função de dois pontos do supercampo de calibre

Vamos agora nos concentrar no cálculo dos diagramas em dois laços desenhados na Figura 2.3. Até agora mostramos que divergências logarítmicas surgem somente em aproximação de dois laços. Uma vez que estamos interessados nas partes divergentes e lembrando da Eq.(2.7), vamos calcular explicitamente a parte da ação efetiva proporcional a $A^\alpha A_\alpha$, na aproximação de dois laços. Contribuições envolvendo derivadas de A^α são superficialmente convergentes.

O procedimento adotado para o desenvolvimento dos cálculos é o seguinte: a D-álgebra nos supergráficos em dois laços foi feita com a ajuda de um pacote do programa Mathematica[©] [55]. A partir destes resultados (não integrados), extraímos toda a contribuição ao termo de massa $A^\alpha A_\alpha$, onde nenhuma derivada covariante está aplicada nas pernas externas. As possíveis divergências estão nos termos de ordem mais baixa de uma expansão em torno de $p = 0$,

$$S_{AA(mass)} = -i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \Gamma_{AA} A^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta), \quad (2.14)$$

que é um termo de massa para o supercampo de calibre A^α .

Os diagramas 2.3(a) e 2.3(d) são identicamente nulos, basta notar que tais gráficos são

inserções do diagrama 2.1(b), que como já discutimos é nulo. Para os outros diagramas, obtemos

$$\Gamma_{AA} = \Gamma_{AA(b)} + \Gamma_{AA(c)} + \Gamma_{AA(e)} + \Gamma_{AA(f)} + \Gamma_{AA(g)} , \quad (2.15)$$

onde,

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA(b)} = & i \frac{e^4}{6} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[- \frac{(1-\alpha)(k \cdot q)}{(k^2 + M^2)[(k+q)^2 + M^2](q^2)^2} \right. \\ & \left. - \frac{1}{(k^2 + M^2)[(k+q)^2 + M^2]q^2} + \frac{2M^2(1+\alpha)}{(k^2 + M^2)^2[(k+q)^2 + M^2]q^2} \right] , \quad (2.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA(c)} = & i(1-\alpha) \frac{e^4}{64} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{4(k \cdot q)^2 k^2}{(k^2 + M^2)^2[(k+q)^2 + M^2]^2(q^2)^2} \right. \\ & - \frac{2(k^2)^2}{(k^2 + M^2)^2[(k+q)^2 + M^2]^2 q^2} + \frac{3(k \cdot q)^2 M^2}{(k^2 + M^2)^2[(k+q)^2 + M^2]^2 (q^2)^2} \\ & \left. - \frac{M^2 k^2}{(k^2 + M^2)^2[(k+q)^2 + M^2]^2 q^2} \right] , \quad (2.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA(e)} = & i \frac{e^4}{16} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{(1-\alpha)(k \cdot q)^2}{(k^2 + M^2)^2[(k+q)^2 + M^2](q^2)^2} \right. \\ & - \frac{8M^4 \alpha}{(k^2 + M^2)^3[(k+q)^2 + M^2]q^2} + \frac{k^2}{(k^2 + M^2)^2[(k+q)^2 + M^2]q^2} \\ & \left. + \frac{7\alpha(k^2)^2}{(k^2 + M^2)^3[(k+q)^2 + M^2]q^2} - \frac{\alpha k^2 M^2}{(k^2 + M^2)^3[(k+q)^2 + M^2]q^2} \right] , \quad (2.18) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{AA(f)} = -i(1+\alpha) \frac{e^4}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M^2)[(k+q)^2 + M^2]q^2} , \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA(g)} = & -i \frac{e^4}{6} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left[\frac{2(1-\alpha)(k \cdot q)}{(k^2 + M^2)[(k+q)^2 + M^2](q^2)^2} \right. \\ & \left. + \frac{(1-2\alpha)(k \cdot q)^2}{(k^2 + M^2)^2[(k+q)^2 + M^2](q^2)^2} + \frac{k^2 + 2(1-\alpha)M^2}{(k^2 + M^2)^2[(k+q)^2 + M^2]q^2} \right] . \quad (2.20) \end{aligned}$$

As integrais em dois laços foram efetuadas com o auxílio de uma regularização por redução

dimensional, usando formulas de [29], obtendo

$$\Gamma_{AA} = \frac{ie^4}{384\pi^2} \left\{ (\alpha + 8) \left[\frac{1}{\epsilon} - (\gamma - \ln(4\pi) - 1) - \ln \left(\frac{2M}{\mu} \right) \right] + \frac{3}{8}(7\alpha - 3) \right\}, \quad (2.21)$$

onde γ é a constante de Euler, $\epsilon = D - 3$ com D sendo o número de dimensões do espaço-tempo. Diferentemente do que acontece em um laço, o termo de massa para o supercampo de calibre não se anula. Este fato sinaliza que nosso procedimento de regularização não preserva a invariância de calibre nesta ordem de aproximação [56]. A simetria de calibre é restaurada pela introdução de um contratermo de massa na lagrangiana clássica. Para a escolha $\alpha = -8$, a função de dois pontos de A^α se torna finita, e somente um contratermo finito é necessário para garantir a não violação das identidades de Ward.

2.5 Sumário

Neste capítulo estudamos a renormalização da eletrodinâmica quântica supersimétrica num espaço-tempo tridimensional (SQED₃). As únicas possibilidades de divergência na teoria, vem da função de dois pontos do supercampo de calibre, que mostramos ser finita no calibre $\alpha = -8$. Observamos a necessidade de inclusão de um contra-termo de massa na lagrangiana clássica para que não haja violação das identidades de Ward. É natural esperar que a generalização não-abeliana do presente modelo, também compartilhe das propriedades estudadas aqui, como a finitude em dois laços em um calibre específico, igualmente às situações comutativas e não-comutativas em um laço [12, 14].

Capítulo 3

Quebra de simetria de calibre no modelo de SUSY Chern-Simons

Teorias de campos definidas num espaço-tempo tridimensional, $D = 2 + 1$, são mais simples do que as quadridimensionais similares, e podem servir de laboratório teórico para vários aspectos de teorias quântica de campos mais realistas, além de exibirem propriedades e comportamento, às vezes, muito peculiares. Para teorias de calibre, em particular, é permitido introduzir termos de massa invariantes de calibre da forma de Chern-Simons, que podem estar relacionados com os fenômenos de estatística fracionada e o efeito Hall quântico [15]. A invariância da ação sob transformações de calibre requer que o coeficiente do termo de Chern-Simons seja quantizado [16], um aspecto que pode ser explicitamente verificado utilizando teoria de perturbação [17, 18].

Um modelo interessante considerado na literatura envolve o acoplamento do termo de Chern-Simons com um campo escalar, permitindo assim o estudo da quebra espontânea de sua simetria de calibre. Foi verificado que um termo de Maxwell é gerado quando começamos com um termo puramente topológico de Chern-Simons [20]. Ainda na lagrangiana clássica do modelo de Chern-Simons acoplado a um campo escalar, na fase espontaneamente quebrada, obtêm-se para a parte quadrática do campo de calibre o modelo Auto-Dual, que é equivalente ao modelo de Maxwell-Chern-Simons (veja Apêndice B). A quantização do coeficiente de Chern-Simons para teorias não-abelianas na fase quebrada é ainda verificada se a simetria resultante após a quebra é ainda não-abeliana [23, 24]. A verificação da quantização do coeficiente de Chern-Simons no caso abeliano ou onde a simetria não-abeliana é completamente quebrada, parece ser mais complicada [25, 26, 27, 28].

Para um modelo onde um campo escalar não-massivo, que além da interação com o

campo de calibre via acoplamento mínimo, interage apenas através de uma interação sêxtupla, a simetria de calibre é quebrada dinamicamente somente após correções em dois laços para o potencial efetivo [29], diferentemente do modelo quadridimensional cuja quebra dinâmica aparece já em um laço [30]. Também, para uma forma específica do potencial sêxtuplo, o modelo de Chern-Simons possui soluções que satisfazem uma equação de Bogomol'nyi [31, 32]. A forma exata deste potencial pode ser obtida impondo uma condição de auto-dualidade sobre o campo de matéria [33] ou pela extensão do campo de Chern-Simons para a obtenção de uma teoria supersimétrica estendida com $\mathcal{N} = 2$ [34].

Neste capítulo vamos investigar algumas propriedades perturbativas do modelo supersimétrico de Chern-Simons (SCS) com $\mathcal{N} = 1$ em $2+1$ dimensões do espaço-tempo. Vamos investigar a renormalizabilidade do modelo na fase onde a simetria de calibre é espontaneamente quebrada [57], e mostrar em dois laços, que como no modelo não-supersimétrico [29], a simetria de calibre é dinamicamente quebrada nesta ordem de aproximação. Usamos principalmente o formalismo de supercampo, que preserva explicitamente a estrutura supersimétrica do modelo.

3.1 Definição do modelo

O modelo abeliano de SUSY Chern-Simons $\mathcal{N} = 1$ acoplado a um supercampo escalar complexo, é definido através da ação:

$$S = \int d^5z \left\{ A^\alpha W_\alpha - \frac{1}{2} \nabla^\alpha \bar{\Phi} \nabla_\alpha \Phi + \mu \bar{\Phi} \Phi - \lambda (\bar{\Phi} \Phi)^2 \right\} , \quad (3.1)$$

onde W^α é definido em Eq.(1.42) , e $\nabla^\alpha = (D^\alpha - ieA^\alpha)$ é a derivada supercovariante.

Para valores de $\mu < 0$, a Eq.(3.1) representa um modelo de campos escalares complexos massivos em auto-interação e acoplados minimamente com o supercampo de calibre de Chern-Simons. Para valores de $\mu > 0$, o modelo exibe quebra espontânea de simetria de calibre através do mecanismo de Higgs. Para $\mu = 0$, como veremos, o modelo exibe quebra dinâmica de simetria de calibre via mecanismo de Coleman-Weinberg.

O modelo definido acima é invariante sob as seguintes transformações de calibre:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &\longrightarrow \bar{\Phi}' = \bar{\Phi}(1 - ieK) , \\ \Phi &\longrightarrow \Phi' = (1 + ieK)\Phi , \\ A_\alpha &\longrightarrow A'_\alpha = A_\alpha + D_\alpha K , \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde $K = K(x, \theta)$ é um supercampo escalar real.

Para valores positivos do parâmetro μ , o potencial

$$V(\bar{\Phi}, \Phi) = -\mu\bar{\Phi}\Phi + \lambda(\bar{\Phi}\Phi)^2, \quad (3.3)$$

possui um mínimo não trivial dado por

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{2\lambda}}. \quad (3.4)$$

Neste ponto, vamos mover o supercampo Φ ($\bar{\Phi}$) pelo campo clássico $\sigma/\sqrt{2}$ para escrever uma ação em termos de supercampos com valores esperados no vácuo (VEV) iguais a zero,

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma + \sigma - i\Pi), \\ \Phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma + \sigma + i\Pi), \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde Σ e Π são supercampos escalares reais, que possuem as seguintes transformações de calibre

$$\begin{aligned} \Pi &\longrightarrow \Pi' = \Pi + eK(\Sigma + \sigma), \\ \Sigma &\longrightarrow \Sigma' = \Sigma - eK\Pi. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim, a ação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S &= \int d^5z \left\{ A^\alpha W_\alpha - \frac{e^2\sigma^2}{4} A^\alpha A_\alpha + \frac{e\sigma}{2} D^\alpha A_\alpha \Pi + \frac{1}{2} \Sigma [D^2 - (3\lambda\sigma^2 - \mu)] \Sigma \right. \\ &+ \frac{1}{2} \Pi [D^2 - (\lambda\sigma^2 - \mu)] \Pi + \frac{e}{2} D^\alpha \Pi A_\alpha \Sigma - \frac{e}{2} D^\alpha \Sigma A_\alpha \Pi - \frac{e^2}{2} (\Sigma^2 + \Pi^2) A^2 \\ &\left. - e^2 \sigma \Sigma A^2 - \frac{\lambda}{4} (\Sigma^4 + \Pi^4) - \frac{\lambda}{2} \Sigma^2 \Pi^2 - \lambda \sigma \Sigma (\Sigma^2 + \Pi^2) + \sigma (\mu - \sigma^2 \lambda) \Sigma \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Para eliminar o termo da ação que mistura os supercampos A^α e Π , vamos adotar um termo de fixação de calibre do tipo R_ξ , $\mathcal{F}_G = (D^\alpha A_\alpha - \alpha e \sigma \Pi/2)$, introduzido através da equação

$$S_{GF+FP} = \int d^5z \left[-\frac{1}{2\alpha} (D^\alpha A_\alpha + \alpha \frac{e\sigma}{2} \Pi)^2 - \bar{c} D^2 c + \frac{\alpha}{4} e^2 \sigma^2 \bar{c} c + \frac{\alpha}{4} e^2 \sigma \bar{c} \Sigma c \right], \quad (3.8)$$

já incluído o termo de Faddeev-Popov correspondente.

Assim, somando Eq.(3.7) e Eq.(3.8) obtemos

$$\begin{aligned}
S = & \int d^5 z \left\{ A^\alpha W_\alpha - M_A A^\alpha A_\alpha - \frac{1}{2\alpha} D^\alpha A_\alpha D^\beta A_\beta + \frac{1}{2} \Sigma (D^2 - M_\Sigma) \Sigma \right. \\
& + \frac{1}{2} \Pi (D^2 - M_\Pi) \Pi + \frac{e}{2} D^\alpha \Pi A_\alpha \Sigma - \frac{e}{2} D^\alpha \Sigma A_\alpha \Pi - \frac{e^2}{2} (\Sigma^2 + \Pi^2) A^2 - e^2 \sigma \Sigma A^2 \\
& \left. - \frac{\lambda}{4} (\Sigma^4 + \Pi^4) + \sigma (\mu - \sigma^2 \lambda) \Sigma - \frac{\lambda}{2} \Sigma^2 \Pi^2 - \lambda \sigma \Sigma (\Sigma^2 + \Pi^2) - \bar{c} (D^2 - M_c) c + \frac{\alpha}{4} e^2 \sigma \bar{c} \Sigma c \right\} .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde

$$\begin{aligned}
M_\Sigma &= (3\lambda\sigma^2 - \mu) , \\
M_A &= e^2\sigma^2/4 , \\
M_\Pi &= (\lambda\sigma^2 - \mu - \alpha M_A/2) , \\
M_c &= \alpha M_A .
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Note que o mecanismo de quebra espontânea de simetria de calibre gera aos supercampos Σ e A^α massas $M_\Sigma = (3\lambda\sigma^2 - \mu)$ e $M_A = e^2\sigma^2/4$, respectivamente. O supercampo Π também adquire massa, mas não somente pelo mecanismo de quebra de simetria (que se anula quando impomos $\sigma = v = \sqrt{\mu/\lambda}$), mas também pelo processo de fixação de calibre, que faz de Π um supercampo fictício, não devendo ser observado nas pernas externas de qualquer processo de espalhamento [58]. Em aproximação de árvore, a condição de mínimo para o potencial $V(\Phi, \bar{\Phi})$, $\sigma = v = \sqrt{\mu/\lambda}$, nos dá $M_\Sigma = 2\mu$, $M_A = e^2\mu/4\lambda$ e $M_\Pi = 0$.

A partir da Eq.(3.9), obtemos os seguintes propagadores do modelo:

$$\begin{aligned}
\langle T \Sigma(k, \theta_1) \Sigma(-k, \theta_2) \rangle &= -i \frac{D^2 + M_\Sigma}{k^2 + M_\Sigma^2} \delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2) , \\
\langle T \Pi(k, \theta_1) \Pi(-k, \theta_2) \rangle &= -i \frac{D^2 + M_\Pi}{k^2 + M_\Pi^2} \delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2) , \\
\langle T c(k, \theta_1) \bar{c}(-k, \theta_2) \rangle &= +i \frac{(D^2 + M_c)}{k^2 + M_c^2} \delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2) , \\
\langle T A_\alpha(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle &= \frac{i}{4} \left[\frac{(D^2 + M_A) D^2 D_\beta D_\alpha}{k^2 (k^2 + M_A^2)} \right. \\
&\quad \left. + \alpha \frac{(D^2 - \alpha M_A) D^2 D_\alpha D_\beta}{k^2 (k^2 + \alpha^2 M_A^2)} \right] \delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2) .
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Para tratarmos da renormalização do modelo, vamos redefinir os supercampos como

$\bar{\Phi} \rightarrow Z_1^{1/2} \bar{\Phi}$, $\Phi \rightarrow Z_1^{1/2} \Phi$, $c \rightarrow Z_c^{1/2} c$ e $A^\alpha \rightarrow Z_2 A^\alpha$, e mover as constantes $\mu \rightarrow (\mu + \delta_\mu)$, $e \rightarrow (e + \delta_e)$ e $\lambda \rightarrow (\lambda + \delta_\lambda)$. A partir deste ponto, embora não utilizaremos um sub-índice para indicar isto explicitamente, trabalharemos sempre com os supercampos renormalizados. Com essa substituição podemos escrever a seguinte ação de contra-termos

$$\begin{aligned}
S_{CT} = & \int d^5 z \left\{ \frac{(2\delta_2 + \delta_2^2)}{2} A^\alpha W_\alpha - \frac{\sigma^2}{2} [(1 + \delta_2)^2 (1 + \delta_1) (e + \delta_e)^2 - e^2] A^2 \right. \\
& - \frac{1}{2\alpha} [(1 + \delta_2)^2 - 1] D^\alpha A_\alpha D^\beta A_\beta - \delta_c \bar{c} D^2 c + \frac{\alpha \sigma^2}{4} [(1 + \delta_c) (e + \delta_e)^2 (1 + \delta_1) - e^2] \bar{c} c \\
& + \frac{\sigma}{2} [(e + \delta_e) (1 + \delta_1) (1 + \delta_2) - e] D^\alpha A_\alpha \Pi + \frac{\delta_1}{2} (\Sigma D^2 \Sigma + \Pi D^2 \Pi) \\
& - \frac{1}{2} [3(\lambda + \delta_\lambda) (1 + \delta_1)^2 \sigma^2 - (\mu + \delta_\mu) (1 + \delta_1) - M_\Sigma] \Sigma^2 \\
& - \frac{1}{2} [(\lambda + \delta_\lambda) (1 + \delta_1)^2 \sigma^2 - (\mu + \delta_\mu) (1 + \delta_1) + \frac{\alpha \sigma^2}{2} (e + \delta_e)^2 (1 + \delta_1)^2 - M_\Pi] \Pi^2 \\
& + \frac{1}{2} [(e + \delta_e) (1 + \delta_1) (1 + \delta_2) - e] (D^\alpha \Pi A_\alpha \Sigma - D^\alpha \Sigma A_\alpha \Pi) \\
& - \frac{1}{2} [(e + \delta_e)^2 (1 + \delta_1) (1 + \delta_2)^2 - e] (\Sigma^2 + \Pi^2) A^2 \\
& + \frac{\alpha}{4} [(e + \delta_e)^2 (1 + \delta_1) (1 + \delta_c) - e^2] \bar{c} \Sigma c \\
& - \sigma [(e + \delta_e)^2 (1 + \delta_1) (1 + \delta_2)^2 - e] \Sigma A^2 - \frac{1}{4} [(\lambda + \delta_\lambda) (1 + \delta_1)^2 - \lambda] (\Sigma^4 + \Pi^4) \\
& - \frac{1}{2} [(\lambda + \delta_\lambda) (1 + \delta_1)^2 - \lambda] \Sigma^2 \Pi^2 - \sigma [(\lambda + \delta_\lambda) (1 + \delta_1)^2 - \lambda] \Sigma (\Sigma^2 + \Pi^2) \\
& + \left. \sigma [(1 + \delta_1) (\mu + \delta_\mu) - (1 + \delta_1)^2 (\lambda + \delta_\lambda) \sigma^2 - (\mu - \sigma^2 \lambda)] \Sigma \right\}, \tag{3.12}
\end{aligned}$$

onde $\delta_1 = (Z_1 - 1)$, $\delta_2 = (Z_2 - 1)$ and $\delta_c = (Z_c - 1)$.

Agora estamos com todas as ferramentas necessárias para estudar a renormalização do modelo. Na seção 3.2, vamos estudar a fase espontaneamente quebrada (caso $\mu > 0$), enquanto na seção 3.3 estudaremos a quebra dinâmica de simetria de calibre (caso $\mu = 0$).

3.2 A fase espontaneamente quebrada

Na seção anterior vimos que para valores positivos do parâmetro μ , o mínimo do potencial $V(\Phi, \bar{\Phi})$ não está em zero, exibindo quebra espontânea de simetria de calibre. Nesta seção vamos nos dedicar a estudar a renormalizabilidade deste modelo na fase quebrada na aproximação perturbativa de um laço. Vamos começar pela equação de *gap*.

3.2.1 A equação de *gap*

A equação de *gap* do supercampo Σ , corresponde a impor que o valor esperado no vácuo do campo deslocado Σ seja nulo, em aproximação de árvore é

$$\sigma(\mu - \sigma^2\lambda) = 0 . \quad (3.13)$$

Esta equação admite duas soluções, $\sigma = 0$ e $\sigma^2 = \mu/\lambda$. Obviamente, na primeira solução a simetria de calibre não é quebrada; na segunda entretanto a simetria de calibre $U(1)$ do modelo é quebrada, embora em ambas soluções a supersimetria seja preservada.

Correções até a ordem de um laço, Figura (3.1); cinco diagramas contribuem para a equação de *gap*, resultando na seguinte condição:

$$\begin{aligned} & - 3\lambda\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + M_\Sigma^2} - \lambda\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + M_\Pi^2} \\ & - \frac{\alpha}{4} e^2 \sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + M_c^2} - \frac{e^2\sigma}{4} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{k^2 + M_A^2} - \frac{\alpha}{k^2 + \alpha^2 M_A^2} \right] \\ & + i\sigma[(1 + \delta_1)(\mu + \delta_\mu) - (1 + \delta_1)^2(\lambda + \delta_\lambda)\sigma^2 - (\mu - \sigma^2\lambda)] = 0 . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Resolvendo as integrais com a ajuda de um regulador UV Λ ¹, obtemos a seguinte parte divergente

$$-i\sigma \frac{\Lambda}{2\pi^2} \left[4\lambda + \frac{e^2}{4} \right] + i\sigma\delta_3 = 0 , \quad (3.15)$$

onde

$$\delta_3 = [(1 + \delta_1)(\mu + \delta_\mu) - (1 + \delta_1)^2(\lambda + \delta_\lambda)\sigma^2 - (\mu - \sigma^2\lambda)] = \delta_\mu - \mu\delta_1 - \sigma^2\delta_\lambda . \quad (3.16)$$

3.2.2 Correções radiativas à parte quadrática da ação efetiva

Vamos calcular as correções radiativas em um laço à parte quadrática da ação efetiva, i.e., as correções obtidas a partir dos diagramas de auto-energia dos campos dinâmicos.

¹Somente nesta seção estaremos usando um regulador do tipo *cut-off*, em todo o restante desta tese usaremos redução dimensional.

Figura 3.1: Contribuições em um laço para a equação de *gap*. Linhas contínuas representam propagadores de Σ , linhas duplas propagadores de Π , linhas onduladas representam linhas do supercampo de calibre A^α , linhas tracejadas propagadores fantasma, enquanto linhas cortadas sempre representam o respectivo supercampo externo.

Auto-energia do supercampo Σ

Os diagramas que contribuem para tal processo estão desenhados na Figura (3.2).

No estudo da renormalização da função de dois pontos de Σ , é suficiente olharmos para os diagramas que apresentam alguma divergência. Apenas os primeiros quatro diagramas desenhados na Figura (3.2) possuem alguma divergência. Assim, a parte divergente dos diagramas que representam a correção em um laço para a auto-energia de Σ devido a Figura (3.2(a)) é dada por

$$S_{\Sigma\Sigma a} = -\frac{e^2}{8} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Sigma(p, \theta) \Sigma(-p, \theta) C^{\alpha\beta} \times \left[\frac{D^2(D^2 + M_A)D_\beta D_\alpha}{k^2(k^2 + M_A^2)} + \alpha \frac{D^2(D^2 - \alpha M_A)D_\alpha D_\beta}{k^2(k^2 + \alpha^2 M_A^2)} \right] \delta^{(2)}(\theta - \theta). \quad (3.17)$$

Resolvendo a D-álgebra [41], obtemos

$$S_{\Sigma\Sigma a} = -\frac{e^2}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \Sigma(p, \theta) \Sigma(-p, \theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{k^2 + M_A^2} - \frac{\alpha}{k^2 + \alpha^2 M_A^2} \right) \quad (3.18)$$

As contribuições das Figuras (3.2(b)) e (3.2(c)) são dadas por

$$S_{\Sigma\Sigma bc} = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \Sigma(p, \theta) \Sigma(-p, \theta) \times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ 3\lambda \frac{(D^2 + M_\Sigma)\delta_{\theta\theta}}{k^2 + M_\Sigma^2} + \lambda \frac{(D^2 + M_\Pi)\delta_{\theta\theta}}{k^2 + M_\Pi^2} \right\}. \quad (3.19)$$

A expressão representada pelo diagrama Figura (3.2(d)) é dada por

$$\begin{aligned}
S_{\Sigma\Sigma d} = & -\frac{e^2}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{C_{\alpha\beta}}{[(k+p)^2 + M_\Pi^2]} \\
& \times \left\{ D_1^\alpha (D^2 + M_\Pi) \delta_{12} \left[\frac{D^2 (D^2 + M_A) D_{1\beta} D_{1\alpha}}{k^2 (k^2 + M_A^2)} \right. \right. \\
& + \alpha \frac{D^2 (D^2 - \alpha M_A) D_{1\alpha} D_{1\beta}}{k^2 (k^2 + \alpha^2 M_A^2)} \left. \right] \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) D_2^\beta \Sigma(-p, \theta_2) \\
& + D_2^\beta (D^2 + M_\Pi) \delta_{12} \left[\frac{D^2 (D^2 + M_A) D_{1\beta} D_{1\alpha}}{k^2 (k^2 + M_A^2)} \right. \\
& + \alpha \frac{D^2 (D^2 - \alpha M_A) D_{1\alpha} D_{1\beta}}{k^2 (k^2 + \alpha^2 M_A^2)} \left. \right] \delta_{12} D_1^\alpha \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) \\
& - D_1^\alpha D_2^\beta (D^2 + M_\Pi) \delta_{12} \left[\frac{D^2 (D^2 + M_A) D_{1\beta} D_{1\alpha}}{k^2 (k^2 + M_A^2)} \right. \\
& + \alpha \frac{D^2 (D^2 - \alpha M_A) D_{1\alpha} D_{1\beta}}{k^2 (k^2 + \alpha^2 M_A^2)} \left. \right] \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) \\
& - (D^2 + M_\Pi) \delta_{12} \left[\frac{D^2 (D^2 + M_A) D_{1\beta} D_{1\alpha}}{k^2 (k^2 + M_A^2)} \right. \\
& + \alpha \frac{D^2 (D^2 - \alpha M_A) D_{1\alpha} D_{1\beta}}{k^2 (k^2 + \alpha^2 M_A^2)} \left. \right] \delta_{12} D_1^\alpha \Sigma(p, \theta_1) D_2^\beta \Sigma(-p, \theta_2) \left. \right\} ,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $\delta_{12} = \delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)$ e $D_i^\alpha = D^\alpha(\theta_i)$. Resolvendo a D-álgebra da Eq.(3.20), obtemos a seguinte expressão para o diagrama Figura(3.2(d)):

$$\begin{aligned}
S_{\Sigma\Sigma d} = & \alpha \frac{e^2}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \Sigma(p, \theta) \Sigma(-p, \theta) \\
& \times \left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{[(k+p)^2 + M_\Pi^2](k^2 + \alpha^2 M_A^2)} + (finito) \right\} .
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Integrando as Eqs.(3.18, 3.19, 3.21) em k com a ajuda de um regulador UV Λ , obtemos

$$S_{\Sigma\Sigma} = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \Sigma(p, \theta) \left\{ i \left[4\lambda + \frac{e^2}{4} \right] \frac{\Lambda}{2\pi^2} + i\delta_4 + (\text{termos finitos}) \right\} \Sigma(-p, \theta) , \tag{3.22}$$

onde $\delta_4 = [3(\lambda + \delta_\lambda)(1 + \delta_1)^2 \sigma^2 - (\mu + \delta_\mu)(1 + \delta_1) - M_\Sigma] = 2\sigma^2 \delta_\lambda - \delta_3$.

Como se vê da expressão acima, sua divergência é completamente cancelada pelos mesmos contra-termos que anulam a equação de *gap* Eq.(3.15).

Figura 3.2: Contribuições em um laço para a auto-energia do supercampo Σ .

Correções radiativas a auto-energia do supercampo Π

A Figura (3.3) mostra os diagramas que contribuem para as correções radiativas à auto-energia do supercampo Π .

Assim como a função de dois pontos de Σ , apenas os quatro primeiros diagramas mostrados na Figura (3.3) apresentam alguma divergência. Note que os diagramas da função de dois pontos de Π são idênticos aos de Σ com a mudança de $\Pi \leftrightarrow \Sigma$ em todas as linhas. Assim, é fácil ver que a ação efetiva de Π pode ser escrita como:

$$S_{\Pi\Pi} = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \Pi(p, \theta) \left\{ i \left[4\lambda + \frac{e^2}{4} \right] \frac{\Lambda}{2\pi^2} + i\delta_5 + (\text{termos finitos}) \right\} \Pi(-p, \theta), \quad (3.23)$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_5 &= [(\lambda + \delta_\lambda)(1 + \delta_1)^2 \sigma^2 - (\mu + \delta_\mu)(1 + \delta_1) + \frac{\alpha\sigma^2}{2}(e + \delta_e)^2(1 + \delta_1)^2 - M_\Pi] \\ &= -\delta_3 + \frac{\alpha\sigma^2}{2}(\delta_e + e^2\delta_1). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Vemos que a parte divergente da ação efetiva também é completamente cancelada através da equação de *gap*, Eq.(3.15). Assim, determinamos que o contra-termo δ_e deve ser finito.

Figura 3.3: Contribuições em um laço à auto-energia do supercampo Π .

Auto-energia do supercampo de calibre A^α

Os quatro diagramas que contribuem para tal processo, estão representados na Figura (3.4). O primeiro termo da ação efetiva, contribuição do diagrama Figura (3.4(a)), é dada por:

$$\begin{aligned}
 S_{AA\ a} &= -\frac{e^2}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2)}{[(k+p)^2 + M_\Pi^2](k^2 + M_\Sigma^2)} \\
 &\times \left\{ D_1^\alpha D_2^\beta (D^2 - M_\Pi) \delta_{12} (D^2 - M_\Sigma) \delta_{12} + (D^2 - M_\Pi) \delta_{12} D_1^\alpha D_2^\beta (D^2 - M_\Sigma) \delta_{12} \right. \\
 &- \left. D_1^\alpha (D^2 - M_\Pi) \delta_{12} D_2^\beta (D^2 - M_\Sigma) \delta_{12} - D_2^\beta (D^2 - M_\Pi) \delta_{12} D_1^\alpha (D^2 - M_\Sigma) \delta_{12} \right\}, \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

onde $\delta_{12} = \delta^{(2)}(\theta_1 - \theta_2)$ e $D_i^\alpha = D^\alpha(\theta_i)$.

Efetuando a D-álgebra, obtemos

$$\begin{aligned}
 S_{AAa} &= \frac{e^2}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + M_\Pi^2](k^2 + M_\Sigma^2)} \\
 &\times A^\alpha(p, \theta) \left\{ - (M_\Sigma + M_\Pi) (p_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha} D^2) \right. \\
 &+ \left. p_{\alpha\beta} D^2 + (2p^2 + 4M_\Sigma M_\Pi + 4k^2) C_{\beta\alpha} \right\} A^\beta(-p, \theta). \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

Figura 3.4: Auto-energia de A_α na aproximação de um laço.

e finalmente após algumas manipulações algébricas obtemos

$$\begin{aligned}
S_{AAa} &= -\frac{e^2}{8} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + M_\Pi^2](k^2 + M_\Sigma^2)} \\
&\times \left\{ 4W^\alpha W_\alpha - 4(M_\Sigma - M_\Pi)A^\alpha W_\alpha + 4M_\Sigma M_\Pi A^\alpha A_\alpha \right. \\
&\left. - D^\alpha A_\alpha [D^2 - 2(M_\Sigma - M_\Pi)] D^\beta A_\beta - 4k^2 A^\alpha A_\alpha \right\}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Note que as correções radiativas geraram um termo não-local de Maxwell ($W^\alpha W_\alpha$) para ação efetiva do supercampo de calibre. Este termo não estava presente na ação clássica original. Também foram geradas correções aos termos de Chern-Simons e para o termo de massa $A^\alpha A_\alpha$. Esta última correção em particular, possui um termo perigosamente divergente. Para esse tipo de divergência, a ação clássica original não apresenta nenhum contra-termo, sendo assim, ela deve ser cancelada ao somarmos com as outras contribuições da função de dois pontos de A^α , como mostraremos adiante.

O diagrama Figura (3.4(b)) contribui com

$$\begin{aligned}
S_{AAb} &= -\frac{\sigma^2 e^4}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2(k^2 + M_A^2)(k^2 + \alpha^2 M_A^2)[(k+p)^2 + M_\Sigma^2]} \\
&\times \left\{ -\alpha(k^2 + M_A^2) \left[-4M_A W^\alpha W_\alpha + 2\alpha M_\Sigma M_A A^\alpha W_\alpha \right. \right. \\
&+ \alpha M_A D^\alpha A_\alpha (D^2 - M_\Sigma) D^\beta A_\beta - 2k^2 (M_\Sigma - \alpha M_A) A^\alpha A_\alpha - 2k^2 D^\alpha A_\alpha D^\beta A_\beta \left. \right] \\
&+ (k^2 + \alpha^2 M_A^2) \left[4M_A W^\alpha W_\alpha - 2(k^2 - M_\Sigma M_A) A^\alpha W_\alpha \right. \\
&+ M_A D^\alpha A_\alpha (D^2 - M_\Sigma) D^\beta A_\beta - 2k^2 (M_\Sigma - \alpha M_A) A^\alpha A_\alpha \left. \right] \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

e os gráficos Figura (3.4(c)) e Figura (3.4(d)) contribuem com

$$S_{AAcd} = -\frac{e^2}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta A^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{k^2 + M_\Sigma^2} + \frac{1}{k^2 + M_\Pi^2} \right\}. \quad (3.29)$$

Somando todas as contribuições, obtemos

$$\begin{aligned} S_{AA} &= \frac{e^2}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta A^\alpha(p, \theta) \left\{ -i\sigma^2 \delta_\alpha^\beta \delta_6 + i\delta_2 \frac{D^\beta D_\alpha}{e^2} \right. \\ &+ \delta_\alpha^\beta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{(k^2 + M_\Sigma^2)[(k+p)^2 + M_\Pi^2]} \\ &\left. - \frac{\delta_\alpha^\beta}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{k^2 + M_\Pi^2} + \frac{1}{k^2 + M_\Sigma^2} \right) + (\text{finito})_\alpha^\beta \right\} A_\beta(-p, \theta) \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde $\delta_6 = [(1 + \delta_2)^2(1 + \delta_1)(e + \delta_e)^2 - e^2]$.

Expandindo Eq.(3.30) em torno de $p = 0$, observamos o cancelamento total das divergências na função de dois pontos do supercampo de calibre. O não cancelamento dessas divergências acarretariam na necessidade da inclusão de um contra-termo infinito de massa, que obviamente quebra a invariância de calibre do modelo na ação clássica. Como discutimos no capítulo 2, esse tipo de fenômeno ocorre na eletrodinâmica quântica supersimétrica tridimensional em dois laços de aproximação, pois a regularização usada não preserva a simetria de calibre, mantendo a supersimetria manifesta.

O cancelamento das divergências da função de dois pontos do supercampo A^α , implica na finitude do contratermo δ_6 .

Auto-energia do supercampo fantasma e mistura $A^\alpha D_\alpha \Pi$

Somente um diagrama, Figura (3.5), contribui para o processo de correção à auto-energia do supercampo fantasma. Sua expressão é dada por

$$\begin{aligned} S_{\bar{c}c} &= -\frac{\alpha^2}{8} e^4 \sigma^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\bar{c}(-p, \theta) [D^2 + (M_c + M_\Sigma)] c(p, \theta)}{(k^2 + M_c^2)[(k-p)^2 + M_\Sigma^2]} \\ &- \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \bar{c}(-p, \theta) \left[\delta_c D^2 - \frac{\alpha \sigma^2}{4} (e^2 \delta_c + e^2 \delta_1 + 2e^2 \delta_2 + 2\delta_e) \right] c(p, \theta), \end{aligned} \quad (3.31)$$

que é claramente finita.

No momento em que fixamos o calibre, tivemos que usar um fixador de calibre do tipo R_ξ para eliminar a mistura entre A^α e Π que aparecera em nível de árvore devido

Figura 3.5: Contribuição em um laço para a auto-energia do supercampo fantasma c .

Figura 3.6: Diagramas que misturam os supercampos A^α e Π .

à quebra espontânea de simetria de calibre. Entretanto, olhando para a ação, vemos que dois diagramas contribuem para este vértice na aproximação em um laço. Esses diagramas estão desenhados na Figura (3.6).

A expressão correspondente ao diagrama Figura (3.6(a)) é dada por

$$S_{A\Pi} = \frac{\lambda\sigma}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{A_\alpha(p, \theta_1) \Pi(-p, \theta_2)}{[(k+p)^2 + M_\Sigma^2](k^2 + M_\Pi^2)} \\ \times \left[(D^2 - M_\Sigma) \delta_{12} D_1^\alpha (D^2 - M_\Pi) \delta_{12} - D_1^\alpha (D^2 - M_\Sigma) \delta_{12} (D^2 - M_\Pi) \delta_{12} \right]. \quad (3.32)$$

Resolvendo a D-álgebra, verificamos que esta contribuição é nula. De forma análoga, o diagrama Figura (3.6(b)) se anula quando integramos sobre as variáveis de Grassmann. Assim, verificamos que não existe mistura entre os supercampos A^α e Π até a ordem de um laço de aproximação perturbativa.

3.2.3 Estrutura geral das divergências

Para explorar a renormalizabilidade do modelo em um laço, vamos calcular o grau de divergência superficial $\mathcal{D}$ de um diagrama arbitrário $\mathcal{F}$. Para isto, denotaremos o número de vértices do tipo $(D^\alpha \Pi A_\alpha \Sigma - D^\alpha \Sigma A_\alpha \Pi)$ por V_1 , o número de vértices do tipo $\Sigma^2 A^2$ por V_2 , o de $\Pi^2 A^2$ por V_3 , de $A^2 \Sigma$ por V_4 , de Σ^4 como V_5 , de Π^4 como V_6 , de $\Sigma^2 \Pi^2$ por V_7 , de Σ^3 por V_8 , de $\Sigma \Pi^2$ como V_9 , e o número de vértices do tipo $\bar{c} \Sigma c$ por V_{10} .

Sejam P_Σ , P_A , P_Π e P_c o número de propagadores do supercampo Σ , do supercampo de calibre A^α , de Π e do supercampo fantasma usados para a confecção de um diagrama $\mathcal{F}$, respectivamente.

Para um diagrama arbitrário, o grau de divergência superficial $\mathcal{D}$ é dado por

$$\mathcal{D} = 2L - P_A - P_\Sigma - P_\Pi - P_c + \frac{V_1}{2} , \quad (3.33)$$

onde cada laço L contribui para $\mathcal{D}$ com 2, 3 potências vindo da integral em d^3k e -1 vindo da contração do laço em um ponto, e cada propagador do modelo contribui com -1 (veja Eq.(3.11)).

O número de propagadores usados na confecção de um dado diagrama de Feynman, pode ser escrito em termos do número de campos externos E e do número total de supercampos N envolvidos na construção do diagrama, através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} P_\Sigma &= \frac{1}{2}(N_\Sigma - E_\Sigma) , & P_\Pi &= \frac{1}{2}(N_\Pi - E_\Pi) , \\ P_A &= \frac{1}{2}(N_A - E_A) , & P_c &= \frac{1}{2}(N_c - E_c) . \end{aligned} \quad (3.34)$$

É fácil verificar que o número total de supercampos N usados na construção do diagrama está ligado com o número de vértices do modelo da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} N_\Sigma &= V_1 + 2V_2 + V_4 + 4V_5 + 2V_7 + 3V_8 + V_9 + V_{10} , \\ N_\Pi &= V_1 + 2V_3 + 4V_6 + 2V_7 + 2V_9 , \\ N_A &= V_1 + 2V_2 + 2V_3 + 2V_4 , & N_c &= 2V_{10} . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Usando a identidade topológica $L + V - P = 1$, determinamos

$$\mathcal{D} = 2 - \frac{1}{2}(E_A + E_\Sigma + E_\Pi + E_c) - \frac{1}{2}(V_4 + V_8 + V_9 + V_{10}) - \frac{N_D}{2} , \quad (3.36)$$

onde N_D é o número de operadores D^α agindo nas pernas externas do diagrama.

Através da equação acima, vemos que qualquer diagrama em um laço com mais do que quatro pernas externas é finito. Nenhum diagrama possui divergência linear, além é claro, dos gráficos com uma ou duas pernas externas já estudadas. Os diagramas com três e quatro pernas externas e grau de divergência superficial $\mathcal{D} = 0$, são mostrados nas Figuras (3.7) e (3.8), respectivamente.

Figura 3.7: Diagramas de três pontos com $\mathcal{D} = 0$.

Amputando as pernas externas, os diagramas das Figuras (3.7(a-i)) possuem uma expressão proporcional a

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \frac{(D^2 - M_1)\delta_{12}(D^2 - M_2)\delta_{12}}{[(k+p)^2 + M_1^2](k^2 + M_2^2)} \mathcal{G}(p, \theta_1, \theta_2) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 \frac{D^2 - (M_1 + M_2)}{[(k+p)^2 + M_1^2](k^2 + M_2^2)} \mathcal{G}(p, \theta_1) . \end{aligned} \quad (3.37)$$

Vemos que o integrando da Eq.(3.37) é similar ao integrando da auto-energia do super-campo fantasma, Eq.(3.31), que já discutimos ser finito.

Os diagramas Figuras (3.7(j,k)), que possuem três propagadores com linhas internas, possuem a seguinte estrutura:

$$\int \frac{d^3k}{k^6} d^2\theta_1 d^2\theta_2 d^2\theta_3 (D_{vertex}^3) (D^2 - M_1)\delta_{12}(D^2 - M_2)\delta_{23}(D^2 - M_3)\delta_{31} \mathcal{G}(p, \theta_1, \theta_2, \theta_3). \quad (3.38)$$

Tais diagramas são proporcionais a D^9 . Um fator de D^2 deveria ser aplicado a um δ para que permaneça uma integração $d^2\theta$. Portanto temos no numerador uma potência de $|D|^7$, que é, na sua forma mais divergente proporcional a $k^3 D$. Este operador D que permanece deve ser movido por integração por partes para alguma perna externa. Assim,

Figura 3.8: Diagramas com quatro pernas externas e grau de divergência superficial logarítmica.

a Eq.(3.38) adquire a seguinte estrutura:

$$\int \frac{d^3 k}{k^4} d^2 \theta \, k_{\alpha\beta} D^\alpha \mathcal{G}^\beta(p, \theta) , \quad (3.39)$$

que é antissimétrica sobre integração em k e portanto nula.

Assim, verificamos que todas as funções de três pontos do modelo são finitas.

Também com grau de divergência superficial $\mathcal{D} = 0$, as funções de quatro pontos, mostradas na Figura (3.8), são finitas. Para tal conclusão, é suficiente notar que os diagramas com dois propagadores internos possuem a mesma estrutura das correspondentes funções de três pontos Figuras (3.7(a-i)), que como discutido anteriormente são finitas.

As funções de quatro pontos com quatro propagadores internos possuem a seguinte estrutura para sua parte mais divergente:

$$\int \frac{d^3 k}{k^8} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 d^2 \theta_3 d^2 \theta_4 \, (D_{vertex}^4) D^2 \delta_{12} D^2 \delta_{23} D^2 \delta_{34} D^2 \delta_{41} \mathcal{G}(p, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) . \quad (3.40)$$

Estes diagramas também são finitos pelos mesmos argumentos comentados na análise das funções de três pontos similares.

3.3 Quebra dinâmica de simetria de calibre

Na seção anterior vimos que o modelo definido na Eq.(3.1) exibe geração de massa através da quebra espontânea de sua simetria de calibre. Uma outra propriedade interessante deste modelo é que sua simetria de calibre pode ser quebrada dinamicamente, como foi estudado na versão não-supersimétrica em [29]. Nesta seção vamos nos dedicar a estudar esse fenômeno no modelo supersimétrico definido na Eq.(3.1), onde a ação do modelo é dada pela Eq.(3.9), mas com a particularidade de que tomaremos $\mu = 0$. Por simplicidade trabalharemos no calibre de Landau $\alpha = 0$. Portanto, as massas dos supercampos Σ , Π e A^α serão $M_\Sigma = 3\lambda\sigma^2$, $M_\Pi = \lambda\sigma^2$, e $M_A = e^2\sigma^2/4$, respectivamente. Nesta escolha do parâmetro α , os fantasmas de Faddeev-Popov desacoplam do modelo.

Em nível de árvore, o mínimo do potencial efetivo V_{eff} está em zero (veja Eq.(3.4) para $\mu = 0$). Para verificar se este modelo possui quebra dinâmica de sua simetria de calibre, vamos calcular a equação de *gap* do modelo, tentando encontrar uma solução cujo valor esperado no vácuo do supercampo Σ seja não trivial.

As correções em um laço estão desenhadas na Figura 3.9, e podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\Gamma_{1l(a)}^{(1)} &= 3\lambda\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + M_\Sigma^2}, & \Gamma_{1l(b)}^{(1)} &= \lambda\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + M_\Pi^2}, \\ \Gamma_{1l(c)}^{(1)} &= \frac{e^2}{4}\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + M_A^2}.\end{aligned}\quad (3.41)$$

Resolvendo as integrais na Eq.(3.41) utilizando redução dimensional como esquema de regularização, e somando a contribuição em nível de árvore, obtemos a seguinte função de um ponto

$$\Gamma_{(0+1)l}^{(1)} = \frac{\sigma^3}{4\pi} \left(4\pi\lambda - 10\lambda^2 - \frac{e^4}{16} \right). \quad (3.42)$$

É fácil ver que impondo $\Gamma_{(0+1)l}^{(1)}|_{\sigma=v} = 0$, a única solução possível é $v = 0$, i.e., não há massa gerada em um laço de aproximação.

As contribuições em dois laços para a equação de *gap* são mostradas na Figura 3.10. Os diagramas em dois laços estão calculados no apêndice C, e a equação de *tadpole* em dois

Figura 3.9: Contribuições em um laço para a equação de *gap* no calibre de Landau.

laços é dada por

$$\Gamma_{(0+1+2)l}^{(1)} = \sigma^3 \left[b_1 + b_2 \ln \frac{\sigma^2}{\mu} \right] + B\sigma^3 = 0 , \quad (3.43)$$

onde b_1 é uma função das constantes de acoplamento e de $1/\epsilon$ (onde $\epsilon = 3 - D$), B é um contra-termo conveniente (veja a Eq.(3.12)), e b_2 é dado por

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{1}{1536\pi^2} (3e^6 + 13e^4\lambda - 112e^2\lambda^2 - 7232\lambda^3) \\ &\approx [-(0.7 \times 10^{-3})e^6 - (0.3 \times 10^{-3})e^4\lambda + (2.7 \times 10^{-2})e^2\lambda^2 + 1.8\lambda^3] . \end{aligned} \quad (3.44)$$

Através do método do *tadpole* [59], o potencial efetivo pode ser calculado a partir da função de um ponto. Numa teoria supersimétrica, o potencial efetivo calculado a partir de sua função de um ponto, possui a forma geral

$$V_{eff}(\sigma, f_{cl}) = \int df_{cl} \Gamma^{(1)}(f_{cl}, \sigma) , \quad (3.45)$$

onde f_{cl} é o campo auxiliar clássico pertencente ao mesmo supermultiplete de $\Sigma(x, \theta)$.

Para tratarmos da renormalização do modelo, precisamos fazer uma conexão entre o potencial efetivo e a função de um ponto que calculamos na Eq.(3.43). O que calculamos é a função de um ponto $\Gamma_{(0+1+2)l}^{(1)} = \Gamma_{(0+1+2)l}^{(1)}(f_{cl} = 0, \sigma)$. Com essa escolha na função de um ponto, estamos determinando que o mínimo do potencial efetivo esteja localizado necessariamente em $f_{cl} = 0$, ou seja, supersimetria não é quebrada. A conexão entre V_{eff} e $\Gamma_{(0+1+2)l}^{(1)}$ é definida por

$$\left. \frac{\partial V_{eff}(\sigma, f_{cl})}{\partial f_{cl}} \right|_{f_{cl}=0} = \Gamma^{(1)}(f_{cl} = 0, \sigma) = \Gamma_{(0+1+2)l}^{(1)} . \quad (3.46)$$

Figura 3.10: Diagramas que contribuem para a equação de *gap* em dois laços.

Assim, a condição de renormalização para a constante de acoplamento

$$\left. \frac{\partial^4 V_{eff}(\sigma, f_{cl})}{\partial^3 \sigma \partial f_{cl}} \right|_{f_{cl}=0, \sigma=v} = -3!\lambda, \quad (3.47)$$

em que v é o valor do campo clássico σ no mínimo de V_{eff} , pode ser escrita através da relação

$$\begin{aligned} -3!\lambda &= \left. \frac{\partial^4 V_{eff}}{\partial^3 \sigma \partial f_{cl}} \right|_{f_{cl}=0, \sigma=v} = - \left. \frac{\partial^3 \Gamma_{(0+1+2)l}^{(1)}}{\partial^3 \sigma} \right|_{\sigma=v} \\ &= -6B - 6b_1 - 22b_2 - 6b_2 \log \frac{v^2}{\mu}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

assim, determinamos o contra-termo B , e podemos escrever a função de um ponto renor-

malizada como

$$\Gamma_{R(0+1+2)l}^{(1)} = \lambda\sigma^3 + \frac{b_2}{3}\sigma^3 \left(\log \frac{\sigma^2}{v^2} - 11 \right). \quad (3.49)$$

Portanto, a equação de *gap* $\Gamma_{R(0+1+2)l}^{(1)} = 0$, possui a seguinte solução

$$\sigma^2 = v^2 \exp \left(\frac{11}{3} - \frac{\lambda}{b_2} \right). \quad (3.50)$$

Ajustando v como sendo o valor de σ no mínimo do potencial efetivo, encontramos que $\lambda = 11b_2/3 \approx -(0.7 \times 10^{-3})e^6 + \mathcal{O}(e^{10}) \ll 1$. Vemos portanto que uma solução com quebra dinâmica de simetria de calibre e geração de massa para A^α ocorre em dois laços.

O valor da massa gerada $M_\Sigma^2 = d^2 V_{eff}/d\sigma^2 \Big|_{\sigma=v}$, só pode ser obtido a partir de um cálculo direto do potencial efetivo, o que numa teoria supersimétrica em três dimensões do espaço-tempo se torna muito complicado [60]. Porém, podemos afirmar a partir da Eq.(3.10), que a razão entre as massas de A^α e Σ é dada por $M_A^2/M_\Sigma^2 = e^2/(12\lambda)$, na fase onde a supersimetria é manifesta.

Por outro lado, o modelo de um supercampo escalar sem massa em auto-interação (caso $e = 0$), não apresenta essa quebra. De fato, se tomarmos o limite $e = 0$ em b_2 , Eq.(3.44), obtemos um resultado que está fora da região perturbativa $\lambda \approx 0.8$, como nos modelos não-supersimétricos [29, 30], e nada podemos afirmar sobre nosso resultado.

Vemos que através do deslocamento de $\Sigma(x, \theta)$ pelo campo clássico σ independente de θ , não conseguimos encontrar uma expressão para o potencial efetivo, pois não conhecemos como a função de um ponto $\Gamma_{(0+1+2)l}^{(1)}$ depende de f_d . O que conseguimos determinar é o ponto de mínimo do potencial efetivo, ou seja, sua primeira derivada em relação a f_d na fase SUSY invariante.

Neste trabalho, nos restringimos a estudar a geração dinâmica de massa na fase SUSY invariante, pois, estudar a possibilidade de quebra de SUSY é uma tarefa muito árdua em teorias supersimétricas em três dimensões do espaço-tempo. Isto porque os propagadores, diferentemente de modelos quadridimensionais, não são diagonais em θ , tornando a D-álgebra uma verdadeira besta bíblica! O estudo de quebra de SUSY, poderia ser feita através do modelo escrito em componentes, que ainda assim não é uma tarefa fácil, pois o fato dos propagadores não serem diagonais em θ no formalismo de supercampos, nos leva à condição de que os propagadores do modelo em componentes não são diagonais nos campo escalares, devido a presença de um termo quadrático da forma $MF\sigma$.

3.4 Sumário

Estudamos o mecanismo de quebra espontânea e dinâmica de simetria de calibre no modelo de Chern-Simons supersimétrico.

O modelo possui um mínimo clássico não trivial dado por $\langle \Phi \rangle = \sqrt{\mu/2\lambda}$, fazendo com que este modelo possua duas fases. Na fase quebrada espontaneamente, calculamos a parte divergente das funções de dois pontos dos supercampos reais Σ e Π , bem como a do supercampo de calibre A^α .

A parte divergente das funções de dois pontos de Σ e Π são canceladas a partir da renormalização da equação de gap, Eq(3.15). Este resultado determina que o contra-termo δ_λ é finito. Verificamos que a função de dois pontos do supercampo de calibre é também finita, embora cada diagrama isolado que contribui para o processo seja linearmente divergente. Em um laço de aproximação, o modelo é renormalizado através de um contra-termo de massa δ_μ .

Em nossos cálculos, usamos um fixador de calibre do tipo R_ξ para eliminar a mistura entre os supercampos A^α e Π . Mostramos até a ordem de um laço que os diagramas que contribuem para tal processo de mistura são nulos.

Em concordância com a Eq.(3.36), toda divergência do modelo vem das funções de até quatro pontos. Divergências lineares aparecem somente nas funções de um e dois pontos. Como já discutimos, essas divergências são renormalizáveis. Os diagramas que aparentam possuir divergências logarítmicas vem das funções de três e quatro pontos, que mostramos serem finitas.

Ao ajustarmos $\mu = 0$, e trabalhando num calibre tipo Landau, mostramos que o modelo possui uma fase que exhibe quebra dinâmica de simetria de calibre em que, diferentemente dos modelos estudados num espaço-tempo quadridimensional (Coleman-Weinberg [30]), a geração dinâmica de massa é obtida após correções em dois laços ao potencial efetivo. Mostramos que se a constante de acoplamento do setor escalar λ for da ordem de $e^6 \ll 1$, podemos estudar o modelo perturbativamente. Em nossa abordagem, a supersimetria é manifesta.

Conclusões

Nesta tese estudamos a renormalização da eletrodinâmica quântica supersimétrica num espaço-tempo tridimensional (SQED₃). As únicas possibilidades de divergência na teoria, vêm da função de dois pontos do supercampo de calibre em dois laços, que mostramos ser finita no calibre $\alpha = -8$. A presença dessa divergência deveria ser evitada ou cancelada na soma dos diagramas como ocorre em um laço, devido à invariância de calibre do modelo. Porém, é conhecido que a regularização usada aqui, redução dimensional, em ordens mais altas de perturbação quebra a invariância de calibre. É conhecido que regularização por redução dimensional mantém a supersimetria manifesta, diferentemente da regularização dimensional, que preserva a simetria de calibre mas quebra a supersimetria. O fato é que redução dimensional é o procedimento de regularização mais conveniente nos cálculos perturbativos no formalismo de supercampos. Sendo assim, face a nossa escolha de regularização, observamos a necessidade de inclusão de um contra-termo de massa finito na lagrangiana clássica para que não haja violação das identidades de Ward. É natural esperar que a generalização não-abeliana do presente modelo, também compartilhe das propriedades estudadas aqui, como a finitude em dois laços em um calibre específico, igualmente às situações comutativas e não-comutativas em um laço [12, 14]. Portanto, num futuro próximo, seria importante verificar se isto de fato acontece nas generalizações citadas desse modelo.

Estudamos também o mecanismo de quebra espontânea e quebra dinâmica de simetria de calibre no modelo de Chern-Simons supersimétrico acoplado a um supercampo escalar, onde discutimos que o modelo possui um mínimo clássico não trivial dado por $\langle \Phi \rangle = \sqrt{\mu/2\lambda}$, fazendo com que este modelo possua duas fases. Na fase quebrada espontaneamente, calculamos a parte divergente das funções de dois pontos dos supercampos reais Σ e Π , bem como a do supercampo de calibre A^α .

A equação de gap, Eq(3.15), faz com que a parte divergente das funções de dois pontos de Σ e Π sejam completamente canceladas, determinando que o contra-termo δ_λ seja finito.

Verificamos que a função de dois pontos do supercampo de calibre é finita, embora cada diagrama isolado que contribui para o processo seja linearmente divergente. Determinamos assim, que o modelo é renormalizado através de um contra-termo de massa δ_μ .

Em nossos cálculos, usamos um fixador de calibre do tipo R_ξ para eliminar a mistura entre os supercampos A^α e Π . Mostramos até a ordem de um laço que os diagramas que contribuem para tal processo de mistura são nulos.

Em concordância com a Eq(3.36), toda divergência do modelo vem das funções de até quatro pontos. Divergências lineares aparecem somente nas funções de um e dois pontos em um laço de aproximação. Como já discutimos anteriormente, essas divergências são renormalizáveis. Os diagramas que aparentam possuir divergências logarítmicas em um laço vem das funções de três e quatro pontos, que mostramos serem finitas.

Para a escolha $\mu = 0$, o modelo de Chern-Simons acoplado a um supercampo escalar se torna o equivalente tridimensional do modelo estudado por Coleman [30] onde na ação clássica não aparece nenhuma escala. Verificamos que este modelo exibe uma fase onde sua simetria de calibre é dinamicamente quebrada, diferentemente dos modelos estudados num espaço-tempo quadridimensional, a geração dinâmica de massa é obtida após correções em dois laços à equação de gap. Mostramos que se a constante de acoplamento do setor escalar λ for da ordem de e^6 , podemos estudar o modelo perturbativamente. Em nossa abordagem, a supersimetria é manifesta.

Uma vez que não estudamos a possibilidade de quebra de supersimetria no modelo de Chern-Simons, isto se torna uma continuação natural da presente tese, uma vez que quebra dinâmica de supersimetria é factível em teorias definidas num espaço-tempo tridimensional [61].

Apêndice A

Teoria quântica de campos em espaço-tempo não-comutativo

Foi na década de 40 do século passado que Heisenberg sugeriu que, um princípio da incerteza para coordenadas melhoraria o problema das divergências ultravioletas (UV) que apareciam na abordagem perturbativa na teoria quântica de campos[62]. Inspirado por essa idéia, o primeiro artigo em teoria quântica de campos formulado num espaço não-comutativo foi publicado em 1947[63], mas devido ao sucesso da teoria da renormalização, essa idéia foi logo abandonada.

Em trabalhos recentes relacionados à teoria de Cordas, a teoria de Yang-Mills não-comutativa surgiu naturalmente como um limite de baixa energia [64, 65], produzindo um renascimento do interesse por essas teorias. Outra motivação atual para o estudo das teorias não-comutativas [66] se relaciona à idéia que ela poderia ser uma formulação matemática razoavelmente simples para representar a proposta de Wheeler e de Witt do "spacetime foam", i.e., da idéia que na ordem do comprimento de Planck ($10^{-33}cm$), na qual os efeitos da gravitação se tornam extremamente fortes, o espaço-tempo perde sua estrutura contínua e deve envolver flutuações quânticas de geometria e topologia.

Neste capítulo vamos apresentar as principais ferramentas para o estudo de teorias de campos quando formuladas num espaço não comutativo. Vamos abordar o problema de encontrar as regras de Feynman para uma dada teoria, e por fim, analisaremos a chamada mistura infravermelha/ultravioleta (IV/UV).

A.1 O Produto Moyal

Antes de estudarmos a correspondência Weyl-Moyal, que é uma poderosa ferramenta no estudo de teorias quântica de campos em espaço-tempo não-comutativo, vamos mostrar o poder do produto Moyal no contexto de quantização por deformação[67] como proposto primeiramente por Weyl. Para exemplificar, considere um sistema unidimensional com coordenadas q e momentum p clássicas (não-quantizadas). O produto Moyal de duas funções $f(q, p)$ e $g(q, p)$ definidos no espaço de fase é definido por

$$(f * g)(q, p) = f(q, p) \exp\left\{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)\right\} g(q, p) . \quad (\text{A.1})$$

Pela definição acima, vemos que o produto Moyal é não-comutativo. Vamos verificar essa propriedade através de um exemplo simples. Seja $f(q, p) = q$ e $g(q, p) = p$, assim

$$q * p = q \left\{1 + \frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)\right\} p = qp + \frac{i\hbar}{2} ,$$

$$p * q = p \left\{1 + \frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q)\right\} q = qp - \frac{i\hbar}{2} ,$$

portanto o comutador Moyal dessas funções é

$$[q, p]_* \equiv q * p - p * q = i\hbar . \quad (\text{A.2})$$

Esta última relação “reproduz” o princípio da incerteza de Heisenberg, ou seja, a substituição do produto ordinário entre funções pelo produto Moyal é equivalente ao esquema de quantização quando promovemos grandezas clássicas à operadores que atuam no espaço de Hilbert.

O produto Moyal carrega a informação da incerteza entre p e q , assim seria útil generalizar sua definição para que este carregue a informação da não-comutatividade entre as próprias coordenadas do espaço-tempo. A próxima seção é destinada a derivar uma expressão para o produto Moyal que satisfaça esta idéia.

A.2 A Correspondência Weyl-Moyal

Nosso ponto de partida para definirmos uma teoria de campo num espaço-tempo não-comutativo, é promover as grandezas clássicas de posição e tempo para operadores que atuem no espaço de Hilbert, e que satisfaçam a seguinte regra de comutação ¹:

$$[\hat{x}^M, \hat{x}^N] = i\Theta^{MN} . \quad (\text{A.3})$$

onde Θ^{MN} é uma matriz antissimétrica, cujos elementos são números reais que comutam com os $\hat{x}$'s.

Vamos introduzir o operador [68, 69, 70]

$$T(k, \hat{x}) = e^{-ik_M \hat{x}^M} , \quad (\text{A.4})$$

(em que os k 's são números clássicos), com $\hat{x}^M$ sendo autoadjunto.

Tal operador obedece as seguintes regras²:

1. $T^\dagger(k, \hat{x}) = T(-k, \hat{x})$;
2. $T(k, \hat{x})T(k', \hat{x}) = T(k + k', \hat{x}) \exp\left(-\frac{i}{2}k_M k'_N \Theta^{MN}\right)$;
3. $\text{Tr } T(k, \hat{x}) = (2\pi)^d \prod_M \delta(k_M)$.

Da mesma forma que Weyl[71], para o campo clássico $\varphi(x)$ vamos associar um operador Φ :

$$\begin{aligned} \Phi[\varphi] &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int dx dk T(k, \hat{x}) e^{ik_M x^M} \varphi(x) \\ &= \int \frac{dk}{(2\pi)^D} T(k, \hat{x}) \tilde{\varphi}(k) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

onde para simplificar a notação definimos $dk \equiv d^D k$ e $dx \equiv d^D x$, e

$$\tilde{\varphi}(k) = \int dx e^{ik_M x^M} \varphi(x) \quad (\text{A.6})$$

¹Somente neste apêndice usaremos a assinatura $(+ - - -)$. Os índices que denotam as coordenadas do espaço-tempo são representados por letras maiúsculas do alfabeto latino, e.g., $M, N, \dots$.

²A propriedade (2) é derivada a partir da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorf : $e^A e^B = e^{A+B} e^{[A,B]/2}$ para $[A, B]$ um número clássico.

é a transformada de Fourier de $\varphi(x)$.

Vamos calcular o traço do produto de dois operadores Φ_1 e Φ_2 ,

$$Tr(\Phi_1\Phi_2) = \int \frac{dk_1}{(2\pi)^D} \frac{dk_2}{(2\pi)^D} \tilde{\varphi}_1(k_1)\tilde{\varphi}_2(k_2)Tr\left[T(k_1, \hat{x})T(k_2, \hat{x})\right], \quad (\text{A.7})$$

usando a propriedade (2) do operador $T(k)$ temos

$$Tr(\Phi_1\Phi_2) = \int \frac{dk_1}{(2\pi)^D} \frac{dk_2}{(2\pi)^D} \tilde{\varphi}_1(k_1)\exp\left(-\frac{i}{2}k_1^M\Theta_{MN}k_2^N\right)\tilde{\varphi}_2(k_2)(2\pi)^D\delta^D(k_1+k_2). \quad (\text{A.8})$$

Com a representação de Fourier para os campos $\tilde{\varphi}_1(k_1)$ e $\tilde{\varphi}_2(k_2)$, podemos escrever o traço do produto dos operadores Φ_1 e Φ_2 como sendo

$$\begin{aligned} Tr(\Phi_1\Phi_2) &= \int dx \varphi_1(x)\exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_{x^M}\Theta^{MN}\overrightarrow{\partial}_{x^N}\right)\varphi_2(x) \\ &= \int dx \varphi_1(x) * \varphi_2(x). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Essa é a correspondência Weyl-Moyal, que relaciona o traço do produto de operadores não-comutativos com a integral espacial do produto Moyal entre campos clássicos.

O produto Moyal tem como sua maior propriedade ser extremamente não local, pois se expandirmos a exponencial em potências de Θ , obtemos infinitas derivadas atuando sobre os campos clássicos,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) * \varphi_2(x) &= \varphi_1(x)\exp\left(\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial}_{x^M}\Theta^{MN}\overrightarrow{\partial}_{x^N}\right)\varphi_2(x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} [\partial_{M_1} \dots \partial_{M_n} \varphi_1(x)] \Theta^{M_1 N_1} \dots \Theta^{M_n N_n} [\partial_{N_1} \dots \partial_{N_n} \varphi_2(x)] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Usando a Eq(A.8), é fácil ver que o produto Moyal obedece a seguinte propriedade:

$$\int dx \varphi_1(x) * \varphi_2(x) = \int dx \varphi_1(x)\varphi_2(x). \quad (\text{A.11})$$

Em geral, podemos escrever o traço do produto de n operadores

$$Tr(\Phi_1\Phi_2\dots\Phi_n) = \int dx \varphi_1(x) * \varphi_2(x) * \dots * \varphi_n(x). \quad (\text{A.12})$$

Com isso, pela propriedade do traço, o produto Moyal não é modificado por permutações

cíclicas dos n campos φ . Usando a transformação inversa da Eq(A.6), a Eq(A.12) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int dx \varphi_1(x) * \dots * \varphi_n(x) &= \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \dots \frac{d^D k_n}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(k_1 + \dots + k_n) \\ &\quad \tilde{\varphi}_1(k_1) \dots \tilde{\varphi}_n(k_n) \exp\left(-i \sum_{i < j}^n k_i \wedge k_j\right), \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

onde $k_i \wedge k_j \equiv (1/2)k_i^M \Theta_{MN} k_j^N$.

Quando levamos em conta a conservação do quadri-momentum no vértice, o n -ésimo momentum pode ser escrito em termos dos $(n - 1)$ momenta restantes. Isto significa que quando há um produto Moyal de n campos $\phi(x)$ integrado em x , podemos desprezar um produto Moyal entre os campos na Eq(A.13), ou seja,

$$\begin{aligned} \int dx \varphi_1(x) * \dots * \varphi_n(x) &= \int dx \varphi_1(x) \varphi_2(x) * \dots * \varphi_n(x) \\ &= \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \dots \frac{d^D k_n}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta^D(k_1 + \dots + k_n) \\ &\quad \tilde{\varphi}_1(k_1) \dots \tilde{\varphi}_n(k_n) \exp\left(-i \sum_{i < j}^{n-1} k_i \wedge k_j\right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

É possível introduzir derivadas dos operadores de Weyl[66] que será útil para definirmos uma ação num espaço-tempo quântico. Translações espaço-temporais agem como automorfismo τ_a , $a \in \mathbb{R}^D$, tal que,

$$\tau_a(\Phi(\hat{x})) = \Phi(\hat{x} - a.\mathbf{I}). \quad (\text{A.15})$$

Com isso definimos derivadas espaço-temporais como no espaço de Minkowski como sendo menos o gerador infinitesimal de translações, ou seja,

$$\partial_M \Phi(\hat{x}) \equiv \frac{\partial}{\partial a^M} \Phi(\hat{x} + a.\mathbf{I}) \Big|_{\mathbf{a}=\mathbf{0}}. \quad (\text{A.16})$$

Vamos considerar agora o problema de quantizar uma teoria de campos não-comutativa numa abordagem perturbativa. O primeiro passo nessa direção é usar o esquema de quantização de Weyl definindo uma ação não comutativa através dos operadores $\Phi[\varphi]$ introduzidos anteriormente. A próxima seção é dedicada a definirmos uma ação não comutativa e determinar as regras de Feynman da teoria utilizando a correspondência Weyl-Moyal.

A.3 Teoria de perturbação não-comutativa

Nesta seção olharemos para uma expansão perturbativa de uma teoria quântica de campos não-comutativa. Para transformar uma teoria de campo escalar ordinária em uma teoria não-comutativa, vamos usar o esquema de quantização de Weyl, escrevendo operadores de Weyl $\Phi[\varphi]$ no lugar dos campos escalares reais $\varphi(x)$ sobre $\mathbb{R}^D$ [72]. A ação é definida por

$$S[\varphi] = Tr \left(\frac{1}{2} \partial^M \Phi[\varphi] \partial_M \Phi[\varphi] - \frac{m^2}{2} \Phi^2[\varphi] + \frac{g}{3!} \Phi^3[\varphi] \right). \quad (\text{A.17})$$

Podemos reescrever esta ação no espaço de coordenadas usando a correspondência Weyl-Moyal Eq(A.9) e a Eq(A.11). Obtemos:

$$S[\varphi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} \partial^M \varphi(x) \partial_M \varphi(x) - \frac{m^2}{2} \varphi^2(x) + \frac{g}{3!} \varphi(x) * \varphi(x) * \varphi(x) \right]. \quad (\text{A.18})$$

Vemos que a parte quadrática da ação, e portanto propagadores, não são “afetados” pelo produto Moyal. Assim, somente as interações (vértices) carregam a informação da não-comutatividade do espaço-tempo.

Analiseemos dois exemplos específicos.

A.3.1 O vértice de campos escalares

Vamos supor uma lagrangiana de interação dada por

$$\mathcal{L}_I = g \phi(x) * \pi(x) * \pi(x), \quad (\text{A.19})$$

em que $\phi(x)$ e $\pi(x)$ são dois campos escalares diferentes.

Para encontrarmos o vértice, vamos olhar para a correção perturbativa de mais baixa ordem para a função de três pontos,

$$\tau(x_1, x_2, x_3) = \langle 0 | T \phi(x_1) \pi(x_2) \pi(x_3) : ig \int d^4 y \phi(y) * \pi(y) * \pi(y) : | 0 \rangle, \quad (\text{A.20})$$

Usando a representação de Fourier para cada um dos campos e lembrando que o quadri-

momentum é conservado no vértice, podemos escrever $\tau(x_1, x_2, x_3)$ como

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3) &= ig \int \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \right\} \prod_{j=1}^3 \left\{ \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3) e^{-ik_2 \wedge k_3} \\ &\times \langle 0 | T \phi(p_1) \pi(p_2) \pi(p_3) : \phi(k_1) \pi(k_2) \pi(k_3) : | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Utilizando o teorema de Wick, existem duas possibilidades para contração dos campos π . Essas duas possibilidades devem ser calculadas separadamente, ou seja, não podemos simplesmente inserir um fator multiplicativo “2” como numa teoria usual,

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3) &= ig \int \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \right\} \prod_{j=1}^3 \left\{ \frac{d^4 k_j}{(2\pi)^4} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3) \\ &\times \left[(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + k_1) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + k_2) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + k_3) \right. \\ &+ \left. (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + k_1) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + k_3) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_3 + k_2) \right] \\ &\times e^{-ik_2 \wedge k_3} \Delta_\phi(p_1) \Delta_\pi(p_2) \Delta_\pi(p_3) . \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Integrando em k_j ,

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3) &= ig \int \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3) \\ &\times \left(e^{-ip_2 \wedge p_3} + e^{-ip_3 \wedge p_2} \right) \Delta_\phi(p_1) \Delta_\pi(p_2) \Delta_\pi(p_3) , \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

como Θ^{MN} é uma matriz antissimétrica, finalmente obtemos a expressão para a função de três pontos $\tau(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3) &= 2ig \int \prod_{i=1}^3 \left\{ \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3) \cos(p_2 \wedge p_3) \\ &\times \Delta_\phi(p_1) \Delta_\pi(p_2) \Delta_\pi(p_3) . \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Amputando as pernas externas, obtemos o vértice da teoria não-comutativa

$$2ig \cos(p_2 \wedge p_3) \quad (\text{A.25})$$

Observamos que no limite comutativo, $\Theta^{MN} \longrightarrow 0$, o vértice desta função tende ao vértice da teoria usual.

A.3.2 O vértice de campos fermiônicos

Seja $\psi(x)$ um campo fermiônico de Dirac, e vamos assumir a seguinte lagrangiana de interação,

$$\mathcal{L}_I = \frac{g}{4} \bar{\psi}(x) * \psi(x) * \bar{\psi}(x) * \psi(x) . \quad (\text{A.26})$$

Para obter o vértice correspondente vamos olhar para a função de quatro pontos, onde a contribuição de mais baixa ordem é dada por

$$\langle 0|T \bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\psi(x_4) : i\frac{g}{4} \int \frac{d^4y}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(y) * \psi(y) * \bar{\psi}(y) * \psi(y) : |0\rangle . \quad (\text{A.27})$$

Usando a representação de Fourier para cada um dos campos, temos

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3, x_4) &= i\frac{g}{4} \int \left\{ \prod_{i=1}^4 \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^4 \frac{d^4k_i}{(2\pi)^4} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ &\times \langle 0|T \bar{\psi}(p_1)\psi(p_2)\bar{\psi}(p_3)\psi(p_4) : \bar{\psi}(k_1)\psi(k_2)\bar{\psi}(k_3)\psi(k_4) : |0\rangle \quad (\text{A.28}) \\ &\times \exp\left\{ -i \sum_{i<j} k_i \wedge k_j \right\} \end{aligned}$$

Invocando o teorema de Wick, temos quatro possíveis formas de contrair os campos externos com os da lagrangiana de interação,

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3, x_4) &= i\frac{g}{4} \int \left\{ \prod_{i=1}^4 \frac{d^4p_i}{(2\pi)^4} \right\} \left\{ \prod_{i=1}^4 \frac{d^4k_i}{(2\pi)^4} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\ &\times \left[\delta^{(4)}(p_2 + k_1)\delta^{(4)}(p_4 + k_3)\delta^{(4)}(k_2 + p_1)\delta^{(4)}(k_4 + p_3) \right. \\ &- \delta^{(4)}(p_2 + k_3)\delta^{(4)}(p_4 + k_1)\delta^{(4)}(k_2 + p_1)\delta^{(4)}(k_4 + p_3) \quad (\text{A.29}) \\ &+ \delta^{(4)}(p_2 + k_3)\delta^{(4)}(p_4 + k_1)\delta^{(4)}(k_2 + p_3)\delta^{(4)}(k_4 + p_1) \\ &- \left. \delta^{(4)}(p_2 + k_1)\delta^{(4)}(p_4 + k_3)\delta^{(4)}(k_2 + p_3)\delta^{(4)}(k_4 + p_1) \right] \\ &\times \exp\left\{ -i \sum_{i<j} k_i \wedge k_j \right\} S(p_2)S(p_4)S(p_1)S(p_3) \end{aligned}$$

Integrando em k_i e lembrando que o quadri-momentum é conservado no vértice, temos

$$\begin{aligned} \tau(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -g \int \left\{ \prod_{i=1}^4 \frac{d^4 p_i}{(2\pi)^4} \right\} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \\ &\times \text{sen}[p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3] S(p_2) S(p_4) S(p_1) S(p_3) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

onde $S(p)$ denota o propagador da teoria livre no espaço dos momenta. Amputando as pernas externas obtemos o vértice,

$$-g \text{sen}[p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3] \quad (\text{A.31})$$

Diferentemente do caso do vértice bosônico, o vértice acima, Eq(A.31), não possui o limite comutativo $\Theta \rightarrow 0$, ou seja, no limite comutativo o vértice vai pra zero.

A.4 O Mecanismo IV/UV

Vamos dar exemplo usando os cálculos desenvolvidos até agora, com o propósito de ilustrar o mecanismo IV/UV. Estudaremos alguns aspectos da teoria ϕ^4 formulada num espaço quadri-dimensional não-comutativo. A lagrangiana que corresponde a tal teoria é dada por,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_M \phi \partial^M \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \mathcal{L}_I(\phi), \quad (\text{A.32})$$

onde

$$\mathcal{L}_I(\phi) = -\frac{g}{4} \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) * \phi(x). \quad (\text{A.33})$$

As regras de Feynman para este modelo são:

$$\text{---}\overrightarrow{\text{---}}\text{---} \quad p \quad = \quad \Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (\text{A.33a})$$

$$\begin{aligned} \text{X} &= -i \frac{g}{3} (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \{ \cos(p_1 \wedge p_2 + p_1 \wedge p_3 + p_2 \wedge p_3) \\ &\quad + \cos(p_1 \wedge p_2 + p_1 \wedge p_3 - p_2 \wedge p_3) + \cos(p_1 \wedge p_2 - p_1 \wedge p_3 - p_2 \wedge p_3) \} \end{aligned} \quad (\text{A.33b})$$

Trataremos a correção perturbativa de mais baixa ordem ($\Sigma(p)$) para a função 1PI

$(\tilde{\Gamma}^{(2)}(p))$,

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p) , \quad (\text{A.34})$$

onde em primeira ordem de g , $-i\Sigma(p)$ é apenas o diagrama “tadpole” como mostra a Figura A.1. A correção então é dada por

$$-i\Sigma(p) = -\frac{i}{3}g \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} - \frac{i}{6}g \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{2ik \wedge p} . \quad (\text{A.35})$$

O primeiro termo da Eq(A.35) é chamada de contribuição planar ($-i\Sigma(p)_P$), enquanto o segundo termo que é explicitamente dependente de Θ^{MN} é conhecido como contribuição não planar ($-i\Sigma(p)_{NP}$).

A contagem de potências nos diz que $\Sigma(p)_P$ é quadraticamente divergente, e usando regularização dimensional obtemos,

$$\Sigma(p)_P = -\frac{gm^2}{48\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + (\text{parte finita}) \right] , \quad (\text{A.36})$$

onde $\epsilon = 2 - d/2$.

Para a parte não planar encontramos o resultado finito UV:

$$\Sigma(p)_{NP} = \frac{gm^2}{24\pi^2} \sqrt{\frac{1}{m^2 p \circ p}} K_1(\sqrt{m^2 p \circ p}) , \quad (\text{A.37})$$

em que K_1 é a função de Bessel modificada e,

$$p \circ p = p_M (\Theta^2)^{MN} p_N . \quad (\text{A.38})$$

Figura A.1: Contribuição em um laço para $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$.

Colocando as expressões para as partes planar e não planar na Eq(A.34), após a renormalização da massa temos,

$$\tilde{\Gamma}_R^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \frac{gm_R^2}{24\pi^2} \sqrt{\frac{1}{m_R^2 p \circ p}} K_1(\sqrt{m_R^2 p \circ p}) , \quad (\text{A.39})$$

onde $\tilde{\Gamma}_R^{(2)}(p)$ denota a função de dois pontos 1PI renormalizada.

Como é conhecido[73],

$$\lim_{p \circ p \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{m_R^2 p \circ p}} K_1(\sqrt{m_R^2 p \circ p}) \longrightarrow \frac{1}{m_R^2 p \circ p} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{\sqrt{m_R^2 p \circ p}}{2}\right) + \mathcal{O}(p \circ p) , \quad (\text{A.40})$$

revela a presença de divergências IV quadráticas e logarítmicas. Para resumir, na situação comutativa $\Sigma(p)$ é UV divergente e não é afetada por singularidades IV. Entretanto, se a não comutatividade está presente, um pedaço de $\Sigma(p)$ se torna IV divergente. Este é o conhecido mecanismo de mistura IV/UV[74] que nos referimos no título desta seção.

A.5 Unitariedade da matriz S em teorias não-comutativas

A unitariedade da matriz S é uma consequência desta ser derivada a partir de um operador unitário de evolução temporal, tomado quando os instantes inicial e final tendem a menos infinito e mais infinito, respectivamente. E a unitariedade deste operador de evolução está relacionada com a conservação de probabilidade que é algo fundamental na teoria quântica. Assim, qualquer violação da unitariedade do operador de evolução temporal ou da matriz S , acarreta uma violação da conservação de probabilidade. Quando formulamos nossa teoria quântica de campos num espaço-tempo não-comutativo, observa-se [49] que existe uma quebra de unitariedade nestas teorias, tornando-as inconsistentes com a interpretação probabilística da teoria quântica.

A quebra de unitariedade observada em teorias quântica de campos não-comutativas é devido a uma definição imprópria dessas teorias em espaços não-comutativos [75]. Para ilustrarmos isso, vamos considerar o exemplo de um gráfico com uma interação ϕ^3 . Usando o conjunto de regras de Feynman modificadas, temos

$$\propto \int d^4k \frac{1 + \cos(p \wedge k)}{[(p-k)^2 - m^2](k^2 - m^2)} .$$

A expressão acima é a transformada de Fourier de um produto pontual e de um produto Moyal entre dois propagadores de Feynman,

$$\Delta_F(x)\Delta_F(x) + \Delta_F(x) * \Delta_F(x) . \quad (\text{A.41})$$

O primeiro termo da expressão corresponde a contribuição planar, que igualmente ao caso comutativo satisfaz a unitariedade,

$$\Delta_F^2 + \bar{\Delta}_F^2 = [\theta(x)\Delta_+ + \theta(-x)\Delta_-]^2 + [\theta(-x)\Delta_+ + \theta(x)\Delta_-]^2 = \Delta_+^2 + \Delta_-^2 , \quad (\text{A.42})$$

em que $\theta(x)$ é a função de Heaviside e $\Delta_+(\Delta_-)$ é a parte de frequência positiva (negativa) do propagador. Um cálculo análogo para o segundo termo, contribuição não-planar, nos leva ao resultado,

$$\Delta_F * \Delta_F + \overline{\Delta_F * \Delta_F} = \Delta_+ * \Delta_+ + \Delta_- * \Delta_- + \Delta_{ret} * \Delta_{av} + \Delta_{av} * \Delta_{ret} , \quad (\text{A.43})$$

onde $\Delta_{ret/av} = \theta(\pm x_0)\Delta(x)$ com $\Delta = \Delta_+ - \Delta_-$ é o propagador retardado e avançado, respectivamente.

Portanto, a quebra de unitariedade é devida ao fato de que em geral, o produto Moyal entre os propagadores avançado e retardado não se anula. Entretanto, estes termos se anulam quando assumimos que a coordenada temporal comuta com as coordenadas espaciais, ou seja, definindo um Θ^{MN} onde $\Theta^{0N} = -\Theta^{N0} = 0$ e com as outras componentes fora da diagonal diferente de zero.

Apêndice B

Sobre a equivalência entre os modelos Auto-Dual e Maxwell-Chern-Simons supersimétricos

Dualidade é um importante fenômeno em teoria quântica de campos permitindo relacionar duas “aparentes” teorias distintas. Um exemplo é a equivalência entre o modelo Auto-Dual (AD) [21, 22] - que não possui invariância de calibre - e o modelo invariante de calibre Maxwell-Chern-Simons (MCS) em $(2 + 1)D$ dimensões do espaço-tempo [16]. Diferentes aspectos desta equivalência foram estudados nos trabalhos [76, 77, 78, 79]. Mais tarde, esta equivalência foi estendida ao caso supersimétrico, com os supercampos AD e de calibre sendo acoplados a um supercampo escalar de matéria [80].

A dualidade entre esses modelos em princípio pode ser provada a partir de dois métodos. O primeiro deles, é o método de *gauge embedding* [79, 80], cuja essência consiste na extensão do modelo Auto-Dual adicionando em sua lagrangiana, termos que se anulam na camada de massa. A equivalência destas teorias é observada pela comparação de suas equações de movimento. O segundo, método da ação mestra, usado em [78], é baseado no fato na equivalência dos geradores funcionais das duas teorias, partindo de um objeto primordial chamado ação mestra [22], envolvendo os campos de MCS e AD. A integração funcional da ação mestra sobre o campo de MCS leva ao gerador funcional do campo AD, enquanto a integração funcional sobre o campo AD leva ao modelo de MCS.

Neste apêndice usaremos o método da ação mestra para mostrar a equivalência entre os modelos SUSY Auto-Dual (SAD) e SUSY Maxwell-Chern-Simons (SMCS) na presença de fontes.

B.1 Equivalência dos geradores funcionais

Como primeiro passo, vamos introduzir a seguinte lagrangiana mestra descrevendo a dinâmica do supercampo espinorial f_α (que mais tarde será identificado como sendo o supercampo SAD) e A_α (que será identificado como o supercampo SMCS):

$$\mathcal{L}_{master} = -\frac{m^2}{2} f^\alpha f_\alpha + m f^\alpha W_\alpha + \frac{m}{2} A^\alpha W_\alpha + k^\alpha f_\alpha + j^\alpha A_\alpha - \frac{\alpha}{4} (D^\alpha A_\alpha)^2 + \mathcal{L}_M(\Psi) , \quad (\text{B.1})$$

onde $\mathcal{L}_M(\Psi)$ é a lagrangiana de um supercampo espinorial de matéria Ψ^α , k^α e j^α são correntes dependentes deste supercampo. Aqui W_α é um supercampo função de A_α definido pela Eq(1.42). Esta lagrangiana é a generalização natural da lagrangiana usada em [78].

Baseado nesta lagrangiana mestra, definimos um gerador funcional

$$Z(k^\alpha, j^\alpha, \Psi^\alpha) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}f_\alpha \mathcal{D}A_\alpha \exp \left\{ i \int d^5z \mathcal{L}_{master}(f^\alpha, A^\alpha, \Psi^\alpha, j^\alpha, k^\alpha) \right\} , \quad (\text{B.2})$$

onde $\mathcal{N}$ é algum fator de normalização independente dos campos.

A integral de trajetória sobre um campo grassmanniano arbitrário X_α é definido pela seguinte expressão:

$$\int \mathcal{D}X_\alpha \exp \left\{ i \left[\frac{1}{2} X^\alpha \mathcal{O}_\alpha{}^\beta X_\beta + J^\alpha X_\alpha \right] \right\} = \exp \left\{ i \left[-\frac{1}{2} J^\alpha (\mathcal{O}^{-1})_\alpha{}^\beta J_\beta \right] \right\} , \quad (\text{B.3})$$

a menos de um fator multiplicativo irrelevante, dependente de $\det \mathcal{O}_\alpha{}^\beta$.

B.1.1 Obtendo a ação de Maxwell-Chern-Simons

Integrando a Eq.(B.2) sobre o supercampo f^α pelo uso da expressão Eq.(B.3), com o operador $(\mathcal{O}_1^{-1})_\alpha{}^\beta$ dado por

$$(\mathcal{O}_1^{-1})_\alpha{}^\beta = -\frac{1}{m^2} \delta_\alpha{}^\beta , \quad (\text{B.4})$$

obtemos o resultado:

$$\begin{aligned} Z(k^\alpha, j^\alpha, \Psi^\alpha) &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\alpha \exp \left\{ i \int d^5z \left[\frac{1}{2} (m W^\alpha + k^\alpha) \frac{\delta_\alpha{}^\beta}{m^2} (m W_\beta + k_\beta) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{m}{2} A^\alpha W_\alpha + j^\alpha A_\alpha - \frac{\alpha}{4} (D^\alpha A_\alpha)^2 + \mathcal{L}_M \right] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Após uma integração por partes na exponencial temos

$$Z(k^\alpha, j^\alpha, \Psi^\alpha) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\alpha \exp \left\{ i \int d^5z \mathcal{L}_{SMCS} \right\}, \quad (\text{B.6})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SMCS} = & \frac{1}{2} W^\alpha W_\alpha + \frac{m}{2} A^\alpha W_\alpha - \frac{\alpha}{4} (D^\alpha A_\alpha)^2 + j^\alpha A_\alpha \\ & + \frac{1}{2m} A^\alpha D^\beta D_\alpha k_\beta + \frac{1}{2m^2} k^\alpha k_\alpha + \mathcal{L}_M(\Psi). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Os três primeiros termos da expressão acima reproduzem exatamente a lagrangiana do modelo de SMCS [35], expandido pela adição de um termo fixador de calibre apropriado. Este gerador funcional descreve o supercampo de SMCS acoplado com a matéria através de um acoplamento "minimal" com a corrente de matéria $A^\alpha j_\alpha$, e um acoplamento "magnético" $\frac{1}{2m} A^\alpha D^\beta D_\alpha k_\beta$, além de um termo de auto-interação do tipo Thirring $\frac{1}{2m^2} k^\alpha k_\alpha$.

B.1.2 Obtendo a ação Auto-Dual

Agora, vamos integrar o gerador funcional Eq(B.2) sobre A_α . Para este fim, vamos extrair o operador $(\mathcal{O}_2^{-1})_\beta{}^\gamma$ da parte quadrática em A^α da lagrangiana mestra Eq(B.1), que pode ser escrito como

$$(\mathcal{O}_2^{-1})_\beta{}^\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{D^\gamma D_\beta}{m\Box} + \frac{D_\beta D^\gamma}{\alpha\Box} \right). \quad (\text{B.8})$$

Usando a Eq(B.3), integramos Eq(B.1) sobre A^α , obtendo:

$$Z(k^\alpha, j^\alpha, \Psi^\alpha) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}f_\alpha \exp \left\{ i \int d^5z \mathcal{L}_{SAD} \right\}, \quad (\text{B.9})$$

onde

$$\mathcal{L}_{SAD} = -\frac{m}{2} f^\alpha \Omega_\alpha - \frac{m^2}{2} f^\alpha f_\alpha + k^\alpha f_\alpha - \frac{1}{2} f^\alpha \frac{D^\beta D_\alpha}{D^2} j_\beta - \frac{1}{4} j^\alpha \frac{D^\beta D_\alpha}{m\Box} j_\beta + \mathcal{L}_M(\Psi), \quad (\text{B.10})$$

com $\Omega^\alpha \equiv (1/2) D^\beta D_\alpha f_\beta$.

Este gerador funcional corresponde a ação do supercampo SAD, que, além do acoplamento padrão com a corrente k_α , está acoplado de uma maneira não-local com a corrente j_α , e, ainda um termo não-local do tipo Thirring para a corrente j_α .

B.1.3 Comparando os geradores funcionais

Para completar a prova da equivalência entre os modelos SMCS e SAD. Para isto, vamos integrar os geradores funcionais obtidos no passo anterior, Eq.(B.6) e Eq.(B.9), sobre as correspondentes variáveis dinâmicas A^α e f^α respectivamente. Para isto, vamos derivar os propagadores dos supercampos SMCS and SAD. Estes propagadores são dados por:

$$(\mathcal{O}_{SMCS}^{-1})_\beta^\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{D^\alpha D_\beta}{\square(D^2 + m)} + \frac{1}{\alpha} \frac{D_\beta D^\alpha}{\square} \right], \quad (\text{B.11})$$

$$(\mathcal{O}_{SAD}^{-1})_\beta^\alpha = \frac{1}{2} \left[\frac{D^\alpha D_\beta}{m^2 D^2} - \frac{1}{m} \frac{D_\beta D^\alpha}{D^2(D^2 + m)} \right]. \quad (\text{B.12})$$

A integração sobre A^α e f^α respectivamente em Eq.(B.6) e Eq.(B.9), resulta na mesma lagrangiana efetiva envolvendo somente os campos de matéria

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & -\frac{1}{4} j^\alpha \frac{D^\beta D_\alpha}{\square(D^2 + m)} j_\beta + \frac{1}{2m} k^\alpha \frac{D^\beta D_\alpha}{D^2(D^2 + m)} j_\beta \\ & - \frac{1}{4m^2} k^\alpha \left(\frac{D^\beta D_\alpha}{D^2 + m} - 2\delta_\alpha^\beta \right) k_\beta + \mathcal{L}_M(\Psi), \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

como deveria ser.

Numa teoria onde $j^\alpha = 0$, o campo de matéria interage somente através da corrente k^α . Portanto, podemos escrever as lagrangianas efetivas Eq.(B.7), Eq.(B.10) e Eq.(B.13) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SMCS} &= \frac{1}{2} W^\alpha W_\alpha + \frac{m}{2} A^\alpha W_\alpha - \frac{\alpha}{4} (D^\alpha A_\alpha)^2 + \frac{1}{2m} A^\alpha D^\beta D_\alpha k_\beta + \frac{1}{2m^2} k^\alpha k_\alpha + \mathcal{L}_M(\Psi), \\ \mathcal{L}_{SAD} &= -\frac{m}{2} f^\alpha \Omega_\alpha - \frac{m^2}{2} f^\alpha f_\alpha + k^\alpha f_\alpha + \mathcal{L}_M(\Psi), \\ \mathcal{L}_{eff(a)} &= -\frac{1}{4m^2} k^\alpha \left(\frac{D^\beta D_\alpha}{D^2 + m} - 2\delta_\alpha^\beta \right) k_\beta + \mathcal{L}_M(\Psi). \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Segue da Eq.(B.14), supondo que a corrente k^α seja composta de um bilinear de Ψ^α e $\bar{\Psi}^\alpha$, as seguintes equações de movimento para o supercampo de matéria:

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \bar{\Psi}_\alpha} + \frac{\delta k^\gamma}{\delta \bar{\Psi}_\alpha} \frac{W_\gamma}{m} + \frac{\delta k^\gamma}{\delta \bar{\Psi}_\alpha} \frac{k_\gamma}{m^2} = 0 \quad (\text{B.15})$$

quando acoplada ao supercampo SMCS, e

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \bar{\Psi}_\alpha} + \frac{\delta k^\gamma}{\delta \bar{\Psi}_\alpha} f_\gamma = 0 \quad (\text{B.16})$$

quando acoplada ao supercampo Auto-Dual.

Comparando as duas equações de movimento, reconhecemos a identificação entre os supercampos SAD e SMCS:

$$f_\gamma = \frac{W_\gamma}{m} + \frac{k_\gamma}{m^2} , \quad (\text{B.17})$$

em que podemos notar que a correspondência entre os supercampos SAD e SMCS em interação com a matéria, depende da corrente de matéria envolvida.

As equações de movimento para os supercampos SMCS e SAD são dadas por

$$-\frac{1}{2}D^\alpha D^\gamma W_\alpha - mW^\gamma - \frac{\alpha}{2}D^\gamma D^\alpha A_\alpha - \frac{1}{2m}D^\alpha D^\gamma k_\alpha = 0 , \quad (\text{B.18})$$

$$m\Omega^\gamma + m^2 f^\gamma - k^\gamma = 0 , \quad (\text{B.19})$$

em que se substituirmos a identificação Eq(B.17) em Eq(B.19) obtemos Eq(B.18) ao menos do termo de fixação de calibre.

Podemos pensar também numa teoria onde $k^\alpha = 0$ e $j^\alpha \neq 0$. Neste caso as lagrangianas correspondentes resultam em:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SMCS} &= \frac{1}{2}W^\alpha W_\alpha + \frac{m}{2}A^\alpha W_\alpha - \frac{\alpha}{4}(D^\alpha A_\alpha)^2 + j^\alpha A_\alpha + \mathcal{L}_M(\Psi) , \\ \mathcal{L}_{SAD} &= -\frac{m}{2}f^\alpha \Omega_\alpha - \frac{m^2}{2}f^\alpha f_\alpha - \frac{1}{2}f^\alpha \frac{D^\beta D_\alpha}{D^2} j_\beta - \frac{1}{4}j^\alpha \frac{D^\beta D_\alpha}{m\Box} j_\beta + \mathcal{L}_M(\Psi) , \\ \mathcal{L}_{eff(b)} &= -\frac{1}{4}j^\alpha \left[\frac{D^\beta D_\alpha}{\Box(D^2 + m)} + \frac{D_\alpha D^\beta}{\alpha\Box} \right] j_\beta + \mathcal{L}_M(\Psi) . \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

As equações de movimento que seguem de Eq.(B.20) são

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \bar{\Psi}_\alpha} + \frac{\delta j^\gamma}{\delta \bar{\Psi}_\alpha} A_\gamma = 0 , \quad (\text{B.21})$$

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \bar{\Psi}_\alpha} - \frac{\delta j^\gamma}{\delta \bar{\Psi}_\alpha} \frac{\Omega_\gamma}{D^2} - \frac{1}{2} \frac{\delta j^\gamma}{\delta \bar{\Psi}_\alpha} \frac{D^\beta D_\gamma}{m \square} j_\beta = 0 , \quad (\text{B.22})$$

que mais uma vez comparando as duas equações de movimento, nos dá a seguinte identificação:

$$A_\gamma = -\frac{1}{2} \frac{D^\beta D_\gamma}{D^2} \left(f_\beta + \frac{j_\beta}{m D^2} \right) . \quad (\text{B.23})$$

Uma vez que os modelos definidos em Eq(B.14) e Eq(B.20), $\mathcal{L}_{eff(a)}$ e $\mathcal{L}_{eff(b)}$, devem ser equivalentes, podemos encontrar uma relação entre as correntes k^α e j^α tal que independentemente da escolha das correntes a interação entre os supercampos de matéria possuam as mesmas características físicas. É fácil verificar que tal relação, a menos de termos de contato não-propagantes, pode ser escrita como

$$j^\alpha = \frac{1}{2m} D^\beta D^\alpha k_\beta . \quad (\text{B.24})$$

B.2 Alguns comentários

Estudamos o fenômeno da equivalência entre os modelo SAD e SMCS usando a abordagem da ação mestra, que nada mais é do que a introdução de uma ação especial contendo tanto os supercampos SAD como os SMCS, que através de uma integração funcional obtemos ora o modelo SAD, ora SMCS. A equivalência entre os geradores funcionais nos permite concluir que estas teorias são equivalentes.

A forma com que a matéria se acopla com os mediadores, nos revela qual deve ser a identificação entre os supercampos A^α e f^α para que tanto o modelo SAD, tanto o SMCS, nos leve a uma mesma descrição da interação entre os supercampos de matéria.

Estes resultados estão atualmente sendo escritos para submissão à publicação.

Apêndice C

Cálculos em dois laços no modelo de SUSY Chern-Simons

Neste apêndice encontra-se alguns detalhes dos cálculos em dois laços que aparecem nesta tese.

C.1 Integrais úteis

Segue o formulário [29, 81, 82] usado para o cálculo de integrais em dois laços nos modelos SUSY QED₃ e Chern-Simons:

$$\begin{aligned} I(m_1, m_2, m_3) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(k+q)^2 + m_1^2](q^2 + m_2^2)(k^2 + m_3^2)} \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + 1 \right) + \frac{1}{16\pi^2} \log \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\mu} , \\ J(m_1, m_2, m_3) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{2(k \cdot q)}{[(k+q)^2 + m_1^2](q^2 + m_2^2)(k^2 + m_3^2)} \\ &= (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2) I(m_1, m_2, m_3) - \frac{1}{16\pi^2} (m_2 m_3 - m_1 m_2 - m_1 m_3) , \\ K(m_1, m_2, m_3) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(k \cdot q)^2}{[(k+q)^2 + m_1^2](q^2 + m_2^2)(k^2 + m_3^2)} \\ &= -\frac{1}{4} (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2)^2 I(m_1, m_2, m_3) - \frac{1}{64\pi^2} [m_1^2 (m_1 m_2 + m_1 m_3 - m_2 m_3) \\ &\quad - m_1 (3m_2^3 + 3m_3^3 + m_2^2 m_3 + m_2 m_3^2) + (m_2^2 + m_3^2) m_2 m_3] , \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

onde $\epsilon = 3 - D$ (D é a dimensão do espaço-tempo), γ é a constante de Euler e μ é uma escala de massa arbitrária introduzida pela regularização por redução dimensional.

C.2 Contribuições em dois laços à equação de tadpole

Em dois laços, os diagramas que contribuem para a equação de *tadpole*, Figura 3.10, são dados por

$$\Gamma_{2\Sigma(a)}^{(1)} = i \frac{e^2}{6} \lambda \sigma \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{M_\Sigma}{(k^2 + M_\Sigma^2)^2 (q^2 + M_A^2)} , \quad (C.2)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(b)}^{(1)} = -\frac{i}{18} \lambda^2 \sigma \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{M_\Sigma}{(k^2 + M_\Sigma^2)^2 (q^2 + M_A^2)} , \quad (C.3)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(c)}^{(1)} = -\frac{i}{6} \lambda^2 \sigma \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{M_\Sigma}{(k^2 + M_\Sigma^2)^2 (q^2 + M_\Pi^2)} , \quad (C.4)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\Sigma(d)}^{(1)} = & -\frac{i}{2} \lambda^2 \sigma \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M_\Sigma^2)^2 [(k+q)^2 + M_\Pi^2] q^2 (q^2 + M_\Pi^2)} \\ & \times \left[2M_\Sigma^2 M_A k \cdot q - 2M_A M_\Sigma M_\Pi k \cdot q - M_A k^2 k \cdot q - (M_A + M_\Pi) M_\Sigma q^2 \right. \\ & \left. - (M_A + M_\Pi - 2M_\Sigma) k^2 + 2M_\Sigma q^2 k \cdot q \right] , \end{aligned} \quad (C.5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\Sigma(e)}^{(1)} = & i \lambda e^4 \sigma^3 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 (k^2 + M_A^2) [(k+q)^2 + M_\Sigma^2]^2 q^2 (q^2 + M_A^2)} \\ & \times \left[4M_\Sigma^2 M_A^2 k \cdot q - 8M_A^2 (k \cdot q)^2 - 4M_A (M_A + 2M_\Sigma) k \cdot q \right. \\ & \left. + M_A (4M_A + M_\Sigma) k^2 q^2 - (k^2)^2 q^2 \right] , \end{aligned} \quad (C.6)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(f)}^{(1)} = -27i \lambda^3 \sigma^3 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{5M_\Sigma^2 - k^2}{(k^2 + M_\Sigma^2)^2 [(k+q)^2 + M_\Sigma^2] (q^2 + M_\Sigma^2)} , \quad (C.7)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(g)}^{(1)} = -3i\lambda^3\sigma^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_\Sigma^2 + 4M_\Sigma M_\Pi - k^2}{(k^2 + M_\Sigma^2)^2[(k+q)^2 + M_\Pi^2](q^2 + M_\Pi^2)} , \quad (C.8)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(h)}^{(1)} = -2ie^2\lambda\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_\Pi}{(k^2 + M_\Pi^2)^2(q^2 + M_A^2)} , \quad (C.9)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(i)}^{(1)} = 2i\lambda^2\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_\Pi}{(k^2 + M_\Pi^2)^2(q^2 + M_\Sigma^2)} , \quad (C.10)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(j)}^{(1)} = 6i\lambda^2\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_\Pi}{(k^2 + M_\Pi^2)^2(q^2 + M_\Pi^2)} , \quad (C.11)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\Sigma(k)}^{(1)} &= -\frac{i}{3}\lambda e^2\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + M_\Pi^2)^2[(k+q)^2 + M_\Sigma^2]q^2(q^2 + M_A^2)} \\ &\times \left[M_A M_\Pi (2M_\Sigma - M_\Pi) k \cdot q - M_A (k \cdot q) k^2 - M_\Pi^2 (M_A + M_\Sigma) q^2 \right. \\ &\quad \left. - 2M_\Pi q^2 k \cdot q + (M_A + M_\Sigma - 2M_\Pi) k^2 q^2 \right] , \end{aligned} \quad (C.12)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(l)}^{(1)} = -\frac{2}{3}i\lambda^3\sigma^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{3M_\Pi + 2M_\Pi M_\Sigma - k^2}{(k^2 + M_\Pi^2)^2(q^2 + M_\Pi)[(k+q)^2 + M_\Sigma]} , \quad (C.13)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\Sigma(m)}^{(1)} &= i\frac{e^4}{3}\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2(k^2 + M_A^2)^2[(k+q)^2 + M_\Pi^2](q^2 + M_\Sigma^2)} \\ &\times \left[2M_A^2(M_\Pi - M_\Sigma) k \cdot q - 2M_\Sigma M_A(M_A + 2M_\Pi) \right. \\ &\quad \left. + 2(M_\Sigma - 2M_A - M_\Pi) (k \cdot q) k^2 + 2M_\Sigma (k^2)^2 - 4M_A k^2 \right] , \end{aligned} \quad (C.14)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{2\Sigma(n)}^{(1)} &= 8i\frac{e^6}{3}\sigma^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2(k^2 + M_A^2)^2[(k+q)^2 + M_\Sigma^2]q^2(q^2 + M_A^2)} \\ &\times \left[M_A^3 M_\Sigma k \cdot q - (k^2)^2 q^2 - M_A(M_\Sigma + M_A) k \cdot q k^2 \right. \\ &\quad \left. - M_A^2 k \cdot q q^2 - M_A(3M_A + 2M_\Sigma) k^2 q^2 + (k \cdot q) k^2 q^2 \right] , \end{aligned} \quad (C.15)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(o)}^{(1)} = 2ie^4\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_A}{(k^2 + M_A^2)^2(q^2 + M_\Pi^2)} , \quad (C.16)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(p)}^{(1)} = 2ie^4\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_A}{(k^2 + M_A^2)^2(q^2 + M_\Sigma^2)} , \quad (C.17)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(q)}^{(1)} = -9i\lambda^2\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_\Sigma}{(k^2 + M_\Sigma^2)(q^2 + M_\Sigma^2)[(k - q)^2 + M_\Sigma^2]} , \quad (C.18)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(r)}^{(1)} = -\frac{4}{3}i\lambda^2\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_\Sigma + 2M_\Pi}{(k^2 + M_\Sigma^2)(q^2 + M_\Pi^2)[(k - q)^2 + M_\Pi^2]} , \quad (C.19)$$

$$\Gamma_{2\Sigma(s)}^{(1)} = -i\frac{e^4}{16}\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{M_A^2 M_\Sigma k \cdot q - M_A(k^2 + q^2)k \cdot q - (2M_A + M_\Sigma)k^2 q^2}{k^2(k^2 + M_A^2)q^2(q^2 + M_A^2)[(q - k)^2 + M_\Sigma^2]} . \quad (C.20)$$

Resolvendo as integrais acima e somando as contribuições em zero, um e dois laços, obtemos a seguinte função de um ponto:

$$\Gamma_{(0+1+2)l}^{(1)} = \sigma^3 \left[b_1 + b_2 \ln \frac{\sigma^2}{\mu} \right] , \quad (C.21)$$

onde $b_2 = -(791e^6 - 6681e^4\lambda + 80e^2\lambda^2 + 7424\lambda^3)/3072\pi^2$ e b_1 é alguma função das constantes de acoplamento e $1/\epsilon = 1/(3 - D)$, com D sendo a dimensão do espaço-tempo.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Myazawa, “Barion Number Changing Currents”, *Prog. Theor. Phys.* **36**, 1266 (1966); “Spinor Currents and Symmetries of Baryons and Mesons”, *Phys. Rev.* **170**, 1586 (1968).
- [2] S. R. Coleman and J. Mandula, “All Possible Symmetries Of The S Matrix”, *Phys. Rev.* **159**, 1251 (1967).
- [3] A. Neveu and J. H. Schwarz, “Factorizable dual model of pions”, *Nucl. Phys. B* **31**, 86 (1971); P. Ramond, “Dual Theory for Free Fermions”, *Phys. Rev. D* **3**, 2415 (1971).
- [4] J. L. Gervais and B. Sakita, “Field theory interpretation of supergauges in dual models”, *Nucl. Phys. B* **34**, 632 (1971).
- [5] Yu. A. Golfand and E. P. Likhtman, “Extension of the Algebra of Poincare Group Generators and Violation of p Invariance”, *JETP Lett.* **13** (1971) 323 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **13** (1971) 452].
- [6] J. Wess and B. Zumino, “Supergauge Transformations in Four-Dimensions”, *Nucl. Phys. B* **70**, 39 (1974).
- [7] E. Witten, “Constraints On Supersymmetry Breaking”, *Nucl. Phys. B* **202**, 253 (1982).
- [8] P. Fayet, “Spontaneous Supersymmetry Breaking Without Gauge Invariance”, *Phys. Lett. B* **58**, 67 (1975).
- [9] W. Caswell, D. Zanon, “Vanishing Three Loop Beta Function In N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory”, *Phys. Lett. B* **100**, 152 (1981); “Zero Three Loop Beta Function In The N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory”, *Nucl. Phys. B* **182**, 125 (1981); D. Storey, “General Gauge Calculations In N=4 Superyang-Mills Theory”, *Phys. Lett. B* **105**, 171 (1981); J. W. Juer, D. Storey, “ One Loop Renormalization Of Superfield

- Yang-Mills Theories”, Nucl. Phys. B **216**, 185 (1983); P. S. Howe, K. S. Stelle, P. C. West, “ A Class of Finite Four-Dimensional Supersymmetric Field Theories”, Phys. Lett. B **124**, 55 (1983); A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Yu. Petrov, A. A. Ribeiro, V. O. Rivelles, A. J. da Silva, “Towards a consistent noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory: Superfield covariant analysis”, Phys. Rev. D **70**, 085012 (2004).
- [10] I. L. Buchbinder, S. M. Kuzenko, A. A. Tseytlin, “On low-energy effective actions in N=2, N=4 superconformal theories in four-dimensions”, Phys. Rev. D **62**, 045001 (2000); I. L. Buchbinder, A. Yu. Petrov, “N=4 superYang-Mills low-energy effective action at three and four loops”, Phys. Lett. B **482**, 429 (2000).
- [11] I. Jack, D. R. T. Jones, “Ultraviolet finite noncommutative theories”, Phys. Lett. B **514**, 401 (2001); “Ultraviolet finiteness in noncommutative supersymmetric theories”, New J. Phys. **3**, 19 (2001).
- [12] D. Dudal, J. A. Gracey, R. F. Sobreiro, S. Sorella, H. Verschelde, “UV finiteness of 3D Yang-Mills theories with a regulating mass in the Landau gauge”, Phys. Rev. D **75**, 061701 (2007).
- [13] F. Ruiz Ruiz and P. van Nieuwenhuizen, “Supersymmetric Yang-Mills-Chern-Simons theory”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **56B**, 269 (1997)
- [14] A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov, A. A. Ribeiro and A. J. da Silva, “On the finiteness of noncommutative supersymmetric QED(3) in the covariant superfield formulation”, Phys. Lett. B **577**, 83 (2003); “On the consistency of the three-dimensional noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory”, Phys. Lett. B **601**, 88 (2004); A. F. Ferrari, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, A. J. da Silva, "On the finiteness of the noncommutative supersymmetric Maxwell-Chern-Simons theory", arXiv: 0708.1002 [hep-th].
- [15] “The Quantum Hall Effect”, Graduate Texts in Contemporary Physics, R.E. Prange and S.M. Girvin eds, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [16] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, “Topologically massive gauge theories”, Annals Phys. **140**, 372 (1982) [Erratum-ibid. **185**, 406.1988 APNYA,281,409 (1988 APNYA,281,409-449.2000)].

- [17] R. D. Pisarski and S. Rao, “Topologically Massive Chromodynamics In The Perturbative Regime”, *Phys. Rev. D* **32**, 2081 (1985).
- [18] G. Giavarini, C. P. Martin and F. Ruiz Ruiz, “Chern-Simons theory as the large mass limit of topologically massive Yang-Mills theory”, *Nucl. Phys. B* **381**, 222 (1992).
- [19] S. K. Paul and A. Khare, “Chern-Simons Term By Spontaneous Symmetry Breaking In An Abelian Higgs Model”, *Phys. Lett. B* **193**, 253 (1987) [Erratum-ibid. B **196**, 571 (1987)].
- [20] S. Deser and Z. Yang, “A Remark On The Higgs Effect In Presence Of Chern-Simons Terms”, *Mod. Phys. Lett. A* **4**, 2123 (1989).
- [21] P. K. Townsend, K. Pilch and P. van Nieuwenhuizen, “Selfduality In Odd Dimensions”, *Phys. Lett.* **136B**, 38 (1984) [Addendum-ibid. **137B**, 443 (1984)].
- [22] S. Deser and R. Jackiw, “‘Selfduality’ Of Topologically Massive Gauge Theories”, *Phys. Lett. B* **139**, 371 (1984).
- [23] L. S. Chen, G. V. Dunne, K. Haller and E. Lim-Lombridas, “Integer quantization of the Chern-Simons coefficient in a broken phase”, *Phys. Lett. B* **348**, 468 (1995).
- [24] A. Khare, R. B. MacKenzie, P. K. Panigrahi and M. B. Paranjape, “Spontaneous symmetry breaking and the renormalization of the Chern-Simons term”, *Phys. Lett. B* **355**, 236 (1995).
- [25] S. Y. Khlebnikov, “Spontaneous Parity Violation In Three-Dimensional Scalar Electrodynamics”, *JETP Lett.* **51** (1990) 81 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **51** (1990) 69].
- [26] S. P. Spiridonov, “Higher order corrections to the Chern-Simons term in scalar electrodynamics”, *JETP Lett.* **52** (1990) 513 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **52** (1990) 1112].
- [27] S. Y. Khlebnikov and M. E. Shaposhnikov, “Spontaneous symmetry breaking versus spontaneous parity violation”, *Phys. Lett. B* **254**, 148 (1991).
- [28] V. P. Spiridonov, “Quantum dynamics of the $D = 3$ Abelian Higgs model and spontaneous breaking of parity”, *Phys. Lett. B* **247**, 337 (1990) [Erratum-ibid. B **255**, 644 (1991) ERRATUM, B259, 512 (1991)].

- [29] A. G. Dias, M. Gomes and A. J. da Silva, “Dynamical breakdown of symmetry in (2+1) dimensional model containing the Chern-Simons field”, *Phys. Rev. D* **69**, 065011 (2004).
- [30] S. R. Coleman and E. Weinberg, “Radiative Corrections As The Origin Of Spontaneous Symmetry Breaking”, *Phys. Rev. D* **7**, 1888 (1973).
- [31] R. Jackiw and E. J. Weinberg, “Selfdual Chern-Simons Vortices”, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2234 (1990).
- [32] J. Hong, Y. Kim and P. Y. Pac, “On The Multivortex Solutions Of The Abelian Chern-Simons-Higgs Theory”, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2230 (1990).
- [33] P. P. Srivastava and K. Tanaka, “On the selfduality condition in Chern-Simons systems”, *Phys. Lett. B* **256**, 427 (1991).
- [34] C. k. Lee, K. M. Lee and E. J. Weinberg, “Supersymmetry And Selfdual Chern-Simons Systems”, *Phys. Lett. B* **243**, 105 (1990).
- [35] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek and W. Siegel, “Superspace, Or One Thousand And One Lessons In Supersymmetry”, *Front. Phys.* **58**, 1 (1983).
- [36] F. Ruiz Ruiz and P. van Nieuwenhuizen, “Lectures on supersymmetry and supergravity in (2+1)-dimensions and regularization of supersymmetric gauge theories”, *Prepared for 2nd Mexican School on Gravitation and Mathematical Physics, Tlaxcala, Mexico, 1-7 Dec 1996*
- [37] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory”, Cambridge University Press 1985, 1996.
- [38] M. Kaku, “Quantum field theory: A Modern introduction”, Oxford University Press 1993.
- [39] D’Adda A, Luscher M and Di Vecchia P 1978 *Nucl. Phys. B* **146** 63
- [40] D’Adda A, Di Vecchia P and Luscher M 1979 *Nucl. Phys. B* **152** 125
- [41] A. F. Ferrari, A. C. Lehum, A. J. da Silva and F. Teixeira, “The Supersymmetric (2+1)D Noncommutative $CP^{(N-1)}$ Model in the Fundamental Representation”, *J. Phys. A* **40**, 7803 (2007).

- [42] I. Y. Arefeva and S. I. Azakov, “Renormalization And Phase Transition In The Quantum $Cp^{**}(N-1)$ Model ($D = 2, 3$)”, Nucl. Phys. B **162**, 298 (1980).
- [43] H. J. Grönewold, *Physica* **12** 405 (1946); J. E. Moyal, “Quantum mechanics as a statistical theory”, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 99 (1949).
- [44] E. A. Asano, A. G. Rodrigues, M. Gomes and A. J. da Silva, “The (2+1)D noncommutative $CP(N-1)$ model”, Phys. Rev. D **69**, 065012 (2004).
- [45] E. A. Asano, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov, A. G. Rodrigues and A. J. da Silva, “The coupling of fermions to the three-dimensional noncommutative $CP(N-1)$ model: Minimal and supersymmetric extensions”, Phys. Rev. D **69**, 105012 (2004).
- [46] C. S. Chu and F. Zamora, “Manifest supersymmetry in non-commutative geometry”, JHEP **0002**, 022 (2000).
- [47] N. Seiberg, “Noncommutative superspace, $N = 1/2$ supersymmetry, field theory and string theory”, JHEP **0306**, 010 (2003); J. de Boer, P. A. Grassi and P. van Nieuwenhuizen, “Non-commutative superspace from string theory”, Phys. Lett. B **574**, 98 (2003).
- [48] A. F. Ferrari, M. Gomes, J. R. Nascimento, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “The three-dimensional non-anticommutative superspace”, Phys. Rev. D **74**, 125016 (2006).
- [49] J. Gomis and T. Mehen, “Space-time noncommutative field theories and unitarity”, Nucl. Phys. B **591**, 265 (2000).
- [50] E. Abdalla and F. M. De Carvalho Filho, “The Chern-Simons Term And The Dynamics Of The $Cp(N-1)$ Model In Three-Dimensions”, Int. J. Mod. Phys. A **7**, 619 (1992).
- [51] W. Siegel, “Supersymmetric Dimensional Regularization Via Dimensional Reduction”, Phys. Lett. B **84**, 193 (1979).
- [52] T. Inami, Y. Saito and M. Yamamoto, “Vanishing next-to-leading corrections to the beta function of the SUSY $CP(N-1)$ model in three dimensions”, Prog. Theor. Phys. **103**, 1283 (2000).
- [53] Coleman S R 1985 *Aspects of symmetry: selected Erice Lectures of Sidney Coleman* (Cambridge University Press).

- [54] A. F. Ferrari, M. Gomes, A. C. Lehum, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “Perturbative finiteness of the three-dimensional Susy QED to all orders”, arXiv:0709.3501 [hep-th].
- [55] A. F. Ferrari, “SusyMath: A Mathematica package for quantum superfield calculations”, Comput. Phys. Commun. **176**, 334 (2007).
- [56] W. Siegel, “Supersymmetric Dimensional Regularization Via Dimensional Reduction”, Phys. Lett. B **84**, 193 (1979).
- [57] A. C. Lehum, A. F. Ferrari, M. Gomes and A. J. da Silva, “Spontaneous gauge symmetry breaking in a supersymmetric Chern-Simons model”, Phys. Rev. D **76**, 105021 (2007).
- [58] “An Introduction To Quantum Field Theory”, M. E. Peskin and D. V. Schroeder, Addison-Wesley, 1993.
- [59] S. Weinberg, “Perturbative Calculations Of Symmetry Breaking”, Phys. Rev. D **7**, 2887 (1973).
- [60] C. P. Burgess, “Supersymmetry Breaking In Three-Dimensions”, Nucl. Phys. B **216**, 459 (1983).
- [61] E. Witten, “Dynamical Breaking Of Supersymmetry”, Nucl. Phys. B **188**, 513 (1981).
- [62] R. Jackiw, “Physical instances of noncommuting coordinates”, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **108**, 30 (2002) [Phys. Part. Nucl. **33**, S6 (2002 LNPHA,616,294-304.2003)].
- [63] H. S. Snyder, “Quantized Space-Time”, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
- [64] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, “Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori”, JHEP **9802**, 003 (1998).
- [65] N. Seiberg and E. Witten, “String theory and noncommutative geometry”, JHEP **9909**, 032 (1999).
- [66] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, “The Quantum structure of space-time at the Planck scale and quantum fields”, Commun. Math. Phys. **172**, 187 (1995).
- [67] A. C. Hirshfeld and P. Henselder, “Deformation quantization in the teaching of quantum mechanics”, Am. J. Phys. **70**, 537 (2002).

- [68] T. Filk, “Divergencies in a field theory on quantum space”, Phys. Lett. B **376**, 53 (1996).
- [69] H. O. Girotti, “Noncommutative quantum field theories”, [arXiv:hep-th/0301237].
- [70] M. Gomes, “Renormalization in noncommutative field theory”, *Prepared for 11th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields, Campos do Jordao, Brazil, 14-27 Jan 2001*
- [71] H. Weyl, “Quantum mechanics and group theory”, Z. Phys. **46**, 1 (1927).
- [72] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, “Noncommutative field theory”, Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001); R. J. Szabo, “Quantum field theory on noncommutative spaces”, Phys. Rept. **378**, 207 (2003).
- [73] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, “Tables of Integrals, Series, and Products”, Academic Press Inc. (1980).
- [74] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, “Noncommutative perturbative dynamics”, JHEP **0002**, 020 (2000).
- [75] D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen and G. Piacitelli, “On the unitarity problem in space/time noncommutative theories”, Phys. Lett. B **533**, 178 (2002).
- [76] R. Banerjee, H. J. Rothe and K. D. Rothe, “On the equivalence of the Maxwell-Chern-Simons theory and a selfdual model”, Phys. Rev. D **52**, 3750 (1995).
- [77] R. Banerjee, H. J. Rothe and K. D. Rothe, “Hamiltonian embedding of self-dual model and equivalence with Maxwell-Chern-Simons theory”, Phys. Rev. D **55**, 6339 (1997).
- [78] M. Gomes, L. C. Malacarne and A. J. da Silva, “On the equivalence of the self-dual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to fermions”, Phys. Lett. B **439**, 137 (1998).
- [79] M. A. Anacleto, A. Ilha, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro and C. Wotzasek, “Dual equivalence between self-dual and Maxwell-Chern-Simons models coupled to dynamical U(1) charged matter”, Phys. Lett. B **504**, 268 (2001).
- [80] A. F. Ferrari, M. Gomes, J. R. S. Nascimento, A. Yu. Petrov and A. J. da Silva, “On the duality of three-dimensional superfield theories”, Phys. Rev. D **73**, 105010 (2006).

- [81] P. N. Tan, B. Tekin and Y. Hosotani, “Spontaneous symmetry breaking at two loop in 3-d massless scalar electrodynamics”, Phys. Lett. B **388**, 611 (1996).
- [82] P. N. Tan, B. Tekin and Y. Hosotani, “Maxwell-Chern-Simons scalar electrodynamics at two loops”, Nucl. Phys. B **502**, 483 (1997).