Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Hadroprodução de charmonium

SBI-IFUSP
305M810T4512

Thiago Simonetti Fleury

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de mestre em Ciências

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
4512
INSTITUTO DE FÍSICA

Orientador

Prof. Dr. Oscar José Pinto Éboli

Banca Examinadora

Profa. Dra. Ivone Freire da Mota e Albuquerque (IFUSP)
Prof. Dr. Eduardo Moraes Gregores (IFT/UNESP)
Prof. Dr. Oscar José Pinto Éboli (orientador - IFUSP)

São Paulo
2006

Prof. Celso Luiz Lima
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

df. 25/04/06

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Fleury, Thiago Simonetti

Hadroprodução de Charmonium São Paulo , 2006.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Éboli, Oscar José Pinto

Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Física de partículas;
2. Cromodinâmica quântica;
3. Hadroprodução;
4. Quarks pesados.

USP/IF/SBI-029/2006

Resumo

Neste trabalho, nós estudamos a hadroprodução de charmonium em experimentos de alvo fixo com os três modelos: modelo de singleto de cor (CSM), modelo de evaporação de cor (CEM) e QCD não relativística (NRQCD). Os ajustes feitos aos dados experimentais nos permitiram concluir que o CSM subestima o valor da seção de choque de produção dos estados de charmonium J/ψ e $\psi(2S)$ e, portanto, não descreve adequadamente a hadroprodução nestes casos. Os modelos CEM e NRQCD por outro lado descreveram satisfatoriamente os dados, no entanto, o fato dos resultados experimentais possuírem grandes incertezas não nos permitiu comparar diretamente os dois modelos e desta forma concluir qual dos dois é mais adequado.

Abstract

In this work we evaluate the charmonium production at fixed-target experiments with three different models: the color singlet model (CSM), the color evaporation model (CEM) and the nonrelativistic quantum chromodynamics (NRQCD). We verify that the results of CSM under-preditcs the production cross-section for J/ψ and $\psi(2S)$, thus, in this case, the CSM is an inadequate model. In addition, we find that the two models CEM and NRQCD satisfactorily predict the charmonium hadro-production. However, due to the fact that the experimental uncertainties are large we can not compare the two models.

Agradecimentos

- Ao Oscar, por todo seu apoio e ajuda incondicional durante todo este período de mestrado, assim como por seu entusiasmo contagiante e também pela sua amizade.

- À toda minha família pelo apoio e suporte.

- Ao Sandro pelas inúmeras discussões no meu primeiro ano de mestrado.

- Ao Grupo de Física de Partículas e do Departamento de Física Matemática, professores e estudantes, por todas as discussões enriquecedoras.

- Ao Gabriel pela grande amizade e pela ajuda com o LATEX.

- Finalmente, gostaria de agradecer a todos que direta ou indiretamente me ajudaram a realizar este trabalho.

- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro.

Sumário

Resumo i

Abstract iii

Agradecimentos v

Introdução 1

1 Conceitos Básicos 5
- 1.1 Cromodinâmica Quântica - QCD . . . 5
  - 1.1.1 Liberdade assintótica . . . 8
  - 1.1.2 Confinamento de cor . . . 9
  - 1.1.3 Modelo de partons . . . 10
- 1.2 Charmonium . . . 11

2 Produção de Charmonium 15
- 2.1 Modelo de singleto de cor . . . 17
- 2.2 Modelo de evaporação de cor . . . 18
- 2.3 QCD não relativística . . . 19
  - 2.3.1 Teoria de campos efetiva . . . 20
  - 2.3.2 Lagrangiana da NRQCD . . . 21
  - 2.3.3 Magnitude dos operadores da NRQCD . . . 23
  - 2.3.4 Charmonium na NRQCD . . . 25
  - 2.3.5 Produção de charmonium na NRQCD . . . 27

3 Cálculo da produção de charmonium 31
- 3.1 Análise com o CEM . . . 31
- 3.2 Análise com o CSM . . . 33
- 3.3 Análise com a NRQCD . . . 34
  - 3.3.1 Expansão não relativística dos espinores . . . 35
  - 3.3.2 Seção de choque de produção . . . 40
  - 3.3.3 Simetrias da NRQCD . . . 46
  - 3.3.4 Simplificação das seções de choque . . . 48

4 Análise dos dados experimentais **51**
4.1 Análise com o CEM 51
4.2 Análise com a NRQCD e com o CSM 57

Conclusão **61**

A Propriedades das matrizes λ **69**

B Transformação de Foldy-Wouthuysen-Tani **71**

Referências Bibliográficas **79**

Lista de Figuras

1.2.1 Espectro do charmonium medido experimentalmente. Na Figura é adotada a convenção $(n\,L)$, onde n é o número quântico principal e L é o momento angular orbital. 13

2.0.1 Produção inicial do par $c\bar{c}$ 15

3.1.1 Produção do par $c\bar{c}$ em ordem mais baixa em α_s 31

3.2.1 Produção do J/ψ 33

4.1.1 Razão entre as seções de choque de produção do méson $\psi(2S)$ e do méson J/ψ em colisões próton-próton e próton-núcleon como função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. Ajustando a constante $C_{J/\psi}^{\psi'}$ definida em (4.1.3) aos dados, obtivemos $C_{J/\psi}^{\psi(2S)} = 0,151\,(5)$. Os dados foram retirados de [21]. 52

4.1.2 Razão entre as seções de choque de produção do méson $\psi(2S)$ e do méson J/ψ em colisões de alvo fixo como função do número de massa A do alvo. Os dados foram retirados de diferentes experimentos com energia do centro de massa na faixa $20 \leq \sqrt{s} \leq 40$ GeV [21]. O ajuste de uma constante ao conjunto de dados nos forneceu $C_{J/\psi}^{\psi(2S)} = 0,143\,(10)$. 52

4.1.3 Seção de choque de produção de J/ψ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia no centro de massa $\sqrt{s}$. Para a realização do ajuste a relação $\sigma_{J/\psi} = \rho_{J/\psi}\ \sigma_{fechado}$ foi utilizada e obtivemos $\rho_{J/\psi} = 0,0353\,(10)$. A curva foi gerada com a função de distribuição CTEQ6 LO. Os dados foram retirados de [22]. 54

4.1.4 Seção de choque de produção de $\psi(2S)$ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. Para a realização do ajuste a relação $\sigma_{\psi(2S)} = \rho_{\psi(2S)}\ \sigma_{fechado}$ foi utilizada e obtivemos $\rho_{\psi(2S)} = 0,0081\,(7)$. A curva mostrada foi gerada com a função de distribuição CTEQ6 LO. Os dados foram retirados de [20]. 55

4.1.5 Seção de choque de produção de J/ψ em colisões píon-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. Para a realização do ajuste a relação $\sigma_{J/\psi} = \rho_{J/\psi}\ \sigma_{fechado}$ foi utilizada e obtivemos $\rho_{J/\psi} = 0,0361\,(9)$. A curva mostrada foi gerada com as funções de distribuição SMRS P2/CTEQ6 LO. Os dados foram retirados de [21]. 56

4.1.6 Seção de choque diferencial $d\sigma/dy$ de produção de J/ψ para $y = 0$ em colisões próton-núcleon como função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. Para a realização do ajuste utilizamos a relação $d\sigma/dy = \rho_{J/\psi}\, d\sigma_{fechado}/dy$ e obtivemos $\rho_{J/\psi} = 0,0346\,(4)$. A curva mostrada foi gerada com a função de distribuição CTEQ6 LO. Os dados foram retirados de [21]. 57

4.2.1 Seção de choque de produção de J/ψ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. As curvas foram geradas com a função de distribuição CTEQ6 LO. A linha segmentada mostra a contribuição do CSM enquanto que a linha contínua mostra a previsão da seção de choque quando há a inclusão de termos de octeto de cor - NRQCD. O ajuste realizado forneceu $\Delta_8(J/\psi) = 0,029\,(9)$ GeV^3. 59

4.2.2 Seção de choque de produção de $\psi(2S)$ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. As curvas foram geradas com a função de distribuição CTEQ6 LO. A linha segmentada mostra a contribuição do CSM enquanto que a linha contínua mostra a previsão da seção de choque quando há a inclusão de termos de octeto de cor - NRQCD. O ajuste realizado forneceu $\Delta_8(\psi[2S]) = 0,005\,(7)$ GeV^3. 60

Lista de Tabelas

2.1 Estimativas da magnitude dos operadores da NRQCD para elementos de matriz entre estados de charmonium em termos da massa do quark pesado m_c e da velocidade típica do quark charme v no referencial do centro de massa do méson. 23

4.1 Elementos de matriz utilizados nos ajustes aos dados experimentais de produção de charmonium [20]. 58

4.2 Regras de supressão relativas para elementos de matriz da forma $< \mathcal{O}^H_{mn}(^{2S+1}L_J) >$ prevista pela NRQCD e pelo CEM, onde H é um estado de charmonium. Na primeira linha foi adotada a convenção $n^{2s+1}L_J$, onde $n = 1, 8$ indica o estado de cor. Na tabela estão mostrados resultados até ordem relativa v^4. 66

Introdução

A descoberta do méson J/ψ composto de um quark e de um anti-quark charme em 1974 [1, 2] foi a primeira evidência experimental para a existência de quarks pesados e marcou o início de uma nova fase nos estudos das interações fortes e no desenvolvimento da cromodinâmica quântica-QCD. Desde então, o estudo da produção de quarkonium pesado, onde quarkonium é o nome dado a um estado ligado de um quark e de um anti-quark, tem servido de laboratório para testes de aspectos tanto perturbativos como não perturbativos da QCD. Porém, atualmente, ainda existem dados experimentais que não são explicados teoricamente e, portanto, há intensa pesquisa nesta área.

Na produção de um estado de quarkonium pesado estão envolvidos momentos da ordem da massa do quark pesado m ou maior. Devido ao fato que m é maior que a escala Λ_{QCD} da cromodinâmica quântica associada com os efeitos não perturbativos da teoria, o valor da constante de acoplamento da QCD α_s calculada na escala de energia m é menor que um, por exemplo, no caso do quark charme onde $m_c \approx 1,5$ GeV nós temos $\alpha_s(m_c) \approx 0,25$. Então, esperava-se que o cálculo da seção de choque de produção pudesse ser realizado utlizando apenas teoria de perturbação. Todavia, verificou-se que efeitos associados a dinâmica de estados ligados invalidam uma aplicação direta de métodos perturbativos neste caso. As propostas para a solução deste problema baseiam-se na hipótese de que o processo de produção tem duas fases: na primeira o par $q\bar{q}$ é produzido, sendo que este estágio é perturbativo e envolve distâncias da ordem $1/m_q$; e na segunda ocorre a hadronização onde distâncias da ordem $1/\Lambda_{QCD}$ estão presentes. Esta separação do processo de produção em duas fases é conhecida como fatorização.

Na década de setenta dois modelos para explicar a produção de quarkonium pesado foram propostos: o modelo de singleto de cor (CSM) [3] e o modelo de evaporação de cor (CEM) [4, 5, 6, 7]. Estes dois modelos, como será visto com detalhes adiante, fazem diferentes hipóteses sobre o papel da cor e do spin no processo de produção. O CSM assume que um par $q\bar{q}$ produzido inicialmente pode evoluir para um estado de quarkonium H se e somente se o par for criado em um estado singleto de cor e possuir os mesmos números quânticos de spin e momento angular do estado H. Já o CEM assume que a probabilidade do par $q\bar{q}$ de evoluir para o estado H é independente da cor e do spin do par.

Inicialmente, o CSM foi utilizado em cálculos de produção dos estados de charmonium η_c e χ_c em processos de fusão de dois glúons [8]. Logo após, o modelo foi utilizado na análise da produção de J/ψ e η_c no decaimento de mésons B [9, 10]. O CSM acumulou grandes sucessos fenomenológicos até o ano de 1995 quando experimentos no Tevatron mostraram que o modelo subestima a seção de choque de produção de J/ψ e $\psi(2S)$ em colisões $p\bar{p}$ em mais de uma ordem de grandeza [11, 12]. Ainda, verificou-se que o modelo apresenta algumas inconsistências teóricas. Em alguns casos de produção de estados de quarkonium com momento

angular orbital $L \geq 1$ os cálculos com o CSM apresentam divergências infravermelhas que só podem ser canceladas quando termos adicionais onde o par inicial $q\bar{q}$ é produzido em um estado de octeto de cor são considerados. De maneira geral, o modelo mostra-se em muitas situações inadequado para o estudo da produção de quarkonium pesado.

Uma alternativa ao modelo CSM é o modelo CEM. A seção de choque de produção de um estado de charmonium H neste modelo é uma fração ρ_H da seção de choque de produção de um par $c\bar{c}$ com massa invariante menor que $2m_D$ onde m_D é a massa do méson mais leve D composto de um quark charme e de um anti-quark leve. Nas versões mais simples do modelo, as frações ρ_H são assumidas constantes e universais, ou seja, independentes do processo, e, portanto, uma vez que elas forem determinadas em uma dada reação, elas podem ser utilizadas para prever o valor da seção de choque em outros processos ou regiões cinemáticas. Até o momento o CEM tem descrito com exatidão os dados disponíveis do Hera e do Tevatron [13], bem como a produção de ψ's no decaimento de Z's [14].

Em 1995 um novo modelo para o cálculo da taxa de produção de charmonium foi proposto: a QCD não relativística - NRQCD [15]. Como será visto, a NRQCD é uma teoria de campos efetiva que explora o fato da física de charmonium possuir dois números pequenos: a constante de acoplamento da QCD calculada na escala de energia da massa do quark charme $\alpha_s(m_c) \approx 0,25$ e a velocidade típica v de um quark charme em um estado de charmonium em relação ao referencial do centro de massa $v^2 \approx 0,3$ [16]. No formalismo da NRQCD o papel da cor no processo de produção incorpora tanto aspectos do CEM como do CSM, no sentido que, como no CEM, um par $c\bar{c}$ inicialmente formado em qualquer estado de cor possui uma probabilidade não nula de evoluir para um estado de charmonium, e, como no CSM, esta probabilidade é fortemente dependente dos números quânticos do par $c\bar{c}$. Uma propriedade importante da NRQCD é que ela reduz-se ao modelo CSM quando todas as contribuições de termos de octeto de cor e de termos onde o par $c\bar{c}$ não possui os mesmos números quânticos do estado de charmonium são desprezadas.

Na NRQCD a seção de choque de produção de charmonium é dada em uma forma fatorizada onde os efeitos de momentos de ordem m_c estão contidos nos coeficientes dos operadores de 4-férmions pertencentes a lagrangiana da NRQCD e os efeitos de momentos de ordem $m_c v$ ou menor estão presentes em elementos de matriz. Como será mostrado, os coeficientes podem ser determinados como polinômios em $\alpha_s(m_c)$ através da imposição da condição de *matching* entre as amplitudes de produção de um par $c\bar{c}$ calculadas em teoria de perturbação da QCD com as mesmas amplitudes calculadas em teoria de perturbação da NRQCD. Ainda, a NRQCD fornece uma estimativa da magnitude dos elementos de matriz presentes na seção de choque como função de v e, portanto, para uma dada ordem apenas um número finito de elementos de matriz devem ser considerados, por exemplo, no caso da produção de J/ψ até ordem v^7 existem apenas quatro elementos de matriz independentes. De maneira geral, a seção de choque de produção é dada na NRQCD como uma dupla expansão em $\alpha_s(m_c)$ e v.

Em cálculos práticos de produção de charmonium com a NRQCD os elementos de matriz são considerados parâmetros fenomenológicos e têm os seus valores extraídos do ajuste aos dados experimentais. Isso deve-se ao fato que o cálculo dos elementos de matriz por primeiros princípios é difícil de ser realizado por envolver efeitos não perturbativos e, atualmente, apenas um pequeno conjunto deles é calculado teoricamente com métodos de NRQCD na rede [15]. A NRQCD acumula diversos sucessos fenomenológicos [17], porém ela não descreve corretamente os dados do Hera [18] e a polarização de J/ψ no Tevatron [19], no entanto, as incertezas tanto

teóricas como experimentais em ambos os casos são grandes de modo que não é possível tirar uma conclusão definitiva sobre a validade da NRQCD.

Neste trabalho nós iremos calcular as previsões dos modelos CSM, CEM e NRQCD para a hadroprodução de charmonium em experimentos de alvo fixo e realizaremos a comparação com os dados experimentais retirados de [20, 21, 22]. A dissertação está organizada do seguinte modo: no Capítulo 1 conceitos importantes da cromodinâmica quântica e algumas propriedades gerais dos estados de charmonium são apresentados; no Capítulo 2 fazemos a descrição dos modelos CSM, CEM e NRQCD; no Capítulo 3 realizamos os cálculos da seção de choque de produção de charmonium para os três modelos e finalmente no Capítulo 4 comparamos as previsões teóricas com os dados experimentais.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 Cromodinâmica Quântica - QCD

O objetivo desta seção é introduzir de forma compacta alguns elementos essenciais da cromodinâmica quântica que serão utilizados neste trabalho. Os detalhes dos cálculos que serão apresentados aqui podem ser encontrados em [23, 24, 25].

O modelo utilizado para o estudo das interações fortes experimentadas pelos quarks e glúons introduz o conceito de cor. Um estado de um quark neste caso, que é um férmion de spin 1/2, é especificado não apenas por um espinor de Dirac mas também por um índice de cor, que pode ser: vermelho, azul ou verde; ou no caso de um anti-quark: anti-vermelho, anti-azul ou anti-verde. Existem algumas evidências que suportam a hipótese que os quarks carregam cor, uma delas é a resolução do problema de spin-estatística dos bárions, que são compostos por três quarks. Aparentemente, o modelo de quarks parecia violar o principio de exclusão de Pauli como no caso da partícula Δ^{++} que é composta por três quarks *up*. O estado com $J_3 = 3/2$, onde J_3 é a terceira componente do momento angular total da partícula Δ^{++}, que é uma onda-S e possui spin 3/2, teria os três quarks *up* com spin para cima e, portanto, no mesmo estado, o que violaria o princípio de Pauli. Este problema é solucionado com a introdução de um número quântico adicional que é a cor. Outras evidências históricas para a existência da cor são a medida da magnitude da seção de choque de aniquilação de um par elétron-pósitron em hádrons e a medida da largura do decaimento $\pi^0 \to 2\gamma$.

Os léptons como, por exemplo, os elétrons, diferentemente dos quarks, não carregam cor e não interagem fortemente entre si. Isso sugere que a cor faz o papel da carga no caso das interações fortes. De fato, a interação forte é descrita por uma teoria de gauge local não-abeliana onde o grupo de simetria é o grupo SU(3) de cor, esta teoria é a cromodinâmica quântica, ou QCD. As partículas presentes na QCD são os quarks que são tripletos de SU(3) e aparecem em seis sabores: *up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b)* e *top (t)* e os glúons que são os bósons de gauge da teoria e são partículas não massivas de spin 1. Os glúons carregam dois índices: um de cor e um de anti-cor. Desta forma, a cor é conservada em todos os vértices da teoria, por exemplo, um quark azul pode virar um quark vermelho pela emissão de um glúon azul-anti-vermelho.

Para a determinação da lagrangiana da QCD considere, primeiramente, um campo fermiônico ψ com massa m, cuja a cor é determinada por uma matriz coluna c com três componentes

onde é adotada a convenção:

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para vermelho, } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para azul, } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ para verde .} \tag{1.1.1}$$

O grupo de simetria G que estamos interessados para a construção da teoria de gauge é o grupo SU(3) de cor. O campo ψ transforma-se como um tripleto na representação fundamental (tri-dimensional) deste grupo e, portanto, sob uma transformação de gauge, temos:

$$\psi(x) \;\rightarrow\; \psi'(x) \;=\; U\,\psi(x)\,, \tag{1.1.2}$$

com

$$U \;=\; e^{-i\,T_a\,\theta^a}\,, \tag{1.1.3}$$

onde θ^a são parâmetros arbitrários e $T_a \equiv \lambda_a/2$ são os geradores do grupo de simetria e satisfazem a álgebra:

$$[\,T_a,\,T_b\,] \;=\; i\,f^{abc}\,T_c\,,$$

os valores explícitos das constantes de estrutura f^{abc} e as propriedades das matrizes λ_a podem ser encontrados no Apêndice A. Ainda, os geradores T_a são convenientemente normalizados na forma:

$$\mathrm{Tr}\,(\,T_a\,T_b\,) \;=\; 2\,\delta_{ab}\,. \tag{1.1.4}$$

A lagrangiana que descreve um campo fermiônico livre é a lagrangiana de Dirac que é:

$$\mathcal{L}_{Dirac} \;=\; \bar{\psi}(x)\;(i\,\gamma^\mu\,\partial_\mu - m)\;\psi(x)\,. \tag{1.1.5}$$

Esta lagrangiana é claramente invariante sob a transformação do campo ψ dada em (1.1.2) quando os parâmetros θ^a são independentes de x. No caso onde os parâmetros θ^a dependem de x a lagrangiana deixa de ser invariante dado que o gradiente transforma-se como:

$$\partial_\mu\psi \;\rightarrow\; U\,(\partial_\mu\psi) \;+\; (\partial_\mu U)\,\psi\,. \tag{1.1.6}$$

Para obter uma lagrangiana que seja invariante por transformações de gauge locais, ou melhor, quando os parâmetros θ^a são dependentes de x, é necessário substituir a derivada por uma derivada covariante, que é da forma:

$$D_\mu \;=\; \partial_\mu \;-\; i\,g_s\,T_a\,A^a_\mu \;\equiv\; \partial_\mu \;-\; i\,g_s\,A_\mu\,, \tag{1.1.7}$$

na expressão acima g_s é a constante de acoplamento entre os campos ψ e A^a_μ. Nos próximos capítulos iremos utilizar A_μ na forma $A_\mu = (\Phi,\,\mathbf{A})$.

A lagrangiana (1.1.5), quando a derivada é substituída pela derivada covariante, é mantida invariante sob uma transformação de gauge caso o campo A_μ transforme-se como:

$$A_\mu \;\rightarrow\; U\,A_\mu\,U^{-1} \;-\; \frac{i}{g_s}\,(\partial_\mu U)\;U^{-1}\,. \tag{1.1.8}$$

Neste caso, nós temos:

$$D_\mu \psi \;\rightarrow\; D'_\mu \psi' \;=\; U\,(D_\mu \psi)\;, \tag{1.1.9}$$

e, portanto, devido a transformação da derivada covariante dada acima é fácil ver que a lagrangiana é agora invariante por transformações de gauge locais.

Para prosseguir é necessário a determinação de um termo cinético para os campos de gauge A^a_μ introduzidos através da derivada covariante dada em (1.1.7). Em analogia com o eletromagnetismo, nós procuramos um tensor de intensidade que possui a forma:

$$G_{\mu\nu} \;\equiv\; \frac{1}{2}\, G^a_{\mu\nu}\, \lambda_a\;, \tag{1.1.10}$$

e, a partir deste tensor, construímos o seguinte termo cinético:

$$\mathcal{L}_{gauge} \;=\; -\frac{1}{4}\, G^{\mu\nu}_a\, G^a_{\mu\nu} \;=\; -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\,G^{\mu\nu}\, G_{\mu\nu}\,)\,. \tag{1.1.11}$$

Para que a lagrangiana $\mathcal{L}_{gauge}$ seja invariante sob uma transformação de gauge é necessário que o tensor $G^{\mu\nu}$ transforme-se como:

$$G^{\mu\nu} \;=\; U\, G^{\mu\nu}\, U^{-1}\,. \tag{1.1.12}$$

A lei de transformação dada acima é obtida caso o tensor $G^{\mu\nu}$ seja da forma:

$$-i\, g_s\, T^a\, G^a_{\mu\nu} \;=\; [\,D_\mu,\, D_\nu\,]\;, \tag{1.1.13}$$

ou, explicitamente,

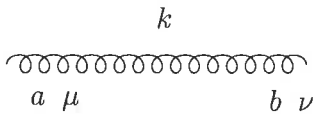
$$G^a_{\mu\nu} \;=\; \partial_\mu A^a_\nu \;-\; \partial_\nu A^a_\mu \;-\; g_s\, f^{abc}\, A^b_\mu\, A^c_\nu\,. \tag{1.1.14}$$

Desta forma, coletando os resultados obtidos acima, a lagrangiana da QCD que é invariante sobre transformações locais de gauge com o grupo de simetria SU(3) de cor é:

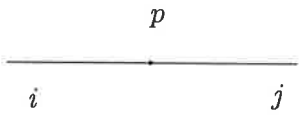
$$\mathcal{L}_{QCD} \;=\; -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\,G^{\mu\nu}\, G_{\mu\nu}\,) \;+\; \sum_j \bar{\psi}^j\, \left(i\,\gamma_\mu\, D^\mu \;-\; m^j\right)\, \psi^j\;, \tag{1.1.15}$$

onde a soma em j estende-se sobre todos os seis sabores de quarks e m^j é a massa do quark com sabor j. Os índices de cor foram suprimidos na expressão acima por simplicidade.

A lagrangiana $\mathcal{L}_{QCD}$ nos permite obter as regras de Feynman da teoria e para isto será utilizado o gauge de Feynman. As expressões para os propagadores que serão usadas nos cálculos posteriores são:

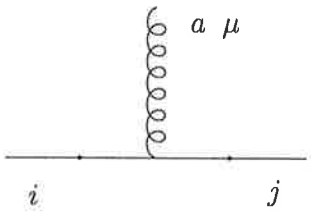


$$\rightarrow \qquad -i\;\delta_{ab}\;\frac{1}{k^2}\;g_{\mu\nu}\;,$$

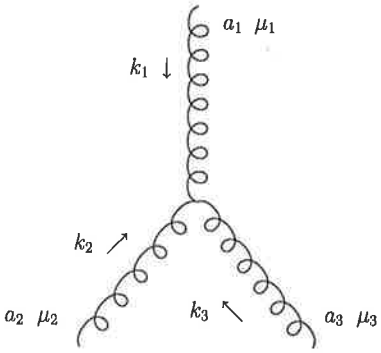


$$\rightarrow \qquad i\,\delta_{ij}\,\frac{1}{\not{p}-m}\,. \tag{1.1.16}$$

Devido ao fato dos glúons carregarem cor eles, diferentemente do que ocorre com os fótons, podem se acoplar diretamente com outros glúons. Os vértices da teoria que serão úteis e as respectivas regras de Feynman são:



$$\rightarrow \qquad -\tfrac{i}{2}\,g_s\,\gamma_\mu\,T^a_{ij}\,.$$



$$\rightarrow \quad -\,g_s\,f^{a_1\,a_2\,a_3}\Big[\,(k_1-k_2)_{\mu_3}\,g_{\mu_1\,\mu_2} + (k_2-k_3)_{\mu_1}\,g_{\mu_2\,\mu_3} + (k_3-k_1)_{\mu_2}\,g_{\mu_3\,\mu_1}\Big]\,. \tag{1.1.17}$$

1.1.1 Liberdade assintótica

Em uma teoria de campos, geralmente, a constante de acoplamento da teoria não é de fato uma constante, mas é função da escala de momento presente no problema físico considerado. No caso particular da QCD, é possível mostrar através do cálculo das correções radioativas, que a constante de acoplamento da teoria torna-se pequena quando grandes momentos ou pequenas distâncias são considerados. Este fenômeno é conhecido como liberdade assintótica e é consequência do fato da QCD ser uma teoria de gauge não-abeliana onde os bósons de gauge, ou melhor, os glúons, carregam cor e interagem entre si. O valor de $\alpha_s \equiv g_s^2/4\pi$ em função do quadri-momento arbitrário q quando correções de um loop são consideradas é:

$$\alpha_s(\,q^2\,) \;=\; \frac{\alpha_s(\,\mu^2\,)}{1+(\,\alpha_s(\,\mu^2)/12\pi\,)\,(33-2s)\ln(q^2/\mu^2)}\,, \tag{1.1.18}$$

onde s é o número de diferentes sabores de quarks e vale 6 no caso do modelo padrão. A dedução da expressão acima pode ser encontrada em [23] .

A variável μ com dimensão de massa presente em (1.1.18) é introduzida como consequência do processo de renormalização. Ao calcular diagramas de Feynman que contém loops integrais divergentes aparecem e estas quantidades são feitas temporariamente finitas através de um processo de regularização escolhido convenientemente que pode ser, por exemplo, a introdução de um *cutoff* ultravioleta Λ ou a realização do cálculo na dimensão D = 4 - 2ϵ, e, por fim, é realizada a renormalização que absorve as divergências que foram regularizadas através da redefinição das quantidades físicas presentes na lagrangiana.

A expressão (1.1.18) pode ser simplificada através da introdução de uma nova variável Λ_{QCD}, definida como:

$$\ln \Lambda_{QCD}^2 \equiv \ln \mu^2 - \frac{12\pi}{(33-2s)\,\alpha_s(\,\mu^2\,)}\,, \tag{1.1.19}$$

e, portanto:

$$\alpha_s(\,q^2\,) = \frac{12\pi}{(33-2s)\ln\left(\,q^2/\Lambda_{QCD}^2\right)}\,. \tag{1.1.20}$$

A expressão acima fornece α_s para um valor fixo de q^2 como função de um único parâmetro que é a Λ_{QCD}. Esta constante pode ser medida experimentalmente e seu valor é $\Lambda_{QCD} \approx 450$ MeV. No caso onde seis sabores de quarks são considerados, o denominador da expressão (1.1.20) é positivo e para $q^2 \to \infty$ nós temos $\alpha_s(q^2) \to 0$, este resultado é a expressão da liberdade assintótica da QCD. Ainda, vemos que um novo parâmetro com dimensão de massa, a constante Λ_{QCD}, apareceu na teoria, mesmo sendo a constante de acoplamento g_s adimensional, este fato é conhecido como transmutação dimensional.

1.1.2 Confinamento de cor

Os resultados experimentais sugerem que a QCD possui outra propriedade importante que é o confinamento de cor, ou melhor, que os estados físicos compostos de quarks são sempre estados singleto de cor. O confinamento explica porque quarks livres ou estados, por exemplo, contendo dois quarks não são encontrados na natureza. Todavia, o estado contendo um quark e um anti-quark e o estado contendo três quarks são permitidos e recebem nomes especiais, o estado $q\bar{q}$ de spin inteiro é denominado méson e o estado de spin fracionário qqq é denominado bárion. Um exemplo de um bárion é o próton que é composto por dois quarks u e um quark d e a partícula J/ψ que é um estado ligado dos quarks $c\bar{c}$ é um exemplo de méson. Um resultado importante, que será utilizado com freqüência, pode ser deduzido do fato que um quark transforma-se como um tripleto 3 do grupo SU(3) de cor e um anti-quark transforma-se como um 3* na representação complexa conjugada do grupo, então, um méson transforma-se como uma das representações irredutíveis do produto direto $3 \otimes 3^*$, que pode ser decomposto como:

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8 \quad , \tag{1.1.21}$$

ou seja, um estado composto de um quark e um anti-quark transforma-se como um singleto ou octeto de cor, lembrando que o estado físico assintótico de um méson deve sempre ser um estado singleto de cor.

1.1.3 Modelo de partons

Os resultados experimentais indicam que quando os hádrons, como, por exemplo, o próton, participam de colisões onde há grande momento transferido e têm, portanto, suas estruturas internas testadas, estes comportam-se como se fossem compostos essencialmente de partículas pontuais não interagentes entre si. Estas partículas receberam o nome de partons. Uma das motivações para o desenvolvimento do modelo de partons veio da análise dos dados do espalhamento inelástico profundo $e\,p \;\rightarrow\; e\,X$. Neste tipo de processo ocorre a troca de um fóton ou de um Z^0 virtual que dependendo de sua energia pode desintegrar o próton inicial em outros hádrons. A seção de choque diferencial para este processo onde é realizada a soma sobre X é da forma:

$$\frac{d\sigma}{dE'\,d\Omega} = \left(\frac{\alpha\,\hbar}{2E\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2 \left[2\,W_1\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + W_2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] , \tag{1.1.22}$$

onde E e E' são as energias inicial e final do elétron, respectivamente, θ é o ângulo de espalhamento, Ω é o ângulo sólido, α é constante de estrutura fina eletromagnética e W_1 e W_2 são funções de estrutura que descrevem o vértice hadrônico. Maiores detalhes sobre a dedução desta expressão podem ser encontrados em [25].

Considerando que o quadri-momento inicial do elétron é p_i e o final é p_f e, sendo P e M o quadri-momento e a massa do próton, respectivamente, nós podemos construir a partir destes quadri-momentos os invariantes:

$$\begin{aligned} q^2 &\equiv (p_i - p_f)^2 , \\ \nu &\equiv \frac{q\cdot P}{M} , \end{aligned} \tag{1.1.23}$$

e definir:

$$x \equiv -\frac{q^2}{2\,M\,\nu} . \tag{1.1.24}$$

Os experimentos mostram que para grandes energias as combinações $2\,M\,W_1$ e $\nu\,W_2$, onde W_1 e W_2 são as funções de estrutura introduzidas em (1.1.22), dependem apenas da variável adimensional x definida em (1.1.24), ou melhor,

$$\begin{aligned} 2\,M\,W_1(q^2,x) &\rightarrow F_1(x) \\ \nu\,W_2(q^2,x) &\rightarrow F_2(x) , \end{aligned} \tag{1.1.25}$$

os experimentos mostram também que as funções F_1 e F_2 satisfazem a relação de Callan-Gross:

$$2\,x\,F_1(x) = F_2(x) . \tag{1.1.26}$$

A interpretação dos resultados mostrados em (1.1.25) e (1.1.26) é que o próton é constituído de partículas pontuais livres. A justificativa para este fato é a liberdade assintótica, já que o processo de espalhamento envolve a transferência de grandes momentos, e o fato que

quando partículas pontuais de spin 1/2 são consideradas no espalhamento obtemos o mesmo comportamento das funções de estrutura W_1 e W_2, ou seja, elas também satisfazem a relação de Callan-Gross. O comportamento das funções de estrutura W_1 e W_2 mostrados em (1.1.25) foi previsto inicialmente por Bjorken na década de 60 e o fato delas serem funções apenas de x é denominado *scaling* de Bjorken. Quando outros regimes experimentais são considerados verifica-se que as funções de estrutura W_1 e W_2 dependem não apenas de x mas também de q^2, no entanto, é possível mostrar que a QCD também prevê corretamente esta dependência.

O modelo de partons também pode ser aplicado no caso de colisões hádron-hádron onde há grande momento transferido. Os hádrons, neste cenário, são considerados como uma coleção de partons livres. Ainda, é suposto que o quadri-momento p_a de um parton a pertencente ao hádron A é uma fração do quadri-momento P_A do hádron, ou melhor,

$$p_a = x_a P_A \quad , \tag{1.1.27}$$

com $0 \leq x_a \leq 1$.

Seja $f_{a/A}(x_a)$ a função de distribuição de probabilidade de existir um parton do tipo a no hádron A com uma fração x_a do quadri-momento do hádron. A seção de choque inclusiva para a colisão hádron-hádron $A\,B \longrightarrow c\,X'$, dado que os partons podem ser considerados livres e espalham incoerentemente, é obtida multiplicando a seção de choque $\hat{\sigma}$ do processo de partons $a\,b \longrightarrow c\,X'$ por $dx_a\, f_{a/A}(x_a)$ e $dx_b\, f_{b/B}(x_b)$ e somando sobre todos os tipos de partons a e b e integrando sobre x_a e x_b. O resultado final é:

$$\sigma(AB \longrightarrow cX') = \sum_{a,\,b} \int dx_a\, dx_b\, f_{a/A}(x_a)\, f_{b/B}(x_b)\, \hat{\sigma}(ab \longrightarrow cX') \,. \tag{1.1.28}$$

A expressão da seção de choque para colisões hadrônicas dada acima será usada extensivamente nos próximos capítulos.

1.2 Charmonium

O estado ligado de um quark charme c e de um anti-quark charme $\bar{c}$ é denominado charmonium. Em um estado deste tipo, é possível identificar diferentes escalas de energia que são relevantes para a dinâmica do sistema. Considerando o referencial do centro de massa, onde o quark c e o anti-quark $\bar{c}$ possuem velocidade v, três escalas de energia são importantes: m_c, que é a massa do quark charme; $m_c v$, que é o módulo do típico tri-momento; e $m_c v^2$, que é a típica energia cinética do quark c e do anti-quark $\bar{c}$. As escalas de energia listadas acima possuem papéis diferentes na dinâmica do sistema, a massa do quark pesado m_c determina a escala da energia de repouso do estado ligado; a grandeza $1/m_c v$ determina o tamanho do estado ligado; e $m_c v^2$ é a escala de energia associada a excitações radiais e orbitais de um estado de charmonium. Existe uma quarta escala importante de energia que é associada a excitações de spin, ou seja, quando, por exemplo, o estado ligado passa de um estado tripleto para um estado singleto de spin. A energia desta excitação é da ordem $m_c v^4$. A razão para o valor desta estimativa ficará claro mais adiante e, como será discutido com mais detalhes, esta escala de energia é inferior as escalas citadas anteriormente e terá uma papel secundário na descrição da dinâmica do sistema. A QCD, como discutido no capítulo 1, possui outra escala

de energia importante que é a Λ_{QCD}. Esta escala determina quando efeitos não perturbativos passam a ser importantes.

Para relacionar a ordem de grandeza das escalas de energia listadas acima é necessário realizar uma estimativa do parâmetro v. Atualmente, este cálculo é mais precisamente feito com a utilização de técnicas de QCD na rede. Porém, é possível fazer uma estimativa heurística do valor de v onde é considerado o modelo de potencial do charmonium. O modelo de potencial descreve muito bem o espectro do charmonium, dados de espectroscopia e larguras de decaimento [21], e como será discutido mais adiante a validade deste tipo de modelo nos dá informações úteis sobre a dinâmica dos glúons no interior do méson. O modelo é baseado na observação de que os quarks devem formar um estado ligado do tipo positrônio caso a massa do quark seja suficientemente grande, ou melhor, maior que a escala Λ_{QCD}. O potencial em sua forma mais simples, ou seja, não contendo termos de correção que envolvem, por exemplo, a interação entre os spins do quark c e do anti-quark $\bar{c}$, é da forma:

$$\begin{aligned} r &>> \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \quad : \quad V(r) \sim k\, r\,, \\ r &<< \frac{1}{\Lambda_{QCD}} \quad : \quad V(r) \sim -\frac{4}{3}\,\frac{g_s(1/r)}{r}\,, \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

onde $g_s(Q)$ é a constante de acoplamento da QCD e é função da escala de energia Q. A razão $4/3$ é um fator de cor e k é uma constante.

No caso do charmonium onde $m_c >> \Lambda_{QCD}$ o potencial é essencialmente Coulombiano. A analogia com o positrônio neste caso é realizada trocando os fótons por glúons e a constante de estrutura fina eletromagnética α por α_s e um fator de cor. Em um sistema do tipo positrônio, sendo μ a massa reduzida do sistema elétron-pósitron, o tamanho do estado ligado é dado pelo análogo ao raio de Bohr:

$$a = \frac{1}{\alpha\,\mu}\,, \tag{1.2.2}$$

onde α é a constante eletromagnética de estrutura fina. Os níveis de energia para o positrônio são da forma:

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\,\mu\,\alpha^2\,, \tag{1.2.3}$$

onde n é o número quântico principal.

Para um potencial esfericamente simétrico, $V \sim r^k$, o teorema do virial relaciona os valores esperados da energia cinética e potencial através da relação $2 < T >= k < V >$. No caso do positrônio o potencial é do tipo Coulombiano, e temos:

$$\mu\, v^2 = 2 < T >= -2\,E_1 = \mu\,\alpha^2\,. \tag{1.2.4}$$

A relação dada em (1.2.4) nos permite concluir que $v \sim \alpha$. A analogia entre o charmonium e o positrônio nos permite deduzir fórmulas equivalentes para o charmonium, em particular, é possível estimar por este raciocínio a velocidade típica v de um quark c no interior de um charmonium como sendo:

$$v \sim \alpha_s\left(\frac{1}{r_0}\right) \quad , \quad r_0 \sim \frac{1}{m_c\, v}\,. \tag{1.2.5}$$

A equação (1.2.5) pode ser resolvida auto-consistentemente [15] e nos dá a estimativa $v^2 \approx 0,23$. Esta aproximação é confirmada por cálculos mais elaborados com QCD na rede [21] e nos permite, assim, estimar a diferença entre as escalas de energia m_c, $m_c v$ e $m_c v^2$. É possível, igualmente, obter as seguintes estimativas experimentais para estas grandezas, $m_c \approx 1,5$ GeV, $m_c v \approx 0,9$ GeV e $m_c v^2 \approx 0,5$ GeV [21]. O valor de m_c, neste caso, é estimado como sendo metade da massa medida do estado fundamental do charmonium, a escala $m_c v^2$ é estimada como a energia média da primeira excitação radial e da primeira excitação orbital e a escala $m_c v$ como a média geométrica das duas grandezas anteriores. A outra escala de energia importante é a $\Lambda_{QCD} \approx 450$ MeV [23], o que nos permite concluir em vista dos resultados acima que $\Lambda_{QCD} \approx m_c v^2$.

O fato de m_c ser maior que a constante Λ_{QCD} tem consequências importantes no estudo da produção de charmonium, uma delas é o fato que a constante de acoplamento da QCD calculada na escala de energia m_c é menor que um, $\alpha_s(m_c) \approx 0,24$. A relação (1.2.5), ainda, nos permite concluir que a velocidade típica v do quark pesado decresce com o aumento da massa m do quark. Como a velocidade é proporcional a constante de acoplamento ela decresce assintoticamente com $(1/\ln m)$. Então, para m suficientemente grande, um sistema composto por um quark e por um anti-quark pode ser tratado não relativisticamente. De maneira geral, como a constante de acoplamento decresce com o momento, v é sempre maior ou da ordem de $\alpha_s(m_c)$, e esta relação será importante para os desenvolvimentos posteriores.

Para finalizar este capítulo é interessante descrevermos o espectro do charmonium. A Figura (1.2.1) mostra o espectro medido experimentalmente e é importante notar que diversos estados recebem nomes especiais como, por exemplo, o J/ψ.

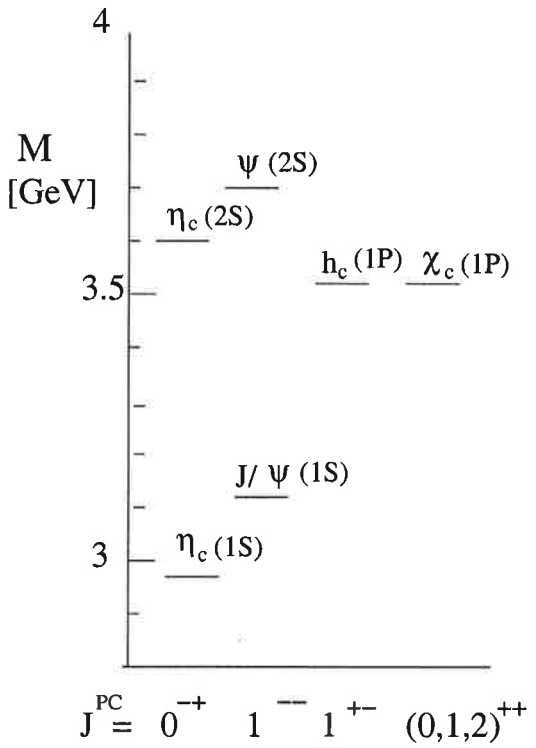


Figura 1.2.1: Espectro do charmonium medido experimentalmente. Na Figura é adotada a convenção $(n\,L)$, onde n é o número quântico principal e L é o momento angular orbital.

Capítulo 2

Produção de Charmonium

Em processos onde ocorre a produção de charmonium estão envolvidas escalas altas de energia-momento, no sentido que a massa do quark charme m_c é maior que o parâmetro Λ_{QCD}. Como discutido no capítulo anterior, o valor da constante de acoplamento da QCD nesta escala de energia é menor que um, $\alpha_s(m_c) \approx 0,24$, então, esperava-se que fosse possível o cálculo da produção de charmonium apenas utilizando métodos perturbativos, no entanto, verifica-se que existem efeitos associados com a dinâmica de estados ligados que invalidam uma aplicação direta da teoria de perturbação.

A utilização de métodos perturbativos é feita neste caso supondo que o processo de produção pode ser fatorizado em duas etapas. Na primeira delas, estão envolvidas distâncias pequenas e grandes momentos, cenário que pode ser tratado perturbativamente, enquanto na segunda, longas distâncias e pequenos momentos quando comparadas com a primeira estão presentes. De maneira geral, a primeira etapa consiste na produção inicial do par $c\bar{c}$ como no exemplo ilustrado na Figura (2.0.1), que esquematicamente esboça a contribuição dominante para a produção de pares $c\bar{c}$ em colisões píons-núcleons. Este tipo de diagrama, no contexto da produção de charmonium, pode ser denominado de curta distância, no sentido que a escala de distância associada a ele é inversamente proporcional a massa do quark charme. O par $c\bar{c}$ inicialmente produzido pode estar em um estado singleto ou octeto de cor, singleto ou tripleto de spin e é possível igualmente ao par possuir momento angular orbital.

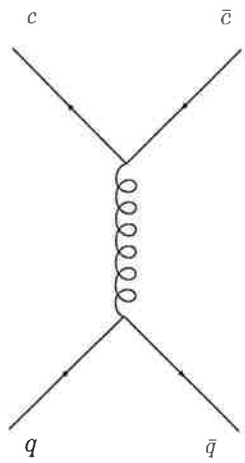


Figura 2.0.1: Produção inicial do par $c\bar{c}$

A segunda etapa consiste na evolução do par $c\bar{c}$ para os estados assintóticos e pode envolver flutuações de cor complexas. As distâncias características envolvidas nesta etapa são da ordem $1/\Lambda_{QCD}$, que é a escala de hadronização, e por isso podemos considerar, relativamente ao primeiro caso, que esta etapa envolve distâncias grandes. No final, o par $c\bar{c}$ inicialmente produzido ou combina-se com quarks leves produzindo mésons ou é mantido ligado produzindo um estado de charmonium.

A idéia de fatorização pode ser formulada em termos mais rigorosos utilizando a QCD. Em provas perturbativas de fatorização, o intuito é demonstrar que em todas as ordens em α_s as divergências colineares e infravermelhas ou cancelam-se ou podem ser absorvidas em grandezas não perturbativas bem definidas. Exemplos destas quantidades não perturbativas são as distribuições de partons, funções de fragmentação e elementos de matriz.

A fatorização no caso da produção hadrônica de charmonium pode ser expressa da seguinte maneira. Sejam A e B dois hádrons com momentos iniciais p_A e p_B, respectivamente. Considere o processo:

$$A(p_A) + B(p_B) \rightarrow c\bar{c}(Q) + X' , \tag{2.0.1}$$

onde Q é a massa invariante do par $c\bar{c}$ produzido na colisão. Posteriormente, o par $c\bar{c}$ irá evoluir para um estado de charmonium H.

A primeira etapa consiste em escrever a seção de choque de produção em uma forma semelhante a dada em (1.1.28):

$$\sigma_{AB\rightarrow HX} = \sum_{a,b} \int d\,x_a\, d\,x_b\, f_{a/A}(x_a)\, f_{b/B}(x_b)\, \hat{\sigma}_{ab\rightarrow HX} , \tag{2.0.2}$$

com $f_{a/A}(x_a)$ e $f_{b/B}(x_b)$ as funções de distribuição dos partons a e b pertencentes aos hádrons A e B, respectivamente, e x_a e x_b a fração do momento do hádron carregada pelos partons a e b. Ainda, $\hat{\sigma}$ é a seção de choque de partons.

Dado que a escala de distância associada a produção inicial do par $c\bar{c}$ é da ordem $1/\,m_c$, e que esta escala é muito menor que o tamanho do estado ligado, que é da ordem $1/m_c v$, é possível realizar a seguinte fatorização:

$$\hat{\sigma}_{ab\rightarrow HX} = \int d\,Q\, \frac{d\hat{\sigma}_{ab\rightarrow c\bar{c}(Q)\,X'}}{dQ}\, \mathcal{F}_{c\bar{c}(Q)\rightarrow HX}(Q) . \tag{2.0.3}$$

A função $d\hat{\sigma}_{ab\rightarrow c\bar{c}(Q)\,X'}/d\,Q$ introduzida em (2.0.3) é a distribuição para a produção de $c\bar{c}$ com massa invariante Q e números quânticos $[c\bar{c}]$. Esta distribuição pode ser calculada em teoria de perturbação com a QCD. A função $\mathcal{F}(Q)$ representa a probabilidade de um par $c\bar{c}$ com massa invariante Q e números quânticos $[c\bar{c}]$ evoluir para um estado de charmonium H. Diferentes escolhas para a função $\mathcal{F}(Q)$ levam a diferentes modelos de produção de charmonium, como o modelo de evaporação de cor e a QCD não relativística [26].

Para alguns processos como, por exemplo, a aniquilação de $e^+\,e^-$ em hádrons, a fatorização foi provada válida em todas as ordens em teoria de perturbação da QCD [23]. No caso da produção de charmonium em colisões hadrônicas não há ainda uma prova rigorosa [15].

Nas próximas seções deste capítulo iremos descrever os modelos utilizados na análise da produção de charmonium que são: o modelo de singleto de cor, o modelo de evaporação de cor e a QCD não relativística.

2.1 Modelo de singleto de cor

No contexto do modelo de singleto de cor (CSM) [3] os estados de charmonium são interpretados como estados ligados não relativísticos. O único papel dos glúons neste modelo é mediar a interação entre o quark c e o anti-quark $\bar{c}$. Por exemplo, o J/ψ é neste caso um estado ligado de um par $c\bar{c}$, no estado singleto de cor e com números quânticos de momento angular e spin dados por $^3S_1$, onde utilizamos a notação espectroscópica $^{2S+1}L_J$. Este estado será denotado por $c\bar{c}_1(^3S_1)$ onde o subscrito fora dos parênteses especificam o estado de cor do par $c\bar{c}$, 1 para singleto e 8 para octeto de cor.

Para o caso da produção de charmonium, o CSM assume que um par $c\bar{c}$ produzido em uma colisão hadrônica irá evoluir para um estado de quarkonium se e somente se o par possuir os mesmos números quânticos de cor e momento angular que o estado de charmonium. Em outras palavras, para produzir um J/ψ o par $c\bar{c}$ deve ser criado em um estado singleto de cor e estar no estado $^3S_1$, caso ele seja produzido em um estado de octeto de cor, por exemplo, ele terá probabilidade nula de formar um J/ψ. No caso do modelo de singleto de cor a seção de choque inclusiva para a produção de J/ψ é da forma:

$$\sigma_{AB\to J/\psi X} = \frac{|R_{J/\psi}(0)|^2}{4\pi} \sum_{a,b} \int d\,x_a\, d\,x_b\, f_{a/A}(x_a)\, f_{b/B}(x_b)\, \hat{\sigma}_{ab\to c\bar{c}_1(^3S_1)X} \ , \qquad (2.1.1)$$

onde $\hat{\sigma}$ é a seção de choque de partons e o par $c\bar{c}$ é produzido em um estado singleto de cor com os números quânticos $^3S_1$. Ainda, $|R(0)_{J/\psi}|^2$ é o quadrado da função de onda do estado J/ψ calculado na origem. A razão para a presença deste fator na expressão para a seção de choque ficará mais claro adiante.

O CSM desconsidera que o processo de produção de charmonium possa ser fatorizado. O estado de charmonium é formado diretamente no que foi chamado anteriormente de primeira etapa do processo. A análise dos dados com este modelo é feita a partir do cálculo da seção de choque $\hat{\sigma}$ dada em (2.1.1) com a utilização de teoria de perturbação da QCD. Por exemplo, no caso da produção de J/ψ apenas alguns diagramas podem ser levados em conta. O decaimento J/ψ em dois glúons é proibido por conservação de conjugação de carga que é uma simetria discreta da QCD, portanto a produção em ordem mais baixa em α_s está relacionada ao decaimento $J/\psi \to g\,g\,g$ por simetria de *crossing*.

O modelo de singleto de cor é um cenário fenomenológico extremamente econômico para o cálculo da produção de charmonium. A seção de choque $\hat{\sigma}$ dada em (2.1.1) é calculada com QCD perturbativa e depende da massa do quark m_c e da constante de acoplamento $\alpha_s(m_c)$. O único outro parâmetro que pode ser tomado como fenomenológico é o fator $|R_{J/\psi}(0)|^2$ proveniente da função de onda. Porém, este fator pode ser extraído de medidas experimentais de taxas de decaimento, o que implica que o CSM prediz a taxa de produção inclusiva para estados de quarkonium com um único parâmetro fenomenológico m_c.

Uma importante predição do modelo é que frações do tipo $\sigma_H/\,\sigma_{J/\psi}$, onde H é um outro estado de charmonium, varie drasticamente em diferentes processos de produção, devido as regras de seleção para os momentos angulares.

2.2 Modelo de evaporação de cor

Um modelo alternativo ao CSM utilizado para a descrição da produção de charmonium é o modelo de evaporação de cor (CEM) [4, 5, 6, 7] . O CEM, diferentemente do CSM, utiliza a hipótese que o processo de produção pode ser fatorizado em duas etapas, onde a primeira etapa consiste na produção do par $c\bar{c}$ e a segunda etapa é a evolução do par para um estado de charmonium. Como discutido anteriormente, esta hipótese é razoável visto que a escala de distância característica da primeira etapa é da ordem $1/m_c$, enquanto que a hadronização dá-se em uma distância muito maior da ordem $1/\Lambda_{QCD}$.

O CEM assume que a probabilidade de um par $c\bar{c}$ produzido em um colisão de alta energia formar um estado de charmonium é completamente independente da cor e do spin do par $c\bar{c}$ inicialmente formado. A hipótese básica é que a troca de glúons entre os quarks e a emissão de glúons com baixa energia destrói a correlação entre a cor e o spin do estado inicial do par $c\bar{c}$ e os números quânticos do estado ligado final de charmonium. Dessa forma, a cor nessa nova abordagem é de fato ignorada, ou seja, o CEM assume um modelo estatístico para o processo de formação do charmonium a partir do par inicial $c\bar{c}$ devido a grande complexidade da troca e emissão de glúons de pequeno momento.

Nos processos de alta energia é possível criar o par $c\bar{c}$ com massa invariante maior que $2m_D$, onde m_D é a massa do méson D mais leve que é composto de um quark charme e um anti-quark leve. O CEM assume que pares criados com massa invariante acima deste limiar de energia possuem probabilidade zero de formar um estado de charmonium, e poderão, por exemplo, formar um par $D\bar{D}$.

O procedimento para a análise dos dados de produção de charmonium utilizando o CEM inicia-se com o cálculo perturbativo da primeira etapa, onde são considerados diagramas como o da Figura (2.0.1) que corresponde a produção inicial do par $c\bar{c}$. Os diagramas são incluídos ordem por ordem em teoria de perturbação independentemente da cor e do spin do par $c\bar{c}$ produzido. Assim, efetua-se o cálculo da seção de choque:

$$\sigma_{fechado} = \int_{2m_c}^{2m_D} dm \, \frac{d\sigma_{c\bar{c}}}{dm} . \tag{2.2.1}$$

Para uma comparação com os dados experimentais precisamos saber qual a fração dos pares $c\bar{c}$ produzidos materializam-se num estado específico de charmonium, digamos J/ψ, *i.e.*

$$\sigma_{J/\psi} = \rho_{J/\psi} \, \sigma_{\text{fechado}} , \tag{2.2.2}$$

onde nas versões mais simples do modelo assume-se que $\rho_{J/\psi}$ é uma constante.

A relação (2.2.2) vale igualmente para os outros estados de charmonium. Em uma primeira aproximação todos os coeficientes ρ_ψ, ρ_{η_c}, ..., que são os parâmetros livres do modelo, são supostos constantes e universais, ou seja, independentes do processo, já que toda a dependência com o processo está contida no cálculo da seção de choque $\sigma_{fechado}$ dada em (2.2.1). Desta forma, as previsões do modelo encontram-se muito bem definidas uma vez que estes parâmetros sejam determinados em uma dada reação. O modelo prevê que razões do tipo σ_ψ/σ_η são constantes e independentes da energia. Outra previsão que pode ser extraída de (2.2.2) é que a dependência com a energia da seção de choque de produção de charmonium é a mesma dependência da seção de choque $\sigma_{fechado}$ calculada em (2.2.1).

O modelo CEM é também econômico do ponto de vista fenomenológico. A seção de choque (2.2.1) pode ser calculada usando QCD perturbativa e é função de m_c, m_D e $\alpha_s(m_c)$. A escolha de $m_{max} = 2m_D$ como o limite superior para a integração em (2.2.1) pode ser relaxado, e é possível entender o limite como um parâmetro fenomenológico. Então, o modelo de evaporação de cor prediz as seções de choque inclusivas para a produção de charmonium como função de m_c, m_{max} e das constantes ρ.

Como pode ser notado pelas descrições dos modelos, o CSM e o CEM fazem afirmações extremamente diferentes sobre o papel da cor e do spin no processo de produção. O CSM considera que há correlação entre a cor, o spin e os outros números quânticos do par $c\bar{c}$ inicialmente formado e os números quânticos do estado de charmonium que será produzido, enquanto que o CEM trata cor e spin de forma estatística.

2.3 QCD não relativística

A produção de charmonium em colisões de alta energia é de difícil entendimento por primeiros princípios, já que, como discutido anteriormente, o processo de produção engloba aspectos não perturbativos da QCD. Porém, devido ao fato da massa do quark charme m_c ser grande quando comparada com a escala Λ_{QCD}, existem dois números pequenos que podem ser explorados no estudo da física de charmonium que são a constante de acoplamento da QCD calculada na escala de energia da massa do quark charme $\alpha_s(m_c) \approx 0,24$ e a velocidade $v^2 \approx 0,3$ típica de um quark charme em um estado ligado no referencial do centro de massa do méson. De uma forma geral, estados ligados de quarkonium pesado são diferentes qualitativamente de outros hádrons dado que eles podem ser tratados com boa aproximação como não relativísticos, e possuem diferentes escalas de energia importantes para dinâmica como m_c, $m_c v$ e $m_c v^2$.

A QCD não relativística (NRQCD) [15] é uma teoria de campos efetiva que reproduz a QCD inteira para momentos da ordem $m_c v$ ou menor. O formalismo da NRQCD utiliza-se da existência dos números pequenos v e $\alpha_s(m_c)$ para separar o efeito das diferentes escalas de energia m_c, $m_c v$, $m_c v^2$ e Λ_{QCD}. A descrição de um quarkonium pela NRQCD exige que a seguinte relação $(mv^2)^2 << (mv)^2 << m^2$ seja verificada no sistema em questão, como esta relação não é verificada no caso de um quarkonium leve o formalismo não pode ser usado para tratar sistemas deste tipo.

A NRQCD utiliza-se da idéia de fatorização do processo de produção de charmonium para, convenientemente, separar as diferentes escalas de energia relevantes ao problema. Para explorar o fato de $\alpha_s(m_c)$ ser um número pequeno é preciso resolver o problema de separar a escala de energia m_c de outras escalas menores como $m_c v$. Para tirar proveito do valor de v^2 é preciso algum modo de organizar efeitos não perturbativos e correções relativísticas de acordo como elas dependem em v. Como será visto mais adiante, o efeito da escala m_c estará contido nas constantes de acoplamento da lagrangiana da NRQCD como uma série em $\alpha_s(m_c)$ que é calculada em teoria de perturbação, enquanto o efeito das escalas de energia $m_c v$, $m_c v^2$ e Λ_{QCD} será fatorado em elementos de matriz que podem ser calculados usando métodos não perturbativos, e podem ser organizados em uma hierarquia de importância de acordo com sua dependência em v. O resultado final para o cálculo da seção de choque de produção de charmonium será uma dupla expansão em $\alpha_s(m_c)$ e v.

O papel da cor e do spin na produção de charmonium no contexto da NRQCD é dife-

rente do considerado pelos modelos CEM e CSM, no entanto, na NRQCD o tratamento da cor engloba aspectos dos dois modelos. Como no modelo de evaporação de cor, um par $c\bar{c}$ inicialmente produzido em qualquer estado de cor e spin tem uma probabilidade não zero de formar um estado arbitrário de charmonium. Porém, como no CSM, esta probabilidade depende fortemente da cor, do spin e do momento angular do par $c\bar{c}$.

A NRQCD é uma teoria de campos efetiva e, portanto, vale uma breve digressão sobre o assunto.

2.3.1 Teoria de campos efetiva

Um problema físico usualmente envolve escalas de energia distintas como, por exemplo, as massas das diferentes partículas presentes em uma dada teoria. Em muitos casos, devido a grande diferença destas escalas, é possível o estudo da dinâmica de baixas energias independentemente dos detalhes da dinâmica de altas energias. A idéia básica é identificar os parâmetros físicos que são grandes quando comparados com a energia relevante ao problema e tomá-los como infinito. Isso, geralmente, providência uma primeira aproximação que pode ser melhorada através da inclusão de correções induzidas por outras escalas de energia como uma perturbação.

De forma geral, as teorias de campos efetiva são o instrumento teórico básico para a descrição da física de baixas energias, onde baixa energia é definida em relação a alguma escala Λ presente no problema. A lagrangiana da teoria efetiva contém apenas os graus de liberdade dos estados com massa m tal que $m < \Lambda$, e os graus de liberdade das partículas pesadas, ou seja, com massa $m > \Lambda$, são integrados da ação. O resultado é que a lagrangiana contém termos não renormalizáveis que, no entanto, podem ser organizados como uma série de potências em $1/\Lambda$. Desta forma, embora a teoria usualmente contenha um número infinito de termos não renormalizáveis, existe um número finito deles em ordem $(1/\Lambda)^n$ e é possível, assim, realizar a renormalização da teoria em uma dada ordem em $1/\Lambda$. Ainda, neste tipo de formalismo, as informações sobre a dinâmica de altas energias estão contidas nas constantes de acoplamento da teoria.

Os princípios de uma teoria de campos efetiva podem ser sumarizados como [27]:

- A dinâmica de baixas energias não depende dos detalhes da dinâmica de altas energias.
- Interações não locais intermediadas por partículas pesadas são substituídas por um conjunto de interações locais (não renormalizáveis) entre as partículas leves.
- As informações sobre a dinâmica de altas energias estão presentes nos valores das constantes de acoplamento e nas simetrias da teoria efetiva.
- A teoria de campos efetiva descreve a dinâmica de baixas energia com uma precisão ϵ que depende dos parâmetros da teoria.

A lagrangiana de uma teoria de campos efetiva arbitrária pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{L} = \sum_i c_i \mathcal{O}_i \,, \tag{2.3.1}$$

onde os c_i's são as constantes de acoplamento da teoria e os $\mathcal{O}_i$'s são operadores que contém apenas os campos leves. É conveniente organizar os operadores $\mathcal{O}_i$ de acordo com a dimensão $[\mathcal{O}_i] = d_i$. Em uma teoria em quatro dimensões eles são classificados como:

- Relevante ($d_i < 4$).
- Marginal ($d_i = 4$).
- Irrelevante ($d_i > 4$).

Os operadores $\mathcal{O}_i$ com $d_i > 4$ são chamados irrelevantes porque quando energias baixas E em relação ao parâmetro Λ são consideradas, estes operadores são suprimidos por fatores de $(E/\Lambda)^{d_i-4}$.

2.3.2 Lagrangiana da NRQCD

As escalas de energia mais importantes para determinar a estrutura e o espectro do charmonium são $m_c v$ e $m_c v^2$; momentos da ordem de m_c têm um papel importante na descrição da produção e aniquilação destes estados, todavia, têm um papel secundário na dinâmica de ligação desses sistemas. Pode-se tomar vantagem deste fato modificando a QCD em duas etapas.

Primeiro, modifica-se a QCD introduzindo um *cutoff* ultravioleta Λ de ordem m_c. O *cutoff* exclui estados de quarks leves e de glúons com momento da ordem ou superior a m_c, quarks com massa m maior que Λ e estados relativísticos dos quarks charme. Sabe-se que os estados relativísticos que estão sendo excluídos têm efeitos importantes sobre a física de baixas energias, porém, interações envolvendo estados intermediários relativísticos são altamente virtuais e portanto não podem propagar por grandes distâncias. Assim, é possível compensar esse efeito adicionado novas interações locais na lagrangiana, como é feito em teorias de campos efetivas. Em ordem mais baixa em $1/m_c$ estas interações são idênticas as já presentes na lagrangiana e o único efeito das correções é a redefinição de massas e cargas. Ao considerar ordens maiores é necessário a inserção de novos termos não renormalizáveis na lagrangiana que corrigem a dinâmica ordem por ordem em $1/m_c$. Nessa formulação de *cutoff* os efeitos dos estados relativísticos são incorporados nas constantes de acoplamento e contribuições relativísticas e não relativísticas são automaticamente separadas.

A segunda modificação consiste na realização de uma transformação de Foldy-Wouthuysen-Tani (Apêndice B) que desacopla os graus de liberdade do quark e do anti-quark charme. Este desacoplamento de partícula e anti-partícula é característico de teorias não relativísticas como a NRQCD.

Introduzindo estas modificações, a lagrangiana da NRQCD toma a forma:

$$\mathcal{L}_{NRQCD} = \mathcal{L}_{leve} + \mathcal{L}_{pesado} + \delta\mathcal{L}_{bilinear} \,. \tag{2.3.2}$$

Os glúons e os quark leves são descritos pela lagrangiana usual da QCD dada em (1.1.15):

$$\mathcal{L}_{leve} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(G_{\mu\nu}\,G^{\mu\nu}) + \sum_j \bar{q}_j\, i\,\gamma^\mu\, D_\mu\, q_j \;, \tag{2.3.3}$$

onde a soma em j estende-se sobre o conjunto de quarks *up, down* e *strange*, e a massas dos quarks foram negligenciadas. Ainda, $G_{\mu\nu}$ é o tensor de intensidade dos glúons dado explicitamente em (1.1.14) e D^μ é a derivada covariante definida em (1.1.7).

No contexto da NRQCD o quark charme c e o anti-quark charme $\bar{c}$ são descritos por espinores de Pauli. Seja ψ um espinor de Pauli que aniquila um quark c e seja χ um espinor de Pauli que cria um anti-quark $\bar{c}$, com a utilização destes campos podemos escrever $\mathcal{L}_{pesado}$ como:

$$\mathcal{L}_{pesado} = \psi^\dagger \left(iD_t + \frac{\mathbf{D}^2}{2m_c} \right) \psi + \chi^\dagger \left(iD_t - \frac{\mathbf{D}^2}{2m_c} \right) \chi \,, \tag{2.3.4}$$

onde D_t e $\mathbf{D}$ são as componentes temporal e espacial da derivada covariante, respectivamente. Os índices de cor e spin foram suprimidos na expressão acima.

Para considerar efeitos relativísticos que estão presentes na QCD é necessário a introdução de termos de correção na lagrangiana da NRQCD. Até ordem $1/m_c^3$ estes termos estão dados abaixo em $\delta\mathcal{L}_{bilinear}$. A dedução da expressão da lagrangiana $\delta\mathcal{L}_{bilinear}$ e uma outra motivação para a forma de $\mathcal{L}_{pesado}$ estão no Apêndice B.

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{bilinear} &= \frac{c_1}{8m^3} \left[\psi^\dagger (\mathbf{D}^2)^2 \psi - \chi^\dagger (\mathbf{D}^2)^2 \chi \right] \\
&+ \frac{c_2}{8m^2} \left[\psi^\dagger (\mathbf{D} \cdot g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \psi + \chi^\dagger (\mathbf{D} \cdot g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) \chi \right] \\
&+ \frac{c_3}{8m^2} \left[\psi^\dagger (i\mathbf{D} \times g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \times i\mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \psi + \chi^\dagger (i\mathbf{D} \times g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \times i\mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi \right] \\
&+ \frac{c_4}{2m} \left[\psi^\dagger (g\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \psi - \chi^\dagger (g\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \chi \right] \,,
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

na expressão acima os coeficientes c_i são adimensionais e os campos cromoelétrico $\mathbf{E}$ e cromomagnético $\mathbf{B}$ são definidos a partir das derivadas covariantes como:

$$\begin{aligned}
[D_t, \mathbf{D}] &\equiv i\,\alpha_s \mathbf{E} \,, \\
[D_i, D_j] &\equiv -i\,\alpha_s\, \epsilon_{ijk} B^k \,.
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

A lagrangiana da NRQCD deve conter todas as simetrias presentes na QCD. Uma das simetrias discretas da QCD é a conjugação de carga, e a existência desta simetria explica porque termos que envolvem ψ devem ter um termo corresponde para χ com o mesmo coeficiente c_i. Ainda, a lagrangiana da NRQCD não pode conter termos que possuem apenas os campos ψ e χ. Um operador deste tipo cria ou aniquila um par $c\bar{c}$ e, portanto, por conservação de energia é preciso criar glúons ou quarks leves com momento da ordem m_c, porém, tais estados são excluídos pelo *cutoff* Λ. Todavia, como será discutido adiante, a produção e aniquilação de charmonium pode ser bem descrita com a adição de operadores de 4-férmions a lagrangiana.

Os coeficientes c_i em (2.3.5) são escolhidos como função de α_s de tal forma que os observáveis físicos em baixas energias da NRQCD sejam os mesmos da QCD inteira. Os coeficientes são determinados, portanto, por condições de *matching* conforme será discutido adiante.

2.3.3 Magnitude dos operadores da NRQCD

Em principio, para a NRQCD descrever todos os efeitos relativísticos presentes na QCD seria necessário a inclusão de um número infinito de termos de correção na lagrangiana da NRQCD. Porém, na prática, apenas um número finito deles é suficiente para a obtenção de um resultado com uma dada precisão. Para isto, é necessário desenvolver algum critério quantitativo para determinar a importância de cada termo e saber onde a série pode ser truncada. Nesta seção mostraremos que a importância dos operadores presentes na NRQCD pode ser estimada em função da velocidade típica v de um quark charme no referencial do centro de massa do méson e da massa do quark charme m_c. As estimativas serão calculadas no gauge de Coulomb e estão mostradas na Tabela (2.1).

Operador	Estimativa	Descrição
α_s	v	$\alpha_s \equiv g_s^2/4\pi$
ψ	$(m_c v)^{3/2}$	campo do quark (aniquilação)
χ	$(m_c v)^{3/2}$	campo do anti-quark (criação)
D_t	$m_c v^2$	derivada covariante temporal
$\mathbf{D}$	$m_c v$	derivada covariante espacial
$g_s\Phi$	$m_c v^2$	potencial escalar (gauge de Coulomb)
$g_s\mathbf{A}$	$m_c v^3$	potencial vetor (gauge de Coulomb)
$g_s\mathbf{E}$	$m_c^2 v^3$	campo cromoelétrico
$g_s\mathbf{B}$	$m_c^2 v^4$	campo cromomagnético

Tabela 2.1: Estimativas da magnitude dos operadores da NRQCD para elementos de matriz entre estados de charmonium em termos da massa do quark pesado m_c e da velocidade típica do quark charme v no referencial do centro de massa do méson.

A Tabela (2.1) contém todos os operadores que compõem a NRQCD. As estimativas mostradas valem para elementos de matriz entre estados de charmonium $|H>$ cuja posição é localizada em uma região $\sim 1/m_c v$ ou menor, e supondo que os estados são normalizados na forma $< H \mid H >= 1$. Abaixo segue como as estimativas dadas acima foram obtidas.

Considere o operador número de quarks charme:

$$N = \int d^3x\, \psi^\dagger(x)\, \psi(x)\,. \tag{2.3.7}$$

Ao calcular o elemento de matriz abaixo, esperamos:

$$< H| \int d^3x\, \psi^\dagger(x)\, \psi(x)\, |H> \approx 1\,. \tag{2.3.8}$$

No caso de um estado de charmonium, temos:

$$\int d^3x \sim \frac{1}{(m_c v)^3}\,, \tag{2.3.9}$$

o que implica, realizando a definição $p \equiv m_c v$,

$$\psi^\dagger\, \psi \sim p^3\,, \tag{2.3.10}$$

e, portanto,

$$\psi \sim p^{3/2} . \tag{2.3.11}$$

Um raciocínio análogo permite obter a estimativa do operador χ presente na Tabela (2.1). Considere, agora, o operador de energia cinética:

$$\int d^3x \, \psi^\dagger(x) \left(\frac{\mathbf{D}^2}{2m_c}\right) \psi(x) . \tag{2.3.12}$$

O valor esperado deste operador em um estado de charmonium é $T = \frac{1}{2} m_c v^2$. Este resultado nos permite fazer uma estimativa para a derivada covariante espacial, que é:

$$\mathbf{D} \sim (2m_c T)^{1/2} \sim p . \tag{2.3.13}$$

As equações de movimento podem ser usadas para realizar a estimativa dos outros operadores. Em ordem mais baixa em $1/m_c$ a equação de movimento para o campo ψ é extraída da lagrangiana dada em (2.3.4), e é:

$$\left(iD_t + \frac{\mathbf{D}^2}{2m_c}\right) \psi = 0 , \tag{2.3.14}$$

e, temos:

$$D_t \sim \frac{\mathbf{D}^2}{2m_c} \sim T . \tag{2.3.15}$$

As estimativas dos outros operadores será feita no gauge de Coulomb. Neste gauge, como será mostrado abaixo, a estimativa para o potencial vetor $\mathbf{A}$ é menor que a estimativa para o potencial escalar Φ. A equação (2.3.14) pode ser escrita na forma:

$$\left(i\,\partial_t - g_s\,\Phi(x) + \frac{\boldsymbol{\nabla}^2}{2m_c} \right) \psi \approx 0 , \tag{2.3.16}$$

onde o potencial vetor $\mathbf{A}$ foi negligenciado.

O campo ψ é não relativístico e a equação acima é equivalente a uma equação de Schrödinger. O termo $g_s\Phi$ é o termo de energia potencial que irá balancear a energia cinética para o caso de um estado ligado, desta forma temos:

$$g_s\,\Phi \sim T . \tag{2.3.17}$$

O resultado acima pode ser checado ao considerar a equação de movimento para Φ obtido da lagrangiana da NRQCD dada em (2.3.4) e em (2.3.3), novamente negligenciando o potencial vetor, temos:

$$\boldsymbol{\nabla}^2 g_s\,\Phi = -g_s^2\,\psi^\dagger(x)\,\psi(x) , \tag{2.3.18}$$

e, portanto:

$$g_s\,\Phi \sim \frac{1}{p^2}\,g_s^2\,p^3 \sim g_s^2\,p , \tag{2.3.19}$$

em vista da estimativa $\alpha_s \sim v$ recuperamos (2.3.17) de (2.3.19).

A equação de movimento para o potencial vetor $\mathbf{A}$ vale:

$$(\partial_t^2 - \nabla^2)\, g_s\, \mathbf{A} \;=\; \frac{g_s^2}{m_c}\psi^\dagger \nabla \psi \;+\; g_s\, \Phi \nabla g_s\, \Phi + \ldots \;. \tag{2.3.20}$$

Utilizando as estimativas dos operadores feitas anteriormente, obtemos:

$$g_s \mathbf{A}(x) \;\sim\; \frac{1}{p^2}\left(\frac{g_s^2}{m_c}p^4 + pT^2\right) \;\sim\; vT\,, \tag{2.3.21}$$

que é menor que o potencial escalar Φ, como adiantado, por uma fator de v.

Os campos cromoelétrico $\mathbf{E}$ e cromomagnético $\mathbf{B}$ foram definidos a partir das derivadas covariantes em (2.3.6). Escrevendo as expressões explicitamente, nós temos:

$$\begin{aligned} g_s\, \mathbf{E} &= -\nabla\, g_s \Phi + \ldots \sim pT\,, \\ g_s \mathbf{B} &= \nabla \times g_s \mathbf{A} + \ldots \sim T^2\,. \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

Desta forma obtemos todas as estimativas que estão presentes na Tabela (3.1). O gauge de Coulomb foi escolhido porque ele não contém estados com norma negativa, o que permite realizar uma expansão de Fock para o estado de charmonium, como será visto na próxima seção.

As estimativas dos operados mostrados na Tabela (3.1) mostram que $\delta\mathcal{L}_{bilinear}$ dada em (2.3.5) dá uma contribuição que é suprimida por v^2 em relação a contribuição de $\mathcal{L}_{pesado}$ dada em (2.3.4). Então, caso um erro da ordem v^2 seja suficiente, os cálculos com a NRQCD podem ser feitos apenas com a lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{leve} + \mathcal{L}_{pesado}$, dadas em (2.3.3) e (2.3.4), respectivamente.

2.3.4 Charmonium na NRQCD

A NRQCD descreve os estados de charmonium como uma expansão de Fock no gauge de Coulomb, por exemplo, um estado de charmonium (onda-S) possui a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned} |\,\psi> \;&=\; O(1)\,|\,c\bar{c}_1\,(^3S_1)> \;+ O(v)\,|\,c\bar{c}_8\,(^3P_J)\,g> \\ &+\; O(v^2)\,|\,c\bar{c}_8\,(^1S_0)\,g> \;+ O(v^2)\,|\,c\bar{c}_{1,8}\,(^3S_1)\,gg> \\ &+\; O(v^2)\,|\,c\bar{c}_{1,8}\,(^3D_J)\,gg> \;+ \ldots, \end{aligned}$$

o símbolo g na expressão acima representa um glúon e os subscritos fora dos colchetes indicam se o par $c\bar{c}$ está em um estado singleto 1 ou octeto 8 de cor.

Um estado de Fock do tipo $|c\bar{c}g>$ representa um estado onde há um glúon dinâmico. A probabilidade de existência de um glúon nestas condições pode ser estimada considerando a mudança de energia de um estado de charmonium $|H>$ quando a componente $|c\bar{c}g>$ é

adicionada a expansão de Fock. No gauge de Coulomb, o termo de ordem mais baixa em v que conecta o estado dominante $|c\bar{c}>$ a estados do tipo $|c\bar{c}g>$ é o termo que envolve o potencial vetor $\mathbf{A}$ e está presente na lagrangiana $\mathcal{L}_{pesado}$ dada em (2.3.4). Desta forma, em ordem mais baixa em v, nós temos:

$$\Delta E = -\frac{1}{m_c} < H | \int d^3x \, i \, \alpha_s \, \mathbf{A} \cdot \psi^\dagger \, \boldsymbol{\nabla} \psi \, | H > . \tag{2.3.23}$$

Usando os resultados da Tabela (3.1) e considerando (2.3.9), nós obtemos $\Delta E \sim m_c v^4$. Esta variação de energia pode ser escrita como o produto da probabilidade $P_{c\bar{c}g}$ de existência do estado $|c\bar{c}g>$ multiplicado pela energia deste estado. No caso de um glúon dinâmico com momento k da ordem $m_c v$, a energia do estado $|c\bar{c}g>$ é praticamente a energia do glúon e neste caso $P_{c\bar{c}g} \sim v^3$. No caso de glúons com energias da ordem $m_c v^2$ ou menor, a energia do estado é de ordem $m_c v^2$ e obtemos a estimativa $P_{c\bar{c}g} \sim v^2$. Os resultados acima mostram que estados de Fock do tipo $|c\bar{c}g>$ são suprimidos por no mínimo um fator de v^2 na probabilidade.

A estimativa da probabilidade feita acima supôs que o par $c\bar{c}$ no estado $|c\bar{c}g>$ possui o mesmo spin do par $c\bar{c}$ no estado dominante $|c\bar{c}>$. Caso isto não ocorra, o operador $\mathbf{A} \cdot \psi^\dagger \, \boldsymbol{\nabla} \psi$ em (2.3.23) deve ser substituído pelo operador $\psi^\dagger \, \alpha_s \, \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, \psi$ presente em $\delta\mathcal{L}_{bilinear}$ dada em (2.3.5) para a obtenção de um elemento de matriz não nulo. Porém, usando os resultados da Tabela (3.1), nós obtemos novamente a estimativa $\Delta E \sim m_c v^4$ e, portanto, derivamos regras semelhantes para a probabilidade.

O fato da probabilidade da existência de um estado com glúons dinâmicos ser suprimida por no mínimo um fator de v^2, explica o fato da física de charmonium ser bem descrita por um modelo de potencial onde o quark c e o anti-quark $\bar{c}$ são mantidos ligados por um potencial instantâneo. O modelo de potencial que é um modelo puramente fenomenológico é muito mais simples que uma descrição do sistema baseada em uma teoria de campos como a QCD ou a NRQCD e em muitas situações ele pode ser aplicado com sucesso.

Outra característica importante de um charmonium descrito pelo formalismo da NRQCD é a sua aproximada independência do spin. Este fato é uma consequência imediata da lagrangiana da NRQCD, já que a lagrangiana dominante em v é a $\mathcal{L}_{pesado}$ dada em (2.3.4) que é completamente independente do estado de spin do quark c e do anti-quark $\bar{c}$. A dependência com o spin aparece primeiramente na lagrangiana $\delta\mathcal{L}_{bilinear}$ dada em (2.3.5) nos termos que contém matrizes de Pauli. Porém, como foi visto, estes termos introduzem correções que são suprimidas por um fator de v^2 em relação aos termos dominantes. Assim, as excitações de spin devem ter energias menores do que as excitações radiais e orbitais, sendo a razão de ordem v^2. A propriedade descrita acima é confirmada por medições experimentais [15] para a energia de excitações de spin, o que reforça a nossa confidência em tratar o charmonium como um sistema não-relativístico.

O momento angular total J, a paridade P e a conjugação de carga C, são grandezas conservadas pela QCD e, portanto, também pela NRQCD. Então, os auto estados de energia H do charmonium podem ser indexados pelos números quânticos J^{PC}, como mostrado na Figura (1.2.1). Algumas considerações sobre o estado do par $c\bar{c}$ em $|c\bar{c}>$ e $|c\bar{c}g>$ podem ser feitas. Na discussão abaixo será utilizada a notação espectroscópica $^{2S+1}L_J$, onde $S = 0, 1$ representa o spin do par e $L = 0, 1, 2, \ldots$(S, P, D, ...) é o momento angular orbital. O par no estado $|c\bar{c}>$ deve estar obrigatoriamente em um estado de singleto de cor e possui paridade $P = (-1)^{L+1}$ e conjugação de carga $C = (-1)^{L+S}$. Agora, considere um estado do

tipo $|c\bar{c}g>$ que inclui um glúon dinâmico. Apesar do fato de que a dinâmica do glúon ser não trivial, a NRQCD permite tirar algumas conclusões sobre os números quânticos do par $c\bar{c}$ neste estado. O par deve obrigatoriamente estar em um estado de octeto de cor. Ainda, como o termo de ordem mais baixa que acopla o estado de Fock dominante $|c\bar{c}>$ ao estado $|c\bar{c}g>$ é a parte de dipolo elétrico do operador dado em (2.3.23), nós podemos concluir que se o par no estado dominante possuir momento angular L, os estados do tipo $|c\bar{c}g>$ irão ter a probabilidade suprima por v^2 se e somente se o par $c\bar{c}$ neste estado possuir momento angular orbital $L+1$ ou $L-1$. Por exemplo, se no estado dominante $|c\bar{c}>$ o par estiver no estado ${}^3S_1$, então o estado de Fock do tipo $|c\bar{c}g>$ possui probabilidade de v^2 em relação ao estado dominante se e somente se o par estiver em um estado de octeto de cor e com ${}^3P_0$, ou ${}^3P_1$, ou ${}^3P_2$.

Análises semelhantes as realizadas acima podem ser feitas para estados com um número maior de glúons dinâmicos. De uma maneira geral, a probabilidade destes estados é suprimida por potências maiores da velocidade v.

2.3.5 Produção de charmonium na NRQCD

Nesta seção será apresentada a fórmula geral utilizada para o cálculo da produção de charmonium em processos de alta energia com a NRQCD. Como será visto, a NRQCD incorpora a idéia de fatorização e, como consequência, a seção de choque de produção será escrita como uma soma de termos onde cada termo possuirá um coeficiente de curta distância, que pode ser calculado com o uso de teoria de perturbação, multiplicado por um fator de longa distância que aparecerá na forma de um elemento de matriz.

Considere o processo $1\ 2 \rightarrow H(P,\lambda)\,X$ onde ocorre a produção de um estado de charmonium $H(P,\lambda)$ com quadri-momento P e polarização λ. Suponha que 1, 2, e X possuem os quadri-momentos k_1, k_2 e k_X, respectivamente. A seção de choque diferencial para este processo, somada sobre os estados finais X, vale:

$$\sum_X d\sigma_{1\,2\rightarrow H(P,\lambda)\,X} = \frac{1}{2E_1\,2E_2\,|v_1-v_2|}\times \frac{d^3P}{(2\pi)^3\,2E_P}\sum_X (2\pi)^4\,\delta^4(k_1+k_2-P-k_X)\,|\,\mathcal{T}_{1\,2\rightarrow H(P,\lambda)\,X}\,|^2\,, \quad (2.3.24)$$

onde a soma sobre X no lado direito da igualdade inclui a integração sobre o espaço de fase das partículas adicionais; E_1 e v_1 são a energia e a velocidade da partícula 1, respectivamente, e a mesma notação é usada para 2 e X; e $\mathcal{T}$ é amplitude do processo de produção.

A produção de charmonium ocorre em processos onde há transferência de momento da ordem m_c ou maior e, portanto, como discutido anteriormente, a produção inicial do par $c\bar{c}$ que irá formar o estado ligado ocorre a distâncias pequenas da ordem $1/m_c$ ou menor. A formação do estado de charmonium H a partir do par $c\bar{c}$ ocorre a distâncias muito maiores da ordem $1/m_c v$. A NRQCD explora esta diferença entre as escalas de distância nos cálculos da produção de charmonium, a parte que envolve distâncias pequenas corresponde na NRQCD a criação inicial do par $c\bar{c}$ em um ponto do espaço-tempo e será incorporada nos valores dos coeficientes dos operadores. A parte de longa distância que descreve a evolução do par $c\bar{c}$ para o futuro assintótico, que inclui um estado de charmonium H, será dada por elementos

de matriz de operadores de 4-férmions que serão incluídos na lagrangiana da NRQCD. No formalismo da NRQCD a seção de choque diferencial dada em (2.3.24) é escrita, portanto, como:

$$\sum_X d\sigma_{1\,2\to H(P,\lambda)\,X} = \frac{1}{2E_1\,2E_2\,|v_1 - v_2|} \times \frac{d^3P}{(2\pi)^3\,2E_P} \sum_{m\,n} C_{mn}\,(P, k_1, k_2) < 0\,|\,\mathcal{O}^{H(\lambda)}_{mn}\,|\,0 > , \qquad (2.3.25)$$

onde os coeficientes C_{mn} são funções das variáveis cinemáticas P, k_1 e k_2, mais são independentes do estado de charmonium H produzido. Caso 1 e 2 sejam léptons a seção de choque é dada diretamente por (2.3.25), no caso de uma colisão hádron-hádron 1 e 2 são partons e é necessário a inclusão das funções de distribuição.

A NRQCD é uma teoria de campos efetivas e, portanto, a parte não perturbativa ou de longa distância da QCD pode ser descrita igualmente bem pela NRQCD. Ainda, como em uma teoria efetiva, os coeficientes dos operadores da NRQCD contém informações sobre a dinâmica de altas energias, no entanto, eles são insensíveis a dinâmica de baixas energias. Desta forma, a expansão perturbativa da QCD e da NRQCD devem produzir descrições equivalentes da dinâmica de baixas energias, e é possível explorar a equivalência entre as duas séries como artifício para o cálculo dos coeficientes C_{mn} introduzidos em (2.3.25) impondo uma condição de *matching*.

Dado que o estado final inclui um charmonium, os operadores de 4-férmions que aparecem na seção de choque de produção devem incluir um projetor no espaço de estados que no futuro assintótico contém um charmonium mais as partículas adicionais. A forma geral dos operadores de 4-férmions é:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^H_{mn} &= \chi^\dagger\,\mathcal{K}'^\dagger_m\,\psi \left(\sum_X |H + X >< H + X| \right) \psi^\dagger\,\mathcal{K}_n\,\chi\,, \\ &= \chi^\dagger\,\mathcal{K}'^\dagger_m\,\psi\,\mathcal{P}_H\,\psi^\dagger\,\mathcal{K}_n\,\chi\,. \end{aligned} \qquad (2.3.26)$$

onde a soma em X estende-se sobre todas as partículas adicionais cuja a massa de repouso é inferior ao *cutoff* ultravioleta Λ da NRQCD. Na segunda linha o projetor foi escrito na forma compacta $\mathcal{P}_H$ que será utilizada daqui por diante. Os fatores $\mathcal{K}_n$ e $\mathcal{K}'^\dagger_m$ são produtos de matrizes de cor ($\mathbb{1}$ ou T^a), matrizes de spin ($\mathbb{1}$ ou σ^i) e um polinômio na derivada covariante $\mathbf{D}$ ou nos outros operadores da NRQCD listados na Tabela (2.1). Os subscritos m, n referem-se a cor e assumem os valores 1 no caso singleto e 8 no caso octeto. Os estados são normalizados como:

$$< H(\mathbf{P}', \lambda')\,|\,H(\mathbf{P}, \lambda) > \;=\; 2\,E_P\,(2\pi)^3\,\delta^3(\mathbf{P}' - \mathbf{P})\,\delta_{\lambda\lambda'}\,, \qquad (2.3.27)$$

onde $E_P = \sqrt{M_H^2 + \mathbf{P}^2}$.

Para enunciar a condição de *matching* primeiro realizaremos algumas definições. Iremos representar um estado de um par $c\bar{c}$ com quadri-momento total P, tri-momento $\pm\mathbf{q}$ em relação ao referencial do centro de massa e que possuam spin e cor especificados pelos espinores ξ e η

por $c\bar{c}(\mathbf{q}, \xi, \eta)$. Os espinores ξ e η são dois espinores de Pauli com um índice de cor. Usando a notação concisa:

$$\begin{aligned} c\bar{c} &\equiv c\bar{c}\,(\mathbf{q},\, \xi,\, \eta)\,, \\ c\bar{c}' &\equiv c\bar{c}\,(\mathbf{q}',\, \xi',\, \eta')\,, \end{aligned} \tag{2.3.28}$$

podemos impor a condição de *matching* nas amplitudes como:

$$\sum_X (2\pi)^4\, \delta^4(k_1 + k_2 - P - k_x)\, \mathcal{T}^*_{12\to c\bar{c}'+X}\, \mathcal{T}_{12\to c\bar{c}+X} = \sum_{mn} C_{mn}(P, k_1, k_2) < \chi^\dagger\, \mathcal{K}'^\dagger_m\, \psi\, \mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}}\, \psi^\dagger\, \mathcal{K}_n\, \chi > , \tag{2.3.29}$$

onde $\mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}}$ na expressão acima é da forma:

$$\mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}} = \sum_X |c\bar{c}(\mathbf{q}',\, \xi',\, \eta') + X >< c\bar{c}(\mathbf{q},\, \xi,\, \eta) + X\,| \,, \tag{2.3.30}$$

e os estados são normalizados como:

$$< c\,(\mathbf{q}_1',\, \xi')\, \bar{c}\,(\mathbf{q}_2',\, \eta') \mid c\,(\mathbf{q}_1,\, \xi)\, \bar{c}\,(\mathbf{q}_2,\, \eta) > = 4\, E_{q1}\, E_{q2}\, (2\pi)^6\, \delta^3(\mathbf{q}_1' - \mathbf{q}_1)\, \delta^3(\mathbf{q}_2' - \mathbf{q}_2)\, \xi^\dagger\, \xi'\, \eta'^\dagger\, \eta \,, \tag{2.3.31}$$

onde os espinores ξ e η são normalizados na forma $\xi^\dagger\, \xi = \eta^\dagger\, \eta = 1$, e igualmente para ξ' e η'. Em expressões do tipo $\xi^\dagger\xi$ os índices de cor e spin foram suprimidos e estão contraídos.

O lado esquerdo da condição de *matching* dada em (2.3.29) é calculado com teoria de perturbação da QCD e é expandido em uma série de Taylor em $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$. Os elementos de matriz no lado direito são calculados usando teoria de perturbação da NRQCD e são igualmente expandidos em uma série em $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$. Os coeficientes C_{mn} são obtidos um a um como polinômios em $\alpha_s(m_c)$ igualando os termos com os mesmos operadores do lado direito com os do lado esquerdo da condição de *matching*. Os coeficientes obtidos desta maneira são substituídos em (2.3.25) e a seção de choque de produção irá depender apenas dos valores dos elementos de matriz. Abaixo será mostrada a forma explícita de alguns operadores $\mathcal{O}_n^H$ que serão úteis no próximo capítulo. Os operadores com dimensão seis são:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_1^H(^1S_0) &= 4\, m_c\, \chi^\dagger\, \psi\, \mathcal{P}_H\, \psi^\dagger\, \chi \,, \\ \mathcal{O}_1^H(^3S_1) &= 4\, m_c\, \chi^\dagger\, \sigma^i\, \psi\, \mathcal{P}_H\, \psi^\dagger\, \sigma^i\, \chi \,, \\ \mathcal{O}_8^H(^1S_0) &= 4\, m_c\, \chi^\dagger\, T^a\, \psi\, \mathcal{P}_H\, \psi^\dagger\, T^a\, \chi \,, \\ \mathcal{O}_8^H(^3S_1) &= 4\, m_c\, \chi^\dagger\, \sigma^i\, T^a\, \psi\, \mathcal{P}_H\, \psi^\dagger\, \sigma^i\, T^a\, \chi \,. \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

Alguns operadores de dimensão oito úteis são:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}_1^H(^1P_1) &= 4\,m_c\,\chi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^i\right)\psi\,\mathcal{P}_H\,\psi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^i\right)\chi\,,\\
\mathcal{O}_1^H(^3P_0) &= 4\,m_c\,\chi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\psi\,\mathcal{P}_H\,\psi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)\chi\,,\\
\mathcal{O}_8^H(^1P_1) &= 4\,m_c\,\chi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^i\right)T^a\,\psi\,\mathcal{P}_H\,\psi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^i\right)T^a\,\chi\,,\\
\mathcal{O}_8^H(^3P_0) &= 4\,m_c\,\chi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)T^a\,\psi\,\mathcal{P}_H\,\psi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right)T^a\,\chi\,,
\end{aligned}
\tag{2.3.33}
$$

onde $\psi^\dagger\,\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\,\chi \equiv \psi^\dagger\,\mathbf{D}\,\chi - (\mathbf{D}\,\psi)^\dagger\,\chi$.

Para uma descrição completa do processo de produção seria necessário a inclusão de infinitos elementos de matriz em (2.3.25). Todavia, as estimativas dadas na Tabela (2.1) nos mostram que a contribuição de operadores $\mathcal{O}^H$ de dimensões maiores são suprimidos por potências adicionais da velocidade v. Desta forma, a seção de choque em (2.3.25) é uma dupla expansão em α_s e v, e a série pode ser truncada para uma dada precisão, este é o procedimento adotado na prática.

Os elementos de matriz poderiam teoricamente ser calculados por primeiros princípios, no entanto, o cálculo é não perturbativo e atualmente consegue-se o cálculo de apenas alguns deles com a utilização de NRQCD na rede. Portanto, o que é feito é que os elementos de matriz são considerados parâmetros fenomenológicos e são extraídos do ajuste a dados experimentais. Como um modelo fenomenológico para o cálculo da produção de charmonium a NRQCD é muito menos econômica que os modelos CEM e CSM. Para cada estado de charmonium existem vários elementos de matriz com importância fenomenológica. Para a produção de J/ψ, por exemplo, o maior elemento de matriz é $< \mathcal{O}_1^{J/\psi}(^3S_1) >$ que escala como v^3, porém, existem outros elementos de matriz que são também importantes $< \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^1S_0) >$, $< \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^3S_1) >$ e $< \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^3P_j) >$ apesar de serem suprimidos por v^6, v^7 e v^7, respectivamente. Neste caso, em uma análise até ordem v^7 teríamos quatro parâmetros livres, enquanto que o CEM teria apenas um, a constante $\rho_{J/\psi}$ definida em (2.2.2).

Capítulo 3

Cálculo da produção de charmonium

3.1 Análise com o CEM

Para obter a taxa de produção de charmonium com o modelo de evaporação de cor é preciso calcular a seção de choque $\sigma_{fechado}$ dada em (2.2.1). No caso específico de hadroprodução, os processos de partons que contribuem para a produção inicial do par $c\bar{c}$ em ordem mais baixa em α_s são:

$$\begin{aligned} q\bar{q} &\rightarrow c\bar{c}\,, \\ gg &\rightarrow c\bar{c}\,, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

onde q designa um quark e g um glúon. Os diagramas correspondentes são:

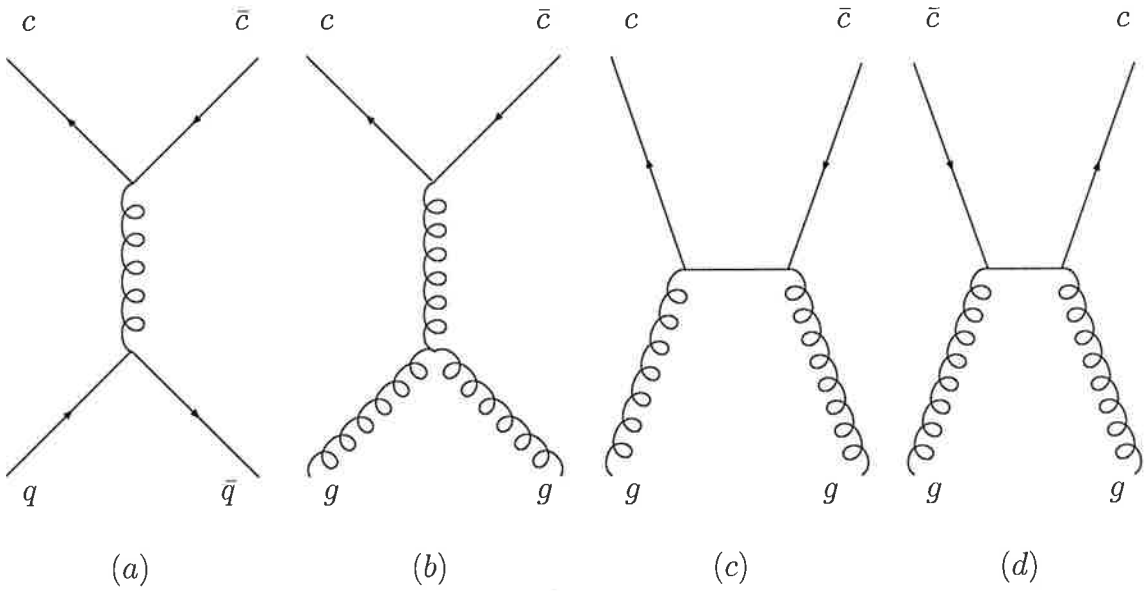


Figura 3.1.1: Produção do par $c\bar{c}$ em ordem mais baixa em α_s .

As amplitudes para os diagramas acima podem ser calculadas com a utilização das regras de Feynman dadas em (1.1.16) e (1.1.17). No caso do diagrama (a) a amplitude vale:

$$\mathcal{T}_{q\bar{q}\rightarrow c\bar{c}} = g_s^2 \frac{1}{P^2}\, \bar{v}_q(k_2)\gamma_\mu T^a u_q(k_1)\, \bar{u}(p)\gamma^\mu T^a v(\bar{p})\,. \tag{3.1.2}$$

onde k_2, k_1, p e $\bar{p}$ indicam os quadri-momentos do anti-quark $\bar{q}$, do quark q, do quark c e do anti-quark $\bar{c}$, respectivamente. Ainda, P^μ é o quadri-momento total do par $c\bar{c}$, cujo o quadrado aparece no propagador do glúon calculado no gauge de Feynman.

Para o caso dos diagramas (b), (c) e (d) a amplitude correspondente pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{T}_{gg\to c\bar{c}} = -\, g_s^2\, \epsilon_\mu^a(k_1)\, \epsilon_\nu^b(k_2) \left(\frac{1}{6}\, \delta^{ab} S^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, d^{abc} D^{\mu\nu c} + \frac{i}{2}\, f^{abc} F^{\mu\nu c} \right) , \tag{3.1.3}$$

com f^{abc} e d^{abc} constantes definidas em (A.0.4) e (A.0.7), respectivamente, e os ϵ's são os tensores de polarização dos glúons. Ainda,

$$\begin{aligned}
S^{\mu\nu} &= \bar{u}(p) \left[\frac{\gamma^\mu\, (\not{p} - \not{k}_1 + m_c)\, \gamma^\nu}{2p \cdot k_1} + \frac{\gamma^\nu\, (\not{p} - \not{k}_2 + m_c)\, \gamma^\mu}{2p \cdot k_2} \right] v(\bar{p}) \, , \\
D^{\mu\nu c} &= \bar{u}(p) \left[\frac{\gamma^\mu\, (\not{p} - \not{k}_1 + m_c)\, \gamma^\nu}{2p \cdot k_1} - \frac{\gamma^\nu\, (\not{p} - \not{k}_2 + m_c)\, \gamma^\mu}{2p \cdot k_2} \right] T^c\, v(\bar{p}) \, , \\
F^{\mu\nu c} &= \bar{u}(p) \left[\frac{\gamma^\mu\, (\not{p} - \not{k}_1 + m_c)\, \gamma^\nu}{2p \cdot k_1} - \frac{\gamma^\nu\, (\not{p} - \not{k}_2 + m_c)\, \gamma^\mu}{2p \cdot k_2} \right. \\
&\qquad \left. -2\, \frac{(P + k_2)^\mu\, \gamma^\nu - (P + k_1)^\nu\, \gamma^\mu + g^{\mu\nu}\, (\not{k}_1 - \not{k}_2)}{P^2} \right] T^c\, v(\bar{p}) \, ,
\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

nas expressões acima foi introduzida a notação $\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu$, que será utilizada daqui por diante.

A partir das amplitudes dadas em (3.1.2) e (3.1.3) é possível o cálculo das seções de choque utilizando a expressão:

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4\, \delta^4(k_1 + k_2 - p - \bar{p})}{2E_1\, 2E_2\, |v_1 - v_2|}\, |\mathcal{T}|^2 \left(\frac{d^3p}{(2\pi)^3\, 2E_c} \frac{d^3\bar{p}}{(2\pi)^3\, 2E_{\bar{c}}} \right) , \tag{3.1.5}$$

onde E_1 e E_2 são as energias das partículas iniciais e v_1 e v_2 as respectivas velocidades. Igualmente E_c e $E_{\bar{c}}$ são as energias do quark c e do anti-quark $\bar{c}$, respectivamente.

Ainda, definimos:

$$\begin{aligned}
\hat{s} &= (k_1 + k_2)^2 \, , \\
\hat{t} &= (k_1 - p)^2 \, , \\
\hat{u} &= (k_1 - \bar{p})^2 \, .
\end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Desta forma, as seções de choque diferenciais para os processos de partons mostrados em (3.1.1) valem:

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(q\bar{q} \to c\bar{c}) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{9\hat{s}^4} \left[(m_c^2 - \hat{t})^2 + (m_c^2 - \hat{u})^2 + 2m_c^2\hat{s} \right] , \tag{3.1.7}$$

e,

$$\frac{d\hat{\sigma}}{d\hat{t}}(gg \rightarrow c\bar{c}) = \frac{\pi\alpha_s^2}{8\hat{s}^2}\left[\frac{6(m_c^2-\hat{t})(m_c^2-\hat{u})}{\hat{s}^2} - \frac{m_c^2(\hat{s}-4m_c^2)}{3\,(m_c^2-\hat{t})(m_c^2-\hat{u})}\right.$$
$$+ \frac{4\,(m_c^2-\hat{t})\,(m_c^2-\hat{u}) - 8\,m_c^2\,(m_c^2+\hat{t})}{3\,(m_c^2-\hat{t})^2} + \frac{4\,(m_c^2-\hat{t})\,(m_c^2-\hat{u}) - 8\,m_c^2\,(m_c^2+\hat{u})}{3\,(m_c^2-\hat{u})^2}$$
$$\left. - 3\,\frac{(m_c^2-\hat{t})(m_c^2-\hat{u}) + m_c^2\,(\hat{u}-\hat{t})}{\hat{s}(m_c^2-\hat{t})} - 3\,\frac{(m_c^2-\hat{t})(m_c^2-\hat{u}) + m_c^2(\hat{t}-\hat{u})}{\hat{s}(m_c^2-\hat{u})}\right], \quad (3.1.8)$$

na obtenção de ambas as fórmulas foi feita a substituição $\alpha_s \equiv g_s^2/4\pi$ e na primeira delas a massa do quark q foi negligenciada.

Utilizando as seções de choque diferenciais dadas acima as previsões do modelo CEM em ordem mais baixa em α_s ficam dependentes apenas dos valores das constantes ρ_H definidas em (2.2.2). Na próxima seção as constantes serão determinadas a partir do ajuste a dados experimentais.

3.2 Análise com o CSM

A contribuição do modelo CSM para a hadroprodução de J/ψ inicia-se em ordem α_s^3. O decaimento J/ψ em dois glúons é proibido por conservação de conjugação de carga que é uma simetria discreta da QCD e portanto a produção em ordem mais baixa em α_s está relacionada ao decaimento $J/\psi \rightarrow g\,g\,g$ por simetria de *crossing*. Logo, para a produção de J/ψ é preciso calcular diagramas semelhantes ao mostrado na Figura (3.2.1).

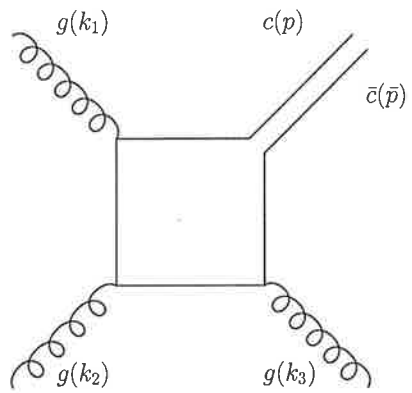


Figura 3.2.1: Produção do J/ψ

A amplitude neste caso vale:

$$\mathcal{T}_{gg\to c\bar{c}g} = i\, g_s^3\, T^a\, T^b\, T^c\, \not{\epsilon}_1^a\, \frac{\left(\frac{1}{2}\not{P} + \not{q} - \not{k}_1 + m_c\right)}{[(P\cdot k_1) + 2(q\cdot k_1)]}\, \not{\epsilon}_2^b\, \frac{\left(\frac{1}{2}\not{P} - \not{q} - \not{k}_3 + m_c\right)}{[(P\cdot k_3) + 2(q\cdot k_3)]}\, \not{\epsilon}_3^c$$

$$+ \quad 5 \text{ permutações dos índices 1, 2 e 3 .} \tag{3.2.1}$$

Como o estado J/ψ é um estado ligado é preciso considerar este fato. Seja $R_{J/\psi}(\mathbf{r})$ a função de onda do estado J/ψ. No espaço de momentos:

$$\tilde{R}_{J/\psi}(\mathbf{q}) = \int d^3x\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\, R_{J/\psi}(\mathbf{r}) \,. \tag{3.2.2}$$

Podemos escrever o estado J/ψ em função dos estados de partículas livres como:

$$|J/\psi> = \sqrt{2M_{J/\psi}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, \tilde{R}_{J/\psi}(\mathbf{q})\, \frac{1}{\sqrt{2m_c}}\, \frac{1}{\sqrt{2m_c}}\, |c(\mathbf{q})\bar{c}(-\mathbf{q})> \,. \tag{3.2.3}$$

Portanto, a amplitude de produção do J/ψ vale:

$$\mathcal{T}_{gg\to J/\psi g} = \sqrt{2M_{J/\psi}} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\, \tilde{R}_{J/\psi}(\mathbf{q})\, \frac{1}{\sqrt{2m_c}}\, \frac{1}{\sqrt{2m_c}}\, \mathcal{T}_{gg\to c(\mathbf{q})\bar{c}(-\mathbf{q})g} \,. \tag{3.2.4}$$

A seção de choque de produção para este processo é, portanto,

$$\hat{\sigma}_{gg\to J/\psi g} = \frac{20\pi^2\alpha_s^3}{81(2m_c)^5}\, \Theta(\hat{s} - 4m_c^2) < \mathcal{O}_1^{J/\psi}(^3S_1) > I(z) \,, \tag{3.2.5}$$

com

$$I(z) = z^2 \left[\frac{1 - z^2 + 2z\ln z}{(1-z)^2} + \frac{1 - z^2 - 2z\ln z}{(1+z)^3} \right] , \tag{3.2.6}$$

e

$$z \equiv (2m_c)^2/\hat{s} \,, \tag{3.2.7}$$

onde $\hat{s} = (k_1 + k_2)^2$, com k_1 e k_2 os quadri-momentos dos glúon iniciais. Ainda, o elemento de matriz está dado em (2.3.32) e Θ é a função de Heaviside definida como $\Theta(x) = 1$, para $x > 0$ e $\Theta(x) = 0$ caso contrário.

No próximo capítulo utilizaremos a seção de choque de produção dada acima na análise dos dados experimentias.

3.3 Análise com a NRQCD

Para realizar o cálculo da produção de charmonium com a NRQCD é necessário a determinação dos coeficientes de curta distância C_{mn} dados em (2.3.25) através da condição de *matching* dada em (2.3.29). Os coeficientes C_{mn} podem ser identificados um a um com a utilização da condição de *matching* quando realizamos uma expansão não relativística dos espinores.

3.3.1 Expansão não relativística dos espinores

Nesta subseção será realizada a expansão não relativística dos espinores do quark pesado c e do anti-quark pesado $\bar{c}$. O quadri-momento total do par será designado por P^μ e será considerado que o módulo do tri-momento $\pm\mathbf{q}$ do par $c\bar{c}$ em relação ao referencial do centro de massa é pequeno quando comparado com a massa m_c do quark charme.

Os quadri-momentos p^μ e $\bar{p}^\mu$ do quark c e do anti-quark $\bar{c}$, respectivamente, podem ser escritos sem perda de generalidade como:

$$\begin{aligned} p^\mu &= \frac{1}{2}P^\mu + (L\mathbf{q})^\mu \,, \\ \bar{p}^\mu &= \frac{1}{2}P^\mu - (L\mathbf{q})^\mu \,, \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

onde P^μ, como dito acima, é o quadri-momento total do par $c\bar{c}$ e L é uma matriz de transformação de Lorentz, cuja forma explicita será mostrada abaixo.

As condições, $p^2 = \bar{p}^2 = m_c^2$, de que o quark c e o anti-quark $\bar{c}$ estejam na camada de massa, nos permitem concluir:

$$P^\mu\,(L\mathbf{q})_\mu = 0 \,, \tag{3.3.2}$$

e,

$$P^2 = 4\,(m_c^2 + \mathbf{q}^2) \equiv 4E_q^2 \,. \tag{3.3.3}$$

Em relação ao referencial do centro de massa, as componentes do quadri-momento total P^μ e de $(L\mathbf{q})^\mu$ são:

$$\begin{aligned} P^\mu\big|_{CM} &= (\,2E_q,\, \mathbf{0}\,) \,, \\ (L\mathbf{q})^\mu\big|_{CM} &= (\,0,\, \mathbf{q}\,) \,, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

onde E_q foi definido implicitamente em (3.3.3).

No caso de um referencial arbitrário onde o par possui tri-momento total $\mathbf{P}$ e energia total E_t, o quadri-momento total P^μ possui as componentes $P^\mu = (E_t,\, \mathbf{P})$. A igualdade (3.3.3) nos permite concluir que:

$$E_t = \sqrt{4E_q^2 + \mathbf{P}^2} \,. \tag{3.3.5}$$

Para determinar as componentes do quadri-vetor $(L\mathbf{q})^\mu$ neste referencial arbitrário é necessário conhecer explicitamente a forma da matriz L. A forma mais geral de uma matriz de transformação de Lorentz Λ é:

$$\begin{aligned} \Lambda^0_j &= \gamma\, v^j \,, \\ \Lambda^i_j &= \delta^{ij} + v^i\, v^j\, \frac{(\gamma - 1)}{v^2} \,, \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

com $i, j = 1, 2, 3$; $\gamma = (1 - \mathbf{v}^2)^{-1/2}$ e $|\mathbf{v}|$ o módulo da velocidade relativa entre os dois referenciais inerciais envolvidos na transformação.

Considere, novamente, o referencial arbitrário, onde o par possui tri-momento total $\mathbf{P}$ e energia total E_t, e o referencial do centro de massa. No caso destes dois referenciais o módulo da velocidade relativa entre eles vale: $|\mathbf{v}| = |\mathbf{P}|/E_t$. Portanto, no referencial arbitrário, em vista de (3.3.6), nós temos:

$$\begin{aligned} P^\mu &= (E_t, \mathbf{P}), \\ (L\mathbf{q})^\mu &= L^\mu_j q^j, \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

com

$$\begin{aligned} L^0_j &= \frac{1}{2E_q} P^j, \\ L^i_j &= \delta^{ij} - \frac{P^i P^j}{\mathbf{P}^2} + \frac{P^0}{2E_q}\frac{P^i P^j}{\mathbf{P}^2}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

A matriz L^μ_j possui as seguintes propriedades que serão úteis nos cálculos posteriores:

$$\begin{aligned} P_\mu L^\mu_j &= 0, \\ g_{\mu\nu} L^\mu_i L^\nu_j &= -\delta^{ij}, \\ L^\mu_i L^\nu_i &= -g^{\mu\nu} + \frac{P^\mu P^\nu}{\mathbf{P}^2}, \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

as relações acima podem ser facilmente verificadas realizando os cálculos explicitamente com a matriz L dada em (3.3.8).

Para a realização da expansão não relativística dos espinores a representação mais conveniente para as matrizes γ, 4×4, presentes na equação de Dirac é a representação de Dirac, onde as matrizes são dadas por:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \\ \gamma^i &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

onde σ^i, $i = 1, 2, 3$; são as matrizes de Pauli dadas em (B.0.5) e $\mathbb{1}$ é a matriz identidade 2×2.

Para aplicar a condição de *matching* nós estamos interessados em escrever expressões para os espinores de Dirac em uma forma onde os espinores ξ e η dados em (2.3.28) apareçam explicitamente. Com este intuito, considere a equação de Dirac:

$$(i\,\partial\!\!\!/ - m_c)\,\Psi(x) = 0. \tag{3.3.11}$$

Escrevendo $\Psi(x) = e^{-ipx}\, w(p)$ vem que:

$$(\not{p} - m_c)\, w(p) = 0\,. \tag{3.3.12}$$

A equação (3.3.12) é um sistema de equações homogêneas escrito na forma matricial. O sistema apresenta solução diferente da trivial se e somente se $\det(\not{p} - m_c) = 0$. Como $(\not{p} - m_c)(\not{p} + m_c) = p^2 - m_c^2$, onde usamos a bem conhecida relação $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$, segue das propriedades dos determinantes que:

$$\det(\not{p} - m_c) = 0 \Rightarrow p^2 = m_c^2 \Rightarrow p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_c^2}\,. \tag{3.3.13}$$

Desta forma, temos dois tipos de soluções que diferem pelo sinal de p_0, daqui por diante a solução com $p_0 > 0$ será designada por u e a com $p_0 < 0$ por v. Elas satisfazem:

$$\begin{aligned} (\not{p} - m_c)\, u(p) &= 0\,, \\ (\not{\bar{p}} + m_c)\, v(\bar{p}) &= 0\,. \end{aligned} \tag{3.3.14}$$

As soluções para $u(p)$ e $v(\bar{p})$ podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} u(p) &= C\,(\not{p} + m_c)\, U\,, \\ v(\bar{p}) &= C'\,(m_c - \not{\bar{p}})\, V\,, \end{aligned} \tag{3.3.15}$$

onde C e C' são funções de p que serão determinadas de modo a termos a condição de normalização dos espinores $\bar{u}\,u = 2\,m_c$ e $\bar{v}\,v = -2\,m_c$, com $\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma^0$ e $\bar{v} \equiv v^\dagger \gamma^0$. Ainda, U e V são matrizes coluna com quatro componentes e serão escritas na forma:

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} \xi \\ 0_2 \end{pmatrix}, \\ V &= \begin{pmatrix} 0_2 \\ \eta \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.3.16}$$

com ξ e η espinores com duas componentes definidos em (2.3.28) e 0_2 a matriz coluna nula com duas componentes. A verificação de que (3.3.15) é solução de (3.3.14) pode ser feita por substituição direta.

Para determinar C e C' notemos que:

$$\begin{aligned} \bar{U}\,\gamma^0 &= \bar{U}\,, \\ \bar{V}\,\gamma^0 &= -\bar{V}\,, \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

onde $\bar{U} \equiv U^\dagger \gamma^0$ e $\bar{V} \equiv V^\dagger \gamma^0$.

Então, temos:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p)\,u(p) &= |C|^2\,\bar{U}\,(m_c+\not{p})\,(m_c+\not{p})\,U \\
&= 2m_c\,|C|^2\,\bar{U}\,(m_c+\not{p})\,U \\
&= 2m_c\,|C|^2\,\bar{U}\,(m_c+p^0\gamma^0-\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\gamma})\,U \\
&= 2m_c\,|C|^2\,(m_c+E_p)\,\bar{U}\,U\,, \qquad (3.3.18)
\end{aligned}$$

normalizando os espinores ξ na forma $\xi^\dagger\,\xi = 1$, temos, finalmente:

$$C = (m_c + E_P)^{-1/2}\,. \qquad (3.3.19)$$

O mesmo raciocínio feito acima pode ser aplicado para $v(\bar{p})$, e, também, fazendo $\eta^\dagger\eta = 1$, nós obtemos $C' = C$.

Os espinores $u(p)$ e $v(\bar{p})$ dados em (3.3.15) podem ser escritos em uma forma mais conveniente simplesmente escrevendo as matrizes γ explicitamente e substituindo os valores de C e C' calculados acima. Em relação ao referencial do centro de massa onde o par $c\bar{c}$ possui tri-momento $\pm\mathbf{q}$, o resultado é:

$$u(p)\Big|_{CM} = \frac{1}{\sqrt{E_q+m_c}}\begin{pmatrix}(E_q+m_c)\,\xi\\ \mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\xi\end{pmatrix}, \qquad (3.3.20)$$

$$v(\bar{p})\Big|_{CM} = \frac{1}{\sqrt{E_q+m_c}}\begin{pmatrix}-\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\eta\\ (E_q+m_c)\,\eta\end{pmatrix}, \qquad (3.3.21)$$

onde E_q foi definido em (3.3.3).

As expressões dos espinores $u(p)$ e $v(\bar{p})$ em um referencial arbitrário onde o par possui, quadri-momento total P^μ, tri-momento total $\mathbf{P}$ e energia total E_t são obtidas realizando uma transformação de Lorentz aos espinores dados em (3.3.20) e (3.3.21) e temos o resultado:

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{4E_q\,(E_t+2E_q)\,(E_q+m_c)}}\,(2E_q+\not{P}\gamma^0)\begin{pmatrix}(E_q+m_c)\,\xi\\ \mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\xi\end{pmatrix}, \qquad (3.3.22)$$

$$v(\bar{p}) = \frac{1}{\sqrt{4E_q\,(E_t+2E_q)\,(E_q+m_c)}}\,(2E_q+\not{P}\gamma^0)\begin{pmatrix}-\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\eta\\ (E_q+m_c)\,\eta\end{pmatrix}, \qquad (3.3.23)$$

escrito desta forma, os espinores ξ e η aparecem explicitamente nas expressões para $u(p)$ e $v(\bar{p})$.

O objetivo desta subseção é realizar a expansão não relativística dos espinores, mais precisamente, nós iremos realizar a expansão não relativística de produtos do tipo, $\bar{u}(p)\,\Gamma\,v(\bar{p})$, onde Γ são matrizes de Dirac ou a matriz identidade. Para isto, primeiramente, escreveremos expressões explicitas para os produtos $\bar{u}(p)\,\Gamma\,v(\bar{p})$ e em seguida realizaremos a expansão não

relativística dos mesmos. A expressão explicita para $\bar{u}(p)\,v(\bar{p})$ é mais facilmente obtida através da utilização da identidade:

$$\begin{aligned}
\left(2E_q + \gamma^0 \not{P}\right)\left(2E_q + \not{P}\gamma^0\right) &= 4E_q^2 + 2E_q \not{P}\gamma^0 + 2E_q\gamma^0\not{P} + \gamma^0\not{P}\not{P}\gamma^0 \\
&= 8E_q^2 + 2E_q\,\not{P}\gamma^0 + 2E_q\gamma^0\,\not{P} \\
&= 4E_q(P_0 + 2E_q)\,. \qquad (3.3.24)
\end{aligned}$$

Utilizando as expressões para $u(p)$ e $v(\bar{p})$ dadas em (3.3.22) e (3.3.23), respectivamente, e a identidade dada em (3.3.24), nós temos:

$$\bar{u}(p)\,v(\bar{p}) = -2\,\xi^\dagger\,(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\eta\,. \qquad (3.3.25)$$

A expressão explicita para $\bar{u}(p)\,\gamma^\mu\,v(\bar{p})$ é obtida considerando que esta grandeza transforma-se como um vetor e portanto é possível realizar o cálculo no referencial do CM e depois realizar uma transformação de Lorentz. Temos:

$$\bar{u}(p)\,\gamma^\mu\,v(\bar{p}) = L^\mu_\nu\,\left[\bar{u}(p)\,\gamma^\nu\,v(\bar{p})\right]_{CM}\,. \qquad (3.3.26)$$

Dado que:

$$\bar{u}(p)\Big|_{CM} = \frac{1}{(E_q+m_c)^{1/2}}\left[(E_q+m_c)\,\xi^\dagger\,,\ -\xi^\dagger\,\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]\,. \qquad (3.3.27)$$

Nós temos que a expressão em colchetes dada em (3.3.26) vale:

$$\bar{u}(p)\,\gamma^\nu\,v(\bar{p})\Big|_{CM} = \frac{1}{(E_q+m_c)}\left[(E_q+m_c)\,\xi^\dagger\,,\ -\xi^\dagger\,\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\right]\,\gamma^\nu\begin{pmatrix} -\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\eta \\ (E_q+m_c)\,\eta\end{pmatrix}\,, \qquad (3.3.28)$$

Para $\nu = 0$ é fácil ver que a expressão acima se anula. Para $\nu = i$ nós obtemos:

$$\bar{u}(p)\,\gamma^i\,v(\bar{p})\Big|_{CM} = \frac{1}{(E_q+m_c)}\left[-\xi^\dagger\,\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\sigma^i\,\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\eta + (E_q+m_c)^2\,\xi^\dagger\,\sigma^i\,\eta\right]\,. \qquad (3.3.29)$$

O termo que possui três matrizes σ pode ser desenvolvido. Para isto escrevemos:

$$\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\sigma^i\,\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma} = q_j\,q_k\,\sigma^j\,\sigma^i\,\sigma^k\,. \qquad (3.3.30)$$

Utilizando as propriedades das matrizes de Pauli σ, nós obtemos:

$$\begin{aligned}
\sigma^j\,\sigma^i\,\sigma^k &= \sigma^j\,\left(\delta^{ik} + i\,\epsilon_{ikl}\,\sigma^l\right) \\
&= \sigma^j\,\delta^{ik} + i\,\epsilon_{ikl}\,\left(\delta^{jl} + i\,\epsilon_{jlt}\,\sigma^t\right) \\
&= i\,\epsilon_{ikj} + \sigma^j\,\delta^{ik} - \epsilon_{ikl}\,\epsilon_{jlt}\,\sigma^t \\
&= i\,\epsilon_{ikj} + \sigma^j\,\delta^{ik} + \left(\delta^{ij}\,\delta^{kt} - \delta^{it}\,\delta^{kj}\right)\,\sigma^t\,, \qquad (3.3.31)
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma}\,\sigma^i\,\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma} \;=\; 2q^i\,\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{q}^2\,\sigma^i. \tag{3.3.32}$$

Substituindo (3.3.32) em (3.3.29) e lembrando que $E_q^2 = \mathbf{q}^2 + m_c^2$, após algumas manipulações é possível concluir que:

$$\bar{u}(p)\,\gamma^\mu\,v(\bar{p}) \;=\; L_j^\mu\left(2E_q\,\xi^\dagger\,\sigma^j\,\eta - \frac{2}{E_q+m_c}q^j\,\xi^\dagger\,(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\eta\right). \tag{3.3.33}$$

Nos casos em que Γ possui mais de uma matriz de Dirac, as expressões para os produtos $\bar{u}(p)\,\Gamma\,v(\bar{p})$ podem ser obtidas mais facilmente com a utilização da identidade dada abaixo:

$$\left(2E_q + \gamma^0 \not{P}\right)\gamma^\mu\left(2E_q + \not{P}\gamma^0\right) \;=\; 4\,E_q\,(P_0 + 2E_q)\left(\frac{P^\mu}{2E_q}\gamma^0 + L_j^\mu\,\gamma^j\right). \tag{3.3.34}$$

Nós podemos, por exemplo, obter a expressão:

$$\bar{u}(p)\,\frac{i}{2}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\,v(\bar{p}) \;=\; \left(P^\mu L_j^\nu - P^\nu L_j^\mu\right)\times$$

$$\left(\frac{im_c}{E_q}\,\xi^\dagger\,\sigma^j\,\eta + \frac{i}{E_q(E_q+m_c)}\,q^j\,\xi^\dagger(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\eta\right) - 2\,L_j^\mu\,L_k^\nu\,\epsilon^{jkl}\,q^l\,\xi^\dagger\,\eta\,. \tag{3.3.35}$$

Uma vez que os produtos $\bar{u}(p)\,\Gamma\,v(\bar{p})$ foram escritos explicitamente é fácil realizar a expansão não relativística dos mesmos. Em ordem linear em $\mathbf{q}$ e lembrando que $E_q = \mathbf{q}^2 + m_c$, as expressões (3.3.25), (3.3.33) e (3.3.35) valem, respectivamente:

$$\bar{u}(p)\,v(\bar{p}) \;\approx\; -2\,\xi^\dagger\,(\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\eta,$$

$$\bar{u}(p)\,\gamma^\mu\,v(\bar{p}) \;\approx\; 2\,m_c\,L_j^\mu\,\xi^\dagger\,\sigma^j\,\eta\,,$$

$$\bar{u}(p)\,\frac{i}{2}\,(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)\,v(\bar{p}) \;\approx\; i\left(P^\mu L_j^\nu - P^\nu L_j^\mu\right)\xi^\dagger\,\sigma^j\,\eta - 2\,L_j^\mu\,L_k^\nu\,\epsilon^{jkl}\,q^l\,\xi^\dagger\,\eta\,. \tag{3.3.36}$$

Para impor a condição de *matching* serão utilizadas expansões não relativísticas semelhantes as mostradas nas expressões acima.

3.3.2 Seção de choque de produção

A condição de *matching* dada em (2.3.29), e repetida abaixo por simplicidade, permite a determinação dos coeficientes C_{mn} presentes na seção de choque de produção de charmonium da NRQCD. Os coeficientes obtidos desta maneira são substituídos em (2.3.25) e a seção de choque passará a depender apenas dos elementos de matriz.

$$\sum_X (2\pi)^4\,\delta^4(k_1 + k_2 - P - k_x)\,\mathcal{T}^*_{12\to c\bar{c}'+X}\,\mathcal{T}_{12\to c\bar{c}+X}$$

$$= \sum_{mn} C_{mn}(P,k_1,k_2)\;<\chi^\dagger\,\mathcal{K}_m'^\dagger\,\psi\,\mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}}\,\psi^\dagger\,\mathcal{K}_n\,\chi>\,,$$

onde $c\bar{c} \equiv c\bar{c}(\mathbf{q}, \xi, \eta)$ e $c\bar{c}' \equiv c\bar{c}(\mathbf{q}', \xi', \eta')$, ver (2.3.28).

O procedimento que utilizaremos para impor a condição de *matching* é o seguinte: o lado esquerdo da igualdade será calculado com teoria de perturbação da QCD e será expandido em uma série de Taylor em $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$, já os elementos de matriz do lado direito serão calculados usando teoria de perturbação da NRQCD e serão, igualmente, expandidos em uma série em $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$. Os coeficientes C_{mn} serão obtidos um a um como polinômios em $\alpha_s(m_c)$ igualando os termos com os mesmos operadores do lado direito com os do lado esquerdo da condição de *matching*. Iremos considerar, primeiramente, o caso onde os índices 1 e 2 presentes em $\mathcal{T}_{12\to c\bar{c}+X}$ são um quark q e um anti-quark $\bar{q}$. Em ordem mais baixa em g_s esta amplitude está dada em (3.1.2) e vale:

$$\mathcal{T}_{q\bar{q}\to c\bar{c}} = g_s^2 \frac{1}{P^2} \bar{v}_q(k_2)\, \gamma_\mu\, T^a\, u_q(k_1)\, \bar{u}(p)\, \gamma^\mu\, T^a\, v(\bar{p}) \,.$$

Para prosseguirmos é necessário expandir a amplitude dada acima até ordem linear em $\mathbf{q}$. Isso pode ser feito realizando a expansão não relativística do fator $\bar{u}(p)\, \gamma^\mu\, T^a\, v(\bar{p})$ utilizando os resultados da subseção (4.3.1). Ainda, o fator P^2 presente no denominador pode ser igualmente expandido lembrando que $P^2 = 4\, E_q^2$ com $E_q^2 \equiv \mathbf{q}^2 + m_c^2$. O resultado final, em ordem linear em $\mathbf{q}$, é:

$$\mathcal{T}_{q\bar{q}\to c\bar{c}} = g_s^2 \frac{1}{2m_c} \bar{v}_q(k_2)\, \gamma_\mu\, T^a\, u_q(k_1)\, L_i^\mu\, \xi^\dagger\, \sigma^i\, T^a\, \eta \,, \tag{3.3.37}$$

O fator $\mathcal{T}^*_{12\to c\bar{c}'+X}$ presente no lado esquerdo da condição de *matching* é semelhante em ordem mais baixa em g_s e até ordem linear em $\mathbf{q}'$ ao complexo conjugado da expressão (3.3.37):

$$\mathcal{T}^*_{q\bar{q}\to c\bar{c}'} = g_s^2 \frac{1}{2m_c} L_j^\nu\, \eta'^{\,\dagger}\, \sigma^j\, T^b\, \xi'\, \bar{u}_q(k_1)\, T^b\, \gamma_\nu\, v_q(k_2) \,. \tag{3.3.38}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^*_{q\bar{q}\to c\bar{c}'}\, \mathcal{T}_{q\bar{q}\to c\bar{c}} &= g_s^4 \frac{1}{4m_c^2} L_j^\nu\, \eta'^{\,\dagger}\, \sigma^j\, T^b\, \xi' \,\times \\ &\quad \bar{u}_q(k_1)\, T^b\, \gamma_\nu\, v_q(k_2)\, \bar{v}_q(k_2)\, \gamma_\mu\, T^a\, u_q(k_1)\, L_i^\mu\, \xi^\dagger\, \sigma^i\, T^a\, \eta \,. \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

A expressão acima pode ser simplificada quando é realizada a soma sobre os spins e cor das partículas iniciais. Para isto utilizaremos as relações:

$$\begin{aligned} \sum_{\pm s,\, cor} u_\alpha^a(p,s)\, \bar{u}_\beta^b(p,s) &= (\not{p} + m)_{\alpha\beta}\, \delta^{ab} \,, \\ -\sum_{\pm s,\, cor} v_\alpha^a(p,s)\, \bar{v}_\beta^b(p,s) &= (-\not{p} + m)_{\alpha\beta}\, \delta^{ab} \,, \end{aligned} \tag{3.3.40}$$

e a normalização dos geradores T^a dada em (1.1.4):

$$\mathrm{Tr}\left(T^a\, T^b\right) = 2\, \delta^{ab} \,.$$

Desta forma, nós temos:

$$\widehat{\sum} \mathcal{T}^*_{q\bar{q}\to c\bar{c}'}\, \mathcal{T}_{q\bar{q}\to c\bar{c}} = -\frac{1}{9}\frac{1}{4}\frac{g_s^4}{4m_c^2}\, 2 \times$$

$$L^\nu_j\, \eta'^\dagger\, \sigma^j\, T^a\, \xi'\, L^\mu_i\, \xi^\dagger\, \sigma^i\, T^a\, \eta\, \mathrm{Tr}\left[\,(\not{k}_1 + m)\,\gamma_\nu\,(-\not{k}_2 + m)\,\gamma_\mu\,\right] . \quad (3.3.41)$$

O traço presente na expressão acima pode ser facilmente calculado quando a massa m do quark leve q é desprezada:

$$\mathrm{Tr}\left[\,\not{k}_1\,\gamma_\nu\,(-\not{k}_2)\,\gamma_\mu\,\right] = 4\,(-k_{1\nu}\,k_{2\mu} + k_1\cdot k_2\, g_{\mu\nu} - k_{1\mu}\,k_{2\nu}) . \quad (3.3.42)$$

Substituindo (3.3.42) em (3.3.41), utilizando a propriedade $g_{\mu\nu}\, L^\mu_i\, L^\nu_j = -\delta^{ij}$ dada em (3.3.9) e fazendo as definições $\alpha_s \equiv g_s^2/4\pi$ e

$$(k_1 - k_2)_\mu\, L^\mu_i \equiv -\sqrt{P^2}\,\hat{n}^i , \quad (3.3.43)$$

nós, finalmente, obtemos:

$$\widehat{\sum} \mathcal{T}^*_{q\bar{q}\to c\bar{c}'}\, \mathcal{T}_{q\bar{q}\to c\bar{c}} = \frac{4\pi^2\alpha_s^2}{9}\left[\,\delta^{ij} - \hat{n}^j\hat{n}^i\,\right]\, \eta'^\dagger\, \sigma^j\, T^a\, \xi'\, \xi^\dagger\, \sigma^i\, T^a\, \eta , \quad (3.3.44)$$

e, desta forma, nós concluímos o cálculo do lado esquerdo da condição de *matching* até ordem linear em $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ e em ordem mais baixa em α_s.

O vetor $\hat{n}^i$ definido em (3.3.43) possui algumas propriedades importantes. Em um referencial onde os tri-momentos $\mathbf{P}$, $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ são colineares, o vetor $\hat{n}^i$ é também colinear a estes vetores. Ainda, é possível demonstrar que o vetor $\hat{n}^i$ é um vetor unitário. Isto segue diretamente da definição e da última propriedade da matriz L dada em (3.3.9):

$$\begin{aligned} n^i\, n_i &= \frac{1}{P^2}\,(k_1 - k_2)_\mu\,(k_1 - k_2)_\nu\, L^\mu_i\, L^\nu_i \\ &= \frac{1}{P^2}\,(k_1 - k_2)_\nu\,(k_1 - k_2)_\mu\left(-g^{\mu\nu} + \frac{P^\mu P^\nu}{P^2}\right) \\ &= 1 , \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

na dedução acima utilizamos $P^\mu = k_1^\mu + k_2^\mu$ e $k_1^2 = k_2^2 = 0$, dado que a massa m do quark q foi desprezada.

Iremos calcular agora o lado direito da condição de *matching* em teoria de perturbação da NRQCD. Para isto, nós precisamos construir expressões explicitas para $\mathcal{K}'^\dagger_m$ e $\mathcal{K}_n$ que quando o elemento de matriz $< \chi^\dagger\, \mathcal{K}'^\dagger_m\, \psi\, \mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}}\, \psi^\dagger\, \mathcal{K}_n\, \chi >$ é calculado em ordem mais baixa em α_s e expandido em $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ reproduza o produto de espinores presente do lado direito da igualdade (3.3.44). A expressão para $\mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}}$ dada em (2.3.30) é da forma:

$$\mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}} = \sum_X |\, c\bar{c}'(\,\mathbf{q}',\,\xi',\,\eta') + X >< c\bar{c}(\,\mathbf{q},\,\xi,\,\eta) + X\,| . \quad (3.3.46)$$

Como estamos interessados em ordem mais baixa em α_s é preciso reter na soma apenas os estados $c\bar{c}$ e, portanto, temos:

$$< \chi^\dagger \mathcal{K}_m'^\dagger \psi \, \mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}} \, \psi^\dagger \mathcal{K}_n \chi >$$

$$= \; < 0 | \chi^\dagger \mathcal{K}_m'^\dagger \psi \, | c\bar{c}' \, (\mathbf{q}', \xi', \eta') >< c\bar{c} \, (\mathbf{q}, \xi, \eta) \, | \psi^\dagger \mathcal{K}_n \chi | 0 > \; . \qquad (3.3.47)$$

O cálculo do lado direito da expressão acima pode ser realizado através da utilização das espressões para ψ e χ dadas abaixo:

$$\psi_\alpha^a(x) \;=\; \sum_{\pm s} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}\,(2\pi)^3} \, a(p\,;s)\, \xi_\alpha^a(p\,;s)\, e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \, ,$$

$$\chi_\alpha^a(x) \;=\; \sum_{\pm s} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2E_p}\,(2\pi)^3} \, b^\dagger(p\,;s)\, \eta_\alpha^a(p\,;s)\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \, , \qquad (3.3.48)$$

onde os operadores de aniquilação e criação satisfazem as relações de anti-comutação:

$$\{a(p\,;s),\, a^\dagger(p'\,;s')\} \;=\; \{b(p\,;s),\, b^\dagger(p'\,;s')\} \;=\; 2\,E_p\,(2\pi)^3\,\delta_{ss'}\,\delta^3(p-p') \, , \qquad (3.3.49)$$

e,

$$\{a(p\,;s),\, a(p'\,;s')\} \;=\; \{a^\dagger(p\,;s),\, a^\dagger(p'\,;s')\} \;=\; 0 \, ,$$

$$\{b(p\,;s),\, b(p'\,;s')\} \;=\; \{b^\dagger(p\,;s),\, b^\dagger(p'\,;s')\} \;=\; 0 \, ,$$

$$\{a(p\,;s),\, b^\dagger(p'\,;s')\} \;=\; \{a^\dagger(p\,;s)\,,\; b(p'\,;s')\} \;=\; 0 \, . \qquad (3.3.50)$$

As escolhas de $\mathcal{K}_m'^\dagger$ e $\mathcal{K}_n$ que irão reproduzir o fator espinorial correto são obtidas por inspeção. Fazendo $\mathcal{K}_m'^\dagger = \sigma_m T^a$ e $\mathcal{K}_n = \sigma_n T^a$ e utilizando as relações de anti-comutação dadas acima, temos até ordem linear em $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$:

$$< 0 | \chi^\dagger \mathcal{K}_m'^\dagger \psi \, | c\bar{c}(\mathbf{q}', \xi', \eta) >< c\bar{c}(\mathbf{q}, \xi, \eta) \, | \, \psi^\dagger \mathcal{K}_n' \chi \, | 0 >$$

$$= \; 4\, m_c^2 \, \eta'^\dagger \, \sigma_m \, T^a \, \xi' \, \xi^\dagger \, \sigma_n \, T^a \, \eta \, . \qquad (3.3.51)$$

Substituindo os resultados (3.3.44) e (3.3.52) na condição de *matching* nós obtemos o coeficiente de curta distância C_{ij} para o processo $q\bar{q} \longrightarrow c\bar{c}$ em ordem mais baixa em α_s:

$$C_{ij} \;=\; (2\pi)^4\, \delta^4(k_1 + k_2 - P)\, \frac{\pi^2 \alpha_s^2}{9\, m_c^2} \, \left[\delta^{ij} - \hat{n}^i \, \hat{n}^j \right] . \qquad (3.3.52)$$

Uma vez que o coeficiente C_{ij} foi determinado e lembrando que no caso da produção de um estado de charmonium H ele é independente de H, nós podemos substituir a expressão

(3.3.52) em (2.3.25) para obtermos a seção de choque diferencial de produção de um estado H com polarização λ e quadri-momento P^μ no processo $q\bar{q} \to H(\lambda)\, X$:

$$d\hat{\sigma}_{q\bar{q}\to H(\lambda)} = \frac{1}{2E_1\, 2E_2\, |v_1 - v_2|}\, \frac{d^3P}{(2\pi)^3\, 2E_p}\, (2\pi)^4\, \delta^4(k_1 + k_2 - P) \times$$

$$\frac{\pi^2 \alpha_s^2}{9\, m_c^2}\, \left[\delta^{ij} - \hat{n}^j \hat{n}^i\right] < \chi^\dagger\, \sigma^j\, T^a\, \psi\, \mathcal{P}_{H(\lambda)}\, \psi^\dagger\, \sigma^i\, T^a\, \chi > . \quad (3.3.53)$$

Assumindo que os tri-momentos $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ do quark q e do anti-quark $\bar{q}$, respectivamente, estão no eixo z, ou melhor, $\mathbf{k}_1 = k_1\, \hat{\mathbf{z}}$ e $\mathbf{k}_2 = k_2\, \hat{\mathbf{z}}$, nós podemos fazer a identificação $\hat{n}^i = \hat{z}^i$. Realizando a integração da expressão acima, nós obtemos, finalmente:

$$\hat{\sigma}_{q\bar{q}\to H(\lambda)} = \delta(\hat{s} - 4m_c^2)\, \frac{\pi^3 \alpha_s^2}{36\, m_c^4}\, \left[\delta^{ij} - \hat{z}^j \hat{z}^i\right] < \chi^\dagger\, \sigma^j\, T^a\, \psi\, \mathcal{P}_{H(\lambda)}\, \psi^\dagger\, \sigma^i\, T^a\, \chi > , \quad (3.3.54)$$

com $\hat{s} \equiv (k_1 + k_2)^2$. A seção de choque acima vale para qualquer estado de charmonium H e a dependência em H está contida apenas no elemento de matriz.

O procedimento feito acima para impor a condição de *matching* para o processo $q\bar{q} \to c\bar{c}$ pode ser refeito para o caso onde as partículas inicias 1 e 2 são glúons, ou seja, para o processo $gg \to c\bar{c}$. Novamente iremos calcular o fator $\mathcal{T}^*_{gg\to c\bar{c}'}\, \mathcal{T}_{gg\to c\bar{c}}$ presente do lado esquerdo da condição de *matching* em teoria de perturbação da QCD. Em ordem mais baixa em g_s a amplitude $\mathcal{T}_{gg\to c\bar{c}}$ está dada em (3.1.3) em função de $S^{\mu\nu}$, $D^{\mu\nu c}$ e $F^{\mu\nu c}$ definidos em (3.1.4). Esta amplitude pode ser expandida até ordem linear em $\mathbf{q}$ com a utilização dos resultados da subseção (4.3.1), o resultado final é:

$$\begin{aligned} S^{\mu\nu} &= \frac{i}{2\, m_c^2}\, \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\, (k_1 - k_2)_\lambda\, P_\rho\, \xi^\dagger\, \eta \\ &+ \left\{ \frac{1}{m_c^3}\, (k_1 \cdot L)_n \left[(k_1 - k_2)^\mu L_j^\nu + (k_1 - k_2)^\nu\, L_j^\mu \right] - \frac{1}{m_c^3}\, (k_1 \cdot L)_j\, \left(P^\mu\, L_n^\nu - P^\nu\, L_n^\mu\right) \right. \\ &- \left. \frac{2}{m_c^3}\, g^{\mu\nu}\, (k_1 \cdot L)_n\, (k_1 \cdot L)_j + \frac{2}{m_c}\, \left(L_n^\mu\, L_j^\nu + L_n^\nu\, L_j^\mu\right) \right\} q^n\, \xi^\dagger\, \sigma^j\, \eta\, , \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

e,

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu c} &= -\frac{1}{m_c}\, \left(k_1^\mu\, L_j^\nu - k_2^\nu\, L_j^\mu\right) \xi^\dagger\, \sigma^j\, T^a\, \eta \\ &- \frac{i}{2m_c^4}\, \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\, (k_1 - k_2)_\lambda\, P_\rho\, (k_1 \cdot L)_n\, q^n\, \xi^\dagger\, T^c\, \eta\, , \end{aligned} \quad (3.3.56)$$

onde o tensor $\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}$ é totalmente anti-simétrico e $\epsilon^{0123} = 1$. A expressão para $D^{\mu\nu c}$ difere apenas da expressão (3.3.55) para $S^{\mu\nu}$ pela inserção de um gerador T^c.

Multiplicando a amplitude $\mathcal{T}_{gg\to c\bar{c}}$ pelo complexo conjugado da amplitude $\mathcal{T}_{gg\to c\bar{c}'}$, realizando a soma sobre os spins e cor dos glúons iniciais e usando as propriedades da matriz L

dadas em (3.3.9) e a definição do vetor $\hat{n}^i$ mostrada em (3.3.43), nós temos até ordem linear em $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ e em ordem mais baixa em α_s:

$$\begin{aligned}\widehat{\sum} \mathcal{T}^*_{gg\to c\bar{c}'}\,\mathcal{T}_{gg\to c\bar{c}} &= \frac{\pi^2\alpha_s^2}{9}\Bigg\{\eta'^\dagger\,\xi'\,\xi^\dagger\,\eta + \frac{15}{8}\,\eta'^\dagger\,T^a\,\xi'\,\xi^\dagger\,T^a\,\eta + \frac{1}{m_c^2}\Big[(\delta^{mn}-\hat{n}^m\hat{n}^n)(\delta^{ij}-\hat{n}^i\hat{n}^j)\\ &+ (\delta^{mj}-\hat{n}^m\hat{n}^j)(\delta^{ni}-\hat{n}^n\hat{n}^i) + \delta^{mi}\delta^{nj} - (\delta^{mi}-\hat{n}^m\hat{n}^i)(\delta^{nj}-\hat{n}^n\hat{n}^j)\Big]\times\\ &\times\; q'^m\,q^n\left(\eta'^\dagger\,\sigma^i\,\xi'\,\xi^\dagger\,\sigma^j\,\eta + \frac{15}{8}\,\eta'^\dagger\,\sigma^i\,T^a\,\xi'\,\xi^\dagger\,\sigma^j\,T^a\,\eta\right)\\ &+ \frac{27}{8\,m_2^2}\,\hat{n}^m\,\hat{n}^n\,q'^m\,q^n\,\eta'^\dagger\,T^a\,\xi'\,\xi^\dagger\,T^a\,\eta\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.3.57}$$

Para impor a condição de *matching* é preciso encontrar os elementos de matriz que quando calculados em ordem mais baixa em α_s em teoria de perturbação da NRQCD e expandidos em $\mathbf{q}$ e $\mathbf{q}'$ reproduzam o mesmo produto de espinores presentes na expressão (3.3.57) dada acima. Os elementos de matriz corretos são obtidos por inspeção e neste caso são:

$$\begin{aligned} <\chi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^m\right)\sigma_i\,T^a\,\psi\,\mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}}\,\psi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^n\right)\sigma^j\,T^a\,\chi> &= 4\,m_c^2\,q^m\,q^n\,\eta'^\dagger\,\sigma^i\,T^a\,\xi'\,\xi^\dagger\,\sigma^j\,T^a\,\eta\,,\\ <\chi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^m\right)T^a\,\psi\,\mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}}\,\psi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^n\right)T^a\,\chi> &= 4\,m_c^2\,q^m\,q^n\,\eta'^\dagger\,T^a\,\xi'\,\xi^\dagger\,T^a\,\eta\,,\\ <\chi^\dagger\,T^a\,\psi\,\mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}}\,\psi^\dagger\,T^a\,\chi> &= 4\,m_c^2\,\eta'^\dagger\,T^a\,\xi'\,\xi^\dagger\,T^a\,\eta\,,\\ <\chi^\dagger\,\psi\,\mathcal{P}_{c\bar{c}',c\bar{c}}\,\psi^\dagger\,\chi> &= 4\,m_c^2\,\eta'^\dagger\,\xi'\,\xi^\dagger\,\eta\,, \end{aligned} \tag{3.3.58}$$

relembrando que $\psi^\dagger\,\overleftrightarrow{\mathbf{D}}\,\chi \equiv \psi^\dagger\,\mathbf{D}\,\chi - (\mathbf{D}\,\psi)^\dagger\,\chi$.

Substituindo (3.3.57) e (3.3.58) na condição de *matching* é fácil determinar todos os coeficientes C_{ij} para o processo $gg \to c\bar{c}$. Inserindo estes coeficientes em (2.3.25) e realizando a integração nós obtemos a seção de choque de produção de um estado de charmonium H no processo $gg \to H(\lambda)\,X$. O resultado final é:

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{gg\to H(\lambda)\,X} &= \delta(\hat{s}-4m_c^2)\,\frac{\pi^3\alpha_s^2}{144m_c^4}\Bigg\{<\chi^\dagger\,\psi\,\mathcal{P}_{H(\lambda)}\,\psi^\dagger\,\chi> + \frac{15}{8}<\chi^\dagger\,T^a\,\psi\,\mathcal{P}_{H(\lambda)}\,\psi^\dagger\,T^a\,\chi>\\ &+ \frac{1}{m_c^2}\Big[(\delta^{mn}-\hat{z}^m\hat{z}^n)(\delta^{ij}-\hat{z}^i\hat{z}^j) + (\delta^{mj}-\hat{z}^m\hat{z}^j)(\delta^{ni}-\hat{z}^n\hat{z}^i) + \delta^{mi}\,\delta^{nj}\\ &- (\delta^{mi}-\hat{z}^m\hat{z}^i)(\delta^{nj}-\hat{z}^n\hat{z}^j)\Big]\Big(<\chi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^m\right)\sigma^i\,\psi\,\mathcal{P}_{H(\lambda)}\,\psi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^n\right)\sigma^j\,\chi>\\ &+ \frac{15}{8}<\chi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^m\right)\sigma^i\,T^a\,\psi\,\mathcal{P}_{H(\lambda)}\,\psi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^n\right)\sigma^j\,T^a\,\chi>\Big)\\ &+ \frac{27}{8m_c^2}\,\hat{z}^m\,\hat{z}^n<\chi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^m\right)T^a\,\psi\,\mathcal{P}_{H(\lambda)}\,\psi^\dagger\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^n\right)T^a\,\chi>\Bigg\}, \end{aligned} \tag{3.3.59}$$

onde, novamente, $\hat{s} = (k_1 + k_2)^2$.

A expressão para a seção de choque dada acima vale para todos os estados de charmonium H e a dependência em H está contida apenas nos elementos de matriz. Como será visto, é possível simplificar consideravelmente as expressões da seções de choque dadas em (3.3.54) e (3.3.59) quando consideramos as simetrias da NRQCD e realizarmos a soma sobre a polarização λ.

3.3.3 Simetrias da NRQCD

Os elementos de matriz que aparecem nas seções de choque (3.3.54) e (3.3.59) podem ser simplificados através do uso da simetria rotacional e da simetria aproximada no spin do quark e do anti-quark charme da lagrangiana da NRQCD. Nesta subseção simplificaremos os elementos de matriz presentes na seção de choque de produção do J/ψ.

Simetria rotacional

Primeiramente, considere, como ilustração, o seguinte elemento de matriz:

$$< \chi^\dagger \left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^m\right) \sigma^i \psi \mathcal{P}_{H(\lambda)} \psi^\dagger \left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^n\right) \sigma^j \chi > .$$

O elemento mostrado acima possui os índices vetoriais i, j, m e n e o índice de polarização λ presente no operador de projeção $\mathcal{P}_{H(\lambda)}$ dado em (2.3.26). Ao realizar uma rotação este elemento de matriz transforma-se como um tensor com os índices listados acima. De maneira geral, para um estado de charmonium H que possui momento angular total J, o projetor $\mathcal{P}_{H(\lambda)}$ transforma-se sob uma rotação como uma componente da representação $(\lambda, -\lambda)$ do produto direto $J \otimes J$, já que o índice λ aparece tanto no *bra* como no *ket* do operador de projeção $\mathcal{P}_{H(\lambda)}$. Um elemento de matriz arbitrário, portanto, transforma-se sob rotação como um elemento da representação do produto direto $J \otimes J \otimes 1 \otimes 1 \otimes \ldots$, onde é adicionado um fator de 1 para cada índice vetorial adicional presente no elemento de matriz. Este produto direto pode ser decomposto em representações irredutíveis e esta decomposição, como será visto adiante, determinará o número de elementos de matriz independentes que no caso particular do J/ψ podem ser determinados por análise tensorial.

O estado J/ψ possui momento angular total $J = 1$ e, desta forma, a polarização neste caso assume os valores $\lambda = -1, 0, 1$ e pode ser tratada como um índice vetorial, no sentido que podemos relacionar λ com um índice cartesiano i através da matriz de transformação:

$$U_{\lambda i} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}_{\lambda i} , \tag{3.3.60}$$

e, portanto, os índices de polarização λ presentes no *ket* e no *bra* do operador $\mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)}$ estão relacionados com os índices cartesianos i e j através de $U_{\lambda i}$ e $U^\dagger_{j\lambda}$, respectivamente.

Um elemento de matriz arbitrário pode ser expresso em termos dos tensores invariantes δ^{ij} e ϵ^{ijk} e o número de elementos de matriz independentes deve ser igual ao número de

tensores invariantes que podem ser formados com os índices disponíveis. Nós, primeiramente, consideraremos elementos de matriz que não possuem índice vetorial como, por exemplo, $< \chi^\dagger \psi \, P_{J/\psi(\lambda)} \, \psi^\dagger \chi >$. Neste caso, os únicos índices disponíveis são o λ no *ket* e o λ no *bra* do operador de projeção $\mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)}$, e o único tensor invariante que pode ser formado com estes índices é o $\delta_{\lambda\lambda} = 1$. Então:

$$< \chi^\dagger \psi \, \mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)} \, \psi^\dagger \chi > \;\propto\; \delta_{\lambda\lambda} < \chi^\dagger \psi \, \mathcal{P}_{J/\psi} \, \psi^\dagger \chi > , \tag{3.3.61}$$

onde $P_{J/\psi} = \sum_\lambda \mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)}$. A constante de proporcionalidade pode ser determinada lembrando que $J = 1$ e, portanto, existem $2J + 1 = 3$ projeções do momento angular total, logo:

$$< \chi^\dagger \psi \, \mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)} \, \psi^\dagger \chi > \;=\; \frac{1}{3} < \chi^\dagger \psi \, \mathcal{P}_{J/\psi} \, \psi^\dagger \chi > , \tag{3.3.62}$$

Assim, utilizando os elementos de matriz definidos em (2.3.32) nós podemos escrever:

$$\begin{aligned} < \chi^\dagger \psi \, \mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)} \, \psi^\dagger \chi > \;&=\; \frac{1}{3} < \mathcal{O}_1^{J/\psi}(^1S_0) > , \\ < \chi^\dagger T^a \psi \, \mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)} \, \psi^\dagger T^a \chi > \;&=\; \frac{1}{3} < \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^1S_0) > . \end{aligned} \tag{3.3.63}$$

No caso de um elemento de matriz da forma $< \chi^\dagger \sigma^i \psi \, \mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)} \, \psi^\dagger \sigma^j \chi >$ nós temos os dois índices vetoriais i, j, mais os índices λ no *ket* e λ no *bra* que podem ser relacionados com os índices cartesianos l e k através das matrizes de transformação $U^\dagger_{l\lambda}$ e $U_{\lambda k}$. Neste caso, nós podemos construir os três tensores invariantes: $U_{\lambda k} U^\dagger_{l\lambda} \, \delta^{ki} \, \delta^{lj}$, $U_{\lambda k} U^\dagger_{l\lambda} \, \delta^{kj} \, \delta^{il}$ e $U_{\lambda k} U^\dagger_{l\lambda} \, \delta^{kl} \, \delta^{ij}$. Ao realizar a soma sobre as polarizações λ e lembrando que a matriz U é unitária, ou seja, $U U^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{1}$, o único tensor invariante é o δ^{ij}. Logo, temos:

$$\begin{aligned} < \chi^\dagger \sigma^i \psi \, \mathcal{P}_{\psi(\lambda)} \, \psi^\dagger \sigma^j \chi > \;&=\; \frac{1}{3} \, \delta^{ij} < \mathcal{O}_1^{\psi}(^3S_1) > , \\ < \chi^\dagger \sigma^i T^a \psi \, \mathcal{P}_{\psi(\lambda)} \, \psi^\dagger T^a \sigma^j \chi > \;&=\; \frac{1}{3} \, \delta^{ij} < \mathcal{O}_8^{\psi}(^3S_1) > , \\ < \chi^\dagger \big(-\frac{i}{2} \overleftrightarrow{D}^i \big) \psi \, \mathcal{P}_{\psi(\lambda)} \, \psi^\dagger \big(-\frac{i}{2} \overleftrightarrow{D}^j \big) \chi > \;&=\; \frac{1}{3} \, \delta^{ij} < \mathcal{O}_1^{\psi}(^1P_1) > , \\ < \chi^\dagger \big(-\frac{i}{2} \overleftrightarrow{D}^i \big) T^a \psi \, \mathcal{P}_{\psi(\lambda)} \, \psi^\dagger \big(-\frac{i}{2} \overleftrightarrow{D}^j \big) T^a \chi > \;&=\; \frac{1}{3} \, \delta^{ij} < \mathcal{O}_8^{\psi}(^1P_1) > , \end{aligned} \tag{3.3.64}$$

onde os elementos de matriz do lado direito estão definidos em (2.3.32) e (2.3.33).

Simetria de Spin

A simetria rotacional é uma simetria exata da NRQCD enquanto que a simetria de spin dos quarks pesados é apenas uma simetria aproximada. Como discutido anteriormente, a NRQCD é uma teoria de campos efetiva que reproduz a QCD precisamente até uma dada ordem em v. Em ordem mais baixa a lagrangiana da NRQCD é apenas $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{leve} + \mathcal{L}_{pesado}$, onde $\mathcal{L}_{leve}$ e $\mathcal{L}_{pesado}$ são dadas em (2.3.3) e (2.3.4), respectivamente. A lagrangiana $\mathcal{L}$ possui simetria

exata no spin dos quarks pesados e permite calcular os elementos de matriz até ordem v^2. Para obter correções de ordens maiores em v é necessário inserir o termo $\delta\mathcal{L}_{bilinear}$ (2.3.5) em $\mathcal{L}$, o que permite calcular os elementos de matriz até uma precisão v^4. Porém, a lagrangiana $\delta\mathcal{L}_{bilinear}$ contém, por exemplo, o termo $\psi^\dagger\,(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\psi - \chi^\dagger\,(\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\chi$ que viola a simetria de spin. Portanto, apenas em cálculos onde se pretende ter precisão de v^2 esta simetria pode ser utilizada na realização de algumas simplificações, por exemplo, a simetria de spin nós permite deduzir relações semelhantes a mostrada abaixo entre os elementos de matriz:

$$< \mathcal{O}_1^{J/\psi}(^3S_1) > \;=\; < \mathcal{O}_1^{J/\psi}(^1S_0) > [1 + O(v^2)]\,, \tag{3.3.65}$$

lembrando que estamos utilizando a notação espectroscópica $^{2S+1}L_J$ dentro dos parênteses.

É possível também utilizar a simetria de spin na simplificação de elementos de matriz da forma $< \chi^\dagger\,\sigma^i\,\psi\,\mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)}\,\psi^\dagger\,\sigma^j\,\chi >$. Como o estado J/ψ possui momento angular orbital $L = 0$ e spin $S = 1$ o índice λ de polarização pode ser considerado como um índice de spin. Então, a simetria de spin implica que o índice λ no *ket* do operador de projeção $\mathcal{P}_{H(\lambda)}$ deve ser relacionado com o índice i, enquanto que o índice λ no *bra* deve ser relacionado com o índice j. A análise tensorial feita anteriormente pode ser repetida e concluímos que este elemento de matriz deve ser proporcional a $U_{\lambda i}\,U^\dagger_{j\lambda}$. Então, em ordem mais baixa em v^2, nós temos:

$$\begin{aligned} < \chi^\dagger\,\sigma^i\,\psi\,\mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)}\,\psi^\dagger\,\sigma^j\,\chi > \;&=\; \frac{1}{3}\,U_{\lambda i}\,U^\dagger_{j\lambda}\;<\mathcal{O}_1^{\psi}(^3S_1)>\,,\\ < \chi^\dagger\,\sigma^i\,T^a\,\psi\,\mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)}\,\psi^\dagger\,\sigma^j\,T^a\,\chi > \;&=\; \frac{1}{3}\,U_{\lambda i}\,U^\dagger_{j\lambda}\;<\mathcal{O}_8^{\psi}(^3S_1)>\,. \end{aligned} \tag{3.3.66}$$

O raciocínio pode ser repetido para elementos de matriz com mais índices vetoriais do tipo $< \chi^\dagger\,\sigma^i\,(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^m)\,\psi\,\mathcal{P}_{\psi(\lambda)}\,\psi^\dagger\,\sigma^j\,(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^n)\,\chi >$. Neste caso, simetria de rotação e spin implicam que o elemento de matriz deve ser proporcional a $\delta^{mn}\,U_{\lambda i}\,U^\dagger_{j\lambda}$. Logo:

$$< \chi^\dagger\,\sigma^i\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^m\right)\psi\,\mathcal{P}_{J/\psi(\lambda)}\,\psi^\dagger\,\sigma^j\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^n\right)\chi > \;=\; 4\,U_{\lambda i}\,U^\dagger_{j\lambda}\,\delta^{mn}\;<\mathcal{O}_1^{J/\psi}(^3P_0)>, \tag{3.3.67}$$

e,

$$< \chi^\dagger\,\sigma^i\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^m\right)T^a\,\psi\,\mathcal{P}_{\psi(\lambda)}\,\psi^\dagger\,\sigma^j\left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^n\right)T^a\,\chi > =$$

$$4\,U_{\lambda i}\,U^\dagger_{j\lambda}\,\delta^{mn}\;<\mathcal{O}_8^{\psi}(^3P_0)>\,, \tag{3.3.68}$$

onde os elementos de matriz do lado direito das igualdades foram definidos em (2.3.33).

3.3.4 Simplificação das seções de choque

As expressões das seções de choque dadas em (3.3.54) e (3.3.59) são simplificadas quando é realizada a soma sobre a polarização λ e as simetrias são consideradas. Para isso nós iremos

utilizar as seguintes propriedades da matriz $U_{\lambda i}$ definida em (3.3.61):

$$\begin{aligned}
\sum_i U_{\lambda i}\, U^\dagger_{i\lambda} &= \delta_{\lambda\lambda}\,, \\
\sum_i U^\dagger_{i\lambda}\, \hat{z}^i &= \delta_{\lambda 0}\,, \\
\sum_i U_{\lambda i}\, \hat{z}^i &= \delta_{\lambda 0}\,.
\end{aligned} \tag{3.3.69}$$

Como ilustração, considere o termo abaixo contido na seção de choque (3.3.54):

$$\Big[(\delta^{mn} - \hat{z}^m \hat{z}^n)(\delta^{ij} - \hat{z}^i \hat{z}^j) + (\delta^{mj} - \hat{z}^m \hat{z}^j)(\delta^{ni} - \hat{z}^n \hat{z}^i) + \delta^{mi}\delta^{nj}$$

$$- (\delta^{mi} - \hat{z}^m \hat{z}^i)(\delta^{nj} - \hat{z}^n \hat{z}^j) \Big] < \chi^\dagger \left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^m\right) \sigma^i\, \psi\, \mathcal{P}_{H(\lambda)}\, \psi^\dagger \left(-\frac{i}{2}\overleftrightarrow{D}^n\right) \sigma^j\, \chi > .$$

A forma simplificada do elemento de matriz presente na expressão acima está dada em (3.3.67). Realizando esta substituição e utilizando as propriedades (3.3.69) nós obtemos que o coeficiente da expressão é da forma:

$$3 - 3\,\delta_{\lambda 0} + \delta_{\lambda 0}\,, \tag{3.3.70}$$

ao realizar a soma sobre a polarização λ e lembrando que no caso do J/ψ, $\lambda = -1, 0, 1$, o termo dado acima vale 7.

Simplificações análogas podem ser feitas para os demais elementos de matriz e, desta forma, obtemos as seguintes expressões para as seções de choque não polarizadas:

$$\hat{\sigma}_{q\bar{q}\to J/\psi} = \delta(\hat{s} - 4m_c^2)\, \frac{2\pi^3 \alpha_s^2}{27 m_c^3} < \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^3S_1) >\,, \tag{3.3.71}$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{gg\to J/\psi} &= \delta(\hat{s} - 4m_c^2)\, \frac{\pi^3 \alpha_s^2}{36 m_c^3} \Big\{ < \mathcal{O}_1^{J/\psi}(^1S_0) > + \frac{15}{8} < \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^1S_0) > \\
&+ \frac{7}{m_c^2} < \mathcal{O}_1^{J/\psi}(^3P_0) > + \frac{105}{8m_c^2} < \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^3P_0) > + \frac{9}{8m_c^2} < \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^1P_1) > \Big\}.
\end{aligned} \tag{3.3.72}$$

onde $\hat{s} \equiv (k_a + k_b)^2$ e k_a, k_b são os quadri-momentos das partículas iniciais. Os operadores $\mathcal{O}$ foram definidos em (2.3.32) e (2.3.33).

No caso particular do J/ψ utilizando o procedimento apresentado na subseção (2.3.4) nós podemos concluir que o elemento de matriz dominante é o $< \mathcal{O}_1^{J/\psi}(^3S_1) >$ que é de ordem v^3, já os elementos de matriz $< \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^3P_J) >$, $< \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^3S_1) >$ e $< \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^1S_0) >$ escalam com v^7 e os demais elementos são suprimidos por potências adicionais de v. Desta forma, em ordem mais baixa em v, nós temos:

$$\hat{\sigma}_{gg\to J/\psi} = \frac{5\pi^3 \alpha_s^2}{12(2m_c)^3}\, \delta(\hat{s} - 4m_c^2) \left[< \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^1S_0) > + \frac{7}{m_c^2} < \mathcal{O}_8^{J/\psi}(^3P_0) > \right]. \tag{3.3.73}$$

A expressão mostrada acima será utilizada no próximo capítulo onde realizaremos a comparação entre as previsões da NRQCD e os dados experimentais de hadroprodução.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
4512
INSTITUTO DE FÍSICA

Capítulo 4

Análise dos dados experimentais

4.1 Análise com o CEM

No modelo de evaporação de cor (CEM) a seção de choque de produção σ_H de um estado de charmonium H é dada pela expressão (2.2.2) e é da forma:

$$\sigma_H = \rho_H \, \sigma_{fechado} \, , \tag{4.1.1}$$

com $\sigma_{fechado}$ dada em (2.2.1):

$$\sigma_{fechado} = \int_{2m_c}^{2m_D} dm \, \frac{d\sigma_{c\bar{c}}}{dm} \, , \tag{4.1.2}$$

onde m_c é a massa do quark charme, m_D é a massa do méson D mais leve e $\sigma_{c\bar{c}}$ é a seção de choque de produção de um par $c\bar{c}$ em qualquer estado de cor e spin.

O modelo CEM supõe, em primeira aproximação, que os coeficientes ρ_H são constantes e universais, ou melhor, são independentes do processo. Uma consequência imediata desta hipótese é que os parâmetros $C^H_{H'}$ definidos abaixo são também constantes universais:

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_{H'}} = \frac{\rho_H}{\rho_{H'}} \equiv C^H_{H'} \, , \tag{4.1.3}$$

onde H e H' são estados de charmonium. Ainda, é bom relembrar que toda a dependência da seção de choque σ_H no processo de produção e nas variáveis cinemáticas do problema como, as energias das partículas iniciais, está contida no cálculo de $\sigma_{fechado}$.

A Figura (4.1.1) mostra dados experimentais obtidos para o valor da razão $\sigma_{\psi(2S)}/\sigma_{J/\psi}$ em colisões próton-próton e próton-núcleon para diferentes valores da energia do centro de massa $\sqrt{s}$, já na Figura (4.1.2) mostramos, novamente, dados obtidos experimentalmente para a razão $\sigma_{\psi(2S)}/\sigma_{J/\psi}$, porém, agora, em colisões com alvo fixo e em função do número de massa A do alvo.

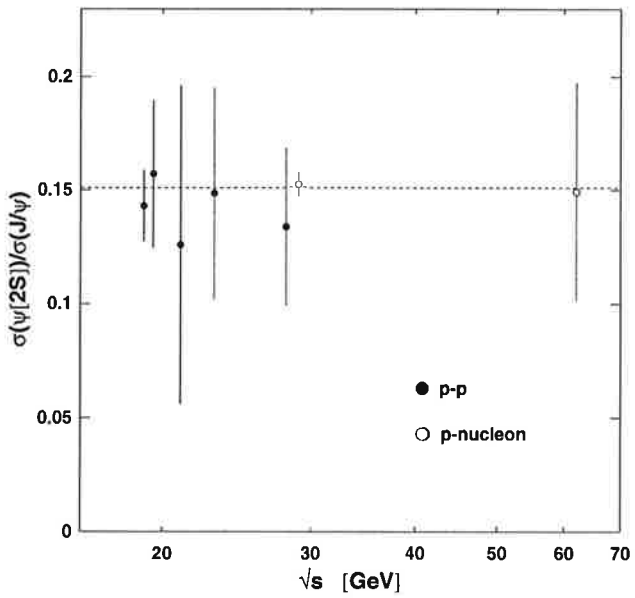


Figura 4.1.1: Razão entre as seções de choque de produção do méson $\psi(2S)$ e do méson J/ψ em colisões próton-próton e próton-núcleon como função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. Ajustando a constante $C_{J/\psi}^{\psi'}$ definida em (4.1.3) aos dados, obtivemos $C_{J/\psi}^{\psi(2S)} = 0,151\,(5)$. Os dados foram retirados de [21].

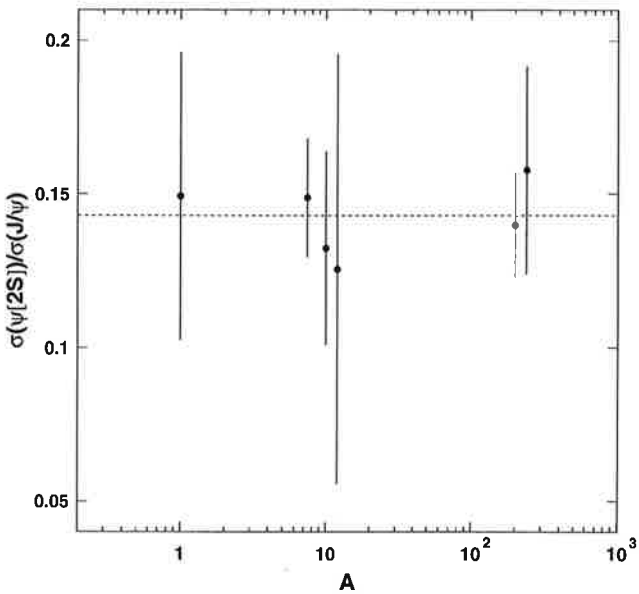


Figura 4.1.2: Razão entre as seções de choque de produção do méson $\psi(2S)$ e do méson J/ψ em colisões de alvo fixo como função do número de massa A do alvo. Os dados foram retirados de diferentes experimentos com energia do centro de massa na faixa $20 \leq \sqrt{s} \leq 40$ GeV [21]. O ajuste de uma constante ao conjunto de dados nos forneceu $C_{J/\psi}^{\psi(2S)} = 0,143\,(10)$.

O modelo CEM, como dito anteriormente, prevê que a grandeza $C_{J/\psi}^{\psi(2S)}$ definida em (4.1.3) é constante e universal. A Figura (4.1.1) mostra os valores medidos para a razão entre as seções de choque de produção de $\psi(2S)$ e de J/ψ para diferentes valores da energia do centro de massa $\sqrt{s}$ e, também, o ajuste feito para $C_{J/\psi}^{\psi(2S)}$. Verifica-se que uma constante descreve bem todo o conjunto de dados independentemente do valor de $\sqrt{s}$ e este resultado está de acordo com a previsão do CEM de que a grandeza $C_{J/\psi}^{\psi(2S)}$ deve ser constante. Ainda, o ajuste feito ao conjunto de dados mostrado na primeira figura nos forneceu $C_{J/\psi}^{\psi(2S)} = 0,151\,(5)$ e, no caso da segunda figura nós obtivemos $C_{J/\psi}^{\psi(2S)} = 0,143\,(10)$. Os valores acima são compatíveis entre si o que, novamente, está de acordo com as previsões do CEM. A hipótese de que $C_{J/\psi}^{\psi(2S)}$ deve ser universal é, também, verificada nos conjuntos de dados mostrados em ambas as figuras, já que uma constante descreve de maneira satisfatória os dados e as figuras contêm resultados de diferentes processos; a Figura (4.1.1) contém dados de colisões próton-próton e próton-núcleon e a Figura (4.1.2) contém resultados de experimentos com alvo fixo para diferentes alvos compostos por elementos com números de massa A.

O CEM prevê que a seção de choque de produção σ_H de um estado de charmonium H é proporcional a seção de choque $\sigma_{fechado}$ dada em (2.2.1) e, portanto, ambas possuem a mesma dependência com a energia do centro de massa $\sqrt{s}$. No caso específico de hadroprodução o cálculo de $\sigma_{fechado}$ em ordem mais baixa em α_s é realizado utilizando as expressões para as seções de choque diferenciais dos subprocessos de partons $q\bar{q} \to c\bar{c}$ e $gg \to c\bar{c}$ dadas em (3.1.7) e (3.1.9), respectivamente. Estas expressões são utilizadas para calcular $\sigma_{c\bar{c}}$ na expressão para $\sigma_{fechado}$ com o auxílio da fórmula geral para a seção de choque de partons (1.1.28). O resultado final é obtido realizando as integrações em x_a, x_b e $\hat{t}$ e levando em conta que a massa invariante m do par $c\bar{c}$ inicialmente produzido deve pertencer ao intervalo $m_c \leq m \leq m_D$.

As integrais foram realizadas numericamente e utilizamos as seguintes funções de distribuição de partons para o próton: MRS D-' com o valor para a massa do quark charme $m_c = 1,2$ GeV e com a escala de renormalização μ fixa em $\mu = 2\,m_c$; GRV HO com $m_c = 1,3$ GeV e $\mu = m_c$;CTEQ3 LO com $m_c = 1,5$ GeV e $\mu = 2\,m_c$ e CTEQ6 LO com $m_c = 1,3$ GeV e $\mu = 2\,m_c$. No caso dos píons a função de distribuição SMRS P2 foi utilizada. Os resultados dos ajustes aos dados experimentais utilizando as diferentes funções de distribuição para o próton diferiram por no máximo 6% e, portanto, nas Figuras (4.1.3) até (4.1.6) estão mostrados apenas os resultados do ajuste para a função de distribuição CTEQ6 LO.

Uma vez obtida a seção de choque $\sigma_{fechado}$ ela pode ser substituída na expressão dada em (2.2.2) para a obtenção da seção de choque de produção σ_H em função da constante multiplicativa ρ_H. O valor de ρ_H pode ser obtido através do ajuste aos dados experimentais de produção de charmonium utilizando o método dos mínimos quadrados. A Figura (4.1.3) mostra o resultado do ajuste para o caso da seção de choque de produção de J/ψ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ como função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. A grandeza x_F, onde o subscrito F é a abreviação do nome Feynman, é definida como:

$$x_F \equiv \frac{2\,(x_a - x_b)}{\sqrt{\hat{s}}}\,, \tag{4.1.4}$$

com $\hat{s} = (k_a + k_b)^2$, onde k_a e k_b são os quadri-momentos dos partons iniciais. Ainda, x_a é a fração do momento total do próton carregada pelo parton a e x_b é a fração do momento total carregada pelo parton b pertencente ao núcleon.

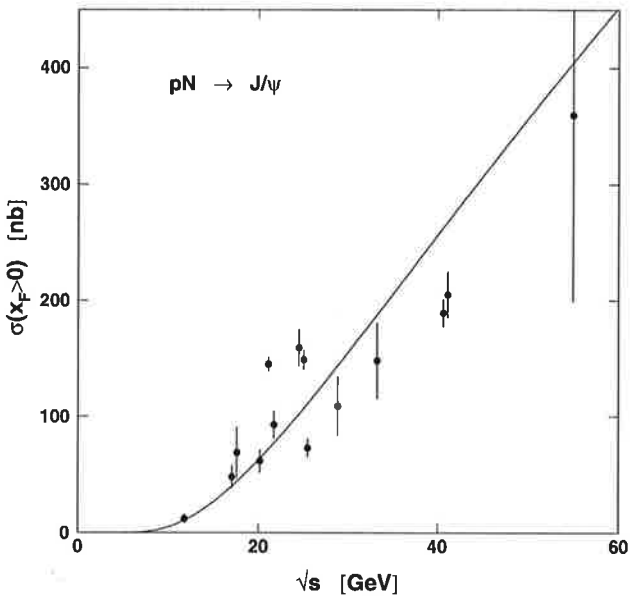


Figura 4.1.3: Seção de choque de produção de J/ψ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia no centro de massa $\sqrt{s}$. Para a realização do ajuste a relação $\sigma_{J/\psi} = \rho_{J/\psi}\, \sigma_{fechado}$ foi utilizada e obtivemos $\rho_{J/\psi} = 0,0353\,(10)$. A curva foi gerada com a função de distribuição CTEQ6 LO. Os dados foram retirados de [22].

Apesar do conjunto dos dados experimentais presente na figura acima mostrarem uma grande dispersão para energias do centro de massa da ordem $\sqrt{s} \sim 25$ GeV, verifica-se que o modelo de evaporação de cor descreve satisfatoriamente os dados e prevê corretamente o aumento da seção de choque de produção de J/ψ com o aumento da energia $\sqrt{s}$. Desta forma, podemos concluir, que a hipótese do modelo que o parâmetro $\rho_{J/\psi}$ é constante e, portanto, independente de $\sqrt{s}$, é razoável neste caso de hadroprodução de J/ψ que estamos considerando.

A validade da relação $\sigma_H = \rho_H\, \sigma_{fechado}$ pode ser testada no caso da hadroprodução de outros estados de charmonium além do J/ψ mostrado na Figura (4.1.3). Na Figura (4.1.4) estão mostrados os valores medidos da seção de choque de produção de $\psi(2S)$ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. A previsão do modelo CEM para o valor da seção de choque de produção de $\psi(2S)$ está mostrada na figura acima onde a curva foi obtida a partir da relação $\sigma_{\psi(2S)} = \rho_{\psi(2S)}\, \sigma_{fechado}$ com o valor da constante $\rho_{\psi(2S)}$ calculada com o método dos mínimos quadrados.

A expressão para $\sigma_{fechado}$ utilizada no ajuste aos dados de produção de $\psi(2S)$ é o mesma utilizada no caso anterior de produção de J/ψ, já que as partículas iniciais e os processos de partons relevantes são iguais em ambos os casos. Desta forma, as curvas para $\sigma_{J/\psi}$ e $\sigma_{\psi(2S)}$ mostradas nas Figuras (4.1.3) e (4.1.4), respectivamente, diferem apenas pelos valores das constantes $\rho_{\psi'}$ e $\rho_{J/\psi}$.

Novamente, apesar dos dados experimentais mostrados na Figura (4.1.4) possuírem grandes incertezas, verifica-se que o CEM descreve satisfatoriamente os dados de hadroprodução de $\psi(2S)$ com apenas um parâmetro livre independente de $\sqrt{s}$ que é o $\rho_{\psi(2S)}$.

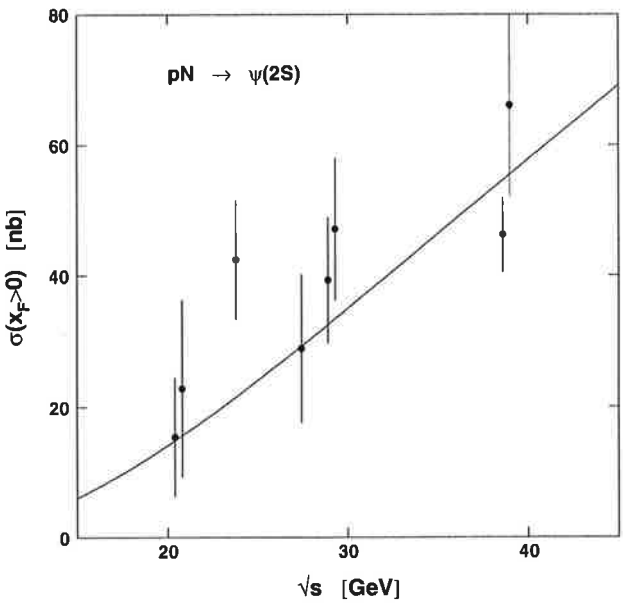


Figura 4.1.4: Seção de choque de produção de $\psi(2S)$ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. Para a realização do ajuste a relação $\sigma_{\psi(2S)} = \rho_{\psi(2S)}\,\sigma_{fechado}$ foi utilizada e obtivemos $\rho_{\psi(2S)} = 0,0081\,(7)$. A curva mostrada foi gerada com a função de distribuição CTEQ6 LO. Os dados foram retirados de [20].

A relação $\sigma_H = \rho_H\,\sigma_{fechado}$ é geral e, portanto, deve ser válida para outros processos de produção além das colisões próton-núcleon consideradas nas Figuras (4.1.3) e (4.1.4). Na Figura (4.1.5) está mostrado o ajuste aos dados experimentais para a seção de choque de produção de J/ψ em colisões píon-núcleon com $x_F > 0$ e como função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. Para analisar os dados neste caso é necessário recalcular o valor da seção de choque $\sigma_{fechado}$ que depende do processo. Porém, como os subprocessos de partons relevantes na produção de charmonium em colisões píon-núcleon e próton-núcleon são os mesmos, é necessário apenas trocar a função de distribuição de parton do próton pela função de distribuição do píon.

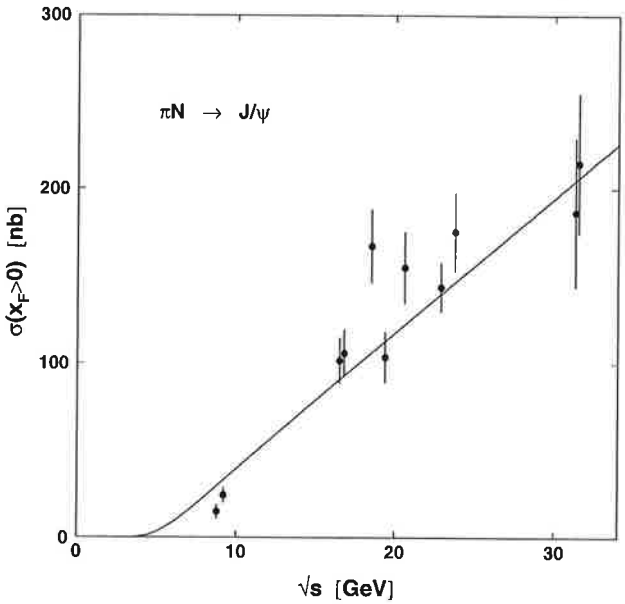


Figura 4.1.5: Seção de choque de produção de J/ψ em colisões píon-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. Para a realização do ajuste a relação $\sigma_{J/\psi} = \rho_{J/\psi}\ \sigma_{fechado}$ foi utilizada e obtivemos $\rho_{J/\psi} = 0,0361\,(9)$. A curva mostrada foi gerada com as funções de distribuição SMRS P2/CTEQ6 LO. Os dados foram retirados de [21].

Os dados obtidos experimentalmente para a seção de choque de produção de J/ψ em colisões píon-núcleon mostrados na Figura (4.1.5) estão concentrados em valores da energia do centro de massa da ordem $\sqrt{s} \sim 20$ GeV e são bem dispersos nesta escala de energia. Para energias da ordem $\sqrt{s} \sim 10$ GeV existem apenas dois dados que, no entanto, possuem incertezas pequenas, e para energias maiores da ordem $\sqrt{s} \sim 30$ GeV os dados também são escassos e neste caso possuem grandes incertezas. A curva mostrada na Figura (4.1.5) é a previsão do CEM para a seção de choque e verificamos, apesar da baixa qualidade do conjunto de dados, que o modelo descreve também adequadamente a produção de J/ψ em colisões píon-núcleon e reproduz corretamente a tendência da seção de choque de aumentar com a energia $\sqrt{s}$.

O modelo CEM também faz previsões para os valores das seções de choque diferenciais de produção de charmonium. Considere, novamente, a expressão (4.1.1). É possível diferenciar ambos os lados da igualdade e dado que os parâmetros ρ são supostos constantes, nós obtemos:

$$\frac{d\sigma_H}{dy} = \rho_H \frac{d\sigma_{fechado}}{dy}, \tag{4.1.5}$$

onde podemos tomar y como sendo, por exemplo, a rapidez do centro de massa que é definida para um subprocesso de partons como:

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{x_a}{x_b}, \tag{4.1.6}$$

com x_a (x_b), em uma colisão entre os hádrons A e B, a fração do quadri-momento do hádron A (B) carregada pelo parton a (b).

Na Figura (4.1.6) são mostrados os dados medidos para a seção de choque diferencial $d\sigma/dy$ de produção de J/ψ para $y = 0$ em colisões próton-núcleon como função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$.

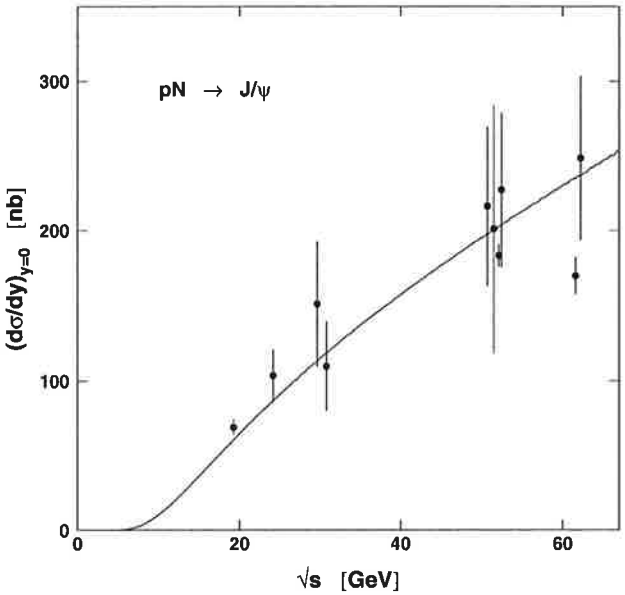


Figura 4.1.6: Seção de choque diferencial $d\sigma/dy$ de produção de J/ψ para $y = 0$ em colisões próton-núcleon como função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. Para a realização do ajuste utilizamos a relação $d\sigma/dy = \rho_{J/\psi}\, d\sigma_{fechado}/dy$ e obtivemos $\rho_{J/\psi} = 0,0346\,(4)$. A curva mostrada foi gerada com a função de distribuição CTEQ6 LO. Os dados foram retirados de [21].

No caso da Figura (4.1.6) mostrada acima onde foi realizado o ajuste aos dados experimentais da seção de choque diferencial $d\sigma/dy$ de produção de J/ψ para $y = 0$, verifica-se que a maior parte dos dados situam-se sobre a curva ajustada. Portanto, neste caso, necessitaríamos de um novo conjunto de dados com menores incertezas para podermos concluir se o CEM descreve satisfatoriamente ou não a distribuição $(d\sigma/dy)_{y=0}$ no caso da hadroprodução de J/ψ.

De maneira geral, apesar dos conjuntos de dados experimentais mostrados nas Figuras (4.1.1) até (4.1.6) possuírem grandes incertezas e apresentarem em muitos casos grande dispersão, nós podemos concluir, em vista dos resultados obtidos nesta seção, que o modelo de evaporação descreve satisfatoriamente a hadroprodução de charmonium. No entanto, é bom ressaltar que para termos uma conclusão definitiva sobre a validade das previsões do CEM seriam necessários dados mais consistentes.

4.2 Análise com a NRQCD e com o CSM

No capítulo 3, mais precisamente nas seções (3.2) e (3.3), nós obtivemos as seções de choque de produção de J/ψ no caso dos processos $q\bar{q} \to J/\psi X$ e $gg \to J/\psi X$ com o CSM e com

a NRQCD. A contribuição dos termos de octeto de cor estão dadas em ordem mais baixa em v^2 e α_s em (3.3.71) e (3.3.73) e o resultado está repetido abaixo:

$$\hat{\sigma}_{q\bar{q}\to J/\psi} = \frac{16\pi^3\alpha_s^2}{27\,(2m_c)^3}\,\delta(\hat{s}-4m_c^2)\;<\mathcal{O}_8^{J/\psi}(^3S_1)>\,, \tag{4.2.1}$$

e,

$$\hat{\sigma}_{gg\to J/\psi} = \frac{5\pi^3\alpha_s^2}{12\,(2m_c)^3}\,\delta(\hat{s}-4m_c^2)\left[<\mathcal{O}_8^{J/\psi}(^1S_0)> + \frac{7}{m_c^2}<\mathcal{O}_8^{J/\psi}(^3P_0)>\right]\,, \tag{4.2.2}$$

onde $\hat{s} \equiv (k_a + k_b)^2$, com k_a e k_b os quadri-momentos das partículas iniciais. Os operadores $\mathcal{O}$ foram definidos em (2.3.32) e (2.3.33).

A contribuição do termo de singleto de cor está dada em (3.2.5) e vale:

$$\hat{\sigma}_{gg\to J/\psi} = \frac{20\pi^2\alpha_s^3}{81(2m_c)^5}\,\Theta(\hat{s}-4m_c^2)\;<\mathcal{O}_1^{J/\psi}(^3S_1)>\;I(z)\,, \tag{4.2.3}$$

com

$$I(z) = z^2\left[\frac{1-z^2+2\ln z}{(1-z)^2} + \frac{1-z^2-2z\ln z}{(1+z)^3}\right]\,,$$

ainda, $z \equiv (2m_c)^2/\hat{s}$ e Θ é a função de Heaviside.

Para simplificar a notação, realizaremos a seguinte definição:

$$\Delta_8(H) \equiv <\mathcal{O}_8^H(^1S_0)> + \frac{7}{m_c^2}<\mathcal{O}_8^H(^3P_0)>\,, \tag{4.2.4}$$

onde H é um estado de charmonium. A combinação de elementos de matriz presente na definição acima aparece na seção de choque (4.2.2).

A seção de choque de produção de J/ψ em colisões hádron-hádron com a NRQCD e com o CSM é obtida substituindo as seções de choque para os processos de partons mostradas em (4.2.1), (4.2.2) e (4.2.3) na fórmula geral dada em (1.1.28) e realizando as integrais em x_a e x_b. As seguintes funções de distribuição de partons para o próton foram utilizadas: MRS D-' com o valor para a massa do quark charme $m_c = 1,2$ GeV e com a escala de renormalização μ fixa em $\mu = 2m_c$; GRV HO com $m_c = 1,3$ GeV e $\mu = m_c$; CTEQ3 LO com $m_c = 1,5$ GeV e $\mu = 2m_c$; e CTEQ6 LO com $m_c = 1,3$ GeV e $\mu = 2\,m_c$. Os resultados dos ajustes aos dados experimentais utilizando as diferentes funções de distribuição para o próton diferiram por no máximo 5% e, portanto, nas Figuras (4.2.1) e (4.2.2) estão mostrados apenas os resultados para a função de distribuição CTEQ6 LO.

Para a realização dos ajustes utilizamos os valores para os elementos de matriz dados na Tabela (4.2) que foram obtidos em medições precisas das larguras de decaimento de charmonium [20], já os valores dos parâmetros Δ_8^H definidos em (4.2.4) foram fitados.

EM $(\text{GeV})^3$	J/ψ	$\psi(2S)$
$<\mathcal{O}_1^H(^3S_1)>$	$1,16$	$0,76$
$<\mathcal{O}_8^H(^3S_1)>$	$6,6\cdot10^{-3}$	$4,6\cdot10^{-3}$

Tabela 4.1: Elementos de matriz utilizados nos ajustes aos dados experimentais de produção de charmonium [20].

Na Figura (4.2.1) estão mostrados os dados obtidos experimentalmente para a seção de choque de produção de J/ψ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$ e, também, as previsões dos modelos NRQCD e CSM. O conjunto de dados da Figura (4.2.1) é o mesmo da Figura (4.1.3).

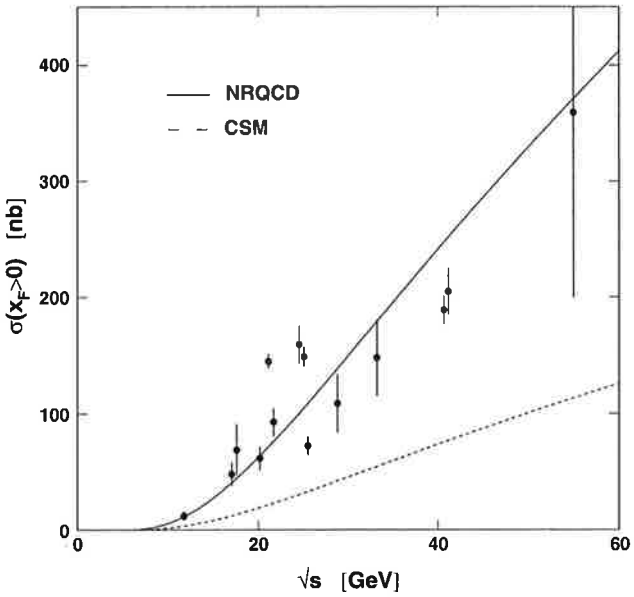


Figura 4.2.1: Seção de choque de produção de J/ψ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. As curvas foram geradas com a função de distribuição CTEQ6 LO. A linha segmentada mostra a contribuição do CSM enquanto que a linha contínua mostra a previsão da seção de choque quando há a inclusão de termos de octeto de cor - NRQCD. O ajuste realizado forneceu $\Delta_8(J/\psi) = 0,030\,(8)$ GeV^3.

A Figura 4.2.1 mostra as previsões da NRQCD e do modelo CSM para a seção de choque de produção de J/ψ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$. Apesar dos dados experimentais apresentarem grande dispersão para energias do centro de massa da ordem $\sqrt{s} \sim 25$ GeV, nós podemos concluir que o modelo CSM subestima o valor da seção de choque, no sentido, que todos os dados presentes na figura situam-se acima da curva segmentada que mostra a previsão do CSM, ainda, verificamos que o desvio dos dados em relação a curva aumenta para valores da energia $\sqrt{s}$ maiores. Desta forma, nós concluímos que a inclusão dos termos de octeto de cor, ou seja, a realização do ajuste com a NRQCD, é essencial para uma descrição adequada da produção de J/ψ em colisões hádron-hádron.

É possível, também, calcular a seção de choque de produção de $\psi(2S)$. Para isto basta substituir o J/ψ por $\psi(2S)$ nos elementos de matriz e obtemos expressões análogas as (4.2.1), (4.2.2) e (4.2.3) para a seção de choque de produção de $\psi(2S)$. Esta substituição é justificada pelo fato dos estados $\psi(2S)$ e J/ψ possuírem o mesmo spin e momento angular orbital e, portanto, todo o processo de simplificação das seções de choque descrito nas subseções (4.3.3) e (4.3.4) para o caso do J/ψ vale para o $\psi(2S)$.

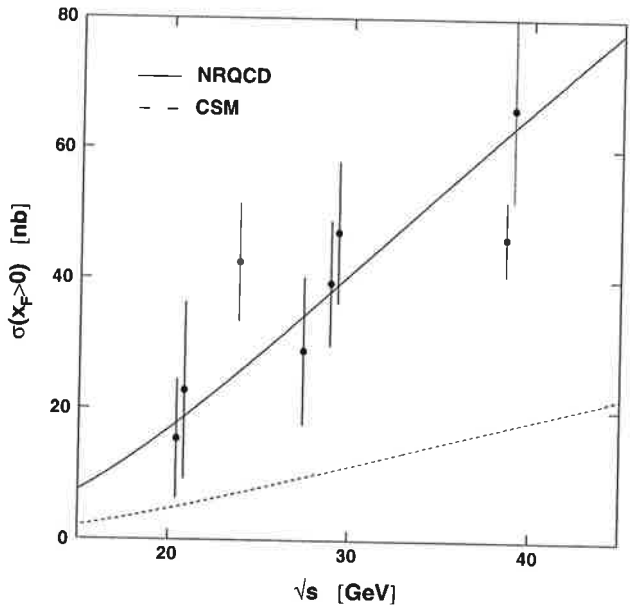


Figura 4.2.2: Seção de choque de produção de $\psi(2S)$ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. As curvas foram geradas com a função de distribuição CTEQ6 LO. A linha segmentada mostra a contribuição do CSM enquanto que a linha contínua mostra a previsão da seção de choque quando há a inclusão de termos de octeto de cor - NRQCD. O ajuste realizado forneceu $\Delta_8(\psi[2S]) = 0,004\,(6)$ GeV^3.

O conjunto de dados da Figura (4.2.2) é o mesmo do da Figura (4.1.4) e mostra os resultados experimentais para a seção de choque de produção de $\psi(2S)$ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. A Figura mostra, também, as previsões dos modelos CSM e NRQCD. Novamente, apesar das grandes incertezas dos dados, nós verificamos que o CSM subestima os valores da seção de choque de produção e todos os dados situam-se acima da curva segmentada, para energias da ordem $\sqrt{s} \sim 40$ GeV a discrepância entre a previsão do CSM e os dados chega a um fator de 5. A NRQCD, por sua vez, descreve de maneira satisfatória todo o conjunto de dados, e desta forma, igualmente concluímos que os termos de octeto de cor não podem ser negligenciados no caso da hadroprodução de $\psi(2S)$.

De maneira geral, em vista dos resultados apresentados nas Figuras (4.1.1) até (4.2.2), nós podemos concluir que os modelos CEM e NRQCD descrevem adequadamente a hadroprodução de charmonium e que o CSM não descreve bem o conjunto de dados mostrados. Ambos os resultados para o CSM apresentados nas Figuras (4.2.1) e (4.2.2) mostram que o modelo subestima as seções de choque de produção de charmonium e isso sugere que as contribuições dos termos de octeto de cor são importantes e não podem ser desprezadas. Apesar dos ajustes da NRQCD e do CEM para a seção de choque de produção de J/ψ e $\psi(2S)$ terem sido realizadas com o mesmo conjunto de dados é difícil comparar os dois modelos e concluir qual deles dá uma descrição mais adequada da produção de charmonium nos casos considerados. Isto deve-se ao fato que os conjuntos de dados utilizados ou apresentam grande dispersão ou possuem grandes incertezas o que inviabiliza uma comparação direta entre os modelos CEM e NRQCD apenas com os resultados apresentados neste trabalho. É bom ressaltar que conclusões definitivas sobre a validade dos modelos CSM, CEM e NRQCD para a descrição

da produção de charmonium exigiriam conjuntos de dados mais consistentes e é, também, necessário estimar a magnitude das correções de ordens mais alta em teoria de perturbação, já que realizamos apenas os cálculos em ordem mais baixa em α_s e v^2.

Conclusão

Neste trabalho foi calculada a produção de charmonium em colisões hádron-hádron em experimentos de alvo fixo com os três modelos: modelo de singleto de cor (CSM), modelo de evaporação de cor (CEM) e QCD não relativística (NRQCD). As previsões dos modelos foram comparadas com dados experimentais de hadroprodução [20, 21, 22] e os resultados estão mostrados no conjunto de Figuras (4.1.1) até (4.2.2).

As previsões do modelo CSM para a seção de choque de produção de J/ψ e $\psi(2S)$ com $x_F > 0$ em colisões próton-núcleon em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$ estão mostradas nas Figuras (4.2.1) e (4.2.2), respectivamente. Verifica-se que todos os dados situam-se acima da curva prevista pelo CSM e, portanto, o modelo subestima o valor das seções de choque de produção nos dois casos. Ainda, as figuras mostram que conforme a energia $\sqrt{s}$ aumenta, os desvios entre a curva descrita pelo CSM e os dados experimentais tornam-se maiores chegando a um fator de 4 no caso do J/ψ para energias da ordem $\sqrt{s} \approx 55$ GeV e um fator de 5 no caso do $\psi(2S)$ para energias da ordem $\sqrt{s} \approx 40$ GeV. Desta forma, nós podemos concluir que o CSM não descreve adequadamente os dados de hadroprodução de charmonium apresentados neste trabalho até a ordem em α_s em teoria de perturbação considerada. Existem outras evidências experimentais que suportam a idéia de que o CSM em muitos casos subestima o valor da seção de choque de produção de charmonium [17], a primeira delas foi obtida em 1995 pela colaboração do CDF [11, 12] que mediu a seção de choque de produção de J/ψ e $\psi(2S)$ em colisões $p\bar{p}$ para uma energia do centro de massa de $\sqrt{s} = 1,8$ TeV e foi verificado posteriormente que a seção de choque medida é cerca de uma ordem de grandeza maior do que o valor previsto para este caso pelo CSM.

Os ajustes aos dados experimentais feitos com o CEM estão mostrados no conjunto das Figuras (4.1.1) até (4.1.6). De maneira geral, podemos concluir que o CEM descreve satisfatoriamente os dados de hadroprodução de charmonium e que a hipótese de que os parâmetros ρ_H definidos em (2.2.2) são constantes universais é razoável para os casos considerados. No entanto, uma conclusão definitiva da validade das previsões do CEM exigiria conjuntos de dados mais consistentes como, por exemplo, no caso mostrado na Figura (4.1.6), onde todos os pontos com a excessão de um deles estão situados sobre a curva prevista pelo modelo, no entanto, a grande maioria dos dados possuem grandes incertezas.

As Figuras (4.2.1) e (4.2.2) mostram, respectivamente, as previsões da NRQCD para as seções de choque de produção de J/ψ e $\psi(2S)$ em colisões próton-núcleon com $x_F > 0$ em função da energia do centro de massa $\sqrt{s}$. Em ambas as figuras, os parâmetros $\Delta_8(H)$ definidos em (4.2.4) foram tratados de forma fenomenológica e os seus valores foram obtidos do ajuste aos dados. Concluímos, em vista dos resultados obtidos, que a NRQCD descreve adequadamente ambos os conjuntos de dados mostrados, o que sugere que os termos de octeto de cor são importantes e não podem ser negligenciados nos casos de hadroprodução considerados.

Todavia, para a obtenção de resultados mais rigorosos seria necessário a inclusão de correções de ordem mais alta em teoria de perturbação, já que os cálculos das seções de choque com a NRQCD foram truncados em ordem mais baixa em α_s e v^2. Ainda, o fato dos dados utilizados nos ajustes apresentarem grande dispersão e possuírem grandes incertezas inviabilizou uma comparação direta entre os modelos CEM e NRQCD, e desta forma, não pudemos concluir qual dos dois modelos é mais adequado.

Apesar de o CEM e a NRQCD descreverem satisfatoriamente os dados mostrados neste trabalho, é possível deduzir que os dois modelos produzem de fato diferentes descrições para o processo de formação de um estado de charmonium H a partir de um par $c\bar{c}$ inicialmente produzido. Para mostrar isto, considere, primeiramente, a fórmula para a seção de choque de produção inclusiva de um estado de charmonium H através do processo $AB \to HX$ dada na NRQCD por:

$$\sigma^{NRQCD}_{AB\to HX} = \sum_{m,n} C_{mn} < \mathcal{O}^H_{mn}(^{2s+1}L_J) > , \tag{4.2.5}$$

onde C_{mn} são os coeficientes de curta distância dependentes do processo e podem ser determinados pela condição de *matching* como discutido na subseção (3.3.5). Os operadores $\mathcal{O}$ possuem a forma geral:

$$\mathcal{O}^H_{mn} = \chi^\dagger \mathcal{K}'^\dagger_m \psi \left(\sum_X |H+X><H+X| \right) \psi^\dagger \mathcal{K}_n \chi \, . \tag{4.2.6}$$

A mesma seção de choque de produção no modelo CEM é dada por:

$$\sigma^{CEM}_{AB\to HX} = \rho_H \int_{2m_c}^{2m_D} dm \, \frac{d\sigma_{AB\to c\bar{c}X}}{dm} \, . \tag{4.2.7}$$

No caso onde A e B são hádrons o lado direito da expressão (4.2.7) pode ser calculado, como foi visto, em teoria de perturbação da QCD onde são considerados os subprocessos de partons e a fórmula geral (1.1.28). As duas seções de choque dadas em (4.2.5) e (4.2.7) podem ser relacionadas através do cálculo da seção de choque diferencial $d\sigma/dm$ em teoria de perturbação da NRQCD:

$$\frac{d\sigma^{NRQCD}_{AB\to c\bar{c}+X}}{dm} = \sum_{m,n} C_{mn} \sum_{spin} \sum_{cor} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} < \mathcal{O}^{c\bar{c}(\mathbf{q})}_{mn}(^{2s+1}L_J) > \delta\left(m - 2\sqrt{\mathbf{q}^2 + m_c^2}\right) , \tag{4.2.8}$$

onde o operador $\mathcal{O}^{c\bar{c}(\mathbf{q})}_{mn}(^{2s+1}L_J)$ presente na expressão acima difere do operador $\mathcal{O}^H_{mn}(^{2s+1}L_J)$ dado em (4.2.6) apenas pela substituição do estado de charmonium H pelo estado $c\bar{c}$ onde o quark c e o anti-quark $\bar{c}$ possuem tri-momento $\pm\mathbf{q}$ e estão em um estado de cor e spin determinado pelos espinores ξ e η definidos em (2.3.28). Para simplificar a notação é conveniente fazer a definição:

$$\mathcal{O}^{c\bar{c}}_{mn}[q, {}^{2s+1}L_J] \equiv \chi^\dagger \mathcal{K}'^\dagger_m \psi \left(\int \frac{d\Omega_q}{4\pi} \sum_{spin} \sum_{cor} \mathcal{P}^{c\bar{c}(\mathbf{q})} \right) \psi^\dagger \mathcal{K}_n \chi \, , \tag{4.2.9}$$

com $q = |\mathbf{q}|$, $d\Omega_q$ o elemento de integração angular e

$$\mathcal{P}^{c\bar{c}(\mathbf{q})} = \sum_X |c\bar{c}(\mathbf{q}) + X >< c\bar{c}(\mathbf{q}) + X| .$$

Substituindo (4.2.8) em (4.2.7), utilizando a expressão para a seção de choque dada em (4.2.5) e a definição (4.2.9), nós obtemos:

$$\sum_{m,n} C_{mn} < \mathcal{O}^H_{mn}(^{2s+1}L_J) > = \rho_H \sum_{m,n} C_{mn} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{q_{max}} dq\, q^2 < \mathcal{O}^{c\bar{c}(\mathbf{q})}_{mn}[q,\, ^{2s+1}L_J] > , \quad (4.2.10)$$

com $q_{max} = \sqrt{m_D^2 - m_c^2}$.

A expressão acima estabelece a conexão entre os modelos CEM e NRQCD. Para prosseguir nós notemos que a expressão (4.2.10) vale para qualquer processo de produção de charmonium e como processos distintos possuem diferentes coeficientes C_{mn}, nós podemos concluir, dado que existe um número arbitrariamente grande de processos, que a soma sobre m, n em (4.2.10) deve valer termo a termo, ou melhor:

$$< \mathcal{O}^H_{mn}(^{2s+1}L_J) > = \rho_H \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{q_{max}} dq\, q^2 < \mathcal{O}^{c\bar{c}(\mathbf{q})}_{mn}[q,\, ^{2s+1}L_J] > . \quad (4.2.11)$$

Os elementos de matriz presentes no lado direito da igualdade podem ser calculados com teoria de perturbação de modo semelhante ao que foi feito na seção (4.3.2) para a imposição da condição de *matching*. Repetindo o mesmo procedimento, é possível mostrar que a dependência em $\mathbf{q}$ destes elementos de matriz é governada pelas potências das derivadas covariantes $\mathbf{D}$ presentes em $\mathcal{K}'^{\dagger}_m$ e $\mathcal{K}_n$ nos operadores $\mathcal{O}^{c\bar{c}(\mathbf{q})}_{mn}[q,\, ^{2s+1}L_J]$ definidos em (4.2.9). Para um operador $\mathcal{O}^{c\bar{c}(\mathbf{q})}_{mn}[q,\, ^{2s+1}L_J]$, $\mathcal{K}'^{\dagger}_m$ e $\mathcal{K}_n$, contêm termos do tipo $(\mathbf{D})^L$ e, portanto, o elemento de matriz presente no lado direito da igualdade é proporcional a q^{2L}. Logo, após a realização da integral, nós concluímos que o lado direito da expressão (4.2.11) é proporcional a $q_{max}^{2L+3}/(2L+3)$. Como para um estado ligado $q_{max} \approx m_c v$, nós temos que o elemento de matriz presente do lado esquerdo de (4.2.11) é suprimido por um fator de v^{2L} em relação a um elemento de matriz de um operador com $L = 0$.

Para obter as estimativas mostradas acima para as magnitudes dos elementos de matriz presentes no lado esquerdo de (4.2.11), nós impusemos que o modelo de evaporação de cor é válido e obtivemos uma regra de supressão em potências de v distinta da prevista pela NRQCD. No caso do CEM a regra de supressão é independente do estado de charmonium e depende apenas do momento angular orbital do par $c\bar{c}$ sendo adicionado um fator de v^2 para cada unidade de momento angular. Na Tabela (4.2) estão mostradas as regras de supressão relativas para as magnitudes dos elementos de matriz prevista pela NRQCD e pelo CEM até ordem v^4 para diferentes estados de charmonium.

	1^1S_0	1^3S_1	8^1S_0	8^3S_1	1^1P_1	1^3P_0	1^3P_1	1^3P_2	8^1P_1	8^3P_0	8^3P_1	8^3P_2
						NRQCD						
η_c	1		v^4	v^3					v^4			
J/ψ		1	v^3	v^4						v^4	v^4	v^4
h_c			v^2		v^2							
χ_{c0}				v^2		v^2						
χ_{c1}				v^2			v^2					
χ_{c2}				v^2				v^2				
						CEM						
H	1	1	1	1	v^2	v^2	v^2	v^2	v^2	v^2	v^2	v^2

Tabela 4.2: Regras de supressão relativas para elementos de matriz da forma $< \mathcal{O}^H_{mn}(^{2S+1}L_J) >$ prevista pela NRQCD e pelo CEM, onde H é um estado de charmonium. Na primeira linha foi adotada a convenção $n^{2s+1}L_J$, onde $n = 1, 8$ indica o estado de cor. Na tabela estão mostrados resultados até ordem relativa v^4.

A Tabela (4.2) mostra que o CEM e a NRQCD predizem magnitudes diferentes para os elementos de matriz e, portanto, os modelos descrevem o processo de formação de um estado de charmonium H a partir de um par $c\bar{c}$ inicialmente formado de maneira distinta. Desta forma, como os modelos não são equivalentes, quando dados de hadroprodução de charmonium mais consistentes estiverem disponíveis esperamos distinguir as previsões dos dois modelos e assim estabelecer qual dos dois é mais adequado para a descrição dos dados de hadroprodução.

A continuação imediata deste trabalho seria a realização do cálculo da produção de charmonium com os modelos CSM, CEM e NRQCD para outros processos de produção e, desta forma, ter um número maior de resultados para poder estabelecer uma comparação entre os modelos. Ainda, atualmente, existem dados experimentais de produção de charmonium, abaixo cito alguns deles, que contradizem as previsões da NRQCD e do CEM e sugerem que o nosso entendimento da física de produção de charmonium não é completo. Um trabalho posterior poderia englobar, por exemplo, o estudo de algum dos casos comentados abaixo.

Uma das previsões do CEM é que os coeficientes ρ_H definidos em (2.2.2) são constantes universais. A violação mais drástica a esta predição ocorre para a produção de J/ψ no decaimento $(\chi_{c1} + \chi_{c2}) \rightarrow J/\psi$ onde é medido $\rho_{J/\psi} = 0,11 \pm 0,02$ no caso do decaimento de B's e e é obtido o valor $0,297 \pm 0,017_{esta} \pm 0,057_{sist}$ para medições realizadas no Tevatron [17]; os dois resultados para $\rho_{J/\psi}$ são incompatíveis entre si. Ainda, o fato do CEM assumir que a probabilidade de formação de um estado de charmonium é independente do spin do estado, implica que a produção inclusiva deve ser independente do spin e, portanto, a produção deve ser sempre não polarizada. Esta predição não é verificada, de fato, é observado que a produção de J/ψ em aniquilações e^+e^- em fábricas de $B's$ é polarizada [17].

Algumas previsões da NRQCD também não são verificadas experimentalmente. A colaboração do CDF mediu a polarização da produção de J/ψ em função do momento transversal p_T [19]. Os dados experimentais indicam que há um decréscimo na polarização com o aumento do p_T, enquanto que a NRQCD prediz que a polarização devia crescer monotonicamente [28]. Ainda mais surpreendente são os dados de produção de charmonium obtidos pela colaboração

Belle em aniquilações $e^+ e^-$ com energia do centro de massa $\sqrt{s} = 10,6$ GeV [29]:

$$R_{duplo} \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \to J/\psi + c\bar{c})}{\sigma(e^+e^- \to J/\psi + X)} = 0,82 \pm 0,15 \,, \tag{4.2.12}$$

e,

$$\sigma(e^+e^- \to J/\psi + \eta_c) = 25,6 \pm 2,8 \text{ fb} \,. \tag{4.2.13}$$

A NRQCD prediz $R_{duplo} = 0,1$ e $\sigma(e^+e^- \to J/\psi + \eta_c) = 2,31$ fb [30]. Como pode ser visto, os resultados experimentais e teóricos diferem aproximadamente por uma ordem de grandeza em ambos os casos.

Apêndice A

Propriedades das matrizes λ

As oito matrizes λ_a de Gell-Mann são:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \tag{A.0.1}$$

Elas satisfazem a álgebra:

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2\, i\, f^{abc} \lambda_c , \tag{A.0.2}$$

onde f^{abc} são as constantes de estrutura do grupo SU(3) e a, b, $c = 1, \ldots, 8$. Uma propriedade importante de f^{abc} é a anti-simetria nos índices a, b, c :

$$f^{abc} = -f^{bac} = -f^{acb} . \tag{A.0.3}$$

Devido as propriedades de simetria os valores das constantes f^{abc} não nulos podem ser obtidos do conjunto de valores dado abaixo através da permutação dos índices.

$$f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = f^{516} = f^{637} = \frac{1}{2} ,$$

$$f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

$$f^{123} = 1 . \tag{A.0.4}$$

As matrizes λ_a também satisfazem as relações de anti-comutação:

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2\, d^{abc}\lambda_c \,, \tag{A.0.5}$$

onde d^{abc} são constantes simétricas nos índices a, b, c :

$$d^{abc} = d^{acb} = d^{bac} \,, \tag{A.0.6}$$

e, os valores das constantes d^{abc} não nulos podem ser obtidos do conjunto de valores dado abaixo através da permutação dos índices.

$$\begin{aligned}
d^{146} = d^{157} = d^{256} = d^{344} = d^{355} &= \frac{1}{2} \,, \\
d^{448} = d^{558} = d^{668} = d^{778} &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \,, \\
d^{118} = d^{228} = d^{338} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \,, \\
d^{247} = d^{366} = d^{377} &= -\frac{1}{2} \,, \\
d^{888} &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \,.
\end{aligned} \tag{A.0.7}$$

Apêndice B

Transformação de Foldy-Wouthuysen-Tani

A transformação canônica de Foldy-Wouthuysen-Tani quando aplicada a equação de Dirac desacopla as equações originais em dois conjuntos de equações: uma para o férmion e a outra para o anti-férmion. O método de Foldy-Wouthuysen-Tani também introduz um modo sistemático de inserir correções relativísticas e, portanto, a transformação é conveniente para um tratamento não relativístico.

Neste apêndice iremos aplicar a transformação para o caso de uma teoria de gauge. As derivadas covariantes são definidas como:

$$\begin{aligned} D_t\,\Psi(x) &\equiv [\,\partial_t + ig\Phi(x)\,]\,\Psi(x)\,, \\ \mathbf{D}\,\Psi(x) &\equiv [\,\boldsymbol{\nabla} - ig\mathbf{A}(x)\,]\,\Psi(x)\,, \end{aligned} \tag{B.0.1}$$

onde Φ e $\mathbf{A}$ são os potenciais escalar e vetorial de gauge, respectivamente, e g é a constante de acoplamento.

Os campos elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$ não-abelianos podem ser definidos em termos das derivadas covariantes como dado em (2.3.6):

$$\begin{aligned} [D_t,\,\mathbf{D}]\Psi(x) &\equiv ig\,\mathbf{E}\,\Psi(x)\,, \\ [D_i,\,D_j]\Psi(x) &\equiv -ig\,\epsilon_{ijk}\,B^k\Psi(x)\,. \end{aligned} \tag{B.0.2}$$

Os cálculos da transformação de Foldy-Wouthuysen-Tani são simplificados quando a transformação é aplicada ao hamiltoniano da teoria de Dirac escrito na forma mostrada abaixo:

$$H = \boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p} - g\mathbf{A}) + \beta m + g\Phi = -i\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{D} + \beta m + g\Phi\,, \tag{B.0.3}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ e β são matrizes 4×4. Explicitamente:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \\ \beta &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{B.0.4}$$

com $j = 1, 2, 3$; $\mathbb{1}$ a matriz 2×2 identidade e σ_j as matrizes 2×2 de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.0.5}$$

As matrizes α_j e β possuem as seguintes propriedades importantes que serão úteis nos desenvolvimentos posteriores:

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij}\,, \\ \alpha_i \beta &= -\beta\, \alpha_i\,, \\ \alpha_i^2 = \beta^2 &= \mathbb{1}\,, \\ \alpha_i \alpha_j &= \delta_{ij} + i\, \epsilon_{ijk}\, \sigma^k\,. \end{aligned} \tag{B.0.6}$$

A equação de Dirac na forma convencional escrita com matrizes γ's é obtida simplesmente através das identificações:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \beta\,, \\ \gamma^i &= \beta\, \alpha_i\,. \end{aligned} \tag{B.0.7}$$

Com o intuito de não sobrecarregar a notação, faremos as definições:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &\equiv -i\, \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{D}\,, \\ \mathcal{P} &\equiv g\Phi\,. \end{aligned}$$

Utilizando as propriedades das matrizes α_j e β dadas em (B.0.6), concluímos:

$$\begin{aligned} \beta \mathcal{I} &= -\mathcal{I}\, \beta\,, \\ \beta \mathcal{P} &= \mathcal{P}\, \beta\,. \end{aligned} \tag{B.0.8}$$

Para prosseguirmos é necessário fazer mais uma definição. Considere um espinor de Dirac Ψ. Este espinor pode ser representado como uma matriz coluna com quatro componentes e iremos escrevê-lo na forma:

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}, \tag{B.0.9}$$

onde ψ e χ são espinores com duas componentes.

O hamiltoniano dado em (B.0.3) contém as matrizes α_j que não são bloco diagonais e, como consequência, ocorre o acoplamento de soluções de energia positiva com soluções de energia negativa, ou melhor, entre as componentes dos espinores ψ e χ. Operadores com esta

propriedade serão chamados daqui por diante de ímpares e caso eles sejam bloco diagonais serão chamados pares. A idéia da transformação de Foldy-Wouthuysen-Tani é realizar uma transformação canônica que elimine termos ímpares do hamiltoniano. Isto é possível de ser feito de maneira sistemática ordem por ordem em $1/m$ como será mostrado abaixo. Realizaremos a expansão até ordem $1/m^3$ que é o nosso caso de interesse, já que a lagrangiana $\delta\mathcal{L}_{bilinear}$ dada em (2.3.5) não possui termos superiores a esta ordem.

Considere, novamente, o espinor de Dirac Ψ. Este espinor satisfaz a equação:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = H\Psi\,. \tag{B.0.10}$$

O procedimento para a eliminação de termos ímpares da hamiltoniana H inicia-se com a realização da transformação:

$$\Psi' = e^{iS}\Psi\,, \tag{B.0.11}$$

onde S é uma matriz 4×4 hermitiana.

Substituindo (B.0.11) em (B.0.10), obtemos:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-iS}\Psi'\right) = H\,e^{-iS}\Psi' = e^{-iS}\left(i\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\right) + \left(i\frac{\partial}{\partial t}e^{-iS}\right)\Psi'\,, \tag{B.0.12}$$

e, portanto,

$$i\frac{\partial\Psi'}{\partial t} = \left[e^{iS}\left(H - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS}\right]\Psi' = H'\Psi'\,. \tag{B.0.13}$$

É possível expandir o operador H' definido acima em uma série de múltiplos comutadores. Para realizar a expansão é necessário primeiro provar uma identidade válida para operadores. Considere um operador $\mathcal{A}$ e a função $F(\lambda)$ definida abaixo:

$$F(\lambda) = e^{i\lambda S}\mathcal{A}\,e^{-i\lambda S} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\left(\frac{\partial^n F}{\partial\lambda^n}\right)_{\lambda=0}\,. \tag{B.0.14}$$

Temos:

$$\frac{\partial F}{\partial\lambda} = e^{i\lambda S}\,i\,S\,\mathcal{A}\,e^{-i\lambda S} - e^{i\lambda S}\,i\,\mathcal{A}\,S\,e^{-i\lambda S} = e^{i\lambda S}\,i\,[S,\mathcal{A}]\,e^{-i\lambda S}\,.$$

No caso geral:

$$\frac{\partial^n F}{\partial\lambda^n} = e^{i\lambda S}\,i^n\,[S,[S,\ldots,[S,\mathcal{A}]\ldots]]\,e^{-i\lambda S}\,. \tag{B.0.15}$$

Podemos calcular a função $F(\lambda)$ para $\lambda = 1$. Para este valor de λ e utilizando as expressões para as derivadas da função F dadas (B.0.15), obtemos a partir de (B.0.14):

$$\begin{aligned} e^{iS}\mathcal{A}\,e^{-iS} = \mathcal{A} + i\,[S,\mathcal{A}] \;+\; & \frac{i^2}{2!}\,[S,\,[S,\mathcal{A}]] + \ldots + \\ & + \frac{i^n}{n!}\,[S,\,[S,\,\ldots,[S,\mathcal{A}]\ldots]] + \ldots\,. \end{aligned} \tag{B.0.16}$$

A utilização da expressão dada em (B.0.16) permite realizar uma expansão de H'. Antes de escrever a expansão algumas considerações sobre S devem ser feitas. Como ficará provado com a realização dos cálculos, é possível expandir S em potências de $1/m$ e supor que $S = O(1/m)$ e com isso conseguir a remoção dos termos ímpares do hamiltoniano. Como estamos interessados em uma expansão até ordem $1/m^3$ é necessário apenas reter termos na expansão de H' até esta ordem. Com o auxílio da equação (B.0.16) escrevemos H' até ordem $1/m^3$ como:

$$\begin{aligned} H' = H \; &+ \; i\,[S,H] - \frac{1}{2}[S,[S,H]] - \frac{i}{6}[S,[S,[S,H]]] + \\ &+ \; \frac{1}{24}[S,[S,[S,[S,H]]]] - \dot{S} - \frac{i}{2}[S,\dot{S}] + \frac{1}{6}[S,[S,\dot{S}]]\,, \end{aligned} \tag{B.0.17}$$

onde $\dot{S}$ é a derivada temporal do operador S. Esta notação para a derivada temporal será utilizada daqui por diante.

Da expansão acima vemos que o hamiltoniano H' também pode ser expandido em potências de $1/m$. Em ordem mais baixa, ou seja, ordem da unidade, H' é dado por:

$$H' \;=\; \beta m + \mathcal{P} + \mathcal{I} + i\,[S,\beta]\,m\,. \tag{B.0.18}$$

O termo $\mathcal{I}$ é ímpar e para removê-lo fazemos:

$$S \;=\; \frac{-i}{2m}\beta\mathcal{I}\,. \tag{B.0.19}$$

Para esta escolha de S e com o auxílio das relações de comutação dadas em (B.0.8) e as propriedades das matrizes α_j e β dadas em (B.0.6), obtemos:

$$\begin{aligned} i\,[S,H] \;&=\; i\,[\frac{-i}{2m}\beta\mathcal{I},\, \beta m + \mathcal{P} + \mathcal{I}] \\ &=\; [\frac{1}{2m}\beta\mathcal{I},\, \beta m] + [\frac{1}{2m}\beta\mathcal{I}, \mathcal{P}] + [\frac{1}{2m}\beta\mathcal{I},\, \mathcal{I}] \\ &=\; \frac{1}{2}(\beta\mathcal{I}\beta - \beta\beta\mathcal{I}) + \frac{1}{2m}(\beta\mathcal{I}\mathcal{P} - \mathcal{P}\beta\mathcal{I}) + \frac{1}{2m}(\beta\mathcal{I}\mathcal{I} - \mathcal{I}\beta\mathcal{I}) \\ &=\; -\mathcal{I} + \frac{1}{2m}\beta\,[\mathcal{I},\mathcal{P}] + \frac{1}{m}\beta\mathcal{I}^2\,. \end{aligned} \tag{B.0.20}$$

É Igualmente possível calcular os outros comutadores presentes em (B.0.17):

$$\begin{aligned}
\frac{i^2}{2}[S,[S,H]] &= -\frac{1}{2m}\beta\mathcal{I}^2 - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{I},[\mathcal{I},\mathcal{P}]] - \frac{1}{2m^2}\mathcal{I}^3\,,\\
\frac{i^3}{3!}[S,[S,[S,H]]] &= \frac{1}{6m^2}\mathcal{I}^3 - \frac{1}{6m^3}\beta\mathcal{I}^4\,,\\
\frac{i^4}{4!}[S,[S,[S,[S,H]]]] &= \frac{1}{24m^3}\beta\mathcal{I}^4\,,\\
-\dot{S} &= \frac{i}{2m}\beta\dot{\mathcal{I}}\,,\\
-\frac{i}{2}[S,\dot{S}] &= -\frac{i}{8m^2}[\mathcal{I},\dot{\mathcal{I}}]\,.
\end{aligned} \tag{B.0.21}$$

Coletando os resultados dados em (B.0.20) e (B.0.21), e substituindo em (B.0.17), concluímos:

$$\begin{aligned}
H' = \beta\left(m + \frac{\mathcal{I}^2}{2m} - \frac{\mathcal{I}^4}{8m^3}\right) + \mathcal{P} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{I},[\mathcal{I},\mathcal{P}]]\\
- \frac{i}{8m^2}[\mathcal{I},\dot{\mathcal{I}}] + \frac{1}{2m}\beta[\mathcal{I},\mathcal{P}] - \frac{\mathcal{I}^3}{3m^2} + \frac{i}{2m}\beta\dot{\mathcal{I}}\,.
\end{aligned} \tag{B.0.22}$$

O hamiltoniano H' ainda possui termos ímpares porém em ordem mais alta em $1/m$. O conjunto dos termos ímpares em H' será designado por $\mathcal{I}'$, e é a coleção de termos com número ímpar de matrizes α_i em H', a (B.0.22) nos dá:

$$\mathcal{I}' = \frac{1}{2m}\beta[\mathcal{I},\mathcal{P}] - \frac{\mathcal{I}^3}{3m^2} + \frac{i}{2m}\beta\dot{\mathcal{I}}\,. \tag{B.0.23}$$

Ainda, definimos:

$$P' = \beta\left(\frac{\mathcal{I}^2}{2m} - \frac{\mathcal{I}^4}{8m^3}\right) + \mathcal{P} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{I},[\mathcal{I},\mathcal{P}]] - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{I},\dot{\mathcal{I}}]\,. \tag{B.0.24}$$

É possível remover os termos ímpares de H' de ordem $1/m$ com uma segunda transformação:

$$H'' = e^{iS'}\left(H' - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS'}\,. \tag{B.0.25}$$

Fazemos a seguinte escolha para S':

$$S' = \frac{-i}{2m}\beta\mathcal{I}' = \frac{-i}{2m}\beta\left(\frac{1}{2m}\beta[\mathcal{I},\mathcal{P}] - \frac{\mathcal{I}^3}{3m^2} + \frac{i}{2m}\beta\dot{\mathcal{I}}\right)\,. \tag{B.0.26}$$

Repetindo os cálculos anteriores obtemos o resultado:

$$\begin{aligned}
H'' &= \beta m + \mathcal{P}' + \frac{1}{2m}\beta[\mathcal{I}',\mathcal{P}'] + \frac{i}{2m}\beta\dot{\mathcal{I}}'\\
&= \beta m + \mathcal{P}' + \mathcal{I}''\,.
\end{aligned} \tag{B.0.27}$$

O hamiltoniano H'' dada em (B.0.27) contém termos ímpares de ordem $1/m^2$. Para remoção dos termos ímpares até ordem $1/m^4$ é necessário apenas realizar uma terceira transformação:

$$H''' = e^{iS''}\left(H'' - i\frac{\partial}{\partial t}\right)e^{-iS''} . \tag{B.0.28}$$

Escolhemos S'', novamente, na forma:

$$S'' = \frac{-i}{2m}\beta\mathcal{I}'' . \tag{B.0.29}$$

O resultado final é:

$$H''' = \beta\left(m + \frac{\mathcal{I}^2}{2m} - \frac{\mathcal{I}^4}{8m^3}\right) + \mathcal{P} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{I},[\mathcal{I},\mathcal{P}]] - \frac{i}{8m^2}[\mathcal{I},\dot{\mathcal{I}}] . \tag{B.0.30}$$

O hamiltoniano H''' só contém termos pares até ordem $1/m^3$ que é a ordem em $1/m$ que nos interessa. Porém, é possível continuar o procedimento e eliminar os termos de ordens superiores em $1/m$ ordem por ordem com transformações análogas as feitas acima.

A expressão para H''' pode ser colocada em uma forma mais clara através do desenvolvimento do produto dos operadores em (B.0.30). Isto pode ser feito com o auxílio das relações dadas em (B.0.6):

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{I}^2}{2m} &= \frac{(\boldsymbol{\alpha}\cdot(\mathbf{p}-g\mathbf{A}))^2}{2m} \\
&= \frac{1}{2m}(\alpha_i\,\alpha_j\,(p_i - gA_i)\,(p_j - gA_j)) \\
&= \frac{1}{2m}\left(\,(\delta_{ij} + i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k)\,(p_i - gA_i)\,(p_j - gA_j)\,\right) \\
&= \frac{1}{2m}(\mathbf{p}-g\mathbf{A})^2 + \frac{g}{2m}\,i\,\epsilon_{ijk}\,\sigma_k\,[p_i, A_j] \\
&= -\frac{\mathbf{D}^2}{2m} - \frac{g}{2m}\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma} .
\end{aligned} \tag{B.0.31}$$

Como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{8m^2}\left([\mathcal{I},\mathcal{P}] + i\dot{\mathcal{I}}\right) &= \frac{g}{8m^2}\left(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi - i\boldsymbol{\alpha}\cdot\dot{\mathbf{A}}\right) \\
&= \frac{ig}{8m^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E} ,
\end{aligned} \tag{B.0.32}$$

temos:

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{I}, \frac{ie}{8m^2}\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E}] &= \frac{g}{8m^2}[\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{D}, \boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E}] \\
&= \frac{g}{8m^2}(\alpha_i D_i \alpha_j E_j - \alpha_i E_i \alpha_j D_j) \\
&= \frac{g}{8m^2}(\delta_{ij} + i\,\epsilon_{ijk}\sigma_k)(D_i E_j - E_i D_j) \\
&= \frac{g}{8m^2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) - \frac{g}{8m^2}(i\mathbf{D}\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\times i\mathbf{D})\cdot\boldsymbol{\sigma}\,. \qquad \text{(B.0.33)}
\end{aligned}
$$

Ainda:

$$
\frac{\mathcal{I}^4}{8m^3} = \frac{\mathbf{D}^4}{8m^3}\,. \qquad \text{(B.0.34)}
$$

Portanto, substituindo (B.0.31), (B.0.33) e (B.0.34) na expressão (B.0.30) para H''', obtemos até ordem $1/m^3$:

$$
\begin{aligned}
H''' = \beta\left(m - \frac{\mathbf{D}^2}{2m} - \frac{\mathbf{D}^4}{8m^3}\right) + g\Phi - \frac{g}{2m}\beta\,\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\
- \frac{g}{8m^2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) - \frac{g}{8m^2}(i\mathbf{D}\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\times i\mathbf{D})\,. \qquad \text{(B.0.35)}
\end{aligned}
$$

Para um espinor Ψ''' podemos utilizar o hamiltoniano H''' e temos:

$$
i\frac{\partial}{\partial t}\Psi''' = H'''\,\Psi'''. \qquad \text{(B.0.36)}
$$

A expressão acima pode ser escrita de modo mais explicito através da substituição do hamiltoniano H''' dado em (B.0.35) e as definições das derivadas covariantes dadas em (B.0.1):

$$
\begin{aligned}
i\,D_t\,\Psi''' = \Bigg[\beta\left(m - \frac{\mathbf{D}^2}{2m} - \frac{\mathbf{D}^4}{8m^3}\right) - \frac{g}{2m}\beta\,\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma} \\
- \frac{g}{8m^2}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}) - \frac{g}{8m^2}(i\mathbf{D}\times\mathbf{E} - \mathbf{E}\times i\mathbf{D})\cdot\boldsymbol{\sigma}\Bigg]\Psi'''\,. \qquad \text{(B.0.37)}
\end{aligned}
$$

Agora podemos retornar ao formalismo lagrangiano considerando que o campo deve satisfazer as equações de movimento acima, considerando a decomposição dada em (B.0.9) e a

forma explícita da matriz β dada em (B.0.4), temos até ordem $1/m^3$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \psi^\dagger \left(iD_t + \frac{\mathbf{D}^2}{2m}\right) \psi + \chi^\dagger \left(iD_t - \frac{\mathbf{D}^2}{2m}\right) \chi \\
&+ \frac{1}{8m^3} \left[\psi^\dagger (\mathbf{D}^2)^2 \psi - \chi^\dagger (\mathbf{D}^2)^2 \chi\right] \\
&+ \frac{1}{8m^2} \left[\psi^\dagger (\mathbf{D} \cdot g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})\psi + \chi^\dagger (\mathbf{D} \cdot g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})\chi\right] \\
&+ \frac{1}{8m^2} \left[\psi^\dagger (i\mathbf{D} \times g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \times i\mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \psi + \chi^\dagger (i\mathbf{D} \times g\mathbf{E} - g\mathbf{E} \times i\mathbf{D}) \cdot \boldsymbol{\sigma}\, \chi\right] \\
&+ \frac{1}{2m} \left[\psi^\dagger (g\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma})\psi - \chi^\dagger (g\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\sigma})\chi\right] . \qquad \text{(B.0.38)}
\end{aligned}$$

A lagrangiana $\mathcal{L}$ dada acima é equivalente as lagrangianas $\mathcal{L}_{pesado}$ e $\delta\mathcal{L}_{bilinear}$ dadas em (2.3.4) e (2.3.5), respectivamente, e são as lagrangianas que queríamos obter.

Referências Bibliográficas

[1] J. J. Aubert, *et al*, Phys. Rev. Lett. **33**, 1404 (1974).

[2] J. E. Augustin, *et al*, Phys. Rev. Lett. **33**, 1406 (1974).

[3] Veja, *e.g.*, E. Braaten, S. Fleming e T. C. Yuan, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **46**, 197 (1996) e referências aí contidas.

[4] H. Fritzsch, Phys. Lett. B **67**, 217 (1977).

[5] F. Halzen, Phys. Lett. B **69**, 105 (1977).

[6] F. Halzen e S. Matsuda, Phys. Rev. D **17**, 1344 (1978).

[7] M. Gluck, J. Owens e E. Reya, Phys. Rev. D **17**, 2324 (1978).

[8] M. B. Einhorn e S. D. Ellis, Phys. Rev. D **14**, 1263 (1976); C. E. Carlson e R. Suaya, Phys. Rev. D **14**, 3115 (1976); J. H. Kühn, Phys. Lett. B **89**, 256 (1980).

[9] T. A. DeGrand e D. Toussaint, Phys. Lett. B **89**, 256 (1980); J. H. Kühn, S. Nussinov e R. Rückl, Z. Phys. C **5**, 117 (1980); M. B. Wise, Phys. Lett. B **89**, 229 (1980).

[10] C. H. Chang, Nucl. Phys. B **172**, 425 (1980); R. Baier e R. Rückl, Nucl. Phys. B **201**, 1 (1982); R. Baier e R. Rückl, Phys. Lett. B **102**, 364 (1981); E. L. Berger e D. L. Jones, Phys. Rev. D **23**, 1521 (1981); R. Baier e R. Rückl, Z. Phys. C **19**, 251 (1983).

[11] F. Abe, *et al*, [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **79**, 572 (1997).

[12] F. Abe, *et al*, [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **79**, 578 (1997).

[13] J. Amundson, O. Éboli, E. Gregores e F. Halzen, Phys. Lett. B **372**, 127 (1996); Phys. Lett. B **390**, 323 (1997); O. Éboli, E. Gregores e F. Halzen, Phys. Lett. B **451**, 241 (1999); Phys. Rev. D **60**, 117501 (1999).

[14] O. Éboli, E. Gregores e F. Halzen, Phys. Lett. B **395**, 113 (1997).

[15] G. T. Bodwin, E. Braaten e G. P. Lepage, Phys. Rev. D **51**, 1125 (1995). (hep-ph/9407339).

[16] G. P. Lepage, L. Magnea, C. Nakhleh, U. Magnea e K. Hornbostel, Phys. Rev. D **46**, 4052 (1992). (hep-lat/9205007).

[17] N. Brambilla, *et al*, preprint FERMILAB-FN-0779. (hep-ph/0412158).

[18] M. Beneke, M. Krämer e M. Vanttinen, Phys. Rev. D **57**, 4258 (1998). (hep-ph/9709376).

[19] T. Affolder, *et al*, [CDF Collaboration], Phys. Rev. Lett. **85**, 2886 (2000). (hep-ex/000427).

[20] M. Beneke e I. Z. Rothstein, Phys. Rev. D **54**, 2005 (1996), Erratum-ibid **54**, 7082 (1996). (hep-ph/9603400).

[21] G. A. Schuler, preprint CERN-TH.7170/94. (hep-ph/9403387).

[22] F. Maltoni, *et al*, *Analysis of Charmonium Production at Fixed-Target Experiments in the NRQCD Approach*, (2006). (hep-ph/0601203).

[23] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories.* (World Scientific Publishing Co., 1987).

[24] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles.* (John Wiley & Sons, 1987).

[25] C. Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions.* (Addison-Wesley, 1983).

[26] E. L. Berger, J. Qiu e Y. Wang, Phys. Rev. D **71**, 034007 (2005). (hep-ph/0404158).

[27] A. Pich, Les Houches Summer School in Theoretical Physics, (1997). (hep-ph/9806303).

[28] E. Braaten, B. A. Kniehl e J. Lee, Phys. Rev. D **62**, 094005 (2000). (hep-ph/9911436).

[29] K. Abe, *et al*, [The Belle Collaboration], Phys. Rev. Lett. **88**, 052001 (2002).

[30] P. L. Cho e K. Leibovich, Phys. Rev. D **54**, 6690 (1996). (hep-ph/9606229).

[31] M. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos.* (Edusp, 2002).

[32] V. D. Barger e R. J. N. Phillips, *Collider Physics.* (Addison-Wesley, 1987).

[33] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory.* (Addison-Wesley, 1995).

[34] J. D. Bjorken e D. S. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics.* (McGraw-Hill, 1964).

[35] G. T. Bodwin, S. Kim e D. K. Sinclair, Nucl. Phys. B **34** (Proc. Suppl.), 434 (1994).

[36] R. Gavai, D. Kharzeev, H. Satz, G. A. Schuler, K. Sridhar e R. Vogt, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 3043 (1995). (hep-ph/9502270).

[37] P. Cho e K. Leibovich, Phys. Rev. D **53**, 6203 (1996). (hep-ph/9511315).

[38] R. Gavai, *et al*, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 3043 (1995).

[39] E. Braaten e Y. Chen, Phys. Rev. D **54**, 3216 (1996). (hep-ph/9604237).

[40] G. T. Bodwin, E. Braaten e J. Lee, Phys. Rev. D **72**, 014004 (2005). (hep-ph/0504014).

[41] C. Chang, Nucl. Phys. B **172**, 425 (1980).