Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Universos D-Dimensionais e Soluções de Cordas Negras

Rodrigo Dal Bosco Fontana

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências

São Paulo
2006

Resumo

Durante os últimos 90 anos temos visto o grande esplendor que a teoria da relatividade geral de Einstein alcançou em suas diversas previsões. Esta dissertação é um estudo à respeito desta teoria e suas extrapolações. Falaremos de início acerca da primeira solução das equações de Einstein para buracos negros obtida por Karl Schwarzschild em 1916: o buraco negro esféricamente simétrico e sem carga. Trataremos das possíveis órbitas neste tipo de solução bem como de perturbações gravitacionais e escalares. Ainda utilizando a solução de Schwarzschild, adentraremos os tópicos desenvolvidos recentemente em um tratamento semi-clássico da relatividade: a termodinâmica dos buracos negros. Posteriormente estudaremos as novas teorias com base na relatividade geral, que resolvem o problema da hierarquia buscando por dimensões extras em nosso Universo. Em tal contexto analisamos por exemplo como se comportam os buracos negros nestes Universos com mais do que 4 dimensões. Por fim, estudamos perturbações gravitacionais em uma corda negra chegando a averiguar a presença de uma instabilidade para modos com comprimento de onda maiores do que o horizonte da corda (em uma aproximação linear), e demonstramos que em uma das possíveis soluções do problema da Hierarquia (Universos de Randall-Sundrum) não existem atalhos gravitacionais mesmo para branas não planas (extrapolação dos Universos de Randall-Sundrum).

Abstract

Over the last 90 years Einstein's Theory of General Relativity has had a tremendous success in all its predictions. This dissertation is concerned with the study of this theory and its extrapolations. We begin with the first solution of the Einstein equations for black holes obtained by Karl Schwarzschild at 1916: the spherically symmetric black hole without charge, obtaining the orbits and the scalar and gravitational perturbations around the metric. We also consider the recent developments in black hole thermodynamics via a semiclassical approach to the theory. Subsequently, we study the new theories based on general relativity extrapolations, which solve the hierarchy problem proposing extra dimensions in our Universe. In this context we analyze for example the behavior of black holes in Universes with more than 4 dimensions. Finally, we study the gravitational perturbations in a black string showing the presence of unstable modes with wave length bigger than the black string horizon. We also show that in one of the possible Universes which solve the hierarchy problem there are no gravitational shortcuts even for non-flat branes (an extrapolation of Randall-Sundrum Universes).

Gênese

No princípio era a Manifold. E a Manifold estava no espaço-tempo, porque a Manifold era o espaço-tempo. Ela estava no princípio com o espaço-tempo. A Manifold era sem forma e vazia; havia trevas sobre a face dos abertos; e o espaço-tempo se movia sobre a face dos atlas. Então veio a métrica, feita por ela, pois sem ela nada do que foi feito se fez. Porque a métrica era boa e C^∞ . Viu a Manifold que a métrica era lorentziana. E fez o cone-de-luz. Invariante.

Inferno

Um homem que mata outro homem para defender uma idéia, não defende uma idéia, mata um homem.

O desbarato mais absurdo não é o dos bens de consumo, mas o da humanidade: milhões e milhões de seres humanos nasceram para ser trucidados pela história, milhões e milhões que não possuíam mais do que suas simples vidas. De pouco ela lhes iria servir, mas nunca faltou quem de tais miuçalhas tivesse sabido aproveitar-se. A fraqueza alimenta a força para que a força esmague a fraqueza.

Nós não podemos falar nada sobre nós e a nossa época, sem começarmos por definir a loucura. Como é que se explica que nós sejamos seres dotados de razão, enquanto a nossa sociedade é tão ligada à loucura? Como as pessoas que têm toda a sua razão podem agir como se estivessem loucas e acreditar nas idéias loucas que a sociedade lhes impõe? Nós podemos encontrar uma resposta com aqueles que perderam a razão. O que é que os deixou loucos? As pessoas ficam assim quando não chegam a criar uma relação funcional e prática com a sociedade e com a realidade. O que eles fazem? Eles criam uma sociedade que é uma realidade para eles. Eles ficam loucos para não perder a sua razão. A sua loucura é a explicação que eles dão para a loucura que eles encontram no mundo.

Purgatório

Somos a memória que temos e a responsabilidade que assumimos. Sem memória não existimos, sem responsabilidade talvez não mereçamos existir.

Nós não podemos amar, filho. O amor é a mais carnal das ilusões. Amar é possuir, escuta. E o que possui quem ama? O corpo? Para possuir o corpo seria preciso tornar nossa a sua matéria, comê-lo, incluí-lo em nós... E essa impossibilidade seria temporária, porque o nosso próprio corpo passa e se transforma, porque nós não possuímos o nosso corpo (possuímos apenas a sensação dele), e porque, uma vez possuído esse corpo amado, tornar-se-ia nosso, deixaria de ser outro, e o amor, por isso, com o desaparecimento do outro ente, desapareceria...

Possuímos uma alma? Ouve-me em silêncio: Nós não a possuímos. Nem a nossa alma é nossa sequer. Como de resto, possuir uma alma? Entre alma e alma há o abismo de serem almas.

Nós nunca nos realizamos, somos dois abismos - um poço fitando o céu.

Paraíso

*E Deus, como ele é (Vadinho)?
Deus é gordo.*

*Os Deuses são a encarnação do que nunca poderemos
ser. O cansaço de todas as hipóteses...*

*Levaram Deus a todos os lugares da Terra e fizeram-
no dizer: “Não adoreis esta pedra, essa árvore, essa
fonte, essa águia, essa luz, essa montanha, que todos
eles são falsos deuses. Eu sou o único e verdadeiro
Deus.” Deus, coitado dele, estava caindo em flagrante
pecado de orgulho.*

*Deus não precisa do homem pra nada, exceto para ser
Deus.*

*Cada homem que morre é uma morte de Deus. E quando
o último homem morrer, Deus não ressuscitará.*

*Os homens, a Deus, perdoam-lhe tudo, e quanto menos
o compreendem mais lhe perdoam.*

*Deus é o silêncio do Universo, e o homem o grito que
dá sentido a esse silêncio.*

Agradecimentos

Creio que este trabalho não teria se consumado não fossem todas as pessoas que cito aqui e outras que não cito por memória falha. Pela contribuição pessoal de cada, que fez da existência possível.

Devo começar agradecendo ao professor Elcio Abdalla pela orientação, amizade e paciência nestes dois anos.

Agradeço aos amigos e companheiros, sem os quais nada disso (nem mesmo eu) teria sido possível: Admar Menezes, Adriane Beatriz, Amélia Ferrari, Ana Paula Vaz, Anderson Avansi, Andrea Canton, Angela Maria Cordeiro, Arlene Linke, Bruno Charneski, Clóvis Maia, Dário Neto, Diego Cicuta, Elisabeth, Fabiana Weykamp, Felipe Capozzi, Giovania, Heily Wagner, Jéssica Lima, Jeferson Stafusa, João Basso, Leandro Ibiapina, Lena Castro, Luciana Soares, Marco Antonio, Marcelo Schneider, Michele Ferraz, Nilson da Silva, Osmar Lima, Patrícia Rebello, Pedro Ferreira, Rafael Renó, Rita Tibes e Simone Shinomiya.

Aos colegas de trabalho, Bertha Cuadros, Carlos Eduardo, Cecília Chirenti, Davi Giugno, Karlúcio Heleno e Roman Konoplya. Em especial a Carlão Molina e aos colegas da 319, Alan Pavan e Jeferson de Oliveira pela paciência, e muita, nas discussões, e por não me estragarem antes do final deste trabalho. Ao também colega e amigo da 319 Flávio Henrique pela ajuda e lucidez nos momentos de dificuldade.

Ao professor Marco Antonia Barbosa, à minha tia Cila Fontana e a Bruno Franzon (pela paciência, compreensão e dedicação).

À FAPESP pelo apoio financeiro durante o período do mestrado.

Finalmente, a meu familiares, que tornaram tudo isto possível: minha mãe Claci, meu pai Carlos, e minha irmã Duda.

Sumário

1	Introdução	10
2	Espaços-Tempo com Simetria Esférica	16
2.1	Completeza Geodésica em Schwarzschild	23
2.2	Geodésicas em Schwarzschild	27
2.3	Perturbações em torno da solução de Schwarzschild 4-dimensional	34
2.4	Singularidades com Simetria Esférica em mais do que 4 Di- mensões	42
2.5	Algumas Idéias em Termodinâmica de Buracos Negros	46
3	Universos e Soluções das Equações de Einstein com $D > 4$	50
3.1	Introdução ao Mundo Brana: O Modelo de Arkani-Dvali-Dimopoulos (ADD)	51
3.2	Os Modelos de Randall-Sundrum (RS)	56
3.2.1	O Modelo RS-I	56
3.2.2	Os modos Gravitacionais e o Modelo RS-II	63
3.3	Buracos Negros em $D > 4$	66
4	Perturbações em Cordas Negras e Comportamento do Gráviton em Randall-Sundrum	80
4.1	Perturbações Gravitacionais e Instabilidade de Gregory-Laflamme	81
4.2	Estado Final da Corda Negra	91
4.3	Corda Negra de Schwarzschild-Randall-Sundrum	95
4.4	Atalhos Gravitacionais e Comportamento do Gráviton em RS	99
5	Apontamentos Finais	107
A	Horizonte de Eventos em Schwarzschild.	110

Capítulo 1

Introdução

Em 1915, depois de dez anos de trabalho em busca de uma lei gravitacional que respeitasse o postulado da relatividade restrita que afirma que a velocidade da luz é constante, Einstein chegou a equações que formulam a lei de gravitação de maneira geral. As equações de Einstein respeitam a lei fundamental da relatividade restrita, e a lei newtoniana válida para atração entre corpos como no sistema solar. Tais equações tiveram um grande impacto na época por associarem a quantidade de energia contida em uma distribuição de matéria à curvatura que esta quantidade gera no espaço-tempo. As consequências desta associação são dramáticas no limite em que a densidade de matéria é alta: próximo a objetos astronômicos como estrelas por exemplo, o campo gravitacional é muito intenso, e fenômenos como a deflexão da trajetória da luz acontecem.

As equações postuladas por Einstein para descrever uma gravitação generalizada são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2} = T_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

em que $R_{\mu\nu}$ e R são o tensor e escalar de Ricci respectivamente, que estão associados à curvatura do espaço-tempo, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento, que expressa o conteúdo de matéria existente na região e $g_{\mu\nu}$ a métrica, sobre a qual falaremos mais a frente. Embora as equações tenham soluções que se aproximem das descrições newtonianas, há comprovações experimentais diretas, como o desvio do perihélio da órbita de Mercúrio, que não possuem análogos na teoria newtoniana. Não bastando esta previsão sem análogo até a época, para Mercúrio, uma das consequências mais marcantes da teoria é a previsão - algumas décadas mais tarde - de objetos exóticos para os quais as leis da física assumem um comportamento bastante peculiar: *os buracos negros*.

Buracos negros são soluções possíveis da equação de Einstein, em que regiões *armadilhadas* se formam: uma vez dentro de um raio limite destas soluções, o destino de todo objeto é contrair sobre si mesmo singularizando-se em um tempo finito. Dizemos então que o espaço-tempo é dinâmico.

Nas soluções de buracos negros, se revertermos o sentido do fluxo do tempo nas equações de Einstein, obteremos soluções parecidas exceto pelo fato de que a força gravitacional se torna repulsiva: temos uma região em que os objetos se expandem ao invés de se contraírem. A estas soluções chamamos *buracos brancos*. No próximo capítulo mostraremos que a existência de um buraco negro geodesicamente completo exige a existência de um buraco branco.

A solução de buracos negros e brancos eternos e com completeza geodésica não leva em conta um importante limite da relatividade geral: a aproximação semi-clássica, ou a termodinâmica de buracos negros. Discutiremos um pouco deste limite no próximo capítulo, falando da radiação associada ao horizonte de eventos, que impede ao buraco negro uma existência por tempo indeterminado.

O espaço-tempo que usaremos será uma variedade Hausdorff, C^∞ e conectada¹ com um tensor associado à curvatura, ao qual denominamos *métrica*. Este tensor é simétrico, tipo $(0, 2)$ ² e define um produto interno vetorial na variedade.

Existem duas denominações comumente usadas entre os físicos para a métrica, quanto ao número de autovalores positivos que possua: métricas positivo definidas (ou riemannianas) que admitem todos os autovalores positivos, e métricas com um autovalor negativo e os demais positivos (lorentziana). Usaremos uma métrica lorentziana em que o tempo é determinado pelo autovalor negativo e o espaço pelos autovalores positivos.

Sendo Lorentziano, o tensor métrico admite três tipo de vetores: tipo tempo, tipo luz e tipo espaço, de acordo com o quadrado do valor destes vetores (produto interno). Se este valor for negativo, teremos vetores tipo tempo; sendo zero, tipo luz e se o valor for positivo tipo espaço. Podemos supor que a métrica é o tensor que fornece a magnitude de vetores definidos no espaço tangente à variedade.

Seguiremos esta seção explorando três postulados que axiomatizam a teoria.

¹Denominamos Hausdorff a qualquer variedade para a qual dados dois pontos p e q pertencentes a ela, seja sempre possível achar dois abertos U_1 e U_2 tal que $p \in U_1$ e $q \in U_2$ com $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Por C^n , indicamos continuamente diferenciável até ordem n , ou seja, C^∞ denomina continuamente diferenciável em qualquer ordem.

²Tensores são sempre definidos em termos de quantidades de componentes covariantes (i), e contravariantes (j), (i,j).

Causalidade Local

As equações de campo são tais que se U é uma vizinhança normal e convexa, com $p, q \in U$, então um sinal pode ser mandado de p até q se e somente se p e q puderem ser unidos por uma curva C^1 que mora inteiramente em U que tenha vetor tangente não nulo, tipo tempo ou tipo luz. Esta curva necessariamente não pode ser tipo espaço. Se o sinal é mandado de q até p ou ao contrário, isto dependerá da direção do fluxo de tempo em U .

Outra maneira de garantir este postulado é: seja $p \in U$ tal que toda curva (tipo tempo ou tipo luz) em p intercepte a superfície tipo espaço $x^0 = 0$. Seja F o grupo de pontos em $x^3 = 0$ que pode ser alcançado por curvas em U de p . Então, os campos em p serão determinados pelos valores dos campos (e seus derivativos) em F .

Este postulado situa a métrica como um campo de matéria a parte, que determina a estrutura causal da variedade. Os pontos que podem ser alcançados a partir de um sinal vindo de p são os que em determinado sistema de coordenadas $\{x^a\}$ satisfaçam $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \leq 0$. A fronteira destes pontos é formada pela imagem do cone de luz em p , isto é, o grupo de todas as geodésicas nulas que passam por p .

Assim, sabendo os pontos que podem se comunicar causalmente com p podemos determinar o cone de luz no espaço tangente a p , e a partir disto a métrica a menos de um fator conforme. Para entender isto, definimos o produto interno entre dois vetores $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ pertencentes ao mesmo espaço tangente, como $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, ou, em termos das componentes destes vetores em um dado sistema de coordenadas, $X^\mu Y_\mu$. A equação $g(\mathbf{X} + \lambda \mathbf{Y}, \mathbf{X} + \lambda \mathbf{Y}) = g(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + 2\lambda g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \lambda^2 g(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) = 0$, para $\mathbf{X}$ tipo tempo e $\mathbf{Y}$ tipo espaço, terá duas raízes reais, λ_1 e λ_2 , que seguem a equação $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{g(\mathbf{X}, \mathbf{X})}{g(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})}$. Entretanto, se conhecemos as relações de causalidade (ou, os pontos que podem se comunicar com p), sabemos λ_1 e λ_2 , ou seja, a razão entre vetores tipo tempo e tipo espaço. Sendo $\mathbf{W}$ e $\mathbf{Z}$ não nulos, na equação $g(\mathbf{W}, \mathbf{Z}) = 1/2[g(\mathbf{W}, \mathbf{W}) + g(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}) - g(\mathbf{Z} + \mathbf{W}, \mathbf{Z} + \mathbf{W})]$, podemos comparar cada magnitude do lado direito à $\mathbf{X}$ ou $\mathbf{Y}$.

Assim sendo, podemos determinar a métrica a menos de um fator conforme. A determinação da estrutura causal da variedade está diretamente relacionada ao fato de que nenhum sinal pode viajar acima da velocidade da luz.

Conservação Local de Energia-Momento

Como vimos, a relação causal entre quaisquer dois eventos (pontos) da variedade é completamente determinada pela métrica. Esta por sua vez tem relação direta com o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ das equações de campo pois ambos dependem diretamente dos campos considerados. Ainda $T_{\mu\nu}$ depende das derivadas primeira destes campos e tem as seguintes propriedades:

- $T_{\mu\nu}$ é nulo em um aberto U se e somente se todos os campos de matéria são nulos em U^3 ;

- $\nabla_\nu T^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, ou seja, a divergência do tensor energia-momento se anula.

Se tivermos um vetor de Killing $\mathbf{K}^4$ associado a métrica, obteremos outra quantidade conservada, um vetor com divergência nula,

$$\begin{aligned} P^\mu &= T^{\mu\nu} K_\nu, \\ P^\mu_{;\mu} &= T^{\mu\nu}_{;\mu} K_\nu + T^{\mu\nu} K_{\nu;\mu} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

pois $T^{\mu\nu}$ é simétrico e $K_{\nu;\mu}$ anti-simétrico. Em uma região D compacta e orientável, podemos escrever esta equação na forma da lei de Gauss,

$$\int_{\partial D} P^\mu d\sigma_\mu = \int_{\partial D} P^\mu_{;\mu} dv = 0. \quad (1.3)$$

Isto significa que o fluxo total de T^{ab} em uma região fechada é nulo.

Considerando por exemplo, um espaço-tempo de Minkowski, teremos 10 vetores de Killing, $\mathbf{K}^1 = \partial_a$ e $\mathbf{K}^2 = (s)x^a \partial_b - (s)x^b \partial_a$ (aqui a e b vão de 1 até 4 no caso de uma variedade 4-dimensional e (s) é uma função determinada pelo valor de a : $s = 1$ para $a = 2, 3, 4$ e $s = -1$ para $a = 1$, que geram respectivamente 4 translações e 6 rotações). Podemos pensar em ∂_1 como fluxo de energia, $\partial_{2,3,4}$ como fluxo de momento linear e $\mathbf{K}^2$ como fluxo de momento angular. Se a métrica não for plana, não haverá em geral vetores de Killing que garantam estas invariâncias de rotação e translação. Entretanto para uma pequena vizinhança de um ponto, sempre podemos introduzir um sistema de coordenadas normais para o qual a métrica volte a admitir os vetores de Killing acima.

Através do primeiro postulado, determinamos a métrica da variedade a menos de um fator conforme. Através do segundo postulado, podemos relacionar este fator em diferentes pontos.

³O campo gravitacional não necessariamente será nulo em U .

⁴Vetores de Killing $\mathbf{K}$ são vetores que satisfazem a condição $K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} \equiv 2K_{(\mu;\nu)} = 0$.

Embora os dois primeiros postulados tratem de leis de conservação da teoria, eles não explicitam como construir um tensor energia-momento que seja coerente com o conteúdo de matéria da variedade. Conseguimos isto através de uma formulação Lagrangeana. Nesta formulação, exigimos que a ação, $I = \int_D \mathcal{L} dv$ sobre os campos Ψ contidos no lagrangeano $\mathcal{L}$ seja invariante sobre pequenas variações na métrica [1], e conseguimos as equações de Euler-Lagrange com pequenas variações nos campos da ação.

Por exemplo, para um campo escalar sem carga, temos o lagrangeano

$$L = -\frac{g^{\mu\nu}\Psi_{;\mu}\Psi_{;\nu} + m^2\Psi^2}{2}, \quad (1.4)$$

e a equação de movimento correspondente é conhecida como equação de Klein-Gordon,

$$g^{\mu\nu}\Psi_{;\mu\nu} - m^2\Psi = 0. \quad (1.5)$$

O tensor energia-momento do campo calculado pela relação $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\sqrt{-g}T_{\mu\nu}$ é

$$T_{\mu\nu} = \Psi_{;\mu}\Psi_{;\nu} - \frac{g_{\mu\nu}[g^{\lambda\delta}\Psi_{;\lambda}\Psi_{;\delta} + m^2\Psi^2]}{2}. \quad (1.6)$$

Equações de Campo

Finalmente, o terceiro postulado que axiomatiza a Relatividade Geral é o das equações de campo em (1.1). Tais equações valem para toda a variedade e suas predições concordam com observações fundamentais como as citadas no começo da seção.

Neste trabalho estudamos soluções das equações tais como a solução esfericamente simétrica no vácuo em 4 dimensões. No capítulo 2 falamos sobre sistemas de coordenadas que descrevam esta solução de maneira apropriada bem como perturbações gravitacionais e escalares, além do cálculo de algumas geodésicas da geometria. Seguimos com a investigação das propriedades termodinâmicas dos buracos negros usando ainda a mesma métrica como referência. Verificamos que há um espectro de radiação associado às propriedades geométricas do horizonte de eventos, o que confere à solução uma propriedade especial: capacidade térmica negativa.

Outras soluções possíveis às equações de Einstein foram encontradas por Randall e Sundrum em um modelo de dimensões extras, que visa resolver o *problema da hierarquia* entre as escalas de gravitação e da força eletrofraca.

As soluções encontradas, fazem de nosso Universo um lugar geométrico de 5 dimensões em que os campos de matéria são confinados em uma hipersuperfície. A escala da hierarquia eletrofraca é gerada pelo fato de o volume 5-dimensional ‘atenuar a gravidade’. Disto supomos como verdadeira a escala em que a gravitação passa a ter interações quânticas consideráveis a escala eletrofraca.

Os modelos com dimensões extras foram inspirados em teorias de cordas e surgiram inicialmente com a proposta de Arkani, Dvali e Dimopoulos, de confinar campos em uma brana 4-dimensional que existiria em um volume n -dimensional, com $n > 5$. Também este modelo resolveria o problema de incompatibilidade entre a escala eletrofraca e da massa de Planck 4-dimensional (limite em que a gravitação assumiria um caráter quântico).

Neste contexto, exploramos no capítulo 3 os Universos em mais do que 4 dimensões dando foco aos modelos de Randall-Sundrum, e à formação de mini-buracos negros N -dimensionais em um mundo brana. Se de fato nosso Universo for uma membrana embebida em um volume de dimensão maior, devemos esperar a formação de mini-buracos negros na próxima família de aceleradores.

Ainda no contexto de Universos com membranas confinantes, há outros tipos de estruturas singulares a que denominamos cordas e branas negras, que são singularidades que geram buracos negros quando projetadas na brana, mas, quando vistas nas N dimensões do Universo, assumem outra forma. Tratamos destas estruturas no capítulo 4, calculando a perturbação gravitacional em uma corda ou brana negra esfericamente simétrica em 4 dimensões, ou seja, que quando projetada na ‘brana’ gera um buraco negro de Schwarzschild. Demonstramos que há modos instáveis associados a esta estrutura que quando submetida a perturbações tende a singularizar seu horizonte, ou na verdade, evolui-lo a uma outra estrutura.

Também fazendo uso de cordas negras em um contexto mais específico de Randall-Sundrum, demonstramos a ausência de atalhos gravitacionais nas proximidades de uma corda negra tipo Schwarzschild-Randall-Sundrum, e generalizamos este resultado para todas as estruturas passíveis de serem embebidas em uma brana que more em um volume com constante cosmológica.

Capítulo 2

Espaços-Tempo com Simetria Esférica

A solução mais simples da equação de Einstein para um buraco negro foi obtida em 1916 por Karl Schwarzschild. Trata-se de uma solução de vácuo, com simetria esférica. Embora a métrica obtida por Schwarzschild possa representar a região externa de um buraco negro, não se pensava na época que ela tivesse plausibilidade física além do raio limite a que denominamos horizonte de eventos. Apenas na década de 60, com os trabalhos de Wheeler começou-se a falar em buracos negros como soluções da equação de Einstein com realidade física.

Para chegar a solução de Schwarzschild, podemos partir de um *Ansatz* genérico para simetria esférica em 4 dimensões dado por

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + 2g_{01}dx^0dx^1 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

com $g_{00}, g_{01}, g_{11}, g_{22} = f(x^0, x^1)$. Aqui suporemos x^0 como coordenada tipo tempo, e x^1 (e demais) tipo espaço. Neste elemento de linha é possível eliminar g_{01} , escolhendo um sistema de coordenadas apropriado, com equações para $x^{0,1}$ do tipo

$$\tilde{x}^0 = f(x^0, x^1), \quad (2.2)$$

$$\tilde{x}^1 = f(x^0, x^1), \quad (2.3)$$

que mantêm ds^2 inalterado. Podemos ainda escolher $g_{22} = r^2$, de modo que o elemento de linha fica

$$ds^2 = -udt^2 + hdr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.4)$$

em um sistema de coordenadas esférico (r, t, θ, ϕ) . Em princípio podemos supor $u = u(r, t)$ e $h = h(r, t)$. Entretanto o teorema de Birkhoff estabelece

que se tratamos de um espaço-tempo vazio, u e h serão funções apenas de r [2].

Sendo este elemento de linha uma solução das equações de Einstein no vácuo, temos $T_{\mu\nu} = 0$ e o escalar de Ricci, $g^{\mu\nu} g^{\theta\phi} R_{\mu\theta\nu\phi} \equiv R = 0$ de maneira que

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.5)$$

Aqui as componentes do tensor que misturam coordenadas são identicamente nulas, não acrescentando nenhuma informação ao cálculo. Entretanto as componentes diagonais fornecem 4 equações a saber [48],

$$R_{rr} = \frac{u''}{2u} - \frac{u'}{4u} \left[\frac{h'}{h} - \frac{u'}{u} \right] - \frac{h'}{hr}, \quad (2.6)$$

$$R_{\theta\theta} = -1 + \frac{r}{2h} \left[-\frac{h'}{h} + \frac{u'}{u} \right] + \frac{1}{h}, \quad (2.7)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}, \quad (2.8)$$

$$R_{tt} = -\frac{u''}{2h} + \frac{u'}{h} \left[\frac{h'}{h} + \frac{u'}{u} \right] - \frac{u'}{hr}, \quad (2.9)$$

em que linha representa derivada com relação a r . O fato de as componentes do tensor de Ricci que misturam coordenadas serem identicamente nulas está diretamente ligado com as simetrias do problema: a invariância rotacional leva a $R_{\theta\phi} \equiv 0$ e a invariância pela troca $t \rightarrow -t$ leva a $R_{tr} \equiv 0$.

As funções u e h podem ser determinadas através das componentes tt e rr . Ao somarmos $rR_{rr} + \frac{rR_{tt}h}{u} = \frac{h'}{h^2} + \frac{u'}{hu} = 0$, obtemos

$$u = h^{-1}. \quad (2.10)$$

Usando a equação acima em $R_{\theta\theta} = 0$, obteremos ainda

$$u = \left(1 + \frac{C}{r} \right). \quad (2.11)$$

Por fim, o valor da constante C pode ser achado aplicando o limite newtoniano, ou seja, $\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = 1$, através do que $C = -\frac{2MG}{c^2}$. Esta é a solução de Schwarzschild, a única com simetria esférica no vácuo em 4 dimensões,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.12)$$

Neste sistema de coordenadas, aparentemente são dois os pontos singulares no espaço-tempo, um em $r = 0$ e outro em $r = \frac{2MG}{c^2}$. Entretanto, ao calcularmos os escalares de curvatura, obtemos

$$R = 0, \quad (2.13)$$

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = 0, \quad (2.14)$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\beta\alpha} = \frac{48M^2}{r^6}, \quad (2.15)$$

denotando em primeira instância a existência de apenas um ponto singular em $r = 0$. De fato a relatividade geral clássica colapsa neste ponto e não sabemos dizer nada sobre ele: trata-se de uma singularidade de curvatura.

O ponto $r = \frac{2MG}{c^2}$, não é na verdade uma singularidade, mas sim um *horizonte de eventos*¹ do qual nenhuma informação uma vez dentro pode sair.

A solução de Schwarzschild como apresentada em (2.12) em um sistema de coordenadas esférico é única: qualquer outra solução das equações de Einstein esfericamente simétrica e no vácuo (em 4 dimensões) será inevitavelmente isométrica a ela.

Uma importante característica desta solução é a planura assintótica: muito longe do horizonte de eventos, podemos supor como uma boa aproximação que o espaço-tempo se aproxima do espaço de Minkowski (que corresponde a $r \rightarrow \infty$, levando a $\frac{2MG}{c^2r} \rightarrow 0$ nos elementos da métrica).

Há outras soluções para as quais o regime assintótico não é plano tais como as soluções de *Schwarzschild/de Sitter* e *Schwarzschild/Anti-de Sitter*. Nestes buracos negros adicionamos uma função de r aos termos g_{tt} e g_{rr} da métrica de maneira que quando $r \rightarrow \infty$, $g_{tt}, g_{rr} \neq 1$. Estes termos representam na verdade uma *constante cosmológica*, que podemos incluir diretamente as equações de Einstein como

$$R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

em que Λ representa esta constante. A interpretação física da constante cosmológica é ainda alvo de muita pesquisa no campo da física teórica, e não há um consenso quanto a que ‘ente físico’ poderia dar origem a ela dentro dos propósitos da relatividade geral.

Voltando à solução (2.12), notamos que ela não depende diretamente do tempo, ou em outras palavras, é estática. Tal fato faz com que possamos associar um vetor de Killing tipo tempo, ∂_t , à métrica.

¹No apêndice A desenvolveremos o conceito de horizontes de eventos do ponto de vista formal.

Ao calcularmos o tempo próprio de queda em Schwarzschild (o tempo que um observador que cai na singularidade mede), verificamos que esta quantidade é finita. Entretanto, o tempo de queda como visto por um observador externo é infinito. Isto acontece essencialmente por esta solução valer, à primeira vista, apenas para a região externa ao horizonte de eventos.

A divergência no tempo de queda visto por um observador externo sugere, que existe um sistema de coordenadas extensível à região $r < r_H$ ($r_H = \frac{2MG}{c^2}$ representando o raio do horizonte de eventos). Um possível sistema mais simples sem uma singularidade de coordenadas em r_H [3] é o sistema de coordenadas de Lemaître, que tem um elemento de linha dado por

$$ds^2 = -c^2 dT^2 + B^{-1} dR^2 + B^2 r_H^2 d\Omega^2, \quad B = \left[\frac{3(R - cT)}{2r_H} \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (2.17)$$

A transformação de coordenadas do sistema (r, t) , para o sistema de Lemaître é

$$r = Br_H, \quad (2.18)$$

$$t = \frac{r_H}{c} \left\{ -\frac{2\sqrt{a}(1+a)}{3} + \ln \left| \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right| + \frac{R}{r_H} \right\}. \quad (2.19)$$

Este sistema pode ser estendido a toda variedade, exceto pelos pontos $r = 0$ e $R = cT$. Na figura 2.1 temos um diagrama de uma seção com θ e ϕ constantes, em coordenadas de Lemaître.

A queda radial de um fóton neste sistema, seguiria uma equação dada por

$$c \frac{dT}{dR} = \pm \left[\frac{2r_H}{3(R - cT)} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (2.20)$$

Pela figura podemos claramente notar, que linhas r constante tipo tempo antes do horizonte de eventos, passam a ser tipo espaço depois: os fótons não podem mais se propagar em direção contrária a $r = 0$ nesta região.

Uma das maneiras de verificar se o espaço-tempo é bem descrito por um dado sistema de coordenadas como um todo, é analisar o movimento de partículas teste neste espaço-tempo. Se estas partículas atingem a fronteira das coordenadas (∞), em um tempo-próprio finito, e não há singularidades ali, o sistema é geodesicamente incompleto. Isto significa que deve haver outro sistema de coordenadas que contenha todas as geodésicas. Mais adiante investigaremos o sistema de Kruskal, que tem estas características.

Figura 2.1: Espaço-tempo de Schwarzschild em coordenadas de Lemaître. As linhas pontilhadas representam $r = cte$; A, B e C representam pontos a partir dos quais desenhamos linhas-mundo de fótons a cair no buraco negro. Apenas o ponto A, situado antes do horizonte tem linhas-mundo em direção contrária à $r = 0$.

Para a região $r < r_H$, todos os sistemas de referência são não-estáticos. Isto quer dizer que não conseguiremos fixar um observador em relação à singularidade: qualquer objeto que perpassar $r = r_H$, estará fadado a encontrá-la. Chamaremos esta região na qual $r < r_H$ de ‘região T’, e a região que a precede de ‘região R’.

Embora o sistema de coordenadas esférico (r, t, ϕ, θ) não seja extensível além de $r = r_H$, por ser singular neste ponto, ele não perde completamente o sentido para $r < r_H$. De fato, se na região T tratarmos r como uma coordenada tipo tempo, e t como uma coordenada tipo espaço, recuperamos uma interpretação física a este sistema. Isto porque a métrica não deixa de ser lorentziana. Assim ao supormos uma transformação

$$(r, t) = \left(-c\tilde{T}, \frac{\tilde{R}}{c}\right), \quad r < r_H \quad (2.21)$$

em T, conseguimos um elemento de linha

$$ds^2 = - \left[\frac{r_H}{-c\tilde{T}} - 1 \right]^{-1} c^2 d\tilde{T}^2 + \left[\frac{r_H}{-c\tilde{T}} - 1 \right] d\tilde{R}^2 + c^2 \tilde{T}^2 d\Omega^2, \quad (2.22)$$

com a condição de que $0 < -c\tilde{T} < r_H$, que mantém $\tilde{T}$ tipo tempo e $\tilde{R}$ tipo espaço (assim tomaremos esta coordenada no intervalo $(-\infty, \infty)$). Portanto uma seção espacial $\tilde{T} = cte$ tem uma extensão infinita ao longo de $\tilde{R}$, enquanto ao longo das coordenadas angulares, ela é fechada, constituindo um produto topológico $S^2 \times R^1$. Disto segue que o volume tridimensional é infinito.

Outro sistema de coordenadas possível para a variedade em um espaço-tempo de Schwarzschild, é o sistema de Eddington-Finkelstein, em que introduzimos a *coordenada tartaruga* r_* ,

$$dr_* = \frac{dr}{1 - \frac{2MG}{c^2 r}}, \quad r_* = r + \frac{2MG}{c^2} \ln \left| \frac{r - \frac{2GM}{c^2}}{\frac{2GM}{c^2}} \right| + \frac{v}{c}, \quad (2.23)$$

$$cdt = dv - dr_*, \quad ct = v - r_*. \quad (2.24)$$

Este sistema é comóvel a fótons que caem radialmente no buraco negro e v , que pode assumir a forma de uma coordenada, é uma constante relacionada com a coordenada radial do fóton em um instante t . Se usarmos v como coordenada, teremos um elemento de linha do tipo

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_H}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.25)$$

Como percebemos, esta expressão é regular em $r = r_H$.

O espaço-tempo, em r e t é mostrado na figura 2.2, com linhas $v = cte$.

Estas linhas representam linhas-mundo de fótons em geodésicas radiais caindo na singularidade.

Características da Região T ($r < r_H$)

Um notável atributo da região T, é o fato de que as coordenadas devem contrair nas direções de θ e ϕ e g_{22} deve diminuir com o tempo. Levando em conta que as equações de Einstein são invariantes sob inversão $t \rightarrow -t$, e que isto corresponde a uma reversão da seta do tempo, existem sistemas de coordenadas semelhantes aos de Lemaître e Eddington-Finkelstein, em que esta região se expande ao invés de se contrair nas direções θ e ϕ . Isto significa

Figura 2.2: Espaço-tempo de Schwarzschild em coordenadas de Eddington-Finkelstein. As linhas $v = cte$ representam fótons caindo no buraco negro. A linha 2 representa um horizonte de eventos, por separar as trajetórias nulas como 1 e 3.

que partículas e corpos em $r < r_H$ tendem a sair desta região para $r > r_H$ ao invés de seguirem em destino à singularidade.

Em primeiro momento esta afirmação parece contradizer o fato de que uma vez que uma partícula entre em T, não poderá mais sair. Entretanto a solução para a qual T se expande não admite geodésicas que entrem em $r < r_H$, havendo apenas geodésicas que saem desta região²(situação especularmente oposta à região T do buraco negro de Schwarzschild).

Assim, havendo em T duas possibilidades de comportamentos distintos, quanto à expansão em θ e ϕ , estabelecemos uma nova notação:

- (i) T como uma região contrátil: T_- ;
- (ii) T como uma região que se expande: T_+ .

Para a região T_+ há uma expansão a partir de uma singularidade em $r = 0$ que é tipo espaço. Portanto todos os eventos ocorridos ali são simultâneos, não podendo ser possível dizer que havia de início uma singularidade em $r = 0$, no vácuo, e então depois, a matéria começou a se expandir, visto

²Estamos denotando os verbos ‘entrar’ e ‘sair’ de uma região de acordo com o fluxo do tempo: o começo de uma geodésica é identificado com o menor valor da coordenada temporal.

que não existe nenhuma curva tipo tempo ligando $r = 0$ aos demais eventos. O melhor a afirmar é apenas que a singularidade produz uma região T_+ . Estas regiões são denominadas *Buracos Brancos*, e têm propriedades especularmente opostas às do buraco negro. Nenhuma partícula pode passar da região R, para a região T_+ . Do contrário, toda partícula em T_+ estará fadada a deixar esta região em um tempo finito, pois ali o espaço-tempo também é dinâmico.

2.1 Completeza Geodésica em Schwarzschild

O sistema de coordenadas de Lemaître representa um sistema incompleto, do ponto de vista das geodésicas das partículas. Isto porque, ao tomarmos uma partícula que escapa da borda do horizonte de eventos para o infinito, podemos encontrar a continuação ao passado de uma geodésica que se aproxime assintoticamente do horizonte de eventos, e que o encontre apenas em $T \rightarrow -\infty$. Mas, como vimos há pouco, o tempo de queda em um buraco negro de Schwarzschild é finito, bem como o tempo de escape de qualquer partícula além do horizonte de eventos, para o infinito. Portanto, este sistema não é geodesicamente completo.

A única hipótese para construir um buraco negro eterno³ e geodesicamente completo, é se esta ‘construção’ incluir uma solução de buraco branco também.

Uma boa descrição de como chegar a esta solução de buraco negro e branco conjunta pode ser encontrada em [3]. Como não é do escopo deste trabalho detalhar esta descrição, falaremos apenas brevemente sobre ela. Um diagrama que ilustra uma solução conjunta geodesicamente completa pode ser visto na figura 2.3.

O espaço-tempo neste caso é vazio e contém duas regiões idênticas R' e R'' , além de outras duas de contração e expansão, T_- e T_+ , sendo completo no sentido de que toda geodésica continua *ad infinitum* (tem tempo próprio finito entre o caminho de quaisquer dois pontos com conexão tipo tempo), ou termina na singularidade.

Analizamos até então uma solução de Schwarzschild geodesicamente completa, contendo um buraco negro, e um buraco branco eternos do ponto de

³Embora, até aqui tenhamos falado de buracos negros, que colapsam e permanecem neste estado por tempo indefinido, veremos mais adiante que de fato, todo buraco negro emite, semi-classicamente (ou do ponto de vista de gravidade quântica euclideana), radiação que sai da região R alcançando o observador no infinito. Isto não viola nenhum princípio de relatividade clássica. Trata-se da existência de um espectro térmico visto pelo observador, advindo da borda do buraco negro.

Figura 2.3: À esquerda: O espaço-tempo vazio, contendo um buraco negro e um buraco branco. À direita: O diagrama correspondente, conhecido como *Ponte de Einstein-Rose*.

vista do observador que os enxerga do infinito nas regiões R' ou R'' . Para achar esta solução em termos da métrica, temos o sistema de coordenadas de Kruskal, obtido por Kruskal e Szekeres em 1960. Retomamos a coordenada nula v e introduzimos outra coordenada nula u ,

$$du = cdt - dr_*, \quad (2.26)$$

$$dv = cdt + dr_*. \quad (2.27)$$

Neste sistema o elemento de linha fica

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) dudv + r^2 d\Omega^2 = - \frac{2MG e^{\frac{-c^2 r}{2MG}} e^{\frac{c^2(v-u)}{4MG}}}{c^2 r} dudv + r^2 d\Omega^2. \quad (2.28)$$

Finalmente, com

$$w = -e^{\frac{-uc^2}{4MG}}, \quad (2.29)$$

$$z = e^{\frac{vc^2}{4MG}}, \quad (2.30)$$

e ainda

$$\tilde{T} = \frac{z + w}{2}, \quad (2.31)$$

$$\tilde{R} = \frac{z - w}{2}, \quad (2.32)$$

conseguimos o sistema de coordenadas extensível a toda variedade exceto no ponto $r = 0$ (para o qual nenhum sistema é ‘extensível’), no sentido de conter todas as geodésicas possíveis. O elemento de linha se torna

$$ds^2 = \frac{32M^3 G^3 e^{-\frac{c^2 r}{2MG}}}{c^6 r} (-d\tilde{T}^2 + d\tilde{R}^2) + r^2 d\Omega^2. \quad (2.33)$$

A transformação entre o sistema de coordenadas original e o usado no elemento acima é dada por

$$\left(\frac{c^2 r}{2MG} - 1\right) e^{\frac{c^2 r}{2MG}} = \tilde{R}^2 - \tilde{T}^2, \quad (2.34)$$

$$\frac{c^3 t}{2MG} = \ln \left(\frac{\tilde{R} + \tilde{T}}{\tilde{R} - \tilde{T}} \right). \quad (2.35)$$

Podemos através do elemento de linha em (2.33) construir o diagrama de Kruskal da solução, que representa uma seção $\tilde{R} \times \tilde{T}$, com θ e ϕ constantes.

Figura 2.4: Diagrama de Kruskal.

Como podemos notar há quatro regiões distintas no espaço-tempo, separadas pelo horizonte que ocorre em $r = \frac{2MG}{c^2}$. Não é difícil perceber que a região T_- não pode afetar causalmente as regiões R' e R'' . Entretanto o contrário não permanece: eventos das regiões R' e R'' têm conexão causal com eventos em T_- . Isto justamente pelo fato de $r = \frac{2MG}{c^2}$ representar um horizonte com superfícies *armadilhadas*: qualquer pulso de luz tende a fechar sobre si mesmo ao invés de ‘espalhar sobre o espaço’ na região T_- . É exatamente esta constatação da existência de superfícies armadilhadas que leva a podermos atestar a presença de uma singularidade em $r = 0$, ou, internamente a $r = \frac{2MG}{c^2}$.

Há outros aspectos da solução de Schwarzschild que podem ser explorados em outro gráfico, o *Diagrama de Penrose*, que mapeia todo o espaço-tempo em uma região finita. Formalmente, podemos considerar uma variedade $(\tilde{M}, \tilde{g})$, tal que o espaço-tempo original (M, g) é mapeado em um subgrupo de $\tilde{M}$, com uma relação conforme entre as métricas, $\tilde{g} = \Omega^2 g$. A fronteira da imagem de M em $\tilde{M}$ é representada como os pontos no infinito do espaço-tempo de M . As coordenadas são tais que

$$\tan U = z, \quad (2.36)$$

$$\tan V = w. \quad (2.37)$$

Figura 2.5: Diagrama de Penrose na geometria de Schwarzschild.

O diagrama é mostrado na figura 2.5.

A linha em forma de ‘cobra’ com a horizontal neste diagrama representa a singularidade, e as retas inclinadas em $\frac{\pi}{4}$ representam o horizonte de eventos futuro e passado. A região II’ representa o buraco branco, e II o buraco negro. Os segmentos I^+ e I^- representam respectivamente infinitos futuro e passado nulos. Toda geodésica nula se origina em I^- , para qualquer uma das duas regiões, e acaba na singularidade em $r=0$, seguindo uma linha reta inclinada em $\frac{\pi}{4}$ com a horizontal. As hipérboles que partem de i^- e chegam a i^+ representam $r = cte$. O ponto i^- representa o infinito passado tipo tempo,

do qual toda geodésica tipo tempo que se origina nas regiões I e I' parte, e i^0 o infinito futuro tipo espaço (nenhuma geodésica tipo tempo passa por este ponto). O ponto i^+ representa o infinito futuro tipo tempo, em que acabam as linhas $r = cte$.

Como podemos notar, a linha inclinada que divide as regiões I e II é uma linha tipo luz (o horizonte), e a singularidade situada em $r = 0$ é tipo espaço, o que representa um comportamento altamente peculiar: qualquer observador que perpassasse o horizonte estará fadado a encontrar a singularidade em um tempo finito (este tempo medido, é claro, no referencial do observador que está caindo), não importando o quanto de esforço faça para não encontrá-la. Isto porque qualquer curva tipo tempo ou tipo luz da região II do diagrama acima, tem um infinito futuro na singularidade. Este comportamento é diferente do encontrado em duas outras soluções de buracos negros em 4 dimensões: nas soluções de Kerr e Reissner-Nordström, nem toda a curva tipo tempo ou luz encontra a singularidade. Isto por que nestes casos a singularidade é tipo tempo.

2.2 Geodésicas em Schwarzschild

Para calcular as geodésicas em um espaço-tempo de Schwarzschild, começamos definindo um invariante (lagrangeano) para o qual podemos usar as equações de Euler-Lagrange⁴,

$$\mathcal{L} = \frac{g_{\mu\nu}}{2} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (2.38)$$

ou,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right], \quad (2.39)$$

que têm momenta canonicamente associados dados por,

$$\begin{aligned} p_t &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} \equiv \dot{t} \Delta, & p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi} r^2 \sin^2 \theta, \\ p_r &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}, & p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} r^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Como estamos tratando de uma solução no vácuo, sem matéria, não há potencial envolvido e o Lagrangeano é o próprio Hamiltoniano. As variáveis t

⁴Vamos assumir daqui por diante o sistema de unidades com $c = \hbar = G = 1$. Uma descrição mais detalhada deste sistema de unidades é dada no próximo capítulo.

e ϕ não aparecem explicitamente e seus momenta conjugados são conservados nas equações de movimento,

$$p_t = E, \quad (2.41)$$

$$p_\phi = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} = L. \quad (2.42)$$

Como o problema tem simetria esférica, podemos escolher um valor específico de θ para as geodésicas, sem perda de generalidade: $\theta = \frac{\pi}{2}$. Particularizamos ainda a situação estabelecendo valores constantes para $\mathcal{L}$, como à seguir, pois esta quantidade não depende explicitamente do tempo (assim como a métrica)

$$\mathcal{L}_t = -\frac{1}{2}, \quad \mathcal{L}_l = 0, \quad (2.43)$$

em que os índices no Lagrangeano referem-se a tipo tempo (t) e tipo luz (l) (o importante no caso é escolher um valor negativo se tipo tempo, e nulo se tipo luz).

Geodésicas Tipo Tempo

Tomando geodésicas tipo tempo no plano equatorial, padronizadas por $\theta = \frac{\pi}{2}$ e levando em conta que $\dot{t} = \frac{E}{\Delta}$ e $\mathcal{L} = -\frac{1}{2}$, a partir de (2.42) temos a seguinte relação,

$$\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{L^2}{r^2} = 1, \quad (2.44)$$

em que podemos isolar E , obtendo uma expressão tipo energia mecânica,

$$E^2 = \dot{r}^2 + V(r), \quad V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (2.45)$$

A equação fundamental de geodésicas que iremos analisar é construída através de (2.44) usando que $\dot{r} = \dot{\phi} \frac{dr}{d\phi}$,

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2}(E^2 - 1) + \frac{2Mr^3}{L^2} - r^2 + 2Mr. \quad (2.46)$$

Não é propósito deste trabalho fazer uma descrição completa das geodésicas na geometria de Schwarzschild. Tal descrição pode ser encontrada por exemplo em [4]. Aqui nos ateremos apenas há alguns casos como o da geodésica

radial tipo tempo. Para geodésicas radiais, tomamos $\dot{\phi} = 0$, ou mesmo $L = 0$ de maneira que a equação (2.44) fica

$$\dot{r}^2 = \frac{2M}{r} + E^2 - 1. \quad (2.47)$$

Estamos supondo como ponto inicial da geodésica $r_i = \frac{2M}{1-E^2}$ pois aí $\dot{r}^2 = 0$. Se introduzirmos uma mudança de coordenadas (por conveniência),

$$r = \frac{M}{1-E^2}(1 + \cos \omega), \quad (2.48)$$

no qual o ponto $r_H = 2M$ corresponde a $\omega_H = 2 \arccos E$ e $r_s = 0$ a $\omega_s = \pi$, ao integrarmos as equações $\lambda = \lambda(\omega)$ e $t = t(\omega)$, obteremos

$$\lambda = \sqrt{\frac{r_i^3}{8M}}(\omega + \sin \omega), \quad (2.49)$$

$$t = \sqrt{\frac{r_i^3}{2M}}E \left[\frac{3\omega}{2} + \sin \omega - \omega E^2 \right] + \lg \left[\frac{\tan(\frac{\omega_H}{2}) + \tan(\frac{\omega}{2})}{\tan(\frac{\omega_H}{2}) - \tan(\frac{\omega}{2})} \right]^{2M}. \quad (2.50)$$

O comportamento peculiar acontece devido à diferença entre λ e t quando $r \rightarrow 2M$. Neste ponto, o tempo próprio permanece finito - podendo ser calculado por (2.49) ao substituirmos $\omega = \omega_H$ - enquanto o tempo da queda de um observador A na singularidade medido por um observador B parado na parte externa do horizonte do buraco negro diverge - o que pode ser visto por (2.50) fazendo a mesma substituição. Isto é de fato o que esperaríamos que acontecesse, visto que o observador que está fora, vê o que se aproxima do horizonte ‘congelando’ a medida que este vai chegando próximo à estrutura. A figura 2.6 representa os dois tempos, como vistos pelos observadores em diferentes referenciais.

Outros tipos de geodésicas de interesse são as geodésicas com excentricidade nula. Para situá-las, fazemos uma substituição em (2.46) de $r = q^{-1}$, com o que esta equação fica

$$\left(\frac{dq}{d\phi} \right)^2 = 2Mq^3 - q^2 + \frac{2Mq}{L^2} - \frac{1-E^2}{L^2} = f(q), \quad (2.51)$$

Fazemos outra substituição favorável no par de constantes E e L impondo as seguintes relações a $f(q)$

$$f(q) = \sum_{i=1}^3 (q - q_i), \quad (2.52)$$

$$q_1 = \frac{1-e}{l}, \quad q_2 = \frac{1+e}{l}, \quad q_3 = \frac{1}{2M} - \frac{2}{l}, \quad (2.53)$$

Figura 2.6: Tempo de queda radial em Schwarzschild visto pelo observador no infinito, e pelo observador que cai.

em que e representa a excentricidade da ‘elipse’ e l um parâmetro constante. O que fizemos foi apenas trocar (E, L) , e com isto ganhamos duas relações entre estas constantes.

No caso estamos interessados em $e = 0$, que representa órbitas circulares com raio de órbita $r_o = l$. Assim, pelas relações acima, conseguimos duas outras equações,

$$\frac{1}{L^2} = \frac{1 - \frac{3M}{r_o}}{Mr_o}, \quad (2.54)$$

$$\frac{E^2}{L^2} = \frac{\left(\frac{2M}{r_o} - 1\right)^2}{Mr_o}, \quad (2.55)$$

que representam órbitas com raio

$$r_o = \frac{L^2}{2M} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right], \quad (2.56)$$

ou seja, necessariamente devemos ter $L \geq M\sqrt{12}$. Na situação limite, temos um raio $r = 6M$ sendo esta órbita instável. O período das órbitas é dado por

$$T_p = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_o^3}{M}} \sqrt{\frac{1 - 3\alpha}{1 - 6\alpha}}, \quad \alpha = \frac{M}{r_o}, \quad (2.57)$$

ou seja, tende a infinito quando a órbita se aproxima do raio limite $r = 6M$. Notamos que o limite α pequeno aproxima estas órbitas do limite newtoniano, pois a expressão da segunda raiz quadrada tende a 1.

Finalmente, o último exemplo de nosso interesse no cálculo de órbitas tipo tempo em uma geometria de Schwarzschild é dado pela aproximação pós-newtoniana que apresenta correções para as rotas keplerianas. Para chegar a este limite, fazemos uma substituição de variáveis em (2.51) dada por

$$q = \frac{1 + 2 \cos \zeta}{l}, \quad (2.58)$$

obtendo

$$\left(\frac{d\zeta}{d\phi} \right)^2 = 1 - 2\alpha(3 + e \cos \zeta). \quad (2.59)$$

No limite em que α é pequeno, podemos expandir $(1 - 6\alpha - 2\alpha e \cos \zeta)^{(-1/2)} \sim 1 + 3\alpha + e\alpha \cos \zeta$, de maneira a conseguirmos

$$\begin{aligned} -d\phi &= (1 + 3\alpha + e\alpha \cos \zeta)d\zeta, \\ -\phi &= (1 + 3\alpha + e\alpha \sin)\zeta. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Os pontos $\zeta = 0$ e $\zeta = 2\pi$ correspondem aos pontos $\phi = 0$ e $\phi = (1 + 3\alpha)2\pi$ respectivamente, de modo que o desvio em ϕ depois de uma revolução completa pode ser calculado como $\phi|_0^{2\pi} - \zeta|_0^{2\pi}$:

$$\Delta\phi = 6\pi\alpha = \frac{6\pi M}{a(1 - e^2)}, \quad (2.61)$$

com a denotando o semi-eixo maior da elipse. Para esta correção não há análogo clássico. Isto representa o desvio do perihélio da órbita de Mercúrio, um dos maiores acertos da teoria einsteiniana, como citamos na introdução.

Geodésicas Tipo Luz

Finalizaremos esta seção falando de geodésicas nulas na geometria de Schwarzschild. Escolhemos o segundo valor do lagrangeano em (2.43), de maneira a obter a equação

$$\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{L^2}{r^2} = 0, \quad (2.62)$$

sendo que as relações que tomamos para as coordenadas t e ϕ se mantêm (e também $\theta = \frac{\pi}{2}$),

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} = E, \quad \dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad (2.63)$$

Fazendo uma substituição $r = q^{-1}$ conseguimos a seguinte equação de geodésica no plano equatorial,

$$\left(\frac{dq}{d\phi}\right)^2 = 2Mq^3 - q^2 + \frac{E^2}{L^2} = f(q). \quad (2.64)$$

A geodésica radial tipo luz é definida exatamente como em (2.23), da qual tiramos um sistema de coordenadas específico, com a *coordenada tartaruga*. A importância desta coordenada reside no fato de restringir, para o observador fora do horizonte de eventos, o limite de sua observação em $r = 2M$. Isto significa que qualquer observador nesta região pode ver apenas objetos físicos que estejam em $r > 2M$ (sendo a região $r < 2M$ inacessível).

O tempo próprio de queda radial de fótons no buraco negro é finito: pela equação (2.62), se $L = 0$, teremos,

$$r = \pm E\tau + C. \quad (2.65)$$

Para fazer uma análise de algumas órbitas tipo luz, consideremos a equação $f(q) = 0$, que nos leva às seguintes relações,

$$q_1 + q_2 + q_3 = \frac{1}{2M}, \quad q_1 q_2 q_3 = -\frac{E^2}{2ML^2}, \quad q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_3 q_2 = 0. \quad (2.66)$$

Há claramente uma raiz negativa para o polinômio, em detrimento das duas primeiras relações para os q_i . As duas possibilidades para as outras duas raízes são que elas sejam imaginárias ou reais positivas. Considerando o caso de duas raízes reais coincidentes, elas necessariamente devem acontecer em um ponto em que $f'(q) = 0$. Neste caso a solução é completamente determinada por

$$q_1 = -\frac{1}{6M}, \quad q_2 = q_3 = \frac{1}{3M}, \quad D = \frac{E}{L} = \sqrt{27}M, \quad (2.67)$$

$$\left(\frac{dq}{d\phi}\right)^2 = 2M \left(q + \frac{1}{6M}\right) \left(q - \frac{1}{3M}\right)^2. \quad (2.68)$$

Por sua vez a última equação acima pode ser integrada com solução

$$q = -\frac{1}{6M} + \frac{1}{2M} \tanh^2 \left[\frac{\phi - \phi_0}{2} \right], \quad (2.69)$$

com ϕ_0 uma constante de integração.

Esta solução representa órbitas que se aproximam de $r = 3M$, espiralando em torno deste ponto um número infinito de vezes. Quando $\phi \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 3M$. Existe uma órbita circular instável em $r = 3M$. Se um fóton

estiver circundando o buraco negro em $r = 3M$, qualquer energia que perca ou ganhe fará com que ele caia na singularidade ou escape para o infinito, respectivamente.

Para finalizar a seção de órbitas falaremos do ‘cone limite’ para órbitas tipo luz, uma seção geométrica em Schwarzschild em formato de cone, que estabelece o limite angular das geodésicas nulas para determinado $r = cte$. Sendo Ψ a metade do ângulo deste cone temos [4],

$$\tan \Psi = \frac{\sqrt{\Delta}}{(2\beta - 1)(\beta + 1)}, \quad \beta = \frac{r}{6M}. \quad (2.70)$$

Isto representa que para cada ponto r_{fixo} , temos em um sistema de coordenadas esférico, um limite causal geodésico: apenas pontos que se encontrem dentro do cone definido pelo ângulo 2Ψ podem se conectar com o ponto r_{fixo} por curvas geodésicas tipo tempo ou tipo luz.

Uma consequência física interessante deste fato é que um observador que caia em Schwarzschild ao olhar na direção oposta à da singularidade vê o Universo fechando aos poucos conforme se aproxima de $r = 2M$. Por exemplo em $r = 6M$, $2\Psi = \frac{\pi}{3}$, o que indica que todo raio de luz externo que chega ao observador em $r = 6M$ vem de fora do cone de $2\Psi = \frac{\pi}{3}$. Para $r = 3M$ temos $2\Psi = \pi$, e para $r \rightarrow 2M$, $2\Psi \rightarrow 2\pi$, como esperamos. A figura 2.7 ilustra este fato.

Figura 2.7: Fechamento das geodésicas nulas em Schwarzschild. O ângulo D é tal que $2\Psi + D = 2\pi$. Qualquer região fora do cone delimitado por este ângulo em um dado r_{fixo} não tem conexão causal com um observador que esteja neste r_{fixo} .

2.3 Perturbações em torno da solução de Schwarzschild 4-dimensional

Nesta seção vamos tratar de pequenas perturbações gravitacionais em torno da solução de Schwarzschild 4-dimensional usando do Ansatz

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\psi} (d\phi - \omega dt - q_2 dx^2 - q_3 dx^3)^2 - e^{2\mu_2} (dx^2)^2 - e^{2\mu_3} (dx^3)^2, \quad (2.71)$$

o que nos leva diretamente a equações de perturbação por incluir termos de primeira ordem no elemento de linha.

A métrica de Schwarzschild como a obtivemos no começo do capítulo na forma $g_{\mu\nu} = \text{diag}(g_{00}, g_{11}, g_{22}, g_{33})$ contém apenas termos em ordem zero. Portanto o elemento de linha acima contém três termos diretamente em ordem um em relação a (2.12): ω , q_2 e q_3 . Dizemos que estes termos são a perturbação axial. Em (2.71) os demais termos são de ordem zero e dizemos que $\delta\Psi$, $\delta\nu$, $\delta\mu_2$ e $\delta\mu_3$ que são pequenas variações daqueles termos são de primeira ordem.

Há outra maneira de se fazer perturbações em Schwarzschild, descrita por Regge e Wheeler [2] em 1957, que trata da escolha de uma matriz genérica $h_{\mu\nu}$, tentando resolver as equações de Einstein com a substituição $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}^{\check{}} + h_{\mu\nu}$, sendo $g_{\mu\nu}^{\check{}}$ a métrica de Schwarzschild sem perturbação.

As perturbações escalares ou gravitacionais geram uma equação similar à de Schrödinger, contendo portanto um potencial gravitacional em sua forma, como veremos adiante.

Começaremos a seção estudando uma perturbação escalar através da equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo genérico como em (2.4), seguindo com a escolha de matrizes de perturbação para a perturbação gravitacional. Por último adotaremos o Ansatz (2.71), e calcularemos a equação para um tipo de paridade.

Perturbações Escalares

Para perturbações escalares o recurso é resolver a equação de Klein-Gordon na geometria proposta,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0. \quad (2.72)$$

Resolveremos a equação acima com a métrica em (2.4) para o campo escalar.

Desenvolvendo-a, conseguimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{hur^2} \sin \theta} \partial_\mu [g^{\mu\nu} \sqrt{hur^2} \sin \theta \partial_\nu \Phi] &= 0, \\ r^2 g^{00} \partial_{tt} \Phi + r^2 g^{33} \partial_{\phi\phi} \Phi + \\ \frac{r^2 \partial_r [g^{11} \sqrt{hur^2} \sin \theta \partial_r \Phi]}{\sqrt{hur^2} \sin \theta} + \frac{r^2 g^{22}}{\sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta \Phi] &= 0, \end{aligned} \quad (2.73)$$

Aqui estamos usando o sistema de coordenadas esférico, portanto tendo $\Phi = \Phi(r, t, \theta, \phi)$. Para encontrar uma equação apenas em r e t , faremos uma decomposição do campo como $\Phi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l,m} W_{lm}(t, r) Y_{lm}(\theta, \phi)$, em que Y_{lm} são os harmônicos esféricos, soluções da parte angular das equações de Laplace, Helmholtz e Schrödinger [5]. A parte angular da equação quando a decomposição acima é aplicada, pode ser escrita como [5],

$$\frac{r^2 g^{22}}{\sin \theta} \partial_\theta [\sin \theta \partial_\theta Y] + r^2 g^{33} \partial_{\phi\phi} Y = -l(l+1)Y, \quad (2.74)$$

com l necessariamente inteiro. Podemos colocar em evidência as funções de harmônicos esféricos na equação de campo, de maneira a obter

$$\sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \phi) \left\{ r^2 g^{00} \partial_{tt} W_{lm} + \frac{r^2 \partial_r [g^{11} \sqrt{hur^2} \partial_r W_{lm}]}{\sqrt{hur^2}} - l(l+1) W_{lm} \right\} = 0. \quad (2.75)$$

Simplificando um pouco obtemos

$$\partial_{tt} W + a \left[\frac{\partial_r \ln a}{2} + \frac{2}{r} + \partial_r \right] \partial_r W - \frac{fl(l+1)}{r^2} W = 0, \quad (2.76)$$

($a = \frac{u}{h}$). Esta equação é a mais simples que conseguiremos chegar neste sistema de coordenadas. Entretanto para obtermos uma equação similar à de Schrödinger com um potencial correspondente, fazemos uma transformação no campo do tipo $W \rightarrow \frac{\Psi}{r}$, e uma mudança para a coordenada tartaruga em r , $r \rightarrow r_*$. Esta troca na variável do campo funciona sempre que estivermos tratando de uma simetria esférica, como é o caso. A coordenada r_* foi definida já na subseção precedente.

A equação fica como segue

$$-\partial_{tt} \Psi + \partial_{r_* r_*} \Psi - V(r) \Psi = 0, \quad (2.77)$$

com $V(r)$ representando o potencial,

$$V(r) = \left[\frac{ul(l+1)}{r^3} - \frac{\partial_r a}{2r} \right]. \quad (2.78)$$

A partir desta equação, fixando o problema de contorno como

$$\Psi = \begin{cases} e^{i\omega r_*}, & r_* \rightarrow -\infty \\ e^{-i\omega r_*}, & r_* \rightarrow \infty \end{cases} \quad (2.79)$$

obtemos os modos quasi-normais, ω , estabelecendo um comportamento temporal na função Ψ do tipo $\Psi(t, r) = \psi(r)e^{i\omega t}$. Para Schwarzschild em 4 dimensões por exemplo, temos $u = h = 1 - \frac{2M}{r}$ e o potencial

$$V_S(r) = u \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right]. \quad (2.80)$$

Para Reissner-Nordström $u = h = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$,

$$V_{RN}(r) = u \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2M}{r^3} - \frac{2Q^2}{r^4} \right]. \quad (2.81)$$

Estes são os potenciais da equação de Klein-Gordon para geometrias esféricas em 4 dimensões. No decorrer do trabalho, outras geometrias esféricas serão analisadas, considerando um contexto de Universos tipo Randall-Sundrum (em 5 dimensões).

Perturbações Gravitacionais

Há duas maneiras principais para considerarmos perturbações gravitacionais em Schwarzschild e conseguirmos equações similares a do campo escalar. Uma delas é resolvermos as equações de Einstein para $g_{\mu\nu} = \check{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, com $\check{g}_{\mu\nu}$ representando a métrica conhecida não perturbada (Schwarzschild no caso), $h_{\mu\nu}$ uma perturbação nesta métrica e $g_{\mu\nu}$ a métrica perturbada. Depois disto, devemos fixar um *gauge* para $\mathbf{h}$ [6], que estabelece (ou, de outra maneira, representa diretamente) as simetrias do problema e resolver as equações de Einstein em primeira ordem⁵. A segunda maneira é bastante similar à primeira mas não fixamos um $\mathbf{h}$, impondo ao invés termos de primeira ordem diretamente em $\mathbf{g}$.

Consideraremos aqui os dois tipos de perturbação. Começaremos expondo a primeira maneira em que fixamos um *gauge* para $h_{\mu\nu}$. Para Schwarzschild existem diversos trabalhos neste sentido ([6, 7, 8]) e seguiremos de perto os cálculos feitos por Regge e Wheeler [6] em 1957. No capítulo 5 faremos um cálculo semelhante, para cordas e branas negras de Schwarzschild (definidos mais adiante).

⁵Consideramos no cálculo de perturbações que $\check{\mathbf{g}}$ está em ordem zero e $\mathbf{h}$ em primeira ordem. Desta maneira, todo termo com ordem maior do que $(\mathbf{h})^2$ é desprezado.

As equações de perturbação que usamos são

$$\delta R_{\mu\nu} = 0, \quad \delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma_{\mu\beta;\nu}^{\beta} - \delta \Gamma_{\mu\nu;\beta}^{\beta}, \quad (2.82)$$

com $\delta \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = g^{\alpha\nu}(h_{\beta\nu;\gamma} + h_{\nu\gamma;\beta} - h_{\beta\gamma;\nu})$.

Como sabemos $g_{\mu\nu}$, o único trabalho é escolher um $h_{\mu\nu}$. Dada a simetria esférica do problema, escolhemos h_{00}, h_{01} e h_{11} como funções escalares, h_{02}, h_{03} e h_{12}, h_{13} como funções vetoriais e h_{22}, h_{23}, h_{33} como funções tensoriais⁶. No contexto de harmônicos esféricos, temos duas paridades possíveis de acordo com a maneira com que as funções $h_{\mu\nu}$ se transformam: paridade par, para transformações que mudem com $(-1)^L$ e paridade ímpar para $(-1)^{L+1}$. Desta maneira são duas as matrizes de perturbação possíveis de escolha, uma com paridade par e outra com paridade ímpar.

Devemos construir funções de harmônicos esféricos que se transformem como escalares, vetores e mesmo tensores 2x2. Para paridade par, as funções mais genéricas são [6],

$$E = C_1 Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.83)$$

$$V_{\mu} = C_2 \partial_{\mu} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.84)$$

$$T_{\mu\nu} = C_3 [Y_{lm}(\theta, \phi)]_{;\mu\nu}, \quad \tilde{T}_{\mu\nu} = C_4 \gamma_{\mu\nu} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.85)$$

em que C_i são funções constantes em θ e ϕ , E representa um escalar, V um vetor e T um tensor (que não deve ser confundido com o tensor energia-momento, do qual falamos na introdução), $\gamma_{\mu\nu}$ a métrica da 1-esfera,

$$\gamma_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

De outra maneira, para paridade ímpar, temos genericamente

$$E = 0, \quad (2.87)$$

$$V_{\mu} = C_1 \varepsilon_{\nu}^{\mu} \partial_{\mu} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.88)$$

$$T_{\mu\nu} = C_2 \varepsilon_{\mu}^{\lambda} [Y_{lm}(\theta, \phi)]_{;\lambda\nu} + C_3 \varepsilon_{\nu}^{\lambda} [Y_{lm}(\theta, \phi)]_{;\lambda\mu}, \quad (2.89)$$

em que,

$$\varepsilon_{\mu}^{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ -\sin^{-1} \theta & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

⁶Uma descrição melhor do porque deste comportamento é dada ao escolhermos um calibre no capítulo 4, para a perturbação da corda negra.

Podemos construir, a partir destas funções, duas matrizes de perturbação genéricas, uma para cada paridade. A matriz de paridade ímpar é dada por

$$\mathbf{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -f_0(t, r) \frac{\partial_\phi Y_{lm}}{\sin \theta} & f_0(t, r) \frac{\partial_\theta Y_{lm}}{\sin^{-1} \theta} \\ 0 & 0 & -f_1(t, r) \frac{\partial_\phi Y_{lm}}{\sin \theta} & f_1(t, r) \frac{\partial_\theta Y_{lm}}{\sin^{-1} \theta} \\ -f_0(t, r) \frac{\partial_\phi Y_{lm}}{\sin \theta} & -f_1(t, r) \frac{\partial_\theta Y_{lm}}{\sin \theta} & h_{22} & h_{23} \\ f_0(t, r) \frac{\partial_\phi Y_{lm}}{\sin^{-1} \theta} & f_1(t, r) \frac{\partial_\theta Y_{lm}}{\sin^{-1} \theta} & h_{32} & h_{33} = \frac{h_{22}}{\sin^{-2} \theta} \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

com

$$h_{22} = f_2(t, r) \left[\frac{\partial_{\theta\phi}}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta \partial_\phi}{\sin^2 \theta} \right] Y_{lm}, \quad (2.92)$$

$$h_{23} = h_{32} = \frac{f_2(t, r)}{2} \left[\frac{\partial_{\phi\phi}}{\sin \theta} + \cos \theta \partial_\theta - \sin \theta \partial_{\theta\theta} \right] Y_{lm}. \quad (2.93)$$

A matriz para paridade par é escrita como

$$\mathbf{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F_0(t, r) Y_{lm} & F_1(t, r) Y_{lm} & F_2(t, r) \partial_\theta Y_{lm} & F_2(t, r) \partial_\phi Y_{lm} \\ F_1(t, r) Y_{lm} & F_3(t, r) Y_{lm} & F_4(t, r) \partial_\theta Y_{lm} & F_4(t, r) \partial_\phi Y_{lm} \\ F_2(t, r) \partial_\theta Y_{lm} & F_4(t, r) \partial_\theta Y_{lm} & h_{22} & h_{23} \\ F_2(t, r) \partial_\phi Y_{lm} & F_4(t, r) \partial_\phi Y_{lm} & h_{32} & h_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

com

$$h_{22} = r^2 \{ F_5(t, r) + F_6(t, r) \partial_{\theta\theta} \} Y_{lm}, \quad (2.95)$$

$$h_{23} = h_{32} = r^2 F_6(t, r) \{ \partial_{\theta\phi} - \cot \theta \partial_\phi \} Y_{lm}, \quad (2.96)$$

$$h_{33} = r^2 \{ F_5(t, r) \sin^2 \theta + F_6(t, r) [\partial_{\phi\phi} + \sin \theta \cos \theta \partial_\theta] \} Y_{lm}. \quad (2.97)$$

Estas matrizes são as mais genéricas para uma perturbação esfericamente simétrica na geometria de Schwarzschild. Entretanto elas não contêm todas as simetrias do problema que podem ser fixadas. Há ainda duas escolhas possíveis que simplificam $h_{\mu\nu}$: podemos tomar o valor $m = 0$ nos harmônicos, dado a simetria esférica, e conseqüente invariância sob rotação em ϕ . Também podemos somar vetores de Killing a esta matriz dados por $2\epsilon_{(\mu;\nu)}$, lembrando que são nulos em ordem zero (podendo representar portanto termos em primeira ordem).

Com as escolhas dos vetores de Killing dadas por

$$\begin{aligned} \epsilon^0 &= \epsilon^1 = 0, \\ \epsilon^i &= G(r, t) \epsilon^{ij} \partial_j Y_{lm}, \quad (i, j) = (2, 3), \end{aligned} \quad (2.98)$$

para ondas ímpares e

$$\begin{aligned}
\epsilon^0 &= g_1(t, r)Y_{lm}, \\
\epsilon^1 &= g_2(t, r)Y_{lm}, \\
\epsilon^2 &= g_3(t, r)\partial_\theta Y_{lm}, \\
\epsilon^3 &= g_3(t, r)\sin^{-2}\theta\partial_\phi Y_{lm},
\end{aligned} \tag{2.99}$$

para ondas pares e supondo uma dependência temporal do tipo $h_{\mu\nu}(\mathbf{r}, t) = h_{\mu\nu}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, as matrizes de perturbação (com a escolha adequada dos $G(t, r)$ e $g_i(t, r)$) para ondas ímpares e pares ficam, respectivamente,

$$\mathbf{h}_{\mu\nu} = \mathbf{e}^{-i\omega t} \sin\theta\partial_\theta \mathbf{Y}_{10} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & u(r) \\ 0 & 0 & 0 & v(r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ u(r) & v(r) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.100}$$

$$\mathbf{h}_{\mu\nu} = \mathbf{e}^{-i\omega t} \mathbf{Y}_{10} \begin{pmatrix} U(r) & V(r) & 0 & 0 \\ V(r) & G(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin^2\theta K(r) \end{pmatrix}. \tag{2.101}$$

Estas são as formas mais simples que conseguimos construir para as matrizes $h_{\mu\nu}$ em uma geometria de Schwarzschild.

O próximo passo agora é resolver as equações de perturbação $\delta R_{\mu\nu} = 0$, e conseguir uma equação de variável única. Este trabalho, desenvolvido em [6] não será feito aqui, dado que no capítulo 4 resolvemos as equações de Einstein para um sistema bastante semelhante a este. Limitar-nos-emos a mostrar a equação resultante, dada por

$$\left\{ \frac{d^2}{dr_*^2} - \omega^2 + V_l(r) \right\} \Psi = 0, \tag{2.102}$$

em que Ψ representa o campo (no caso de ondas ímpares, $\Psi = \left[1 - \frac{2m}{r}\right] \frac{v(r)}{r}$, para ondas pares entretanto outras transformações são necessárias, que não explicitaremos) e $V_l(r)$ o potencial, escrito como

$$V_l(r) = \begin{cases} V_{\text{impar}} = \left[1 - \frac{2M}{r}\right] \left[-\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{6M}{r}\right] \\ V_{\text{par}} = \frac{2(r-2M)[n^2(n+1)r^3 + 3Mn^2r^2 + 9M^2nr + 9M^3]}{r^4(nr+3M)^2}, \end{cases} \tag{2.103}$$

com $n = \frac{(l-1)(l+2)}{2}$.

Isto completa a análise da perturbação de Schwarzschild com a escolha de gauge para $h_{\mu\nu}$.

A segunda maneira de calcular as equações de perturbação segue da escolha de $g_{\mu\nu}$ como em (2.71). Nas perturbações ímpares (ou na notação de [4], axiais), tomamos duas componentes do tensor de Ricci,

$$\frac{2R_{12}}{-e^{-2\psi-\nu-\mu_3}} = [e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3}(q_{3,2} - q_{2,3})]_{,3} - [e^{3\psi+\nu-\mu_2+\mu_3}(q_{2,0} - \omega_{,2})]_{,0}, \quad (2.104)$$

$$\frac{2R_{13}}{-e^{-2\psi-\nu-\mu_2}} = [e^{3\psi+\nu-\mu_3-\mu_2}(q_{2,3} - q_{3,2})]_{,2} - [e^{3\psi+\nu-\mu_3+\mu_2}(q_{3,0} - \omega_{,3})]_{,0}. \quad (2.105)$$

Para Schwarzschild não perturbado (em ordem zero) temos

$$R_{12} = R_{13} = 0. \quad (2.106)$$

Ou seja, R_{12} e R_{13} estão já em primeira ordem visto que envolvem diretamente ω e q em suas equações, termos em primeira ordem na métrica perturbada (2.71). Portanto temos três variáveis de perturbação, para as quais há duas equações⁷

$$[e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3}(q_{3,2} - q_{2,3})]_{,3} = [e^{3\psi+\nu-\mu_2+\mu_3}(q_{2,0} - \omega_{,2})]_{,0}, \quad (2.107)$$

$$[e^{3\psi+\nu-\mu_3-\mu_2}(q_{2,3} - q_{3,2})]_{,2} = [e^{3\psi+\nu-\mu_3+\mu_2}(q_{3,0} - \omega_{,3})]_{,0}. \quad (2.108)$$

Considerando $e^{2\nu} = e^{-2\mu_2} = 1 - \frac{2M}{r}$, $e^{\mu_3} = r$ e $e^\psi = r \sin \theta$, as equações passam a ser

$$\frac{\partial}{\partial \theta} [(r - 2M)(q_{2,3} - q_{3,2}) \sin^3 \theta] = r^3 \sin^3 \theta (q_{2,0} - \omega_{,2})_{,0}, \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} [(r^2 - 2Mr)(q_{2,3} - q_{3,2}) \sin^3 \theta] = \frac{r^3 \sin^3 \theta (\omega_{,3} - q_{3,0})_{,0}}{2M - r}. \quad (2.110)$$

Para eliminar uma das variáveis, diferenciamos a primeira equação em θ e a segunda em r

$$\frac{r^3}{r - 2M} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \{ \sin^3 \theta (q_{2,3} - q_{3,2}) \} \right] = (q_{2,3,0} - \omega_{,2,3})_{,0}, \quad (2.111)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r^3}{2M - r} \frac{\partial}{\partial r} \{ (r - 2M)(q_{2,3} - q_{3,2}) \} \right] = (\omega_{,3,2} - q_{3,2,0})_{,0}. \quad (2.112)$$

Somamos as equações obtendo por fim

$$r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left[b \frac{\partial F(r, t, \theta)}{\partial r} \right] + \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial F(r, t, \theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{b} \frac{\partial^2 F(r, t, \theta)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.113)$$

⁷Usaremos a convenção, $2 \equiv r$ e $3 \equiv \theta$ para as derivadas que aparecem do lado direito da equação.

em que $b = \frac{r-2M}{r^3}$ (usamos também que $(r^2 - 2Mr)(q_{2,3} - q_{3,2}) \sin^3 \theta = F$, mudança que leva a equação a ter apenas uma variável).

Fazemos uma separação entre a parte radial e a parte angular da equação supondo uma dependência do tipo $F(r, t, \theta) = W(r, t)C(\theta)$. Neste caso, a equação em θ pode ser comparada com uma das *equações de Gegenbauer*⁸ e não com harmônicos esféricos, como fizemos até aqui.

Dividindo (2.113) por $W(r, t)C(\theta)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{r^4}{W(r, t)} \frac{\partial}{\partial r} \left[b \frac{\partial W(r, t)}{\partial r} \right] + \frac{\sin^3 \theta}{C(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial C(\theta)}{\partial \theta} \right] \\ + \frac{b^{-1}}{W(r, t)} \frac{\partial^2 W(r, t)}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Sendo

$$\frac{\sin^3 \theta}{C(\theta)} \partial_\theta \left[\frac{\partial_\theta C(\theta)}{\sin^3 \theta} \right] = (l-1)(l+2), \quad (2.115)$$

obtemos a equação em (r, t) ,

$$r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left[b \frac{\partial W(r, t)}{\partial r} \right] + (l+2)(l-1)W(r, t) + b^{-1} \frac{\partial^2 W(r, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.116)$$

Finalmente substituindo o sistema tartaruga em (2.116), supondo uma dependência temporal do tipo $e^{i\omega t}$, e fazendo a substituição para o campo do tipo $W(r) \rightarrow \frac{\Psi(r)}{r}$ obtemos semelhantemente a (2.77) uma equação similar à de Schrödinger,

$$\partial_{r_* r_*} \Psi + \omega^2 \Psi - V_{grav}(r) \Psi = 0, \quad (2.117)$$

sendo $V_{grav}(r)$ o potencial gravitacional, dado por

$$V_{grav}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right]. \quad (2.118)$$

⁸A equação de Gegenbauer é dada por

$$\left[\frac{d}{d\theta} \sin^{2\alpha} \theta \frac{d}{d\theta} + n(n+2\alpha) \sin^{2\alpha} \theta \right] C_n^\alpha(\theta) = 0,$$

portanto, se escolhermos $\alpha = -\frac{3}{2}$ e $n = l+2$, com a separação

$$F(r, t, \theta) = W(r, t)C_{l+2}^{-3/2}(\theta),$$

obtemos a equação (2.113) em r e t apenas.

Esta equação é a mesma que a obtida por Regge e Wheeler em 1957.

O último potencial obtido através do Ansatz (2.71) para ondas pares é chamado na notação de [4] de potencial para perturbação polar, e tem exatamente a mesma expressão de (2.103), para a paridade par. Consideramos perturbações em Ψ, ν, μ_2 e μ_3 , ou seja incrementos de primeira ordem nestas variáveis, dados por $\delta\Psi, \delta\nu, \delta\mu_2$ e $\delta\mu_3$, através das componentes (02), (03), (23), (11) e (22) do tensor de Ricci. A dedução completa deste potencial é bastante complexa e pode ser encontrada em [4].

2.4 Singularidades com Simetria Esférica em mais do que 4 Dimensões

Falamos até aqui da solução de Schwarzschild em 4 dimensões enfatizando o cálculo de geodésicas e perturbações gravitacionais e escalares em torno desta solução. Sabemos que um buraco negro esféricamente simétrico em 4 dimensões pode ser gerado do colapso de uma nuvem com simetria esférica.

Um ponto que permanece ainda algo obscuro neste âmbito é a explicação de como se formam singularidades N-dimensionais, sejam elas cordas, branas ou buracos negros. Seria natural pensar em uma nuvem de poeira N-dimensional que colapse e forme um buraco negro ou alguma destas estruturas. Entretanto a maior parte das teorias de branas em altas dimensões confinam a matéria em 4 dimensões espaciais, visto que o modelo padrão de partículas e campos tem funcionado relativamente bem para este número de dimensões.

Assim um buraco negro N-dimensional pode vir apenas do colapso de uma nuvem de matéria exótica que ainda não conhecemos. Há contudo um limite em que a formação de buracos negros em alta dimensão acontece mesmo no contexto de teorias de branas, que exploraremos na última seção do próximo capítulo: quando os buracos negros têm massa menor ou da ordem da escala em que a gravitação quântica passa a ser dominante.

O colapso de uma nuvem de poeira 4-dimensional poderá formar no contexto de mundos-brana singularidades como branas ou cordas negras. Tais estruturas diferem dos buracos negros do ponto de vista do observador externo devido ao formato de seu horizonte: o horizonte constitui um produto $S^n \times \mathbb{R}^m$ para elas e para buracos negros o horizonte tem topologia S^D . Estudaremos em detalhes tais singularidades no capítulo 4.

Nesta seção dedicar-nos-emos a investigar soluções das ‘equações de Einstein’ em mais do que 4 dimensões.

A ação que descreve a gravidade pode ser generalizada de maneira trivial,

apenas incluindo D dimensões no integrando,

$$S = \int \left[\frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L} \right] \sqrt{-g} d^{N+1}x, \quad (2.119)$$

em que N representa o número de dimensões tipo espaço. Considerando soluções assintoticamente planas, aproximamos a métrica como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \Theta(r^{-(N-2)})$, ou seja, como a métrica de Minkowski mais uma pequena ‘perturbação’, $g_{\mu\nu} \sim \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Isto representa um observador muito longe da singularidade, que experimenta um espaço quase plano e $h_{\mu\nu}$ como dissemos é a ‘perturbação’ que este observador observa no espaço plano devido ao buraco negro.

As equações de Einstein que surgem da ação (2.119), são as mesmas que em 4 dimensões,

$$R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2} = kT_{\mu\nu}. \quad (2.120)$$

Então, usando do gauge harmônico [9],

$$\partial_\nu \left[h^{\mu\nu} - \frac{\eta^{\mu\nu} h^\delta{}_\delta}{2} \right] = 0, \quad (2.121)$$

conseguimos uma forma reduzida para as equações de Einstein,

$$\nabla^2 h_{\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{T\eta_{\mu\nu}}{N-1} \right) \equiv \alpha_{\mu\nu}. \quad (2.122)$$

Usando a função de Green para o laplaciano, temos uma expressão para $h_{\mu\nu}$ em termos de α ,

$$h_{\mu\nu} = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{(N-2)2\pi^{\frac{N}{2}}} \int \frac{\alpha_{\mu\nu}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{N-2}} d^N y, \quad (2.123)$$

que expandimos em termos de $r = |\mathbf{x}| \geq |\mathbf{y}|$ [10],

$$h_{\mu\nu} = \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}{(N-2)2\pi^{\frac{N}{2}} r^{N-2}} \int \alpha_{\mu\nu} d^N y + \frac{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) x^k}{2\pi^{\frac{N}{2}} r^N} \int y^k \alpha_{\mu\nu} d^N y + \dots \quad (2.124)$$

Tomando a massa do buraco negro como $\int T_{00} d^N x$ (ou seja considerando o tensor energia-momento de um fluido perfeito), e as propriedades deste tensor como conservação local (que se reduz a $\int x^m T^{k\mu} d^N x = - \int x^k T^{m\mu} d^N x$),

conseguimos relações para $h_{\mu\nu}$ no limite assintótico dadas por

$$h_{00} \sim \frac{16\pi G \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) M}{(N-1)2\pi^{\frac{N}{2}} r^{N-2}}, \quad (2.125)$$

$$h_{ij} \sim \frac{16\pi G \Gamma\left(\frac{N}{2}\right) M \delta_{ij}}{(N-1)(N-2)2\pi^{\frac{N}{2}} r^{N-2}}, \quad (2.126)$$

$$h_{0i} \sim -\frac{8\Gamma\left(\frac{N}{2}\right) \pi G x^k J^{ki}}{2\pi^{\frac{N}{2}} r^N}, \quad (2.127)$$

com $J^{\mu\nu}$ representando o tensor de momento angular e as letras latinas índices que correm sobre as coordenadas tipo espaço. Isto pode ser usado para a definição do momento angular e massa do buraco negro em qualquer número de dimensões.

Em um buraco negro com carga, de outra maneira, a ação da qual partimos para achar a solução é dada por

$$S = -\frac{1}{4} \int (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + R) \sqrt{-g} d^{N+1}x. \quad (2.128)$$

Propriedades e métrica das soluções.

Buracos negros esféricos em $D = N + 1$ têm topologia $\mathbb{R}^2 \times S^{N-1}$. Para a obtenção destes buracos negros, variamos as ações escritas acima. Para Schwarzschild, por exemplo $\mathcal{L} = 0$, e para Reissner-Nordström a ação foi escrita acima.

Se a solução possuir um vetor de Killing tipo tempo na região externa ao horizonte e as superfícies a t constante formarem esferas concêntricas no espaço, a métrica toma a forma,

$$ds^2 = -a^2 dt^2 + b^2 dr^2 + r^2 d\Omega_N^2, \quad (2.129)$$

com $d\Omega_N^2$ o elemento de linha da N -esfera.

A solução das equações de Einstein no vácuo necessariamente leva a

$$a = b^{-1} = \sqrt{\left[1 - \frac{C}{r^{N-2}}\right]}, \quad (2.130)$$

com C uma constante. Em $N = 2$, portanto não há buracos negros como solução das equações de Einstein, visto que necessariamente o espaço-tempo é plano: o gráviton não existe em menos do que 4 dimensões. O parâmetro

C da solução está diretamente relacionado com a massa do buraco negro em questão,

$$M = \frac{C(N-1)2\pi^{\frac{N}{2}}}{16\pi G\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}. \quad (2.131)$$

Se $C < 0$, o espaço-tempo conterá uma singularidade nua tipo tempo em $r = 0$. No caso 4-dimensional, temos $C = 2M$, e para os demais casos $C = |f(M)|$, de maneira que sempre $C > 0$, o que evita o aparecimento desta singularidade nua. A superfície $r = C^{1/(N-2)}$ é um horizonte de eventos.

Temos então, finalmente a solução de Schwarzschild em D dimensões para as equações de Einstein no vácuo,

$$ds^2 = \left[-1 + \frac{16\pi G\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)M}{(N-1)2\pi^{\frac{N}{2}}r^{N-2}} \right] dt^2 + \left[1 - \frac{16\pi G\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)M}{(N-1)2\pi^{\frac{N}{2}}r^{N-2}} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_N^2. \quad (2.132)$$

As geodésicas seguidas por partículas (com ou sem massa) em Schwarzschild D -dimensional têm analogia clara com o caso 4-dimensional. Em 4 dimensões, devido à simetria do espaço-tempo sempre podemos achar um sistema de coordenadas para o qual o corpo se move de tal maneira que a velocidade em uma das coordenadas é nula. Nas seções anteriores, fizemos $\dot{\theta} = 0$. Para D dimensões tomamos equivalentemente $\dot{x}_i = 0$ (com $i = 1, 2, \dots, D-3$). Desta maneira a análise das geodésicas feita em 4 dimensões continua válida para D dimensões.

A solução de Reissner-Nordström como um buraco negro esfericamente simétrico com carga advém da variação da ação em (2.128) e em D dimensões é representada por (2.129), com os coeficientes a e b escritos como segue [10],

$$a = b^{-1} = \sqrt{\left(1 - \frac{C}{r^{N-2}} + \frac{F^2}{r^{2N-4}}\right)}, \quad (2.133)$$

sendo C a mesma função que para Schwarzschild e F estando relacionado à carga do buraco negro por

$$F = \pm Q \sqrt{\frac{8\pi G}{(N-1)(N-2)}}. \quad (2.134)$$

Como para $F^2 > \frac{C^2}{4}$, temos uma singularidade nua tipo tempo em $r = 0$, necessariamente $F^2 < \frac{C^2}{4}$, o que leva à presença de dois horizontes na solução:

um horizonte de eventos em $r^{N-2} = \frac{C}{2} + \sqrt{\frac{F^2}{4} - D^2}$ e um ‘horizonte de Cauchy’ em $r^{N-2} = \frac{C}{2} - \sqrt{\frac{F^2}{4} - D^2}$.

Finalizaremos este capítulo com uma breve exposição da termodinâmica de buracos negros.

2.5 Algumas Idéias em Termodinâmica de Buracos Negros

A termodinâmica definida para buracos negros teve um grande desenvolvimento na década de 70 com os cálculos de Hawking, Bardeen, Carter [11,12,13], e outros. Do ponto de vista do progresso da física teórica, estes desenvolvimentos são notáveis por caminharem na busca de uma teoria unificada entre gravitação e mecânica quântica.

De fato, para buracos negros, a relação entre as propriedades geométricas do horizonte de eventos e quantidades termodinâmicas como entropia e temperatura fornecem uma boa intuição da existência de relações entre espaço-tempo e teoria quântica.

A temperatura para buracos negros estacionários é diretamente proporcional à gravidade superficial destes buracos negros no horizonte de eventos.

Começaremos a seção explorando o teorema da área para horizontes de eventos de buracos negros (que usaremos mais à frente no capítulo 4), e as três primeiras leis da termodinâmica.

Teorema da Área

O teorema da área para os buracos negros, atesta que se o espaço-tempo interno e externo ao horizonte de eventos futuro é regular e o tensor energia-momento satisfaz a condição de energia nula para vetores k^μ nulos, então a área da seção de choque espacial do horizonte de eventos não pode diminuir.

Ao considerarmos um pequeno pedaço da geodésica nula geradora do horizonte, com área de seção de choque A , definimos a expansão (com relação a um parâmetro afim λ) como

$$\frac{dA}{d\lambda} = \theta A, \quad (2.135)$$

com θ representando a taxa de mudança da área. O teorema atesta que sempre $\theta > 0$. A evolução desta variável θ pode ser considerada através da

equação de Raychaudhuri [1],

$$\frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{\theta^2}{3} - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}k^\mu k^\nu, \quad (2.136)$$

em que $\sigma_{\mu\nu}$ é o cisalhamento, $\omega_{\mu\nu}$ a rotação e k^μ um vetor nulo. Se o último termo for positivo e θ negativo, podemos ter $\theta \rightarrow \infty$ para um λ finito. Isto produzirá uma separação tipo tempo entre dois pontos do horizonte em dado momento [14]. Assim θ necessariamente deve ser positivo ou igual a zero.

Lei Zero, Primeira e Segunda Leis

As primeiras leis da termodinâmica tratam de situações em equilíbrio, ou quase-equilíbrio, ou ainda, de mudanças adiabáticas para buracos negros.

Lei Zero.

A gravidade superficial k definida por

$$\xi^\mu \nabla_\mu \xi^\nu = k \xi^\nu \rightarrow r_H, \quad (2.137)$$

$$k^2 = -\frac{\nabla^\mu \xi^\nu \nabla_\mu \xi_\nu}{2} \rightarrow r_H. \quad (2.138)$$

em que os ξ representam vetores de Killing, é constante ao longo do horizonte de eventos de um buraco negro estacionário. Isto fornece uma primeira intuição de que a quantidade superficial é uma análogo da quantidade termodinâmica temperatura. Esta informação parece trivial, por estarmos tratando de buracos negros com simetria esférica. Entretanto ao pensarmos em cordas e branas negras por exemplo, para as quais a distância ‘radial’ entre o horizonte e a singularidade não é sempre a mesma, vemos que esta informação é de fato importante.

Primeira Lei. A massa de um buraco negro como sentida pelo observador no infinito, pode ser escrita pela relação

$$dM = \frac{k dA}{8\pi} + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (2.139)$$

em que Ω representa a velocidade angular com momento J , Φ o potencial elétrico com carga Q , e A a área do horizonte de eventos. Esta lei, junto com a relação que nos permite identificar temperatura com a gravidade superficial do buraco negro, fornece a relação da segunda lei.

Se considerarmos a solução de Schwarzschild apenas, é simples mostrar que $A = 16\pi M^2$, ou seja, sobre uma pequena mudança $M \rightarrow M + dM$, a

área vai como $A \rightarrow A + 32\pi M dM$, implicando em, $8\pi dM = k dA$, que é a primeira lei para Schwarzschild.

Segunda Lei. A entropia de um buraco negro é dada pela relação

$$S = \frac{A}{4G\hbar}. \quad (2.140)$$

Como M , J e Q são definidos assintoticamente, a primeira lei relaciona quantidades no infinito a quantidades locais do horizonte de eventos. Isto depende de forma crucial da unicidade dos buracos negros. Portanto, não sendo únicos os parâmetros em Universos com mais do que 4 dimensões, a primeira lei deve assumir provavelmente outra forma.

Um importante generalização da primeira lei foi investigada por Wald e Iyer [15, 16] que demonstraram que a lei vale para um lagrangeano arbitrário da gravidade que seja função do tensor de Riemann e suas derivadas covariantes (que pode ser por exemplo a ação efetiva de cordas). Em [15], é demonstrado que a validade da segunda lei na evolução dinâmica de um buraco negro inicialmente estacionário para um estado estacionário final é equivalente a positividade de um fluxo de Noether, devendo estar portanto, intimamente ligada às propriedades de energia positivas da teoria.

Na aproximação usada, se define uma corrente $\mathbf{J}$ através da forma $\mathbf{Q}$, que satisfaz $\mathbf{J} = d\mathbf{Q}$ quando as equações de movimento são satisfeitas. A partir disto, se mostrou que em um buraco negro estacionário podemos relacionar uma energia definida por uma integral de superfície no infinito à mudança em uma integral local sobre o horizonte.

Finalizaremos esta seção falando do espectro de radiação emitido por um buraco negro, advindo de sua borda, o horizonte de eventos.

A Contribuição de Hawking

Um dos efeitos mais interessantes prescritos por Hawking na década de 70 acerca de buracos negros trata da radiação de partículas em um buraco negro, advindo da borda de seu horizonte de eventos⁹. De acordo com os cálculos de Hawking, buracos negros com horizontes de eventos que respeitem o teorema da área têm um espectro de radiação associado ao horizonte de eventos. Esta afirmação é equivalente a dizer que existe uma temperatura constante associada ao horizonte de eventos do buraco negro.

⁹Há um análogo também bastante interessante da emissão de radiação por buracos negros chamado efeito Unruh [17], que descreve a radiação de um espaço de Minkowski em relação a observadores acelerados em um outro espaço de fundo, o espaço-tempo de Rindler. Isto tem relação direta com o fato de que não existe definição de vácuo padrão quando o espaço-tempo é curvo, bem como com o fato de que não existe um observável invariante *número de partículas* para observadores com diferentes acelerações.

Para este tratamento do efeito Hawking, podemos considerar o buraco negro de Schwarzschild com uma substituição para o tempo $t \rightarrow i\tau$,

$$ds^2 = ad\tau^2 + a^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.141)$$

Se definirmos um estado quântico tomando a função de Green $G(x, y)$ e fizermos uma continuação analítica para obtermos uma função $G^\beta(t_x - t_y, x, y)$ no plano complexo, no buraco negro lorentziano, esta função de Green será periódica. Isto quer dizer que o estado definido pela continuação analítica do buraco negro euclidiano é térmico tendo temperatura $T = \frac{k}{2\pi}$. Este estado térmico é chamado *Hartle-Hawking* (HH). A temperatura advém da peridiodicidade em τ , exigida para manter o horizonte suave.

Entretanto este estado físico para Schwarzschild não é estável e eterno: ele tem uma capacidade calorífica negativa, $C_V = \frac{\partial M}{\partial T} < 0$, pois $T = (8\pi M)^{-1}$, o que indica flutuação do espectro de massa diminuindo esta, de maneira que o buraco negro irradia mais do que absorve perdendo desta maneira massa. Assim, não há estado de equilíbrio para Schwarzschild, mesmo que este seja iluminado com fluxo termal de radiação. A temperatura para o buraco negro de SAdS,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\Omega_{d-2}^2, \quad f(r) = \left(1 - \frac{16\pi GM}{(d-2)r^{d-3}\Upsilon} + \frac{r^2}{l^2}\right), \quad (2.142)$$

(com Υ representando o volume da $(d-2)$ -esfera), por exemplo, pode ser expressa em termos do número de dimensões do espaço-tempo, do horizonte de eventos e do horizonte Anti-de Sitter da solução

$$T = \frac{(d-1)r_+^2 + (d-3)l^2}{4\pi r_+ l^2}. \quad (2.143)$$

Para $r_+ \ll l$ teremos um comportamento parecido com o de Schwarzschild. Para $r_+ \gg l$, teremos

$$T \sim \frac{(d-1)r_+}{4\pi l^2} \propto M^{\frac{1}{d-1}}, \quad (2.144)$$

de maneira que o calor específico se torna positivo. Então, o equilíbrio passa a ser estável para buracos negros de grandes massas. Para Schwarzschild puramente, a temperatura é dada por

$$T = \frac{\hbar k}{2\pi}. \quad (2.145)$$

Capítulo 3

Universos e Soluções das Equações de Einstein com $D > 4$

Nas últimas décadas temos visto um crescente interesse em teorias que explicam o Universo com mais do que apenas as 4 dimensões tradicionais. Uma das mais importantes teorias deste escopo é a teoria de cordas que procura uma união entre a gravitação e a mecânica quântica, mudando o foco das partículas fundamentais: ao invés de partículas pontuais como temos estudado ao longo do desenvolvimento da teoria quântica, teríamos cordas, ou seja, elementos que possuem uma dimensão extensa. Para a teoria de cordas, todos os campos são representados por diferentes modos de vibração da corda, através de uma álgebra complexa chamada álgebra de Virasoro. Não apenas isto, mas o número de dimensões espaço-temporais passa não mais a ser 4 como padrão, mas 26 no caso da teoria de cordas bosônica. Isto porque ao fixarmos a invariância de Poincaré nas correntes de folha-mundo da corda, recaímos em uma equação em que obrigatoriamente $D = 26$. Até então os problemas eram de que a teoria só tratava de bósons e tinha em seu espectro de massas um táquion. Após a introdução de espinores entretanto, passamos a incluir férmions e o táquion desapareceu do espectro de massas, tendo o número de dimensões crítico caído para 10. De fato, os últimos avanços em cordas propõem que vivemos em um Universo com 11 dimensões e que, todas as teorias disponíveis estão interconectadas por dualidades e acontecem em apenas 10 dimensões.

Inspirados em teoria de cordas, há alguns anos, temos visto um crescente número de trabalhos em teorias de gravitação com mais do que 4 dimensões, sem entretanto focar interações fundamentais entre as partículas mas dando enfoque à gravitação propriamente dita. Em geral tais teorias situam os campos de matéria (exceto pelo gravitacional) em uma hipersuperfície de 4 dimensões denominada *brana* e propagam a gravitação por todas as di-

mensões do modelo. Também aqui teríamos uma inspiração direta da teoria de cordas: cordas abertas têm suas extremidades fixas em branas, (lugares geométricos que seguem certas condições de contorno diferentes das cordas) e cordas fechadas não teriam pontos fixos. Nas cordas abertas, os campos são gerados nas extremidades e se propagam pelas branas, enquanto nas cordas fechadas estão livres para se mover por todo o Universo. Nas teorias de cordas o campo gravitacional só pode ser representado por cordas fechadas.¹

O objetivo central destas teorias de branas está em dar uma possível resposta para o problema da hierarquia entre as escalas fraca e da gravitação prevista teoricamente. Vamos abordar neste capítulo duas destas teorias, uma de 1998, proposta pelos físicos Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali que exige um número mínimo de duas dimensões extras (modelo ADD) [18, 19], e outra de 1999, proposta por Lisa Randall e Raman Sundrum (modelos RS) [20, 21], em que temos um Universo 5-dimensional Anti de-Sitter (na verdade são duas as propostas de Randall e Sundrum, que especificaremos devidamente mais à frente).

3.1 Introdução ao Mundo Brana: O Modelo de Arkani-Dvali-Dimopoulos (ADD)

O modelo ADD, proposto por Arkani, Dvali e Dimopoulos em 1998 [18, 19] foi o primeiro modelo de grande impacto na comunidade científica que explica o fato de a constante de acoplamento do campo gravitacional ser pequena (em relação às constantes de outros campos) devido à existência de pelo menos duas dimensões extras, grandes em relação à escala fraca de energia (1 TeV), entretanto pequenas para a detecção gravitacional direta. Como seguido depois pelos modelos RS, o gráviton propaga-se por todas as dimensões, o que não verificamos para os demais campos, que estão limitados a uma subvariedade 4-dimensional. Até então, a escala eletrofraca de energia, verificada experimentalmente era diferente da escala prevista classicamente pela teoria de gravitação. De fato, temos [22] para a massa, comprimento e tempo de

¹Embora não tenhamos citado, há apenas duas possibilidades topologicamente diferentes para estudarmos: cordas abertas e fechadas. Estes são os dois tipos de estruturas usados na teoria, com a acreção de que em algumas teorias as cordas podem ser orientáveis, ou, em outras palavras, ter um sentido preferencial.

Planck os valores²

$$m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_4}} \sim 10^{-5} g, \quad (3.1)$$

$$l_P = \sqrt{\frac{G_4 \hbar}{c^3}} \sim 10^{-33} cm, \quad (3.2)$$

$$t_P = \frac{l_P}{c} = \sqrt{\frac{G_4 \hbar}{c^5}} \sim 10^{-43} s, \quad (3.3)$$

(G_4 representa a constante gravitacional Newtoniana em 4 dimensões). Em termos de unidades naturais,

$$l_P \sim 10^{-1} eV, \quad (3.4)$$

$$t_P \sim 10^{-1} eV, \quad (3.5)$$

$$m_P \sim 10^{19} GeV. \quad (3.6)$$

Estas ‘energias’ representam pois a escala em que a gravidade não pode ser descrita pela teoria clássica. Em (3.1-3.3) vemos que o comprimento e tempo da escala quântica são muito pequenos e não estão ao alcance do limite que a física experimental consegue chegar não sendo passíveis de verificação. Entretanto a massa da escala quântica está apenas 5 ordens de grandeza abaixo do grama, quando o previsto pela escala eletrofraca, é de que isto aconteça a 21 ordens de grandeza do grama.

A diferença fundamental entre a escala eletrofraca e a planckiana situa-se justamente na comprovação experimental: o dado $m_{ef} \sim TeV$, foi testado a distâncias próprias da escala, em unidades naturais $(m_{ef})^{-1}$,³ en-

²Estas relações aparecem, pelo fato de que consideramos as constantes G_4 , c e $\hbar$ fundamentais, colocando-as em termos de comprimento, tempo e massa de Planck, como

$$\begin{aligned} G &= \frac{l_P^3}{m_P t_P^2}, \\ c &= \frac{l_P}{t_P}, \\ \hbar &= \frac{m_P t_P^2}{t_P}. \end{aligned}$$

³A correspondência entre coordenadas naturais dadas por $\hbar = c = k = 1$, e outro sistema de coordenadas que não identifique distância tempo e massa, pode ser dada, ao dividirmos quaisquer das equações (3.1,3.2,3.3). Assim, por exemplo, a distância de $(m_{ef})^{-1}$ corresponderá a

$$d \sim \frac{\hbar}{m_{ef} c}.$$

quanto a massa planckiana de 10^{19} GeV , é unicamente teórica, pois de fato, a gravitação em nível experimental não tem o alcance de $(M_P)^{-1}$, mas de 1 cm , o que corresponde a 4 ordens de grandeza a menos ($1 \text{ cm} \sim 10^{23} \text{ GeV}$).

Para a tentativa de Universo tipo brana 4-dimensional, toma-se como verdadeira a escala eletrofraca de energia, m_{ef} , como a escala fundamental de pequeno alcance. Desta maneira, M_P representará uma espécie de falseamento da escala fundamental.

Para alcançar este limite, deveremos supor que há n dimensões extras em nosso Universo de comprimento R . Pretendemos com isto obter $M_{P(4+n)} \sim m_{ef}$.⁴

Duas massas m_1 e m_2 , pequenas (menores do que R) vistas neste Universo a uma distância $r \ll R$, sentem um potencial gravitacional que vai como

$$V(r) \sim \frac{m_1 m_2}{M_{P(4+n)}^{n+2} r^{n+1}}. \quad (3.7)$$

Estamos supondo que a constante gravitacional newtoniana depende do número de dimensões, como dito há pouco. Podemos escrever através da forma do potencial acima, uma relação para a massa de Planck efetiva e a massa correspondente em 4 dimensões,

$$M_{P(4)}^2 \sim M_{P(4+n)}^{n+2} R^n. \quad (3.8)$$

Claramente isto é válido apenas se tivermos todas as dimensões extras com tamanho R , visto que o termo R^n representa de fato o volume das dimensões extras. O ajuste teórico/experimental é $M_{P(4+n)} = m_{ef}$, ou seja, padronizamos a escala de distâncias em que devemos usar a gravitação quântica como m_{ef}^{-1} . Isto é a grande proposta das teorias $D > 4$: a unificação das escalas de Planck e eletrofraca, através do possível fluxo gravitacional em dimensões não acessíveis aos campos do modelo padrão.

O tamanho da dimensão extra pode ser fixado invertendo a relação (3.8),

$$R \sim \frac{1}{[M_{P(4+n)}]^{(n+2)/n}} M_P^{2/n}, \quad (3.9)$$

(tendo em conta que $M_{P(4+n)} \equiv m_{ef}$ e $M_P \sim 10^{16} \text{ TeV}$) na seguinte expressão,

$$R \sim 10^{\frac{30-17n}{n}} \left[\frac{1 \text{ TeV}}{m_{ef}} \right]^{\frac{n+2}{n}} \text{ cm}. \quad (3.10)$$

⁴Embora não tenhamos abordado, quando tratamos de um Universo com mais do que 4 dimensões, a constante gravitacional não é a mesma, tampouco a escala de Planck advinda da gravitação: elas dependem da forma das dimensões extras, tamanho, se são compactificadas ou não, e do número delas (até aqui, quando nos referimos a M_P , falávamos da massa de Planck em 4 dimensões).

Isto exclui o caso $n = 1$, pois teríamos uma dimensão extra de proporções astronômicas (com o tamanho da distância júpiter/sol), o que geraria uma ‘catástrofe’ experimental, pois a lei de Gauss iria como em (3.7), e a gravitação newtoniana não seria recobrada. Entretanto já com $n = 2$, as dimensões teriam tamanho médio $R \sim 0,1mm$, e este limite está para ser testado brevemente pelos aceleradores de partículas.

As dimensões extras do modelo devem ter espessura tal, que os campos não se propaguem por elas, ou seja, da ordem de m_{ef}^{-1} (ou $l_e \sim 10^{-20}cm$).

O espaço é portanto uma variedade de dimensão $(4 + n)$, com ‘topologia’ $\mathbb{R}_4 \times M_{n \geq 2}$, com M_n uma subvariedade compacta de volume R^n . Para o aprisionamento dos campos em $\mathbb{R}_4$, existem diversas propostas como a de armadilhar os modos fundamentais das partículas padrões em defeitos topológicos [18]. Também são usadas neste sentido algumas das idéias das teorias de cordas [19].

Uma das mais notáveis conseqüências de um modelo com $n = 2$, é a de que o campo gravitacional passa a variar com $1/r^4$ para $r < 0,1mm$. Também é notório o fato de que em colisões com $E > m_{ef}$, as partículas podem adquirir momento e se propagarem para o *bulk*, o lugar geométrico das dimensões extras. Uma atenção especial deve ser tomada a isto: apenas as partículas que representam o modelo padrão estão confinadas a $\mathbb{R}_4$. Em geral, quando estas partículas adquirem energia para se propagarem nas dimensões extras, não são mais os modos fundamentais que estão a se propagar, mas as excitações. Neste contexto, não são de fato as partículas fundamentais que tem mobilidade nestas dimensões, mas excitações delas, ainda não disponíveis aos testes experimentais do modelo padrão (MP). Embora este seja um mecanismo bastante sugestivo de perda de energia para o bulk, cargas elétricas (e quaisquer outros tipos de cargas conservadas por calibres) estão confinadas a $\mathbb{R}_4$. Isto porque por exemplo, o fóton de modo zero, está nesta subvariedade, (bem estabelecido pelos testes da eletrodinâmica quântica) e a carga não pode existir a não ser nesta região. Entretanto, o fóton com massa, pode adentrar M_n , como dissemos há pouco, se $m_f \sim m_{ef}$. Em tal situação, a penetração média das linhas de campos é $b \sim m_{ef}^{-1}$ [18].

Ao considerarmos uma partícula com carga lançada nas dimensões extras, devido à conservação de fluxo, um campo com profundidade m_{ef}^{-1} se estenderá entre a partícula e $\mathbb{R}_4$. Dependendo da energia da colisão, a carga será empurrada novamente a $\mathbb{R}_4$, ou o fluxo se quebrará em pequenos pedaços com cargas opostas a esta carga que adentra o bulk, mantendo a conservação de campos de calibre intacta (naturalmente o escape destas partículas para o bulk depende da forma e da topologia de M_n).

Algumas Restrições no Modelo ADD

Do ponto de vista do observador em $\mathfrak{R}_4$, as partículas existentes são as do MP, mais os grávitons e sua torre de excitações (nos modelos de RS, faremos uma caracterização desta torre). Como estes grávitons se acoplam à matéria com escala $M_{P(4)}^{-1}$, seus efeitos na física de partículas, ou mesmo na astrofísica é desprezível. Entretanto como a quantidade de grávitons abaixo de uma energia E , dado por $(ER)^n$ (já que a quantização segue um salto de $1/R$ - ver modelos RS), o efeito de todos os grávitons pode ser relevante.

Considerando processos físicos que emitam grávitons, a amplitude de emissão será da ordem de $A \sim 1/M_P$ e a taxa de transmissão da ordem de $\tau \sim 1/M_P^2$. A taxa total de emissão é aproximadamente [18]

$$T \sim \frac{(R\Delta E)^n}{M_P^{2+n}} \sim \frac{(\Delta E)^n}{m_{ef}^{2+n}}, \quad (3.11)$$

com ΔE a energia disponível para o gráviton. E a razão para o acontecimento de emissão de gráviton será

$$R \sim \frac{(R\Delta E)^n}{M_P^2} \sim \frac{(\Delta E)^n}{m_{ef}^{2+n}}. \quad (3.12)$$

O limite experimental mais próximo produzido em laboratório para isto, é com $n = 2$ para o decaimento de partículas Z , em X , $Z \rightarrow X + h$ (h o gráviton). Em tal espalhamento, teremos como raio mínimo possível $R \sim 10^{-5}cm$. Este limite pode ser respeitado para qualquer $n > 1$.

Outro requerimento importante é o das restrições astrofísicas para o modelo. Sendo os grávitons como bósons, neutrinos ou mesmo áxions, no sentido de que podem levar energia de uma estrela para o bulk e acelerar o processo de resfriamento desta, devemos verificar se a dinâmica deste resfriamento está dentro dos limites experimentais conhecidos. Como uma primeira aproximação usamos [23]

$$\frac{1}{F^2} \rightarrow \frac{(\Delta E)^n}{m_{ef}^{2+n}}, \quad (3.13)$$

que relaciona a emissão de bósons (F) com a de grávitons (parte direita). Para o Sol, $\Delta E \sim keV$. Calculando o valor extremo de menor F , com $n = 2$ e $m_{ef} \sim 1TeV$, temos [18] $F \sim 10^{12}GeV$, suficientemente grande para a escala solar, que tem como F máximo já verificado, $F \sim 10^7GeV$.

Situações semelhantes são encontradas para gigantes vermelhas e para a Supernova de 1987, de maneira que as restrições astrofísicas são todas cumpridas para uma teoria com $m_{ef} \sim TeV$ e $n > 1$.

3.2 Os Modelos de Randall-Sundrum (RS)

Os modelos RS tentam resolver o problema da hierarquia com uma dimensão extra não plana. Temos uma ou duas hipersuperfícies 4-dimensionais que confinam as interações quânticas, e um bulk 5-dimensional do tipo AdS_5 . As consequências experimentais deste confinamento são grandemente relevantes: há modos de excitação com massa da ordem da escala fraca acoplados com esta escala diferentemente do modelo padrão. A massa de Planck 4-dimensional como vista da brana, pode ser expressa como

$$M_P^2 = M^{n+2} V_n, \quad (3.14)$$

em que V_n é o volume da dimensão extra e M representa a massa efetiva de Planck. Na seção anterior, eliminávamos o problema incluindo uma dimensão extra grande, ou pelo menos duas dimensões extras pequenas. O fato de não percebermos a existência destas dimensões implica necessariamente em um confinamento destes campos à brana. A proposta de Randall-Sundrum diferentemente de ADD, é multiplicar a métrica 4-dimensional da brana por um fator de deformação (*warp*), que decai rapidamente. Portanto temos como *Ansatz* genérico

$$ds^2 = e^{-\alpha y} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (3.15)$$

x^μ representando as dimensões da(s) brana(s) e y a dimensão extra. A partir deste Ansatz começamos a descrição da primeira solução RS, que contém duas branas.

3.2.1 O Modelo RS-I

No primeiro modelo proposto, fazemos uma compactificação circular da dimensão extra com uma identificação toroidal $y \rightarrow 2n\pi + y$. No elemento de linha acima, isto pode ser feito com

$$y = r_c \phi, \quad (3.16)$$

$$ds^2 = e^{-\alpha r_c \phi} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2, \quad (3.17)$$

com r_c representando o raio de compactificação e ϕ o ângulo (a coordenada).

Além desta compactificação, o bulk será representado no intervalo $\phi \in [0, \pi]$, com simetria S_1/Z_2 , ou seja, o intervalo $[-\pi, 0]$ corresponde de maneira especular a $[0, \pi]$. Deste modo, qualquer ângulo $\phi > \pi$ ou $\phi < -\pi$ pode ser reduzido ao quadrante $[-\pi, \pi]$ que, em detrimento da simetria Z_2 pode ser expresso apenas com o intervalo $[0, \pi]$.

Figura 3.1: Compactificação da coordenada y de acordo com $y \rightarrow 2n\pi r_c + y$.

As branas situam-se nos pontos $\phi = 0$ e $\phi = \pi$, de tal maneira que formam a fronteira do bulk, como se pode ver na figura 3.2.

Figura 3.2: Representação de um Universo de Randall-Sundrum com duas branas. O Universo propriamente dito ocupa o lugar geométrico chamado bulk. As branas representam seus ‘limites’.

A ação clássica que gera a gravidade neste âmbito é descrita através de um termo de curvatura no bulk - representado pela soma do escalar de Ricci e da constante cosmológica - e por dois ‘potenciais’, ou regiões de descontinuidade no Universo, incluídas como lagrangeanos e potenciais 4-dimensionais na ação,

$$S = \int d^4x [\sqrt{-g_1} \{ \mathcal{L}_1 - V_1 \} + \sqrt{-g_2} \{ \mathcal{L}_2 - V_2 \} + \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} U], \quad (3.18)$$

$$U = -\Lambda + 2M^3 R. \quad (3.19)$$

Na equação, o índice 1 faz referência à brana situada em $\phi = \pi$, onde os campos ocorrem, e o índice 2 à outra brana situada em $\phi = 0$. Os termos $\mathcal{L}$ e V representam respectivamente o lagrangeano da brana e o potencial, atuando como uma fonte gravitacional, mesmo na ausência de partículas.

Além disto, Λ representa a constante cosmológica existente no bulk e R o escalar de Ricci da solução.

Podemos separar esta ação em três pedaços distintos, cada um correspondendo à influência de uma parte do Universo, a brana visível (v) onde moramos, a brana invisível (i) e o bulk (b),

$$S_v = \int d^4x [\sqrt{-g_1} \{\mathcal{L}_1 - V_1\}], \quad (3.20)$$

$$S_i = \int d^4x [\sqrt{-g_2} \{\mathcal{L}_2 - V_2\}], \quad (3.21)$$

$$S_b = \int d^4x \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} \{-\Lambda + 2M^3\} \right]. \quad (3.22)$$

As métricas nas branas podem ser escritas como

$$g_{\mu\nu}^1(x^\mu) \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = 0), \quad (3.23)$$

$$g_{\mu\nu}^2(x^\mu) \equiv G_{\mu\nu}(x^\mu, \phi = \pi). \quad (3.24)$$

A solução das equações da gravitação para esta ação vêm de [49, 50]

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\sqrt{-g} T^{\mu\nu}, \quad (3.25)$$

sendo,

$$S = \int d\mathbf{r} \mathcal{L}, \quad (3.26)$$

ou seja,

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g_1} \{\mathcal{L}_1 - V_1\} + \sqrt{-g_2} \{\mathcal{L}_2 - V_2\} + \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \sqrt{-G} \{-\Lambda + 2M^3 R\}. \quad (3.27)$$

Conseguimos, depois de alguns cálculos,

$$\begin{aligned} & -4M^3 \sqrt{-G} \left(R_{AB} - \frac{G_{AB} R}{2} \right) = \Lambda \sqrt{-G} G_{AB} \\ & + V_1 \sqrt{-g_1} g_{\mu\nu}^1 \delta_A^\mu \delta_B^\nu \delta(\phi - \pi) + V_2 \sqrt{-g_2} g_{\mu\nu}^2 \delta_A^\mu \delta_B^\nu \delta(\phi). \end{aligned} \quad (3.28)$$

(G_{AB} representa a métrica 5-dimensional). As funções ‘delta’ vêm da derivada com relação a ϕ por esta ser descontínua em todo $\phi = n\pi$, n inteiro, os índices gregos correm de 0 a 3 (coordenadas da brana) e os latinos maiúsculos de 0 a 4 (todas as coordenadas). A única exigência para a eficácia da proposta do ponto de vista teórico (até que não saibamos dizer experimentalmente se

há plausibilidade ou não) físico é a existência de invariância de Poincaré nas direções das coordenadas das branas.

Tomando o Ansatz,

$$ds^2 = e^{-f} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2, \quad (3.29)$$

($f = f(\phi)$), as equações (3.28) se reduzem a

$$\frac{6\dot{f}^2}{r_c^2} = -\frac{\Lambda}{M^3}, \quad (3.30)$$

$$\frac{6M^3\ddot{f}}{r_c} = V_1\delta(\phi - \pi) + V_2\delta(\phi), \quad (3.31)$$

($\dot{f} = \frac{df}{d\phi}$).

A solução para (3.30) pode ser expressa como

$$f = \sqrt{-\frac{\Lambda r_c^2}{6M^3}} |\phi| + Cte. \quad (3.32)$$

Podemos escolher $Cte = 0$, pois ela representa apenas uma reescala nas coordenadas x^μ . Naturalmente a solução só existe para $\Lambda < 0$, o que torna o bulk do Universo tipo Anti-de Sitter.

Computando as derivadas da função f acima obtemos

$$\dot{f} = \sqrt{-\frac{\Lambda r_c^2}{6M^3}} [\theta(\phi) - \theta(\phi - \pi)], \quad (3.33)$$

$$\ddot{f} = \sqrt{-\frac{2\Lambda r_c^2}{3M^3}} [\delta(\phi) - \delta(\phi - \pi)], \quad (3.34)$$

em que θ representa a função sinal. Esta função vem da derivada de uma descontinuidade tipo módulo de x , que é exatamente o que temos no gráfico $f(\phi)$ x ϕ .

Comparando as expressões (3.34) e (3.31), os potenciais das branas são dados por

$$V_2 = -V_1 = \sqrt{-24M^3\Lambda}, \quad (3.35)$$

portanto, a solução fica como

$$ds^2 = e^{-\sqrt{-\frac{\Lambda r_c^2}{6M^3}} |\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2. \quad (3.36)$$

Estamos tomando o raio de compactificação r_c com um valor pequeno (para que haja possibilidade de validação experimental) âmbito em que a influência

Figura 3.3: Gráfico de $f(\phi) \times \phi$. O comportamento da função f vem do fato que o espaço-tempo é compacto na direção y . A constante k tem valor $k = \sqrt{-\frac{\Lambda r^2}{6M^3}}\pi$.

da dimensão extra é pequena para a detetabilidade. Portanto o Universo parece - do ponto de vista dos campos de matéria - um lugar geométrico de 4 dimensões.

Resta saber para completar a descrição de RS-1, a relação entre parâmetros como massa de Planck 5-dimensional e a massa como medida na brana. Faremos isto identificando a flutuação de modo zero do gráviton na solução acima, com uma perturbação ao redor da solução estacionária,

$$ds^2 = e^{-\sqrt{-\frac{\Lambda}{6M^3}}|\phi|T(x)}[\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)]dx^\mu dx^\nu + [T(x)]^2 d\phi^2. \quad (3.37)$$

Aqui $h_{\mu\nu}(x)$ representa flutuações em torno do espaço plano da brana, ou, o gráviton que aparece para o observador na brana (modo sem massa da decomposição de $G_{\mu\nu}$). O fato importante é que esta métrica é localmente tipo Minkowski na brana, para qualquer h suave e $T(x)$ constante. Consideraremos o raio de compactificação da brana, como o valor esperado do campo $T(x)$, o que representa justamente a escolha de branas localmente planas.

Uma característica peculiar ao modelo é que perturbações vetoriais de modo zero como $W_\nu dx^\nu d\phi$, que encontramos em geral ao compactificarmos dimensões extras, correspondentes às isometrias destas dimensões não existem, pela presença das branas. Assim sendo, podemos anular as flutuações de modo zero fora da diagonal nas componentes h_{a4} .

Substituindo (3.37) na ação de curvatura do bulk (i. e., sem a parte de constante cosmológica), e tomando $\langle T(x) \rangle = r_c$, como acima explicamos,

obtemos

$$\begin{aligned} S_{cb} &= S_b - S_\Lambda = \int d^4x \int_{-\pi}^{\pi} d\phi 2M^3 e^{-\sqrt{-\frac{\Lambda}{6M^3}}|\phi|r_c} r_c \sqrt{-\hat{g}(x)} \hat{R}(x), \\ \sqrt{-\hat{G}} &= r_c \sqrt{-\hat{g}}, \quad \hat{g}_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x). \end{aligned} \quad (3.38)$$

O fato de ϕ não aparecer em $\hat{g}$ acima é porque estamos tratando de perturbações pequenas. Assim, o volume da dimensão extra pode ser calculado simplesmente integrando em ϕ a ação S_{cb} ,

$$Vol(\phi) = r_c \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-f} = \frac{1 - e^{-\sqrt{-\frac{\Lambda}{6M^3}}\pi r_c}}{\sqrt{-\frac{\Lambda}{24M^3}}}. \quad (3.39)$$

Assim, através de (3.14), podemos calcular a massa da Planck 4-dimensional, como vista por um observador na brana,

$$M_P^2 = M^3 \frac{1 - e^{-\sqrt{-\frac{\Lambda}{6M^3}}\pi r_c}}{\sqrt{-\frac{\Lambda}{24M^3}}}. \quad (3.40)$$

Este resultado é notável: a massa da escala eletrofraca não depende apenas do tamanho da dimensão extra mas da constante cosmológica 5-dimensional.

Acoplamento brana-gráviton no limite de campo fraco

Para saber qual o conteúdo da lagrangeana da ação das branas (2.22-2.23), precisamos determinar qual o acoplamento entre a brana e o campo gravitacional a baixas energias. Nas branas temos que $g_1 = \hat{g}$ e $g_2 = e^C \hat{g}$, com $C = -\sqrt{-\frac{\Lambda}{6M^3}}\phi$. Considerando por exemplo o campo de Higgs H na ação da brana temos

$$S_2 = \int d^4x \sqrt{-g_2} \{g_2^{\mu\nu} \nabla_\mu H^\dagger \nabla_\nu H - \lambda [H H^\dagger - m_0^2]^2\} + \Upsilon, \quad (3.41)$$

em que Υ representa a parte da ação na brana que não necessitamos analisar agora e m_0 o parâmetro de massa do campo. Substituindo (3.23-3.24) em S_2

segue que

$$\begin{aligned}
S_2 &= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} e^{2C} \{ \hat{g}^{\mu\nu} e^{-C} \nabla_\mu H^\dagger \nabla_\nu H - \lambda [HH^\dagger - m_0^2]^2 \} + \Upsilon, \\
&= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \{ \hat{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu (e^{C/2} H^\dagger) \nabla_\nu (e^{C/2} H) - \lambda [(e^{C/2} H)(e^{C/2} H^\dagger) \\
&\quad - (e^{C/2} m_0)^2]^2 \} + \Upsilon \\
&= \int d^4x \sqrt{-\hat{g}} \{ \hat{g}^{\mu\nu} \nabla_\mu Q^\dagger \nabla_\nu Q - \lambda [QQ^\dagger - (e^{C/2} m_0)^2]^2 \} + \Upsilon. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Isto talvez seja uma das mais importantes conclusões que possamos chegar sobre o modelo: ao renormalizamos um campo de Higgs, com $e^{C/2} H \rightarrow Q$, conseguimos uma reescala no parâmetro de massa,

$$m_n = m_0 e^{C/2} = m_0 e^{-\sqrt{-\frac{\pi^2 r_c^2 \Lambda}{24 M^3}}}. \quad (3.43)$$

Este resultado é completamente geral e falseia o problema da hierarquia: qualquer parâmetro de massa m_0 corresponderá à massa m_n quando medida com $\hat{g}$, que é a métrica da ação de Einstein. A massa de Planck 4-dimensional não é mais a escala em que a gravitação quântica deve dominar. Ao invés disto, tomamos esta escala como a massa de Planck 5-dimensional que é a mesma da escala fraca. E esta massa m_{ef} depende (pela proposta do modelo) do tamanho da dimensão extra, da massa de Planck em 4 dimensões e da constante cosmológica do bulk. Portanto temos a escala TeV exigida pela questão da hierarquia, ajustando $e^{-\sqrt{-\frac{\pi^2 r_c^2 \Lambda}{24 M^3}}} \sim 10^{15}$. Ou do ponto de vista experimental do observador que mora na brana visível, a escala de Planck acontece em detrimento deste fator de deformação pequeno na função de onda do gráviton na quinta dimensão. Isto contrasta com a resolução do problema de hierarquia com dimensões extras grandes. As conseqüências astrofísicas e cosmológicas de modos de Kaluza-Klein (KK) ‘muito leves’ que os modelos ADD precisam levar em conta, citadas na seção precedente têm influência nesta proposta.

A decomposição dos modos gravitacionais de Kaluza-Klein será estudada no próximo modelo.

Seguiremos a exposição dos Universos de Randall-Sundrum com a decomposição dos modos gravitacionais. Veremos que é possível estender r_c até o infinito, construindo um modelo de uma única brana em $y = 0$.

A detecção experimental dos primeiros modos do gráviton (menos energéticos) deve provavelmente acontecer nos próximos anos (se o modelo representar uma realidade plausível), visto que a atual geração de aceleradores está chegando à escala TeV de energia.

3.2.2 Os modos Gravitacionais e o Modelo RS-II

O modelo II é bastante semelhante ao primeiro. A análise da dinâmica é em grande parte igual, pois a ação que tomamos é como em (3.18),

$$S = S_v + S_i + S_b, \quad (3.44)$$

com elemento de linha

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (3.45)$$

que representa uma folhação tipo AdS_5 para o bulk (a constante k pode ser obtida comparando este ansatz com o da subseção precedente, $k = \sqrt{\frac{-\Lambda}{6M^3}}$). A solução dos potenciais é $V = -V' = 24M^3k$, com $\Lambda = -24M^3k$. A diferença é a de que tenderemos a segunda brana ao infinito, fazendo r_c arbitrariamente grande. Ficaremos então apenas com uma brana em que os campos são confinados, incluindo a gravidade no limite de baixas energias (na verdade o gráviton de 4 dimensões, ou modo zero, forma um estado ligado com a brana, como veremos mais adiante). A perturbação gravitacional em mundos-brana obedecerá uma equação em h

$$[\partial_\mu \partial^\mu + \partial_j \partial^j + V(z_j)]h(x^\mu, z_j) = 0, \quad (3.46)$$

pelo fato de as dimensões da brana serem independentes das demais. Em geral, se aplicarmos uma separação como superposição de modos como

$$h = e^{ip_\mu x^\mu} \Psi(y), \quad (3.47)$$

obteremos uma equação do tipo

$$[\partial_j \partial^j + V(y)]\Psi(y) = -\mathbf{p}^2 \Psi(y), \quad (3.48)$$

ou seja, o equivalente a uma redução dimensional de flutuação para os grávitons em termos de estados de *Kaluza-Klein* (KK) em 4 dimensões.

O fato notável nesta descrição é a semelhança da solução acima com um problema de mecânica quântica não-relativística. O modo zero de (3.48) corresponderá ao gráviton 4-dimensional e é um estado ligado, pois $p^2 = m^2$ e $m^2 > 0$. Temos uma espécie de torre de modos de excitação a que se nomeia *torre de Kaluza-Klein*, sem perder o comportamento de gravitação 4-dimensional, fixado pelo modo zero.

Como dito há pouco, para obter um tratamento utilizando dos recursos da equação de Schrödinger, usaremos o artifício de confinar o Universo entre duas branas, uma em $y = 0$ e outra em $y = \pi r_c$. Eventualmente faremos

$r_c \rightarrow \infty$. (Neste caso, diferentemente do modelo de duas branas, suporemos que a brana onde moramos será a de $y = 0$). O gráviton 4-dimensional vem da ação de curvatura no bulk

$$S_{cb} = \int d^4x \int_0^{\pi r_c} 2M^3 r_c e^{-k|y|} \sqrt{-\hat{g}(x)} \hat{R}(x) dy, \quad (3.49)$$

e a escala de Planck igualmente a RS-I vem de,

$$M_P^2 = 2M^3 \int_0^{\pi r_c} dy e^{-2k|y|} = \frac{M^3}{k} (1 - e^{-2k\pi r_c}), \quad (3.50)$$

ou seja, mesmo se $r_c \rightarrow \infty$, podemos ter $M_P \neq 0$.

Voltando às equações de onda (3.46,3.48), podemos expandi-las em ondas planas

$$h(x, y) = e^{ip_\mu x^\mu} \Psi(y), \quad (3.51)$$

obtendo para o campo a equação

$$\{-m^2 e^{2k|y|} - \partial_{yy} + 4k[k - \delta(y)]\} \Psi(y) = 0. \quad (3.52)$$

A compactificação orbifold do tipo $x \rightarrow -x$ determina que devemos escolher apenas funções ímpares em y (ainda estamos tratando de um r_c finito, ou seja, isto vale apenas para o modelo de duas branas). Suporemos um calibre adequado ao tratamento destas perturbações, chamado calibre transverso e sem traço,

$$h^\mu_\mu = 0, \quad (3.53)$$

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0. \quad (3.54)$$

Para encontrarmos uma equação mais fácil de tratar, faremos as seguintes substituições de variável

$$z = \frac{s(y)(e^{k|y|} - 1)}{k}, \quad s(y) = \frac{y}{|y|}, \quad (3.55)$$

$$\Psi(z) = \Psi(y) e^{k|y|/2}, \quad (3.56)$$

$$h(x, z) = h(x, y) e^{k|y|/2}, \quad (3.57)$$

depois do que, obtemos uma equação de onda

$$[-\partial_{zz} + V(z)] \Psi(z) = 2m^2 \Psi(z), \quad (3.58)$$

com $V(z)$ representando o potencial,

$$V(z) = \frac{15k^2}{4(k|z| + 1)^2} - 3k\delta(z). \quad (3.59)$$

O aparecimento da função delta no potencial, deixa claro a existência de um e apenas um estado ligado de menor energia: o gráviton 4-dimensional. Os demais autoestados são contínuos (como dito anteriormente). Como o potencial tende a zero no limite em que $z \rightarrow \infty$, os modos massivos são assintoticamente ondas planas, suprimidos próximo à origem, devido à delta e têm massa $m^2 > 0$.

A solução de (3.58) será em termos de funções de Bessel. Por exemplo, no limite ‘m pequeno’, a solução é dada por

$$\Psi_m \sim N_m \sqrt{|z| + \frac{1}{k}} \left[Y_2(m|z| + mk^{-1}) + \frac{4k^2}{\pi m^2} J_2(m|z| + mk^{-1}) \right], \quad (3.60)$$

(N_m é uma constante de normalização).

Implementando uma brana extra em $z_c = \pi r_c$, ganhamos uma condição de contorno na derivada do campo dada por [21]

$$\partial_z \Psi(z_c) = -\frac{3k\Psi(z_c)}{2(kz_c + 1)}. \quad (3.61)$$

O modo zero, descrito por $\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{k(k|z|+1)^3}}$ satisfaz esta condição de contorno. Esta nova brana produz uma diferença nos modos não ligados: quantiza os valores possíveis da massa do gráviton (m). Para altos valores de z_c , todos os modos aproximam-se de ondas planas em seu comportamento assintótico. Desta maneira, o *gap* de quantização para estes modos será aproximadamente de z_c^{-1} .

Finalmente, para obtermos o limite de um brana apenas, analisamos $r_c \rightarrow \infty$. O acréscimo ao potencial newtoniano é devido ao termo estático, gerado pelo termo de troca entre o propagador do modo zero e dos modos contínuos de Kaluza-Klein. Isto representa quando tomamos a atração entre duas massas m_1 e m_2 um acréscimo como [21]

$$\delta V \sim \int_0^\infty m e^{-rm} dm \frac{G_N m_1 m_2}{k^2 r}. \quad (3.62)$$

O potencial newtoniano fica diretamente

$$V(r) = G_N \frac{m_1 m_2}{r} \left(1 + \frac{1}{k^2 r^2} \right). \quad (3.63)$$

Este é pois o efeito da dimensão extra tornada infinita, no limite de campo fraco. Como podemos notar, este efeito só é representativo, se $k \sim 1$, pois do contrário, o segundo termo no parênteses torna-se extremamente pequeno, e recobramos a fórmula usual para $V(r)$. Tomando k da ordem da escala de Planck, não estaremos fora dos limites experimentais até hoje observados.

No intervalo de m pequeno, a produção de modos contínuos através da brana é atenuada pelo fator na integral $\frac{m dm}{k^2}$, tornando-se extremamente pequena. Este mecanismo é bastante importante, pois sem ele, a brana estaria continuamente perdendo energia em forma de modos para o bulk. A probabilidade de produção de modos mais energéticos será neste caso $\sim (\frac{p}{k})^2$, e para k da ordem da escala de massa de Planck, isto é extremamente pequeno.

Seguiremos o capítulo tratando de soluções de buracos negros em mais do que 4 dimensões, dando um enfoque diferente do que desenvolvemos no capítulo anterior: a detecção de buracos negros e dimensões extras nos aceleradores de partículas.

3.3 Buracos Negros em $D > 4$

No estudo de modelos de Universos com alta dimensionalidade, a não ser que as dimensões extras tenham um tamanho estritamente pequeno ($10^{-16}cm$), teremos discordâncias teórico/experimentais com a propagação de campos nestas dimensões. O mecanismo para sanar este problema é o confinamento do MP nas 4 dimensões grandes, através de defeitos topológicos ou teoria de cordas (como em ADD), ou ainda por um potencial imposto à brana como nos modelos RS (existem, é claro outros tipos de confinamento). A lei gravitacional newtoniana para $r \leq R$ (R o tamanho da dimensão extra), varia com $1/r^{2+n}$. Neste âmbito, balanças de torsão que meçam estes valores podem estabelecer o tamanho máximo de R , e a torre de estados de Kaluza-Klein pode modificar as seções de choque do MP, bem como gerar incompatibilidades com os dados experimentais astrofísicos e cosmológicos já existentes.

Surgindo uma nova física na presença de dimensões extras, também outra é a física dos buracos negros. É natural a idéia de que matéria que colapsa na brana, estando aprisionada a ela, principia o colapso ali, e depois estende-se em direção às demais dimensões, de maneira peculiar a cada modelo.

Neste contexto, se o horizonte do buraco negro formado for muito maior do que a dimensão extra ($r_H \gg R$), podemos considerar o buraco negro como uma estrutura 4-dimensional efetivamente. Entretanto, se o horizonte for bastante menor, teremos uma estrutura $(4+n)$ -dimensional, completamente submersa no espaço-tempo de todas as dimensões do Universo.

Estes buracos negros têm propriedades bastante diferentes dos buracos negros em 4 dimensões: eles são em geral maiores e mais frios, vivendo mais do que os demais.

Uma possível consequência bastante interessante do ponto de vista experimental de que o Universo tenha $D > 4$, é a de que abaixando-se a escala de Planck, a idéia de produzir buracos-negros em espalhamentos de altas energias torna-se mais realista, pois a seção de choque de produção aumenta.

Um buraco negro em mais do que 4 dimensões emite radiação Hawking tanto no bulk como na brana. Entretanto como apenas os grávitons podem se propagar no bulk eles são os responsáveis pela radiação ali. Estes grávitons representam uma perda de energia para o bulk do ponto de vista do observador na brana.

A quantidade de energia que atinge o observador no infinito dependerá essencialmente de três fatores: a energia da partícula emitida, seu spin e a dimensão do espaço-tempo vista pelo buraco negro. Estas dependências estão explícitas em uma função chamada ‘fator de corpo cinza’, $\sigma(\omega)$, do qual trataremos com mais detalhes adiante.

Salientamos que os cálculos da radiação Hawking são apenas possíveis para o limite $m_{particula} \ll M_{BN}$ e $T_H \ll M_{BN}$.

Colisões de Altas Energias

O espalhamento em altas energias, que pode criar mini-buracos negros foi já amplamente investigado do ponto de vista teórico, pelo limite semi-clássico da Relatividade Geral e pela Teoria de Cordas. Tomando duas partículas que se movem com velocidade da luz (sem massa), a curvatura gerada por elas será zero exceto no plano nulo da trajetória. Se o parâmetro de impacto b é maior do que o raio de Schwarzschild r_H , teremos ondas de choque em um espalhamento elástico ou inelástico, com a troca de grávitons entre elas. Entretanto, se $b \leq r_H$, os efeitos da gravitação serão dominantes e um buraco negro será formado. A seção de choque geométrica em tal limite é [24]

$$\sigma \sim \pi b^2 \sim \pi r_H^2. \quad (3.64)$$

De acordo com os cálculos em [25], há um limite mínimo para a massa do buraco negro, que está relacionado com a massa da partícula. Na união das geodésicas nulas, um horizonte aparente é formado com $A = 32\pi\mu^2$, sendo μ a energia de cada partícula em relação ao centro de massa. Isto fixa, pela hipótese de censura cósmica, um valor mínimo para a área do horizonte de eventos em

$$M_{BN} \geq \sqrt{2}\mu, \quad (3.65)$$

$(A_H = 4\pi r_H^2 = 4\pi(2M_{BN})^2 \geq 32\pi\mu^2)$ levando à conclusão de que pelo menos 70% da energia inicial em relação ao centro de massa será usada para a ‘produção’ do buraco negro, ou seja, concentrada em sua ‘massa’.

A teoria de criação de buracos negros foi reavivada depois das teorias de Universos com mais do que 4 dimensões como as que falamos na seção precedente.

Para obtermos uma descrição concreta deste processo, precisamos de aproximações realistas quanto ao parâmetro de impacto. Em $D = 4$, por exemplo, há a formação de um buraco negro apenas se o parâmetro de impacto não exceder $0.8r_H$ [26], de maneira que a seção de choque fica aproximadamente $\sigma \sim 0.65\pi r_H^2$, e a massa do buraco negro formado oscila no intervalo $M_{BN} = [0.45, 0.71]\sqrt{s^5}$ correspondendo aos limites $b = b_{max} \sim 0.8r_H$ e $b = 0$ respectivamente. Para $D > 4$, o parâmetro de impacto é [27]

$$b \sim 2^{\frac{1}{3-D}} r_H. \quad (3.66)$$

No contexto de teorias de altas dimensões, a escala de produção de buracos negros se localizará em geral, um pouco abaixo da escala eletrofraca. A seção de choque, para dois pártons que colidam e adentrem a região esférica delimitada por r_H é da ordem de πr_H^2 . Entretanto em uma colisão realista, devemos levar a soma de todos os pares de pártons que carreguem a energia mínima para formar o buraco negro. Estes desenvolvimentos foram calculados já por Dimopoulos *et al* [28].

A criação de buracos negros na ausência de dimensões extras requer uma grande quantidade de energia, não condizente ainda com as capacidades experimentais da atualidade. A diminuição da massa da buraco negro levaria a um raio de Schwarzschild muito pequeno.

De outra forma, a presença da dimensão extra facilita a criação de buracos negros, pois abaixaria bastante a escala em que a gravidade passa a ter comportamento quântico, permitindo assim a criação de estruturas semi-clássicas, em que o regime $b \leq r_H$ é acessível. Para o caso $r_H \ll R$ (de importância particular), o espaço-tempo deve ser considerado D-dimensional tendo uma coordenada tipo tempo e D-1 coordenadas **não-compactas** tipo espaço.

Um buraco negro com simetria esférica e sem carga neste caso terá elemento de linha dado por (como visto no capítulo anterior),

$$ds^2 = (1 - \alpha^{n+1}) dt^2 - (1 - \alpha^{n+1})^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega_{n+2}^2, \quad \alpha = \frac{r_H}{r}, \quad (3.67)$$

⁵s representando a energia do centro de massa do sistema.

com $d\Omega_{n+2}$ representando o elemento de linha da $(2+n)$ -esfera,

$$d\Omega_{n+2}^2 = d\theta_{n+1}^2 + \sin^2 \theta_{n+1} [d\theta_n^2 + \sin^2 \theta_n (\dots + \sin^2 \theta_2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\phi^2) \dots)]. \quad (3.68)$$

Supomos que este elemento descreve uma geometria com singularidade localizada na brana, considerando que a tensão da mesma é bastante pequena em relação à massa do buraco negro. A relação entre a massa e o raio do horizonte de eventos é [10]

$$r_H = \frac{1}{\sqrt{\pi} m_{ef}} \left[\frac{M_{BN}}{m_{ef}} \right]^{\frac{1}{n+1}} \left[\frac{8\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{n+2} \right]^{\frac{1}{n+1}}. \quad (3.69)$$

Nesta equação, Γ representa o termo ‘importante’ que modifica a formação de buracos negros em relação a um Universo $D = 4$. Por exemplo supondo $M_{BN} \sim 5TeV$ (5 vezes maior do que a escala eletrofraca, na qual precisaríamos da gravidade quântica), temos a seguinte tabela que relaciona o número de dimensões com o raio de Schwarzschild em metros para esta massa:

Número de Dimensões	$r_H(m)$
4	$\sim 10^{-50}$
5	$\sim 4.10^{-19}$
$6 \leq D \leq 11$	$\sim 2.10^{-19}$

Assim, na colisão de duas partículas com energia $\sqrt{s} \geq 5TeV$, um buraco negro se formará se as partículas adentrarem um raio $r \sim 10^{-20}m$, se de fato estivermos em um Universo $D > 4$. Para entretanto $D = 4$, a energia mínima destas partículas seria em torno de $10^{16}TeV$, e o raio de formação do buraco negro é muito pequeno.

As temperaturas de Hawking (para $D > 4$) são descritas pela equação

$$T_H = \frac{D-3}{4\pi r_H}, \quad (3.70)$$

e os valores correspondentes para um buraco-negro com $M \sim 5TeV$ estão na tabela abaixo.

D	4	5	6	7	8	9	10	11
$T_H(10^2 GeV)$	5.10^{31}	0.77	1.8	2.8	3.8	4.7	5.5	6.3

Buracos negros com temperatura T_H emitem radiação térmica, o que leva a seu decaimento e conseqüente evaporação. O fato de as temperaturas situarem-se na escala TeV, é grandemente interessante do ponto de vista experimental, já que a próxima família de aceleradores estará nesta escala. Para buracos negros astrofísicos, formados do colapso de estrelas (grandes), a detecção não pode ser feita,⁶ pois $T_H \sim (r_H)^{-1}$, e por exemplo se $M \sim M_{sol}$, $T \sim 10^{-12}eV$. Supondo contudo que nosso universo não tenha dimensões extras os únicos buracos negros detetáveis são os primordiais ($M \sim 10^{15}g$, $T_H \sim 10MeV$).

Quanto ao tempo de vida, buracos negros com massa $\sim 3M_s$ têm idade aproximada

$$\tau \sim \frac{M_{BN}^3}{M_P^4}, \quad (3.71)$$

ou seja, maior do que a idade do Universo. Buracos negros pequenos, por sua vez têm um tempo de vida extremamente curto devido à alta taxa de emissão de radiação. Com a existência de n dimensões extras, o tempo médio de vida destes buracos negros fica como [10]

$$\tau \sim \frac{1}{m_{ef}} \left(\frac{M_{BN}}{m_{ef}} \right)^{\frac{n+3}{n+1}}. \quad (3.72)$$

O ponto fundamental aqui é o aparecimento de m_{ef} ao invés de M_P (como nas teorias em 4 dimensões), o que assegura um tempo médio de vida muito maior às estruturas. Entretanto, mesmo sendo muito maior, este tempo é extremamente pequeno: $\tau \sim 10^{-26}s$, para um buraco negro com baixo número de dimensões extras e massa da ordem de alguns TeV .

Evaporação de Buracos Negros

Até aqui descrevemos alguns processos genéricos da possibilidade de detecção de buracos negros se de fato o nosso Universo tiver um número de dimensões diferente de 4. A partir de agora faremos um balanço físico mais preciso das equações que acompanham estas idéias.

Um importante ponto a averiguar neste sentido é o espectro de fluxo de partículas (número de partículas emitido por unidade de tempo), dado por

⁶Embora não possamos detectar diretamente buracos negros astrofísicos, há um análogo bastante interessante de radiação Hawking sendo aplicado atualmente em matéria condensada para ‘buracos negros sônicos’ que está gerando espectros de radiação idênticos ao caso de buracos negros descritos pela gravitação.

[29]

$$\frac{dN^{(s)}(\omega)}{dt} = \sum_j \sigma_{j,n}^{(s)} \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T_H}} \pm 1} \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}, \quad (3.73)$$

em que s representa o spin da emissão e j o momento angular, e σ é um fator que não existe no espectro tradicional de corpo negro, chamado fator de corpo cinza (ou que, neste espectro é apenas uma constante), mas que aqui, tem informações sobre o spin da partícula emitida sua energia e o momento angular, podendo modificar significativamente o fluxo portanto. Podemos dizer que este fator vem do fato de que nas proximidades do horizonte de eventos, a partícula atravessa um campo gravitacional forte antes de chegar ao observador no infinito.

No processo de emissão a massa do buraco negro diminui e a temperatura Hawking do buraco negro aumenta. Geralmente supomos uma aproximação em que o buraco negro entra em equilíbrio em cada nova temperatura antes da nova emissão. O espectro de potência, a relação entre a quantidade de energia emitida por tempo é dado neste caso por

$$\frac{dE^{(s)}(\omega)}{dt} = \sum_j \sigma_{j,n}^{(s)} \frac{\omega}{e^{\frac{\omega}{T_H}} \pm 1} \frac{d^{D-1}k}{(2\pi)^{D-1}}. \quad (3.74)$$

Para prescrevermos o espectro da radiação, devemos investigar o potencial a que as partículas estão submetidas quando emitidas da ‘borda’ do espaço externo ao horizonte de eventos. Este potencial vem da solução de equações de perturbação escalar, como fizemos no capítulo 2. Consideramos assim, por exemplo um campo escalar de teste: $\phi(t, r, \theta_i, \phi) = e^{-i\omega t} R_{\omega l}(r) \tilde{Y}_l(\Omega)$, com $\tilde{Y}_l(\Omega)$ representando harmônicos esféricos em $D - 2$ dimensões. A equação radial para este campo é escrita como

$$\left\{ -\frac{d}{dr_*} + r(D-4) \left[-\omega^2 + \frac{l(l+D-3)h(r)}{r^2} \right] \right\} R_{\omega l}(r_*) = 0, \quad (3.75)$$

em que $r_* = \frac{\ln[h(r)]}{r_H^{D-3}(D-3)}$ representa a coordenada tartaruga e $h(r) = g_{00}$. O potencial depende explicitamente de l, ω e D , e ‘implicitamente’ de s .

Outra importante característica a ser investigada é o comportamento do fator de corpo cinza. Este fator tem relação com a seção de choque de transmissão e pode ser determinado em termos do coeficiente de absorção A_j , que advem, por sua vez, da solução das equações de movimento da partícula [30],

$$\sigma_{i,j}^{(s)}(\omega) = \frac{2^n \pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma[\frac{n+1}{2}] (2j+n+1)(j+n)!}{n! \omega^{n+2} j!} |A_j^{(s)}|^2. \quad (3.76)$$

Podemos escrever, de outra maneira

$$\sigma_{i,j}^{(s)}(\omega) = \frac{2^n}{\pi} \left[\Gamma \left(\frac{n+3}{2} \right) \right]^2 \frac{A_H}{(\omega r_H)^{n+2}} N_j |A_j^{(s)}|^2, \quad (3.77)$$

com N_j representando a multiplicidade de estados,

$$N_j = \frac{(2j+n+1)(j+n)!}{j!(n+1)!}, \quad (3.78)$$

e A_H a área do horizonte de eventos D-dimensional

$$A_H = r_H^{n+2} \int_0^{2\pi} d\phi \prod_{k=1}^{n+1} \int_0^\pi \sin^k \theta_{k+1} d(\sin \theta_{k+1}) = 2\pi r_H^{n+2} \pi^{\frac{n+1}{2}} \left[\Gamma \left(\frac{n+3}{2} \right) \right]^{-1}. \quad (3.79)$$

Notamos desta relação que σ depende diretamente da área do horizonte, e tem a mesma dimensão que ela, portanto mudando dependendo do número de dimensões. A equação para a taxa de emissão de energia de partículas sem massa fica

$$\frac{dE^{(s)}(\omega)}{dt} = \sum_j N_j |A_j^{(s)}|^2 \frac{\omega}{e^{\frac{\omega}{T_H}} \pm 1} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (3.80)$$

Se nas próximas experiências de colisão em altas energias, tivermos de fato acesso à formação de mini-buracos negros, de acordo com [31, 32], estes buracos negros passarão por quatro fases distintas antes da evaporação:

(i) A fase ‘careca’: nesta etapa, há emissão de ondas gravitacionais, e a perda do ‘cabelo’ inicial (massa, momento angular e carga);

(ii) A fase de spin para baixo: durante esta fase, o buraco negro perde energia por emissão de radiação Hawking, e por superradiância;⁷

(iii) A fase de Schwarzschild: o buraco negro perde massa por emissão de radiação Hawking;

(iv) A fase Planckiana: a massa ou temperatura se aproximam de m_{ef} , sendo necessária uma teoria quântica para descrever esta etapa.

⁷O parâmetro de impacto tipicamente não-nulo leva à formação de buracos negros com momento angular.

Trataremos aqui mais da fase (iii), do que das demais, através da emissão de partículas sem massa, já que massas de buracos negros da ordem da escala fraca levam a temperaturas muito mais altas do que as massas de repouso das partículas conhecidas.

Os modos que se propagam pela brana e pelo bulk vivem em diferentes dimensões espaciais. Portanto trataremos primeiramente da radiação que acontece na brana e depois dos modos no bulk.

Radiação Hawking na Brana

A equação mestra de perturbação gravitacional na brana para um buraco negro formado com momento angular e massa (buracos negros com momento angular são os com maior probabilidade de acontecer em colisões de partículas em um mundo brana) em $D > 4$ foi obtida [24], e segue o tratamento perturbativo $\mathbf{g} \rightarrow \check{\mathbf{g}} + \mathbf{h}$. O elemento de linha mais genérico para efeitos práticos (sem carga) de tal buraco negro é [10],

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mu}{\varphi r^{n-1}}\right) dt^2 + \frac{2a\mu \sin^2 \theta}{\varphi r^{n-1}} dt d\phi - \frac{\varphi}{\Delta} dr^2 - \varphi d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 \mu \sin^2 \theta}{\varphi r^{n-1}}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 - r^2 \cos^2 \theta d\Omega_n^2, \quad (3.81)$$

com $\varphi = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ e $\Delta = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^{n-1}}$. A massa e o momento angular são respectivamente

$$M = \frac{(n+2)A_{n+2}}{16\pi G} \mu, \quad (3.82)$$

$$J = \frac{2}{n+2} Ma, \quad (3.83)$$

sendo $A_{n+2} = \frac{2\pi^{\frac{n+3}{2}}}{\Gamma(\frac{n+3}{2})}$ a área da $(n+2)$ -esfera.

Neste caso, a equação radial de perturbação pode ser escrita como

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\delta^{s+1} \frac{dR_s}{dr} \right) + \left(\frac{K^2 - isK \partial_r \Delta}{\Delta} + 4is\omega r + s(\Delta'' - 2) - \Lambda_{sj} \right) R_s(r) = 0, \quad (3.84)$$

com s representando o spin da partícula emitida, ‘linha’ a derivada com relação a r , $K = (r^2 + a^2)\omega - am$, R_s o campo e Λ_{sj} uma constante de separação das equações radial e angular, que depende do spin e momento angular considerados.

A diferença entre esta equação e a equação puramente 4-dimensional é o termo em Δ'' que não é nulo neste caso (o sendo em 4D). Embora seja possível a separação das equações angular e radial mesmo em uma métrica complexa como Kerr, o coeficiente de separação não é trivial. De fato, uma aproximação pode ser achada para ele, no limite de baixas energias, com $a\omega \ll \varepsilon$, ε pequeno [24],

$$\begin{aligned}\Lambda_{sj} &= \lambda_{sj} + a^2\omega^2 - 2am\omega, \\ \lambda_{sj} &= j(j+1) - s(s+1) - \frac{2ms^2}{j(j+1)}a\omega + \dots, \end{aligned} \quad (3.85)$$

Aqui λ_{sj} é outra constante de desacoplamento que expandimos em séries de $a\omega$, desprezando os termos de ordem 2 ou maiores. A equação de emissão após uma mudança de variáveis $R_s = \Delta^{-s}P_s$ fica

$$\Delta^s \frac{d}{dr} \left(\Delta^{-s+1} \frac{dP_s}{dr} \right) + \left(\frac{K^2 - isK\partial_r \Delta}{\Delta} + 4is\omega r + \Lambda_{sj} + 2s \right) P_s(r) = 0. \quad (3.86)$$

Esta equação é inteiramente genérica, valendo para as três primeiras fases da evaporação do buraco negro. Vamos entretanto nos ater à fase de Schwarzschild, que representa pelo menos 60% do total da energia emitida durante a evaporação. No caso de coordenadas esféricas, usamos a métrica em (3.67) com $n = 0$. A equação mestra então é (a partir de (3.86)),

$$\Delta^s \frac{d}{dr} \left(\Delta^{-s+1} \frac{dP_s}{dr} \right) + \left(\frac{\omega^2 r^2}{h} + 2is\omega r - \frac{is\omega r^2 h'}{h} - \Lambda \right) P_s(r) = 0. \quad (3.87)$$

($\Lambda = j(j+1) - s(s+1)$). O procedimento adotado para acharmos o espectro, é de resolver esta equação em dois limites assintóticos, $r \rightarrow r_H$ e $r \gg r_H$ (ou na coordenada tartaruga, $r_* \rightarrow \pm\infty$) e ‘colar’ a solução, para os demais valores, obtendo desta forma, o coeficiente de absorção do fator de corpo cinza, através das amplitudes de propagação da onda.

Um tratamento bastante detalhado para esta equação é dado em [24], que não exporemos aqui. Ater-nos-emos a discutir o fator de corpo cinza, fundamental na determinação dos espectros de fluxo de energia. Temos, para σ , as seguintes relações [24]

$$\sigma_{j,n}^{(0)}(\omega) = \frac{\pi(2j+1)\Gamma\left(\frac{j+1}{n+1}\right)^2 \Gamma\left(\frac{j+1+n}{n+1}\right)^2}{(n+1)^2 \Gamma\left(\frac{2j+1}{2}\right)^2 \Gamma\left(\frac{2j+2+n}{n+1}\right)^2} \left(\frac{\omega r_H}{2}\right)^{2j} A_H, \quad (3.88)$$

$$\sigma_{j,n}^{(\frac{1}{2})}(\omega) = \frac{\pi(2j+1)2^{-\frac{4j+2}{n+1}}}{4\Gamma(j+1)^2} \left(\frac{\omega r_H}{2}\right)^{2j-1} A_H, \quad (3.89)$$

$$\sigma_{j,n}^{(1)}(\omega) = \frac{(2j+1)}{(n+1)^2} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{j}{n+1}\right) \Gamma\left(\frac{j+1}{n+1}\right) \Gamma(j+2)}{\Gamma\left(\frac{2j+1}{n+1}\right) \Gamma(2j+2)} \right]^2 (2\omega r_H)^{2j} A_H, \quad (3.90)$$

em que desprezamos os termos em ordem maior do que 4 em ωr_H . Entretanto, estas expressões são obtidas a partir de muitas aproximações sucessivas, de maneira que são válidas apenas no limite de baixas energias e com $j = |s|$, que sempre fornece a principal contribuição a σ . No caso do campo escalar, a principal contribuição é $j = 0$, e o fator de corpo cinza é extremamente simples: $\sigma_{0,n}^{(0)}(\omega) \simeq 4\pi r_H^2 = A_H$. Abaixo seguem figuras esquemáticas de σ x ωr_H , para diferentes valores de spin, das aproximações analíticas de (3.88-3.90).

Figura 3.4: Fator de corpo cinza para a emissão de partículas escalares, férmions e bósons respectivamente, em um buraco negro na brana (4+n)-dimensional.

A lei de potência espectral para emissão em 4 dimensões fica

$$\frac{dE^{(s)}(\omega)}{dt} = \sum_j \sigma_{j,n}^{(s)}(\omega) \frac{\omega^3}{e^{\frac{\omega}{T_H}} \pm 1} \frac{d\omega}{2\pi^2}. \quad (3.91)$$

Os gráficos à seguir da figura 3.5 mostram como o fluxo de potência se comporta para um número diferente de dimensões.

Notamos que a energia e o número de partículas emitidos em um dado tempo, aumentam com o aumento do número de dimensões. Isto já foi antecipado pelo comportamento da temperatura Hawking para um buraco negro de Schwarzschild em D dimensões: de acordo com $T_H = \frac{D-3}{4\pi r_H}$, fica claro o comportamento dos espectros acima, pois quanto maior o número de dimensões, maior a temperatura. O fator de corpo cinza para bósons é em média bastante menor do que para escalares e férmions, embora nos espectros em que tomamos valores de energia grandes ou intermediários, este valor aumente e passe a dominar a emissão (é preciso notar que expressamos σ nas equações (3.88-3.90) somente até a primeira ordem em ωr_H , ou seja, apenas para baixas energias). Para o limite intermediário e alto, há uma expressão

Figura 3.5: Fluxo de potências na brana, para diferentes números de dimensões extras e tipos de partículas. Para qualquer número de dimensões extras, o fluxo muda grandemente.

genérica, que não abordaremos aqui, mas pode ser encontrada na referência [24]. Os espectros de corpo cinza e de emissão para tal caso estão representados na figura 3.6.

Outra questão importante é de quais tipos de partículas são preferencialmente emitidas pelos buracos negros na fase de Schwarzschild, para um dado número de dimensões n . Para $n = 0$, a maior parte da energia é emitida em forma de escalares, enquanto, para um número maior de dimensões, este número parece diminuir. Uma amostra comparativa dos fluxos entre escalares, férmions e bósons segue em 3.7 (as cinco curvas de cada gráfico correspondem a $n = 0, n = 1, \dots$ até $n = 4$ em ordem crescente).

Seguiremos esta seção explorando a parte da radiação Hawking que escapa da brana.

Radiação Hawking no Bulk

O tratamento para o bulk é bastante similar, ao adotado até aqui. Naturalmente, as emissões em direção ao bulk não estão acessíveis ao nosso Universo em 4 dimensões, entretanto, tais emissões representam um papel fundamental na perda de energia que acontece na evaporação de um buraco negro. O elemento de linha que tomamos é como em (3.67), com a mesma decomposição de campos adotada na seção precedente. A equação de perturbação para um campo escalar R , fica

$$\frac{h(r)}{r^{n+2}} \frac{d}{dr} \left[h(r) r^{n+2} \frac{d}{dr} + \omega^2 - \frac{h(r)}{r^2 l(l+n+1)} \right] R(r) = 0. \quad (3.92)$$

Figura 3.6: Fator de corpo cinza para valores de energia intermediários, em um buraco negro na brana $(4+n)$ -dimensional.

A solução é encontrada usando o mesmo método que a equação para a brana, ou seja, achando a solução perto do horizonte e no limite em que $r \rightarrow \infty$, e ‘colando’ estas soluções. As equações neste limite são, respectivamente [33]

$$h(h-1)\frac{d^2 R}{dh^2} - (h-1)\frac{dR}{dh} + \left[\frac{(\omega r_H)^2}{(n+1)^2 h(1-h)} - \frac{(l(l+n+1))}{(n+1)^2(1-h)} \right] R = 0, \quad (3.93)$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left[\omega^2 - \frac{1}{r^2} \left(l + \frac{n+2}{2} \right)^2 \right] f = 0, \quad (3.94)$$

em que R e f representam o campo nestes dois diferentes limites. O fator de corpo cinza para estas soluções toma a forma [33]

$$\sigma_{l,n}(\omega) = \frac{\pi}{2^{\frac{4l}{n+1}}} \left[\frac{\omega r_H}{2} \right]^{2l} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{l}{n+1}\right)^2 \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{l}{n+1}\right)^2 \Gamma\left(l + \frac{n+3}{2}\right)^2} N_l A_H + \dots \quad (3.95)$$

Figura 3.7: Fluxo de energia na brana, para valores altos de energia ωr_H . Notamos o comportamento acentuado do fluxo na brana, conforme o número de dimensões extras aumenta.

com N_l representando a multiplicidade de estados já definido anteriormente. Esta expressão é também para o limite de baixas energias, com $\omega r_H \ll 1$, cuja maior contribuição vem do modo $l = 0$. Sem usar esta aproximação, e diretamente integrando a equação em (3.92), obtemos para o fator de corpo cinza e fluxo de potência os gráficos das figuras 3.8 e 3.9

Fica claro o comportamento do campo na presença de dimensões extras: a taxa de emissão de radiação aumenta, com o aumento de n . Tal como na brana, isto é causado pelo aumento da temperatura Hawking do buraco negro, com o ‘aumento’ do número de dimensões. Podemos encontrar a razão ζ de energia emitida bulk/brana através de,

$$\zeta = \frac{\frac{dE^{(B)}}{dt}}{\frac{dE^{(b)}}{dt}} = \frac{\sum_l N_l^{(B)} |A_l^{(B)}|^2}{\sum_l N_l^{(b)} |A_l^{(b)}|^2}, \quad (3.96)$$

em que ‘B’ representa o bulk e ‘b’ a brana. A multiplicidade de estados

Figura 3.8: Fluxo de energia na bulk, para números diferentes de dimensões extras.

Figura 3.9: Fator de corpo cinza para o bulk, em diferentes valores de D .

no bulk cresce rapidamente com n , comparado com a brana, que mantém este número constante. Entretanto a probabilidade de absorção (A_l), com o aumento de n é consideravelmente maior na brana do que no bulk. Os resultados numéricos, obtidos a partir de (3.96), seguem na tabela abaixo [34].

D	4	5	6	7	8	9	10	11
ζ	1.0	0.40	0.24	0.22	0.24	0.33	0.52	0.93

Este comportamento peculiar de n que entre 2 e 5, produz a menor taxa de emissão para o bulk em relação à brana, é devido ao fato de que a probabilidade de absorção para estes valores de n é mais alta do que a multiplicidade de estados, como expressado há pouco.

Capítulo 4

Perturbações em Cordas Negras e Comportamento do Gráviton em Randall-Sundrum

Até aqui estivemos preocupados com uma descrição de possíveis Universos com mais do que 4 dimensões, como o contexto explorado em Randall-Sundrum, no capítulo anterior. Falamos ainda da solução de buracos negros em D dimensões bem como da solução de Schwarzschild, sistemas de coordenadas completos, cálculos de geodésicas e perturbações. Aqui iremos aprofundar um pouco o estudo de soluções singulares da equação de Einstein, estudando cordas e branas negras, estruturas cujo horizonte tem topologia $S^2 \times \mathbb{R}^n$ [35].

Falaremos de início de perturbações gravitacionais em uma corda negra com número arbitrário de dimensões, que leva à existência de modos de perturbação instáveis. Veremos à seguir que embora esta instabilidade junto com outro argumento de entropia tenha levado à conclusão de que a corda “colapsa” [36] em uma linha de buracos negros, de fato isto não acontece. Finalmente, falaremos da corda negra de Schwarzschild, que tem uma instabilidade semelhante, demonstrando a ausência de atalhos gravitacionais nas proximidades da estrutura. Concluímos o capítulo provando a inexistência de atalhos gravitacionais para os Universos de RS.

4.1 Perturbações Gravitacionais e Instabilidade de Gregory-Laflamme

Para o estudo de perturbações em cordas-negras tomaremos uma pequena perturbação na métrica g_{AB} representada por h_{AB} ,

$$g_{AB} = g_{AB} + h_{AB}. \quad (4.1)$$

As equações de Einstein em um Universo com constante cosmológica, no vácuo podem ser escritas

$$G_{AB} = 8\pi G T_{AB} = R_{AB} - \frac{R g_{AB}}{2} + \Lambda g_{AB} = 0. \quad (4.2)$$

Neste caso, pela equação não-perturbada, obtemos o escalar de Ricci não perturbado,

$$\begin{aligned} \frac{\check{R} g_{AB}}{2} - \check{R}_{AB} &= \Lambda g_{AB}, \\ \frac{\check{R} D}{2} - \check{R} &= \Lambda D, \quad \check{R} = \frac{2\Lambda D}{D-2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

com D o número de dimensões do espaço-tempo considerado. O escalar de Ricci perturbado pode ser calculado da mesma maneira, pela equação perturbada em (4.2), de tal forma, que chegamos ao resultado

$$R = \check{R}, \quad (4.4)$$

ou seja, $\delta R = 0$. Entretanto o escalar não perturbado pode ser calculado também como

$$R = g^{AB} R_{AB} = (g^{AB} - h^{AB})(\check{R}_{AB} - \delta R_{AB}) \sim \check{R} + \check{g}^{AB} \delta R_{AB} - h^{AB} \check{R}_{AB}, \quad (4.5)$$

de maneira que conseguimos uma outra relação, $\check{g}^{AB} \delta R_{AB} - h^{AB} \check{R}_{AB} = 0$.

A equação de Einstein perturbada,

$$\frac{\check{R}}{2}(\check{g}_{AB} + h_{AB}) - (\check{R}_{AB} + \delta R_{AB}) = \Lambda(\check{g}_{AB} + h_{AB}), \quad (4.6)$$

leva-nos a uma equação para a perturbação gravitacional na forma

$$\delta R_{AB} + \Lambda h_{AB} - R h_{AB} = 0. \quad (4.7)$$

Resta assim calcular quem é δR_{AB} . Tomando a conexão não perturbada, $\check{\Gamma}_{BC}^A = \check{g}^{AD}(\check{g}_{DB,C} + \check{g}_{DC,B} - \check{g}_{CB,D})$, podemos achar $\delta\Gamma$ através de

$$\begin{aligned}\Gamma_{BC}^A &= \frac{(\check{g}^{AD} - h^{AD})}{2}[(\check{g}_{DB} - h_{DB})_{,C} + (\check{g}_{DC} - h_{DC})_{,B} - (\check{g}_{CB} - h_{CB})_{,D}] = \\ &= \check{\Gamma}_{BC}^A + \frac{\check{g}^{AD}}{2}(h_{DB,C} + h_{DC,B} - h_{CB,D}) - \frac{h^{AD}}{2}(\check{g}_{DB,C} + \check{g}_{DC,B} - \check{g}_{CB,D}) = \\ &= \check{\Gamma}_{BC}^A + \frac{\check{g}^{AD}}{2}(h_{DB,C} + h_{DC,B} - h_{CB,D}) - h_{EF}\check{g}^{EA}\check{\Gamma}_{BC}^F = \\ &= \check{\Gamma}_{BC}^A + \delta\Gamma_{BC}^A,\end{aligned}\tag{4.8}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_{BC}^A &= \frac{\check{g}^{AD}}{2}(h_{DB,C} + h_{DC,B} - h_{CB,D}) - h_{EF}\check{g}^{EA}\check{\Gamma}_{BC}^F \\ &= \frac{\check{g}^{AD}}{2}(h_{DB,C} + h_{DC,B} - h_{CB,D}).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Finalmente, depois de alguma álgebra chegamos a partir de $\mathbf{R}$ a $\delta\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}R_{AB} &= \Gamma_{AB,C}^C - \Gamma_{AC,B}^C + \Gamma_{AC}^C\Gamma_{CD}^D - \Gamma_{AD}^C\Gamma_{BC}^D = \\ &= (\check{\Gamma}_{AB,C}^C + \delta\Gamma_{AB,C}^C) + (\check{\Gamma}_{AC}^C + \delta\Gamma_{AC}^C)(\check{\Gamma}_{CD}^D + \delta\Gamma_{CD}^D) \\ &\quad - (\check{\Gamma}_{AC,B}^C + \delta\Gamma_{AC,B}^C) - (\check{\Gamma}_{AD}^C + \delta\Gamma_{AD}^C)(\check{\Gamma}_{BC}^D + \delta\Gamma_{BC}^D) \\ &\quad \sim \check{R}_{AB} + \delta\Gamma_{AB,C}^C - \delta\Gamma_{AC,B}^C + \check{\Gamma}_{AB}^C\delta\Gamma_{CD}^D \\ &\quad + \check{\Gamma}_{CD}^D\delta\Gamma_{AB}^C - \check{\Gamma}_{AD}^C\delta\Gamma_{BC}^D - \check{\Gamma}_{BC}^D\delta\Gamma_{AD}^C,\end{aligned}\tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\delta R_{AB} &= \delta\Gamma_{AB,C}^C - \delta\Gamma_{AC,B}^C + \check{\Gamma}_{AB}^C\delta\Gamma_{CD}^D \\ &\quad + \check{\Gamma}_{CD}^D\delta\Gamma_{AB}^C - \check{\Gamma}_{AD}^C\delta\Gamma_{BC}^D - \check{\Gamma}_{BC}^D\delta\Gamma_{AD}^C,\end{aligned}\tag{4.11}$$

ou tendo em conta que

$$\delta\Gamma_{BC;D}^A = \delta\Gamma_{BC,D}^A - \check{\Gamma}_{BD}^E\delta\Gamma_{EC}^A - \check{\Gamma}_{CD}^E\delta\Gamma_{BE}^A + \check{\Gamma}_{ED}^A\delta\Gamma_{BC}^E,\tag{4.12}$$

consequimos por fim

$$\delta R_{AB} = \delta\Gamma_{AB;C}^C - \delta\Gamma_{AC;B}^C.\tag{4.13}$$

Voltando à equação de perturbação em (4.7), substituindo o escalar de Ricci e o tensor de Ricci em primeira ordem, a equação se torna,

$$\delta\Gamma_{AB;C}^C - \delta\Gamma_{AC;B}^C + \frac{4\Lambda h_{AB}}{2-D} = 0.\tag{4.14}$$

Depois de algumas simplificações, a equação anterior fica

$$\check{g}^{CD} (h_{DA;B;C} + h_{DB;A;C} - h_{BA;D;C} - h_{DC;A;B}) + \frac{4\Lambda h_{AB}}{2-D} = 0, \quad (4.15)$$

ou,

$$-\nabla_C \nabla^C h_{AB} - \nabla_A \nabla^B h_C{}^C + 2\nabla^C \nabla_{(B} h_{A)C} + \frac{4\Lambda h_{AB}}{2-D} = 0. \quad (4.16)$$

Todo o desenvolvimento perturbativo que fizemos até aqui, foi sem o uso de qualquer calibre na perturbação, e tampouco especificação do espaço-tempo de fundo. Portanto, a equação (4.16) é inteiramente genérica, servindo para analisar quaisquer sistemas que sigam as equações de campo de Einstein, no vácuo com (ou sem) constante cosmológica.

Nos modelos de Randall-Sundrum, e mesmo, para modelos que procuram resolver as equações de Einstein em $D > 4$ dimensões (como é o caso da corda negra que usaremos para falar sobre a instabilidade de Gregory-Laflamme), usamos o calibre *TTF*, transverso e sem traço (TTF - *transverse, trace-free*), dado por

$$h_A{}^A = 0, \quad h^A{}_{B;A} = 0. \quad (4.17)$$

Isto em (4.16) resulta

$$-\nabla_C \nabla^C h_{AB} + 2\nabla^C \nabla_{(B} h_{A)C} + \frac{4\Lambda h_{AB}}{2-D} = 0. \quad (4.18)$$

Tomando a segunda parte do gauge, podemos simplificar mais, com as seguintes relações

$$\nabla_B \nabla_C h_A{}^C - \nabla_C \nabla_B h_A{}^C = h_D{}^C R^D{}_{ABC} + h_A{}^D R^C{}_{DCB} = h_D{}^C R^D{}_{ABC} + h_A{}^D R_{DB}, \quad (4.19)$$

$$\nabla_A \nabla_C h_B{}^C - \nabla_C \nabla_A h_B{}^C = h_D{}^C R^D{}_{BAC} + h_B{}^D R^C{}_{DCA} = h_D{}^C R^D{}_{BAC} + h_B{}^D R_{DA}. \quad (4.20)$$

Entretanto, o primeiro termo à esquerda das duas equações acima é nulo (pelo calibre), com o que somando (4.19) e (4.20) conseguimos

$$\nabla_C \nabla_A h_B{}^C + \nabla_C \nabla_B h_A{}^C = -h_D{}^C g^{DE} (R_{EBAC} + R_{EABC}) - 2h_{(B}{}^D R_{DA)}. \quad (4.21)$$

Desta forma, a equação de perturbação fica

$$-\nabla_C \nabla^C h_{AB} - h^{EC} (R_{EBAC} + R_{EABC}) - 2h_{(B}{}^D R_{DA)} + \frac{4\Lambda h_{AB}}{2-D} = 0. \quad (4.22)$$

Para uma corda negra do tipo Schwarzschild, em D-dimensões, teremos

$$ds^2 = - \left[1 - \left(\frac{2GM}{r} \right) \right] dt^2 + \left[1 - \left(\frac{2GM}{r} \right) \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 + dx_j dx^j, \quad (4.23)$$

(aqui o número de dimensões do espaço-tempo será determinado pelo número de componentes j , e por simplicidade adotaremos $a = 1 - \left(\frac{2GM}{r} \right)$).

A estrutura claramente não tem constante cosmológica, o que se reflete na ausência de fator de deformação à frente dos ‘elementos tipo Schwarzschild’ da métrica, como por exemplo encontramos em RS.

Para o cálculo da instabilidade de Gregory-Laflamme em cordas-negras, utiliza-se o elemento acima em 11 dimensões [36]. Entretanto, como veremos mais adiante esta instabilidade não acontece para todo tipo de corda negra como atestado no artigo através de um argumento heurístico de entropia (falaremos mais adiante sobre isto).

Esta situação pode ser convertida em outra similar, no contexto dos Universos de Randall-Sundrum, com 5 dimensões se agregarmos um fator $a(z)$ à métrica e fizermos $\Lambda \neq 0$ nas equações de perturbação.

Voltando ao elemento de linha (4.23), temos as identidades de Bianchi,

$$h^{CE} R_{EABC} = h^{CE} R_{CABE} = -h^{CE} R_{BEAC}, \quad R_{EBAC} = -R_{BEAC}, \quad (4.24)$$

e o tensor de Ricci e a constante cosmológica são nulos, no caso tratados,

$$\Lambda = 0 \rightarrow R = 0, \quad R_{AB} = 0, \quad (4.25)$$

fatos que usados adequadamente em (4.22) a reduzem para

$$-\nabla_C \nabla^C h_{AB} + 2h^{EC} R_{BEAC} = 0. \quad (4.26)$$

Esta equação é chamada equação de Lichnerowicz. Ela será usada diretamente para estudar a perturbação na corda. Antes, entretanto, faremos uma ‘redução’ dimensional do cálculo, supondo que as dimensões extras têm comportamento exponencial que geram uma torre de modos de Kaluza Klein,

$$h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi, x^4, x^5, \dots, x^{10}) = h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi) e^{(im_j x^j)}. \quad (4.27)$$

Aqui, os índices gregos vão de 0 a 3 e o índice ‘j’ de 4 a 10, que são as dimensões extras. É possível, neste caso, fazer uma redução dimensional da equação de perturbação. Observando que

$$R_{\mu\nu\gamma j} = 0, \quad (4.28)$$

e,

$$\nabla^j \nabla_j h_{\mu\nu} = m_j^2 h_{\mu\nu}, \quad (4.29)$$

obtemos a equação de perturbação

$$\left[-\nabla_\alpha \nabla^\alpha + \sum_j m_j^2 \right] h_{\mu\nu} + 2h^{\epsilon\beta} R_{\mu\epsilon\nu\beta} = 0. \quad (4.30)$$

Como primeiro passo do cálculo expandiremos o primeiro termo, do laplaciano de $\mathbf{h}$,

$$\begin{aligned} g^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha \nabla_\lambda h_{\mu\nu} &= g^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha (h_{\mu\nu,\lambda} - h_{\omega\nu} \Gamma^\omega_{\lambda\mu} - h_{\omega\mu} \Gamma^\omega_{\lambda\nu}) \\ &= g^{\alpha\lambda} [h_{\mu\nu,\lambda\alpha} - h_{\delta\nu,\lambda} \Gamma^\delta_{\mu\alpha} - h_{\mu\delta,\lambda} \Gamma^\delta_{\nu\alpha} - h_{\mu\nu,\delta} \Gamma^\delta_{\lambda\alpha} - h_{\omega\nu,\alpha} \Gamma^\omega_{\mu\lambda}] \\ &\quad + g^{\alpha\lambda} [h_{\omega\delta} \Gamma^\omega_{\lambda\mu} \Gamma^\delta_{\nu\alpha} + h_{\omega\nu} \Gamma^\omega_{\delta\mu} \Gamma^\delta_{\lambda\alpha} + h_{\omega\nu} \Gamma^\omega_{\delta\lambda} \Gamma^\delta_{\mu\alpha} - h_{\omega\nu} \Gamma^\omega_{\lambda\mu,\alpha}] \\ &\quad + g^{\alpha\lambda} [-h_{\omega\mu,\alpha} \Gamma^\omega_{\lambda\nu} + h_{\omega\delta} \Gamma^\omega_{\lambda\nu} \Gamma^\delta_{\mu\alpha} + h_{\omega\mu} \Gamma^\omega_{\delta\nu} \Gamma^\delta_{\lambda\alpha} + h_{\omega\mu} \Gamma^\omega_{\delta\lambda} \Gamma^\delta_{\nu\alpha} - h_{\omega\mu} \Gamma^\omega_{\lambda\nu,\alpha}]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Reagrupando os termos temos,

$$\begin{aligned} g^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha \nabla_\lambda h_{\mu\nu} &= g^{\alpha\lambda} [h_{\mu\nu,\lambda\alpha} - h_{\mu\nu,\delta} \Gamma^\delta_{\lambda\alpha} - 4h_{(\mu\delta,\lambda} \Gamma^\delta_{\nu)\alpha}] \\ &\quad + g^{\alpha\lambda} [-2h_{\omega(\nu} \Gamma^\omega_{\lambda\mu),\alpha} + 2h_{\omega\delta} \Gamma^\omega_{\lambda\nu} \Gamma^\delta_{\mu\alpha} + 2h_{\omega(\nu} \Gamma^\omega_{\delta\lambda} \Gamma^\delta_{\mu)\alpha} + 2h_{\omega\delta} \Gamma^\omega_{\lambda(\mu} \Gamma^\delta_{\nu)\alpha}]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Expandindo termo a termo este D'alembertiano,

$$\begin{aligned} g^{\alpha\lambda} \nabla_\alpha \nabla_\lambda h_{\mu\nu} &= g^{\lambda\alpha} [h_{\mu\nu,\alpha\lambda} - h_{\mu\nu,\delta} g^{\theta\delta} (g_{\theta\alpha,\lambda} + g_{\theta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\lambda,\theta})/2] \\ &\quad + g^{\lambda\alpha} [-2h_{\delta(\nu,\lambda} g^{\theta\delta} (g_{\theta\mu),\alpha} + g_{\theta\alpha,\mu} - g_{\alpha\mu,\theta}) - h_{\delta(\nu} g^{\delta\theta}_{,\alpha} (g_{\theta\lambda,\mu} + g_{\theta\mu,\lambda} - g_{\mu\lambda,\theta}))] \\ &\quad - g^{\lambda\alpha} h_{\delta(\nu} g^{\delta\theta} (g_{\theta\lambda,\alpha\mu} + g_{\theta\mu,\alpha\lambda} - g_{\mu\lambda,\alpha\theta}) \\ &\quad + g^{\lambda\alpha} h_{\omega\delta} g^{\delta\theta} (g_{\theta\alpha,\mu} + g_{\theta\mu,\alpha} - g_{\mu\alpha,\theta}) g^{\omega\beta} (g_{\beta\nu,\lambda} + g_{\beta\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\beta})/2 \\ &\quad + g^{\lambda\alpha} h_{\omega(\nu} g^{\omega\theta} (g_{\theta\delta,\lambda} + g_{\theta\lambda,\delta} - g_{\lambda\delta,\theta}) g^{\delta\beta} (g_{\beta\alpha,\mu} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta})/2 \\ &\quad + g^{\lambda\alpha} h_{\omega\delta} g^{\omega\theta} (g_{\theta\lambda,(\mu} + g_{\theta(\mu,\lambda} - g_{(\mu\lambda,\theta}) g^{\delta\beta} (g_{\beta\nu),\alpha} + g_{\beta\alpha,\nu} - g_{\alpha\nu,\beta})/2, \end{aligned} \quad (4.33)$$

de maneira que a equação fica finalmente

$$2h^{\epsilon\beta} R_{\mu\epsilon\nu\beta} + g^{\lambda\alpha} [h_{\mu\nu,\alpha\lambda} - h_{\mu\nu,\delta} g^{\theta\delta} (g_{\theta\alpha,\lambda} + g_{\theta\lambda,\alpha} - g_{\alpha\lambda,\theta})/2]$$

$$\begin{aligned}
& g^{\lambda\alpha} \left[-2h_{\delta(\nu,\lambda}g^{\theta\delta}(g_{\theta\mu),\alpha} + g_{\theta\alpha,\mu} - g_{\alpha\mu,\theta}) - h_{\delta(\nu}g^{\delta\theta}_{,\alpha}(g_{\theta\lambda,\mu} + g_{\theta\mu,\lambda} - g_{\mu\lambda,\theta}) \right] \\
& + g^{\lambda\alpha}h_{\omega\delta}g^{\omega\theta}(g_{\theta\lambda,(\mu} + g_{\theta(\mu,\lambda} - g_{(\mu\lambda,\theta})g^{\delta\beta}(g_{\beta\nu),\alpha} + g_{\beta\alpha,\nu} - g_{\alpha\nu,\beta})/2 \\
& + g^{\lambda\alpha}h_{\omega\delta}g^{\delta\theta}(g_{\theta\alpha,\mu} + g_{\theta\mu,\alpha} - g_{\mu\alpha,\theta})g^{\omega\beta}(g_{\beta\nu,\lambda} + g_{\beta\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\beta})/2 \\
& + g^{\lambda\alpha}h_{\omega(\nu}g^{\omega\theta}(g_{\theta\delta,\lambda} + g_{\theta\lambda,\delta} - g_{\lambda\delta,\theta})g^{\delta\beta}(g_{\beta\alpha,\mu} + g_{\beta\mu,\alpha} - g_{\mu\alpha,\beta})/2 \\
& - g^{\lambda\alpha}h_{\delta(\nu}g^{\delta\theta}(g_{\theta\lambda,\alpha\mu} + g_{\theta\mu,\alpha\lambda} - g_{\mu\lambda,\alpha\theta}) + \sum_j m_j^2 h_{\mu\nu} = 0. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

O próximo passo é escolher um $h_{\mu\nu}$ compatível com as simetrias do problema. Para isto faremos uma análise em quatro dimensões e generalizaremos o argumento para n-dimensões tendo a corda negra simetria esférica apenas em 4 dimensões.

Em 4 dimensões, há em espaços-tempo de buracos negros estacionários uma invariância rotacional com relação a uma rotação feita nas coordenadas θ e ϕ . Da lei de transformação de tensores

$$h_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^{\theta'} \Lambda_\nu^{\beta'} h'_{\theta\beta}, \quad \Lambda_\mu^{\theta'} = \frac{\partial x^{\theta'}}{\partial x^\mu}. \tag{4.35}$$

Assumindo a notação: $(0, 1, 2, 3) = (t, r, \theta, \phi)$; $(0, 1) \rightarrow k$ ou l ; $(2, 3) \rightarrow m$ ou n vem,

$$\frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} = \delta_{lk'}, \tag{4.36}$$

do que,

$$h_{lk} = h_{l'k'}. \tag{4.37}$$

Entretanto $h_{lm} \neq h_{l'm'}$ e, de fato, os elementos 'lm' modificam-se como vetores (2x1), enquanto os elementos 'mn' como uma matriz 2x2. Isto segue da simetria assumida acima, de que a perturbação é invariante sobre uma rotação nas coordenadas θ e ϕ . Em resumo, a perturbação se transforma da seguinte maneira,

$$\mathbf{h}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} E_{00} & E_{01} & V(A1) & V(A2) \\ E_{10} & E_{11} & V(B1) & V(B2) \\ V(A1) & V(B1) & T(C1) & T(C2) \\ V(A2) & V(B2) & T(D1) & T(D2) \end{pmatrix}, \tag{4.38}$$

em que E representa que o elemento se transforma como escalar, V como vetor e T como tensor.

Para o gráviton o número de graus de liberdade (em termos clássicos) é de

$$n(D) = \frac{D(D-3)}{2}. \quad (4.39)$$

No caso de $D=4$, $n(4) = 2$, que são as duas liberdades de escolha em $h_{\mu\nu}$: perturbações com paridade ímpar e par. Se tratamos de uma hipersuperfície em 4-D, com as demais dimensões apresentando tal tipo de invariância, é possível obter uma perturbação do tipo,

$$h_{\mu j} = h_{jn} = 0, \quad (4.40)$$

(j como citado anteriormente corre apenas sobre as dimensões extras). Trata-se então de uma escolha de calibre para uma perturbação escalar. Neste âmbito, estão descartadas perturbações com $l > 0$. Estes casos são englobados pelas perturbações tensoriais e vetoriais respectivamente, mas aqui calcularemos apenas o grau de liberdade escalar do gráviton. Para uma onda s , sem momento angular, é possível escolher uma matriz de perturbação do tipo [36],

$$\mathbf{h}_{\mu\nu} = e^{\omega t + i\mathbf{m}_j \mathbf{x}^j} \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 & \cdots \\ B & C & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & E & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & E \sin^2 \theta & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Isto porque a perturbação tem simetria $SO(3)$, ou seja, ao checarmos as equações de Killing, percebemos que não há mistura de componentes radiais e temporais com angulares, tampouco há componentes que misturam os dois ângulos.

Agora, tendo todas as liberdades de gauge fixadas, usaremos as equações (4.17) e (4.34) para obter uma equação que governe apenas uma das variáveis. Abrindo o gauge com a matriz acima, temos

$$A = \left[\frac{r a a_{,r} + a^2 r \partial_r + 4a^2}{\omega r} \right] B, \quad (4.42)$$

$$\left[\frac{a_{,r}}{a^2} \right] A - \left[\frac{\omega}{a} \right] B + \left[\frac{4a}{r} + 2a_{,r} + \partial_r \right] C - \left[\frac{4}{r^3} \right] E = 0, \quad (4.43)$$

$$\left[\frac{1}{a}\right] A + [a]C + \left[\frac{2}{r^2}\right] E = 0, \quad (4.44)$$

$$\partial_\theta E = 0, \quad (4.45)$$

$$\partial_\phi E = 0. \quad (4.46)$$

Para esta corda, as únicas componentes não nulas do tensor de Riemann são

$$R_{0303} = \frac{(r-2M)M \sin^2 \theta}{r^2}, \quad R_{1313} = -\frac{M \sin^2 \theta}{r-2M}, \quad R_{2323} = 2rM \sin^2 \theta,$$

$$R_{1212} = -\frac{M}{r-2M}, \quad R_{0202} = \frac{(r-2M)M}{r^2}, \quad R_{0101} = -\frac{2M}{r^3}. \quad (4.47)$$

Pode-se então, por fim, fazer o cálculo da perturbação, pela equação (4.34). As componentes 31 e 32 desta equação são identicamente nulas, assim como 13 e 23. Para as componentes 30, 20 e 21 (e suas simétricas), conseguimos as seguintes equações, respectivamente,

$$\frac{2a}{r} \partial_\phi B = 0, \quad (4.48)$$

$$\left[\partial_\theta - \frac{2 \cos \theta}{\sin \theta}\right] B = 0, \quad (4.49)$$

$$\frac{3 \cos \theta}{2 \sin \theta} E - \left[2ar \partial_\theta - \frac{4a \cos \theta}{\sin \theta}\right] C = 0. \quad (4.50)$$

Seguindo com as equações, há as últimas 5 componentes, que são as mais difíceis de se tratar,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{6a \sin^2 \theta}{r^2} + \frac{12a \cos^2 \theta}{r^2} - 4ar \sin^2 \theta \partial_r + \frac{2(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{r^4} - \frac{\omega^2 \sin^2 \theta}{a} \right] E \\ & + \left[a \sin^2 \theta \partial_{rr} + \frac{2 \sin^2 \theta}{r^2} - \sin^2 \theta a_{,r} \partial_r - \frac{2a \sin^2 \theta \partial_r}{r} + \frac{4M \sin^2 \theta}{r^3} + \sum_i m_i^2 \right] E \\ & + 2 \sin^2 \theta \left[a^2 + \frac{1}{a} - \frac{aM}{r} \right] C + \left[\frac{2M \sin^2 \theta}{ar} \right] A = 0, \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\left[-\frac{2a\partial_r}{r} + a\partial_{rr} - \frac{\omega^2}{a} + a_{,r}\partial_r + \frac{2\cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{4M}{r^3} + \sum_i m_i^2 \right] E - \left[4a^2 + \frac{2aM\sin^2\theta}{r} \right] C + \left[\frac{2M\sin^2\theta}{ar} \right] A = 0, \quad (4.52)$$

$$\left[+4a_{,r}\partial_r + \frac{(a_{,r})^2}{a} + a_{,rr} - \frac{\omega^2}{a} + a\partial_{rr} + \frac{\cos\theta\partial_\theta}{r^2\sin\theta} + \frac{\partial_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\partial_{\phi\phi}}{r^2\sin^2\theta} \right] C + \left[\frac{4a\partial_r}{r} + \sum_i m_i^2 \right] C + \left[\frac{2\omega a_{,r}}{a^2} \right] B + \left[\frac{4M}{a^2r^3} - \frac{(a_{,r})^2}{a} \right] A - \left[\frac{4M}{ar^5} \right] E = 0, \quad (4.53)$$

$$\left[-3a_{,r}\partial_r - \frac{7(a_{,r})^2}{2a} - \frac{\omega^2}{a} + a\partial_{rr} - \frac{2a}{r^2} - \frac{4M}{r^3} + \sum_i m_i^2 + \frac{\partial_{\phi\phi}}{r^2\sin^2\theta} \right] B + \left[\frac{\partial_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\cos\theta\partial_\theta}{r^2\sin\theta} + \frac{2a\partial_r}{r} \right] B + [\omega a_{,r}]C - \left[\frac{\omega a_{,r}}{a^2} \right] A = 0, \quad (4.54)$$

$$\left[-a_{,r}\partial_r + \frac{2(a_{,r})^2}{a} - a_{,rr} - \frac{\omega^2}{a} + a\partial_{rr} + \frac{2a\partial_r}{r} + \sum_i m_i^2 + \frac{\partial_{\theta\theta}}{r^2} + \frac{\partial_{\phi\phi}}{r^2\sin^2\theta} \right] A + \left[\frac{\cos\theta\partial_\theta}{r^2\sin\theta} \right] A - [2a_{,r}\omega]B + \left[\frac{4aM}{r^5} \right] E + \left[\frac{3a(a_{,r})^2}{2} - \frac{4a^2M}{r^3} \right] C = 0. \quad (4.55)$$

Nas equações acima, tomamos a parte angular, como correspondente a harmônicos esféricos, $l(l+1)$,

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left[\sin\theta \frac{dH}{d\theta} \right] + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2H}{d\phi^2} = -l(l+1)H, \quad (4.56)$$

em que H pode representar qualquer dos elementos da matriz de perturbação. Como entretanto estamos escolhendo uma perturbação tipo onda s e sem momento angular, o que só é possível devido à liberdade escalar do gráviton como demonstraremos mais adiante, tomaremos $l = 0$ nas equações acima, o que equivale a dizer que qualquer derivada em θ e em ϕ dos campos é nula.

Não apenas isto, mas estamos dando um valor específico a θ na escolha deste calibre, que satisfaz as relações (4.49) e (4.50) de $\theta = \frac{\pi}{2}$. Isto porque

a escolha da matriz de perturbação em (4.41) deve ser compatível com as equações de Einstein subseqüentes. Assim, as três primeiras equações de perturbação são nulas, e não apresentam nenhum ganho de informação. Para as demais 5 equações, teremos, usando $\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$ e $\theta = \pi/2$,

$$\left[\frac{6a}{r^2} - 4ar\partial_r + \frac{2}{r^4} - \frac{\omega^2}{a} + a\partial_{rr} + \frac{2}{r^2} - a_{,r}\partial_r - \frac{2a\partial_r}{r} + \frac{4M}{r^3} + \sum_i m_i^2 \right] E + 2 \left[a^2 + \frac{1}{a} - \frac{aM}{r} \right] C + \left[\frac{2M}{ar} \right] A = 0, \quad (4.57)$$

$$\left[-\frac{2a\partial_r}{r} + a\partial_{rr} - \frac{\omega^2}{a} + a_{,r}\partial_r + \frac{4M}{r^3} + \sum_i m_i^2 \right] E - \left[4a^2 + \frac{2aM}{r} \right] C + \left[\frac{2M}{ar} \right] A = 0, \quad (4.58)$$

$$\left[+4a_{,r}\partial_r + \frac{(a_{,r})^2}{a} + a_{,rr} - \frac{\omega^2}{a} + a\partial_{rr} + \frac{4a\partial_r}{r} + \sum_i m_i^2 \right] C + \left[\frac{2\omega a_{,r}}{a^2} \right] B + \left[\frac{4M}{a^2 r^3} - \frac{(a_{,r})^2}{a} \right] A - \left[\frac{4M}{ar^5} \right] E = 0, \quad (4.59)$$

$$\left[-3a_{,r}\partial_r - \frac{7(a_{,r})^2}{2a} - \frac{\omega^2}{a} + \frac{2a\partial_r}{r} + a\partial_{rr} - \frac{2a}{r^2} - \frac{4M}{r^3} + \sum_i m_i^2 \right] B + [\omega a_{,r}]C - \left[\frac{\omega a_{,r}}{a^2} \right] A = 0, \quad (4.60)$$

$$\left[-a_{,r}\partial_r + \frac{2(a_{,r})^2}{a} - a_{,rr} - \frac{\omega^2}{a} + a\partial_{rr} + \frac{2a\partial_r}{r} + \sum_i m_i^2 \right] A - [2a_{,r}\omega]B + \left[\frac{4aM}{r^5} \right] E + \left[\frac{3a(a_{,r})^2}{2} - \frac{4a^2 M}{r^3} \right] C = 0. \quad (4.61)$$

Para analisar o comportamento assintótico, em que $r \rightarrow \infty$, teremos $a \rightarrow 1$ e $a_{,r} = \frac{2M}{r^2} \rightarrow 0$, bem como $a_{,rr} = -\frac{4M}{r^3} \rightarrow 0$. Tomando estes limites por exemplo em (4.60), conseguimos

$$[-\omega^2 + \sum_j m_j^2 + \partial_{rr}]B = 0, \quad (4.62)$$

de maneira que,

$$B \sim e^{\pm r \sqrt{-\omega^2 + \sum_j m_j^2}}. \quad (4.63)$$

Entretanto, a solução da exponencial positiva devemos descartar, pois representa uma onda instável no infinito, o que não tem uma explicação física razoável.

O comportamento nas proximidades do horizonte deve ser analisado em coordenadas de Kruskal, pois no sistema de coordenadas esférico $a \rightarrow 0$. Em tal sistema o campo B varia com $B \sim (r - 2M)^A$, em que $A = -1 \pm 2M\omega$. Portanto para $\omega < \frac{1}{2M}$, os modos da perturbação são instáveis, pois na proximidade do horizonte, B tenderá ao infinito, tornando a perturbação maior do que a métrica não-perturbada. Esta é a instabilidade da corda negra chamada *instabilidade de Gregory-Laflamme*. Ela acontece apenas para alguns modos com comprimento de onda grande. Isto significa que branas e cordas negras são classicamente instáveis a perturbações em primeira ordem.

O estado final da estrutura de horizonte singular argumentado por Gregory e Laflamme seria uma linha de buracos negros que coalesceria a um único buraco negro. Este argumento tem haver com a entropia da estrutura: cordas negras muito longas são desfavoráveis entropicamente, pois buracos negros de mesma dimensão e energia possuem entropia maior do que estas cordas. Entretanto, como veremos à frente, e exposto em [37], este argumento pode ser contornado ao imaginarmos que a entropia de buracos negros representa um máximo global, havendo possibilidade de que a corda colapse a uma outra estrutura de máximo local na entropia.

Na próxima seção veremos que a corda não pode colapsar formando uma linha de buracos negros.

4.2 Estado Final da Corda Negra

Outro argumento central no colapso de cordas negras, desenvolvido por Horowitz *et al* [38,39], é de que mesmo levando em conta a instabilidade da corda por modos com grande comprimento de onda, seu horizonte de eventos não pode particionar em pequenos buracos negros. Classicamente isto é impossível, entretanto a idéia é de que em algum limite em que as perturbações necessitem de uma teoria quântica o horizonte se particionasse pelo argumento de minimizar a entropia. Todavia se demonstrou que isto não pode acontecer em um tempo finito.

Classicamente, o horizonte não pode se bifurcar. Contudo supomos que sobre evolução da perturbação o horizonte vá se singularizando, e em algum

momento em que a curvatura se torne grande, efeitos quânticos dominem uma transição entre os dois estados de horizontes particionado/não-particionado.

Vamos analisar as proximidades do horizonte, do ponto de vista de uma perturbação esférica. Nas proximidades do horizonte, a métrica local pode ser escrita como [40]

$$ds^2 = -f d\lambda^2 + 2dr d\lambda + 2\beta d\lambda dz + e^{2\chi} dz^2 + e^{2\psi} d\Omega, \quad (4.64)$$

em que $d\Omega = d\theta d\phi$ e f, β, χ e ψ são funções de λ, r e z . O horizonte está localizado em $r = 0$ (portanto estamos tratando de coordenadas locais que não se estendem à toda variedade) e as funções f, β e $\partial_r f$ são nulas ali. A coordenada λ é um parâmetro afim tipo tempo. Seja a tangente aos geradores nulos no horizonte $l^A = (\partial_\lambda)^A$ (vetor de Killing). Como supomos simetria esférica, a métrica em uma seção de choque do horizonte (ou seja, em $\lambda = cte$, $r \sim 0$) é

$$\mathbf{h}_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{e^{2\psi}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{2\psi}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{2\chi} \end{pmatrix}. \quad (4.65)$$

A divergência da geodésica nula (ou, a taxa de expansão do horizonte) é dada por [1]

$$\theta = g^{AB} h_{AC} \nabla_B l^C = g^{AB} h_{AC} \partial_B l^C + g^{AB} h_{AC} \Gamma_{BD}^C l^D. \quad (4.66)$$

Como o vetor $\mathbf{l}$ tem apenas a componente temporal, ∂_λ não é difícil verificar que

$$\theta = \Gamma_{30}^3 l^0 + \Gamma_{40}^4 l^0 + \Gamma_{20}^2 l^0 = (g^{32} g_{32,0} + g^{44} g_{44,0} + g^{23} g_{23,0}) \frac{l^0}{2} = 2\dot{\psi} + \dot{\chi}, \quad (4.67)$$

com o ponto denotando derivada com relação a λ . Naturalmente θ não pode diminuir (seção de termodinâmica). Isto pode ser obtido com a condição de que não haja singularidades na região externa ao horizonte. Se o nosso espaço é globalmente hiperbólico, esta constatação é válida, o que garante o teorema da área de Hawking.

O cisalhamento dos geradores nulos é calculado como [1]

$$\sigma_{AB} = h_A^C h_B^D \nabla_C l_D - \frac{\theta h_{AB}}{3} = \frac{\partial_\lambda(h_{AB})}{2} - \frac{\theta h_{AB}}{3}, \quad (4.68)$$

ou seja, uma vez que saibamos os geradores nulos, saberemos especificar a equação de Raychaudhuri da taxa de mudança do gerador. Seguimos com o cálculo de σ^2 . A métrica contravariante nas imediações do horizonte,

$$\mathbf{g}^{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & f + \beta^2 e^{2\chi} & 0 & 0 & -\beta e^{-2\chi} \\ 0 & 0 & 0 & 2e^{-2\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-2\psi} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta e^{-2\chi} & 0 & 0 & e^{-2\chi} \end{pmatrix}, \quad (4.69)$$

leva à métrica de seção de choque contravariante, $h^{AB} = g^{AC} g^{BD} h_{CD}$,

$$\mathbf{h}^{\mathbf{AB}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 e^{-2\chi} & 0 & 0 & -\beta e^{-2\chi} \\ 0 & 0 & 0 & 2e^{-2\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-2\psi} & 0 & 0 \\ 0 & -\beta e^{-2\chi} & 0 & 0 & e^{-2\chi} \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

Sendo $\sigma^{AB} = \frac{M^{AB}}{2} - \frac{\theta h^{AB}}{3}$ (em que $M^{AB} = g^{AC} g^{BD} \partial_\lambda(h_{CD})$), teremos para σ^2

$$\begin{aligned} \sigma_{AB} \sigma^{AB} &= \frac{M^{AB} \partial_\lambda(h_{AB})}{4} - \frac{M^{AB} h_{AB} \theta}{6} - \frac{\theta h^{AB} \partial_\lambda(h_{AB})}{6} + \\ + \frac{h^{AB} h_{AB} \theta^2}{9} &= \frac{2}{3} (\dot{\chi} - \dot{\psi})^2. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Substituindo isto na equação de Raychaudhuri, e levando em conta que a métrica tem tensor e escalar de Ricci nulos, obtemos

$$\dot{\theta} = -\frac{(\dot{\chi} + 2\dot{\psi})^2}{3} - \frac{2(\dot{\chi} - \dot{\psi})^2}{3}. \quad (4.72)$$

O efeito que queremos testar é a diminuição de ψ e conseqüentemente, da seção de choque nas proximidades do horizonte. Do teorema da área, $\theta \geq 0$. Então, por (4.67)

$$\dot{\chi} \geq -2\dot{\psi}, \quad (4.73)$$

com $\dot{\psi} \leq 0$, como uma condição de que o horizonte diminua. Portanto necessariamente devemos ter

$$\frac{2}{3} (\dot{\chi} - \dot{\psi})^2 = \sigma_{AB} \sigma^{AB} \geq 6\dot{\psi}^2. \quad (4.74)$$

Com esta condição conseguimos para a variação de θ um valor máximo, $\dot{\theta}_m = -6\dot{\psi}^2$, ou seja,

$$\dot{\theta} \leq -6\dot{\psi}^2. \quad (4.75)$$

Sendo $-6\dot{\psi}^2 \leq 12\dot{\psi} + 6$, teremos

$$\int \dot{\theta} \leq \int (12\dot{\psi} + 6). \quad (4.76)$$

Finalmente, chegamos à inequação em θ , que impede que o horizonte da corda se biparta em um tempo finito a formar buracos negros,

$$\theta(\lambda) \leq \theta_0 + 12\psi(\lambda) + 6\lambda. \quad (4.77)$$

Como vemos acima, ψ não pode ir a menos infinito em um tempo finito ($\psi \rightarrow -\infty$ e $\lambda < \epsilon$), pois isto representaria eventualmente, uma taxa de expansão negativa para a área do horizonte da corda. Isto significa que o horizonte da corda não pode ceder e formar uma linha de buracos negros como propuseram Gregory e Laflamme ao calcularem a instabilidade. Ao invés, a corda negra não dilacera seu horizonte, pois este não se singulariza em um tempo finito, mas muito provavelmente adquire uma outra configuração não invariante sob rotação no eixo.

Usamos aqui uma corda 5-dimensional para provar que a instabilidade de Gregory-Laflamme não maximiza necessariamente a entropia. Para uma prova mais genérica [39] podemos considerar nas proximidades de um horizonte qualquer seção de choque dada pela métrica h_{AB} ,

$$ds^2 = e^{2\phi}(dy + A_i dx^i)^2 + P_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.78)$$

com i correndo de 1 a $D - 3$. Se, para o gerador nulo l^A , definirmos $B_{AB} = h_A^C h_B^D \nabla_C l_D$, a equação de Raychaudhuri será escrita como

$$\dot{\theta} = -B_{AB} B^{AB} - R_{AB} l^A l^B. \quad (4.79)$$

Aqui vale a relação $B^2 \propto \dot{\phi}^2$, e um argumento parecido com o que desenvolvemos há pouco nos leva a

$$\dot{\theta} \leq -\dot{\phi}^2, \quad (4.80)$$

que necessariamente impede que ϕ tenda a menos infinito em um tempo finito.

Seguiremos o capítulo analisando o comportamento da corda negra de Schwarzschild, explorando um argumento de Hawking *et al* [37], de que nos contextos de Randall-Sundrum I, a corda negra forma uma outra estrutura que ‘fecha’ seu horizonte.

4.3 Corda Negra de Schwarzschild-Randall-Sundrum

O colapso gravitacional de matéria confinada na brana irá formar uma singularidade que deverá ‘se propagar’ para o bulk, na forma de uma corda negra. Esta propagação da singularidade pode ser estudada, com um processo semelhante ao descrito em [41, 42, 43, 44]. Entretanto quando o raio do horizonte é menor do que a dimensão extra, como vimos há pouco, podemos considerar a singularidade como um buraco negro em D dimensões. Embora, nos contextos explorados por Randall e Sundrum em seus modelos, apenas soluções tipo cordas negras sejam possíveis, no contexto do modelo ADD o valor do horizonte de eventos é importante na determinação do comportamento da singularidade.

No contexto de Randall-Sundrum, uma corda negra pode ser obtida ao substituímos a métrica de Minkowski em 4 dimensões, pela métrica de um buraco negro. De fato, qualquer estrutura com escalares - de Ricci e $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ - nulos quando substituída pela métrica de Minkowski na brana, representará solução das equações de Einstein, como demonstraram Brecher e Perry, em um trabalho com D8-branas [45].

Por exemplo, para a corda negra de Schwarzschild-Randall-Sundrum, temos,

$$ds^2 = e^{-2y/l} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \right] + dy^2, \quad (4.81)$$

ou, em coordenadas conforme-assintoticamente planas, $z = le^{y/l}$

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 + dz^2 \right]. \quad (4.82)$$

A singularidade de curvatura acontece em $r = 0$. Trata-se de uma estrutura em um espaço-tempo Anti-de Sitter conformalmente plana no limite assintótico $r \rightarrow \infty$. No sistema de coordenadas do elemento de linha acima, o horizonte Anti-de Sitter situa-se em $z = \infty$ e o infinito tipo tempo em $z = 0$. Para situarmos o elemento de linha nos modelos RS, precisamos incluir uma ou duas branas no mesmo. Tal inclusão é feita como segue,

$$ds^2 = \frac{l^2}{(|w| + z_0)^2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 + dw^2 \right], \quad (4.83)$$

em que a brana situa-se em $w = 0$. O que fizemos de fato foi introduzir um novo sistema de coordenadas $w = z - z_0$, com uma brana em $z = z_0$,

denotada pela condição de contorno sobre a função módulo de w no elemento de linha acima.

A massa da singularidade percebida por um observador da brana será $M_* = \frac{Ml}{z_0}$, e o raio do horizonte de eventos $2M_*$. O comprimento do horizonte AdS l é da ordem do comprimento de Planck de tal maneira que buracos negros astrofísicos devem ter massa $\frac{M}{z_0} \geq 1$. Ao incluirmos uma segunda brana, a massa vista por um observador nesta brana terá a mesma expressão acima, multiplicada pelo fator da exponencial.

Os escalares - de Ricci e $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ - da estrutura são finitos em todo espaço-tempo. Entretanto o escalar de Riemann,

$$R_{ABCD}R^{ABCD} = \frac{1}{l^4} \left[40 + \frac{48M^2z^4}{r^6} \right], \quad (4.84)$$

diverge em $r = 0$ a singularidade da corda negra, e em $z \rightarrow \infty$, o horizonte AdS. Esta divergência do escalar de Riemann no horizonte AdS está relacionada com a instabilidade de Gregory-Lafamme de cordas negras a ondas com comprimentos de onda grande que incidem em cordas negras, como vimos na primeira seção deste capítulo.

Para analisar o que acontece com a estrutura quando nos aproximamos do horizonte AdS, que apresenta uma singularidade de curvatura, tomamos as equações geodésicas tipo tempo associadas aos vetores de Killing ∂_t e ∂_ϕ ,

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{Ez^2}{\left[1 - \frac{2M}{r}\right]l^2}, \quad (4.85)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{Lz^2}{r^2l^2}, \quad (4.86)$$

para o movimento no plano $\theta = \frac{\pi}{2}$. A equação radial tipo luz deste movimento (que pode ser deduzida de maneira análoga à que fizemos no capítulo 2) é dada por

$$\left[\frac{dr}{d\lambda}\right]^2 + \frac{z^4}{l^4} \left[\left(\frac{l^2}{C^2} + \frac{L^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - E^2 \right] = 0. \quad (4.87)$$

Fazendo algumas mudanças nas variáveis da equação acima, $\zeta \equiv -\frac{C^2}{\lambda}$ e $(R, T, \varepsilon, \sqrt{\mathcal{L}}, m) \equiv \frac{C}{l}(r, t, E, \sqrt{L}, M)$, a equação que obtemos para a geodésica fica

$$\left[\frac{dR}{d\zeta}\right]^2 + \left[1 + \frac{\mathcal{L}^2}{R^2}\right] \left[1 - \frac{2M}{r}\right] - \varepsilon^2 = 0, \quad (4.88)$$

que é a mesma equação que obtivemos para uma geodésica tipo tempo radial em Schwarzschild 4-dimensional no capítulo 2. Este resultado é notório:

uma geodésica 5-dimensional radial tipo luz corresponde a uma geodésica 4-dimensional tipo tempo. O movimento de uma partícula em 5 dimensões prenuncia a existência de uma massa em 4 dimensões, com relação entre os tempos das duas geodésicas dada acima.

Estamos interessados no comportamento próximo à singularidade dado por $\lambda \rightarrow 0$, ou $\zeta \rightarrow \infty$, ou seja, o comportamento tardio no tempo para órbitas tipo tempo em Schwarzschild em 4 dimensões. Não queremos portanto que as órbitas atinjam a singularidade a não ser em um tempo infinito. Para órbitas que perdurem tempos infinitos há duas possibilidades: geodésicas que alcancem o infinito, $R \rightarrow \infty$, ou geodésicas com $\mathcal{L}^2 > 12m^2$, que possibilitam a existência de estados ligados que não caem na singularidade.

Para a primeira hipótese, $R \rightarrow \infty$, o comportamento geodésico (4.88) é

$$R \sim \zeta \sqrt{\varepsilon^2 - 1}, \quad r \sim -\frac{Cl}{\lambda} \sqrt{\varepsilon^2 - 1}, \quad (4.89)$$

e, ao longo desta geodésica, o escalar de Riemann não diverge no horizonte AdS, pois $z \sim \lambda^{-1}$.

O mesmo não acontece para o caso de órbitas ligadas: em qualquer situação, o escalar de Riemann divergirá quando $\lambda \rightarrow \infty$. Como aparentemente apenas uma parte das geodésicas encontram uma singularidade no horizonte AdS, supomos que apenas uma parte do horizonte é singular. Isto, de fato não acontece, contudo. Se tomarmos o cálculo das geodésicas que atingem $z = \infty$, para um sistema de coordenadas paralelamente propagado sobre uma geodésica tipo tempo, para o qual o escalar de Riemann não diverge, escrevemos os vetores tangente e normal, como¹

$$u^A = \left(\frac{Ez^2}{\left[1 - \frac{2M}{r}\right] l^2}, \frac{z^2}{l^2} \sqrt{E^2 - \frac{l^2}{C^2} \left[1 - \frac{2M}{r}\right]}, 0, 0, \frac{z}{l} \sqrt{\frac{z^2}{C^2} - 1} \right), \quad (4.90)$$

$$n^A = \left(-\frac{Cz}{\left[1 - \frac{2M}{r}\right] l^2}, \sqrt{E^2 - \frac{l^2}{C^2} \left[1 - \frac{2M}{r}\right]}, 0, 0, 0 \right). \quad (4.91)$$

(u^A representa a 5-velocidade e podemos facilmente checar que $\mathbf{n}$ é normal a trajetória, com $u^A \nabla_A n^B = 0$). Demonstramos que algumas das componentes de curvatura deste sistema propagado paralelamente divergem. Por exemplo,

$$P \equiv R_{ABCD} u^A n^B n^C n^D = \frac{1}{l^2} \left[1 - \frac{2Mz^4}{C^2 r^3} \right], \quad (4.92)$$

¹Estamos usando o sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ, z) para os vetores.

diverge, mesmo para as geodésicas cujo comportamento assintótico é dado por (4.89), ou seja, de fato todas as geodésicas apresentam singularidades de curvatura quando encontram o horizonte AdS (embora o escalar de Riemann seja bem comportado para algumas delas, como demonstramos a pouco).

Teremos portanto uma singularidade no horizonte AdS de uma corda negra de Schwarzschild em 5 dimensões.

Em [36] mostrou-se que a configuração de corda ou brana negra esfericamente simétrica é instável para pequenas perturbações com comprimento de onda alto. A configuração *entropicamente favorável* a cordas ou branas negras longas, são vários buracos negros alinhados na direção dos eixos singulares daquelas estruturas. Argumento semelhante é aplicável para uma corda negra em Anti-de Sitter [46], como estamos tratando.

Não devemos ignorar, entretanto o fato de que o espaço-tempo anti-de Sitter age como uma caixa confinante de maneira que os modos com comprimento de onda maior do que l desaparecem. Desta maneira, a instabilidade deve acontecer apenas para certos valores (pequenos) de comprimentos de onda.

Se o raio de curvatura da corda é suficientemente pequeno, então o espaço-tempo da corda negra se comportará como asintoticamente plano aproximadamente. Isto significará uma instabilidade para perturbações da ordem do raio do horizonte de eventos, $2M_* = \frac{2Ml}{z}$ [36]. Para z suficientemente grande, os modos estão nos comprimentos de onda passíveis de acontecer (levando em conta o confinamento do espaço AdS, como falamos acima), ou seja $2M_* \leq l$, de maneira que próximo ao horizonte a estrutura é instável (como já argumentamos). Entretanto, para o limite $\frac{M}{z} \geq 1$, a instabilidade ocorrerá para comprimentos de onda muito maiores do que l , que não podem acontecer devido ao confinamento AdS. Desta maneira podemos assegurar que a corda negra é instável próximo ao horizonte e estável longe dele.

Podemos supor que próximo ao horizonte, a corda negra tem a tendência de se fechar, formando uma estrutura tipo *Charuto Negro* [37], que se estenderá ao infinito ao infinito AdS se não houver 2 branas, mas não se estenderá até o horizonte AdS.

Seguiremos na última seção deste capítulo com a descrição do gráviton no contexto de Randall-Sundrum.

4.4 Atalhos Gravitacionais e Comportamento do Gráviton em RS

Atalhos gravitacionais são caminhos de geodésicas nulas que grávitons e outras partículas que se propaguem por um bulk qualquer seguem, mas que fótons e partículas do Modelo Padrão não podem seguir, devido a algum tipo de confinamento. No caso dos modelos com branas, os campos estão confinados à brana devido à barreira formada pela constante cosmológica, que impede os modos de energia mais baixa de se propagarem no bulk.

Este assunto foi já amplamente estudado por Abdalla *et all* [51, 52, 53] para um bulk com seis dimensões em um Universo em expansão. Em [53] foram calculados atalhos gravitacionais em um Universo plano para uma brana 5-dimensional situada na coordenada extra z em $z = z_0$. O ansatz usado para tal Universo é escrito como

$$ds^2 = -a(z)dt^2 + \frac{z^2}{l^2}d\mathbf{r}^2 + [a(z)]^{-1}dz^2, \quad (4.93)$$

com $d\mathbf{r}^2$ as coordenadas tipo espaço da brana,

$$d\mathbf{r}^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega_{(2)}^2 + (1 - kr^2)dy^2. \quad (4.94)$$

Neste contexto, dois bulks são objetos interessantes de estudo, o bulk *AdS-Schwarzschild* (SAdS), com $a(z) = k + \frac{z^2}{l^2} - \frac{M}{z^3}$ e o bulk *AdS-Reissner-Nordström* (RNAdS), com $a(z) = k + \frac{z^2}{l^2} - \frac{M}{z^3} + \frac{Q^2}{z^6}$. Para o primeiro destes bulks, há a ocorrência de atalhos, com a condição de que

$$-1 < \omega < -\frac{3}{4}, \quad k = 1, \quad (4.95)$$

ou seja, apenas em um Universo fechado (elíptico), com $\omega = \frac{p}{\rho}$ que é a equação de estado do tensor energia-momento que para a brana pode ser escrito da seguinte maneira,

$$T_M^N = \frac{\delta(z - z_0)}{f(a(z), r)} \text{diag}(-\rho, p, p, p, \hat{p}, 0). \quad (4.96)$$

Para o mesmo tipo de bulk 5-dimensional, o limite de existência de atalhos na equação de estado do tensor energia-momento é dado por

$$-1 < \omega < -\frac{2}{3}. \quad (4.97)$$

Nos casos de bulk RNAdS, também acontecem atalhos apenas com a condição de que o Universo seja fechado, e as imposições sobre ω são as mesmas que em

SAdS. Há também imposições sobre a posição em que a brana deve situar-se para a existência de um horizonte nos bulks. Para os dois tipos de bulks temos a imposição de que

$$-\frac{z_0^2}{l^2} < \frac{\omega + \alpha}{\omega + 1}, \quad (4.98)$$

em que $\alpha = \frac{3}{4}$ para o caso 6-dimensional e $\alpha = \frac{2}{3}$ para o caso 5-dimensional. Assim sendo, apenas se estas imposições forem cumpridas, teremos atalhos gravitacionais em mundos brana com bulks tipo Schwarzschild ou Reissner-Nordström. Mais adiante falaremos da busca por atalhos nos Universos de Randall-Sundrum.

Antes de falarmos sobre esta possibilidade contudo, vamos investigar algumas propriedades do comportamento do gráviton em tal cenário. Nos Universos de Randall-Sundrum, o tensor de Riemann tem forma semelhante à do Universo de Friedman-Robertson-Walker,

$$R_{ABCD} = -\frac{1}{l^2} [g_{AB}g_{CD} - g_{AD}g_{BC}]. \quad (4.99)$$

As equações de Einstein para a amplitude de perturbação do gráviton são dadas por [47]

$$\ddot{f} + k^2 f = e^{-2|y|/l} \left[f'' - \frac{4}{l} f' \right], \quad (4.100)$$

Decompomos esta amplitude f em modos de Kaluza-Klein,

$$f(t, y) = \sum_m \phi_m(t) f_m(y), \quad (4.101)$$

com o que as equações se reduzem a

$$\ddot{\phi}_m + (m^2 + k^2) \phi_m = 0, \quad (4.102)$$

$$f_m'' - \frac{4}{l} f_m' + e^{-2y/l} m^2 f_m = 0, \quad (4.103)$$

cujas soluções são

$$\phi_m(t) = A_{m+} e^{i\sqrt{m^2+k^2}t} + A_{m-} e^{-i\sqrt{m^2+k^2}t}, \quad (4.104)$$

$$f_m(y) = e^{2y/l} [B_m J_2(mle^{y/l}) + C_m Y_2(mle^{y/l})]. \quad (4.105)$$

Notamos que o comportamento peculiar desta amplitude do gráviton está relacionada com a liberdade escalar do mesmo, devido a ação da dimensão extra: eis uma das grandes diferenças entre a física em 4 dimensões e a em $D > 4$. De fato o gráviton terá por (4.39) ao todo 5 graus de liberdade, dois vetoriais, dois tensoriais e um escalar. O grau de liberdade escalar usamos para calcular a existência da instabilidade em estruturas como cordas negras. Esta instabilidade como demonstramos é robusta e deve acontecer muito provavelmente para quase todos os tipos de cordas em mais dimensões, visto que a liberdade escalar do gráviton em mais dimensões, não se trata apenas de uma liberdade de gauge tende a gerar uma singularidade de curvatura.

Os modos zero do gráviton, soluções para (4.102-4.103) são dados por

$$\phi_0(t) = A_{0+}e^{ikt} + A_{0-}e^{ikt}, \quad (4.106)$$

$$f_0(y) = B_0 + C_0e^{4y/l}. \quad (4.107)$$

Para demonstrar o comportamento escalar do gráviton como em (4.103) tomamos a equação de Klein-Gordon para o campo escalar,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_A [\sqrt{-g}g^{AB}\partial_B\Psi] = 0, \quad (4.108)$$

adotando um comportamento em que a geometria da brana não depende da coordenada extra (exceto pelo fator de *warp*), tanto quanto a coordenada extra não depende das demais, ou seja, um elemento de linha do tipo

$$ds^2 = e^{-2|w|/l}h_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dw^2, \quad (4.109)$$

com $h_{\mu\nu}$ não dependendo de w , a equação se torna

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu [\sqrt{-g}e^{2|w|/l}h^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi] + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_w [\sqrt{-g}g^{ww}\partial_w\Psi] = 0. \quad (4.110)$$

É fácil verificar que $\sqrt{-g} = e^{-4|w|/l}\sqrt{-h}$. Assim (4.110) fica

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{-4|w|/l}\sqrt{-h}}\partial_\mu [\sqrt{-h}e^{-4|w|/l}e^{2|w|/l}h^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi] + \frac{\partial_w[\sqrt{-h}e^{-4|w|/l}\partial_w\Psi]}{e^{-4|w|/l}\sqrt{-h}} &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-h}}\partial_\mu [\sqrt{-h}h^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi] + \frac{\partial_w[e^{-4|w|/l}\partial_w\Psi]}{e^{-6|w|/l}} &= 0. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Ou seja, os termos à direita e à esquerda da última equação acima são constantes, pois não têm variáveis interdependentes,

$$-\frac{1}{\sqrt{-h}}\partial_\mu [\sqrt{-h}h^{\mu\nu}\partial_\nu\Psi] = \frac{\partial_w[e^{-4|w|/l}\partial_w\Psi]}{e^{-6|w|/l}} = C, \quad (4.112)$$

A equação que envolve w é exatamente igual à equação (4.103), o que demonstra claramente o comportamento escalar de um dos graus de liberdade do gráviton na quinta dimensão.

Na equação (4.112) temos também a presença de modos instáveis nas proximidades do horizonte AdS. Esta instabilidade, como vimos na seção anterior, pode levar a corda negra a fechar sobre seu horizonte, antes que este atinja a fronteira AdS formando outra estrutura (charuto negro).

O espectro de Kaluza-Klein discreto é dado por [47]

$$m_n = \frac{x_n}{l} e^{-L/l}, \quad Y_1(ml)J_1(x_n) = J_1(ml)Y_1(x_n). \quad (4.113)$$

A álgebra da perturbação advém do fato de que quando tratamos o campo gravitacional em dimensões extras, há uma consequência notável: o aumento do número de modos gravitacionais. Em um sistema brana + dimensão extra, com a compactificação $y \rightarrow y + 2\pi nL$, a amplitude do gráviton pode ser expandida em modos oscilatórios,

$$f(x^a, y) = \sum_n e^{iny/L} f_n(x^a). \quad (4.114)$$

A equação de Onda 5-D para estes modos sendo f um campo sem massa é

$$\square_{(5)} f = 0, \quad \square f + \partial_y^2 f = 0, \quad \square f_n = m_n^2 f_n. \quad (4.115)$$

Desta forma com $m_n = n/L$ recupera-se o gráviton 4-dimensional em $n = 0$. É notório o comportamento de uma torre de modos que sugere um efeito considerável na brana quanto à ação destes modos no potencial gravitacional. De fato a correção deste potencial devido à atuação destes modos foi mostrada no capítulo anterior em (3.7) e em (3.63), para dois limites diferentes de distância. Esta discretização do espectro surge da compactificação da dimensão extra.

Inexistência de Atalhos em RS

Para demonstrar a possibilidade de atalhos em RS, devemos calcular as geodésicas nulas para um gráviton em tal Universo. Atalhos são caminhos que o gráviton pode seguir mais curtos do que seguiriam outras partículas com mesma velocidades, mas confinadas à brana como os fótons do modelo padrão. Começaremos verificando a possibilidade de atalhos para a corda-negra tipo Schwarzschild, ou seja, uma estrutura com métrica 5-dimensional como

$$ds^2 = e^{-2|w|/l} \left[\left(\frac{2M}{r} - 1 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] + dw^2. \quad (4.116)$$

A presença da exponencial neste elemento de linha denota a existência de uma constante cosmológica no volume dimensional do espaço-tempo como já citado. Entretanto na membrana 4-dimensional, (que, neste contexto é chamada ‘brana’, e que é de fato o Universo visível e sensível a todos os campos exceto o gravitacional), a constante cosmológica será nula, havendo apenas uma tensão, como também já foi demonstrado.

Associado ao elemento de linha em (4.116), temos um lagrangeano,

$$\mathcal{L} = \frac{e^{-2|w|/l}}{2} \left[\left(\frac{2M}{r} - 1 \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right] + \frac{\dot{w}^2}{2}. \quad (4.117)$$

Este lagrangeano se conserva e admite o mesmo vetor de Killing de Schwarzschild 4-dimensional em relação à translação temporal: a métrica é rígida. Entretanto isto não vale após o horizonte da corda negra. A análise é a mesma que a feita para Schwarzschild no capítulo 2. Para geodésicas nulas, devemos tomar

$$\mathcal{L} = 0. \quad (4.118)$$

Para calcularmos as geodésicas, olhamos para as equações de Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (4.119)$$

A análise será feita para cada equação em separado.

Equação em t

Em t obtem-se a equação menos complexa do ponto de vista matemático, dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} &= 0, \\ \frac{d}{d\lambda} \left[e^{-2|w|/l} \dot{t} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right] &= 0, \end{aligned} \quad (4.120)$$

ou seja, $g_{tt}\dot{t}$ é uma constante. Esta equação pode ser resolvida considerando w positivo. Em tal caso,

$$\dot{t}(\lambda) = \frac{C_3(\lambda + C_1)^2}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (4.121)$$

Equação em ϕ

A equação para ϕ é dada por

$$\frac{d}{d\lambda}[e^{-2|w|/l}r^2\sin^2\theta\dot{\phi}] = 0, \quad (4.122)$$

que, usando o mesmo artifício acima pode ser resolvida em

$$\dot{\phi} = \frac{C_4(\lambda + C_1)^2}{r^2\sin^2\theta}. \quad (4.123)$$

Equação em w

A equação em w segue abaixo,

$$0 = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{w}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial w}$$

$$0 = \ddot{w} - \frac{e^{-2|w|/l}\Theta(w)}{l} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right], \quad (4.124)$$

com $\Theta(w)$ sendo a função sinal, que cai com a derivada de uma função módulo da exponencial (o trabalho não será feito com ela, pois como dito anteriormente, se assume que o Universo tem uma compactificação tipo Orbifold- Z_2 na coordenada extra, de maneira circular, importante portanto apenas com a parte positiva das equações). Entretanto $\mathcal{L} = 0$, e

$$\left[-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 \right] = -e^{2|w|/l}\dot{w}^2. \quad (4.125)$$

As geodésicas podem ser obtidas usando (4.125) em (4.124),

$$\ddot{w} + \frac{\dot{w}^2}{l} = 0, \quad (4.126)$$

e esta equação é resolvida analiticamente redefinindo $\dot{w}(\lambda) = F(\lambda)$,

$$\dot{F} + \frac{F^2}{l} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dF}{F^2} = -\frac{d\lambda}{l},$$

$$F(\lambda) = \frac{l}{\lambda + C_1}. \quad (4.127)$$

Aqui C_1 representa uma constante de integração e λ representa o parâmetro da geodésica. Disto é possível achar w ,

$$w(\lambda) = \int F(\lambda) d\lambda + C_2 = \ln(\lambda + C_1)^l + C_2, \quad (4.128)$$

C_2 é uma constante de integração em λ .

Há outra solução ainda permitida pelas equações em (4.124)

$$\dot{w}(\lambda) = 0. \quad (4.129)$$

Da primeira equação geodésica em (4.128) infere-se que, uma vez que o gráviton escapa da brana, não voltará mais, pois λ representando algum parâmetro afim tipo tempo, não pode possuir nenhum ponto de retorno a medida que passa (ou um ponto de derivada nula). Tal constatação pode ser verificada também pela equação anterior, visto que a equação $\dot{w} = F(\lambda) = 0$ só é satisfeita para $\lambda \rightarrow \pm\infty$. Isto quer dizer que não há atalhos gravitacionais possíveis nos Universos de Randall-Sundrum nas proximidades de uma corda negra de Schwarzschild (a não ser para curvas fechadas de tempo).

A segunda equação representa a solução em que o gráviton permanece na brana (ou em alguma outra hipersuperfície com $w = \text{constante}$) confinado, o que podemos assumir como ‘instável’, no sentido de que qualquer perturbação pequena em torno de sua posição nesta hipersuperfície fará com que tome uma geodésica como em (4.128)

Equação em θ

Em θ as equações se tornam um pouco mais complexas, devido ao fato de haver dependência deste ângulo com a métrica na brana

$$-\frac{2\dot{w}\Theta(w)r^2\dot{\theta}}{l} + 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} - \sin\theta \cos\theta \dot{\phi}^2 r^2 = 0, \quad (4.130)$$

que simplificado usando as equações em ϕ e w fica

$$-\frac{2\dot{w}}{\lambda + C_1} + \frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} + \ddot{\theta} - \frac{\cos\theta C_4^2(\lambda + C_1)^4}{r^4 \sin^3\theta} = 0. \quad (4.131)$$

A equação resultante é complexa e não temos interesse em resolvê-la visto que $\theta = \text{cte}$ sempre pode ser assumido mudando-se apenas o sistema de referências (como podemos fazer em Schwarzschild 4-dimensional).

Equação em r

Por fim, há a equação também para r que pode ser calculada como

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{e^{-2|w|/l} \dot{r}}{1 - \frac{2M}{r}} \right] = \\ & = \frac{e^{-2|w|/l}}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Entretanto, levando em consideração que $\mathcal{L} = 0$, a parte à direita da equação depende apenas de w , portanto é nula, e a geodésica em r fica

$$\frac{e^{-2|w|/l} \dot{r}}{1 - \frac{2M}{r}} = C_5. \quad (4.133)$$

Usando técnicas de integração, finalmente obtemos para r

$$r + 2M \ln(r - 2M) + C_6 = -\frac{C_5 e^{-C_2}}{\lambda + C_1}. \quad (4.134)$$

O sistema geodésico da corda negra está completamente resolvido para geodésicas nulas exceto pela equação em θ . A característica peculiar é a da inexistência de atalhos gravitacionais como demonstramos através da equação em w .

A ausência de atalhos pode ser generalizada: tomando o elemento de linha como

$$ds^2 = e^{-2|y|/l} \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (4.135)$$

se $\gamma_{\mu\nu}$ não depender da coordenada extra, a equação geodésica em (4.128), será a mesma independentemente de quem este $\gamma_{\mu\nu}$ é, ou seja, para quaisquer tipos de métricas em RS-I, não teremos atalhos gravitacionais possíveis.

Diferentemente dos Universos explorados em [52, 53], não há imposições sobre o modelo que levem à existência de atalhos em RS. Em bulks com singularidades, de outra maneira, algumas imposições sobre a posição da brana e sobre a equação de estado do tensor energia-momento dela, podem garantir um “resfriamento” do Universo visível, pelo escape de grávitons para o bulk. Neste sentido, as restrições expostas na seção 2 dos capítulo anterior (modelo ADD) devem ser respeitadas.

Capítulo 5

Apontamentos Finais

Ao longo deste trabalho descrevemos algumas questões estudadas pela relatividade geral no decorrer do último século. Problemas como extensão analítica de uma métrica esfericamente simétrica, geodésicas e perturbações relacionadas a esta métrica são atualmente bem compreendidos e aceitos na comunidade científica.

Uma das grandes dificuldades encontradas pelos relativistas nas últimas décadas é a quantização da teoria gravitacional, que levaria a uma teoria de gravidade quântica. Existem atualmente várias tentativas neste sentido, como teoria de cordas, gravidade quântica em loops (e outras) todas ainda incompletas e talvez longe de estabelecer uma teoria sólida e bem aceita no meio científico. Neste sentido, os avanços da termodinâmica de buracos negros nos anos 70 constitui um esforço respeitável por relacionar grandezas tipicamente envolvidas em mecânica estatística e por conseguinte em mecânica quântica com grandezas da física clássica.

Outro importante desenvolvimento na busca de uma teoria unificada foram as teorias de branas propostas no final da década passada com intuito de resolver o problema da hierarquia entre as escalas fraca e de gravitação. Dentre estas teorias, podemos destacar os modelos de Randall-Sundrum que com idéias bastante simples e elegantes posiciona tal questão como equivalente à presença de um fator de deformação do Universo 5-dimensional.

O fato de nosso Universo ser ou não uma membrana confinante de campos de matérias poderá ser testado em alguns anos na próxima família de aceleradores construídos. Se de fato vivemos em um Universo com mais do que 4 dimensões, esperamos a formação de mini-buracos negros nos aceleradores de partículas, como atestamos no capítulo 3, o que pode representar um considerável avanço na busca por testes que validem a termodinâmica dos buracos negros. A validação das propriedades termodinâmicas de buracos negros não terá embasamento experimental em buracos negros astrofísicos para os

quais a radiação Hawking tem um espectro de potências muito pequeno. Existem análogos a tais propriedades em física da matéria condensada, através de o que chamamos buracos sônicos, que produzem exatamente o mesmo efeito que a radiação Hawking em simulações computacionais.

Nos Universos de Randall-Sundrum entretanto, um dos grandes problemas é a descrição de estruturas singulares estáveis como temos em um Universo 4-dimensional. Por exemplo, a solução mais simples que gera um buraco negro de Schwarzschild na brana, a da corda negra de Schwarzschild, tem um horizonte AdS irregular, com curvatura tendendo ao infinito. De fato como vimos na seção 3 do capítulo 4, muito provavelmente esta estrutura evolua para um charuto negro, fechando o horizonte de eventos antes de encontrar o horizonte anti-de Sitter.

Para obtermos estruturas singulares em Randall-Sundrum, podemos adotar como prescrição genérica substituir a métrica de Minkowski em 4 dimensões por qualquer métrica com escalar de Ricci nulo. Tal elemento de linha será sempre solução das equações de Einstein em 5 dimensões. A questão de se estas estruturas são instáveis ou estáveis a pequenas perturbação entretanto revela um comportamento surpreendente: existem modos de perturbação lineares instáveis para a corda negra de Schwarzschild independentemente de se o Universo considerado possui ou não constante cosmológica. Estes modos começam a acontecer em geral quando o comprimento de onda da perturbação se aproxima do tamanho do horizonte de eventos. Entretanto, Universos com constante cosmológica como vimos confinam os modos de maneira a evitar eventualmente que modos instáveis possam ser produzidos na perturbação.

No estudo das cordas negras um ponto fundamental é a descrição da evolução da perturbação e do estado final da corda. Demonstramos na seção (4.2) que ao contrário do que prescreveram Gregory e Laflamme em seu trabalho [36], cordas negras não tendem a se particionar em uma linha de buracos negros, mesmo a entropia deste sistema sendo maior do que o da corda. Isto porque o tempo de contração do horizonte tende ao infinito. Assim, uma análise da perturbação com mais cuidado é necessária em vias de determinar a evolução da corda a um estado final estável.

Outro ponto fundamental explorado nos contextos de mundo branas, é a existência de atalhos gravitacionais no bulk, inacessíveis as partículas do modelo padrão. Demonstramos no capítulo precedente que independentemente do tipo de extensão que façamos no modelo de Randall-Sundrum no sentido de englobar estruturas singulares (como a corda negra de Schwarzschild, ou mesmo de Kerr), não teremos atalhos gravitacionais possíveis para a brana. Isto significa que uma vez que o gráviton deixa a brana, não mais voltará a esta depois de um certo tempo. Entretanto, a propagação de grávitons pelo

bulk de tais modelos está restrito a uma equação de perturbação gravitacional semelhante à que usamos na seção (3.3), bem como às próprias restrições do modelo (3.2).

Apêndice A

Horizonte de Eventos em Schwarzschild.

Um Horizonte de Eventos é uma superfície nula, que divide geodésicas que podem se afastar da singularidade, de geodésicas que não podem. Formalmente podemos defini-lo como [1] a fronteira do passado causal do infinito assintótico, $H \equiv \dot{J}^-(I^+)$. Esta definição é na verdade uma versão matemática da constatação que o horizonte é uma superfície que divide geodésicas nulas: apenas pode haver um fluxo de geodésicas nulas (e mesmo tipo tempo) entrando nesta superfície.

Abrindo a notação de H , de acordo com [1] temos

$$\dot{J}^-(I^+) \equiv \dot{J}^-(I^+, \mu) = Fe[J^-(I^+, \mu)] \cap Fe[\mu - J^-(I^+, \mu)], \quad (\text{A.1})$$

em que I^+ representa o infinito assintótico onde ‘terminam’ as geodésicas nulas que não caem no buraco negro, μ a variedade que estamos tratando, $Fe[P]$ o fechamento do grupo P^1 e $J^-(I^+, \mu)$ o passado causal de I^+ com relação a μ .

Devemos entender o significado destas expressões com o exemplo de Schwarzschild na seqüência. Primeiramente devemos situar o que representa $J^-(I^+, \mu)$. Trata-se pois da união de $I^+ \cap \mu$ com o grupo de todos os pontos em μ , que podem ser alcançados por uma curva passado-diretiva tipo tempo ou tipo luz de I^+ a μ . Representando no caso de Schwarzschild I^+ a região externa à esfera $r = 2M$, teremos que $I^+ \cap \mu = I^+$. Além disso apenas os pontos que estão fora do círculo $r = 2M$, podem alcançar esta região através de uma curva tipo tempo ou luz, passado diretiva. Temos então,

$$J^-(I^+, \mu) = I^+. \quad (\text{A.2})$$

¹O fechamento de um grupo é dado pela intersecção de todos os abertos que contêm este grupo. Apenas no caso de o grupo ser um fechado, seu fechamento será idêntico ao próprio grupo.

Uma ilustração de I^+ segue na figura A.1.

Figura A.1: Região I^+ para um buraco negro de Schwarzschild (linhas inclinadas, sobretraçadas). Esta região não inclui a circunferência $r = 2M$. μ representa a variedade.

O próximo passo é descobrir quem representa $Fe[J^-(I^+, \mu)]$. A intersecção de todos os fechados que contêm I^+ é igual ao próprio I^+ mais a circunferência $r = 2M$, região a que chamaremos K^+ : $Fe[J^-(I^+, \mu)] = I^+ + (r = 2M) \equiv K^+$. Segue na figura A.2 uma ilustração.

Precisamos agora encontrar quem são respectivamente $\mu - J^-(I^+, \mu)$ e em seguida $Fe[\mu - J^-(I^+, \mu)]$. Sendo $J^-(I^+, \mu)$ um aberto, $\mu - J^-(I^+, \mu)$ será um fechado, de maneira que $\mu - J^-(I^+, \mu) = Fe[\mu - J^-(I^+, \mu)]$. Entretanto $\mu - J^-(I^+, \mu) \equiv L^+$ representa a região interna à circunferência $r = 2M$ incluindo esta circunferência, como podemos ver em A.3.

Por fim o horizonte é dado pois pela intersecção das linhas inclinadas das figuras A.2 e A.3, a região $K^+ \cap L^+$, ou seja, apenas a superfície $r = 2M$. Assim sendo, mostramos que para Schwarzschild, a definição de H como exposta acima nos leva a $H = (r = 2M)$.

Figura A.2: Região K^+ para um buraco negro de Schwarzschild (linhas inclinadas, sobretraçadas).

Figura A.3: Região L^+ para um buraco negro de Schwarzschild (linhas inclinadas, sobretraçadas).

Referências

- [1] Hawking, S. W., Ellis, G. F. R., *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press (1973);
- [2] Chandrasekhar, S., On the potencial barriers surrounding the Schwarzschild Black Holes, *Selected papers of S. Chandrasekhar, The Mathematical Theory of Black Holes and of Colliding Plane Waves*, The University of Chicago Press (1991);
- [3] Frolov, V. P., Novikov, I. D., *Black Hole Physics*, Kluwer Academic Publishers (1998);
- [4] Chandrasekhar, S., *The Mathematical Theory of Black Holes*, Cambridge University Press (1973);
- [5] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, Harcourt Academic Press, Fifth Edition (2001);
- [6] Regge, T., Wheeler, J. A., Stability of a Schwarzschild Singularity, *Phys. Rev.* **108**, 1063-1069 (1957);
- [7] Peters, P. C., Perturbations in the Schwarzschild Metric;
- [8] Edelman, L. A., Vishveshwara, C. V., Differential Equations for Perturbations on the Schwarzschild Metric, *Phys. Rev.* **D1**, 3514-3517 (1970);
- [9] Wald, R. M., *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984);
- [10] Myers, R. C., Perry, M. J., Black Holes in Higher Dimensional Space-times, *Annals Phys.* **172**, 304 (1986);

- [11] Bardeen, J. M., Carter, B., Hawking, S. W., The Four Laws of Black Hole Mechanics, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161-170 (1973);
- [12] Hawking, S. W., Black Hole and Thermodynamics, *Phys. Rev.* **D13**, 191-197 (1976);
- [13] Gibbons, G. W., Hawking, S. W., Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity, *Phys. Rev.* **D15**, 2752-2756 (1977);
- [14] Ross, S., Black hole thermodynamics, hep-th/0502195;
- [15] Wald, R. M., Black Hole Entropy in the Noether Charge, *Phys. Rev.* **D48**, 3427-3431 (1993);
- [16] Iyer, V., Wald, R. M., A comparison of Noether charge and Euclidean methods for computing the entropy of stationary black holes, *Phys. Rev.* **D52**, 4430-4439 (1995);
- [17] Unruh, W. G., Notes on black hole evaporation, *Phys. Rev.* **D14**, 870 (1976);
- [18] Hamed, A. N., Dimopoulos S., Dvali G., The Hierarchy problem and new dimensions at a milimeter, *Phys. Lett.* **B429**, 263-272 (1998);
- [19] Antoniadis, I., Hamed, A. N., Dimopoulos S., Dvali G., New dimensions at a milimeter to a Fermi and Superstring at a TeV, *Phys. Lett.* **B436**, 257-263 (1998);
- [20] Randall, L., Sundrum, R., A large mass Hierarchy from a small extra dimension, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3370-3373 (1999);
- [21] Randall, L., Sundrum, R., An alternative to compactification, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 4690-4693 (1999);
- [22] Zwiebach, B., *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press (2004);
- [23] Uehara, Y., A Mini review of constraints on extra dimensions, *Mod. Phys. Lett.* **A17**, 1551-1558 (2002);

- [24] Kanti, P., Black holes in theories with large extra dimensions: a review, *Int. J. Mod. Phys. A* **19**, 4899-4951 (2004);
- [25] D'Eath, P. D., Gravitational radiation in high speed black hole collisions. I. Perturbation of the axisymmetric collision, *Phys. Rev.* **D46**, 658-674 (1992); D'Eath, P. D., Gravitational radiation in high speed black hole collisions. II. Reduction to two independent variables and calculation of the second-order news function, *Phys. Rev.* **D46**, 675-693 (1992); D'Eath, P. D., Gravitational radiation in high speed black hole collisions. III. Results and Conclusions, *Phys. Rev.* **D46**, 694-701 (1992);
- [26] Eardley, D. M., Giddings, S. B., Classical black hole production in high-energy collisions, *Phys. Rev.* **D66**, 044011 (2002);
- [27] Yoshino H., Nambu, Y., High-energy headon collisions of particles and hoop conjecture, *Phys. Rev.* **D66**, 065004 (2002);
- [28] Dimopoulos, S., Landsberg, G., Black holes at the LHC, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 161602 (2001);
- [29] Hawking, S. W., Particle creation by black holes, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199-220 (1975);
- [30] Gubser, S. S., Klebanov, I. R., Tseytlin, A. A., String Theory and classical absorption by three-branes, *Nucl. Phys.* **B499**, 217-240 (1997);
- [31] Giddings, S. B., Thomas, S. D., High energy colliders as black hole factories: The end of short distance physics, *Phys. Rev.* **D65**, 0560010 (2002);
- [32] Giddings, S. B., Black hole production in TeV-scale and the future of high energy physics, *eConf C*, 010630 (2001);
- [33] Kanti, P., March-Russell, J., Calculable corrections to brane black hole decay. 1. The scalar case, *Phys. Rev.* **D66**, 024023 (2002);
- [34] Harris, C. M., Kanti, P., Hawking radiation from a (4+n)-dimensional black hole: Exact results for the Schwarzschild phase, *JHEP*, 0310:014 (2003);
- [35] Kol, B., The Phase Transition Between Caged Black Holes and Black Strings: A Review, *Phys. Rept.* **422**, 119-165 (2006);

- [36] Gregory, R., Laflamme, R., Black Strings and P-Branes are Unstable, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 2837-2840 (1993);
- [37] Chamblin, A., Hawking, S. W., Reall, H. S., Brane World Black Holes, *Phys. Rev.* **D61**, 065007 (2000);
- [38] Horowitz, G. T., Maeda, K., Fate of Black String Instability, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 131301 (2001);
- [39] Horowitz, G. T., Playing with Black Strings, *Cambridge 2002, The future of theoretical physics and cosmology*, 310-329, hep-th/0205069;
- [40] Friedrich, H., Racz, I., Wald, R. M., On the Rigidity Theorem for Space-times with a Stationary Event Horizon or a Compact Cauchy Horizon, *Commun. Math. Phys.* **204**, 691-707 (1999);
- [41] Bizoń, P., Chmaj, T., Schmidt, B. G., Critical Behavior in Vacuum Gravitational Collapse in $4 + 1$ Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 071102 (2005);
- [42] Choptuik, M. W., Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 9-12 (1993);
- [43] Christodoulou, D., A Mathematical Theory of Gravitational Collapse, *Commun. Math. Phys.* **109**, 613-647 (1987);
- [44] Christodoulou, D., The Problem of a Selfgravitating Scalar Field, *Commun. Math. Phys.* **105**, 337-361 (1986);
- [45] Brecher, D., Perry, M. J., Ricci Flat Branes, *Nucl. Phys.* **B566**, 151-172 (2000);
- [46] Gregory, R., Black String Instabilities in Anti-de Sitter Spacetime, *Class. Quant. Grav.* **17**, L125-L132 (2000);
- [47] Maartens, R., Brane-World Gravity, *Living. Rev. Rel.* **7**, 7 (2004);
- [48] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons (1972);

- [49] D’Inverno, R., *Introducing Einstein’s Relativity*, Oxford UK (1992);
- [50] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., *Gravitation* (1972);
- [51] Abdalla, E., Cuadros-Melgar, B., Feng, C. S., Wang, B., The Shortest cut in brane cosmology, *Lect. Notes Phys.* **617**, 261-276 (2003);
- [52] Casali, A. G., Abdalla, E., Wang, B., Brane world cosmological perturbations *Phys. Rev.* **D70**, 043542 (2004);
- [53] Abdalla, E., Casali, A., Cuadros-Melgar, B., Shortcuts for Graviton Propagation in a Six Dimensional Brane World Model, *Nucl. Phys.* **B644**, 201-222 (2002).