Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Representações Irredutíveis Unitárias do Grupo de Poincaré

Guilherme Rocha Germano

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Alves Barata - IFUSP

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física
para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Comissão examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata - IFUSP

Prof. Dr. Christian Dieter Jakel - IME/USP

Prof. Dr. Luiz Agostinho Ferreira - IFSC/USP

São Paulo,
2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Germano, Guilherme Rocha

Representações irredutíveis unitários do grupo de Poincaré.
São Paulo, 2016.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto
de Física. Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Alves Barata

Área de Concentração: Física de Partículas

Unitermos: 1. Teoria de campos; 2. Teoria quântica relativística;
3. Grupos de Lorentz; 4. Representação de grupos.

USP/IF/SBI-096/2016

Agradecimentos

Dentre tantas pessoas sem as quais a produção desse trabalho não seria possível, gostaria de agradecer em particular meu orientador e meus colegas de trabalho por dedicarem seu precioso tempo às conversas que eventualmente temos e sobretudo a minha companheira e meus filhos, por sempre contribuírem para manter alegria em minha vida.

Resumo

A teoria de representações de grupos topológicos Hausdorff, localmente compactos e separáveis em espaços de Hilbert separáveis é introduzida, especificada para grupos compactos e comutativos e são obtidas realizações explícitas das representações finitas irredutíveis de $SU(2)$, $SO(3)$, $SL(2, \mathbb{C})$ e $SO(1, 3)^\uparrow$.

A teoria das representações induzidas é então apresentada e, depois de feita a conexão entre teorias quântico relativísticas livres no espaço plano de Minkowski e representações unitárias irredutíveis de $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$, aplicada para obter tais representações e realizar explicitamente os casos correspondentes a partículas elementares com spin definido em espaços que não admitem a definição de operadores de reflexão espacial.

*A inclusão da operação de reflexão espacial é feita através de uma variação do método das representações induzidas que conduz a representações unitárias **redutíveis** de $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ para as quais são obtidas equações de onda selecionando espaços irredutíveis, os quais definem partículas elementares admitindo paridade no contexto das teorias quânticas de campos livres.*

Palavras-chave: Partículas Elementares, Teoria de campos quânticos relativísticos, Simetria (física de partículas), Representação de grupos, Representações induzidas.

Abstract

The theory of locally compact, second countable and Hausdorff topological group representations in separable Hilbert spaces is introduced, and specified to compact and commutative groups. Explicit realizations of the finite irreducible representations of $SU(2)$, $SO(3)$, $SL(2, \mathbb{C})$ and $SO(1, 3)^\uparrow$ are obtained.

The theory of induced representations is then presented and, after the connection between quantum relativistic free theories in flat Minkowski space and unitary irreducible representations of $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ is made, it is applied and used to classify these representations. Explicit realizations of the cases corresponding to elementary particles with definite spin in spaces which do not allow spacial reflection operators are presented.

*Spacial reflections are carried with a variation of the induced representation method that leads to unitary **reducible** representations of $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$. Wave equations selecting irreducible spaces that define elementary particles admitting parity in quantum free field theories are derived.*

Keywords: Elementary particles, Symmetry (particle physics), Quantum relativistic field theory, Group representation, Induced representations.

Sumário

1	Introdução	1
2	Representações de grupos	5
2.1	Conceitos Gerais	5
2.1.1	Noções Fundamentais	6
2.1.2	Forma Matricial	12
2.1.3	Representações Equivalentes	13
2.1.4	Redutibilidade de Representações e Operadores de Entrelaçamento	16
2.1.5	Produto Tensorial de Representações e Tensores . .	23
2.2	Grupos Compactos	32
2.2.1	Propriedades Gerais de Representações de Grupos Compactos	33
2.2.2	Teorema de Peter-Weyl	39
2.2.3	Caráteres e Funções Centrais	43
2.2.4	Comentários Finais	45
2.3	Grupos Comutativos	45
2.3.1	Caráteres e o Grupo Dual	46
2.3.2	Teorema de SNAG	49
2.4	Grupos Simples	51
2.4.1	A Estrutura de Grupos Conexos Simples	52
2.4.2	Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de SU(2) e SO(3)	60

2.4.3	Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $SL(2, \mathbb{C})$	73
3	Representações Induzidas	81
3.1	Construção das Representações Induzidas	82
3.1.1	Independência da escolha da medida	88
3.1.2	Representações induzidas por Somas Diretas	89
3.1.3	Sistemas de Imprimitividade	91
3.2	Formulação em $\mathcal{M} = L^2(X, \mu, \mathcal{H})$	95
3.3	Formulação no espaço de funções de onda	99
3.4	Aplicação a produtos semi-diretos regulares	102
3.5	Formulação para Ação à Esquerda	107
3.6	Comentários	109
4	Grupos de Simetria e Representações Unitárias Projetivas em Teorias Quânticas	111
4.1	Grupos de Simetria	112
4.2	Representações Projetivas	116
5	Representações Unitárias Irredutíveis de $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$	125
5.1	O grupo de Lorentz	125
5.2	$SL(2, \mathbb{C})$ e o grupo de Lorentz	128
5.3	O grupo de Poincaré	131
5.4	Órbitas e Regularidade	132
5.5	Classificação Das Representações	135
5.5.1	$\mathcal{O}_m^\pm$	135
5.5.2	$\mathcal{O}_{im}$	135
5.5.3	$\mathcal{O}_0^\pm$	136
5.5.4	$\mathcal{O}_0^0$	138
5.6	Forma Explícita de $U^{m,+,j}$	138
5.7	Paridade e Inversão Temporal	143
6	Equações e Funções de Onda	149
6.1	Campo de Dirac	151

SUMÁRIO

6.2	Campo de Proca	154
6.3	Campos Tensoriais Massivos	156
6.4	Campos de Rarita-Schwinger	158
6.5	Campos de spin j	159
6.6	Campos De Bargmann-Wigner	161
6.7	Campos de massa nula	162
7	Conclusão	167
A	Medidas em Grupos Topológicos	169
A.1	Medidas e Integração	169
A.2	Medidas em Grupos Topológicos	174
B	Espaços Homogêneos	179

Capítulo 1

Introdução

A teoria de representações de grupos tem papel fundamental nas teorias quânticas no contexto de grupos de simetria. O grupo de simetria de um sistema quântico é constituído das operações que preservam as amplitudes de probabilidade fornecidas pela teoria, e a imposição de que o espaço de Hilbert cujos elementos estão associados a estados físicos de um sistema deva carregar uma representação projetiva do grupo de simetria em questão restringe e propõe as possíveis realizações desses espaços.

Mais do que isso, como nesse contexto aparecem representações unitárias que podem sempre ser decompostas em integrais ou somas diretas de representações mínimas chamadas irredutíveis, qualquer espaço de Hilbert que carregue uma representação unitária de um grupo de simetria pode ser decomposto numa integral ou soma direta de subespaços mínimos. De onde emerge naturalmente a noção de sistemas elementares e partículas elementares em conexão com representações unitárias irredutíveis dos respectivos grupos de simetria.

No caso de teorias quântico relativísticas livres no espaço plano de Minkowski, o grupo de Poincaré, ou sua componente da identidade, conforme se queira ou não abranger operações de reflexão temporal e espacial, deve ser imposto como grupo de simetria. Nesse caso o espaço de Hilbert descrevendo sistemas elementares deve carregar representações irredutíveis e unitárias de $\widetilde{P}_+^\uparrow \simeq \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$, que é a cobertura universal da componente conexa da

identidade do grupo de Poincaré $P_+^\uparrow$, ou uma extensão de tais representações para abranger reflexões.

Nesse texto pretendemos investigar tais representações irredutíveis e unitárias e determinar os respectivos espaços de Hilbert.

No capítulo 2 a teoria de representações fortemente contínuas de grupos topológicos, Hausdorff, segundo contáveis (ou separáveis) e localmente compactos em espaços de Hilbert também separáveis¹ é introduzida, primeiramente num contexto geral, onde são apresentadas as noções fundamentais à teoria e alguns de seus principais resultados.

O tratamento é especificado então para grupos compactos, onde apresenta-se o teorema de Peter-Weyl, o qual resolve a decomposição do espaço de funções complexas quadrado integráveis sobre um grupo compacto em subespaços irredutíveis, invariantes sob a ação regular de G .

Passamos então aos grupos comutativos onde introduzimos as noções de caracteres e grupo dual e discutimos brevemente o teorema de SNAG, que associa representações unitárias de grupos comutativos a projeções espectrais. No contexto da física quântica relativística, tal resultado permite a associação entre geradores de translações espaço-temporais e operadores auto-adjuntos mutuamente comutantes, que são identificados com operadores de energia e momento.

Por fim, na última seção, são obtidas as representações de dimensão finita de $SU(2)$, $SO(3)$, $SL(2, \mathbb{C})$ e $SO(1, 3)^\uparrow$, a partir das representações das respectivas álgebras de Lie.

No capítulo 3 introduzimos a teoria das representações induzidas, a qual propõe um método para a obtenção de representações unitárias de um grupo G a partir de representações unitárias de seus subgrupos fechados e que, para uma classe de grupos que inclui $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$, fornece todas as representações irredutíveis e unitárias.

A seguir, no capítulo 4, discutimos a conexão entre as teoria de repre-

¹As teorias quânticas relativísticas que trataremos serão em geral livres e no espaço plano de Minkowski. Analogamente, os grupos com que lidaremos serão sempre grupos topológicos localmente compactos, separáveis e Hausdorff e os espaços de Hilbert serão sempre separáveis. Assim, a menos de menção contrária, tais designações devem ser subentendidas quando omitidas.

representações unitárias de grupos de simetria e teorias quânticas onde estados são descritos por raios unitários em espaços projetivos $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ sobre espaços de Hilbert $\mathcal{H}$. O primeiro resultado importante sendo o teorema de Wigner, afirmando uma correspondência entre operações de simetria e operadores unitários ou antiunitários em $\mathcal{H}$, definidos a menos de uma fase, que estendida ao grupo de simetria dá origem à noção de representações projetivas. É discutido então o teorema de Bargmann, que afirma que para certos grupos de Lie conexos — incluindo $P_+^\uparrow$ — as representações projetivas correspondem a representações unitárias ordinárias de sua cobertura universal.

No capítulo 5 o método das representações induzidas é aplicado para classificar as representações unitárias irredutíveis de $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ e obter sua forma explícita para o caso fisicamente associado a uma partícula elementar de massa positiva e spin semi-inteiro arbitrário.

Por fim, considerações são feitas no intuito de abranger transformações de reflexão temporal e espacial, o que em geral nos leva a ter de considerar representações redutíveis de $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, e então as projeções em subespaços irredutíveis, necessárias para a definição de partículas elementares, dão origem a equações de onda satisfeitas em tais subespaços.

A obtenção de equações de onda correspondendo a algumas formas explícitas de tais representações redutíveis e respectivos projetores em espaços irredutíveis são obtidas no capítulo 6.

A referência que cobre a maior parte dos tópicos abordados é [6].

É assumido que o leitor possua conhecimentos gerais a respeito de espaços de Hilbert ([48], [2]), de topologia geral ([41], [28]) e de grupos abstratos e topológicos ([44], [6], [23], [2]), os quais podem ser encontrados nas respectivas referências, entre muitas outras, e formam a base do conteúdo tratado no texto, não tendo sido tratados aqui por uma limitação espaço-temporal.

Conceitos concernentes à grupos de Lie, álgebras de Lie e variedades diferenciais também são usados sem que as respectivas definições e demonstrações rigorosas tenham sido feitas. Para tais tópicos, possíveis referências são [29], [57], [14] e [6].

Capítulo 2

Representações de grupos

Nesse capítulo introduzimos a teoria de representações fortemente contínuas de grupos topológicos, Hausdorff, segundo contáveis (ou separáveis) e localmente compactos em espaços de Hilbert também separáveis, tratando do assunto primeiramente num contexto geral e depois especificamente para grupos compactos e comutativos. Ao final são derivadas realizações explícitas das representações finitas de $SU(2)$, $SO(3)$, $SL(2, \mathbb{C})$ e $SO(1, 3)^\uparrow$.

2.1 Conceitos Gerais

Nessa seção apresentamos os principais ingredientes usados na teoria da representação de grupos. Devido à grande importância da noção de um processo de integração invariante para a teoria como apresentaremos e devido ao importantíssimo fato (veja apêndice A.2) de que os grupos topológicos, Hausdorff, separáveis e localmente compactos são exatamente aqueles onde uma tal noção pode ser formulada, nos restringiremos a tais grupos, omitindo por vezes tais designações.

Lidaremos ainda apenas com representações em espaços de Hilbert complexos separáveis, o que, diferentemente da restrição anterior, é uma arbitrariedade do ponto de vista matemático, e que é seguida em geral por livros que enfatizam aplicações da teoria das representações à física quântica ou à teoria dos números.

No nosso caso, tal restrição está ligada ao fato de querermos que a descrição física dos estados seja feita em termos de funções quadrado-integráveis com respeito a uma certa medida, formando assim um espaço de Hilbert separável.

Para citar um exemplo de um tratamento mais geral nesse sentido, envolvendo representações em espaço de Banach não necessariamente separáveis, veja [58] ou [14].

2.1.1 Noções Fundamentais

Para um grupo G e um espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$, definimos:

Definição 2.1. Uma **representação T de G em $\mathcal{H}$** é um mapa $x \mapsto T_x$ de G no conjunto $L(\mathcal{H})$, de operadores lineares em $\mathcal{H}$, satisfazendo, para todo $x, y \in G$:

$$T_{xy} = T_x T_y$$

e

$$T_e = I,$$

onde e e I são as identidades em G e $L(\mathcal{H})$, respectivamente.

Notemos que a imposição $T_e = I$ é equivalente à invertibilidade dos operadores T_x , a qual é por vezes usada em seu lugar.

Definimos a **dimensão da representação** simplesmente como sendo igual à dimensão do espaço $\mathcal{H}$.

Impomos ainda sobre a noção de representação $x \mapsto T_x$ a condição de ser **fortemente contínua**, significando que, para todo $u \in \mathcal{H}$, o mapa $x \mapsto T_x u$ de G em $\mathcal{H}$ é contínuo.

Em outras palavras, para todo $y \in G$:

$$\|T_x u - T_y u\| \rightarrow 0, \quad \text{sempre que } x \rightarrow y. \quad (2.1)$$

É conveniente notar, por sua utilidade nas demonstrações, que, pela

homogeneidade de G^1 , basta que

$$\|T_z u - u\| \rightarrow 0, \quad \text{sempre que } z \rightarrow e,$$

sendo a condição anterior recuperada substituindo-se u por $T_y u$.

A condição de continuidade acima é equivalente à condição, aparentemente mais forte e as vezes utilizada na definição de representação, de que o mapa $(u, x) \mapsto T_x u$ de $\mathcal{H} \times G \rightarrow \mathcal{H}$ seja contínuo, de fato:

Proposição 2.1. *Se T é uma representação fortemente contínua de G em $\mathcal{H}$, e se $x \rightarrow y \in G$ e $u \rightarrow v \in \mathcal{H}$, então $T_x u \rightarrow T_y v$.*

Demonstração. Seja K uma vizinhança compacta de y , então, pela continuidade de T (2.1), o conjunto $S = \{T_x u : x \in K\} \subset \mathcal{H}$ é compacto - e logo limitado - para todo $u \in \mathcal{H}$ fixo. Ou seja, $\sup_{x \in K} \|T_x(u)\| < \infty$, assim, pelo princípio da limitação uniforme,² existe uma constante M_K tal que:

$$\sup_{x \in K} \|T_x\| < M_K. \quad (2.2)$$

Podemos tomar $x \in K$, sem perda de generalidade, obtendo:

$$\|T_x u - T_y v\| \leq \|T_x u - T_x v\| + \|T_x v - T_y v\| \leq K\|u - v\| + \|T_x v - T_y v\|.$$

¹Um espaço topológico é *homogêneo* se para quaisquer dois pontos $x, y \in X$ existe um homeomorfismo f de X em X com $f(x) = y$. Um grupo topológico é sempre homogêneo, sendo o homeomorfismo procurado dado, por exemplo, pela multiplicação à esquerda por yx^{-1} .

²O qual é um resultado clássico da teoria de espaços de Hilbert e pode ser enunciado da seguinte forma:

Seja X um espaço de Banach, Y um espaço normado e $\mathcal{F}$ um conjunto de operadores lineares de X em Y . Suponhamos que para todo $x \in X$ valha:

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\|_Y < \infty.$$

Ou seja, para todo T em $\mathcal{F}$, existe uma constante M_T com $\|Tx\|_Y < M_T$. Então:

$$\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{\substack{T \in \mathcal{F} \\ x \in X \\ \|x\|_X = 1}} \|T(x)\|_Y < \infty.$$

Isto é, existe uma constante M tal que $\|T\|_{\mathcal{B}(X, Y)} \leq M$.

Para uma demonstração veja [2] ou [48], por exemplo.

Como ambos os termos à direita tendem a zero, o primeiro pois $u \rightarrow v$ e o segundo pela continuidade de T , então $T_x u \rightarrow T_y v$ e o mapa $(u, x) \mapsto T_x u$ de $\mathcal{H} \times G \rightarrow \mathcal{H}$ é contínuo. $\square$

A proposição acima não terá grande relevância no que se segue e a grande importância de sua demonstração é à equação 2.2, a qual mostra que para *grupos compactos* (tomando $G = K$), toda representação (fortemente contínua) satisfaz $\sup \|T_x\| < \infty$, ou seja, é feita através de operadores limitados. Tais representações são ditas simplesmente **representações limitadas**.

Uma representação é dita ser **unitária** se cada T_x é um operador unitário³ e é dita **trivial** se $T_x = id$ para todo $x \in G$.

Como sabemos, o conjunto das matrizes quadradas $n \times n$ inversíveis sobre um corpo $\mathbb{C}$, munido da topologia usual em $\mathbb{C}^{n^2}$ e com o produto usual de matrizes, é um grupo topológico localmente compacto, separável e Hausdorff, o qual será denotado, como é usual na literatura, por $GL(n, \mathbb{C})$.

Os subgrupos fechados de $GL(n, \mathbb{C})$ são chamados grupos matriciais⁴ e seus elementos estão associados às matrizes $g \leftrightarrow \{g_i^j\}$, $g_i^j \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \dots, n$. Os elementos de um subgrupo G de $GL(n, \mathbb{C})$ estão canonicamente associados à operadores lineares e inversíveis sobre $\mathbb{C}^n$ — via componentes com relação a uma base ortonormal em $\mathbb{C}^n$ — e como o produto de operadores coincide com o produto do grupo, tal associação é uma representação de G , a qual é chamada de **representação fundamental de G** .

Como um outro exemplo, seja $\mathcal{H} = L^2(G, \mu)$ o espaço das funções de G

³O conjunto $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ dos operadores lineares unitários em $\mathcal{H}$ é feito um grupo topológico (veja por exemplo [51]) com o produto dado pela composição e a topologia operatorial forte: uma sub-base é dada pelas vizinhanças

$$\mathcal{V}_u(U_0, r) := \{U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}) : \|Uu - U_0\| < r\},$$

com $U_0 \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, $u \in \mathcal{H}$ e $r > 0$, e então $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}(\mathcal{H})$ é por definição aberto se para cada $U_0 \in \mathcal{W}$ existe uma família finita de vizinhanças $\mathcal{V}_{u_j}(U_0, r_j)$, $j = 1, 2, \dots, k$ cuja intersecção está contida em $\mathcal{W}$.

Com essas considerações é possível constatar que uma representação fortemente contínua e unitária de G em $\mathcal{H}$ pode ser equivalentemente definida como um homomorfismo contínuo de G em $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

⁴Grupos matriciais podem ser definidos sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer, mas a definição acima cobre os grupos matriciais complexos e reais (pois $GL(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{C})$) com os quais lidaremos, e será usada por simplicidade.

em $\mathbb{C}$ quadrado integráveis com respeito à medida de Haar (veja apêndice A.2) à esquerda μ . Temos:

Proposição 2.2 (Representação Regular à Esquerda). *O mapa $x \mapsto T_x$ dado por:*

$$T_x u(s) = u(x^{-1}s), \quad \text{para } u \in \mathcal{H}; \quad x, s \in G,$$

é uma representação unitária de G em $\mathcal{H}$.

Demonstração. Claramente cada T_x é um operador linear, além disso, não é difícil ver que T é homomorfismo, de fato:

$$[T_x(T_y u)](s) = T_y u(x^{-1}s) = u(y^{-1}x^{-1}s) = u((xy)^{-1}s) = T_{xy} u(s).$$

Ainda, pela invariância da medida μ temos:

$$\langle T_x u, T_x v \rangle = \int u(x^{-1}s) v^*(x^{-1}s) d\mu(s) = \int u(s) v^*(s) d\mu(xs) = \langle u, v \rangle.$$

Ou seja, cada T_x é isométrico, sendo ainda claramente sobrejetores, concluímos que são unitários. No que concerne à continuidade de T , usamos o fato que toda função u de G em $\mathbb{C}$ contínua e de suporte compacto (veja apêndice A.1), isto é $u \in C_c(G)$, é uniformemente contínua à esquerda⁵

$$\sup |u(x^{-1}s) - u(s)| \rightarrow 0,$$

sempre que $x \rightarrow e$. Além disso, existe um compacto $K \subset G$ contendo os suportes de $T_x u$ e de u , para x suficientemente próximo a y , de modo que:

$$\begin{aligned} \|T_x u - u\| &= \left[\int |u(x^{-1}s) - u(s)|^2 d\mu(s) \right]^{1/2} \\ &\leq \max_{s \in K} |u(x^{-1}s) - u(s)| \sqrt{\mu(K)}, \end{aligned}$$

e como $\mu(K)$ é finito, o lado direito tende a 0 para $x \rightarrow e$. Agora, para todo $v \in \mathcal{H} = L^2(G, \mu)$ e $\epsilon > 0$, existe $u \in C_0(G)$ com $\|u - v\| < \epsilon$, pois $C_0(G)$ é

⁵Esse é um resultado clássico da teoria de grupos topológicos conhecido como continuidade uniforme à esquerda, e como era de se esperar possui um análogo para translações à direita, sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [6] ou [14].

denso em $\mathcal{H}$, e assim:

$$\begin{aligned} \|T_x v - v\| &\leq \|T_x v - T_x u\| + \|T_x u - u\| + \|u - v\| \\ &= \|v - u\| + \|T_x u - u\| + \|u - v\|. \end{aligned}$$

Como todos os termos à direita são menores que ϵ para $x \rightarrow e$, o lado esquerdo tende a 0 em tal situação, provando a continuidade de T . $\square$

A representação acima é de grande importância e é chamada de ***representação regular à esquerda***, sendo a ***representação regular à direita*** aquela obtida analogamente a partir da translação à direita:

$$T_x^R u(s) = u(sx), \quad (2.3)$$

e utilizando-se uma medida invariante à direita para formar o espaço $\mathcal{H}$, embora esse espaços sejam naturalmente isomorfos, uma vez que as medidas pertencem a uma mesma classe.

As representações unitárias possuem particular destaque na teoria das representações, a proposição a seguir mostra que, para essas representações, a condição de continuidade pode ser enfraquecida:

Proposição 2.3. *Se T é uma representação unitária de G em $\mathcal{H}$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é fortemente contínua, isto é:*

$$\|T_x u - T_y u\| \rightarrow 0 \quad \text{sempre que} \quad x \rightarrow y.$$

2. *T é fracamente contínua, isto é:*

$$\langle T_x u, v \rangle \rightarrow \langle T_y u, v \rangle \quad \text{sempre que} \quad x \rightarrow y.$$

3. *A função $x \mapsto \langle T_x u, u \rangle$ é contínua em e .*

4. *A função $x \mapsto \langle T_x u, u \rangle$ é mensurável.*

Onde as afirmações valem para $x, y \in G$ e para todo $u, v \in \mathcal{H}$.

Demonstração. É bem claro que as afirmações estão ordenadas por restritividade, ou seja, $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$, de modo que uma prova completa seria $4 \Rightarrow 1$, a qual no entanto exige um aprofundamento quanto a estrutura de Borel de G e do grupo de operadores lineares unitários em $\mathcal{H}$ que estão além do escopo desse texto, mas podem ser encontradas, por exemplo, em [56].

Apresentaremos no entanto a prova parcial de que $3 \Rightarrow 1$, que já corresponde a um enfraquecimento significativo na noção de continuidade.

Para tal, notemos que, para todo $u \in \mathcal{H}$ e $x, y \in G$:

$$\begin{aligned} \|T_x u - T_y u\|^2 &= \langle T_x u, T_x u \rangle - \langle T_x u, T_y u \rangle - \langle T_y u, T_x u \rangle + \langle T_y u, T_y u \rangle \\ &= 2\langle u, u \rangle - 2\operatorname{Re}\langle T_y u, T_x u \rangle \\ &\leq 2|\langle u, u \rangle - \langle T_y u, T_x u \rangle| \\ &= 2|\langle u, u \rangle - \langle T_{x^{-1}y} u, u \rangle|. \end{aligned}$$

Se supormos a validade de 3, então, para $x \rightarrow y$ temos $\langle T_{x^{-1}y} u, u \rangle \rightarrow \langle u, u \rangle$, de modo que, pela desigualdade acima $\|T_x u - T_y u\| \rightarrow 0$, implicando a afirmação 1.

□

Para uma dada representação T definimos seu **núcleo**, que denotamos por $\operatorname{Ker} T$, como o conjunto de elementos em G que são mapeados na identidade de $L(\mathcal{H})$, ou:

$$\operatorname{Ker} T = \{x \in G : T_x = I\}$$

Seja $K = \operatorname{Ker} T$, imediatamente verificamos que, se $x, y \in K$, então $T_{xy} = T_x T_y = id$, de modo que $xy \in K$, além disso, para $x \in K$ e $y \in G$, temos $T_{y^{-1}xy} = T_{y^{-1}} T_y = id$, ou seja, $y^{-1}xy \in K$, de modo que K é um subgrupo normal de G .

Se $K = \{e\}$, ou equivalentemente se T é injetora, dizemos que T é uma

representação **fiel**. Uma representação não fiel possui núcleo não trivial, nesse caso, cada coset xK , para $x \in G$ fixo, é representado pelo mesmo operador ($T_{xk} = T_x T_k = T_x$, para todo $k \in K$), e distintos operadores representam distintos cosets ($T_x = T_y \Rightarrow T_{xy^{-1}} = I \Rightarrow xy^{-1} \in K \Rightarrow y \in xK$), de tal forma T pode ser entendida como uma representação fiel do grupo quociente G/K pelo mapa $xK \mapsto T_x$.

E conveniente notar que, para grupos que não possuem subgrupos normais, como é o caso de grupos de Lie simples sem subgrupos invariantes discretos, como por exemplo $SU(N)/Z_N$, todas as representações são ou fieis ou triviais.

2.1.2 Forma Matricial

Como tratamos de representações em espaços de Hilbert separáveis, os quais possuem sempre uma base ortonormal no máximo enumerável, *toda representação possui uma forma matricial*, exploremos um pouco este fato.

Seja $\{e_i\}$; $i = 1, 2, \dots, N$; $N \leq \infty$, uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, os operadores T_x transformam o elemento e_j em $T_x e_j \in \mathcal{H}$ o qual sempre pode ser escrito como combinação linear dos e_i ⁶

$$T_x e_j = D_{ij}(x) e_i, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

com certos coeficientes $D_{ij}(x)$, os quais, pela ortonormalidade da base, são dados por:

$$D_{ij}(x) = \langle T_x e_j, e_i \rangle.$$

Assim, a matriz com coeficientes D_{ij} é a **forma matricial de T na base $\{e_i\}$** , pela proposição 2.3 acima, esses coeficientes são funções contínuas de x .

Observemos que matriz correspondente à $T_{xy} = T_x T_y$ é dada pelo produto das matrizes correspondendo à T_x e T_y , isto é:

$$D_{ij}(xy) = D_{ik}(x) D_{kj}(y),$$

⁶Usaremos a convenção de Einstein de subentender a somatória sobre os possíveis valores de índices repetidos, a menos de menção contrária.

de fato:

$$\begin{aligned}
 D_{ij}(xy) &= \langle T_{xy}e_j, e_i \rangle = \langle T_x T_y e_j, e_i \rangle = \langle T_y e_j, T_x^\dagger e_i \rangle \\
 &= \langle T_y e_j, e_k \rangle \langle e_k, T_x^\dagger e_i \rangle = \langle T_y e_j, e_k \rangle \langle T_x e_k, e_i \rangle \\
 &= D_{ik}(x) D_{kj}(y).
 \end{aligned}$$

Devemos observar que a forma matricial da representação é dependente da base escolhida.

Dado um operador unitário $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H})$, o conjunto $\{f_i\}, i = 1, \dots, N$, onde $f_j = Ue_j = U_{ij}e_i$ forma outra base ortonormal, além disso toda base ortonormal pode ser obtida dessa forma, sendo que os elementos de matriz do operador U são dados, em termos dos vetores da base, em acordo com a relação acima, por:

$$U_{ki} = \langle Ue_i, e_k \rangle = \langle f_i, e_k \rangle.$$

Para obter os coeficientes da representação na nova base, fazemos:

$$\begin{aligned}
 D_{ij}^f(x) &= \langle T_x f_j, f_i \rangle = \langle T_x Ue_j, Ue_i \rangle = \langle T_x Ue_j, e_k \rangle \langle e_k, Ue_i \rangle \\
 &= \langle Ue_j, T_x^\dagger e_k \rangle \langle e_k, Ue_i \rangle = \langle Ue_j, e_l \rangle \langle e_l, T_x^\dagger e_k \rangle \langle e_k, Ue_i \rangle \\
 &= \langle Ue_j, e_l \rangle \langle T_x e_l, e_k \rangle \langle U^{-1}e_k, e_i \rangle = U_{ik}^{-1} D_{kl} U_{lj}.
 \end{aligned}$$

Ou seja:

$$D^f = U^{-1} D U.$$

2.1.3 Representações Equivalentes

Se T é uma representação de G em $\mathcal{H}$, e $\mathcal{H}'$ é um espaço de Hilbert isomorfo a $\mathcal{H}$ via o isomorfismo limitado $W: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$, podemos induzir a representação $T': G \rightarrow GL(\mathcal{H})$ dada por $T'_x = W T W^{-1}$.

De fato, a inversibilidade de T'_x decorre da de T_x , além disso:

$$T'_{xy} = WT_xTyW^{-1} = WT_xw^{-1}WT_yW^{-1} = T'_xT'_y,$$

e ainda, quanto a continuidade, tomando $u' \in \mathcal{H}'$ arbitrário, e sendo $u = W^{-1}u' \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \|T'_xu' - u'\|_{\mathcal{H}'} &= \|WT_xW^{-1}u' - WW^{-1}u'\|_{\mathcal{H}'} \\ &= \|W(T_xu - u)\|_{\mathcal{H}'} \\ &\leq \|W\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{H}')} \|T_xu - u\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Pela imposição de W seja limitado e pela continuidade de T , o lado direito da equação tende a zero conforme $x \rightarrow e$, mostrando que de fato T' é uma representação do grupo G no espaço $\mathcal{H}'$.

No entanto essas representações não são intrinsecamente diferentes, e no estudo das representações de grupos é importante agrupar representações como essas em certas classes, para tal fazemos uso da noção de representações equivalentes.

Definição 2.2 (Equivalência entre representações). Duas representações T e T' de um mesmo grupo G em espaços de Hilbert separáveis $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$, respectivamente, são ditas **equivalentes** se existe um isomorfismo limitado $W: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ tal que:

$$WT_x = T'_xW, \quad \text{para todo } x \in G. \quad (2.4)$$

Note que a relação acima é uma relação de equivalência, isto é, reflexiva, simétrica e transitiva, de tal forma que ela particiona o conjunto de representações de um determinado grupo em classes de representações equivalentes. Denotaremos o fato de duas representações T e T' serem equivalentes por $T \simeq T'$.

Caso exista W como acima, mas que seja ainda unitário, dizemos que as representações T e T' são **unitariamente equivalentes**.

Exemplo 2.1. Como um exemplo, vejamos que as representações regulares à direita T^R e à esquerda T^L , introduzidas na proposição 2.2, no caso de

um grupo unimodular, são unitariamente equivalentes por intermédio da involução $W: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dada por $Wu(x) = u(x^{-1})$.

Não é difícil verificar que W é um automorfismo de $\mathcal{H}$, ainda, como a medida de Haar é, para G unimodular, invariante por inversões (veja proposição A.7), W é também unitária. Para mostrar que a relação (2.4) é também satisfeita, tomamos $x \in G$ arbitrário, e, para todo $u \in \mathcal{H} = L^2(G, \mu)$ e todo $s \in G$ podemos escrever:

$$\begin{aligned} [WT_x^R u](s) &= [T_x^R u](s^{-1}) = u(s^{-1}x) \\ &= u((x^{-1}s)^{-1}) = [Wu](x^{-1}s) \\ &= [T_x^L Wu](s). \end{aligned}$$

Mostrando a afirmação anterior de que T^R e T^L são equivalentes. No caso em que G não é unimodular uma afirmação análoga é verdadeira, bastando definir $Wu(x) = \frac{u(x^{-1})}{\sqrt{\Delta(x)}}$, onde Δ é a função modular de G (veja apêndice A.2).

É interessante verificar que duas representações unitariamente equivalentes podem ser representadas pelos mesmos elementos de matriz através de uma escolha apropriada de bases.

Com esse fim, consideremos duas tais representações T e T' , nos espaços $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$, respectivamente, unitariamente equivalentes através do isomorfismo unitário $W: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ e seja $\{e_i\}_1^N$, $N \leq \infty$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Como W é isomorfismo, os vetores $f_i = We_i$ formam uma base de $\mathcal{H}'$, para os elementos de matriz das representações dadas nessas bases temos:

$$D'_{ij}f_i = T'_x f_j = T'_x W e_j \stackrel{(2.4)}{=} W T_x e_j = D_{ij} W e_i = D_{ij} f_i.$$

Ou seja, as matrizes coincidem.

O raciocínio acima exemplifica a restritividade da noção de equivalência unitária, um fato interessante, cuja demonstração pode ser encontrada por exemplo em [6], é que, para representações unitárias, equivalência e equivalência unitária coincidem.

2.1.4 Redutibilidade de Representações e Operadores de Entrelaçamento

Dada uma representação T de G em $\mathcal{H}$, dizemos que um subespaço $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H}$ é *invariante* sob a ação de T se $T_x u \in \mathcal{H}_1$ para todos $x \in G$ e $u \in \mathcal{H}_1$. Nesse caso, podemos entender T_x , enquanto restrita a $\mathcal{H}_1$, como uma representação de G nesse subespaço, a qual chamamos de *subrepresentação* de T definida por $\mathcal{H}_1$.

Toda representação da origem a pelo menos dois subespaços invariantes triviais: o subespaço nulo $\{0\}$ e o espaço $\mathcal{H}$ que carrega a representação. Subespaços invariantes não-triviais são chamados subespaços invariantes *próprios*.

O conceito de subespaços invariantes é, como veremos adiante, de crucial importância na teoria das representações e da origem à seguinte classificação:

Definição 2.3. Uma representação T de G em $\mathcal{H}$ é dita *irredutível* se $\mathcal{H}$ não possui subespaços invariantes fechados próprios.

Comentemos que as vezes a noção acima é chamada de irredutibilidade topológica, diferenciando-se da noção mais restritiva de irredutibilidade algébrica, que não utilizaremos nesse texto, a qual não impõe que o subespaço invariante próprio seja fechado.

Representações não irredutíveis são ditas *redutíveis*.

Consideremos uma representação redutível T . Dado um subespaço invariante fechado próprio $\mathcal{H}_1$, seja $\mathcal{H}/\mathcal{H}_1$ o espaço quociente onde cada classe é formada por vetores de $\mathcal{H}$ cuja diferença pertence a $\mathcal{H}_1$, e denotemos por $\bar{u} \in \mathcal{H}/\mathcal{H}_1$ a classe a qual pertence o vetor $u \in \mathcal{H}$.

Então, como $\bar{u}_1 = \bar{u}_2 \Rightarrow u_2 - u_1 \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow T_x u_2 - T_x u_1 \in \mathcal{H}_1$ para todo $x \in G$, podemos definir em $\mathcal{H}/\mathcal{H}_1$ o operador $\bar{T}_x$:

$$\bar{T}_x(\bar{u}) = \overline{T_x(u)}. \quad (2.5)$$

O mapa $x \rightarrow \bar{T}_x$ assim construído é, como facilmente se verifica, uma representação de G em $\mathcal{H}/\mathcal{H}_1$, chamada *representação quociente* de G definida pelo subespaço invariante $\mathcal{H}_1$.

Suponha agora que o subespaço invariante $\mathcal{H}_1$ admita um subespaço complementar também invariante, ou seja, um subespaço invariante $\mathcal{H}_2$ tal que:

$$\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2 = \{0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}.$$

Então $\bar{v} \neq 0$ para todo $v \in \mathcal{H}_2$ e não é difícil verificar que o mapa $v \mapsto \bar{v}$ é um isomorfismo de $\mathcal{H}_2$ em $\mathcal{H}/\mathcal{H}_1$, o qual intermedeia a equivalência entre a subrepresentação definida por $\mathcal{H}_2$ e a representação quociente definida por $\mathcal{H}_1$, conforme a equação (2.5).

Dessa forma, quando o subespaço invariante admite um subespaço complementar não é necessário que nos ocupemos com representações quocientes. Como tratamos de espaços de Hilbert, qualquer subespaço invariante fechado $\mathcal{H}_1$ possui um complementar dado por seu complemento ortogonal $\mathcal{H}_1^\perp$, e embora esse ultimo espaço não seja invariante para representações em geral, para representações unitárias temos:

Proposição 2.4. *Seja T uma representação unitária de G em $\mathcal{H}$. Seja $\mathcal{H}_1$ um subespaço fechado de $\mathcal{H}$ e P_1 o operador projeção de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}_1$. Então:*

1. $\mathcal{H}_1^\perp$ é invariante se e somente se $\mathcal{H}_1$ o é.
2. $\mathcal{H}_1$ é invariante se e somente se $P_1 T_x = T_x P_1$ para todo $x \in G$.

Demonstração.

Prova de 1. Suponha $\mathcal{H}_1$ invariante e sejam $u \in \mathcal{H}_1$ e $v \in \mathcal{H}_1^\perp$ arbitrários, então, para todo $x \in G$:

$$\langle T_x v, u \rangle = \langle v, T_x^\dagger u \rangle = \langle v, T_{x^{-1}} u \rangle.$$

Agora, o lado direito é nulo devido a invariância de $\mathcal{H}_1$ e portanto $T_x v \in \mathcal{H}_1^\perp$, mostrando que $\mathcal{H}_1^\perp$ é também invariante, a recíproca é provada de forma análoga notando-se que $[\mathcal{H}_1^\perp]^\perp = \mathcal{H}_1$.

Prova de 2. Novamente suponha $\mathcal{H}_1$ invariante e tome $u \in \mathcal{H}_1$ arbitrário, então, pela definição de P_1 , $P_1 u = u \Rightarrow T_x P_1 u = T_x u$, enquanto pela in-

variância de $\mathcal{H}_1$, $T_x u \in \mathcal{H}_1 \Rightarrow P_1 T_x u = T_x u$. Comparando as igualdades obtemos $P_1 T_x u = T_x P_1 u$, e como u é arbitrário, obtemos $P_1 T_x = T_x P_1$.

Para a recíproca consideremos que $P_1 T_x = T_x P_1$ para todo $x \in G$, então, para $u \in \mathcal{H}_1$, temos $T_x u = T_x P_1 u = P_1 T_x u \in \mathcal{H}_1$. Mostrando que $\mathcal{H}_1$ é invariante. $\square$

Como um exemplo mostrando a importância da unitariedade na proposição acima, consideremos o seguinte:

Exemplo 2.2. Seja $G = \mathbb{R}$ e $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ com produto $\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$, onde u_i, v_i ; $i = 1, 2$ são coordenadas ortogonais de $u, v \in \mathbb{R}^2$, e consideremos o mapa:

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto T_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ou seja,} \quad T_x \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ x u_1 + u_2 \end{bmatrix},$$

o qual facilmente se verifica ser uma representação de G em $\mathcal{H}$. Da definição acima se constata que o subespaço $\mathcal{H}_1 = \{u \in \mathcal{H} : u = \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \end{bmatrix}, u_2 \in \mathbb{R}\}$ é invariante, enquanto seu complemento ortogonal $\mathcal{H}_1^\perp = \{u \in \mathcal{H} : u = \begin{bmatrix} u_1 \\ 0 \end{bmatrix}, u_1 \in \mathbb{R}\}$ não o é.

A relação (2.4) definindo equivalência entre duas representações pode ser satisfeita por um operador W não necessariamente inversível, nesse caso dizemos que $W: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ é um **operador de entrelaçamento** entre as representações T e T' .

O conjunto de todos os operadores de entrelaçamento entre duas representações forma naturalmente um espaço vetorial, que denotaremos por $\mathfrak{R}(T, T')$, a dimensão desse espaço é chamada de **número de entrelaçamento entre T e T'** e denotada por $i(T, T')$.

Quando $T = T'$, $\mathfrak{R}(T, T)$ é uma álgebra linear chamada **álgebra comutante de U** .

Se um operador de entrelaçamento é bijetor, ele estabelece uma relação de equivalência entre as representações em questão, vejamos o que podemos

deduzir sobre duas representações que sabemos possuir um operador de entrelaçamento não nulo.

Seja então $S: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ um tal operador, entrelaçando representações T e T' de G e sejam ainda $N = \text{Ker}S = \{u \in \mathcal{H} : Su = 0\}$ seu núcleo e $R = \text{Ran}S = \{v \in \mathcal{H}' : v = Su \text{ para algum } u \in \mathcal{H}\}$ seu alcance. Não é difícil verificar que N e R são subespaços invariantes de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}'$ sob as ações de T e T' , respectivamente.

De fato, como S entrelaça T e T' , para todo $x \in G$ temos $ST_x = T'_xS$, então $u \in N \iff Su = 0 \Rightarrow ST_xu = T'_xSu = 0 \Rightarrow T_xu \in N$, mostrando que N é invariante. Analogamente, se $v \in R$, então $v = Su$ para algum $u \in \mathcal{H}$, e assim $T'_xv = T'_xSu = ST_xu$, como $T_xu \in \mathcal{H}$, isso implica que $T'_xv \in R$.

Suponhamos que N possua um subespaço invariante complementar N' , nesse caso S , quando restrito à N' será bijetor e estabelece uma equivalência entre a subrepresentação de T definida por N' e a subrepresentação de T' definida por R . Mesmo quando N não possui complementar invariante, S estabelece uma equivalência entre a representação quociente definida por N e a subrepresentação definida por R .

O raciocínio pode ser feito no sentido inverso e não é difícil verificar então que a existência de uma equivalência entre uma representação quociente de T e uma subrepresentação de T' implica na existência de um operador de entrelaçamento entre T e T' .

Dessa forma, $\mathfrak{R}(T, T')$ se reduz ao espaço nulo, e então $i(T, T') = 0$, se e somente se nenhuma representação quociente de T (ou subrepresentação quando subespaços invariantes possuírem complementares invariantes, como por exemplo para representações unitárias) é equivalente a uma subrepresentação de T' . Nesse caso, dizemos que T e T' são **disjuntas**.

O subespaço N é ainda fechado por ser pré-imagem do fechado $\{0\}$ pelo mapa S que é limitado e logo contínuo, já o subespaço R não é necessariamente fechado, no entanto, se nos restringirmos ao caso em que $\mathcal{H}'$ tem dimensão finita, então R , como todo subespaço, é fechado.

Se as representações T e T' são irredutíveis, então N e R são ou $\{0\}$ ou o espaço todo, de tal forma que ou $S = 0$ ou S é inversível e logo T e T' são equivalentes e $\mathfrak{R}(T, T')$ é isomorfa à $\mathfrak{R}(T, T)$ e qualquer elemento de $\mathfrak{R}(T, T)$

é uma bijeção. Se U é uma tal bijeção arbitrária e h é um autovalor não nulo de U (que sempre existe), então $U - hI$ tem determinante nulo e pertence também a $\mathfrak{R}(T, T)$, de tal forma que $U - hI = 0$, ou seja, $U = hI$.

Esses resultados são conhecidos como Lema de Schur e são recolocados na proposição abaixo para referência futura:

Proposição 2.5 (Lema de Schur para dimensão finita).

1. *Se S é um operador de entrelaçamento entre representações irredutíveis de dimensão finita de um grupo, então, ou $S = 0$ ou S é uma bijeção.*
2. *Se T é uma representação irredutível de dimensão finita de um grupo, então os únicos operadores que comutam com T_x para todo $x \in G$ são múltiplos da identidade.*

O lema acima é de extrema importância na teoria das representações e faremos uso dele diversas vezes ao longo do que segue, ele possui generalizações para o caso de dimensão infinita, requerendo no entanto que se assuma que as representações em questão sejam limitadas ou unitárias.

Trataremos do segundo caso, que faz uso do teorema espectral para operadores auto adjuntos⁷ e que será de interesse no desenvolvimento que faremos.

Proposição 2.6 (Lema de Schur para representações unitárias).

1. *Se S é um operador de entrelaçamento entre representações irredutíveis e unitárias de um grupo, então, ou $S = 0$ ou S é uma bijeção.*
2. *Se T é uma representação unitária de um grupo, então T é irredutível se e somente se os únicos operadores que comutam com T_x para todo $x \in G$ são múltiplos da identidade.*

Demonstração.

Prova de 1. Sejam T e T' as representações unitárias entrelaçadas por S , isto é:

⁷Veja, por exemplo, [48].

$$ST_x = T'_x S, \quad \forall x \in G.$$

Tomando o adjunto da equação acima obtemos $T_x S^\dagger = S^\dagger T'_x$, combinando as duas relações temos $S^\dagger ST_x = S^\dagger T'_x S = T_x SS^\dagger$, ou seja, T comuta com o operador auto adjunto $V = SS^\dagger$.

Se a decomposição espectral de V é $V = \int \lambda dP_\lambda$, então, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $TP_\lambda = P_\lambda T$, o que significa que os subespaços fechados $P_\lambda \mathcal{H}$ são invariantes, como T é irredutível, $P_\lambda \mathcal{H} = \{0\}$ ou $P_\lambda \mathcal{H} = \mathcal{H}$, como o espectro de V não é vazio, temos $V = \lambda I$. De forma análoga se conclui que $V' = S^\dagger S = \lambda' I$, mas como $\lambda S = VS = SS^\dagger S = SV' = \lambda' S$, então ou $S = 0$ ou $\lambda = \lambda'$. No ultimo caso, tomando $U = \lambda^{-1/2} S$ temos $UU^\dagger = U^\dagger U = I$, de tal forma que U , e logo S , são isomorfismos.

Prova de 2. Se U é um operador que comuta com T , então também $U^\dagger$ o faz e assim o fazem os operadores auto adjuntos $U_+ = (U + U^\dagger)/2$ e $U_- = (U - U^\dagger)/2i$, pelo mesmo caminho feito na demonstração acima concluímos que $U_\pm = \lambda_\pm I$, então $U = U_+ + iU_- = (\lambda_+ + i\lambda_-)I = \lambda I$. Reciprocamente, se todo operador U que comuta com todo T_x é da forma λI , então os únicos operadores de projeção que comutam com todos os T_x são ou I ou 0 . Logo, pela proposição 2.4, os únicos subespaços invariantes são $\{0\}$ e o espaço todo, e assim T é irredutível. □

A propriedade de uma representação de ser feita através de operadores que comutam somente múltiplos da identidade ($\mathfrak{R}(T, T) = \{\lambda I, \lambda \in \mathbb{R}\}$) na segunda afirmativa do teorema acima estabelece a noção de *irredutibilidade por operadores*, que para o caso de representações unitárias, é então equivalente à noção de irredutibilidade.

Para aprofundarmos a noção de redutibilidade de representações definamos primeiramente o conceito de soma direta de representações.

Dadas duas representações T^1 e T^2 de um mesmo grupo G em espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, sua **soma direta**, denotada por $T^1 \oplus T^2$ é a representação de G em $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ ⁸ dada, para $u_i \in \mathcal{H}_i$, por:

⁸Que é definido como o espaço $\{(x, y) : x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2\}$, feito um espaço de Hilbert

$$[T^1 \oplus T^2]_x(u_1, u_2) = (T_x^1 u_1, T_x^2 u_2).$$

O leitor pode verificar que a relação acima define de fato uma representação de G em $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, e não é difícil ver também que os espaços $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ são ambos invariantes por tal representação.

Reciprocamente, se uma representação T de G em $\mathcal{H}$ é tal que possui subrepresentações T^i , $i = 1, \dots, N$ nos subespaços invariantes $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}$ tais que $\mathcal{H} = \bigoplus_i \mathcal{H}_i$, então claramente:

$$T = \bigoplus_i T^i.$$

Uma representação é dita **completamente redutível** se pode ser escrita como soma direta de representações irredutíveis, nesse caso, se tomarmos em $\mathcal{H}$ uma base composta por bases dos subespaços ortogonais $\mathcal{H}_i$ então a forma matricial D é claramente dada por:

$$D(x) = \begin{bmatrix} D^1(x) & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & D^2(x) & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & D^i(x) & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Onde cada D^i é uma forma matricial da representação irredutível T^i em $\mathcal{H}_i$. De maneira geral representações redutíveis podem não ser completamente redutíveis, no entanto:

Proposição 2.7. *Toda representação unitária de dimensão finita é completamente redutível.*

Demonstração. Se $\mathcal{H}_1$ é um subespaço invariante próprio de $\mathcal{H}$, então $\mathcal{H}_1^\perp$ também o é pela proposição acima 2.4. Se algum desses subespaços ainda com o produto escalar:

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = \langle x_1, x_2 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle y_1, y_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}.$$

contém subespaços invariantes próprios continuamos o procedimento acima, o qual pode ser feito apenas um número finito de vezes devido a finitude da dimensão de $\mathcal{H}$. Ao fim do processo $\mathcal{H}$ está decomposto em subespaços invariantes irreduzíveis. $\square$

Em vista das definições dadas não é difícil concluir que:

$$i(T^1 \oplus T^2, T') = i(T^1, T') + i(T^2, T')$$

e

$$i(T, T'^1 \oplus T'^2) = i(T, T'^1) + i(T, T'^2).$$

Consideremos então uma representação T de G em $\mathcal{H}$ completamente redutível:

$$T = T^1 \oplus T^2 \oplus \cdots \oplus T^n,$$

onde T^i são irreduzíveis e de dimensão finita. Então, se L é uma representação irreduzível de G :

$$i(L, T) = \sum_j i(L, T^j) = \text{número de } j\text{'s com } L \simeq T^j.$$

Consequência imediata é que se $T^1 \oplus \cdots \oplus T^n$ é equivalente à $L^1 \oplus \cdots \oplus L^m$, onde T^j e L^k são irreduzíveis e de dimensão finita, então $m = n$ e existe uma permutação π de $\{1, \dots, j\}$ tal que $T^j \simeq L^{\pi(j)}$, $j = 1, \dots, n$.

O número $i(T^i, T)$ é igual ao número de fatores de T equivalentes à T^i em qualquer decomposição de T em irreduzíveis e é chamado de **multiplicidade** com que T^i ocorre em T .

2.1.5 Produto Tensorial de Representações e Tensores

Uma noção de extrema importância no estudo de espaços vetoriais e espaços de Hilbert é a de produto tensorial, que passamos a formular, apresentando as definições e principais propriedades. Demonstrações, exemplos e noções intuitivas podem ser encontradas, por exemplo, em [29] ou [6], que seguiremos

na apresentação que se segue, ou em bons livros que tratem de espaços vetoriais e espaços de Hilbert.

Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert complexos separáveis ⁹ com produtos escalares $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$, respectivamente, e consideremos o espaço $\mathbb{C}(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2)$ — chamado espaço vetorial livre sobre $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ — das combinações lineares formais

$$\sum c_{x,y}(x, y) \quad x \in \mathcal{H}_1, \quad y \in \mathcal{H}_2,$$

com um número finito de coeficientes $c_{x,y}$ não nulos. Munido de soma ponto a ponto e multiplicação escalar, $\mathbb{C}(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2)$ é feito um espaço vetorial complexo, para o qual $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ é uma base, e caracterizado pelo fato de que qualquer mapa F de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ num espaço vetorial W possui uma única extensão a um mapa linear $\tilde{F} : \mathbb{C}(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2) \rightarrow W$.

Consideremos o subespaço N de $\mathbb{C}(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2)$ formado por vetores da forma

$$\begin{aligned} & a(x, y) - (ax, y), \\ & a(x, y) - (x, ay), \\ & (x, y) + (x', y) - (x + x', y), \\ & (x, y) + (x, y') - (x, y + y'), \end{aligned}$$

onde $a \in \mathbb{C}$, $x, x' \in \mathcal{H}_1$, e $y, y' \in \mathcal{H}_2$ e definamos o **produto tensorial de $\mathcal{H}_1$ por $\mathcal{H}_2$** , denotado por $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, como o espaço quociente $\mathbb{C}(\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2)/N$. A classe de equivalência de um elemento (x, y) em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ será denotada por $x \otimes y$ e chamada produto tensorial entre x e y .

Diretamente das definições se constata que produtos tensoriais satisfazem

$$\begin{aligned} a(x \otimes y) &= ax \otimes y = x \otimes ay, \\ x \otimes y + x' \otimes y &= (x + x') \otimes y, \end{aligned}$$

⁹A noção de produto tensorial pode ser definida para espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer de forma completamente análoga.

$$x \otimes y + x \otimes y' = x \otimes (y + y').$$

Note-se que nem todo elemento de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ pode ser escrito na forma $x \otimes y$, com $x \in \mathcal{H}_1$, $y \in \mathcal{H}_2$, mas sim como combinação linear de elementos dessa forma.

O produto tensorial possui a importante propriedade de que, para qualquer mapa bilinear A de $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$ num espaço vetorial W , existe um único mapa linear $\tilde{A}: \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \rightarrow W$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2 & \xrightarrow{A} & W \\ & \searrow \pi & \nearrow \tilde{A} \\ & \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 & \end{array}$$

onde $\pi(x, y) = x \otimes y$.

Tal propriedade é extremamente útil, sendo usada para provar várias propriedades a respeito de produtos tensoriais, algumas das quais mencionaremos abaixo, além de caracterizar o produto tensorial entre dois espaços no sentido de que qualquer outro espaço possuindo tal propriedade é isomorfo à $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$.

Se $\{e_i^{(k)}\}_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_k}$, $k = 1, 2$ são bases para $\mathcal{H}_k$ e se $x = x^i e_i^{(1)} \in \mathcal{H}_1$ e $y = y^j e_j^{(2)} \in \mathcal{H}_2$, então:

$$x \otimes y = x^i y^j e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}.$$

Assim, $\{e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}\}$, $i = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_1$, $j = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_2$ é uma base para $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, que portanto possui dimensão $\dim \mathcal{H}_1 \dim \mathcal{H}_2$.

Em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ podemos definir um produto escalar por:

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle_1 \langle y_1, y_2 \rangle_2.$$

Se pelo menos um dos espaços $\mathcal{H}_k$ tem dimensão finita, então $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é completo com relação ao produto escalar acima, caso contrário consideramos $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ como o completamento canônico com relação a este produto — manteremos a notação $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, ficando subentendido que estamos lidando

sempre com espaços completos — de forma que $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é feito, em qualquer caso, um espaço de Hilbert.

Usando a propriedade característica do produto tensorial mencionada acima e as definições de produto tensorial e direto entre espaços de Hilbert, é fácil verificar que o produto tensorial é comutativo, associativo e distributivo com relação ao produto direto, significando que, para espaços de Hilbert $\mathcal{H}_i$, $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 &\simeq \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_1, \\ \mathcal{H}_1 \otimes (\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3) &\simeq (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \otimes \mathcal{H}_3, \\ \mathcal{H}_1 \otimes (\mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3) &\simeq \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_3.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Onde " $\simeq$ " deve ser entendido como isomorfo.

Se A e B são operadores limitados em $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente, definimos o operador limitado $A \otimes B$ em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ — chamado produto tensorial entre A e B — por:

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By,$$

de onde segue que, para operadores limitados A, A' em $\mathcal{H}_1$ e B, B' em $\mathcal{H}_2$ temos:

$$(A \otimes B)(A' \otimes B') = AA' \otimes BB'.\tag{2.7}$$

Se $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$ são representações dos grupos G_1 e G_2 em espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, então, usando (2.7) acima, não é difícil constatar que o mapa

$$G_1 \times G_2 \ni (g^1, g^2) \mapsto T_{g^{(1)}}^{(1)} \otimes T_{g^{(2)}}^{(2)}\tag{2.8}$$

é uma representação de $G_1 \times G_2$ em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, a qual é chamada de produto tensorial externo das representações $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$.

Se os elementos de matriz de $T_{g^{(k)}}^{(k)}$, $k = 1, 2$ são, em bases $\{e_i^{(k)}\}_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_k}$, $k = 1, 2$ de $\mathcal{H}_k$, dados por $D_{ij}^{(k)}(g^{(k)})$, $i, j = 1, \dots, \dim \mathcal{H}_k$, então, na base $\{e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}\}$, de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, os elementos de matriz de $T_{g^{(1)}}^{(1)} \otimes T_{g^{(2)}}^{(2)}$ são:

$$\begin{aligned}
D_{ik,jm}(g^{(1)}, g^{(2)}) &= \langle (T_{g^{(1)}}^{(1)} \otimes T_{g^{(2)}}^{(2)})(e_j^{(1)} \otimes e_m^{(2)}), (e_i^{(1)} \otimes e_k^{(2)}) \rangle \\
&= \langle (T_{g^{(1)}}^{(1)} e_j^{(1)}, e_i^{(1)})_1 (T_{g^{(2)}}^{(2)} e_m^{(2)}, e_k^{(2)})_2 \rangle \\
&= D_{ij}^{(1)}(g^{(1)}) D_{km}^{(2)}(g^{(2)}).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Se tomarmos $G_1 = G_2$ e restringirmos o mapa (2.8) ao subgrupo fechado $\{(g, g) \in G \times G\} \simeq G$, obtemos o mapa

$$G \ni g \mapsto (T^{(1)} \otimes T^{(2)})_g = T_g^{(1)} \otimes T_g^{(2)}, \tag{2.10}$$

o qual é uma representação de G em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, chamada de **produto tensorial interno** (ou produto Kronecker)¹⁰ das representações $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$.

Nesse caso, a equação (2.9) que fornece os elementos de matriz de $(T^{(1)} \otimes T^{(2)})_g$ fica:

$$D_{ik,jm}(g) = D_{ij}^{(1)}(g) D_{km}^{(2)}(g). \tag{2.11}$$

Usando as definições acima e as propriedades 2.6 do produto tensorial entre espaços de Hilbert se verifica que o produto tensorial interior entre representações satisfaz propriedades análogas:

$$\begin{aligned}
T^{(1)} \otimes T^{(2)} &\simeq T^{(2)} \otimes T^{(1)}, \\
T^{(1)} \otimes (T^{(2)} \otimes T^{(3)}) &\simeq (T^{(1)} \otimes T^{(2)}) \otimes T^{(3)}, \\
T^{(1)} \otimes (T^{(2)} \oplus T^{(3)}) &\simeq (T^{(1)} \otimes T^{(2)}) \oplus (T^{(1)} \otimes T^{(3)}).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Onde agora " $\simeq$ " significa equivalente.

Note que em geral, mesmo que $T^{(1)}$ e $T^{(2)}$ sejam irredutíveis, o produto tensorial $(T^{(1)} \otimes T^{(2)})$ é em geral redutível, ou seja:

¹⁰Como não lidaremos, ao longo do texto, com produto tensorial exterior de representações, o termo produto tensorial entre representações designará o produto tensorial interno.

$$(T^{(1)} \otimes T^{(2)})_g = \bigoplus_{\alpha} m_{\alpha} T_g^{(\alpha)},$$

onde $m_{\alpha} \in \mathbb{N}$ é a multiplicidade com que a representação irredutível $T^{(\alpha)}$ aparece na decomposição de $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$.

A determinação dos coeficientes m_{α} constitui o problema das séries de *Clebsch – Gordan* e é um dos problemas mais intrincados na teoria das representações, com solução conhecida apenas para alguns grupos e determinados tipos de representação.

Seja C um operador em $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ que reduza o produto tensorial $T^{(1)} \otimes T^{(2)}$ à forma bloco diagonal, ou seja, tal que:

$$C(T^{(1)} \otimes T^{(2)})C^{-1} = \bigoplus_{\alpha} m_{\alpha} T^{(\alpha)}; \quad C(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) = \bigoplus_{\alpha} \mathcal{H}^{(\alpha)}.$$

A matriz C relaciona elementos de bases $\{e_i^{(\alpha)}\}_{i=1}^{\dim \mathcal{H}^{(\alpha)}}$ de subespaços invariantes $\mathcal{H}^{(\alpha)}$ que carregam a representação irredutível $T^{(\alpha)}$ a elementos da base tensorial $e_i^{(1)} \otimes e_j^{(2)}$.

Os coeficientes de C são chamados coeficientes de *Clebsch – Gordan* e possuem papel fundamental na mecânica quântica, sobretudo na descrição de sistemas compostos.

Uma noção relacionada ao produto tensorial de representações e importantíssima, sobretudo na determinação de realizações explícitas de representações irredutíveis de grupos matriciais, é a de **tensores**, que exploraremos brevemente e utilizaremos mais adiante para realizar representações de $SU(2)$, $SO(3)$, e $SO(1,3)$.

Consideremos então um grupo matricial G , ou seja, um subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{C})$, onde um elemento $g \in G$ está associado à coeficientes g_i^j , $i, j = 1, 2, \dots, n$. Um tensor de rank r relativo à G é um objeto $\{T_{i_1 i_2 \dots i_r}\}$; $T_{i_1 i_2 \dots i_r} \in \mathbb{C}$; $i_k = 1, 2, \dots, n$; $k = 1, \dots, r$ que se transforma sob a ação de $g \in G$ de acordo com:

$$(gT)_{i_1 i_2 \dots i_r} = g_{i_1}^{j_1} g_{i_2}^{j_2} \dots g_{i_r}^{j_r} T_{j_1 j_2 \dots j_r}. \quad (2.13)$$

Claramente o conjunto de tensores de um mesmo rank r formam um espaço vetorial $\mathcal{T}^r(G)$ com soma e multiplicação por escalar definidas componente à componente. Da lei de transformação acima (2.13) e de (2.11), vemos que $\mathcal{T}^r(G)$ coincide com o espaço $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^n$ (r fatores) que carrega o produto tensorial $T_g \otimes T_g \otimes \dots \otimes T_g$ (r fatores).

Uma base para $\mathcal{T}^r(G)$ é dada pelos n^r tensores com componentes:

$$T_{i_1 i_2 \dots i_r} = \delta_{i_1}^{k_1} \delta_{i_2}^{k_2} \dots \delta_{i_r}^{k_r}; \quad k_1, k_2, \dots, k_r = 1, 2, \dots, n. \quad (2.14)$$

A grande importância dos tensores na teoria das representações de grupos matriciais advém do fato de que permutações dos índices comutam com a ação do grupo. De fato, dada uma permutação de r índices $\sigma \in S^r$ podemos definir, para um tensor de índice r :

$$(R(\sigma)T)_{i_1 i_2 \dots i_r} := T_{\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_r)}.$$

Imediatamente se verifica que $R(\sigma) \in L(\mathcal{T}^r(G))$ e que a associação $\sigma \rightarrow R(\sigma)$ é uma representação de S^r em $\mathcal{T}^r(G)$. Além disso, sob a ação de um elemento $g \in G$ arbitrário:

$$\begin{aligned} (gR(\sigma)T)_{i_1 i_2 \dots i_r} &= g_{i_1}^{j_1} g_{i_2}^{j_2} \dots g_{i_r}^{j_r} T_{\sigma(j_1) \sigma(j_2) \dots \sigma(j_r)} \\ &= g_{\sigma(i_1)}^{\sigma(j_1)} g_{\sigma(i_2)}^{\sigma(j_2)} \dots g_{\sigma(i_r)}^{\sigma(j_r)} T_{\sigma(j_1) \sigma(j_2) \dots \sigma(j_r)} \\ &= (R(\sigma)gT)_{i_1 i_2 \dots i_r}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Assim, subespaços formados por tensores com simetrias que sejam preservadas por permutações de seus índices — que correspondem a subespaços invariantes de $\mathcal{T}^r(G)$ sob a representação R de S^r — são também invariantes sob a ação de G .

Ou seja, a representação $T_g \otimes T_g \otimes \dots \otimes T_g$ é em geral redutível, sendo que subespaços de $\mathcal{T}^r(G)$ que sejam irredutíveis sob a ação de G estão contidos em subespaços que carreguem representações irredutíveis de S^r .

Dentre tais subespaços irredutíveis sob a ação S^r , destacam-se $\mathfrak{Sym}^r(G)$ o espaço dos *tensores totalmente simétricos*, definidos por satisfazerem:

$$R(\sigma)T = T; \quad \forall \sigma \in S^r, \quad (2.16)$$

além do subespaço $\mathfrak{Alt}^r(G)$ formado por **tensores totalmente anti-simétricos**, definidos por satisfazerem

$$R(\sigma)T = \text{sign}(\sigma)T; \quad \forall \sigma \in S^r, \quad (2.17)$$

onde $\text{sign}(\sigma)$ é a paridade da permutação σ ¹¹.

Como veremos mais tarde, todas as representações irredutíveis de $SU(2)$ podem ser realizadas em $\mathfrak{Sym}^r(G)$ para algum r ¹².

Uma base para $\mathfrak{Sym}^r(G)$ é formada pelos tensores:

$$T_{i_k i_k \dots i_k} = \sum_{\sigma \in S^r} \delta_{i_1}^{\sigma(k_1)} \delta_{i_2}^{\sigma(k_2)} \dots \delta_{i_r}^{\sigma(k_r)}; \quad 1 \leq k_1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_r \leq n. \quad (2.18)$$

De modo que a dimensão de $\mathfrak{Sym}^r(G)$ corresponde ao número de sequências de não decrescentes de k inteiros em $\{1, \dots, n\}$. Um exercício em contagem fornece então:

$$\dim(\mathfrak{Sym}^r(G)) = \binom{n+r-1}{r}. \quad (2.19)$$

Analogamente, uma base para $\mathfrak{Alt}^r(G)$ é formada pelos tensores:

¹¹Definida como 1 ou -1 conforme o número de transposições em qualquer decomposição de σ seja par ou ímpar, respectivamente.

¹²De fato, para o grupo $GL(n, \mathbb{C})$ e seus subgrupos: $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $U(n)$, $SU(n)$, $U(p, q)$, $p + q = n$, e $SU(p, q)$, $p + q = n$; é possível mostrar que $R(\sigma)$ são os únicos operadores que comutam com a ação de G , de tal forma que é possível realizar representações irredutíveis desses grupos em subespaços de $\mathcal{T}^r(G)$, irredutíveis sob a ação de S^r .

Apenas para o caso $n = 2$, no entanto, o subespaço $\mathfrak{Sym}^r(G)$ — que corresponde à representação trivial de S^r — é suficiente para realizar todas as representações. No caso geral, toda representação irredutível de dimensão finita pode ser obtida, mas é preciso considerar também tensores com simetrias mistas — correspondendo à representações irredutíveis não triviais de S^n . Para uma exposição de tal método veja, por exemplo, [6].

$$T_{i_k i_k \dots i_k} = \sum_{\sigma \in S^r} \text{sign}(\sigma) \delta_{i_1}^{\sigma(k_1)} \delta_{i_2}^{\sigma(k_2)} \dots \delta_{i_r}^{\sigma(k_r)}; \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_r \leq n. \quad (2.20)$$

De modo que a dimensão de $\mathfrak{Alt}^r(G)$ corresponde ao número de sequências estritamente crescentes de k inteiros em $\{1, \dots, n\}$:

$$\dim(\mathfrak{Alt}^r(G)) = \binom{n}{r}. \quad (2.21)$$

Na representação dos grupos ortogonais $SO(n, \mathbb{C})$ e seus subgrupos, outra operação sobre tensores que comuta com a ação do grupo em $\mathcal{T}^r(G)$ é a contração (ou traço) de dois índices i_k e i_l , $k, l \in \{1, \dots, r\}$, $k < l$, definida, para $T \in \mathcal{T}^r(G)$, por:

$$T_{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_r}^{(kl)} := \delta^{i_k i_l} T_{i_1, \dots, i_r}. \quad (2.22)$$

De fato, os elementos de $G = SO(n, \mathbb{C})$ satisfazem

$$gg^T = g^T g = I,$$

que em componentes fica:

$$g_i^j g_i^k = \delta^{jk},$$

de forma que, sob a ação de $g \in G$, e tomando $k = 1$ e $l = 2$ para simplificar a notação

$$\begin{aligned} (gT)_{i_3, \dots, i_r}^{(12)} &= \delta^{i_1 i_2} g_{i_1}^{j_1} g_{i_2}^{j_2} \dots g_{i_r}^{j_r} T_{j_1 j_2 \dots j_r} \\ &= g_{i_1}^{j_1} g_{i_1}^{j_2} g_{i_3}^{j_3} \dots g_{i_r}^{j_r} T_{j_1 j_2 \dots j_r} \\ &= \delta^{j_1 j_2} g_{i_3}^{j_3} \dots g_{i_r}^{j_r} T_{j_1 j_2 \dots j_r}, \\ &= g_{i_3}^{j_3} \dots g_{i_r}^{j_r} T_{j_3 \dots j_r}^{(12)} \\ &= (gT^{12})_{i_3, \dots, i_r} \end{aligned} \quad (2.23)$$

e claramente a igualdade permanece válida para qualquer par de índices $k < l \leq r$.

Um tensor é dito de **traço nulo** se as componentes de seus traços com respeito a qualquer par de índices é nula. Claramente o conjunto dos tensores de traço nulo é um subespaço de $\mathcal{T}^r(G)$, o qual, pela relação acima, é também invariante sob a ação de G .

Dessa forma, quando lidarmos com grupos ortogonais, para obter representações irredutíveis em subespaços de $\mathcal{T}^r(G)$, além da imposição de simetrias dos índices com respeito à permutações (que para os casos simples com os quais estaremos lidando será suficiente considerarmos tensores totalmente simétricos) temos que impor a condição de irredutibilidade com respeito ao traço.

De fato, como veremos adiante, todas as representações irredutíveis de $SO(3)$ podem ser realizadas no subconjunto de $\mathfrak{Sym}^k(\mathcal{H})$ formado pelos tensores de traço nulo¹³.

Tendo visto os conceitos básicos pertinentes ao estudo geral das representações fortemente contínuas de grupos topológicos separáveis localmente compactos em espaços de Hilbert complexos separáveis, passamos a especificar nossa discussão para algumas classes de grupos cujas propriedades permitem uma exploração mais detalhada.

2.2 Grupos Compactos

Ao longo dessa seção consideraremos G um grupo topológico Hausdorff, separável e compacto (portanto localmente compacto).

Nesse caso sabemos que suas medidas de Haar à esquerda são também invariantes à direita e vice-versa, e que $\mu(G) < \infty$, de forma que existe uma única medida invariante satisfazendo $\mu(G) = 1$.

Em contrapartida, para qualquer grupo localmente compacto mas não compacto, temos $\mu(G) = \infty$ para qualquer medida invariante à esquerda ou à

¹³De fato é possível realizar todas as representações irredutíveis tensoriais — com peso máximo inteiro — de dimensão finita dos grupos $SO(n, \mathbb{C})$ e seus subgrupos $SO(n)$ e $SO(p, q)$, $p + q = n$ em subespaços de $\mathcal{T}^r(G)$ formados por tensores com simetrias relacionadas à permutações — novamente apenas para $n=3$ os tensores totalmente simétricos são suficientes — com a imposição adicional de que tenham traço nulo. Tal construção pode ser encontrada, por exemplo, em [6].

direita.

Tal distinção tem enorme impacto na teoria das representações e faz com que, nesse âmbito, os grupos compactos se assemelhem grandemente aos grupos finitos.

Mencionemos que grupos finitos são naturalmente compactos quando entendidos como grupos topológicos com a topologia discreta, de tal forma que todo o desenvolvimento desse capítulo é também válido para grupos finitos.

Nesse caso a medida de Haar é dada pela medida da contagem normalizada que associa a um subconjunto E de G arbitrário (por definição sempre mensurável na σ - álgebra de Borel de G) o número $\#(E)$ de elementos de E dividido pela ordem $\#(G)$ de G . Nesse caso toda função f de G em $\mathbb{C}$ é mensurável e integrável, e temos a identificação:

$$\int_E f(g) d\mu(g) = (1/\#(G)) \sum_{g \in E} f(g).$$

Grupos compactos têm por si só enorme importância dentro e fora da teoria de representações, o grupo $SU(2)$ por exemplo é o grupo de simetria do spin total de uma partícula elementar e a interação forte é simétrica com relação às transformações de $SU(3)$, mas além de sua importância em aplicações (que vão, obviamente, muito além das duas importantes mencionadas acima), os grupos compactos formam a base da teoria de representações dos grupos clássicos de Lie.

O resultado principal que apresentaremos nessa seção é o celebrado teorema de Peter - Weyl que resolve a decomposição regular de um grupo compacto em termos de representações irredutíveis de dimensão finita.

2.2.1 Propriedades Gerais de Representações de Grupos Compactos

Já vimos anteriormente que, para grupos compactos, toda representação é limitada, o próximo fato importante que diferencia os grupos compactos quanto às suas possíveis representações é o seguinte:

Proposição 2.8. *Se T é uma representação de um grupo compacto G num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então existe em $\mathcal{H}$ uma norma equivalente à inicial na qual T define uma representação unitária, e portanto toda representação de um grupo compacto é equivalente a uma representação unitária.*

Demonstração. Seja $\langle, \rangle$ o produto escalar inicial em $\mathcal{H}$ e definamos, para quaisquer $u, v \in \mathcal{H}$, o seguinte produto:

$$\langle u, v \rangle_G = \int_G \langle T_x u, T_x v \rangle d\mu(x).$$

Não é difícil verificar que o produto acima é um produto escalar, a não-degenerescência por exemplo decorre do fato de que a integral acima só pode se anular se $\langle T_x u, T_x \rangle$ for nulo μ -q.t.p., o que por sua vez implica que $T_x u = 0$ para algum $x \in G$, e logo $u = T_{x^{-1}} T_x u = 0$. As outras propriedades definidoras do produto escalar decorrem facilmente da linearidade e positividade da integração.

Para esse novo produto escalar, devido à invariância de μ temos:

$$\langle T_y u, T_y v \rangle_G = \int_G \langle T_{yx} u, T_{yx} v \rangle d\mu(x) = \int_G \langle T_z u, T_z v \rangle d\mu(z) = \langle u, v \rangle_G,$$

para todo $y \in G$, ou seja, T_y é uma isomeria. Sendo ainda sobrejetora, concluímos que é unitária, e valendo o resultado para todo $y \in G$, constatamos que T é unitária nesse novo produto escalar.

A continuidade de T com relação a esse novo produto decorre da equivalência dos produtos escalares e consequentemente das respectivas topologias em $\mathcal{H}$, para mostrar tal equivalência notemos que, para $u \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \|u\|_G^2 &= \langle u, u \rangle_G = \int_G \langle T_x u, T_x u \rangle d\mu(x) \\ &\leq N^2 \langle u, u \rangle \int_G d\mu(x) = N^2 \langle u, u \rangle = N^2 \|u\|^2, \end{aligned}$$

onde $N = \sup_{\sup_x \in G} \|T_x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < \infty$, pois T é limitada. Por outro lado:

$$\begin{aligned}
||u||^2 &= \langle u, u \rangle = \int_G \langle u, u \rangle d\mu(x) = \int_G \langle T_{x^{-1}}T_x u, T_{x^{-1}}T_x u \rangle d\mu(x) \\
&\leq N^2 \int_G \langle T_x u, T_x u \rangle d\mu(x) = N^2 ||u||_G^2,
\end{aligned}$$

combinando as desigualdades acima obtemos:

$$N^{-1}||u|| \leq ||u||_G \leq N||u||.$$

Completando a demonstração. $\square$

A proposição acima permite, como lidamos com representações a menos de equivalência, que consideremo uma representação arbitrária de um grupo compacto com sendo unitária.

Para continuar o desenvolvimento que pretendemos trilhar nessa seção, é conveniente definirmos, para uma representação T do grupo G e $\mathcal{H}$, assumida unitária, e para um vetor $u \in \mathcal{H}$ arbitrário, o chamado operador de Weyl $K_u: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ dado por:

$$K_u v = \int_G \langle v, T_x u \rangle T_x u d\mu(x). \quad (2.24)$$

Para esse operador temos:

Proposição 2.9. *O operador de Weyl (2.24) satisfaz, para todo $u \in \mathcal{H}$:*

1. $K_u \neq 0$ para $u \neq 0$.
2. K_u é limitado.
3. $K_u^\dagger = K_u$.
4. $K_u T_x = T_x K_u$, para todo $x \in G$.

Demonstração.

1. pela definição (2.24) temos:

$$\langle u, K_u u \rangle = \int_G |\langle u, T_x u \rangle|^2 d\mu(x), \quad (2.25)$$

mas $|\langle u, T_e u \rangle| = |\langle u, u \rangle| > 0$ para $u \neq 0$, e como T é contínua, existe uma vizinhança de unidade e onde o integrando na equação acima é estritamente positivo, implicando que o lado direito é estritamente positivo e então que $\langle u, K_u u \rangle > 0$, provando então que $K_u \neq 0$.

2. para todo $v \in \mathcal{H}$ temos:

$$\begin{aligned} \|K_u v\| &\leq \int_G |\langle v, T_x u \rangle| \|T_x u\| d\mu(x) \\ &\leq \int_G \|v\| \|T_x u\| d\mu(x) \\ &= \int_G \|v\| \|u\| d\mu(x) \\ &= \|v\| \|u\|^2, \end{aligned}$$

e como $\|v\| \|u\|^2 < \infty$, a desigualdade acima limita K_u .

3. Para $v, w \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \langle K_u v, w \rangle &= \int_G \langle v, T_x u \rangle \langle T_x u, w \rangle d\mu(x) = \int_G \langle v, T_x u \rangle \langle w, T_x u \rangle^* d\mu(x) \\ &= \int_G \langle v, \langle w, T_x u \rangle T_x u \rangle d\mu(x) = \langle v, \int_G \langle w, T_x u \rangle T_x u d\mu(x) \rangle \\ &= \langle v, K_u w \rangle. \end{aligned}$$

Como v e w são arbitrários, isso implica em $K_u = K_u^\dagger$.

4. Para todo $x \in G$ e todo $v \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} K_u T_x v &= \int_G \langle T_x v, T_y u \rangle T_y u d\mu(y) = \int_G \langle T_x v, T_{xy} u \rangle T_{xy} u d\mu(xy) \\ &= T_x \int_G \langle T_x v, T_{xy} u \rangle T_y u d\mu(y) = T_x \int_G \langle v, T_y u \rangle T_y u d\mu(y) \\ &= T_x K_u v. \end{aligned}$$

□

Com os resultados acima podemos elaborar o seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Toda representação unitária e irredutível T de G tem dimensão finita.*

Demonstração. Como K_u comuta com todo T_x , pelo lema de Schur 2.6 sabemos que $K_u = a(u)I$ e assim, para qualquer $v \in \mathcal{H}$:

$$\langle K_u v, v \rangle = \int_G |\langle T_x u, v \rangle|^2 d\mu(x) = a(u) \|v\|^2. \quad (2.26)$$

Trocando os papeis de u e v e usando a invariância de μ por inversão A.7, temos:

$$\begin{aligned} a(u) \|v\|^2 &= \int_G |\langle T_x v, u \rangle|^2 d\mu(x) = \int_G |\langle v, T_{x^{-1}} u \rangle|^2 d\mu(x) \\ &= \int_G |\langle v, T_x u \rangle|^2 d\mu(x^{-1}) = \int_G |\langle T_x u, v \rangle|^2 d\mu(x) \\ &= a(v) \|u\|^2. \end{aligned}$$

Como u e v são arbitrários, a igualdade acima implica em $a(u) = c \|u\|^2$ para alguma constante c que facilmente se vê ser positiva tomando $u = v$ com $\|u\| = 1$ na equação (2.26) acima para obter:

$$\int_G |\langle T_x u, u \rangle|^2 d\mu(x) = a(u) \|u\|^2 = c \|u\|^4 = c,$$

que tem de ser positivo pois $x \mapsto |\langle T_x u, u \rangle|$ é uma função contínua valendo 1 na origem.

Com esse fato em mãos demonstremos o teorema, para tal, consideremos um conjunto $\{e_i\}_1^n$ de vetores ortonormais em $\mathcal{H}$, então, pela equação (2.26) temos:

$$\int_G |\langle T_x e_k, e_1 \rangle|^2 d\mu(x) = c \|e_k\|^2 \|e_1\|^2 = c,$$

e portanto, usando o fato de que os vetores $T_x e_k$, $k = 1, \dots, n$ são ortogonais e

a desigualdade de Bessel¹⁴ temos:

$$\begin{aligned} nc &= \sum_{k=1}^n \int_G |\langle T_x e_k, e_1 \rangle|^2 d\mu(x) = \int_G \sum_{k=1}^n |\langle e_k, T_x e_1 \rangle|^2 d\mu(x) \\ &\leq \int_G \|e_1\|^2 d\mu(x) = \int_G d\mu(x) = 1. \end{aligned}$$

Como a desigualdade é válida para qualquer conjunto de vetores ortonormais $\{e_i\}_1^n$ e limita $n < 1/c$, limita igualmente a dimensão de $\mathcal{H}$. $\square$

O operador K_u possui ainda a importantíssima propriedade de ser um operador compacto, e sendo ainda auto-adjunto, fornecer naturalmente uma decomposição do espaço $\mathcal{H}$ da forma:

$$\mathcal{H} = H_0 \oplus \bigoplus_i H_i,$$

onde H_0 é o subespaço gerado por autovetores de K_u com autovalor nulo, o qual pode ter dimensão infinita, e cada H_i é um subespaço de dimensão finita gerado por autovetores (formando necessariamente um conjunto discreto) com autovalores não nulos. Além disso, cada autoespaço H_i de K_u é invariante pela ação da representação T que o define.

A demonstração das afirmações exige um aprofundamento no estudo da análise espectral de operadores, particularmente de operadores compactos, que está além do escopo desse texto mas pode ser encontrada em detalhes em [2] ou [48].

¹⁴A desigualdade afirma que se $\{e_i\}_1^n$ é um conjunto de vetores ortonormais num espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então, para todo $u \in \mathcal{H}$ vale:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle u, e_i \rangle|^2 \leq \|u\|^2.$$

Sua demonstração é simples e pode ser encontrada em [2], [48] ou qualquer bom livro que trate de espaços de Hilbert.

Quando o conjunto $\{e_i\}_1^n$ é completo, a desigualdade acima se torna uma igualdade conhecida com identidade de Parseval.

2.2.2 Teorema de Peter-Weyl

Com os fatos demonstrados anteriormente, podemos iniciar o raciocínio que culminará no importante teorema de Peter-Weyl, comecemos com a seguinte proposição fundamental:

Proposição 2.10. *Toda representação unitária T de G é uma soma direta de representações irredutíveis de dimensão finita.*

Demonstração. Comecemos observando que, para todo $v \in \mathcal{H}$ não ortogonal a u , por (2.26), $\langle K_u v, v \rangle > 0$ e portanto K_u possui pelo menos um autovalor não nulo, e logo um autovetor pertencente à $\bigoplus_i H_i$, de forma que esse subespaço é não trivial.

Como cada H_i tem dimensão finita, podemos usar a proposição 2.7 para decompô-lo numa soma direta de subespaços ortogonais invariantes e irredutíveis.

Para que possamos decompor também H_0 , notemos que, se N é um subespaço invariante qualquer, como por exemplo H_0 , podemos construir o operador de Weyl para a subrepresentação de T definida por N . As observações feitas acima para T podem ser repetidas para essa nova representação mostrando que N também possui um subespaço invariante não trivial de dimensão finita. Podemos fazer $N = H_0$ decompondo esse espaço e repetir o procedimento indefinidamente para os subseqüentes autoespaços de autovalor 0.

Para completar a demonstração temos que mostrar que tal processo converge no sentido de que em algum momento o subespaço de autovalor 0 tem de ser trivial, ou equivalentemente que o menor espaço que contém todos os subespaços irredutíveis ortogonais e invariantes M é o próprio $\mathcal{H}$.

Para ver isso notemos que, como T é unitária e M é invariante, então $M^\perp$ também é invariante e pelo raciocínio acima contém, necessariamente, um subespaço invariante de dimensão finita não trivial, o que contradiz a própria definição de M . Portanto $M^\perp = 0$ e $M = \mathcal{H}$.

□

A proposição acima afirma que toda representação de G é completamente

reduzível, permitindo, para o caso de grupos compactos, que o estudo da representação mais geral seja feito em termo de suas representações irreduzíveis.

Para que possamos estudar o papel das representações irreduzíveis na decomposição de uma representação qualquer e suas consequências na estrutura dos possíveis espaços que carregam tal representação, é conveniente termos em mãos algumas propriedades das representações irreduzíveis. Nesse contexto, temos:

Proposição 2.11. *Sejam T^a e T^b duas representações unitária e irreduzíveis de G de dimensões d_a e d_b . Então seus elementos de matriz D_{ij}^a e D_{kl}^b satisfazem as relações de ortogonalidade:*

$$\int_G D_{ij}^a(x)(D_{kl}^b)^*(x)d\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } T_a \text{ e } T_b \text{ não são equivalentes} \\ \frac{1}{d_a}\delta_{ik}\delta_{jl} & \text{se } T_a \text{ e } T_b \text{ são equivalentes} \end{cases}. \quad (2.27)$$

Demonstração. Consideremos as matrizes:

$$A^{ij} = \int_G T_x^a e^{ij} T_{x^{-1}}^b d\mu(x),$$

onde e^{ij} são matrizes com elementos $e_{kl}^{ij} = \delta_{ik}\delta_{jl}$; $i, k = 1, \dots, d_a$ e $j, l = 1, \dots, d_b$. Pela invariância $d\mu(y^{-1}x') = d\mu(x')$, para todo $y \in G$ temos:

$$T_y^a A^{ij} = \int G T_{yx}^a e^{ij} T_{x^{-1}}^b d\mu(x) = \int G T_{x'}^a e^{ij} T_{x'^{-1}y}^b d\mu(x') = A^{ij} T_y^b.$$

Então, pelo lema de Schur 2.6, A^{ij} é nulo e T^a não é equivalente à T^b , ou $A^{ij} = \lambda^{ij} I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $d_a = d_b$ e $T^a \simeq T^b$.

No primeiro caso temos:

$$\begin{aligned}
0 = A_{rs}^{ij} &= \int_G D_{rt}^a(x) e_{tu}^{ij} D_{us}^b(x^{-1}) d\mu(x) \\
&= \int_G D_{rt}^a(x) \delta_{it} \delta_{ju} [D_{us}^b]^\dagger(x) d\mu(x) \\
&= \int_G D_{ri}^a(x) [D_{js}^b]^\dagger(x) d\mu(x) \\
&= \int_G D_{ri}^a(x) (D_{sj}^b)^*(x) d\mu(x),
\end{aligned}$$

que é a relação procurada.

Se por outro lado $T^a \simeq T^b$, podemos assumir que seus elementos de matriz coincidem, ou seja $D^a = D^b$. Sabemos que nesse caso $A^{ij} = \lambda^{ij} I$, e assim $\text{Tr } A^{ij} = d_a \lambda^{ij}$, de modo que:

$$\begin{aligned}
\text{Tr } A^{ij} &= \int_G \text{Tr}[D_x^a e^{ij} D_{x^{-1}}^a] d\mu(x) \\
&= \int_G \text{Tr}[D_{x^{-1}}^a D_x^a e^{ij}] d\mu(x) \\
&= \int_G \text{Tr } e^{ij} d\mu(x) = \delta_{ij} \int_G d\mu(x) \\
&= \delta_{ij},
\end{aligned}$$

ou seja, $\lambda^{ij} = \frac{\delta_{ij}}{d_a}$, e portanto $A^{ij} = \frac{\delta_{ij}}{d_a} I$.

Escrevendo os elementos de matriz dessa igualdade temos $\frac{1}{d_a} \delta_{ij} \delta_{rs} = A_{rs}^{ij}$, e repetindo o desenvolvimento feito acima, obtemos por fim:

$$\frac{1}{d_a} \delta_{ij} \delta_{rs} = \int_G D_{ri}^a(x) (D_{sj}^b)^*(x) d\mu(x).$$

□

Como a integral nas relações de ortogonalidade acima é nada mais do que o produto escalar em $L^2(G, \mu) = L^2(G)$, o que elas nos dizem é que para uma representação T^a , os d_a^2 vetores da forma $\sqrt{d_a} D_{ij}^a$, $i, j = 1, \dots, d_a$ são

ortonormais, e portanto que o subespaço de $H^a \subset L^2(G, \mu)$ gerado por esses vetores pode ser decomposto numa soma direta $H^a = H^{a,1} \oplus \dots \oplus H^{a,d_a}$ de subespaços $H^{a,k}$ de dimensão d_a gerados pelos vetores $e_k^a = \sqrt{d_a} D_{kj}^a$, $j = 1, \dots, d_a$.

Fato importante sobre os espaços $H^{a,k}$ definidos acima é que eles são invariantes pela representação regular à direita T^R em $L^2(G, \mu)$, definida em (2.3), de fato, para todo $x, y \in G$ e todo $k \in \{1, \dots, d_a\}$:

$$\begin{aligned} T_y^R e_k^a(x) &= \sqrt{d_a} e_k^a(xy) = \sqrt{d_a} D_{ik}^a(xy) \\ &= \sqrt{d_a} D_{il}^a(x) D_{lk}^a(y) = D_{lk}^a(y) e_l^a \in H^{a,k}. \end{aligned}$$

A relação acima não apenas mostra que os espaços $H^{a,k}$ são invariantes sob a ação de T^R , como ainda que a subrepresentação de T^R definida por $H^{a,k}$ é equivalente à subrepresentação de T^a definida pelo mesmo espaço, e como tal afirmativa vale para todo $k \in \{1, \dots, d_a\}$, através da decomposição $H^a = H^{a,1} \oplus \dots \oplus H^{a,d_a}$ obtemos uma equivalência entre a subrepresentação de T^R definida por H^a e T^a , ou seja:

Proposição 2.12. *Toda representação unitária de um grupo compacto é equivalente a uma subrepresentação da representação regular à direita.*

De fato, se considerarmos o conjunto $\hat{G} = \{T^a, a \in \Lambda\}$ (onde Λ é um conjunto de índices) de todas as possíveis representações unitárias e irredutíveis de G não equivalentes entre si, as relações (2.27) dizem ainda que subespaços $H^a, H^b \subset L^2(G)$, gerados por elementos distintos $T^a, T^b \in \hat{G}$, são ortogonais.

Mais que isso, é possível mostrar que o subespaço $\mathcal{H} = \bigoplus_{a \in \Lambda} H^a$ coincide com $L^2(G)$ e portanto que $\overline{\mathcal{H}} = L^2(G)$. Tal demonstração pode ser encontrada em [6] ou com mais detalhes em [2], e embora não seja complicada é um pouco extensa, e por não elucidar pontos importantes no desenvolvimento que faremos, não será feita aqui.

Reunindo os fatos descritos acima, podemos então enunciar o principal resultado dessa seção:

Teorema 2.2 (Teorema de Peter-Weyl). *Seja $\hat{G} = \{T^a, a \in \Lambda\}$ o conjunto de representações unitárias irredutíveis não equivalentes de um grupo compacto*

G e sejam d_a e D_{ij}^a a dimensão e os elementos de matriz de T^a , então, as funções:

$$e_{ij}^a(x) = \sqrt{d_a} D_{ij}^a(x), \quad a \in \Lambda, i, j = 1, \dots, d_a \quad (2.28)$$

formam uma base ortonormal completa em $\mathcal{H} = L^2(G, \mu)$. Com isso, toda função $u \in \mathcal{H}$ pode ser escrita na forma:

$$u(x) = \sum_{a \in \Lambda} \sum_{i,j=1}^{d_a} u_{ij}^a e_{ij}^a, \quad (2.29)$$

onde

$$u_{ij}^a = \langle u, e_{ij}^a \rangle_{\mathcal{H}} = \int_G (e_{ij}^a(x))^* u(x) d\mu(x),$$

e a igualdade acima converge na norma de $\mathcal{H}$.

Por fim, vale a **identidade de Parseval**:

$$\int_G |u(x)|^2 d\mu(x) = \sum_{a \in \Lambda} \sum_{i,j=1}^{d_a} |u_{ij}^a|^2.$$

Antes de passarmos para grupos comutativos, discutamos alguns aspectos e propriedades complementares em grupos compactos

2.2.3 Caráteres e Funções Centrais

Um **caráter** $\chi(x)$ de uma representação de dimensão finita T de G em H é o traço do operador T_x , ou seja:

$$\chi(x) = \text{Tr } T_x = \langle T_x e_i, e_i \rangle = D_{ii}(x),$$

onde $\{e_i\}$ é uma base de $\mathcal{H}$ na qual T possui a forma matricial D .

Não é difícil verificar que um caráter de uma representação irredutível e unitária possui as seguintes propriedades:

1. $\chi(y^{-1}xy) = \chi(x)$.
2. $\chi(x^{-1}) = \chi^*(x)$.
3. Se $T^a \simeq T^b$, então $\chi^a = \chi^b$.

$$4. \int_G \chi^a(x) (\chi^b)^*(x) d\mu(x) = \delta_{ab}.$$

De fato:

$$1. \chi(y^{-1}xy) = \text{Tr } T_{y^{-1}xy} = \text{Tr}[T_{y^{-1}}T_xT_y] = \text{Tr}[T_x] = \chi(x).$$

$$2. \chi(x^{-1}) = \text{Tr } T_{x^{-1}} = \text{tr } T_x^\dagger = D_{ii}^* = (\chi(x))^*.$$

$$3. \text{ Se } T^a \simeq T^b, \text{ então existe } S \text{ tal que } T^a = S^{-1}T^bS, \text{ e portanto}$$

$$\chi^a = \text{Tr } T^a = \text{Tr } S^{-1}T^bS = \text{Tr } T^b = \chi^b.$$

$$4. \int_G \chi^a(\chi^b)^* = \int_G D_{ii}^a D_{jj}^b d\mu(x) \stackrel{(2.27)}{=} \delta_{ab}.$$

Se T é uma representação de dimensão finita de G , que sempre podemos assumir unitária, sabemos pela proposição 2.10 que ela totalmente redutível, e portanto, da definição de caráter, segue que:

$$\chi(x) = m_i \chi_i(x),$$

onde os χ são os caracteres das representações irredutíveis T^i que aparecem na decomposição de T com multiplicidade m_i .

Das relações de ortogonalidade acima satisfeitas pelos caracteres obtemos facilmente que:

$$\int_G \chi(x) \chi_i^*(x) d\mu(x) = m_i$$

e ainda:

$$\int_G \chi(x) \chi^*(x) = \sum_i m_i^2.$$

Relação que fornece um critério para irredutibilidade em termos de caracteres, a saber, T é irredutível se e somente se $\int_G \chi(x) \chi^*(x) = 1$. Se T é redutível então claramente $\int_G \chi(x) \chi^*(x) > 1$.

Os caracteres tem extrema importância na teoria das representações, eles formam, ainda, como decorrência do teorema de Peter-Weyl, um conjunto

ortonormal completo no subespaço de $L^2(G)$ de funções satisfazendo $u(y^{-1}xy) = u(x)$.

2.2.4 Comentários Finais

Mencionemos alguns fatos sobre representações de grupos compactos que, embora não sejam de interesse direto no presente texto, motivo pelo qual não serão abordados mais profundamente, têm enorme interesse tanto no contexto da teoria de representações puramente como em diversas aplicações, o leitor interessado em estudar tais desenvolvimentos deve remeter-se à [6], ou a bons livros em teoria das representações.

Um fato importante que pode ser obtido do teorema de Peter-Weyl a respeito da representação regular de G é que cada representação irredutível de G aparece em sua decomposição com multiplicidade igual à sua dimensão, e que os vetores definidos em (2.28) (ou seus conjugados) geram subespaços invariantes irredutíveis da representação regular à direita (ou à esquerda).

Outra construção importante e muito útil em aplicações que pode ser feita a partir representação qualquer T de G em H é a de formar operadores de projeção ortogonal associados a uma representação irredutível ou a um caráter. Tais operadores de projeção são extremamente uteis para uma construção explícita dos subespaços invariantes irredutíveis associados a uma representação redutível.

Caso particular ocorre quando se deseja decompor o espaço que carrega um produto direto de representações de um grupo em subespaços invariantes irredutíveis, procedimento que dá origem, por exemplo, aos famigerados coeficientes de Clebsh-Gordan, e que é usado no contexto da mecânica quântica para relacionar propriedades de um sistema de partículas a propriedades de seus constituintes.

2.3 Grupos Comutativos

Nessa seção tratamos brevemente de grupos comutativos com o intuito de obter o famoso teorema de SNAG. Estaremos particularmente interessados

em estudar representações unitárias de $\mathbb{R}^4$, que estão relacionadas à simetria de translação num sistema físico relativístico e dão, no contexto das teorias de campos quântico relativistas, origem aos operadores de energia momento linear.

O desenvolvimento que faremos segue como referência [35], além de [44], [14] e [6].

2.3.1 Caráteres e o Grupo Dual

Quando abandonamos completamente a finitude considerando grupos que não possuem medida invariante finita, encontramos novas dificuldades na teoria da decomposição de representações.

No caso de grupos comutativos não compactos, como veremos, encontramos representações redutíveis que não possuem subrepresentações irredutíveis e no processo de decomposição de tais representações somos forçados a usar integrais diretas na forma de decomposição espectral de operadores ao invés de somas discretas.

Ao longo dessa seção trataremos apenas de grupos comutativos e se assumirá que todo grupo mencionado pertence a essa classe, a menos que se mencione o contrário.

O primeiro fato importante que limita as representações unitárias de grupos comutativos é o seguinte:

Proposição 2.13. *Toda representação V irredutível e unitária não trivial de um grupo comutativo G é unidimensional.*

Demonstração. Seja V uma tal representação de G em H . Pela comutatividade de G , fixando $x \in G$ temos:

$$V_x V_y = V_{xy} = V_{yx} = V_y V_x,$$

para todo $y \in G$, dessa forma, pelo lema de Schur 2.6:

$$V_x = \chi(x)I, \quad \chi(x) \in \mathbb{C},$$

e assim, qualquer subespaço unidimensional de H é invariante, mas como V é irredutível o único espaço invariante não vazio é o próprio H , que é então unidimensional. $\square$

Facilmente se observa que a função $\chi(x)$ definida acima é uma função de G com valores complexos, a qual satisfaz:

1. χ é contínua.
2. $|\chi(x)| = 1$, para todo $x \in G$.
3. $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$, para todos $x, y \in G$.

A uma tal função damos o nome de **caráter** de G . A proposição acima nos diz que toda representação irredutível e unitária é da forma $V_x = \chi(x)$ para algum caráter, e não é difícil ver que todo caráter define, analogamente, uma representação unitária e irredutível de G .

O conjunto de caracteres de G forma naturalmente um grupo com relação ao produto usual de números complexos, isto é, para $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$, se definirmos:

$$\chi_1\chi_2(x) = \chi_1(x)\chi_2(x),$$

então se verifica que $\chi_1\chi_2$ satisfaz as os requisitos acima e ainda que $\chi_1\chi_2 = \chi_2\chi_1$, ou seja, $\widehat{G}$ é um grupo abstrato comutativo.

Dessa forma, podemos equivalentemente definir um caráter de G como um homomorfismo entre G e o grupo multiplicativo dos números complexos unitários $\mathbb{S}^1$ ou entre G e o grupo quociente do grupo aditivo dos reais pelo grupo aditivo dos inteiros $(\mathbb{R}, +)/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1$.

Podemos explorar algumas possibilidades para G e $\widehat{G}$ através da teoria da **dualidade de Pontryagin** [44]. Para tal, consideremos um grupo comutativo compacto G , pelo teorema 2.2 de Peter-Weyl sabemos que os caracteres formam um conjunto denso em $L^2(G)$ e então que existem suficientes caracteres para separar os pontos de G , ou seja, se $\chi(x) = \chi(y)$ para todo $\chi \in \widehat{G}$, então $x = y$. Além disso, como nesse caso $\widehat{G}$ é contável, podemos fazer dele um grupo localmente compacto e separável com a topologia discreta, na qual toda função é contínua, com isso, para $x \in G$ fixo, o mapa $\chi \mapsto \chi(x)$ é um

caráter de $\widehat{G}$, ou seja, um elemento de $\widehat{\widehat{G}}$. Se fizermos $f_x(\chi) = \chi(x)$, o mapa $x \mapsto f_x$ é um isomorfismo algébrico de G em $\widehat{\widehat{G}}$. Por outro lado, dado um grupo comutativo contável D com a topologia discreta, podemos formar o respectivo grupo de caracteres $\widehat{D}$, mostra-se [44] que os caracteres separam os pontos de D e que $\widehat{D}$ é feito um grupo localmente compacto separável e compacto com a topologia mais fraca na qual o mapa $\chi \mapsto \chi(x)$ é contínuo, para todo $x \in D$.

Voltando então ao grupo compacto G , podemos dar à $\widehat{G}$ a topologia de grupo caráter do grupo discreto $\widehat{G}$, fazendo do mapa $x \mapsto f_x$, conforme mostrado por Pontryagin, um homeomorfismo topológico.

Dessa forma, podemos identificar G e $\widehat{\widehat{G}}$ enquanto grupos topológicos e notar a simetria na relação entre G e $\widehat{G}$ - cada um é o grupo caráter do outro - motivo pelo qual o grupo $\widehat{G}$ é também chamado de **dual** de G .

Notemos ainda que, o grupo compacto e comutativo mais geral pode ser obtido tomando o dual do mais geral dos grupos comutativos contáveis e vice versa.

Como uma ilustração da discussão acima consideremos o seguinte:

Exemplo 2.3. Seja $D = \mathbb{Z}$ o grupo aditivo dos números inteiros, se χ é um caráter, então $\chi(n) = (\chi(1))^n$. Ou seja, χ é determinado completamente por $\chi(1)$ e esse pode ser qualquer complexo de módulo um, portanto $\widehat{D}$ é isomorfo à $SO(2)$.

Reciprocamente, o grupo caráter de $SO(2)$ é isomorfo à D , os caracteres são as funções $\theta \mapsto e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$.

É importante notar que nesse caso ($G = SO(2)$) o **teorema de Peter-Weyl** nos diz que toda função $f \in L^2(G)$ pode ser escrita unicamente na forma

$$f(x) = \sum_n C_n e^{inx},$$

onde

$$C_n = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Estabelecendo o famoso fato de que toda função periódica quadrado-integrável admite uma expansão em **série de Fourier** e fornecendo a ex-

pressão dos coeficientes dessa expansão.

As séries de Fourier para funções de k variáveis podem ser obtidas analogamente tomando G como o produto direto de k cópias de $SO(2)$ e obtendo para $\hat{G}$ o grupo aditivos das k – *tuplas* inteiras.

Para que possamos tratar do caso em que G não é contável ou compacto, comecemos estendendo a dualidade de Pontryagin para tal caso. Dado então um tal grupo G , construímos $\hat{G}$ da mesma forma que fizemos anteriormente e damos a ele a topologia de convergência em compactos (para detalhes veja [41]) na qual uma sequência χ_n é definida convergir ao caráter χ sempre que $\chi_n(x)$ converge uniformemente à $\chi(x)$ para todo x subconjunto compacto qualquer $K \subset G$.

Com essa topologia $\hat{G}$ é feito um grupo topológico localmente compacto separável e Abelian e o teorema da dualidade de Pontryagin e Van Kampen (para detalhes veja [23]) afirma que o mapa $x \mapsto f_x$ é também nesse caso um isomorfismo entre G e $\hat{\hat{G}}$, enquanto grupos topológicos.

Para evidenciar a dualidade entre G e $\hat{G}$ usaremos mais adiante (capítulos 3 e 5) a notação $\langle x, \chi \rangle = \chi(x)$.

2.3.2 Teorema de SNAG

No caso $G = \mathbb{R}$ do grupo aditivo do reais, verifica-se imediatamente que as funções $x \mapsto e^{ixp}$, para $p \in \mathbb{R}$ fixo, são caracteres de G e também não é difícil verificar que todo caráter é desta forma para algum $p \in \mathbb{R}$, mostra-se ainda que as topologias em $\hat{G}$ coincidem de tal forma que nesse caso G é seu próprio dual (veja por exemplo [23] ou [30]).

Para representações unitárias de $\mathbb{R}^n$, podemos lançar mão do teorema de Stone [53] (cujo enunciado preciso seguido de demonstração pode ser encontrado, por exemplo, em [48]), que estabelece uma relação um para um entre representações contínuas e unitárias U desse grupo e conjuntos $\{Y_i\}_1^n$ de n operadores auto-adjuntos que comutam entre si de tal forma que, para todo $x = (x_1, \dots, x_n) \in G$ temos:

$$U_x = \prod_{j=1}^n e^{ix_j Y_j}. \quad (2.30)$$

Usando ainda o teorema espectral para operadores auto-adjuntos podemos associar aos operadores Y_i uma medida com valores a projeções P em $\mathbb{R}^n$ tal que:

$$U_x = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda \cdot x} dP_\lambda, \quad (2.31)$$

onde $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ e a igualdade acima significa, como de costume, que, para todos ϕ, ψ no espaço de Hilbert H que carrega a representação U vale:

$$\langle \phi, U_x \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda \cdot x} d\langle P_\lambda \phi, \psi \rangle$$

A relação acima entre representações unitárias de $\mathbb{R}^n$ e medidas com valores à projeções é um caso particular do principal teorema dessa seção que enunciamos abaixo, o qual é atribuído a Naimark [43], Ambrose [1] e Godement [18], e que possui uma demonstração devida a Hewitt e Ross que faz uso do teorema de Bochner¹⁵ e pode ser encontrada em [6] ou mais detalhadamente em [23].

Teorema 2.3 (Teorema de SNAG). *Para toda representação unitária fortemente contínua T de um grupo topológico localmente compacto e comutativo existe no grupo caráter $\hat{G}$ uma medida espectral P_χ tal que:*

$$T_x = \int_{\hat{G}} \chi(x) dP_\chi. \quad (2.32)$$

Como ilustração do desenvolvimento feito nessa seção consideremos o seguinte

Exemplo 2.4. Considere $G = \mathbb{R}^4$, o grupo de translações no espaço de Minkowski e seja T uma representação unitária de G num espaço de Hilbert H .

¹⁵Teorema que estabelece uma relação um pra um entre funções contínuas positivas definidas e normalizadas ($f(e) = 1$) em G e medidas regulares em $\hat{G}$, e que pode ser encontrado, por exemplo, em [30].

O espaço dual, isomorfo a $\mathbb{R}^4$ é, no contexto da física, identificado com o espaço de momentos, nesse caso temos:

$$T_x = \int_P e^{ipx} dE_p,$$

onde $xp = x^\mu p_\mu$ e E é uma medida com valores à projeções em P .

O conjunto de operadores auto adjuntos comutantes entre si associado à T por (2.30) são:

$$P_\mu = \int_P p_\mu dE_p, \quad \mu = 0, 1, 2, 3,$$

e representam o operador quadri-vetorial de energia-momento.

2.4 Grupos Simples

Temos discutido como decompor uma representação unitária e o espaço que a carrega em termos de irredutíveis, seja através da decomposição discreta (2.29) do espaço $L^2(G)$ que carrega a representação regular de um grupo compacto ou através da decomposição contínua (2.31) para representações unitária de um grupo comutativo. Porém não discutimos ainda métodos para encontrarmos as representações irredutíveis de um determinado grupo.

Colocada no contexto geral de um grupo topológico localmente compacto qualquer, tal façanha pode envolver diversas complexidades e ainda é um problema em aberto na teoria das representações, no entanto existe progresso em diversas classes de grupos, sobretudo em grupos solúveis e semi-simples [58].

Mais adiante, no capítulo 3, veremos na teoria desenvolvida por Mackey um método que permite a construção de representações unitárias (e em alguns casos irredutíveis) de um grupo G a partir de representações unitárias de seus subgrupos fechados, os quais tendem a possuir uma estrutura mais simples que a de G .

Embora de grande utilidade nesse sentido, a teoria das representações induzidas nada pode ajudar quando chegamos ao limite em que o grupo considerado *não possui subgrupos normais fechados não triviais*. Felizmente,

como veremos, existem outros métodos para lidar com esse caso.

Os grupos mencionados acima são chamados grupos *simples*. Como a componente da identidade de um grupo topológico G é sempre um subgrupo fechado, que em um grupo de simples é ou G é $\{0\}$, segue que um grupo simples é ou conexo ou totalmente desconexo. Sendo totalmente desconexo, G pode ainda ser finito, discreto mas não finito, ou nem mesmo discreto, enquanto que um grupo simples e conexo pode ser compacto ou não.

Ocorre que para o caso conexo, no qual estaremos interessados, é possível um tratamento sistemático e todas as representações de dimensão finita (unitárias ou não) de tais grupos foram determinadas. O que permite tal análise é o fato de que grupos localmente conexos, conexos e simples são sempre **grupos de Lie**, fato que decorre dos trabalhos de Gleason, Montgomery and Zippin (principalmente [17], [38] e [39]) no quinto problema de Hilbert.

Devido à enorme quantidade de material necessária para se realizar rigorosamente um tratamento geral das representações de grupos simples (a qual pode ser encontrada por exemplo [6] ou [35], e envolve um arsenal advindo da teoria de grupos de Lie que o leitor pode adquirir em [29] ou [57]), nosso objetivo nessa sessão se limita a traçar um caminho até as representações de dimensão finita de $SU(2)$ e de $SL(2, \mathbb{C})$, deixando em alguns casos as definições rigorosas e demonstrações para as referências citadas.

2.4.1 A Estrutura de Grupos Conexos Simples

Como já mencionamos, um grupo conexo e simples é um grupo de Lie, ou seja, um grupo topológico munido de uma estrutura de variedade diferenciável (ou analítica conforme consideremos uma variedades reais ou complexas)¹⁶ onde as operações do grupo são diferenciáveis, na definição de homomorfismos entre grupos de Lie se impõe ainda que sejam diferenciáveis.

Consideraremos apenas variedades de dimensão finita e diferenciável ou suave, significando sempre infinitamente diferenciável.

Uma propriedade inerente a um grupo de Lie G é a existência de uma

¹⁶Usaremos indiscriminadamente a palavra diferencial, referindo-nos a analítica no caso de variedades complexas.

álgebra de Lie $\mathcal{L}_G$ associada. No contexto dos grupos de Lie, a álgebra de Lie corresponde ao plano tangente ao grupo de Lie na identidade. O plano tangente $T_g G$ a um ponto $g \in G$ é o espaço vetorial formado de derivações X , as quais são mapas lineares associando funções infinitamente diferenciáveis em G a números reais, isto é $X: C^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$, e satisfazendo ainda $X_g(fh) = f(g)X_g h + h(g)X_g f$.

O plano tangente a um ponto $g \in G$, de uma variedade de dimensão n pode ser identificado com $\mathbb{R}^n$, com a ação dos vetores correspondendo à derivadas direcionais.¹⁷

Embora o produto de duas derivações não seja em geral uma derivação, o produto $[X, Y] = XY - YX$ o é (fundamentalmente devido à independência da ordem de tomada de derivadas parciais sucessivas sobre uma função C^∞). Tal produto, chamado colchete de Lie, é bilinear, antissimétrico e satisfaz a identidade de Jacob:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

fazendo de $T_g G$ uma álgebra de Lie.

Uma função suave $F: G \rightarrow H$ entre variedades induz uma função $F_*: T_g G \rightarrow T_{F(g)} H$ chamada **pushforward** de F e dada, para todo $X \in T_g G$ e toda $f \in C^\infty(H)$, por:

$$(F_* X)(f) = X(f \circ F),$$

¹⁷Explicitamente, consideramos uma carta $(V, (x^i))$ contendo p , isto é, uma vizinhança V de $p \in G$ e um homeomorfismo $x(g) = (x^1(g), \dots, x^n(g))$ entre V e $\mathbb{R}^n$, nesse caso, podemos escrever, para $X \in T_g G$ dado e $f \in C^\infty(G)$ arbitrária:

$$Xf = X_i \frac{\partial(f \circ x^{-1})}{\partial x^i}(x(g)),$$

onde $X_j = Xx^j \in \mathbb{R}$ são as componentes de X no sistema de coordenadas $\{x^i\}$.

Por simplicidade, abusamos da notação escrevendo igualdades como a acima na forma:

$$Xf = X_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(g),$$

estando claro o significado, uma vez que sendo f uma função em G a relação acima não possui significado literal mas apenas formal.

o qual é um mapa linear que generaliza a noção de diferencial de uma função entre $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$.

No caso em que F é um homomorfismo, não é difícil mostrar que F_* preserva o colchete de Lie, ou seja $F_*[X, Y]_{\mathcal{L}_G} = [F_*X, F_*X]_{\mathcal{L}_H}$, sendo ainda um mapa linear, F_* é o que chamamos de um **homomorfismo entre as álgebras de Lie** $\mathcal{L}_G$ e $\mathcal{L}_H$. Se F for ainda bijetora (constituindo então um isomorfismo), então F_* também o será, consistindo então de um **isomorfismo entre álgebras de Lie**.

Em particular a translação à esquerda $l^g : x \mapsto gx$ é um automorfismo bijetivo suave de G , induzindo portanto o mapa $l_*^g : T_x G \rightarrow T_{gx} G$.

Um *campo vetorial*¹⁸ numa variedade é uma função suave¹⁹ $Y : p \mapsto Y_p$ que associa a cada ponto p da variedade um vetor Y_p no plano tangente ao ponto dado, em outras palavras, uma função suave do grupo no fibrado tangente $TG = \coprod_{g \in G} T_g G = \{(g, X) : g \in G, X \in T_g G\}$. Um campo vetorial Y é dito invariante à esquerda se:

$$l_*^g Y_{g'} = Y_{l^g g'} = Y_{gg'}.$$

Não é difícil mostrar que cada campo tangente invariante à esquerda sobre o grupo é unicamente determinado pelo seu valor na origem do grupo (isto é, por um vetor $X \in \mathcal{L}_G$).

Cada campo desse é (devido ao teorema de Frobenius) o campo tangente à um único subgrupo uniparamétrico²⁰ ϕ de G , o qual é dito gerado por X .

Assim, podemos identificar a álgebra de Lie $\mathcal{L}_G$ como o conjunto campos invariantes à esquerda sobre G ou ainda como o conjunto de vetores tangentes à subgrupos uniparamétricos de G , na origem.

Essa última associação é dada explicitamente em termos do *mapa exponencial* de $\mathcal{L}_G$ em G , que é dado pela associação $X \mapsto \exp X = \phi(1) \in G$, o

¹⁸Que sempre consideraremos sempre suave, o que no caso de campos invariantes não é nenhuma perda de generalidade.

¹⁹O sentido suave aqui carrega implicitamente o fato de que o fibrado tangente possui uma estrutura natural de variedade, na qual a projeção natural $\pi : TG \ni (p, X) \mapsto p \in G$ é suave.

²⁰Definido como um homomorfismo do grupo aditivo dos reais em G , o qual no caso de grupos topológicos tem de ser ainda contínuo, e diferenciável no caso de grupos de Lie.

qual é um mapa suave e um difeomorfismo local (entre uma vizinhança de 0 em $\mathcal{L}_G$ e uma vizinhança da identidade em G), tal que $\exp(tX) : \mathbb{R} \rightarrow G$ é o subgrupo uniparamétrico gerado por X , e possuindo ainda a propriedade que, para qualquer homomorfismo $F : G \rightarrow H$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_G & \xrightarrow{F_*} & \mathcal{L}_H \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ G & \xrightarrow{F} & H \end{array}$$

No caso de Grupos de Lie matriciais (subgrupos de Lie mergulhados²¹ em algum $GL(n, \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} : \det X \neq 0\}$ ou $GL(n, \mathbb{C}) = \{X \in \mathbb{C}^{n \times n} : \det X \neq 0\}$) com que estaremos lidando, as álgebras de Lie correspondentes são também matriciais (subálgebras de $\mathcal{L}_{GL(n, \mathbb{R})} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n \times n}$) e o mapa exponencial coincide com a exponenciação de matrizes, isto é, para $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$:

$$\exp A = e^A = 1 + A + A^2/2 + \dots \in GL(n, \mathbb{R}).$$

O mapa exponencial pode ser usado para estabelecer diversas relações entre grupos de Lie e as respectivas álgebras, em particular ele pode ser usado para estabelecer o importante resultado de que um subgrupo H de um grupo de Lie G que seja fechado (na topologia relativa à G), é automaticamente um subgrupo de Lie imerso em G .

Mostra-se ainda que para toda subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathcal{L}_G$ existe um único subgrupo de Lie conexo H de G tal que $\mathcal{L}_H = \mathfrak{h}$ e "reciprocamente" que se H é um subgrupo de Lie de G , então $\mathcal{L}_H$ é uma subálgebra de $\mathcal{L}_G$, a qual é dada por:

$$\mathcal{L}_H = \{X \in \mathcal{L}_G : e^{tX} \in H, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}\}.$$

²¹Definimos uma subvariedade N de uma variedade M como um par (N, F) onde $F : N \rightarrow M$ é ou um mapa suave cujo pushforward seja injetor — caracterizando uma subvariedade imersa — ou um homeomorfismo em sua imagem $F(N) \subset M$, com a topologia relativa à M — caracterizando uma subvariedade mergulhada.

Nos casos que consideraremos F será sempre a inclusão de um subgrupo matricial de algum $GL(n, \mathbb{R})$ ou $GL(n, \mathbb{C})$.

Caracterização da álgebra de Lie de subgrupos, que o leitor pode usar para verificar então a correspondência entre os seguintes grupos de Lie matriciais e respectivas álgebras²²:

$SL(n, K) = \{X \in GL(n, K) : \det X = 1\}$	$sl(n, K) = \{X \in gl(n, K) : \text{Tr } X = 0\}$
$U(n) = \{X \in GL(n, \mathbb{C}) : X^{-1} = X^\dagger\}$	$u(n) = \{X \in gl(n, \mathbb{C}) : X + X^\dagger = 0\}$
$O(n, K) = \{X \in GL(n, K) : X^{-1} = X^T\}$	$o(n, K) = \{X \in gl(n, K) : X + X^T = 0\}$
$O(p, q) = \{X \in GL(p+q, \mathbb{R}) : X^T g X = g\}$	$o(p, q)$

Onde $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, $g \in GL(p+q, \mathbb{R})$ é a matriz diagonal com $g_{ii} = 1, i = 1, \dots, p$ e $g_{ii} = -1, i = p+1, \dots, q$ e:

$$o(p, q) = \left\{ X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2^T & X_3 \end{bmatrix} \in gl(n, \mathbb{R}) \right. \\ \left. : X_i = -X_i^T, i = 1, 3; X_1 \in gl(p, \mathbb{R}), X_3 \in gl(q, \mathbb{R}) \right\}$$

É conveniente ainda definirmos os grupos $SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$, $SO(n, K) = O(n, K) \cap SL(n, K)$ e $SO(p, q) = O(p, q) \cap SL(n, \mathbb{R})$, que são também grupos de Lie com álgebras de Lie dadas pelas intersecções das álgebras correspondentes.

Estaremos particularmente interessados em $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$, que são as coberturas universais (definiremos o conceito logo adiante) dos grupos $SO(3)$ e $SO(1, 3)^\uparrow = \{X \in SO(1, 3) : X_{00} > 0\}$, os quais, como veremos no capítulo 5.1, correspondem ao grupos de rotações no espaço euclidiano tridimensional e à componente conexa do grupo de Lorentz $L_+^\uparrow$.

Particularmente, estaremos interessados em obter as representações irreduzíveis de dimensão finita de $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$ através da exponenciação das

²²Para demonstrações de que tais grupos são de fato subgrupos de Lie de $GL(n)$ e obtenções explícitas das respectivas álgebras, veja [29] ou [57].

representações das respectivas álgebras²³, que possuem a enorme vantagem de poderem ser obtidas por meios puramente algébricos. Para tal, precisamos ainda de algumas observações sobre o mapa exponencial assim como sobre os grupos em questão, que nos permitiram efetuar tal processo.

Quanto aos grupos em questão: $SU(2)$ e $SL(2, \mathbb{C})$, notemos primeiramente que ambos são conexos e simplesmente conexos²⁴, ambos são ainda grupos simples e apenas o primeiro deles é compacto.

Quanto ao mapa exponencial é possível mostrar que sua imagem $\exp(\mathcal{L}_G)$ é sempre um subgrupo de Lie imerso em G , o qual é necessariamente conexo, pois o mapa é suave e $\mathcal{L}_G$ é conexo. Assim, $\exp(\mathcal{L}_G)$ é sempre um subgrupo de Lie da componente da identidade de G .

Como a exponencial é um difeomorfismo local, a álgebra de Lie de um grupo determina completamente suas propriedades locais e é natural se perguntar o quanto da estrutura global de um grupo de Lie é determinada pela sua estrutura local.

Começemos então restringindo nosso estudo a grupos conexos através da observação de que em todo grupo de Lie não conexo suas componentes são todas difeomorfas entre si e o grupo pode ser escrito como **produto semi direto** de sua componente conexa com um subgrupo discreto no máximo contável. A componente da identidade de um grupo por sua vez, determina completamente suas propriedades locais, ou seja, $\mathcal{L}_G$ não contém nenhuma informação a respeito das outras componentes do grupo em questão.

Mesmo dentro dos grupos conexos, no entanto, as álgebra de Lie contém apenas parte da informação da estrutura global dos grupos de Lie, nesse sentido é possível mostrar que:

1. Grupos conexos e simplesmente conexos com álgebras de Lie isomórficas são sempre isomorfos.

²³Onde representação, sempre considerada complexa, de uma álgebra de Lie L é definida como um isomorfismo entre álgebras de Lie, isto é: uma bijeção de L em algum $gl(n, \mathbb{C})$ preservando o colchete de Lie

²⁴Tais fatos são verdadeiros para $SU(n)$ e $SL(n, \mathbb{C})$ em geral, e decorrem da estrutura topológica desses grupos enquanto subespaços topológico de $\mathbb{R}^{n^2}$ e $\mathbb{R}^{2n^2}$. Especificamente, enquanto espaços topológicos, $SU(2)$ é homeomorfo à superfície esférica no espaço plano 4-dimensional S^3 e $SL(2, \mathbb{C})$ é homeomorfo ao produto $\mathbb{R}^3 \times S^3$.

2. Existe uma associação um pra um entre classes de isomorfismo de álgebras de Lie de dimensão finita e classes de Grupos de Lie conexos e simplesmente conexos, dada pela associação entre um tal grupo de Lie e sua respectiva álgebra de Lie.
3. Os grupos de Lie conexos cujas álgebras são isomorfas a uma dada álgebra de Lie $\mathcal{L}$ de dimensão finita são exatamente aqueles da forma G/Γ , onde G é o único grupo simplesmente conexo com álgebra de Lie isomorfa à $\mathcal{L}$ e Γ é um subgrupo discreto e central de G .

O único grupo G simplesmente conexo associado a uma classe de álgebras de Lie isomorfas é dito ser a **cobertura universal** de todos os grupos da forma G/Γ .

É importante notar que através da projeção natural de G em G/Γ podemos estabelecer que as representações deste ultimo serão exatamente aquelas representações de G que são triviais em Γ , outras representações de G darão origem, como veremos, à representações projetivas G/Γ .

Para ilustrar os conceitos que vemos consideremos o seguinte:

Exemplo 2.5. Seja $G = U(1)$. Todo subgrupo uniparamétrico de G é da forma $\phi(t) = e^{i\lambda t}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, e o vetor tangente a uma tal curva na identidade é $\frac{d\phi}{dt}|_{t=0} = \lambda$, e então $\mathcal{L}_G \simeq \mathbb{R}$.

Nesse caso vemos imediatamente que o mapa exponencial é sobrejetor mas não injetor, sendo a pré imagem de um elemento $e^{i\lambda_0}$ dada pelo conjunto de vetores da forma $e^{i2\pi n\lambda}$, $n \in \mathbb{Z}$.

As representações de $\mathcal{L}_G$ são da forma $\lambda \mapsto a\lambda$ para $a \in \mathbb{R}$, no entanto, $e^{i\lambda} \mapsto e^{i\lambda a}$, que são representações de $H = (\mathbb{R}, +)$, não são em geral representações de G .

De fato, $e^{i2\pi} = 1 \neq e^{i2\pi a}$ a menos que $a \in \mathbb{Z}$, ou, em outras palavras, a menos que $e^{i\lambda} \mapsto e^{i\lambda a}$ seja trivial para $\lambda = 2\pi n$.

Dessa forma, a exponenciação de representações da álgebra $\mathcal{L}_G = \mathcal{L}_H$ produz representações de H , as quais não são representações ordinárias (mas sim projetivas, veja capítulo 4) de $G = H/K$, $K = \{2\pi n, n \in \mathbb{Z}\} \subset G$ a menos que sejam triviais em K .

Quanto à associação entre representações de álgebras e de grupos, comecemos notando que, pelo que já vimos, uma representação T de um grupo de Lie sempre dá origem à representação $T_\star$ de $\mathcal{L}_G$, para a qual vale, para todo $X \in \mathcal{L}_G$:

$$e^{T_\star(X)} = T(e^X). \quad (2.33)$$

A recíproca dessa afirmação, no entanto, não é em geral verdadeira, podendo haver dois poréns, o primeiro deles é que o mapa exponencial pode não ser sobrejetor, e nesse caso a exponenciação das representações de $\mathcal{L}_G$ produzirão representações de um subgrupo e não de todo G ²⁵, o segundo é que, no caso em que G não é simplesmente conexo, como vimos no exemplo acima, algumas representações de $\mathcal{L}_G$ darão origem a representações projetivas de G .

Como as representações projetivas serão de grande interesse mais adiante (4), convém abordar tal questão com um pouco mais de profundidade.

Num contexto geral o mapa exponencial, sendo um difeomorfismo local, e devido à fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff²⁶ sempre define, dada uma representação $T_\star$ de $\mathcal{L}_G$, via (2.33), uma representação local de G numa vizinhança da identidade $N(e)$.

O processo pelo qual tal representação pode ser estendida à $\exp(\mathcal{L}_G)$ é feito usando-se caminhos (que sempre existem pois G é conexo) ligando cada elemento desse conjunto à identidade, e é independente do caminho escolhido apenas se para caminhos que podem ser deformados continuamente um no outro, ou seja, quando $\exp(\mathcal{L}_G)$ é simplesmente conexo.

No caso em que G não é simplesmente conexo, a extensão da representação local feita por caminhos não homotópicos pode não coincidir, dando origem à

²⁵Nesse caso o procedimento descrito abaixo ainda pode ser levado a cabo, mas uma expressão global na forma 2.33 não é possível.

²⁶Tal relação estabelece que para $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ ou $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, com A e B numa vizinhança suficientemente pequena de $0 \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, vale:

$$e^A e^B = e^C,$$

onde

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] + \frac{1}{12}[B, [B, A]] + \dots$$

Sua demonstração pode ser encontrada por exemplo em [2] ou [21]

representações projetivas²⁷.

Como conclusão, vemos que o processo de exponenciar representações de dimensão finita de uma álgebra de Lie fornece representações de um grupo Lie associado somente quando o grupo em questão for conexo e simplesmente conexo, e toma a forma (2.33) somente se o mapa exponencial for sobrejetor.

2.4.2 Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $SU(2)$ e $SO(3)$

No caso de $SU(2)$ todos os requisitos acima são satisfeitos (a sobrejetividade da exponencial sendo um caso particular do que ocorre em geral para qualquer grupo conexo compacto e semi-simples [52].) e podemos obter as representações desse grupo através das representações de sua álgebra de Lie.

A álgebra de Lie de $SU(2)$ é dada por:

$$su(2) = \{X \in gl(2, \mathbb{C}) : \text{Tr } X = 0, X + X^\dagger = 0\}.$$

O qual é um espaço vetorial tri-dimensional, para o qual uma possível base é formada pelas matrizes $il_k = i\sigma_k/2$, onde $\sigma_k, k = 1, 2, 3$ são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

O colchete de Lie entre as matrizes l_k é dado por:

$$[l_i, l_j] = i\varepsilon_{ijk}l_k,$$

onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita.²⁸

²⁷Tal construção pode ser encontrada, por exemplo, em [21].

²⁸Definido como:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3); (3, 1, 2); (2, 3, 1) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) = (2, 1, 3); (3, 2, 1); (1, 3, 2) \\ 0 & \text{se } i = j; j = k; \text{ ou } k = i \end{cases}$$

Nesse caso a sobrejetividade da exponencial $\exp(\mathfrak{su}(2)) = SU(2)$ nos diz que todo elemento $A \in SU(2)$ é da forma $A(n) = e^{i\mathbf{n} \cdot \mathbf{1}}$ com $n = (n^1, n^2, n^3) \in \mathbb{R}^3$, e onde $\mathbf{n} \cdot \mathbf{1} = n^k l_k$.

Mostra-se ainda que se $\|n\| = \|n'\| + 2n\pi$, $n \in \mathcal{Z}$, então $A(n) = A(n')$, de forma que podemos restringir $\|n\| = \theta$ ao intervalo $[0, 2\pi)$, obtendo que toda matriz $A \in SU(2)$ é da forma:²⁹

$$A(n, \theta) = e^{i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{1}}, \quad (2.34)$$

onde agora $n \in \mathbb{R}^3$ é unitário: $\|\mathbf{n}\| = 1$.

As representações de $\mathfrak{su}(2)$ são, por definição, mapas $\xi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ tais que $[\xi(l_i), \xi(l_j)] = i\varepsilon_{ijk}\xi(l_k)$, e as representações D de $SU(2)$ correspondentes são dadas por (2.33), que no caso, usando a equação acima (2.34) e escrevendo $L_k = \xi(l_k)$, pode ser escrita como:

$$D(A(n, \theta)) = e^{i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{1}}, \quad (2.35)$$

e pelo que já vimos todas as representações de $SU(2)$ podem ser obtidas dessa forma para alguma representação ξ de $\mathfrak{su}(2)$.

Essas últimas, por sua vez, podem ser obtidas por meios algébricos num tratamento³⁰ que explora o fato de que o operador $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ comuta com cada L_i e que portanto, pela equação acima (2.35) comuta com cada $D(A)$, de tal forma que, se D é irredutível, pela proposição 2.5, temos $L^2 = \lambda I$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Ou seja, os espaços $\mathcal{H}_\lambda$ que carregam representações irredutíveis D^λ de $SU(2)$ são exatamente aqueles formados por auto vetores de L^2 com um mesmo autovalor λ .

Uma vez que L^2 e L_3 comutam, podemos explorar a estrutura de $\mathcal{H}_\lambda$ decompondo-o em subespaços formados por autovetores de L_3 , para isso,

²⁹O leitor deve atentar-se que há diferentes valores de θ e n correspondendo à um mesmo elemento de $SU(2)$, embora tal fato não será relevante para as construções que faremos.

³⁰O qual pode ser feito no contexto de um grupo de Lie compacto e conexo em geral (veja por exemplo [6] ou [35]), e que no caso presente de $SU(2)$ pode ser encontrado por exemplo em [2], ou em textos sobre mecânica quântica (por exemplo [50] ou [19]), nas seções sobre momento angular.

consideremos um autovetor $\psi_{\lambda,m}$ de L_3 — o qual sempre existe — com autovalor $m \in \mathbb{C}$, ou seja:

$$L_3\psi_{\lambda,m} = m\psi_{\lambda,m},$$

e definamos:

$$L_{\pm} = L_1 \pm iL_2. \quad (2.36)$$

Tais operadores satisfazem:

$$[L^2, L_{\pm}] = 0, \quad [L_3, L_{\pm}] = \pm L_{\pm}, \quad \text{e} \quad [L_+, L_-] = L_3, \quad (2.37)$$

de onde segue que:

$$L_3L_{\pm}\psi_{\lambda,m} = (m \pm 1)L_{\pm}\psi_{\lambda,m},$$

e por indução

$$L_3(L_{\pm})^n\psi_{\lambda,m} = (m \pm n)(L_{\pm}^n)\psi_{\lambda,m}.$$

Para n inteiro não negativo. Ou seja, o estado $(L_{\pm}^n)\psi_{\lambda,m}$, se não nulo, é autoestado de L_3 com autovalor $m \pm n$, dizemos que $m + n$ é o **peso** do estado $(L_{\pm}^n)\psi_{\lambda,m}$.

Como a representação tem dimensão finita e os autovetores de L_3 com diferentes autovalores são ortogonais, existem autovetores ψ_{λ,m_+} — chamado vetor de peso máximo — e ψ_{λ,m_-} de L_3 com autovalores m_+ — dito peso máximo — e m_- , respectivamente, tais que:

$$L_{\pm}\psi_{\lambda,m_{\pm}} = 0,$$

e portanto:

$$L_{\mp}L_{\pm}\psi_{\lambda,m_{\pm}} = 0. \quad (2.38)$$

Notando que das definições de $L_{\pm}$ e usando (2.37) podemos escrever:

$$L^2 = L_+L_- - L_3 + L_3^2 = L_-L_+ + L_3 + L_3^2. \quad (2.39)$$

Usando a relação acima para reescrever $L_\mp L_\pm$ em termos de L^2 e L_3 e aplicando na condição (2.38) acima se obtém:

$$\lambda = m_+(m_+ + 1) = m_-(m_- - 1),$$

de onde temos que $m_+ = -m_-$.

Partindo do estado ψ_{λ, m_+} — o qual não é difícil mostrar ser único a menos de uma constante — e após a aplicação de L_- um número finito n de vezes, obtêm-se um autoestado de L_3 com autovalor $m_{\min}$.

Dessa forma $m_{\max} - n = m_{\min} = -m_{\max}$, e portanto, $m_{\max} = n/2 := j$, $m_{\min} = -j$ e $\lambda = j(j+1)$, justificando a mudança de notação $\psi_{\lambda, m} \rightarrow \psi_{j, m}$.

Notemos que o espaço $\mathcal{H}_j = \text{span}\{\psi_{j, j}, L_- \psi_{j, j}, \dots, (L_-)^{2j} \psi_{j, j}\}$ é um subespaço de $\mathcal{H}_\lambda$, o qual é, por construção, invariante sob a ação do grupo. Como a representação é irredutível por hipótese, $\mathcal{H}_\lambda = \mathcal{H}_j$.

Por fim, como $(L_-)^k \psi_{j, j}$ é auto estado de L_3 com autovalor $j - k$, podemos escolher para $\mathcal{H}_j$ uma base ortonormal $\{\psi_{j, m}, m = j, j-1, \dots, -j\}$ de autoestados de L_3 e a constante de proporcionalidade entre $L_\pm \psi_{j, m}$ e $\psi_{j, m \pm 1}$, que pode ser obtida através de (2.39), é dada por:

$$L_\pm \psi_{j, m} = \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)} \psi_{j, m \pm 1}. \quad (2.40)$$

Finalmente, em cada espaço $\mathcal{H}_j$ é possível, usando a relação (2.40) acima e as definições de $L_\pm$, calcular a ação L_1^j e L_2^j sobre cada $\psi_{j, m}$, e então obter explicitamente os elementos de matriz $(L_i^j)_{mm'} = \langle L_i^j \psi_{j, m'}, \psi_{j, m} \rangle$ de $L_i^j, i = 1, 2, 3$ nessa base:

$$\begin{aligned} (L_1^j)_{mm'} &= \frac{1}{2} [\sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \delta_{m+1, m'} + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \delta_{m-1, m'}], \\ (L_2^j)_{mm'} &= \frac{1}{2i} [\sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \delta_{m+1, m'} - \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \delta_{m-1, m'}], \\ (L_3^j)_{mm'} &= m \delta_{m, m'}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

As equações acima determinam a forma explícita das representações de $su(2)$, as correspondentes representações de $SU(2)$ são obtidas destas a partir de (2.35) e são então dadas por:

$$D^j(A(n, \theta)) = e^{i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}^j}. \quad (2.42)$$

Pelo que vimos cada uma dessas representações é irredutível e toda representação irredutível é equivalente a alguma $D^j, j \in \mathbb{N}/2$.

Resumindo:

Proposição 2.14. *As representações irredutíveis de $SU(2)$ são da forma $D^j, j \in \{0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots\} = \mathbb{N}/2$, realizadas em espaços $2j+1$ - dimensional $\mathcal{H}_j, j = 0, 1/2, 1, \dots$, gerados por autovetores $\psi_{j,m}, m = j, j-1, \dots, -j$ de L_3 com autovalor m , todos autovetores também de L^2 com um mesmo autovalor $j(j+1)$.*

Note-se que cada L_k^j em (2.41) é uma matriz auto-adjunta, de tal forma que, pela equação (2.42), cada D^j é ainda uma representação unitária de $SU(2)$.

O fato de L_k^j serem auto-adjuntos implica na importante consequência de poderem ser associados à observáveis em teorias quânticas que tratem de sistemas cujos estados são descritos por vetores em $\mathcal{H}_j$, esse será de fato o caso nas aplicações que faremos às teorias quânticas, onde j será identificado com o spin de uma partícula.

Será de particular interesse o caso $j = 1/2$, para o qual $L_i^{1/2} = l_k$ é a representação fundamental de $su(2)$ e $D^{1/2}(A) = A$ é a representação fundamental de $SU(2)$.

Antes de passarmos à relação entre $SU(2)$ e $SO(3)$ façamos uma breve incursão a respeito da decomposição do produto tensorial de representações de $SU(2)$ que nos levará à realização da representação D^j no espaço de tensores simétricos.

Produto Tensorial de Representações de $SU(2)$

Consideremos a representação $D = D^{j_1} \otimes D^{j_2}$ (veja definição na seção (2.1.5)) de $SU(2)$ em $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$, nosso objetivo nessa seção é estudar como

tal representação se decompõe em irredutíveis.

Comecemos notando que os geradores dos subgrupos uniparamétricos $D(e^{i\theta l_k})$, $k = 1, 2, 3$, que são nada mais que os operadores iL_k representando il_k na correspondente representação de $su(2)$, são dados por:

$$\begin{aligned} iL_k &= \frac{d}{d\theta} [e^{i\theta L_k^{j_1}} \otimes e^{i\theta L_k^{j_2}}] \Big|_{\theta=0} \\ &= \frac{d}{d\theta} e^{i\theta L_k^{j_1}} \Big|_{\theta=0} \otimes I_{j_2} + I_{j_1} \otimes \frac{d}{d\theta} e^{i\theta L_k^{j_2}} \Big|_{\theta=0} \\ &= i(L_k^{j_1} \otimes I_{j_2} + I_{j_1} \otimes L_k^{j_2}). \end{aligned}$$

Ou seja:

$$L_k = L_k^{j_1} \otimes I_{j_2} + I_{j_1} \otimes L_k^{j_2}, \quad (2.43)$$

onde I_{j_i} é a matriz identidade de ordem $2j_i + 1$. É imediato constatar então que o operador

$$L^2 = \sum_k L_k^2 = (L^{j_1})^2 \otimes I_{j_2} + I_{j_1} \otimes (L^{j_2})^2 + 2 \sum_k L_k^{j_1} \otimes L_k^{j_2}$$

comuta com cada L_k , e portanto com $D(A)$, para todo $A = e^{i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}} \in SU(2)$. Assim, pelo lema de Schur, L^2 deve ser proporcional à identidade em cada subespaço invariante irredutível de $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$. Ou seja, cada espaço irredutível $\mathcal{H}_j$ na decomposição é composto por autovetores de L^2 com um mesmo autovalor, digamos, $j(j+1)$.

A estrutura interna de cada espaço $\mathcal{H}_j$ pode ser analisada utilizando a mesma lógica da seção anterior, para tal, começemos notando que os estados $\psi_{j_1, m_1} \otimes \psi_{j_2, m_2} := |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$; $m_i = j_i, j_i - 1, \dots, -j_i$; $i = 1, 2$. — os quais formam uma base para $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ — são autoestados de L_3 com autovalor $m_1 + m_2$:

$$\begin{aligned} L_3|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle &= [L_3^{j_1} \otimes I_{j_2} + I_{j_1} \otimes L_3^{j_2}]|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle \\ &= (m_1 + m_2)|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle. \end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$ pode ser particionado em subespaços V_m formados por autovetores de L^3 com um mesmo autovalor m , em particular: $|j_1j_1\rangle|j_2j_2\rangle$ gera um subespaço 1- D , que denotaremos por $V_{j_1+j_2}$, com autovalor $j_1 + j_2$; $\text{span}\{|j_1j_1\rangle|j_2j_2 - 1\rangle, |j_1j_1\rangle|j_2j_2 - 1\rangle\} := V_{j_1+j_2-1}$ é um subespaço 2- D cujos vetores são autoestados de L^3 com autovalor $j_1 + j_2 - 1$ e em geral temos um subespaço $V_{j_1+j_2-k}$, formado por autovetores de L_3 com autovalor $j_1 + j_2 - k$, para todo k inteiro positivo com $j_1 - k > -j_1$ e $j_2 - k > -j_2$, ou equivalentemente com:

$$k < 2\min\{j_1, j_2\} = j_1 + j_2 - |j_1 - j_2|,$$

e $V_{j_1+j_2-k}$ possui $k + 1$ vetores linearmente independentes, correspondendo às $k + 1$ formas de se escrever $j_1 + j_2 - k$ na forma $m_1 + m_2$, com $m_1 \in \{j_1, j_1 - 1, \dots, -j_1\}$ e $m_2 \in \{j_2, j_2 - 1, \dots, -j_2\}$:

$$\begin{aligned} j_1 + j_2 - k &= (j_1 - k) + j_2 \\ &= (j_1 - k + 1) + (j_2 - 1) \\ &\vdots \\ &= (j_1 - 1) + (j_2 - k + 1) \\ &= j_1 + (j_2 - k). \end{aligned}$$

Ou seja, $\dim(V_{j_1+j_2}) = 1$ e $\dim(V_{m+1}) = \dim(V_m) + 1$ para $j_1 + j_2 > m > |j_1 - j_2|$.

Quando k alcança $2\min\{j_1, j_2\}$, um dos termos acima não faz mais sentido, o mesmo acontecendo com os V_m subsequentes, de modo que a dimensão de V_m para de aumentar, e $\dim(V_m) = |j_1 - j_2| + 1$, para $|j_1 - j_2| \leq m \leq j_1 + j_2$.

Por fim, para $k > 2\max\{j_1, j_2\} = j_1 + j_2 + |j_1 - j_2|$, a cada novo passo ($k \rightarrow k + 1$) dois dos termos acima passam a não ter sentido, de modo que a dimensão de V_m passa a diminuir em 1 a cada passo até alcançar 1 em $V_{-j_1-j_2} = \text{span}\{|j_1 - j_1\rangle|j_2 - j_2\rangle\}$.

Se definirmos $L_\pm$, em analogia à (2.36), por

$$L_\pm = L_1 \pm iL_2 = L_1^{j_1} \pm iL_2^{j_1} \otimes I_{j_2} + I_{j_1} \otimes L_1^{j_2} \pm iL_2^{j_2}, \quad (2.44)$$

é fácil verificar que (2.37) ainda são satisfeitas, de modo que $L_\pm$ são operadores de levantamento e abaixamento relativos à L_3 , os quais preservam autovalor de L^2 .

Dessa forma, um vetor em V_m que seja auto estado de L^2 — isto é: $\psi_{j,m} \in \mathcal{H}_j \cap V_m$ — é levado, sob a ação de $L_\pm$, em $\mathcal{H}_j \cap V_{m\pm 1}$.

Com alguma álgebra não é difícil mostrar que também nesse caso, se um vetor $\psi_{j,m_+} \neq 0$ em $\mathcal{H}_j$ é um vetor de peso máximo m_+ , *i.e.*: $L_+\psi_{j,m_+} = 0$, então $L^2\psi_{j,m_+} = m_+(m_+ + 1)\psi_{j,m_+}$, de modo que $j = m_+$ e o espaço $\mathcal{H}_j$ de fato carrega a representação irredutível D^j .

Para alguns cálculos útil ter também L^2 escrito em termos de $L_\pm$, o que se obtém direto das definições:

$$L^2 = (L^{j_1})^2 \otimes I_{j_2} + I_{j_1} \otimes (L^{j_2})^2 + L_3^{j_1} \otimes L_3^{j_2} + L_+^{j_1} \otimes L_-^{j_2} + L_-^{j_1} \otimes L_+^{j_2}. \quad (2.45)$$

Comecemos então com o estado $|j_1j_1\rangle|j_2j_2\rangle$. Como esse é o único estado — a menos de um fator multiplicativo — com peso $j_1 + j_2$, e como não há estados com peso maior, esse é um estado de peso máximo, e então deve ser peso máximo da representação irredutível $D^{j_1+j_2}$.

Assim,

$$\mathcal{H}_{j_1+j_2} = \text{span}\{|j_1j_1\rangle|j_2j_2\rangle, L_-|j_1j_1\rangle|j_2j_2\rangle, \dots, (L_-)^{2j_1+2j_2+1}|j_1j_1\rangle|j_2j_2\rangle\}$$

é um subespaço irredutível invariante de $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$, o qual contém exatamente um vetor pertencente a cada espaço V_m .

Seja V' o complemento ortogonal de $\mathcal{H}_{j_1+j_2}$ em $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$, o qual é também

invariante pela proposição 2.4.

V' possui um único vetor v com peso $j_1 + j_2 - 1$, uma vez que $\dim(V_{j_1+j_2-1}) = 2$ e um dos vetores desse espaço pertence a $\mathcal{H}_{j_1+j_2}$.

Assim, v deve ser um peso máximo da representação irredutível $D^{j_1+j_2-1}$ e portanto $\mathcal{H}_{j_1+j_2} = \text{span}\{v, L_-v, \dots, (L_-)^{2j_1+2j_2-1}v\}$ é também um subespaço irredutível e invariante de $\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}$, o qual contém exatamente um vetor pertencente a cada espaço V_m , $|m| \leq j_1 + j_2 - 1$.

Podemos continuar esse processo obtendo sucessivos subespaços invariantes irredutíveis $\mathcal{H}_j$ até que todo $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ tenha sido decomposto, o que ocorre exatamente quando alcançamos o espaço $\mathcal{H}_{|j_1-j_2|}$. O que de fato podemos verificar contando dimensões:

$$\begin{aligned} \dim \left(\bigoplus_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} \mathcal{H}_j \right) &= \sum_{j=j_1-j_2}^{j_1+j_2} (2j+1) = \sum_{k=0}^{2j_2} [2(j_1+j_2-k)+1] \\ &= (2j_1+2j_2+1)(2j_2+1) - 2 \sum_{k=0}^{2j_2} k \\ &= (2j_1+1)(2j_2+1) \\ &= \dim(\mathcal{H}_{j_1} \otimes \mathcal{H}_{j_2}). \end{aligned}$$

Onde consideramos $j_1 \geq j_2$ por simplicidade, o mesmo valendo no outro caso, como facilmente se constata.

A análise acima não só fornece a série de *Clebsch – Gordan* para $SU(2)$:

$$D^{j_1} \otimes D^{j_2} = D^{j_1+j_2} \oplus D^{j_1+j_2-1} \oplus \dots \oplus D^{|j_1-j_2|}, \quad (2.46)$$

como fornece um método para a obtenção de bases ortonormais $\{\psi_{j,m}\}$ nos subespaços irredutíveis $\mathcal{H}_j$.

O método apresentado, assim como exemplos, pode ser encontrado em bons livros de mecânica quântica, como [19] ou [50], na seção de soma de spin (ou momento angular).

No nosso caso estaremos sobretudo interessados em produtos tensoriais múltiplos da representação fundamental $D^{1/2}(A) = A$:

$$D^{1/2} \otimes D^{1/2} \otimes \dots \otimes D^{1/2}, \quad (2r \text{ vezes}), r \in \mathbb{N}/2.$$

A qual atua no espaço $\mathcal{T}^{2r}(SU(2))$ de tensores relativos à $SU(2)$ (veja definição em (2.13)), identificado com $\mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{1/2}$ através do isomorfismo $|1/2m_1 > |1/2m_2 > \dots |1/2m_{2r} > \leftrightarrow T_{i_1 i_2 \dots i_{2r}} = \delta_{m_1, i_1} \delta_{m_2, i_2} \dots \delta_{m_r, i_{2r}}, m_k, i_k = \pm 1/2, k = 1, 2, \dots, 2r$.

A decomposição de tal representação em irredutíveis pode ser feita usando a série (2.46) acima e a propriedade distributiva do produto tensorial com relação ao produto direto (2.12).

Daí é fácil concluir que a representação D^r é a irredutível de maior peso em tal decomposição e que aparece com multiplicidade 1.

Em particular, o tensor totalmente simétrico $T^{\max}$ com componentes $\delta_{1/2, i_1} \delta_{1/2, i_2} \dots \delta_{1/2, i_{2r}}$ é o único tensor, a menos de uma constante, com o maior peso possível r .

Definindo $L_{\pm}$, em analogia à (2.44), por:

$$L_{\pm} = L_1^{1/2} \pm iL_2^{1/2} \otimes I_{1/2} \otimes \dots \otimes I_{1/2} + \text{permutações}, \quad (2.47)$$

não é difícil constatar que os $2r + 1$ tensores $T^k = (L_-)^k T^{\max}$, $k = 0, 1, \dots, 2r$, possuem peso $r - k$, respectivamente, sendo então mutuamente ortogonais e gerando o subespaço irredutível $\mathcal{H}_r$ de $\mathcal{T}^{2r}(SU(2))$ que carrega a representação D^r .

Conforme vimos na seção 2.1.5, particularmente em (2.15), a ação do grupo comuta com permutações dos índices tensoriais, de modo que, assim com $T^{\max}$, todos os tensores T^k são totalmente simétricos — o que pode ser constatado diretamente também a partir da forma simétrica de $L_{\pm}$ definido acima — e então $\mathcal{H}_r$ está contido no subespaço dos tensores simétricos $\mathfrak{Sym}^{2r}(SU(2))$. Para ver que tais espaços coincidem basta então contar dimensões, por (2.19):

$$\dim(\mathfrak{Sym}^{2r}(SU(2))) = \binom{2 + 2r - 1}{2r} = 2r + 1 = \dim(\mathcal{H}_r).$$

Dessa forma, concluímos que:

Proposição 2.15. *A representação $D^{1/2} \otimes D^{1/2} \otimes \dots \otimes D^{1/2}(A) = A \otimes A \otimes \dots \otimes A$*

($2r$ fatores), é irredutível e equivalente à D^r , quando restrita ao espaço $\mathfrak{Sym}^r(SU(2))$ de tensores totalmente simétricos relativos à $SU(2)$.

Representações de $SO(3)$

Antes de passarmos ao grupo $SL(2, \mathbb{C})$, tracemos alguns comentários concernentes à relação de $SU(2)$ com o grupo de rotações tridimensional $SO(3)$, cuja álgebra de lie é dada por:

$$so(3) = \{X \in gl(2, \mathbb{C}) : \text{Tr } X = 0, X + X^T = 0\}.$$

O qual é também um espaço vetorial tri-dimensional, para qual uma possível base é dada pelas matrizes:

$$j_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad j_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad j_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Com colchete $[j_i, j_j] = \varepsilon_{ijk} j_k$.

Essa álgebra é isomorfa à $su(2)$ pelo mapa $\phi : so(3) \rightarrow so(2)$ definido em termos das respectivas bases por $\phi(j_k) = il_k$, a partir do qual vemos facilmente que representações irredutíveis de $so(3)$ (a menos de equivalência), são da forma $L^j \circ \phi$ para alguma representação L^j de $su(2)$.

Sendo $SO(3)$ compacto, simples e conexo, a exponencial é sobrejetora também nesse caso, e em analogia à $SU(2)$, todo elemento de $R \in SO(3)$ pode ser escrito na forma

$$R(n, \theta) = e^{\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}}, \quad (2.48)$$

onde novamente podemos restringir $\theta \in \mathbb{R}$ ao intervalo $[0, 2\pi)$ e $n \in \mathbb{R}^3$ com $\|n\| = 1$.

Baseando-nos em tais fatos podemos construir o mapa $\Phi : SU(2) \rightarrow SO(3)$ dado por:

$$\Phi(e^{i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}}) = e^{\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}}. \quad (2.49)$$

Tal mapa mostra-se um homomorfismo não injetor, sendo seu núcleo dado por $\{\pm I\}$. De fato $e^{i2\pi\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}} = -I \in SU(2)$ enquanto $\Phi(e^{i2\pi\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}}) = e^{2\pi\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}} = I \in SO(3)$.

Como $SU(2)$ é simplesmente conexo, ele nos mostra que $SU(2)$ é a cobertura universal de $SO(3)$ ³¹.

Devido a tal fato, as representações D^j que não são triviais em $\{\pm I\}$ — que são exatamente aquelas em que j é semi-inteiro, como facilmente se constata usando $-I = e^{i2\pi\mathbf{l}_3}$ e a forma diagonal de L_3^j em (2.41) — não são levadas em representações D'^j de $SO(3)$ através da associação:

$$D'^j(e^{\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}}) = D^j(e^{i\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{l}}). \quad (2.50)$$

Em particular, usando a forma explícita $D^{1/2}(A) = A$, vê-se imediatamente que $D'^{1/2}(e^{2\pi\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}}) = -I$.

Objetos como $D'^{1/2}$ são chamados de representações projetivas ou representações a menos de uma fase e possuem grande importância nas aplicações da teoria de representações à mecânica quântica, como veremos no capítulo 4.

As representações D'^j com j inteiro, por sua vez, são representações irredutíveis de $SO(3)$ e de fato qualquer representação irredutível de $SO(3)$ é equivalente à alguma D^j .

Também nesse caso é de fundamental importância a representação fundamental em $\mathbb{C}^3$, definida por:

$$D(R) = R, \quad R \in SO(3).$$

Tal representação é irredutível e equivalente à D'^1 , como podemos constatar através da matriz de mudança de base:

$$C = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ i/\sqrt{2} & 0 & i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que diagonaliza j_3 e para a qual temos:

³¹De fato tal cobertura corresponde à restrição a $SU(2)$ da cobertura $SL(2) \rightarrow SO(1,3)^\uparrow \simeq L_+^\uparrow$, que apresentaremos no capítulo 5.

$$C^{-1}j_k C = iL_k^1,$$

de tal forma que, para toda $R = e^{\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}} \in SO(3)$:

$$C^{-1}D(R)C = C^{-1}e^{\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}}C = e^{i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{L}^1} = D^1(R).$$

Mostrando explicitamente a equivalência mencionada.

Também nesse caso é interessante considerarmos o produto tensorial de representações fundamentais:

$$D(R) = R \otimes R \otimes \dots \otimes R, \quad (\text{r vezes}) ,$$

a qual atua no espaço $\mathcal{T}^r(SO(3))$ de tensores relativos à $SO(3)$ (veja definição em (2.13)), identificado com $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^3$ através do isomorfismo $e_{m_1} \otimes e_{m_2} \otimes \dots \otimes e_{m_r} \leftrightarrow T_{i_1 i_2 \dots i_r} = \delta_{m_1, i_1} \delta_{m_2, i_2} \dots \delta_{m_r, i_r}$, $m_k, i_k = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots, r$. Onde $\{e_m\}$, $m = 1, 2, 3$ é a base canônica de $\mathbb{C}^3$.

Nesse caso não é difícil ver que o tensor de peso máximo correspondendo à irredutível de maior peso D^r é aquele que correspondente à:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{bmatrix},$$

o qual é totalmente simétrico e portanto, também nesse caso, o subespaço $\mathcal{H}_r \subset \mathcal{T}^r(SO(3))$ que carrega a irredutível D^r está contido no subespaço dos tensores simétricos $\mathfrak{Sym}^r(SO(3))$, cuja dimensão, por (2.19), é:

$$\dim(\mathfrak{Sym}^r(SO(3))) = \binom{3+r-1}{r} = \frac{r^2 + 3r + 2}{2},$$

a qual é maior que $\dim(\mathcal{H}_r) = 2r + 1$ exceto para $r = 0$ ou $r = 1$.

Isso ocorre pois, como vimos em (2.23), a ação dos grupos ortogonais comuta não apenas com permutações dos índices, mas também com o traço de tensores.

Observando o tensor de peso máximo acima é fácil concluir que seus traços com relação a quaisquer dois índices é nulo, de forma que todos os tensores

de $\mathcal{H}_r$ possuem a mesma propriedade.

Como o número de traços que podem ser tomados sobre um tensor de rank r é:

$$\binom{r}{2} = \frac{r^2 - r}{2},$$

o subespaço de $\mathfrak{Sym}^r(SO(3))$ formado por tensores de traço nulo possui exatamente $2r + 1$ dimensões, e assim coincide com $\mathcal{H}_r$, ou seja:

Proposição 2.16. *A representação $D(R) = R \otimes R \otimes \dots \otimes R$, (r fatores), $R \in SO(3)$ é irredutível e equivalente à D^r , quando restrita ao espaço de tensores totalmente simétricos de traço nulo relativos à $SO(3)$.*

2.4.3 Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $SL(2, \mathbb{C})$

Nessa seção obteremos as representações irredutíveis de dimensão finita de $SL(2, \mathbb{C})$ e iniciaremos alguma conexão entre esse grupo e $SO(3, 1)$, à qual voltaremos varias vezes ao longo do texto.

Os grupos em questão são dados por:

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{X \in GL(2, \mathbb{C}) : \det X = 1\}$$

e

$$SO(1, 3)^\uparrow = \{X \in GL(4, \mathbb{R}) : X^T g X = g : X_0^0 > 0\},$$

onde $g = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, e o ultimo grupo será identificado mais tarde com a componente conexa do grupo de Lorentz (veja capítulo 5).

A álgebra de Lie de $SL(2)$ é dada por:

$$sl(2, \mathbb{C}) = \{X \in gl(2, \mathbb{C}) : \text{Tr } X = 0\}.$$

Uma possível base é formada pelas matrizes $n_k = i\sigma_k/2$ e $l_k = \sigma_k/2$, e todo elemento $X \in SL(2, \mathbb{C})$ pode ser escrito (veja por exemplo [40]) na forma³²:

³²De fato tal decomposição corresponde à decomposição polar (veja seção 5.6) $X = BR$,

$$X = e^{i\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}} e^{i\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{l}}, \quad (2.51)$$

onde $x, y \in \mathbb{R}^3$ com $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\theta, \eta \in \mathbb{R}$.

Claramente, uma vez que n são anti-hermitianas ($n_k^\dagger = -n_k$) enquanto l_k são hermitianas, os elementos da forma $B = e^{i\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}$ são auto-adjuntos enquanto os elementos $R = e^{i\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{l}}$ são unitários.

As matrizes l_i e n_i satisfazem os colchetes:

$$\begin{aligned} [l_i, l_j] &= i\varepsilon_{ijk} l_k, \\ [n_i, n_j] &= -i\varepsilon_{ijk} l_k, \\ [l_i, n_j] &= i\varepsilon_{ijk} n_k. \end{aligned}$$

Se efetuarmos uma mudança de base definindo as matrizes:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{l} - i\mathbf{n})/2 \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = (\mathbf{l} + i\mathbf{n})/2. \quad (2.52)$$

Em termos das quais, claramente:

$$\mathbf{l} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad \text{e} \quad \mathbf{n} = i(\mathbf{a} - \mathbf{b}). \quad (2.53)$$

É fácil ver que os colchetes acima implicam:

$$\begin{aligned} [a_i, a_j] &= i\varepsilon_{ijk} a_k, \\ [b_i, b_j] &= i\varepsilon_{ijk} b_k, \\ [a_i, b_j] &= 0. \end{aligned}$$

Ou seja, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ satisfazem, independentemente, as regras de comutação de $su(2)$, e portanto uma representação de $SL(2, \mathbb{C})$ pode ser sempre restringida às matrizes a_i e às matrizes b_i , fornecendo um par de representações e de

com $B = e^{i\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}} \in SL(2, \mathbb{C})$ positiva, bijetiva e autoadjunta e $R = e^{i\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{l}} \in SU(2) \subset SL(2)$ unitária. A determina unicamente B e R e vice versa, no entanto vários valores de $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$, θ e η correspondem aos mesmos B e R .

$su(2)$.³³

De fato, é possível mostrar que toda representação irredutível de dimensão finita de $SL(2, \mathbb{C})$ (veja por exemplo [6], [35] ou [27]) é realizada num espaço $\mathcal{H}^{(j_1, j_2)}$, $j_1, j_2 \in \mathbb{N}/2$, de dimensão $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$, gerado por autovetores tanto de a_3 quanto de b_3 : $\phi_{(j_1, j_2); m_1, m_2}$; $m_1 \in \{-j_1, -j_1 + 1, \dots, j_1 - 1, j_1\}$; $m_2 \in \{-j_2, -j_2 + 1, \dots, j_2 - 1, j_2\}$, com autovalores m_1 e m_2 , respectivamente, todos autovetores também de a^2 e b^2 , com autovalores j_1 e j_2 , respectivamente.

Em tal base, os elementos de matriz

$$\begin{aligned} (A_i^{(j_1, j_2)})_{m_1, m_2; m'_1, m'_2} &= \langle \phi_{(j_1, j_2); m'_1, m'_2}, A_i^{(j_1, j_2)} \phi_{(j_1, j_2); m_1, m_2} \rangle, \text{ e} \\ (B_i^{(j_1, j_2)})_{m_1, m_2; m'_1, m'_2} &= \langle \phi_{(j_1, j_2); m'_1, m'_2}, B_i^{(j_1, j_2)} \phi_{(j_1, j_2); m_1, m_2} \rangle, \end{aligned}$$

dos operadores $A_i^{(j_1, j_2)}, B_i^{(j_1, j_2)} \in L(\mathcal{H}^{(j_1, j_2)})$, representando a_i e b_i em $SL(2, \mathbb{C})$ são dados por:

$$\begin{aligned} (A_i^{(j_1, j_2)})_{m_1, m_2; m'_1, m'_2} &= \delta_{m_2 m'_2} (L_i^{j_1})_{m_1 m'_1} \text{ e} \\ (B_i^{(j_1, j_2)})_{m_1, m_2; m'_1, m'_2} &= \delta_{m_1 m'_1} (L_i^{j_2})_{m_2 m'_2}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde $(L_i^j)_{mm'}$ são dados por (2.41).

Com tais matrizes é possível construir matrizes $L^{(j_1, j_2)}$ e $N^{(j_1, j_2)}$ através de (2.53), as quais representam l_i e n_i , e por fim obter representações $D^{(j_1, j_2)}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ por (2.51):

$$D^{(j_1, j_2)}(e^{i\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}} e^{i\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{l}}) = e^{i\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{N}^{(j_1, j_2)}} e^{i\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{L}^{(j_1, j_2)}}. \quad (2.55)$$

Mostra-se então que a equação acima determina sempre uma representação irredutível de dimensão finita de $SL(2, \mathbb{C})$ e que toda representação irredutível de dimensão finita de $SL(2, \mathbb{C})$ é equivalente à $D^{(j_1, j_2)}$ acima para algum par

³³De fato $sl(2)$ é a complexificação de $su(2)$ e o tratamento que estamos fazendo aqui é um caso particular do método conhecido como "Weyl Unitary Trick", o qual permite obter as representações irredutíveis de dimensão finita de grupos simples não compactos — nunca unitárias — a partir das representações de um grupo compacto, as quais são sempre unitárias, explorando o fato de que toda álgebra de um grupo de Lie complexo simples pode ser obtida como complexificação de uma única álgebra de Lie compacta (isto é: álgebra de Lie de um grupo compacto)[6], [35].

(j_1, j_2) de inteiros ou semi inteiros positivos.

É conveniente notar que $A_i^{(j_1, j_2)}$ e $B_i^{(j_1, j_2)}$ são auto-adjuntas e assim $L_i^{(j_1, j_2)}$ são auto-adjuntas enquanto $N^{(j_1, j_2)}$ são anti-hermitianas, de forma que apenas os operadores da forma $D^{(j_1, j_2)}(R = e^{i\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{1}})$ — que correspondem exatamente aos elementos de $SU(2) \subset SL(2, \mathbb{C})$ — são unitários, e portanto $D^{(j_1, j_2)}$ não são representações unitárias.³⁴

De particular interesse na descrição de partículas de spin $1/2$ ou semi-inteiro de maneira geral serão os casos $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$, para os quais obtemos explicitamente:

$$\begin{aligned} L_k^{(1/2, 0)} &= l_k = \sigma_k/2, & N_k^{(1/2, 0)} &= n_k = i\sigma_k/2; \\ L_k^{(0, 1/2)} &= l_k = \sigma_k/2, & N_k^{(0, 1/2)} &= n_k = -i\sigma_k/2; \end{aligned}$$

e portanto, nesses casos:

$$D^{(1/2, 0)}(X) = X, \quad D^{(0, 1/2)}(X) = (X^\dagger)^{-1}. \quad (2.56)$$

A relação entre $D^{(s, 0)}$ e $D^{(0, s)}$ em geral é obtida notando-se que $A^{(s, 0)} = B^{(0, s)} = L^s$ e $A^{(0, s)} = B^{(s, 0)} = 0$, e então $L^{(s, 0)} = L^{(0, s)} = L^s$ e $N^{(s, 0)} = -N^{(0, s)} = iL$, de forma que:

$$D^{(0, s)}(X) = D^{(s, 0)}((X^\dagger)^{-1}). \quad (2.57)$$

Note que para $U \in SU(2)$ temos $U^\dagger = U^{-1}$, e portanto $D^{(0, s)}|_{SU(2)}$ e $D^{(s, 0)}|_{SU(2)}$ são irredutíveis e equivalentes a representação D^s de $SU(2)$, dada em (2.42).

É conveniente notar ainda que o espaço $\mathcal{H}^{(j_1, j_2)}$ é naturalmente isomorfo à $\mathcal{H}^{(j_1, 0)} \otimes \mathcal{H}^{(0, j_2)}$ através de $\phi_{(j_1, j_2); m_1, m_2} \leftrightarrow \phi_{(j_1, 0); m_1, 0} \otimes \phi_{(0, j_2); 0, m_2}$, e que nesse contexto podemos escrever $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, dados em (2.54), como $A_k = L_k^{j_1} \otimes I_{j_2}$ e $B_k = I_{j_1} \otimes L_k^{j_2}$, de forma que os geradores $L_k^{(j_1, j_2)}$ do subgrupo de rotações

³⁴Esse é apenas um exemplo do fato mais geral que um grupo de Lie simples e não compacto não admite representações unitárias de dimensão finita além da trivial, e que no caso implicará que os espaços de Hilbert descrevendo sistemas quântico relativísticos tem sempre dimensão infinita. [6]

ficam:

$$L_k^{(j_1, j_2)} = L_k^{j_1} \otimes I_{j_2} + I_{j_1} \otimes L_k^{j_2}.$$

Assim, a partir de (2.43), conclui-se imediatamente que para o subgrupo unitário $SU(2)$:

$$D^{(j_1, j_2)}|_{SU(2)} \simeq D^{j_1} \otimes D^{j_2}. \quad (2.58)$$

Representações Irredutíveis de Dimensão Finita de $SO(1, 3)^\dagger$

Antes de discutirmos o processo de indução de representações, aproveitemos para explorar brevemente a estrutura de $SO(1, 3)^\dagger$, ao qual retornaremos com mais detalhes no capítulo 5, em sua conexão com $SL(2, \mathbb{C})$.

A álgebra de Lie $so(1, 3)$ de $SO(1, 3)^\dagger$ é gerada por vetores $M_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, satisfazendo a condição $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, e com produto de Lie dado por :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}. \quad (2.59)$$

Podemos considerar os seis $M_{\mu\nu}$ independentes $J_k = \varepsilon_{ijk}M_{ij}$ e $K_i = M_{0i}$, com $i, j = 1, 2, 3$ ³⁵, em termos dos quais podemos escrever os colchetes (2.59) como:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

.

³⁵Para os quais uma possível parametrização é dada explicitamente por:

$$\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= \varepsilon_{ijk} J_k, \\
[K_i, K_j] &= -\varepsilon_{ijk} J_k, \\
[J_i, K_j] &= \varepsilon_{ijk} K_k.
\end{aligned}$$

De onde vemos que associação $\phi : so(3, 1) \rightarrow sl(2, \mathbb{C})$ definida em termos das respectivas bases por $\phi(J_k) = il_k$ e $\phi(K_k) = in_k$ é um isomorfismo entre álgebras de Lie.

Pelos colchetes acima vemos imediatamente que os elementos J_i formam uma subálgebra, de forma que através da exponenciação obtemos um subgrupo $\{e^{\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{J}} | \theta \in \mathbb{R}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, ||\mathbf{y}|| = 1\} \subset SO(1, 3)^\dagger$, o qual facilmente vemos ser isomorfo ao grupo de rotações $SO(3)$, em particular, o elemento $e^{\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{J}}$ corresponde a uma rotação de um ângulo θ em torno do eixo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.

Note ainda que uma tal rotação R possui elementos de matriz $R_0^0 = 1$ e $R_i^0 = R_0^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, de tal forma que, agindo sobre um elemento ϕ_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3$ do espaço de Minkowski (veja capítulo 5), preserva sua componente temporal ϕ_0 .

Os elementos da forma $e^{\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}} \in SO(1, 3)^\dagger$, por sua vez, não formam um subgrupo.

Tais elementos misturam componentes espaciais ($\phi_i, i = 1, 2, 3$) com a componente temporal (ϕ_0) de um vetor ϕ no espaço de Minkowski, e constituem os chamados *boost*, que relacionam referenciais inerciais com velocidade relativa $\mathbf{v} = c \sinh \eta \mathbf{x}$.

Todo elemento $Y \in SO(1, 3)^\dagger$ pode também ser escrito como produto de um boost e uma rotação, isto é, na forma $Y = BR$ com $B = e^{\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}}$ e $R = e^{\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{J}}$, além disso, o mapa $\Phi : SL(2, \mathbb{C}) \Rightarrow SO(1, 3)^\dagger$ dado por:

$$\Phi(e^{i\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}} e^{i\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{l}}) = e^{\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}} e^{\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{J}}$$

é um homomorfismo com núcleo $\{\pm I\}$, o qual é uma cobertura 2:1³⁶.

³⁶Que de fato coincide com a cobertura que apresentaremos, por outros meios, no capítulo 5.

De maneira análoga ao caso $SU(2) = \widetilde{SO(3)}$, as representações $D^{(j_1, j_2)}$ dão origem à representações de $SO(3, 1)^\uparrow$ pela associação:

$$D'^{(j_1, j_2)}(Y = e^{\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}} e^{\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{J}}) = D^{(j_1, j_2)}(e^{i\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}} e^{i\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{l}}).$$

Tais representações são projetivas ou ordinárias conforme $D^{(j_1, j_2)}(-I)$ seja $-I$ ou I , respectivamente, o que ocorre, como é possível verificar usando $I = e^{i2\pi l_3} \in SU(2)$, além de (2.58) e (2.46), quando $j_1 + j_2$ é semi-inteiro ou inteiro, respectivamente.

A representação fundamental $D(Y) = Y$, $L \in SO(3, 1)^\uparrow$ em $\mathbb{C}^4$ é também nesse caso de grande importância nas aplicações que faremos e em analogia ao caso de $SO(3)$ é possível encontrar uma matriz de mudança de base C que diagonaliza simultaneamente J_3 e K_3 e para a qual se verifica ainda que $C^{-1}(J_k - iK_k)C = 2iA^{(1/2, 1/2)}$ e $C^{-1}(J_k + iK_k)C = 2B^{(1/2, 1/2)}$, estabelecendo que essa representação é irredutível e equivalente à $D'^{(1/2, 1/2)}$.

A utilidade de tal realização de $D^{(1/2, 1/2)}$ nas aplicações que faremos decorre do fato de que nela a decomposição de sua restrição ao subgrupo $SO(3)$ em irredutíveis: $D^{(1/2, 1/2)}|_{SU(2)} \simeq D^{1/2} \otimes D^{1/2} \simeq D^1 \oplus D^0$, seja evidente.

De fato, como uma rotação $R \in SO(3) \subset SO(1, 3)^\uparrow$ preserva a componente temporal ϕ_0 e age sobre as componentes espaciais ϕ_i , $i = 1, 2, 3$ como a representação fundamental de $SO(3)$.

É imediato então que os subespaços $\mathcal{H}_0$ formado por vetores da forma $\phi = (\phi_0, 0, 0, 0)$ e $\mathcal{H}_1$, formado por vetores com $\phi_0 = 0$, carregam as representações irredutíveis D^0 e D^1 de $SO(3)$, respectivamente.

Ainda seguindo nossa analogia com $SO(3)$, podemos considerar o produto tensorial de r representações fundamentais de $SO(1, 3)$ e após alguma elaboração seguindo um raciocínio análogo ao que fizemos naquele caso, é possível concluir que:

Proposição 2.17. *A representação $D(Y) = Y \otimes Y \otimes \dots \otimes Y$, (r fatores), $Y \in SO(1, 3)^\uparrow$ é irredutível e equivalente à $D^{(r, r)}$, quando restrita ao espaço de tensores totalmente simétricos de traço nulo relativos à $SO(1, 3)^\uparrow$.*

Também nesse caso os subespaços carregando as representações irredutíveis do subgrupo $SO(3)$ ficam evidentes, de fato, considerando a decomposição

$$D^{r,r}|_{SO(3)} \simeq D^{2r} \oplus D^{2r-1} \oplus \dots \oplus D^1 \oplus D^0,$$

é fácil ver, usando a proposição 2.16, que o subespaço dos tensores cuja única componente não nula é $\phi_{00\dots 0}$ carrega a irredutível D^0 , aqueles cujas componentes não nulas são da forma $\phi_{i0\dots 0} = \phi_{0i\dots 0} = \dots = \phi_{00\dots i}$, $i = 1, 2, 3$, carrega a irredutível D^1 e assim sucessivamente, de modo que o espaço carregando a irredutível de maior peso D^{2r} é formado por tensores cujas componentes não nulas são da forma $\phi_{i_1, i_2, \dots, i_r}$, $i_k = 1, 2, 3$, $k = 1, 2, \dots, r$.

Capítulo 3

Representações Induzidas

Nesse capítulo apresentamos a teoria das representações induzidas de grupos topológicos localmente compactos, proposta por Mackey em uma série de trabalhos publicados nas décadas de 40 e 50 (principalmente [32], [33] e [34]) e que remonta aos trabalhos de Frobenius ([11, 12, 13]), onde o termo representações induzida foi cunhado e explorado no contexto de grupos finitos.

O método desenvolvido por Frobenius foi aplicado a grupos contínuos somente 40 anos depois, em 1939, por Wigner, em seu famoso trabalho [62] na classificação das representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré, mais tarde por Bargmann [4], em 1947 e no mesmo ano por Gel'fand e Naimark [15], na construção de representações do grupo de Lorentz, e logo em 1950, por Gel'fand e Naimark [16], para obter representações unitárias irredutíveis dos Grupos de Lie complexos clássicos.

Os trabalhos de Mackey forneceram uma base sólida para a teoria das representações induzidas, que incluiu não só a construção no contexto geral de grupos topológicos localmente compactos, mas a demonstração de uma série de propriedades associadas às representações induzidas, destacando-se o fundamental Teorema da Imprimitividade.

No contexto geral da teoria das representações, a teoria das representações induzidas tem importância fundamental pois permite obter representações unitárias, em alguns casos irredutíveis, de grupos que não são finitos nem compactos, a partir de representações de subgrupos fechados. De fato, como

veremos, para uma certa classe, que inclui vários grupos de interesse na física, a teoria garante que todas as representações unitárias irredutíveis podem ser obtidas pelo método.

Os resultados propostos por Mackey, Gel'fand e Naimark estimularam o desenvolvimento da teoria das representações de grupos de Lie e suas aplicações nas teorias quânticas relativistas, em particular o método foi aplicado em vários grupos concretos como os grupos de movimentos dos espaços de Minkowski e Euclidiano n -dimensionais, $SL(n, \mathbb{R})$, $SU(p, q)$.

No que se segue apresentamos a construção geral e algumas de suas propriedades e formulações alternativas e então especializamos o método para produtos semi-diretos regulares, desenvolvimento que aplicaremos no capítulo seguinte para obter as representações unitárias irredutíveis de $SL(2, \mathbb{C})$, as quais, como veremos no capítulo 4, tem direta conexão com a definição de partícula elementar nas teorias quânticas de campo.

3.1 Construção das Representações Induzidas

Seja G um grupo topológico separável e localmente compacto e K um subgrupo fechado de G , de tal forma que podemos formar o espaço homogêneo (veja apêndice B) dos cosets à direita¹ $X = K \backslash G = \{Kg, g \in G\}$ e denotemos por $g \mapsto \pi(g) = Kg$ a projeção canônica de G em X .

Lembremos que X , enquanto espaço homogêneo, é também um G -espaço transitivo, com a ação definida por:

$$xg = \pi(sg), \quad g, s \in G, \quad x = \pi(s). \quad (3.1)$$

Sabemos que X possui uma classe de medidas quase-invariantes² sob esta ação.

¹Onde usamos a notação $K \backslash G$ para denotar o conjunto de cosets de G com respeito a K , como explicitado no texto. A diferença entre conjunto K e G , usualmente denotada desta forma, será escrita como $K - G$.

²Que são medidas cujos conjuntos de medida nula são invariantes, isto é: $\mu(E) = 0 \Leftrightarrow \mu(Eg) = 0$, para todo $g \in G$.

Para teoria da medida em espaços homogêneos veja, por exemplo, [42] ou [14].

Seja μ uma medida dessa classe e seja $L : K \rightarrow \mathcal{U}(\mathcal{H})$ uma representação unitária de K no espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$, onde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ é o conjunto de operadores unitários em $\mathcal{H}$.

Com esses ingredientes construímos o seguinte espaço:

Definição 3.1. O espaço $\mathcal{H}^L$ que carrega a representação do grupo G induzida pela representação L do subgrupo K é o espaço das funções $f : G \rightarrow \mathcal{H}$ satisfazendo:

1. $f(g)$ é fracamente mensurável, isto é: $g \rightarrow \langle f(g), v \rangle_{\mathcal{H}}$ é mensurável para todo $v \in \mathcal{H}$;
2. $f(kg) = L(k)f(g)$ para todo $k \in K$ e todo $g \in G$;
3. $\int_X \|f\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu < \infty$;

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ denotam, respectivamente, o produto escalar e a norma em $\mathcal{H}$.

Antes de verificarmos que $\mathcal{H}^L$ é de fato um espaço de Hilbert, verifiquemos que a integral em 3. está bem definida: notemos que, devido a condição 2. e a unitariedade de L , $\|f(g)\|$ só depende do coset $\pi(g)$ podendo então ser entendida como função em X .

De fato, para $k \in K$:

$$\|f(kg)\| = \|L(k)f(g)\| = \|f(g)\|.$$

Além disso, para ver que $\|f(g)\|$ é mensurável notamos que a condição 1. nos diz que $\Phi \mapsto \langle f(g), \Phi \rangle$ é um funcional linear contínuo em $\mathcal{H}$, e portanto sua norma é dada por:

$$\|f(g)\| = \sup_{\|v\| \leq 1} |\langle f(g), v \rangle|.$$

Como $\mathcal{H}$ é separável, existe uma sequência $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos em $\mathcal{H}$ com $\|v_n\| \leq 1$ e densa na bola unitária. Assim, $\|f(g)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\langle f(g), v_n \rangle|$.

Como cada função $|\langle f(g), v_n \rangle|$ é mensurável e o limite superior de uma sequência de funções mensuráveis é mensurável, segue que $\|f(g)\|$ é mensurável como função de g e portanto como função de $\pi(g)$.

Dessa forma a integral em 3. faz sentido e entende-se que enquanto o argumento da integral percorre o espaço X , $\|f(g)\|$ é calculado em representantes dos respectivos cosets.

Estando então bem definido o espaço $\mathcal{H}^L$, passemos a mostrar que:

Proposição 3.1. *O espaço $\mathcal{H}^L$, com a identificação de funções iguais em μ -quase toda parte (μ -q.t.p.), é um espaço de Hilbert com produto escalar dado por:*

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{H}^L} = \int_X \langle f_1(g), f_2(g) \rangle_{\mathcal{H}} d\mu(\pi(g)). \quad (3.2)$$

Demonstração. Antes de mais nada comentemos que, como f_1 e f_2 pertencem a $\mathcal{H}^L$ o produto escalar $\langle f_1(g), f_2(g) \rangle_{\mathcal{H}}$ só depende do coset a qual g pertence e podemos dar sentido a integral na definição acima de maneira análoga à que fizemos para a integral na condição 3. da definição 3.1. De fato, com o produto acima, aquela integral é simplesmente $\|f(g)\|_{\mathcal{H}^L}^2$.

Mostremos então que $\mathcal{H}^L$ é um espaço vetorial: facilmente se nota que $\lambda f \in \mathcal{H}^L$ sempre que $f \in \mathcal{H}^L$, ainda, se $f_1, f_2 \in \mathcal{H}^L$, então $f_1 + f_2$ claramente satisfaz 1. e 2., que também satisfaz 3., decorre da desigualdade ³:

$$\|f_1(g) + f_2(g)\|^2 \leq 2(\|f_1(g)\|^2 + \|f_2(g)\|^2).$$

Logo $\mathcal{H}^L$ é um espaço vetorial. Vejamos agora que a integral em (3.2) está bem definida e possui valor finito.

Da identidade:⁴

$$\begin{aligned} \langle f_1(g), f_2(g) \rangle &= \|f_1(g) + f_2(g)\|^2 - \|f_1(g) - f_2(g)\|^2 + \\ &+ i \|f_1(g) + i f_2(g)\|^2 - i \|f_1(g) - i f_2(g)\|^2, \end{aligned}$$

decorre que a função $g \mapsto \langle f_1(g), f_2(g) \rangle_{\mathcal{H}}$ é mensurável enquanto função de g .

³A qual advém da identidade do paralelogramo

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2),$$

satisfeita por qualquer norma associada a um produto escalar, e cuja demonstração, assim como as das relações nas duas notas seguintes, pode ser encontrada, por exemplo, em [2] ou [49].

⁴Chamada identidade de polarização e satisfeita por todo produto escalar complexo.

Ainda, como:

$$\langle f_1(kg), f_2(kg) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle L(k)f_1(g), L(k)f_2(g) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f_1(g), f_2(g) \rangle_{\mathcal{H}},$$

segue sua mensurabilidade enquanto entendida como função do coset $\pi(g)$. O fato dessa função ser quadrado-integrável decorre da desigualdade de Schwarz:

$$|\langle f_1(g), f_2(g) \rangle|^2 \leq \|f_1(g)\| \|f_2(g)\|$$

e da desigualdade de Hölder⁵, que implica que $\|f_1(g)\| \|f_2(g)\|$ será quadrado-integrável se $\|f_1(g)\|^2$ e $\|f_2(g)\|^2$ o forem.

Assim, a forma (3.2) está bem definida, as propriedades que fazem dela um produto escalar em $\mathcal{H}^L$ decorrem das propriedades do produto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ em $\mathcal{H}$, exceto pela positividade, uma vez que:

$$\|f(g)\|_{\mathcal{H}^L}^2 = \langle f(g), f(g) \rangle_{\mathcal{H}} = 0$$

para qualquer função nula μ -q.t.p.

Fazemos então o produto positivo identificando tais funções à função identicamente nula, ou equivalentemente, identificando funções iguais μ -q.t.p.

A completeza de $\mathcal{H}^L$ com relação ao produto (3.2) pode ser demonstrada [58] fazendo-se pequenas alterações na prova da completeza dos espaços de funções quadrado-integráveis em espaços de medida, caso particular do teorema de Riesz-Fischer, que pode ser encontrada em [2] ou [49], por exemplo.

□

Assim construído o espaço $\mathcal{H}^L$, nada garante que existam nele funções não identicamente nulas, essa questão é tratada em [6], [33] ou [58] por exemplo, onde é mostrado que, a cada função contínua $t: G \rightarrow \mathcal{H}$, com

5

$$\left| \int_V f(x)g(x)dx \right| \leq \left(\int_V |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_V |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Válida para quaisquer $f \in L^p(X, dx, \mathbb{R})$, $g \in L^q(X, dx, \mathbb{R})$ e $V \subset X$ subconjunto de Borel, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. No caso aplicada para $p = q = 2$.

suporte compacto, podemos associar a função $t'(g) = \int_K L_k^{-1} t(kg) dk$ (onde dk é a medida de Haar invariante a direita em K), que pertence por sua vez a $\mathcal{H}^L$. Mostra-se ainda que o conjunto $C_0^L = \{t'(g) : t(g) = \lambda(g)v, \lambda(g) \in C_0(G), v \in \mathcal{H}\}$ é denso em $\mathcal{H}^L$.

Antes de passar à construção das representações induzidas em si, mencionemos algumas propriedades de medidas no espaço X .

Todo espaço homogêneo possui uma única classe de medidas quase-invariantes, ou seja, todas as medidas quase-invariantes em X são equivalentes⁶ e toda medida equivalente a uma medida quase-invariante é também quase-invariante.

Assim, o teorema de Radon-Nikodym é aplicável a qualquer par de medidas da classe.

Em particular, se μ é uma medida quase-invariante, então $\mu^g(E) := \mu(Eg)$ é também uma medida que, pela própria definição de quase-invariância, tem os mesmos conjuntos de medida nula, sendo portanto também uma medida da classe, de forma que:

$$d\mu^g = (d\mu^g/d\mu)d\mu,$$

onde $d\mu^g(x)/d\mu(x) =: \rho_g(x)$, a derivada de Radon-Nikodym, é uma função de Borel que satisfaz a lei de composição

$$\rho_{g_1 g_2}(x) = \frac{d\mu(xg_1 g_2)}{d\mu(x)} = \frac{d\mu(xg_1)}{d\mu(x)} \frac{d\mu(xg_1 g_2)}{d\mu(xg_1)} = \rho_{g_1}(x) \rho_{g_2}(xg_1). \quad (3.3)$$

De posse desses conceitos, temos então:

Proposição 3.2. *A transformação $g \mapsto U_g^L$ dada por:*

$$U_g^L f(s) = \sqrt{\rho_g(\pi(s))} L(s) f(g) = \sqrt{\rho_g(\pi(s))} f(sg) \quad (3.4)$$

define uma representação unitária de G em $\mathcal{H}^L$, denominada representação de G induzida por L .

⁶Possuem os mesmos conjuntos de medida nula.

Demonstração. Começemos mostrando que $U_g^L f$ pertence a $\mathcal{H}^L$: claramente $U_g^L f$ satisfaz 1. e 2. da definição 3.1, ainda:

$$\begin{aligned}
\|U_g^L f(s)\|_{\mathcal{H}^L}^2 &= \int_X \|U_g^L f(s)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(\pi(s)) \\
&= \int_X \rho_g(\pi(s)) \|f(sg)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(\pi(s)) \\
&= \int_X \|f(sg)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(\pi(s)g) \\
&= \int_X \|f(s)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(\pi(s)) \\
&= \|f(s)\|_{\mathcal{H}^L}^2 < \infty,
\end{aligned}$$

de modo que $U_g^L f \in \mathcal{H}^L$, e além disso, a igualdade acima também nos diz que U_g^L são operadores isométricos em $\mathcal{H}^L$.

O mapa $g \mapsto U_g^L$ é também um homomorfismo de G nos automorfismos de $\mathcal{H}^L$:

$$\begin{aligned}
[U_{g_1}^L U_{g_2}^L f](s) &= \sqrt{\rho_{g_1}(\pi(s))} [U_{g_2}^L f](sg_1) \\
&= \sqrt{\rho_{g_1}(\pi(s)) \rho_{g_2}(\pi(sg_1))} f(sg_1g_2) \\
&\stackrel{(3.3)}{=} \sqrt{\rho_{g_1g_2}(\pi(s))} f(sg_1g_2) \\
&= U_{g_1g_2}^L f(s),
\end{aligned}$$

o que mostra também que U_g^L são inversíveis, e sendo isometrias, concluímos que o mapa $g \mapsto U_g^L$ é uma representação unitária de G .

No que diz respeito à continuidade, notemos que em:

$$\langle U_g^L f_1, f_2 \rangle_{\mathcal{H}^L} = \int_X \sqrt{\rho_g(\pi(s))} \langle f_1(sg), f_2(s) \rangle_{\mathcal{H}} d\mu(\pi(s))$$

o integrando no lado direito é mensurável em ambas as variáveis e integrável em s , e portanto o lado direito é função mensurável de g . Ou seja, a representação $g \mapsto U_g^L$ é fracamente mensurável, e assim, pela proposição 2.3, é fortemente

contínua. □

Se K é o subgrupo contendo apenas a identidade, então U^L é simplesmente a representação regular a direita de G . Se L é uma representação uni-dimensional de K , U^L é chamada de *representação monomial*, as representações monomiais tem enorme importância na teoria das representações dos grupos de Lie complexos clássicos e de grupos nilpotentes [58].

Antes de passarmos à reformulação da teoria em espaços mais adequados às aplicações em que estaremos interessados, vejamos brevemente algumas propriedades básicas das representações induzidas que nos serão úteis. O leitor interessado em aprofundar-se na compreensão da teoria pode remeter-se às fontes citadas ao longo do capítulo.

3.1.1 Independência da escolha da medida

Pelo que vimos até então, para construirmos representações induzidas em G temos que escolher uma medida quase-invariante no espaço dos cosets X , no entanto, o resultado a seguir nos mostra que, a menos de uma equivalência, a representação induzida é independente da medida quase-invariante escolhida.

Proposição 3.3. *Se ${}^\mu\mathcal{H}^L$ e ${}^\nu\mathcal{H}^L$ são os espaços construídos conforme a definição 3.1 a partir das medidas quase-invariantes μ e ν em X , então as respectivas representações unitárias induzidas ${}^\mu U_g^L$ e ${}^\nu U_g^L$ são unitariamente equivalentes.*

Demonstração. Sabemos que μ e ν são medidas equivalentes, seja ψ o derivada de Radon-Nikodym de μ com respeito a ν e $\pi: g \mapsto Kg$ a projeção canônica de G em $K \backslash G$. Então, dado $u \in {}^\mu\mathcal{H}^L$, a função $v = \sqrt{\psi \circ \pi} u$ claramente pertence a ${}^\nu\mathcal{H}^L$ e toda função em ${}^\nu\mathcal{H}^L$ é desta forma para alguma $u \in {}^\mu\mathcal{H}^L$.

Como ainda $\|u(s)\|_{\mu_{HL}} = \|v(s)\|_{\nu_{HL}}$, o mapa $V: u \mapsto \sqrt{\psi \circ \pi} u$ é um operador unitário de ${}^\mu\mathcal{H}^L$ em ${}^\nu\mathcal{H}^L$. Além disso, de $d\mu = \psi d\nu$ temos:

$$\rho_g^\mu(x) = \frac{d\mu(xg)}{d\mu(x)} = \frac{d\nu(xg)}{d\nu(x)} \frac{\psi(xg)}{\psi(g)} = \rho_g^\nu(x) \frac{\psi(xg)}{\psi(g)}$$

E conseqüentemente:

$$\begin{aligned}
V^{-1}({}^\nu U_g^L)Vu(s) &= V^{-1}({}^\nu U_g^L)\sqrt{\psi(\pi(s))}u(s) \\
&= V^{-1}\sqrt{\rho_g^\nu(\pi(s))}\sqrt{\psi(\pi(s)g)}u(sg) \\
&= \sqrt{\rho_g^\nu(\pi(s))\frac{\psi(\pi(s)g)}{\psi(\pi(s))}}u(sg) \\
&= \sqrt{\rho_g^\mu(\pi(s))}u(sg) \\
&= {}^\mu U_g^L u(s),
\end{aligned}$$

de modo que $V^{-1}({}^\nu U_g^L)V = {}^\mu U_g^L$ para todo $g \in G$, completando a prova. $\square$

Uma vez que não distinguiremos entre representações unitariamente equivalentes, a proposição acima justifica a ausência do índice μ nas notações $\mathcal{H}^L$ e U_g^L .

3.1.2 Representações induzidas por Somas Diretas

No caso em que a representação L de K é uma soma direta de sub-representações, ou seja, L é redutível, podemos mostrar que a representação induzida U_L é também redutível. De fato, pode-se mostrar que os processos de construção de soma direta de representações comuta com o processo de indução.

Explicitamente, sejam L_1 e L_2 representações unitárias de K (subgrupo fechado de G), nos espaços de Hilbert separáveis $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente, e seja $L_1 \oplus L_2$ sua soma direta, a qual sabemos ser uma representação unitária de K em $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Então, o espaço $\mathcal{H}^{L_1 \oplus L_2}$ é constituído de funções vetoriais $(u_1(g), u_2(g))$ satisfazendo 1., 2. e 3. da definição 3.1 com relação ao produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}$, à representação $L_1 \oplus L_2$ e à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2}$, respectivamente.

Usando a definição do produto em $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$:

$$\langle (u_1, u_2), (v_1, v_2) \rangle_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2} = \langle u_1, v_1 \rangle_{\mathcal{H}_1} + \langle u_2, v_2 \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

e da representação $L_1 \oplus L_2$:

$$[L_1 \oplus L_2](k)(u_1, u_2)(g) = (L_1(k)u_1, L_2(k)u_2)(g).$$

É fácil ver que cada $u_i, i = 1, 2$ satisfaz 1., 2. e 3. da definição 3.1 com relação ao produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_i}$, à representação L_i e à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i}$, respectivamente. Ou seja, $u_i \in \mathcal{H}^{L_i}$. Pelo mesmo raciocínio se conclui a recíproca, isto é: $u_i \in \mathcal{H}^{L_i} \Rightarrow (u_1, u_2) \in \mathcal{H}^{L_1 \oplus L_2}$, e assim:

$$\mathcal{H}^{L_1 \oplus L_2} = \mathcal{H}^{L_1} \oplus \mathcal{H}^{L_2}.$$

Observando a definição (3.4), temos ainda:

$$U^{L_1 \oplus L_2} = U^{L_1} \oplus U^{L_2}.$$

Ou seja, as operações de soma direta e de indução de representações são intercambiáveis. O resultado acima pode facilmente ser estendido para o caso em que L é uma soma finita ou contável de representações, e então temos:

Proposição 3.4 (Representação induzida a partir de Soma Direta). *Sejam $L_i, i \in N \subset \mathbb{N}$ representações unitárias de K em $\mathcal{H}_i$ e $\bigoplus_{i \in N} L_i$ sua soma direta, que é uma representação unitária de K em $\bigoplus_{i \in N} \mathcal{H}_i$. Denotando por $\mathcal{H}^J$ o espaço construído segundo a definição 3.1 a partir da representação J de K e por U^J a representação induzida (3.4) nesse espaço, temos:*

$$\mathcal{H}^{\bigoplus_{i \in N} L_i} = \bigoplus_{i \in N} \mathcal{H}^{L_i} \quad (3.5)$$

e ainda:

$$U^{\bigoplus_{i \in N} L_i} = \bigoplus_{i \in N} U^{L_i}. \quad (3.6)$$

Devemos mencionar por completeza que é possível uma generalização para o caso em que L é uma integral direta de representações L_s em $\mathcal{H}_s$, com o índice s percorrendo um espaço mensurável S no qual μ é uma medida.

Nesse caso o resultado é dado por:

$$\mathcal{H}^{\int_S L_s d\mu(s)} = \int_S \mathcal{H}^{L_s} d\mu(s).$$

A demonstração pode ser encontrada por exemplo em [33], nas aplicações de que trataremos o resultado como apresentado na proposição acima será suficiente.

Um corolário imediato da proposição acima é que U^L não pode ser irreduzível a menos que L o seja.

A recíproca dessa afirmação, ou seja, que a irreduzibilidade de L implica na de U^L , é em geral falsa como facilmente se vê tomando $K = \{e\}$ e L a representação trivial, no caso irreduzível, então U^L é a representação regular de G , na maioria dos casos reduzível.

O caso em que L é reduzível será de grande importância na obtenção das equações de onda que descrevem partículas elementares, que veremos mais tarde representarem projeções sobre espaços invariantes de representações reduzíveis.

Seguindo um raciocínio análogo ao feito nessa subseção pode se mostrar que o processo de indução também é intercambiável com a construção do produto tensorial de representações e com a operação de conjugação. Esses resultados podem ser encontrados por exemplo em [6] ou [35], e serão implicitamente usados no capítulo 6.

3.1.3 Sistemas de Imprimitividade

Seja G um grupo localmente compacto e separável, K um subgrupo fechado, L uma representação unitária de K num espaço de Hilbert separável e U^L a representação induzida de G no espaço $\mathcal{H}^L$, conforme a construção acima.

Consideremos um conjunto de Borel E em $X = K \backslash G$ e sua função característica φ_E , isto é

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}.$$

Definamos em $\mathcal{H}^L$ o operador P_E que leva $f \in \mathcal{H}^L$ em $P_E f$ dado por:

$$[P_E f](g) := \varphi_E(\pi(g))f(g), \quad (3.7)$$

onde $\pi(g) = Kg$ é a projeção canônica de G em $X = K \backslash G$ como de costume.

Levando em consideração que φ_E e π são mensuráveis em X e G , respectivamente, e que $f(g)$ é fracamente mensurável, concluímos que $P_E f$ também é fracamente mensurável. Além disso, como $\pi(kg) = \pi(g)$ e $f(kg) = L(k)f(g)$ concluímos que $[P_E f](kg) = L(k)[P_E f](g)$.

Por fim, notando que $\varphi_E^2(x) = \varphi_E(x)$, e logo $P_E^2 = P_E$, temos:

$$\begin{aligned} \|P_E f\|_{\mathcal{H}^L}^2 &= \int_X \|\varphi_E(\pi(g))f(g)\|_H^2 d\mu(\pi(g)) \\ &= \int_X \varphi_E(\pi(g))\|f(g)\|_H^2 d\mu(\pi(g)) \\ &= \int_X \|f(g)\|_H^2 d\mu(\pi(g)) \\ &\leq \int_X \|f(g)\|_H^2 d\mu(\pi(g)) = \|f\|_{\mathcal{H}^L}^2. \end{aligned}$$

Das observações acima vemos que $P_E f \in \mathcal{H}^L$ e que P_E é idempotente e tem norma menor que 1 em $\mathcal{H}^L$, e é portanto um operador de projeção nesse espaço.

Das propriedades análogas satisfeitas por φ_E , vemos que a função $E \mapsto P_E$ satisfaz:

- (a) $P_\emptyset = 0$, $P_X = id$.
- (b) $P_{E \cap F} = P_E P_F$, para quaisquer E e F .
- (c) $P_E = P_{E_1} + P_{E_2} + \dots$, sempre que $E = E_1 + E_2 + \dots$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$.

Ou seja, $E \mapsto P_E$ é uma medida com valores em projeções, essa função operatorial possui uma importante propriedade quanto à sua transformação sob a representação U^L :

$$U_g^L P_E U_{g^{-1}}^L = P_{Eg^{-1}}. \quad (3.8)$$

De fato, usando (3.4) e a definição (3.7) de P_E , e notando que, para $g \in G$ fixo, $\varphi_E(xg) = \varphi_{Eg^{-1}}(x)$, temos, com $x = \pi(s)$:

$$\begin{aligned} [U_g^L P_E U_{g^{-1}}^L f](s) &= \sqrt{\rho_g(x)} [P_E U_{g^{-1}}^L f](sg) \\ &= \sqrt{\rho_g(x) \varphi_E(xg)} [U_{g^{-1}}^L f](sg) \\ &= \sqrt{\rho_g(x) \rho_{g^{-1}}(xg) \varphi_{Eg^{-1}}(x)} f(s) \\ &\stackrel{(3.3)}{=} \varphi_{Eg^{-1}}(x) f(s) \\ &= [P_{Eg^{-1}} f](s). \end{aligned}$$

De maneira geral, se U é uma representação unitária de um grupo topológico G em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e X é um G -espaço de Borel, dizemos que uma medida com valores em projeções $P: X \supset E \mapsto P_E \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ que satisfaz (3.8) é um *sistema de imprimitividade para U baseado em X* .

Se a ação de G em X é transitiva dizemos que P é um *sistema de imprimitividade transitivo*, como lidaremos apenas com esse caso, omitiremos tal designação, subentendo-se que todo sistema de imprimitividade mencionado é transitivo.

Uma representação que admite ao menos um sistema de imprimitividade é dita *imprimitiva*.

Pelo que vimos então, toda representação induzida U^L é naturalmente imprimitiva, o sistema de imprimitividade P associado à U^L dado por (3.7) é chamado *sistema de imprimitividade canônico*.

A grande importância do sistema de imprimitividade associado a uma representação imprimitiva U qualquer é que ele essencialmente determina sua estrutura como representação induzida, esse resultado pode ser enunciado da seguinte forma.

Teorema 3.1 (Teorema da Imprimitividade). *Seja K um subgrupo fechado de um grupo topológico separável e localmente compacto G e sejam U uma*

representação unitária de G no espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$ e P um sistema de imprimitividade para U baseado no G -espaço transitivo $X = K \backslash G$.

Então, existe uma representação unitária L de K e um operador unitário W de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}^L$ tal que:

$$\begin{aligned} WU_gW^{-1} &= U_g^L, & \text{para todo } x \in G; \\ WP_EW^{-1} &= P_E^L, & \text{para todo conjunto de Borel } E \subset X; \end{aligned}$$

onde U^L é a representação de G em $\mathcal{H}^L$ induzida por L e P^L é o sistema de imprimitividade canônico associado. A classe de equivalência de L é unicamente determinada pelo par (U, P) e a álgebra comutante $\mathfrak{R}(L, L)$ de L é isomorfa à sub-álgebra de $\mathfrak{R}(U, U)$ formada por operadores T que comutam com P_E para todo conjunto de Borel $E \subset X$.

A formulação apresentada acima remete à [35], sua prova está além do nosso escopo e pode ser encontrada nos trabalhos de Mackey [33] e [32] ou em [56], ou ainda, via outra abordagem, em [6].

O estudo dos sistemas de imprimitividade constituem a maior parte do trabalho de Mackey na teoria das representações induzidas, o teorema acima é de fato o pilar que sustenta suas aplicações.

Fazendo uso dele e de mais alguns axiomas pode-se construir uma descrição da mecânica quântica em acordo com a proposta por von Neumann. Em particular, a equação de Schödinger pode ser obtida seguindo um procedimento análogo ao que seguiremos adiante para obter as equações que descrevem partículas elementares num contexto relativista, impondo-se invariância de observáveis físicos por transformações de Galileu ao invés de por transformações de Poincaré, e o teorema acima pode ainda ser usado para garantir a equivalência entre as descrições de Schödinger e Heisenberg da mecânica quântica.

O leitor interessado em tais desenvolvimentos deve procurar as referências citadas acima, sobretudo [56] e [35], para um desenvolvimento mais extenso, ou [6] para uma abordagem mais concisa.

O teorema nos mostra que representações imprimitivas baseadas em espa-

ços de cosets são sempre equivalentes a representações induzidas, mais adiante veremos que ele garante que para uma certa classe de grupos — a qual inclui o grupo de Poincaré — toda representação irredutível e unitária pode ser obtida por indução.

Tendo apresentado a construção em linhas gerais e algumas de suas principais propriedades, passamos agora a apresentar duas formulações alternativas, mais adequadas às aplicações em que estamos interessados.

3.2 Formulação em $\mathcal{M} = L^2(X, \mu, \mathcal{H})$

Nessa seção mostramos que o espaço $\mathcal{H}^L$ é isomorfo ao espaço $L^2(X, \mu, \mathcal{H})$ das funções de X em $\mathcal{H}$ quadrado integráveis com relação à medida μ , e passamos então à formulação das representações induzidas diretamente nesse espaço, a qual, além de servir para elucidar características importantes do espaço $\mathcal{H}^L$ e das funções que nele habitam, é essencial em aplicações.

Na física de partículas, por exemplo, estamos interessados em representações da cobertura da componente conexa grupo de Poincaré $\widetilde{P}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2)$ no espaço de funções com domínio no hiperboloide $p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = m^2 > 0$, o qual identificamos (veja apêndice B), com o espaço quociente $\widetilde{P}_+^\uparrow / K$, onde $K = \mathbb{R}^4 \rtimes SU(2)$.

A identificação entre os espaços $\mathcal{H}^L$ e $\mathcal{M} = L^2(X, \mu, \mathcal{H})$ é feita explorando-se o fato de que uma função $f \in \mathcal{H}^L$, por satisfazer 2. da definição 3.1, é completamente determinada por seus valores em um único elemento de cada coset de $X = K \backslash G$ (e pela representação L), estando assim associada uma função ϕ com domínio em X , cuja quadrado integrabilidade é equivalente ao fato de f satisfazer 1. e 3.

Explicitamente, assumamos a existência de uma seção contínua⁷ $\sigma: X \mapsto G$, que por definição satisfaz $\pi \circ \sigma = id$, associando a cada coset um representante, e passemos a mostrar que:

Proposição 3.5. $\mathcal{H}^L$ e $\mathcal{M} = L^2(X, \mu, \mathcal{H})$ são isomorfos, com isomorfismo

⁷A existência de seções de Borel no caso de G ser separável e localmente compacto foi mostrada em [34], para um grupos de Lie G agindo em espaços homogêneos X é possível garantir a existência de seções suaves locais [29, 28].

dado pela transformação Υ que associa $f \in \mathcal{H}^L$ à função $\phi(x) = (\Upsilon f)(x) = f(\sigma(x))$, conforme o diagrama abaixo.

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{f} & \mathcal{H}^L \\
 \pi \swarrow & & \nearrow \phi \\
 & X = K \backslash G &
 \end{array}$$

Demonstração. Começemos por mostrar que ϕ pertence a $\mathcal{M}$, para isso notemos que, pela condição 1. da definição 3.1, $\langle \phi(x), v \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f(\sigma(x)), v \rangle_{\mathcal{H}}$ é mensurável em X . Em particular, $\|\phi(x)\|_{\mathcal{H}}^2$ é mensurável e temos:

$$\int_X \|\phi(x)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(x) = \int_X \|f(g)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(\pi(g)) = \|f\|_{\mathcal{H}^L}^2 < \infty. \quad (3.9)$$

Como o integral do lado esquerdo é simplesmente $\|\phi\|_M^2$, a relação acima, além de mostrar que ϕ é quadrado integrável, nos diz que Υ é uma isometria.

Claramente a transformação é também linear. Para mostrar que é sobrejetora, construamos sua inversa: denotando por $x = \pi(g)$ o coset associado a um elemento $g \in G$, observemos que a função f pode ser recuperada por:

$$f(g) = f(g\sigma^{-1}(x)\sigma(x)) = L(g\sigma^{-1}(x))f(\sigma(x)) = L(g\sigma^{-1}(x))\phi(x), \quad (3.10)$$

onde na segunda passagem fizemos uso do fato que $\sigma(x)$ pertence ao mesmo coset que g , isto é $g\sigma^{-1}(x) \in K$, e da condição 2. da definição 3.1.

A relação acima mostra que a transformação $\Lambda: \mathcal{M} \mapsto \mathcal{H}^L$ dada por $\Lambda\phi(g) = L(g\sigma^{-1}(\pi(g)))\phi(\pi(g))$ satisfaz $\Lambda \circ \Upsilon = I$, para mostrar que ela é de fato inversa de Υ , verifiquemos que $\Upsilon \circ \Lambda = id$:

$$\begin{aligned}
(\Upsilon \circ \Lambda \phi)(x) &= \Upsilon[L(x\sigma^{-1}(\pi(x)))\phi(\pi(x))] \\
&= L(\sigma(x)\sigma^{-1}(\pi(\sigma(x))))\phi(\pi(\sigma(x))) \\
&= L(\sigma(x)\sigma^{-1}(x))\phi(x) \\
&= L(e)\phi(x) \\
&= \phi(x).
\end{aligned}$$

Mostrando que Υ é um isomorfismo. □

Tendo em vista a relação (3.10) é natural que se defina as representações induzidas V_g^L em $\mathcal{M}$ por:

$$U_g^L f(s) = L(s\sigma^{-1}(x))(V_g^L \phi)(x), \text{ onde } x = \pi(s),$$

onde para o lado direito, usando (3.4) e (3.10), temos:

$$\begin{aligned}
U_g^L f(s) &= \sqrt{\rho_g(x)} f(sg) \\
&= \sqrt{\rho_g(x)} L(sg\sigma^{-1}(\pi(sg)))\phi(\pi(sg)) \\
&\stackrel{(3.1)}{=} \sqrt{\rho_g(x)} L(s\sigma^{-1}(x)\sigma(x)g\sigma^{-1}(xg))\phi(xg) \\
&= \sqrt{\rho_g(x)} L(s\sigma^{-1}(x)) \underbrace{L(\sigma(x)g\sigma^{-1}(xg))}_{\in K} \phi(xg).
\end{aligned}$$

Comparando, obtemos a transformação em $\mathcal{M}$:

$$(V_g^L \phi)(x) = \sqrt{\rho_g(x)} L(\sigma(x)g\sigma^{-1}(xg))\phi(xg), \quad (3.11)$$

para a qual temos:

Proposição 3.6. *A transformação que associa g à V_g^L dada pela relação (3.11) acima é uma representação unitária de G em $\mathcal{M} = L^2(X, \mu, \mathcal{H})$.*

Demonstração. Primeiramente observemos que $V_g^L \phi \in \mathcal{M}$ sempre que $\phi \in \mathcal{M}$, claramente $V_g^L \phi$ é uma função de X em $\mathcal{H}$, quanto a sua quadrado-integrabilidade com respeito a μ temos:

$$\begin{aligned}
 \|V_g^L \phi\|_M^2 &= \int_X \|V_g^L \phi(x)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(x) \\
 &= \int_X \left\| \sqrt{\rho_g(x)} L(\sigma(x)g\sigma^{-1}(xg))\phi(xg) \right\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(x) \\
 &= \int_X \|\phi(xg)\|_{\mathcal{H}}^2 \rho_g(x) d\mu(x) \\
 &= \int_X \|\phi(xg)\|_{\mathcal{H}}^2 d\mu(xg) \\
 &= \|\phi\|_M^2 < \infty,
 \end{aligned}$$

mostrando que $V_g^L \phi \in \mathcal{M}$ e que V_g^L é uma isometria, verifiquemos que $g \mapsto V_g^L$ é homomorfismo de G em $AUT(\mathcal{M})$:

$$\begin{aligned}
 [V_{g_1}^L V_{g_2}^L \phi](x) &= \sqrt{\rho_{g_1}(x)} L(\sigma(x)g_1\sigma^{-1}(xg_1)) [V_{g_2}^L \phi](xg_1) \\
 &= \sqrt{\rho_{g_1}(x) \rho_{g_2}(xg_1)} L(\sigma(x)g_1\sigma^{-1}(xg_1)) \\
 &\quad L(\sigma(xg_1)g_2\sigma^{-1}(xg_1g_2)) \phi(xg_1g_2) \\
 &\stackrel{(3.3)}{=} \sqrt{\rho_{g_1g_2}(x)} L(\sigma(x)g_1g_2\sigma^{-1}(xg_1g_2)) \phi(xg_1g_2) \\
 &= V_{g_1g_2}^L \phi(x),
 \end{aligned}$$

o que significa também que V_g^L é inversível e logo unitária. Assim, $g \mapsto V_g^L$ é uma representação unitária de G em $\mathcal{M}$. Para ver que é fracamente mensurável, e portanto fortemente contínua, notemos que em:

$$\langle V_g^L \phi_1, \phi_2 \rangle_M = \int_X \sqrt{\rho_g(x)} \langle L(\sigma(x)g\sigma^{-1}(xg))\phi_1(xg), \phi_2(x) \rangle_{\mathcal{H}} d\mu(x)$$

o integrando no lado esquerdo é integrável em x , pois $V_g^L \phi_1 \in \mathcal{M}$, e mensurável em g , pela continuidade da ação de G em X (3.1) e da representação $K \ni k \mapsto L(k)$. $\square$

Observemos que, sobre as funções $\phi \in \mathcal{M}$, não precisamos impor a condição adicional 2. da definição 3.1 imposta às $f \in \mathcal{H}^L$, veremos agora outra forma de ter essa condição embutida num formalismo do qual, como veremos mais tarde, emergem as equações de onda que descrevem partículas elementares nas teorias quânticas relativísticas.

3.3 Formulação no espaço de funções de onda

Nessa última formulação, consideremos uma representação $\tilde{L}$ de G no espaço de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$, não necessariamente unitária ou irredutível, mas cuja restrição $L = \tilde{L}|_K$ ao subgrupo fechado K seja uma representação unitária de K num subespaço de Hilbert $\mathcal{H} \subset \tilde{\mathcal{H}}$, ou seja, $L(k)u \in \mathcal{H}$ sempre que $k \in K$ e $u \in \mathcal{H}$.

Para a descrição das partículas em teoria quântica relativística utilizaremos representações finitas e logo não unitárias de $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, as quais restringiremos à $SU(2)$, que, sendo compacto, só admite representações unitárias.

Para cada função $f \in \mathcal{H}^L$ definimos $\vartheta: G \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$ por:

$$\vartheta(g) = \tilde{L}^{-1}(g)f(g).$$

A condição $f(kg) = L(k)f(g)$ implica em $\vartheta(kg) = \vartheta(g)$ para todo $k \in K$, ou seja, $\vartheta(g)$ só depende do coset $\pi(g) = Kg$ e portanto induz a função de $X = K \backslash G$ em $\tilde{\mathcal{H}}$

$$\omega(x) = \vartheta(g) = \tilde{L}^{-1}(g)f(g), \quad x = \pi(g). \quad (3.12)$$

A partir da equação (3.4) vemos que a transformação de ϑ pela representação induzida U^L é dada por $[U_g^L \vartheta](s) = \sqrt{\rho_g(\pi(s))} \tilde{L}(g) \vartheta(sg)$, a qual induz para ω :

$$[U_g^L \omega](x) = \sqrt{\rho_g(x)} \tilde{L}(g) \omega(xg). \quad (3.13)$$

No espaço das funções ω passamos a introduzir um produtor escalar de

tal forma que a transformação (3.13) acima seja unitária.

Para tal, seja $\sigma: X \rightarrow G$ uma seção contínua e, para cada $x \in X$ consideremos o subespaço:

$$\mathcal{H}_x = \tilde{L}^{-1}(\sigma(x))\mathcal{H}.$$

Para $u_1, u_2 \in \mathcal{H}_x$ definimos o produto escalar:

$$\langle u_1, u_2 \rangle_x = \langle \tilde{L}(\sigma(x))u_1, \tilde{L}(\sigma(x))u_2 \rangle_{\mathcal{H}},$$

que claramente está bem definido, uma vez que $\tilde{L}(\sigma(x))u \in \mathcal{H}$ sempre que $u \in \mathcal{H}_x$. Além disso, notando que para qualquer $g \in G$, o elemento $\sigma(xg^{-1})$ pertence ao mesmo coset que $\sigma(x)g^{-1}$ (isto é, $\sigma(xg^{-1}) = k\sigma(x)g^{-1}$ para algum $k \in K$) e ainda que $\tilde{L}(k)\mathcal{H} = \mathcal{H}$ para todo $k \in K$, temos:

$$\mathcal{H}_{xg^{-1}} = \tilde{L}(g)\mathcal{H}_x.$$

Dessa forma $\langle \tilde{L}(g)u_1, \tilde{L}(g)u_2 \rangle_{xg^{-1}}$ está bem definido e, devido a unitariedade de L , temos:

$$\langle \tilde{L}(g)u_1, \tilde{L}(g)u_2 \rangle_{xg^{-1}} = \langle u_1, u_2 \rangle_x. \quad (3.14)$$

Vemos ainda que, da própria definição (3.12), $\omega(x) \in \mathcal{H}_x$, de modo que podemos definir o produto escalar de duas dessas funções ω_1 e ω_2 por:

$$\begin{aligned} \langle \omega_1, \omega_2 \rangle &= \int_X \langle \omega_1(x), \omega_2(x) \rangle_x d\mu(x) \\ &= \int_X \langle \tilde{L}(\sigma(x))\omega_1(x), \tilde{L}(\sigma(x))\omega_2(x) \rangle_{\mathcal{H}} d\mu(x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Usando o fato de que $f \in \mathcal{H}^L$, não é difícil verificar que a integral acima está bem definida e é finita, e que o espaço das funções ω é um espaço de Hilbert com esse produto. Além disso, verificamos que nesse espaço a transformação (3.13) é unitária, de fato:

$$\begin{aligned}
\langle U_g^L \omega_1, U_g^L \omega_2 \rangle &= \int_X \rho_g(x) d\mu(x) \langle \tilde{L}(g) \omega_1(xg), \tilde{L}(g) \omega_2(xg) \rangle_x \\
&\stackrel{(x' \equiv xg)}{=} \int_X d\mu(x') \langle \tilde{L}(g) \omega_1(x'), \tilde{L}(g) \omega_2(x') \rangle_{x'g^{-1}} \\
&\stackrel{(3.14)}{=} \int_X d\mu(x') \langle \omega_1(x'), \omega_2(x') \rangle_{x'} \\
&= \langle \omega_1, \omega_2 \rangle.
\end{aligned}$$

No caso em que G é o grupo de Poincaré, as funções ω são chamadas funções de onda espinoriais, no caso geral as chamaremos de funções de onda.

Observe que a complexidade do produto escalar (3.15) quando comparada aos seus análogos (3.2) em $\mathcal{H}^L$ ou (3.11) em $L^2(X, \mu, \mathcal{H})$, é a compensação pela ausência da condição 2. da definição 3.1 no primeiro caso, e pela simplicidade da lei de transformação (3.13), em comparação com (3.11), no segundo.

No interessante caso em que a restrição L de $\tilde{L}$ é redutível, se $L = \bigoplus_j L_j$ é sua decomposição em irredutíveis, onde $j \in \Lambda \subset \mathbb{N}$, pela proposição 3.4 temos:

$$U^L = \bigoplus_{j \in \Lambda} U^{L_j}, \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^L = \bigoplus_{j \in \Lambda} \mathcal{H}^{L_j}.$$

Se estivermos interessados em uma representação específica U^{L_j} e seu respectivo espaço $\mathcal{H}^{L_j}$ podemos eliminar as demais representações impondo sobre $f \in \mathcal{H}^L$ a condição:

$$Pf(g) = f(g),$$

onde P é a projeção correspondente à representação L^j , multiplicando a relação acima por $\tilde{L}^{-1}(g)$ pela esquerda, introduzindo o fator $\tilde{L}(g)\tilde{L}^{-1}(g) = \tilde{L}(e) = I$ no lado esquerdo, e observando a definição (3.12), vemos que para ω a restrição é dada por:

$$\tilde{L}^{-1}(g)P\tilde{L}(g)\omega(x) = \omega(x), \quad x = \pi(g).$$

Notando por fim que da própria definição de P , para qualquer $f \in \mathcal{H}^L$ satisfazendo a condição subsidiária acima e qualquer $k \in K$, temos $PL(k)f(g) = L(k)Pf(g)$, de forma que $\tilde{L}^{-1}(kg)P\tilde{L}(kg) = \tilde{L}^{-1}(g)P\tilde{L}(g)$.

Ou seja, o operador $\tilde{L}^{-1}(g)P\tilde{L}(g)$ só depende do coset $x = \pi(g)$. Se definirmos então:

$$P(x) = \tilde{L}^{-1}(g)P\tilde{L}(g), \quad (3.16)$$

com $x = \pi(g)$. A condição subsidiária para ω fica:

$$P(x)\omega(x) = \omega(x), \quad (3.17)$$

que é uma **equação de onda geral**, a qual impõe a uma função do espaço redutível das funções ω que se transforme de acordo com a representação irredutível U^{L_j} .

Veremos mais tarde que as equações de onda que descrevem partículas elementares nas teorias quânticas de campos como as equações de Dirac ou Proca são casos particulares dessa equação quando o grupo G em consideração é o grupo de Poincaré.

3.4 Aplicação a produtos semi-diretos regulares

Nessa seção especificamos a construção apresentada para uma classe particular de grupos, que inclui grupos importantes para a física como o grupo de movimentos no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^4 \rtimes SO(n)$ ou a cobertura da componente conexa do grupo de Poincaré $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$.

Para essa classe — dos produtos semi-diretos $N \rtimes H$ regulares, com N Abelian — a teoria de Mackey garante que todas as representações unitárias irredutíveis podem ser obtidas pelo processo de indução.

Começemos relembando a noção de produto semi-direto:

Um grupo localmente compacto G é dito ser o produto semi-direto do **subgrupo fechado normal** N com o subgrupo fechado H , denotado por

$G = N \rtimes H$, se todo elemento de $g \in G$ pode ser representado unicamente na forma nh , onde $n \in N$ e $h \in H$.

Dado a representabilidade $G = NH$, a unicidade vale se e somente $N \cap H = e$.

Note que, se $g_1 = n_1h_1$ e $g_2 = n_2h_2$ são elemento de G , então:

$$g_1g_2 = n_1h_1n_2h_2 = n_1h_1n_2h_1^{-1}h_1h_2 = [n_1(h_1n_2h_1^{-1})](h_1h_2),$$

e que $h_1n_2h_1^{-1} \in N$, pois N é normal. Assim, se conhecemos N , H e o mapa $n, h \mapsto hnh^{-1}$ de $N \times H$ em N , podemos reconstruir G . Note ainda que, para $h \in H$ fixo, o mapa $\alpha_h: n \mapsto \alpha_h(n) = hnh^{-1}$ é um automorfismo de N e que $h \mapsto \alpha_h$ é um homomorfismo de H no grupo de automorfismos de N .

Reciprocamente, se dados dois grupos localmente compactos N e H e um homomorfismo $h \mapsto \alpha_h$ de H no grupo de automorfismos de N podemos construir o grupo G constituído por pares n, h com $n \in N$ e $h \in H$ e com produto:

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1\alpha_{h_1}(n_2), h_1h_2). \quad (3.18)$$

Facilmente se verifica que G é então um grupo, o qual é localmente compacto na topologia produto sempre que $\alpha_h(n)$ é contínuo em ambas as variáveis.

O conjunto dos pares (n, e_H) é um subgrupo normal fechado isomorfo à N , e o conjunto dos pares (e_N, h) é um subgrupo fechado isomorfo a H .

Dessa forma o produto semi-direto pode ser definido "internamente" ou "externamente", os isomorfismos mencionados acima fornecem a equivalência entre as definições.

Agora, seja $G = N \rtimes H$ e seja T uma representação unitária de G e $U = T|_N$ e $V = T|_H$ suas restrições aos subgrupos N e H , respectivamente, isto é:

$$U(n) = T(n, e_H), \quad \text{e} \quad V(h) = T(e_N, h).$$

Como $(n, h) = (n, e_H)(e_N, h)$ para todos $n \in N$ e $h \in H$, temos:

$$T(n, h) = U(n)V(h). \quad (3.19)$$

Assim, a representação T é completamente determinada por suas restrições aos subgrupos N e H .

Devido ao produto (3.18) em G e à relação (3.19) acima, as representações U e V não podem ser escolhidas arbitrariamente, mas devem satisfazer:

$$U(n_1)V(h_1)U(n_2)V(h_2) = U(n_1)U(\alpha_{h_1}(n_2))V(h_1)V(h_2).$$

Cancelando fatores e descartando os índices desnecessários obtemos:

$$V(h)U(n) = U(\alpha_h(n))V(h),$$

que reescrevemos sugestivamente como:

$$V(h)U(n)V^{-1}(h) = U(\alpha_h(n)). \quad (3.20)$$

Igualdade que se assemelha à equação (3.8) definindo um sistema de imprimitividade para V . De fato, podemos fazer dela um tal sistema se assumirmos que N é comutativo e usarmos o teorema 2.3 de SNAG para substituir U pela medida com valores à projeções associada.

Sendo específico, seja N comutativo e $\hat{N}$ seu dual (grupo dos caracteres), notemos que cada α_h define um automorfismo dual em $\hat{N}$.

De fato, dado um carácter $\hat{n}: N \ni n \mapsto \hat{n}(n) = \langle n, \hat{n} \rangle \in \mathbb{C}$ e um elemento $h \in H$, então $\hat{\alpha}_h(\hat{n}): n \mapsto \langle \alpha_h(n), \hat{n} \rangle$ é também um carácter e facilmente se verifica que $\hat{n} \mapsto \hat{\alpha}_h(\hat{n})$ é um automorfismo de $\hat{N}$ e que $h \mapsto \hat{\alpha}_h$ é um homomorfismo de H no grupo de automorfismo de $\hat{N}$.

Assim, podemos definir a ação a direita de H em $\hat{N}$ por:

$$\hat{n}h = \hat{\alpha}_h(\hat{n})$$

ou equivalentemente por:

$$\langle n, \hat{\alpha}_h(\hat{n}) \rangle = \langle \alpha_h(n), \hat{n} \rangle, \quad (3.21)$$

fazendo de $\widehat{N}$ um H -espaço de Borel. Ainda, a ação acima estende-se para todo o grupo G declarando-se a ação de N como trivial, fazendo de $\widehat{N}$ um G -espaço de Borel.

Explicitamente, para $g = (n, h) \in G$, temos a ação:

$$\hat{n}g = \hat{n}h = \hat{\alpha}_h(\hat{n}). \quad (3.22)$$

Agora, pelo teorema de SNAG (2.3), a representação U de N admite a decomposição espectral:

$$U(n) = \int_{\widehat{N}} \langle n, \hat{n} \rangle dP(\hat{n}),$$

onde P é uma medida com valores à projeções em $\widehat{N}$, a qual é única e determina U .

Usando a relação acima e (3.20), obtemos:

$$\int_{\widehat{N}} \langle n, \hat{n} \rangle d(V(h)P(\hat{n})V(h)^{-1}) = \int_{\widehat{N}} \langle \alpha_h(n), \hat{n} \rangle dP(\hat{n}) \stackrel{(3.21)}{=} \int_{\widehat{N}} \langle n, \hat{n} \rangle dP(\hat{\alpha}_h(\hat{n})).$$

Como essa relação vale para todo $n \in N$, e como os caracteres separam os pontos de N (isto é, se $n_1, n_2 \in N$ e $n_1 \neq n_2$, existem $\hat{n}_1, \hat{n}_2 \in \widehat{N}$ tais que $\langle n_1, \hat{n}_1 \rangle \neq \langle n_2, \hat{n}_2 \rangle$), então a relação acima só pode ser satisfeita se:

$$V(h)P(Z)V(h)^{-1} = P(Zh^{-1})$$

para todo conjunto Boreliano $Z \subset \widehat{N}$. Ou seja, P é um sistema de imprimitividade para V baseado em $\widehat{N}$. Segue que encontrar o par mais geral de representações U, V tal que $n, h \mapsto U(n)V(h)$ é uma representação de G , e logo a mais geral representação unitária de G , equivale a encontrar o par mais geral (P, V) consistindo de uma representação unitária V de H e um sistema de imprimitividade P para V baseado no G -espaço $\widehat{N}$.

De fato existe um procedimento para obtermos tais pares (P, V) no caso em que a medida P é transitiva, isto é, se existe $\hat{n}_0$ tal que $\widehat{N} - G\hat{n}_0$ tem medida nula, ou equivalentemente, se P está concentrado na órbita $\mathcal{O}_{\hat{n}_0} = G\hat{n}_0$

de $\hat{n}_0$.

Nesse caso diremos que T é do tipo transitivo e como $P(Z) = P(Z \cap \mathcal{O}_{\hat{n}_0})$ para todo $Z \subset \hat{N}$ Boreliano, podemos supor que P está definido em $\mathcal{O}_{\hat{n}_0}$ e logo é um sistema de imprimitividade para V baseado em $\mathcal{O}_{\hat{n}_0}$.

Lembrando que a órbita $\mathcal{O}_{\hat{n}_0}$ é G -isomorfa⁸ ao quociente $X = H_{\hat{n}_0} \backslash H$, onde $H_{\hat{n}_0} = \{h \in H : \hat{n}_0 h = \hat{n}_0\}$ é o grupo fixo (de estabilidade) de $\hat{n}_0$, segue do teorema da imprimitividade 3.1 que V é equivalente à representação W^L induzida por alguma representação L de $H_{\hat{n}_0}$.

Além disso, para a álgebra comutante de T temos, $\mathfrak{R}(T, T) = \mathfrak{R}(U, U) \cap \mathfrak{R}(V, V) = \mathfrak{R}(P, P) \cap \mathfrak{R}(V, V)$, a qual já ressaltamos ser isomorfa à $\mathfrak{R}(L, L)$.

Em particular, T é irredutível se e somente se L o for.

Reciprocamente, seja $\hat{n}$ é qualquer membro de $\hat{N}$ e sejam $\mathcal{O}_{\hat{n}}$ e $H_{\hat{n}}$ sua órbita sob a ação de H e seu grupo de estabilidade, respectivamente. Seja ainda L uma representação unitária de $H_{\hat{n}}$, W^L a representação de H induzida por L e P^L o sistema de imprimitividade canônico associado, transferido de $X = H_{\hat{n}} \backslash H$ para $\mathcal{O}_{\hat{n}}$ pelo mapa $x \mapsto \hat{n}x$.

Definindo $P(Z) = P^L(Z \cap \mathcal{O}_{\hat{n}})$, obtemos um sistema de imprimitividade para W^L baseado em $\mathcal{O}_{\hat{n}}$, e logo uma representação T de G cuja órbita é $\mathcal{O}_{\hat{n}}$.

A representação T acima definida através de W^L e P^L pode ser definida diretamente de $\hat{n}$ e L da seguinte forma. Seja o subgrupo $N \rtimes H_{\hat{n}} \subset G$ formado por elemento (n, h) com $n \in N$ e $h \in H_{\hat{n}}$. Obtemos uma representação $\hat{n}L$ de $N \rtimes H_{\hat{n}}$ tomando $[\hat{n}L](n, h) = \langle n, \hat{n} \rangle L(h)$. Então T é simplesmente a representação $U^{\hat{n}L}$, induzida por $\hat{n}L$.

Refinando a argumentação acima obtém-se o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *Sejam N , H e G como acima, escolhamos para cada H -órbita $\mathcal{O}_{\hat{n}}$ em $\hat{N}$ um representante $\hat{n}$ e uma representação unitária L do grupo de estabilidade $H_{\hat{n}}$. Seja $\hat{n}L$ a representação unitária $n, h \mapsto \langle n, \hat{n} \rangle L(h)$ de $N \rtimes H_{\hat{n}}$. Então a representação induzida $U^{\hat{n}L}$ é uma representação unitária de G , a qual é irredutível se L o for. Toda representação unitária de G do tipo transitivo pode ser obtida dessa forma e duas destas representações são equivalentes se e somente se as órbitas coincidem e as representações do grupo*

⁸Veja apêndice B.

de estabilidade escolhidas são equivalentes.

O teorema acima reduz o problema de classificar as representações de G ao de classificar suas órbitas e representações dos grupos de estabilidade correspondentes, com a ressalva de que só são obtidas representações de G do tipo transitivo.

Em geral existem medidas em $\widehat{N}$ que não estão concentradas em nenhuma órbita, dando origem a representações irredutíveis de G para as quais o teorema acima não diz nada a respeito.

No entanto existem grupo nos quais tais medidas não ocorrem, de fato não é difícil verificar (veja por exemplo [6], onde se encontra também um contra-exemplo) que esse é o caso se $\widehat{N}$ possui uma família de contável $\{Z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de Borel, cada qual união de G -órbitas, e tais que toda órbita em $\widehat{N}$ é a intersecção dos membros da sub-família formada pelos Z_i que contém aquela órbita.

Nesse caso dizemos que N está *regularmente imerso* em G , ou simplesmente que G é um produto semi-direto *regular* e o teorema acima fornece um método para a classificação de todas as representações irredutíveis unitárias de G .

3.5 Formulação para Ação à Esquerda

Claramente a formulação aqui proposta pode ser feita a partir de ações à esquerda em completa analogia. De fato, por ser usual em textos de física considerar-se ações à esquerda, quando formos aplicar a construção proposta aqui usaremos essa convenção, e por isso, para futura referência, reescreveremos as equações que precisaremos mais tarde seguindo esse outra convenção.

Nesse caso $X = G/K$, a projeção natural é $\pi(g) = gK \in X$, e a respectiva ação de G (3.1) é nesse caso dada por:

$$gx = \pi(gs), \quad g, s \in G, \quad x = \pi(s). \quad (3.23)$$

A condição 2. da definição 3.1, satisfeita por funções f no espaço $\mathcal{H}^L$, lê-se:

$$f(gk) = L(k^{-1})f(g), \quad \text{para todo } k \in K \text{ e todo } g \in G, \quad (3.24)$$

e a transformação de tais funções sob a ação das representações induzidas U_g^L , antes dada por (3.4), fica:

$$U_g^L f(s) = \sqrt{\rho_g(\pi(s))} f(g^{-1}s). \quad (3.25)$$

Para a formulação no espaço $\mathcal{M} = L^2(X, \mu, \mathcal{H})$, onde agora μ é uma medida invariante à esquerda, a transformação (3.11) toma a forma:

$$(V_g^L \phi)(x) = \sqrt{\rho_g(x)} L(\sigma(x)^{-1} g \sigma(g^{-1}x)) \phi(g^{-1}x). \quad (3.26)$$

As funções de onda definidas em (3.12) são dadas agora por:

$$\omega(x) = \tilde{L}(g)f(g), \quad x = \pi(g), \quad (3.27)$$

sua transformação sob a representação U_g^L (3.13) é dada por

$$[U_g^L \omega](x) = \sqrt{\rho_g(x)} \tilde{L}(g) \omega(g^{-1}x) \quad (3.28)$$

e o produto escalar entre tais funções, anteriormente dado por (3.15), fica:

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_X \langle \tilde{L}^{-1}(\sigma(x)) \omega_1(x), \tilde{L}^{-1}(\sigma(x)) \omega_2(x) \rangle_{\mathcal{H}} d\mu(x). \quad (3.29)$$

A equação de onda, dada em (3.17) permanece inalterada, mas agora $P(x)$ deve ser definido como:

$$P(x) = \tilde{L}(g) P \tilde{L}^{-1}(g) \quad (3.30)$$

em detrimento de (3.16).

Por fim, para produtos semi-diretos, precisaremos ainda da definição que substitua a ação (3.21), e que nesse caso é dada por:

$$\langle n, \hat{\alpha}_h(\hat{n}) \rangle = \langle \alpha_h^{-1}(n), \hat{n} \rangle. \quad (3.31)$$

3.6 Comentários

Existe uma formulação da teoria em termos da ação de G sobre um *Fibrado de Hilbert baseado num espaço de Borel analítico*, a qual possui a vantagem de poder lidar com o caso em que a ação não é transitiva mas apenas ergótica, de importância na teoria dos números, além de apresentar a construção num formato mais adaptado a generalizações.

Um tratamento nesse sentido, assim como a demonstração do fato de que, no caso de uma ação transitiva, a construção é completamente equivalente com a que apresentamos, pode ser encontrada em [35], [56] ou [58], por exemplo.

Capítulo 4

Grupos de Simetria e Representações Unitárias Projetivas em Teorias Quânticas

Grupos discretos ou contínuos ocorrem na física clássica como grupos de transformações associados a simetrias dinâmicas de equações descrevendo partículas ou campos — por exemplo os grupos de Galilei ou Poincaré de transformações do espaço-tempo, grupos de simetrias de redes cristalinas, grupo de transformações conformes de potenciais eletromagnéticos, etc — nesses casos, no entanto, lidamos em geral com **equações dinâmicas não lineares**, de tal forma que as soluções de tais equações, que representam "estados" de sistemas físicos, não formam um espaço linear.

Nas teoria quânticas, em contrapartida, devido à **linearidade das equações de movimento**, os estados físicos podem ser descritos como combinação linear de um conjunto ortonormal de estados específicos, muitas vezes contável, e a teoria das representações em espaços lineares que temos tratado é perfeitamente adaptada a esse contexto.

A principal característica da teoria ondulatória de onde se origina a quântica é o princípio de superposição, o qual decorre da linearidade das

equações de onda e afirma que combinações lineares de soluções são ainda soluções.

Além disso, as ondas das teorias quânticas descrevem amplitudes de probabilidade, de tal forma que o panorama geral é o de estados físicos descritos por elementos $\phi, \psi \dots$ num espaço vetorial e probabilidades condicionais observadas correspondendo ao quadrado de formas sesquilineares $|\langle \phi, \psi \rangle|^2$.

Historicamente, em casos simples — como por exemplo para a equação de Schrödinger — o espaço das soluções de interesse físico pode ser imerso num espaço de Hilbert e então a teoria tem sido tradicionalmente formulada no âmbito de espaços de Hilbert desde sua axiomatização por von Neumann.

Embora haja formulações que dispensem ou generalizem a necessidade de espaços de Hilbert, para as aplicações em que estaremos interessados ela é adequada e assumiremos a partir de então tal descrição, assumindo ainda que tais espaços de Hilbert são separáveis.

Suporemos que o leitor esteja familiar com a formulação de teorias quânticas e faremos apenas uma breve apresentação dos principais tópicos.

O desenvolvimento desse capítulo segue principalmente [6], [35], [60] e [51]. Detalhes concernentes às bases matemáticas que justificam a formulação da mecânica quântica que faremos podem ser encontrados, por exemplo, em [37], [56], ou [9].

4.1 Grupos de Simetria

O panorama básico da descrição quântico teórica de um sistema físico consiste de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ cujos **raios unitários** estão unicamente associados à **estados puros**, sendo um raio unitário $[\psi]$ associado a um elemento $\psi \neq 0 \in \mathcal{H}$, $\|\psi\| = 1$, o conjunto definido por:

$$[\psi] = \{\lambda\psi, \lambda = e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

O uso de raios para a descrição de estados é necessário uma vez que as probabilidades observadas estão associadas a números da forma $|\langle \phi, \psi \rangle|^2$, para $\psi, \phi \in \mathcal{H}$, os quais independem da multiplicação de ϕ e ψ por escalares

unitários $\lambda = e^{i\alpha}$. Assim, todos os elementos de $\mathcal{H}$ pertencentes a um mesmo raio devem representar um mesmo estado.

Deve-se notar ainda que $\psi' \sim \psi \Leftrightarrow \psi' = e^{i\alpha}\psi$ define uma relação de equivalência em $\mathcal{H} - \{0\}$, de tal forma que o conjunto $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ pode ser identificado com o espaço projetivo $(\mathcal{H} - \{0\})/\sim$, e a associação $\psi \rightarrow \gamma(\psi) \equiv [\psi]$ é a projeção natural de $\mathcal{H}$ em $\mathbb{P}(\mathcal{H})$. Dessa forma, $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ é feito um espaço topológico com a topologia quociente onde $W \subset \mathbb{P}(\mathcal{H})$ é declarado aberto se e somente se $\gamma^{-1}(W) \subset \mathcal{H}$ é aberto.

Em $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ podemos definir o produto:

$$\langle [\psi], [\phi] \rangle = |\langle \psi, \phi \rangle|^2. \quad (4.1)$$

O qual é claramente independente dos representantes ψ e ϕ escolhidos e portanto está bem definido.

Uma vez que toda a informação física advém de produtos da forma (4.1), é natural que definamos:

Definição 4.1 (Transformação de Simetria). Uma **transformação de simetria** é um mapa bijetor $T: \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ tal que:

$$\langle T[\psi], T[\phi] \rangle = \langle [\psi], [\phi] \rangle, \quad \forall [\psi], [\phi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H}). \quad (4.2)$$

Notemos que o conjunto das transformações de simetria forma naturalmente um grupo com o produto dado pela composição, o qual é chamado de **grupo de simetria** do sistema físico em questão e será denotado por $AUT(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$.

Um operador em $\mathcal{H}$, por sua vez, é dito linear unitário se:

$$\begin{aligned} \langle U\psi, U\phi \rangle &= \langle \psi, \phi \rangle, \\ U(a\psi + b\phi) &= aU\psi + bU\phi, \end{aligned} \quad (4.3)$$

e anti-linear e anti-unitário se:

$$\begin{aligned} \langle U\psi, U\phi \rangle &= \langle \psi, \phi \rangle^*, \\ U(a\psi + b\phi) &= a^*U\psi + b^*U\phi. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dado um tal operador U é fácil ver que podemos definir uma transformação de simetria associada $\hat{\gamma}(U): \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ por:

$$\hat{\gamma}(U)[\psi] = [U\psi], \quad (4.5)$$

a qual claramente independe do representante ψ escolhido e satisfaz (4.2).

Reciprocamente, temos:

Teorema 4.1 (Teorema de Wigner). *Dada uma transformação de simetria $T: \mathbb{P}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$, existe $U: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unitário e linear ou antiunitário e antilinear tal que $T = \hat{\gamma}(U)$.*

Demonstração. Seja $\psi_1, \psi_2, \dots$ uma base ortonormal em $\mathcal{H}$ formada por representantes dos raios $\Psi_1, \Psi_2, \dots$ e sejam $\phi_1, \phi_2, \dots \in \mathcal{H}$ representantes dos raios $\Phi_1, \Phi_2, \dots$, onde $\Phi = T\Psi$. Não é difícil constatar que $\langle [\psi_i], [\psi_j] \rangle = \langle [\phi_i], [\phi_j] \rangle$ implica que $\{\phi_k\}$ é também uma base ortonormal de $\mathcal{H}$.

A princípio qualquer transformação U em $\mathcal{H}$ da forma

$$U\psi_n = c_n\phi_n,$$

com $c_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \dots$, satisfaz $\hat{\gamma}(U) = T$, e o que queremos mostrar é que os c_n podem ser escolhidos de tal forma que U satisfaça (4.3) ou (4.4).

Começemos escolhendo $c_1 = 1$, isto é: $U\psi_1 = \phi_1$, e consideremos o estado $\psi_1 + \psi_n$. Usando a ortonormalidade de $\{\psi_k\}$ e $\{\phi_k\}$ é fácil constatar que um representante¹ do raio transformado $T[\psi_1 + \psi_n]$ é da forma $a_n\phi_1 + b_n\phi_n$, onde um dos escalares não nulos $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ é arbitrário — pois $[\chi] = [a\chi]$ para todos $a \in \mathbb{C}$, $\chi \in \mathcal{H}$ — e o outro determinado pela escolha anterior dos representantes ϕ_i .

Dessa forma:

$$U(\psi_1 + \psi_n) = c(a_n\phi_1 + b_n\phi_n) = \phi_1 + \frac{b_n}{a_n}\phi_n,$$

onde impusemos $a_n = 1/c$ usando a liberdade de escolha mencionada acima.

Impondo então $c = b_n/a_n$, isto é: $U\psi_n = \frac{b_n}{a_n}\phi_n$, obtemos:

¹Estaremos sempre supondo que representantes escolhidos nos raios têm módulo 1, omitindo os fatores de normalização para simplificar a notação.

$$U(\psi_1 + \psi_n) = U\psi_1 + U\psi_n.$$

Por fim, para um estado geral $\psi = \eta_1\psi_1 + \eta_2\psi_2 + \dots$ tomamos o representante $\phi = \zeta_1\phi_1 + \zeta_2\phi_2 + \dots$, escrevemos $U\psi = c\phi$ e usamos a liberdade de escolha de um dos coeficientes de ϕ escolhendo $\zeta_1 = \eta_1/c$, de forma que:

$$U\phi = U(\eta_1\psi_1 + \eta_2\psi_2 + \eta_3\psi_3 + \dots) = \eta_1\phi_1 + \frac{\eta_1}{\zeta_1}\zeta_2\phi_2 + \frac{\eta_1}{\zeta_1}\zeta_3\phi_3 + \dots \quad (4.6)$$

A partir da qual formamos os módulos dos produtos:

$$|\langle \psi_1 + \psi_n, \psi \rangle| = |\eta_1 + \eta_n|$$

e

$$|\langle \phi_1 + \phi_n, \phi \rangle| = |\langle U(\psi_1 + \psi_n), U\psi \rangle| = |\eta_1 + \frac{\eta_1}{\zeta_1}\zeta_n|.$$

Os quais devem ser iguais, pois $T = \hat{\gamma}(U)$ é uma transformação de simetria, e assim:

$$|1 + \frac{\eta_n}{\eta_1}| = |1 + \frac{\zeta_n}{\zeta_1}|.$$

O que implica, pela igualdade $|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\Re(ab^*)$ que:

$$\Re\left(\frac{\eta_n}{\eta_1}\right) = \Re\left(\frac{\zeta_n}{\zeta_1}\right).$$

Usando ainda que $|\eta_n| = |\langle \psi_n, \psi \rangle| = |\langle \phi_n, \phi \rangle| = |\zeta_n|$, a igualdade acima fornece ainda:

$$\Im\left(\frac{\eta_n}{\eta_1}\right) = \pm \Im\left(\frac{\zeta_n}{\zeta_1}\right),$$

de forma que temos duas soluções:

$$\zeta_n = \eta_n \frac{\zeta_1}{\eta_1}, \quad \text{ou} \quad \zeta_n = \eta_n^* \frac{\zeta_1}{\eta_1^*}.$$

Claramente, por (4.6), na primeira solução U é linear e unitário, enquanto para a segunda temos $U\psi = (\frac{\xi_1}{\eta_1^*})(\eta_1^*U\psi_1 + \eta_2^*U\psi_2 + \dots)$. Como uma mudança de fase global na definição de U não altera o raciocínio feito, a renormalização $U \rightarrow (\frac{\eta_1^*}{\xi_1})$ — a qual claramente não afeta a única escolha arbitrária na demonstração: $U\psi_1 = \phi_1$ — fornece um operador anti-linear e anti-unitário. $\square$

Nota 4.1. Dois comentários a respeito do teorema acima são importantes. O primeiro é que apenas uma das possibilidades para U pode ocorrer numa determinada situação, ou seja, se U é unitário e linear ou anti-unitário e anti-linear depende das descrições físicas equivalentes, isso é, de T , mas não depende, no entanto, dos representantes ψ_i e ϕ_i escolhidos.

Uma demonstração de tal afirmação pode ser encontrada, por exemplo, em [60].

O segundo comentário concerne à unicidade de U dado T . Pela demonstração do teorema, como a única escolha arbitrária na construção de U é $U\psi_1 = \phi_1$, a qual pode ser alterada apenas por uma fase, segue que U é unicamente determinado por T a menos de uma fase global.

4.2 Representações Projetivas

Na abordagem que propomos, queremos obter restrições às teorias quânticas, particularmente determinar os possíveis espaços de Hilbert onde podem ser formuladas, a partir da imposição de que determinados grupos — o grupo de Poincaré, especificamente — sejam grupos de simetria.

Se um determinado grupo G é imposto como grupo de simetria de um sistema físico, devemos ter transformações de simetria T_g em $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, correspondendo a cada elemento do grupo e compatíveis com o produto do grupo, ou seja, $g \rightarrow T_g$ deve ser uma representação projetiva de G :

Definição 4.2 (Representação Projetiva). Uma **representação projetiva** de um grupo topológico G é um homomorfismo $T: G \rightarrow \text{AUT}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ de G no grupo de transformações de simetria $\text{AUT}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$, contínuo no sentido de

que, se $g \rightarrow g'$ então $T_g[\phi] \rightarrow T_{g'}[\phi]$ na topologia quociente de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, para todo $[\phi] \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$.

Onde a condição de continuidade acima se justifica, fisicamente, pela imposição de que probabilidades $\langle [\psi], T_g[\phi] \rangle$ sejam contínuas enquanto função de g .

Pelo teorema de Wigner 4.1 acima, podemos associar um operador U_g unitário e linear ou anti-unitário e anti-linear a cada T_g , e como $T_{g_1 g_2}$ e $T_{g_1} T_{g_2}$ representam a mesma transformações de simetria para quaisquer $g_1, g_2 \in G$, os operadores $U_{g_1 g_2}$ e $U_{g_1} U_{g_2}$ diferem entre si por uma fase ω que depende de g_1 e g_2 :

$$U_{g_1} U_{g_2} = \omega(g_1, g_2) U_{g_1 g_2} \quad (4.7)$$

e que é uma função contínua de $G \times G$ em $U(1)$, pela continuidade de T , a qual possui algumas restrições, a primeira delas

$$\omega(g, e) = \omega(e, g) = 1, \quad \forall g \in G, \quad (4.8)$$

onde e é a identidade em G , advém de $U_{ge} = U_{eg} = U_g$. A segunda imposição:

$$\omega(g_1, g_2) \omega(g_1 g_2, g_3) = \omega(g_2, g_3) \omega(g_1, g_2 g_3), \quad (4.9)$$

emerge da associatividade da multiplicação do grupo, de fato, (4.7) implica $\omega(g_1, g_2) = U_{g_1} U_{g_2} U_{g_1 g_2}^{-1}$, então:

$$\begin{aligned} \omega(g_1, g_2) \omega(g_1 g_2, g_3) &= U_{g_1} U_{g_2} U_{g_1 g_2}^{-1} U_{g_1 g_2} U_{g_3} U_{g_1 g_2 g_3}^{-1} = U_{g_1} U_{g_2} U_{g_3} U_{g_1 g_2 g_3}^{-1} \\ &= U_{g_1} U_{g_2} U_{g_3} U_{g_1 g_2 g_3}^{-1} = U_{g_1} U_{g_2} U_{g_3} U_{g_2 g_3}^{-1} U_{g_2 g_3} U_{g_1 g_2 g_3}^{-1} \\ &= \omega(g_2, g_3) U_{g_1} U_{g_2 g_3} U_{g_1 g_2 g_3}^{-1} = \omega(g_2, g_3) \omega(g_1, g_2 g_3). \end{aligned}$$

Funções de $G \times G$ em $U(1)$ que satisfazem as propriedades (4.8) e (4.9) são chamadas de **cocícl**os de G (relativo à $U(1)$)².

²Cocícl

os podem ser definidos analogamente para funções ω com valores num grupo Abeliano A geral (veja [6] ou [51]), mas no nosso caso lidaremos apenas com $A = U(1)$, e omitiremos o sufixo "relativo à $U(1)$ ".

Como cada operador U_g é definido a partir de T_g a menos de uma fase arbitrária, a associação $g \rightarrow U'(g) = c(g)U_g$, onde c é uma função contínua de G em $U(1)$ qualquer, corresponde a mesma representação projetiva, e está associada ao cocíclo:

$$\omega'(g_1, g_2) = \omega(g_1, g_2) \frac{c(g_1 g_2)}{c(g_1) c(g_2)}. \quad (4.10)$$

Notemos que o conjunto dos cocíclos forma por si um grupo Abelianos K com multiplicação ponto a ponto

$$\omega_1 \omega_2(g_1, g_2) = \omega_1(g_1, g_2) \omega_2(g_1, g_2),$$

e que a relação $\omega \sim \omega'$ (4.10) define uma relação de equivalência em K , de tal forma que o conjunto formado pelas funções equivalentes à identidade $\omega(g_1, g_2) \equiv 1$ em K é um subgrupo N .

O grupo quociente $H^2(G, U(1)) = K/N$ é formado então por classes de equivalência de cocíclos e é chamado de **segundo grupo de cohomologia** de G (com coeficientes em $U(1)$).

Com tal grupo podemos estudar a relação entre representações projetivas de G e as representações ordinárias — ou seja, não projetivas — que temos tratado.

Para tal, consideremos, para uma dada ω , o conjunto de pares (α, g) com $\alpha \in U(1)$ e $g \in G$, sobre o qual damos a estrutura de grupo — denotado por $U(1) \rtimes_\omega G$ — com o produto:

$$(\alpha_1, g_1)(\alpha_2, g_2) = (\omega(g_1, g_2) \alpha_1 \alpha_2, g_1 g_2). \quad (4.11)$$

Tal grupo é chamado uma extensão central³ de G por $U(1)$ e é fácil ver que uma representação projetiva de G com cocíclo ω corresponde à uma representação ordinária unitária (ou antiunitária) de $U(1) \rtimes_\omega G$, trivial em $U(1)$.

³A definição de extensões centrais de Grupos Topológicos ou de Álgebras de Lie pode ser encontrado em [6] ou [51], por exemplo, onde se mostra que toda extensão central de um grupo topológico é da forma acima para algum cocíclo, com resultado análogo para Extensões Centrais de Álgebras de Lie, justificando a nomenclatura que estamos usando.

Em particular a extensão central definida pelo cociclo identidade — chamada extensão *trivial* — é isomorfa à $U(1) \rtimes G$ e suas representações ordinárias triviais em $U(1)$ coincidem com as representações ordinárias de G .

Se declaramos duas tais extensões centrais $U(1) \rtimes_{\omega} G$ e $U(1) \rtimes_{\omega'} G$ como equivalentes quando $\omega \sim \omega'$ — e nesse caso $(\alpha, g) \rightarrow (c(g)\alpha, g)$ é um isomorfismo entre $U(1) \rtimes_{\omega} G$ e $U(1) \rtimes_{\omega'} G$ — o conjunto de classes de equivalência de extensões centrais de G está em correspondência um a um com $H^2(G, U(1))$, e as representações projetivas de G estão em correspondência um a um com representações ordinárias, unitárias ou antiunitárias, triviais em $U(1)$, de classes de equivalência de extensões centrais de G .

O problema de classificar as possíveis representações projetivas de G pode ser simplificado no caso de grupos de Lie conexos⁴.

Nesse caso:

Proposição 4.1. *Se $T: G \rightarrow \text{AUT}(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ é uma representação projetiva de um grupo de Lie conexo G , então os operadores U_g , correspondendo à T_g , são sempre unitários.*

Demonstração. De fato, seja $a \in G$ numa vizinhança da identidade $N(e)$ suficientemente pequena para que haja um subgrupo uniparamétrico $\phi(t)$ de G tal que $\phi(t_0) = a$. Então $\phi(t_0/2) = b \in G$ e logo $U_a = \omega(b, b)U_b^2$ é unitário, pois o quadrado de um operador é anti-unitário é unitário.

Por fim, todo elemento em $g \in G$ é da forma $g = a_1 a_2 \dots a_n$, com $a_k \in N(e)$, e então U_g é unitário. $\square$

Além da unitariedade dos operadores U_g , para grupos de Lie, as possíveis extensões centrais podem ser estudadas em sua conexão com as respectivas álgebras de Lie (veja seção 2.4), de fato, uma extensão central de $U(1) \rtimes_{\omega} G$ é também um grupo de Lie, cuja álgebra $\mathcal{L}_G^{\Theta}$ — a qual é dita uma extensão

⁴Para grupos de Lie não conexos, como no caso de representações ordinárias, podemos estudar separadamente as representações projetivas do grupo formado pela componente conexa da identidade G^0 e do grupo de componentes G/G^0 , o qual é sempre discreto pois G^0 é aberto e ainda finito se G for um grupo matricial (veja por exemplo [44]). Dessa forma, para grupos de Lie não conexos faz-se ainda importante o estudo das representações projetivas de grupos finitos, as quais não trataremos explicitamente nesse texto. Algumas aplicações de interesse físico podem ser encontradas em [6].

central de $\mathcal{L}_G$ — é formada pelos pares (X, a) , $X \in \mathcal{L}_G$, $a \in \mathbb{R} \sim \mathcal{L}_{U(1)}$, com colchete de Lie:

$$[(X, a), (Y, b)]_{\mathcal{L}_G^\Theta} = [X, Y]_{\mathcal{L}_G} + \Theta(X, Y), \quad (4.12)$$

onde $\Theta: \mathcal{L}_G \times \mathcal{L}_G \rightarrow \mathbb{R}$ — a qual é chamada **cociclo de $\mathcal{L}_G$** (com valores em $\mathbb{R}$) — é uma função contínua, a qual é bilinear e antissimétrica, como requer o colchete acima, e satisfaz ainda a restrição:

$$\Theta(X, [Y, Z]) + \Theta(Y, [Z, X]) + \Theta(Z, [X, Y]) = 0, \quad (4.13)$$

a qual advém da identidade de Jacob e corresponde à restrição (4.9) de ω .

Extensões centrais equivalentes de um grupo de Lie dão origem à extensões centrais de álgebras que são equivalentes no sentido de serem definidas por funções Θ e Θ' que satisfazem:

$$\Theta(X, Y) - \Theta'(X, Y) = \mu([X, Y]), \quad (4.14)$$

onde $\mu: \mathcal{L}_G \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função linear e contínua.

Note que nesse caso $(X, a) \rightarrow (X, a + \mu(X))$ define um isomorfismo entre as álgebras $\mathcal{L}_G^\Theta$ e $\mathcal{L}_G^{\Theta'}$.

Se o grupo G em questão além de conexo é simplesmente conexo, vale a recíproca de que duas de suas extensões centrais são equivalentes somente se as respectivas extensões de álgebras o forem.

De forma análoga ao caso de grupos, o conjunto de possíveis cocíclo de uma álgebra de Lie formam um grupo Abelianiano K com produto dado pela adição

$$\Theta_1 \Theta_2(X, Y) = \Theta_1(X, Y) + \Theta_2(X, Y),$$

e o conjunto formado pelos cocíclo equivalentes ao cociclo trivial, isto é, formado por cocíclo da forma

$$\Theta(X, Y) = \mu([X, Y])$$

formam um subgrupo N , de forma que podemos formar o grupo $H^2(\mathcal{L}_G, \mathbb{R}) = K/N$, chamado **segundo grupo de cohomologia** de $\mathcal{L}_G$, e que está em correspondência um a um com as classes de equivalência de extensões centrais de $\mathcal{L}_G$.

No caso em que $H^2(\mathcal{L}_G, \mathbb{R})$ é trivial, as extensões centrais de $\mathcal{L}_G$ são todas equivalentes à extensão trivial, e as extensões centrais de G são localmente equivalentes à extensão trivial — para g numa vizinhança da identidade suficientemente pequena para que a exponencial de $\mathcal{L}_G$ em G seja um difeomorfismo — de forma que suas representações projetivas de G estão localmente em correspondência única com suas representações ordinárias.

Se G é ainda simplesmente conexo, podemos estender unicamente tal correspondência local a todo grupo e nesse caso então as representações projetivas de G estão em correspondência única com suas representações ordinárias, ou seja:

Teorema 4.2 (Bargmann). *Se G é um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo tal que $H^2(\mathcal{L}_G, \mathbb{R}) = \{0\}$, então para toda representação projetiva $T: G \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H})$ existe uma representação unitária e fortemente contínua $U: G \rightarrow \mathcal{H}$ tal que $T = \hat{\gamma} \circ U$.*

Para uma prova veja [51] ou [4].

Se G em questão satisfaz $H^2(\mathcal{L}_G, \mathbb{R}) = \{0\}$ e é conexo mas não é simplesmente conexo, podemos considerar sua cobertura universal $\tilde{G}$ (veja seção 2.4), a qual é um grupo simplesmente conexo para o qual existe um homomorfismo $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ sobrejetor e cujo núcleo discreto N é um subgrupo normal e central de $\tilde{G}$, isomorfo ao grupo fundamental⁵ de G .

Se T é uma representação projetiva de G e U é a correspondente representação ordinária unitária local de G , o isomorfismo local dado pela cobertura π induz uma representação local ordinária de $\tilde{G}$, a qual pode ser estendida unicamente a uma representação fortemente contínua.

Por outro lado, se $\tilde{U}$ é uma representação ordinária de $\tilde{G}$, para n no núcleo N de π temos:

⁵Para noções de topologia algébrica, grupos de homotopia e coberturas universais de grupos de Lie veja [28] e [29].

$$\tilde{U}_n = \lambda I, \quad \lambda \in U(1), n \in N.$$

Então, escolhendo uma seção $\sigma: G \rightarrow \tilde{G}$ (veja diagrama abaixo) com $\pi \circ \sigma = e_G$, declaramos $U_g = \tilde{U}_{\sigma(g)}$, e como $\sigma(g_1)\sigma(g_2)$ e $\sigma(g_1g_2)$ estão no mesmo coset de $\tilde{G}$, o mapa $g \rightarrow U_g$ é uma representação projetiva de G .

$$\begin{array}{ccc} \tilde{G} & \xrightarrow{\tilde{U}} & \mathcal{U}(H) \\ \pi \searrow \sigma & & \nearrow U \\ G \sim \tilde{G}/N & & \end{array}$$

Assim, as representações projetivas de um grupos de Lie conexo para os qual o segundo grupo de cohomologia de sua álgebra seja trivial estão em correspondência única com representações unitárias de sua cobertura universal.

Ocorre que para muitos grupos de Lie de interesse físico $H^2(\mathcal{L}_G, \mathbb{R})$ é trivial⁶. De fato, todo grupo simples — o que inclui, por exemplo $SO(3)$, $SU(2)$, $SO(1, 3)$ e $SL(2, \mathbb{C})$ — ou afim linear, — como o grupo euclidiano ou a componente conexa do grupo de Poincaré $SO(1, 3)^\uparrow$ — satisfaz tal propriedade [4].

Particularmente, a cobertura universal da componente conexa do grupo de Poincaré é o grupo de Lie $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$, e então, pelo que vimos, o espaço de Hilbert cujos raios estão associados à estados de um sistema quântico relativístico deve carregar uma representação unitária de $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$, justificando nossa busca por tais representações.

Como uma representação unitária é, pelo teorema de Mautner (veja por exemplo [36]), sempre decomponível como soma ou produto direto de representações irredutíveis, é natural que definamos, seguindo Wigner [62], **sistemas quânticos relativísticos elementares** (SE) como sistemas descritos por raios em espaços de Hilbert carregando representações unitárias irredutíveis de $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$, as quais veremos serem caracterizadas por dois

⁶A famosa exceção sendo o grupo de Galilei, que possui extensões centrais não triviais.

invariantes, a massa m e o spin j .

Quando interagindo com outros sistemas, um sistema elementar pode apresentar uma estrutura mais complexa, dizemos que dois sistemas elementares m_1, j_1 e m_2, j_2 estão **fisicamente conectados** se interações físicas conectam os espaços os espaços $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ que carregam as respectivas representações irredutíveis.

Por exemplo os estados 1s e 2p num átomo de Hidrogênio estão conectados pela absorção ou emissão de fótons, ou os estados do nêutron e do próton são sistemas conectados pelo decaimento β [6], assim, formulamos a seguinte definição:

Definição 4.3 (Partícula Elementar (segundo E. Wigner [62])). Uma partícula elementar é um sistema elementar cujos estado não podem ser conectados fisicamente aos estados de outros sistemas. O único efeito de interações numa partícula elementar é o de mudar o estado mantendo-o dentro do espaço irredutível que o define, ou seja, mudar seu momento linear ou projeção de spin.

A partir dessa definição, passemos a estudar as possíveis representações de $\mathbb{R}^4 \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{C})$ e como elas se relacionam com as teorias de campo quântico relativistas livres no espaço de Minkowski.

Capítulo 5

Representações Unitárias Irredutíveis de $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

Nesse capítulo utilizaremos o método desenvolvido na seção 3.4 para obter todas as representações unitárias irredutíveis da cobertura universal da componente conexa do grupo de Poincaré $\widetilde{P}_+^\uparrow = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SL}(2)$, posteriormente discutiremos como incluir as operações de reflexão temporal e espacial (paridade), para obter representações (em geral projetivas) da cobertura do grupo de Poincaré completo.

5.1 O grupo de Lorentz

Começamos discutindo algumas propriedades básicas dos grupos de Lorentz e Poincaré, com o objetivo de fornecer o material necessário para o tratamento subsequente.

Uma excursão mais profunda nos fatos aqui mencionados, assim como parametrizações dos elementos dos grupos, podem ser encontradas por exemplo em [2], [60], [6], ou em bons livros que tratem da teoria da relatividade.

Denotemos por $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ o tensor métrico diagonal no espaço de Minkowski 4-dimensional M com $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$ e, para $x, y \in M$, com $x = \{x^\mu\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}$, seja

$$x \cdot y = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^\mu y_\mu, \quad y_\mu = g_{\mu\nu} y^\nu \quad (5.1)$$

o produto escalar (indefinido) em M .

Uma transformação de Lorentz é um automorfismo linear L de M que preserva o produto (5.1), isto é:

$$(Lx) \cdot (Ly) = x \cdot y.$$

Escrevendo em componentes e cancelando termos obtemos

$$g_{\mu\nu} L^\mu{}_\rho L^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}, \quad (5.2)$$

de onde vemos que $(\det L)^2 = 1$, o que implica em particular que L possui inversa, a qual pela equação (5.2), é dada por:

$$(L^{-1})^\rho{}_\nu = g_{\nu\mu} g^{\rho\sigma} L^\mu{}_\sigma, \quad (5.3)$$

De forma que as transformações de Lorentz formam um grupo, o qual denotaremos por $\mathcal{L}$, com o produto dado pela composição.

Tal grupo, se entendido como subgrupo matricial fechado do grupo linear $GL(4, \mathbb{R})$ de automorfismos lineares de $\mathbb{R}^4$, é feito um grupo de Lie — a saber $\mathcal{L} = O(3, 1)$ — com a estrutura diferencial relativa à estrutura canônica de $GL(4, \mathbb{R})$.

A equação acima também nos mostra que $\det L = \pm 1$, além disso, tomando $\rho = \sigma = 0$ na equação (5.2) obtemos:

$$(L^0{}_0)^2 = 1 + \sum_i (L^i{}_0)^2, \quad (5.4)$$

e portanto $|L^0{}_0| \geq 1$, isto é, ou $L^0{}_0 \geq 1$ ou $L^0{}_0 \leq -1$.

Como $\det L$ e $\text{sign} L^0{}_0$ são ambas funções contínuas de $L^\mu{}_\nu$ no conjunto totalmente desconexo $\{-1, 1\}$, elas devem ser constantes em cada componente do grupo de Lorentz, de forma que $\mathcal{L}$ possui 4 componentes:

$$\text{i. } L_+^\uparrow : \quad \det L = +1, \quad \text{sign} L^0{}_0 = +1.$$

$$\text{ii} . L_-^\uparrow : \quad \det L = -1, \quad \text{sign} L^0_0 = +1.$$

$$\text{iii} . L_+^\downarrow : \quad \det L = +1, \quad \text{sign} L^0_0 = -1.$$

$$\text{iv} . L_-^\downarrow : \quad \det L = -1, \quad \text{sign} L^0_0 = -1.$$

A componente da identidade $L_+^\uparrow$ forma um subgrupo conexo, chamado de grupo de Lorentz ortócrono próprio, e é formado pelas transformações que podem ser alcançadas a partir da identidade de forma contínua.

Toda transformação de Lorentz ou é própria ($\det L = +1$) e ortocrona ($\text{sign} L^0_0 = +1$) ou pode ser escrita como o produto de uma transformação deste tipo, $L \in L_+^\uparrow$, por uma das transformações discretas P , T ou PT , onde P é a inversão espacial ou paridade, cujos elementos não nulos são

$$P^0_0 = -P^1_1 = -P^2_2 = -P^3_3 = 1, \quad (5.5)$$

e T é a reversão temporal, cujos elementos não nulos são

$$T^0_0 = -T^1_1 = -T^2_2 = -T^3_3 = -1. \quad (5.6)$$

Assim, o estudo do grupo de Lorentz completo se resume ao estudo da componente da identidade além de operações de paridade e inversão temporal.

Na classificações das representações que apresentaremos, lidaremos primeiramente com a componente $L_+^\uparrow$, veremos mais adiante como incluir as operações discretas mencionadas.

Importantes subgrupos de $L_+^\uparrow$ são o grupo formado por rotações R e o grupo formado por "boosts" B .

O grupo de rotações é formado pelas transformações com $L^0_0 = 1$, o que implica, por (5.4), que $L^i_0 = L^0_i = 0$. Ou seja, tais transformações preservam a componente temporal x^0 e portanto são simplesmente as transformações que preservam produto escalar espacial $x^i x_i$, de forma que o grupo de rotações é isomorfo à $SO(3)$.

Um "boost" numa direção $\vec{n}$ do espaço euclidiano 3-dimensional é qualquer transformação que mantém invariante vetores do plano perpendicular a $\vec{n}$. Um boost é determinado por sua direção $\vec{n}$ e mais um parâmetro escalar que quantifica sua intensidade.

A grande importância desses subgrupos reside no fato que qualquer elemento de $L_+^\uparrow$ pode ser escrito, embora não de forma única, como o produto de um boost e uma rotação.

Parametrizações específicas dos subgrupos mencionados acima podem ser encontradas por exemplo em [2], onde também se encontra uma prova direta do fato mencionado acima, o qual decorre equivalentemente da decomposição polar de matrizes inversíveis via o homomorfismo entre $L_+^\uparrow$ e $SL(2, \mathbb{C})$ que exploraremos a seguir.

5.2 $SL(2, \mathbb{C})$ e o grupo de Lorentz

Nessa seção mostramos que $SL(2, \mathbb{C})$ é a cobertura universal de $L_+^\uparrow$, justificando seu estudo de suas representações em conexão com as teorias de campo relativistas.

A relação mencionada foi estabelecida por Naimark [15], e é um homomorfismo clássico na literatura de grupos de Lie matriciais, o tratamento que apresentaremos segue [6] ou [54], em linhas gerais.

Para um aprofundamento no tópico envolvendo diferentes abordagens veja [10], sugere-se também os trabalhos [26, 25], além de outros do mesmo autor, para aplicações relacionando a esfera de Poincaré da ótica de polarizações e o Grupo de Poincaré.

Começamos estabelecendo uma relação entre $\mathbb{R}^4$ e o conjunto das matrizes 2x2 hermitianas $\mathcal{M}$. Para tal, consideremos o conjunto $\sigma = \{\sigma_\mu\}$ formado pela matriz identidade 2x2 e pelas matrizes de Pauli, isto é:

$$\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

as quais formam uma base para o espaço vetorial $\mathcal{M}$, de fato, para qualquer matriz complexa 2x2

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 \\ z_2 & z_3 \end{bmatrix},$$

com entradas complexas arbitrárias $z_j = x_j + iy_j$, $j = \{0, 1, 2, 3\}$, a condição de que A é hermitiana (isto é $\underline{a}^\dagger := (\underline{a}^*)^T = \underline{a}$) implica $y_1 = y_3 = 0$, $x_1 = x_2$ e $y_1 = -y_2$, de maneira que $\underline{a}$ é da forma:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 + iy_1 \\ x_1 - iy_1 & x_3 \end{bmatrix},$$

onde x_i e y_i são números reais arbitrários. Agora, tomando $a^0 = \frac{x_0+x_3}{2}$, $a^1 = x_1$, $a^2 = -y_2$ e $a^3 = \frac{x_0-x_3}{2}$, obtemos:

$$\underline{a} = a^\mu \sigma_\mu = a^0 \sigma_0 + a^1 \sigma_1 + a^2 \sigma_2 + a^3 \sigma_3 = \begin{bmatrix} a^0 + a^3 & a^1 - ia^2 \\ a^1 + ia^2 & a^0 - a^3 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Ou seja, à toda matriz 2×2 hermitiana $\underline{a}$ podemos associar unicamente uma quadra $\{a^\mu\}$ tal que a relação (5.7) acima é satisfeita.¹ Como além disso cada σ_μ é hermitiana, qualquer matriz da forma acima (com $a^\mu \in \mathbb{R}$ arbitrários) é hermitiana.

Desta forma mostramos que não só que $\{\sigma_\mu\}$ é uma base para o espaço $\mathcal{M}$, mas também que a associação $a \mapsto \underline{a} = a^\mu \sigma_\mu$ é um isomorfismo entre M e esse espaço, justificando a notação $\underline{x}$ para um elemento em $\mathcal{M}$ associado à $x \in M$. Como veremos a seguir, é desse isomorfismo que emerge a relação entre $L_+^\uparrow$ e $SL(2, \mathbb{C})$, através da ação das ações desses grupos nos respectivos espaços.

Explicitamente, observemos que, para quaisquer $\underline{x} \in \mathcal{M}$ e $A \in SL(2, \mathbb{C})$, a matriz $A \underline{x} A^\dagger$ é também hermitiana e logo existe um vetor correspondente $x' \in M$, o qual pode ser obtido através de x por uma transformação linear $\lambda(A)$, determinada por A de maneira única (para $x \neq 0$), ou seja, $x'^\mu = \lambda(A)^\mu_\nu x^\nu$, e assim temos a associação $A \mapsto \lambda(A)$ dada por:

$$\lambda(A) \underline{x} = A \underline{x} A^\dagger. \quad (5.8)$$

Agora, do isomorfismo (5.7) podemos escrever o produto (5.1) como:

¹A obtenção dos $\{a^\mu\}$ acima a partir da matriz $\underline{a}$ pode ser sintetizada notando-se que $Tr(\sigma_\mu \sigma_\nu) = 2\delta_{\mu\nu}$, de tal forma que $a^\mu = \frac{1}{2} Tr(\underline{a} \sigma_\mu)$

$$x \cdot x = x^\mu x_\mu = \det \underline{x}, \quad \text{e} \quad x \cdot y = \frac{1}{2}[\det(\underline{x} + \underline{y}) - \det \underline{x} - \det \underline{y}], \quad (5.9)$$

e assim, para toda matriz $A \in SL(2, \mathbb{C})$ e qualquer par de vetores $x, y \in M$:

$$\lambda(A)x \cdot \lambda(A)y = x \cdot y,$$

ou seja, $\lambda(A)$ é uma transformação de Lorentz. Além disso, da relação (5.8) acima, conclui-se facilmente que $A \mapsto \lambda(A)$ é homomorfismo analítico entre $SL(2, \mathbb{C})$ e o grupo de Lorentz (pois cada $\lambda(A)_\mu^\nu$ é função polinomial dos elementos de matriz de A), de tal forma que sua imagem é um subgrupo de Lie de conexo de $\mathcal{L}$, estando portanto contido em $L_+^\uparrow$.

O núcleo Z do homomorfismo acima é constituído das matrizes $A \in SL(2, \mathbb{C})$ tais que, para qualquer $\underline{x} \in \mathcal{M}$ temos:

$$\underline{x} = A\underline{x}A^\dagger.$$

Tomando então $x = e = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, vemos que toda $A \in Z$ deve satisfazer $A\underline{x}A^\dagger = e$, ou seja, $A^\dagger = A^{-1}$, e assim, a condição acima pode ser escrita na forma:

$$\underline{x}A = A\underline{x}.$$

As únicas matrizes que comutam com toda matriz hermitiana $\underline{x}$ são múltiplos da identidade $A = \lambda I$, mas $\det A = 1$, e portanto $Z = \{I, -I\}$ e $\lambda(A_1) = \lambda(A_2)$ se e somente se $A_1 = \pm A_2$.

Uma vez que o núcleo do homomorfismo (5.8) é discreto, sua imagem deve ter a mesma dimensão de seu domínio, sendo portanto todo $L_+^\uparrow$. Além disso, temos o isomorfismo:

$$SL(2, \mathbb{C})/Z \simeq L_+^\uparrow,$$

e como $SL(2, \mathbb{C})$ é simplesmente conexo, ele é a cobertura universal da compo-

nente da identidade do grupo de Lorentz: $SL(2, \mathbb{C}) = \widetilde{L}_+^\uparrow$.

Note-se que, devido à equação (5.7), a componente temporal de vetores $\underline{x} \in \mathcal{M}$ são dadas por $\text{Tr } \underline{x}/2$, de forma que as transformações $A \in SL(2, \mathbb{C})$ que são levadas pelo homomorfismo (5.8) acima em transformações de Lorentz preservando tal componente (rotações) são aquelas para as quais $\text{Tr}[A\underline{x}A^\dagger] = \text{Tr } \underline{x}$ para todo $\underline{x} \in \mathcal{M}$, o que acontece somente se A é unitária. Dessa forma, quando restrito à tais matrizes, o homomorfismo (que possui o mesmo núcleo $Z = \{\pm I\} \subset SU(2)$), implica no isomorfismo:

$$SU(2)/Z \simeq SO(3),$$

mostrando que $SU(2)$, sendo simplesmente conexo, é a cobertura universal de $SO(3)$.

Passemos agora a considerar as transformações de translação em M , que junto com as transformações do grupo de Lorentz formam o grupo de Poincaré.

5.3 O grupo de Poincaré

Já vimos que o grupo de Lorentz é formado pelos automorfismos lineares de M que preservam o produto (5.1). Observemos agora que a transformação $x^\mu \mapsto x^\mu + a^\mu$, $x, a \in M$, de M em M é também um automorfismo de M que, embora não linear, preserva (5.1), e dessa forma podemos considerar o grupo de transformações de forma:

$$x^\mu \mapsto L_\nu^\mu x^\nu + a^\mu, \quad (5.10)$$

com $L \in \mathcal{L}$ e $a \in M$, as quais formam o grupo de Lorentz não homogêneo, ou grupo de Poincaré $\mathcal{P}$. A transformação acima (5.10) dá origem a seguinte lei de composição para o grupo:

$$(a_1, L_1)(a_2, L_2) = (a_1 + L_1 a_2, L_1 L_2).$$

Comparando com (3.18), vemos imediatamente que $\mathcal{P} = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathcal{L}$.

Como enquanto espaço topológico $\mathcal{P}$ é homeomorfo ao produto $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{L}$

e $\mathbb{R}^4$ é conexo, $\mathcal{P}$ também possui quatro componentes $P_+^\uparrow, P_-^\uparrow, P_+^\downarrow, P_-^\downarrow$.

Também no caso de $\mathcal{P}$ todo elemento ou pertence à $P_+^\uparrow$ ou é produto de uma transformação em $P_+^\uparrow$ por P, T , ou PT , definidos na seção 5.1.²

Uma vez que $\mathbb{R}^4$ é simplesmente conexo, sendo então sua própria cobertura universal, verificamos que a cobertura universal de $P_+^\uparrow$ é então $\mathbb{R}^4 \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{C})$, com produto dado, pela relação acima e por (5.8), por:

$$(n_1, A_1)(n_2, A_2) = (n_1 + \lambda(A_1)n_2, A_1 A_2). \quad (5.11)$$

Tal relação justifica o estudo das representações unitárias e irredutíveis de $\mathbb{R}^4 \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{C})$ em conexão com a descrição quântico-relativística de partículas elementares, para tal fim, e em acordo com o método proposto na seção 3.4, começemos analisando as $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ -órbitas em $\widehat{\mathbb{R}^4}$ e mostrando que o tal produto semi direto é regular.

5.4 Órbitas e Regularidade

Para manter a notação da seção 3.4 denotaremos $\mathbb{R}^4 \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{C})$, $\mathbb{R}^4$ e $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ por G, N e H , respectivamente.

Conforme vimos na seção 2.3 o dual $\widehat{N}$ é, no presente caso ($N = \mathbb{R}^4$), isomorfo a si mesmo, sendo que para cada $\hat{n} = (\hat{n}_0, \hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3)$ temos o caráter $N \ni n \mapsto \langle n, \hat{n} \rangle$ associado:

$$\langle n, \hat{n} \rangle = e^{i(n^\mu \hat{n}_\mu)} = e^{i(n_0 \hat{n}_0 - n_1 \hat{n}_1 - n_2 \hat{n}_2 - n_3 \hat{n}_3)}.$$

Conforme vimos, $\widehat{N}$ é feito um G -espaço com ação $\hat{\alpha}_g$ dada implicitamente através de (3.31), (3.18) e (5.11), por:

$$\langle n, \hat{\alpha}_{(n', A)}(\hat{n}) \rangle = \langle \lambda(A)^{-1} n, \hat{n} \rangle = \exp[i((\lambda(A)^{-1})^\mu{}_\nu n^\nu \hat{n}_\mu)] \quad (5.12)$$

$$\stackrel{5.3}{=} \exp[i\lambda(A)^\alpha{}_\beta \hat{n}^\beta n_\alpha] = \langle n, \lambda(A)\hat{n} \rangle, \quad (5.13)$$

²É interessante notar que o conjunto $\Delta = \{I, P, T, PT\}$ é por si só um grupo discreto, o qual é isomorfo à $Z_2 \oplus Z_2$, e que da observação acima pode se concluir que $\mathcal{P} = P_+^\uparrow \rtimes \Delta$.

para todo $(n', A) \in G$.

Ou seja:

$$\hat{\alpha}_{(n,A)}(\hat{n}) = \lambda(A)\hat{n}, \quad (5.14)$$

que é a mesma ação de G em N .

Decorre que a órbita que contém um determinado caráter $\hat{n} \in \hat{N}$ é o conjunto $\{\lambda(A)\hat{n} : A \in H = SL(2, \mathbb{C})\}$, e como $\lambda(A)$ preserva o produto $x^\mu x_\mu$, cada órbita está contida em um único hiperboloide da forma:

$$\hat{n}^\mu \hat{n}_\mu = \hat{n}^0 \hat{n}_0 - \hat{n}^1 \hat{n}_1 - \hat{n}^2 \hat{n}_2 - \hat{n}^3 \hat{n}_3 = m^2, \quad (5.15)$$

onde m^2 é qualquer número real.

Se $m^2 > 0$ o hiperboloide acima tem duas seções correspondendo as órbitas $\mathcal{O}_m^+$ e $\mathcal{O}_m^-$ que contém os representantes $(m, 0, 0, 0)$ e $(-m, 0, 0, 0)$, respectivamente.

Se $m^2 < 0$ temos um hiperboloide de uma única seção definindo a órbita $\mathcal{O}_{im}$, que possui, por exemplo, o representante $(0, 0, m, 0)$.

Por fim, se $m = 0$, a equação (5.15) descreve um cone que possui três órbitas: A órbita $\mathcal{O}_0^0$, constituída apenas de $(0, 0, 0, 0)$, e que separa as partes superior ($\hat{n}_0 > 0$) e inferior ($\hat{n}_0 < 0$) do cone, que por sua vez formam as órbitas $\mathcal{O}_0^+$ e $\mathcal{O}_0^-$, contendo, respectivamente, os representantes $(1, 0, 0, 1)$ e $(-1, 0, 0, -1)$.

Temos então ao todo seis tipos de órbitas: $\mathcal{O}_m^+$, $\mathcal{O}_m^-$, $\mathcal{O}_{im}$, $\mathcal{O}_0^+$, $\mathcal{O}_0^-$ e $\mathcal{O}_0^0$.

Note-se que algumas das órbitas seriam conectadas se considerássemos as operações P e T do grupo completo de Poincaré, de fato T conecta as órbitas $\mathcal{O}_m^+$ e $\mathcal{O}_m^-$ e PT conecta $\mathcal{O}_0^+$ e $\mathcal{O}_0^-$, como veremos, as órbitas em cada um desses pares possuem o mesmo grupo de estabilidade.

Antes de analisar os grupos de estabilidade associados a cada uma das órbitas descritas acima, verifiquemos que o semi-produto direto é regular, para isso consideremos a família $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de $\hat{N}$ contendo: $\mathcal{O}_0^+$, $\mathcal{O}_0^-$, $\mathcal{O}_0^0$, $Z^+(r_1, r_2)$, $Z^-(r_1, r_2)$ e $Z_{im}(r_1, r_2)$.

Onde $Z^+(r_1, r_2)$ (resp. $Z^-(r_1, r_2)$ e $Z_{im}(r_1, r_2)$) é o conjunto formado pela união de todas as órbitas $\mathcal{O}_m^+$ (resp. $\mathcal{O}_m^-$ e $\mathcal{O}_{im}$) com $m \in (r_1, r_2)$; $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$; $0 < r_1 < r_2$.

Vemos imediatamente que $\mathfrak{F}$ é contável e que seus elementos são subconjuntos de Borel que pela própria definição são uniões de órbitas. Não é difícil verificar ainda que cada órbita é a intersecção dos conjuntos de $\mathfrak{F}$ que a contém e portanto $\widehat{N}$ está regularmente imerso em G . Assim, conforme vimos, o método das representações induzidas fornece a totalidade das representações unitárias irredutíveis desse grupo.

Para a construção explícita das representações induzidas assim como dos produtos escalares nos respectivos espaços precisaremos de uma forma explícita de uma medida quasi-invariante à esquerda $d\mu$ em X , da qual obteremos também a derivada de Radon-Nikodym $\rho_g(\hat{n}) = d\mu(\hat{n}g)/d\mu(\hat{n})$.

Para tal, identificamos X , enquanto G -espaço, ao hiperboloide (5.15) e definimos uma forma diferencial $d\mu$ relacionada a essa superfície, notando que a ação de G preserva o produto $\hat{n}^\nu \hat{n}_\nu$, por:

$$d\hat{n}_0 d\hat{n}_1 d\hat{n}_2 d\hat{n}_3 = d(\hat{n}^\mu \hat{n}_\mu) d\mu = \mathfrak{J} d(\hat{n}^\nu \hat{n}_\nu) d\hat{n}_1 d\hat{n}_2 d\hat{n}_3,$$

onde $\mathfrak{J}$ é o determinante Jacobiano de $(\hat{n}_0, \hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3) \mapsto (\hat{n}^\nu \hat{n}_\nu, \hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3)$, explicitamente dado então por $\mathfrak{J} = 1/2\hat{n}_0$. Assim, pela equação acima, obtemos:

$$d\mu(\hat{n}) = \frac{d\hat{n}_1 d\hat{n}_2 d\hat{n}_3}{2\hat{n}_0}. \quad (5.16)$$

É fácil ver que as ações à esquerda $\hat{n} \mapsto \lambda(A)\hat{n}$ e à direita $\hat{n} \mapsto \hat{n}\lambda(A)$ de G em X , preservam as formas diferenciais $d\hat{n}_0 d\hat{n}_1 d\hat{n}_2 d\hat{n}_3$ e $d(\hat{n}^\nu \hat{n}_\nu)$, de forma que a medida $d\mu$ acima é invariante à esquerda assim como à direita e portando:

$$\rho_A(\hat{n}) = d\mu(\hat{n}\lambda(A))/d\mu(\hat{n}) = 1. \quad (5.17)$$

Ou seja, nesse caso o espaço X possui uma medida de fato invariante (tanto à esquerda como à direita) pela ação de G , o que é um particular do fato mais geral que ocorre sempre que G e H forem unimodulares (isto é, se suas medidas invariantes à esquerda e à direita coincidem).

No presente caso a unimodularidade de $SL(2, \mathbb{C})$ e de $SU(2)$ decorrem do

fato de esses grupos serem simples.

5.5 Classificação Das Representações

Passemos então a classificar as possíveis representações unitárias e irredutíveis de $G = \widetilde{P}_+^\uparrow$ a partir das representações unitárias dos grupos de estabilidade das órbitas em $\hat{N}$.

Lembremos que o grupo de estabilidade de qualquer dois pontos numa mesma órbita são isomorfos, justificando que consideremos, para cada órbita, o grupo de estabilidade do respectivo representante, apresentado na descrição das órbitas feita acima.

5.5.1 $\mathcal{O}_m^\pm$

As transformações que mantêm fixos os representantes $\hat{n}_\pm = (\pm m, 0, 0, 0)$ são aquela que preservam a componente temporal dos vetores $\hat{n} \in \hat{N}$ e logo coincide com o (a cobertura do) grupo de rotações $SU(2)$, o qual possui representações irredutíveis $L^j = D^j$, $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ de dimensão $2j+1$. Assim, as correspondentes representações induzidas $U^{\hat{n}L^j}$ de $\widetilde{P}_+^\uparrow$ possuem os parâmetros m e j .

Na física de partículas, onde as funções do espaço que carrega tais representações descrevem estados de partículas elementares, m e j são identificados com a massa e o spin total dessas partículas.

As representações acima são denotadas por $U^{\pm, m, j}$, onde os sinais "+" e "-" correspondem às órbitas $\mathcal{O}_m^+$ e $\mathcal{O}_m^-$, respectivamente, referindo-se, no contexto da física, ao sinal da energia.

5.5.2 $\mathcal{O}_{im}$

Nesse caso tomamos o representante $\hat{n} = (0, 0, m, 0)$, que corresponde via (5.7), à matriz $\hat{n} = m\sigma_2$, de forma que o grupo de estabilidade é formado pelas matrizes $A \in SL(2)$ tais que $A\sigma_2A^\dagger = \sigma_2$, ou equivalentemente $\sigma_2^{-1}A^{-1}\sigma_2 = A^\dagger$.

Mas para qualquer matriz B 2x2 com determinante unitário, verifica-se imediatamente que $\sigma_2^{-1}B\sigma_2 = (B^T)^{-1}$ e então as matrizes A do grupo de estabilidade devem satisfazer $A^T = A^\dagger$ ou simplesmente $A = A^*$.

Dessa forma o grupo de estabilidade nesse caso é o grupo das matrizes reais de determinante um $SL(2, \mathbb{R})$.

O grupo $SL(2, \mathbb{R})$ possui três séries de representações:³ (i) A série principal, com representações $D^{i\eta, \xi}$, $\eta > 0 \in \mathbb{R}$, $\xi = 0, 1$. (ii) A série discreta $D^{n, \pm}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ (iii) A série suplementar de representações D^ρ , $\rho \neq 0$, $-1 < \rho < 1$.

Associadas às séries mencionadas acima temos as representações induzidas de $\widetilde{P}_+^\dagger$, denotadas por $U^{im, i\eta, \xi}$, $U^{im, n, \pm}$ e $U^{im, \rho}$, respectivamente.

Não conhecemos sistemas livres elementares para os quais a atribuição de uma massa imaginária faça sentido, no entanto é possível um sistema de duas partículas possuir massa total imaginária, tais representações possuem aplicações também na análise harmônica de amplitudes de espalhamento[6].

5.5.3 $\mathcal{O}_0^\pm$

Consideremo o representante $\hat{n} = (\pm 1/2, 0, 0, \pm 1/2)$ que corresponde (5.7) à matriz

$$\underline{\hat{n}} = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então a condição para que uma matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ mantenha $\underline{\hat{n}}$ fixo toma a forma:

$$\begin{bmatrix} aa^* & ac^* \\ c^* & cc^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e portanto $a = e^{i\phi/2}$, $\phi \in [0, 4\pi)$ e $c = 0$. Ainda, $\det A = 1 \Rightarrow d = \underline{a} = e^{i\phi/2}$

³As quais apenas mencionaremos por fins de completeza, uma vez que estaremos estudando partículas elementares, onde tais representações não emergem. O leitor interessado pode encontrar a construção de tais representações em [35], [27] ou [6].

e b pode ser qualquer complexo, que escrevemos como $e^{-i\phi/2}z$, $z \in \mathbb{C}$ (escolha que, assim como a do arco metade ϕ em detrimento de $\theta = 2\phi$, será justificada em breve). Dessa forma, o grupo de estabilidade $\mathcal{H}_{\hat{n}}$ é, nesse caso, composto por matrizes da forma:

$$A = \begin{bmatrix} e^{i\phi/2} & e^{-i\phi/2}z \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \phi \in [0, 4\pi).$$

Denotando então por (z, ϕ) tal elemento, para todos $(z_1, \phi_1), (z_2, \phi_2) \in \mathcal{H}_{\hat{n}}$ o produto é dado então por:

$$(z_1, \phi_1)(z_2, \phi_2) = (z_1 + e^{i\phi_1}z_2, \phi_1 + \phi_2),$$

mostrando que $\mathcal{H}_{\hat{n}}$ é um produto semidireto (que denotaremos por $\tilde{E}^2 = \mathbb{R}^2 \rtimes S^1 = \{(z, \phi)\}$ do grupo aditivo dos complexos, o qual é isomorfo a $\mathbb{R}^2$ com o grupo $S^1 = \{(0, \phi)\}$, o qual é naturalmente uma cobertura 2:1 do grupo de rotações no espaço euclidiano $O(2)$).

De fato, a associação $(z, \phi) \mapsto (\Re(z), \Im(z), R_\phi)$ de $\tilde{E}^2$ no grupo euclidiano bidimensional $E^2 = \mathbb{R}^2 \rtimes O(2)$ (onde $(\Re z, \Im z)$ é uma translação e R_ϕ uma rotação de um ângulo ϕ) é um homomorfismo com núcleo $Z = \{(0, 0), (0, 2\pi)\}$ e logo:

$$\tilde{E}^2/Z \simeq E^2.$$

Para encontrarmos as representações de $\tilde{E}^2$ seguimos o mesmo procedimento que com $\widetilde{P}_+^\uparrow$, omitindo a demonstração de que esse grupo é regular.

Novamente podemos identificar $\mathbb{R}^2$ com seu dual, com caracteres dados por:

$$\langle z, \hat{z} \rangle = e^{i(x\hat{x} + y\hat{y})}, \quad z = x + iy, \quad \hat{z} = \hat{x} + i\hat{y}.$$

A ação de S^1 no plano $\widehat{\mathbb{R}^2}$ coincide com a ação em $\mathbb{R}^2$, ou seja $\alpha_\phi(z) = e^{i\phi}z$, e daí vemos que as órbitas são circunferências centradas em $(0, 0)$ e com raio $r \geq 0$, e temos então dois tipos de órbita, correspondendo à $r > 0$ e $r = 0$, respectivamente.

(i) $r > 0$: Escolhemos o representante $(r, 0)$ e vemos imediatamente que o grupo de estabilidade é simplesmente $\{I, -I\}$, o qual possui apenas duas representações unitárias, a trivial e a adjunta (indiciadas por $\tau = 0$ e $\tau = 1$, respectivamente), que induzem representações $L^{r,\tau}$, $r > 0$, $\tau = 0, 1$ de $\widetilde{E}^2$.

(ii) $r = 0$: Nesse caso o único representante é $(0, 0)$ e o grupo de estabilidade é então todo S^1 , as representações desse grupo são da forma $\phi \mapsto e^{ij\phi}$, $j = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots$, e induzem representações L^j de $\widetilde{E}^2$.

As representações mencionadas induzem por sua vez as representações $U^{0,\pm;r,\tau}$ e $U^{0,\pm;j}$ de $\widetilde{P}_+^\uparrow$.

5.5.4 $\mathcal{O}_0^0$

Nesse caso o único representante é $(0, 0, 0, 0)$ e seu grupo de estabilidade é todo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, de forma que as representações induzidas nesse caso são simplesmente as representações irredutíveis e unitárias de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ estendidas para representações de $\widetilde{P}_+^\uparrow$.

Não trataremos com detalhes dessas representações, enunciando-as apenas por fins de completeza, ao leitor interessado em métodos para obtê-las assim como realizações explícitas, é recomendado que veja [6], [35] ou [27].

$\text{SL}(2, \mathbb{C})$ possui duas séries de representações: A série principal, indiciada por dois números $i\rho$, $\rho > 0$ e $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ e a série suplementar, indiciada por um único real $\underline{\rho}$, com $-1 < \rho < 1$, $\rho \neq 0$. As correspondentes representações induzidas de $\widetilde{P}_+^\uparrow$ são então denotadas por $U^{0,i\rho,j}$ e $U^{0,\rho}$.

As representações enumeradas acima extinguem as possibilidades de representações unitárias irredutíveis de $\widetilde{P}_+^\uparrow$.

No contexto de partículas elementares as que possuem maior relevância são $U^{m,+,j}$ e $U^{0,+,j}$, por descreverem partículas massivas e não massivas, respectivamente, possuindo energia positiva.

5.6 Forma Explicita de $U^{m,+,j}$

Tendo classificado as possíveis representações de $\widetilde{P}_+^\uparrow$, passemos a derivar realizações explícitas do caso massivo com energia positiva, e então discutir

as identificações físicas relacionadas a elas.

Para tal temos que obter explicitamente uma seção σ do espaço quociente $X = \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{R}^4 \rtimes SU(2) \simeq SL(2, \mathbb{C}) / SU(2)$ (que identificamos, enquanto G -espaço, à órbita $\mathcal{O}_m^+$) em $SL(2, \mathbb{C})$, a qual usaremos para escrever (3.26). Usando a decomposição polar ⁴ podemos escrever uma matriz arbitrária $A \in SL(2, \mathbb{C})$ na forma:

$$A = BR, \quad (5.18)$$

onde $R \in SU(2)$ e $B \in SL(2, \mathbb{C})$ ⁵ determina e é determinado unicamente por um vetor $p \in X$.

Para ver isso, tomemos qualquer matriz $A \in SL(2, \mathbb{C})$ cuja ação mapeie o representante $\underline{\overset{\circ}{p}} = (m, 0, 0, 0) = mI$ em $\underline{p}$ dado, ou seja:

$$A \underline{\overset{\circ}{p}} A^\dagger = \underline{p}.$$

Então, pela decomposição (5.18) de A e usando que $R \underline{\overset{\circ}{p}} R^\dagger = \underline{\overset{\circ}{p}}$ para $R \in SU(2)$ (grupo de estabilidade), obtemos $B \underline{\overset{\circ}{p}} B^\dagger = \underline{p}$, ou seja, a propriedade acima $A \underline{\overset{\circ}{p}} A^\dagger = \underline{p}$ independe de R .

Ainda, se $A_1 = B_1 R_1$ e $A_2 = B_2 R_2$ são as decomposições polares das matrizes $A_1, A_2 \in SL(2, \mathbb{C})$ tais que $A_1 \underline{\overset{\circ}{p}} A_1^\dagger = A_2 \underline{\overset{\circ}{p}} A_2^\dagger = \underline{p}$, então é fácil ver que $[A_2^{-1} A_1] \underline{\overset{\circ}{p}} [A_2^{-1} A_1]^\dagger = \underline{\overset{\circ}{p}}$ e portanto $A_2^{-1} A_1 \in SU(2)$, mas como $R_1, R_2^{-1} \in SU(2)$, isso implica que $B_2^{-1} B_1 \in SU(2)$.

Por fim, como B_1 e B_2 são auto adjuntas (isto significa em particular que são boosts puros) isso implica $B_1^2 = B_2^2$, e uma vez que essas matrizes são positivas e auto adjuntas tal fato implica $B_1 = B_2$.

Ou seja, para cada $p \in X$, existe um único boost puro⁶ (isto é, $B_p \in$

⁴A decomposição polar (veja por exemplo [2], [48] ou [40]) consiste da observação de que todo operador linear e limitado T em um espaço de Hilbert H complexo ou real, admite uma única decomposição da forma $T = PU$, onde $U = T\sqrt{T^\dagger T}^{-1}$ é unitário e $P = \sqrt{T^\dagger T}$ é bijetor, limitado, auto-adjunto e positivo.

Em particular, se consideramos $H = \mathbb{C}^2$, com o produto escalar usual, o teorema acima fornece uma decomposição de qualquer matriz 2x2 complexa inversível.

⁵Esse fato não trivial, como outros mostrando que de fato tal decomposição impõe, via o homomorfismo (5.8), uma única decomposição de uma transformação de $L_+^\uparrow$ em uma rotação seguida de um boost pode ser encontrada em [40] ou [2].

⁶Notemos que a escolha de boosts puros para a seção acima é uma escolha arbitrária

$SL(2, \mathbb{C})$ com $B_p = B_p^\dagger$ tal que:

$$B_p \underline{\overset{\circ}{p}} B_p^\dagger = \underline{p}.$$

Com $\underline{\overset{\circ}{p}} = mI$, a relação acima pode ser escrita como:

$$B_p B_p^\dagger = \underline{p}/m. \quad (5.20)$$

Desta forma a associação $p \mapsto B_p$ é uma seção de X em $SL(2, \mathbb{C})$, a qual é feita uma seção em $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ notando que a ação de $\mathbb{R}^4$ em X é trivial e definindo então a seção $\sigma: X \rightarrow \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ por:

$$\sigma(p) = (0, B_p).$$

Para que possamos escrever (3.26) precisamos tomar ainda uma representação unitária e irredutível de $\mathbb{R}^4 \rtimes SU(2)$, a qual, pelo teorema 3.2 deve ser da forma:

$$L^j(a, \mathbb{R}) = \langle a, \underline{\overset{\circ}{p}} \rangle D^j(R) = e^{i \underline{\overset{\circ}{p}} a} D^j(R),$$

para $j \in \mathbb{N}/2$, $a \in \mathbb{R}^4$, $R \in SU(2)$ e D^j dada (2.42).

Além disso, usando (3.19) para $U^{m,+j}$ temos:

$$U_{(a,A)}^{m,+j} = U_{(a,I)}^{m,+j} U_{(0,A)}^{m,+j},$$

onde cada um dos termos a direita é dado por (3.26), que, levando em conta que $\rho_{(a,A)}(p) = 1$ (5.17), e com a seção σ acima, fica:

dentre tantas outras possíveis, para essa escolha a forma explícita da matriz B_p corresponde à solução hermitiana da equação 5.20 a qual é dada por:

$$B_p = \underline{p}^{1/2}/m^{1/2} = \frac{m + \underline{p}}{\sqrt{2m(m + p^0)}}, \quad (5.19)$$

e que, em forma exponencial (2.51) pode ser como:

$$B_p = e^{i \eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}},$$

onde a direção do boost é simplesmente $\mathbf{x} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ e a rapidez é dada por $\sinh \eta = -\beta \gamma$, $\cosh \eta = \beta$, onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ e $\beta = |\mathbf{p}|/p^0$.

$$(U_g^{m,+,j}u)(p) = L^j[(0, B_p^{-1})g(0, B_{g^{-1}p})]u(g^{-1}p), \quad (5.21)$$

onde $gp = (a, A)p = \lambda(A)p$ (veja (5.14)).

Para $g = (a, I)$, temos $g^{-1}p = p$, e o argumento de L^j na equação acima, pelo produto (5.11), é simplesmente $(0, B_p^{-1})(a, I)(0, B_{g^{-1}p}) = (\lambda(B_p^{-1})a, I)$. Portanto:

$$\begin{aligned} (U_{(a,I)}^{m,+,j}u)(p) &= L^j[(\lambda(B_p^{-1})a, I)]u(p) = \langle \lambda(B_p^{-1})a, \overset{\circ}{p} \rangle D^j(I)u(p) \\ &\stackrel{(5.12)}{=} \langle a, \lambda(B_p)\overset{\circ}{p} \rangle u(p) = \langle a, p \rangle u(p) \\ &= e^{ipa}u(p). \end{aligned}$$

Para $g = (0, A)$, por sua vez, $g^{-1}p = \lambda(A)^{-1}p$, e então

$$(0, B_p^{-1})(0, A)(0, B_{g^{-1}p}) = (0, B_p^{-1}AB_{\lambda(A)^{-1}p}),$$

e portanto:

$$(U_{(0,A)}^{m,+,j}u)(p) = D^j(B_p^{-1}AB_{\lambda(A)^{-1}p})u(\lambda(A)^{-1}p).$$

Assim, para um elemento $(a, A) \in \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ arbitrário:

$$(U_{(a,A)}^{m,+,j}u)(p) = e^{iap}D^j(B_p^{-1}AB_{\lambda(A)^{-1}p})u(\lambda(A)^{-1}p). \quad (5.22)$$

Lembrando que u é uma função de $\mathcal{O}_m^+$ no espaço $2j + 1$ dimensional $\mathcal{H}_j$ que carrega a representação D^j de $SU(2)$, e que portanto $u(p)$ é um vetor com $2j + 1$ componentes u_n , $n = -j, -j + 1, \dots, j - 1, j$, podemos escrever a lei de transformação acima em termos dessas componentes, obtendo:

$$(U_{(a,A)}^{m,+,j}u)_n(p) = e^{iap}D_{nn'}^j(B_p^{-1}AB_{\lambda(A)^{-1}p})u_{n'}(\lambda(A)^{-1}p). \quad (5.23)$$

Como podemos entender uma representação D^j de $SU(2)$ como a restrição da representação $D^{(j,0)}$ de $SL(2, \mathbb{C})$, a igualdade acima pode ser reescrita, na base espinorial $v_n(p) = D_{nn'}^{(j,0)}(B_p)u_{n'}(p)$ (veja (3.27)), da seguinte forma:

$$(U_{(a,A)}^{m,+,j}v)_n(p) = e^{iap}D_{nn'}^{(j,0)}(A)v_{n'}(\lambda(A)^{-1}p), \quad (5.24)$$

que corresponde à lei de transformação (3.28).

Para tornar clara a identificação do conjunto de funções $\{u_n(p)\}$ com uma função de onda correspondendo a um sistema físico com spin j e massa m , notemos que, para um sistema em repouso ($p = \overset{\circ}{p}$) e sob rotações $(0, \mathbb{R})$, com $R \in SU(2)$, a transformação acima fica:

$$(U_{(0,\mathbb{R})}^{m,+,j}u)_n(\overset{\circ}{p}) = D_{nn'}^j(R)u_{n'}(\overset{\circ}{p}).$$

Que é exatamente a transformação de um sistema de spin j , sendo o número $n = -j, \dots, j$ identificado com a projeção do spin num determinado eixo de quantização.

Para vermos que o sistema de fato possui massa m consideramos subgrupos uniparamétricos da forma $\gamma^\nu(t) = (a^\nu(t), I)$, com $a^{\nu\mu} = t\delta^{\nu\mu}$, $\nu, \mu = 0, 1, 2, 3$, cujos geradores P_ν dados por:

$$iP_\nu = \left. \frac{d(U_{\gamma^\nu(t)}^{m,+,j})}{dt} \right|_{t=0}$$

identificamos com os operadores de energia ($\nu = 0$) e momento ($\nu = 1, 2, 3$).

Devido a equação (5.23) obtemos:

$$\begin{aligned} P_\nu u_n(p) &= -i \left. \frac{d}{dt} [e^{ipa^\nu(t)}] u_n(p) \right|_{t=0} \\ &= p_\nu u_n(p) \end{aligned}$$

e assim, para o operador massa $M = \sqrt{P_\nu P^\nu}$ temos:

$$Mu_n(p) = \sqrt{p_\nu p^\nu} u_n(p) = mu_n(p).$$

Ou seja, o sistema $\{u_n\}$ é auto estado de massa com auto valor m , além de spin j .

5.7 Paridade e Inversão Temporal

Nessa seção pretendemos estender o tratamento anterior para abranger, nas representações obtidas de $\widetilde{P}_+^\dagger = \mathbf{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$, operadores que representem as transformações discretas de inversão temporal e paridade.

Denotaremos por $\hat{F} = \hat{P}, \hat{T}$, os elementos do grupo de Lorentz ou Poincaré correspondendo à paridade e inversão temporal, definidos em (5.5) e (5.6), respectivamente e consideraremos ainda elementos correspondentes $\tilde{F} = \tilde{P}, \tilde{T}$, com $\tilde{F}^2 = I_{2 \times 2}$, os quais agem em elementos da cobertura $\mathbf{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ ⁷.

Por definição, para $a = (a_0, \mathbf{a})$ temos:

$$\lambda(\tilde{P})a = \hat{P}a = (a_0, -\mathbf{a}), \quad \text{e} \quad \lambda(\tilde{T})a = \hat{T}a = (-a_0, \mathbf{a}). \quad (5.25)$$

A ação de $\tilde{F}$ nos elementos de $SL(2, \mathbb{C})$ é obtida através da ação análoga de $\hat{F}$ em elementos de $P_+^\dagger$. Para isso, notemos que, das formas explícitas (2.60) e (2.61) dos geradores de rotações (J_i) e boosts (K_i) em $SO(1, 3)^\dagger$, temos:

$$\hat{F}J_j = J_j\hat{F}, \quad \text{e} \quad \hat{F}K_j = -K_j\hat{F}.$$

Portanto, para rotações $R' = e^{\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{J}}$ e para boosts $B' = e^{\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{K}}$, obtemos:

$$\hat{F}^{-1}R'\hat{F} = R', \quad \text{e} \quad \hat{F}^{-1}B'\hat{F} = B'^{-1}.$$

Assim, é natural assumirmos que para os elementos $R = e^{i\theta \mathbf{y} \cdot \mathbf{1}}$ e $B' = e^{i\eta \mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}$ em $SL(2, \mathbb{C})$, que correspondem à R' e B' via o homomorfismo (5.8) (veja seção 2.4.3), devemos ter:

$$\tilde{F}^{-1}R\tilde{F} = R, \quad \text{e} \quad \tilde{F}^{-1}B\tilde{F} = B^{-1}.$$

Agora, usando para $A \in SL(2, \mathbb{C})$ arbitrário a decomposição polar $A = BR$, e também que $B = B^\dagger$ e $R^\dagger = R^{-1}$ temos:

⁷Explicitamente, estamos estendendo a cobertura (5.8) à uma cobertura 2:1 do grupo de Poincaré completo pelo grupo $\mathbf{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C}) \rtimes \{\tilde{P}, \tilde{T}, \tilde{PT}\}$, considerando $\lambda(\tilde{F}) = \tilde{F}$. As imposições que faremos a seguir a respeito da ação de $\tilde{F}$ sobre elementos de $\mathbf{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$ equivalem à imposição de que λ , assim estendido, seja ainda um homomorfismo.

$$\tilde{F}^{-1}A\tilde{F} = \tilde{F}^{-1}B\tilde{F}\tilde{F}^{-1}R\tilde{F} = B^{-1}R = (R^\dagger B)^{-1} = A^{\dagger-1}. \quad (5.26)$$

Relações que, junto com (5.25), definem $\tilde{P}$ e $\tilde{T}$.

Sejam agora $F = P, T$ os operadores representando $\tilde{F}$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ que carrega uma determinada representação U de $\widetilde{P_+^\dagger}$.

Considerando $F = U_{(0, \tilde{F})}$ e em consistência com o produto (5.11) em $\mathbf{R}^4 \times SL(2, \mathbb{C})$ assumiremos que sua ação sobre $U(a, A)$ seja dada por:

$$F^{-1}U_{(a, A)}F = U_{(\hat{F}a, \tilde{F}^{-1}A\tilde{F})} = U_{(\hat{F}a, A^{\dagger-1})}. \quad (5.27)$$

Como P e T são operadores representando transformações discretas, temos primeiramente que decidir se são unitários e lineares ou anti-unitários e anti-lineares (veja seção 4.1), o que faremos através da **imposição física da positividade da energia dos estados** $F\psi$, $\psi \in \mathcal{H}$.

Começemos notando que pela equação acima (5.27), para subgrupos uniparamétricos da forma $\gamma^\nu(t) = (a^\nu(t), I)$, com $a^{\nu\mu} = t\delta^{\nu\mu}$, $\nu, \mu = 0, 1, 2, 3$, temos:

$$F^{-1}U_{\gamma^\nu(t)}F\psi(p) = U_{(\hat{F}a^\nu(t), I)}\psi(p) = e^{i\hat{F}a^\nu(t)p}\psi(p)$$

e assim, para $\nu = 0$, com (5.25), temos:

$$U_{\gamma^0(t)}P\psi(p) = Pe^{itp}\psi(p) = e^{\pm itp}P\psi(p) \quad \text{e} \quad U_{\gamma^0(t)}T\psi(p) = e^{\mp itp}T\psi(p),$$

onde os sinais superior e inferior em cada equação correspondem à operadores lineares e anti-lineares, respectivamente.

Dessa forma, para que a energia $E = -i \frac{d(U_{\gamma^0(t)})}{dt} \Big|_{t=0}$ não mude de sinal sob a ação de F , P deve ser linear e T anti-linear, e assim:

$$P\psi(p) = \eta\psi(\hat{P}p) \quad \text{e} \quad T\psi(p) = \tau\psi^*(\hat{T}p), \quad (5.28)$$

onde η e τ são matrizes.

Se $D(A)$ é a forma matricial de $U_{(0,A)}$, então:

$$U_{(0,A)}\psi(p) = D(A)\psi(\lambda(A)^{-1}p),$$

e assim, por (5.27) e (5.28) acima temos:

$$\begin{aligned} D(A)^{\dagger-1}\psi(\lambda(A^{\dagger})p) &= \eta D(A)\eta^{-1}\psi(\hat{P}\lambda(A)^{-1}\hat{P}p) \\ &= \tau D^*(A)\tau^{-1}\psi(\hat{T}\lambda(A)^{-1}\hat{T}p). \end{aligned}$$

A igualdade dos argumentos de ψ implica⁸

$$\hat{P}p = \hat{T}p = (p_0, -\mathbf{p}) := \tilde{p} \quad (5.30)$$

A igualdade matricial para τ :

$$D(A)^{\dagger-1} = \tau D^*(A)\tau^{-1},$$

por sua vez, pode sempre ser satisfeita tomando-se

$$\tau = \beta D(\varepsilon) \quad |\beta| = 1 \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.31)$$

o que decorre imediatamente da relação $\varepsilon A^* \varepsilon^{-1} = A^{\dagger-1}$, satisfeita por toda matriz $A \in SL(2, \mathbb{C})$, como facilmente se verifica.

Assim, as equação (5.31) e (5.28) fornecem a forma matricial de um operador representando a inversão temporal para qualquer representação $D(A)$ de $SL(2, \mathbb{C})$, e portanto toda representação de $SL(2, \mathbb{C})$ pode ser estendida para abranger inversões temporais.

Deve-se notar que como $\varepsilon^2 = -I$, o operador representando reversão temporal em representações com $D(-I) = -I$ — sob as quais transformam-se as componentes de um espinor que descreve o estado de uma partícula elemen-

⁸Para verificar tal fato usa-se primeiramente a famosa igualdade $(\mathbf{p} \cdot \sigma)^2 = |\mathbf{p}|^2 I$ para mostrar-se que:

$$\tilde{p} = p^2 \underline{p}^{-1}, \quad (5.29)$$

e então o resultado segue facilmente da definição (5.8) de λ .

tar de spin semi-inteiro — e representações com $D(I) = I$ — relacionadas, respectivamente, à partículas de spin inteiro — diferem por uma fase.

Ou seja, para uma dada escolha de β , uma delas é projetiva, tal fato está diretamente relacionado à uma regra de superseleção impedindo a superposição de estados fermiônicos e bosônicos.

Por fim, a equação matricial para η pode ser escrita como:

$$D^\dagger(A)\eta D(A) = \eta, \quad (5.32)$$

e se uma tal matriz η existe ela representa o operador de paridade para uma representação de dimensão finita $D(A)$.

De fato, como $SL(2, \mathbb{C})$ é simples e conexo, suas representações de dimensão finita são sempre completamente redutíveis⁹ e portanto soma direta de representações $D = D^{(j_1, j_2)}$ (veja seção 2.4).

Agora, para uma tal representação, os gerados $\mathbf{L}$ de rotações $R \in SU(2)$ são hermitianos enquanto os geradores $\mathbf{N}$ de boosts B são anti-hermitianos, de forma que $D^\dagger(R) = D^{-1}(R)$ e $D^\dagger(B) = D(B)$, e portanto a relação 5.32 implica:

$$\eta^{-1}D(R)\eta = D(R), \quad \text{e} \quad \eta^{-1}D(B)\eta = D^{-1}(B).$$

O que por sua vez significa que η comuta com cada L_k e anti-comuta com cada N_k , representando então paridade.

Relembrando agora que j_1 e j_2 estão associados aos auto-valores dos operadores $(\mathbf{L} - i\mathbf{N})/2$ e $(\mathbf{L} + i\mathbf{N})/2$, respectivamente, vemos que a ação de P corresponde a intercambia-los, ou seja, se as componentes ψ_n de um vetor $\psi \in \mathcal{H}$ se transformam de acordo com $D^{(j_1, j_2)}$, então as componentes de $P\psi$ transformam-se de acordo com $D^{(j_2, j_1)}$ e dessa forma só podem pertencer a $\mathcal{H}$ se esse espaço carregar também uma tal representação.

Resumindo, concluímos que as únicas representações irredutíveis do grupo

⁹Tal fato é provado usando a existência de uma única álgebra de Lie compacta cuja complexificação é a álgebra de Lie do grupo simples dado, que a redutibilidade de uma álgebra de transformações lineares é preservada por complexificação e que a uma representação de dimensão finita de um grupo simples e conexo pode sempre ser obtida por exponenciação de uma representação finita de sua álgebra de Lie. Para detalhes veja por exemplo [6].

$SL(2, \mathbb{C})$ que admitem uma extensão abrangendo a operação de paridade são as da forma $D^{(j,j)}$.

Para lidarmos com paridade sobre funções de onda que se transformam de acordo com representações $D^{(j_1, j_2)}$, $j_1 \neq j_2$ teremos que lidar com representações redutíveis da forma $D^{(j_1, j_2)} \oplus D^{(j_2, j_1)}$, representando portanto um par de partículas (de fato uma partícula e sua anti-partícula) elementares. Veremos tal procedimento em prática no capítulo 6 a seguir.

Capítulo 6

Equações e Funções de Onda

Nesse capítulo aplicaremos o método descrito na seção 3.3 para obter equações de onda cujas soluções são funções descrevendo partículas elementares com spin j e massa m . O tratamento que faremos segue e detalha, principalmente, [6] e [54].

Conforme vimos fazendo, identificaremos o quociente $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ pelo grupo de estabilidade $\mathbb{R}^4 \rtimes \mathrm{SU}(2)$ com o hiperboloide $\mathcal{O}_m^+$ dado por $p^2 = m^2$, $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$, onde temos a medida — nesse caso invariante — $d\mu(p) = d^3\mathbf{p}/2p_0$ (5.16).

Já vimos em (5.24) que as funções espinoriais $\psi(p)$ correspondendo a uma partícula de spin j e massa m , se transformam de acordo com:

$$(U_{(a,A)}^{m,+j}\psi)(p) = e^{iap} D^{(j,0)}(A) \psi(\lambda(A)^{-1}p).$$

No entanto, pela discussão que fizemos na seção 5.7, sabemos que, para que possamos construir um espaço cujas funções de onda representem partículas de massa m e spin j admitindo transformações de paridade, é necessário que partamos da representação $D(A) = (D^{(j,0)} \oplus D^{(0,j)})(A)$, restrinjamos-a então à $\mathrm{SU}(2)$ para então induzir uma representação unitária de $\widehat{P}_+^\uparrow$.

Nesse caso as funções de onda se transformam via:

$$U_{(a,A)}^m \psi(p) = e^{iap} D(A) \psi(\lambda(A)^{-1}p),$$

mas agora temos o dobro de componentes que necessitamos para a descrição

de uma partícula elementar, e conforme discutimos, uma função ψ definida numa órbita $p^2 = m^2$ se transformará de acordo com uma representação irredutível $U^{m,j}$ se e somente se a função $\psi(\overset{\circ}{p})$, $\overset{\circ}{p} = (m, 0, 0, 0)$ se transformar de acordo com uma representação irredutível D^j de $SU(2)$. Vimos também que tais funções são selecionadas pelo requerimento:

$$\Gamma\psi(\overset{\circ}{p}) = \psi(\overset{\circ}{p}),$$

onde Γ é o projetor da representação $D^j \subset D$ de $SU(2)$. Tal requerimento equivale, em acordo com (3.17), à equação de onda:

$$\Gamma(p)\psi(p) = \psi(p), \quad (6.1)$$

onde $\Gamma(p) = D(B_p)\Gamma D^{-1}(B_p)$, de acordo com (3.30).

A equação acima (6.1) representa a equação de onda covariante relativística mais geral selecionando uma partícula massiva de spin j , as equações que veremos nesse capítulo são casos particulares dela para determinados pares $(D(A), \Gamma)$.

Antes de passarmos a explorar alguns casos explícitos, vejamos como escrevemos o produto escalar entre funções nesse espaço. Por (3.29) temos:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{\mathcal{O}_m^+} \langle D^{-1}(B_p)\psi_1(p), D^{-1}(B_p)\psi_2(p) \rangle_{\mathcal{H}} \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}. \quad (6.2)$$

Agora:

$$\begin{aligned} D^{\dagger-1}(B_p)D^{-1}(B_p) &= D((B_p^\dagger B_p)^{-1}) \\ &\stackrel{(5.20)}{=} D((\underline{p}/m)^{-1}) \\ &\stackrel{(5.29)}{=} D(\underline{\tilde{p}}/m), \end{aligned}$$

onde $\tilde{p} = (p_0, -\mathbf{p})$ (veja (5.30)). E assim podemos escrever o produto (6.2) acima como:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{\mathcal{O}_m^+} \langle \psi_1(p), D(\underline{\tilde{p}}/m)\psi_2(p) \rangle_{\mathcal{H}} \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}. \quad (6.3)$$

Uma forma mais simples ainda pode ser usada no caso em que estamos num subespaço onde as funções de onda no referencial de repouso são auto-estados do operador paridade η , por exemplo, se $\eta\phi(\overset{\circ}{p}) = \phi(\overset{\circ}{p})$ para todo ϕ em $\mathcal{H}$.

Nesse caso, particularmente para o estado

$$\phi(\overset{\circ}{p}) = (U_{(0, B_p^{-1}}\psi_2)(\overset{\circ}{p}) = D^{-1}B_p\psi_2(p),$$

temos

$$\eta D^{-1}B_p\psi_2(p) = \pm D^{-1}B_p\psi_2(p). \quad (6.4)$$

Assim:

$$D^{\dagger-1}(B_p)D^{-1}(B_p)\psi_2(p) \stackrel{(6.4)}{=} D^{\dagger-1}(B_p)\eta D^{-1}(B_p)\psi_2(p) \stackrel{(5.32)}{=} \eta\psi_2(p)$$

e portanto podemos, nesse caso, escrever o produto (6.2) como:

$$\langle\psi_1, \psi_2\rangle = \int_{\mathcal{O}_m^+} \langle\psi_1(p), \eta\psi_2(p)\rangle_{\mathcal{H}} \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0}. \quad (6.5)$$

6.1 Campo de Dirac

Como uma primeira aplicação vamos derivar as equações de onda para um campo de massa m e spin $1/2$, admitindo operações de paridade, para isso, conforme discutimos anteriormente, devemos induzir uma representação unitária no espaço de funções de $\mathcal{O}_m^+$ em $\mathbb{C}^4$ cujas componentes se transformem de acordo com a representação $D(A) = D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, ou seja, uma função nesse espaço se transforma como:

$$U_{(a,A)}^m\psi(p) = e^{ipa}D(A)\psi(\lambda(A)^{-1}p),$$

no entanto temos agora 4 componentes ao invés das duas necessárias para a descrição de uma partícula elementar de spin $1/2$.

Usando a base de $\mathcal{H}$ na qual a representação é bloco diagonal, isto é:

$$D(A) = \begin{bmatrix} D^{(1/2,0)}(A) & 0 \\ 0 & D^{(0,1/2)}(A) \end{bmatrix} \stackrel{(2.56)}{=} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{\dagger-1} \end{bmatrix},$$

e como $R^{\dagger-1} = R$ para todo $R \in SU(2)$, vemos que todo subespaço formado por funções da forma $\begin{bmatrix} \alpha\phi(p) \\ \beta\phi(p) \end{bmatrix}$, onde $\phi(p) \in \mathbb{C}^{2 \times 1}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, é invariante no referencial de repouso, sob a ação do grupo de estabilidade $SU(2)$, e pode ser usado, junto com seu complementar, para selecionar subespaços irredutível no espaço de funções de onda.

Em nosso caso, visando obter a equação de Dirac, vamos usar os subespaços $\mathcal{H}^{\pm}$ gerados pelas funções da forma $\psi_{\pm} = \begin{bmatrix} \phi \\ \pm\phi \end{bmatrix}$, os quais estão associados aos operadores de projeção:

$$\Gamma_{\pm} = (I \pm \gamma_0)/2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \gamma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

uma vez que $\Gamma_{\pm}\psi_{\pm} = \psi_{\pm}$.

Facilmente se verifica, a partir da forma bloco diagonal de $D(A)$, que $D^{\dagger}(A)\gamma_0 D(A) = \gamma_0$, e assim, conforme (5.32) e discussão seguinte, o operador de paridade nesse caso é simplesmente $\eta = \gamma_0$.

Observemos ainda que estados da forma $\psi_{\pm}$ são, no referencial de repouso, auto estados de paridade: $\gamma_0\psi_{\pm}(\overset{\circ}{p}) = \pm\psi_{\pm}(\overset{\circ}{p})$. Dessa forma, por (6.5), o produto escalar entre funções ψ é, dentro de cada subespaço $\mathcal{H}^{\pm}$, dado por:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int \langle \psi_1(p), \gamma_0 \psi_2(p) \rangle_{\mathcal{H}} \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0} = \int \not{x}_{1k}(p) \psi_{2k}(p) \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0}, \quad (6.7)$$

onde $\not{x}(p) = \psi^{\dagger}(p)\gamma_0$, e usamos excepcionalmente, para coerência com a literatura, um produto escalar linear com respeito à segunda variável.

Para obter a equação de onda correspondendo aos projetores $\Gamma_{\pm}$, comecemos notando que, para a matriz γ_0 :

$$\begin{aligned}
D(B_p)\gamma_0 D^{-1}(B_p) &= \begin{bmatrix} B_p & 0 \\ 0 & B_p^{\dagger-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_p^{-1} & 0 \\ 0 & B_p^{\dagger} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & B_p B_p^{\dagger} \\ (B_p B_p^{\dagger})^{-1} & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(5.20)}{=} \begin{bmatrix} 0 & \underline{p}/m \\ (\underline{p}/m)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \\
&\stackrel{(5.29)}{=} \begin{bmatrix} 0 & \underline{p}/m \\ \underline{\tilde{p}}/m & 0 \end{bmatrix} \stackrel{(5.7)}{=} \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 & p^0 \sigma_0 + p^i \sigma_i \\ p^0 \sigma_0 - p^i \sigma_i & 0 \end{bmatrix} \\
&= p^{\mu} \gamma_{\mu},
\end{aligned}$$

onde $\gamma_i = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{bmatrix}$, junto com γ_0 acima, são uma representação das chamadas matrizes de Dirac.

Usando essa relação, vemos que os operadores $\Gamma_{\pm}(p)$ que aparecem nas equações de onda (6.1), são nesse caso (isto é, a partir da representação $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ e com os projetores $\Gamma_{\pm}$) dados por:

$$\Gamma_{\pm}(p) = D^{-1}(B_p)[(I \pm \gamma_0)/2]D(B_p) = (m \pm p^{\mu} \gamma_{\mu})/2m, \quad (6.8)$$

de modo que, multiplicando as equações de onda $\Gamma_{\pm}(p)\psi(p) = \psi(p)$, correspondendo aos subespaços irredutíveis $\mathcal{H}^{\pm}$, por $(p^{\mu} \gamma_{\mu} \mp m)$, e usando $p_{\mu} p^{\mu} = m^2$, obtemos:

$$(p^{\mu} \gamma_{\mu} \mp m)\psi(p) = 0. \quad (6.9)$$

Que correspondem à equação de Dirac e sua conjugada [7], as quais descrevem uma partícula elementar de spin 1/2 e sua antipartícula, respectivamente, e que nesse contexto estabelecem a irredutibilidade de spin.

6.2 Campo de Proca

Nessa seção queremos obter equações de onda descrevendo uma partícula massiva de spin 1. Conforme vimos uma tal partícula pode ser descrita por uma função de onda com 3 componentes $\tilde{\phi}(p) = \{\tilde{\phi}_k(p)\}_{k=1}^3$, cada componente representando uma projeção de spin, a qual se transforma (veja equação 5.24) de acordo com:

$$U_{(a,A)}^{m,1} \tilde{\phi}(p) = e^{ipa} D^{(1,0)}(A) \tilde{\phi}(\lambda(A)^{-1}p).$$

Sabemos no entanto que o espaço que carrega a representação $D^{(1,0)}$ não admite uma operação de paridade, e portanto podemos considerar um espaço carregando a representação $D^{(1,0)} \oplus D^{(0,1)}$, o que faremos na seção 6.5, ou considerar a representação $D = D^{(1/2,1/2)}$.

Nesse caso nossa função de onda possui 4 componentes $\phi(p) = \{\phi^\mu(p)\}_{\mu=0}^3$, e devemos considerar a projeção no subespaço carregando a representação irreduzível D^1 na decomposição $D^{(1/2,1/2)}|_{SU(2)} \simeq D^0 \oplus D^1$.

Conforme vimos na seção 2.4.3, podemos realizar $D^{1/2,1/2}$ como a representação fundamental de $SO(1,3)^\uparrow$, isto é $D(A) = D^{1/2,1/2}(A) = \lambda(A)$, agindo no espaço de Minkowski, e nessa realização o subespaço que carrega a representação irreduzível D^1 é formado por vetores com a componente temporal nula, e portanto são selecionados pelo projetor:

$$\Gamma_\nu^\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(\delta_\nu^\mu - g_\nu^\mu). \quad (6.10)$$

Agora, usando a parametrização 5.19, por exemplo, é possível calcular explicitamente:

$$D(B_p)^\mu_\nu = \lambda(B_p)^\mu_\nu = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & m + \frac{p_1^2}{m+p_0} & \frac{p_1 p_2}{m+p_0} & \frac{p_1 p_3}{m+p_0} \\ p_2 & \frac{p_1 p_2}{m+p_0} & m + \frac{p_2^2}{m+p_0} & \frac{p_2 p_3}{m+p_0} \\ p_3 & \frac{p_1 p_3}{m+p_0} & \frac{p_2 p_3}{m+p_0} & m + \frac{p_3^2}{m+p_0} \end{bmatrix},$$

de tal forma que os projetores em (6.1) tomam a forma:

$$\Gamma(p) = D^{-1}(B_p)^\mu_\rho \Gamma^\rho_\sigma D(B_p)^\sigma_\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{p^\mu p_\nu}{m^2} - g^\mu_\nu \right), \quad (6.11)$$

e assim, (6.1) se escreve:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{p^\mu p_\nu}{m^2} - g^\mu_\nu \right) \phi^\nu(p) = \phi^\mu(p).$$

Multiplicando ambos os lados por p_μ obtêm-se:

$$p_\mu \phi^\mu = 0, \quad (6.12)$$

que é a equação de Proca [45], a qual impõe a irredutibilidade de spin.

Como $D(A) = \lambda(A)$, as equações (5.2) e (5.32) implicam que o operador de paridade é simplesmente $\eta = g = ||g_{\mu\nu}||$ e assim, o produto (6.5) toma a forma:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_{\mathcal{O}_m^+} \langle \phi_1(p), g \phi_2(p) \rangle_C \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0} = \int_{\mathcal{O}_m^+} (\phi_1^\dagger)^\mu(p) (\phi_2)_\mu(p) \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0}. \quad (6.13)$$

No espaço de coordenadas a equação de Proca (6.12) é escrita como:

$$\partial_\mu \phi^\mu = 0$$

e pode ser sintetizada com a equação de Klein Gordon $(\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi^\nu$ — a qual impõe a irredutibilidade da massa e é satisfeita claramente por cada componente ϕ^μ , uma vez que $p^\mu p_\mu = 0$ — através da expressão:

$$\partial_\mu B^{\mu\nu} - m^2 \phi^\nu = 0, \quad (6.14)$$

onde

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi^\nu - \partial^\nu \phi^\mu. \quad (6.15)$$

6.3 Campos Tensoriais Massivos

O caso tratado do campo de Proca pode ser generalizado [46] para obter equações de campos descrevendo partículas massivas com spin inteiro $2j$, $j \in \mathbb{N}/2$ qualquer e simétricas por paridade.

Para tal, consideramos a representação $D = D^{(j,j)}$ realizada no espaço de tensores de rank $2j$, simétricos e de traço nulo, relativos à $SO(1,3)^\uparrow$ (veja proposição 2.17), a qual age num tensor $\phi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}}$ de cordo com $D(A) = \lambda(A) \otimes \lambda(A) \otimes \dots \otimes \lambda(A)$, ou seja:

$$(D(A)\phi)^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}} = \lambda(A)_{\nu_1}^{\mu_1} \lambda(A)_{\nu_2}^{\mu_2} \dots \lambda(A)_{\nu_{2j}}^{\mu_{2j}} \phi^{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{2j}},$$

nesse caso o projetor Γ correspondente representação irredutível de maior peso D^{2j} na decomposição:

$$D^{(j,j)}|_{SU(2)} \simeq D^{2j} \oplus D^{2j-1} \oplus \dots \oplus D^0.$$

Em analogia à (6.10) pra o campo de Proca $j = 1/2$, e pelo que vimos na seção 2.4.3, é dado por:

$$\Gamma_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{2j}}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}} = \frac{1}{2}(\delta_{\nu_1}^{\mu_1} - g_{\nu_1}^{\mu_1}) \frac{1}{2}(\delta_{\nu_2}^{\mu_2} - g_{\nu_2}^{\mu_2}) \dots \frac{1}{2}(\delta_{\nu_{2j}}^{\mu_{2j}} - g_{\nu_{2j}}^{\mu_{2j}}), \quad (6.16)$$

ou, retirando índices:

$$\Gamma = \bigotimes_{r=1}^{2j} \frac{1}{2} \left(\delta - g \right),$$

e assim, em analogia à (6.11) obtemos:

$$\Gamma(p) = \bigotimes_{r=1}^{2j} \frac{1}{2} \left\| \frac{p^{\mu_r} p_{\nu_r}}{m^2} - g_{\nu_r}^{\mu_r} \right\|. \quad (6.17)$$

Novamente, multiplicando a equação de onda $\Gamma(p)\phi(p) = \phi(p)$ por p_{m_1} ¹ obtemos:

$$p_{\mu_1} \phi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}}(p) = 0, \quad (6.18)$$

que é uma generalização da equação de Proca.

Observe que a equação acima pode ser resolvida com respeito à $\phi^{0\mu_2 \dots \mu_{2j}}$ fornecendo:

$$\phi^{0\mu_2 \dots \mu_{2j}} = \frac{p_k \phi^{k\mu_2 \dots \mu_{2j}}}{p_0},$$

onde $k = 1, 2, 3$.

A qual permite expressar as componentes $\phi^{00\dots 0}$ (partícula de spin 0), $\phi^{00\dots 0k}$ (partícula de spin 1), $\phi^{00\dots 0k_1 k_2}$ (partícula de spin 2), e em geral $\phi^{0\dots 0k_1 \dots k_{2j-r}}$ (com $r < 2j$ zeros, correspondendo à uma partícula de spin $2j-r$), em termos das $4j+1$ componentes independentes $\phi^{k_1 k_2 \dots k_{2j}}$, correspondendo à partícula de maior spin $2j$.

Claramente o operador de paridade nesse caso é a generalização do caso $j = 1/2$ tratado na seção anterior:

$$\eta = \bigotimes_{r=1}^{2j} g_r,$$

de forma que o produto escalar (6.5) é nesse caso:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \int_{\mathcal{O}_m^+} (\phi_1^\dagger)^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}}(p) (\phi_2)_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}}(p) \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0}. \quad (6.19)$$

¹Note-se que a multiplicação por p_{m_k} com qualquer $k \in \{1, \dots, 2j\}$ fornece equações equivalentes à (6.18) acima uma vez que ϕ é totalmente simétrico.

6.4 Campos de Rarita-Schwinger

Para a construção de campos que descrevam partículas massiva de spin semi-inteiro arbitrário $2j + 1/2$, $j \in \mathbb{N}/2$, os exemplos do campo de Dirac e de campos tensoriais massivos sugerem o uso da representação produto tensorial:

$$D = (D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}) \otimes D^{(j,j)},$$

e então os campos $\psi = \psi_{\alpha}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}}$ carregam um índice de Dirac $\alpha = 1, 2, 3, 4$, e são simétricas e de traço nulo com relação aos $2j$ índices tensoriais $\mu_k = 0, 1, 2, 3$.

O projetor na representação irredutível de maior spin $2j + 1/2$ de $SU(2)$ é dado pelo produto tensorial do projetor de Dirac (6.6) pelo projetor tensorial (6.16):

$$\Gamma = \frac{I + \gamma_0}{2} \bigotimes_{r=1}^{2j} \frac{1}{2} \left(\delta - g \right). \quad (6.20)$$

Dessa forma, (6.8) e (6.17) implicam:

$$\Gamma(p) = \frac{m + p^{\mu} \gamma_{\mu}}{2m} \bigotimes_{r=1}^{2j} \frac{1}{2} \left\| \frac{p^{\mu_r} p_{\nu_r}}{m^2} - g_{\nu_r}^{\mu_r} \right\|, \quad (6.21)$$

e então, multiplicando a equação de onda $\Gamma(p)\psi(p) = \psi(p)$ por $(p^{\mu} \gamma_{\mu} - m)$ ou por p^{μ_1} , respectivamente, obtemos:

$$(p^{\mu} \gamma_{\mu} - m) \psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}}(p) = 0 \quad (6.22)$$

e

$$p_{\mu_1} \psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}}(p) = 0. \quad (6.23)$$

As equações acima, junto com $(p^2 - m^2) \psi^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}}(p)$, são chamadas equações de Rarita-Schwinger [47].

Notemos que essas equações não asseguram a irredutibilidade de spin, o projetor 6.20 seleciona uma irredutível $D^{1/2}$ em $[D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}]_{SU(2)}$ e

uma irredutível D^{2j} em $D^{(j,j)}$, e portanto no produto

$$[(D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}) \otimes D^{(j,j)}]_{|SU(2)}$$

seleciona o par

$$D^{1/2} \otimes D^{2j} \sim D^{2j+1/2} \oplus D^{2j-1/2}.$$

Podemos confirmar tal fato notando que (6.23) diminui o número de componentes independentes de ψ , em acordo com a discussão subsequente à (6.18), para $4(4j+1)$, e então (6.23) diminui esse número pela metade, a exemplo do campo de Dirac. Deste modo ψ tem $8j+2 = (4j+2) + (4j)$ componentes independentes, como se espera na descrição de um par de partículas possuindo spins $2j+1/2$ e $2j-1/2$, respectivamente.

A descrição de partículas elementares a partir dos campos de Rarita-Schwinger necessita então do uso de projetores adicionais, no caso com o maior número de aplicações $j=1/2$, os projetores nas componentes de spin $3/2$ e $1/2$ podem ser encontrados, por exemplo, em [20].

O operador de paridade nesse caso toma a forma:

$$\eta = \gamma_0 \bigotimes_{r=1}^{2j} g,$$

de modo que o produto (6.5), usando (6.7) e (6.19), toma a forma:

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = \int_{\mathcal{O}_m^+} (\psi_1(p))_{\alpha}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}} (p) (\psi_2)_{\alpha; \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{2j}} (p) \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0}, \quad (6.24)$$

onde novamente, $\not{p}(p) = \psi^\dagger(p) \gamma_0$.

6.5 Campos de spin j

O formalismo de Dirac descrito acima usado para descrever um espaço de funções representando um par elementar partícula-antipartícula com spin $1/2$, simétricas sob paridade, assim como as leis de transformação de tais funções sob a ação do grupo de Poincaré, pode ser generalizado para a descrever um par análogo, porém com spin arbitrário j .

Com tal intuito, parte-se da representação redutível:

$$D(A) = [D^{(j,0)} \oplus D^{(0,j)}](A),$$

de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, no espaço $2(2j+1)$ -dimensional $\mathcal{H}$, e usaremos novamente a base de $\mathcal{H}$ que faz tal representação bloco diagonal, isto é:

$$D(A) = \begin{bmatrix} D^{(j,0)}(A) & 0 \\ 0 & D^{(0,j)}(A) \end{bmatrix} \stackrel{(2.57)}{=} \begin{bmatrix} D^{(j,0)}(A) & 0 \\ 0 & D^{(j,0)}(A^{\dagger-1}) \end{bmatrix}.$$

Podemos então usar projetores $\Gamma_{\pm}$ definidos novamente por (6.6), onde agora $\Gamma_{\pm}, I, \gamma_0 \in \mathbb{C}^{2(2j+1) \times 2(2j+1)}$ e $1 \in \mathbb{C}^{2j+1 \times 2j+1}$.

A matriz γ_0 ainda satisfaz $D^{\dagger}(A)\gamma_0 D(A) = \gamma_0$, representando o operador paridade, e além disso os estados $\psi_{\pm} = \begin{bmatrix} \phi \\ \pm\phi \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2(2j+1) \times 1}$, selecionados por $\Gamma_{\pm}\psi_{\pm} = \psi_{\pm}$, são novamente auto-estados de paridade no referencial de repouso: $\gamma_0\psi_{\pm}(\vec{p}) = \pm\psi_{\pm}(\vec{p})$. Portanto o produto escalar entre funções nos $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}^{\pm} = \Gamma_{\pm}(\mathcal{H})$ é ainda dado por (6.7).

Nesse caso no entanto, $D^{(j,0)}(\underline{p})$ é um polinômio de grau $2j$ em p , e as relações anteriores $D^{(1/2,0)}(\underline{p}) = p^{\mu}\sigma_{\mu}$ e $D^{(0,1/2)}(\underline{\tilde{p}}) = p^0\sigma_0 - p^i\sigma_i$ são generalizadas por:

$$D^{(j,0)}(\underline{p}) = \sigma_{\mu_1 \dots \mu_{2j}} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_{2j}} \quad \text{e} \quad D^{(0,j)}(\underline{\tilde{p}}) = \tilde{\sigma}_{\mu_1 \dots \mu_{2j}} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_{2j}},$$

onde $\sigma_{\mu_1 \dots \mu_{2j}}, \tilde{\sigma}_{\mu_1 \dots \mu_{2j}} \in \mathbb{C}$ e $\mu_i = 0, 1, 2, 3, \dots$

Então, para a matriz γ_0 , temos:

$$\begin{aligned} D(B_p)\gamma_0 D^{-1}(B_p) &= \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{\mu_1 \dots \mu_{2j}} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_{2j}} \\ \tilde{\sigma}_{\mu_1 \dots \mu_{2j}} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_{2j}} & 0 \end{bmatrix} \\ &= \gamma_{\mu_1 \dots \mu_{2j}} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_{2j}}, \end{aligned}$$

onde $(\gamma_{\mu_1 \dots \mu_{2j}} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{\mu_1 \dots \mu_{2j}} \\ \tilde{\sigma}_{\mu_1 \dots \mu_{2j}} & 0 \end{bmatrix})$ são matrizes de Dirac generalizadas.

Com isso, as equações de onda (6.1) correspondendo aos subespaços irredutíveis $\mathcal{H}^\pm$ são dadas por:

$$(\gamma_{\mu_1 \dots \mu_{2j}} p^{\mu_1} \dots p^{\mu_{2j}} \pm m) \psi(p) = 0, \quad (6.25)$$

que são generalizações da equação de Dirac e sua conjugada descrevendo uma partícula elementar de spin j e sua antipartícula. Campos desse tipo foram tratados, por exemplo, em [24] e [59].

6.6 Campos De Bargmann-Wigner

Como uma última generalização do campo de Dirac que também pode ser usada para descrever partículas com spin arbitrário consideremos a representação produto tensorial de $2j = 1, 2, \dots$ representações de Dirac:

$$D = \bigotimes_{r=1}^{2j} (D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}),$$

onde $\overset{r}{S} = D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$, a qual age num campo $\psi_{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_{2j}}$, $\Lambda_k = 1, 2, 3, 4$, por:

$$U_{(a,A)} \psi(p) = e^{ipa} \left(\bigotimes_{r=1}^{2j} \overset{r}{S}(A) \right) \psi(\lambda(A)^{-1} p).$$

O operador de paridade nesse caso é claramente dado por $\gamma_0 \otimes \dots \otimes \gamma_0$, de forma que o projetor Γ correspondendo aos autoestados de paridade no referencial de repouso que generaliza (6.6) é:

$$\Gamma = \bigotimes_{r=1}^{2j} \frac{\overset{r}{I} + \overset{r}{\gamma}_0}{2}, \quad (6.26)$$

e então (6.8) fornece:

$$\Gamma(p) = \bigotimes_{r=1}^{2j} \frac{\gamma_{\mu}^r p^{\mu} + m}{2}. \quad (6.27)$$

Multiplicando então a equação de onda $\Gamma(p)\psi(p) = \psi(p)$ por $(\gamma^{\nu} p_{\nu} - m)$, $i = 1, 2, \dots, 2j$, e usando a irredutibilidade da massa $p^2 = m^2$, obtemos uma série de $2j$ equações espinoriais:

$$(\gamma^{\nu} p_{\nu} - m)_{a_i \Lambda_k} \psi_{\Lambda_1 \dots \Lambda_k \dots \Lambda_{2j}} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2j. \quad (6.28)$$

As quais são generalizações da equação de Dirac que podem ser usadas para descrever uma partícula elementar com spin j arbitrário chamadas de equações de Bargmann-Wigner [5].

Note que cada uma dessas equações divide pela metade o número de componentes independentes de ψ , que passa a ter então 2^{2j} componentes independentes, não representando assim uma única partícula elementar.

De fato, a partir do exemplo do campo de Dirac podemos concluir que o subespaço selecionado pelas equações (6.28) corresponde a tensores que se transformam sob a ação de $SU(2)$, no referencial de repouso, de acordo com a representação $D^{1/2} \otimes \dots \otimes D^{1/2}$ ($2j$ fatores) e assim, pelo que vimos na seção 2.4.2, podemos selecionar a representação irredutível de maior peso D^j impondo que ψ seja totalmente simétrica.

6.7 Campos de massa nula

Nessa seção investigamos equações correspondendo à partículas de massa nula.

Nesse caso consideramos a órbita $\mathcal{O}_0^{\pm}$, que corresponde ao cone $p_0^2 = \mathbf{p}^2$ no espaço de momentos e para qual, conforme vimos (seção 5.5), o grupo de estabilidade corresponde é:

$$\tilde{E}^2 = \{A \in SL(2, \mathbb{C}) : A = \begin{bmatrix} e^{i\phi/2} & e^{-i\phi/2}z \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{bmatrix} = (z, \phi), z \in \mathbb{C}, \phi \in [0, 4\pi)\},$$

o qual corresponde ao produto semi direto $\mathbb{R}^2 \rtimes S'^1 = \{(z, \phi)\}$, e possui representações unitárias $L^{r,\tau}$, $r > 0$, $\tau = 0, 1$ e L^j $j = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots$

As representações $L^{r,\tau}$ são não triviais no subgrupo não compacto $\mathbb{R}^2$ e induzem representações que descreveriam partículas com spin contínuo, por essa razão definiremos partículas de massa nula através de representações $U^{0,\pm,j}$ de $SL(2, \mathbb{C})$, induzida pelas representações L^j , explicitamente dada por:

$$L_{(z,\phi)}^j, \quad j = 0, \pm 1/2, \pm 1, \dots$$

Para obter a forma explícita de $U^{0,\pm,j}$ segue-se um tratamento análogo ao usado para obter a forma explícita das representações massivas (veja seção 5.6), exceto que nesse caso a matriz² B_p usada para definir a seção $\sigma(p) = (0, B_p)$ do cone $X = \mathcal{O}_0^\pm \simeq \mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})/\tilde{E}^2$ em $\mathbb{R}^4 \rtimes SL(2, \mathbb{C})$, deve mapear o representante $\hat{p} = (1/2, 0, 0, 1/2)$ (que corresponde à matriz $\hat{p} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$) em $p \in X$ dado, de forma que a equação (5.20) não é mais satisfeita, valendo apenas:

$$B_p \hat{p} B_p^\dagger = \underline{p}.$$

Como as representações L^j são unidimensionais, as funções $u(p)$ do espaço que carrega as representações induzidas possuem apenas uma componente, a qual se transforma, por (3.26) e em analogia à (5.22), de acordo com:

$$(U_{(a,A)}^{0,+,j} u)(p) = e^{iap} L^j (B_p^{-1} A B_{\lambda(A)^{-1}p}) u(\lambda(A)^{-1}p), \quad (6.29)$$

onde agora $B_p^{-1} A B_{\lambda(A)^{-1}p} \in \tilde{E}^2$.

Para aplicarmos o tratamento apresentado na seção 3.3, consideremos primeiramente uma representação irredutível $D^{(j_1, j_2)}$ de $SL(2, \mathbb{C})$, e imponhamos que sua restrição à $\tilde{E}^2$ seja trivial no subgrupo não compacto

²Uma possível parametrização para B_p , nesse caso, é:

$$B_p = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{p_0 + p_3}}{\sqrt{p_0 - p_3} e^{i\pi/2}} & \frac{\sqrt{p_0 - p_3} e^{-i\pi/2}}{\sqrt{p_0 + p_3}} \\ \frac{\sqrt{p_0 - p_3} e^{i\pi/2}}{\sqrt{p_0 + p_3}} & \frac{\sqrt{p_0 + p_3}}{\sqrt{p_0 - p_3} e^{-i\pi/2}} \end{bmatrix},$$

onde $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$.

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{C} \right\} := T^2 \subset \tilde{E}^2,$$

ou seja, para todo ω no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ que carrega a representação induzida e todo $T \in T^2$, devemos ter:

$$D(T)\omega(\overset{\circ}{p}) = \omega(\overset{\circ}{p}), \quad \overset{\circ}{p} = (1/2, 0, 0, 1/2).$$

Agora, utilizando as formas explicitas $n_k = i\sigma_k/2$ e $l_k = \sigma_k/2$ dos geradores $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ é fácil constatar que os geradores comutantes do subgrupo T^2 acima são $l_1 + n_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $l_2 - n_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, de forma que a igualdade acima implica:

$$(L_1 + N_2)\omega(\overset{\circ}{p}) = 0, \quad \text{e} \quad (L_2 - N_1)\omega(\overset{\circ}{p}) = 0.$$

Se considerarmos então a base $\mathbf{A} = \mathbf{L} - i\mathbf{N}$, $\mathbf{B} = \mathbf{L} + i\mathbf{N}$ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ e os respectivos operadores de levantamento e abaixamento $A^\pm = A_1 + iA_2$ e $B^\pm = B_1 + iB_2$, é fácil ver que as igualdades acima implicam

$$A^+\omega(\overset{\circ}{p}) = 0, \quad \text{e} \quad B^-\omega(\overset{\circ}{p}) = 0$$

e que portanto $\omega(\overset{\circ}{p})$ é auto-estado de A_3 com o máximo autovalor j_1 e de B_3 com o mínimo autovalor $-j_2$, isto é:

$$A_3\omega(\overset{\circ}{p}) = j_1\omega(\overset{\circ}{p}), \quad \text{e} \quad B_3\omega(\overset{\circ}{p}) = -j_2\omega(\overset{\circ}{p}).$$

Notemos então que a restrição física de partículas com spin discreto nesse caso seleciona um subespaço com apenas 1 componente, e portanto correspondendo a uma representação irredutível L^j do grupo de estabilidade, selecionando assim funções de onda correspondendo à uma partícula elementar.

As equações acima, por $\mathbf{L} = (\mathbf{A} + \mathbf{B})/2$, podem ser escritas ainda como $L_3\omega(\overset{\circ}{p}) = (j_1 - j_2)\omega(\overset{\circ}{p})$, que num referencial de Lorentz arbitrário, e usando que $p_0 = |\mathbf{p}|$, toma a forma:

$$(\mathbf{L} \cdot \mathbf{p})\omega(p) = p_0(j_1 - j_2)\omega(p), \quad (6.30)$$

o que mostra que $\omega(p)$ são auto estados com helicidade $(j_1 - j_2)$.

A equação acima é a equação de onda para uma partícula elementar de massa nula e spin $(j_1 - j_2)$ associada à representação $D^{(j_1, j_2)}$.

Como as representações de dimensão finita de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ são completamente redutíveis temos no caso geral uma soma direta de representações $D^{(j_1, j_2)}$ e a equação acima (6.30) seleciona uma partícula elementar para cada fator.

Se quisermos definir paridade como uma simetria dessas partículas, o mesmo raciocínio usado para partículas massivas é válido e temos de usar representações da forma $D^{(j, j)}$ — que sempre descreve uma partícula escalar (spin 0) — ou então usar representações $D^{(j_1, j_2)} \oplus D^{(j_2, j_1)}$, e as partículas assim definidas possuem dois estados de polarização.

Exemplo 6.1. Para descrever uma partícula com massa nula e spin 1/2 não simétrica por paridade podemos tomar $D(A) = D^{(1/2, 0)}$, nesse caso $\mathbf{L} = \sigma/2$, e $\omega(p)$ possui a princípio duas componentes, a equação (6.30) toma então a forma:

$$(\sigma \cdot \mathbf{p})\omega(p) = p_0\omega(p),$$

que é a equação de Weyl[61] para o neutrino, e reduz a 1 o número de componentes independentes de ω .

Exemplo 6.2. Para uma partícula não massiva, de spin 1 e simétrica por paridade, podemos tomar $D(A) = D^{(1, 0)} \oplus D^{(0, 1)}$. Com isso, $\omega = \omega_1 \oplus \omega_2$, sendo que cada $\omega_i, i = 1, 2$ possui, a princípio, 3 componentes independentes $(\omega_i)_a, a = 1, 2, 3$. Para tal representação temos $(L_k^{(1, 0)})_{mn} = (L_k^{(0, 1)})_{mn} = i\varepsilon_{kmn}$, e então a equação (6.30) implica:

$$\mathbf{p} \times \omega_1 = -ip_0\omega_1, \quad \text{e} \quad \mathbf{p} \times \omega_2 = ip_0\omega_2,$$

onde $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_k = \varepsilon_{ijk}u_iv_j$ são as componentes do produto vetorial de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em $\mathbb{R}^3$.

Tomando o produto escalar com $\mathbf{p}$ nas equações acima obtemos:

$$\mathbf{p} \cdot \omega_1 = \mathbf{p} \cdot \omega_2 = 0.$$

Por fim, se fizermos $\omega_1 = \mathbf{B} - i\mathbf{E}$ e $\omega_2 = \mathbf{B} + i\mathbf{E}$, as equações acima se reescrevem como:

$$\mathbf{p} \times \mathbf{E} = p_0 \mathbf{B}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = 0$$

e

$$\mathbf{p} \times \mathbf{B} = -p_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

que são as equações livres de Maxwell, as quais reduzem o número de componentes independentes de $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ para dois, correspondendo a dois possíveis estados de polarização da luz.

Capítulo 7

Conclusão

A abordagem grupo teórica das teorias de campo livres quântico relativísticas proposta, que provavelmente consiste da mais importante aplicação à física da teoria de representações, evidencia o papel fundamental da noção de invariância relativística nas bases dessa teorias.

De fato, nesse contexto, as equações de campo utilizadas para a descrição de partículas elementares emergem naturalmente e podem ser unificadas na forma de uma única equação (6.1). Todos os campos abordados (além de outros, como por exemplo os tratados em [8] e [31]) são casos particulares dessa equação para determinadas representações de $SL(2, \mathbb{C})$ e respectivos projetores em algum sub-espaco irreduzível.

O formalismo usado para obter as equações pode ser usada para impor qualquer grupo topológico com grupo de simetria. Em particular pode ser usado para derivar equações de onda covariantes com respeito à $SO(3)$, ao grupo euclidiano $\mathbb{R}^3 \rtimes SO(3)$, à $SU(3)$ — o qual é importante para a descrição de sistemas hadrônicos — ao grupo conforme $SO(4, 2)$ ou ao grupo generalizado de Poincaré $\mathbb{R}^n \rtimes SO(n - 1, 1)$, de importância na teorias de cordas.

Sistemas de várias partículas não interagentes também podem ser introduzidos e o formalismo apresentado pode ser usado, por exemplo, para mostrar que a imposição de localidade em tais teorias de campo implica nas conexão spin - estatística usual.[54].

A abordagem grupo teórica possui também importantes aplicações nas chamadas teorias de campos construtivistas, dedicadas a construção de modelos de teorias quânticas de campo satisfazendo certos postulados, dentre os quais, em geral, a imposição de covariância relativística.

Outra aplicação possível do tratamento apresentado se dá na construção de modelos não-triviais de TQC em espaços com determinadas simetrias, como por exemplo no espaço de de Sitter [63], [3].

Apêndice A

Medidas em Grupos Topológicos

Na teoria das representações de grupos infinitos, é de fundamental importância a noção de um processo de integração de funções sobre o grupo G considerado, que seja invariante pela ação do grupo, e notável o fato de que para a grande classe dos grupos topológicos separáveis e localmente compactos tal noção possa ser formulada.

Nessa seção apresentaremos alguns fatos sobre medidas e integração, particularmente sobre grupos, que usaremos ao longo do texto.

Detalhes da teoria e demonstrações dos resultados podem ser encontrados em [42], [22], [49], [56], [6] e [2].

A.1 Medidas e Integração

Um processo de integração pode ser definido, de forma geral, num espaço mensurável, o qual é um par $(S, \mathcal{B})$ formado por um conjunto S munido de uma σ -álgebra: uma família de conjuntos $\mathcal{B}$ satisfazendo

1. $\emptyset \in \mathcal{B}$;
2. $E \in \mathcal{B} \Rightarrow E^C = S - E \in \mathcal{B}$;
3. $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow E_1 \cup E_2 \cup \dots \in \mathcal{B}$.

Os conjuntos de $\mathcal{B}$ são chamados *conjuntos mensuráveis*. Note que pela imposição acima, $\mathcal{B}$ contém $S = \emptyset^C$ e é também fechado por intersecções contáveis $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B} \Rightarrow E_1 \cap E_2 \cap \dots \in \mathcal{B}$.

É fácil mostrar também que dado uma família $\mathcal{S}$ de conjuntos de S sempre existe uma σ -álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ mínima¹ contendo todos os conjuntos de $\mathcal{S}$. Tal σ -álgebra é dita *gerada por $\mathcal{S}$* .

Em particular, se S é um espaço topológico com topologia τ , a σ -álgebra gerada pela topologia de S é dita a *σ -álgebra de Borel* associada a tal topologia. O par $(S, \mathcal{B}(\tau))$ é dito um *Espaço de Borel* e os conjuntos de $\mathcal{B}(\tau)$ são ditos *conjuntos de Borel*.

Num espaço mensurável definimos uma medida σ -finita² em $(S, \mathcal{B})$ como uma função μ de $\mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$ satisfazendo:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. $\mu(E_1 \cup E_2 \cup \dots) = \mu(E_1) + \mu(E_2) + \dots$, sempre que E_i forem mutuamente disjuntos, e
3. Existem conjuntos mensuráveis $E_1, E_2, \dots$ tais que $S = E_1 \cup E_2 \cup \dots$ e $\mu(E_j) < \infty$, $j = 1, 2, \dots$

Uma função entre espaços de mensuráveis $f: (S_1, \mathcal{B}_1) \rightarrow (S_2, \mathcal{B}_2)$ é dita um *função mensurável* se a pré imagem por f de qualquer conjunto mensurável é também mensurável: $F \in \mathcal{B}_2 \Rightarrow f^{-1}(F) \in \mathcal{B}_1$. Uma função mensurável, bijetora e com inversa mensurável é dita um isomorfismo entre espaços mensuráveis. No caso de espaços de Borel, dizemos que f é uma *função de Borel* se for mensurável e um *isomorfismo de Borel*, se for um isomorfismo entre espaços mensuráveis.

Note que uma função contínua entre espaços topológicos é sempre uma função mensurável entre os respectivos espaços de Borel.

Note ainda a analogia entre espaços mensuráveis e espaços topológico e entre funções contínuas e mensuráveis. Claramente, assim como no caso

¹No sentido de que qualquer outra σ -álgebra em S com tal propriedade contém $\mathcal{B}(\mathcal{S})$.

²Todas as medidas com que lidaremos serão σ -finitas e portanto omitiremos tal termo no que se segue.

de espaços topológicos, podemos formar subespaços mensuráveis e espaços produto mensuráveis.

Se $f: (S_1, \mathcal{B}_1) \rightarrow (S_2, \mathcal{B}_2)$ é mensurável e μ é uma medida em $(S_1, \mathcal{B}_1)$, então $\mu_f: (S_2, \mathcal{B}_2) \rightarrow [0, \infty]$ definida por:

$$\mu_f(F) = \mu(f^{-1}(F)), \forall F \in \mathcal{B}_2 \quad (\text{A.1})$$

é uma medida em $(S_2, \mathcal{B}_2)$.

A partir de uma medida μ num espaço mensurável $(S, \mathcal{B})$ podemos definir um *processo de integração* $\int_S f(x) d\mu(x)$ para certas funções f em S , a serem especificadas, da seguinte forma:

1. Para a *função característica* χ_E associada à um conjunto $E \in \mathcal{B}$ dada por:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \notin E \end{cases}$$

definimos:

$$\int_S \chi_E(x) d\mu(x) := \mu(E).$$

2. Para uma função simples: $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{E_i}$, $a_i \geq 0$, $E_i \in \mathcal{B}$ definimos:

$$\int_S \phi(x) d\mu(x) := \sum_{i=1}^n a_i \int_S \chi_{E_i}(x) d\mu(x).$$

3. Para uma função $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável³ e não negativa definimos:

$$\int_S f(x) d\mu(x) := \sup_{\phi \in \Lambda} \int_S \phi(x) d\mu(x),$$

onde

$$\Lambda = \{\phi: S \rightarrow \mathbb{R} : \phi \text{ é simples, e } 0 \leq \phi \leq f\}.$$

³Onde subentende-se que $\mathbb{R}$ é um espaço mensurável com a σ -álgebra de Borel associada a topologia usual.

4. Para uma função real mensurável e integrável, isto é: $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, $|f(x)|d\mu(x) < \infty^4$, definimos:

$$f_{\pm}(x) := \text{operatornamemax}\{\pm f(x), 0\},$$

de forma que $f = f_+ - f_-$, e então:

$$\int_S f(x)d\mu(x) = \int_S f_+(x)d\mu(x) - \int_S f_-(x)d\mu(x).$$

5. Por fim, para $f: S \rightarrow \mathbb{C}$, $f(x) = \Re(f(x)) + i\Im(f(x))$, integrável, definimos:

$$\int_S f(x)d\mu(x) = \int_S \Re(f(x))d\mu(x) + i \int_S \Im(f(x))d\mu(x).$$

Claramente podemos definir ainda a integração sobre um subconjunto $E \in \mathcal{B}$ qualquer por:

$$\int_E f(x)d\mu(x) = \int_S \chi_E f(x)d\mu(x).$$

Notemos que o espaço das funções complexas integráveis sobre S é um espaço vetorial e que $f \mapsto \int_S f(x)d\mu(x)$ é um funcional linear e positivo no sentido que $\int_S f(x)d\mu(x) \geq 0$ sempre que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in S$.

Notemos ainda que se $\alpha: (S_1, \mathcal{B}_1) \rightarrow (S_2, \mathcal{B}_2)$ é mensurável e μ_α é a medida (A.1) em $(S_2, \mathcal{B}_2)$ induzida pela medida μ em $(S_1, \mathcal{B}_1)$, então, para toda função $f: S_2 \rightarrow \mathbb{C}$ mensurável e integrável e todo conjunto mensurável $F \in \mathcal{B}_2$ vale a seguinte formula de mudança de variáveis:

$$\int_F f(y)d\mu_\alpha(y) = \int_{\alpha^{-1}(F)} f(\alpha(x))d\mu(x). \quad (\text{A.2})$$

Duas funções complexas mensuráveis f e g em S são ditas equivalentes ($f \sim g$) se $f(x) = g(x)$ μ -q.t.p (em quase toda parte com relação a μ , isto

⁴Note que se f é mensurável então $|f|$ também o é. Analogamente, a mensurabilidade das funções $f_{\pm}$, $\Re(f)$, $\Im(f)$ nos itens abaixo decorrem da mensurabilidade da respectiva f , de forma que as integrais estão bem definidas.

é: para todo $x \in S - E$ onde E é um conjunto de medida nula ($\mu(E) = 0$). A relação " $\sim$ " é claramente uma relação de equivalência entre funções mensuráveis.

De maneira geral o espaço das funções complexas mensuráveis⁵ e p -integráveis, $p \in [1, \infty)$, módulo igualdade μ -q.t.p:

$$L^p(S, \mu) = \{f: S \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é mensurável, } \int_S |f(x)|^p d\mu(x) < \infty\} / \sim \quad (\text{A.3})$$

é um espaço de Banach⁶ com a norma:

$$\|f\|_p = \left(\int_S |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{A.4})$$

A qual é induzida por um produto escalar somente no caso de $L^2(S, \mu)$, o qual é ainda um espaço de Hilbert com produto

$$\langle f, g \rangle = \int_S f(x) g^*(x) d\mu(x) \quad (\text{A.5})$$

e a identificação μ -q.t.p. têm a função de fazer com que as normas (A.4) e o produto (A.5) acima sejam não degenerados.

Se $(S, \mathcal{B})$ é um espaço espaço de Borel, é possível mostrar ainda que o conjunto das funções complexas contínuas de suporte compacto:

$$C_c(S) = \{f: X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua e } \text{supp}(f) \text{ é compacto} \}$$

é um subespaço denso de $L^p(S, \mu)$, onde o suporte de f é o conjunto:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in S : f(x) \neq 0\}}$$

e " $\overline{A}$ " denota o fecho relativo à topologia em S .

Vimos então como um processo de integração pode ser definido num espaço mensurável através de uma medida.

⁵Definições completamente análogas podem ser feitas para funções reais.

⁶Resultado conhecido como Teorema de Riesz-Fisher, para uma prova veja por exemplo [49] ou [2].

Para o caso de um espaço de Borel localmente compacto e Hausdorff uma associação no sentido inverso é possível para certas medidas, chamadas *medidas de Radon*, as quais são medidas na σ -álgebra de Borel de S satisfazendo:

1. $\mu(K) < \infty$, para todo compacto $K \subset S$.
2. $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U, K \text{ compacto}\}$, para todo aberto $U \subset S$.
(regularidade interior)
3. $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \supseteq E, U \text{ aberto}\}$, para todo $E \in \mathcal{B}$. (regularidade exterior)

E para as quais temos:

Teorema A.1 (Teorema de Riesz). *Seja S é um espaço de Borel localmente compacto e Hausdorff e seja $\Lambda : C_c(S) \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear positivo ($f(x) \in [0, \infty) \forall x \in S \Rightarrow \Lambda(f) \in [0, \infty)$). Então existe uma única medida de Radon μ em S tal que:*

$$\Lambda(f) = \int_S f(x) d\mu(x),$$

para toda $f \in C_c(S)$.

Para uma prova veja, por exemplo [49], [42] ou [22].

Com tal teorema temos uma identificação entre processos de integração (funcionais lineares positivos) de funções complexas contínuas de suporte compacto em um espaço de Borel localmente compactos e Hausdorff e medidas de Radon nesse espaço.

A.2 Medidas em Grupos Topológicos

O par $(G, \mathcal{B})$ formado por um grupo G munido com uma σ -álgebra na qual $x, y \rightarrow xy^{-1}$ é uma função mensurável é dito um *grupo mensurável*. Claramente um grupo topológico é naturalmente um grupo mensurável com relação à σ -álgebra de Borel, ao qual chamamos *grupo de Borel*.

Uma medida μ num grupo mensurável é dita *invariante à esquerda* se

$$\mu(E) = \mu(gE), \quad \text{para todos } g \in G, E \in \mathcal{B}, \quad (\text{A.6})$$

onde $gE = \{x \in G : x = gy, \quad y \in E\}$ é por definição mensurável, nesse caso, o respectivo processo de integração satisfaz:

$$\int_G f(x) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(gx) \stackrel{(A.2)}{=} \int_G f(g^{-1}x) d\mu(x).$$

De maneira análoga define-se uma medida invariante à direita.

A grande importância da compacticidade local na teoria das representações advém do fato⁷ de que todo grupo topológico localmente compacto, separável⁸ e Hausdorff G admite uma medida de Radon invariante à esquerda (ou à direita) — chamada *medida de Haar* — a qual é única a menos de uma constante multiplicativa positiva, isto é, se μ_1 e μ_2 são medidas invariantes à esquerda (ou à direita) em G , então existe $\lambda \in (0, \infty)$ tal que $\mu_1(E) = \lambda\mu_2(E)$ para todo conjunto de Borel E .

Infelizmente uma medida invariante à esquerda não é em geral invariante à direita, em particular, se μ é uma medida invariante à esquerda em G , então é fácil ver que, para qualquer $g \in G$, a função μ_g definida por $\mu_g(E) = \mu(Eg)$ é também uma medida invariante à esquerda, logo:

$$\mu_g = \Delta(g)\mu_g,$$

onde $\Delta: G \rightarrow (0, \infty)$ é chamada **função modular**.

Não é difícil constatar que Δ é um homomorfismo contínuo de G no grupo multiplicativo dos números reais com sua topologia usual (veja por exemplo [42]). A equação acima implica que, para $f \in C_c(G)$:

$$\int_G f(xg) d\mu(x) = \Delta(g^{-1}) \int_G f(x) d\mu(x).$$

Notando-se que $\nu(E) = \mu(E^{-1})$ é uma medida invariante à direita, e

⁷Conhecido como Teorema de Haar e cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [42], [22] ou [49].

⁸A condição de separabilidade pode ser retirada se considerarmos conjuntos de Baire ao invés de conjuntos de Borel, como é feito em [22], mais não consideraremos tais refinamentos.

usando argumentos de continuidade, pode-se mostrar ainda (veja por exemplo [6]) que para toda função $f \in C_c(G)$ vale:

$$\int_G f(x) d\mu(x) = \int_G \frac{f(x^{-1})}{\Delta(x)} d\mu(x).$$

No caso em que $\Delta(g) = 1$ para todo $g \in G$ as medidas invariantes à esquerda são também invariantes à direita e o grupo é então dito unimodular.

Vários grupos com que estaremos lidando são unimodulares, de fato, pode-se mostrar grupos abelianos, grupos compactos, grupos discretos e grupos de Lie simples são todos unimodulares (veja por exemplo [55]). Nesse caso a fórmula de inversão acima toma a forma:

$$\int_G f(x) d\mu(x) = \int_G f(x^{-1}) d\mu(x). \quad (\text{A.7})$$

Para alcançar as conclusões que desejamos precisamos ainda mais alguns ingredientes. Duas medidas μ e ν num espaço de medidas $(S, \mathcal{B})$ são ditas *equivalentes* se possuem os mesmo conjuntos de medida nula, como usualmente a tal relação divide as possíveis medidas de $(S, \mathcal{B})$ em classes de equivalência, e o teorema de Radon-Nikodym afirma que existe uma função real mensurável em S , chamada densidade de ν com respeito à μ e denotada por $d\mu/d\nu$ tal que:

$$\int_S f(x) d\mu(x) = \int_S f(x) \frac{d\mu}{d\nu}(x) d\nu(x).$$

É imediato constatar que num grupo topológico localmente compacto Hausdorff e separável G todas as medidas invariantes à esquerda são equivalentes entre si e que são ainda equivalentes às medidas invariantes à direita, e assim que G possui uma única classe de medidas invariante tanto à esquerda como à direita, a qual é a única classe de medidas em G que é invariante à esquerda ou à direita.

Por fim, podemos enunciar o resultado atribuído à Weil (veja por exemplo [56] ou [35]) e que afirma que se um grupo G mensurável analítico⁹ admite

⁹Um espaço mensurável é dito *padrão* se é isomorfo enquanto espaço mensurável à um subespaço de Borel de um espaço métrico completo separável. Espaços mensuráveis mais

uma medida invariante à esquerda ou à direita, então G admite uma única classe de medidas σ -finita invariante à esquerda e à direita e existe exatamente uma topologia para G que o converte em um grupo topológico separável e localmente compacto cuja estrutura de Borel correspondente coincide com a original de G .

Ou seja, os grupos topológicos localmente compactos e separáveis são exatamente aqueles que permitem a definição de um processo invariante de integração de funções mensuráveis e integráveis.

gerais são os espaços mensuráveis analíticos, os quais são imagens por de subconjuntos mensuráveis de espaços padrão por funções mensuráveis do espaço padrão em questão num espaço métrico completo separável. Dada uma medida μ num espaço mensurável analítico S sempre existe um conjunto de N com $\mu(N) = 0$ tal que $S - N$ é um espaço mensurável padrão.

Apêndice B

Espaços Homogêneos

Os conceitos de ação de grupos topológicos ou grupos de Lie em espaços topológicos ou variedades diferenciáveis e de espaços homogêneos é de fundamental importância na teoria das representações induzidas, por essa razão apresentamos alguns resultados e definições nesses tópicos que serão usados ao longo do texto.

Começamos definindo G -espaços¹:

Definição B.1 (G - espaço). Se G é um grupo topológico e X um espaço topológico, dizemos que X é um G -espaço (à esquerda), ou que G age continuamente (à esquerda) em X se:

1. A cada G está associado um homeomorfismo $x \mapsto gx$ de X em X .
2. A identidade em G está associada ao homeomorfismo identidade em X .
3. O mapa $(g, x) \mapsto gx$ é contínuo de $G \times X$ em X .
4. $(g_1g_2)x = g_1(g_2x)$, para todos $g_1, g_2 \in G$ e todo $x \in X$.

Uma definição análoga pode ser dada para ação à direita, e de fato dada uma ação à esquerda podemos definir uma ação à direita declarando xg como $g^{-1}x$, e os resultados concernentes às ações à esquerda podem ser convertidos para ações à direita e vice versa.

¹Veja por exemplo [6] ou [14].

Se G é um grupo de Lie e X uma variedade diferenciável², substituindo homeomorfismo por difeomorfismo e contínua por diferenciável na definição acima, dizemos que X é um G -espaço suave.

A *órbita* de $x \in X$ (sob a ação de G) é o conjunto:

$$Gx = \{gx : g \in G\}.$$

Dizemos que G *age transitivamente* em X se para quaisquer $x_1, x_2 \in X$ existe $g \in G$ tal que $x_2 = gx_1$ ou equivalentemente se a órbita de qualquer ponto em X coincide com X . Se X é Hausdorff e G age transitivamente em X , então X é homogêneo.³

O *grupo de estabilidade* (ou de isotropia) H_x de um elemento $x \in X$ é subconjunto de G que mantém x fixo:

$$H_x = \{g \in G : gx = x\}.$$

Se H_x é o grupo de estabilidade de $x \in X$ e $x' = gx$, então o grupo de estabilidade de x' é $H_{x'} = gH_xg^{-1}$, de tal forma que os grupos de estabilidade de quaisquer dois pontos em um G -espaço homogêneo são isomorfos.

Passamos a apresentar a construção de espaço homogêneos de grande importância como quocientes de grupos topológicos por subgrupos fechados.

Seja G um grupo topológico e $H \subset G$ um subgrupo fechado. Para cada $g \in G$ o *coset à esquerda* de g com relação a H é o conjunto:

$$gH = \{gh : h \in H\}.$$

O conjunto dos cosets à esquerda relativos à H é denotado por G/H . Dois elementos $g_1, g_2 \in G$ estão no mesmo coset se e somente se $g_1^{-1}g_2 \in H$, nesse caso escrevemos $g_1 \sim g_2$. O conjunto G/H é feito um espaço topológico, o qual se mostra Hausdorff se G o for, com a topologia quociente determinada pela projeção natural $g \mapsto gH$ de G em G/H .

Associando à cada g_0 o mapa $gH \mapsto g_0gH$, o espaço G/H faz de G/H

²Veja por exemplo [29] ou [57]

³Um espaço topológico X em geral é dito *homogêneo* se para qualquer par de elementos $x, y \in X$ existe um homeomorfismo $f: X \rightarrow X$ com $f(x) = y$.

um G -espaço homogêneo.

No caso em que G é um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie fechado o resultado análogo é de que G/H possui uma estrutura diferenciável tal que $g \mapsto gH$ é uma submersão suave, e de forma análoga, a ação de G em G/H definida acima faz de G/H um G -espaço homogêneo.

Definição B.2 (Mapa Equivariante). Um mapa $f: X \rightarrow Y$ entre G -espaços X e Y é dito *equivariante* se:

$$f(gx) = gf(x),$$

para todo $g \in G$ e todo $x \in X$.

A importância do exemplo acima advém do fato de que todo G -espaço homogêneo pode ser realizado como um espaço quociente de G por um subgrupo fechado H , de fato, temos:

Teorema B.1 (Caracterização de G -espaços homogêneos). *Seja X um G -espaço homogêneo e $x \in X$ um ponto qualquer. Então o grupo de isotropia H_x de x é um subgrupo fechado de G e o mapa $F: G/H_x \rightarrow X$ definido por $F(gH_x) = gx$ é um homeomorfismo equivariante (ou G -homeomorfismo).*

Para uma demonstração veja, por exemplo, [14].

No caso em que G é um grupo de Lie e X é um G -espaço homogêneo suave, então H_x é um subgrupo de Lie fechado imerso em G e F um difeomorfismo equivariante (ou G -difeomorfismo) [29].

As afirmações acima justificam as identificações que fizemos, ao longo do texto, entre órbitas Gx em G -espaços e os respectivos grupos quocientes G/H_x .

Referências Bibliográficas

- [1] Warren Ambrose. Spectral resolution of groups of unitary operators. *Duke Math. J.*, 11(3):589–595, 09 1944.
- [2] João C. A. Barata. “curso de física-matemática . ”. http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html. Acessado em: 06-06-2016.
- [3] João C. A. Barata, Christian D. Jäkel, and Jens Mund. The $\mathcal{P}(\varphi)_2$ Model on the de Sitter Space. 2013.
- [4] V. Bargmann. On unitary ray representations of continuous groups. *Annals of Mathematics*, 59(1):1–46, 1954.
- [5] V Bargmann and E P Wigner. Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 34(5):211–223, 1948.
- [6] A. O. Barut and R Raczka. *Theory of Group Representations and applications*. World Scientific, 1986.
- [7] P A M Dirac. The Quantum Theory of the Electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 117(778):610–624, 1928.
- [8] P A M Dirac. Relativistic Wave Equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 155(886):447–459, 1936.

- [9] A. Dvurecenskij. *Gleason's Theorem and Its Applications*. Mathematics and its Applications. Springer Netherlands, 2013.
- [10] Y. Feng and Katherine E. Stange. The spin homomorphism $SL_2(\mathbb{C}) - SO_{1,3}(\mathbb{R})$. <http://math.colorado.edu/~kstange/papers/notes-Spin.pdf>. Acessado em: 06-11-2015.
- [11] Ferdinand Georg Frobenius and Jean Pierre ed. Serre. *Ferdinand Georg Frobenius gesammelte Abhandlungen, Band I*. Springer Verlag,, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.
- [12] Ferdinand Georg Frobenius and Jean Pierre ed. Serre. *Ferdinand Georg Frobenius gesammelte Abhandlungen, Band II*. Springer Verlag,, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.
- [13] Ferdinand Georg Frobenius and Jean Pierre ed. Serre. *Ferdinand Georg Frobenius gesammelte Abhandlungen, Band III*. Springer Verlag,, Berlin, Heidelberg, New York, 1968.
- [14] S.A. Gaal. *Linear Analysis and Representation Theory*. Dover books on mathematics. Dover Publications, 2010.
- [15] I.M. Gel'fand and M.A. Naïmark. Unitary representations of the Lorentz group. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 11:411–504, 1947.
- [16] I.M. Gel'fand and M.A. Naïmark. Unitary representations of the classical groups. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 36:1–288, 1950.
- [17] Andrew M. Gleason. Groups Without Small Subgroups. *Annals of Mathematics*, 56(2):193–212, 1952.
- [18] Roger Godement. Sur une généralisation d'un théorème de Stone. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 218:901–903, 1944.
- [19] K. Gottfried and T.M. Yan. *Quantum Mechanics: Fundamentals*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer New York, 2003.

- [20] Helmut Haberzettl. Propagation of a massive spin-3/2 particle. *arXiv preprint nucl-th/9812043*, 1998.
- [21] B. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2003.
- [22] P. R. Halmos. *Measure Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1976.
- [23] E. Hewitt and K.A. Ross. *Abstract Harmonic Analysis*. Number v. 2 in Abstract Harmonic Analysis. Springer Berlin Heidelberg, 1994.
- [24] Hans Joos. Group Theoretical Models of Local Field Theories. *Journal of Mathematical Physics*, 5(2), 1964.
- [25] Y. S. Kim. Poincaré Sphere and a Unified Picture of Wigner’s Little Groups. *EPJ Web Conf.*, 78:01005, 2014.
- [26] Young S. Kim and Marilyn E. Noz. Symmetries Shared by the Poincaré Group and the Poincaré Sphere. *Symmetry*, 5:233–252, 2013.
- [27] A.W. Knap. *Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples*. Princeton landmarks in mathematics and physics. Princeton University Press, 2001.
- [28] John M. Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer, 2002.
- [29] Jonh M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer, 2003.
- [30] L.H. Loomis. *An introduction to abstract harmonic analysis*. University series in higher mathematics. Van Nostrand, 1953.
- [31] W Pauli M. Fierz. On Relativistic Wave Equations for Particles of Arbitrary Spin in an Electromagnetic Field. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 173(953):211–232, 1939.

- [32] George W. Mackey. Imprimitivity for representations of locally compact groups i. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 35(9):537–545, 1949.
- [33] George W. Mackey. Induced Representations of Locally Compact Groups I. *Annals of Mathematics*, 55(1):pp. 101–139, 1952.
- [34] George W. Mackey. Induced representations of locally compact groups ii. the frobenius reciprocity theorem. *Annals of Mathematics*, 58(2):pp. 193–221, 1953.
- [35] George W. Mackey. *Unitary Group Representations in Physics, Probability, and Number Theory*. Benjamin Cummings, 1978.
- [36] G.W. Mackey. *The Theory of Unitary Group Representations*. Chicago lectures in mathematics. University of Chicago Press, 1955.
- [37] G.W. Mackey. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 2004.
- [38] D. Montgomery and L. Zippin. Small Subgroups of Finite-Dimensional Groups. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 38(5):440–442, 1952.
- [39] D. Montgomery and L. Zippin. *Topological transformation groups*. Interscience tracts in pure and applied mathematics. Interscience Publishers, 1955.
- [40] V. Moretti. The interplay of the polar decomposition theorem and the Lorentz group. *ArXiv Mathematical Physics e-prints*, November 2002.
- [41] J.R. Munkres. *Topology*. Featured Titles for Topology Series. Prentice Hall, Incorporated, 2000.
- [42] L. Nachbin and L. Bechtolsheim. *The Haar integral*. University series in higher mathematics. Van Nostrand, 1965.

- [43] M. Naïmark. Positive definite operator functions on a commutative group. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, 7:237–244, 1943.
- [44] L. S. Pontryagin. *Topological Groups*. Gordon and Breach, Inc, New York-London-Paris, 1966.
- [45] Al. Proca. Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs. *J. Phys. Radium*, 7(8):347–353, 1936.
- [46] Proca, Al. Théorie non relativiste des particules à spin entier. *J. Phys. Radium*, 9(2):61–66, 1938.
- [47] William Rarita and Julian Schwinger. On a Theory of Particles with Half-Integral Spin. *Phys. Rev.*, 60(1):61, jul 1941.
- [48] M. Reed and B. Simon. *I: Functional Analysis*. Methods of Modern Mathematical Physics. Elsevier Science, 1981.
- [49] W. Rudin. *Real and complex analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill, 1987.
- [50] J.J. Sakurai and J. Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 2011.
- [51] M. Schottenloher. Central extensions of lie algebras and bargmann’s theorem. <http://www.mathematik.uni-muenchen.de/~schotten/LNP-cft-pdf>. Acessado em: 07-07-2016.
- [52] B. Simon. *Representations of Finite and Compact Groups*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Soc.
- [53] M H Stone. Linear Transformations in Hilbert Space: III. Operational Methods and Group Theory. 16(2):172–175, 1930.
- [54] Norbert Straumann. Unitary Representations of the inhomogeneous Lorentz Group and their Significance in Quantum Physics. *Conference: Space and time 100 years after Minkowski*, September:7–12, 2008.

- [55] S. Tornier. Haar measures. https://people.math.ethz.ch/~torniers/download/2014/haar_measures.pdf. Acessado em: 04-02-2016.
- [56] V.S. Varadarajan. *Geometry of Quantum Theory*. Springer New York, 2007.
- [57] F. W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1971.
- [58] G. Warner. *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*. Number v. 1 in Harmonic Analysis on Semi-simple Lie Groups. Springer-Verlag, 1972.
- [59] Steven Weinberg. Feynman rules for any spin. *Phys. Rev.*, 133:B1318–B1332, Mar 1964.
- [60] Steven Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*, volume 1. Cambridge University Press, 1995.
- [61] Hermann Weyl. Gravitation and the electron. *Proc Natl Acad Sci U S A*, 15(4):323–334, 1929.
- [62] E. Wigner. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 6:9–64, mar 1989.
- [63] N. Yokomizo and J. C. A. Barata. Localizability in de Sitter space. *J. Phys.*, A45:365401, 2012.