UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Teoria Cinética Não Extensiva e Transporte Colisional em Plasmas Magnetizados

Diego Sales de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Magnus Osório Galvão

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de
Física para a obtenção do título de Doutor em
Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Prof. Dr. Ricardo Magnus Osório Galvão (IFUSP/INPE)

Prof. Dr. José Helder Facundo Severo (IFUSP)

Prof. Dr. Artour Elfimov (IFUSP)

Prof. Dr. Francisco Eugênio Mendonça da Silveira (UFABC)

Prof. Dr. Evaldo Mendonça Fleury Curado (CBPF)

São Paulo
2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Oliveira, Diego Sales de

Teoria cinética não-extensiva e transporte colisional em plasmas magnetizados. São Paulo, 2018.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Magnus Osório Galvão.

Área de Concentração: Física de Plasmas.

Departamento: Física Aplicada.

Unitermos: 1. Física teórica; 2. Teoria cinética dos gases; 3. Física de plasmas; 4. Tokamaks; 5. Vento solar.

USP/IF/SBI-071/2018

em memória de minha mãe...

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Ricardo M. O. Galvão, pela orientação, comprometimento e apoio durante esta jornada. Sem seus conselhos e ajuda, esse trabalho nunca poderia ter sido concluído.

Também agradeço à todos os colegas e técnicos do Laboratório de Física de Plasma, sempre muito solícitos; as conversas com Alexandre Oliveira, o operador do TCABR, sobre as condições de operação da máquina; ao Wanderley, o técnico responsável pela base de dados, no auxílio para o uso da dados experimentais obtidos no TCABR; ao Gilson Ronchi e Andreas Baqueiro durante nossos estágios de perfeição pedagógicos; aos Profs. Drs. Hélder Severo e Zwinglio Guimarães pelas valiosas lições pedagógicas durante esses estágios; ao Dr. Gustavo Canal, pós-graduando do Laboratório de Física de Plasmas, e nossa conversas sobre os fenômenos de transporte em plasmas. Ao Dr. Vinícius Duarte pela ajuda na revisão do texto.

Ao Gustavo Grenfell e ao prof. Dr. Ivan Nascimento pelo convite e confiança depositados em mim quando trabalhamos juntos. Sem a ajuda de Gustavo, a análise dos dados experimentais seria muito mais difícil e custosa. A ajuda do prof. Ivan na revisão do texto foi de grande valia.

Ao Prof. Dr. Constantino Tsallis por me receber e discutir os fundamentos de nosso modelo; seus conselhos foram valiosos.

À minha família, em especial, ao meu pai, Luis, e minha esposa, Amanda, pelo fundamental apoio e compreensão nas horas mais difíceis, sem os quais esse trabalho não seria possível.

As valiosas sugestões e questionamentos dos membros da banca que foram incorporados na versão final do texto.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro cedido no benefício 157898/2014-8 e ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP) pela disponibilização das instalações utilizadas durante este trabalho.

Resumo

Apesar dos avanços na última metade de século na teoria de transporte em Física de Plasmas, muitos de seus aspectos ainda são pouco compreendidos. Grande parte dessa limitação se deve à carência de modelos de primeiros princípios minimamente capazes de reproduzir os resultados experimentais. De fato, sem o embasamento em hipóteses fundamentais, os modelos devem se restringir à descrição do comportamento observado nos diferentes regimes de transporte no plasma, sem necessariamente especificar por que ou quais são os mecanismos envolvidos; até mesmo a identificação dos elementos envolvidos no transporte, por exemplo, se partículas ou células convectivas, é prejudicada.

Uma abordagem que vem ganhando destaque na comunidade de Física de Plasmas ao longo dos anos é a estatística não-extensiva. Em particular, o interesse na teoria de Tsallis está na sua capacidade de descrever sistemas distantes do equilíbrio termodinâmico, uma característica comum à maioria dos plasmas de laboratório e astrofísicos. De fato, nessas circunstâncias, é sabido que as funções de distribuição das partículas são distantes das distribuições Maxwellianas, com longas-caudas, especialmente para os elétrons.

A capacidade da teoria de Tsallis em descrever fenômenos da Física de Plasmas é retratada nas suas diversas aplicações encontradas na literatura, por exemplo, o transporte anômalo, oscilações eletrostáticas, ventos solares, plasmas empoeirados, onde é sabido que as previsões dadas pela estatística de Maxwell-Boltzmann não são capazes de descrever corretamente os resultados experimentais.

A proposta desta tese de doutoramento é utilizar a estatística não-extensiva para determinar o transporte colisional em plasmas intensamente magnetizados. O desenvolvimento completo do modelo de transporte no contexto não-extensivo é estabelecido rigorosamente: partindo da definição da entropia de Tsallis e da hipótese das interações fracas (a condição do transporte colisional), somos capazes de deduzir as equações de fluidos utilizando apenas métodos estatísticos genéricos, e sem hipóteses adicionais. Nesse percurso, apresentamos, sempre de maneira consistente com a estatística não-extensiva, a definição da temperatura; a dedução da equação cinética com o operador colisional para plasmas; a generalização do método utilizado por Braginskii para determinar as soluções aproximadas da equação cinética; e o cálculo dos coeficientes de transporte. Por fim, também apresentamos a aplicação de nosso modelo no transporte de calor em ventos solares e no pulso frio em plasmas de laboratório.

Abstract

Despite the advances in the last half century in the plasma transport theory, many aspects of such phenomena remain poorly understood. Most of this limitation is due to the lack of first principles models capable of reproducing experimental observations. In fact, without a fundamental hypothesis, the models are restricted to describing the behavior of the observed plasma transport in different regimes, without specifying why or which mechanisms take part in the process; even the determination of the elements involved in the transport, for instance, whether particles or convective cells, is impaired.

One approach that has been attracting attention in Plasma Physics community over the years is the non-extensive statistics. In particular, the interest in the Tsallis's theory lies in its ability to describe systems far from thermodynamic equilibrium, a common feature in most laboratory and astrophysical plasmas.

The capability of the non-extensive statistics in describing phenomena of Plasma Physics is portrayed in various applications, for example, the anomalous transport, electrostatic oscillations, solar winds, dusty plasmas, where it is known that the predictions given by Maxwell-Boltzmann statistics cannot describe the experimental results. Indeed, under such cases, it is well known that the particle distribution functions are quite distant from Maxwellian distributions, with long tails, especially for electrons.

The purpose of this doctoral thesis is to use the non-extensive statistics in order to obtain a model for the collisional transport in strongly magnetized plasmas. The complete development of the model in the non-extensive context is strictly established; starting with the definition of the Tsallis entropy and the weak interactions hypothesis (the collisional transport condition), we are able to derive the fluid equations using only generic statistical methods, without additional hypotheses. For such task, we present, consistently with non-extensive statistics, the definition of temperature; the deduction of the kinetic equation with the collision operator for plasmas, which are also appropriated for the determination of the fluid equations; the generalization of the method used by Braginskii to approximate the solution of the kinetic equation for electrons; and the calculation of electron transport coefficients. Lastly, we present the application of our model in the heat transport in the solar winds and in the phenomena of the cold pulse in laboratory plasmas.

Lista de Figuras

1.1	Perfil de Densidade do Estado de Metaequilíbrio	20
1.2	Raio-X Duro e C_{III}	21
1.3	Função de Atraso e Correlação de Longa Distância	22
2.1	q-Funções de Distribuições	35
3.1	Fricção Generalizada de Ordem Zero	50
3.2	Representação das Direções do Campo Magnético	57
3.3	Fator de Transformação	63
4.1	Fricção Paralela Total e Ajuste Polinômial	74
4.2	Fricção Paralela Ajustada	75
4.3	Fluxo de Calor Paralelo devido a Velocidade Relativa e Ajuste Polinomial . .	76
4.4	Fluxo de Calor Diamagnético devido a Velocidade Relativa	77
4.5	Condutividade Térmica Paralela e Ajuste Polinomial	79
4.6	Condutividade Térmica Perpendicular e Ajuste Polinomial	80
4.7	Comportamento da razão $(\kappa_{\perp}/\kappa_{\parallel})/(\kappa_{\perp}/\kappa_{\parallel})_{Brag}$	82
4.8	Condutividade Térmica Diamagnética	82
4.9	Coeficientes de Transporte Normalizados	84
5.1	Filtro de Velocidades e $ e\mathbf{E}/ \nabla T $	88
5.2	Constante de Hollweg	89
5.3	Pressão, Difusividade e Velocidade Convectiva	93
5.4	Simulação do Sinal do ECE com Elétrons Supratérmicos	94
A.1	Colisão entre Partículas Carregadas	99
D.1	Curvas de Nível de $M_{\ell k}$	122
D.2	Histogramas da Integral do M_{23}	123

LISTA DE FIGURAS

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros do ajustes nas Eqs.(4.33)	84
5.1	Estimativa do parâmetro q	95

Lista de Símbolos

Γ	fluxo associado
D	coeficiente de transporte
∇	gradiente no espaço euclidiano
φ	grandeza associada ao fluxo Γ
ℓ	livre caminho médio
τ	tempo de relaxação
r_L	raio de Larmor
v_T	velocidade térmica
D_{Bohm}	coeficiente de difusão de Bohm
κ'	parâmetro das funções de distribuição κ
Γ	função gama
q	parâmetro da entropia/estatística de Tsallis
s_q	entropia de Tsallis
$\ln_q(x)$	função q-logaritmo
P_i	probabilidade normalizada do microestado
θ_i	operador do microestado i
O_q	q-valor médio

F_i	função de distribuição de escolta do microestado i
s_q	densidade de entropia
P	função de distribuição auxiliar
n	densidade
θ	operador da função de distribuição P
f	função de distribuição de escolta (função de distribuição)
u_q	densidade de energia interna
ϕ	potencial do plasma
$\mathbf{V}$	velocidade média
L_q	lagrangiana da entropia
α' e β'	multiplicadores de Lagrange
J	funcional da lagrangiana L_q
α_q	fator de normalização
β_q	parâmetro auxiliar do inverso da temperatura
A_q	parâmetro de normalização
f_0	função de distribuição do equilíbrio
β_F	inverso da temperatura física
T_F	temperatura física
ρ	parâmetro de correlação da energia
T_q	temperatura auxiliar
T_L	temperatura lagrangiana
T	temperatura de equilíbrio (temperatura cinética)

Π	probabilidade de transição
Tr	taxa de transição
$K_{\mu\nu}$	tensor de Landau
C_{ab}	operador colisional para as partículas a e b
$\mathbf{F}_a$	força sobre a partícula a
$\mathbf{v}'_a$	velocidade peculiar da partícula a
$\mathbf{E}'_a$	campo elétrico atuando na partícula a no referencial do plasma
n_a, p_a e T_a	respectivamente, densidade e pressão parciais e temperatura da partícula a
$\Pi_{a\mu\nu}$	tensor de viscosidade
$\mathbf{q}_a$	fluxo de calor
$\mathbf{R}_a$	fricção
Q_a	calor trocado entre as partículas
λ	logaritmo de Coulomb
$U_{\mu\nu}$	tensor de velocidades relativas
ω_{ei}	frequência de colisões elétron-íon
η_0	resistividade de ordem zero
$L_k^j(x^2; q)$	polinômio de Jacobi de grau k
T_L	temperatura lagrangiana
κ	condutividade térmica
η	resistividade
$\parallel$	direção paralela ao campo magnético $\mathbf{B}$
$\perp$	direção perpendicular ao campo magnético $\mathbf{B}$

$\wedge$	direção binormal ao campo magnético $\mathbf{B}$
Ω	frequência de giração dos elétrons
α	coeficiente termoelétrico
$\Delta = \omega\tau$	fator adimensional do campo magnético
$c_{\ell k}^{ab}$	integral do operador colisional das partículas $a - b$
$c_{\ell k}^{\ell}$	integral do termo magnético
c_{ℓ}	integral do termo de fonte
α_H	constante de Hollweg

Sumário

1	Introdução	15
2	Teoria Cinética não-Extensiva	25
2.1	Formulação Contínua	25
2.2	Função de Distribuição do Equilíbrio	27
2.2.1	Função de Distribuição do Equilíbrio	28
2.2.2	Definição da Temperatura Termodinâmica	31
2.2.3	Aproximação de Interações Fracas	34
2.3	q-Operador de Landau	35
3	Equações de Fluidos	43
3.1	Equações Básicas do Transporte Colisional	43
3.1.1	Equações de Fluidos	44
3.2	Solução da Equação Cinética	46
3.2.1	Colisões elétron-íon	46
3.2.2	Fricção de Ordem Zero	48
3.3	Método de Chapman-Enskog	49
3.3.1	Solução de Ordem Zero	51
3.3.2	Solução de Primeira Ordem	52
3.4	Soluções das Equações Cinéticas Independentes	64
4	Coefficientes de Transporte	71
4.1	Fluxos Condutivos Induzidos por $\mathbf{U}$	71
4.1.1	Fricção Total	73
4.1.2	Fluxo de Calor	75
4.2	Fluxos Convectivos Induzidos por Gradientes	77
4.2.1	Condutividade Térmica	79
5	Comparação com Modelos Empíricos	85
5.1	Transporte de Calor em Plasmas Astrofísicos	85
5.2	Pulso Frio em Tokamaks	90
6	Conclusões e Perspectivas	97
A	Tensor de Landau	99

B	Polinômios de Jacobi	103
C	Propriedades dos Operadores Colisionais	105
C.1	Operador Colisional Linearizado	105
C.1.1	Colisões Elétron-Elétron	105
C.1.2	Colisões Elétron-Íon	107
C.1.3	Propriedade Auto-Adjunta de $I_{ee}(\psi)$	107
C.1.4	Propriedade Auto-Adjunta de $I_{ei}(\psi)$	108
D	Integral de Colisões Elétron-Elétron	109
D.1	Desenvolvimento Analítico de I_{ee}	109
D.1.1	Verificação dos Limites de Integração	115
D.2	Método de Monte Carlo	120
D.2.1	Integração dos Elementos de Matriz $M_{\ell k}$ e $N_{\ell k}$	122

Capítulo 1

Introdução

O Transporte Colisional em Plasmas

O interesse nos fenômenos de transporte em física de plasmas vem crescendo desde o início dos programas de fusão nuclear e exploração espacial em meados do século passado. Apesar do grande esforço teórico e experimental por mais de seis décadas, o transporte de partículas, momento e energia nos plasmas tem eludido qualquer explicação a partir de primeiros princípios. Um dos primeiros modelos de transporte em plasma magnetizados foi desenvolvido por Braginskii [1, 2] e posteriormente aprimorado por Balescu e Lenard [3], ao introduzir explicitamente as forças de longo alcance entre as partículas no termo colisional. Nesse modelo, o mecanismo básico de transporte são colisões binárias, a descrição do plasma é estatística e feita através da teoria cinética de Maxwell-Boltzmann. Como no plasmas as partículas possuem carga elétrica, a integral de colisões da equação de Boltzmann é substituída pelo operador de Landau, o termo colisional da equação cinética consistente com a interação de Coulomb entre as partículas durante a colisão [4]. Assim como na teoria clássica do transporte irreversível e nos modelos empíricos, os fluxos condutivos determinados pelo modelo de Braginskii seguem a forma padrão [5], ou seja,

$$\mathbf{\Gamma} = -D\nabla\varphi, \quad (1.1)$$

onde φ é a grandeza associada ao fluxo $\mathbf{\Gamma}$ e D o coeficiente de transporte. Embora a expressão correta para D dependa da solução da equação cinética e, portanto, do modelo físico adotado, sua forma característica é a mesma da difusão Browniana,

$$D \propto \frac{\ell^2}{\tau}, \quad (1.2)$$

onde ℓ e τ são, respectivamente, o comprimento e o tempo característicos do processo difusivo.

Em plasmas intensamente magnetizados, os comprimentos característicos do transporte nas direções paralela e perpendicular às linhas de força do campo magnético são diferentes. Na direção paralela à linha de força, onde não há influência do campo magnético, o comprimento característico é o livre caminho médio, $\ell \sim \lambda_{\text{mfp}}$, a distância típica entre duas colisões sucessivas. Já na direção perpendicular, o comprimento característico é da ordem do raio de Larmor $r_L = mv_T/(|e_a|B)$, onde m , e_a e $v_T = \sqrt{2T/m}$ são, respectivamente, a massa, a carga, a velocidade térmica dessa partícula e B o campo magnético.

Portanto, em plasmas de confinamento magnético, o transporte clássico indica que $D \propto 1/B^2$, ou seja, os coeficientes de transporte difusivos seriam diminuídos com o quadrado do campo magnético. Essa lei de escala gerou inicialmente muita expectativa quanto a produção de energia por fusão controlada em plasmas; a difusão poderia ser reduzida substancialmente aumentando-se a intensidade do campo magnético de confinamento. No entanto, num trabalho utilizando arcos magnetizados, David Bohm e seus colaboradores, Eric H.S. Burhop e Harrie Massey, observaram experimentalmente que, em um plasma, o transporte de partículas através das linhas de força segue uma lei de escala bem menos favorável, descrita pelo chamado coeficiente de difusão de Bohm [6],

$$D_{\text{Bohm}} = \frac{1}{16} \frac{k_B T}{|e_a| B}, \quad (1.3)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann. Esse resultado seminal foi extensivamente confirmado em muitos experimentos posteriores e deu origem ao termo “transporte anômalo” em plasmas magnetizados, onde a anomalia se refere aos valores dos coeficientes de transporte serem bastante superiores aos obtidos a partir da teoria clássica de transporte, onde os fluxos são calculados pelo modelo de Braginskii (colisional) [7].

O modelo empírico atualmente mais utilizado para explicar qualitativamente o transporte anômalo em plasmas magnetizados é baseado em células de convecção geradas pela turbulência associada à evolução não-linear de diferentes instabilidades, estas excitadas pelos gradientes dos parâmetros de equilíbrio (densidade, temperatura, pressão e velocidade hidrodinâmica). Todavia, em situações especiais outros processos de auto-regulação, associados principalmente a fluxos zonais, estruturas coerentes de grandes escalas [3], podem romper essas células reduzindo seu tamanho e também o valor do coeficiente de transporte anômalo [8]. Em particular, o efeito da supressão das células convectivas é bastante pronunciado na transição L-H (*Low and High confinement modes*) devido ao aparecimento de uma barreira de transporte na borda do plasma [9].

Quando esses processos atuam eficazmente, os coeficientes de transporte podem aproximar-se dos resultados previstos pelos modelos de transporte colisional [10]. Por isso, o cálculo dos coeficientes de transporte colisional utilizando a teoria cinética, baseada na solução da Equação de Boltzmann, é extremamente relevante. De fato, os coeficientes de transporte colisional são entendidos como os limites inferiores para sistemas próximos do equilíbrio termodinâmico e devem ser tomados como base para qualquer cálculo de transporte em plasmas turbulentos. Ademais dessa interpretação padrão, também já foram observados em tokamaks coeficientes de transporte abaixo dos valores dos modelos de transporte clássico [11, 12], o que indicaria a existência de mecanismos de transporte ainda desconhecidos à luz da física de plasmas.

Equações de Braginskii

O cálculo dos coeficientes de transporte em plasmas magnetizados foi realizado no trabalho seminal de Braginskii, onde a solução da Equação de Boltzmann é obtida rigorosamente através do método de Chapman-Enskog [1, 2]. No modelo de Braginskii, toda a base do transporte em plasmas intensamente magnetizados é estabelecida; os mecanismos físicos e as expressões analíticas dos coeficientes de transporte são determinadas em termos de quantidades fundamentais, bem como o conjunto completo de equações de fluidos para elétrons e íons.

De fato, esse modelo é um dos mais citados e importantes trabalhos em fenômenos de transporte em plasmas, ainda hoje utilizado em vários códigos numéricos voltados à modelagem de transporte, como por exemplo o NIMROD [13], o Transp [14] e o ASTRA [15].

O formalismo empregado por Braginskii para solução da Equação de Boltzmann é bastante elegante, explora a discrepância entre as massas dos elétrons e dos íons ($m_e/m_i \ll 1$) para simplificar seu operador colisional, a ortogonalidade da solução para garantir as condições de vínculo (leis de conservação) e calcular todos os coeficientes de transporte, de todos os fluxos condutivos, consistentemente. Em particular, as relações de ortogonalidade decorrem do desenvolvimento da solução de primeira ordem numa série assintótica escrita como o produto da função de distribuição de Maxwell e polinômios de Sonine (polinômios associados de Laguerre). A principal vantagem dessa metodologia está na transformação da equação cinética, uma equação integro-diferencial difícil, num sistema de equações algébricas que pode ser resolvido por simples métodos matriciais, facilitando enormemente o cálculo dos coeficientes de transporte.

A maioria dos sistemas envolvendo plasmas não está, no entanto, próximo do equilíbrio termodinâmico determinado pela teoria cinética de Maxwell-Boltzmann, ou seja, a função de distribuição estacionária, principalmente a dos elétrons, difere substancialmente da exponencial maxwelliana apresentando longas caudas. Dentre as diversas situações, podemos destacar a presença de distribuições não-maxwellianas na superdifusão de plasmas empoeirados [16], nas oscilações eletrostáticas na borda de plasmas de tokamak [17], no transporte de calor em plasmas de confinamento magnético (tokamaks, stellerators e pinch reverso) [18] e em plasmas espaciais [19]. Embora possa parecer evidente que o modelo de Braginskii não deva aproximar bem essas observações, as generalizações empíricas do modelo, como por exemplo nos ventos solares, mostraram que pequenas alterações nos coeficientes de transporte ou a simples inclusão de novos termos nas expressões para os fluxos são suficientes para descrever quantitativamente os dados experimentais. Isso mostra a robustez do modelo concebido por Braginskii; mesmo numa situação incompatível com suas premissas fundamentais, suas previsões são marginalmente compatíveis com as observações. Portanto, se mostrando como um ponto de partida seguro para qualquer generalização de modelos colisionais de transporte.

Distribuições não-Maxwellianas e Estatística Não-Extensiva

A primeira observação de uma função de distribuição não-maxwelliana foi obtida por Vasyliunas ao analisar os fluxos de elétrons na magnetosfera da Terra a partir de medidas dos satélites OGO1 e OGO3 [20]. A fim de explicar os dados, ele introduziu uma função de distribuição empírica aproximando uma lei potência para altas energias, a qual ficou conhecida como função de distribuição κ' , dada por

$$f(v) = \frac{N}{w_0^3} \frac{\Gamma(1 + \kappa')}{(\pi \kappa')^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\left(1 + \frac{v^2}{w_0^2}\right)^{\kappa'+1}}, \quad (1.4)$$

onde N é a densidade média, w_0 a velocidade máxima dos elétrons e κ' um parâmetro de ajuste. Dados recentes do STEREO (Solar Terrestrial Probes Program) mostram claramente as caudas longas da função de distribuição de velocidades dos elétrons no super-halo dos

ventos solares no período de pausa, as quais são bem modeladas pela função de distribuição κ [21].

Devido à sua ampla gama de aplicações, essas funções de distribuição têm sido utilizadas em aplicações em plasmas de laboratório e astrofísicos [22], em particular quanto à modificação da relação de dispersão de diferentes modos cinéticos e a evolução de instabilidades não-lineares [23, 24]. No entanto, a maior parte das aplicações das funções de distribuição κ em plasma magnetizados se restringe à estudos de como as relações de dispersão de diferentes modos cinéticos, lineares e não-lineares, são por ela modificadas [25]. Poucos são os trabalhos que investigam o efeito de funções de distribuição com longas caudas no transporte de partículas e energia em plasmas magnetizados, e quando o fazem, aproximam o termo colisional da equação cinética pelo modelo de Lorentz. Nesse modelo, apenas as colisões entre elétrons e íons são consideradas e cuja frequência de colisão pode ou não depender da velocidade das partículas [26, 27]. Essa limitação é bastante significativa, pois as colisões entre partículas semelhantes, isto é, entre elétrons ou íons, são responsáveis por grande parte do transporte de calor no plasma. Outra dificuldade desses modelos está em utilizar diretamente o operador colisional da teoria cinética de Maxwell-Boltzmann. As expressões gerais desses operadores está profundamente atrelada à hipótese do caos molecular (independência estatística), o que não deve ser completamente consistente com funções de distribuição de longas caudas, uma vez que tal condição estabelece o equilíbrio termodinâmico, ou seja, distribuições maxwellianas.

Em plasmas de laboratório, funções de distribuição de elétrons com longas caudas foram observadas no núcleo do plasma no JET [28], quando a temperatura excedeu $8keV$. Também foram observadas na região do divetor no NSTX [29, 30], assim como nas proximidades da última superfície magnética fechada do plasma no COMPASS [31], no TJ-II stellarator [31] e no CASTOR [32], onde foram ajustadas bi-maxwellianas, isto é, funções de distribuição de longas caudas comumente utilizadas no mesmo contexto das funções de distribuição κ em plasmas espaciais [33]. Esses elétrons altamente energéticos provenientes da cauda da distribuição, chamados de elétrons supratérmicos, também foram ligados à reconexão magnética, íons de altas energias, transporte não-local, ionização de neutros e aquecimento do plasma [28, 29, 31, 34]. Contudo, nenhuma explicação ou modelo auto-consistente para o fenômeno pode ser encontrado na maioria dos casos. Elétrons energéticos também foram identificados com o gatilho de diversas instabilidades, por exemplo, modos internos de kink, instabilidade dentes de serra e elétrons fishbones [35, 36].

A principal dificuldade teórica no estudo, ou na interpretação dos dados experimentais, do transporte em sistemas com distribuições não-maxwellianas é a falta de modelos auto-consistentes de primeiros princípios [37]. Uma forma prática de contornar essa dificuldade, e que vem ganhando notoriedade ultimamente, é definir numericamente a função de distribuição coerente com os dados experimentais [38]. Nesse tipo de abordagem, a função de distribuição é escrita como uma série de distribuições Maxwellianas e polinômios da velocidade [38],

$$f = \sum_{k=0}^{N_k} \frac{a_k (v - b_k)^{n_k}}{(2\pi d_k^{m_k})^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{(v - c_k)^2}{2e_k} \right], \quad (1.5)$$

onde $(m_k, n_k) \in \mathbb{N}$ são parâmetros adequadamente escolhidos em conjunto com os momentos hidrodinâmicos (dedução das equações macroscópicas de fluidos) e os coeficientes $a_k - e_k$

considerados “variáveis ocultas de fluidos”; estas, por sua vez, obtidas diretamente do ajuste do modelo com o resultado experimental. Embora tal modelagem melhore as previsões quantitativas do comportamento do plasma, por exemplo, após ajustar os parâmetros do modelo a uma descarga do tokamak, saberíamos quais desses parâmetros influenciam no transporte e como sua modificação poderia melhorar o confinamento. Por outro lado, não insere novos fenômenos de transporte ou estende as explicações dos modelos de transporte básicos, apenas interpreta as observações dentro da teoria já estabelecida.

Uma abordagem completamente diferente dos sistemas físicos distantes do equilíbrio termodinâmico foi iniciada por Tsallis [39, 40]. Sua abordagem consiste na generalização da entropia de Boltzmann como uma lei de potência, dependente de único parâmetro, o parâmetro q , e definida como

$$S_q = k_B \frac{1 - \sum_{\mu} p_{\mu}^q}{q - 1}, \quad (1.6)$$

onde p_{μ} é a probabilidade do microestado μ e a entropia de Boltzmann (S_B) é recuperada quando $q \rightarrow 1$.

A definição de S_q surgiu de uma série de estudos envolvendo a distribuição da informação em fractais que, devido as correlações de longo alcance entre os estados, segue uma lei de potência ao invés do característico logaritmo da entropia de Boltzmann [40]. No desenvolvimento do formalismo estatístico inerente à S_q , a chamada estatística não-extensiva, mostra-se (como veremos nesta tese de doutorado) que, para $q > 1$, as funções de distribuição possuem longas caudas. Assim, a teoria de Tsallis estabelece uma relação causal entre essas funções de distribuição com as correlações de longo alcance.

Em plasmas, a força de Coulomb das partículas carregadas coloca as correlações de longo alcance como uma propriedade intrínseca do sistema; inclusive, sem necessitar da existência de células convectivas, cujo interior é fortemente correlacionado (turbulência). Mesmo quando o alcance da força de Coulomb é limitado a ação local, por exemplo, devido à blindagem de Debye [41], o potencial elétrico ainda é o determinado por uma força de longo alcance e, portanto, a função de distribuição local deve conservar essa informação. Na verdade, o plasma é definido como o estado em que o gás ionizado apresenta comportamentos *coletivos*, resultado da elevada temperatura tolher a recombinação molecular do plasma num gás neutro¹, enquanto as partículas se organizam em resposta ao potencial elétrico resultante da combinação de todas as partículas e fontes externas do plasma [41, 42, 43]. Portanto, a condição para o surgimento dos plasmas também estabelece as condições suficientes para a aplicação da estatística não-extensiva.

Por esta razão, não é surpresa que a literatura em Física de Plasmas esteja recheada de aplicações da estatística não-extensiva, inclusive, a primeira verificação experimental da teoria de Tsallis foi em Física de Plasmas. Esse trabalho foi motivado pelos resultados do artigo de Huang e Driscoll [44], onde os autores mostram que o perfil de densidade medido no centro da coluna de um plasma puro de elétrons após sua relaxação turbulenta não é ajustado pela estatística de Maxwell-Boltzmann. Ao abordar o problema através da estatística não-extensiva, Boghosian [45] e Antenodo e Tsallis [46] mostram que o perfil experimental era bem

¹A proposta da fusão nuclear como fonte de energia comercial é utilizar a fusão de alguns íons do plasma deutério-trítio para produzir energia. De fato, recombinações sempre existem em qualquer plasma; na prática, a elevada temperatura impede a recombinação total do plasma em um gás neutro ou fracamente ionizado.

ajustado pelo estado de equilíbrio da estatística não-extensiva com $q = 1/2$, especialmente na região central da coluna $r \leq 0.3$, onde q modifica profundamente $\rho_q(\mathbf{r})$, como podemos ver na Fig.(1.1).

Figura 1.1: Perfil de densidade teórico $\rho_q(r)$, normalizado pela densidade experimental $\rho_e(0)$, em função do raio r e valores experimentais simbolizados pelos quadrados. As linhas correspondem às previsões teóricas de $\rho_q(r)$ para diversos valores de q , onde a previsão da estatística de Maxwell-Boltzmann é dada no limite $q = 1$. Figura retirada da referência [46].

Entre as várias outras aplicações da estatística não-extensiva que podem ser encontradas em plasmas, destacamos a relação de dispersão de ondas eletrostáticas [47], as distribuições κ em ventos solares como consequência do equilíbrio dinâmico resultante da interação onda-partícula [21], a difusão em plasmas empoeirados [16], a relação de dispersão em plasmas relativísticos [48]. Em particular, em 2002, Leubner demonstrou que uma série de funções de distribuição de longas caudas observadas em fenômenos astrofísicos, semelhantes às funções de distribuição κ , são, na verdade, funções de distribuição da teoria de Tsallis. Esse resultado traz toda fundamentação teórica necessária para o desenvolvimento do modelo empírico de Vasyliunas necessário para o estudo dos fenômenos de transporte. No sítio da internet dado na Ref.[49], é possível ainda verificar uma extensa lista de referências bibliográficas, atualizadas constantemente, onde mais de uma centena de aplicações em plasmas pode ser encontrada.

Recentemente, também constatamos a presença de elétrons supratérmicos em experimentos de melhora de confinamento induzido por polarização no TCABR. Nesses experimentos, um eletrodo posicionado na borda do plasma é polarizado com uma voltagem característica, aumentando o cisalhamento nessa região e deslocando o número de onda para regiões de maior dissipação turbulenta, causando assim sua supressão [50]. Na figura Fig.(1.2a), podemos ver o aumento da intensidade dos raios-X duros (espectro de emissão acima de $1MeV$), após o acionamento do eletrodo em $60ms$ e polarizado à $+300V$; um indicativo do aumento dos elétrons mais energéticos, portanto, da cauda da função de distribuição. A presença de elétrons supratérmicos nessa descarga é sustentada pela Fig.(1.2b), onde a amplitude do sinal

Figura 1.2: **a)** Sinais do HRX normalizados com (#32556) e sem eletrodo (#32549). O aumento do HXR com eletrodo polarizado à $+300V$ indica a presença de elétrons supratérmicos. **b)** Sinais normalizados da medida de C_{III} com (#32556) e sem (#32554) acionamento do eletrodo. Apesar da evidente tendência induzida pelo eletrodo, os níveis medidos pelo diagnóstico são similares nos disparos com e sem tensão de polarização, o que indica que não há considerável injeção de impureza.

do carbono-3 (C_{III}), um indicativo do nível de impurezas, não aumenta significativamente em comparação com o disparo sem polarização. Assim, o aumento do raio-X duro não estaria associado ao aumento de radiação de *bremssstrahlung*, ou seja, a desaceleração dos elétrons pela impureza.

Observamos ainda que o potencial de polarização $+300V$ está acima do valor limiar determinado no TCABR para a transição L-H, ou seja, a mudança do regime de baixa eficiência de confinamento (*low confinement mode*) para o regime de alta eficiência de confinamento (*high confinement mode*) [51]. A constatação dos elétrons supratérmicos nesse regime do plasma é de grande valia no contexto geral da fenômeno, pois se trata de uma novíssima informação que pode ajudar elucidar a causa fundamental da transição L-H, ainda desconhecida, mesmo já passados mais de trinta anos desde seu descobrimento (a saber, em 1982 por Wagner no ASDEX [52]).

Concomitantemente ao acionamento do eletrodo, a Fig.(1.3a) mostra o aumento da correlação de longas distâncias entre os sinais de duas sondas de Langmuir na borda do plasma; as sondas são separadas na direção toroidal, mas mantidas na mesma posição radial, e a correlação entre os sinais calculada como na Ref.[53]. Isso significa que não só verifica-se a presença de elétrons supratérmicos, mas que as correlações de longo alcance são subjacentes ao modo H. Na Fig.(1.3b), podemos ver ainda que a correlação máxima (faixa vermelho-escuro na figura anterior) mais que triplica; o mínimo é referente ao adiantamento do sinal entre as sondas, e quanto mais próximo de zero, menor a correlação entre os sinais. Esse resultado mostra, portanto, a verificação experimental da hipótese de Tsallis para a generalização da entropia Boltzmann, colocando seu formalismo como um forte candidato à descrição dos elétrons do plasma em modo H acessado por polarização.

Apesar das inúmeras observações, detecções e aplicações da estatística não-extensiva, a formulação do transporte a partir de primeiros princípios recebeu pouca atenção. Os poucos modelos que existem não permitem determinar consistentemente as equações de fluidos e os

Figura 1.3: **a)** Decomposição espectral da correlação entre os sinais da sonda no intervalo de frequências $40 - 250\text{Hz}$ do disparo #32927. A abscissa é o tempo do disparo e a ordenada os diferentes valores de atraso utilizados no cálculo da correlação. **b)** Valores máximos e mínimos da correlação entre os sinais das sondas. Valores positivos indicam o atraso entre os sinais, enquanto os negativos o adiantamento. As correlações máximas (parte em vermelho-escuro em **a**)) mais que triplicam durante o acionamento do eletrodo (início em 60ms) e voltam ao nível padrão após seu desligamento em 80ms

fluxos colisionais [54, 55, 56]. Em particular, o trabalho de Boghosian [45] foi a primeira aplicação da estatística não-extensiva no transporte colisional, embora não utilize operador adequado para o cálculo dos coeficientes de transporte; a saber, é utilizada uma modificação do operador BGK [57] a fim de atender os requisitos do cálculo das médias estatísticas da teoria não-extensiva.

Esta questão é fundamental para o desenvolvimento da teoria de transporte, pois as colisões são o mecanismo fundamental da relaxação do sistema ao equilíbrio (estado de máxima entropia). Em plasmas, o interesse está na identificação da causa dos níveis de transporte se manterem acima das previsões dos modelos colisionais clássicos após a supressão da turbulência, especialmente para elétrons. No caso, é possível que esse comportamento seja consequência da presença de funções de distribuição fde longas caudas, e não da atuação de mecanismos de transporte turbulento, como é atribuído atualmente. O ponto central desta tese de doutoramento é analisar exatamente este problema, ao apresentar um modelo cinético consistente com a estatística não-extensiva que permita o cálculo dos coeficientes de transporte.

Objetivos e Estrutura da Tese

O objetivo principal desta tese de doutorado é estabelecer as bases gerais para o transporte colisional em plasmas magnetizados dentro da teoria cinética não-extensiva, tomando como aplicação o cálculo das equações de transporte para elétrons. Fazemos isso partindo apenas da definição da entropia de Tsallis (S_q), deduzindo todo o restante necessário através de

métodos matemáticos estatísticos genéricos, até a determinação das equações de fluidos, que, como veremos, em nosso modelo se resume ao cálculo dos coeficientes de transporte. Optamos por trabalhar apenas com os elétrons, pois, como já mencionado, as observações de funções de distribuição com longas caudas são mais comuns, o que facilita a comparação de nossas previsões com os experimentos. A fim de melhor organizar nosso trabalho, o texto será dividido em cinco capítulos.

No Capítulo 1, deduzimos toda a teoria cinética não-extensiva na bordagem das funções de distribuição de escolha, a função de distribuição do equilíbrio, a temperatura de equilíbrio no contexto não-extensivo e a generalização do operador de Landau (q -Operador de Landau) através do método KIP (*Kinetic Interaction Principle*) desenvolvido por Kaniadakis [58]. No Capítulo 2, determinamos as equações de fluidos a partir do cálculo dos momentos hidrodinâmicos, as simplificações do operador das colisões entre elétrons e íons devido a discrepância entre suas massas ($m/m_i \ll 1$), e as equações cinéticas de ordens zero e primeira através do método de Chapman-Enskog [59]. Nesse mesmo capítulo, e a partir dessas equações, obtemos as equações de fluidos e a fricção de ordem zero e as equações cinéticas de primeira ordem. Também provamos as relações de Onsager entre os coeficientes de transporte.

O cálculo dos principais coeficientes de transporte dos elétrons em plasmas intensamente magnetizados é feito no Capítulo 3. Nesse cálculo, a função de distribuição de primeira ordem é aproximada por uma série assintótica em termos de polinômios de Jacobi e da função de distribuição do equilíbrio encontrada no Capítulo 1. Isso é feito utilizando as propriedades ortogonais desses polinômios especiais a fim de garantir as condições necessárias do método de Chapman-Enskog, seguindo a mesma metodologia de Braginskii [1, 2]. Esse cálculo depende da estimativa numérica das integrais do operador de colisões entre elétrons, as quais são feitas pelo método de Monte Carlo [60]. Os coeficientes ajustados a partir dos resultados numéricos e seu erro relativo são, então, discutidos.

No Capítulo 4, as previsões do modelo são discutidas em duas situações distintas, no transporte de calor em ventos solares e do pulso frio em plasmas de laboratório [61, 62]. Nos ventos solares, fomos capazes de recuperar o modelo Hollweg, um modelo empírico para o transporte de calor em plasmas espaciais, e pudemos mostrar que as previsões de nosso modelo são compatíveis com os resultados presentes na literatura. No fenômeno do pulso frio, mostramos que nosso modelo recupera a exata forma dos modelos empíricos utilizados para ajustar os dados experimentais, onde identificamos que a parte dita “não-local” desses modelos corresponde, na verdade, à contribuição direta dos elétrons supratérmicos no transporte. Também discutimos toda a dinâmica do processo de transporte utilizando apenas a equação fluxo de calor deduzido em nosso modelo e estimamos os valores esperados para o parâmetro q a partir de resultados experimentais. No Capítulo 5, resumimos os principais resultados e conclusões do trabalho e ainda apresentamos as perspectivas do modelo.

Capítulo 2

Teoria Cinética não-Extensiva

2.1 Formulação Contínua

A entropia de Tsallis é proposta como uma generalização da entropia de Boltzmann para sistemas dotados de correlações de longo alcance [39, 40]. A sua concepção se deu a partir de estudos das correlações de longo alcance em fractais e como a distribuição da informação nesses sistemas segue uma lei de potência [40].

A celebre formula da entropia de Tsallis é postulada, na sua versão discreta, como [39, 40]:

$$S_q = -k_B \frac{1 - \sum_{i=1}^W p_i^q}{1 - q} = k_B \sum_{i=1}^W p_i \ln_q \left(\frac{1}{p_i} \right), \quad \left(\ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \right), \quad (2.1)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann, W o número de microestados do sistema, $\ln_q x$ o q -logaritmo e p_i a probabilidade normalizada do microestado i ($\sum_{i=1}^W p_i = 1$); a entropia de Boltzmann-Gibbs (S_{BG}) é recuperada no limite $q \rightarrow 1$.

A análise matemática rigorosa de S_q revelou que não só as propriedades necessárias para a definição de entropia são satisfeitas, mas que muitas delas são compartilhadas com a S_{BG} , portanto, demonstrando que a definição introduzida na Eq.(2.1) é robusta no sentido de generalizar o conceito de entropia tradicional. Algumas das principais propriedades em comum são [40]: não negatividade, expansibilidade ($\forall q > 0$), concavidade ($q > 0$), extensividade (para determinados valores de q), estabilidade de Lesche ($\forall q > 0$), produção de entropia por unidade de tempo finita, existência de uma função de partição que depende apenas da temperatura, componibilidade, propriedade de fatorizabilidade de Topsoe ($\forall q > 0$), a relação matemática entre a energia livre de Helmholtz com a função de partição e as energias microscópicas com as suas probabilidades é a mesma, a função que define a entropia (através da média probabilística padrão) é precisamente o inverso da função que fornece a distribuição de energia no estado estacionário.

A principal diferença entre S_q e S_{BG} está na não-aditividade, isto é, a entropia de um sistema composto por dois subsistemas independentes não é igual a soma das entropias dos subsistemas, mas dada pela expressão:

$$\frac{S_q(A+B)}{k_B} = \frac{S_q(A)}{k_B} + \frac{S_q(B)}{k_B} + (1-q) \frac{S_q(A)}{k_B} \frac{S_q(B)}{k_B}. \quad (2.2)$$

A não-aditividade foi utilizada por muitos anos como argumento para caracterizar erroneamente S_q como não-extensiva. Contudo, a verdadeira condição necessária para a extensividade é a fatorizabilidade do funcional da entropia que, por sua vez, é satisfeita por S_q [63]. Nesse contexto, o correto seria denominar S_q como *entropia não-aditiva*; todavia, por fins puramente de referência na literatura estabelecida, a nomenclatura *entropia não-extensiva* continuará sendo utilizada nesta tese.

Outra importante diferença está no cálculo dos valores médios a partir da estatística decorrente de S_q , a qual chamamos estatística não-extensiva. Diferentemente das simples médias estatísticas da teoria de Boltzmann, o valor médio na estatística não-extensiva é determinado através da q-média definida por [40, 64]:

$$O_q = \frac{\sum_{i=1}^W P_i^q \theta_i}{\sum_{i=1}^W P_i^q} \quad (2.3)$$

onde θ_i é o operador cujo q-valor médio é dado por O_q .

A formula alternativa para o cálculo dos valores médios na estatística não-extensiva é necessária a fim de evitar uma série de consequências indesejadas que impediriam a interpretação usual dos valores esperados. Surpreendentemente, essa metodologia se mostrou consistente com as chamadas *distribuições de escolha* [65]:

$$F_i = \frac{P_i^q}{\sum_{i=1}^W P_i^q}, \quad (2.4)$$

onde a formula para o cálculo das q-médias recupera a simples forma das médias estatísticas, isto é:

$$\sum_{i=1}^W P_i \theta_i = O_q. \quad (2.5)$$

Do ponto de vista prático, ao redefinir as probabilidades p_i em termos das distribuições de escolha, garantimos expressões idênticas às definidas na teoria de Maxwell-Boltzmann e, portanto, o seus significados físicos ordinários. Por fim, gostaríamos apenas de advertir que as diretrizes apresentadas aqui de maneira alguma têm a pretensão de estabelecer uma formulação unívoca; é perfeitamente possível abandonar a interpretação usual dos valores médios e associá-los à outras formulações das distribuições de probabilidade e seus respectivos valores médios.

Adendo: A Função de Distribuição de Escolta

As funções de distribuição de escolha foram inicialmente concebidas como ferramentas teóricas de análise da estrutura fractais e das funções de distribuição em teoria do caos [65]. Sua adoção na estatística não-extensiva ainda não está totalmente compreendida, nem mesmo todas as suas consequências matemáticas. Porém, podemos listar uma série argumentos que justificam sua escolha *a priori*, dentre os quais se destacam os seguintes (os dois primeiros podem ser encontrados na Ref.[40]; o terceiro é inserido com base nos resultados desta tese):

i) A entropia condicional

$$S_q[B|A] \equiv \frac{\sum_{i=1}^{W_A} (P_i^A)^q S_q[B|A_i]}{\sum_{i=1}^{W_A} (P_i^A)^q}, \quad (2.6)$$

naturalmente se apresenta sob a forma da distribuição de escolta.

- ii) Na generalização do teorema do limite central na estatística não-extensiva, as q-médias também surgem naturalmente a partir das transformadas de Fourier, portanto, em termos das distribuições de escolta.
- iii) A adoção da função de distribuição de escolta como funcional básico e valor médio calculado através das médias estatísticas ordinárias permitem que as equações de fluidos sejam obtidas diretamente a partir dos momentos da equação cinética estabelecendo, portanto, a hierarquia usual da hidrodinâmica.

2.2 Função de Distribuição do Equilíbrio

A formulação contínua de S_q é obtida facilmente a partir da definição discreta Eq.(2.1); basta supor as substituições das probabilidades p_i pela função de distribuição contínua $P(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ (uma função de distribuição auxiliar) e a soma sobre os microestados pela integração em todo o espaço de fases das velocidades das partículas ($\mathbf{v}$), para encontrarmos a seguinte expressão para a densidade de entropia, a menos de uma constante:

$$s_q \equiv k_B \int d\mathbf{v} P \ln_q \left(\frac{1}{P} \right), \quad (2.7)$$

onde

$$\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad (2.8)$$

é a função q-logaritmo.

Continuando a analogia, também devemos reescrever a condição de normalização em termos da densidade de partículas,

$$\int d\mathbf{v} P = n, \quad (2.9)$$

e as q-médias como

$$O_q = \frac{n \int d\mathbf{v} P^q \theta}{\int d\mathbf{v} P^q}, \quad (2.10)$$

onde o n no numerador do lado direito da equação é devido à identificação com a média ordinária no limite $q \rightarrow 1$, θ é o novo operador no espaço de fase contínuo e seu valor médio associado O_q ; e as funções de distribuição de escolta ficam definidas por

$$f = n \frac{P^q}{\int d\mathbf{v} P^q}. \quad (2.11)$$

Ainda seria necessário admitir uma constante (ou parâmetro dependente de q) no argumento da função q -logaritmo na Eq.(2.7) para torná-lo adimensionalmente correto. Porém, isto é desnecessário, uma vez que a abordagem por distribuições de escolta elimina qualquer constante de proporcionalidade em p , ou seja, $P = P' \times \text{constante}$, na transformação Eq.(2.11).

2.2.1 Função de Distribuição do Equilíbrio

Um sistema é dito em equilíbrio termodinâmico quando sua entropia atinge seu valor máximo e, conseqüentemente, não altera mais seu estado, assim como seus parâmetros que permanecem constantes no tempo [59, 66]. É usual em teoria cinética definir a densidade de partículas n , a velocidade hidrodinâmica $\mathbf{V}$ e a temperatura termodinâmica T a partir da função de distribuição que caracteriza este estado particular, e que recebe o nome de função de distribuição de equilíbrio.

O método que utilizaremos para a determinação da função de distribuição é análogo ao caso maxwelliano [59, 66, 67] que já foi aplicado à estatística não-extensiva [40, 64, 68, 69, 70]. Em linhas gerais, maximiza-se a entropia definida pela Eq.(2.7) com os vínculos apropriados para n , T e $\mathbf{V}$ e obtêm-se os parâmetros de maximização para definir a função de distribuição do equilíbrio. O procedimento apresentado a seguir não se trata apenas de uma revisão, pelo contrário, vamos estabelecer rigorosa- e consistentemente o modelo cinético não-extensivo compatível com o transporte colisional clássico, algo ainda carente na literatura da estatística não-extensiva, comparando nossos resultados aos já apresentados por outros autores.

Apesar de nosso interesse na formulação através de funções de distribuição de escolta, primeiro vamos obter a expressão geral de P e só então aplicar a transformação definida na Eq.(2.11). Esse procedimento tem o único propósito de simplificar os cálculos analíticos e evitar o problema da determinação dos vínculos apontado na Ref.[71], a saber, a relação entre P e f dada na Eq.(2.11) é uma identidade e, portanto, não é possível utilizá-la como condição de normalização (Eq.(2.9)) na determinação de f .

Os vínculos necessários para a maximização de s_q em plasmas são a condição de normalização Eq.(2.9), a velocidade média e a densidade de energia interna das partículas carregadas. Supondo partículas esféricas e sem graus de liberdade internos, as expressões para a densidade de energia interna e a velocidade média, para uma determinada espécie (elêtron ou íons), são

$$u_q = \frac{n \int d\mathbf{v} \left(\frac{mv^2}{2} + e_a \phi(\mathbf{r}) \right) P^q}{\int d\mathbf{v} P^q}, \quad (2.12)$$

$$n\mathbf{V} = \frac{n \int d\mathbf{v} \mathbf{v} P^q}{\int d\mathbf{v} P^q}, \quad (2.13)$$

onde m e e_a são, respectivamente, a massa e a carga elétrica da partícula e $\phi(\mathbf{r}) = \phi$ o potencial elétrico do plasma, ou seja, a soma dos potenciais elétricos externo e gerado pelo plasma, isto é, resultante das partículas carregadas do plasma. Também tomamos a liberdade de suprimir o índice “ a ” que diferencia as espécies nas quantidades P , f , u_q , n , $\mathbf{v}$ e T a fim de

não sobrecarregar a notação, pois o procedimento apresentado aqui é idêntico e independente para todas as espécies presentes no plasma.

Antes de prosseguir, devemos ressaltar que para escrever a Eq.(2.12) ainda foi suposto que as energias são aditivas. Essa hipótese não contradiz a existência das correlações de longo alcance entre as partículas, expressas pelo parâmetro q . Aliás, é exatamente por incluir as correlações de longo alcance na definição de s_q que a estatística não-extensiva permite trabalhar tais sistemas sem a necessidade de termos adicionais na energia. Seguramente, a aditividade da energia interna pode ser violada, mas é necessário que para isso as devidas justificativas microscópicas sejam apresentadas, bem como os respectivos termos inclusos na definição da energia interna.

Podemos simplificar o processo de maximização se eliminarmos a velocidade média como um dos parâmetros da lagrangiana s_q adotando o sistema de coordenadas no referencial do plasma. Essa transformação redefine as velocidade das partículas como $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}$, de modo que $\int d\mathbf{v}' \mathbf{v}' P^q / \int d\mathbf{v}' P^q = 0$. Assim, a definição dada em Eq.(2.13) se torna uma relação de identidade,

$$n\mathbf{V} = \frac{n \int d\mathbf{v} \mathbf{v} P^q}{\int d\mathbf{v} P^q} = \frac{n \int d\mathbf{v} (\mathbf{v} - \mathbf{V} + \mathbf{V}) P^q}{\int d\mathbf{v} P^q} = \frac{\int d\mathbf{v}' (\mathbf{v}' + \mathbf{V}) P^q}{\int d\mathbf{v}' P^q} = \mathbf{V} \frac{\int d\mathbf{v}' P^q}{\int d\mathbf{v}' P^q} = n\mathbf{V} \quad (2.14)$$

Até o final desse capítulo, apenas a velocidade $\mathbf{v}'$ será utilizada; portanto, vamos abandonar o apóstrofo por simplicidade da notação. Nesse referencial, a lagrangiana para a maximização de s_q com os vínculos Eq.(2.9) e Eq.(2.12) é:

$$L_q = \int d\mathbf{v} \left(P \ln_q \left(\frac{1}{P} \right) - \alpha' P - \beta' \frac{n \left(\frac{mv^2}{2} + e_a \phi \right) P^q}{\int d\mathbf{v} P^q} \right) = \int d\mathbf{v} J(P, \alpha', \beta'), \quad (2.15)$$

onde α' e β' são multiplicadores de Lagrange e s_q é definida pela Eq.(2.7).

O funcional acima recebe esse nome pois sua solução é obtida através de um processo de maximização (ou minimização) que recupera a forma exata das equações de Euler-Lagrange, o chamado cálculo variacional [72]. No caso, como desejamos maximizar o funcional de uma única variável, P , e dois parâmetros, α' e β' , o método variacional determina que

$$\delta L_q = \int d\mathbf{v} \delta P \left(\frac{\partial J(P, \alpha', \beta')}{\partial P} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial J(P, \alpha', \beta')}{\partial P} = 0. \quad (2.16)$$

Efetuada o cálculo acima com L_q dado pela Eq.(2.14), encontramos que a função que maximiza s_q será dada por

$$\frac{qP^{q-1} - 1}{1 - q} - \alpha' - \beta' q P^{q-1} \frac{n \left(\frac{mv^2}{2} + e_a \phi \right) - u_q}{\int d\mathbf{v} P^q} = 0, \quad (2.17)$$

logo

$$P = \alpha_q \left[1 - (1 - q)\beta' \left(\frac{mv^2}{2} + e_a \phi - \frac{u_q}{n} \right) n \left[\int d\mathbf{v} P^q \right]^{-1} \right]^{1/(1-q)}, \quad (2.18)$$

onde α_q é a constante de normalização e ainda supomos $k_B = 1$, o que é equivalente à definir a temperatura em unidades de energia.

Utilizando as Eqs.2.9 e 2.11 encontramos

$$\frac{n}{n_0} = [1 - (1 - q)e_a\phi\beta_q]^{3/2+1/(1-q)}, \quad (2.19)$$

$$f = n \frac{\left[1 - (1 - q) \left(\frac{mv^2}{2} + e_a\phi\right) \beta_q\right]^{q/(1-q)}}{\int d\mathbf{v} \left[1 - (1 - q) \left(\frac{mv^2}{2} + e_a\phi\right) \beta_q\right]^{q/(1-q)}}, \quad (2.20)$$

onde $n_0 = n(\phi = 0)$ e

$$\beta_q = \frac{\beta'_n [\int d\mathbf{v} P^q]^{-1}}{1 + (1 - q)u_q\beta' [\int d\mathbf{v} P^q]^{-1}}. \quad (2.21)$$

A integral no denominador de Eq.(2.20) pode ser obtida em uma tabela de integrais [73], fixando a constante de normalização

$$A_q = \begin{cases} (1 - q)^{3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{1 - q}\right)}{\pi^{3/2} \Gamma\left(\frac{1}{1 - q}\right)}, & q < 1, \quad [1 - (1 - q)e_a\beta_q\phi] > 0; \\ \frac{1}{\pi^{3/2}}, & q = 1; \\ (q - 1)^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q - 1}\right)}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{q - 1}\right)}, & 1 < q < 3, \quad [1 - (1 - q)e_a\beta_q\phi] > 0. \end{cases} \quad (2.22)$$

No cálculo de A_q , duas regiões bem distintas de q são separadas: para $q < 1$, o intervalo de integração no espaço de fase é limitado superiormente pelo corte de Tsallis, que garante a positividade da função de distribuição e é determinado pelo argumento da Eq.(2.20) como $1 - (1 - q)(mv_{max}^2/2 + e_a\phi)\beta_q = 0$. Para $q > 1$, é necessário impor o limite superior $q < 3$ a fim de garantir a existência da integral e, portanto, A_q . Além dessas conhecidas restrições naturais em q [40, 64, 68, 69, 70] que compactam o domínio da função de distribuição, vemos o aparecimento de um fator limitante em nossa abordagem que dependente do potencial elétrico quando $q \neq 1$.

Com o resultado para A_q , a função de distribuição de escolta do equilíbrio (doravante função de distribuição do equilíbrio) é:

$$f_0 = n_0 [1 - (1 - q)e_a\beta_q\phi] A_q \left(\frac{m\beta_q}{2}\right)^{3/2} \left[1 - (1 - q)\frac{m\beta_q v^2}{2}\right]^{q/(1-q)}, \quad (2.23)$$

O parâmetro β_q é determinado através da definição de temperatura, ou seja, quando estabelecemos a conexão entre a estatística e a termodinâmica como mostrado a seguir.

2.2.2 Definição da Temperatura Termodinâmica

Na estatística de Boltzmann, pode-se mostrar que, no equilíbrio, as diversas definições de temperatura são equivalentes, portanto, seus valores quantitativos correspondem às medidas da temperatura de equilíbrio, o parâmetro mensurável da lei zero da termodinâmica [74]. Na estatística não-extensiva essa identificação não é possível; como veremos, as definições de temperatura de equilíbrio e cinética são diferentes da definição intensiva (obtida através da transformações de Legendre [74]).

Apesar de a estrutura de Legendre da termodinâmica clássica ser preservada no contexto não-extensivo[75]:

$$\left(\frac{\partial s_q}{\partial u_q} \right)_n = \beta', \quad (2.24)$$

onde β' é o multiplicador de Lagrange na Eq.(2.15), a temperatura lagrangiana definida como $\beta' = 1/T_L$ não possui o sentido ordinário de temperatura. Nesse caso, vamos mostrar que a temperatura que mantém a interpretação usual é obtida através da lei zero da termodinâmica generalizada, consistente com o formalismo não-extensivo [76, 77, 78]

$$\frac{\partial s_q}{\partial u_q} \left[1 + (1 - q) \frac{s_q}{n} \right]^{-1} = \beta_F, \quad (2.25)$$

onde devido a nossa condição de normalização n aparece dividindo s_q (densidade de entropia) e se define $\beta_F = 1/T_F$ como a temperatura física [70], a temperatura de equilíbrio medida no reservatório térmico.

A generalização da lei zero da termodinâmica para a estatística não-extensiva só é possível se as correlações entre as energias das partículas forem desprezáveis no equilíbrio, ou seja, para f_0 . Podemos calcular o coeficiente de correlação entre duas populações quaisquer i e j do fluido [79] como

$$\rho(H_i, H_j) = \frac{3(q - 1)}{2 + 3(1 - q)(N - 1)}, \quad (2.26)$$

onde $H_k = mv_k^2/2$ são as energias cinéticas das partículas (ϕ não depende de $\mathbf{v}$, portanto, igual para ambas espécies, podendo ser descartado (vide Eq.(2.12)) e N o número de partículas. Como o número de partículas no plasma é grande, podemos supor o limite do contínuo, $N \rightarrow \infty$, com segurança e verificar que $\rho \rightarrow 0$. Portanto, fica assegurado que as correlações de longo alcance na energia cinética das partículas são suprimidas no equilíbrio e, assim, podemos utilizar Eq.(2.25) para definir a temperatura.

É direto obter a expressão de u_q a partir da Eq.(2.12) utilizando f_0 dada pela Eq.(2.23), logo,

$$u_q = \frac{2\beta_q^{-1}n}{5 - 3q} \left[\frac{3}{2} + e_a \beta_q \phi \right], \quad -\infty < q < 5/3 \quad (2.27)$$

onde o limite superior que garante a existência da integral é novamente reduzido, a saber, de $q < 3$. Embora o intervalo $5/3 < q < 3$ deva ser descartado para o modelo proposto nesta

tese, não é necessária sua remoção da teoria geral. Nessa região as funções de distribuição não-extensiva se aproximam das distribuições de Lévy [40, 80, 81] e, portanto, são capazes de descrever um fenômeno físico conhecido.

Agora, podemos utilizar as definições de temperatura nas Eq.(2.24) e Eq.(2.25) para determinar, respectivamente, β' e β_F em termos de β_q , ou seja, da energia interna u_q ,

$$\beta' = \frac{5 - 3q}{2} \frac{\beta_q}{n} \frac{\int d\mathbf{v} P^q}{[1 - (1 - q)e_a \beta_q \phi]}, \quad (2.28)$$

$$\beta_F = \frac{5 - 3q}{2} \frac{\beta_q}{1 - (1 - q)e_a \beta_q \phi}; \quad (2.29)$$

e se definirmos ainda a temperatura auxiliar $\beta_q = 1/T_q$, finalmente, podemos mostrar que

$$T_q = \frac{5 - 3q}{2} T_F + (1 - q)e_a \phi; \quad (2.30)$$

$$u_q = \frac{3}{2} n T_F + e_a n \phi; \quad (2.31)$$

$$T_L = \frac{nT}{\int d\mathbf{v} P^q}. \quad (2.32)$$

A Eq.(2.31) mostra que T_F pode ser interpretada como a temperatura cinética, ou seja, a energia cinética média das partículas do sistema. Desta forma, fica demonstrada a afirmação inicial da temperatura física ser a temperatura de equilíbrio com sua interpretação usual, o que permite identificarmos $T_F \equiv T$.

Contudo, devemos certificar que também não haja correlações entre as partículas do sistema e o reservatório térmico (termômetro), a partir de onde são feitas as medidas. Se supusermos o reservatório térmico muito maior que o sistema não-extensivo e seguindo a estatística de Boltzmann, é possível mostrar que as interações entre os dois sistemas será fraca [82]. Portanto, a temperatura T medida no reservatório será a temperatura de equilíbrio dada pela Eq.(2.24) [83, 84].

A expressão Eq.(2.30) determina T_q em termos de parâmetros conhecidos e, por conseguinte, a função de distribuição do equilíbrio f_0 (vide Eq.(2.23)). Esse resultado implica que a largura de f_0 depende de ϕ , um resultado que não foi observado nem mesmo em outras formulações da estatística não-extensiva onde ϕ é incluso [85, 86, 87]. Mais ainda, à medida que $q \rightarrow 5/3$, a influência de T na largura da função de distribuição diminui enquanto a de ϕ aumenta, ou seja, o aumento das correlações de longo alcance reduz o efeito do movimento aleatório das partículas em contrapartida do aumento da energia potencial. Essa característica é particularmente interessante nas investigações de plasmas turbulentos, onde as flutuações de ϕ do plasma são o principal mecanismo de transporte [3]. Todavia, a abordagem desse tipo de mecanismo de transporte está fora do escopo desta tese.

Como podemos ver na Eq.(2.31), essa definição de temperatura recupera a expressão ordinária para a densidade de energia interna, a saber, a soma das energias cinética e potencial. Portanto, é direto que os teoremas da equipartição de energia e do virial sejam satisfeitos; em conformidade com as provas gerais já apresentadas na estatística não-extensiva [88]. De

fato, essas consequências são desejáveis, uma vez que tais propriedades decorrem apenas da forma do hamiltoniano, no caso, a soma das energias cinética e potencial (vide Eq.(2.12)) [74].

Mesmo T_L não sendo pertinente ao nosso propósito, uma vez que é possível atribuí-la significado físico [89, 90, 91], é interessante compreender seu conceito a partir dessa formulação geral. Por outro lado, nosso modelo não será capaz de inserir T_L na formulação macroscópica geral, uma vez que para isso a termodinâmica não-extensiva precisaria ser desenvolvida. Porém, a validade das diferentes formulações possíveis é ainda assunto de debate na literatura [78, 19, 92, 93].

Podemos reescrever T_L dada na Eq.(2.32) utilizando a Eq.(2.7) da seguinte forma:

$$T_L = \text{cte}^{q-1} \left[1 + (1-q) \frac{s_q}{n} \right] T, \quad (2.33)$$

onde “cte” é um parâmetro necessário para a adimensionalização do argumento de $\ln_q x$ na Eq.(2.7), sem importância em nossa formulação, e ainda utilizamos a relação

$$\frac{\int d\mathbf{v} P^q}{n} = \text{cte}^{q-1} \left(1 + (1-q) \frac{s_q}{n} \right), \quad (2.34)$$

também obtida a partir da Eq.(2.7), quando incluímos o parâmetro cte explicitamente na expressão.

Embora o comportamento geral de T_L dependa da expressão geral do parâmetro “cte”, a determinação de tal expressão, assim como no caso da estatística de Maxwell-Boltzmann, necessita da abordagem quântica do problema, o que foge ao escopo desta tese. Porém, como se trata de um termo de normalização, será importante apenas para resultados quantitativos; logo, podemos tomar $cte = 1$ para interpretar o comportamento típico de T_L como função de q .

Podemos dividir o intervalo de análise de T_L em duas regiões, dado que $s_q/n > 0$: se $q < 1$, a relação entre as temperaturas será $T_L > T$, onde compreendemos o aumento de T_L como consequência do aumento da densidade de estados da energia no espaço de fase devido ao corte de Tsallis; se $1 < q < 5/3$, temos que $T_L < T$, portanto, a temperatura associada à energia que maximiza o sistema não-extensivo é menor que a temperatura medida desse sistema. Em outras palavras, há uma diminuição da densidade no espaço de fase das velocidades. Isso fica claro a partir da Fig.(2.1), onde mostramos a função de distribuição associada a esse intervalo na aproximação de interações fracas. Sendo assim, podemos entender T_L como a temperatura não-extensiva do sistema, isto é, a energia do movimento das partículas submetida as correlações de longo alcance que, como vimos, é menos relevante para a distribuição à medida que $q \rightarrow 5/3$.

Por fim, em termos de T_q e n , respectivamente dados pelas Eqs.(2.30) e (2.19), a função de distribuição do equilíbrio f_0 fica completamente determinada como:

$$f_0 = n A_q \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} \frac{\left[1 - (1-q) \left[\frac{mv^2}{2T_q} + \frac{e_a \phi}{T_q} \right] \right]^{q/(1-q)}}{\left[1 - (1-q) \frac{e_a \phi}{T_q} \right]^{1/2+1/(1-q)}}. \quad (2.35)$$

2.2.3 Aproximação de Interações Fracas

A condição necessária para que os fenômenos de transporte em plasmas sejam reduzidos ao transporte colisional é determinada pela hipótese de fracas interações entre as partículas, ou seja, $|e_a\phi/T| \ll 1$. Em outras palavras, devemos supor que o plasma está livre das fortes flutuações turbulentas que, em geral, são associadas a $|e_a\phi/T| \gg 1$. Com essas hipóteses, e sabendo ainda que as funções de distribuição de escolha são auto-referenciáveis, ou seja, invariantes com relação a qualquer referencial na energia [40], podemos desenvolver em série de potências a Eq.(2.35) no parâmetro $|e_a\phi/T|$ e eliminar ϕ do argumento da função de distribuição. O resultado desse cálculo é a seguinte função de distribuição do equilíbrio, a qual utilizaremos no restante desta tese:

$$f_0 \equiv n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} A_q \left[1 - (1-q) \left(\frac{mv^2}{2T_q} \right) \right]^{q/(1-q)}, \quad (2.36)$$

onde T_q e n (vide Eq.(2.19)) são, respectivamente:

$$T_q \approx \frac{5-3q}{2} T, \quad (2.37)$$

$$n = n_0 \left[1 - (1-q) \frac{e_a\phi}{T_q} \right]^{3/2+1/(1-q)}. \quad (2.38)$$

As aproximações que determinam f_0 e T_q acima são compatíveis com as simulações numéricas dos superhalos das funções de distribuição dos elétrons nos ventos solares no período de pausa [21], e com medidas de temperatura em ventos solares [94].

Para manter o rigor das aproximações acima, devemos analisar com cautela T_q dado pela Eq.(2.30), pois os fatores de proporcionalidade de T e ϕ podem impedir as simplificações. Por exemplo, T pode ser desprezado em T_q quando $q \rightarrow 5/3$, restando apenas ϕ no argumento de f_0 , o que impossibilita a aplicação das simplificações decorrentes de $|e_a\phi/T| \ll 1$. Uma forma de evitar a influência de q na aplicação do limite é estabelecendo a inequação $(5-3q)/2 > q-1$, que determina o fator dependente de T sempre maior que o de ϕ em T_q . Assim, é possível verificar que o intervalo $q \in (-\infty, 1.4]$ satisfaz a inequação e, portanto, permite a aplicação rigorosa da aproximação de fracas interações.

A análise da condição $|e_a\phi/T_q| \ll 1$ em n no intervalo $q \in (-\infty, 1.4]$ é convenientemente executada se antes o termo for desenvolvido em série de potências em torno de $q \rightarrow 1$. O procedimento matemático consiste no desenvolvimento de n dado pela Eq.(2.38) em série de Taylor, onde o limite $q \rightarrow 1$ é aplicado em cada termo derivativo:

$$n = \lim_{q \rightarrow 1} n(q) + \left(\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial n(q)}{\partial q} \right) (1-q) + \left(\lim_{q \rightarrow 1} \frac{\partial^2 n(q)}{\partial q^2} \right) \frac{(1-q)^2}{2} + \dots, \quad (2.39)$$

e cujo resultado, conservando apenas o primeiro termo da série, é

$$n = n_0 e^{e_a\phi/T} \left[1 - \frac{(1-q)}{2} \left(\frac{e_a\phi}{T} \right)^2 + \mathcal{O} \left[\left(\frac{e_a\phi}{T} \right)^4 \right] \right]. \quad (2.40)$$

Assim, podemos ver que a aplicação de $|e_a\phi/T| \ll 1$ elimina todos os termos dependentes de q na expansão de n , resultando no mesmo fator exponencial da densidade encontrado na estatística de Maxwell-Boltzmann [41, 42]. Também é oportuno mencionar que esse resultado implica na manutenção do comprimento de Debye ordinário que, como veremos, determina o limite superior da integral de colisões [95, 96].

Figura 2.1: Comparativo da função de distribuição em unidades da energia e escrita como $\epsilon f_0(\epsilon)$, onde f_0 é dada na Eq.(2.36) e $\epsilon = mv^2/(2T_q)$, para $q \rightarrow 1$ e $q \rightarrow 1.3$. Como se observa, para $q > 1$, a função de distribuição tem uma cauda alongada quando comparada à distribuição Maxwelliana.

As funções de distribuição de longas caudas são encontradas para $q > 1$ na estatística não-extensiva, como podemos ver na Fig.(2.1). Desta forma, o intervalo desenvolvido nas próximas etapas do trabalho será limitado à $q \in [1, 1.4]$.

2.3 q-Operador de Landau

O transporte condutivo é o processo pelo qual colisões entre as partículas do plasma agem a fim de eliminar inomogeneidades nas variáveis termodinâmicas ou perturbações provocadas por forças externas de modo a levar o sistema ao equilíbrio termodinâmico [59, 66]. Em plasmas, as colisões são caracterizadas como de longo alcance e contínuas devido à interação de Coulomb. Em outras palavras, a alteração da trajetória provocada por uma colisão é suave e ocorre à longas distâncias, se comparada ao parâmetro de impacto, onde a força de Coulomb é pequena e, conseqüentemente, a troca de momento entre as partículas na colisão [4, 42, 95]. Essas condições estabelecem as hipóteses mecânicas básicas da aproximação de interações fracas em plasmas, as quais podem ser enunciadas como:

- i) O efeito das colisões no espaço de fase pode ser aproximado por um processo difusivo, onde as partículas se encontram em um banho térmico (contato com reservatório térmico);
- ii) Colisões binárias, i.e., interações aos pares são muito mais abundantes do que as de outros tipos (ternárias, quartenárias, etc...);
- iii) É possível aplicar um corte no intervalo da integral da seção de choque fixando um limite superior, uma vez que efeitos de blindagem do plasmas limitam o alcance do potencial de interação (espalhamento assintótico).

A partir dessas hipóteses é possível deduzir o operador de colisões da equação cinética não-extensiva que generaliza o operador de Landau padrão [42, 95, 96, 4]. Nesse desenvolvimento analítico, vamos utilizar o método KIP (*Kinetic Interaction Principle*) [58, 97], seguindo a mesma proposta da Ref.[93], onde a generalização não-extensiva do operador de Landau para funções de distribuição comuns (antes da transformação para funções de distribuição de escolha) foi obtida.

Em linhas gerais, o método KIP estabelece analiticamente a relação entre o funcional de entropia e as integrais das probabilidades de transição da equação cinética, as quais interpretamos como efeitos das colisões no espaço de fase. Desta forma, nosso trabalho será utilizar a entropia definida na Eq.(2.7) para determinar as integrais na seguinte equação de evolução da função de distribuição de escolha:

$$\frac{df}{dt} = \int d\mathbf{v}' d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}'_1 [\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{v}'_1 \rightarrow \mathbf{v}_1, t) - \Pi(\mathbf{r}, \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}', \mathbf{v}_1 \rightarrow \mathbf{v}'_1, t)], \quad (2.41)$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição da partícula, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}'_1$ são, respectivamente, as velocidades da partícula incidentes e da partícula alvo antes e depois da colisão e a probabilidade de transição direta é escrita de maneira genérica como

$$\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}, \mathbf{v}'_1 \rightarrow \mathbf{v}_1, t) = \text{Tr}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_1) \gamma(f, f') \gamma(f_1, f'_1), \quad (2.42)$$

onde $\text{Tr}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_1)$ é a taxa de transição, proporcional à seção de choque e as funções f ($f' = f(\mathbf{v}')$, $f_1 = f(\mathbf{v}_1)$, ...) são as funções de distribuição das partículas envolvidas na colisão; a probabilidade de colisão inversa é dada simplesmente pela troca dos índices das velocidades na expressão acima.

As funções γ estão relacionadas a efeitos coletivos das populações nas colisões. Como colisões de Coulomb são simétricas (vide Apêndice A), tais funções podem ser escritas como:

$$\frac{\gamma(f, f')}{\gamma(f', f)} = \frac{\kappa(f)}{\kappa(f')}, \quad (2.43)$$

onde as funções κ são positivamente definidas.

Nessas condições, as formas mais gerais das funções γ são:

$$\gamma(f, f') = a(f)b(f')c(f, f'); \quad \gamma(f', f) = a(f')b(f)c(f, f'), \quad (2.44)$$

onde convenientemente escrevemos $\kappa(f) = a(f)/b(f)$ e $c(f, f') = c(f', f)$.

Substituindo as expressões Eq.(2.44) na Eq.(2.41), encontramos:

$$\frac{df}{dt} = \int d\mathbf{v}' d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}'_1 \text{Tr}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'_1, \mathbf{v}_1)_{CC1} [a' b a'_1 b_1 - a b' a_1 b'_1], \quad (2.45)$$

onde utilizamos a notação: $a = a(f)$, $a'_1 = a(f'_1)$, etc...

Para pequenas variações de momento nas colisões, como determinado pela aproximação de interações fracas, podemos escrever as velocidades das partículas após as colisões como:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \Delta, \quad \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_1 + \Delta, \quad |\Delta| \ll |\mathbf{v}_1|, |\mathbf{v}|, \quad (2.46)$$

e desenvolver em série de Taylor as funções a 's e b 's, tomando apenas os três primeiros termos,

$$F \approx F + F'W + \frac{1}{2}F''W^2, \quad (2.47)$$

onde o apóstrofo denota, no restante desse capítulo, derivada com respeito à função de distribuição, pois as substituições acima eliminam as variáveis linha; a expressão de W é

$$W = f(\mathbf{v} - \Delta) - f(\mathbf{v}) = -\Delta_\mu \frac{\partial f}{\partial v_\mu} + \frac{\Delta_\mu \Delta_\nu}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v_\mu \partial v_\nu}, \quad (2.48)$$

onde os índices gregos representam as direções cartesianas x , y e z (adotamos que índices gregos aos pares simbolizam a soma nas direções cartesianas).

Substituindo os desenvolvimentos em série até segunda ordem das funções a 's, b 's e até primeira ordem de Tr , desprezando termos ímpares em Δ , pois resultam em integrais nulas (ímpares em intervalos simétricos), encontramos que o integrando da Eq.(2.45) é

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta_\mu \Delta_\nu}{2} \left\{ \text{Tr} \left[\frac{ab}{m_1^2} \left((b_1 a'_1 - a_1 b'_1) \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{1\nu} \partial v_{1\mu}} + (b_1 a''_1 - a_1 b''_1) \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\nu}} \right) + (\dots) \right. \right. \\ & + \frac{a_1 b_1}{m^2} \left((b a' - b' a) \frac{\partial^2 f}{\partial v_\mu \partial v_\nu} + (b a'' - b'' a) \frac{\partial f}{\partial v_\mu} \frac{\partial f}{\partial v_\nu} \right) - \frac{2}{m m_1} (b b_1 a' a'_1 - a a_1 b' b'_1) \frac{\partial f}{\partial v_\mu} \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \left. \right] \\ & \left. - \frac{\partial \text{Tr}}{\partial v_\mu} \left[\frac{a_1 b_1}{m_1 m} (b a' - b' a) \frac{\partial f}{\partial v_\nu} - \frac{ab}{m_1^2} (b_1 a'_1 - b'_1 a_1) \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Integrando por partes o último termo, encontramos que:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left(\text{Tr} \left[\frac{a_1 b_1}{m_1 m} (b a' - b' a) \frac{\partial f}{\partial v_\nu} - \frac{ab}{m_1^2} (b_1 a'_1 - b'_1 a_1) \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \right] \right) + \frac{ab}{m_1^2} (b_1 a'_1 - b'_1 a_1) \text{Tr} \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{1\mu} \partial v_{1\nu}} \\ & - \frac{(b a' - b' a)(b_1 a'_1 - b'_1 a_1)}{m_1 m} \text{Tr} \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \frac{\partial f}{\partial v_\nu} + \frac{ab}{m_1^2} (b_1 a''_1 - b''_1 a_1) \text{Tr} \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\nu}}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Nas integrais da Eq.(2.45), o primeiro termo da expressão acima é nulo devido às condições de contorno de f , onde se espera que $f \rightarrow 0$, quando $v \rightarrow \infty$, portanto, podemos reduzir o

integrando a

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\frac{ab}{m_1^2} \left((b_1 a'_1 - a_1 b'_1) \frac{\partial^2 f_1}{\partial v_{1\nu} \partial v_{1\mu}} + (b_1 a''_1 - a_1 b''_1) \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\nu}} \right) - \frac{(ba' - b'a)(b_1 a'_1 - b'_1 a_1)}{m_1 m} \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \frac{\partial f}{\partial v_{1\nu}} \right] \\ & + \frac{\partial \text{Tr}}{\partial v_\mu} \left[\frac{a_1 b_1}{m_1 m} (ba' - b'a) \frac{\partial f}{\partial v_\nu} - \frac{ab}{m_1^2} (b_1 a'_1 - b'_1 a_1) \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \right]. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Integrando por partes mais uma vez e utilizando novamente as condições de contorno $f \rightarrow 0$, quando $v \rightarrow \infty$, encontramos a seguinte expressão para o operador colisional:

$$\frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}' \frac{\Delta_\mu \Delta_\nu \text{Tr}}{m} cc_1 \left[\frac{a_1 b_1}{m} (a'b - b'a) \frac{\partial f}{\partial v_\nu} - \frac{ab}{m_1} (a'_1 b_1 - a_1 b'_1) \frac{\partial f_1}{\partial v_{\nu 1}} \right]. \quad (2.52)$$

Definindo as quantidades:

$$g = ab, \quad h = a'b - ab', \quad g_1 = a_1 b_1, \quad h_1 = a'_1 b_1 - a_1 b'_1, \quad K_{\nu\mu} = \int d\mathbf{v}'_1 d\mathbf{v}' \text{Tr} \Delta_\mu \Delta_\nu, \quad (2.53)$$

onde $\text{Tr} \equiv \text{Tr}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1; \Delta)$, escrevemos a equação cinética na forma compacta

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}_1 K_{\nu\mu} \frac{cc_1}{m} \left[\frac{g_1 h}{m} \frac{\partial f}{\partial v_\mu} - \frac{gh_1}{m_1} \frac{\partial f_1}{\partial v_{\nu 1}} \right]. \quad (2.54)$$

O tensor $K_{\mu\nu}$ depende apenas da probabilidade de transição (seção de choque) e das variações de momento; logo, pode ser determinado através da mecânica newtoniana [4], sem depender especificamente da estatística, como apresentado no Apêndice A.

Até o momento, nenhuma suposição quanto à estatística envolvida na dedução foi apresentada, apenas condições de contorno genéricas para a solução da equação cinética. A escolha da estatística é feita na determinação de g e h através do funcional da entropia como estabelece o método KIP.

Como mostrado na Ref.[97], o funcional da entropia pode ser escrito a partir das funções a e b :

$$S = -k_B \int d\mathbf{r} d\mathbf{v} \int df \ln \kappa = -k_B \int d\mathbf{r} d\mathbf{v} \int df \ln \left(\frac{a}{b} \right) = -k_B \int d\mathbf{r} d\mathbf{v} G(f), \quad (2.55)$$

logo, temos que $G' = \ln a/b$ (analogamente, $G'_1 = \ln a_1/b_1$) e é direto encontrar

$$G'' = \frac{h}{g} \quad \text{e} \quad G''_1 = \frac{h_1}{g_1}, \quad (2.56)$$

o que permite reescrever a equação cinética nesses novos parâmetros como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial v_\mu} \int d\mathbf{v}_1 K_{\mu\nu} \frac{cc_1 g g_1}{m} \left[\frac{G''}{m} \frac{\partial f}{\partial v_\mu} - \frac{G''_1}{m_1} \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \right]. \quad (2.57)$$

Embora possamos determinar G através do funcional da entropia, não podemos determinar g e h univocamente, falta para isso um segundo funcional que relaciona essas quantidades.

Contudo, é possível justificar certas escolhas de g para satisfazer o problema. No caso, vamos adotar a mesma escolha da Ref.[93]:

$$g = f \quad \Rightarrow \quad h = fG'', \quad (2.58)$$

pois recupera o operador de colisões de Landau [4, 42, 96, 95], quando $G' = f \ln f$ no limite $q \rightarrow 1$.

Em termos da distribuição de escolta, podemos escrever a Eq.(2.7) como

$$s_q = -k_B \int d\mathbf{v} \frac{k_q^{-1} f^{1/q} - k_q^{-q} f}{1 - q}, \quad \left(k_q = \frac{1}{n} \int d\mathbf{v} f^{1/q} \right), \quad (2.59)$$

e determinar G e sua segunda derivada (analogamente para G_1) como

$$G = \frac{k_q^{-1} f^{1/q} - k_q^{-q} f}{1 - q}; \quad \Rightarrow \quad G'' = \frac{f^{1/q}}{q^2 k_q}. \quad (2.60)$$

É importante destacar que as funções G e G_1 devem ser encontradas a partir das entropias das populações das partículas envolvidas na colisão (incidente e alvo) e não da entropia total do sistema. Esse detalhe subjacente ao cálculo das probabilidades de transição decorre do método KIP, ao determinar que toda informação necessária para a transição está contida na entropia das populações das partículas que mudam de estado. Assim, é perfeitamente possível supor diferentes q 's para as diferentes populações envolvidas na colisão. Estudos para tais sistemas podem ser encontrados na literatura, em particular, o trabalho de Tirnakli [82] que discute a interação entre populações com diferentes q 's a partir de suas condições iniciais em um mapeamento padrão. As conclusões desse trabalho mostram que as populações com q 's muito diferentes interagem fracamente entre si durante a evolução dinâmica aleatória do sistema. Esse resultado atesta, portanto, as condições necessárias para a definição da temperatura pela generalização da lei zero da termodinâmica na Eq.(2.25), mostrando a consistência da formulação apresentada nesta tese.

As funções c e c_1 também devem ser escolhidas adequadamente. Aqui prosseguiremos com a escolha de Kaniadakis $cc_1 = 1$; outra escolha perfeitamente válida seria $cc_1 = qq_1$. Todas as escolhas feitas até agora só podem ser justificadas pelos resultados decorrentes delas. Assim, adotamos as escolhas padrão para as funções arbitrárias cujas validades já foram verificadas.

Então, substituindo na Eq.(2.57) as expressões de g e h (ou de g_1 e h_1) dadas na Eq.(2.58) e as expressões de G e G_1 dada pela Eq.(2.60), onde ainda podemos supor q 's diferentes para as expressões com e sem o índice 1, encontramos que

$$C_q = \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}_1 \frac{K_{\mu\nu}}{m} f_1 f \left\{ \frac{n f^{1/q-2}}{m k_q q^2} \frac{\partial f}{\partial v_\mu} - \frac{n_1 f_1^{1/q_1-2}}{m_1 k_{q_1} q_1^2} \frac{\partial f_1}{\partial v_{1\mu}} \right\}, \quad (2.61)$$

e integrando por partes, chegamos ao resultado final:

$$C_q = \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}_1 \frac{K_{\mu\nu}}{m} \left\{ \frac{f_1}{m} \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} - \frac{f}{m_1} \frac{\partial f_1^*}{\partial v_{1\mu}} \right\}, \quad (2.62)$$

onde $K_{\mu\nu}$ é determinado no Apêndice A na Eq.(A.18) e f^* é

$$f^* = \frac{n f^{1/q}}{q k_q}. \quad (2.63)$$

Já adiantamos que as soluções de interesse são do tipo $f = f_0 + \delta f$, tal que $\delta f \ll f_0$. Isso permite aproximar a constante k_q como

$$\begin{aligned} k_q(f_0 + \delta f) \approx k_q(f_0) &= \frac{1}{n} \int d\mathbf{v} f_0^{1/q} = \frac{\left[n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} A_q \right]^{1/q}}{n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2}} \int d\mathbf{x} [1 - (1-q)x^2]^{1/(1-q)} \\ &= \left[n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} \frac{5-3q}{2} A_q \right]^{-1} \left[n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} A_q \right]^{1/q}, \end{aligned} \quad (2.64)$$

e, portanto,

$$f^* = n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} \frac{5-3q}{2q} A_q \left[\frac{f}{n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} A_q} \right]^{1/q}. \quad (2.65)$$

Nesse momento é oportuno comparar nosso resultado para o operador colisional, Eq.(2.62), com a expressão apresentada por Chavanis na Ref.[93]; a saber

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}_1 K_{\mu\nu} \left\{ f_1 \frac{\partial f^q}{\partial v_\mu} - f \frac{\partial f^q}{\partial v_{1\nu}} \right\}, \quad (2.66)$$

onde a condição de normalização é escrita em termos da densidade de massa, o que remove as quantidades m e m_1 da expressão final.

A primeira diferença entre as equações está na expressão para o modelo colisional. A Eq.(2.66) foi deduzida a partir da definição padrão de S_q e utiliza funções de distribuição não-extensivas ordinárias P , não de escolha. Portanto, não é possível obter as equações de fluidos a partir dos momentos da equação cinética Eq.(2.66), uma vez que na descrição através de P as quantidades médias são definidas pelas q -médias (vide Eq.(2.10)). Segundo, nesse mesmo trabalho, o autor começa o desenvolvimento com uma equação semelhante à Eq.(2.45), porém, não indica se as funções c 's foram tomadas iguais à unidade ou se foram acopladas à probabilidade de transição Tr . Caso a segunda opção seja verdadeira, há um descuido do autor ao não informar o novo significado de Tr , uma vez que sua definição usual não depende da estatística especificamente. Terceiro, Chavanis não deixa claro que devem ser as entropias das populações das partículas envolvidas na colisão as utilizadas na determinação das funções G 's, nem mesmo discute as consequências de utilizar q 's únicos ou distintos em G e G_1 .

Toda a dedução analítica do operador de colisões foi mantida propositalmente a mais genérica possível, sem quaisquer novas suposições de hipóteses ou restrições além da hipótese

de fracas interações, o que, portanto, torna a dedução independente das espécies das partículas envolvidas. Assim, basta adicionar as outras espécies à Eq.(2.62) para encontrarmos o operador de colisões de diversas partículas:

$$C_{ab} = \sum_b C_q^{(a,b)} = \sum_b \frac{\partial}{\partial v_{av}} \int d\mathbf{v}_b \frac{K_{\mu\nu}^{(a,b)}}{m_a} \left\{ \frac{f_b}{m_a} \frac{\partial f_a^*}{\partial v_{a\mu}} - \frac{f_a}{m_b} \frac{\partial f_b^*}{\partial v_{b\mu}} \right\}. \quad (2.67)$$

Embora a derivação de nossa generalização do operador de Landau seja parecida com a apresentada por Chavanis, algumas diferenças, que podem parecer sutis a primeira vista, fazem nossos resultados ser uma dedução original e mais robusta. Além das dificuldades para determinação das equações de transporte a partir da Eq.(2.66), o operador de Chavanis, em nossa derivação, ao separar as probabilidades de transição das colisões diretas e inversas, também pudemos separar os parâmetros q 's das funções de distribuição das partículas alvo e incidente. Até onde sabemos, esse é o primeiro modelo colisional que descreve a interação entre populações de partículas com diferentes q 's. Em geral, esse problema é tratado na literatura através do mapeamento das condições iniciais e o acompanhamento de sua evolução no espaço de fase [82]. Esse resultado original poderia, por exemplo, ser utilizado para estudar a integração entre partículas supratérmicas com as populações Maxwellianas do plasma, um área pouquíssimo explorada devido à falta de modelos auto-consistentes para tais interações.

Assim, a equação cinética não-extensiva, na abordagem das funções de distribuição de escolha, para um plasma é

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \nabla f_a + \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} = C_{ab}, \quad (2.68)$$

onde a derivada material no espaço de fase foi substituída por sua expressão explícita no tempo $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_a \cdot \nabla + \mathbf{F}_a/m_a \cdot \partial/\partial \mathbf{v}_a$.

No método KIP, as provas do teorema H e das condições de vínculos (leis de conservação) podem ser apresentadas na sua forma geral, ou seja, antes da substituição do funcional da entropia [93, 97]. Portanto, o q -operador de Landau deduzido aqui satisfaz automaticamente essas propriedades fundamentais.

Uma importante consequência do teorema H é que, não importando as condições iniciais do plasma, as colisões sempre o farão evoluir para um estado estacionário que maximiza a entropia, ou seja, para o estado de equilíbrio determinado por S_q . Além disso, o teorema H também permite supor que em sistemas não muito distantes desse estado, onde podemos supor parâmetros termodinâmicos variando lentamente no espaço e no tempo, a solução da equação cinética pode ser obtida perturbativamente. Essa hipótese é chamada de condição de equilíbrio local e estabelece a Eq.(2.36) como função de distribuição do equilíbrio local, ao supor $n = n(\mathbf{r}, t)$ e $T = T(\mathbf{r}, t)$

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = n(\mathbf{r}, t) A_q \left(\frac{m}{2T(\mathbf{r}, t)} \right)^{3/2} \left(\frac{2}{5 - 3q} \right)^{3/2} A_q \left[1 - (1 - q) \frac{mv^2}{2T(\mathbf{r}, t)} \frac{2}{5 - 3q} \right]^{q/(1-q)} \quad (2.69)$$

Por fim, apenas gostaríamos de destacar que a condição de equilíbrio local imposta pelo teorema H está em perfeita concordância com a descrição de ensembles canônicos proposta e justificada pela eliminação da correlação entre as partículas para $N \gg 1$ como verificado em Eq.(2.26).

Capítulo 3

Equações de Fluidos

3.1 Equações Básicas do Transporte Colisional

Os fenômenos de transporte irreversíveis em plasmas (assim como em outros fluidos) correspondem aos fluxos de partículas, momento e energia decorrentes do sistema encontrar-se fora do equilíbrio termodinâmico. No modelo cinético clássico, esses fenômenos compõem parte do processo de relaxação ao estado equilíbrio termodinâmico, como determina o Teorema H de Boltzmann [4, 59, 66, 67, 96]. Nesta tese de doutorado, estamos interessados no transporte irreversível colisional (ou simplesmente transporte condutivo) envolvendo funções de distribuições de longas caudas. Em linhas gerais, é o transporte decorrente das colisões entre partículas em movimento aleatório que dão origem à fluxos que vão da região de maior concentração para a de menor; em outra palavras, as colisões estabelecem o transporte difusivo em oposição a uma perturbação.

Em plasmas, o transporte condutivo envolve diferentes espécies e quantidades transportada. Portanto, é necessário resolver simultaneamente as equações cinéticas para cada uma das perturbações e espécies. De forma genérica, essas equações podem ser escritas em termos de uma espécie arbitrária “ a ” que colide com as espécies “ b ” (que pode ser “ a ” inclusive):

$$\frac{\partial f_a}{\partial t} + \mathbf{v}_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_a}{m_a} \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}_a} = \sum_b C_{ab}(f_a, f_b), \quad (3.1)$$

onde $\mathbf{v}_a$ é velocidade da partícula, $\mathbf{r}$ a coordenada da posição, m_a a massa, $\mathbf{F}_a = e_a (\mathbf{E}_a + \mathbf{V}_a \times \mathbf{B}/c)$ a força de Lorentz e $C_{ab}(f_a, f_b)$ o operador colisional para as diferentes partículas dado em Eq.(2.67).

Para nosso propósito, é conveniente transformar o sistema de coordenadas $(\mathbf{r}, \mathbf{v}_a, t) \rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{v}'_a, t)$, onde $\mathbf{v}'_a = \mathbf{v}_a - \mathbf{V}_a$ é a velocidade peculiar e $\mathbf{V}_a = \mathbf{V}_a(\mathbf{r}, t)$ a velocidade média (hidrodinâmica) da espécie “ a ”. Nesse novo sistema de coordenadas, as derivadas com relação

à $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ e t são:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{v}'_a}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'_a} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{V}_a}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'_a}; \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial V_{a\mu}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial v'_{a\mu}}; \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'_a}, \quad (3.4)$$

onde o índice grego representa as componentes cartesianas x, y, z e a soma é subentendida quando os índices são repetidos; usaremos essa convenção no restante do texto.

Substituindo as derivadas Eq.(3.2), Eq.(3.3) e Eq.(3.4) na Eq.(3.1), encontramos:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{V}_a}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'_a} + (\mathbf{v}'_a + \mathbf{V}_a) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial V_{a\mu}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial v'_{a\mu}} \right) + \frac{e_a}{m_a} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}_a}{c} \times \mathbf{B} + \frac{\mathbf{v}'_a}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'_a} \right] f_a = C_{ab} \quad (3.5)$$

que em termos da derivada convectiva e do campo elétrico efetivo

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_a \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}; \quad \mathbf{E}'_a = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{V}_a}{c} \times \mathbf{B}, \quad (3.6)$$

resulta na seguinte equação cinética:

$$\frac{df_a}{dt} + \mathbf{v}'_a \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{r}} + \left[\frac{e_a}{m_a} \left(\mathbf{E}'_a + \frac{\mathbf{v}'_a}{c} \times \mathbf{B} \right) - \frac{d\mathbf{V}_a}{dt} \right] \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}'_a} - \mathbf{v}'_{a\mu} \frac{\partial V_{a\nu}}{\partial r_\mu} \frac{\partial f_a}{\partial v_{a\nu}} = \sum_b C_{ab}. \quad (3.7)$$

3.1.1 Equações de Fluidos

O propósito da teoria cinética é descrever a partir de primeiros princípios microscópicos o comportamento macroscópico dos fluidos. Desta forma, um modelo cinético bem fundamentado deve ser capaz de determinar o sistema de equações hidrodinâmicas sem hipóteses adicionais além das definições básicas. Isso pode ser feito a partir da Eq.(3.7) através da *hierarquia de momentos da equação cinética* (ou momentos hidrodinâmicos) [1, 59, 66]. O método é conceitualmente simples: calculamos as médias estatísticas da Eq.(3.7) com a k -ésima potência de v (v^k), onde $k \in \mathbb{N}$ determina a ordem do momento na hierarquia, e então identificamos esses momentos com as definições microscópicas das quantidades básicas para encontrar as respectivas equações de fluidos. Na prática, o conjunto de equações assim obtido é infinito; porém, na grande maioria das aplicações físicas, apenas um número finito de momentos é necessário para descrever razoavelmente bem a dinâmica dos fluidos, quando completado por uma equação de fechamento (em geral, uma equação de estado) [59, 66].

No âmbito do transporte condutivo, apenas os três primeiros momentos hidrodinâmicos da Eq.(3.7) são suficientes. De forma compacta, podemos escrevê-los da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{v}_a \left(1, m\mathbf{v}'_a, \frac{mv_a'^2}{2} \right) \left\{ \frac{df_a}{dt} + \mathbf{v}'_a \cdot \nabla f_a + \left[\frac{e_a}{m_a} \left(\mathbf{E}'_a + \frac{\mathbf{v}'_a}{c} \times \mathbf{B} \right) - \frac{d\mathbf{V}_a}{dt} \right] \cdot \frac{\partial f_a}{\partial \mathbf{v}'_a} - \mathbf{v}'_{a\mu} \frac{\partial V_{a\nu}}{\partial r_\mu} \frac{\partial f_a}{\partial v_{a\nu}} \right\} \\ = \int d\mathbf{v}_a \left(1, m\mathbf{v}'_a, \frac{mv_a'^2}{2} \right) \sum_b C_{ab}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

É importante destacar que os cálculos para a determinação das equações de fluidos em nosso modelo são os mesmos da teoria cinética de Maxwell-Boltzmann, os quais são encontrados em inúmeros livros texto [96, 42, 95, 67, 5]. Isso decorre da recuperação da forma padrão da média estatística e da equação cinética quanto utilizamos funções de distribuição de escolha (vide Eq.(2.5) e Eq.(2.68)). Por esse motivo, também não nos alongaremos nesses cálculos apresentando diretamente o resultado final.

Adotando as condições de contorno usuais da solução da equação cinética, $f(v \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ e $\partial f(v \rightarrow \infty)/\partial \mathbf{v} \rightarrow 0$, o cálculo dos momentos na Eq.(3.9) resulta em:

$$\frac{dn_a}{dt} + n_a \nabla \cdot \mathbf{V}_a = 0, \quad (3.9a)$$

$$n_a m_a \frac{d\mathbf{V}_a}{dt} = -\nabla p_a - \nabla \cdot \Pi_a + e_a n_a \mathbf{E}'_a + \mathbf{V}_a \times \mathbf{B} + \mathbf{R}_a, \quad (3.9b)$$

$$\frac{3}{2} n_a \frac{dT_a}{dt} + p_a \nabla \cdot \mathbf{V}_a + \Pi_{a\mu\nu} \frac{\partial V_{a\mu}}{\partial r_\nu} + \nabla \cdot \mathbf{q}_a = Q_a, \quad (3.9c)$$

onde utilizamos as definições de densidade, pressão hidrostática parcial, velocidade média e temperatura (em unidades de energia) dadas por

$$n_a(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{v}_a f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_a, t); \quad p_a = \int d\mathbf{v}_a \frac{m v_a'^2}{3} f_a = n_a T_a; \quad n_a \mathbf{V}_a = \int d\mathbf{v}_a \mathbf{v}_a f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_a, t); \quad (3.10)$$

$$\frac{3}{2} T_a(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_a} \int d\mathbf{v}_a \frac{m_a (\mathbf{v}_a - \mathbf{V}_a)^2}{2} f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}'_a, t),$$

e as definições das grandezas de não-equilíbrio; o tensor de viscosidade, a densidade de fluxo de calor, a fricção e o calor trocado entre as partículas:

$$\Pi_{a\mu\nu} = \int d\mathbf{v}_a m_a \left(v'_{a\mu} v'_{a\nu} - \frac{\delta_{\mu\nu} v_a'^2}{3} \right) f_a; \quad \mathbf{q}_a = \int d\mathbf{v}_a \frac{m v_a'^2}{2} \mathbf{v}'_a f_a \quad (3.11)$$

$$\mathbf{R}_a = \int d\mathbf{v}_a m_a \mathbf{v}'_a \sum_b C_{ab}(f_a, f_b); \quad Q_a = \int d\mathbf{v}_a \frac{m v_a'^2}{2} C_{ab}(f_a, f_b) \quad (3.12)$$

onde $\delta_{\mu\nu}$ é a função delta de Kronecker. Essas grandezas são denominadas de não-equilíbrio porque são não nulas apenas quando o sistema está fora do equilíbrio colisional.

Com essas definições, e utilizando a equação de estado $p_a = n_a T_a$ (também utilizada na Eq.(3.11)), as soluções das equações hidrodinâmicas nas Eqs.(3.9) estão garantidas se as grandezas de não-equilíbrio forem determinadas em termos de n_a , $\mathbf{V}_a$, T_a , o que necessita da solução da equação cinética da espécie “a”. Na abordagem tradicional da teoria cinética de Maxwell-Boltzmann, esse trabalho é feito através do método de Chapman-Enskog [59, 66, 67] e da determinação dos coeficientes de transporte. Para o objetivo desta tese de doutorado, deveremos adaptar essa metodologia à teoria cinética não-extensiva para um plasma de única componente iônica, determinando assim os fluxos condutivos e seus respectivos coeficientes que generalizam o modelo de Braginskii (Equações de Braginskii) [1, 2].

3.2 Solução da Equação Cinética

O primeiro passo para encontrar as soluções da equação cinética Eq.(3.7) em plasmas de uma única componente iônica ($n_i = n$) é explorar as simplificações do operador colisional entre elétrons e íons devido a razão $m_e/m_i \ll 1$. Para facilitar a comparação entre a generalização e o resultado clássico, vamos organizar o texto seguindo o trabalho de Braginskii [1, 2]. Primeiro apresentaremos as simplificações do operador colisional e a fricção de ordem zero; depois, a dedução das equações cinéticas de zero e primeira ordem através do método de Chapman-Enskog. A solução geral do problema começa com a determinação das equações de fluidos de ordem zero, que posteriormente são utilizadas para simplificar a equação cinética de primeira ordem. Antes de apresentar a solução geral de primeira ordem, vamos utilizar propriedades gerais dos operadores colisionais para provar as de reciprocidade de Onsager, a simetria entre os coeficientes não diagonais da matriz de transporte [5, 98]. Os resultados numérico para os coeficientes de transporte e os fluxos condutivos são deixados para o capítulo seguinte.

3.2.1 Colisões elétron-íon

As colisões elétron-íon são descritas pelo operador Eq.(2.67) (substituindo o tensor de Landau Eq.(A.18)):

$$C_{ei} = \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}_i U_{\mu\nu} \left\{ f_i \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} - \frac{m}{m_i} f \frac{\partial f_i^*}{\partial v_{i\mu}} \right\}, \quad (3.13)$$

onde e é a carga dos elétrons, e_i a carga dos íons, λ o logaritmo de Coulomb, f^* dada pela Eq.(2.65) e suprimimos (doravante seguiremos esta notação) o índice e das quantidades relativas aos elétrons.

Na maioria dos casos de interesse, a velocidade dos íons é muito menor que a dos elétrons, $\mathbf{v}_i \ll \mathbf{v}$ e, portanto, podemos desenvolver $U_{\mu\nu}$ em série de potências de $\mathbf{v}_i$. No referencial dos elétrons em que $\mathbf{V}_i = 0$, os três primeiros termos dessa série são:

$$U_{\mu\nu} \approx V_{\mu\nu} - \frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial v_\eta} v_{i\eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{\mu\nu}}{\partial v_\gamma \partial v_\eta} v_{i\gamma} v_{i\eta}, \quad V_{\mu\nu} = U_{\mu\nu}(\mathbf{v}_i = 0), \quad (3.14)$$

onde:

$$U_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu} u^2 - u_\mu u_\nu}{u^3}; \quad u_\xi = v_\xi - v_{i\xi}. \quad (3.15)$$

Substituindo a expressão aproximada de $U_{\mu\nu}$ em C_{ei} , após desprezar termos ímpares em $v_{i\eta}$ (nulos na integração entre intervalos simétricos) e integrar por partes o segundo termo do operador, encontramos

$$C_{ei} \approx \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}_i \left[f_i \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} V_{\mu\nu} + \frac{m}{m_i} f_i^* \frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial v_\mu} f + \frac{f_i}{2} \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} \frac{\partial^2 V_{\mu\nu}}{\partial v_\gamma \partial v_\eta} v_{i\gamma} v_{i\eta} \right], \quad (3.16)$$

onde utilizamos as condições de contorno $f(v \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ e $f^*(v \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Para os elétrons, os efeitos da viscosidade dos íons pode ser desprezados, logo, o único termo não nulo da integral em $\mathbf{v}_i$ é

$$\int d\mathbf{v}_i v_{i\gamma} v_{i\eta} f_i = \frac{\delta_{\mu\eta}}{3} \int d\mathbf{v}_i v_i^2 f_i = \frac{n_i T_i \delta_{\eta\gamma}}{3}, \quad (3.17)$$

e a partir da definição da pressão hidrostática, entramos:

$$\frac{3}{2} p_i = \delta_{\mu\eta} \int d\mathbf{v}_i \frac{m \mathbf{v}_{i\eta} \mathbf{v}_{i\gamma}}{2} f_i = \frac{3}{2} n_i T_i \quad \Rightarrow \quad p_i = n_i T_i. \quad (3.18)$$

As derivadas do tensor do tensor $V_{\mu\nu}$ são simplificadas com o auxílio das relações:

$$\frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial v_\mu} = -\frac{2v_\nu}{v^3}; \quad V_{\eta\eta} = \frac{\partial^2 v}{\partial v_\eta^2} = \frac{2}{v}, \quad (3.19)$$

em particular, o terceiro termo no interior do colchetes na Eq.(3.16) pode ser reescrito:

$$\frac{\delta_{\gamma\eta}}{2} \frac{\partial^2 V_{\mu\nu}}{\partial v_\eta \partial \gamma} = \frac{\partial^2}{\partial v_\mu \partial v_\nu} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial v_\eta^2} \right) = \frac{3v_\mu v_\nu - v^2 \delta_{\mu\nu}}{v^5}. \quad (3.20)$$

Aplicando as simplificações acima em C_{ei} e integrando em $\mathbf{v}_i$, encontramos

$$C_{ei} = \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n_i}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} - \frac{m}{m_i} \left(\frac{2v_\mu}{v^3} \frac{n_i^*}{n_i} f + \frac{3v_\mu v_\nu - v^2 \delta_{\mu\nu}}{v^5} \frac{T_i}{m} \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} \right) \right], \quad (3.21)$$

onde, podemos aproximar $f_i^* \approx f_{0i}^*$, analogamente à simplificação de k_q (vide Eq.(2.64)), uma vez que $f_1/f_0 \ll 1$, resultando em:

$$n_i^* \approx \int d\mathbf{v}_i f_{0i}^* = n_i \frac{5 - 3q_i}{2} \frac{A_{q_i}}{q_i} \int d\mathbf{x} [1 - (1 - q_i)x^2]^{1/(1-q_i)} = \frac{n_i}{q_i}. \quad (3.22)$$

portanto, a expressão final do operador C_{ei} é

$$C_{ei} = \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n_i}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} - \frac{m}{m_i} \left(\frac{2v_\mu}{v^3} \frac{f}{q_i} + \frac{3v_\mu v_\nu - v^2 \delta_{\mu\nu}}{v^5} \frac{T_i}{m} \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} \right) \right], \quad (3.23)$$

onde $q \rightarrow 1$ e $q_i \rightarrow 1$ recuperam a expressão clássica do operador [1, 2, 96].

Os dois últimos termos da expressão final de C_{ei} são multiplicados pela razão $m/m_i \ll 1$ e podem ser desprezados, de modo que a forma aproximada de C_{ei} utilizada no restante desta será

$$C'_{ei} = \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n_i}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} \right]. \quad (3.24)$$

Se ainda invocarmos a condição de quase neutralidade local do plasma $n \approx n_i$, a única quantidade referente aos íons é a carga e_i ; uma constante. Portanto, as equações dos elétrons e dos íons são desacopladas e podemos analisar a evolução dessas partículas de maneira independente. Mais ainda, em notação vetorial, o operador acima é escrito como

$$C'_{ei} = \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n_i}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\frac{1}{v} \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\mathbf{v}}{v^3} \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{v}} \right) \right], \quad (3.25)$$

onde vemos claramente que o operador se anula na direção $\hat{\mathbf{v}}$ em coordenadas esféricas. Portanto, assim como no operador colisional elétron-íon de ordem zero do caso clássico, os elétrons conservam a magnitude de v na colisão, apenas a trajetória das partículas são alteradas [96]. Em coordenadas esféricas temos que

$$C'_{ei} = \omega_{ei} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f^*}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi^2} \right], \quad (3.26)$$

onde

$$\omega_{ei} = \frac{3\pi^{\frac{1}{2}}}{2\tau} \left(\frac{v_T}{v} \right)^3, \quad (3.27)$$

é frequência de colisão entre elétrons e íons, cujo tempo de relaxação τ é definido como

$$\tau = \frac{3\sqrt{2}T^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2\pi}e^2e_i^2n\lambda}. \quad (3.28)$$

Na Eq.(3.27), podemos ver que $\omega_{ei} \propto v^{-3}$, portanto, o efeito da fricção diminui com o aumento da velocidade dos elétrons. De fato, esse comportamento exprime a diminuição da seção de choque com a velocidade, como mostrado no Apêndice A, uma quantidade independente da estatística do problema [4].

3.2.2 Fricção de Ordem Zero

A fricção de ordem zero é caracterizada por uma pequena perturbação dos íons sobre os elétrons de tal modo que a solução da equação cinética poderá ser aproximada pela função de distribuição de equilíbrio f_0 deslocada por um pequeno fator $\mathbf{U} = \mathbf{V} - \mathbf{V}_i$, ou seja, $f(\mathbf{v} - \mathbf{V}) \approx f_0(\mathbf{v} - \mathbf{U})$. Visto que a perturbação é pequena, a energia térmica dos elétrons no argumento de f_0 será grande o suficiente para sermos capazes de desenvolver essa função de distribuição em série de potências no parâmetro $U/\sqrt{T} \ll 1$. Como esse resultado não dependerá da velocidade dos íons, o que permitirá utilizar C'_{ei} Eq.(3.24), por conveniência, vamos desenvolver em série diretamente f^* e conservar apenas os dois primeiros termos, compatíveis com a ordem zero:

$$f^* \approx f_0^*(v) - \frac{\partial f_0^*(v)}{\partial \mathbf{v}} \cdot \mathbf{U} = \left(1 + \frac{m\mathbf{v} \cdot \mathbf{U}}{qT} \right) f_0(v), \quad (3.29)$$

onde fica clara a independência de V_i em f_0 como consequência do desenvolvimento em série. Se tivéssemos desenvolvido em série f_0 , substituído a expressão resultante em C'_{ei} e depois aplicado novamente a condição de pequena perturbação, o resultado seria o mesmo. Por razões futuras, é útil substituir a expressão acima em C'_{ei} e reescrevê-la de forma compacta com o auxílio da propriedade $V_{\mu\nu}v_\nu = 0$, o que permite escrever a aproximação de ordem zero de C'_{ei} como

$$C'_{ei} \approx \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{mU_\mu}{qT} f_0 \right] \equiv C'_{ei}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{U} f_0). \quad (3.30)$$

A partir da definição da fricção na Eq.(3.12), temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^{(0)} &= \int d\mathbf{v} m\mathbf{v} C_{ei} = \int d\mathbf{v} m\mathbf{v} \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{mU_\mu}{qT} f_0 \right] \\
&= -\frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n}{m^2} \frac{m^2 U_\nu}{qT} \int d\mathbf{v} V_{\mu\nu} f_0 \\
&= -\frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n}{m^2} \frac{nm^2 A_q U_\nu}{qT} \int d\mathbf{x} V_{\mu\nu} [1 - (1-q)x^2]^{q/(1-q)}, \quad (3.31)
\end{aligned}$$

e, utilizando novamente a tabela de integrais [73], calculamos a fricção de ordem zero como:

$$\mathbf{R}^{(0)} = -n^2 e^2 \eta_0 \mathbf{U} = -\frac{\pi^{3/2} A_q}{q} \left(\frac{5-3q}{2} \right)^{-1/2} \frac{nm\mathbf{U}}{\tau}, \quad (3.32)$$

onde τ é o tempo de relaxação dado na Eq.(3.28) e η_0 a resistividade.

É esperado que a fricção diminua com o aumento do número de elétrons mais energéticos no plasma, uma vez que a seção de choque das colisões elétron-íon diminui com o aumento da velocidade [4, 42, 96]. Na Fig.(3.1), vemos que o aumento da cauda da função de distribuição (vide Fig.(2.1)) e, portanto, do número de elétrons com maior velocidade é capaz de produzir tal redução no intervalo $q \in [1, 1.264]$. Por outro lado, a partir do mínimo em $q = 1.264$, a fricção aumenta em função de q , mas mantendo-se abaixo do valor clássico de Braginskii [2]. Isso é efeito da redução da largura da função de distribuição devido a diminuição da importância com o aumento de q , ou seja, a redução de T_q quando $q \rightarrow 1.4$, como vimos no Capítulo 1. Nesse sentido, nosso resultado é interessante pois evidencia naturalmente a redução do efeito das colisões de curto alcance (múltiplas colisões com pequeno ângulo de espalhamento) no transporte à medida que as correlações de longo alcance se tornam mais e mais relevantes, uma hipótese básica assumida *a priori* nos modelos de transporte turbulento [3].

3.3 Método de Chapman-Enskog

O método de Chapman-Enskog consiste no desenvolvimento da equação cinética e operadores colisionais no pequeno parâmetro $\epsilon \ll 1$, de modo que a solução representada pela série $f = \sum_N \epsilon^N f_N$ reuni os termos de mesma ordem dessa expansão na forma de um sistema de n -equações, cuja n -ésima solução depende apenas das $(n-1)$ -ésimas soluções anteriores [59, 66]. É importantíssimo destacar que não estamos desenvolvendo a função de distribuição em série de potências de ϵ ; estamos desenvolvendo a equação cinética propriamente em termos de ϵ e então construindo a solução como uma série ordenada, o que é um procedimento conceitualmente diferente. No primeiro caso, o desenvolvimento em série de n , $\mathbf{V}$ e T em ϵ não resulta necessariamente em uma série ordenada de potências inteiras de ϵ , levando a eventuais problemas na determinação do sistema de equações e na convergência do método [66].

Na aproximação do transporte colisional, apenas os dois primeiros termos da solução são suficientes para aproximar as equações de transporte, uma vez que as perturbações que

Figura 3.1: Comportamento da $R_q^{(0)}/R_1^{(0)}$ como função de q . A diminuição da fricção é consequência das caudas longas da q -distribuição dos elétrons, enquanto o aumento após $q = 1.264$ reflete a supressão do efeito das colisões de curto transporte

deslocam o sistema do equilíbrio são pequenas. Antes de aplicar o método à equação cinética não-extensiva para os elétrons, dada pela Eq.(3.7), a análise das escalas envolvidas no processo de transporte condutivo mostra que é possível separar C'_{ei} como a soma de termos de zero e primeira ordens se definirmos f'_i , uma a função de distribuição dos íons deslocada de modo que a velocidade média dos íons coincida com a velocidade média dos elétrons [96, 2]:

$$C_e(f) + \frac{e}{m} \left(\frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}'} = \epsilon \left[\frac{df}{dt} + \mathbf{v}' \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \left(\frac{e\mathbf{E}'}{m} + \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}'} + C'_{ei}(f, \Delta f_i) \right], \quad (3.33)$$

onde $C_e = C_{ee}(f, f) + C'_{ei}(f, f_i)$ e os termos da direita são pequenos em comparação com os da esquerda e $\Delta f_i = f_i - f'_i$.

Na equação acima, o operador $C'_{ei}(f, f_i)$ não depende da velocidade média dos íons devido a definição de f'_i , i.e., $f'_i(\mathbf{v}'_i) = f'_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{V})$. Portanto, a expressão do operador será a encontrada na Eq.(3.24), onde supomos a velocidade média dos íons igual a zero. Já a outra parte do operador colisional C'_{ei} pode ser escrita da seguinte forma

$$C'_{ei}(f, \Delta f_i) = C'_{ei}(f, f_i(\mathbf{v}'_i) - f'_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{V})) = C'_{ei}(f, f_i(\mathbf{v}'_i) - f'_i(\mathbf{v}'_i - \mathbf{U})), \quad (3.34)$$

ou seja, como uma perturbação em $\mathbf{U}$, análoga àquela encontrada para a fricção de ordem zero em Eq.(3.30). Por se tratar de um termo de pequena ordem, podemos supor $f_i = f_{0i}$ ($f'_i = f'_{0i}$) e desenvolver a perturbação nos íons em série de potências, aproximando-a pelo primeiro termo:

$$\Delta f_i = f_i(\mathbf{v}'_i) - f_i(\mathbf{v}'_i - \mathbf{U}) \approx \mathbf{U} \cdot \frac{\partial f'_{0i}(\mathbf{v}'_i)}{\partial \mathbf{v}'_i} \Big|_{\mathbf{U}=0}, \quad (3.35)$$

como $\mathbf{U} = 0$ implica em $\mathbf{V}_i = \mathbf{V}$, novamente, o operador colisional não dependerá da velocidade dos íons. Substituindo a aproximação de Δf_i na Eq.(3.16), temos

$$C'_{ei} = \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}'_i \frac{\partial f'_{0i}}{\partial v'_{i\eta}} U_\eta \frac{\partial f^*}{\partial v'_\mu} \left(V_{\mu\nu} - \frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial v'_\epsilon} v_{i\epsilon'} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{\mu\nu}}{\partial v'_\epsilon \partial v'_\gamma} v'_{i\epsilon} v'_{i\gamma} \right), \quad (3.36)$$

cuja integral em $\mathbf{v}_i$ (onde as integrais integrais ímpares se anulam) resulta em

$$C_{ei}(\Delta f_i) = \frac{2\pi e^2 e_i^2 n_i \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v'_\nu} \left[\frac{\partial V_{\mu\nu}}{\partial v'_\eta} U_\eta \frac{\partial f^*}{\partial v'_\mu} \right], \quad (3.37)$$

onde utilizamos a propriedade $v'_\mu \partial V_{\mu\nu} / \partial v'_\mu = -V_{\mu\nu}$.

Como termos de ordem $\mathcal{O}(U^2)$ são desprezados, apenas quando $f = f_0$ e $\eta = \mu$ o resultado será não-nulo, portanto, é direta a identificação da expressão acima com Eq.(3.30):

$$C_{ei}(\Delta f_i) = -\frac{2\pi e^2 e_i^2 n_i \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v'_\nu} \left[\frac{m V_{\mu\nu} U_\mu f_0}{qT} \right] = -C'_{ei}(f_0 \mathbf{v}' \cdot \mathbf{U}). \quad (3.38)$$

Com a separação adequada do operador colisional, podemos aplicar o método de Chapman-Enskog à Eq.(3.7) para pequenos deslocamentos, cuja solução geral é aproximada por $f = f_0 + \epsilon f_1$, e encontrar as seguintes equações ao agrupar os termos de mesmo ordem em ϵ :

$$C_{ee}(f_0) + C'_{ei}(f_0) + \frac{e}{m} \left(\frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} = 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{df_0}{dt} + \mathbf{v}' \cdot \nabla f_0 + \left(\frac{e\mathbf{E}'}{m} + \frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}'} + C'_{ei}(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{U} f_0) = I_e(f_1) + \frac{e}{m} \frac{\mathbf{v}'}{c} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}'}. \quad (3.40)$$

onde $I_e(f_1) = I_{ee}(f_1) + I_{ei}(f_1)$, $I_{ee}(f_1) = C_{ee}(f_1, f_0) + C_{ee}(f_0, f_1)$ e $I_{ei}(f_1) = C'_{ei}(f_1, f_i)$ são as versões lineares do q-operador de Landau deduzidas no Apêndice C (respetivamente, nas Eqs.(C.16) e (C.17)) e ainda simplificamos a notação do gradiente para $\partial/\partial \mathbf{r} \equiv \nabla$. No restante da tese, só utilizaremos a velocidade peculiar $\mathbf{v}'$ e, por simplicidade, vamos suprimir o apóstrofo para simplificar a notação.

3.3.1 Solução de Ordem Zero

No Cap.1, Sec.(2.2.1) determinamos f_0 como a função de distribuição de equilíbrio local a partir da maximização de s_q utilizando como vínculos a energia interna e a condição de normalização (densidade de partículas). Vamos mostrar agora que essa função é de fato solução da equação cinética de ordem zero do método de Chapman-Enskog. Por substituição direta, é fácil ver que os três termos da Eq.(3.39) são identicamente nulos; os dois últimos são esfericamente simétricos à $\mathbf{v}$, portanto, o produto escalar é nulo, e o primeiro satisfaz a propriedade $u_\mu U_{\mu\nu} = 0$. A partir da expressão geral do operador colisional na Eq.(2.67), temos que $C_{ee}(f_0)$ é

$$C_{ee} = \frac{2\pi e^2 e^2 \lambda}{m} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}' \left\{ \frac{f'_0}{m_b} \frac{\partial f_0^*}{\partial v_\mu} - \frac{f_0}{m} \frac{\partial f_0'^*}{\partial v'_\mu} \right\} U_{\mu\nu} \quad (3.41)$$

$$= \frac{2\pi e^2 e^2 \lambda}{m} \left(\frac{2}{3} A_q B_q \right)^{-1} \int d\mathbf{v} \left[\frac{v_\mu - v'_\mu}{T_q} \right] f_0 f_0 U_{\mu\nu} = 0, \quad (3.42)$$

onde o apóstrofo apenas diferencia o elétron alvo do incidente na colisão.

Isso mostra que f_0 é a solução de ordem zero, ou seja, representa o equilíbrio colisional do operador generalizado. Além disso, também certifica que podemos utiliza-la para determinar as equações de fluidos de ordem zero a partir dos momentos da equação cinética a partir do método descrito no início deste capítulo. Desprezando termos de primeira ordem (fluxos condutivos) e de ordem m/m_i , os momentos hidrodinâmicos para a solução de ordem zero são:

$$\frac{d \ln n}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{V}; \quad (3.43a)$$

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{e\mathbf{E}}{m} = \frac{\mathbf{R}^{(0)} - \nabla(nT)}{nm}; \quad (3.43b)$$

$$\frac{3}{2} \frac{d \ln T}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (3.43c)$$

onde $\mathbf{R}^{(0)}$ é determinado pela Eq.(3.32).

Essas equações são, respectivamente, a equação da continuidade, de movimento e balanço de energia e já foram encontradas anteriormente através do método de Chapman-Enskog para um fluido simples no contexto da estatística não-extensiva [45, 56]; a exceção da forma explícita de $\mathbf{R}^{(0)}$. De fato, essas equações nada mais são que as equações adiabáticas de um fluido simples, como podemos ver ao subtrair Eq.(3.43) da Eq.(3.43a) e encontrar que $\ln(n/T^{3/2}) = \text{constante}$. Além disso, a menos do termo de fricção, ou seja, $\mathbf{R}^{(0)}$, todos os outros termos dessas equações podem ser deduzidos a partir de argumentos termodinâmicos e mecânicos e, portanto, sua forma geral independe deve independe do modelo estatístico. A recuperação dessas equações não é casuística; como a estatística de Tsallis não altera a mecânica newtoniana [40] e definimos os parâmetros de equilíbrio a fim de manter suas interpretações termodinâmicas ordinárias (vide Eq.(2.24)), a recuperação desse sistema de equações é um atestado de consistência da formulação apresentada.

Também é importante notar que este resultado, juntamente com a recuperação das equações de fluidos ordinárias nas Eqs.(3.9), mostra que apenas as quantidades fora do equilíbrio serão alteradas pela abordagem não-extensiva. Isso mostra que apenas a forma com que o sistema é conduzido ao equilíbrio colisional é altera no nível macroscópico. Logo, o que seria uma perturbação ou um efeito distante do equilíbrio termodinâmico na estatística de Maxwell-Boltzmann, eventualmente, poderá ser considerado um evento próximo do equilíbrio termodinâmico na estatística não-extensiva.

3.3.2 Solução de Primeira Ordem

O primeiro passo para a solução da Eq.(3.40) é calcular as derivadas do lado esquerdo da equação e substituir as derivadas temporais com o auxílio das equações de fluidos de ordem

zero em Eq.(3.43):

$$\frac{d \ln f_0}{dt} = \frac{d \ln n}{dt} + \left(-\frac{3}{2} + q \frac{x^2}{1 - (1 - q)x^2} \right) \frac{d \ln T}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{qx^2}{1 - (1 - q)x^2} \nabla \cdot \mathbf{V}, \quad (3.44)$$

$$\nabla \ln f_0 = \nabla \ln p + \left(-\frac{5}{2} + \frac{qx^2}{1 - (1 - q)x^2} \right) \nabla \ln T, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \ln f_0}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{q}{1 - (1 - q)x^2} \frac{m\mathbf{v}}{T_q}. \quad (3.46)$$

Substituindo as expressões acima na equação cinética original, desprezando $\partial V_\nu / \partial v_\mu$, uma vez que não trataremos da viscosidade, encontramos:

$$\left[\left(1 - \frac{qT/T_q}{1 - (1 - q)x^2} \right) \nabla \ln p + \left(-\frac{5}{2} + \frac{qx^2}{1 - (1 - q)x^2} \right) \nabla \ln T + \frac{q \left(\frac{\mathbf{R}^{(0)} + \mathbf{R}^{(1)}}{nT_q} \right)}{1 - (1 - q)x^2} \right] \cdot \mathbf{v} f_0 \quad (3.47)$$

$$+ C'_{ei}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{U} f_0) = I_e(f_1) + \frac{e}{m} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}.$$

Observamos ainda que $\mathbf{R}^{(1)}$ aparece na equação através do processo de eliminação da derivadas temporais, e é resultado do ordenamento em ϵ imposto pelo método de Chapman-Enskog [2]. Expecificamente, quando utilizamos a Eq.(3.43b), a equação de movimento de ordem zero, para eliminar $e\mathbf{E}'/m + d\mathbf{V}/dt$ da equação de primeira ordem, a fricção resultante da integração $C'_{ei}(f_1)$ contem o termo $\mathbf{R}^{(1)}$, o qual não é desprezível como na aproximação de ordem zero.

Antes de dar prosseguimento, vamos reescrever os termos de $\nabla \ln p$ e $\nabla \ln T$ de forma conveniente; para $\nabla \ln T$:

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2} + \frac{qx^2}{1 - (1 - q)x^2} &= \frac{-\frac{5}{2} + \frac{5 - 3q}{2} \left[-\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{1 + q}{2} x^2 \right] \frac{2}{1 + q}}{1 - (1 - q)x^2} \\ &= \frac{10 \frac{1 - q}{1 + q} - \frac{5 - 3q}{1 + q} \left\{ \frac{5}{2} - \frac{1 + q}{2} x^2 \right\}}{1 - (1 - q)x^2}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Para $\nabla \ln p$:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(1 - q)x^2 - q \frac{2}{5 - 3q}}{1 - (1 - q)x^2} &= \frac{5(1 - q) - (1 - q)(5 - 3q) \frac{5}{2} \frac{2}{1 + q} + \left[\frac{5}{2} - \frac{1 + q}{2} x^2 \right] \frac{2}{1 + q}}{(5 - 3q)(1 - (1 - q)x^2)} \\ &= \frac{-10 \frac{(1 - q)^2}{1 + q} \left(\frac{5 - 3q}{2} \right)^{-1} + 2 \frac{1 - q}{1 + q} \left\{ 5 - \frac{1 + q}{2} x^2 \right\}}{(1 - (1 - q)x^2)}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Os termos entre chaves nas Eqs.(3.49) e (3.48) são as expressões do polinômio de Jacobi de primeiro grau com $\alpha = 3/2$ e $\beta = 1/(1 - q)$ [73], o qual será representado aqui pela seguinte expressão:

$$P_1^{(3/2, 1/(1-q))}(x^2) \equiv L_1^{3/2}(x^2; q) = -\frac{5}{2} + \frac{1+q}{2}x^2, \quad (3.50)$$

uma vez que o limite $q \rightarrow 1$ recupera os polinômios de Laguerre associados [99, 100].

Algumas de suas propriedades matemáticas e sua definição podem ser vistas no Apêndice B; aqui nos restringiremos a apresentar apenas a relação de ortogonalidade [100]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dy y^\alpha [1 - (1 - q)y]^{q/(1-q) - \ell - k - \alpha - 1/2} L_\ell^\alpha(y; q) L_k^\alpha(y; q) = \\ = \frac{2^{-2/(1-q)}}{(1 - q)^2 \ell!} \frac{\delta_{\ell k} \Gamma\left(-\frac{1}{1-q} + \ell + \frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{1-q} + 2\ell + \alpha + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{1-q} + \ell + \alpha + \frac{1}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde $\ell, k \in \mathbb{N}$ e $\delta_{\ell k}$ é o delta de Kronecker.

Substituindo as Eqs.(3.48), (3.49) e (3.50) na Eq.(3.40), a equação cinética para f_1 fica:

$$\begin{aligned} \left[\left(10 \frac{1-q}{1+q} - \frac{5-3q}{1+q} L_1^{3/2}(x^2; q) \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T + \left(2 \frac{1-q}{1+q} \left(10 \frac{q-1}{5-3q} \right) + L_1^{3/2}(x^2; q) \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \ln p \right. \\ \left. + \frac{q(\mathbf{R}^{(0)} + \mathbf{R}^{(1)}) \cdot \mathbf{v}}{nT_q} \right] \frac{f_0}{1 - (1 - q)x^2} + C_{ei}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{U} f_0) = I_e(f_1) + \frac{e}{m} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

A equação acima é linear, logo, f_1 pode ser escrita como a combinação linear de funções, onde cada termo é proporcional a uma perturbação do lado esquerdo, i.e., $\nabla \ln T$, $\nabla \ln p$ e $\mathbf{U}$ (em $\mathbf{R}$); a forma geral da solução é então dada por

$$f_1 = A_T(\mathbf{v}) f_0 \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T + A_p(\mathbf{v}) f_0 \mathbf{v} \cdot \nabla \ln p + A_U(\mathbf{v}) f_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{U} \equiv f_T + f_p + f_U, \quad (3.53)$$

onde as funções $A(\mathbf{v})$ devem satisfazer as condições:

$$\int d\mathbf{v} f_1 = 0; \quad \int d\mathbf{v} \mathbf{v} f_1 = 0; \quad \int d\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} f_1 = 0, \quad (3.54)$$

impostas pelo método de Chapman-Enskog e que garantem as leis de conservação (partículas, momento e energia) e a existência da solução [67, 66, 59].

A decomposição da solução geral também permite separar a Eq.(3.52) em equações independentes para cada uma das perturbações:

$$\frac{\left\{ \left[10 \frac{1-q}{1+q} - \frac{5-3q}{1+q} L_1^{3/2}(x^2; q) \right] \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T + \frac{q\mathbf{R}_T \cdot \mathbf{v}}{nT_q} \right\} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(f_T) + \frac{e}{m} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial f_T}{\partial \mathbf{v}}; \quad (3.55a)$$

$$\frac{\left\{ 2 \frac{1-q}{1+q} \left(10 \frac{q-1}{5-3q} + L_1^{3/2}(x^2; q) \right) \mathbf{v} \cdot \nabla \ln p + \frac{q\mathbf{R}_p \cdot \mathbf{v}}{nT_q} \right\} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(f_p) + \frac{e}{m} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{v}}; \quad (3.55b)$$

$$\frac{q(\mathbf{R}_U + \mathbf{R}_q^{(0)})}{nT_q} \cdot \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} + C'_{ei}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{U} f_0) = I_e(f_U) + \frac{e}{m} \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial f_U}{\partial \mathbf{v}}, \quad (3.55c)$$

onde cada uma das soluções determina, portanto, parte do fluxo total de partículas e calor correspondente a sua perturbação. Isso fica evidente quando substituímos a Eq.(3.53) nas definições microscópicas dos fluxos (vide Eq.(3.12)) e encontramos:

$$\mathbf{q} = \int d\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} \mathbf{v} f_1 = \int d\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} \mathbf{v} (f_T + f_p + f_U) = \mathbf{q}_T + \mathbf{q}_p + \mathbf{q}_U; \quad (3.56a)$$

$$\mathbf{R}^{(1)} = \int d\mathbf{v} m\mathbf{v} I_{ei}(f_1) = \int d\mathbf{v} m\mathbf{v} I_{ei}(f_T + f_p + f_U) = \mathbf{R}_T + \mathbf{R}_p + \mathbf{R}_U, \quad (3.56b)$$

onde $\mathbf{q}_U$ e $\mathbf{R}_T$ são fluxos termo-elétricos, $\mathbf{q}_T$ o fluxo de calor, $\mathbf{R}_U$ a fricção (fluxo de partículas) e os fluxos $\mathbf{q}_p$ e $\mathbf{R}_p$ componentes dos fluxos exclusivas da estatística não-extensiva que não possuem contrapartida na teoria cinética clássica, ou seja, desaparecem no limite $q \rightarrow 1$.

A existência desses fluxos condutivos, exclusivos da teoria cinética não-extensiva, já havia sido apreciada em trabalhos anteriores [45, 56], onde modelos colisionais do tipo BGK [57, 96, 41] foram utilizados para calcular os coeficientes de transporte. Em nossa derivação, esses fluxos aparecem naturalmente como consequência do não cancelamento dos termos em ∇p , vindos de ∇f_0 e $\partial f_0 / \partial \mathbf{v}$. Particularmente, o termo $\partial f_0 / \partial \mathbf{v}$, que é associada à força atuante no plasma, depende de q de tal forma que o cancelamento em questão não ocorre, como podemos ver na Eq.(3.48).

A linearidade da solução com relação às perturbações implica na recuperação das relações bilineares entre forças termodinâmicas (perturbações) e fluxos, características do transporte irreversível clássico, ou seja, das conhecidas leis de Fourier, Fick, Ohm e etc [5, 95, 96, 98]. A determinação das expressões analíticas desses fluxos condutivos a partir das definições dadas na Eq.(3.12) é análoga. Isso permite desenvolver os cálculos a seguir por meio de uma perturbação genérica $\mathbf{w} = (\nabla \ln T, \nabla \ln p, \mathbf{U})$, associada às soluções $f_w = A_w \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ das equações cinéticas independentes. Nesses termos, o fluxo de calor definido em Eq.(3.56a) para f_w é:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_w &= \int d\mathbf{v} \frac{mv^2}{2} \mathbf{v} f_w - \int d\mathbf{v} \frac{5T_q}{1+q} \mathbf{v} f_w = -\frac{2T_q}{1+q} \int d\mathbf{v} \left(\frac{5}{2} - \frac{mv^2}{2T_q} \right) \mathbf{v} f_w \\ &= -\frac{2T_q}{1+q} \int d\mathbf{v} L_1^{3/2}(x^2; q) \mathbf{v} f_U = -\frac{2T_q}{1+q} \int d\mathbf{v} L_1^{3/2}(x^2; q) \mathbf{v} A_w f_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \\ &= -\frac{2T_q}{3(1+q)} \left[\int d\mathbf{v} v^2 L_1^{3/2}(x^2; q) A_w f_0 \right] \mathbf{w}. \end{aligned}$$

onde utilizamos a condição $\int d\mathbf{v} \mathbf{v} f_w = 0$ na primeira igualdade e supusemos as funções A_w independentes dos ângulos na integração (tal suposição não é perfeitamente consistente no momento, porém, como veremos, com os devidos desenvolvimentos matemáticos isso será verdade).

Assim, a equação do transporte de calor e seu coeficiente de transportes são, respectivamente:

$$\mathbf{q}_w = -\kappa_w \mathbf{w}; \quad \kappa_w = \frac{2}{3} \frac{T_q}{1+q} \int d\mathbf{v} v^2 L_1^{3/2}(v^2; q) f_0 A_w, \quad (3.57)$$

onde as perturbações são $\mathbf{w} = (\nabla \ln T, \nabla \ln p, \mathbf{U})$ de acordo com a solução geral em Eq.(3.53).

A fricção é calculada a partir do operador de colisões elétron-íon linearizado Eq.(C.17) como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_w &= \int d\mathbf{v} m\mathbf{v} I_{ei}(f_w) = \int d\mathbf{v} m\mathbf{v} \frac{2\pi e^2 e_i^2 n\lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[(1 - (1-q)x^2) A_w f_0 \right] \right] \\
&= \int d\mathbf{v} m\mathbf{v} \frac{2\pi e^2 e_i^2 n\lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{5-3q}{2q^2} f_0 \left[1 - (1-q)x^2 \right] A_w \delta_{\mu\eta} w_\eta \right] \\
&= - \int d\mathbf{v} m \frac{2\pi e^2 e_i^2 n\lambda}{m^2} \left[V_{\mu\nu} \frac{5-3q}{2q^2} f_0 \left[1 - (1-q)x^2 \right] A_w \delta_{\mu\nu} w_\eta \right].
\end{aligned}$$

Na expressão acima, as componentes w_η da perturbação não dependem das integrais angulares, portanto, podem ser removidas do integrando como um vetor. Também vamos utilizar que $3 = \delta_{\mu\mu} = \partial v_\mu / \partial v_\mu$ para escrever:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_w &= - \left[\int d\mathbf{v} m \frac{2\pi e^2 e_i^2 n\lambda}{m^2} \left[V_{\mu\nu} \frac{5-3q}{2q^2} f_0 \left[1 - (1-q)x^2 \right] A_w \frac{\delta_{\mu\nu}}{3} \frac{\partial v_\mu}{\partial v_\mu} \right] \right] \mathbf{w}; \\
&= \frac{1}{3} \left[\int d\mathbf{v} m v_\mu \frac{2\pi e^2 e_i^2 n\lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{5-3q}{2q^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[[1 - (1-q)x^2] f_0 A_w \right] \right] \right] \mathbf{w}; \\
&= \left[\frac{1}{3} \int d\mathbf{v} m v_\mu I_{ei}(v_\mu A_w) \right] \mathbf{w},
\end{aligned}$$

onde identificamos, respectivamente, as equações fenomenológicas da fricção e seus coeficientes de transporte como:

$$\mathbf{R}_w = -\eta_w \mathbf{w}; \quad \eta_w = -\frac{1}{3} \int d\mathbf{v} m\mathbf{v} \cdot C'_{ei}(\mathbf{v} A_w). \quad (3.58)$$

Também devemos considerar incluir explicitamente na solução o alinhamento do fluxo em relação ao campo magnético, uma vez que o transporte condutivo em plasmas intensamente magnetizados depende drasticamente da direção de $\mathbf{B}$. Isso é feito ao decompor as soluções das equações cinéticas independentes nas direções paralela ($\parallel$), perpendicular ($\perp$) e binormal (diamagnética, $\wedge$) do campo (vide Fig.(3.2)). É importante destacar que a componente diamagnética é definida como $\mathbf{w}_\wedge \equiv \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{w}$, onde $\boldsymbol{\Omega} = e\mathbf{B}/(mc)$ é a frequência de giração dos elétrons na forma vetorial. Evidentemente, $\mathbf{w}_\wedge$ não tem as unidades de medidas corretas, nem $\boldsymbol{\Omega}$ dá a direção correta do elétrons no movimento orbital; são definições conveniente e cujos propósitos ficarão claros no decorrer do texto.

Novamente, como o procedimento é igual para as três equações, far-nos-emos novamente em termos da perturbação genérica $\mathbf{w} = (\nabla \ln T, \nabla \ln p, \mathbf{U})$, reescrevendo a solução geral como:

$$f_w = A_w^\parallel(v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\parallel + A_w^\perp(v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\perp + A_w^\wedge(v) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\wedge, \quad (3.59)$$

onde $A_w^\parallel$, $A_w^\perp$ e $A_w^\wedge$ são funções arbitrárias decompostas, respectivamente, nas direções paralela, perpendicular e diamagnética. Apontamos ainda que a decomposição vetorial das

soluções determina os novos A_w 's apenas como funções da magnitude da velocidade (v), em contraste com a solução dada na Eq.(3.53), onde a inclusão das direções da velocidade ($\mathbf{v}$) nas funções arbitrárias é obrigatória. De fato, a linearidade das equações implica que o acoplamento das equações pelo produto vetorial (vide Eq.(3.55)) também deverá ser linear e, portanto, escrito apenas em função do A_w respectivo à sua direção; essa característica da solução ficará clara quando determinarmos os A_w 's condicionados os método de Chapman-Enskog.

Figura 3.2: Esboço das direções paralela ($||$), perpendicular ($\perp$) e binormal (diamagnética - $\wedge$) em termos das direções do $\mathbf{B}$.

Com a decomposição da solução explicitamente nas direções do campo magnético cada uma das equações vetoriais nas Eq.(3.55) pode ser escrita em termos da suas componentes, totalizando assim um sistema de nove equações. Fortuitamente, podemos reduzir esse número desprezando as soluções paralelas, uma vez que podemos obtê-las a partir das soluções perpendiculares no limite $B \rightarrow 0$, e acoplando as equações perpendiculares e diamagnética de cada perturbação.

Isso é feito a partir do desenvolvimento algébrico do produto vetorial que acopla equações do lado direito do sistema de equações Eqs.(3.55). Escrevendo a frequência de giração dos elétrons na forma vetorial (novamente, $\boldsymbol{\Omega} = e\mathbf{B}/(mc)$), o produto vetorial a ser desenvolvido em termos f_w é:

$$(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{v}} = \begin{cases} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [A_w^\perp \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\perp] & (i) \\ (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [A_w^\wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\wedge] & (ii) \end{cases} \quad (3.60)$$

Desprezando $\partial A_w \partial \mathbf{v}$, pois se anulam com o vetor $\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$, o termo (i) é:

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [A_w^\perp \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\perp] &= A_w^\perp \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\perp] \\ &= A_w^\perp (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \left[\left(\mathbf{w}_\perp \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \right] \\ &= A_w^\perp (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \left[(\mathbf{w} - \mathbf{w}_\parallel) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \mathbf{v} \right] \\ &= -A_w^\perp \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{w}) = -A_w^\perp \boldsymbol{\omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\wedge, \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde utilizamos $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$ na última igualdade.

Para (ii), temos:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [A_w^\wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\wedge] &= (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[A_w^\wedge \frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \cdot \left(\mathbf{w}_\perp \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \mathbf{v} \right] \\
&= (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\frac{\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega} \cdot \mathbf{w}_\perp \right] A_w^\wedge \\
&= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left[\frac{(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})^2}{2\Omega} \right] \mathbf{w}_\perp A_w^\wedge,
\end{aligned} \tag{3.62}$$

onde utilizamos o resultado encontrado em (i), para escrever a primeira igualdade, e a propriedade

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})^2}{2} \right) &= \left[(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \times \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \right) \\
&= \left[(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right] (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}).
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Como:

$$(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})^2 = v^2 \omega^2 - (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega})^2}{2} = \omega^2 \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \boldsymbol{\Omega}, \tag{3.64}$$

então:

$$(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} [A_w^\wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\wedge] = A_w^\wedge \Omega \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\perp. \tag{3.65}$$

O lado direito das Eqs.(3.55) têm a mesma forma; a substituição dos termos magnéticos desenvolvidos, Eq.(3.65) e Eq.(3.61), nessas equações resulta seguinte:

$$[I_e (A_w^\perp \mathbf{v}) + \Omega \mathbf{v} A_w^\wedge] \cdot \mathbf{w}_\perp + [I_e (A_w^\wedge \mathbf{v}) - \Omega \mathbf{v} A_w^\perp] \cdot \mathbf{w}_\wedge, \tag{3.66}$$

onde a linearidade dos operadores é invocada para que $\mathbf{w} = (\nabla \ln T, \nabla \ln p, \mathbf{U})$ possa ser fatorizado.

Analisando o lado esquerdo dessas equações, cuja fricção é, sem perda de generalidade, definida como:

$$\frac{q \mathbf{R}_w}{n T_q} = \alpha_\perp^w \mathbf{w}_\perp + \alpha_\wedge^w \mathbf{w}_\wedge, \tag{3.67}$$

onde $\alpha_w = q n e^2 \eta_w / T_q$ (vide Eq.(3.58)) e a linearidade garante a extensão da fricção calculada na Eq.(3.58) à cada uma das componentes. Em outras palavras, as formulas gerais dos coeficientes de transporte é a mesma, as diferentes dependências com o campo magnético aparecem dentro das funções A_w para cada direção. Nesse contexto, a independência das funções A_w com as direções angulares da velocidade garante que o cálculo dos coeficientes de transporte em Eq.(3.57) e Eq.(3.58) estão perfeitamente consistentes.

Em analogia às Eqs.(3.55), a equação cinética genérica para f_w é escrita como:

$$\left[F(x^2, q) \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \frac{q \mathbf{R}_w}{n T_q} \right] \frac{f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(f_w) + \frac{e}{m} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_w}{\partial \mathbf{v}}, \quad (3.68)$$

onde $F(x^2, q)$ representam as expressões multiplicativas de $\nabla \ln p$, $\nabla \ln T$ e $\mathbf{U}$. Se substituírmos nessa equação a Eq.(3.66) e a Eq.(3.67), encontraremos

$$\begin{aligned} & \frac{([F(x^2, q) + \alpha_\perp^w] \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\perp + \alpha_\wedge^w \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_\wedge) f_0}{1 - (1 - q)x^2} = \\ & = [I_e(A_w^\perp \mathbf{v}) + \Omega \mathbf{v} A_w^\wedge] \cdot \mathbf{w}_\perp + [I_e(A_w^\wedge \mathbf{v}) - \Omega \mathbf{v} A_w^\perp] \cdot \mathbf{w}_\wedge, \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde fica evidente a separação entre os termos $\mathbf{w}_\perp$ e $\mathbf{w}_\wedge$, permitindo o desacoplamento desses termos em equações distintas

$$\begin{cases} (F(x^2, q) + \alpha_\perp^w) \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_w^\perp \mathbf{v}) + \Omega \mathbf{v} A_w^\wedge, \\ \alpha_\wedge^w \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_w^\wedge \mathbf{v}) - \Omega \mathbf{v} A_w^\perp. \end{cases} \quad (3.70)$$

Em termos das perturbações reais, as equação acima ficam

$$\begin{cases} \left[\left(10 \frac{1-q}{1+q} - \frac{5-3q}{1+q} L_1^{3/2}(x^2; q) \right) + \alpha_\perp^T \right] \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_T^\perp \mathbf{v}) + \Omega \mathbf{v} A_T^\wedge; \\ \alpha_\wedge^T \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_T^\wedge \mathbf{v}) - \Omega \mathbf{v} A_T^\perp; \end{cases} \quad (3.71)$$

$$\begin{cases} \left[2 \frac{1-q}{1+q} \left(10 \frac{q-1}{5-3q} + L_1^{3/2}(x^2; q) \right) + \alpha_\perp^p \right] \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_p^\perp \mathbf{v}) + \Omega \mathbf{v} A_p^\wedge; \\ \alpha_\wedge^p \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_p^\wedge \mathbf{v}) - \Omega \mathbf{v} A_p^\perp; \end{cases} \quad (3.72)$$

$$\begin{cases} C'_{ei}(\mathbf{v} f_0) + \{\eta_0 + \alpha_\perp^U\} \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_U^\perp \mathbf{v}) + \Omega \mathbf{v} A_U^\wedge f_0; \\ \alpha_\wedge^U \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_U^\wedge \mathbf{v}) - \Omega \mathbf{v} A_U^\perp, \end{cases} \quad (3.73)$$

onde $\eta_0 = A_q \pi^{3/2} ((5 - 3q)/2)^{-1/2} q^{-1} m / (n e^2 \tau)$ é o coeficiente de $\mathbf{R}^{(0)}$.

Se definirmos $A_w = A_w^\perp + i \Omega A_w^\wedge$ e $\alpha_w = \alpha_\perp^w + i \Omega \alpha_\wedge^w$, podemos acoplar as partes perpendicular e diamagnética, reduzindo o número de equações à três:

$$\left[10 \frac{1-q}{1+q} - \frac{5-3q}{1+q} L_1^{3/2}(x^2; q) + \alpha_T \right] \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_T \mathbf{v}) - i \Omega A_T \mathbf{v} f_0; \quad (3.74a)$$

$$\left[2 \frac{1-q}{1+q} \left(10 \frac{q-1}{5-3q} + L_1^{3/2}(x^2; q) \right) + \alpha_p \right] \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_p \mathbf{v}) - i \Omega A_p \mathbf{v} f_0; \quad (3.74b)$$

$$C'_{ei}(\mathbf{v} f_0) + [\eta_0 + \alpha_U] \frac{\mathbf{v} f_0}{1 - (1 - q)x^2} = I_e(A_U \mathbf{v}) - i \Omega A_U \mathbf{v} f_0. \quad (3.74c)$$

Nosso trabalho agora se resume a determinar as soluções explícitas das equações independentes acima, as funções arbitrárias A , necessárias para calcular os coeficientes de transporte a partir das expressões gerais Eq.(3.57) e Eq.(3.58). Porém, podemos explorar essas equações em sua forma geral e mostrar que as relações de simetria de Onsager [5, 98] também são satisfeitas em nosso modelo. Essas relações já haviam sido provadas na estatística não-extensiva [101, 102], porém, em um formalismo antigo (sem as q -médias) e sem calcular explicitamente as equações de transporte. Em comparação direta com essas provas, no resultado mostrará a validade dessas importantes propriedades dos coeficientes de transporte no formalismo das q -médias e funções de distribuição de escolta; também se trata de mais um teste de consistência de nosso modelo, especialmente do operador colisional, o qual deduzimos de maneira auto-consistente com a estatística não-extensiva.

Levando em consideração as diferentes direções do campo magnético, o fluxo de calor termoeletrico dado pela Eq.(3.57) é

$$\mathbf{q}_U = -\alpha_\perp^U nT \mathbf{U}_\perp - \alpha_\wedge^U nT \mathbf{U}_\wedge; \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} \alpha_U &= \alpha_\perp^U + i\Omega \alpha_\wedge^U = \frac{5-3q}{3n(1+q)} \int d\mathbf{v} v^2 L_1^{3/2}(v^2; q) (A'_U + i\Omega A''_U) f_0 \\ \alpha_U &= \frac{5-3q}{3n(1+q)} \int d\mathbf{v} v^2 L_1^{3/2}(v^2; q) A_U f_0, \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde explicitamos o termo nT a fim de tornar α adimensional e facilitar a comparação.

O mesmo procedimento pode ser feito para a fricção termoeletrica dada pela Eq.(3.58),

$$\frac{q\mathbf{R}_T}{nT_q} = -\alpha_\perp^T \nabla_\perp \ln T - \alpha_\wedge^T \nabla_\wedge \ln T; \quad (3.77)$$

$$\begin{aligned} \alpha_T &= \alpha_\perp^T + i\Omega \alpha_\wedge^T = -\frac{q}{3nT_q} \int d\mathbf{v} m \mathbf{v} \cdot I_{ei}(\mathbf{v} [A'_T + i\Omega A''_T]) \\ \alpha_T &= -\frac{q}{3nT_q} \int d\mathbf{v} m \mathbf{v} \cdot I_{ei}(\mathbf{v} A_T), \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde utilizamos a expressão geral de $\mathbf{R}_w$ dada em Eq.(3.67).

Para demonstrar a igualdade entre os coeficientes α_U e α_T , primeiro multiplicamos a Eq.(3.74a) por $A_U \mathbf{v} [1 - (1-q)x^2]$ e integramos em todo o espaço de fase das velocidades:

$$\int d\mathbf{v} A_U \frac{\mathbf{v} \cdot (I_e(A_T \mathbf{v}) + i\Omega \mathbf{v} A_T f_0)}{[1 - (1-q)x^2]^{-1}} = -3 \frac{5-3q}{2(1+q)} \frac{1}{3} \int d\mathbf{v} v^2 L_1^{3/2}(x^2; q) f_0 A_U, \quad (3.79)$$

onde utilizamos a relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi dada na Eq.(3.51) para eliminar os termos do lado direito da equação que não são proporcionais à $L_1(x^2; q)$.

Comparando com a definição do coeficiente termoeletrico no fluxo de calor dado na Eq.(3.76), encontramos:

$$\int d\mathbf{v} A_U [1 - (1-q)x^2] \mathbf{v} \cdot (I_{ee}(A_T \mathbf{v}) + I_{ei}(A_T \mathbf{v}) + i\Omega \mathbf{v} A_T f_0) = -3n\alpha_U. \quad (3.80)$$

Analogamente, multiplicamos a Eq.(3.74c) por $[1 - (1 - q)x^2] \mathbf{v} A_T$ e integrando em $\mathbf{v}$, temos

$$\int d\mathbf{v} A_T \frac{\mathbf{v} \cdot (I_e(\mathbf{v} A_U) + i\Omega \mathbf{v} A_U f_0)}{[1 - (1 - q)x^2]^{-1}} = \int d\mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2] A_T \mathbf{v} \cdot C'_{ei}(\mathbf{v} f_0). \quad (3.81)$$

Trabalhando o lado direito desta equação, utilizando novamente $3 = \delta_{\mu\mu} = \partial v_\mu / \partial v_\mu$, chegamos à

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{v} \frac{A_T \mathbf{v} \cdot C'_{ei}(\mathbf{v} f_0)}{[1 - (1 - q)x^2]^{-1}} &= -3 \int d\mathbf{v} m \frac{\delta_{\mu\mu}}{3} \delta_{\mu\nu} V_{\mu\nu} \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n}{m^2} [1 - (1 - q)x^2] \frac{f_0}{qT} A_T \\ &= \frac{q}{T_q} \int d\mathbf{v} m v_\mu \frac{2\pi e^2 e_i^2 n \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{5 - 3q}{2q^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} [(1 - (1 - q) A_T f_0 v_\mu)] \right], \\ &= -\frac{q}{3nT_q} \int d\mathbf{v} m \mathbf{v} \cdot I_{ei}(\mathbf{v} A_T), \end{aligned}$$

onde a última igualdade foi estabelecida a partir da Eq.(C.17), Apêndice C, para o operador colisional linearizado. Comparando esta equação com a Eq.(3.78), determinamos que

$$\int d\mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2] A_T \mathbf{v} \cdot (I_{ee}(\mathbf{v} A_U) + I_{ei}(\mathbf{v} A_U) + i\omega \mathbf{v} A_U f_0) = -3n\alpha_T. \quad (3.82)$$

Através da propriedade auto-adjunta dos operadores linearizados apresentada na Eq.(C.22) do Apêndice C, é verdade que

$$\int d\mathbf{v} \frac{A_T \mathbf{v} \cdot (I_e(\mathbf{v} A_U) + i\Omega \mathbf{v} A_U f_0)}{[1 - (1 - q)x^2]^{-1}} = \int d\mathbf{v} \frac{A_U \mathbf{v} \cdot (I_e(\mathbf{v} A_T) + i\Omega \mathbf{v} A_T f_0)}{[1 - (1 - q)x^2]^{-1}}, \quad (3.83)$$

logo, assim também são os lados esquerdos das Eqs.(3.82) e (3.80) e, portanto, os coeficientes dos termoeletrônicos, isto é, $\alpha_U = \alpha_T$, provando as relações de simetria de Onsager. É muito importante observar que a prova apresentada contempla automaticamente os coeficientes de transporte nas três direções, uma vez que $\alpha = \alpha_\perp + i\Omega \alpha_\parallel$ e $\alpha_\parallel = \lim_{B \rightarrow 0} \alpha_\perp$.

O mesmo procedimento também pode ser aplicado à Eq.(3.74b) para obtermos relações entre os coeficientes de transporte dos fluxos ordinários (proporcionais à ∇T e $\mathbf{U}$) e os novos coeficientes de transporte do fluxo exclusivo da teoria cinética não-extensiva. Multiplicando a equação cinética independente para A_P , em ambos os lados, por $[1 - (1 - q)x^2] A_T \mathbf{v}$ e integrando nas velocidades, levando em consideração novamente a ortogonalidade dos polinômios de Jacobi, encontramos

$$\int d\mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2] A_T \mathbf{v} \cdot [I_e(A_P \mathbf{v}) + i\Omega \mathbf{v} A_P f_0] = 2 \frac{1 - q}{1 + q} \int d\mathbf{v} v^2 L_1^{3/2}(x^2; q) A_T f_0. \quad (3.84)$$

Identificando o lado direito da equação com a condutividade térmica associada ao ∇T e definida na Eq.(3.57), podemos escrever

$$\int d\mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2] A_T \mathbf{v} \cdot [I_e(A_P \mathbf{v}) + i\Omega \mathbf{v} A_P f_0] = \frac{3(1 - q)\kappa_T}{5 - 3q}. \quad (3.85)$$

Do mesmo modo, multiplicando a Eq.(3.74a) por $A_p \mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2]$ e integrando nas velocidades

$$\int d\mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2] A_p \mathbf{v} \cdot [I_e (A_T \mathbf{v}) + i\Omega \mathbf{v} A_T f_0] = -\frac{5 - 3q}{1 + q} \int d\mathbf{v} v^2 L_1^{3/2} (x^2; q) A_T f_0 \quad (3.86)$$

cujo lado direito é identificado novamente com a condutividade térmica definida na Eq.(3.57), mas agora para a perturbação ∇p :

$$\int d\mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2] A_p \mathbf{v} \cdot [I_e (A_T \mathbf{v}) + i\Omega \mathbf{v} A_T f_0] = -3\kappa_p. \quad (3.87)$$

Utilizando novamente a propriedade auto-adjunta do operador, podemos comparar as equações Eqs.(3.85) e (3.87) e encontrar a seguinte igualdade

$$\kappa_p = \frac{2(q - 1)}{5 - 3q} \kappa_T. \quad (3.88)$$

Procedendo da mesma forma, podemos encontrar a relação entre as resistividades dos fluxos acionados por ∇T e ∇p ; multiplicando a Eq.(3.74c) por $[1 - (1 - q)x^2] A_p \mathbf{v}$ e integrando sobre $\mathbf{v}$, obtemos

$$\int d\mathbf{v} A_p \frac{\mathbf{v} \cdot [I_e (A_U \mathbf{v}) + i\Omega \mathbf{v} A_U f_0]}{[1 - (1 - q)x^2]^{-1}} = \int d\mathbf{v} C'_{ei} (\mathbf{v} f_0) \cdot \mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2] A_p. \quad (3.89)$$

Esta equação é similar àquela encontrada anteriormente para A_T (vide Eq.(3.81)), a única diferença é A_p no lugar A_T , logo, $\nabla \ln p$ ao invés de $\nabla \ln T$, cujas unidades de medida são iguais; portanto

$$\int d\mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2] A_p \mathbf{v} \cdot [I_e (A_U \mathbf{v}) + i\Omega \mathbf{v} A_U f_0] = -3n\alpha_p. \quad (3.90)$$

Multiplicando a Eq.(3.74b) por $[1 - (1 - q)x^2] A_U \mathbf{v}$ e integrando em $\mathbf{v}$, encontramos

$$\int d\mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2] A_p \mathbf{v} \cdot [I_e (A_U \mathbf{v}) + i\Omega \mathbf{v} A_U f_0] = 2\frac{1 - q}{1 + q} \int d\mathbf{v} L_1^{3/2} (x^2; q) A_U f_0, \quad (3.91)$$

se comparamos com o resultado obtido anteriormente, encontramos

$$\int d\mathbf{v} [1 - (1 - q)x^2] A_p \mathbf{v} \cdot [I_e (A_U \mathbf{v}) + i\Omega \mathbf{v} A_U f_0] = 3\frac{1 - q}{5 - 3q} \alpha_U, \quad (3.92)$$

e utilizando a Eq.(3.90) obtemos

$$\alpha_p = \frac{2(q - 1)}{5 - 3q} \alpha_U. \quad (3.93)$$

É interessante observar que κ_p e α_p são completamente determinados pela condutividade térmica e pelo coeficiente termoelétrico, respectivamente, além do mesmo fator de q . Isso significa que o processo estatístico que transporta quantidades nos fluxos acionados por ∇p

é exatamente o mesmo do transporte acionado por ∇T . Portanto, o aparecimento dos fluxos exclusivos à estatística não-extensiva não está relacionados à novos mecanismos de transporte, mas ao rearranjo local do sistema na presença das correlações de longo alcance que faz surgir novas perturbações capaz de estabelecer fluxos condutivos. Devemos atentar ainda que, embora esses fluxos sejam ocasionados pelo parâmetro q que, por sua vez, está relacionado à correlações de longo alcance, o fluxo condutivo líquido é local e determinado pelos mesmo princípios estatísticos do transporte condutivo clássico, ou seja, as flutuações estatísticas devido as colisões.

Figura 3.3: Comportamento das razões dos coeficientes de transporte condutivo ordinário e anômalo α_p/α_U e κ_p/κ_T como função de q . A razão aumenta como função de q mostrando que o transporte condutivo anômalo é mais importante à medida que nos distanciamos do caso maxwelliano.

Na Fig.(3.3) vemos o comportamento do fator de proporcionalidade entre os coeficientes κ_p e κ_T ou α_p e α_T . A medida que desviamos do caso maxwelliano, $q = 1$, o fator aumenta até atingir o valor máximo em $q = 1.4$, onde é estabelecida a igualdade entre os respectivos coeficientes, ou seja, $\alpha_p = \alpha_U$ e $\kappa_p = \kappa_T$. Nas equações fenomenológicas de transporte, todo o comportamento estatístico do plasma está condensado nos coeficientes de transporte, portanto, o estabelecimento da igualdade em $q = 1.4$ indica que ambos termos do fluxo condutivo têm igual importância no processo estatístico de transporte.

As relações estendidas entre os coeficientes de transporte dadas pelas Eqs.(3.88 e (3.93) permitem acoplar os fluxos de partículas e calor originados pela nova perturbação aos determinados para ∇T . Esse permite acoplar ∇p e ∇T em uma força termodinâmica generalizada (a perturbação que induz transporte) a fim de organizar as equações de transporte na seguinte representação matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathbf{q}_j}{nT} \\ \frac{q\mathbf{R}_j}{nT_q} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \chi_{T;j} & \alpha_j \\ \alpha_j & \frac{qne^2(\eta_{0j} + \eta_{1j})}{T_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_j \ln \left(Tp^{\frac{q-1}{5-3q}} \right) \\ -\mathbf{U}_j \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

onde $\chi_{T;j}$ é a difusividade térmica definida a partir da condutividade térmica como $\kappa_{T;j} = n\chi_{T;j}$, $\eta_{1;j}$ o coeficiente da fricção de primeira ordem, $\mathbf{q}_j$ e $\mathbf{R}_j$ são, respectivamente, o fluxo de calor total e a fricção total e o índice j representa as direções características $\parallel$, $\perp$ e $\wedge$. Na matriz acima, não há termos diagonais que dependam exclusivamente de $\nabla_j p$; desta forma, se comporta como um fluxo não-diagonal e, eventualmente, pode transportar partículas, energia e momento na direção contrária ou a favor de $\nabla_j p$, assim como os fluxos termo elétricos, por exemplo. Portanto, a função arbitrária A_p deveria ser definida a menos de um sinal “ $\pm$ ”, o que resultaria no aparecimento desse mesmo sinal no expoente de p na força termodinâmica generalizada. Mesmo assim, podemos ver que a produção de entropia, cuja expressão tradicional é $\sigma_S \sim \mathbf{J} \cdot \mathcal{F}$, onde $\mathbf{J}$ é o fluxo associado à força termodinâmica $\mathcal{F}$ [5], é sempre positiva, ou seja, independe da direção do fluxo acionado por ∇p . Este é um resultado muito importante de nosso modelo, pois resolve o problema dos modelos anteriores em teoria cinética não-extensiva que previam coeficientes de transporte negativo, os quais podem ser interpretados como sumidouros de entropia, portanto, violando a segunda lei da termodinâmica [45, 56]. No seguimento deste trabalho, continuaremos a trabalhar apenas com o sinal positivo por simplicidade.

3.4 Soluções das Equações Cinéticas Independentes

Para determinar as soluções das Eqs.(3.74), vamos proceder como Braginskii [2] e aproximar as funções arbitrárias A por séries assintóticas. Em virtude das relações estendidas de Onsager, não precisaremos determinar as funções arbitrárias A_p , uma vez que κ_p e α_p são encontrados a partir da solução da Eq.(3.74a), relativa à perturbação ∇T . Antes de explicar os motivos que justificam a formula geral da série aproximativa, é conveniente apresentar suas expressões, pois facilitará a explicação dos argumentos. Os desenvolvimentos em série para as funções arbitrárias A_T e A_p em questão são

$$A_T = \tau \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{L_k^{3/2}(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{2+k}}; \quad (3.95a)$$

$$A_U = -\frac{m}{T_q} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{L_k^{3/2}(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{2+k}}, \quad (3.95b)$$

onde $L_k^{3/2}(x^2; q)$ são polinômios de Jacobi de grau k e $a_k = a_k(q)$ os coeficientes da série.

Assim como no método de Braginskii, a forma geral da solução aproximativa é escolhida de acordo com as condições impostas pelo método de Chapman-Enskog. A verificação dessa afirmação é direta, basta substituir a solução geral da equação cinética, Eq.(3.53), em termos explícitos das séries, nas expressões para as condições do método, Eq.(3.54), e identificar que as integrais resultantes são identicamente nulas devido a relação de ortogonalidade apresentada na Eq.(3.51). Também constatamos a existência de outras escolhas das funções arbitrárias “ A ” que também satisfazem as condições do método. Por exemplo, trocando a potência $2 + k$ por $2k + 1$; ou ainda potências mais elaboradas que dependem da ordem de truncamento da aproximação (evidentemente, o desenvolvimento assintótico infinito deve ser truncado para obtenção de uma solução). Essas variações não serão estudadas

aqui, apenas trabalharemos com a forma apresentada que decorre diretamente da relação de ortogonalidade.

O problema agora se resume à determinação dos coeficientes a_k , pois, uma vez encontrados, podemos calcular os coeficientes de transporte a partir das Eqs.3.57 e (3.58) em função dos parâmetros do plasma. Se multiplicarmos as equações de A_T (Eq.(3.74a)) e A_U (Eq.(3.74c)), respectivamente, por:

$$\frac{4}{15} \frac{1}{n} \frac{m}{2T_q} \frac{\mathbf{v} L_1^{3/2}(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{1+l}}, \quad (3.96a)$$

$$- \frac{4}{15} \frac{\tau}{2n} \frac{L_\ell^{3/2}(x^2; q) \mathbf{v}}{[1 - (1 - q)x^2]^{1+l}}, \quad (3.96b)$$

e integramos sobre todo o espaço de fase das velocidades, transformaremos essas equações cinéticas integrais em sistemas de equações algébricas. Neste ponto, podemos destacar uma das principais vantagens da solução aproximada da equação cinética por séries assintóticas: a complicadíssima solução da equação cinética integro-diferencial, a Eq.(3.48), se reduz à solução de um sistema de equações algébricas para determinar os coeficientes a_k da série aproximativa. Entretanto, veremos que mesmo simplificado, o problema matemático ainda é bastante complexo; a convergência da série de potência é bastante lenta, exigindo, portanto, aproximações de elevadas ordens para o cálculo dos coeficientes de transporte.

Os fatores nas integrais da transformação da equação cinética são escolhidos convenientemente para que os coeficientes a_k sejam adimensionais. Assim, as equações algébricas para as equações de A_T e A_U serão análogas e sem dependência explícita dos parâmetros do plasma, isto é, n e T . Outra consequência dessa escolha é a de a_k ser função apenas do campo magnético B , τ e do parâmetro q . A seguir, apresentaremos em detalhes o desenvolvimento algébrico das integrais para a transformação da equação de A_T ; o resultado é diretamente estendido para A_p .

Em linhas gerais, a multiplicação da Eq.(3.74a) pelo fator Eq.(3.96a) e sua posterior integração no espaço de fase das velocidades resulta no seguinte sistema de equações algébricas:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_{\ell k}^{ee} + c_{\ell k}^{ei} - i\Delta c_{\ell k}^m) a_k = c_\ell, \quad (3.97)$$

onde $\Delta = \Omega\tau$, $c_{\ell k}^{ee}$ é a integral do operador colisional elétron-elétron I_{ee} , $c_{\ell k}^{ei}$ é a integral do operador colisional elétron-íon I_{ei} , $c_{\ell k}^m$ é a integral do termo magnético e c_ℓ é a integral do termo de ordem zero (lado esquerdo da Eq.(3.74a)). A única diferença no sistema de equações obtidos para A_T e A_U está em c_ℓ , uma vez que a transformação do lado direito das Eqs.(3.74a) e (3.74c) leva ao mesmo resultado.

Utilizando a condição de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi dada pela Eq.(3.51), a integral que define c_ℓ é

$$\begin{aligned} c_\ell &= \frac{4}{15} \frac{1}{n} \frac{m}{2T_q} \frac{5-3q}{1+q} \int d\mathbf{v} \frac{v^2 L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_1^{\frac{3}{2}}(x^2; q) f_0}{[1 - (1 - q)x^2]^{2+\ell}}, \\ &= \frac{5-3q}{1+q} \frac{16\pi}{15} A_q \int_0^\infty dx x^4 L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_1^{\frac{3}{2}}(x^2; q) [1 - (1 - q)x^2]^{\frac{q}{1-q} - 2 - \ell}, \end{aligned}$$

onde $x^2 = mv^2/(2T_q)$, a função de distribuição do equilíbrio f_0 , Eq.(2.36), A_q é a constante de normalização, Eq.(2.22), e na segunda igualdade, integramos nas direções angulares da velocidade.

Podemos utilizar uma tabela de integrais [73] e encontrar

$$c_\ell = \frac{(2\ell+3)!!}{2^{\ell-1}5!!} \frac{5-3q}{2} \frac{(-1)^{\ell+1}}{(q-1)^3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\ell+2+\frac{1}{q-1}\right)}, \quad (3.98)$$

onde Γ são as funções gama e “!!” o duplo fatorial.

A integração do termo magnético é:

$$\begin{aligned} c_{\ell k}^m &= \frac{4}{15} \frac{1}{n} \frac{m}{2T_q} \int d\mathbf{v} \frac{v^2 L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) f_0}{[1 - (1-q)x^2]^{3+\ell+k}}, \\ &= \frac{8\pi}{15} A_q \int d\mathbf{x} \frac{x^2 L_\ell(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{3+\ell+k}} [1 - (1-q)x^2]^{\frac{q}{1-q}}. \end{aligned} \quad (3.99)$$

Se compararmos a expressão acima com a relação de ortogonalidade dos polinômios de Jacobi na Eq.(3.51), veremos que todas as integrais serão nulas caso o índices satisfaçam $|k - \ell| \geq 2$. Diferentemente de c_ℓ , não é possível encontrar a formula do termo geral da sequência em termos de ℓ e k ; abaixo estão alguns exemplos desses coeficientes:

$$\begin{aligned} c_{11}^m &= -\frac{(q-3)(q+1)(q(13q-19)+8)}{8q(2q-1)(3q-2)(4q-3)(5q-4)}; \\ c_{12}^m = c_{21}^m &= -\frac{7(q-3)(q-1)(q+1)(3q-1)}{16q(2q-1)(4q-3)(5q-4)(6q-5)}; \\ c_{22}^m &= -\frac{7(q-3)(q+1)(3q-1)(11q(3q-5)+24)}{64q(2q-1)(3q-2)(5q-4)(6q-5)(7q-6)}. \end{aligned}$$

Em comparação com o modelo clássico, onde os c são coeficientes numéricos, aqui esses coeficientes são polinômios de q . Destacamos também que mesmo os coeficientes de ordens mais baixa já são polinômios de elevada ordem; os polinômios no numerador e denominador de c_{22}^m são, respectivamente, de quinta e sexta ordens. Como veremos, essa característica trará consequências importantes para o resultado final.

O procedimento para o cálculo do coeficiente $c_{\ell k}^{ei}$ é o mesmo do anterior; a partir do operador de colisões linearizado I_{ei} , dado na Eq.(C.17), temos:

$$\begin{aligned} c_\ell^{ei} &= \int d\mathbf{v} \frac{4}{15} \frac{m}{2nT_q} \frac{\mathbf{v} L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{1+\ell}} \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{5-3q}{2q^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left(\frac{\tau f_0 L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) \mathbf{v}}{[1 - (1-q)x^2]^{1+k}} \right) \right] \\ &= \frac{8\pi}{15} \frac{m}{2T_q^2} \frac{e^2 e_i^2 \lambda \tau n}{m^2} \int d\mathbf{v} \delta_{\eta\nu} V_{\mu\nu} \frac{L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) f_0}{[1 - (1-q)x^2]^{1+\ell+k}} \\ &= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{5} \left(\frac{2}{5-3q} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{5-3q}{2q^2} A_q \int_0^\infty dx \frac{x L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) [1 - (1-q)x^2]^{\frac{q}{1-q}}}{[1 - (1-q)x^2]^{2+k+\ell}}. \end{aligned} \quad (3.100)$$

onde $x^2 = mv^2/(2T_q)$, a função de distribuição do equilíbrio f_0 dada na Eq.(2.36), A_q é a constante de normalização na Eq.(2.22) e na última igualdade integramos nas direções angulares da velocidade.

Assim como para $c_{\ell k}^m$, não temos uma formula do termo geral da sequencia, mas podemos calcular cada um dos termos a partir da integral acima; os três primeiros coeficientes são:

$$\begin{aligned} c_{11}^{ei} &= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{5q^2} A_q \left(\frac{2}{5-3q} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4q-3} - \frac{9}{4(2q-1)} \right) \\ c_{12}^{ei} = c_{21}^{ei} &= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{5q^2} A_q \left(\frac{2}{5-3q} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{15}{4(3q-2)} + \frac{9}{16(2q-1)} \right) \\ c_{22}^{ei} &= \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{5q^2} A_q \left(\frac{2}{5-3q} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{9}{64(2q-1)} + \frac{45}{8(3q-2)} + \frac{1}{6q-5} \right). \end{aligned}$$

O último coeficiente é $c_{\ell k}^{ee}$, contudo, não é possível determina-lo analiticamente. O problema algébrico em $c_{\ell k}^{ee}$ está na dificuldade em conciliar a mudança de variáveis de integração que desacopla o produto das funções de distribuição, uma vez que são leis de potência (vide, por exemplo, a Eq.(D.7) para o operador linearizado I_{ee}), com a eliminação da singularidade do tensor $U_{\mu\nu}$ quando $v_\mu = v_\nu$ ¹. Contudo, nenhuma das integrais dos coeficientes c depende de quaisquer parâmetros físicos, portanto, representam uma função numérica de q . Assim, podemos encontrar o resultado numericamente, estabelecendo uma série de valores pré-determinados de q que possibilitem a análise final dos coeficientes de transporte. Os detalhes desse cálculo estão no Apêndice D; em linhas gerais, escolhemos uma série de nove pontos no intervalo $q \in [1, 1.4]$ com passo de 0.05 e utilizamos o método de integração numérica de Monte Carlo [60].

Um aspecto importante do sistema de equações na Eq.(3.97) são as formas gerais das suas soluções com respeito à Δ , isto é, a dependência de a_k nas diferentes direções do campo magnético. Primeiramente, devemos atentar para os coeficientes das séries assintóticas dadas pelas Eqs.(3.95a) e (3.95b). Na derivação das equações cinéticas independentes, acoplamos as funções arbitrárias A das direções perpendicular e diamagnética a uma única função imaginária $A = A_\perp + i\Omega A_\wedge$; logo, a mesma separação deve acontecer nos a_k determinados através do sistema de equações algébricas. Nesse processo, também vimos que a componente paralela pode ser obtida a partir da solução perpendicular quando $B \rightarrow 0$, o que se traduz aqui em $\Omega \rightarrow 0$. Portanto, tanto Δ na Eq.(3.97) quanto a parte imaginária de A desaparecem nesse limite, determinando assim os a_k paralelos. Já as soluções nas direções perpendicular e diamagnética são determinadas ao aplicarmos os limite $\Delta \gg 1$ (correspondente à plasmas intensamente magnetizados), onde utilizamos a separação entre a parte real e a imaginária para determinar essas componentes.

As formas gerais dessas soluções podem ser facilmente visualizadas a partir da solução de segunda ordem. Portanto, truncando o sistema de equações na segunda ordem, ou seja, com

¹Evidentemente se trata de uma singularidade contornável, pois, se as velocidades das partículas incidente e alvo são iguais em direção e módulo, a colisão não ocorre.

os índices ℓ e k variando até 2, temos

$$\begin{cases} (c_{11} - i\Delta c_{11}^m) a_1 + (c_{12} - i\Delta c_{12}^m) a_2 = c_1, \\ (c_{21} - i\Delta c_{21}^m) a_1 + (c_{22} - i\Delta c_{22}^m) a_2 = c_2, \end{cases} \quad (3.101)$$

onde utilizamos a notação simplificada $c_{\ell k} = c_{\ell k}^{ee} + c_{\ell k}^{ei}$. A solução desse sistema de equações resulta em:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{c_2 (c_{21} + i\Delta c_{21}^m) - c_1 (c_{22} + i\Delta c_{22}^m)}{(c_{21} + i\Delta c_{21}^m)^2 - (c_{11} + i\Delta c_{11}^m) (c_{22} + i\Delta c_{22}^m)}, \\ a_2 &= \frac{c_1 (c_{21} + i\Delta c_{21}^m) - c_2 (c_{11} + i\Delta c_{11}^m)}{(c_{21} + i\Delta c_{21}^m)^2 - (c_{11} + i\Delta c_{11}^m) (c_{22} + i\Delta c_{22}^m)}. \end{aligned}$$

A aplicação do limite $\Delta \rightarrow 0$ que resulta nos a_k paralelos é trivial. No limite $\Delta \gg 1$, os a_k de primeira e segunda ordem das componentes paralela e perpendicular são:

$$a_1^\perp \approx \frac{(c_{22}c_{11}^m - 2c_{21}c_{21}^m + c_{11}c_{22}^m)(c_{22}c_{21}^m - c_{11}c_{22}^m) + (c_2c_{21} - c_1c_{22})((c_{21}^m)^2 - c_{11}^m c_{22}^m)}{\Delta^2 ((c_{21}^m)^2 - c_{11}^m c_{22}^m)^2}, \quad (3.102)$$

$$\Omega a_1^\wedge \approx \frac{(c_1c_{22}^m - c_2c_{21}^m)}{\Delta ((c_{21}^m)^2 - c_{11}^m c_{22}^m)}; \quad (3.103)$$

$$a_2^\perp \approx \frac{(c_2c_{11}^m - c_1c_{21}^m)(c_{22}c_{11}^m - 2c_{21}c_{21}^m + c_{11}c_{22}^m) + (c_2c_{11} - c_1c_{21})((c_{21}^m)^2 - c_{11}^m c_{22}^m)}{\Delta^2 ((c_{21}^m)^2 - c_{11}^m c_{22}^m)^2}, \quad (3.104)$$

$$\Omega a_2^\wedge \approx \frac{(c_2c_{11}^m - c_1c_{21}^m)}{\Delta ((c_{21}^m)^2 - c_{11}^m c_{22}^m)}. \quad (3.105)$$

A multiplicação de $a_1^\wedge$ e $a_2^\wedge$ deixa clara a motivação da definição das perturbações diamagnéticas como $\mathbf{w}_\wedge \equiv \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{W}$ (vide Eq.(3.58) e parágrafo abaixo); a solução do sistema de equações dado na Eq.(3.97) determina os $a_k^\wedge$ multiplicados por Ω , o que corrige naturalmente as unidades de medidas de $\mathbf{w}_\wedge$ no fluxo final.

A primeira característica geral que podemos observar é a natureza polinomial dos a_k . Mesmo truncando a aproximação assintótica na segunda ordem, vemos que os polinômios, no numerador e denominador, em c já são de grau 4, depois da racionalização. Esse caráter dos coeficientes da série assintótica será importante para a interpretação dos resultados numéricos dos coeficientes de transporte mais adiante.

Também podemos observar que a dependência dos coeficientes a_k com o campo magnético nas direções perpendicular e diamagnética será, respectivamente B^{-2} e B^{-1} . Esse comportamento será geral e parecerá em ordens mais altas da aproximação assintótica, ou seja, a dependência com o campo magnético dos coeficientes a_k nas direções perpendicular e diamagnética será mantida, independentemente da ordem do truncamento. Podemos confirmar esse resultado através do desenvolvimento algébrico de um sistema de n equações e variáveis análogo ao determinado pela Eq.(3.97). Em notação matricial, o sistema em questão pode ser escrito como

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad (3.106)$$

onde o vetor $\mathbf{x}$ faz o papel dos coeficientes c e supomos que a matriz $\mathbf{A}$ não é singular (portanto, garantindo a existência da solução) de modo que podemos invertê-la:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{C}^T}{\det(\mathbf{A})}, \quad (3.107)$$

onde $\mathbf{C}^T$ é a matriz transposta de cofatores e $\det(\mathbf{A})$ é o determinante.

Se escrevermos o determinante em termos dos cofatores, encontraremos que

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{C}^T \cdot \mathbf{b}, \sum_{k=1}^n a_{ij}^* C_{ij}^*}{|\sum_{k=1}^n a_{ij} C_{ij}|^2} \quad (3.108)$$

onde multiplicamos o numerador e denominador pelo complexo conjugado do denominador e a_{ij} são os elementos da matriz $\mathbf{A}$.

Em analogia ao sistema dado por Eq.(3.97), escrevemos os elementos de matriz como $a_{ij} = c_{ij} + i\Delta c_{ij}^m$. Ao aplicarmos $\Delta \gg 1$, os polinômios em Δ dos cofatores devem se cancelar, independentemente da grau n (ordem da aproximação assintótica), restando apenas Δ^2 no denominador, vindo de $a_{ij}a_{ij}^*$, na parte real do número imaginário, enquanto na parte imaginária haverá um único Δ no denominador. Assim, vemos que os fatores da dependência dos coeficientes com o campo magnético serão sempre da mesma forma no limite assintótico.

O corolário mais importante desse resultado é fatoração da dependência do campo magnético nos coeficientes de transporte, ou seja, ao fatorarmos o campo magnético dos a_k , também o faremos nos coeficientes de transporte, portanto, como veremos, a expansão assintótica recuperará a forma geral da parte dimensional do coeficiente de transporte previsto pelo modelo clássico de Braginskii [2, 96]. Desta forma, a aproximação assintótica apenas determinará o função numérica de q que causa a modificação dos coeficientes de transporte devido as longas caudas das distribuições não-extensivas; o que também permitirá a comparação direta entre os nossos resultados para os coeficientes de transporte e aqueles determinados pelo modelo clássico.

Em suma, o desenvolvimento analítico do problema nessa seção mostrou que a última etapa para a determinação dos coeficientes de transporte é o cálculo dos coeficientes da expansão assintótica, ou seja, os a_k . Também foi mostrado que, para plasmas intensamente magnetizados, $\Delta \gg 1$, a dependência desses coeficientes de transporte com o campo magnético é fixa e igual à encontrada no modelo clássico. Desta forma, o cálculo que faremos apenas determinará uma função numérica de q , portanto, permitindo comparar diretamente os resultados obtidos aqui com os apresentados no modelo clássico. Esse trabalho será mostrado no capítulo seguinte.

Não é demais ressaltar que o aspecto fundamental na obtenção das soluções apresentadas foi a utilização dos polinômios de Jacobi. Com a introdução desse polinômio especial, demonstramos que toda metodologia empregada na abordagem do modelo clássico é rigorosamente estendida ao modelo não-extensivo. Em particular, a aproximação em série assintótica da solução de primeira ordem só é possível em termos desses polinômios, pois, como vimos, garantimos todas as condições do método, o que resulta em uma solução bastante rigorosa.

Capítulo 4

Coeficientes de Transporte

No capítulo anterior, estabelecemos a solução de primeira ordem da equação cinética através do método de Chapman-Enskog e a forma geral dos fluxos de partículas e calor para as diferentes perturbações em termos da série assintótica. Nesses cálculos, constatamos que a dependência com o parâmetro q nos coeficientes de transporte será um fator multiplicativo independente dos parâmetros básicos do plasma. Isso significa que a forma geral dos coeficientes de transporte em nosso modelo será a mesma do modelo clássico de Braginskii. Como veremos a seguir, tomaremos vantagem dessa semelhança para compreender fisicamente os efeitos de $q \neq 1$ nos coeficientes de transporte. Faremos isso apresentando apenas os resultados numéricos finais no limite de plasmas intensamente magnetizados. Devido às longas expressões matemáticas envolvidas, todos os cálculos apresentados neste capítulo foram feitos utilizando o software *Wolfram Mathematica 11.0*.

4.1 Fluxos Condutivos Induzidos por $\mathbf{U}$

Antes de apresentar a solução da equação cinética independente de $\mathbf{U}$, é conveniente apresentar as expressões gerais para a fricção e o fluxo de calor em termos dos coeficientes a_k . Substituindo a solução A_U (Eq.(3.95b)) na expressão geral da fricção em Eq.(3.58), já em termo do operador linearizado I_{ei} , dado pela Eq.(C.17), encontramos que a resistividade de primeira ordem, η_1 , calculada a partir da Eq.(3.58) é

$$\eta_1 = \frac{1}{3e^2 n^2} \int d\mathbf{v} m v_\epsilon \frac{2\pi e^4 \lambda n}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} f_0 \frac{5-3q}{2q^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[\frac{m}{T_q} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k v_\epsilon L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{(1 - (1-q)x^2)^{1+k}} \right] \right]; \quad (4.1)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{2\pi e^4 \lambda}{6q^2 T e^2 n} \int d\mathbf{v} \frac{\delta_{\mu\nu} V_{\mu\nu} L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) f_0}{[1 - (1-q)x^2]^{1+k}}; \quad (4.2)$$

$$= \frac{m}{n e^2 \tau} \frac{\pi^{\frac{1}{2}} A_q}{q^2} \left(\frac{2}{5-3q} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int d\mathbf{x} x^{-1} L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) [1 - (1-q)x^2]^{\frac{q}{1-q} - 1 - k}. \quad (4.3)$$

Assim, podemos escrever a fricção dor f_1 como:

$$\mathbf{R}_U^{(1)} = \eta_{1\perp} \mathbf{U}_\perp + \eta_{1\parallel} \mathbf{U}_\parallel, \quad (4.4)$$

onde desacoplamos as componentes perpendicular (paralela $B \rightarrow 0$) e diamagnética utilizando a linearidade, e cujos respectivos η_1 são

$$\begin{Bmatrix} \eta_{1\perp} \\ \eta_{1\wedge} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m}{ne^2\tau} r_U(q, k) \begin{Bmatrix} a_k^\perp \\ a_k^\wedge \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

onde $r_U(q, k)$ é

$$r_U(q, k) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} A_q}{q^2} \left(\frac{2}{5-3q} \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty dy L_k^{\frac{3}{2}}(y; q) [1 - (1-q)y]^{\frac{q}{1-q}-1-k}. \quad (4.6)$$

A densidade de fluxo de calor em termos de a_k para A_U é calculada a partir da Eq.(3.57); após a substituição de A_U , temos

$$\alpha = \frac{2T_q}{1+q} \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \int d\mathbf{v} \frac{mv^2}{T_q} f_0 \frac{L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_1^{\frac{3}{2}}(x^2; q) a_k}{[1 - (1-q)x^2]^{2+k}}; \quad (4.7)$$

$$= \frac{nT_q A_q}{3(1+q)} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int d\mathbf{v} x^2 L_1^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) [1 - (1-q)x^2]^{\frac{q}{1-q}-2-k}. \quad (4.8)$$

Desta forma, utilizando novamente a linearidade, podemos escrever o fluxo de calor devido a fricção térmica como:

$$\mathbf{q}_U = \alpha_\perp n T \mathbf{U}_\perp + \alpha_\wedge n T \mathbf{U}_\wedge, \quad (4.9)$$

onde os α são dados por:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_\perp \\ \alpha_\wedge \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{\infty} t_U(q, k) \begin{Bmatrix} a_k^\perp \\ a_k^\wedge \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

e $t_U(q, k)$ é:

$$t_U(q, k) = \frac{4}{3} \frac{A_q}{1+q} \frac{5-3q}{2} \int_0^\infty dy y^{\frac{3}{2}} L_1^{\frac{3}{2}}(y; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) [1 - (1-q)y]^{\frac{q}{1-q}-2-k}. \quad (4.11)$$

Agora, basta calcular os coeficientes a_k a partir da equação cinética independente de $\mathbf{U}$ para determinar completamente os fluxos condutivos. Via de regra, o cálculo é feito através da solução do sistema de equações algébricas determinada pela Eq.(3.97):

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_{\ell k}^{ee} + c_{\ell k}^{ei} - i\Delta c_{\ell k}^m) a_k = c_{\ell 1}, \quad (4.12)$$

onde $a_k = a_k^\perp + i\Omega a_k^\wedge$, os elementos de matriz c são determinados pelas Eqs.(3.98), (3.99), (3.100) e $c_{\ell k}^{ee}$ estimado numericamente no Apêndice C. Conforme exposto no capítulo anterior, esses coeficientes serão calculados a partir de uma série de nove pontos no intervalo $q \in [1, 1.4]$ com passo de 0.05. Para cada um desses valores, e para cada ordem do truncamento da série assintótica, o sistema de equações acima será resolvido para determinar os a_k que, por sua vez, serão substituídos nas definições dos coeficientes de transporte nas Eq.(4.5) e Eq.(4.10). Então, esses resultados serão apresentados em uma série de gráficos, a partir dos quais será possível compreender fisicamente as alterações provocadas nos coeficientes de transporte clássicos decorrentes da abordagem através da estatística não-extensiva.

4.1.1 Fricção Total

A fricção total é a soma dos termos de ordens zero e primeira, ou seja, $\mathbf{R}_U = \mathbf{R}_U^{(0)} + \mathbf{R}_U^{(1)}$. Por outro lado, como vimos no capítulo anterior, por exemplo, na Eq.(3.102), os coeficientes a_k da série assintótica na Eq.(4.5) são inversamente proporcionais ao campo magnético. Desta forma, a fricção de primeira ordem na direção perpendicular ($\mathbf{R}_{U;\perp}^{(1)}$) será muito pequena se comparada à fricção de ordem zero ($\mathbf{R}_{U;\perp}^{(0)}$), que não depende do campo magnético (vide Eq.(3.32)). Assim, em plasmas intensamente magnetizados, a contribuição de $\mathbf{R}_{U;\perp}^{(1)}$ para a fricção perpendicular total pode ser descartada, aproximando a mesma por $\mathbf{R}_{U;\perp} \approx \mathbf{R}_{U;\perp}^{(0)}$.

A fricção paralela total é obtida pela soma das Eqs.(3.32) e (4.4):

$$\mathbf{R}_{U\parallel} = - \left[\frac{A_q}{q} \left(\frac{2}{5-3q} \right)^{1/2} - \sum_{k=1}^N r_U(k, q) a_k \right] \frac{m}{ne^2\tau} \mathbf{U}_{\parallel} = \eta_{\parallel} \mathbf{U}_{\parallel}, \quad (4.13)$$

onde N é a ordem de truncamento do sistema de equações e r_U dado na Eq.(4.6).

A Fig.(4.1a) mostra o comportamento da razão $\eta_{\parallel}/\eta_{\parallel;\text{Brag}}$, onde $\eta_{\parallel;\text{Brag}}$ é o seu valor no limite $q \rightarrow 1$ e que corresponde coeficiente no modelo de Braginskii [2], isto é, $\eta_{\parallel;\text{Brag}} = 0.51m/ne^2\tau$. Para garantir uma aproximação razoável do coeficiente de transporte, foi preciso calcular a aproximação assintótica até a quinta ordem. Porém, devido ao erro numérico de integração de $c_{\ell k}^{ee}$, a quarta ordem já seria suficiente para descrever o comportamento típico do coeficiente. Como podemos ver na figura, a fricção diminui, monotonicamente, com o aumento de q , ou seja, com o aumento do número de elétrons com maior velocidade no plasma.

O comportamento monotônico e a contínua redução de $\eta_{\parallel}$ são explicados pelo enfraquecimento das colisões entre elétrons devido às longas caudas. De fato, a contribuição para o processo de condução desse tipo de colisão se dá através da relaxação, uma vez que não transportam momento. Portanto, se a relaxação for enfraquecida, a deslocamento na função de distribuição dos elétrons provocado pelos íons permanecerá por mais tempo e ainda será mais distante do equilíbrio, logo, diminuindo a fricção. Podemos ver esse efeito diretamente através de $\omega_{ei} \sim v^{-3}$ dada pela Eq.(3.27); com o maior deslocamento do equilíbrio, a cauda da distribuição será maior e, portanto, a redução da fricção com a frequência de colisão será cada vez maior. Isso também mostra a importância da correção de primeira ordem que altera de maneira significativa o comportamento do coeficiente de transporte de ordem zero na Eq.(3.32).

Um outro ponto bastante importante é quanto ao comportamento do erro visto nas Figs.(4.1a) e (4.1b). O erro não só aumenta com o aumento de q , mas também com a ordem da aproximação assintótica. Isso se deve a propagação do erro em a_k , isto é, as aproximações de ordem mais altas são polinômios dos elementos de matriz c de elevada ordem, o que acaba potencializando o pequeno erro de integração numérica. Além disso, como argumentado no Apêndice D, à medida que $q \rightarrow 1.4$, o decaimento da lei de potência das funções de distribuição é suave. Portanto, o integrando de $c_{\ell k}^{ee}$, embora menor quanto maior ℓ e k , é mais disperso no espaço de fase, piorando a precisão da integração numérica.

Na Fig.(4.1b) é apresentado o ajuste da aproximação de quinta ordem pela seguinte

Figura 4.1: Comportamento da razão $\eta_{||}/\eta_{||;Brag}$ como função de q , as barras de incertezas são obtidas a partir da integração numérica pelo método de Monte Carlo. (a) O efeito das caudas largas da q -distribuição dos elétrons é diminuir a fricção, ou seja, aumenta a condutividade elétrica. As linhas apenas unem os pontos adjacentes, não representam o ajuste polinomial dos mesmos. (b) Ajuste da fricção paralela dado pela Eq.(4.14) apresentada na razão $\eta_{||}/\eta_{||;Brag}$. Os pontos são os valores obtidos para a aproximação de quinta ordem.

expressão:

$$\mathbf{R}_{||} = -\eta_{||} \frac{m}{ne^2\tau} \mathbf{U}_{||} = (0.51 - a(q-1)^{0.8} [1 - b(5-3q)^{1.5}]) \frac{nm}{\tau} \mathbf{U}_{||}, \quad (4.14)$$

onde $a = 0.57$ e $b = 0.13$. O erro relativo dessa expressão para o é menor que $\pm 5\%$ até $q \leq 1.35$ e $\pm 8\%$ para $q \leq 1.4$.

Como podemos ver na Fig.(4.1b), a redução na fricção pode chegar à 50%, o que indica uma melhora na condutividade por um fator 2 devido a presença de elétrons supratérmicos. Esse tipo de comportamento pode ser relevante no processo de criação de elétrons fugitivos (*Electrons Runaways*) [42, 96, 103]. Nesse fenômeno, elétrons são acelerados indefinidamente quanto o campo elétrico atinge um valor limite, a partir do qual a fricção sobre os elétrons reduz rapidamente à medida que os mesmos ganham velocidade.

Por fim, mostramos a razão das fricções paralela e perpendicular na Fig.(4.2). Em geral, essa razão é interpretada como a melhora do confinamento magnético do plasma, uma vez que $\eta_{||} < \eta_{\perp}$ indica exatamente a redução do fluxo de partículas perpendicular, devido ao campo magnético, em comparação com o fluxo paralelo [96]. No nosso caso, mesmo com $\mathbf{R}_{\perp} < \mathbf{R}_{Brag;\perp}$ (vide Fig.(3.1)), o que indica, portanto, um aumento do fluxo de partículas na direção perpendicular, o decréscimo monótono da $\eta_{||}/\eta_{\perp}$ como função de q mostra que o aumento do número de elétrons supratérmicos é mais importante para o aumento da corrente do plasma, I , do que para o fluxo de partículas perpendicular. Logo, como a energia armazenada no plasma é $W \propto I_p^2 \beta_{\theta}$, onde β_{θ} é o beta poloidal, tal aumento corresponderia ao aumento da energia confinada [104].

Figura 4.2: Ajuste da fricção paralela dado por Eq.(4.14) apresentada na razão $\eta_{||}/\eta_{\perp}^{(0)}$. Os pontos são os valores obtidos para a aproximação de quinta ordem.

4.1.2 Fluxo de Calor

Em plasmas intensamente magnetizados, o fluxo de calor conduzido pela componente perpendicular de $\mathbf{U}$ pode ser desprezado em comparação com o fluxo de calor proveniente da perturbação dos gradientes no ordenamento de Braginskii [2, 96]. Assim, a expressão final do fluxo de calor dado pela Eq.(4.9) é

$$\mathbf{q}_U = \alpha_{||} n T \mathbf{U}_{||} + \alpha_{\wedge} n T \mathbf{U}_{\wedge}. \quad (4.15)$$

O resultado numérico para $\alpha_{||}$ até a sexta ordem da aproximação assintótica é mostrado na Fig.(4.3a). Diferentemente da fricção paralela, o coeficiente em questão se mostra bastante sensível ao erro, aumentando significativamente à medida que $q \rightarrow 1.4$ nas aproximações de ordens superiores. Se atentarmos que os a_k são os mesmos no cálculo de ambos fluxos de $\mathbf{U}$, o erro numérico de integração dos $c_{\ell k}^{ee}$ não seria capaz de explicar o comportamento. De fato, como já vimos, nas aproximações de ordens superiores, os a_k são composições de polinômios de grau bastante elevado dos coeficientes c , o que acaba potencializando o pequeno erro numérico de integração do $c_{\ell k}^{ee}$. Embora esse aumento sistemático com a ordem da aproximação realmente apareça na fricção paralela retratada na Fig.(4.1b), não é pronunciado como em $\alpha_{||}$.

A causa do acentuado aumento está na propagação do erro numérico de integração no cálculo do coeficiente de transporte a partir de Eq.(4.21). Portanto, o comportamento não-monotônico retratado na Fig.(4.3a), onde o ponto de inflexão separa as regiões de domínio das partes crescentes e decrescentes da expressão geral de $\alpha_{||}$, deve ter papel de destaque nessa propagação. Próximo ao ponto de inflexão, os valores absolutos¹ das partes crescentes e decrescentes são da mesma ordem; pequenas variações dos valores dos coeficientes podem, portanto, alterar o comportamento geral da função nessa região, isto é, mudando a tendência de crescente para decrescente e vice-versa, acarretando mudanças relevantes no resultado final. Mais ainda, em ordens superiores, quando o erro numérico de integração é potencializado pelos polinômios de grau bastante elevado que constituem os a_k , a precisão numérica é ainda mais significativa para o cálculo do resultado, o que explicaria, portanto, o erro observado.

¹Eventualmente, a parte decrescente pode ser negativa, p.e., $-x^2 + 2x + 1$

Figura 4.3: Comportamento do coeficiente numérico $\alpha_{||}$ como função de q , as barras de incertezas são obtidas a partir da integração numérica. (a) O fluxo de calor devido a velocidade relativa aumenta com q , ou seja, com número de elétrons mais energéticos. Nota-se que o aumento é gradativo, sendo menos acentuado na região $q = 1.4$. As linhas apenas unem pontos adjacentes, não se trata de ajuste polinomial (b) Ajuste polinomial do coeficiente numérico $\alpha_{||}$ como função de q . Os pontos são os valores obtidos para a aproximação de sexta ordem.

Por outro lado, o valor estimado para a integral pelo método de Monte Carlo sempre se aproxima da média, logo, é possível retratar bem o valor esperado para a integral mesmo com o desvio padrão (erro) grande. De fato, mostramos no Apêndice C ser exatamente este o nosso caso, onde as estimativas de $c_{\ell k}^{ee}$ variam pouco com aumento da precisão, isto é, com o número de pontos e , portanto, do erro. Portanto, embora o fluxo de calor induzido por $\mathbf{U}$ seja sensível ao erro, em particular nas aproximações de ordem superior devido a sua não-monotonicidade, o comportamento típico de $\alpha_{||}$ como função de q é bem descrito pelas médias. Em antecipação, veremos a validade dessa afirmação quando apresentarmos a condutividade térmica diamagnética, κ_{Λ} , onde mostramos que as aproximações análogas de sétima e sexta ordem do coeficiente são razoavelmente próximas, provando ser desnecessária a melhora da precisão para a interpretação qualitativa (física) dos coeficientes de transporte.

Para compreender melhor do fluxo de calor induzido por $\mathbf{U}$, é conveniente ajustar um polinômio a partir dos resultados numéricos de sexta ordem como mostrado na figura Fig.(4.3b), onde o polinômio em questão é:

$$\alpha_{||} = 0.71 + a \frac{(q-1)^{\frac{1}{2}}}{1+q} (1 - b(5-3q)^2), \quad (4.16)$$

tal que $a = 4.85$ e $b = 0.96$. O erro relativo dessa expressão é menor que $\pm 5\%$ até $q \leq 1.15$, mas pode variar de $\pm 5\%$ para $q = 1.2$ até $\pm 25\%$ em $q = 1.4$.

É importante notar que, embora esse fluxo seja resultado das colisões, sua expressão final não depende do tempo de relaxação τ (vide Eq.(4.15)). De fato, esse fluxo condutivo surge como consequência da separação dos elétrons devido à $\mathbf{U}$, onde os rápidos se movimentam na direção $+\mathbf{U}$, enquanto os mais lentos vão na direção contrária $-\mathbf{U}$, causando o desbalanço no fluxo de energia [96, 2]. Com as distribuições de longas caudas esse efeito deve ser intensificado, principalmente pelo fato da diminuição da frequência de colisão com a velocidade,

isto é, $\omega_{ei} \propto v^{-3}$, uma vez que fricção menos efetiva freará menos os elétrons mais velozes. Portanto, o aumento verificado na Fig.(4.3b) seria decorrente do aumento direto do número de elétrons mais energéticos no plasma.

Já a componente diamagnética independe das colisões e-e e, portanto, pode ser calculada analiticamente. O resultado numérico como função de q para α_Λ é mostrado na Fig.(4.4). A convergência do desenvolvimento assintótico é bastante lenta, principalmente pelo seu caráter alternado, isto é, a aproximação de segunda ordem está por baixo da de terceira terceira ordem que, por sua vez, está por cima da de quarta ordem e assim por diante. Porém, verifica-se que essas soluções tendem a convergir em torno do valor clássico do coeficiente, ou seja, $3/2$, reduzindo muito pouco na região de convergência. Desta forma, adotaremos o resultado clássico para este coeficiente:

$$\alpha_\Lambda = \frac{3}{2}. \quad (4.17)$$

Figura 4.4: Comportamento de α_Λ em função de q . A convergência neste coeficiente é bastante lenta, porém, em torno do valor clássico de $3/2$.

4.2 Fluxos Convectivos Induzidos por Gradientes

No capítulo 2, vimos que os fluxos de calor e partículas induzidos por ∇T e ∇p podem ser acoplados em uma mesma equação de transporte efetiva, uma vez que seus coeficientes de transporte são os mesmos, como mostrado através das relações estendidas de Onsager (vide Eq.(3.88) e Eq.(3.93)). Portanto, apenas a equação cinética independente para A_T precisará ser resolvida para calcular os coeficientes de transporte. Novamente, é preciso apresentar as expressões dos coeficientes de transporte calor e partículas em termos de a_k . Substituindo a solução A_T dada na Eq.(3.95a), a expressão geral para condutividade térmica, definida a partir do fluxo de calor na Eq.(3.57), é

$$\kappa = \frac{3-q}{5-3q} \frac{2T_q/T}{3(1+q)} \int d\mathbf{v} v^2 L_1^{3/2}(x^2; q) f_0 \tau \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{L_k^{3/2}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{2+k}} \quad (4.18)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{3-q}{1+q} \frac{5-3q}{3} A_q \frac{nT\tau}{m} \int d\mathbf{x} x^2 L_1^{3/2}(x^2; q) L_k^{3/2}(x^2; q) [1 - (1-q)x^2]^{\frac{q}{1-q}-2} \quad (4.19)$$

onde utilizamos $p = nT$ para incluir a contribuição do ∇T proveniente do ∇p , o termo perturbativo exclusivo da não-extensiva, na condutividade térmica $\kappa_{||}$. Assim, podemos escrever a densidade de fluxo condutivo como

$$\mathbf{q}_T = -\kappa_{||} T \nabla_{||} \ln \left(n^{2\frac{q-1}{3-q}} T \right) - \kappa_{\perp} T \nabla_{\perp} \ln \left(n^{2\frac{q-1}{3-q}} T \right) - \kappa_{\wedge} T \nabla_{\wedge} \ln \left(n^{2\frac{q-1}{3-q}} T \right), \quad (4.20)$$

onde utilizamos a linearidade das soluções para separar os fluxos nas diferentes orientações do campo magnético e definimos as condutividades térmicas por:

$$\left\{ \begin{matrix} \kappa_{\perp} \\ \kappa_{\wedge} \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} c_T(q, k) \frac{nT\tau}{m} \left\{ \begin{matrix} a_k^{\perp} \\ a_k^{\wedge} \end{matrix} \right\} \quad (4.21)$$

onde $\kappa_{||}$ é obtida da partir de $\kappa_{\perp}$ no limite $\Delta \rightarrow 1$ e $c_T(q, k)$ é:

$$c_T(q, k) = \frac{3-q}{5-3q} \left(\frac{5-3q}{2} \right)^2 \frac{8\pi A_q}{3(1+q)} \int_0^{\infty} dy \frac{y^{\frac{3}{2}} L_1^{\frac{3}{2}}(y; q) L_k^{\frac{3}{2}}(y; q) [1 - (1-q)y]^{\frac{q}{1-q}}}{[1 - (1-q)y]^{2+k}}, \quad (4.22)$$

e ainda utilizamos a substituição $x^2 = y$.

O fluxo de partículas induzido pelos gradientes é determinado pela formula geral Eq.(3.58), onde a substituição de A_T resulta na seguinte expressão para o coeficiente da fricção térmica:

$$\alpha = - \int d\mathbf{v} \frac{m\mathbf{v} C_{ei}(\mathbf{v} A_T)}{3} = \frac{2\pi e^4 \lambda n \tau}{3m} \frac{5-3q}{2q^2} \int d\mathbf{v} \delta_{\nu\eta} V_{\mu\nu} f_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_{\mu\gamma} a_k L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{k+1}} \quad (4.23)$$

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}} A_q}{q^2} \left(\frac{5-3q}{2} \right)^{\frac{1}{2}} n \int dy L_k^{\frac{3}{2}}(y; q) [1 - (1-q)y]^{\frac{q}{1-q} - 1 - k}. \quad (4.24)$$

Assim como o fluxo de calor termoeletrico induzido por $\mathbf{U}$, apenas as componentes paralela e diamagnética da fricção térmica restam a aplicação do limite de plasma intensamente magnetizados, $\Delta \gg 1$ [96, 2]. As relações de Onsager, provadas na Sec.(3.3.2), estabelecem que os coeficientes de transporte da fricção térmica serão os mesmos de $\mathbf{q}_U$. Portanto, a expressão final de $\mathbf{R}_T$ é

$$\mathbf{R}_T = -\frac{3-q}{2q} n \left[\alpha_{\perp} \left(\nabla_{||} T + 2\frac{q-1}{3-q} \frac{T}{n} \nabla_{\perp} n \right) + \alpha_{\wedge} \left(\nabla_{\wedge} T + 2\frac{q-1}{3-q} \frac{T}{n} \nabla_{\wedge} n \right) \right], \quad (4.25)$$

onde $\alpha_{\perp}$ e $\alpha_{\wedge}$ são determinados, respectivamente, pelas Eqs.(4.16) e (4.17).

Alternativamente, esses coeficientes são determinados pela Eq.(4.24):

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha_{\perp} \\ \alpha_{\wedge} \end{matrix} \right\} = \sum_{k=1}^{\infty} s_T(q, k) \left\{ \begin{matrix} a_k^{\perp} \\ a_k^{\wedge} \end{matrix} \right\} \quad (4.26)$$

e $s_T(q, k)$ é:

$$s_T(q, k) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}} A_q}{q^2} \left(\frac{5-3q}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \int dy L_k^{\frac{3}{2}}(y; q) [1 - (1-q)y]^{\frac{q}{1-q} - 1 - k}. \quad (4.27)$$

Figura 4.5: Comportamento de $\kappa_{||}/\kappa_{||;Brag}$ em função de q . (a) $\kappa_{||}$ aumenta como função de q até o ponto de inflexão, a partir do qual decresce como função de q . As linhas unem os pontos adjacentes; não representam um ajuste polinomial. (b) Ajuste polinomial dos pontos mostrando o comportamento típico da condutividade térmica como função de q .

4.2.1 Condutividade Térmica

A densidade de fluxo de calor dos elétrons induzida por ∇T possui componentes nas três direções, paralela, perpendicular e diamagnética. Seguindo a metodologia geral já apresentada para o cálculo dos coeficientes de transporte, devemos encontrar os coeficientes a_k a partir do Eq.(3.74a) nos limites $\Delta \rightarrow 0$ e $\Delta \gg 1$, onde o segundo separa as componentes perpendicular e diamagnética como as suas partes real e imaginária.

O resultado numérico obtido para $\kappa_{||}$ é mostrado na Fig.(4.5a), onde calculamos até a sexta ordem da aproximação assintótica a fim de garantir o comportamento típico da solução. Conforme discutido para q_U (vide Fig.(4.3a) e discussão abaixo da Eq.(4.15)), o erro aumenta gradativamente em aproximações de ordens mais altas à medida que $q \rightarrow 1.4$ devido ao comportamento não-monotônico; porém, o comportamento típico do coeficiente de transporte ainda é preservado pelos pontos. É importante observar também que os erros em $q = 1.3$ e $q = 1.4$ são menores que em $q = 1.35$, reforçando nossa afirmação prévia quanto à sensibilidade do erro ser causada pelo comportamento não-monotônico, sendo menor quando nos afastamos do ponto de inflexão.

O comportamento geral da condutividade térmica paralela pode ser mais facilmente visualizado no ajuste polinomial na Fig.(4.5b), cuja expressão é

$$\kappa_{||} = \frac{nT\tau}{m} \frac{3-q}{5-3q} \left(3.16 - 10a(q-1)^{\frac{3}{2}} \left[10 - b(9-5q)^{\frac{4}{5}} \right] \right), \quad (4.28)$$

onde $a = 1.38$ e $b = 6.16$. O erro relativo dessa expressão é menor que $\pm 8\%$ até $q = 1.15$ e varia de $\pm 15\%$ em $q = 1.2$ até $\pm 33\%$ para $q = 1.4$.

A figura mostra claramente o comportamento não-monotônico de $\kappa_{||}$ como função de q ; o ajuste mostra o crescimento do coeficiente de transporte até por volta de $q \sim 1.32$, a partir de onde apresenta um pequeno decréscimo. Todavia, a baixa precisão devido a propagação do erro não permite afirmar seguramente se de fato temos um decréscimo ou se o crescimento é estagnado, aproximando-se de um valor máximo assintoticamente. De qualquer forma,

Figura 4.6: Comportamento de $\kappa_{\perp}/\kappa_{\perp;\text{Brag}}$ em função de q . **(a)** $\kappa_{\perp}/\kappa_{\perp;\text{Brag}}$ decresce inicialmente como função de q até um ponto de inflexão, a partir de onde passa a crescer. As linhas apenas unem os pontos adjacentes; não representam o ajuste polinomial. **(b)** Ajuste polinomial construído a partir das soluções de quinta e sexta ordem com o comportamento típico da condutividade térmica perpendicular como função de q .

podemos afirmar que o crescimento de $\kappa_{\parallel}$ em função de q não será constante, ou seja, o aumento da cauda da distribuição não resultará num aumento do coeficiente de transporte na mesma proporção.

Se comparamos os ajustes do fluxo de calor induzidos por $\mathbf{U}$ e ∇T , ambos resultados apresentam o mesmo comportamento como função de q : o aumento do fluxo de calor acima do nível clássico como consequência do aumento das caudas da distribuição. Contudo, antes de aprofundar essa análise, é conveniente apresentar os resultados para a condutividade térmica perpendicular.

A Fig.(4.6a) mostra os resultados numéricos obtidos para $\kappa_{\perp}$ como função de q . Da mesma forma que para o $\alpha_{\perp}$, retratado na Fig.(4.4), a convergência de $\kappa_{\perp}$ é alternada. Entretanto, ao contrário que vimos para o outro coeficiente de transporte, os resultados obtidos para aproximações em mais alta ordem deixam claro que $\kappa_{\perp}$ não se aproxima do valor clássico. É importante observar também que a solução de quarta ordem está entre as soluções de segunda e terceira ordens; assim como a solução de sexta ordem está entre a solução de quarta e quintas ordens. Esse comportamento da convergência limita, portanto, a região do domínio onde aproximações de ordens superiores devem se encontradas. Isso faz com que a sexta ordem seja uma aproximação bastante boa até, pelo menos, $q = 1.25$. Assim, podemos utilizar essa ordem de aproximação para retratar o comportamento típico de $\kappa_{\perp}$, como é retratado na Fig.(4.6b), onde ainda ajustamos o seguinte polinômio

$$\kappa_{\perp} = \frac{nT\tau}{m\Delta^2} \frac{3-q}{5-3q} \left(4.66 + a \frac{(q-1)^{1.23}}{(1+q)^3} [10 - b(7-4q)^{1.4}] \right), \quad (4.29)$$

onde $a = 10.25$ e $b = 8.18$. O erro relativo dessa expressão é menor que $\pm 5\%$ para $q \leq 1.2$ e aumenta até no máximo $\pm 9\%$ para $q = 1.4$.

O comportamento visto na figura é semelhante ao obtido para η_0 na Fig.(4.6a), embora, o posterior aumento de tal coeficiente de transporte não seja capaz de recuperar o valor

numérico do resultado clássico, como acontece aqui para $\kappa_{\perp}$. No caso, o inicial aumento das caudas da distribuições com q é suficiente para reduzir a condutividade perpendicular, porém, após determinado valor, a mesma passa a aumentar. Apesar do comportamento não-monotônico, a propagação do erro não é acentuado como a observada na $\kappa_{\parallel}$; recordando que os mesmos a_k são utilizados em ambos os cálculos, exemplificando mais uma vez o efeito da propagação do erro na expressão geral do coeficiente de transporte. Aqui a supressão do erro se deve ao limite $\Delta \gg 1$ eliminar muitos termos polinomiais da expressão final, reduzindo a sensibilidade da propagação do erro em ordens superiores. Contudo, o aumento do erro à medida que $q \rightarrow 1.4$ implícito à metodologia ainda é observado.

O comportamento geral do fluxo condutivo de calor pode ser compreendido a partir de argumentos mecânicos básicos, isto é, independente da estatística utilizada para descrever o fenômeno [96]. Nesse exame, mostra-se que $\kappa_{\perp}/\kappa_{\parallel} \sim \omega^2/\Omega^2$, onde ω é uma espécie de frequência característica do transporte colisional paralelo, ou seja, a frequência do processo de espalhamento representado pelo operador colisional, sem incluir os efeitos dinâmicos da evolução de f ou do campo magnético. No modelo de Braginskii, é possível mostrar que $\omega \sim \tau^{-1}$, onde τ é o tempo de relaxação dado pela Eq.(3.28) [2].

Antes dar seguimento, é importante destacar que a razão relaciona de maneiras diferentes a relaxação ao equilíbrio colisional com os transportes nas direções paralelas e perpendicular. Enquanto o aumento do processo de espalhamento, ou seja, de ω , aumenta a eficiência do transporte perpendicular em comparação com o paralelo, a redução de ω leva à melhora do transporte paralelo em comparação com o perpendicular. De fato, caso não houvessem colisões, os elétrons manteriam seu movimento orbital em torno das linhas de força do campo magnético e não havia fluxo líquido na direção perpendicular. Assim, o aumento do transporte perpendicular como função de ω se deve ao maior número de elétrons que trocam de linha de força em decorrência das colisões e que, em média, se deslocam para as regiões mais frias do plasma [105].

O comportamento da razão normalizada $(\kappa_{\perp}/\kappa_{\parallel})/(\kappa_{\perp}/\kappa_{\parallel})_{\text{Brag}}$ como função de q é mostrado na Fig.(4.7). O inicial decréscimo da razão é atribuído ao enfraquecimento do processo de espalhamento devido as longas caudas da distribuição. Então, após alcançar um mínimo, a razão passa a aumentar como consequência das correlações de longo-alcance, o que mostra a supressão do processo de espalhamento de curto alcance (colisões) em contrapartida do efeito de correlações de longo-alcance; assim como corre na aproximação de ordem zero para a fricção mostrada na Fig.(3.1).

Também é importante notar que em nenhum momento $(\kappa_{\perp}/\kappa_{\parallel})/(\kappa_{\perp}/\kappa_{\parallel})_{\text{Brag}}$ supera o valor clássico na Fig.(4.7), o que contrasta diretamente com o valor de $\kappa_{\perp}$ acima do resultado clássico na Fig.(4.6a) quando $q \rightarrow 1.4$. A aparente contradição está na eliminação do termo multiplicativo $(3-q)/(5-3q)$ de ambos coeficientes na divisão, o qual representa a contribuição proveniente do ∇p , o termo perturbativo exclusivo da estatística não-extensiva proveniente. Tal constatação mostra a importância da utilização do modelo adequado às distribuições de longas caudas; ainda que fosse possível determinar o comportamento retratado na Fig.(4.7) através de argumentos gerais, sem um modelo auto-consistente e o cálculo explícito dos coeficientes de transporte, não seria possível identificar a generalização da força termodinâmica com a inserção de ∇p , nem que sua contribuição é mais significativa para a $\kappa_{\perp}$ do que para $\kappa_{\parallel}$.

A componente diamagnética do fluxo de calor pode ser calculada analiticamente para

Figura 4.7: Comportamento da razão $(\kappa_{\perp}/\kappa_{\parallel})/(\kappa_{\perp}/\kappa_{\parallel})_{\text{Brag}}$ como função de q . Inicialmente, a razão diminui com o aumento de q e, após um mínimo, aumenta se aproximando do valor clássico.

Figura 4.8: O fluxo diamagnético de calor não depende das colisões e, portanto, pode ser calculado analiticamente. O resultado reflete diretamente o efeito dos partículas das longas caudas da distribuição.

um plasma intensamente magnetizado, uma vez que nesse limite a condutividade térmica diamagnética não dependerá das colisões entre elétrons. Contudo, diferentemente do modelo clássico, onde esse fluxo pode ser calculado diretamente a partir das equações de fluidos [42], os efeitos das longas caudas não são explícitos nessas equações (vide Eq.(3.9)), portanto, tornando indispensável o cálculo cinético do coeficiente de transporte.

O resultado obtido até a sétima ordem para $\kappa_{\perp}$ é mostrado na Fig.(4.8). O compor-

tamento é análogo aos observados na $\alpha_{||}$ e $\kappa_{||}$, e se deve apenas ao aumento da cauda da distribuição, ou seja, dos elétrons mais energéticos, sugerindo que as explicações anteriores acerca da origem do comportamento estão corretas. Como também já havíamos argumentado, a sétima ordem da aproximação assintótica é bastante próxima da anterior e não altera o comportamento típico do coeficiente. Portanto, esse resultado assegura que não há perda de generalidade nas interpretações que fizemos anteriormente ao truncamos a solução na sexta ordem. Infelizmente, a expressão analítica do coeficiente de transporte nessa aproximação é muito extensa para ser escrita, impossibilitando sua apresentação em texto.

Também voltamos a observar que o aumento da cauda da distribuição nem sempre induz proporcionalmente o aumento do transporte. Em geral, os efeitos de não-monotonicidade ou de saturação ocorrem na região de $q \geq 1.25$. Como alertamos no Cap.1, nessa região, estudos minuciosos que não adotem a aproximação de fracas interações devem ser feitos para observar, por exemplo, o efeito das flutuações de ϕ , que embora pequenos, podem ser eventualmente significativos. Esses novos efeitos, por sua vez, podem alterar a dinâmica dos fenômenos de transporte ao introduzir novas forças termodinâmicas nos fluxos condutivos, como ocorre em nosso modelo com a introdução da perturbação ∇p .

Por fim, para facilitar futuras referências, apresentamos a seguir as expressões para os fluxos colisionais calculados, as expressões ajustadas dos coeficientes de transporte a partir do cálculo numérico (mais o $\eta_{\perp}$, calculado analiticamente na Eq.(3.32)), uma tabela com os parâmetros do ajuste, os respectivos valores no modelo de Braginskii ($q \rightarrow 1$ em nossos resultados) e um gráfico que exhibe o comportamento normalizado.

Então, as equações de transporte encontradas no limite $\Delta \gg 1$ são:

$$\mathbf{R} = -\eta_{||} \mathbf{U}_{||} - \eta_{\perp} \mathbf{U}_{\perp}, \quad (4.30)$$

$$\mathbf{q}_U = \alpha_{||} n T \mathbf{U}_{||}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{q}_T = -\kappa_{||} T \nabla_{||} \ln \left(n^{2\frac{q-1}{3-q}} T \right) - \kappa_{\perp} T \nabla_{\perp} \ln \left(n^{2\frac{q-1}{3-q}} T \right), \quad (4.32)$$

onde os coeficientes de transportes ajustados a partir do cálculo numérico são:

$$\eta_{||} = (0.51 - \gamma_1(q-1)^{0.8} [1 - \gamma_2(5-3q)^{1.5}]) \frac{m}{ne^2\tau}, \quad (4.33a)$$

$$\eta_{\perp} = \frac{\pi^{3/2} A_q}{q} \left(\frac{5-3q}{2} \right)^{-1/2} \frac{m}{ne^2\tau}, \quad (4.33b)$$

$$\alpha_{||} = 0.71 + \theta_1 \frac{(q-1)^{0.5}}{1+q} (1 - \theta_2(3-2q)^2), \quad (4.33c)$$

$$\kappa_{||} = \frac{nT\tau}{m} \frac{3-q}{5-3q} (3.16 - 10\xi_1(q-1)^{1.5} [10 - \xi_2(9-5q)^{0.8}]), \quad (4.33d)$$

$$\kappa_{\perp} = \frac{nT\tau}{m\Delta^2} \frac{3-q}{5-3q} \left(4.66 + \xi_3 \frac{(q-1)^{1.25}}{(3-2q)^{0.5}} [10 - \xi_4(7-5q)^{1.1}] \right), \quad (4.33e)$$

onde os parâmetros desses ajustes estão na Tab.(4.1) e os valores correspondentes ao modelo de Braginskii recuperados no limite $q \rightarrow 1$ são:

$$\eta_{||;\text{Brag}} = 0.51 \frac{m}{ne^2\tau}; \quad \eta_{\perp;\text{Brag}} = \frac{m}{ne^2\tau}; \quad \alpha_{||;\text{Brag}} = 0.71; \quad (4.34)$$

$$\kappa_{||;\text{Brag}} = 3.16 \frac{nT\tau}{m}; \quad \kappa_{\perp;\text{Brag}} = 4.66 \frac{nT\tau}{m\Delta^2}. \quad (4.35)$$

Tabela 4.1: Parâmetros do ajustes nas Eqs.(4.33)

γ_1	0.57		γ_2	0.13		θ_1	4.85		θ_2	0.95
ξ_1	1.46		ξ_2	6.07		ξ_3	2.69		ξ_4	4.75

Figura 4.9: Coeficientes de Transporte normalizados dado pelas Eqs.(4.33).

Capítulo 5

Comparação com Modelos Empíricos

Como vimos no Cap.3, os fluxos colisionais do modelo de transporte não-extensivo podem ser bastante diferente das expressões clássicas. Em particular, a maior diferença está no aparecimento de uma nova força termodinâmica, ∇p , consequência das longas caudas da distribuição. Após separar a parte proporcional ao ∇T dessa contribuição exclusiva da estatística não-extensiva no fluxo de calor (vide Eq.(4.32)), a nova perturbação é então escrita em termos do campo elétrico, uma vez que $\nabla \ln n \approx -e\mathbf{E}/T$ pela Eq.(2.40) (a saber, $n = n_0 \exp[e\phi/T]$, onde ϕ é o potencial elétrico e $|e\phi|/T \ll 1$ permite que desprezemos ∇T). Portanto, nosso resultado acopla o $\mathbf{E}$ aos fluxos antes mesmo de utilizarmos as equações de fluidos, o que não ocorre no modelo de Braginskii.

Esse resultado é interessante para aplicações envolvendo barreiras de transporte, como nas transições L-H e na supressão de turbulência [106], no transporte dito não-local em tokamaks [107, 108, 109] e até mesmo no transporte de calor em plasmas astrofísicos [110, 111, 112, 113]. Em particular, a evidência de elétrons supratérmicos no modo H, como vimos na introdução, quando associados ao mecanismo básico da formação das barreiras de transporte que depende do ∇p , coloca esse fenômeno em destaque em futuras aplicações do modelo.

No restante desse capítulo, aplicaremos nosso modelo no fluxo de calor em ventos solares e no fenômeno do pulso frio em plasmas de tokamak. Como veremos, as explicações providas por nosso modelo mostraram que os elétrons oriundos das longas caudas da distribuições, os elétrons supratérmicos, têm papel fundamental na interpretação desses fenômenos.

5.1 Transporte de Calor em Plasmas Astrofísicos

Em vento solares, na corona solar e em plasmas do meio interestelar, é bem conhecido que os modelos clássicos de transporte não descrevem bem o fluxo de calor; presumidamente devido as distribuições não-maxwellianas observadas nesses sistemas [85, 114]. Em uma tentativa de re-estabelecer equações de transporte capazes de prever as observações, alguns modelos semi-empíricos supõem válido todo o desenvolvimento analítico das equações de transporte a partir da teoria cinética de Maxwell-Boltzmann, porém, as funções de distribuição basilares não são maxwellianas [110, 111, 112, 113].

A denominação “empírico” desses modelos se refere às funções de distribuição não-maxwellianas

que são determinadas experimentalmente¹. Podemos encontrar bi-maxwellianas (temperaturas diferentes na direção paralela e perpendicular), distribuições κ , distribuições bi- κ (mesma assimetria das bi-maxwellianas), distribuições Lorentzianas (lei de generalizada potência similar à distribuição κ), bi-Lorentzanas (idem às anteriores) ou ainda combinações lineares dessas funções de distribuição [33, 22, 115, 116, 117].

Em geral, as previsões desses modelos são marginalmente compatíveis com as observações e mostram a necessidade da inclusão dos elétrons supratérmicos na descrição dos fenômenos. Um comportamento bastante intrigante previsto por alguns modelos é a possibilidade da inversão do sentido do fluxo de calor, isto é, o calor fluir a favor do gradiente de temperatura, em decorrência do filtro de velocidades [86, 118, 33, 119]. Basicamente, esse é um efeito de polarização causado pela diferença entre os movimentos dos elétrons termalizados e supratérmicos no plasma. Por se tratar de um fenômeno microscópico, embora a solução geral da equação cinética contenha esse efeito, as equações de fluidos devem permanecer inalteradas. Isso significa que apenas as quantidades que dependem explicitamente da solução da equação cinética devem ser sensíveis às mudanças. De fato, no nosso modelo, isso é bem representado pela nova perturbação ∇p .

Em caráter ilustrativo, podemos entender o fenômeno através do simples modelo de criação dos ventos solares na corona solar proposto por Meyer-Vernet [120]. Nesse modelo, a corona solar é suposta em equilíbrio mecânico, o íons estão em equilíbrio com a força gravitacional e o gradiente de pressão dos elétrons dá origem a um campo elétrico de polarização com a finalidade de mantê-los em equilíbrio. Porém, os elétrons supratérmicos devem incrementar o efeito de polarização, uma vez que sua grande energia ultrapassa facilmente a energia de escape, dando origem ao filtro de velocidades. Quando a massa da corona solar é então ejetada, criando assim o vento solar, tal separação também deve estar no vento solar.

Quando as funções de distribuição κ são utilizadas para descrever esse fenômeno, o efeito de polarização é representado nas equações de transporte por um termo análogo ao ∇p determina do por nosso modelo (vide Eq.(3.94)) [121]. Essa identificação também suporta nossa afirmação anterior de que as perturbações ∇p poderiam ser interpretadas como consequência das partículas mais energéticas da cauda da distribuição.

Do ponto de vista teórico, o principal problema dos modelos envolvendo distribuições não-maxwellianas está na suposição a priori da validade das equações cinéticas e de fluidos do modelo clássico. Essa hipótese não é totalmente consistente com distribuições não-maxwellianas, uma vez que as equações clássicas são profundamente baseada na hipótese do caos molecular (comportamento estatístico dos fluidos) e que invariavelmente leva à distribuições exponenciais [66, 67]. Sobretudo quando consideramos a identificação entre as funções de Tsallis e as distribuições κ [76, 122]; as correlações de longo alcance entre as partículas violam a hipótese do caos molecular. Mais ainda, além do uso questionável das equações clássicas em conjunto com não-maxwellianas, é comum encontrar nos modelos presentes na literatura suposições restritivas adicionais, como desprezar colisões elétron-elétron, utilizar funções de distribuições maxwellianas, desprezar efeitos termoeletrônicos, utilizar o operador colisional de Fokker-Planck da teoria cinética de Maxwell-Boltzmann ou similares [110, 113, 121, 123], que só seriam marginalmente compatível em intervalo bastante limitado de q .

¹Embora hoje saibamos da identificação das distribuições κ com a estatística de Tsallis [76] à época que grande parte desses modelos foram desenvolvidos não havia tal identificação.

Uma alternativa aos modelos cinéticos, e motivada pelas observações experimentais, é a generalização direta das expressões dos fluxos. Por exemplo, um modelo típico formulado para explicar o fluxo de calor no vento solar é a generalização da previsão clássica pela da simples adição de um termo convectivo de transporte na expressão geral [61, 124, 125, 126]. Em particular, um modelo empírico muito utilizado é o modelo de Hollweg, onde é suposto que parte do calor é transportado por um termo não-condutivo proporcional à velocidade do vento solar, $\mathbf{V}$; a expressão geral de tal modelo é [61, 125]

$$\mathbf{q}_{\text{Holl}} = -\kappa_{\text{Brag}} \nabla T + \frac{3}{2} \alpha_H n T \mathbf{V}, \quad (5.1)$$

onde κ_{Brag} é a condutividade térmica clássica e α_H é a constante de Hollweg.

Embora esses modelos puramente empíricos careçam de uma formulação de primeiros princípios, evitam as inconsistências citadas acima dos modelos cinéticos. Portanto, se tratam de modelos mais rigorosos, sem falhas aparentes, proporcionando uma interpretação mais confiável dos resultados.

Na formulação apresentada nesta tese de doutoramento, o modelo cinético é obtido a partir de primeiros princípios, sendo o primeiro a introduzir uma equação cinética com operador colisional consistente com a teoria cinética não-extensiva de plasmas, e a partir da qual é possível determinar sistematicamente as equações de fluidos e seus fluxos condutivos conforme o esperado. Desta forma, ao aplicarmos nosso modelo nos fenômenos descritos acima, seremos capazes de analisar o transporte de forma mais robusta e com maior confiabilidade na interpretação física dos resultados.

Em nosso modelo, o filtro de velocidades é visto diretamente a partir da expressão do fluxo de calor total na direção paralela:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_T + \mathbf{q}_U = -\kappa \nabla T + 2 \frac{q-1}{3-q} \kappa e \mathbf{E} + \alpha n T \mathbf{U}, \quad (5.2)$$

onde o fluxo de calor total é dado na Eq.(3.94), as expressões para os fluxos $\mathbf{q}_T$ e $\mathbf{q}_U$ são dadas, respectivamente, pelas Eqs.(4.32) e (4.31), os coeficientes α e κ são dados, respectivamente, pelas Eqs.(4.33c) e (4.33d) e ainda suprimimos $\parallel$ da notação. Diferentemente dos modelos padrão, também incluímos a componente termoeétrica no fluxo total; indispensável, uma vez verificada as relações de Onsager na Eq.(3.94).

Devemos utilizar ainda a equação de movimento, Eq.(3.9b), para eliminar $\mathbf{U}$ do fluxo de calor. Se supormos o plasma estacionário, temos

$$\nabla p + en \mathbf{E} = \mathbf{R}_{\text{tot}} + \mathbf{R}_T = -e^2 n^2 \eta \mathbf{U} - \frac{3-q}{2q} \alpha \left(\nabla T - 2 \frac{q-1}{3-q} e \mathbf{E} \right), \quad (5.3)$$

onde η é dado na Eq.(4.33a) e $n(\phi) = n_0 \exp(e\phi/T)$. Substituindo esse resultado na Eq.(5.2), encontramos:

$$\mathbf{q} = -\frac{nT\tau}{m} \left[\frac{nT\tau}{m\kappa} + \frac{T\tau\alpha^2}{mne^2\eta} \frac{3-q}{2q} \right] \nabla T + \frac{nT\tau}{m} \left[2 \frac{q-1}{3-q} + \frac{T\tau\alpha^2}{mne^2\eta} \frac{q-1}{q} \right] e \mathbf{E}, \quad (5.4)$$

onde κ e η são, respectivamente, a condutividade térmica e a resistividade.

Figura 5.1: (a) Fluxo de calor total como função de q e $\delta = |e\mathbf{E}|/|\nabla T|$ normalizado pelo valor clássico. O comportamento depende da polarização do campo elétrico, aumentando enquanto paralelos e reduzindo quando antiparalelos. A inversão do fluxo ocorre para $\delta = -4$. As linhas tracejadas correspondem ao fluxo de calor sem a contribuição do fluxo termoeletrico. (b) Valores da razão $|e\mathbf{E}|/|\nabla T|$ como função de q para o fluxo de calor com (q_{tot}) e sem (q_T) a contribuição do fluxo termoeletrico. As linhas tracejadas são os valores mínimos em $q = 1.4$ dos respectivos fluxos.

A Fig.(5.1a) mostra o comportamento do fluxo total de calor alinhado ao campo magnético. É claro na figura que todas as características do filtro de velocidades estão presentes; o aumento do fluxo se $\mathbf{E}$ é paralelo ao ∇T e sua redução quando são antiparalelos, onde vemos a inversão da direção do fluxo quando $\delta = |e\mathbf{E}|/|\nabla T| = -4$. Em nosso modelo, a dependência de $\mathbf{E}$ decorre exclusivamente da nova perturbação ∇p , outra evidência de sua origem em razão da presença dos elétrons supratérmicos. Também podemos ver na figura que os efeitos termoeletricos são significativos para determinar precisamente as curvas, inclusive o ponto onde ocorre a inversão do fluxo de calor total, embora não sejam capazes de alterar o comportamento típico induzido pelo filtro de velocidades.

Mesmo utilizando um modelo consistente e robusto, precisamos ser precavidos quanto aos limites de sua aplicação. Por exemplo, a constatação da ação do filtro de velocidades no fluxo de calor é normalmente feita determinando o valor de δ que anula o mesmo. Em termos dos comprimentos característicos do campo elétrico e do gradiente de temperatura, respectivamente, L_E e L_T , aproximados $L_E \approx L_T$ no limite de interações fracas [96], podemos escrever:

$$\delta = \frac{|e\mathbf{E}|}{|\nabla T|} \approx \frac{|e\phi|}{T} \frac{L_E}{L_T} = \frac{|e\phi|}{T}. \quad (5.5)$$

Os valores de δ que anulam o fluxo de calor em nosso modelo como função de q são mostrados na Fig.(5.1b). Podemos ver claramente que não existe nenhum valor que concorde com a condição básica do modelo colisional, ou seja, $|e\phi|/T = \delta \ll 1$. Mesmo se desprezarmos o efeito termoeletrico, potencializando a redução causada por $\mathbf{E}$, o menor valor possível é $\delta = 2$, ligeiramente menor do valor de $\delta = 2.3$ encontrado na Ref.[121], onde são utilizadas funções de distribuição κ e a equação de Fokker-Planck ordinária para a determinação do transporte. Assim, embora exista a possibilidade matemática da inversão da direção do fluxo,

a magnitude necessária para $\mathbf{E}$ viola as condições do transporte colisional de fracas interações, descartando a possibilidade desse efeito acontecer no contexto do transporte condutivo.

Contudo, é possível analisar campos elétricos intensos dentro dos limites do transporte condutivo, se determinarmos a relação entre $\mathbf{U}$ e $\mathbf{E}$ sem utilizar a equação de movimento. Em ventos solares, é comum que o campo elétrico que permeia o plasma seja da ordem do campo elétrico de Dreicer, $E_D \sim mv_T/(\tau e)$, um limiar a partir do qual a fricção dos elétrons diminui com o aumento da velocidade [42, 96]. Aliás, esta é uma das hipóteses para a longa cauda da distribuição em plasmas astrofísicos [26, 33].

Adotando o referencial onde $\mathbf{U} = \mathbf{V}$ e supondo que a velocidade do vento solar rápido é tal que $|\mathbf{V}| \sim v_T$ [26, 33], ao substituírmos E_D na Eq.(5.2), encontramos

$$\mathbf{q} = -\kappa_{\text{eff}} \nabla T + \frac{3}{2} \left[\frac{2}{3} \left(2 \frac{q-1}{3-q} \frac{m\kappa}{nT\tau} + \alpha \right) \right] nT\mathbf{V}, \quad (5.6)$$

onde podemos definir a constante de Hollweg:

$$\alpha_H = \left[\frac{2}{3} \left(2 \frac{q-1}{5-3q} \frac{m\kappa}{nT\tau} + \alpha \right) \right], \quad (5.7)$$

onde κ e α são, respectivamente, a condutividade térmica dada na Eq.(4.33d) e o coeficiente termoelétrico dado na Eq.(4.33c).

A Fig.(5.2) mostra o comportamento da constante de Hollweg como função de q . Os valores da parte hachurada na figura correspondem à valores típicos encontrado na literatura, embora a extensão total encontra literatura seja $\alpha_H = 0.5 - 10$ [61, 112, 119, 124, 125]. Como podemos ver na figura, para valores típicos de α_H , temos que $q = 1.1 - 1.2$, o que também está em concordância com o intervalo esperado das funções de distribuição κ encontrada na literatura nessa região ($q = 1.1 - 1.5$) [119, 120, 127].

Figura 5.2: Comportamento da constante de Hollweg como função de q .

Também devemos notar um último detalhe, na Eq.(5.6) o termo atribuído ao fluxo convectivo do vento solar $\mathbf{V}$ não depende de τ , embora sua origem seja inteiramente colisional, assim

como nos fluxos termoeletrônicos (vide Eq.(4.9)). Essa característica da equação de transporte pode levar a conclusões precipitadas quando determinada por modelos empíricos, isto é, a ausência de τ pode ser interpretada erroneamente como parte de um fluxo convectivo. De fato, em nosso modelo, esse termo é de origem colisional e se trata da perturbação induzida pela presença de elétrons supratérmicos no plasma.

Outra característica importante de α_H é seu aumento como função de q , uma vez que esse componente do fluxo é consequência direta das partículas supratérmicas. Portanto, o aumento dessa população invariavelmente aumentaria o fluxo de calor, exatamente como observamos na figura. Já a diminuição após $q \sim 1.36$ evidencia o efeito das correlações de longo alcance na supressão do transporte local. Porém, notamos esse limite está distante dos valores observados para q nos ventos solares discutido no parágrafo anterior.

5.2 Pulso Frio em Tokamaks

Um comportamento universal e bastante intrigante em plasmas de tokamaks é o transporte de calor dos elétrons a favor do gradiente de temperatura em decorrência da injeção de pellets (impureza) na borda do plasma [128, 129]. Esse fenômeno de transporte confronta diretamente a previsão teórica do transporte local irreversível clássico, onde o fluxo de calor contra o gradiente de temperatura é consequência inevitável do processo de relaxação ao estado de equilíbrio do sistema em resposta a inomogeneidade [5, 66, 98]. Mais ainda, nessa teoria, a direção oposta dos fluxos possibilitaria a existência de sumidouros de entropia que violariam a segunda lei da termodinâmica ao determinar um termo de produção de entropia negativo.

Todavia, o tempo característico observado nesse tipo de transporte é menor que o difusivo [108, 130], o que excluiria o transporte difusivo local como mecanismo básico de transporte e ressaltaria a necessidade de um novo modelo. Em geral, a abordagem do problema é empírica e feita através de modelos de transporte não-local, os quais podem ser divididos em dois grupos: os que admitem a existência de gradientes críticos, a partir dos quais a condutividade térmica muda drasticamente [107, 131, 132, 133]; e os que adicionam um termo de transporte convectivo à expressão do fluxo de calor difusivo tradicional [134, 135]; em geral, a forma desses modelos empíricos é dada como [108, 136]

$$\mathbf{q} = -n\chi_{\text{emp}}\nabla_r T + nT\mathbf{V}, \quad (5.8)$$

onde χ_{emp} é a difusividade térmica determinada empiricamente, ∇_r é o gradiente de temperatura na direção radial e $\mathbf{V}$ a velocidade hidrodinâmica responsável pelo fluxo de calor para o centro do plasma. Nenhum desses grupos de modelos foi capaz de explicar o mecanismo responsável pelo transporte a partir de primeiros princípios. Recentemente, o paradigma do transporte local foi reintroduzido como mecanismo fundamental do transporte a partir dos resultados de simulações turbulentas envolvendo modos aprisionados de elétrons (*Trapped Electron Modes - TEM*) [109].

Vamos mostrar que o simples modelo difusivo introduzido nesta tese apresenta uma nova perspectiva a cerca do fenômeno, onde o transporte é completamente entendido como efeito dos elétrons supratérmicos. Contudo, a comparação direta com os experimentos não é possível, pois necessitaria da modelagem autoconsistente com os perfis experimentais, em geral,

feita através de simulações bastante complexas, e da inclusão de efeitos neoclássicos (curvatura do campo magnético); tópicos muito extensos e que fogem da proposta inicial do desenvolvimento e interpretação do modelo teórico básico para o transporte local não-extensivo. Mas, mostraremos uma série de resultados experimentais que suportam a explicação de nosso modelo para o pulso frio.

A forma geral do fluxo na Eq.(3.94) estabelece que as componentes termoelétrica e induzida pelos elétrons supratérmicos podem conduzir calor contra o gradiente de temperatura. Em plasmas estacionários, intensamente magnetizados e de seção circular, a componente radial é perpendicular ao campo magnético de confinamento que aponta na direção toroidal. Se supusermos ainda que a temperatura T dos elétrons é muito maior que a dos íons T_i , tal que $p \gg p_i$ (pela neutralidade $n \approx n_i$), no referencial de repouso dos íons, o seguinte resultado geral pode ser encontrado a partir da equação de movimento [2]

$$\mathbf{U}_\perp = -\frac{\eta_\perp}{m^2 n^2 \Omega^2} \nabla_\perp p, \quad (5.9)$$

onde $\eta_\perp$ é resistividade perpendicular dada na Eq.(4.33b).

Como $\mathbf{q}_U$ não possui componentes na direção perpendicular no limite $\Delta \gg 1$, o fluxo total de calor será dado apenas pela componente $\mathbf{q}_T$, a componente diagonal da matriz de transporte. Agora, podemos utilizar a equação anterior para eliminar $\nabla_\perp p$ do fluxo de calor na direção perpendicular na Eq.(4.32) e encontrar que

$$\mathbf{q}_\perp = -\frac{5-3q}{3-q} \kappa_\perp \nabla_\perp T + 2 \frac{q-1}{3-q} \frac{\kappa_\perp B^2}{nT\eta_0 c^2} \mathbf{U}_\perp, \quad (5.10)$$

onde $\kappa_\perp$ é dado pela Eq.(4.33e).

A expressão acima recupera a forma exata dos modelos de transporte não-local convectivo em plasmas de laboratório [108, 134, 135, 136], exceto pelo fator multiplicativo de $\mathbf{U}_\perp$, que nesses modelo é tomando igual a unidade (isso apenas refine o valor de $\mathbf{U}$ na análise dos dados). Novamente, o fluxo de calor relativo à parte “não-condutiva” não depende de τ , o que poderia sugerir a interpretação equivocada de um fluxo convectivo de calor. Assim como antes, a origem desse termo é de fato difusiva e local (colisional), e reflete a contribuição dos elétrons supratérmicos no fenômeno de transporte.

Mesmo os modelos envolvendo gradientes críticos podem, em princípio, ser recuperados em nosso formalismo, se incluirmos ∇p na definição de κ no fluxo de calor dado pela Eq.(4.32). Também devemos supor que o parâmetro $q \equiv q(\mathbf{r})$ pode mudar abruptamente, por exemplo, devido à modificações locais da função de distribuição dos elétrons. Nessas condições, o comportamento previsto pelos modelos de gradiente críticos para a condutividade térmica seria recuperado por nosso modelo. Esta hipótese é sustentada pelos experimentos de aquecimento ciclotrônico dos elétrons (ECH) fora do eixo, cujo o aumento observado na temperatura no centro do plasma, mais quente em comparação com a região de deposição da potência do ECH, é relacionado ao mesmo mecanismo de transporte do pulso frio [130, 133]. A similaridade entre os mecanismos de transporte desses dois fenômenos é reforçada nas investigações do fluxo de calor no Tore Supra, onde a forma geral dos modelos convectivos, ou seja, a Eq.(5.10), foi capaz de reproduzir os dados [137].

No paradigma atual do transporte, o aumento da temperatura no centro do plasma pelo ECH fora do eixo é explicado pela mudança abrupta da difusividade χ ($\kappa = n\chi$, vide

Eq.(3.94)), consequência do perfil radial de $\nabla \ln T$ exceder o limiar do modo de elétron aprisionado (TEM) [131, 138]; a saber, um tipo particular de turbulência causado por elétrons pouco, ou não-, colisionais aprisionados entre espelhos magnéticos dentro de tokamaks [139]. Entretanto, os modo TEM possuem relação direta com os elétrons supratérmicos, como é mostrada nas observações de instabilidades causadas pelo ECH fora do eixo [35, 140]. Nesses experimentos, o ECH fora do eixo produz elétrons supratérmicos a partir dos modos TEM que, por sua vez, excitam as instabilidades; evidentemente, quando as condições necessárias para tais são satisfeitas. Isso mostra que elétrons supratérmicos podem ser produzidos a partir dos modos TEM, desde que algum mecanismo de aquecimento esteja presente.

Em descargas no ASDEX Upgrade tokamak com corrente de plasma de $I_p = 400kA$ à baixas densidades $\bar{n}_e = 2 \times 10^{19}m^{-3}$, foram observadas mudanças significativas de χ dependendo da posição onde é localizada a potência de aquecimento [131], evidenciando que nossa hipótese é possível. Mais ainda, nesse mesmo trabalho foram detectadas a presença de elétrons supratérmicos em alguns disparos analisados, o que converge toda a argumentação em torno de χ como função de $q(r)$. Isso mostra, portanto, que os elétrons supratérmicos não só devem ser importantes na determinação dos coeficientes de transporte, mesmo na abordagem padrão, como também o possível elo entre as similaridades entre os transportes de calor no ECH fora do eixo e do pulso frio, principalmente com a explicação do segundo a partir dos resultados de nosso modelo feita a seguir.

Toda a dinâmica do pulso frio pode ser compreendida através da Eq.(5.10), considerando que a contribuição do fluxo de calor proporcional à U se deve aos elétrons supratérmicos. O fenômeno se inicia com a injeção da impureza e o rápido resfriamento da borda do plasma. As partículas na cauda da distribuição, no instante antecedente à injeção, não são capazes de termalizar no novo estado devido sua baixa colisionalidade, criando assim partículas supratérmicas [141]. A presença dessas partículas altera a dinâmica do transporte, modificando os coeficientes de transporte e introduzindo novas componentes nas equações de fluxo, as quais são representadas em nosso modelo por ∇p . Essa nova componente do transporte é livre para conduzir calor contra o gradiente de temperatura, pois reflete a contribuição dos elétrons supratérmicos, cuja temperatura é mais alta que a temperatura do plasma. Mais ainda, o ∇p não se trata de uma força termodinâmica no sentido estrito do transporte linear irreversível, uma vez que não induz fluxo condutivo conjugado, isto é, uma componente diagonal na matriz de transporte que seja associada à ∇p . Assim, essa nova contribuição pode se comportar como os fluxos cruzados, como é o caso dos fluxos termoelétricos, que não possuem restrição quanto à direção na condução de calor, podendo inclusive conduzir a favor do gradiente de temperatura. Portanto, mesmo no âmbito da termodinâmica do transporte irreversível local, a possibilidade da condução de calor contra a direção do fluxo clássico pela componente exclusiva da estatística não-extensiva não viola a segunda lei da termodinâmica. Essa discussão está em pleno acordo com a explicação anterior para o nova contribuição de ∇p dada no Cap.2, logo em seguida da Eq.(3.94), e que corrige a interpretação equivocada do termo dado por Boghosian [45], muito do porquê devido ao uso do modelo colisional inconsistente com a teoria cinética não-extensiva.

A interpretação dada aqui para o transporte não-local como efeito dos elétrons supratérmicos é corroborada por uma série de resultados experimentais. Na Fig.(5.3) temos as medidas de pressão, difusividade térmica dos elétrons χ_e e da velocidade U do suposto fluxo convectivo de calor em disparos com injeção de impureza no RTP (*Rijnhuizen Tokamak Pro-*

ject) [135]. Como podemos ver, o máximo da velocidade convectiva ocorre justamente na região de máximo gradiente de pressão em $t = 210ms$, mostrando, portanto, que não só a identificação de $\nabla_{\perp}p$ com $U_{\perp}$ na Eq.(5.9) é consistente, mas que o fenômeno estaria de fato relacionado aos elétrons supratérmicos, uma vez que existência de $\nabla_{\perp}p$ no fluxo de calor é resultado de tais partículas.

Figura 5.3: Comportamento para a pressão, difusividade térmica ($\kappa = n\chi$) e velocidade convectiva U obtida a partir da análise de disparo no RTP. As diferentes curvas dizem respeito a tempos distintos do disparo em ms , a injeção dos pellets se dá no instante $205ms$ do disparo. O máximo do gradiente de pressão ocorre na mesma região onde a velocidade convectiva U é máxima. Figuras retiradas de [135].

A presença de elétrons supratérmicos durante o fenômeno do pulso frio foi detectada a partir da análise do sinal do raio-X duro (HXR) em disparos com injeção de pellets na borda do tokamak Tore Supra [107]. A Fig.(5.4) mostra temperaturas obtidas a partir de sinais simulados do ECE de um plasma em condições similares ao do experimento. Como podemos ver, os elétrons supratérmicos afetam fortemente as medidas de temperatura na borda do plasma ($R > 2.80m$), enquanto a variação no centro é pequena ($R = 2.31m$), sugerindo, portanto, que explicação fornecida pelo nosso modelo como o efeito dos elétrons supratérmicos excitados na borda do plasma é plausível. Não podemos analisar o aumento da temperatura do ECE para $R < 2.31m$, pois precisaríamos incluir efeitos de curvatura do campo magnético, os quais são desprezados em nossa aproximação de plasmas cilíndricos.

Vale a pena mencionar que os elétrons supratérmicos poderiam aumentar o efeito da corrente não-indutiva em tokamaks [142]. Neste efeito, um abrupto aumento da densidade de corrente na borda do plasma produz um campo elétrico indutivo em oposição à perturbação a fim de manter o fluxo total de partículas constante. Isto é seguido pela difusão da corrente induzida (fluxo de partículas) que reduz o perfil da densidade de corrente em toda direção radial, exceto na região da perturbação, que se mantém acima do valor antes da perturbação. Em outras palavras, a resistividade aumenta em toda coluna de plasma, exceto na região da perturbação, onde diminui. Assim, como consequência da redução do transporte perpendicular, quando a corrente total do plasma é mantida constante, a temperatura no núcleo do plasma aumenta. Como visto nas Figs.(3.1) e (4.9), ambos $\kappa_{\perp}$ e $\eta_{\perp}$ são reduzidos para determinados valores de q , portanto, o fluxo de calor apontando para o núcleo do plasma aumenta, enquanto a condutividade térmica e o fluxo de calor efetivo para fora do plasma diminuem.

Figura 5.4: Perfis simulados das medidas de temperatura do ECE na presença de elétrons supratérmicos. $T_{e,th}$ e $T_{e,ECE}$ são, respectivamente, as temperaturas obtidas a partir do sinal simulado do ECE sem e com o efeito dos elétrons supratérmicos, onde f_{sthe} é a perturbação que difere os dois sinais. Figura retirada de [107].

Esse efeito, é claro, é aumentado no processo descrito acima e poderia explicar o aumento da temperatura no contexto das primeiras análises do ECRH fora do eixo [62]. Contudo, é difícil especificar numericamente a contribuição da corrente não-indutiva na elevação da temperatura central em uma discussão geral.

Também pudemos estimar o valor do parâmetro q a partir dos dados experimentais obtidos no RTP [136] e no Alcator C-mod [108] para disparos com pulso frio. Isso é feito através da comparação da razão entre as partes difusiva e convectiva dos fluxos de calor dados nas Eqs.(5.8) e (5.10), o que resulta em

$$\sqrt{\frac{m(5-3q)}{T(q-1)}} \frac{A_q n}{q\lambda} \left(\frac{ce\pi}{B}\right)^2 \frac{|\nabla_{\perp} T|}{|\mathbf{U}_{\perp}|} = \frac{\chi_{\text{emp}}}{T} \frac{|\nabla_r T|}{|\mathbf{V}|}, \quad (5.11)$$

onde o lado esquerdo da equação é resultado da divisão dos termos de nosso modelo e não depende de $\kappa_{\perp}$. Portanto, o estabelecimento das longas caudas, e também o valor de q , no pulso frio precede a difusão do calor no plasma. Isso permite que tomemos $|\nabla_{\perp} T|/|\mathbf{U}_{\perp}| = |\nabla_r T|/|\mathbf{V}|$ sem perda de generalidade. Por outro lado, a possibilidade de estimar o valor de q não indica que a $\kappa_{\perp}$ determinada aqui seja a correta para modelar o fluxo de calor no plasma; para tanto, precisaríamos incluir efeitos toroidais e orbitais dos elétrons.

No RTP [136], com uma densidade de linha de $\langle n \rangle = 3 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $B = 2.16 \times 10^4 \text{ G}$, $T = 2.3 \text{ keV}$ e $\chi_{\text{emp}} = 2.1 \text{ cm}^2/\text{s}$, encontramos $q = 1.25$ em $r/a = 0.21$, onde a é o raio menor do plasma, que corresponde a região de maior aumento de temperatura na coluna de plasma. Fazendo a mesma análise no Alcator C-mod com os dados encontrados na Ref.[108], para $\langle n \rangle = 1.3 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ e $B = 5.4 \times 10^4 \text{ G}$, os seguintes valores de q foram encontrados ao longo da coluna de plasma:

r/a	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
T [keV]	2.2	1.75	1.35	0.8	0.5	0.25
$\chi[cm^2/s]$	1.4	1.4	1.4	1.9	2.7	5
q	1.24	1.22	1.19	1.12	1.07	1.03

Tabela 5.1: Valores de q obtidos a partir dos dados encontrados na Ref.[108] para diversas posições na coluna de plasma.

Esses resultados se mostram consistentes com a interpretação do nosso modelo para o fluxo de calor em direção ao centro do plasma ser consequência dos elétrons supratérmicos, uma vez que a região de máximo aumento de temperatura nesses experimentos condiz com o maior valor de q de nosso modelo. Além disso, é interessante observar que em dois experimentos, com parâmetros distintos, o valor previsto de q , portanto, de elétrons supratérmicos, é similar, dando ainda mais robustez para o modelo.

Por fim, gostaríamos de destacar que os resultados apresentados aqui não excluem as recentes constatações sobre do transporte ser local e conduzidos pelos TEM [109]. Longe disso, nosso modelo reforça e pode ajudar nas dificuldades dessa descrição; primeiro, a colisionalidade deve ser baixa para os TEM's não sejam destruídos por instabilidades, o que favorece o aparecimento de distribuições de longas caudas, como argumentado anteriormente. Devido a grande energia, elétrons supratérmicos tendem a ser menos colisionais, reduzindo a frequência de colisão ω , como apontado na Fig.(4.7), portanto, potencializando o dinâmica dos TEM; segundo, as novas perturbações induzidas pelos elétrons supratérmicos correspondem a termos faltantes da descrição baseada na teoria cinética clássica que impedem a correta previsão das magnitudes da perturbação, tempo de propagação e diferenças nos perfis médios de densidade e temperatura dos elétrons em comparação com o experimento.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Nesta tese de doutorado, partindo apenas da definição da s_q , nós fomos capazes de derivar um modelo cinético auto-consistente com a estatística não-extensiva de Tsallis. Com isso foi possível obter as equações de transporte e estabelecer o fechamento das equações de fluidos calculando os coeficientes de transporte na aproximação de integrações fracas. Também fomos capazes de aplicar nosso modelo para interpretar os resultados experimentais em duas situações distintas: o transporte de calor em ventos solares; e a dinâmica do pulso frio em plasmas de confinamento magnético.

Na formulação do modelo cinético, o principal resultado é a dedução do operador colisional auto-consistente com a cinética não-extensiva (Eq.(2.67)). Até onde sabemos, nosso trabalho se trata da primeira dedução desse tipo no contexto da teoria de Tsallis. Assim, podemos destacar que nosso modelo é totalmente adequado para descrever o transporte em plasmas estacionários, cuja função de distribuição é uma não-maxwelliana.

Já na determinação das equações de fluidos para os elétrons, é importante destacar a adaptação do método de Braginskii, feita no Cap.2, ao utilizarmos os polinômios de Jacobi. Nesse formalismo, também apresentamos a prova das relações de Onsager a partir da solução da equação cinética. Nessa abordagem inédita, ao apresentarmos explicitamente os coeficientes de transporte e forças termodinâmicas, pudemos constatar a existência de relações estendidas entre os coeficientes de transporte dos fluxos acionados por ∇T e aqueles acionados por ∇p , a perturbação exclusiva da teoria cinética não-extensiva. Em particular, isso permitiu a generalização do força termodinâmica dos gradientes das quantidades termodinâmicas e a constatação de que ∇p se comporta como um termo cruzado e, eventualmente, pode conduzir calor contra o ∇T .

Ainda nesse capítulo, determinamos a solução aproximada da equação cinética através de uma série assintótica. Nesses termos, vimos que a parte dimensional dos coeficientes de transporte, em um plasma intensamente magnetizado, é a mesma do modelo de Braginskii e toda a dependência com o parâmetro que q aparece como um fator multiplicativo. Esse fator foi calculado numericamente devido a impossibilidade do cálculo analítico das integrais envolvendo do operador colisional e-e, as quais foram estimadas pelo método numérico de integração de Monte Carlo.

Os resultados obtidos para os coeficientes de transporte foram mostrados no Cap.3. Em particular, a resistividade paralela decresce monotonicamente, evidenciando que o alongamento da cauda da função de distribuição, portanto, a redução da frequência de colisão

($\omega_{ei} \propto v^{-3}$). Já o comportamento não-monotônico dos outros coeficientes de transporte, especialmente a $\kappa_{\parallel}$ e a $\kappa_{\perp}$, foi entendido como o resultado de dois efeitos: o alongamento da cauda, o aumento do número de elétrons supratérmicos, e consequente enfraquecimento do efeito da colisão; e a redução da largura da função de distribuição, que representa a diminuição da importância da energia cinética média; ambos discutidos em detalhes a partir da Fig.(4.7).

No Cap.4, aplicamos os resultados de nosso modelo para interpretar dois fenômenos distintos: o transporte de calor nos ventos solares e a dinâmica do pulso frio em plasmas de confinamento magnético.

No transporte de calor em ventos solares, nosso modelo não só foi capaz de recuperar o modelo empírico de Hollweg (Eq.(5.6)), mas suas previsões se mostraram compatíveis com os resultados presentes na literatura. Também pudemos mostrar que, em nosso modelo, a inversão do fluxo de calor prevista pelo filtro de velocidades não é aceitável dentro condições impostas pela aproximação de interações fracas.

No fenômeno do pulso frio, também fomos capazes de recuperar a forma geral dos modelos empíricos (vide Eq.(5.10)). Em nosso modelo, o fluxo de calor em direção ao centro do plasma é consequência dos elétrons supratérmicos do plasmas e dado exatamente pela perturbação exclusiva da estatística não-extensiva ∇p . Essa explicação é sustentada por diversas evidências experimentais, como a constatação de elétrons supratérmicos na borda do plasma no Tore Supra e no ASDEX-U [107] e região de máxima velocidade coincidir com a região de aumento do gradiente de pressão, como evidenciado no RTP [?]. Por fim, ainda pudemos estimar os valores do parâmetro q em diversas posições da coluna de plasma para experimentos envolvendo o pulso frio no RTP [136] e no Alcator C-mod [108]. Em particular, encontramos que $q \sim 1.2$, próximo ao centro, na região de maior aumento de temperatura.

O desenvolvimento futuro do modelo prevê a determinação do fluxo de calor, partículas e momento dos íons, o que resultará no cálculo da viscosidade. Essa extensão natural decorre diretamente do modelo cinético apresentado, sem a necessidade de novos desenvolvimentos da teoria. Também devemos incluir efeitos de curvatura do campo magnético e orbitais da partículas, generalizando assim a modelo de transporte neoclássico, o que então permitiria a comparação direta com quaisquer resultados experimentais de tokamaks. Outra investigação bastante promissora são as instabilidades excitadas por partículas supratérmicas [137], pois, atualmente, os modelos teóricos são bastante limitados, muito em parte devido à falta de modelos de primeiros princípios para funções de distribuição de longas caudas.

Os principais resultados serão publicados no artigo Ref.[143] já submetido para o periódico *Physics of Plasmas*. O trabalho que possibilitou a verificação do aumento das correlações de longo alcance foi publicado no artigo Ref.[50].

Apêndice A

Tensor de Landau

A derivação do operador de Landau apresentada aqui segue, em linhas gerais, as apresentadas em [4, 96]. A única diferença de fato é o corte na integral da seção de choque que aqui será o comprimento de Debye λ_D .

Vamos supor a colisão entre duas partículas carregadas de cargas e_a e e_b , massas m_a e m_b , cujo parâmetro de impacto é b e a distância entre as duas partículas é r , como mostrado na Fig.(A.1) .

Figura A.1: Colisão entre partículas carregadas no referêcia da partícula a , onde a partícula b está em repouso.

A lagrangiana que descreve a colisão nas coordenadas do centro de massa é

$$L = \frac{(m_a + m_b)\dot{\mathbf{R}}^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_a m_b \dot{\mathbf{r}}^2}{m_a + m_b} - \frac{e_a e_b}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\mathbf{R} = \frac{m_a \mathbf{x}_a + m_b \mathbf{x}_b}{m_a + m_b}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b, \quad (\text{A.2})$$

e $\mathbf{x}_a$ e $\mathbf{x}_b$ são as coordenadas cartesianas das respectivas partículas.

Pelas equações de Euler-Lagrange, encontramos que

$$\frac{m_a m_b \ddot{\mathbf{r}}}{m_a + m_b} = \frac{e_a e_b}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (\text{A.3})$$

e, então, a primeira integral da equação de movimento, em termos da velocidade relativa $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}_a - \dot{\mathbf{x}}_b$ é

$$m^* \Delta \mathbf{u} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e_a e_b}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (\text{A.4})$$

onde $m^* = m_a m_b / (m_a + m_b)$ é a massa reduzida do sistema.

Se as colisões provocam apenas pequenas variações na velocidade, podemos desconsiderar a variação da velocidade relativa na direção x e aproximar $r(t)^2 \approx b^2 + u^2 t^2$. A simetria cilíndrica do problema ainda determina que a variação angular na trajetória da partícula nas direções y e z serão iguais. Portanto, podemos calcular χ calculando a primeira integral da equação de movimento apenas na direção y :

$$m^* \Delta u_y = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e_a e_b}{4\pi\epsilon_0 (b^2 + u^2 t^2)} \frac{b}{(b^2 + u^2 t^2)^{1/2}} = \frac{e_a e_b}{2\pi\epsilon_0 b u} \quad (\text{A.5})$$

$$\chi = \frac{\Delta u_y}{u} = \frac{e_a e_b}{2\pi\epsilon_0 b m^* u^2}. \quad (\text{A.6})$$

A decomposição de $\mathbf{u}$ em função dos ângulos θ e χ é

$$\Delta u_x = u(\cos \chi - 1); \quad (\text{A.7})$$

$$\Delta u_y = u \sin \chi \cos \varphi; \quad (\text{A.8})$$

$$\Delta u_z = u \sin \chi \sin \varphi. \quad (\text{A.9})$$

Precisamos agora escrever as velocidades das partículas após a colisão em função de $\mathbf{u}$. Todavia, é preciso dizer que as perturbações na velocidade Δ possuem um fator multiplicativo proporcional a massa reduzida do sistema m^* . Essa fator não foi explicitado no Cap.1 por questão de simplicidade já que não altera as contas apresentadas e as expressões trabalhadas ficariam sobrecarregadas de índices, o que dificulta sua leitura. Incluindo m^* , podemos escrever as perturbações Δ em função de $\mathbf{u}$:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}'_1 &= \mathbf{v}_1 - \frac{m^*}{m_a} \Delta \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} + \frac{m^*}{m_b} \Delta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \Delta \Rightarrow \Delta \mathbf{u} = \Delta. \quad (\text{A.10})$$

Tomando as direções de Δ_μ e Δ_ν como vetores ortonormais, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Delta_\mu \Delta_\nu &= [\hat{e}_\mu \cdot (\hat{y}u + \hat{z}u_z)] [\hat{e}_\nu \cdot (\hat{y}u_y + \hat{z}u_z)] \\ &= (\hat{e}_y \cdot \hat{y})(\hat{e}_\nu \cdot \hat{y})(u_y)^2 + (\hat{e}_\mu \cdot \hat{z})(\hat{e}_\nu \cdot \hat{z})(u_z)^2. \end{aligned}$$

Como é sempre possível escrever

$$\hat{e}_\mu = (\hat{e}_\mu \cdot \hat{x})\hat{x} + (\hat{e}_\mu \cdot \hat{y})\hat{y} + (\hat{e}_\mu \cdot \hat{z})\hat{z}, \quad (\text{A.11})$$

e definindo

$$\frac{u_\mu}{u} = \hat{e}_\mu \cdot \hat{x}; \quad \frac{u_\nu}{u} = \hat{e}_\nu \cdot \hat{x}, \quad (\text{A.12})$$

as expressão final para $\Delta_\mu \Delta_\nu$ é

$$\Delta_\mu \Delta_\nu = [\hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu - (\hat{x} \cdot \hat{e}_\mu)(\hat{x} \cdot \hat{e}_\nu)] u^2 = \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^2} \right] u_y^2, \quad (\text{A.13})$$

onde $\delta_{\mu\nu}$ é a função delta de Kronecker.

O termo $(\hat{e}_\mu \cdot \hat{z})(\hat{e}_\nu \cdot \hat{z}) [\Delta_z^2 - \Delta_y^2]$ não precisa ser desenvolvido em $\Delta_\mu \Delta_\nu$, pois sua integração é nula devido as funções ímpares resultantes dos produtos escalares nas direções y e z .

Utilizando a definição da seção de choque e Eq.(A.6) para encontrar

$$d\sigma = b|db|d\varphi = \left(\frac{e_i e}{4\pi\epsilon_0 m^* u^2} \right)^2 \frac{4}{\chi^3} d\chi d\varphi, \quad (\text{A.14})$$

determinamos todas as variáveis de $K_{\mu\nu}$ (incluindo agora a massa reduzida), tornando possível sua integração

Substituindo Eq.(A.13) e Eq.(A.14) na expressão de $K_{\mu\nu}$, definida em Eq.(2.53), encontramos

$$K_{\mu\nu} = \int m^* \frac{u \Delta_\mu \Delta_\nu}{2} \left(\frac{e_i e}{4\pi\epsilon_0 m^* u^2} \right)^2 \frac{4}{\chi^3} d\chi d\varphi. \quad (\text{A.15})$$

Substituindo o desenvolvimento de $\Delta_\mu \Delta_\nu u$ na expressão integral de $K_{\mu\nu}$, encontramos

$$K_{\mu\nu} = \int \frac{u}{2} \left[\delta_{\mu\nu} - \frac{u_\mu u_\nu}{u^2} \right] [u \sin \chi \cos \varphi]^2 \left(\frac{e_i e}{4\pi\epsilon_0 u^2} \right)^2 \frac{4}{\chi} d\chi d\varphi, \quad (\text{A.16})$$

utilizando a aproximação de pequenos ângulos $\sin \chi \approx \chi$ e o corte λ_D , finalmente, chegamos a expressão final do tensor:

$$K_{\mu\nu} = \frac{e_i^2 e^2}{8\pi\epsilon_0^2} \left[\frac{\delta_{\mu\nu} u^2 - u_\nu u_\mu}{u^3} \right] \int \frac{d\chi}{\chi} = \frac{e_i^2 e^2}{8\pi\epsilon_0^2} \frac{\delta_{\mu\nu} u^2 - u_\nu u_\mu}{u^3} \ln \Lambda, \quad (\text{A.17})$$

onde $\ln \Lambda = \lambda_D/b$ é o logaritmo de Coulomb para o comprimento de Debye λ_D .

A expressão para o tensor apresentada por Braginskii [2] está em unidades c.g.s, onde $\epsilon_0 = 1/4\pi$, portanto, fazendo a mudança das unidades de medida do SI para o cgs, encontramos

$$K_{\mu\nu} = 2\pi e_i^2 e^2 \frac{\delta_{\mu\nu} u^2 - u_\nu u_\mu}{u^3} \ln \Lambda. \quad (\text{A.18})$$

Vamos utilizar o tensor em unidades c.g.s para facilitar a comparação com os resultados de Braginskii.

Apêndice B

Polinômios de Jacobi

A forma que escrevemos os polinômios de Jacobi nesta tese é a mesma dos Polinômios Relativísticos de Laguerre (RLP), que inicialmente se acreditava ser um novo tipo de polinômio ortogonal, mas que se mostrou ser apenas uma nova forma de escrever os polinômios de Jacobi [144].

Aqui faremos uma breve apresentação dos polinômios de Laguerre na forma que é apresentada para os RLP, mostrando sua definição principal e algumas propriedades matemáticas. O texto apresentado aqui é uma compilação da teoria apresentadas nos artigos [100, 145, 146, 99] que podem ser consultadas para maiores detalhes.

Podemos definir os polinômios RPL a partir da equação diferencial de segunda ordem [146]

$$\frac{1}{N}(x^2 + Nx)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{N}\left[\frac{3 + 4n - 2N}{2}x + (1 + \alpha)N\right]\frac{dy}{dx} + \frac{n}{2N}(2N + 2n - 1)y = 0, \quad (\text{B.1})$$

onde N é um parâmetro que no limite $N \rightarrow \infty$ recupera os polinômios associados de Laguerre.

As solução y também pode ser escrita de maneira genérica pela seguinte formula de apresentação:

$$y = L_n^\alpha(x; N) = \sum_{i=0}^n \binom{n + \alpha}{n - i} \prod_{k=n-i}^{n-1} \left(1 + \frac{2k + 1}{2N}\right) \frac{(-x)^i}{i!}, \quad (\text{B.2})$$

ou ainda através da representação de Rodrigues [145]

$$L_n^\alpha(x; N) = \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{N-2n+\alpha+\frac{1}{2}} x^{-\alpha} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left[x^{n+\alpha} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{-N-n-\alpha-\frac{1}{2}} \right]. \quad (\text{B.3})$$

Os polinômios ainda algumas relações [100] com diferencial:

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x; N) - \frac{N + n + \frac{1}{2}}{N} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^2 L_{n-1}^\alpha(x; N); \quad (\text{B.4})$$

entre os primeiros vizinhos

$$nL_n^\alpha(x; N) = (\alpha + n) \left(1 + \frac{x}{N}\right) L_{n-1}^\alpha(x; N) - \left(N + \alpha + 2n - \frac{1}{2}\right) \frac{x}{N} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^2 L_{n-1}^{\alpha+1}(x; N) \quad (\text{B.5})$$

$$\left(N + \alpha + 2n + \frac{1}{2}\right) L_n^\alpha(x; N) = \left(N + \alpha + 2n + \frac{1}{2}\right) L_n^{\alpha+1}(x; N) - \left(N + n - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{x}{N}\right) L_{n-1}^{\alpha+1}(x; N) \quad (\text{B.6})$$

e a relação de ortogonalidade

$$\int_0^\infty x^\alpha \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{-N-n-m-\alpha-\frac{3}{2}} L_n^\alpha(x; N) L_m^\alpha(x; N) dx = \frac{N^2 2^N}{n!} \frac{\Gamma(N + n + \frac{1}{2})}{(N + 2n + \alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(N + n + \alpha + \frac{1}{2})} \quad (\text{B.7})$$

que é, sem sobra de dúvida, a relação mais importa satisfeita pelos polinômios RPL que utilizamos nessa tese.

Apêndice C

Propriedades dos Operadores Colisionais

C.1 Operador Colisional Linearizado

C.1.1 Colisões Elétron-Elétron

O operador para colisões elétron-elétron dado pela Eq.(2.64) é

$$C(f, f') = \frac{2\pi e^4 \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}' U_{\nu\mu} \left\{ f' \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} - f \frac{\partial f'^*}{\partial v'_\mu} \right\}, \quad (\text{C.1})$$

onde e e m são, respectivamente, a carga e a massa do elétrons, $U_{\mu\nu}$ o tensor dado na Eq.(A.18) e f^* é

$$f^* \approx n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} \pi^{3/2} A_q \frac{5-3q}{2q} \left[\frac{f}{n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2}} \right]^{1/q}. \quad (\text{C.2})$$

As soluções de interesse nesta tese de doutorado são do tipo $f = f_0 + f_1 = f_0(1 + \psi)$, tal que $f_1/f_0 = \psi \ll 1$. Portanto, podemos desenvolver f^* em série de potências:

$$\frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} = n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} \frac{A_q}{q^2} \frac{5-3q}{2} \left[\frac{f_0(1+\psi)}{n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} A_q} \right]^{1/q-1} \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left(\frac{f_0(1+\psi)}{n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} A_q} \right) \quad (\text{C.3})$$

$$= \frac{5-3q}{2q^2} [1 - (1-q)x^2] (1+\psi)^{(1-q)/q} \left((1+\psi) \frac{\partial f_0}{\partial v_\mu} + f_0 \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu} \right), \quad (\text{C.4})$$

onde $x^2 = mv^2/(2T_q)$, $T = (5-3q)T/2$ e a função de distribuição do equilíbrio f_0 é dada na Eq.(2.23); a saber:

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{3/2} A_q [1 - (1-q)x^2]^{q/(1-q)}. \quad (\text{C.5})$$

Na versão linearizada do operador, os termos de $\mathcal{O}(\psi^2)$ devem ser descartados, o que resulta na seguinte forma do operador colisional:

$$C(f, f') = C(f_0\psi, f'_0) + C(f_0, \psi'f'_0), \quad (\text{C.6})$$

e cujos operadores acima são dados pelas expressões:

$$C(f_0\psi, f'_0) = \frac{2\pi e^4 \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}' U_{\mu\nu} \left\{ f'_0 \frac{\partial (f_0\psi)^*}{\partial v_\mu} - f_0\psi \frac{\partial f'_0{}^*}{\partial v'_\mu} \right\}; \quad (\text{C.7})$$

$$C(f_0, f'_0\psi') = \frac{2\pi e^4 \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}' U_{\mu\nu} \left\{ f'_0\psi' \frac{\partial f_0^*}{\partial v_\mu} - f_0 \frac{\partial (f'_0\psi')^*}{\partial v'_\mu} \right\}. \quad (\text{C.8})$$

No desenvolvimento em série da equação cinética no método de Chapman-Enskog (vide Cap.2 Sec.3), a solução é tal que $f = f_0 + \epsilon f_1 + \dots$ - onde ϵ é o pequeno fator da expansão do método de Chapman-Enskog - de modo que o operador acima compreende exatamente o termo colisional da expansão de primeira ordem, isto é, dos termos proporcionais à ϵ^1 .

Ao substituírmos Eq.(C.4) na Eq.(C.7), o termo dentro das chaves se reduz à

$$\begin{aligned} f'_0 \left[\frac{5-3q}{2q^2} [1 - (1-q)x^2] [1 + \psi]^{(q-1)/q} \left((1 + \psi) \frac{\partial f_0}{\partial v_\mu} + f_0 \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu} \right) \right] (\dots) \\ (\dots) - f_0\psi \left[\frac{5-3q}{2q^2} [1 - (1-q)x'^2] \frac{\partial f'_0}{\partial v'_\mu} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Substituindo o seguinte termo:

$$[1 - (1-q)x^2] \frac{\partial f_0}{\partial v_\mu} = -\frac{mq\mathbf{v}f_0}{T_q},$$

analogamente para as coordenadas $\mathbf{v}'$; na equação acima, encontramos:

$$f'_0 \left[\frac{5-3q}{2q^2} \left[1 + \frac{q-1}{q}\psi \right] (1 + \psi) \left(-\frac{mq\mathbf{v}f_0}{T_q} \right) + [1 - (1-q)x^2] f_0 \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu} \right] - f_0 f'_0 \psi \frac{5-3q}{2q^2} \left(-\frac{mq\mathbf{v}'}{T_q} \right) \quad (\text{C.10})$$

o qual ainda podemos reescrever como

$$f_0 f'_0 \left[\frac{5-3q}{2q^2} \frac{m}{T_q} (\mathbf{v} - \mathbf{v}') \psi + \frac{5-3q}{2q^2} \left(-\left(1 + \frac{1-q}{q}\psi \right) \frac{qm\mathbf{v}}{T_q} + (1 - (1-q)x^2) \frac{\partial \psi}{\partial v_\mu} \right) \right] \quad (\text{C.11})$$

O primeiro termo é identicamente nulo devido a propriedade $u_\mu U_{\mu\nu} = 0$ e pode ser desprezado. Na equação cima, há apenas uma termo que não depende de ψ , esse termos representa a solução de ordem zero, identicamente nula (devido às leis de conservação) e, portanto, também podemos excluí-lo da expressão final do integrando. Integrando por partes, encontramos

$$\frac{5-3q}{2q^2} \frac{\partial}{\partial v_\mu} [(1 - (1-q)x^2) \psi] f_0 f'_0, \quad (\text{C.12})$$

e, portanto:

$$C(f_0\psi, f'_0) = \frac{2\pi e^4 \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}' U_{\mu\nu} \frac{5-3q}{2q^2} f_0 f'_0 \frac{\partial}{\partial v_\mu} \left[[1 - (1-q)x^2] \psi \right]. \quad (\text{C.13})$$

Analogamente para o segundo termo do operador linearizado, encontramos que

$$C(f_0, f'_0\psi') = -\frac{2\pi e^4 Z^4 \lambda}{m^2} \frac{5-3q}{2q^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}' U_{\mu\nu} f_0 f'_0 \frac{\partial}{\partial v'_\mu} \left[[1 - (1-q)x'^2] \psi' \right]. \quad (\text{C.14})$$

A versão final do operador linearizado para colisões elétron-elétron é

$$I_{ee}(\psi) = \frac{2\pi e^4 Z^4 \lambda}{m^2} \frac{5-3q}{2q^2} \times (\dots) \quad (\text{C.15})$$

$$(\dots) \frac{\partial}{\partial v_\nu} \times \int d\mathbf{v} U_{\mu\nu} f_0 f'_0 \left[\frac{\partial}{\partial v_\mu} ([1 - (1-q)x^2] \psi) - \frac{\partial}{\partial v'_\mu} ([1 - (1-q)x'^2] \psi') \right].$$

C.1.2 Colisões Elétron-Íon

O procedimento é análogo ao anterior, a principal diferença é que devemos desprezar termos da ordem m/m_i . Nesse caso, a expressão geral do operador de colisões elétron-íon é dada pela parte principal do operador de colisões deduzido no Cap.2 Sec.(3.2.1) na Eq.(3.24). Por conveniência, vamos reescrevê-lo aqui:

$$C'_{ei}(f, f_i) = \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{\partial f^*}{\partial v_\mu} \right]. \quad (\text{C.16})$$

A versão linearizada é diretamente obtida pelo simples desenvolvimento em série de f^* (vide Eq.(C.2)) utilizando a condição da solução aproximativa $f = f_0 + f_1$ tq $f_1/f_0 \ll 1$:

$$I_{ei}(f) \equiv C'_{ei}(f, f_i) = \frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \left[V_{\mu\nu} \frac{5-3q}{2q^2} f_0 \frac{\partial}{\partial v_\mu} [(1 - (1-q)x^2) \psi] \right], \quad (\text{C.17})$$

onde utilizamos a propriedade $v_\mu V_{\mu\nu} = 0$ para da derivação f_0 e excluir a solução de primeira ordem (identicamente nula). Consequentemente, $\partial/\partial v_\mu$ só atuaria em ψ na equação acima, porém, é conveniente manter na qual a expressão se apresenta.

C.1.3 Propriedade Auto-Adjunta de $I_{ee}(\psi)$

Se definirmos

$$\hat{f} = [1 - (1-q)x^2] \psi \quad \text{e} \quad \hat{f}' = [1 - (1-q)x'^2] \psi', \quad (\text{C.18})$$

podemos reescrever o operador linearizado para as colisões elétron-elétron na Eq.(C.16) como

$$I(\psi) = \frac{2\pi e^4 \lambda}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v} U_{\mu\nu} f_0 f'_0 \left[\frac{\partial \hat{f}}{\partial v_\mu} - \frac{\partial \hat{f}'}{\partial v'_\mu} \right]. \quad (\text{C.19})$$

Também podemos ver diretamente que as soluções desse operador (funções que o tornam identicamente nulo) são $\hat{f} = (1, \mathbf{v}, v^2)$, a menos de constantes multiplicativas.

Multiplicando a equação por $\hat{g}$ e integrado sobre $\mathbf{v}$, encontramos que

$$S[\hat{f}, \hat{g}] = \frac{2\pi e^4 \lambda}{m^2} \frac{5 - 3q}{2q^2} \int d\mathbf{v} d\mathbf{v}' f_0 f'_0 U_{\mu\nu} \frac{\partial \hat{g}}{\partial v_\mu} \frac{\partial}{\partial v'_\mu} \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial v_\mu} - \frac{\partial \hat{f}'}{\partial v'_\mu} \right). \quad (\text{C.20})$$

onde integramos por partes na variável v_ν .

Como as variáveis de integração são mudas, podemos fazer a troca $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}'$ sem alterar o resultado; a expressão resultante é

$$S[\hat{f}, \hat{g}] = \frac{2\pi e^4 \lambda}{m^2} \frac{5 - 3q}{2q^2} \int d\mathbf{v} d\mathbf{v}' f_0 f'_0 U_{\mu\nu} \left(-\frac{\partial \hat{g}'}{\partial v'_\mu} \right) \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial v_\mu} - \frac{\partial \hat{f}'}{\partial v'_\mu} \right), \quad (\text{C.21})$$

onde $U_{\mu\nu}$ não é afetado por ser simétrico.

Somando e subtraindo as equações para $S[\hat{f}, \hat{g}]$, encontramos

$$S[\hat{f}, \hat{g}] = \frac{\pi e^4 \lambda}{m^2} \frac{5 - 3q}{2q^2} \int d\mathbf{v} d\mathbf{v}' f_0 f'_0 U_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \hat{g}}{\partial v_\mu} - \frac{\partial \hat{g}'}{\partial v'_\mu} \right) \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial v_\mu} - \frac{\partial \hat{f}'}{\partial v'_\mu} \right) = S[\hat{g}, \hat{f}], \quad (\text{C.22})$$

mostrando que a quantidade $S[\hat{f}, \hat{g}]$ é simétrica entre a troca das funções $\hat{g}$ e $\hat{f}$ e, portanto, determinando que o operador linearizado de colisões entre elétrons é auto-adjunto [96].

Devemos notar que se escolhermos $\hat{g} = (1, \mathbf{v}, v^2)$, o operador estabeleceremos uma relação identicamente nula, portanto, também sendo prova das conservações de massa, momento e energia do operador de colisões entre elétrons.

C.1.4 Propriedade Auto-Adjunta de $I_{ei}(\psi)$

Analogamente as colisões elétron-elétrons, podemos definir $\hat{f}$ como na Eq.(C.18), multiplicar Eq.(C.17) por $\hat{g}$ e integrar em $\mathbf{v}$ para encontrar:

$$S[\hat{f}, \hat{g}] = -\frac{2\pi e^2 e_i^2 \lambda n}{m^2} \frac{5 - 3q}{2q^2} \int d\mathbf{v} V_{\mu\nu} \frac{\partial \hat{g}}{\partial v_\nu} \frac{\partial \hat{f}}{\partial v_\mu} f_0, \quad (\text{C.23})$$

onde a simetria entre $\hat{f}$ e $\hat{g}$ é trivial.

Também apontamos que a conservação de momento não é satisfeita pelo operador acima, ou seja, $\hat{g} = m\mathbf{v}$ não reduz $S[\hat{f}, \hat{g}] = 0$. De fato, esse termo é contrabalanceado pelo termos de fricção presente na equação dos íons, isto é, a fricção sofrida pelos íons devido as colisões com os elétrons.

Apêndice D

Integral de Colisões Elétron-Elétron

Nesse apêndice trataremos coeficiente no sistema de equações lineares no Cap.2-Eq.(3.97) resultante da integração do operador de colisões elétron-elétrons e que será calculado numericamente pelo método de Monte Carlo. Antes de detalhar o cálculo numérico, precisamos determinar o operador de colisões explicitamente em função da série assintótica; o que permitirá reescrever adequadamente alguns termos para facilitar a solução. Isso será feito separadamente para ambas as partes do operador colisional dadas nas Eq.(C.13) e Eq.(C.13). Em seguida, devemos mostrar que nenhuma das integrais, independentemente da ordem dos polinômios de Jacobi, introduzirá um novo limite superior em q como visto na densidade (Eq.(2.22)) e energia interna (Eq.(2.27)) ambas no Cap.1. Por fim, descreveremos todas as suposições feitos para o cálculo numérico das integrais via método de Monte Carlo.

D.1 Desenvolvimento Analítico de I_{ee}

As duas partes do operador de colisões elétron-elétron nas Eq.(C.13) e Eq.(C.13) são, respectivamente,

$$C(f_0\psi_w, f'_0) = \frac{2\pi e^4 \lambda}{m^2} \frac{5-3q}{2q^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}' U_{\mu\nu} f_0 f'_0 \frac{\partial}{\partial v'_\mu} [(1 - (1-q)x^2) \psi_w]; \quad (\text{D.1})$$

$$C(f_0, f'_0\psi'_w) = -\frac{2\pi e^4 \lambda}{m^2} \frac{5-3q}{2q^2} \frac{\partial}{\partial v_\nu} \int d\mathbf{v}' U_{\mu\nu} f_0 f'_0 \frac{\partial}{\partial v'_\mu} [(1 - (1-q)x'^2) \psi'_w], \quad (\text{D.2})$$

onde $w = (T, U)$ faz referências as perturbações que induzem os fluxos e ψ_w , para a perturbação genérica $\mathbf{W} = (\nabla T, \mathbf{U})$, é

$$\psi_w = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) \mathbf{v} \cdot \mathbf{W}}{[1 - (1-q)x^2]^{2+k}}. \quad (\text{D.3})$$

No desenvolvimento analítico do Cap.2 Sec., vimos que através da aproximação assintótica da função de distribuição de primeira ordem, podemos transformar a equação cinética independente, uma equação integral, em um sistema de equações algébricas. A solução desse sistema fornece os coeficientes a_k da série aproximativa e é similar para ambas perturbações.

Como também vimos, os sistemas para ambas perturbações podem ser escrito de maneira genérica como

$$\sum_{k=1}^{\infty} (c_{\ell k}^{ee} + c_{\ell k}^{ei} - i\Delta c_{\ell k}^m) a_k = c_{\ell}, \quad (\text{D.4})$$

onde $\Delta = \omega\tau$ e cuja única diferença entre as perturbações está no termos c_{ℓ} do lado direito da equação.

O único termo que não pode ser determinado analiticamente a partir das equações cinéticas é $c_{\ell k}^{ee}$, referente a integral do operador de colisões elétron-elétron na transformação para o sistema de equações algébricas e cuja expressão analítica é

$$c_{\ell k}^{ee} = \int d\mathbf{v} \left(-\frac{4}{15} \frac{1}{n} \frac{m}{2T_q} \frac{\mathbf{v} L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{1+\ell}} \right) I_{ee}(\psi_w) \quad (\text{D.5})$$

onde $I_{ee}(\psi) = C_{ee}(f_0, f_0\psi) + C_{ee}(f_0\psi, f_0)$. O termo entre parentes acima é escolhido adequadamente para que o seu produto com a equação cinética e posterior integração resulte exatamente em uma equação na forma da Eq.(D.4). No caso, vamos fazer os cálculos utilizando a perturbação para a temperatura, contudo, no final do desenvolvimento o mesmo resultado seria obtido se utilizássemos os termos da perturbação da velocidade. Também vamos trabalhar separadamente os termos do operador I_{ee} por conveniência.

Substituindo Eq.(D.3) em $C_{ee}(f_0, \psi_w f_0)$, lembrando que $c_{\ell k}^{ee}$ não depende de a_k (portanto, do somatório) e a perturbação genérica $\mathbf{I}$, encontramos

$$M_{\ell k} = \frac{8\pi}{15} \frac{5 - 3q}{2q^2} \frac{e^4 \lambda \tau}{nm^2} \frac{m}{2T_q} \times \\ \times \int d\mathbf{v} d\mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial v_{\nu}} \left[\frac{\mathbf{v} L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{\ell+1}} \right] \cdot \frac{\partial}{\partial v_{\mu}} \left[\frac{\mathbf{v} L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{1+k}} \right] U_{\mu\nu} f_0 f'_0, \quad (\text{D.6})$$

onde também integramos por partes uma vez para reescrever o termo entre parentes da Eq.(D.5) no interior da $\partial/\partial v_{\nu}$.

Substituindo agora as funções de distribuição f_0 (vide Eq.(??)) e aplicando a mudança de variáveis $x^2 = mv^2/(2T_q)$, encontramos que

$$M_{\ell k} = \frac{\frac{\sqrt{\pi} A_q}{10q^2}}{\left(\frac{5-3q}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \int d\mathbf{x} d\mathbf{x}' \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left[\frac{x_{\eta} L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{\ell+1}} \right] \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} \left[\frac{x_{\eta} L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{1+k}} \right] X_{\mu\nu} \\ \times [1 - (1 - q)x^2]^{\frac{q}{1-q}} [1 - (1 - q)x'^2]^{\frac{q}{1-q}}, \quad (\text{D.7})$$

onde utilizamos ainda:

$$\tau = \frac{3\sqrt{m}T^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2\pi}e^4 n \lambda}; \quad X_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu} x^2 - x_{\mu} x_{\nu}}{x^3} = \left(\frac{m}{2T_q} \right)^{\frac{1}{2}} U_{\mu\nu}. \quad (\text{D.8})$$

As derivadas com relação à velocidade no integrando de $M_{\ell k}$ são calculadas da mesma forma, bastando trocar $\ell \rightarrow k$ e $\nu \rightarrow \mu$. Assim, o resultado da primeira derivada é

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{x_\eta L_\ell(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{1+\ell}} \right] = \frac{\delta_{\eta\nu} L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) + x_\eta \frac{\partial L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x_\nu}}{[1 - (1 - q)x^2]^{1+\ell}} + 2(1 + \ell)(1 - q) \frac{x_\eta x_\nu L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{2+\ell}} \quad (\text{D.9})$$

Vamos separar a multiplicação das derivadas calculadas acima em três partes, uma para cada potência de $(1 - q)$, ou seja:

$$\text{I)} \quad \frac{\delta_{\mu\nu} L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) + x_\nu \frac{\partial L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x_\mu} + x_\mu \frac{\partial L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x_\nu} + x^2 \frac{\partial L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x_\nu} \frac{\partial L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x_\mu}}{[1 - (1 - q)x^2]^{2+k+\ell}} \quad (\text{D.10})$$

$$\text{II)} \quad 2(1 - q) \left\{ (1 + k) x_\mu L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) \frac{x_\nu L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) + x^2 \frac{\partial L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x_\nu}}{[1 - (1 - q)x^2]^{3+\ell+k}} \right. \quad (\text{D.11})$$

$$\left. (1 + \ell) x_\nu L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) \frac{x_\mu L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) + x^2 \frac{\partial L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x_\mu}}{[1 - (1 - q)x^2]^{3+\ell+k}} \right\};$$

$$\text{III)} \quad 4(1 - q)^2 (1 + k)(1 + \ell) \frac{x^2 x_\mu x_\nu L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1 - q)x^2]^{4+\ell+k}}, \quad (\text{D.12})$$

onde utilizamos as seguintes propriedades de tensores:

$$x_\eta x_\eta = x^2, \quad \text{e} \quad \delta_{\eta\nu} \delta_{\eta\mu} = \delta_{\mu\nu}. \quad (\text{D.13})$$

Podemos utilizar a regra da cadeia para as derivadas nas direções x_μ (ou x_ν):

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial x^2}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^2} = 2x_\mu \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad (\text{D.14})$$

e a formula para a derivada dos polinômios de Jacobi dada pela Eq.(??):

$$\frac{\partial L_j^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x^2} = - \left[1 - (1 - q) \left(j - \frac{1}{2} \right) L_{j-1}^{\frac{3}{2}}(x^2; q) \right], \quad (\text{D.15})$$

para reescrever convenientemente as duas primeiras partes do integrando como:

$$\begin{aligned}
\text{I)} \quad & \frac{\delta_{\mu\nu} L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) - 2x_{\mu}x_{\nu} L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q) \left[1 - (1-q) \left(k - \frac{1}{2}\right)\right] L_{k-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{2+\ell+k}} \\
& \frac{-2x_{\mu}x_{\nu} L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) \left[1 - (1-q) \left(\ell - \frac{1}{2}\right)\right] L_{\ell-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{2+\ell+k}}; \\
& + 4x^2 x_{\mu}x_{\nu} \frac{\left[1 - (1-q) \left(k - \frac{1}{2}\right)\right] \left[1 - (1-q) \left(\ell - \frac{1}{2}\right)\right] L_{k-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q) L_{\ell-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{2+\ell+k}};
\end{aligned} \tag{D.16}$$

$$\begin{aligned}
\text{II)} \quad & 2(1-q)x_{\mu}x_{\nu} \left\{ \frac{L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q) (\ell + k + 2)}{[1 - (1-q)x^2]^{3+k+\delta}} \right. \\
& - 2x^2 \frac{(\ell + 1) \left[1 - (1-q) \left(k - \frac{1}{2}\right)\right] L_{k-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q) L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{3+k+\delta}} \\
& \left. - 2x^2 \frac{(k + 1) \left[1 - (1-q) \left(\ell - \frac{1}{2}\right)\right] L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_{\ell-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{3+k+\delta}} \right\},
\end{aligned} \tag{D.17}$$

a terceira não sofre qualquer mudança, uma vez que não depende de derivadas em x_{μ} ou x_{ν} .

Podemos ver em Eq.(D.7) que o tensor $X_{\mu\nu}$ possui uma singularidade em $x_{\mu} = x_{\nu}$, herança do potencial de Coulomb (vide, por exemplo, Eq.(A.4)). Contudo, essa singularidade é facilmente contornada com a seguinte substituição de variáveis:

$$x_{\mu} = c_{\mu} - \frac{w_{\mu}}{2}; \quad x_{\nu} = c_{\nu} + \frac{w_{\nu}}{2}, \tag{D.18}$$

onde o tensor $X_{\mu\nu}$ agora é

$$W_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu} w^2 - w_{\mu} w_{\nu}}{w^3}, \tag{D.19}$$

e as três partes do integrando:

$$\begin{aligned}
\text{I)} \quad & \frac{\delta_{\mu\nu} L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) - 2c_\mu c_\nu [1 - (1-q)(k - \frac{1}{2})] L_{k-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q) L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{2+k+\ell}} \\
& - 2c_\mu c_\nu \frac{[1 - (1-q)(\ell - \frac{1}{2})] L_{\ell-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{2+k+\ell}} \\
& + \frac{4 \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + c_\eta w_\eta \right) c_\mu c_\nu [1 - (1-q)(\ell - \frac{1}{2})] L_{k-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q) L_{\ell-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{2+\ell+k} [1 - (1-q)(k - \frac{1}{2})]^{-1}};
\end{aligned} \tag{D.20}$$

$$\begin{aligned}
\text{II)} \quad & 2(1-q)c_\mu c_\nu \left\{ \frac{(\ell + k + 2) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{3+k+\ell}} \right. \\
& - \frac{2 \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + c_\eta w_\eta \right) (\ell + 1) [1 - (1-q)(k - \frac{1}{2})] L_{k-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q) L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{3+k+\ell}} \\
& \left. - \frac{2 \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + c_\eta w_\eta \right) (k + 1) [1 - (1-q)(\ell - \frac{1}{2})] L_{\ell-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{3+k+\ell}} \right\};
\end{aligned} \tag{D.21}$$

$$\text{III)} \quad 4(1-q)^2 \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + c_\eta w_\eta \right) \frac{c_\mu c_\nu (k+1)(\ell+1) L_k^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{4+\ell+k}}, \tag{D.22}$$

onde nos adiantamos e eliminamos termos proporcionais à w_μ e w_ν , uma vez que essas expressões ainda serão multiplicadas por $W_{\mu\nu}$ e, portanto, seria possível identificar:

$$w_\mu W_{\mu\nu} = w_\nu W_{\mu\nu} = 0. \tag{D.23}$$

Nesse mesmo contexto, outras relações envolvendo o produto de $W_{\mu\nu}$ serão úteis para simplificar ainda mais o integrando. No caso, as relações em questão são:

$$\delta_{\mu\nu} W_{\mu\nu} = \frac{2}{w}; \quad c_\nu c_\mu W_{\mu\nu} = \frac{c^2 w^2 - c_\mu c_\nu w_\mu w_\nu}{w^3} = \frac{c^2}{w} (1 - \hat{\Omega}), \tag{D.24}$$

onde $\hat{\Omega}$ é, em coordenadas esféricas:

$$\hat{\Omega} = (\sin \theta \cos \varphi \sin \theta' \cos \varphi' + \sin \theta \sin \varphi \sin \theta' \sin \varphi' + \cos \theta \cos \theta')^2, \tag{D.25}$$

e os ângulos linha representam as coordenadas angulares de $\mathbf{w}$.

A aplicação das propriedades acima nas Eqs.(D.20-D.21) resulta em expressões ainda maiores que as já apresentadas. Em virtude do pequeno ganho interpretativo e da grande dificuldade de apresentar por escrito expressões razoavelmente entendíveis, não iremos apresentar os resultados dessa operação; discutiremos apenas suas características gerais.

Na prática, como todos os termos que resultam na contração do tensor $W_{\mu\nu}$ são fatores multiplicativos, portanto, a aplicação de $W_{\mu\nu}$ se resume à substituição adequada das relações apresentadas na Eq.(D.24). Apontamos ainda que apenas o primeiro termo de (I) na

Eq.(D.20) é diferente dos demais e não dependerá das integrais angulares. A parte importante desse cálculo é identificação da transformação da singularidade de $W_{\mu\nu}$ em $1/w$, como mostra Eq.(D.24). Esse fator, por sua vez, se cancela com o elemento de volume em coordenadas esféricas calculado pelo Jacobiano da transformação:

$$d\mathbf{x}d\mathbf{x}' = c^2 w^2 \sin \theta \sin \theta' dc dw d\theta d\theta' d\varphi d\varphi', \quad (\text{D.26})$$

e, portanto, elimina a singularidade na integração do coeficiente $M_{\ell k}$.

O cálculo da segunda parte do operador colisional é análogo, só devemos atentar que agora a velocidade $\mathbf{v}'$ das partículas alvo está envolvida. A segunda integral na Eq.(D.5), após a integração por partes e a normalização das variáveis de integração, é

$$N_{\ell k} = -\frac{\frac{\sqrt{\pi}A_q^2}{10q^2}}{\left(\frac{5-3q}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \int d\mathbf{x}d\mathbf{x}' \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[\frac{x_\eta L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{\ell+1}} \right] \frac{\partial}{\partial x'_\mu} \left[\frac{x'_\eta L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q)}{[1 - (1-q)x'^2]^{1+k}} \right] X_{\mu\nu} \quad (\text{D.27})$$

$$\times [1 - (1-q)x^2]^{\frac{q}{1-q}} [1 - (1-q)x'^2]^{\frac{q}{1-q}},$$

onde utilizamos a Eq.(D.8).

A separação do integrando em nas potências de $(1-q)^j$ resulta em:

$$\text{I)} \quad \frac{\delta_{\mu\nu} L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q) L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) + x'_\nu \frac{\partial L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q)}{\partial x'_\mu} + x_\mu \frac{\partial L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x_\nu} + x_\eta x'_\eta \frac{\partial L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x_\nu} \frac{\partial L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q)}{\partial x'_\mu}}{[1 - (1-q)x^2]^{1+\ell} [1 - (1-q)x'^2]^{1+k}} \quad (\text{D.28})$$

$$\text{II)} \quad 2(1-q) \left\{ (1+k)x'_\mu L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q) \frac{x'_\nu L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) + x_\eta x'_\eta \frac{\partial L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{\partial x_\nu}}{[1 - (1-q)x'^2]^{2+k} [1 - (1-q)x^2]^{1+\ell}} \right. \\ \left. (1+\ell)x_\nu L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q) \frac{x_\mu L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q) + x_\eta x'_\eta \frac{\partial L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q)}{\partial x'_\mu}}{[1 - (1-q)x'^2]^{1+k} [1 - (1-q)x^2]^{2+\ell}} \right\}; \quad (\text{D.29})$$

$$\text{III)} \quad 4(1-q)^2(1+k)(1+\ell) \frac{x_\eta x'_\eta x_\mu x_\nu L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q) L_\ell^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{2+\ell} [1 - (1-q)x'^2]^{2+k}}, \quad (\text{D.30})$$

onde utilizamos a formula geral para as derivadas dada na Eq.(D.9).

Adotando novamente a substituição de variáveis que elimina a singularidade: $x_\mu = c_\mu + w_\mu/2$ e $x_\nu = c_\nu - w_\nu/2$, e utilizando a formula para as derivadas dos polinômios de Jacobi

dada na Eq.(D.15), as três partes do integração são reescritas como:

$$\begin{aligned}
\text{I)} \quad & \frac{\delta_{\mu\nu} L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q) - 2c_{\mu}c_{\nu} [1 - (1-q)(k - \frac{1}{2})] L_{k-1}^{\frac{5}{2}}(x'^2; q) L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{1+\ell} [1 - (1-q)x'^2]^{1+k}} \\
& - 2c_{\mu}c_{\nu} \frac{[1 - (1-q)(\ell - \frac{1}{2})] L_{\ell-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q) L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{1+\ell} [1 - (1-q)x'^2]^{1+k}} \\
& + \frac{4 \left(c^2 - \frac{w^2}{4} \right) c_{\mu}c_{\nu} [1 - (1-q)(\ell - \frac{1}{2})] L_{k-1}^{\frac{5}{2}}(x'^2; q) L_{\ell-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x'^2]^{1+k} [1 - (1-q)x^2]^{1+\ell} [1 - (1-q)(k - \frac{1}{2})]^{-1}};
\end{aligned} \tag{D.31}$$

$$\begin{aligned}
\text{II)} \quad & 2(1-q)c_{\mu}c_{\nu} \left\{ (1+\ell) L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q) \frac{L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q) - 2 \left(c^2 - \frac{w^2}{4} \right) [1 - (1-q)(k - \frac{1}{2})] L_{k-1}^{\frac{5}{2}}(x'^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{2+\ell} [1 - (1-q)x'^2]^{1+k}} \right. \\
& \left. (1+k) L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q) \frac{L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q) - 2 \left(c^2 - \frac{w^2}{4} \right) [1 - (1-q)(\ell - \frac{1}{2})] L_{\ell-1}^{\frac{5}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{1+\ell} [1 - (1-q)x'^2]^{2+k}} \right\};
\end{aligned} \tag{D.32}$$

$$\text{III)} \quad 4(1-q)^2 \left(c^2 - \frac{w^2}{4} \right) \frac{c_{\mu}c_{\nu}(k+1)(\ell+1) L_k^{\frac{3}{2}}(x'^2; q) L_{\ell}^{\frac{3}{2}}(x^2; q)}{[1 - (1-q)x^2]^{2+\ell} [1 - (1-q)x'^2]^{2+k}}, \tag{D.33}$$

onde também eliminamos os termos proporcionais à w_{μ} e w_{ν} devido a propriedade Eq.(D.23).

O produto das três partes acima com $W_{\mu\nu}$ é calculado da mesma como fizemos para a primeira parte da integral de I_{ee} . Novamente, encontramos o fator $1/w$ devido a singularidade do operador de Coulomb; cancelado pelo elemento de volume de integração em coordenadas esféricas.

Assim, completamos o desenvolvimento analítico do coeficiente $c_{\ell j}^{ee}$ que aparece na equação que determinar os a_k da série assintótica. Também vimos que a simples mudança de variáveis exclui a singularidade causada pelo potencial de Coulomb em $x_{\mu} = x_{\nu}$. De fato, se componentes das velocidades das partículas incidente alvo possuem a mesma direção, sentido e magnitude, a colisão nunca ocorrerá. Portanto, a singularidade na representação das variáveis x não é física, ou seja, não se trata de uma condição física especial, apenas uma limitação da descrição matemática que desaparece quando aplicamos a mudança de variáveis.

D.1.1 Verificação dos Limites de Integração

O próximo passo é mostrar que nenhuma que as integrais dos coeficientes $c_{\ell k}^{ee}$ não inserem nenhum limite superior em q como visto no calculo da densidade (Eq.(2.22)) e da energia interna (Eq.(2.27)). Como removemos a singularidade, o integrando será uma função suave de 6 variáveis e só precisamos analisar a convergência no limite $(c, w) \rightarrow \infty$. Isso é feito pela análise da função assintótica dos termos dominantes do integrando na integral, cuja forma geral é

$$\int_{a \geq 0}^{\infty} dx \frac{1}{x^b}, \tag{D.34}$$

e a convergência garantida se $b > 1$.

Vamos começar analisando a integral do operador $C_{ee}(f_0\phi, f'_0)$, onde integrando desenvolvido está nas Eqs.(D.20-D.21). Nas variáveis c e w , o produto das potências em q , referentes às distribuições f_0 e f'_0 , nesses termos pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \left[1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + c_\eta w_\eta \right) \right]^{q/(1-q)} \left[1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} - c_\eta w_\eta \right) \right]^{q/(1-q)} \\ &= \left[1 - (1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2} \right)^2 + cw\hat{\Omega} \right) \right) \right]^{\frac{q}{1-q}} \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

onde $\hat{\Omega}$ é dada por Eq.(D.25).

Também é conveniente utilizar a representação de somatório dos polinômios de Jacobi:

$$L_n^\alpha(x^2; q) = \sum_{i=0}^n (1-q)^i \binom{a+n}{n-i} x^{2i} \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{1-q}\right)}{i! \Gamma\left(-i + n + \frac{1}{2} - \frac{1}{1-q}\right)}, \quad (\text{D.36})$$

onde o termo dominante será dado pelo maior polinômios de x , ou seja,

$$L_n^\alpha(x^2; q)|_{x \rightarrow \infty} \sim (x^2)^n = \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right)^n \quad (\text{D.37})$$

Os termos dominantes da primeira parte, isto é (I) , do integrando de $M_{\ell k}$ dado na Eq.(D.20) são:

$$(I) \sim \begin{cases} (i) \frac{c^2 w \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right)^{\ell+k} \left[1 - (1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2} \right)^2 + c^2 w^2 \hat{\Omega}^2 \right) \right) \right]^{\frac{q}{1-q}}}{\left[1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right) \right]^{2+\ell+k}}; \\ (ii) \frac{c^4 w \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right)^{\ell+k-1} (1-\hat{\Omega}^2) \left[1 - (1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2} \right)^2 + c^2 w^2 \hat{\Omega}^2 \right) \right) \right]^{\frac{q}{1-q}}}{\left[1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right) \right]^{2+\ell+k}}; \\ (iii) \frac{c^4 w \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right)^{\ell+k-1} (1-\hat{\Omega}^2) \left[1 - (1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2} \right)^2 + c^2 w^2 \hat{\Omega}^2 \right) \right) \right]^{\frac{q}{1-q}}}{\left[1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right) \right]^{2+\ell+k}}, \end{cases} \quad (\text{D.38})$$

onde ainda a dividimos três para facilitar a análise da convergência.

Caso $\hat{\Omega}^2 = 1$, os itens (ii) e (iii) acima são nulos e, portanto, satisfazem trivialmente a condição de convergência. Apenas quando $\hat{\Omega} = 1$, o item (i) não é identicamente nulo e devemos analisar a condição nos três limites possíveis, $(c, w, c = w/2) \rightarrow \infty$. Tomando esses limites no item (I-i), encontramos os seguintes intervalos de q :

$$c \rightarrow \infty : c^{2+2(k+\ell)} c^{\frac{4}{1-q} - 2(2+k+\ell)} \Rightarrow 2 + 2(k+\ell) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2+k+\ell) < 1 \quad \forall q > 1;$$

$$w \rightarrow \infty : w^{1+2(k+\ell)} w^{\frac{4}{1-q} - 2(2+k+\ell)} \Rightarrow 1 + 2(k+\ell) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2+k+\ell) < -1 \quad \forall q > 1;$$

$$c = \frac{w}{2} \rightarrow \infty : w^{3+2(\ell+k)} w^{\frac{4}{1-q} - 2(2+k+\ell)} \Rightarrow 3 + 2(\ell+k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2+\ell+k) < -1 \quad \forall q > 1.$$

Para $\hat{\Omega}^2 \neq 1$, as expressões resultantes para os termos dominantes do item (i) são exatamente as apresentadas acima, portanto, também ficam garantidas a suas convergências.

O item (ii) deverá ser analisado para $\hat{\Omega} \neq 1$, onde os três limites ($c, w, c = w/2$) $\rightarrow \infty$ podem ser aplicados. Assim, a condição de convergência para cada um desses limites é:

$$\begin{aligned} c \rightarrow \infty : c^{4+2(k+\ell-1)} c^{4\frac{q}{1-q}-2(2+k+\ell)} &\Rightarrow 2 + 2(k + \ell) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2 + k + \ell) < 1 \quad \forall q > 1; \\ w \rightarrow \infty : w^{1+2(k+\ell-1)} w^{4\frac{q}{1-q}-2(2+k+\ell)} &\Rightarrow -1 + 2(k + \ell) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2 + k + \ell) < -1 \quad \forall q > 1; \\ c = \frac{w}{2} \rightarrow \infty : w^{5+2(\ell+k-1)} w^{4\frac{q}{1-q}-2(2+k+\ell)} &\Rightarrow 3 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1, \end{aligned}$$

atestando novamente a convergência para $q > 1$ quaisquer que sejam as possibilidades.

O terceiro e último item também é analisado no caso não trivial, i.e., $\hat{\Omega} \neq 1$. Analogamente, encontramos que as condições de convergência para (iii) são:

$$\begin{aligned} c \rightarrow \infty : c^{4+2(k+\ell-1)} c^{4\frac{q}{1-q}-2(2+k+\ell)} &\Rightarrow 2 + 2(k + \ell) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2 + k + \ell) < 1 \quad \forall q > 1; \\ w \rightarrow \infty : w^{1+2(k+\ell-1)} w^{4\frac{q}{1-q}-2(2+k+\ell)} &\Rightarrow -1 + 2(k + \ell) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2 + k + \ell) < -1 \quad \forall q > 1; \\ c = \frac{w}{2} \rightarrow \infty : w^{5+2(\ell+k-1)} w^{4\frac{q}{1-q}-2(2+k+\ell)} &\Rightarrow 3 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1, \end{aligned}$$

que nada mais são que as condições de convergência do item (ii) e, como vimos, determinar a convergência para todo $q > 1$. Desta forma fica garantida a convergência da primeira parte do integrando $M_{\ell k}$ para $q > 1$ e qualquer ordem dos polinômios de Jacobi.

O mesmo deve ser feito para as duas outras partes da integral que define $M_{\ell k}$, porém, como o procedimento é análogo, apenas apresentaremos os resultados de forma sistemática. Os termos dominantes da segunda parte dada na Eq.(D.21) são:

$$(II) \sim \begin{cases} (i) \frac{c^4 w \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega}\right)^{\ell+k} \left[1-(1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2}\right)^2 + c^2 w^2 \hat{\Omega}^2\right)\right)\right]^{\frac{q}{1-q}}}{\left[1-(1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega}\right)\right]^{3+\ell+k}}; \\ (ii) \frac{c^4 w \left(c^2 + \frac{w^2}{2} + cw\hat{\Omega}\right)^{\ell+k-1} \left[1-(1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2}\right)^2 + c^2 w^2 \hat{\Omega}^2\right)\right)\right]^{\frac{q}{1-q}}}{\left[1-(1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega}\right)\right]^{3+\ell+k}}. \end{cases} \quad (D.39)$$

Aplicando os limites ($c, w, c = w/2$) $\rightarrow \infty$ nos itens acima, temos, para (ii):

$$\begin{aligned} c \rightarrow \infty : c^{4+2(k+\ell)} c^{4\frac{q}{1-q}-2(3+\ell+k)} &\Rightarrow 2 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(3 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1; \\ w \rightarrow \infty : w^{1+2(\ell+k)} w^{4\frac{q}{1-q}-2(3+\ell+k)} &\Rightarrow 1 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(3 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1; \\ c = \frac{w}{2} \rightarrow \infty : c^{5+2(\ell+k)} w^{4\frac{q}{1-q}-2(3+\ell+k)} &\Rightarrow 3 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(3 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1, \end{aligned}$$

portanto, mostrando que as condições de convergência são plenamente satisfeitas para (II).

Os termos dominantes da terceira e última parte de $M_{\ell k}$ são

$$(III) \sim \left\{ \frac{c^4 w \left(c^2 + \frac{w^2}{2} + cw\hat{\Omega} \right)^{1+\ell+k} \left[1 - (1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2} \right)^2 + c^2 w^2 \hat{\Omega}^2 \right) \right) \right]^{\frac{q}{1-q}}}{\left[1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right) \right]^{4+\ell+k}} \right\}. \quad (D.40)$$

Aplicando os limites $(c, w, c = w/2) \rightarrow \infty$ nos itens acima, temos, para (iii)

$$c \rightarrow \infty : c^{4+2(k+\ell)} c^{4\frac{q}{1-q}-2(3+\ell+k)} \Rightarrow 2 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(3 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1;$$

$$w \rightarrow \infty : w^{1+2(\ell+k)} w^{4\frac{q}{1-q}-2(4+\ell+k)} \Rightarrow 1 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(4 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1;$$

$$c = \frac{w}{2} \rightarrow \infty : c^{5+2(\ell+k)} w^{4\frac{q}{1-q}-2(4+\ell+k)} \Rightarrow 5 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(3 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1.$$

Com a verificação da convergência para a terceira parte da integral, fica provado que todas as integrais do coeficiente $M_{\ell k}$ são convergentes. Como veremos isso será muito importante no desenvolvimento do método de integração numérica.

Analogamente, devemos provar a convergência das integrais de $N_{\ell k}$. A principal diferença nessa prova está nos polinômios de Jacobi que dependem da variável $\mathbf{x}'$. Contudo, como veremos, a introdução dessa dependência angular não altera significativamente os termos dominantes onde se faz onde se faz a análise da convergência. Os termos dominantes da primeira parte da integral, i.e., a expressão na Eq.(D.31) é:

$$N.I \sim \left\{ \begin{array}{l} (i) \frac{c^2 w \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right)^\ell \left(c^2 + \frac{w^2}{4} - cw\hat{\Omega} \right)^k \left[1 - (1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2} \right)^2 + c^2 w^2 \hat{\Omega}^2 \right) \right) \right]^{\frac{q}{1-q}}}{\left(1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right) \right)^\ell \left(1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} - cw\hat{\Omega} \right) \right)^k}; \\ (ii) \frac{(1-\hat{\Omega}^2) c^4 w \left(c^2 + \frac{w^2}{4} - cw\hat{\Omega} \right)^k \left[1 - (1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2} \right)^2 + c^2 w^2 \hat{\Omega}^2 \right) \right) \right]^{\frac{q}{1-q}}}{\left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right)^{-\ell+1} \left(1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right) \right)^\ell \left(1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} - cw\hat{\Omega} \right) \right)^k}; \\ (iii) \frac{(1-\hat{\Omega}^2) c^4 w \left(c^2 + \frac{w^2}{4} - cw\hat{\Omega} \right)^{k-1} \left[1 - (1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2} \right)^2 + c^2 w^2 \hat{\Omega}^2 \right) \right) \right]^{\frac{q}{1-q}}}{\left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right)^{-\ell} \left(1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right) \right)^\ell \left(1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} - cw\hat{\Omega} \right) \right)^k}; \\ (iv) \frac{(1-\hat{\Omega}^2) c^4 w \left(c^2 - \frac{w^2}{4} \right) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} - cw\hat{\Omega} \right)^{k-1} \left[1 - (1-q) \left(2c^2 + \frac{w^2}{2} + (1-q) \left(\left(c^2 + \frac{w^2}{2} \right)^2 + c^2 w^2 \hat{\Omega}^2 \right) \right) \right]^{\frac{q}{1-q}}}{\left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right)^{-\ell+1} \left(1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} + cw\hat{\Omega} \right) \right)^\ell \left(1 - (1-q) \left(c^2 + \frac{w^2}{4} - cw\hat{\Omega} \right) \right)^k}. \end{array} \right. \quad (D.41)$$

Novamente, se $\hat{\Omega}^2 = 1$, apenas o item (i) não satisfaz trivialmente a condição de convergência quando $c \neq w/2$. Nesse caso, a análise da convergência do item (i) resulta em:

$$c \rightarrow \infty : c^{2+2(k+\ell)} c^{4\frac{q}{1-q}-2(2+\ell+k)} \Rightarrow 2 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1;$$

$$w \rightarrow \infty : w^{1+2(\ell+k)} w^{4\frac{q}{1-q}-2(2+\ell+k)} \Rightarrow 1 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1.$$

Para $\hat{\Omega} \neq 1$, a análise da convergência no limite $c \rightarrow \infty$ resulta nas mesmas expressões para todos os itens na Eq.(D.41):

$$c^{2+2(\ell+k)} c^{\frac{4q}{1-q}-2(2+\ell+k)} \Rightarrow 2 + 2(\ell + k) + 4\frac{q}{1-q} - 2(2 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1. \quad (\text{D.42})$$

No limite $w \rightarrow \infty$, a aplicação da condição de convergência nos itens da Eq.(D.41) resulta em:

$$\begin{aligned} i) : w^{1+2(k+\ell)} w^{\frac{4q}{1-q}-2(2+\ell+k)} &\Rightarrow 1 + 2(\ell + k) + \frac{4q}{1-q} - 2(2 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1; \\ ii) : w^{1+2(\ell+k-1)} w^{\frac{4q}{1-q}-2(2+\ell+k)} &\Rightarrow -1 + 2(\ell + k) + \frac{4q}{1-q} - 2(2 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1; \\ iii) : w^{1+2(\ell+k-1)} w^{\frac{4q}{1-q}-2(2+\ell+k)} &\Rightarrow -1 + 2(\ell + k) + \frac{4q}{1-q} - 2(2 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1; \\ iv) : w^{3+2(\ell+k-2)} w^{\frac{4q}{1-q}-2(2+\ell+k)} &\Rightarrow -1 + 2(\ell + k) + \frac{4q}{1-q} - 2(2 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1. \end{aligned}$$

No limite $c = w/2 \rightarrow \infty$, a condição de convergência de todos os itens na Eq.(D.41) é dada por uma mesma equação:

$$c^{3+2(\ell+k)} c^{\frac{4q}{1-q}-2(2+\ell+k)} \Rightarrow 3 + 2(\ell + k) + \frac{4q}{1-q} - 2(2 + \ell + k) < -1 \quad \forall q > 1. \quad (\text{D.43})$$

Com esse último resultado fica provada a convergência da primeira parte da integral de $N_{\ell k}$.

O integrando da segunda parte de $N_{\ell k}$ é dado na Eq.(D.32). Uma vez que $(1 - \hat{\Omega}^2)$ aparece como um fator multiplicativo dessa expressão, quando $\hat{\Omega}^2 = 1$, temos que a integral é identicamente nula independente dos valores de w e c . Portanto, precisamos analisar apenas os casos em que $\hat{\Omega}^2 \neq 1$, isto é, que independem das coordenadas angulares. Consequentemente, podemos separar os termos dominantes do integrando da seguinte forma:

$$\text{N.II} \sim \begin{cases} (i) \frac{c^4 w \left(c^2 + \frac{w^2}{4}\right)^{k+\ell-1} \left(c^2 + \frac{w^2}{4}\right)^{\frac{2q}{1-q}}}{\left(c^2 + \frac{w^2}{4}\right)^{2+k+\ell}} \\ (ii) \frac{c^4 w \left(c^2 - \frac{w^2}{4}\right) \left(c^2 + \frac{w^2}{4}\right)^{k+\ell-2} \left(c^2 + \frac{w^2}{4}\right)^{\frac{2q}{1-q}}}{\left(c^2 + \frac{w^2}{4}\right)^{2+k+\ell}}. \end{cases} \quad (\text{D.44})$$

Em cada um dos limites $(c, w) \rightarrow \infty$, a condição de convergência de ambos os itens acima é determinada pela mesma expressão:

$$\begin{aligned} c \rightarrow \infty : c^{4+2(k+\ell-1)} c^{\frac{4q}{1-q}-2(2+\ell+k)} &\Rightarrow -2 + \frac{4q}{1-q} < -1; \quad \therefore q > 1; \\ w \rightarrow \infty : w^{1+2(\ell+k-1)} w^{\frac{4q}{1-q}-2(2+\ell+k)} &\Rightarrow -5 + \frac{4q}{1-q} < -1; \quad \therefore q > 1. \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

Já no limite $c = w/2 \rightarrow \infty$, o segundo item de Eq.(D.44) é identicamente nulo, enquanto a expressão do primeiro na mesma condição para $c \rightarrow \infty$ das condições mostradas logo cima. Portanto, fica demonstrada a convergência do segunda parte da integral de $N_{\ell k}$.

A terceira e última parte, dada pela Eq.(D.33), também contém o fator multiplicativo $(1 - \hat{\Omega}^2)$; logo, os casos em que $\hat{\Omega}^2 = 1$ são trivialmente satisfeitos e podemos analisar as

condições de convergência independentemente dos ângulos. Nesse caso, os termos dominantes da expressão em questão são:

$$\text{N.III} \sim \frac{c^4 w \left(c^2 - \frac{w^2}{4}\right) \left(c^2 + \frac{w^2}{4}\right)^{\ell+k} \left(c^2 + \frac{w^2}{4}\right)^{\frac{2q}{1-q}}}{\left(c^2 + \frac{w^2}{4}\right)^{4+\ell+k}}. \quad (\text{D.46})$$

Evidentemente, quando $c = w/2$, a expressão é nula e a condição de convergência é trivialmente satisfeita. Ao aplicando a condição de convergência nos limites restantes encontramos:

$$\begin{aligned} c \rightarrow \infty : c^{6+2(k+\ell)} c^{\frac{4q}{1-q}-2(4+\ell+k)} &\Rightarrow -2 + \frac{4q}{1-q} < -1; \quad \therefore q > 1; \\ w \rightarrow \infty : w^{3+2(\ell+k)} w^{\frac{4q}{1-q}-2(4+\ell+k)} &\Rightarrow -5 + \frac{4q}{1-q} < -1; \quad \therefore q > 1, \end{aligned} \quad (\text{D.47})$$

o que completa a prova da convergência das integrais que definem $N_{\ell k}$.

Assim, fica assegurada a convergência das integrais que determinam $c_{\ell k}^{ee}$ para quaisquer valores de ℓ e k nos polinômios de Jacobi e para $q > 1$, ou seja, nenhum novo limite superior é inserido por essas integrais e podemos analisar os coeficientes de transporte no intervalo $1 \leq q \leq 1.4$ sem nenhuma restrição adicional.

D.2 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é o mais indicado para o cálculo numérico das integrais em 6 dimensões de $M_{\ell k}$ e $N_{\ell k}$, pois, enquanto nos métodos de quadratura o erro depende da dimensão do domínio de integração, no método de Monte Carlo escala com $1/\sqrt{N}$, onde N é o número de pontos [60, 147].

Em linhas gerais, o método consiste na estimativa numérica da integral através de uma soma [60, 147], isto é:

$$\int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i), \quad (\text{D.48})$$

onde $\mathbf{x}$ é um vetor no espaço d-dimensional e $\mathbf{x}_i$ um vetor de pontos amostrado no espaço d-dimensional.

O erro do método estimado pela da variância ($\sigma^2(f)$):

$$\int d\mathbf{x}_1 \dots \int d\mathbf{x}_N \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\mathbf{x}_i) - \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \right)^2 = \frac{\sigma^2(f)}{N}, \quad (\text{D.49})$$

como sendo $\sigma(f)/\sqrt{N}$, onde $\sigma(f)$ é o desvio padrão. Contudo, não devemos interpretá-lo como um erro absoluto, mas como uma probabilidade do valor estimado da integral estar dentro do intervalo de um desvio padrão [147]. Essa característica será bastante importante para nossos resultados, pois mostra que os valores aproximados da integral calculados pelo método se distribuem em torno da média. Também podemos ver claramente nesse resultado a motivação da independência da dimensão na estimativa do erro, o que torna o método adequado para o cálculo numérico de integrais de altas dimensões.

O principal problema da integração pelo método de Monte Carlo está na lenta convergência do resultado com o número de pontos, isto é, para se obter um resultado bastante preciso é necessário uma amostragem de pontos muito grande na estimativa dada na Eq.(D.48) [60, 147]. Porém, é possível otimizar o processo através da adoção de medidas como a otimização da amostragem, algoritmos adaptativos e a estratificação do domínio de integração. Dependendo das características da função a ser integrada, todas essas medidas podem ser implementadas em uma mesma rotina ou apenas as que melhoram significativamente o cálculo.

As características gerais das funções que vamos integrar indicam que tanto a otimização da amostragem quanto os algoritmos adaptativos não são adequados para nosso problema. No caso, a otimização da amostragem é feita através da determinação de uma densidade de probabilidade a fim de minimizar o erro [147]. Quando $q \rightarrow 1.4$ o decaimento das funções de distribuição é muito lento, sem exibir uma região no domínio específica onde seria possível acumular mais pontos da amostragem; portanto, dificultando uma eventual definição da densidade de probabilidade de amostragem. Já os métodos adaptativos consistem em rotinas internas que selecionam de maneira independente qual a melhor amostragem nos eixos do espaço d-dimensional. Assim, funções que possuem simetrias que não estão sobre os eixos, como veremos se tratar nosso caso, não devem apresentar melhora da performance do método no geral [147].

Ambos métodos foram testados na prática a partir das rotinas implementados no *Maple software* como um estudo preliminar para verificar qual o melhor método para abordagem do problema. De fato, ambos os métodos precisaram de muitos pontos, cerca de 20 milhões, o que também exigia um tempo computação bastante grande, para chegar a precisão de 5 algarismos significativos à medida que $q \rightarrow 1.4$. Além disso, mudando o método de amostragem e aumentando o número de pontos, a mudança observada no valor da integral superava o valor para o erro estipulado, o que tornava o erro estimado pelo método não confiável.

Já o método de Monte Carlo com uma amostragem aleatória de pontos e estratificação se mostrou bastante adequado. Esse cálculo utilizamos as rotinas implementadas no software *Wolfram Mathematica 11.03*, onde também comparamos diferentes novamente diferentes otimizações do método. Dentre essas, o método de Monte Carlo estratificado com amostragem aleatória mostrou melhor desempenho tanto no tempo computacional, quanto no confiabilidade do erro, comparativamente com métodos adaptativos e de otimização da amostragem.

No método de Monte Carlo estratificado, cada um dos eixos das variáveis de integração são subdivididos em K intervalos, dando origem à K^d subespaços amostrais, onde d é a dimensão. Como estamos utilizamos amostragem aleatória, o único cuidado é assegurar que $(K/2)^d < N^d$, onde N é o número de pontos amostrados [147]. Um vantagem dessa divisão é que a variância total da estimativa da integral dada na Eq.(D.49) é calculada a partir das sub-regiões como

$$\frac{\sigma_{\text{tot}}(f)^2}{N} = \frac{\left(\sum_{i=1}^K \sigma_K\right)^2}{K^2 N}. \quad (\text{D.50})$$

Portanto, se a estratificação proporcionar que as variâncias de cada subespaço, ou seja, σ_K , sejam melhor avaliadas, então, não só o erro numérico da integral estimada deve ser menor, mas a quantidade de pontos de amostragem poderá ser reduzida. Essa é a principal

vantagem do método nas integrais dos coeficientes $M_{\ell k}$ e $N_{\ell k}$, pois as sub-divisões reduz o efeito da diminuição da magnitude como função de c^2 e w^2 (vide a mudança de variáveis em Eq.(D.18)) causado pelas funções de distribuição.

D.2.1 Integração dos Elementos de Matriz $M_{\ell k}$ e $N_{\ell k}$

Na rotina de integração do Método de Monte Carlo no cálculo dos coeficientes $M_{\ell k}$ (Eq.(D.7)) e $N_{\ell k}$ (Eq.(D.27)), os domínios de cada uma das 6 variáveis de integração são divididos em 4 partes, totalizando 4096 sub-espacos. Então, o valor numérico da integral é obtida como a média de 30 rodadas de integração, onde são amostrados, aproximadamente, 8 milhões de pontos em uma delas. Também restringimos os intervalos de integração conforme $c \in [0, 4]$ e $w \in [0, 8]$, pois, como podemos ver na Fig.(D.1), toda a parte significativa (não nula) do integrando está contida nessa região.

Figura D.1: Gráfico em cores das curvas de nível do integrando de M_{16} normalizado $\ln(1 + ((int M_{16})^2)^{0.35} / ((Max[int M_{16}])^2)^{0.35})$ para diferentes valores de $\hat{\Omega}$. A primeira linha é formada pelos integrandos de M_{16} no limite $q \rightarrow 1$, e na segunda, os valores do limite $q = 1.3$. Todos os gráficos são normalizados pelo seu máximo.

Ainda na Fig.(D.1), podemos ver a simetria do integrando para $c = w$ e o lento decréscimo da lei de potência em comparação com as funções exponenciais do caso clássico, inviabilizando a utilização dos métodos adaptativo e de otimização da amostragem, como já discutimos. É importante destacar que a dispersão do integrando pela lei de potência é acentuada pela redução do valor máximo do integrando à medida que $q \rightarrow 1.4$; no caso, o valor máximo do integrando de M_{16} é 0.5 para $q = 1.3$, enquanto para $q = 1$, o valor é 1.7. A figura

também mostra, como afirmado anteriormente, que os limites tomadas para a integração numérica contêm a parte relevante, não nula, da integral. De fato, mesmo com a normalização que suaviza o decrescimento, a quase totalidade dos valores não nulos da integral entre os limites de integração. A mesma análise pode ser feita para os elementos de matriz $N_{\ell k}$ levando as mesmas conclusões. Também podemos ver claramente o efeito do particionamento dos eixos; a maioria dos quadrantes não contem variações bruscas do integrando, portanto, reduzindo eventuais flutuações da variância devido à amostragens de valores significativamente diferentes.

Figura D.2: Histogramas das estimativas numéricas de M_{23} em $q = 1.1$ para diferentes quantidades de pontos amostrados (N). A média varia pouco com o aumento de N , ao contrário do desvio padrão, que reduz mais que a metade quando quadruplicamos N . A parte hachurada indica um desvio padrão em torno da média a distribuição normal e as linhas tracejadas as distribuições de densidade de probabilidade na escala 0.002×30 (largura do bin $\times$ tamanho da amostra).

No método de Monte Carlo, a estimativa numérica da integral é determinada simplesmente pela média dos valores amostrados, como podemos ver nas Eq.(D.48) e Eq.(D.49). Portanto, devemos escolher o número de pontos da amostragem de modo que a estimativa numérica da integral seja bem representada pela média. Como a precisão do método é dada pela variância (Eq.(D.49)), então, é possível obter valores aceitáveis da integração numérica mesmo que o conjunto de amostras seja bastante disperso. Em outras palavras, a estimativa da integral pode ser acurada mesmo quando a precisão não é pequena. Esse comportamento é bem retratado na Fig.(D.2) para o coeficiente M_{23} com $q = 1.1$, onde vemos que estimativa é bem representada pela média independentemente do número de pontos, enquanto o desvio padrão é significativamente reduzido com o aumento do número de pontos. Mais ainda, a média encontrada na Fig.(D.2.a), menor amostragem, está mais próxima do valor estimado na Fig.(D.2.c), o mais preciso, do que a média determinada na Fig.(D.2.b). Isso ilustra perfeitamente o fato do erro do método de Monte Carlo ser probabilístico, portanto, determinando um valor intervalo onde deverá ser encontrada o valor da integral.

Outra característica aparente na Fig.(D.2) é a aproximação dos histogramas à distribuição normal com o aumento de N , representada na figura pelas linhas tracejadas. Como estamos utilizando amostragem aleatória e o valor estimado é mais preciso quanto maior for N , então, para N suficientemente grande, a incerteza da estimativa numérica da integral desaparece restando apenas a incerteza devido a flutuação estatística da amostragem que é dada pela distribuição normal. Essa incerteza intrínseca ao método probabilístico de Monte Carlo será

a fonte de erro em nossa estimativa numérica, a qual é melhor representada aqui pelo desvio padrão. No caso, a convergência do método em torno da média garante que amostras com grande dispersão podem representar bem o valor real da integral, bem como distribuições com menor dispersão possuem um erro relativo maior, como mostramos no exemplo acima. Por este motivo, tomamos o erro como sendo a região de maior probabilidade de se encontrar o valor real da integral, ou seja, o desvio padrão.

Em suma, o método que adotaremos para o cálculo dos coeficientes $M_{\ell k}$ e $N_{\ell k}$ até a sexta ordem de aproximação será o mesmo empregado na Fig.(D.2.c), ou seja, o método de Monte Carlo estratificado com 4 particionamentos em cada uma das variáveis de integração, onde cada rodada de integração possui, aproximadamente, 8 milhões de pontos aproximadamente, portanto, totalizando 240 milhões de pontos na estimativa final de integração, e aplicado a cada um dos nove valores de q da lista pré-determinada.

Referências Bibliográficas

- [1] S. I. Braginskii, Transport phenomena in a completely ionized two-temperatures plasma, Sov. Phys. JETP 33 (6) (1958) 358–369.
- [2] S. Braginskii, Transport Processes in a Plasma, Reviews of Plasma Physics 1 (1965) 205.
- [3] R. Balescu, Aspects of Anomalous Transport in Plasmas, Series in Plasma Physics, CRC Press, 2005.
- [4] E. M. Lifshitz, Physical Kinetics (course of theoretical physics; vol.10), Course of Theoretical Physics, Elsevier, 2008.
- [5] S. R. de Groot, M. P., Non-Equilibrium Thermodynamics, Dover Publications, 1984.
- [6] A. Guthrie, R. Wakerling, The characteristics of electrical discharges in magnetic fields, National nuclear energy series: Electromagnetic Separation Project, McGraw-Hill, 1949.
- [7] C. Horton, W. Horton, Turbulent Transport in Magnetized Plasmas, World Scientific, 2012.
- [8] Z. Lin, T. S. Hahm, W. W. Lee, W. M. Tang, R. B. White, Turbulent Transport Reduction by Zonal Flow: Massively Parallel Simulations, Science 281 (5384) (1998) 1835–1837.
- [9] F. Wagner, A quarter-century of H-mode studies, Plasma Phys. Control. Fusion 49 (12 B) (2007) B1.
- [10] T. Kobayashi, K. Itoh, T. Ido, K. Kamiya, S. I. Itoh, Y. Miura, Y. Nagashima, A. Fujisawa, S. Inagaki, K. Ida, Turbulent transport reduction induced by transition on radial electric field shear and curvature through amplitude and cross-phase in torus plasma, Scientific Reports 7 (1) (2017) 14971.
- [11] L. Bardóczi, T. L. Rhodes, T. A. Carter, N. A. Crocker, W. A. Peebles, B. A. Grierson, Non-perturbative measurement of cross-field thermal diffusivity reduction at the O-point of 2/1 neoclassical tearing mode islands in the DIII-D tokamak, Physics of Plasmas 23 (5).

- [12] Y. Ren, E. Belova, N. Gorelenkov, W. Guttenfelder, S. M. Kaye, E. Mazzucato, J. L. Peterson, D. R. Smith, D. Stutman, K. Tritz, W. X. Wang, H. Yuh, R. E. Bell, C. W. Domier, B. P. Leblanc, Recent progress in understanding electron thermal transport in NSTX, *Nuclear Fusion* 57 (7).
- [13] J. R. King, A. Y. Pankin, S. E. Kruger, P. B. Snyder, The impact of collisionality, FLR, and parallel closure effects on instabilities in the tokamak pedestal: Numerical studies with the NIMROD code, *Physics of Plasmas* 23 (6) (2016) 062123.
- [14] Physics of plasmas close to thermonuclear conditions, vol. 1, pp. 19-46, <http://w3.pppl.gov/transp/> (1980).
- [15] P. N. Y. G. V. Pereverzev, ASTRA - Automated System for TRansport Analysis, Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, 2002.
URL http://w3.pppl.gov/~hammett/work/2009/Astra_ocr.pdf
- [16] B. Liu, J. Goree, Superdiffusion and non-Gaussian statistics in a driven-dissipative 2D dusty plasma, *Physical Review Letters* 100 (5) (2008) 1–4.
- [17] B. A. Carreras, B. P. van Milligen, M. A. Pedrosa, R. Balbín, C. Hidalgo, D. E. Newman, E. Sánchez, R. Bravenec, G. McKee, I. García-Cortés, J. Bleuel, M. Endler, C. Ricardi, S. Davies, G. F. Matthews, E. Martines, V. Antoni, Experimental evidence of long-range correlations and self-similarity in plasma fluctuations, *Physics of Plasmas* 6 (5) (1999) 1885–1892.
- [18] G. Dif-Pradalier, P. H. Diamond, V. Grandgirard, Y. Sarazin, J. Abiteboul, X. Garbet, P. Ghendrih, A. Strugarek, S. Ku, C. S. Chang, On the validity of the local diffusive paradigm in turbulent plasma transport, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 82 (2) (2010) 1–4.
- [19] R. A. Treumann, Generalized-Lorentzian Thermodynamics, *Physica Scripta* 59 (1999) 204–240.
- [20] V. M. Vasyliunas, A survey of low-energy electrons in the evening sector of the magnetosphere with OGO 1 and OGO 3, *Journal of Geophysical Research* 73 (9) (1968) 2839–2884.
- [21] P. H. Yoon, L. F. Ziebell, R. Gaelzer, R. P. Lin, L. Wang, Langmuir turbulence and suprathermal electrons, *Space Science Reviews* 173 (1-4) (2012) 459–489.
- [22] V. Pierrard, M. Lazar, Kappa Distributions: Theory and Applications in Space Plasmas, *Solar Physics* 267 (1) (2010) 153–174.
- [23] D. Summers, R. M. Thorne, The modified plasma dispersion function, *Physics of Fluids B: Plasma Physics* 3 (8) (1991) 1835.
- [24] R. L. Mace, M. a. Hellberg, A dispersion function for plasmas containing superthermal particles, *Physics of Plasmas* 2 (6) (1995) 2098.
URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pop/2/6/10.1063/1.871296>

- [25] T. K. Baluku, M. A. Hellberg, R. L. Mace, Electron acoustic waves in double κ plasmas : Application to Saturn ' s magnetosphere, *Journal of Geophysical Research* 116 (A4) (2011) 1–11.
- [26] D. Jiulin, Transport coefficients in Lorentz plasmas with the power-law κ -distribution, *Physics of Plasmas* 20 (9).
- [27] L. Wang, J. Du, The diffusion of charged particles in the weakly ionized plasma with power-law κ -distributions, *Physics of Plasmas* 24 (102305).
- [28] E. De la Luna, V. Krivenski, G. Giruzzi, C. Gowers, R. Prentice, J. M. Travers, M. Zerbini, Impact of bulk non-Maxwellian electrons on electron temperature measurements (invited), *Review of Scientific Instruments* 74 (3 II) (2003) 1414–1420.
- [29] M. A. Jaworski, M. G. Bell, T. K. Gray, R. Kaita, I. Kaganovich, J. Kallman, H. W. Kugel, B. LeBlanc, A. G. McLean, S. A. Sabbagh, F. Scotti, V. A. Soukhanovskii, D. P. Stotler, Observation of non-Maxwellian electron distributions in the NSTX divertor, *Journal of Nuclear Materials* 438 (SUPPL) (2013) S384–S387.
URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.jnucmat.2013.01.076>
- [30] M. A. Jaworski, M. G. Bell, T. K. Gray, R. Kaita, J. Kallman, H. W. Kugel, B. Leblanc, A. G. McLean, S. A. Sabbagh, V. A. Soukhanovskii, D. P. Stotler, V. Surla, Modification of the electron energy distribution function during lithium experiments on the National Spherical Torus Experiment, *Fusion Engineering and Design* 87 (10) (2012) 1711–1718.
URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.fusengdes.2011.07.013>
- [31] T. S. V. K. Popov, M. Dimitrova, M. A. Pedrosa, D. López-Bruna, J. Horacek, J. Kovačič, R. Dejarnac, J. Stöckel, M. Aftanas, P. Böhm, P. Bílková, C. Hidalgo, R. Panek, Bi-Maxwellian electron energy distribution function in the vicinity of the last closed flux surface in fusion plasma, *Plasma Physics and Controlled Fusion* 57 (11) (2015) 115011.
URL <http://stacks.iop.org/0741-3335/57/i=11/a=115011?key=crossref.778282b3dd09231d431afdb2fdf5ab2c>
- [32] T. K. Popov, P. Ivanova, J. Stöckel, R. Dejarnac, Electron energy distribution function, plasma potential and electron density measured by Langmuir probe in tokamak edge plasma, *Plasma Physics and Controlled Fusion* 51 (6) (2009) 15.
URL <http://stacks.iop.org/0741-3335/51/i=6/a=065014?key=crossref.a4c657fd13080a1f325fc2e7a45fe264>
- [33] E. Marsch, Kinetic physics of the solar corona and solar wind, *Living Reviews in Solar Physics* 3 (1) (2006) 1–100.
- [34] A. M. DuBois, A. Scherer, A. F. Almagri, J. K. Anderson, M. D. Pandya, J. S. Sarff, Turbulence-driven anisotropic electron tail generation during magnetic reconnection, *Physics of Plasmas* 25 (5) (2018) 055705.
URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5016240>

- [35] K. L. Wong, M. S. Chu, T. C. Luce, C. C. Petty, P. A. Politzer, R. Prater, L. Chen, R. W. Harvey, M. E. Austin, L. C. Johnson, R. J. La Haye, R. T. Snider, Internal kink instability during off-axis electron cyclotron current drive in the DIII-D tokamak, *Physical Review Letters* 85 (5) (2000) 996–999.
- [36] J. and Kamleitner, S. Coda, J. Decker, J. P. Graves, TCV Team, Suprathermal electron dynamics and MHD instabilities in a tokamak, *Plasma Physics and Controlled Fusion* 57 (10).
- [37] O. Izacard, Generalized fluid theory including non-Maxwellian kinetic effects, *Journal of Plasma Physics* 83 (02) (2017) 595830201.
URL https://www.cambridge.org/core/product/identifier/S0022377817000150/type/journal_article
- [38] O. Izacard, Kinetic corrections from analytic non-Maxwellian distribution functions in magnetized plasmas, *Physics of Plasmas* 23 (8).
- [39] C. Tsallis, Possible generalization of Boltzman-Gibbs Statistics, *J.Stat.Phys.* 52 (1/2) (1988) 479–487.
- [40] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*, Springer New York, 2009.
- [41] J. Bittencourt, *Fundamentals of Plasma Physics*, Springer, 2004.
- [42] R. Hazeltine, F. Waelbroeck, *The Framework of Plasma Physics*, *Frontiers in physics*, Westview Press, 1998.
- [43] N. Krall, A. Trivelpiece, *Principles of plasma physics*, no. v. 0-911351 in *International series in pure and applied physics*, McGraw-Hill, 1973.
- [44] X. P. Huang, C. F. Driscoll, Relaxation of 2D turbulence to a metaequilibrium near the minimum enstrophy state, *Physical Review Letters* 72 (14) (1994) 2187–2190.
- [45] B. M. Boghosian, I. Introduction, Navier-Stokes equations for generalized thermostats, *Brazilian Journal of Physics* 29 (1) (1999) 91–107.
- [46] C. Antenodo, C. Tsallis, Two-dimensional turbulence in pure-electron plasma: a nonextensive thesmostatistical description, *Journal of Molecular Liquids* 71 (1997) 255–267.
- [47] J. Lima, R. Silva, J. Santos, Plasma oscillations and nonextensive statistics, *Physical Review E* 61 (3) (2000) 3260–3263.
- [48] S. Liu, X. Chen, Dispersion relation of transverse oscillation in relativistic plasmas with non-extensive distribution, *Journal of Plasma Physics* 77 (5).
- [49] Bibliografia completa da estatística não-extensiva, <http://tsallis.cat.cbpf.br/TEMUCO.pdf>, accessed: 2018-05-23.

- [50] G. G. Grenfell, I. C. Nascimento, D. S. Oliveira, J. I. Elizondo, A. P. Reis, W. A. H. Baquero, A. M. Oliveira, G. Ronchi, J. H. F. Severo, H-mode access and the role of spectral shift with electrode biasing in the TCABR tokamak, *Physics of Plasmas* 072301.
- [51] I. C. Nascimento, Y. K. Kuznetsov, J. H. F. Severo, A. M. M. Fonseca, A. Elfimov, V. Bellintani, M. Machida, M. Heller, R. M. O. Galvão, E. K. Sanada, J. I. Elizondo, Plasma confinement using biased electrode in the TCABR tokamak, *Nuclear Fusion* 45 (8) (2005) 796.
URL <http://stacks.iop.org/0029-5515/45/i=8/a=005>
- [52] F. Wagner, G. Fussmann, T. Grave, M. Keilhacker, M. Kornherr, K. Lackner, K. McCormick, E. R. Müller, A. Stäbler, G. Becker, K. Bernhardt, U. Ditte, A. Eberhagen, O. Gehre, J. Gernhardt, G. v. Gierke, E. Glock, O. Gruber, G. Haas, M. Hesse, G. Janeschitz, F. Karger, S. Kissel, O. Klüber, G. Lisitano, H. M. Mayer, D. Meisel, V. Mertens, H. Murmann, W. Poschenrieder, H. Rapp, H. Röhr, F. Ryter, F. Schneider, G. Siller, P. Smeulders, F. Söldner, E. Speth, K. H. Steuer, Z. Szymanski, O. Vollmer, Development of an Edge Transport Barrier at the H-Mode Transition of ASDEX, *Phys. Rev. Lett.* 53 (15) (1984) 1453–1456.
- [53] Y. Kuznetsov, I. Nascimento, C. Silva, H. Figueiredo, Z. O. Guimarães-Filho, I. Caldas, R. G. ao, J. Severo, D. Toufen, L. Ruchko, A. Elfimov, J. Elizondo, W. de Sá, O. Usuriaga, E. Sanada, A. Melnikov, M. Gryaznevich, M. P. Alonso, A. Reis, M. Machida, D. Trembach, T. Germano, R. Narayanan, M. Ghoranneviss, R. Arvin, S. Mohammadi, S. Tekieh, F. Borges, V. Bellintani, G. Canal, P. Duarte, R. de Castro, G. Vorobyov, M. Mizintseva, V. Moiseenko, F. do Nascimento, G. Ronchi, L. Schmutzler, Long-distance correlations in tcabr biasing experiments, *Nuclear Fusion* 52 (6) (2012) 063004.
URL <http://stacks.iop.org/0029-5515/52/i=6/a=063004>
- [54] J. R. Bezerra, R. Silva, J. A. S. Lima, Transport coefficients and nonextensive statistics, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 322 (2003) 256–266.
- [55] J. A. S. Lima, R. Silva, A. R. Plastino, Nonextensive Thermostatistics and the H Theorem, *Physical Review Letters* 86 (14) (2001) 2938–2941.
- [56] F. Q. Potiguar, U. M. S. Costa, Transport theory in the context of the normalized generalized statistics, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 303 (3-4) (2002) 457–468.
- [57] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems, *Physical Review* 94 (3) (1954) 511–525.
- [58] G. Kaniadakis, P. Quarati, A. M. Scarfone, Kinetic foundations of non-conventional statistics, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 305 (1-2) (2002) 76–83.

- [59] S. Chapman, T. Cowling, The mathematical theory of non-uniform gases; : an account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases, Cambridge University Press, 1970.
- [60] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, W. Vetterling, Numerical Recipes in FORTRAN Example Book: The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 1992.
- [61] H. M. Smith, E. Marsch, P. Helander, Electron Transport in the Fast Solar Wind, The Astrophysical Journal 753 (1) (2012) 31.
URL <http://stacks.iop.org/0004-637X/753/i=1/a=31?key=crossref.401b4d1e36abda38a181a634bd6dac90>
- [62] C. C. Petty, T. C. Luce, Inward transport of energy during off-axis heating on the DIII-D tokamak, Nuclear Fusion 34 (1) (1994) 121–130.
- [63] C. Tsallis, H. J. Haubold, Boltzmann-Gibbs entropy is sufficient but not necessary for the likelihood factorization required by Einstein, Europhysics Letters 110 (2015) 30005.
- [64] C. Tsallis, R. S. Mendes, A. Plastino, The role of constraints within generalized nonextensive statistics, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 261 (3-4) (1998) 534–554.
- [65] C. Beck, F. Schögl, Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction, Cambridge Nonlinear Science Series, Cambridge University Press, 1995.
- [66] C. Cercignani, Mathematical Methods in Kinetic Theory, Plenum Press, 1990.
- [67] G. Kremer, An Introduction to the Boltzmann Equation and Transport Processes in Gases, Interaction of Mechanics and Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2010.
- [68] G. L. Ferri, S. Martínez, A. Plastino, The role of constraints in Tsallis’ nonextensive treatment revisited, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 347 (2005) 205–220.
- [69] S. Martínez, F. Nicolás, F. Pennini, A. Plastino, Tsallis’ entropy maximization procedure revisited, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 286 (3) (2000) 489–502.
- [70] S. Abe, S. Martinez, F. Pennini, A. Plastino, Classical gas in nonextensive optimal Lagrange multipliers formalism, Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics 278 (5) (2001) 249–254.
- [71] S. Abe, Remark on the escort distribution representation of nonextensive statistical mechanics, Physics Letters A 275 (August) (2000) 250–253.
- [72] H. Weber, G. Arfken, Essential Mathematical Methods for Physicists, Academic Press, 2004.
- [73] A. Jeffrey, D. Zwillinger, Table of Integrals, Series, and Products, Elsevier Science, 2000.

- [74] S. Salinas, Introdução a Física Estatística Vol. 09, EDUSP, 1997.
- [75] A. R. Plastino, On the universality of thermodynamics' Legendre transform structure, Physics Letters A 226 (5) (1997) 257–263.
- [76] G. Livadiotis, D. J. McComas, Beyond kappa distributions: Exploiting Tsallis statistical mechanics in space plasmas, Journal of Geophysical Research: Space Physics 114 (11) (2009) 1–21.
- [77] S. Abe, General pseudoadditivity of composable entropy prescribed by the existence of equilibrium, Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics 63 (6) (2001) 8–10.
- [78] S. Abe, S. Martínez, F. Pennini, A. Plastino, Nonextensive thermodynamic relations, Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics 281 (2-3) (2001) 126–130.
- [79] S. Abe, Correlation induced by Tsallis' nonextensivity, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 269 (2) (1999) 403–409.
- [80] D. Prato, C. Tsallis, Nonextensive foundation of Lévy distributions, Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics 60 (2) (1999) 2398–2401.
- [81] C. Tsallis, S. V. F. Levy, A. M. C. Souza, R. Maynard, Statistical-Mechanical Foundation of the Ubiquity of Levy Distributions in Nature, Physical Review Letters 75 (3) (1995) 3589–3593.
- [82] U. Tirnakli, E. P. Borges, The standard map: From Boltzmann-Gibbs statistics to Tsallis statistics., Scientific reports 6 (2016) 23644.
- [83] J. Ruseckas, Canonical ensemble in non-extensive statistical mechanics, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 447 (2016) 85–99.
URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2015.12.011>
- [84] J. Ruseckas, Canonical ensemble in non-extensive statistical mechanics, $q > 1$, Physica A 458 (2016) 210–218.
- [85] R. A. Treumann, Kinetic theoretical foundation of Lorentzian statistical mechanics, Physica Scripta 59 (1) (1998) 23.
URL <http://arxiv.org/abs/physics/9807010>
- [86] J. D. Scudder, Why all stars should possess circumstellar temperature inversions, The Astrophysical Journal 398 (1992) 319.
- [87] G. Livadiotis, Statistical origin and properties of kappa distributions, Journal of Physics: Conference Series 900 (1).
- [88] A. Plastino, J. Lima, Equipartition and virial theorems within general thermostistical formalisms, Physics Letters A 260 (1-2) (1999) 46–54.

- [89] F. D. Nobre, E. M. F. Curado, A. M. C. Souza, R. F. S. Andrade, Consistent thermodynamic framework for interacting particles by neglecting thermal noise, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 91 (2) (2015) 1–12.
- [90] F. D. Nobre, A. M. C. Souza, E. M. F. Curado, Effective-temperature concept: A physical application for nonextensive statistical mechanics, *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics* 86 (6) (2012) 2–7.
- [91] G. Livadiotis, "Lagrangian temperature": Derivation and physical meaning for systems described by kappa distributions, *Entropy* 16 (8) (2014) 4290–4308.
- [92] L. Guo, J. Du, Thermodynamic potentials and thermodynamic relations in nonextensive thermodynamics, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 390 (2) (2010) 183–188.
- [93] P. H. Chavanis, Generalized thermodynamics and kinetic equations: Boltzmann, Landau, Kramers and Smoluchowski, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 332 (1-4) (2004) 89–122.
- [94] G. Nicolaou, G. Livadiotis, Misestimation of temperature when applying Maxwellian distributions to space plasmas described by kappa distributions, *Astrophysics and Space Science* 361 (11) (2016) 1–11.
URL <http://dx.doi.org/10.1007/s10509-016-2949-z>
- [95] R. Balescu, *Transport Processes in Plasmas: Classical transport*, Transport Processes in Plasmas, North-Holland, 1988.
- [96] D. J. Per Helander, D. J. Sigmar, *Collisional Transport in Magnetized Plasmas*, Cambridge University Press, 2002.
- [97] G. Kaniadakis, Non-linear kinetics underlying generalized statistics, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 296 (3-4) (2001) 405–425.
- [98] H. Kreuzer, *Nonequilibrium Thermodynamics and Its Statistical Foundations*, Monographs on the physics and chemistry of materials, Clarendon Press, 1981.
- [99] G. Dattoli, C. Cesarano, D. Sacchetti, Miscellaneous results on the generating functions of special functions, *Integral Transforms and Special Functions* 12 (4) (2001) 315–322.
- [100] A. Torre, Relativistic laguerre polynomials and splash pulses, *Progress In Electromagnetics Research B* 13 (2) (2009) 329–356.
- [101] M. O. Cáceres, Centro, Irreversible thermodynamics in the framework of Tsallis entropy, *Physica A* 218 (3-4) (1995) 471–481.
- [102] A. Chame, E. V. L. de Mello, The Onsager reciprocity relations within Tsallis statistics, *Physics Letters A* 228 (3) (1997) 159–163.

- [103] H. Dreicer, Electron and Ion Runaway in a Fully Ionized Gas. II*, *Physical Review* 117 (January 1960) (1960) 329–342.
URL <http://eprints.utas.edu.au/4774/>
- [104] J. Wesson, D. Campbell, *Tokamaks*, International Series of Monogr, OUP Oxford, 2011.
- [105] R. Goldston, P. Rutherford, *Introduction to Plasma Physics*, Institute of Physics Publishing, 1995.
- [106] J. Connor, T. Fukuda, X. Garbet, C. Gormezano, V. Mukhovatov, M. Wakatani, t. I. D. Group, t. I. T. G. on Transport, I. B. Physics, A review of internal transport barrier physics for steady-state operation of tokamaks, *Nuclear Fusion* 44 (4) (2004) R1–R49.
- [107] X. L. Zou, A. Géraud, P. Gomez, M. Mattioli, J. L. Ségui, F. Clairet, C. D. Michelis, P. Devynck, T. D. de Wit, M. Erba, C. Fenzi, X. Garbet, C. Gil, P. Hennequin, F. Imbeaux, E. Joffrin, G. Leclert, A. L. Pecquet, Y. Peysson, R. Sabot, T. F. Seak, Edge cooling experiments and non-local transport phenomena in Tore Supra, *Plasma Phys. Control. Fusion* 42 (10) (2000) 1067–1076.
- [108] C. Gao, J. Rice, H. Sun, M. Reinke, N. Howard, D. Mikkelsen, a.E. Hubbard, M. Chilenski, J. Walk, J. Hughes, P. Ennever, M. Porkolab, a.E. White, C. Sung, L. Delgado-Aparicio, S. Baek, W. Rowan, M. Brookman, M. Greenwald, R. Granetz, S. Wolfe, E. Marmor, Non-local heat transport in Alcator C-Mod ohmic L-mode plasmas, *Nuclear Fusion* 54 (8) (2014) 083025.
URL <http://stacks.iop.org/0029-5515/54/i=8/a=083025?key=crossref.893f27d483fc8dc6ba5205aa6daf2fb6>
- [109] P. Rodriguez-Fernandez, A. White, N. Howard, B. Grierson, G. Staebler, J. Rice, X. Yuan, N. Cao, A. Creely, M. Greenwald, A. Hubbard, J. Hughes, J. Irby, F. Sciortino, Explaining Cold-Pulse Dynamics in Tokamak Plasmas Using Local Turbulent Transport Models, *Physical Review Letters* 120 (7) (2018) 075001.
URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.120.075001>
- [110] J. C. Dorelli, J. D. Scudder, Electron heat flow carried by Kappa Distributions in the solar corona, *Geophysical Research Letters* 26 (2) (1999) 3537–3540.
URL <http://adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-data{}query?bibcode=1999GeoRL..26.3537D{&}link{}type=ABSTRACT>
- [111] V. Pierrard, M. Maksimovic, J. Lemaire, Electron velocity distribution functions from the solar wind to the corona, *Journal of Geophysical Research* 104 (A8) (1999) 17021.
- [112] S. Landi, L. Matteini, F. Pantellini, On the Competition Between Radial Expansion and Coulomb Collisions in Shaping the Electron Velocity Distribution Function: Kinetic Simulations, *The Astrophysical Journal* 760 (2) (2012) 143.
URL <http://stacks.iop.org/0004-637X/760/i=2/a=143?key=crossref.54b23634d10816c59ddc11d4751b72e3>
- [113] S. Landi, F. G. E. Pantellini, On the temperature profile and heat flux in the solar corona: Kinetic simulations, *Astronomy and Astrophysics* 372 (2001) 686–701.

- [114] S. R. Cranmer, S. R., Non-Maxwellian Redistribution in Solar Coronal Ly α Emission, *The Astrophysical Journal* 508 (2) (1998) 925–939.
URL <http://stacks.iop.org/0004-637X/508/i=2/a=925>
- [115] M. Maksimovic, I. Zouganelis, J. Y. Chaufray, K. Issautier, E. E. Scime, J. E. Littleton, E. Marsch, D. J. McComas, C. Salem, R. P. Lin, H. Elliott, Radial evolution of the electron distribution functions in the fast solar wind between 0.3 and 1.5 AU, *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 110 (A9) (2005) 1–9.
- [116] V. Pierrard, M. Pieters, Coronal heating and solar wind acceleration for electrons, protons, and minor ions obtained from kinetic models based on kappa distributions, *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 119 (2014) 9441–9455.
- [117] P. Hellinger, Ion collisional transport coefficients in the solar wind at 1, *The Astrophysical Journal* 825 (2) (2016) 120.
URL <http://stacks.iop.org/0004-637X/825/i=2/a=120?key=crossref.6f2673378df2fe9e003bb3d1667d58ce>
- [118] J. D. Scudder, On the causes of temperature change in inhomogeneous low-density astrophysical plasmas, *The Astrophysical Journal* 398 (1992) 299.
- [119] V. Pierrard, K. Borremans, K. Stegen, J. F. Lemaire, Coronal Temperature Profiles Obtained from Kinetic Models and from Coronal Brightness Measurements Obtained During Solar Eclipses, *Solar Physics* 289 (1) (2014) 183–192.
- [120] N. Meyer-Vernet, How does the solar wind blow? A simple kinetic model, *European Journal of Physics* 20 (1999) 167–176.
URL <http://iopscience.iop.org/0143-0807/20/3/006>
- [121] J. C. Dorelli, J. D. Scudder, Electron heat flow in the solar corona: Implications of non-Maxwellian velocity distributions, the solar gravitational field, and Coulomb collisions, *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 108 (A7) (2003) 1–11.
- [122] G. Livadiotis, D. J. McComas, Electrostatic shielding in plasmas and the physical meaning of the Debye length, *Journal of Plasma Physics* 80 (03) (2014) 341–378.
- [123] E. Marsch, S. Livi, Coulomb collision rates for self-similar and kappa distributions, *Physics of Fluids* 28 (5) (1985) 1379.
URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/pof1/28/5/10.1063/1.864971>
- [124] S. Landi, L. Matteini, F. Pantellini, Electron Heat Flux in the Solar Wind: Are We Observing the Collisional Limit in the 1 Au Data?, *The Astrophysical Journal* 790 (1) (2014) L12.
URL <http://stacks.iop.org/2041-8205/790/i=1/a=L12?key=crossref.9cf00a5d0ea0ae37b6c95d2550059629>

- [125] S. D. Bale, M. Pulupa, C. Salem, C. H. K. Chen, E. Quataert, Electron Heat Conduction in the Solar Wind: Transition From Spitzer-Härm To the Collisionless Limit, *The Astrophysical Journal* 769 (2) (2013) L22.
URL <http://stacks.iop.org/2041-8205/769/i=2/a=L22?key=crossref.c315930c7da1c1606f40e793e2de2a69>
- [126] C. Salem, D. Hubert, C. Lacombe, S. D. Bale, A. Mangeney, D. E. Larson, R. P. Lin, Electron Properties and Coulomb Collisions in the Solar Wind at 1 AU: Wind Observations, *The Astrophysical Journal* 585 (2) (2003) 1147–1157.
URL <http://iopscience.iop.org/0004-637X/585/2/1147/fulltext/>
- [127] S. Landi, F. Pantellini, Kinetic simulations of the solar wind from the subsonic to the supersonic regime, *Astronomy and Astrophysics* 400 (2003) 769–778.
- [128] K. W. Gentle, W. L. Rowan, R. V. Bravenec, G. Cima, T. P. Crowley, H. Gasquet, G. A. Hallock, J. Heard, A. Ouroua, P. E. Phillips, D. W. Ross, P. M. Schoch, C. Watts, Strong nonlocal effects in a Tokamak perturbative transport experiment, *Physical Review Letters* 74 (18) (1995) 3620–3623.
- [129] J. D. Callen, M. W. Kissick, Plasma Physics and Controlled Fusion Evidence and concepts for non-local transport, *Plasma Phys. Control. Fusion* 39 (12 B) (1997) B173–B188.
- [130] F. Ryter, R. Neu, R. Dux, H. U. Fahrbach, F. Leuterer, G. Pereverzev, J. Schweinzer, J. Stober, W. Suttrop, F. De Luca, A. Jacchia, J. E. Kinsey, Propagation of cold pulses and heat pulses in ASDEX Upgrade, *Nuclear Fusion* 40 (11) (2000) 1917–1932.
- [131] F. Ryter, G. Tardini, F. De Luca, H. U. Fahrbach, F. Imbeaux, A. Jacchia, K. K. Kirov, F. Leuterer, P. Mantica, A. G. Peeters, G. Pereverzev, W. Suttrop, Electron heat transport in ASDEX upgrade: Experiment and modelling, *Nuclear Fusion* 43 (11) (2003) 1396–1404.
- [132] J. E. Kinsey, R. E. Waltz, H. E. St. John, Theoretical transport modeling of Ohmic cold pulse experiments, *Physics of Plasmas* 5 (11) (1998) 3974–3981.
- [133] R. Neu, F. Ryter, R. Dux, H. U. Fahrbach, A. Jacchia, J. Kinsey, F. Leuterer, F. De Luca, G. Pereverzev, J. Stober, W. Suttrop, Propagation of cold pulses and heat pulses in ASDEX Upgrade, *Nuclear Fusion* 40 (11) (2000) 1917–1932.
- [134] P. Mantica, P. Galli, G. Gorini, G. M. Hogeweij, J. De Kloe, N. J. Lopes Cardozo, Non-local transient transport and thermal barriers in rijnhuizen tokamak project plasmas, *Physical Review Letters* 82 (25) (1999) 5048–5051.
- [135] P. Galli, G. Gorini, P. Mantica, G. M. Hogeweij, J. De Kloe, N. J. Lopes Cardozo, 'Non-local' response of RTP ohmic plasmas to peripheral perturbations, *Nuclear Fusion* 39 (10) (1999) 1355–1368.

- [136] G. Hogeweyj, P. Mantica, G. Gorini, J. De Kloe, N. J. L. Cardozo, Recording non-local temperature rise in the RTP tokamak, *Plasma Phys. Control. Fusion* 42 (10) (2000) 1137–114.
- [137] S. D. Song, X. L. Zou, G. Giruzzi, W. W. Xiao, X. T. Ding, B. J. Ding, J. L. Ségui, D. Elbèze, F. Clairet, C. Fenzi, T. Aniel, J. F. Artaud, V. Basiuk, F. Bouquey, R. Magne, E. Corbel, Analysis of electron heat transport with off-axis modulated ecrh in tore supra, *Nuclear Fusion* 52 (3).
- [138] F. Ryter, C. Angioni, A. G. Peeters, F. Leuterer, H. U. Fahrbach, W. Suttrop, Experimental study of trapped-electron-mode properties in tokamaks: Threshold and stabilization by collisions, *Physical Review Letters* 95 (8) (2005) 1–4.
- [139] B. B. Kadomtsev, O. P. Pogutse, Plasma Instability Due to Particle Trapping in a Toroidal Geometry, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* 24 (6) (1967) 1172.
URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1967JETP...24.1172K>
- [140] W. Chen, X. T. Ding, Y. Liu, G. L. Yuan, Y. P. Zhang, Y. B. Dong, X. Y. Song, J. Zhou, X. M. Song, W. Deng, Q. W. Yang, X. Q. Ji, X. R. Duan, Y. Liu, Destabilization of the internal kink mode by energetic electrons on the HL-2A tokamak, *Nuclear Fusion* 49 (7).
- [141] P. Helander, H. Smith, T. Fülöp, L. G. Eriksson, Electron kinetics in a cooling plasma, *Physics of Plasmas* 11 (12) (2004) 5704–5709.
- [142] B. Kadomtsev, *Reviews of Plasma Physics*, no. v. 17 in *Reviews of Plasma Physics*, Springer US, 2012.
- [143] D. S. Oliveira, R. M. O. Galvão, Non-Extensive Transport Equations in Magnetized Plasmas, arXiv preprint.
URL <https://arxiv.org/abs/1806.01247>
- [144] M. E. H. Ismail, Relativistic orthogonal polynomials are Jacobi polynomials, *J. Phys. A: Math. Gen* 29 (1996) 3199–3202.
- [145] A. Torre, W. A. B. Evans, O. El Gawhary, S. Severini, Relativistic Hermite polynomials and Lorentz beams, *Journal of Optics A Pure and Applied Optics* 10 (11) (2008) 115007.
- [146] P. Natalini, P. E. Ricci, The Moments of the Density of Zeros for the Relativistic Hermite and Laguerre Polynomials, *Computers & Mathematics with Applications* 31 (6) (1996) 87–96.
- [147] S. Weinzierl, Introduction to Monte Carlo methods, arXiv preprint.
URL <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0006269>