Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Três Diferentes Abordagens Não-Comutativas aos Modelos de Gross-Neveu e Sigma Não-Linear na Expansão Perturbativa 1/N

Bruno André Charneski

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Gomes

Prof. Celso Luiz Lima
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

BANCA EXAMINADORA
Prof.Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes (IFUSP)
Prof.Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT-UNESP)
Prof.Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IFUSP)

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

São Paulo 2006

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
4504
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP
305M810T4504

05/04/06

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Charneski, Bruno André

Três diferentes abordagens não-comutativas aos modelos de Gross-Neveu e sigma não-linear na expansão perturbativa 1/N. São Paulo , 2006.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes

Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Teoria quântica de campos – Teorias não comutativas;
2. Teorias não comutativas;
3. Física

USP/IF/SBI-024/2006

Dedico aos meus pais,
Aloisio e Zilê,
pelo amor e oportunidade
que sempre me deram.

AGRADECIMENTOS

Ao professor, orientador e amigo, Marcelo Gomes, pela oportunidade, paciência e esperança que tem dedicado à mim.

Aos companheiros do grupo de pesquisa, professor Adilson José da Silva, Fernando, Alysson e André.

Aos meus irmãos Guilherme, Custódio, Angela e Lizandra pela oportunidade e por estarem sempre presentes.

As minhas crianças por cada sorriso.

À Lais e Nelson por acreditarem e por ajudarem a concretizar meu sonho.

A Emerson e Nicolas pela paciência em discutir MRU.

A Rodrigo, Adriane, Clóvis e Karine que muito me ajudaram nessa jornada.

Aos meus amigos, sem os quais não teria chegado até aqui.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Sumário

1 Introdução **1**

2 A Expansão $1/N$ **4**
2.2 O Modelo de Gross-Neveu Comutativo 12
2.3 O Modelo Sigma Não-Linear Comutativo 17

3 A Não-Comutatividade **22**
3.1 A Teoria de Cordas e a Não-Comutatividade 22
3.2 O Formalismo de Weyl-Groenewold-Moyal 35
3.3 O Modelo de Gross-Neveu no Espaço Não-Comutativo 38
3.4 O Modelo Sigma Não-Linear Não-Comutativo 42

4 O Formalismo de Weyl-Moyal Sem Quebra da Invariância de Lorentz **45**
4.2 O Modelo de Gross-Neveu Não-Comutativo Sem Quebra da Invarância de Lorentz 57
4.3 O Modelo Sigma Não-Linear Não-Comutativo sem Quebra da Invariância de Lorentz 61

5 O Formalismo de Estados Coerentes **66**
5.2 O Modelo de Gross-Neveu Empregando Estados Coerentes . . 71
5.3 O Modelo Sigma Não-Linear Empregando Estados Coerentes . 76

6 Conclusões **80**

A O Modelo de Gross-Neveu **82**
A.1 Férmions de Majorana 82
A.2 A Não-Comutatividade com Quebra da Invariância de Lorentz 83
A.3 A Não-Comutatividade sem Quebra da Invariância de Lorentz 83

A.4 A Não-Comutatividade Através dos Estados Coerentes 84

B O Modelo Sigma Não-Linear **86**
B.1 A Não-Comutatividade com Quebra da Invariância de Lorentz 86
B.2 A Não-Comutatividade sem a Quebra da Invariância de Lorentz 87
B.3 A Não-Comutatividade Através dos Estados Coerentes 88

C Fórmulas **91**

RESUMO

Neste trabalho estudamos os modelos de Gross-Neveu e Sigma Não-Linear empregando a expansão $1/N$ no espaço não-comutativo. Consideramos três formalismos distintos para implementar a não-comutatividade. Dois deles tratam a não-comutatividade através da deformação do produto entre funções, porém, um dos formalismos é invariante de Lorentz e o outro não. O terceiro método trata a não-comutatividade através dos estados coerentes. Nesses diferentes contextos, calculamos o propagador do campo auxiliar de ambos os modelos, além da correção radiativa para o propagador do campo básico no modelo Sigma Não-Linear.

ABSTRACT

In this work we studied the Gross-Neveu and nonlinear sigma models employing the $1/N$ expansion in the noncommutative espace. We describe three diferent manner of introduce non-comutativity. Two of them treat the noncommutativity through the deformation of the product of functions, however one of the method is Lorentz invariant and the other not. The third manner treat the noncommutativity through coherent states. We calculated the propagator of the auxiliary field in both models in these different settings and, besides that, we compute the leading radiative correction to propagator of the basic field of the nonlinear sigma model.

Capítulo 1

Introdução

Os infinitos na Teoria Quântica de Campos (TQC)! Este era o problema que atormentava os físicos na metade do século XX. O primeiro trabalho publicado com a esperança de solucionar esse problema data de 1947, por Snyder [12]. Ele acreditava que a fonte dos problemas da TQC residia no tratamento puntual das interações entre campos de matéria, os quais são considerados distribuições. Pouco contente com os "cortes" introduzidos nos limites das integrais, Snyder propôs uma mudança na estrutura do espaço-tempo. Nesse trabalho Snyder mostrou ser possível quantizar o espaço-tempo e manter as propriedades de invariância de Lorentz sugerindo que a introdução de uma unidade natural de comprimento poderia remover naturalmente os infinitos da TQC. Surgiam na mesma época os mecanismos de renormalização. Esse formalismo concorrente fez tanto sucesso, ao fornecer resultados que concordavam com os obtidos experimentalmente, principalmente na eletrodinâmica quântica, que a idéia da quantização do espaço-tempo caiu no esquecimento.

Algumas décadas após a publicação do trabalho de Snyder surgiu a Teoria de Cordas. Uma teoria na qual se depositam as esperanças em descrever a unificação das interações fundamentais e que reaviva a idéia do espaço-tempo não-comutativo. A partir da Teoria de Cordas podemos obter, naturalmente, uma TQC descrita no espaço não-comutativo [10]. A partir desse momento a não-comutatividade está de volta, porém, num contexto mais abrangente, com sinais da necessidade de sua existência vindos também da Relatividade Geral. De fato, a precisão numa medida de posição transmite ao sistema uma energia de ordem inversa, gerando um campo gravitacional muito intenso, capaz de prender sinais de luz, o que torna o processo de medida com precisão arbitrária inviável [13].

Aplicamos os formalismos não-comutativos ao modelo de Gross-Neveu (GN) porque este é um bom laboratório para o estudo dos fenômenos decorrentes da não-comutatividade. A extensão desses processos para o modelo Sigma Não-Linear (SNL) é natural, tendo em vista a relação estabelecida entre esses modelos na supersimetria. Os resultados obtidos com a introdução da não-comutatividade através da deformação da álgebra, quebrando ou não a simetria de Lorentz, mostram que, em geral, o comportamento divergente dos modelos persiste. Se por um lado temos o melhoramento do comportamento UV da teoria, por outro, temos a introdução de um novo tipo de divergência, a divergência infravermelha (IV). Esse fenômeno é característico das teorias não-comutativas "deformadas" e recebe o nome de mistura ultravioleta/infravermelha.

Buscamos uma forma alternativa de tratar a não-comutatividade através do formalismo de estados coerentes [19], [20], [21]. Nesse contexto a não-comutatividade está contida diretamente nos propagadores livres da teoria, com isso, cada integral, antes divergente no espaço comutativo ou divergente no espaço não-comutativo deformado, agora é finita, sem a necessidade do uso de qualquer processo de renormalização.

Neste trabalho abordaremos a TQC do ponto de vista da expansão $1/N$. Nossa motivação está no fato de que este esquema perturbativo nos permite somar sobre a constante de acoplamento em todas as ordens de grandeza, além disso, fenômenos interessantes tal como a geração dinâmica de massa são revelados [4]. Embora seja aparentemente mais complicado trabalhar com infinitos graus de liberdade, as situações que apresentam simetrias que admitem essa generalização podem exibir uma melhora no comportamento ultravioleta [2]. Veremos os modelos de Gross-Neveu e Sigma Não-Linear em 3D. Ambos têm a série perturbativa em termos da constante de acoplamento não-renormalizável, contudo, admitem uma expansão em termos de $1/N$. Nesse caso, no espaço comutativo, esses modelos são renormalizáveis. Veremos que o modelo Sigma Não-Linear é renormalizável no espaço comutativo e que, devido a divergência infravermelha introduzida pela não-comutatividade, esse modelo passa a ser não-renormalizável. Veremos que a constante de acoplamento desempenha um papel duplo no modelo Gross-Neveu, tornando o modelo comutativo renormalizável de maneira muito simples. O mesmo não ocorre, porém, quando consideramos o espaço não-comutativo; devido aos termos extras introduzidos pelos vértices não-comutativos a precisão da constante de acoplamento ao renormalizar o modelo é perdida, o que o torna não-renormalizável.

No capítulo 2 faremos uma apresentação do método perturbativo empregado neste trabalho tomando como exemplo o modelo φ^4. Nas seções 2.2 e 2.3 apresentaremos os modelos de Gross-Neveu e Sigma Não-Linear na expansão $1/N$. No capítulo 3.1 faremos uma introdução a não-comutatividade através da Teoria de Cordas revisando o trabalho de Seiberg, Witten [10]. Nas seções 3.2, 3.3 e 3.4 veremos o formalismo não-comutativo mais usual, o qual introduz a não-comutatividade com a quebra da invariância de Lorentz, e a aplicação aos modelos mencionados. No capítulo 4 e nas seções 4.2 e 4.3 veremos o formalismo que introduz a não-comutatividade sem quebrar a invariância de Lorentz e sua aplicação aos modelos de Gross-Neveu e Sigma Não-Linear. No capítulo 5 e seções 5.2, 5.2 apresentaremos o formalismo de Estados Coerentes, o qual quebra a invariância de Lorentz, porém, sua aplicação aos modelos fornece resultados livres de divergências. Finalizaremos o trabalho com uma breve conclusão dos resultados obtidos.

Capítulo 2

A Expansão $1/N$

A dificuldade em encontrar soluções fechadas para os problemas em TQC nos leva à busca de métodos alternativos, métodos de aproximação em geral, que forneçam resultados próximos aos obtidos experimentalmente. Um método perturbativo consiste basicamente na classificação de sucessivas aproximações conforme a ordem de grandeza de um determinado parâmetro. Sendo assim, a expansão em termos de $1/N$, consiste na re-somação da série perturbativa e, em muitos casos, tem como consequência uma melhora no comportamento ultravioleta do modelo estudado.

Normalmente o aumento do número de variáveis torna o problema mais complexo. Porém, isso não ocorre em situções nas quais há simetria de grupo $SO(N)$ ou $SU(N)$. Veremos que, além da simplificação, a expansão em $1/N$ revela algumas características interessantes, tal como a geração dinâmica de massa; um fenômeno que não se manifesta no tratamento aproximativo usual, no qual a constante de acoplamento é usada como parâmetro perturbativo.

Tomaremos a teoria φ^4 para ilustrar a aplicação da expansão em potências de $1/N$ [3]. Para realizar esta tarefa consideraremos um grupo de N campos escalares ($\varphi_i, \quad i = 1...N$), cuja dinâmica é definida através da densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^i - \frac{1}{2}M^2\varphi^i\varphi^i - \frac{1}{8}g_0(\varphi^i\varphi^i)^2. \tag{2.1.1}$$

O propagador livre do campo φ, considerando a expansão perturbativa usual, é dado por:

$$\Delta(k) = \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon}, \tag{2.1.2}$$

e o vértice de interação tem o fator $-ig_0$ associado a ele.

(a) (b)

Figura 2.1: (a) Propagador do campo φ. (b) Vértice da interação φ^4.

Considerando a teoria de perturbação usual, os primeiros termos conexos da série perturbativa, num espalhamento de dois mésons do tipo a, em dois mésons do tipo b, $(a \neq b)$ em 4D, serão os seguintes:

$$\begin{aligned}
&\langle 0|T\varphi^a(x_1)\varphi^a(x_2)\varphi^b(x_3)\varphi^b(x_4)|0\rangle \\
&= {}_0\langle 0|T\varphi_0^a(x_1)\varphi_0^a(x_2)\varphi_0^b(x_3)\varphi_0^b(x_4)\big[-\tfrac{ig_0}{8}\int d^4z : \varphi_0^i(z)\varphi_0^i(z)\varphi_0^j(z)\varphi_0^j(z) : \\
&-\tfrac{(g_0)^2}{128}\int d^4z d^4z' : \varphi_0^i(z)\varphi_0^i(z)\varphi_0^j(z)\varphi_0^j(z) : \\
&\qquad : \varphi_0^m(z')\varphi_0^m(z')\varphi_0^n(z')\varphi_0^n(z') : \big]|0\rangle_0,
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

onde φ_0 designa o campo livre associado. Aplicando o teorema de Wick, estes termos geram os diagramas de Feynman da figura 2.2 [1].

O primeiro desses gráficos corresponde ao primeiro termo da expansão (2.1.3). Ele é de ordem zero em N e proporcional a g_0. No espaço dos momentos temos a seguinte representação:

$$-ig_0(2\pi)^4\delta(p_1 - p_2 + p_3 - p_4)\Delta(p_1)\Delta(p_2)\Delta(p_3)\Delta(p_4). \tag{2.1.4}$$

[1] Representaremos somente três das diferentes possibilidades de contração entre os campos φ, o que já é suficiente para demonstrar a dependência em relação à N.

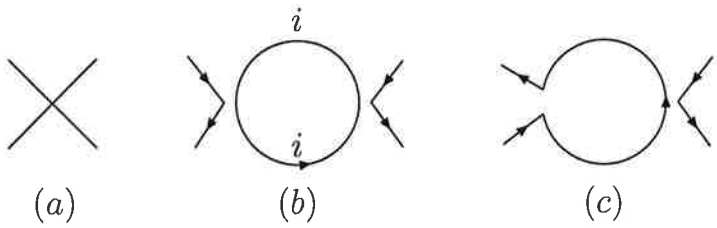


Figura 2.2: (a) Gráfico de árvore. (b) Um loop $\propto Ng_0^2$. (c) Um loop $\propto g_0^2$.

O segundo e o terceiro gráficos correspondem a duas maneiras diferentes de contrair os campos no segundo termo em (2.1.3). O segundo diagrama é de ordem N e proporcional ao fator g_0^2. Podemos ver, no espaço dos momento, que isso se deve ao fato de existirem N possibilidades para o índice de simetria interna i:

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^4\delta(p_1-p_2+p_3-p_4)\Delta(p_1)\Delta(p_2)\Delta(p_3)\Delta(p_4)\\
&\tfrac{1}{2}g_0^2\delta_{ii}\int\tfrac{d^4k}{(2\pi)^4}\tfrac{1}{[(k+p_1-p_2)^2-m^2]}\tfrac{1}{(k^2-m^2)}\\
=\;&(2\pi)^4\delta(p_1-p_2+p_3-p_4)\Delta(p_1)\Delta(p_2)\Delta(p_3)\Delta(p_4)\\
&\tfrac{1}{2}g_0^2N\int\tfrac{d^4k}{(2\pi)^4}\tfrac{1}{[(k+p_1-p_2)^2-m^2]}\tfrac{1}{(k^2-m^2)}.
\end{aligned}\tag{2.1.5}$$

O terceiro gráfico também é proporcional a g_0^2, porém, é de ordem zero em N. Isso se deve ao fato de o índice interno ser fixo, como podemos ver na figura (2.2c). Sendo assim, não há soma a fazer e obtemos:

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^4\delta(-p_1+p_2+p_3-p_4)\Delta(p_1)\Delta(p_2)\Delta(p_3)\Delta(p_4)\\
&g_0^2\int\tfrac{d^4k}{(2\pi)^4}\tfrac{1}{[(k-p_1+p_2)^2-m^2]}\tfrac{1}{(k^2-m^2)}.
\end{aligned}\tag{2.1.6}$$

Observe que devido ao fator N no termo (2.1.5) do espalhamento (2.1.3) o limite N grande não está bem definido. Para remediar esta situação simplesmente redefinimos a constante de acoplamento:

$$g \equiv g_0 N, \tag{2.1.7}$$

e consideramos o limite N grande, mantendo g fixo.

Com essa definição o primeiro diagrama em (2.2), correspondente ao termo (2.1.4), passa a ser de ordem $1/N$, proporcional a g. O segundo gráfico, correspondente ao termo (2.1.5), passa a ser de ordem $1/N$ e proporcional a g^2. Finalmente, o terceiro diagrama, correpondente ao termo (2.1.6) é proporcional a g^2 e de ordem $1/N^2$, portanto, desprezível comparado aos dois últimos diagramas.

Na expansão $1/N$ é extremamente conveniente definir um campo auxiliar. Isso pode ser feito através de uma condição de vínculo introduzida na lagrangiana do modelo. Pode-se pensar nesse campo como sendo o mediador da interação entre os φ's, porém, esse termo adicional não altera as equações de movimento.

Para implementar o campo auxiliar λ ao modelo φ^4 somamos à lagrangiana o termo:

$$\frac{1}{2}\frac{N}{g}\left(\lambda - \frac{1}{2}\frac{g}{N}\varphi^i\varphi^i\right)^2, \tag{2.1.8}$$

de modo que a nova densidade lagrangiana será:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^i - \frac{1}{2}M^2\varphi^i\varphi^i + \frac{1}{2}\frac{N}{g}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda\varphi^i\varphi^i. \tag{2.1.9}$$

Podemos obter facilmente a equacão de Euler-Lagrange para o campo auxiliar, $\lambda = (g/2N)\varphi^i\varphi^i$. Como foi dito anteriormente, essa não é uma equação de movimento real; ela simplesmente fornece o vínculo imposto ao sistema.

A introdução do campo λ, no entanto, leva a novas regras de Feynman para o modelo. Considerando ainda a expansão perturbativa usual, o propagador livre do campo básico permanece inalterado, é o mesmo dado em (2.1.2). O propagador livre do campo auxiliar pode ser obtido através da parte quadrática em λ na lagrangiana (2.1.9):

$$\Delta_\lambda = \frac{ig}{N} \tag{2.1.10}$$

A interação entre os campos passa a ser trilinear com um fator $-i$ associado ao vértice.

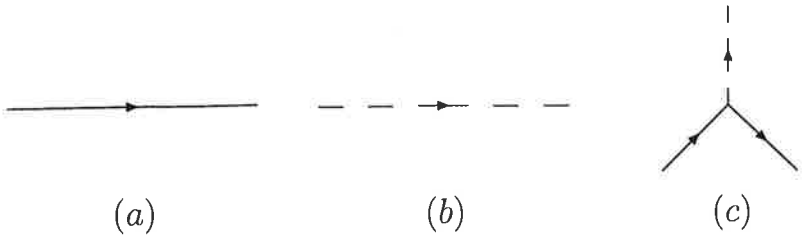


Figura 2.3: (a) Propagador do campo φ. (b) Propagador do campo λ. (c) Vértice da interação $\lambda\varphi\varphi$.

No contexto da expansão $1/N$, a introdução do campo auxiliar traz consigo a possibilidade de um valor esperado no vácuo (VEV) não nulo, o que pode gerar uma divergência de ordem arbitrária em gráficos de maior complexidade, tendo em vista que esse termo é de ordem zero em $1/N$. Para solucionar este problema introduzimos o campo λ' impondo que o VEV do campo auxiliar seja nulo.

$$\lambda' \equiv \lambda - \lambda_0, \tag{2.1.11}$$

Em termos do novo parâmetro, a densidade Lagrangiana será:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^i\partial^\mu\varphi^i - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^i\varphi^i + \frac{1}{2}\frac{N}{g}\lambda'^2 - \frac{1}{2}\lambda'\varphi^i\varphi^i + \frac{N}{g}\lambda_0\lambda'. \tag{2.1.12}$$

agora $\mu^2 \equiv M^2 + \lambda_0$ é a massa do campo φ [2].

Impondo que o VEV do campo auxiliar é nulo podemos fixar o parâmetro λ_0 e eliminar os termos lineares em λ que aparecem na lagrangiana (2.1.12):

$$\langle 0|\lambda(x)|0\rangle = 0$$

$$= {}_0\langle 0|\lambda_0(x)\left\{ i\int d^4z : \left[-\tfrac{1}{2}\lambda_0(z)\varphi_0^i(z)\varphi_0^i(z) + \tfrac{N}{g}\lambda_0\lambda_0(z)\right] : \right\}|0\rangle_0. \tag{2.1.13}$$

[2]Por uma questão de simplicidade voltaremos a notação sem linha para o campo auxiliar.

No espaço dos momentos teremos:

$$(2\pi)^4\delta(p)\Delta_\lambda N\left[\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\mu^2}+\frac{i\lambda_0}{g}\right]=0. \tag{2.1.14}$$

Portanto

$$\lambda_0=\frac{ig}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-\mu^2}, \tag{2.1.15}$$

o qual deve ser regularizado.

Podemos calcular o propagador do campo auxiliar na expansão $1/N$ em todas as ordens de grandeza na constante de acoplamento. Para realizar essa tarefa partimos da função 1PR de dois pontos do campo auxiliar:

$$G_\lambda^{(2)}(x_1,x_2)=\langle 0|T\lambda(x_1)\lambda(x_2)|0\rangle$$

$$={}_0\langle 0|T\lambda_0(x_1)\lambda_0(x_2)\big[1-\tfrac{1}{8}\int d^4zd^4z' : \lambda_0(z)\varphi_0^i(z)\varphi_0^i(z) :: \lambda_0(z')\varphi_0^j(z')\varphi_0^j(z') :$$

$$+\tfrac{1}{384}\int d^4zd^4z'd^4yd^4y' : \lambda_0(z)\varphi_0^i(z)\varphi_0^i(z) :: \lambda_0(z')\varphi_0^j(z')\varphi_0^j(z') :$$

$$: \lambda_0(y)\varphi_0^m(y)\varphi_0^m(y) :: \lambda_0(y')\varphi_0^n(y')\varphi_0^n(y') : +\ldots\big]|0\rangle_0. \tag{2.1.16}$$

Essa função gera os seguintes diagramas:

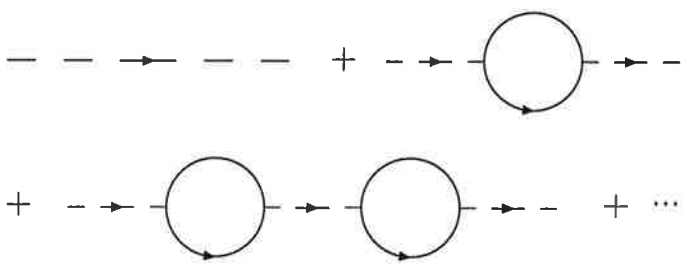


Figura 2.4: Função de dois pontos do campo auxiliar.

Observe que o primeiro termo em (Fig.2.4) é o propagador do campo λ, portanto, é proporcional a g/N. O segundo termo é formado por um laço

do campo φ, proporcional a N portanto, e dois propagadores do campo λ. Sendo assim, esse termo é proporcional a g^2/N. O terceiro é proporcional a g^3/N e assim por diante. Isso significa que podemos obter a soma completa dos termos da função de dois pontos do campo auxiliar, basta observar que esta função é uma série geométrica.

Denominaremos cada integral de laço do campo φ por Λ,

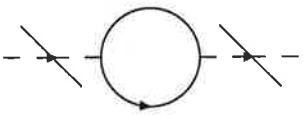
$\Lambda =$ 

Figura 2.5: Função de dois pontos do campo auxiliar.

observe que Λ corresponde a auto-energia do campo auxiliar. No espaço dos momentos Λ é dado por:

$$\Lambda = \frac{N}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(k+p_1)^2-\mu^2]}\frac{1}{(k^2-\mu^2)}. \tag{2.1.17}$$

Desse modo, podemos representar os diagramas da figura (2.4) por

$$\tfrac{ig}{N} + \left(\tfrac{ig}{N}\right)^2\Lambda + \left(\tfrac{ig}{N}\right)^3\Lambda^2 + ... = \tfrac{ig}{N}\left[1 + \tfrac{ig}{N}\Lambda + \left(\tfrac{ig}{N}\Lambda\right)^2 + \left(\tfrac{ig}{N}\Lambda\right)^3 + ...\right]. \tag{2.1.18}$$

Sendo $\frac{ig}{N}\Lambda$ a razão da série geométrica acima, o valor total da contribuição dos diagramas será:

$$\mathrm{S} = \frac{ig}{N}\frac{1}{1-\frac{ig}{N}\Lambda}. \tag{2.1.19}$$

Consequentemente o propagador completo do campo auxiliar λ na expansão $1/N$ será:

$$\Delta_\lambda(p) = \left[-\frac{iN}{g} - \frac{N}{2}\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(k+p)^2-\mu^2]}\frac{1}{[k^2-\mu^2]}\right]^{-1}. \tag{2.1.20}$$

O segundo termo do propagador é logaritmicamente divergente, no entanto, uma renormalização da constante de acomplamento pode absorver essa divergência.

Nesse caso, a principal vantagem do uso da expansão $1/N$ foi a possibilidade de obter o propagador (2.1.20) como uma soma completa em todas as ordens de grandeza na constante de acoplamento g.

Nos capítulos posteriores admitiremos que o espaço-tempo será composto por 3 dimensões. Numa expansão perturbativa usual, na constante de acoplamento, os modelos de Gross-Neveu e Sigma Não-Linear não são renormalizáveis, porém, na expansão $1/N$ ocorre o contrário, como veremos a seguir.

2.2 O Modelo de Gross-Neveu Comutativo

O modelo de Gross-Neveu consiste em N campos espinoriais, de duas componentes com uma interação quártica. Classicamente o modelo é invariante por transformações de paridade, o que garante a ausência do termo massivo em todas as ordens numa expansão perturbativa. Embora não seja perturbativamente renormalizável na constante de acoplamento em 3 D [3], o modelo admite uma expansão em potências de $1/N$ [2], [6], [3], [4]. Este modelo é descrito pela lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi + \frac{g_0}{4}(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi), \tag{2.2.1}$$

sendo ψ um bi-espinor de Majorana de N componentes (ver apêndice A.1). O campo ψ tem dimensão de massa e a constante de acoplamento dimensão de $(\text{massa})^{-1}$.

Tendo em vista que a dimensão do termo de interação é 4, maior que 3, a dimensão do espaço-tempo, esse modelo não é renormalizável numa expansão perturbativa usual, em torno da constante de acoplamento. Contudo, a simetria SU(N) do modelo nos permite empregar a expansão $1/N$.

Assim como fizemos no modelo φ^4, definiremos uma nova constante de acoplamento:

$$g = g_0 N, \tag{2.2.2}$$

onde g é mantido fixo enquanto tomamos N muito grande. Introduzindo essa constante de acoplamento em (2.2.1) teremos a nova lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi + \frac{g}{4N}(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\psi), \tag{2.2.3}$$

Semelhantemente ao modelo φ^4 é conveniente introduzir na lagrangiana acima um campo auxiliar:

$$\frac{N}{4g}(\lambda + \frac{g}{N}\bar{\psi}\psi)^2, \tag{2.2.4}$$

[3]Trabalharemos sempre em três dimensões, caso contrário, será explicitamente comentado.

tal que subtraindo (2.2.4) de (2.2.3) obtemos a nova lagrangiana com o campo λ:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi - \frac{\lambda}{2}(\bar{\psi}\psi) - \frac{N}{4g}\lambda^2. \tag{2.2.5}$$

De acordo com a equação de movimento de Euler-Lagrange para o campo auxiliar, $\lambda = -\frac{g}{N}\bar{\psi}\psi$. Não temos derivadas temporais, portanto, esta é simplesmente uma equação de vínculo e não uma equação de movimento genuína.

A introdução do campo auxiliar traz consigo a possibilidade de um VEV não nulo. Nesse caso é conveniente redefinir o campo λ, isto é, $\lambda \longrightarrow \lambda + M$, tal que o VEV do novo campo λ seja nulo por definição. Esta translação aplicada em (2.2.5) fornece:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi - \frac{M}{2}\bar{\psi}\psi - \frac{\lambda}{2}(\bar{\psi}\psi) - \frac{N}{4g}\lambda^2 - \frac{N}{2g}M\lambda. \tag{2.2.6}$$

Nesse ponto podemos ver uma das características importantes da expansão $1/N$, a possível geração dinâmica de massa. Com a quebra da simetria de paridade, devido ao deslocamento do campo λ, o campo fermiônico adquire massa.

Antes de realizar os cálculos perturbativos devemos encontrar as regras de Feynman para esse modelo. A partir da lagrangiana livre obtemos o propagador do campo ψ que, no espaço dos momentos, é dado por:

$$S(k) = \frac{i}{k\!\!\!/ - M + i\epsilon}. \tag{2.2.7}$$

Considerando a expansão perturbativa usual, o propagador livre do campo auxiliar pode ser obtido através da parte quadrática em λ, presente na lagrangiana (2.2.6):

$$\Delta_\lambda(k) = -\frac{2ig}{N}. \tag{2.2.8}$$

Calcularemos o propagador do campo auxiliar através da expansão $1/N$ posteriormente.

Finalmente, para cada vértice trilinear de interação temos um fator i.

As figuras associadas aos propagadores e ao vértice são idênticas aquelas encontradas em (Fig. 2.3) na teoria φ^4, porém, mantendo a correspondência com a teoria em questão.

Sabemos, por construção, que o VEV do campo auxiliar é nulo, sendo assim, podemos empregar a fórmula de Gell-Mann Low e obter a equação de gap [4]:

$$\langle 0|\lambda(x)|0\rangle = 0 = \langle 0|\lambda(x) : \int dy \left(\lambda(y)\bar{\psi}(y)\psi(y) + \frac{NM}{g}\lambda(y) \right) : |0\rangle. \quad (2.2.9)$$

No espaço dos momentos teremos:

$$2\pi\delta(p)\Delta_\lambda(p)NM\left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{-2i}{k^2-M^2} + \frac{1}{g}\right] = 0. \quad (2.2.10)$$

Portanto [5]

$$\frac{1}{g} - 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{i}{k^2-M^2} = 0. \quad (2.2.11)$$

Embora seja linearmente divergente, e essa será a fonte dos problemas em capítulos posteriores, a constante de acoplamento desempenha um papel fundamental no modelo de Gross-Neveu comutativo. Um desses papéis é eliminar os termos lineares em λ e garantir que o VEV desse campo seja nulo; a outra função veremos posteriormente.

De acordo com o modelo φ^4, podemos calcular o propagador completo do campo auxiliar na expansão $1/N$ a partir da sua auto-energia. Partindo da função conexa, própria, de dois pontos:

$$G_\lambda^{(2)}(x,y) = -\tfrac{1}{8}\langle 0|\lambda(x)\lambda(y)$$

$$\int d^3z d^3z' : \lambda(z)\bar{\psi}(z)\psi(z) :: \lambda(z')\bar{\psi}(z')\psi(z') : |0\rangle. \quad (2.2.12)$$

[4] A partir desse momento, não mais explicitaremos o vácuo ou os campos da teoria livre com o subíndice 0. Ficará subentendido que estaremos trabalhando com esses objetos quando empregarmos a fórmula de Gell-Mann Low.

[5] De acordo com o resultado (2.2.10), poderíamos ter escolhido $M = 0$, não o fizemos por que estamos particularmente interessados na geração dinâmica de massa.

No espaço dos momentos teremos:

$$G_\lambda^{(2)}(p,q) = (2\pi)^3\delta(p+q)\Delta_\lambda(p)\Delta_\lambda(q)$$

$$(-1)\tfrac{N}{2}\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr\left[\tfrac{(k+M)}{k^2-M^2}\tfrac{(k+p)+M}{(k+p)^2-M^2}\right]. \tag{2.2.13}$$

Amputando as linhas externas e tomando o traço obtemos a auto-energia do campo auxiliar no espaço dos momentos:

$$\Sigma_\lambda(p) = -N\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{k\cdot(k+p)+M^2}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}. \tag{2.2.14}$$

Com um pouco de álgebra podemos simplificar o resultado acima:

$$p^2 = (-k+k+p)^2 = k^2+(k+p)^2-2k\cdot(k+p),$$

$$k\cdot(k+p) = \tfrac{1}{2}[(k+p)^2+k^2-p^2]. \tag{2.2.15}$$

Substituindo este resultado em (2.2.14) e empregando o valor encontrado para $1/g$ em (2.2.11) teremos o propagador do campo auxiliar na expansão $1/N$, assim como em (2.1.19):

$$\Delta_\lambda(p) = \left[\tfrac{iN}{2g}-\Sigma(p)\right]^{-1} = -\left[\tfrac{(p^2-4M^2)N}{2}\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{1}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}\right.$$

$$\left.+\tfrac{N}{2}\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{(p+k)^2-k^2}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}\right]^{-1}. \tag{2.2.16}$$

Observe que, o último termo é anti-simétrico na troca $k \leftrightarrow k+p$, portanto, após a integração, será nulo. Teremos então o seguinte propagador:

$$\Delta_\lambda(p) = -\left[\frac{(p^2-4M^2)N}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}\right]^{-1}. \tag{2.2.17}$$

A integral acima é convergente, portanto o propagador do campo auxiliar está bem definido. Aqui temos a outra função da constante de acoplamento; quando somada a auto-energia torna o propagador do campo auxiliar finito.

É importante observar que a constante de acoplamente desempenha um papel duplo no modelo. Ela garante que o VEV do campo auxiliar seja nulo (veja 2.2.9) e, de maneira muito simples, se soma à auto-energia (2.2.14) dando origem a um propagador finito, dispensando o uso de qualquer mecanismo de renormalização. Veremos adiante que o mesmo não ocorre quando consideramos um espaço-tempo não-comutativo.

2.3 O Modelo Sigma Não-Linear Comutativo

Começaremos nossa descrição considerando o modelo Sigma Linear (SL) [1], [2]. Historicamente o modelo SL foi introduzido por Gell-Mann e Lévy em 1960 [5] e tinha como característica a conservação parcial da corrente axial e a simetria quiral. A densidade lagrangiana que descreve o modelo SL é a seguinte:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \bar{\psi}[i\ \partial\!\!\!/ + g(\sigma + i\boldsymbol{\pi}\cdot\boldsymbol{\tau}\gamma_5)]\psi + \tfrac{1}{2}[(\partial\boldsymbol{\pi})^2 + (\partial\sigma)^2)] \\ -\tfrac{\mu^2}{2}(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2) - \tfrac{\lambda^2}{4}(\sigma^2+\boldsymbol{\pi}^2)^2,\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

onde $\boldsymbol{\tau}$ é um vetor cujas componentes são as matrizes de Pauli $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Este modelo consiste em um iso-dubleto de férmions ψ, três campos pseudo-escalares $\boldsymbol{\pi}$ e um campo escalar σ e pode ser usado para descrever a interação entre píons e núcleons. O problema desse modelo é que existem somente três píons, portanto, o campo σ não está associado a nenhuma partícula física. Para eliminar o campo σ da lagrangiana (2.3.1) implementamos um vínculo que fixa o módulo do campo $\boldsymbol{\pi}$:

$$\boldsymbol{\pi}^2 + \sigma^2 = f^2. \tag{2.3.2}$$

Essa condição é invariante por transformações em O(4), ou seja, é invariante por transformações do tipo:

$$\delta\boldsymbol{\pi} = \epsilon\sqrt{f^2 - \boldsymbol{\pi}^2}. \tag{2.3.3}$$

Embora essa transformação seja não-linear [6] em SU(2), devido ao homomorfismo com O(4), a lagrangiana permanece invariante por transformações deste tipo. Como veremos a seguir, a condição (2.3.2) pode ser implementada através de um multiplicador de Lagrange. Nesse caso, teremos a introdução de um campo auxiliar, diferentemente da situação (2.3.2), na qual o vínculo é introduzido através de uma relação entre os campos já existentes na lagrangiana.

[6] Essa transformação dá origem ao nome do modelo que também foi proposto por Gell-Mann e Lévy.

O modelo SNL é o parceiro supersimétrico do modelo de GN. Isso motiva nosso estudo em busca de propriedades, ainda no espaço-tempo de Minkowski, contudo, não-comutativo, que possam revelar alguma característica dessa relação.

Em nosso estudo consideraremos apenas a parte quadrática escalar da lagrangiana (2.3.1). Consideraremos N campos vinculados a superfície de uma esfera:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\varphi\partial^2\varphi + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2 - \frac{N}{2g}\lambda, \tag{2.3.4}$$

onde ($\varphi = \varphi_i$, $i = 1...N$) e, como podemos ver através da equação de Euler-Lagrange para o campo auxiliar λ, $\varphi^2 \equiv \varphi_i\varphi_i = \frac{N}{g}$. Essa não é uma equação de movimento, visto que não há derivada temporal, ou seja, o campo λ é simplesmente um multiplicador de Lagrange introduzido na lagrangiana através da soma do termo $\frac{\lambda}{2}(\varphi_i\varphi_i - N/g)$.

Impondo que o VEV do campo auxiliar seja nulo temos a possível geração dinâmica de massa e, diferentemente do modelo de GN, onde a geração dinâmica de massa ocorre com a quebra da simetria de paridade, neste modelo, não há simetria relacionada a existência de um termo quadrático na lagrangiana. Do ponto de vista clássico, um termo quadrático, que obedece uma condição de vínculo como a que é encontrada neste modelo, simplesmente desloca a energia do sistema por um fator constante.

A densidade lagrangiana que leva em consideração o VEV = 0 do campo auxiliar é a seguinte:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\varphi(\partial^2 + M^2)\varphi + \frac{1}{2}\lambda\varphi\varphi - \frac{N}{2g}\lambda. \tag{2.3.5}$$

Podemos encontrar o propagador livre do campo básico, numa expansão usual, a partir da parte quadrática no campo φ presente na lagrangiana acima:

$$\Delta(k) = \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon}. \tag{2.3.6}$$

Para cada vértice trilinear de interação temos um fator i associado.

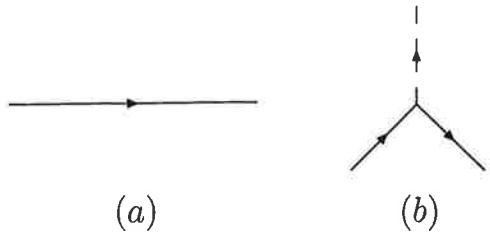


Figura 2.6: (a) Propagador do campo φ. (c) Vértice da interação $\lambda\varphi\varphi$.

Dessa vez o propagador livre do campo auxiliar não pôde ser obtido diretamente da lagrangiana, assim como foi feito no modelo de GN. Isso se deve ao fato de não haver qualquer termo quadrático, explícito em λ, na lagrangiana (2.3.5). Mas esse fato não impede que calculemos o propagador do campo auxiliar através da expansão em $1/N$, o que será feito a seguir.

Assim como nos modelos de GN e φ^4, estamos interessados nos propagadores dos campos obtidos através da expansão $1/N$. Para encontrar o propagador do campo auxiliar nesse contexto empregaremos um método alternativo ao usado nos modelos φ^4 e GN. Partimos da função 1PI de λ

$$G_\lambda^{(2)}(x,y) = -\tfrac{1}{8}\langle 0|T\lambda(x)\lambda(y)$$
$$\int d^3z d^3z' : \lambda(z)\varphi(z)\varphi(z) :: \lambda(z')\varphi(z')\varphi(z') : |0\rangle. \tag{2.3.7}$$

No espaço dos momentos teremos o seguinte resultado:

$$G_\lambda^{(2)}(k,k_1) = (2\pi)^3\delta(k+k_1)\Delta_\lambda(k)\Delta_\lambda(k_1)$$
$$\tfrac{N}{2}\int \tfrac{d^3q}{(2\pi)^3}\tfrac{1}{(q^2-M^2)[(q+k)^2-M^2]}. \tag{2.3.8}$$

Amputando as linhas externas teremos um diagrama semelhante ao da figura (2.5), além disso, este termo fornece a função de vértice do campo auxiliar no espaço dos momentos:

$$\Gamma_\lambda^{(2)}(k) = \frac{N}{2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{(q^2-M^2)[(q+k)^2-M^2]}. \tag{2.3.9}$$

O propagador do campo λ pode ser obtido através da função de vértice, $\Delta_\lambda(k) = -\left[\Gamma_\lambda^{(2)}(k)\right]^{-1}$. No espaço dos momentos teremos o seguinte resultado:

$$\Delta_\lambda(k) = -\left[\frac{N}{2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{(q^2-M^2)[(q+k)^2-M^2]}\right]^{-1} \overset{q\to\infty}{\sim} \sqrt{k^2}. \quad (2.3.10)$$

Observe que, por contagem de potências, a integral acima é finita, sem divergências UV. Sendo assim, o propagador do campo auxiliar é uma grandeza bem definida, diferente do propagador do campo φ corrigido pela auto-energia, como veremos a seguir.

Para calcular a contribuição da auto-energia, em $1/N$, ao propagador do campo φ partimos da função 1PI:

$$G_\varphi^{(2)}(x,y) = -\tfrac{1}{8}\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)$$
$$\int d^3z d^3z' : \lambda(z)\varphi(z)\varphi(z) :: \lambda(z')\varphi(z')\varphi(z') : |0\rangle, \quad (2.3.11)$$

a qual é responsável pelo diagrama

Figura 2.7: Função de dois pontos do campo φ.

e, no espaço dos momentos, terá a seguinte representação:

$$G_\varphi^{(2)}(p,q) = (2\pi)^3\delta(p+q)\Delta(p)\Delta(q)$$
$$(-1)\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{i}{[(k+p)^2-M^2]}\Delta_\lambda(k), \quad (2.3.12)$$

onde $\Delta_\lambda(k)$ é o propagador do campo auxiliar. Amputando as linhas externas obtemos a auto-energia no espaço dos momentos:

$$\Sigma_\varphi(p) = (-i)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{[(k+p)^2-M^2]}\Delta_\lambda(k). \quad (2.3.13)$$

Com esse resultado, o propagador do campo φ, corrigido pela auto-energia, será:

$$\tilde{\Delta}_\varphi(p) = \Delta_\varphi(p) + \Sigma_\varphi(p)$$

$$= \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon} - i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 - M^2]} \Delta_\lambda(k). \qquad (2.3.14)$$

O integrando da auto-energia do campo básico em (2.3.13) recebe a contribuição de um fator $\sqrt{k^2}$, procedente do comportamento assintótico do propagador do campo auxiliar para grandes momentos. Este fator contribui para tornar a auto-energia uma função quadraticamente divergente para momentos grandes. Como podemos ver a partir de (2.3.14), uma divergência na auto-energia do campo φ afeta diretamente seu propagador. Nesse caso, essa divergência quadrática não causa preocupação, tendo em vista que podemos elimina-lá através de uma renormalização da massa e de função de onda do campo φ. Como veremos posteriormente, problemas adicionais surgem quando consideramos o espaço-tempo não-comutativo.

Capítulo 3

A Não-Comutatividade

3.1 A Teoria de Cordas e a Não-Comutatividade

A idéia da não-comutatividade foi sugerida por Hartland S. Snyder, em 1947, como uma tentativa de controlar os infinitos que surgiam na TQC [12]. Voltaremos a proposta de Snyder em capítulos posteriores. Neste capítulo veremos como a não-comutatividade pode ser introduzida na TQC.

Podemos implementar a não-comutatividade ao espaço-tempo inspirando-os pela quantização do espaço de fase da Mecânica Quântica. Isso pode ser feito impondo uma relação de comutação entre as coordenadas [13], [22], [23], [20]:

$$[\widehat{x}^{\mu}(t), \widehat{x}^{\nu}(t)] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{3.1.1}$$

onde θ é uma matriz antisimétrica, real e constante. Esta relação de comutação nos impede de formar uma base de auto-estados simultaneamente diagonalizados para as coordenadas e, assim como no espaço de fase, induz uma relação de incerteza para medidas do espaço-tempo:

$$\Delta x^{\mu} \Delta x^{\nu} \geq \frac{1}{2}|\theta^{\mu\nu}|. \tag{3.1.2}$$

Sendo assim, o espaço passa a ser formado por células de Planck, cuja área é definida pelo parâmetro θ, o qual determina o comprimento fundamental da teoria.

A idéia de Snyder acabou esquecida devido ao grande sucesso alcançado pelo programa de renormalização. Com o chegada da Teoria de Cordas na década de 80, revigorou-se a busca por uma teoria quântica para a gravidade e a tentativa de quantizar o espaço-tempo foi retomada. Tendo a Teoria de Cordas como inspiração, veremos, neste capítulo, como ela nos revela a não-comutatividade [7], [10].

Na Teoria de Cordas o espaço-tempo é composto por 26 dimesões, x^μ, onde $\mu = 1, 2, ..., 26$. Essa teoria tem como propriedades a invariância de Lorentz e a invariância por reparametrização das coordenadas. Isso nos permite definir, $x^\mu(\tau, \sigma)$, que descreve as coordenadas da corda em função do parâmetro τ, que está associado ao tempo, e do parâmetro σ, que representa a posição de um ponto sob corda. Esses parâmetros são definidos a partir da superfície gerada pela corda em movimento no espaço-tempo, a qual denominamos folha-mundo. No caso da corda aberta, o nosso objeto de estudo, a folha-mundo é representada por uma superfície bidimensional. Intimamente relacionada à corda aberta temos as Dp-branas; que são superfícies de p dimensões espaciais nas quais as extremidades da corda se fixam.

A origem da Dp-brana está nas condições de contorno que a corda aberta, livre deve obedecer conforme o princípio de Hamilton. Uma pequena variação de $\delta x^\mu(\tau, \sigma)$ nas coordenadas que descrevem a ação da corda leva à equação de movimento da corda e as condições de contorno que ela deve obedecer. São de dois tipos estas condições, a condição de Neumann, que deixa as extremidades da corda livre durante o movimento e a condição de Dirichlet, que mantém fixas as extremidades da corda durante o movimento. A condição de contorno de Dirichlet dá origem à Dp-brana, pois é nesse objeto, de p dimensões espaciais [1], que a extremidade da corda se fixa.

Estamos particularmente interessados na corda bosônica, aberta, acoplada a uma Dp-brana, sob um campo de fundo de Kalb-Ramond $B^{\mu\nu}$ [2]. Por uma questão de simplicidade admitiremos que o campo de Kalb-Ramond é não nulo somente na Dp-brana, sendo assim, $B_{\mu\nu} = 0$ para $\mu, \nu > p$, portanto, as primeiras p coordenadas espaciais são paralelas à Dp-brana. Consideraremos a métrica do espaço-tempo constante, porém, não estudaremos as situações em que $\mu, \nu > p+1$. Nesse caso temos misturas entre componentes que vivem dentro e fora da Dp-brana, além de componentes da corda nor-

[1] A coordenada temporal é uma exceção e deve obedecer uma condiçao de contorno de extremidade livre.

[2] O campo de Kalb-Ramond tem origem na quantização da corda fechada e está imerso em todo o espaço-tempo.

mais à Dp-brana, as quais obedecem a condição de contorno de Dirichlet e fornecem soluções da Teoria de Cordas que não são objetos do nosso estudo.

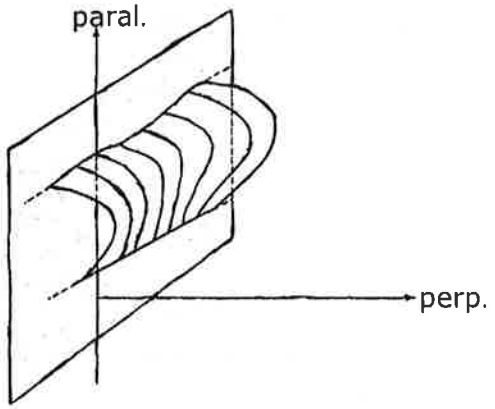


Figura 3.1: Representação de uma corda presa a uma Dp-brana. O eixo vertical corresponde as p componentes paralelas à Dp-brana. O eixo vertical corresponde ao restante das coordenadas perpendiculares à Dp-brana.

Considerando as restrições acima, a ação que descreve nosso problema pode ser escrita completamente em termos das coordenadas paralelas à Dp-brana, as quais atribuiremos os índices $i, j \leq p+1$:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma} d\tilde{\sigma} [g_{ij} \partial_a x^i(\tau, \tilde{\sigma}) \partial_a x^j(\tau, \tilde{\sigma})$$
$$-2\pi i B_{ij} \epsilon^{ab} \partial_a x^i(\tau, \tilde{\sigma}) \partial_b x^j(\tau, \tilde{\sigma})], \qquad (3.1.3)$$

onde $a = 1, 2$ estão associados aos parâmetros τ e σ que formam a folha-mundo, a qual atribuimos uma métrica euclidiana. Assumiremos $B_{ij} \neq 0$, sendo que a componente zero corresponde a direção temporal, com $B_{i0} = 0$. O parâmetro α' é denominado parâmetro de inclinação e está relacionado com a tensão na corda T_0 através da relação $\alpha' = (2\pi T_0 \hbar c)^{-1}$. Além disso, α' determina o comprimento característico, denominado comprimento da corda $l_s = \hbar c \sqrt{\alpha'}$.

A parte referente à interação na ação (3.1.3) pode ser obtida de maneira análoga a interação entre uma carga e um potencial vetorial. Um objeto

de um índice, o potencial vetorial, se acopla a outro objeto de um índice, a velocidade da partícula no espaço-tempo, para formar um escalar de Lorentz, a ação. No caso da Teoria de Cordas, a corda carrega uma carga de Kalb-Ramond [3] ; a qual se acopla ao campo de Kalb-Ramond que, por sua vez, é um tensor anti-simétrico de índice dois. A corda tem dois vetores tangentes à sua trajetória, $\frac{\partial x^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \tau}$ e $\frac{\partial x^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \sigma}$, os quais podem ser escolhidos para, juntamente com o campo de Kalb-Ramond, formar um escalar de Lorentz:

$$-\int d\tau d\sigma \frac{\partial x^\mu(\tau,\sigma)}{\partial \tau}\frac{\partial x^\nu(\tau,\sigma)}{\partial \sigma}B_{\mu\nu}. \tag{3.1.4}$$

A variação da ação (3.1.3) fornece a equação de movimento e a condição de contorno que a corda deve obedecer :

$$\begin{aligned}\delta S = &-\tfrac{1}{2\pi\alpha'}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} g_{ij}\partial_a\partial_a x^i(\tau,\tilde{\sigma})\delta x^j(\tau,\tilde{\sigma}) \\ &+\tfrac{1}{2\pi\alpha'}\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left[g_{ij}\partial_\sigma x^j(\tau,\tilde{\sigma}) + 2\pi i\alpha' B_{ij}\partial_\tau x^i(\tau,\tilde{\sigma})\right]\delta x^i(\tau,\tilde{\sigma})\Big|_0^\sigma = 0.\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

Como decorre do princípio de Hamilton, tomamos as posições inicial e final da corda fixas, ou seja, $\delta x(\tau_i,\sigma) = \delta x(\tau_f,\sigma) = 0$. Sendo assim, a equação de movimento da corda será:

$$\partial_a\partial_a x^i(\tau,\sigma) = 0, \tag{3.1.6}$$

a qual deve ser obedecida juntamente com a condição de fronteira:

$$g_{ij}\partial_\sigma x^j(\tau,\tilde{\sigma}) + 2\pi i\alpha' B_{ij}\partial_\tau x^j(\tau,\tilde{\sigma})\Big|_0^\sigma = 0. \tag{3.1.7}$$

Observe que a expressão acima é uma mistura da condição de contorno de Neumann, quando $B = 0$, com a condição de contorno de Dirichlet, quando $B \longrightarrow \infty$ ou $g \longrightarrow 0$.

[3] Temos ainda, associado ao campo de Kalb-Ramond, uma corrente de Kalb-Ramond, a qual é definida de maneira semelhante a corrente eletrônica.

Podemos considerar a folha-mundo uma superfície de Riemann. A superfície de Riemann mais simples é o plano complexo $z \equiv x + iy$. Essas superfícies exibem uma propriedade de mapeamento conforme, o que nos permite escolher uma superfície conveniente, equivalente ao plano complexo ao qual a superfície da corda está sendo associada. Antes de partirmos para o mapeamento conforme da folha-mundo faremos algumas definições úteis para desenvolvimentos futuros.

Vamos adotar as seguintes convenções para as coordenadas complexas e as derivadas [8]:

$$z = x + iy \qquad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y), \tag{3.1.8}$$

de modo que a derivada tem as seguintes propriedades:

$$\partial_z z = 1, \quad \partial_z \bar{z} = 0, \quad \partial_{\bar{z}} z = 0, \quad \partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1, \tag{3.1.9}$$

onde usamos a barra para representar as coordenadas complexas conjugadas.

Com essas definições podemos obter o elemento de área infintesimal no plano complexo:

$$dz d\bar{z} \equiv d^2 z = 2dxdy, \tag{3.1.10}$$

sendo o fator 2 devido ao Jacobiano da mudança de variáveis. Faremos também uma definição que normaliza a integral da delta de Dirac:

$$\int d^2 z \delta^2(z, \bar{z}) = 1, \tag{3.1.11}$$

sendo assim, $\delta^2(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}\delta(x)\delta(y)$.

A transformação conforme é uma ferramenta bastante útil no cálculo de interações em teoria de cordas. No nosso caso é suficiente associar a folha mundo ao semi-plano superior complexo z ($z \equiv \tau + i\sigma$) não sendo necessário realizar qualquer transformação conforme.

Considerando essas definições, as equações (3.1.6), (3.1.7) que a corda obedece terão a seguinte forma:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} x^i = 0, \tag{3.1.12}$$

$$g_{ij}(\partial_z - \partial_{\bar{z}})x^j + 2\pi i \alpha' B_{ij}(\partial_z + \partial_{\bar{z}})x^j \Big|_{z=\bar{z}} = 0, \tag{3.1.13}$$

É possível encontrar a solução da equação de movimento (3.1.12) sujeita a condição de contorno (3.1.13) através da função de Green [11]:

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} \mathcal{G}^{ij}(z, z') = -2\pi\alpha' G^{ij} \delta(z - z'). \tag{3.1.14}$$

Conforme verificaremos a seguir, a solução da equação (3.1.14) satisfazendo a condição (3.1.13) é

$$\langle x^i(z) x^j(z') \rangle = -\alpha' \Big[g^{ij} ln|z - z'| - g^{ij} ln|z - \bar{z}'|$$

$$+ G^{ij} ln|z - \bar{z}'|^2 + \tfrac{1}{2\pi\alpha'} \theta^{ij} ln \tfrac{z - \bar{z}'}{\bar{z} - z'} + D^{ij} \Big], \tag{3.1.15}$$

na qual D^{ij} é uma constante que será escolhida convenientemente e G^{ij}, θ^{ij} funções de B e g:

$$G^{ij} = \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha' B} g \frac{1}{g - 2\pi\alpha' B} \right)^{ij}, \tag{3.1.16}$$

$$\theta^{ij} = -(2\pi\alpha')^2 \left(\frac{1}{g + 2\pi\alpha' B} B \frac{1}{g - 2\pi\alpha' B} \right)^{ij}. \tag{3.1.17}$$

Inicialmente demonstraremos que, para $z \neq z'$, a solução (3.1.15) satisfaz a equação de movimento da corda (3.1.12). Por uma questão de simplicidade consideraremos $z' = 0$ em (3.1.15), sendo assim:

$$\partial_z\partial_{\bar{z}}\langle x^i(z)x^j(0)\rangle = -\alpha'\Big[\left(G^{ij}+\tfrac{1}{2\pi\alpha'}\theta^{ij}\right)\partial_{\bar{z}}\left(\tfrac{1}{z}\right)$$

$$+\left(G^{ij}-\tfrac{1}{2\pi\alpha'}\theta^{ij}\right)\partial_z\left(\tfrac{1}{\bar{z}}\right)\Big] = 0. \tag{3.1.18}$$

Na situação onde $z = z'$ obtemos um resultado semelhante ao da eletrostática, no qual o divergente do campo elétrico de uma carga puntual é nulo, exceto no ponto onde a partícula está localizada. A derivada em (3.1.18) é nula para todo z, exceto num ponto singular em $z = 0$. Para encontrar a solução nesse ponto de indeterminação aplicamos o teorema de Gauss em duas dimensões no plano complexo:

$$\int_R d^2z(\partial_z\bar{v}+\partial_{\bar{z}}v) = \frac{i}{2}\oint_{\partial R}(\bar{v}d\bar{z}-vdz), \tag{3.1.19}$$

sendo v um vetor no plano complexo. A integral fechada é avaliada ao longo de um pequeno círculo de raio R em torno da origem, cuja orientação é positiva no sentido anti-horário. Deste modo, a equação (3.1.18) será:

$$-\alpha'\tfrac{i}{2}\oint_{\partial R}\Big[\left(G^{ij}-\tfrac{1}{2\pi\alpha'}\theta^{ij}\right)\tfrac{1}{\bar{z}}d\bar{z}-\left(G^{ij}+\tfrac{1}{2\pi\alpha'}\theta^{ij}\right)\tfrac{1}{z}dz\Big]$$
$$= -2\pi\alpha' G^{ij}, \tag{3.1.20}$$

onde usei o teorema da integral de Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{z-z_0}dz = \begin{cases} f(z_0) & z_0 \text{ no interior de c} \\ 0 & z_0 \text{ no exterior de c.}\end{cases} \tag{3.1.21}$$

Com os resultados (3.1.18) e (3.1.20), podemos concluir que (3.1.15) satisfaz a relação (3.1.14).

A função de Green (o propagador) também deve obedecer a condição de contorno (3.1.13)

$$g_{ij}(\partial_z-\partial_{\bar{z}})\mathcal{G}^{jk}(z,0)+2\pi i\alpha' B_{ij}(\partial_z+\partial_{\bar{z}})\mathcal{G}^{jk}(z,0)\Big|_{z=\bar{z}} = 0, \tag{3.1.22}$$

introduzindo na igualdade acima o resultado (3.1.15) com $z' = 0$ e substituindo os valores de G^{ij} e θ^{ij} definidos em (3.1.16) e (3.1.17) obtemos

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{4\pi\alpha'^2}{z}\left(-g\tfrac{1}{g+2\pi\alpha' B}B + B\tfrac{1}{g+2\pi\alpha' B}g\right)_{ij}\left(\tfrac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{jk} \\
&= -\tfrac{4\pi\alpha'^2}{z}\left(-g\tfrac{g}{g}\tfrac{1}{g+2\pi\alpha' B}\tfrac{B}{B}B + B\tfrac{B}{B}\tfrac{1}{g+2\pi\alpha' B}\tfrac{g}{g}g\right)_{ij}\left(\tfrac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{jk} \\
&= -\tfrac{4\pi\alpha'^2}{z}\left(-\tfrac{1}{\frac{1}{B}+2\pi\alpha'\frac{1}{g}} + \tfrac{1}{\frac{1}{B}+2\pi\alpha'\frac{1}{g}}\right)_{ij}\left(\tfrac{1}{g-2\pi\alpha' B}\right)^{jk} = 0 \qquad (3.1.23)
\end{aligned}
$$

Sendo assim, provamos que (3.1.15) é solução da equação (3.1.14) e obedece a condição de contorno (3.1.13).

Os infintos são pontos especiais nas superfícies de Riemann. Eles correspondem ao infinito passado e futuro na evolução de uma corda, portanto, devem ser removidos das superfícies de Riemann. Devido a esse fato esses pontos recebem a denominação de "punctures" e, são justamente nesses pontos que extremidades das cordas são introduzidas. Os punctures estão localizados nas regiões de contorno determinadas pelos pontos fixos no princípio de Hamilton, os quais, no nosso caso, estão localizados no eixo real do semi-plano superior complexo. Isso nos permite tomar somente os valores reais da função de Green (3.1.15).

Observe que os três primeiros termos de (3.1.15) são logaritmos do módulo de vetores no plano complexo. Isso é um valor bem definido, real, único. O quarto termo, porém, é o logaritmo de um número complexo. Isso significa que um ponto no semi-plano superior complexo z está sendo mapeado em infinitos pontos no plano complexo w (Fig.3.2). Para ver isso convém introduzir o ângulo ϕ:

$$
\ln\frac{z-\bar{z}'}{\bar{z}-z'} = \ln e^{i2\theta} = \ln e^{i\phi}, \qquad (3.1.24)
$$

sendo $\theta \in [0,\pi]$ e $\phi \in [0,2\pi]$.

A solução para esse problema consiste em introduzir uma linha de corte no semi-eixo real positivo do plano complexo γ restringindo o intervalo de existência do ângulo ϕ para $\phi \in [0,2\pi)$ (Fig. 3.3).

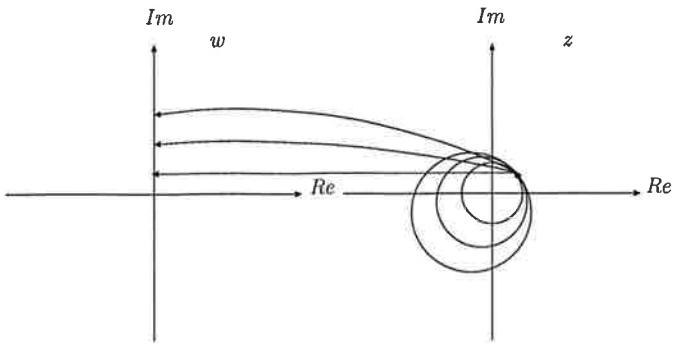


Figura 3.2: O problema dos "branch points".

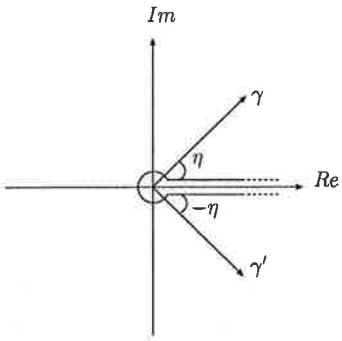


Figura 3.3: Solução para o problema dos "branch points".

Sendo:

$$\gamma = e^{i\eta} \qquad \eta \longrightarrow 0^+, \quad \ln\gamma = 0, \tag{3.1.25}$$

$$\gamma' = e^{i(2\pi-\eta)} \qquad \eta \longrightarrow 0^+, \quad \ln\gamma' = 2\pi i. \tag{3.1.26}$$

Seja outro vetor definido no plano complexo γ da seguinte maneira:

$$\zeta - \bar{\zeta}' = (r - r') + i\epsilon, \tag{3.1.27}$$

no qual $\epsilon \longrightarrow 0^+$. Dessa forma, teremos para o logaritmo

$$\ln \frac{\zeta - \bar{\zeta}'}{\bar{\zeta} - \zeta'} \approx \ln \left(1 + i\frac{2\epsilon}{r - r'}\right) = \ln e^{i\frac{2\epsilon}{r-r'}}. \tag{3.1.28}$$

Vamos comparar o resultado acima com aqueles obtidos em (3.1.25) e (3.1.26):

$$\text{se} \quad r - r' > 0 \quad \text{teremos} \quad (3.1.25) \quad \text{, portanto,} \quad \ln \frac{\zeta - \bar{\zeta}'}{\bar{\zeta} - \zeta'} = 0, \tag{3.1.29}$$

$$\text{se} \quad r - r' < 0 \quad \text{teremos} \quad (3.1.26) \quad \text{, portanto,} \quad \ln \frac{\zeta - \bar{\zeta}'}{\bar{\zeta} - \zeta'} = 2\pi i. \tag{3.1.30}$$

Com este resultado obtemos o valor do último termo da função de Green (3.1.15). Esse termo depende unicamente da ordenação dos pontos sobre o eixo real do semi-plano superior z, o que demonstra a importância da ordenação entre os pontos.

Como foi dito anteriormente, as cordas são introduzidas nas regiões de contorno. No nosso caso, estas regiões estão sobre o eixo real do semi-plano z. Sendo assim, consideraremos somente os valores reais do resultado obtido para o produto entre dois campos em (3.1.15):

$$\langle x^i(\tau) x^j(\tau') \rangle = -\alpha G^{ij} ln|\tau - \tau'|^2 + \frac{i}{2}\theta^{ij}\mathcal{E}(\tau - \tau'), \tag{3.1.31}$$

sendo $\mathcal{E}(\tau - \tau')$ a função sinal. Para chegarmos ao resultado (3.1.31) empregamos a função (3.1.15) com $D^{ij} = -\frac{i}{2\alpha'}\theta^{ij}$ e o resultado obtido em (3.1.30).

Finalmente podemos calcular o comutador entre as coordenadas corda. Com o auxílio do operador de ordenação temporal T e a função de Green (3.1.31) teremos o seguinte resultado para o comutador entre as coordenadas:

$$\langle [x^i(\tau), x^j(\tau)] \rangle = \langle T \left[x^i(\tau) x^j(\tau^-) - x^i(\tau) x^j(\tau^+)\right] \rangle = i\theta^{ij}, \tag{3.1.32}$$

quando $\tau^- \to \tau \to \tau^+$.

Esse resultado nos mostra que a Teoria de Cordas prevê naturalmente um espaço-tempo não-comutativo assim como foi proposto inicialmente por Snyder.

Iremos um pouco mais adiante com a Teoria de Cordas para demostrar um resultado que será o objeto de estudo da próxima seção. Mostraremos que exite uma álgebra relacionando operadores e funções no espaço não-comutativo.

Vamos calcular o produto entre dois campos taquiônicos. Considere o produto de dois operadores de vértice do táquion a uma distância muito pequena:

$$e^{ipx}(\tau)e^{iqx}(\tau') \qquad \text{para} \tau > \tau'. \tag{3.1.33}$$

De acordo com Wilson [1] o produto de dois operadores locais pode ser expandido como:

$$A(x)B(y)_{x\to y} \sim \sum_N C_N(x-y)O_N(y), \tag{3.1.34}$$

sendo

$$\lim_{x\to 0} C_N(x) \sim x^{\gamma_N}\ln|x| \qquad \gamma_N = d_{ON} - d_A - d_B$$

onde d_α é a dimensão canônica de α.

Podemos aplicar a expansão de Wilson ao produto dos operadores de vértice em (3.1.33). Em ordem mais baixa teremos:

$$e^{ipx}(\tau)e^{iqx}(\tau') \approx (\tau-\tau')^{2\alpha' G^{ij}p_iq_j}e^{ipx}(\tau')e^{iqx}(\tau') + \ldots, \tag{3.1.35}$$

empregando a fórmula de Baker-Hausdorf $e^Ae^B = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ e a relação de comutação entre as coordenadas (3.1.32) obtemos:

$$e^{ipx}(\tau)e^{iqx}(\tau') = (\tau-\tau')^{2\alpha' G^{ij}p_iq_j}e^{-\frac{i}{2}p_i\theta^{ij}q_j}e^{i(p+q)x}(\tau'). \tag{3.1.36}$$

Observe que, para $\alpha' \to 0$ ou momento pequeno, podemos ignorar o termo dependente de $(\tau-\tau')$:

$$e^{ipx}(\tau)e^{iqx}(\tau') \approx e^{-\frac{i}{2}p_i\theta^{ij}q_j}e^{i(p+q)x}(\tau') = e^{ipx} \star e^{iqx}(\tau'). \qquad (3.1.37)$$

Essa relação permite substituir o produto usual entre dois operadores de vértice, calculados em pontos muito próximos, pelo produto deformado entre os mesmos calculado sobre mesmo ponto. Se os operadores de posição obedecessem a relação de comutação usual, teríamos um produto ordinário entre operadores. A nova definição de produto mostra como podemos assimilar a informação da não-comutatividade à álgebra utilizada. Esse produto deformado é denominado produto Moyal ou produto estrela e suas propriedades serão vistas na próxima seção.

No caso em que o operador de vértice tem a forma $P(\partial_{x(\tau)}, \partial^2_{x(\tau)}, \ldots)e^{ipx(\tau)}$, onde P é um polinômio nas derivadas de x, não teremos o último termo da função de Green (3.1.15) tendo em vista que é uma constante. Esse fato nos permite fazer:

$$\left\langle \prod_{n=1}^{k} P_n\left(\partial_{x(\tau_n)}, \partial^2_{x(\tau_n)}, \ldots\right) e^{ipx(\tau_n)}\right\rangle\Bigg|_{G,\theta} =$$

$$e^{-\frac{i}{2}\sum_{n>m}p_i^m\theta^{ij}p_j^m\mathcal{E}(\tau_n>\tau_m)}\left\langle \prod_{n=1}^{k} P\left(\partial_{x(\tau_n)}, \partial^2_{x(\tau_n)}, \ldots\right) e^{ipx(\tau_n)}\right\rangle\Bigg|_{G,\theta=0}. \qquad (3.1.38)$$

Calcular interações que dependem de derivadas de x, com o campo de fundo (espaço não-comutativo), equivale a calcular a mesma interação sem o campo de fundo (espaço comutativo), porém, considerando o produto Moyal entre os campos.

Para provar esse resultado partiremos da defição do valor esperado de uma função:

$$\int [dx] \prod_{n=1}^{k} P_n\left(-i\partial_{z_n}\frac{\delta}{\delta p_m}, -i\partial^2_{z_n}\frac{\delta}{\delta p_m}, \ldots\right)$$

$$e^{-\frac{1}{2\pi\alpha'}\int d^2z\partial_z x^i\partial_{\bar{z}}x^j(g_{ij}-2\pi\alpha' B_{ij})+i\int d^2z\sum_{n=1}^{k}\delta(z-z_n)p_n x(z_n)}. \qquad (3.1.39)$$

Integrando por partes o primeiro termo no argumento da exponencial e empregando a condição (3.1.12), obtemos uma integral gaussiana

$$\int [dx] \prod_{n=1}^{k} P_n \left(-i\partial_{z_n} \frac{\delta}{\delta p_m}, -i\partial_{z_n}^2 \frac{\delta}{\delta p_m}, \dots \right)$$

$$e^{\int d^2 z x^i \partial_z \partial_{\bar{z}} x^j \frac{1}{2\pi\alpha'}(g_{ij} - 2\pi\alpha' B_{ij}) + i\sum_{n=1}^{k} \delta(z - z_n) p_n x(z_n)}. \tag{3.1.40}$$

Para resolver a integral acima recorremos à relação [9]

$$\int \prod_{i=1}^{n} dx_i e^{\sum_{i,j=1}^{n} -x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^{n} J_i x_i} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\det|A_{ij}|} e^{\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n} J_i (A^{-1})_{ij} J_j}. \tag{3.1.41}$$

Admitindo que a função de Green e o operador D'Lambertiano estão relacionados $[(\partial_z \partial_{\bar{z}})^{-1} \propto \mathcal{G}]$, (3.1.40) resulta em

$$\prod_{n=1}^{k} P_n \left(\partial_{x(z_n)}, \partial_{x(z_n)}^2, \dots \right) e^{-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{k} p_i^n \mathcal{G}^{ij}(z_n, z_m) \sum_{m=1}^{k} p_j^m}. \tag{3.1.42}$$

Considerando o resultado acima sobre o eixo real, a função de Green será dada por (3.1.31). O termo de auto-energia $n = m$, o qual seria o possível o responsável por alguma divergência, pode ser ignorado [4]. Sendo assim, teremos:

$$\prod_{n=1}^{k} P_n \left(\partial_{x(\tau_n)}, \partial_{x(\tau_n)}^2, \dots \right) \prod_{n>m} e^{-\frac{1}{2} p_i \theta^{ij} p_j \epsilon(\tau_n - \tau_m)} (\tau - \tau')^{2\alpha' G^{ij} p_i q_j}$$

$$= e^{-\frac{i}{2}\sum_{n>m} p_i^m \theta^{ij} p_j^m \mathcal{E}(\tau_n > \tau_m)} \langle \prod_{n=1}^{k} P \left(\partial_{x(\tau_n)}, \partial_{x(\tau_n)}^2, \dots \right) e^{ip \cdot x(\tau_n)} \rangle \Big|_{G,\theta=0}, \tag{3.1.43}$$

como queríamos demonstrar.

Uma corda bosônica sob a ação de um campo de fundo de Kalb-Ramon, no limite de $\alpha' \to 0$ ou momento pequeno, equivale a mesma teoria de corda bosônica, porém, com o produto usual substituido pelo produto Moyal entre os campos; assim como faremos em TQC nas seções seguintes.

[4] Podemos truncar a integral e manter as propriedades conformes da teoria.

3.2 O Formalismo de Weyl-Groenewold-Moyal

A não-comutatividade do espaço-tempo foi implementada impondo a relação de comutação (3.1.1) entre as coordenadas. As relações de comutação entre momentos e coordenadas permanecem inalteradas:

$$[\widehat{p}^{\mu}(t), \widehat{p}^{\nu}(t)] = 0,$$

$$[\widehat{x}^{\mu}(t), \widehat{p}^{\nu}(t)] = i\delta^{\mu\nu}. \tag{3.2.1}$$

Na TQC comutativa, os campos são operadores do tipo $\widehat{F}(x)$ que atuam no espaço de Fock. Na TQC não-comutativa, a coordenada passa a ser um operador adicional e os campos passam a ser representados por $\widehat{F}(\widehat{x})$. O problema com esse formalismo é que não podemos formar um espaço de auto-estados simultaneamente diagonalizados dos operadores $\widehat{x}^{\mu}$, dada a relação de comutação (3.1.1), sendo assim, torna-se difícil calcular qualquer tipo de amplitude em TQC não-comutativa. Esse problema foi solucionado por Weyl, o qual desenvolveu um mapa estabelecendo uma relação entre operadores quânticos e funções clássicas.

De acordo com Weyl, funções definidas no espaço de Schwartz, que têm um decaimento rápido no infinito e que admitem um número arbitrário de derivadas que também decaem no infinito, tanto no espaço de posições quanto no espaço dos momentos, podem ser associadas a um operador através de uma "transformada de Fourier" [15], [13]:

$$F(\widehat{x}) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{ik\widehat{x}} \tilde{f}(k) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \widehat{T}(k) \tilde{f}(k), \tag{3.2.2}$$

onde $k\widehat{x} = k_{\mu}\widehat{x}^{\mu}$ e $\tilde{f}(k)$ é a transformada de Fourier usual de $f(x)$:

$$\tilde{f}(k) = \int d^n x e^{-ikx} f(x). \tag{3.2.3}$$

O operador $\widehat{T}(k)$ é o mapa que estabelece a relação entre funções e operadores e está sujeito as seguintes regras:

$$\widehat{T}^{\dagger}(k) = \widehat{T}(-k),$$

$$\widehat{T}(k)\widehat{T}(k') = \widehat{T}(k+k')e^{-\frac{i}{2}k\theta k'}, \tag{3.2.4}$$

onde $k\theta k' = k_\mu \theta^{\mu\nu} k'_\nu$. É conveniente definir um operador traço, Tr, cíclico nos seus argumentos e normalizado da seguinte maneira:

$$\mathrm{Tr}\widehat{T}(k) = \mathrm{Tr}e^{ik\widehat{x}} \equiv (2\pi)^n \prod_\mu \delta(k_\mu). \tag{3.2.5}$$

Usando o operador $\widehat{T}$ podemos obter uma "transformada inversa" de (3.2.2):

$$f(x) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{-ikx} \mathrm{Tr}[F(\widehat{x})\widehat{T}^\dagger(k)]. \tag{3.2.6}$$

Uma função $f(x)$ obtida dessa forma, a partir de um operador quântico, recebe o nome de função distribuição de Wigner [15].

A fórmula (3.2.6) estabelece uma relação entre uma dada função clássica e o operador quântico correspondente. A partir desta relação podemos construir o produto Groenewold-Moyal entre duas funções clássicas que corresponde ao produto usual de dois operadores quânticos:

$$f_1(x) \star f_2(x) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} e^{-ikx} \mathrm{Tr}[F_1(\widehat{x})F_2(\widehat{x})\widehat{T}^\dagger(k)], \tag{3.2.7}$$

A partir de (3.2.7) podemos obter uma representação na qual o efeito da não-localidade se torna mais explícito:

$$\begin{aligned} f_1(x) \star f_2(x) &= \int \tfrac{d^n k}{(2\pi)^n} \tfrac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \tfrac{d^n k_2}{(2\pi)^n} e^{-ikx - \frac{i}{2}k_1\theta k_2} \\ &\quad \mathrm{Tr}[\widehat{T}(k_1 + k_2)\widehat{T}^\dagger(k)] \tilde{f}_1(k_1)\tilde{f}_2(k_2) \\ &= \int \tfrac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \tfrac{d^n k_2}{(2\pi)^n} e^{-i(k_1+k_2)x - \frac{i}{2}k_1\theta k_2} \tilde{f}_1(k_1)\tilde{f}_2(k_2) \\ &= \lim_{y\to x} e^{-\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}} f_1(y) f_2(x), \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

onde a existência de termos com número arbitrário de derivadas torna o produto das duas funções não-local.

Uma propriedade importante do produto Moyal pode ser obtida quando integramos o produto estrela entre dois campos no espaço-tempo:

$$\int d^n x f_1(x) \star f_2(x)$$
$$= \int d^n x \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \frac{d^n k_2}{(2\pi)^n} e^{-i(k_1+k_2)x - \frac{i}{2}k_1\theta k_2} \tilde{f}_1(k_1)\tilde{f}_2(k_2)$$
$$= \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \frac{d^n k_2}{(2\pi)^n} (2\pi)^n \delta(k_1+k_2) e^{-\frac{i}{2}k_1\theta k_2} \tilde{f}_1(k_1)\tilde{f}_2(k_2)$$
$$= \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \tilde{f}_1(k_1)\tilde{f}_2(-k_1) = \int d^n x f_1(x) f_2(x). \tag{3.2.9}$$

O produto Moyal e o produto usual entre dois campos, quando integrados no espaço de Minkowski, são iguais. Essa característica da teoria nos permite afirmar que os propagadores livres dos campos não serão alterados pelo efeito da não-comutatividade, tendo vista que esses objetos são obtidos a partir da parte quadrática da ação.

A partir da "transformada inversa" definida em (3.2.6) podemos generalizar o resultado (3.2.9) considerando o produto estrela de m funções:

$$\begin{aligned}\int d^n x f_1(x) \star f_2(x) \star \cdots \star f_m(x) &= \mathrm{Tr}[F_1(\widehat{x})F_2(\widehat{x})_m(\widehat{x})] \\ &= \int \prod_{i=1}^m \frac{d^n k_i}{(2\pi)^n} (2\pi)^n \delta(k_1 + \cdots + k_m) \\ &\quad e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j} k_i\theta k_j} \tilde{f}_1(k_1)\ldots\tilde{f}_m(k_m).\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

A introdução de uma relação de comutação como em (3.1.1) implica na não-localidade, consequentemente as coordenadas passam a obedecer uma relação de incerteza de Heisenberg, como em (3.1.2). Sendo assim, o espaço-tempo deixa de ser constituído por pontos e passa a ser formado por células de Planck.

Uma definição como (3.1.1) quebra explicitamente a invariância de Lorentz, pois define direções privilegiadas no espaço-tempo. Além da violação da invariância de Lorentz, essa teoria apresenta problemas com unitariedade e causalidade, ambos decorrentes das relações de comutação que envolvem a coordenada temporal. Esses dois últimos problemas podem ser contornados admitindo que a coordenada temporal comuta com todas as outras. Isso pode ser feito impondo que o parâmetro $\theta^{0i} = 0$, o que será admitido nas próximas seções.

3.3 O Modelo de Gross-Neveu no Espaço Não-Comutativo

De acordo com o formalismo desenvolvido na seção anterior podemos descrever um modelo no espaço não-comutativo simplesmente substituindo o produto usual entre os operadores quânticos pelo produto estrela entre as funções clássicas correspondentes. Considerando essa característica partiremos diretamente da lagrangiana (2.2.6), admitindo a não-comutatividade do espaço.

$$S = \int d^3x \frac{i}{2}\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi - \frac{M}{2}\bar{\psi}\psi - \frac{\lambda}{2} \star (\bar{\psi} \star \psi) - \frac{N}{4g}\lambda^2 - \frac{N}{2g}M\lambda. \tag{3.3.1}$$

O primeiro passo diante de um novo formalismo é verificar como as regras de Feynman são afetadas. Como vimos anteriormente, o produto de dois campos integrado no espaço-tempo não é afetado pelo produto estrela (3.2.9), sendo assim, o propagador livre do campo ψ permanece o mesmo da teoria comutativa:

$$S(k) = \frac{i}{k\!\!\!/ - M + i\epsilon}. \tag{3.3.2}$$

Considerando a expansão perturbativa usual, o propagador livre do campo auxiliar também não sofrerá alteração, visto que é obtido do termo quadrático, portanto:

$$\Delta_\lambda(k) = -\frac{2ig}{N}. \tag{3.3.3}$$

O vértice da interação recebe a contribuição de um fator trigonométrico e passa a depender do parâmetro que define a não-comutatividade:

$$i\cos\left(\frac{1}{2}p_2\theta p_3\right), \tag{3.3.4}$$

onde p_2 e p_3 são os momentos externos associados aos campos ψ e $\bar{\psi}$. Assim como na situação comutativa, as figuras associadas aos propagadores e ao vértice são semelhantes as da figura 2.3.

Vimos que a constante de acoplamento desempenha um papel fundamental no modelo de Gross-Neveu, portanto, antes de calcular o propagador do campo auxiliar na expansão $1/N$, calcularemos a equação de gap do campo λ. Devido a propriedade (3.2.9) do produto Moyal, a equação de gap não é afetada pela não-comutatividade:

$$\langle 0|\lambda(x)|0\rangle = 0$$

$$= \langle 0|\lambda(x) : \int dy \left[\lambda(y) \star \bar{\psi}(y) \star \psi(y) + \tfrac{NM}{g}\lambda(y)\right] : |0\rangle. \qquad (3.3.5)$$

Realizando a transformada de Fourier para o espaço dos momentos teremos (veja (A.2.2)):

$$\langle 0|\lambda(p) : \int \tfrac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\left[\tfrac{NM}{g}\lambda(k_1) + \int \prod_{i=1}^{2} \tfrac{d^3k_i}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3)\right.$$

$$\left.\lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3)\cos\left(\tfrac{1}{2}k_2\theta k_3\right)\right] : |0\rangle$$

$$= (2\pi)^3\delta(p)\Delta_\lambda(p)NM\left[\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{-2i}{k^2-M^2} + \tfrac{1}{g}\right] = 0. \qquad (3.3.6)$$

Portanto devemos ter

$$\frac{1}{g} - 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{i}{k^2-M^2} = 0. \qquad (3.3.7)$$

O propagador do campo auxiliar na expansão $1/N$ pode ser obtido com o auxílio auto-energia. Para encontar a auto-energia partimos da função de dois pontos:

$$G_\lambda^{(2)}(x,y) = \langle 0|\lambda(x)\lambda(y)$$

$$-\tfrac{1}{8}\int d^3z d^3z' : \lambda(z) \star \bar{\psi}(z) \star \psi(z) :: \lambda(z') \star \bar{\psi}(z') \star \psi(z') : |0\rangle. \qquad (3.3.8)$$

No espaço dos momentos teremos:

$$G_\lambda^{(2)}(p,q) = (2\pi)^3\delta(p+q)\Delta_\lambda(p)\Delta_\lambda(q)$$

$$(-1)\tfrac{N}{2}\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} Tr\left[\tfrac{(\not{k}+M)}{k^2-M^2}\tfrac{(\not{k}+\not{p})+M}{(k+p)^2-M^2}\right]\cos^2\left(\tfrac{1}{2}k\theta p\right). \qquad (3.3.9)$$

Amputando as linhas externas e tomando o traço obtemos a auto-energia do campo auxiliar no espaço dos momentos:

$$\Sigma_\lambda(p) = -N \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k\cdot(k+p)+M^2}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]} \cos^2\left(\frac{1}{2}k\theta p\right). \quad (3.3.10)$$

Com equação de gap (3.3.7) e o resultado acima, podemos obter o propagador completo do campo auxiliar na expansão $1/N$:

$$\Delta_\lambda(p) = \left[\tfrac{iN}{2g} - \Sigma(p)\right]^{-1}$$

$$= \left\{\tfrac{iN}{2g} + N\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} \cos^2\left(\tfrac{1}{2}k\theta p\right) \tfrac{k\cdot(k+p)+M^2}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}\right\}^{-1}. \quad (3.3.11)$$

Empregando a identidade trigonométrica $\cos^2(\frac{1}{2}k\theta p) = \frac{1}{2}[1+\cos(k\theta p)]$ podemos separar a auto-energia em duas partes. A parte que não depende da função trigonométrica é denominada planar:

$$\Sigma(p)_{\rm p} = -\frac{N}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k\cdot(k+p)+M^2}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}. \quad (3.3.12)$$

A porção que contém a função trigonométrica é denominada não-planar:

$$\Sigma(p)_{\rm np} = -\frac{N}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \cos(k\theta p) \frac{k\cdot(k+p)+M^2}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}. \quad (3.3.13)$$

Observe que a parte não-planar, devido ao fator oscilatório, é finita na região UV, contudo, não obtemos o resultado comutativo no limite $\theta = 0$. O termo planar, porém, diverge linearmente, assim como ocorre no caso comutativo em (2.2.14). O fator adicional $\frac{1}{2}$ em (3.3.12), no entanto, não permite que a constante de acoplamento (3.3.7), que não foi alterada pela não-comutatividade (compare com (2.2.11)), elimine a divergência da parte planar. Isso pode ser verificado substituindo (3.3.7) em (3.3.11):

$$[\Delta_\lambda(p)]^{-1} = \tfrac{iN}{2g} - \Sigma(p)_{\rm p} - \Sigma(p)_{\rm np} = -\tfrac{N}{2}\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} \tfrac{1}{(k^2-M^2)}$$

$$-\tfrac{N}{4}(p^2-4M^2)\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} \tfrac{1}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]} - \Sigma(p)_{\rm np}. \quad (3.3.14)$$

Comparando (3.3.14) com o resultado obtido no caso comutativo (2.2.17), podemos notar a presença de um termo adicional, linearmente divergente e não-renormalizável, devido a impossibilidade de adicionar um contra-termo à lagrangiana.

Já esperávamos que o efeito da não-comutatividade fosse o de introduzir fatores trigonométricos devido a não-localidade do produto estrela, porém, a possibilidade de separar a auto-energia do campo ψ em partes planar e não-planar e o fato da equação de gap não ser afetada pela não-comutatividade introduzem divergências inesperadas ao modelo, tornando-o não-renormalizável.

3.4 O Modelo Sigma Não-Linear Não-Comutativo

Seguindo a correspondência de Weyl-Moyal para descrever um modelo no espaço não-comutativo, introduziremos o produto estrela entre os campos da lagrangiana (2.3.5). Dessa forma, o modelo SNL não-comutativo será:

$$S = \int d^3x - \frac{1}{2}\varphi(\partial^2 + M^2)\varphi + \frac{1}{2}\lambda \star \varphi \star \varphi - \frac{N}{2g}\lambda. \tag{3.4.1}$$

Antes de partirmos para os cálculos perturbativos definiremos as regras de Feynman nesse novo formalismo. De acordo com a relação (3.2.9) para o produto de dois campos, podemos concluir que o propagador livre do campo φ permanece inalterado:

$$\Delta(k) = \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon}. \tag{3.4.2}$$

O vértice de interação recebe a contribuição de um fator trigonométrico e passa a depender do parâmetro que define a não-comutatividade:

$$i\cos\left(\frac{1}{2}p_2\theta p_3\right). \tag{3.4.3}$$

A notação gráfica para o propagador (3.4.2) e para a função de vértice são os mesmo expostos na figura (2.5).

Para calcular o propagador do campo auxiliar na expansão $1/N$ necessitaremos da função de dois pontos desse campo:

$$G_\lambda^{(2)}(x,y) = \langle 0|T\lambda(x)\lambda(y)$$
$$-\tfrac{1}{8}\int d^3z d^3z' : \lambda(z)\star\varphi(z)\star\varphi(z) :: \lambda(z')\star\varphi(z')\star\varphi(z') : |0\rangle. \tag{3.4.4}$$

Fazendo uma transformação de Fourier para o espaço dos momentos obtemos (veja (B.1.1)):

$$G_\lambda^{(2)}(k,k_1) = (2\pi)^3\delta(k+k_1)\Delta_\lambda(k)\Delta_\lambda(k_1)$$
$$\tfrac{N}{2}\int \tfrac{d^3q}{(2\pi)^3}\tfrac{1}{(q^2-M^2)[(q+k)^2-M^2]}\cos^2\left(\tfrac{1}{2}k\theta q\right). \tag{3.4.5}$$

Amputando as linhas externas teremos a função de vértice do campo auxiliar no espaço dos momentos:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{N}{2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{(q^2-M^2)[(q+k)^2-M^2]}\cos^2\left(\frac{1}{2}k\theta q\right). \quad (3.4.6)$$

A partir da função de vértice temos o propagador do campo auxiliar:

$$\Delta_{\lambda}(k) = -\left[\frac{N}{2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{(q^2-M^2)[(q+k)^2-M^2]}\cos^2\left(\frac{1}{2}k\theta q\right)\right]^{-1} \quad (3.4.7)$$

o qual é composto por partes planar e não-planar, ambas finitas.

Vamos calcular a correção para o propagador do campo φ em ordem $1/N$. Partindo da função de dos pontos deste campo:

$$G_{\varphi}^{(2)}(x,y) = -\tfrac{1}{8}\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)$$
$$\int d^3z d^3z' : \lambda(z)\star\varphi(z)\star\varphi(z) :: \lambda(z')\star\varphi(z')\star\varphi(z') : |0\rangle. \quad (3.4.8)$$

No espaço dos momentos teremos:

$$G_{\varphi}^{(2)}(p,q) = (2\pi)^3\delta(p+q)\Delta(p)\Delta(q)$$
$$(-1)\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{i}{[(k+p)^2-M^2]}\cos^2\left(\tfrac{1}{2}p\theta k\right)\Delta_{\lambda}(k), \quad (3.4.9)$$

onde $\Delta_{\lambda}(k)$ é o propagador do campo auxiliar dado em (3.4.7). Amputando as linhas externas obtemos a auto-energia do campo básico no espaço dos momentos:

$$\Sigma_{\varphi}(p) = (-i)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{[(k+p)^2-M^2]}\cos^2\left(\frac{1}{2}p\theta k\right)\Delta_{\lambda}(k). \quad (3.4.10)$$

Sendo assim, o propagador corrigido pela auto-energia será:

$$\tilde{\Delta}_{\varphi}(p) = \Delta_{\varphi}(p) + \Sigma_{\varphi}(p)$$
$$= \tfrac{i}{(p^2-M^2+i\epsilon)} - i\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{1}{[(k+p)^2-M^2]}\cos^2\left(\tfrac{1}{2}p\theta k\right)\Delta_{\lambda}(k). \quad (3.4.11)$$

A auto energia (3.4.10) também pode ser separada em partes planar e não-planar. A parte planar correspondente à auto-energia do campo φ será:

$$\Sigma_\varphi(p)_{\rm p} = -\frac{i}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k+p)^2 - M^2}\Delta_\lambda(k). \tag{3.4.12}$$

A integral acima recebe, no integrando, uma potência de $\sqrt{k^2}$ resultante do comportamento assintótico do propagador do campo auxiliar para grandes momentos. Esse fator torna a integral quadraticamente divergente quando $k \longrightarrow \infty$. Esse comportamento divergente não causa preocupação, tendo em vista que podemos empregar uma renormalização da massa do campo φ.

A parte não-planar da igualdade (3.4.10) é:

$$\Sigma_\varphi(p)_{\rm np} = -\frac{i}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\cos(k\theta p)}{(k+p)^2 - M^2}\Delta_\lambda(k). \tag{3.4.13}$$

Devido a contribuição do propagador do campo auxiliar, a parte não-planar da auto-energia torna-se quadraticamente divergente quando $p \longrightarrow 0$ ou no limite comutativo $\theta = 0$. Este comportamento deve ser levado em conta quando tratamos diagramas de maior complexidade. Neste caso a figura (2.7) faz parte de um diagrama mais complexo, de modo que o momento externo p, em (3.4.13), passa a ser um momento interno deste diagrama, sendo assim, poderemos encontrar uma divergência IV tão grande quanto o número de figuras do tipo (2.7) que compõem o diagrama mais complexo, o que torna o modelo não renormalizável. Este fenômeno é denominado mistura UV/IV e, de modo geral, é característico das teorias que implementam a não-comutatividade do espaço-tempo através do produto estrela.

Capítulo 4

O Formalismo de Weyl-Moyal Sem Quebra da Invariância de Lorentz

Uma simetria fundamental da TQC é a invariância de Lorentz. Usualmente, a não-comutatividade é introduzida através da relação de comutação (3.1.1) entre as coordenadas. Neste contexto, simplesmente substituimos o produto usual pelo produto estrela entre os campos. O parâmetro θ que define o comprimento fundamental da teoria e a não-comutatividade é uma matriz antisimétrica de elementos reais e constantes. Essa definição para θ determina direções privilegiadas num dado referencial, o que resulta na quebra da invariância de Lorentz.

A primeira publicação introduzindo a não-comutatividade com a esperança de solucionar o problema das divergências UV em TQC data de 1947, num trabalho de Snyder [12]. Nesse trabalho ele mostrou ser possível contruir um espaço com um comprimento característico preservando a invariância de Lorentz. A proposta de Snyder consistia em introduzir uma álgebra de operadores considerando a não-comutatividade do espaço-tempo:

$$\widehat{x}^{\mu} = ia\left(\eta_4 \frac{\partial}{\partial \eta_\mu} + \eta^{\mu} \frac{\partial}{\partial \eta_4}\right),$$

$$\widehat{M}^{\mu\nu} = i\left(\eta^{\mu} \frac{\partial}{\partial \eta_\nu} - \eta^{\nu} \frac{\partial}{\partial \eta_\mu}\right), \tag{4.1.1}$$

no qual $\mu\nu = 0, 1, 2, 3$ e $\eta^{\mu} = (\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$ e η^4 são variáveis comutativas

auxiliares. Os $\widehat{M}^{\mu\nu}$'s são os geradores do grupo de Lorentz e a a unidade natural de comprimento.

As transformações dos η^{μ}'s que nos interessam são aquelas que mantém invariante a forma quadrática $\eta_0^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 - \eta_4^2$. Em particular, as transformações lineares que fazem $\eta'^4 = \eta^4$ são transformações de Lorentz para os operadores $\widehat{x}^{\mu}$.

Como consequência de (4.1.1) temos que os operadores $\widehat{x}^{\mu}$ e $\widehat{M}^{\mu\nu}$ satisfazem a álgebra:

$$[\widehat{x}^{\mu}, \widehat{x}^{\nu}] = ia^2\widehat{M}^{\mu\nu},$$

$$[\widehat{M}^{\mu\nu}, \widehat{x}^{\alpha}] = i(\widehat{x}^{\mu}g^{\nu\alpha} - \widehat{x}^{\nu}g^{\mu\alpha}),$$

$$[\widehat{M}^{\mu\nu}, \widehat{M}^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}\widehat{M}^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma}\widehat{M}^{\mu\rho} - g^{\mu\rho}\widehat{M}^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}\widehat{M}^{\nu\rho}). \qquad (4.1.2)$$

A partir de (4.1.1) podemos ver que o espectro de auto-valores para os operadores $\widehat{x}^i$ $(i = 1, 2, 3)$ é quantizado, no entanto, para a coordenada x^0 ele é contínuo. Assim, a introdução de um limite para a precisão de medidas de distâncias no espaço-tempo, ou seja, considerar a relação de comutação (4.1.2) entre as coordenadas, implica na quantização do espaço-tempo. Podemos ver este resultado da seguinte maneira:

1. Transformações lineares no plano η^4, η^i que mantém invariante $\eta_i^2 + \eta_4^2$ são rotações. Podemos reparametrizar convenientemente as coordenadas auxiliares:

$$\eta^i = \bar{\eta}\cos 2\alpha,$$

$$\eta^4 = \bar{\eta}\sin 2\alpha, \qquad (4.1.3)$$

onde $\bar{\eta} = \sqrt{\eta_i^2 + \eta_4^2}$. Com essa reparametrização as coordenadas espaciais podem ser descritas através do ângulo α:

$$\widehat{x}^i = -ia\frac{\partial}{\partial\alpha}. \qquad (4.1.4)$$

As auto-funções do operador $\widehat{x}^i$ são

$$\psi_{m_i}(\alpha) = Ae^{im_i\alpha}, \tag{4.1.5}$$

onde A é simplesmente uma constante de normalização e am_i é o auto-valor do operador $\widehat{x}^i$. De acordo com a parametrização (4.1.3), rotações de 2π do ângulo α devem levar ao mesmo ponto, sendo assim, devemos aplicar uma condição de unicidade a auto-função (4.1.5)

$$\begin{aligned} \psi_{m_i}(\alpha) &= \psi_{m_i}(\alpha + 2\pi), \\ 1 &= e^{im_i 2\pi}. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

A partir do resultado acima podemos concluir que os auto-valores do operador $\widehat{x}^i$ são discretos, o que implica na quantização do espaço.

2. Transformações no plano η^4, η^0 que mantém $\eta_0^2 - \eta_4^2$ invariante são "boosts"e não rotações. Nesse caso, é conveniente fazer a reparametrização:

$$\begin{aligned} \eta^0 &= \bar{\eta}\cosh 2\theta, \\ \eta^4 &= \bar{\eta}\sinh 2\theta, \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

onde $\bar{\eta} = \sqrt{\eta_0^2 - \eta_4^2}$. Podemos escrever a coordenada temporal em função do "ângulo" que parametriza as coordenadas auxiliares:

$$\widehat{x}^0 = ia\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{4.1.8}$$

Desta vez as coordenadas estão parametrizadas em termos de funções hiperbólicas, ou seja, não temos mais que aplicar a condição de unicidade a auto-função de (4.1.8). Este fato leva a auto-valores contínuos para o operador $\widehat{x}^0$, o que implica que o tempo é uma variável contínua. Observe que podemos recuperar o espaço-tempo usual, contínuo, tomando o limite $a \longrightarrow 0$ em (4.1.2).

Considerando as condições relativísticas propostas por Snyder, vejamos quais delas foram violadas nos capítulos anteriores, nos quais consideramos θ constante, para que ocorra a quebra da invariância Lorentz [23].

As relações usuais de comutação da MQ:

$$[\widehat{x}^{\mu}(t), \widehat{p}^{\nu}(t)] = i\delta^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad [\widehat{p}^{\mu}, \widehat{p}^{\nu}] = 0, \tag{4.1.9}$$

não garantem que os operadores de coordenadas formem um grupo abeliano. A representação mais geral assumida pelos operadores $\widehat{x}$ no espaço dos momentos é dada por:

$$\widehat{x}^{\mu} = i\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} - f^{\mu}(p). \tag{4.1.10}$$

Partindo dessa igualdade podemos obter o comutador entre coordenadas:

$$[\widehat{x}^{\mu}, \widehat{x}^{\nu}] = i\left(\frac{\partial f^{\nu}(p)}{\partial p_{\mu}} - \frac{\partial f^{\mu}(p)}{\partial p_{\nu}}\right). \tag{4.1.11}$$

Nesse ponto podemos admitir que $f^{\mu}(p)$ é o gradiente de uma função:

$$f^{\mu}(p) = \frac{\partial f(p)}{\partial p_{\mu}}. \tag{4.1.12}$$

Sendo assim, o comutador (4.1.11) é nulo e as coordenadas acabam comutando entre si, violando, portanto, nossa definição mais fundamental.

Outra possibilidade é supor que $f^{\mu}(p)$ não pode ser escrito como um gradiente. Seja então

$$f^{\mu}(p) = f^{\mu\nu}(p)p_{\nu}. \tag{4.1.13}$$

Podemos escolher $f^{\mu\nu}(p)$ um tensor simétrico ou antisimétrico. Escolhendo um tensor simétrico teremos ainda duas possibilidades, $p^{\mu}p^{\nu}$ ou o tensor que determina a métrica do espaço-tempo (tensor métrico de Minkowski). Contudo, $p^{\mu}p^{2}$ e p^{μ} são gradientes, portanto, como foi visto anteriormente, estão excluídos das possibilidades. Resta a possibilidade de $f^{\mu\nu}(p)$

ser uma função antisimétrica. Para analisar esta situação é conveniente definir $f^{\mu\nu}(p) = \frac{\theta^{\mu\nu}}{2}$, sendo $\theta^{\mu\nu}$ antisimétrico e independente p. Nessa situação, o operador coordenada (4.1.10) será:

$$\widehat{x}^{\mu} = i\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} - \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}p_{\nu}. \tag{4.1.14}$$

Este resultado satisfaz a relação de comutação (3.1.1) imposta para introduzir o efeito da não-comutatividade mas, para ser válido, deve satisfazer as relações de comutação entre os geradores do grupo de Lorentz. Como estamos considerando θ uma constante, o resultado da relação de comutação entre θ e $\widehat{M}$ é zero:

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \theta_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho}\theta_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}\theta_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\theta_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}\theta_{\mu\rho} = 0. \tag{4.1.15}$$

Podemos admitir somente $\mu = \rho$, sendo todos os índices diferentes entre si. Empregando a propriedade de antisimetria de θ em (4.1.15) obtemos:

$$\theta_{\nu\sigma} = 0. \tag{4.1.16}$$

Esse resultado nos diz que a álgebra dos geradores de Lorentz será consistente somente se $\theta_{\nu\sigma} = 0$, violando, portanto, a condição de não-comutatividade requerida entre as coordenadas.

Seguindo os passos de Snyder para a formulação de uma TQC invariante de Lorentz, Carlson (C) *et al* [22] e Morita (M) *et al* [23] propuseram uma álgebra onde o parâmetro θ deixa de ser uma constante e passa a ser considerado um operador $(\widehat{\theta})$ que obedece as regras de transformação de tensores de Lorentz .

Agora que estamos considerando uma álgebra invariante por transformações de Lorentz podemos partir para o formalismo de C/M. De acordo com C/M $\widehat{\theta}$ é considerado um parâmetro não-físico e a álgebra estabelecida por C pode ser obtida através da álgebra proposta por Snyder simplesmente tomando um limite de um determinado parâmetro [1]. Para ver isso estabeleceremos uma relação entre $\widehat{M}$ e $\widehat{\theta}$ através da introdução de um fator de escala entre eles:

[1]Essa é uma das diferenças entre os formalismos de C e M. Morita afirma em seu trabalho [23] que o formalismo proposto por Snyder [12] tem uma interpretação geométrica e portanto estabelecer entre ele uma simples relação algébrica pode não ser consistente.

$$\widehat{M}^{\mu\nu} = \frac{\widehat{\theta^{\mu\nu}}}{b}. \tag{4.1.17}$$

Tomando o limite $b \longrightarrow 0$, $a \longrightarrow 0$ mantendo a relação $\frac{a^2}{b} \longrightarrow 1$ fixa, obtemos

$$[\widehat{x}^\mu, \widehat{x}^\nu] = i\frac{a^2}{b}\widehat{\theta}^{\mu\nu} \longrightarrow i\widehat{\theta}^{\mu\nu},$$

$$[\widehat{\theta}^{\mu\nu}, \widehat{x}^\alpha] = ib(\widehat{x}^\mu g^{\nu\alpha} - \widehat{x}^\nu g^{\mu\alpha}) \longrightarrow 0,$$

$$[\widehat{\theta}^{\mu\nu}, \widehat{\theta}^{\rho\sigma}] = ib(g^{\nu\rho}\widehat{\theta}^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma}\widehat{\theta}^{\mu\rho} - g^{\mu\rho}\widehat{\theta}^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}\widehat{\theta}^{\nu\rho}) \longrightarrow 0, \tag{4.1.18}$$

Para demonstrar que a álgebra de C/M satisfaz os requisitos necessários para ser invariante de Lorentz podemos partir diretamente de (4.1.13), mas dessa vez $f^{\mu\nu} = \frac{\widehat{\theta}^{\mu\nu}}{2}$ será um operador antisimétrico [23]. Sendo assim, o operador coordenada será:

$$\widehat{x}^\mu = i\frac{\partial}{\partial p_\mu} - \frac{1}{2}\widehat{\theta}^{\mu\nu}p_\nu. \tag{4.1.19}$$

Podemos obter de (4.1.9) a relação de comutação entre $\widehat{\theta}$ e $\widehat{p}$:

$$[\widehat{\theta}_{\mu\rho}, \widehat{p}_\nu] = 0. \tag{4.1.20}$$

Agora que estamos considerando θ um operador, a relação de comutação estabelecida com um gerador do grupo de Lorentz deve ser semelhante à (4.1.2):

$$[\widehat{M}_{\mu\nu}, \widehat{\theta}_{\rho\sigma}] = g_{\nu\rho}\widehat{\theta}_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}\widehat{\theta}_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}\widehat{\theta}_{\nu\rho} - g_{\nu\sigma}\widehat{\theta}_{\mu\rho}. \tag{4.1.21}$$

Para calcular o comutador entre as coordenadas, podemos simplesmente empregar (4.1.2) considerando a relação (4.1.17) ou calculá-lo diretamente a partir de (4.1.19):

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
4504
INSTITUTO DE FÍSICA

$$[\widehat{x}^{\mu}(t), \widehat{x}^{\nu}(t)] = \left[i\frac{\partial}{\partial p_{\mu}} - \frac{1}{2}\widehat{\theta}^{\mu\rho}p_{\rho}, i\frac{\partial}{\partial p_{\nu}} - \frac{1}{2}\widehat{\theta}^{\nu\alpha}p_{\alpha} \right]$$

$$= \left[i\widehat{\theta}^{\mu\nu} + \frac{1}{4}p_{\rho}p_{\alpha}(\widehat{\theta}^{\mu\rho}\widehat{\theta}^{\nu\alpha} - \widehat{\theta}^{\nu\alpha}\widehat{\theta}^{\mu\rho}) \right] = i\widehat{\theta}^{\mu\nu}. \tag{4.1.22}$$

Este resultado impõe uma condição sob os operadores $\widehat{\theta}$. Para obtermos a relação de comutação desejada entre os operadores de coordenadas o comutador entre $\widehat{\theta}$'s deve ser nulo:

$$[\widehat{\theta}^{\mu\rho}, \widehat{\theta}^{\nu\alpha}] = 0. \tag{4.1.23}$$

Com esta condição, o resultado para o comutador entre coordenadas será:

$$[\widehat{x}_{\mu}(t), \widehat{x}_{\nu}(t)] = i\widehat{\theta}_{\mu\nu}. \tag{4.1.24}$$

Para completar as relações de comutação restantes devemos calcular o comutador entre $\widehat{x}$ e $\widehat{\theta}$. Isso pode ser obtido com a ajuda de (4.1.20) e (4.1.23):

$$[\widehat{x}^{\mu}(t), \widehat{\theta}^{\nu\alpha}] = 0. \tag{4.1.25}$$

Devemos dedicar uma atenção especial à relação de comutação (4.1.23), pois ela nos permite criar uma base de auto-estados para o operador $\widehat{\theta}$.

$$\widehat{\theta}^{\mu\nu}|\theta\rangle = \theta^{\mu\nu}|\theta\rangle, \tag{4.1.26}$$

onde o auto-valor do operador $\widehat{\theta}$ comporta-se como um tensor de Lorentz de segunda ordem. Devemos definir uma condição de normalização para esses estados [2]:

[2] A partir desse ponto adotaremos 3 D para o número de dimensões do espaço-tempo.

$$\langle\theta|\theta'\rangle = \frac{\delta^3(\theta-\theta')}{W(\theta)}, \tag{4.1.27}$$

sendo $\delta^3(\theta-\theta') = \delta(\theta^{01}-\theta'^{01})\delta(\theta^{02}-\theta'^{02})\delta(\theta^{12}-\theta'^{12})$ e $W(\theta)$ uma função peso. Devemos ter também uma relação de completeza:

$$\int d^3\theta W(\theta)|\theta\rangle\langle\theta| = 1. \tag{4.1.28}$$

Podemos obter a relação de comutação (3.1.1), onde θ é um número, a partir do valor esperado de (4.1.24) entre auto-estados de θ:

$$\langle\theta|[\widehat{x}^\mu, \widehat{x}^\nu]|\theta\rangle = i\theta^{\mu\nu}\langle\theta|\theta\rangle \tag{4.1.29}$$

De acordo com o formalismo de Weyl, relacionamos $\widehat{\theta}$ a uma função ordinária através da "transformada de Fourier". Desse forma, a correspondência entre operadores quânticos e funções clássicas será:

$$\begin{aligned} F(\widehat{x},\widehat{\theta}) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3\sigma}{(2\pi)^3} e^{ik\widehat{x}+i\sigma\widehat{\theta}}\tilde{f}(k,\sigma) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3\sigma}{(2\pi)^3} T(k,\sigma)\tilde{f}(k,\sigma), \end{aligned} \tag{4.1.30}$$

onde $\tilde{f}(k,\sigma)$ é a transformada de Fourier usual de $f(x,\theta)$:

$$\tilde{f}(k,\sigma) = \int d^3x d^3\theta e^{-ikx-i\sigma\theta} f(x,\theta). \tag{4.1.31}$$

É conveniente introduzir uma notação para a transformada de Fourier usual, porém, que é realizada somente em relação as coordenadas:

$$\tilde{\mathfrak{f}}(k,\theta) = \int d^3x e^{-ikx} f(x,\theta). \tag{4.1.32}$$

Em (4.1.30) definimos o operador $T(k,\sigma)$, que, de maneira semelhante à (3.2.2), é dado por:

$$T(k,\sigma) = e^{ik\widehat{x}+i\sigma\widehat{\theta}}. \tag{4.1.33}$$

Comparando o resultado acima com (3.2.2) notamos a presença de um fator adicional, o qual é responsável pela não-comutatividade. O operador T nesse formalismo obedece as seguintes regras:

$$T^{\dagger}(k,\sigma) = T(-k,-\sigma),$$

$$T(k,\sigma)T(k',\sigma') = T(k+k',\sigma+\sigma')e^{-\frac{i}{2}k\widehat{\theta}k'}. \tag{4.1.34}$$

Considerando $\widehat{\theta}$ um operador definimos uma generalização da operação de traço:

$$\mathrm{Tr}F(\widehat{x},\widehat{\theta}) \equiv \int d^3x d^3\theta W(\theta) f(x,\theta). \tag{4.1.35}$$

O ponto principal do formalismo proposto por Morita está na possibilidade de criar uma base de auto-estados para o operador $\widehat{\theta}$. Na base $|\theta\rangle$ atuam somente os $\widehat{\theta}$ que aparecem explicitamente nas funções. Os operadores com dependência implícita em $\widehat{\theta}$, como $\widehat{x}^{\mu}$, são considerados constantes. Dessa forma, podemos tomar o valor esperado de (4.1.30) entre os auto-estados de $\widehat{\theta}$:

$$F(\widehat{x},\theta)\langle\theta'|\theta\rangle = \langle\theta'|F(\widehat{x},\widehat{\theta})|\theta\rangle = \int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{d^3\sigma}{(2\pi)^3} e^{ik\widehat{x}+i\sigma\theta}\tilde{f}(k,\sigma)\langle\theta'|\theta\rangle$$

$$= \int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{d^3\sigma}{(2\pi)^3} T(k)e^{i\sigma\theta}\tilde{f}(k,\sigma)\langle\theta'|\theta\rangle = \int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} T(k)\tilde{f}(k,\theta)\langle\theta'|\theta\rangle. \tag{4.1.36}$$

Para obter a "transformada inversa" de (4.1.36) devemos ter em mente que estamos considerando o valor esperado de $\widehat{F}$:

$$f(x,\theta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx}\mathrm{Tr}[\langle\theta|F(\widehat{x},\widehat{\theta})|\theta'\rangle T^{\dagger}(k)]. \tag{4.1.37}$$

De fato, de acordo com (4.1.36)

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \mathrm{Tr}[T(k')T^\dagger(k)]\tilde{\mathfrak{f}}(k',\theta')\langle\theta|\theta'\rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \mathrm{Tr}[e^{i(k'-k)\widehat{x}} e^{-\frac{i}{2}k'\widehat{\theta}'k}]\tilde{\mathfrak{f}}(k',\theta')\langle\theta|\theta'\rangle. \qquad (4.1.38)$$

Dai, considerando a definição do traço em (4.1.35) e a normalização dos auto-estados (4.1.27) obtemos:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \int d^3x d^3\theta' W(\theta') e^{i(k'-k)x} e^{-\frac{i}{2}k'\theta'k}$$

$$\tilde{\mathfrak{f}}(k',\theta') \frac{\delta^3(\theta-\theta')}{W(\theta')} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \tilde{\mathfrak{f}}(k,\theta) = f(x,\theta). \qquad (4.1.39)$$

O resultado (4.1.37) estabelece uma relação entre uma função clássica e o operador quântico correspondente. A partir desse resultado podemos construir o produto Moyal entre duas funções clássicas, o qual correspondente ao valor esperado do produto usual de dois operadores:

$$f_1(x,\theta) \star f_2(x,\theta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \mathrm{Tr}[\langle\theta|F_1(\widehat{x},\widehat{\theta})F_2(\widehat{x},\widehat{\theta})|\theta'\rangle T^\dagger(k)]. \qquad (4.1.40)$$

Partindo dessa relação, com o auxílio das propriedades do operador T especificadas em (4.1.34), mais a normalização para os auto-estados (4.1.27) e a definição do traço (4.1.35) obtemos para o produto Moyal:

$$f_1(x,\theta) \star f_2(x,\theta) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} e^{-ikx}$$

$$\mathrm{Tr}[T(k_1+k_2-k) e^{-\frac{i}{2}k_1\widehat{\theta}'k_2} e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_2)\widehat{\theta}'k}]\tilde{\mathfrak{f}}_1(k_1,\theta')\tilde{\mathfrak{f}}_2(k_2,\theta')\langle\theta|\theta'\rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \int d^3\theta' W(\theta')(2\pi)^3 \delta(k_1+k_2-k)$$

$$e^{-\frac{i}{2}k_1\theta'k_2} e^{\frac{i}{2}(k_1+k_2)\theta'k} \tilde{\mathfrak{f}}_1(k_1,\theta')\tilde{\mathfrak{f}}_2(k_2,\theta') \frac{\delta^3(\theta-\theta')}{W(\theta')}$$

$$= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} e^{-i(k_1+k_2)x - \frac{i}{2}k_1\theta k_2} \tilde{\mathfrak{f}}_1(k_1,\theta)\tilde{\mathfrak{f}}_2(k_2,\theta)$$

$$= \lim_{y\to x} e^{-\frac{i}{2}\theta_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}} f_1(y,\theta) f_2(x,\theta). \qquad (4.1.41)$$

Novamente o produto Moyal é uma função que envolve um número arbitrário de derivadas, portanto, é não-local.

O produto Moyal obtido neste capítulo é semelhante ao obtido em (3.2.8) com a exceção da dependência adicional dos campos em θ. Devido a essa semelhança, a integral no espaço-tempo do produto estrela entre dois campos é igual ao produto usual entre estes dois campos integrados no espaço-tempo.

$$\begin{aligned}
&\int d^3x f_1(x,\theta) \star f_2(x,\theta) \\
&= \int d^3x \int \tfrac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\tfrac{d^3k_2}{(2\pi)^3} e^{-i(k_1+k_2)x-\frac{i}{2}k_1\theta k_2}\tilde{\mathfrak{f}}_1(k_1,\theta)\tilde{\mathfrak{f}}_2(k_2,\theta) \\
&= \int \tfrac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\tfrac{d^3k_2}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta(k_1+k_2)e^{-\frac{i}{2}k_1\theta k_2}\tilde{\mathfrak{f}}_1(k_1,\theta)\tilde{\mathfrak{f}}_2(k_2,\theta) \\
&= \int \tfrac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\tilde{\mathfrak{f}}_1(k_1,\theta)\tilde{\mathfrak{f}}_2(-k_1,\theta) = \int d^3x f_1(x,\theta) f_2(x,\theta), \qquad (4.1.42)
\end{aligned}$$

Com a relação estabelecida entre uma função e o seu operador correspondente em (4.1.38), podemos generalizar o resultado acima para o produto Moyal entre n campos:

$$\begin{aligned}
&\int d^3x f_1(x,\theta) \star f_2(x,\theta) \star \ldots \star f_n(x,\theta) \\
&= \mathrm{Tr}[\langle\theta|F_1(\widehat{x},\widehat{\theta})F_2(\widehat{x},\widehat{\theta})\ldots F_n(\widehat{x},\widehat{\theta})|\theta'\rangle] \\
&= \int \textstyle\prod_{i=1}^n \tfrac{d^3k_i}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta(k_1+\cdots+k_n) \\
&e^{-\frac{i}{2}\sum_{i<j}k_i\theta k_j}\tilde{\mathfrak{f}}_1(k_1,\theta)\tilde{\mathfrak{f}}_2(k_2,\theta)\ldots\tilde{\mathfrak{f}}_n(k_n,\theta). \qquad (4.1.43)
\end{aligned}$$

No formalismo de C/M os campos sem invariância de Gauge podem ser simplificados escolhendo uma representação na qual os campos não mais dependem do parâmetro θ e passam a ser funções somente das coordenadas:

$$f(x,\theta) \equiv f(x). \qquad (4.1.44)$$

Adotando essa representação podemos ver, com o auxílio de (4.1.42) e com a condição de normalização (4.1.28), que os propagadores dos campos não sofrem alteração nesse formalismo.

Os campos invariantes de Gauge, porém, devem manter a dependência em θ, visto que a não-comutatividade está presente na representação do grupo de transformações. Tratando θ como uma coordenada, uma transformação de Gauge deve ser generalizada e conter esse novo parâmetro, dessa forma, $\Lambda(x, \theta)$ será a nova parametrização para uma transformação do campo. Essa dependência extra deve ser extendida aos campos para manter a teoria invariante por transformações do grupo de Gauge.

4.2 O Modelo de Gross-Neveu Não-Comutativo Sem Quebra da Invarância de Lorentz

Vimos anteriormente que a introdução da não-comutatividade através do produto Moyal torna o modelo de GN não-renormalizável e introduz a divergência IV no modelo SNL, gerando a denominada mistura UV/IV. Com a esperança de solucionar os problemas existentes nesses modelos empregamos um formalismo no qual a invariância de Lorentz, um pré-requisito para uma teoria relativística, não é quebrada.

Começamos com a ação do modelo de GN que, de acordo com o formalismo desenvolvido na seção anterior, será:

$$S = \int d^3x d^3\theta W(\theta)\Big[\tfrac{i}{2}\bar{\psi}(x)\partial\psi(x) - \tfrac{M}{2}\bar{\psi}(x)\psi(x)$$

$$-\tfrac{1}{2}\lambda(x)\star\bar{\psi}(x)\star\psi(x) - \tfrac{N}{4g}\lambda(x)^2 - \tfrac{N}{2g}M\lambda(x)\Big] \tag{4.2.1}$$

Vamos calcular as regras de Feynman para essa nova abordagem. Devido a normalização da função $W(\theta)$ em (4.1.28) e a propriedade do produto estrela (4.1.42), o propagador livre do campo ψ não é alterado:

$$S(k) = \frac{i}{\not{k} - M + i\epsilon}. \tag{4.2.2}$$

O propagador livre do campo auxiliar, na expansão perturbativa usual, pode ser obtido através do termo quadrático em λ presente na ação (4.2.1):

$$\Delta_\lambda = -\frac{2ig}{N}. \tag{4.2.3}$$

Diferentemente do caso não-comutativo, onde há quebra da invariância de Lorentz, veja (3.3.4), o vértice da interação não depende do parâmetro θ. Realmente, tendo em vista que os campos livres ψ e λ não dependem de θ, teremos, associado ao vértice trilinear, o fator:

$$2i\int d^3\theta W(\theta)\cos\left(\frac{1}{2}p_2\theta p_3\right), \tag{4.2.4}$$

onde p_2 e p_3 são os momentos externos.

Novamente as figuras correspondentes aos propagadores e ao vértice trilinear são semelhantes aquelas em (Fig.:2.3).

A equação de gap para o campo auxiliar, assim como no modelo de GN não-comutativo com quebra da invariância de Lorentz, permanece idêntica a do modelo de GN comutativo. Com a fórmula de Gell-Mann Low podemos calcular a função de um ponto do campo auxiliar:

$$\langle 0|\lambda(x)|0\rangle = \langle 0|\lambda(x)$$

$$: \int d^3y d^3\theta W(\theta) \left(\lambda(y) \star \bar{\psi}(y) \star \psi(y) + \tfrac{NM}{g}\lambda(y)\right) : |0\rangle = 0. \qquad (4.2.5)$$

Fazendo uma transformada de Fourier para o espaço dos momentos teremos a seguinte representação (veja (A.3.2)):

$$\langle 0|\lambda(p) : \int d^3\theta W(\theta) \int \tfrac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \Big[\tfrac{NM}{g}\lambda(k_1) + \int \textstyle\prod_{i=1}^{2} \tfrac{d^3k_i}{(2\pi)^3}$$

$$(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3)\lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3)\cos\left(\tfrac{1}{2}k_2\theta k_3\right)\Big] : |0\rangle$$

$$= (2\pi)^3\delta(p)\Delta_\lambda(p)NM \int d^3\theta W(\theta)\Big[\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{-2i}{k^2-M^2} + \tfrac{1}{g}\Big] = 0. \qquad (4.2.6)$$

Admitindo $M \neq 0$ e a integral em θ não nula, podemos concluir que:

$$\frac{1}{2g} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{i}{k^2-M^2} = 0. \qquad (4.2.7)$$

Calcularemos, agora, a auto-energia do campo λ, a qual pode ser obtida através da função de dois pontos:

$$G_\lambda^{(2)}(x,y) = -\tfrac{1}{8}\langle 0|\lambda(x)\lambda(y) \int d^3z d^3z' d^3\theta W(\theta) d^3\theta' W(\theta')$$

$$: \lambda(z)\overset{*}{\bar{\psi}}(z)\overset{*}{\psi}(z) :: \lambda(z') \star \bar{\psi}(z') \star \psi(z') : |0\rangle, \qquad (4.2.8)$$

que no espaço dos momentos será dada por:

$$G_\lambda^{(2)}(p,q) = (2\pi)^3\delta(p+q)\Delta_\lambda(p)\Delta_\lambda(q)(-1)\tfrac{N}{2}\int d^3\theta W(\theta)$$

$$d^3\theta' W(\theta')\tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}Tr\left[\tfrac{(\not{k}+M)}{k^2-M^2}\tfrac{(\not{k}+\not{p})+M}{(k+p)^2-M^2}\right]\cos\left(\tfrac{1}{2}p\theta k\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}p\theta' k\right). \quad (4.2.9)$$

Amputando as linhas externas e tomando o traço teremos a auto-energia do campo auxiliar no espaço dos momentos:

$$\Sigma_\lambda(p) = -N\int d^3\theta W(\theta)d^3\theta' W(\theta')\tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{k\cdot(k+p)+M^2}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}$$

$$\cos\left(\tfrac{1}{2}p\theta k\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}p\theta' k\right). \quad (4.2.10)$$

Para continuarmos o cálculo da auto-energia precisamos fazer uma hipótese sobre a forma de $W(\theta)$. Para simplificar o problema escolhemos[3]:

$$W(\theta) = \begin{cases} \alpha\delta(\theta_{0i}) & \text{para} \quad -\frac{a}{2} \leq \theta \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{para todo o restante.} \end{cases} \quad (4.2.11)$$

onde α e a foram introduzidos para garantir a dimensionalidade correta.

Admitindo essa condição a auto-energia passa a ser:

$$\Sigma_\lambda(p) = -N\alpha^2\int\tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{k\cdot(k+p)+M^2}{[(k+p)^2-M^2](k^2-M^2)}\tfrac{4}{p\wedge k}\sin(\tfrac{a}{4}p\wedge k)\tfrac{4}{p\wedge k}\sin(\tfrac{a}{4}p\wedge k)$$

$$= -8N\alpha^2\int\tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{k\cdot(k+p)+M^2}{[(k+p)^2-M^2](k^2-M^2)}\tfrac{1-\cos(\frac{a}{2}k\wedge p)}{(k\wedge p)^2} \quad (4.2.12)$$

onde $k\wedge p = k^1p^2 - k^2p^1$ e a identidade trigonométrica $\sin^2(\frac{a}{4}p\wedge k) = \frac{1}{2}[1 - \cos(\frac{a}{2}p\wedge k)]$ foi usada.

Novamente a auto-energia divide-se em partes planar e não-planar. A parte planar da auto-energia corresponde ao termo:

$$\Sigma_{\lambda\ \mathrm{p}}(p) = -8N\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{k\cdot(k+p)+M^2}{[(k+p)^2-M^2](k^2-M^2)(k\wedge p)^2}, \quad (4.2.13)$$

e exibe o seguinte comportamento assintótico para momentos grandes:

[3]Observe que a condição de normalização para a função $W(\theta)$ é respeitada.

$$
\begin{aligned}
&(k_0)^{-1} \quad \text{para} \quad k_0^2 \longrightarrow \infty, \\
&\left(\vec{k}^2\right)^{-1} \quad \text{para} \quad \vec{k}^2 \longrightarrow \infty, \\
&\left(\sqrt{k^2}\right)^{-1} \quad \text{para} \quad k^2 \longrightarrow \pm\infty \quad \text{com} \quad k_0^2 \to \infty \quad \text{e} \quad \vec{k}^2 \to \infty.
\end{aligned}
\tag{4.2.14}
$$

Esse comportamento a deixa livre das divergências UV, contudo, uma singularidade IV está presente diretamente no termo planar da auto-energia, o que não ocorria no formalismo não-comutativo apresentado anteriormente (veja (3.3.12)).

A parte não-planar, devido ao fator oscilatório, está livre de divergência UV:

$$
\Sigma_{\lambda\ \mathrm{np}}(p) = 8N\alpha^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k\cdot(k+p)+M^2}{[(k+p)^2-M^2](k^2-M^2)} \frac{\cos(\frac{a}{2}k\wedge p)}{(k\wedge p)^2}. \tag{4.2.15}
$$

Observe que a divergência IV também está presente na parte não-planar da auto-energia, porém, de uma maneira direta, antes de realizarmos a integração em k, diferentemente da divergência IV encontrada no formalismo anterior em (3.3.13).

Empregando a equação de gap (4.2.7) juntamente com a auto-energia (4.2.12) obtemos o propagador do campo auxiliar, assim como fizemos em (2.2.16).

$$
[\Delta_\lambda(p)]^{-1} = \frac{iN}{2g} - \Sigma(p) = -N\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k^2-M^2} - [\Sigma(p)_{\mathrm{p}} + \Sigma(p)_{\mathrm{np}}]. \tag{4.2.16}
$$

De maneira semelhante ao modelo de GN não-comutativo com quebra da invariância de Lorentz, a relação exata existente entre a constante de acoplamento e a auto-energia do campo auxiliar é perdida. Neste formalismo existe ainda uma dependência em relação ao momento externo diretamente na parte planar da auto-energia, o que acaba com as chances de encontrar uma relação com a constante de acoplamento, assim como aquela obtida na situação comutativa. Isso evidencia o problema do aparecimento da divengência IV, o que torna o modelo não-renormalizável.

4.3 O Modelo Sigma Não-Linear Não-Comutativo sem Quebra da Invariância de Lorentz

Seguindo a proposta do formalismo invariante de Lorentz partiremos diretamente da lagrangiana (3.4.1), promovendo a matriz θ ao nível de operador. O modelo será descrito através da ação:

$$S = \int d^3x d^3\theta W(\theta)\Big[-\tfrac{1}{2}\varphi(x)(\partial^2 + M^2)\varphi(x)$$

$$+\tfrac{1}{2}\lambda(x) \star \varphi(x) \star \varphi(x) - \tfrac{N}{2g}\lambda(x)\Big]. \tag{4.3.1}$$

Devido a propriedade (3.2.9) do produto Moyal entre dois campos e a condição de normalização para a função $W(\theta)$, o propagador livre do campo básico não será alterado nesse formalismo. Teremos, no espaço dos momentos, o seguinte resultado:

$$\Delta(k) = \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon}. \tag{4.3.2}$$

Embora o vértice de interação receba a contribuição de um fator trigonométrico, não exibirá qualquer dependência em relação ao parâmetro que define a não-comutatividade:

$$i\int d^3\theta \cos\left(\frac{1}{2}p_2\theta p_3\right), \tag{4.3.3}$$

onde p_2 e p_3 são dois dos momentos externos. As figuras correspondentes ao propagador (4.3.2) e à função de vértice são idênticos à (Fig.:2.6).

Para calcular o propagador do campo auxiliar na expansão $1/N$ recorremos diretamente à função de dois pontos desse campo:

$$G_\lambda^{(2)}(x,y) = -\tfrac{1}{8}\langle 0|T\lambda(x)\lambda(y)\int d^3z d^3z' d^3\theta d^3\theta' W(\theta)W(\theta')$$

$$:\lambda(z)\star\varphi(z)\star\varphi(z)::\lambda(z')\star\varphi(z')\star\varphi(z'):|0\rangle. \tag{4.3.4}$$

No espaço dos momentos, conforme (B.2.2), teremos:

$$G_\lambda^{(2)}(k,q) = (2\pi)^3\delta(k+q)\Delta_\lambda(k)\Delta_\lambda(q)$$

$$\frac{N}{2}\int d^3\theta d^3\theta' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} W(\theta)W(\theta') \frac{1}{(q^2-M^2)[(q+k)^2-M^2]} \cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta q\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta' q\right). \quad (4.3.5)$$

Amputando as linhas externas obtemos a função de vértice do campo auxiliar no espaço dos momentos:

$$\Gamma_\lambda^{(2)}(k) = \frac{N}{2}\int d^3\theta d^3\theta' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} W(\theta)W(\theta')$$

$$\frac{1}{(q^2-M^2)[(q+k)^2-M^2]} \cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta q\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}k\theta' q\right). \quad (4.3.6)$$

Como o propagador do campo auxiliar é obtido diretamente da função de vértice será interessante desenvolver resultado acima.

$$\Gamma_\lambda^{(2)}(k) = \left(\tfrac{N}{4}\right)\int d^3\theta d^3\theta' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} W(\theta)W(\theta') \frac{1}{(k+q)^2-M^2}\frac{1}{q^2-M^2}$$

$$[\cos(\tfrac{1}{2}k\theta q + \tfrac{1}{2}k\theta' q) + \cos(\tfrac{1}{2}k\theta q - \tfrac{1}{2}k\theta' q)]. \quad (4.3.7)$$

Empregando a parametrização de Feynman,

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax+b(1-x)]^2}, \quad (4.3.8)$$

ao produto dos propagadores teremos:

$$\Gamma_\lambda^{(2)}(k) = \left(\frac{N}{4}\right)\int_0^1 \frac{dx}{(2\pi)^3}\int d^3\theta d^3\theta' W(\theta)W(\theta') d^3q \frac{1}{(q^2+M'^2)^2}$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{i(q_\mu+q'_\mu)\tilde{k}^\mu} + e^{-i(q_\mu+q'_\mu)\tilde{k}^\mu} + e^{i(q_\mu-q'_\mu)\tilde{k}^\mu} + e^{-i(q_\mu+q'_\mu)\tilde{k}^\mu}\right], \quad (4.3.9)$$

na qual definimos $M'^2 = k^2x(1-x) - M^2$ e $\tilde{k}_\mu = \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}k^\nu$.

Observe que (4.3.9) é composto por quatro transformadas de Fourier (veja (C.1.3)), sendo assim, obtemos:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \left(\frac{N}{4}\right)\int_0^1 dx \int d^3\theta d^3\theta' W(\theta)W(\theta')\frac{1}{2(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{M'}}$$

$$\left\{\frac{K_{-\frac{1}{2}}\{M'[(\tilde{k}_\mu + \tilde{k}'_\mu)^2 - i\varepsilon]^{\frac{1}{2}}\}}{[(\tilde{k}_\mu + \tilde{k}'_\mu)^2 - i\varepsilon]^{-\frac{1}{4}}} + \frac{K_{-\frac{1}{2}}\{M'[(\tilde{k}_\mu - \tilde{k}'_\mu)^2 - i\varepsilon]^{\frac{1}{2}}\}}{[(\tilde{k}_\mu - \tilde{k}'_\mu)^2 - i\varepsilon]^{-\frac{1}{4}}}\right\} \quad (4.3.10)$$

Podemos simplificar ainda mais este resultado se as funções modificadas de Bessel [24]:

$$K_{\pm\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}. \quad (4.3.11)$$

Assim:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \tfrac{N}{32\pi}\int d^3\theta d^3\theta' W(\theta)W(\theta')$$

$$\int_0^1 dx\left(\tfrac{1}{M'}\right)\left(e^{-M'\left\{\left[(\theta_{\mu\nu}+\theta'_{\mu\nu})\frac{k^\nu}{2}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}} + e^{-M'\left\{\left[(\theta_{\mu\nu}-\theta'_{\mu\nu})\frac{k^\nu}{2}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}}\right). \quad (4.3.12)$$

Podemos adotar o mesmo comportamento para a função $W(\theta)$, dado em (4.2.11). Com essa condição teremos:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{N\alpha^2}{32\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\theta d\theta' \int_0^1 dx\left(\frac{1}{M'}\right)\left(e^{-\frac{M'}{2}|\vec{k}||\theta+\theta'|} + e^{-\frac{M'}{2}|\vec{k}||\theta-\theta'|}\right). \quad (4.3.13)$$

Integrando em θ obtemos:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{N\alpha^2}{32\pi}\int_0^1 dx\frac{4}{\left(\frac{M'}{2}|\vec{k}|\right)^2}\left[\left(\frac{aM'}{2}|\vec{k}|\right) + e^{-(\frac{aM'}{2}|\vec{k}|)} - 1\right]\frac{1}{M'}. \quad (4.3.14)$$

Conforme calculado em (B.2.3), essa função comporta-se com $1/\vec{k}^3$, $1/{k_0}^2$, $1/k^2$ nos limites $\left(\sqrt{\vec{k}}\right)^2 \longrightarrow \infty$, $k^0 \longrightarrow \infty$ ou $\left(\sqrt{k}\right)^2 \longrightarrow \infty$, respectivamente.

Observe que há um aumento na convergência da auto-energia do campo auxiliar quando comparado com o caso comutativo (veja (2.3.9)) e com a parte planar do caso não-comutativo com quebra da invariância de Lorentz (veja (3.4.6)), nos quais a auto-energia convergia com a potência de $\left(\sqrt{k}\right)^{-2}$.

Vamos calcular a correção de auto-energia em $1/N$ para o propagador do campo básico. Partindo da função de dois pontos desse campo:

$$G_{\varphi}^{(2)}(x,y) = -\tfrac{1}{8}\langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)\int d^3z d^3z' d^3\theta d^3\theta' W(\theta)W(\theta')$$
$$: \lambda(z)\star\varphi(z)\star\varphi(z) :: \lambda(z')\star\varphi(z')\star\varphi(z') : |0\rangle. \qquad (4.3.15)$$

No espaço dos momentos teremos:

$$G_{\varphi}^{(2)}(p,q) = (2\pi)^3\delta(p+q)\Delta(p)\Delta(q)(-1)\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} d^3\theta d^3\theta' W(\theta)W(\theta')$$
$$\cos\left(\tfrac{1}{2}p\theta k\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}p\theta' k\right)\tfrac{i}{(p+k)^2-M^2}\Delta_{\lambda}(k). \qquad (4.3.16)$$

onde $\Delta_{\lambda}(k)$ é o propagador do campo auxiliar. Amputando as linhas externas obtemos a auto-energia do campo φ no espaço dos momentos:

$$\Sigma_{\varphi}(p) = -i\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} d^3\theta d^3\theta' W(\theta)W(\theta')$$
$$\cos\left(\tfrac{1}{2}p\theta k\right)\cos\left(\tfrac{1}{2}p\theta' k\right)\tfrac{1}{(p+k)^2-M^2}\Delta_{\lambda}(k). \qquad (4.3.17)$$

Novamente adotando a condição (4.2.11) sob $W(\theta)$ a auto-energia passa a ser:

$$\Sigma_{\varphi}(p) = -i16\alpha^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\sin^2(\frac{a}{4}k\wedge p)}{(k\wedge p)^2}\frac{1}{(k+p)^2-M^2}\Delta_{\lambda}(k) \qquad (4.3.18)$$

A auto-energia acima também pode ser separada em partes planar e não-planar. A parte planar será:

$$\Sigma_{\varphi}(p)_{\mathrm{p}} = -i8\alpha^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k\wedge p)^2[(k+p)^2-M^2]}\Delta_{\lambda}(k). \qquad (4.3.19)$$

A integral acima recebe, no integrando, uma contribuição de $|\vec{k}|^3$, $|k_0|^2$ ou $|k|^2$ resultante do comportamento assintótico do propagador do campo auxiliar para grandes momentos. Esses fatores tornam a integral linearmente divergente quando tomamos o tri-momento k ou qualquer uma de suas componentes k^0, $\vec{k}$ muito grande. Diferentemente da auto-energia planar encontrada em (3.4.12), dessa vez não é possível adicionar um contra-termo à lagrangiana para renormalizar (4.3.19), pois essa divergência não é polinomial no momento externo p.

A parte não-planar da igualdade (4.3.18) é:

$$\Sigma_\varphi(p)_{\rm np} = i8\alpha^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\cos\left(\frac{a}{2}k\wedge p\right)}{(k\wedge p)^2\left[(k+p)^2 - M^2\right]}\Delta_\lambda(k). \qquad (4.3.20)$$

Devido a contribuição do propagador do campo auxiliar, a parte não-planar da auto-energia torna-se linearmente divergente para p ou θ tendendo a zero. Novamente temos o fenômeno da mistura UV/IV, o qual é comum nos formalismos que adotam a deformação da álgebra para implementar a não-comutatividade.

O propagador corrigido pela auto-energia será:

$$\tilde{\Delta}_\varphi(p) = \Delta_\varphi(p) + \Sigma_\varphi(p)$$

$$= \frac{i}{(p^2-M^2+i\epsilon)} - i16\alpha^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\sin^2(\frac{a}{4}k\wedge p)}{(k\wedge p)^2} \frac{1}{(k+p)^2-M^2}\Delta_\lambda(k). \qquad (4.3.21)$$

Capítulo 5

O Formalismo de Estados Coerentes

O formalismo de Weyl foi introduzido devido a necessidade de desenvolver um método para tornar possível o cálculo de grandezas físicas na TQC em espaços não-comutativos. Ao admitimos uma relação de comutação não nula entre as coordenadas não somos mais capazes de formar uma base de auto-estados simultâneos para essas variáveis; nesse ponto entra o formalismo de Weyl fazendo um mapeamento entre operadores e funções clássicas, as quais fornecem os resultados físicos.

Através dos estados coerentes somos capazes de introduzir uma base de auto-estados no espaço não-comutativo [19], [20], [21]. Desse modo, não necessitamos do mapeamento de Weyl e podemos calcular grandezas físicas empregando diretamente o valor esperado dos campos entre estados coerentes. Nessa abordagem, contrariamente ao que ocorre nos formalismos de deformação da álgebra, o efeito da não-comutatividade está presente no propagador livre do campo e não somente nos vértices de interação, ou seja, a não-comutatividade está presente em toda a trajetória do campo ao longo do espaço, e não somente nos locais onde ocorre interação.

No contexto dos estados coerentes empregamos as relações usuais de comutação que quebram a invariância de Lorentz:

$$\begin{aligned}
[\widehat{p}_i(t), \widehat{p}_j(t)] &= 0, \\
[\widehat{x}_i(t), \widehat{p}_j(t)] &= i\delta_{ij}, \\
[\widehat{x}_i(t), \widehat{x}_j(t)] &= i\theta_{ij}.
\end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Os operadores coordenadas devem ser representados, convenientemente, por operadores $\widehat{x^z}$ no plano complexo:

$$\widehat{x}^z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{x}^1 + i\widehat{x}^2), \qquad \widehat{x}^{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\widehat{x}^1 - i\widehat{x}^2), \tag{5.1.2}$$

de modo que a relação de comutação obedecida pelas coordenadas no plano complexo será:

$$[\widehat{x}^z, \widehat{x}^{\bar{z}}] = \theta^{12} \equiv \theta. \tag{5.1.3}$$

Observe a semelhança com a relação de comutação satisfeita pelos operadores de criação/aniquilação da MQ. Esta semelhança, juntamente com a ótica quântica, fornecem os estados coerentes, os quais são auto-estados dos operadores de aniquilação, $\widehat{x}^z|0\rangle = 0$ [20].

As propriedades de conjugação complexa das novas coordenadas nos permite formar uma base de auto-estados para os operadores de posição, mesmo sendo não nula a relação de comutação entre eles (5.1.3). Sendo assim, podemos definir os estados coerentes como sendo a base de auto-estados dos operadores $\widehat{x}^z$, $\widehat{x}^{\bar{z}}$, os quais atuam nessa base e fornecem os respectivos autovalores:

$$\begin{aligned} \widehat{x}^z|z\rangle &= x^z|z\rangle, \\ \langle z|\widehat{x}^{\bar{z}} &= \langle z|x^{\bar{z}}, \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Podemos descrever os estados coerentes, normalizados, em função do estado de vácuo da seguinte maneira:

$$|z_1\rangle = e^{-\frac{1}{\theta}x^{z_1}\widehat{x}^{\bar{z}}}|0\rangle, \tag{5.1.5}$$

satisfazendo a relação de completeza:

$$\frac{1}{2\pi i}\int dz d\bar{z}|z\rangle\langle z|e^{-\frac{x^{\bar{z}}x^z}{2\theta}} = 1. \tag{5.1.6}$$

Calcularemos, a seguir, o valor esperado das coordenadas entre estados coerentes e definiremos como grandezas físicas (valores reais) podem ser extraídas a partir dos resultados complexos obtidos.

$$\langle z|\widehat{x}^1|z\rangle = \langle z|\frac{\widehat{x}^z + \widehat{x}^{\bar{z}}}{\sqrt{2}}|z\rangle = \frac{x^z + x^{\bar{z}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}Re(x^z) \equiv x^1, \tag{5.1.7}$$

de maneira semelhante

$$\langle z|\widehat{x}^2|z\rangle = \langle z|\frac{\widehat{x}^z - \widehat{x}^{\bar{z}}}{i\sqrt{2}}|z\rangle = \frac{x^z - x^{\bar{z}}}{i\sqrt{2}} = \sqrt{2}Im(x^z) \equiv x^2. \tag{5.1.8}$$

Podemos adotar uma representação "complexa"para as derivadas, assim como fizemos para as coordenadas, de modo que $\frac{\partial}{\partial x^i}x^j = \delta^{ij}$, sendo $i, j = z, \bar{z}$. Com essa condição as derivadas em termos das coordenadas complexas serão dadas por:

$$\partial_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 - i\partial_2) \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_1 + i\partial_2). \tag{5.1.9}$$

Agora podemos definir uma representação para os momentos em coordenadas coerentes:

$$p^z = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - i\frac{\partial}{\partial x^2}\right), \qquad p^{\bar{z}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} + i\frac{\partial}{\partial x^2}\right), \tag{5.1.10}$$

Com esse resultado as relações de comutação entre os operadores complexos serão:

$$\begin{aligned} [\widehat{p}_i(t), \widehat{p}_j(t)] &= 0, \\ [\widehat{x}_i(t), \widehat{p}_j(t)] &= i\delta_{ij}, \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

onde os índices i, j representam as coordenadas $z, \bar{z}$.

O ponto-chave desse formalismo é o valor esperado de um operador calculado entre estados coerentes. Para vermos porque este resultado é tão especial calcularemos o valor esperado de um operador arbitrário $f(\widehat{x})$:

$$\langle z|f(\widehat{x})|z\rangle = f(x^z) = \langle z| \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik_0\widehat{x}^0 + ik_1\widehat{x}^1 + ik_2\widehat{x}^2} f(k)|z\rangle$$

$$= \langle z| \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik_0\widehat{x}^0} e^{+i\frac{\widehat{x}^{\bar{z}}}{\sqrt{2}}(k_1+ik_2)+i\frac{\widehat{x}^z}{\sqrt{2}}(k_1-ik_2)} f(k)|z\rangle \qquad (5.1.12)$$

empregando a identidade de Baker-Hausdorf $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$ obtemos:

$$= \langle z| \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik_0\widehat{x}^0} e^{+i\frac{\widehat{x}^{\bar{z}}}{\sqrt{2}}(k_1+ik_2)} e^{+i\frac{\widehat{x}^z}{\sqrt{2}}(k_1-ik_2)}$$

$$e^{\frac{1}{4}[\widehat{x}^{\bar{z}},\widehat{x}^z](k_1+ik_2)(k_1-ik_2)} f(k)|z\rangle$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ikx} e^{-\frac{1}{4}\theta\vec{k}^2} f(k) \qquad (5.1.13)$$

O resultado acima mostra que o valor esperado de um operador $f(\widehat{x})$, calculado entre estados coerentes, passa a ter a contribuição de um fator adicional.

Como um exemplo de aplicação consideraremos o campo bosônico livre. A partir do resultado (5.1.13), podemos calcular a função de Green de dois pontos:

$$G(x,y) = \langle z|T\varphi(\widehat{x})\varphi(\widehat{y})|z\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{ikx} e^{iqy} e^{-\frac{1}{4}\theta(\vec{k}^2+\vec{q}^2)} \langle\!\langle \varphi(k)\varphi(q) \rangle\!\rangle$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-y)} e^{-\frac{1}{2}\theta\vec{k}^2} \Delta(k) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(x-y)} e^{-\frac{1}{2}\theta\vec{k}^2} \frac{i}{k^2-M^2+i\epsilon}. \qquad (5.1.14)$$

Sendo assim, podemos concluir que o propagador, no espaço dos momentos, será:

$$\Delta(k) = \frac{ie^{-\frac{1}{2}\theta\vec{k}^2}}{k^2 - M^2 + i\epsilon}. \qquad (5.1.15)$$

Observe que o propagador livre usual é afetado diretamente pela não-comutatividade, diferentemente dos métodos que implementam a não-comutatividade através da deformação da álgebra. Outra característica importante é que o resultado acima é finito, com isso, os laços nos cálculos de interações estão livres de divergências ultravioleta.

Para realizarmos cálculos perturbativos neste formalismo devemos considerar o valor esperado dos campos entre estados coerentes, sendo assim, a lagrangiana será composta pela representação coerente dos campos, as quais são simples funções.

5.2 O Modelo de Gross-Neveu Empregando Estados Coerentes

Diferentemente dos modelos estudados nos capítulos anteriores onde a não-comutatividade era introduzida através do produto estrela, nesse modelo, a não-comutatividade está presente diretamente no propagador livre e não é necessário deformar a álgebra. Devemos lembrar, porém, que trabalharemos com o valor esperado dos campos entre estados coerentes. Essas grandezas são funções clássicas, logo, comutativas, sendo assim, não temos mais a dificuldade encontrada nos capítulos anteriores onde o produto entre os campos não era o usual, o que exigia certo cuidado no cálculo de interações.

Podemos partir diretamente da lagrangiana (2.2.6), porém, devemos considerar que cada campo é substituído pelo seu valor esperado na representação de estados coerentes.

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\ \partial\!\!\!/\psi - \frac{M}{2}\bar{\psi}\psi - \frac{\lambda}{2}(\bar{\psi}\psi) - \frac{N}{4g}\lambda^2 - \frac{N}{2g}M\lambda. \tag{5.2.1}$$

Como vimos no capítulo anterior, os propagadores livres usuais são alterados pela não-comutatividade, sendo assim, no caso do campo básico teremos:

$$S(k) = \frac{i}{k\!\!\!/ - M + i\epsilon}e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2}. \tag{5.2.2}$$

O propagador livre do campo auxiliar, na expansão perturbativa usual, recebe um fator exponencial da mesma maneira:

$$\Delta_\lambda(k) = -\frac{2ig}{N}e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2}. \tag{5.2.3}$$

Como os fatores não-comutativos estão nos propagadores dos campos o vértice da interação não recebe qualquer contribuição, portanto, permanece idêntico ao encontrado no caso comutativo, apenas o fator i. As figuras associadas as regras de Feynman são semelhas à (Fig.:2.3).

Podemos calcular o propagador completo do campo auxiliar, na expansão $1/N$, através da auto-energia do campo λ. Antes disso, vejamos como fica a equação de gap para este campo:

$$\langle 0|\lambda(x)|0\rangle = 0$$

$$= \langle 0|\lambda(x) : \int dy \left[\lambda(y)\bar{\psi}(y)\psi(y) + \tfrac{NM}{g}\lambda(y)\right] : |0\rangle, \tag{5.2.4}$$

realizando uma transformada de Fourier para o espaço dos momentos teremos:

$$\langle 0|\lambda(p) : \int \tfrac{d^3k_1}{(2\pi)^3}\left[\tfrac{NM}{g}(2\pi)^3\delta(k_1)\lambda(k_1) + \int \prod_{i=1}^{2} \tfrac{d^3k_i}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3)\right.$$

$$\left.\lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3)\right] : |0\rangle$$

$$= (2\pi)^3\delta(p)\Delta_\lambda(p)NM\left[\int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3}\tfrac{-2i}{k^2-M^2}e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} + \tfrac{1}{g}\right] = 0. \tag{5.2.5}$$

Portanto

$$\frac{1}{g} - 2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{i}{k^2-M^2}e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} = 0. \tag{5.2.6}$$

Observe que a equação de gap encontrada nesse formalismo quebra a invariância de Lorentz devido ao produto vetorial na exponencial. Embora tenhamos este incoveniente, dessa vez a equação de gap é finita, o que não acontecia nos outros formalismos não-comutativos e era justamente a fonte dos problemas com divergências. No caso comutativo a equação de gap é linearmente divergente, o que, convenientemente, torna o propagador do campo auxiliar finito. Nos modelos não-comutativos vistos anteriormente, não temos mais essa precisão da constante de acoplamento e seu comportamento divergente torna-se um problema. Nos modelos "coerentes" também perdemos a precisão da constante de acoplamento, porém, nesse caso ela é finita e não será fonte de futuras divergências, caso elas apareçam.

Podemos calcular a integral acima empregando o procedimento usual em TQC. Separamos e integramos sobre a componente zero do trivetor de Minkowski no plano complexo:

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2k\frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2+M^2}}e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} = 0. \tag{5.2.7}$$

Usando coordenadas polares obtemos:

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\infty} dr \frac{r}{\sqrt{r^2+M^2}} e^{-\frac{\theta}{2}r^2} = 0. \tag{5.2.8}$$

A integral em α é trivial. Para integrarmos em r realizamos uma mudança de variáveis $r^2 \longrightarrow t$:

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)}\int_0^{\infty} dt \frac{1}{\sqrt{t+M^2}} e^{-\frac{\theta}{2}t} = 0. \tag{5.2.9}$$

A integral é uma transformada de Laplace, sendo assim, teremos:

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{e^{\frac{\theta}{2}M^2}}{\sqrt{\theta}} \operatorname{Erfc}\left(M\sqrt{\frac{\theta}{2}}\right) = 0, \tag{5.2.10}$$

onde Erfc é definida em termos da função erro.

Diferentemente dos outros modelos não-comutativos, a equação de gap sofre uma alteração devido a não-comutatividade e passa a ser finita. Observe que nesse formalismo a equação de gap "sente" o efeito da não-comutatividade e o limite $\theta \longrightarrow 0$ está bem definido:

$$\left(1 - M\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sqrt{\theta} + \frac{M^3}{3\sqrt{2\pi}}\theta^{3/2}\ldots\right)$$

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\theta}}\left(1 + \frac{M^2}{2}\theta + \ldots\right)\left(M\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\theta} - \frac{M^3}{3\sqrt{2\pi}}\theta^{\frac{3}{2}}\ldots\right)$$

$$\frac{1}{g} - \frac{M}{2\pi}\left(1 - \frac{M^2}{3}\theta\right) = 0. \tag{5.2.11}$$

Este limite é uma condição especial, tendo em vista que deve fornecer o mesmo resultado obtido na situação comutativa. De fato, esse formalismo leva ao limite comutativo e de maneira muito peculiar; reobtemos o limite comutativo (2.2.11) já regularizado dimensionalmente.

O propagador do campo auxiliar pode ser obtido com o auxílio da auto-energia a qual pode ser encontrada a partir da função de dois pontos:

$$G_{\lambda}^{(2)}(x,y) = \langle 0|\lambda(x)\lambda(y)$$
$$-\tfrac{1}{8}\int d^3z d^3z' : \lambda(z)\bar{\psi}(z)\psi(z) :: \lambda(z')\bar{\psi}(z')\psi(z') : |0\rangle. \tag{5.2.12}$$

No espaço dos momentos teremos:

$$G_{\lambda}^{(2)}(p,q) = (2\pi)^3\delta(p+q)\Delta_{\lambda}(p)\Delta_{\lambda}(q)$$

$$(-1)\frac{N}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}Tr\left[\frac{(\not{k}+M)}{k^2-M^2}\frac{(\not{k}+\not{p})+M}{(k+p)^2-M^2]}\right]e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2}e^{-\frac{\theta}{2}(\vec{k}+\vec{p})^2}. \qquad (5.2.13)$$

Amputando as linhas externas e tomando o traço obtemos a auto-energia do campo auxiliar no espaço dos momentos:

$$\Sigma_{\lambda}(p) = -N\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{k\cdot(k+p)+M^2}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2}e^{-\frac{\theta}{2}(\vec{k}+\vec{p})^2}. \qquad (5.2.14)$$

Observe que neste formalismo a auto-energia não se separa em partes planar e não-planar. Para calcularmos o resultado acima empregamos a identidade (2.2.15) e consideramos a simetria do integrando na troca $k \longleftrightarrow k+p$:

$$\Sigma_{\lambda}(p) = -Ne^{-\theta\frac{\vec{p}^2}{4}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{-\theta\left(\vec{k}+\frac{\vec{p}}{2}\right)^2}}{(k^2-M^2)}$$

$$+\frac{(p^2-4M^2)N}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2}e^{-\frac{\theta}{2}(\vec{k}+\vec{p})^2}$$

$$= -Ne^{-\theta\frac{\vec{p}^2}{4}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{-\theta\left(\vec{k}+\frac{\vec{p}}{2}\right)^2}}{(k^2-M^2)} + \Sigma'(p). \qquad (5.2.15)$$

Comparando a auto-energia obtida acima com aquelas dos modelos anteriores podemos observar que a segunda integral é usualmente encontrada nos outros modelos e, no limite comutativo, é finita. Fazendo uma comparação com os resultados anteriores podemos constatar que, no caso comutativo, a auto-energia soma-se a constante de acoplamento e resulta num propagador finito. No caso em que a não-comutatividade é introduzida pela deformação da álgebra, parte planar da auto-energia soma-se a constante de acoplamento e resulta num modelo não-renormalizável. Com essa comparação podemos ver que o primeiro termo em (5.2.15) é o responsável pelo sucesso ou falha do formalismo empregado, sendo assim, o estudaremos separadamente.

Primeiramente realizamos uma integração na componente k^0, assim como fizemos para equação de "gap", o que resulta em

$$\frac{iN}{2(2\pi)^2}e^{-\theta\frac{\vec{p}^2}{4}}\int d^2k\frac{e^{-\theta(\vec{k}+\frac{\vec{p}}{2})^2}}{\sqrt{\vec{k}^2+M^2}}. \tag{5.2.16}$$

Podemos desenvolver o quadrado no argumento da exponencial e empregar coordenadas polares:

$$\frac{iN}{2(2\pi)^2}e^{-\theta\frac{\vec{p}^2}{2}}\int_0^\infty dr\frac{re^{-\theta r^2}}{\sqrt{r^2+M^2}}\int_0^{2\pi}d\alpha e^{-\theta r|\vec{p}|\cos\alpha}. \tag{5.2.17}$$

O resultado acima pode ser expresso em termos da função modificada de Bessel (veja (C.1.1)):

$$\frac{iN}{4\pi}e^{-\theta\frac{\vec{p}^2}{2}}\int_0^\infty dr\frac{re^{-\theta r^2}}{\sqrt{r^2+M^2}}I_0(\theta|\vec{p}|r). \tag{5.2.18}$$

Considerando a equação de gap (5.2.10) juntamente com a auto-energia (5.2.15) e o resultado (5.2.18) obtemos o propagador do campo auxiliar na expansão $1/N$:

$$\Delta_\lambda(p)=\left[\tfrac{iN}{2g}e^{\frac{\theta}{2}\vec{p}^2}-\Sigma(p)\right]^{-1}=\Big\{e^{\frac{\theta}{2}\vec{p}^2}\tfrac{i}{4\sqrt{2\pi\theta}}e^{\frac{M^2}{2}\theta}\,\mathrm{Erfc}\left(M\sqrt{\tfrac{\theta}{2}}\right)$$
$$-\tfrac{iN}{4\pi}e^{-\theta\frac{\vec{p}^2}{2}}\textstyle\int_0^\infty dr\frac{re^{-\theta r^2}}{\sqrt{r^2+M^2}}I_0(\theta|\vec{p}|r)-\Sigma'(p)\Big\}^{-1}. \tag{5.2.19}$$

A partir dos resultados limites (A.4.1) e (A.4.2) para a função de Bessel com argumeto pequeno e grande, respectivamente, podemos ver que o primeiro termo em na integral acima é dominante, sendo assim, o propagador do campo auxiliar está bem definido e livre da mistura UV/IV.

No caso comutativo o valor da constante de acoplamento tornava finito o pragador do campo auxiliar. Na situação não-comutativa com a álgebra deformada, a constante de acoplamento não sofria qualquer alteração, o que resultava num propagador não-renormalizável para campo auxiliar. Neste formalismo a constante de acoplamento sofre uma alteração devido a não-comutatividade e seu comportamento dominante garante um propagador livre de divergências.

5.3 O Modelo Sigma Não-Linear Empregando Estados Coerentes

Seguindo o formalismo de estados coerentes para descrição de modelos no espaço não-comutativo, partiremos da lagrangiana (2.3.5):

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\varphi(\partial^2 + M^2)\varphi + \frac{1}{2}\lambda\varphi\varphi - \frac{N}{2g}\lambda. \tag{5.3.1}$$

O propagador livre do campo φ, na expansão perturbativa usual, é dado por:

$$\Delta(k) = \frac{i}{k^2 - M^2 + i\epsilon} e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} \tag{5.3.2}$$

O vértice de interação é o mesmo obtido na situação comutativa, o fator i somente. As figuras associadas as regras de Feynman são as mesmas dadas em (Fig.: 2.6).

Para encontrar o propagador do campo auxiliar na expansão $1/N$ devemos partir diretamente para a função de vértice, a qual pode ser obtida a partir da função de dois pontos do campo auxiliar:

$$G_\lambda^{(2)}(x,y) = \langle 0|T\lambda(x)\lambda(y)$$
$$-\tfrac{1}{8}\int d^3z d^3z' : \lambda(z)\varphi(z)\varphi(z) :: \lambda(z')\varphi(z')\varphi(z') : |0\rangle. \tag{5.3.3}$$

Realizando uma transformada de Fourier para o espaço dos momentos teremos:

$$G_\lambda^{(2)}(k,k_1) = (2\pi)^3\delta(k+k_1)\Delta_\lambda(k)\Delta_\lambda(k_1)$$
$$\tfrac{N}{2}\int \tfrac{d^3q}{(2\pi)^3}\tfrac{1}{(q^2-M^2)}e^{-\frac{\theta}{2}\vec{q}^2}\tfrac{1}{[(q+k)^2-M^2]}e^{-\frac{\theta}{2}(\vec{q}+\vec{k})^2}. \tag{5.3.4}$$

Amputando as linhas externas teremos a função de vértice do campo auxiliar no espaço dos momentos:

$$\Gamma_\lambda^{(2)}(k) = \frac{N}{2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{(q^2-M^2)[(q+k)^2-M^2]}e^{-\frac{\theta}{2}\vec{q}^2}e^{-\frac{\theta}{2}(\vec{q}+\vec{k})^2}. \tag{5.3.5}$$

Para desenvolver o resultado acima empregamos a parametrização de Feynman dada em (4.3.8):

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{N}{2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int_0^1 dx \frac{1}{(q^2+2xqk+xk^2-M^2)^2} e^{-\frac{\theta}{2}\vec{q}^2-\frac{\theta}{2}(\vec{q}+\vec{k})^2}. \quad (5.3.6)$$

Fazendo uma mudança de variável $q \longrightarrow q - xk$:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{N}{2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int_0^1 dx \frac{e^{-\frac{\theta}{2}(\vec{q}-x\vec{k})^2-\frac{\theta}{2}(\vec{q}+(1-x)\vec{k})^2}}{(q^2+x(1-x)k^2-M^2)^2}. \quad (5.3.7)$$

Definindo $-\mu^2 = x(1-x)k^2 - M^2$ e $\vec{u} = -x\vec{k}$, $\vec{v} = (1-x)\vec{k}$:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{N}{2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int_0^1 dx \frac{e^{-\frac{\theta}{2}(\vec{q}+\vec{u})^2}e^{-\frac{\theta}{2}(\vec{q}+\vec{v})^2}}{(q^2-\mu^2)^2}. \quad (5.3.8)$$

Desenvolvendo os quadrados nas exponenciais e fazendo uma nova definição $\vec{s} = \frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}$:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{N}{2}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int_0^1 dx \frac{e^{-\theta\left(\vec{q}+\frac{\vec{s}}{2}\right)^2}}{(q^2-\mu^2)^2} e^{-\frac{\theta}{2}\ \vec{u}^2+\vec{v}^2-\frac{\vec{s}^2}{2}}. \quad (5.3.9)$$

Uma integral semelhante já foi resolvida em capítulos anteriores. Após integrar na variável q^0 e fazer uma transformação para coordenadas polares obtemos:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{iN}{8(2\pi)^2}\int_0^1 dx e^{-\frac{\theta}{2}\left(\vec{u}^2+\vec{v}^2\right)}\int_0^\infty dr \frac{re^{-\theta r^2}}{(r^2+\mu^2)^{\frac{3}{2}}}\int_0^{2\pi} d\alpha e^{-\theta r|\vec{s}|\cos\alpha}. \quad (5.3.10)$$

Voltando as variáveis k e M e representando integral angular por uma função de Bessel (veja (C.1.1))

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{i\pi N}{4(2\pi)^2}e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2}\int_0^1 dx e^{\theta x(1-x)\vec{k}^2}$$

$$\int_0^\infty dr \frac{re^{-\theta r^2}}{[r^2-x(1-x)k^2+M^2]^{\frac{3}{2}}} I_0\left(\frac{\theta r}{2}|(1-2x)\vec{k}|\right). \quad (5.3.11)$$

No apêndice (B.3) temos alguns resultados para a função de vértice no limite k muito grande, todos levam a uma função finita no limite considerado. Como consequência de uma função de vértice finita, o propagador do campo auxiliar também será finito e, nesse caso, sem poder ser separado em partes planar e não-planar.

$$\Delta_\lambda(k) = -[\Gamma_\lambda^{(2)}(k)]^{-1} = -\left[\frac{i\pi N}{4(2\pi)^2} e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} \int_0^1 dx e^{\theta x(1-x)\vec{k}^2}\right.$$

$$\left.\int_0^\infty dr \frac{re^{-\theta r^2}}{[r^2 - x(1-x)k^2 + M^2]^{\frac{3}{2}}} I_0\left(\frac{\theta r}{2}|(1-2x)\vec{k}|\right)\right]^{-1}. \qquad (5.3.12)$$

Vejamos como o propagador do campo φ é afetado pela correção de auto-energia na ordem de $1/N$. Partindo da função de dois pontos do campo básico:

$$G_\varphi^{(2)}(x,y) = \langle 0|T\varphi(x)\varphi(y)$$

$$-\tfrac{1}{8}\int d^3z d^3z' : \lambda(z)\varphi(z)\varphi(z) :: \lambda(z')\varphi(z')\varphi(z') : |0\rangle. \qquad (5.3.13)$$

Realizando uma transformada de Fourier para o espaço dos momentos teremos:

$$G_\varphi^{(2)}(p,q) = (2\pi)^3\delta(p+q)\Delta(p)\Delta(q)$$

$$(-1)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{i}{[(k+p)^2 - M^2]} e^{-\frac{\theta}{2}(\vec{k}+\vec{p})^2}\Delta_\lambda(k), \qquad (5.3.14)$$

onde $\Delta_\lambda(k)$ é o propagador do campo auxiliar obtido em (5.3.12). Amputando as linhas externas teremos a auto-energia no espaço dos momentos:

$$\Sigma_\varphi(p) = (-i)\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{[(k+p)^2 - M^2]} e^{-\frac{\theta}{2}(\vec{k}+\vec{p})^2}\Delta_\lambda(k). \qquad (5.3.15)$$

Observe que o propagador do campo auxiliar dado em (5.3.12) contribui com um fator exponencial para a auto-energia mantendo-a finita. Sendo

assim, o propagador do campo φ corrigido, $\tilde{\Delta}(p) = \Delta(p) + \Sigma_{\varphi}(p)$, é finito nesse formalismo.

Nos formalismos não-comutativos vistos anterioremente a auto-energia do campo φ seperava-se em partes planar e não-planar, o que dava origem a mistura UV/IV e tornava o modelo não-renormalizável. Empregando estados coerentes não temos mais termos planares e não-planares nem o fenômeno da mistura, além disso, o fator exponencial assegura o bom comportamento das integrais.

Capítulo 6

Conclusões

A expansão em $1/N$ torna os modelos estudados renomalizáveis em 3D, o que não acontece na expansão perturbativa usual. No modelo de Gross-Neveu a constante de acoplamento desempenha um papel fundamental, eliminando a função de um ponto do campo auxiliar e renormalizando o propagador do campo auxiliar.

Três formalismos para implementar a não-comutatividade foram abordados. Em dois deles, o formalismo canônico padrão e o formalismo sem quebra da invariância de Lorentz, a não-comutatividade foi introduzida através da deformação da álgebra. No modelo de Gross-Neveu, ambos os formalismos quebram a sensível relação existente entre a constante de acoplamento e o propagador do campo auxiliar, tal que o modelo passa a ser não-renormalizável. No modelo Sigma Não-Linear a não-comutatividade é responsável pela introdução da divergência infravermelha, resultando na mistura UV/IV, além disso, torna o modelo não-renormalizável. Esperávamos que o formalismo invariante de Lorentz pudesse, de alguma maneira, contornar os problemas encontrados pelo formalismo não-comutativo usual nos modelos estudados. Infelizmente nossa expectativa não se concretizou, os modelos permanecem com os mesmos problemas e, se por um lado temos uma melhora no comportamento UV de um termo, por outro, temos um aumento divergência UV em outro termo, além do aparecimento das divergências IV. Embora tenhamos adotado um formalismo que preserva a invariância de Lorentz, ao admitir $\theta_{0i} = 0$, quebramos essa invariância. Esse procedimento parece contraditório, porém, desse modo, garantimos a unitariedade e somos capazes de avançar nos cálculos perturbativos. É possível não tomar essa condição sobre θ e manter o modelo invariante, porém, não acreditamos que isso solu-

cionará os problemas de divergências, tendo em vista obtemos uma liberdade sobre $W(\theta)$, mesmo quando admitimos $\theta_{0i} = 0$, e ainda assim os modelos são não-renormalizáveis.

Como um método não-comutativo complementar à deformação da álgebra introduzimos o formalismo de estados coerentes. Nesse caso a não-comutatividade está presente diretamente no propagador do campo livre, diferentemente dos outros formalismos onde a não-comutatividade se manifesta somente nos vértices de interação. Esse método permite formar uma base de auto-estados a partir da qual podemos calcular os valores esperados dos campos e, com esses objetos, calcular processos de espalhamento. Finalmente, nesse contexto os dois modelos são finitos de modo direto, dispensando o uso de qualquer esquema de renormalização. O formalismo de estados coerentes quebra a invariância Lorentz, porém, podemos admitir que isso ocorre na escala de Planck (energias da ordem de $10^{19} Gev$), existindo a possibilidade que a quebra seja fortemente suprimida na nossa escala de energias.

Os autores [21] argumentam que em dimensões pares o formalismo não quebra a invariância de Lorentz e a unitariedade é preservada, desde que os elementos da matriz θ sejam iguais. Entretanto, para evitar a ocorrência de fortes divergências ultravioletas é necessário realizar os cálculos na região euclidiana. A extensão desses resultados para a região de Minkowski necessita de maiores estudos.

Apêndice A

O Modelo de Gross-Neveu

A.1 Férmions de Majorana

Os espinores de Majorana obedecem a relação de conjugação de carga $\psi = \bar{\psi}C$ e $\bar{\psi} = \psi C^{-1}$ onde a matriz de conjugação de carga C obedece:

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T \quad \text{e} \quad C^T = -C. \tag{A.1.1}$$

sendo γ_μ as matrizes de Dirac que, em 3 dimensões, podem ser representadas através das matrizes de Pauli.

Sabendo que o propagador livre dos férmions é dado por

$$S_{\psi\bar{\psi}}(p) = S(p) = \frac{i}{\not{p} - M + i\epsilon}, \tag{A.1.2}$$

juntamente com a propriedade de conjugação de carga; podemos calcular o propagador livre entre dois férmios de mesma carga:

$$S_{\psi\psi} = \langle\psi_\alpha\psi_\beta\rangle = \langle\psi_\alpha\bar{\psi}_\rho\rangle C_{\rho\beta} = S_{\alpha\rho}C_{\rho\beta} = (SC)_{\alpha\beta}, \tag{A.1.3}$$

$$S_{\bar{\psi}\bar{\psi}} = \langle\bar{\psi}_\alpha\bar{\psi}_\beta\rangle = \langle\psi_\lambda C^{-1}_{\lambda\alpha}\bar{\psi}_\beta\rangle = C^{-1}_{\lambda\alpha}S_{\lambda\beta}$$

$$= C^T_{\lambda\alpha}S_{\lambda\beta} = C_{\alpha\lambda}S_{\lambda\beta} = -C^{-1}_{\alpha\lambda}S_{\lambda\beta} = -(C^{-1}S)_{\alpha\beta}. \tag{A.1.4}$$

A.2 A Não-Comutatividade com Quebra da Invariância de Lorentz

Vamos calcular a integral do produto Moyal entre os campos $\lambda(x)$, $\bar{\psi}(x)$ e $\psi(x)$:

$$\int d^3x \lambda(x) \star \bar{\psi}(x) \star \psi(x) = \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \mathrm{Tr}[\Lambda(x)\bar{\Psi}(x)\Psi(x)T(-k)]$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3) \mathrm{Tr}[T(k_1)T(k_2)T(k_3)T(-k)]$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3)$$

$$(2\pi)^3 \delta(k_1 + k_2 + k_3 - k) e^{-\frac{i}{2}k_1\theta k_2} e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_2)\theta k_3} e^{\frac{i}{2}(k_1+k_2+k_3)\theta k}. \quad \text{(A.2.1)}$$

Podemos integrar nas variáveis k e x e empregar a propriedade de simetria do espinor.

$$\lambda(x) \star \bar{\psi}(x) \star \psi(x) = \int d^3x \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} e^{-i(k_1+k_2+k_3)x} \lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3)$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{i}{2}k_1\theta k_2} e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_2)\theta k_3} + e^{-\frac{i}{2}k_1\theta k_3} e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_3)\theta k_2}\right]$$

$$= \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(k_1 + k_2 + k_3) \lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3)$$

$$e^{-\frac{i}{2}k_1\theta(k_2+k_3)} \cos\left(\frac{1}{2}k_2\theta k_3\right)$$

$$= \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} (2\pi)^3 \delta(k_1 + k_2 + k_3) \lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3) \cos\left(\frac{1}{2}k_2\theta k_3\right). \quad \text{(A.2.2)}$$

A.3 A Não-Comutatividade sem Quebra da Invariância de Lorentz

A integral do produto Moyal entre os campos $\lambda(x)$,$\bar{\psi}(x)$ e $\psi(x)$ será:

$$\int d^3x \int d^3\theta W(\theta)\lambda(x) \star \bar{\psi}(x) \star \psi(x)$$

$$= \int d^3x \int d^3\theta W(\theta) \int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \mathrm{Tr}[\langle\theta|\Lambda(x)\bar{\Psi}(x)\Psi(x)|\theta'\rangle T(-k)]$$

$$= \int d^3x \int d^3\theta W(\theta) \int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} \prod_{i=1}^{3} \tfrac{d^3k_i}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3)$$

$$\mathrm{Tr}\left[T(k_1+k_2+k_3-k)e^{-\frac{i}{2}k_1\widehat{\theta}'k_2} e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_2)\widehat{\theta}'k_3} e^{\frac{i}{2}(k_1+k_2+k_3)\widehat{\theta}'k}\right] \langle\theta|\theta'\rangle$$

$$= \int d^3x \int d^3\theta W(\theta) \int \tfrac{d^3k}{(2\pi)^3} \prod_{i=1}^{3} \tfrac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \int d^3\theta' W(\theta') e^{-ikx} \lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3)$$

$$\tfrac{\delta^3(\theta-\theta')}{W(\theta')}(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3-k)e^{-\frac{i}{2}k_1\theta'k_2} e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_2)\theta'k_3} e^{\frac{i}{2}(k_1+k_2+k_3)\theta'k}. \quad \text{(A.3.1)}$$

Podemos integrar nas variáveis θ', k, x e usar a propriedade de simetria do espinor.

$$\int d^3x \int d^3\theta W(\theta)\lambda(x) \star \bar{\psi}(x) \star \psi(x) = \int d^3\theta W(\theta) \int \prod_{i=1}^{3} \tfrac{d^3k_i}{(2\pi)^3}$$

$$(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3)\lambda(k_1)\bar{\psi}(k_2)\psi(k_3)\cos\left(\tfrac{1}{2}k_2\theta k_3\right). \quad \text{(A.3.2)}$$

A.4 A Não-Comutatividade Através dos Estados Coerentes

Para analisarmos o comportamento da auto-energia do campo λ, dado em (5.2.18), no limite $\vec{p} \longrightarrow 0$ empregamos a expansão em séries de potência da função de Bessel [24]:

$$I_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}. \quad \text{(A.4.1)}$$

No limite $\vec{p} \longrightarrow \infty$ podemos usar a seguinte representação

$$I_\nu(z) \approx \tfrac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^k}{(2z)^k} \tfrac{\Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}{k!\Gamma(\nu-k+\frac{1}{2})} + \tfrac{e^{-z\pm i\pi(\nu+\frac{1}{2})}}{\sqrt{2\pi z}} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{(2z)^k} \tfrac{\Gamma(\nu+k+\frac{1}{2})}{k!\Gamma(\nu-k+\frac{1}{2})}, \quad \text{(A.4.2)}$$

na qual adotamos o sinal (+) para $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$ e o sinal (-) para $-\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

Apêndice B

O Modelo Sigma Não-Linear

B.1 A Não-Comutatividade com Quebra da Invariância de Lorentz

O resultado para a integral do produto estrela entre os campos λ, φ, φ é o seguinte:

$$\int d^3x\lambda(x)\star\varphi(x)\star\varphi(x) = \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx}\mathrm{Tr}[\Lambda(x)\Phi(x)\Phi(x)T(-k)]$$

$$\int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} e^{-ikx}\lambda(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)\mathrm{Tr}[T(k_1)T(k_2)T(k_3)T(-k)]$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} e^{-ikx}\lambda(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)$$

$$(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3-k)e^{-\frac{i}{2}k_1\theta k_2}e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_2)\theta k_3}e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_2+k_3)\theta k}. \quad \text{(B.1.1)}$$

Integrando nas variáveis k, x e usando a propriedade de simetria do campo φ podemos obter:

$$\int d^3x\lambda(x)\star\varphi(x)\star\varphi(x) = \int d^3x \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} e^{-i(k_1+k_2+k_3)x}\lambda(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{-\frac{i}{2}k_1\theta k_2}e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_2)\theta k_3} + e^{-\frac{i}{2}k_1\theta k_3}e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_3)\theta k_2}\right]$$

$$= \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3)\lambda(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)\cos\left(\tfrac{1}{2}k_2\theta k_3\right) \quad \text{(B.1.2)}$$

B.2 A Não-Comutatividade sem a Quebra da Invariância de Lorentz

O resultado para a integral do produto Moyal entre os campos $\lambda(x)$,$\varphi(x)$ e $\varphi(x)$ será:

$$\int d^3x \int d^3\theta W(\theta)\lambda(x) \star \varphi(x) \star \varphi(x)$$

$$= \int d^3x \int d^3\theta W(\theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \mathrm{Tr}[\langle\theta|\Lambda(x)\Phi(x)\Phi(x)|\theta'\rangle T(-k)]$$

$$= \int d^3x \int d^3\theta W(\theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} e^{-ikx} \lambda(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)$$

$$\mathrm{Tr}\left[T(k_1+k_2+k_3-k)e^{-\frac{i}{2}k_1\widehat{\theta}'k_2} e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_2)\widehat{\theta}'k_3} e^{\frac{i}{2}(k_1+k_2+k_3)\widehat{\theta}'k}\right] \langle\theta|\theta'\rangle$$

$$= \int d^3x \int d^3\theta W(\theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3} \int d^3\theta' W(\theta') e^{-ikx} \lambda(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)$$

$$\frac{\delta^3(\theta-\theta')}{W(\theta')}(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3-k)e^{-\frac{i}{2}k_1\theta'k_2} e^{-\frac{i}{2}(k_1+k_2)\theta'k_3} e^{\frac{i}{2}(k_1+k_2+k_3)\theta'k}. \quad \text{(B.2.1)}$$

Integrando nas variáveis θ', k, x e usando a propriedade de simetria do espinor podemos obter:

$$\int d^3x \int d^3\theta W(\theta)\lambda(x) \star \varphi(x) \star \varphi(x) = \int d^3\theta W(\theta) \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^3k_i}{(2\pi)^3}$$

$$(2\pi)^3\delta(k_1+k_2+k_3)\lambda(k_1)\varphi(k_2)\varphi(k_3)\cos\left(\tfrac{1}{2}k_2\theta k_3\right). \quad \text{(B.2.2)}$$

Vamos estudar o comportamento da função de vértice do campo auxiliar (4.3.14) no limite $\vec{k}^2 \longrightarrow \infty$, mantendo k_0 fixo. É conveniente definir um parâmetro $\epsilon = \frac{x(1-x)k_0^2 - M^2}{\vec{k}^2}$, sendo assim teremos:

$$\Gamma^2_\lambda(k) = \frac{N}{8\pi} \int_0^1 dx \frac{1}{\left[i\frac{|\vec{k}|^2}{2}\sqrt{x(1-x)+\epsilon}\right]^2} \frac{1}{i|\vec{k}|\sqrt{x(1-x)+\epsilon}}$$

$$\left[i\frac{|\vec{k}|^2}{2}\sqrt{x(1-x)+\epsilon} - e^{-i\frac{|\vec{k}|^2}{2}\sqrt{x(1-x)+\epsilon}} - 1\right]$$

$$= -\frac{N}{4\pi|\vec{k}|^3} \int_0^1 dx \frac{1}{x(1-x)+\epsilon} \left[1 + i\frac{1}{|\vec{k}|^2\sqrt{x(1-x)+\epsilon}}\right]. \quad \text{(B.2.3)}$$

Como estou interessado na convergência absoluta da integral vou usar o resultado para o módulo da integral $|\int f(x)|dx \leq \int |f(x)|dx$, sendo assim:

$$|\Gamma^2_\lambda(k)| \leq \frac{N}{4\pi|\vec{k}|^3}\int_0^1 dx \frac{1}{x(1-x)+\epsilon} \propto \frac{N}{|\vec{k}|^3} \tag{B.2.4}$$

Um procedimento semelhante aplicado aos limites $k^0 \longrightarrow \infty$ mantendo $\vec{k}$ fixo e $k \longrightarrow \infty$ com $\vec{k}, k_0 \longrightarrow \infty$ fornece os resultados:

$$\Sigma_\lambda(k^0 \to \infty) \propto \frac{N}{|\vec{k}||k_0|^2}, \tag{B.2.5}$$

$$\Sigma_\lambda(k \to \infty) \propto \frac{N}{|\vec{k}||k|^2}. \tag{B.2.6}$$

B.3 A Não-Comutatividade Através dos Estados Coerentes

Vamos estudar o comportamento da função de vértice do campo auxiliar (5.3.11) na situação particular onde $\vec{k}^2 \longrightarrow \infty$, mantendo k_0 fixo. Podemos definir convenientemente o parâmetro $\epsilon = \frac{-x(1-x)k_0^2+M^2+r^2}{\vec{k}^2}$ e empregar a expansão em série de potências para função de Bessel (A.4.2). Sendo assim, (5.3.11) passará a ser:

$$\Gamma^{(2)}_\lambda(k) = \frac{i\pi N}{4(2\pi)^2\sqrt{\pi\theta}|\vec{k}|^3} e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} \int_0^1 dx \frac{e^{\theta x(1-x)\vec{k}^2}}{[x(1-x)+\epsilon]^{\frac{3}{2}}\sqrt{|\vec{k}(1-2x)|}}$$

$$\int_0^\infty dr\sqrt{r}e^{-\theta r^2} e^{\frac{\theta}{2}r|\vec{k}(1-2x)|}. \tag{B.3.1}$$

Vamos introduzir um parâmetro Λ que nos permite comparar o limite de integração com o momento $|\vec{k}|$:

$$\begin{cases} \text{para} \quad r \in (0,\Lambda) & r \ll |\vec{p}| \\ \text{para} \quad r \in (\Lambda',\infty) & |\vec{p}| \ll r, \end{cases} \tag{B.3.2}$$

sendo assim, podemos escrever (B.3.1) da seguinte maneira:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{i\pi N}{4(2\pi)^2\sqrt{\pi\theta}|\vec{k}|^3} e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} \int_0^1 dx \frac{e^{\theta x(1-x)\vec{k}^2}}{[x(1-x)+\epsilon]^{\frac{3}{2}}\sqrt{|\vec{k}(1-2x)|}}$$

$$\left[\int_0^{\Lambda} dr e^{\frac{\theta}{2}r|\vec{k}(1-2x)|}\sqrt{r} + \int_{\Lambda'}^{\infty} dr e^{-\theta r^2}\sqrt{r}\right]. \qquad \text{(B.3.3)}$$

Como a segunda integral no colchetes não depende de k não a calcularemos, simplemente a denominremos A. A primeira integral pode ser efetuada e o resultado será:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = \frac{i\pi N}{4(2\pi)^2\sqrt{\pi\theta}|\vec{k}|^3} e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} \int_0^1 dx \frac{e^{\theta x(1-x)\vec{k}^2}}{[x(1-x)+\epsilon]^{\frac{3}{2}}\sqrt{|\vec{k}(1-2x)|}}$$

$$\Lambda^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2e^{\frac{\theta\Lambda}{2}|\vec{k}(1-2x)|}}{\theta\Lambda|\vec{k}(1-2x)|} - \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{Erfi}\sqrt{\frac{\theta\Lambda}{2}|\vec{k}(1-2x)|}}{2\sqrt{\frac{\theta\Lambda}{2}|\vec{k}(1-2x)|}^{\frac{3}{2}}}\right] + A, \qquad \text{(B.3.4)}$$

onde $\mathrm{Erfi}(z) = -i\mathrm{Erf}(iz)$. Expandindo a função $\mathrm{Erfi}(z)$ para $z \longrightarrow \infty$ teremos:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) \approx \frac{i\pi N}{4(2\pi)^2\sqrt{\pi\theta}|\vec{k}|^3} e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} \int_0^1 dx \frac{e^{\theta x(1-x)\vec{k}^2}}{[x(1-x)+\epsilon]^{\frac{3}{2}}\sqrt{|\vec{k}(1-2x)|}}$$

$$\Lambda^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2e^{\frac{\theta\Lambda}{2}|\vec{k}(1-2x)|}}{\theta\Lambda|\vec{k}(1-2x)|} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\frac{\theta\Lambda}{2}|\vec{k}(1-2x)|}^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{e^{\frac{\theta\Lambda}{2}|\vec{k}(1-2x)|}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\theta\Lambda}{2}|\vec{k}(1-2x)|}}\right)\right] + A$$

$$\approx \frac{i\pi N\Lambda}{2(2\pi)^2\theta\sqrt{\pi\theta}|\vec{k}|^3} e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} \int_0^1 dx \frac{e^{\theta x(1-x)\vec{k}^2} e^{\frac{\theta\Lambda}{2}|\vec{k}(1-2x)|}}{\{[x(1-x)+\epsilon](1-2x)\}^{\frac{3}{2}}} + A. \qquad \text{(B.3.5)}$$

Um procedimento semelhante aplicado ao limite $k \longrightarrow \infty$ com $\vec{k}, k_0 \longrightarrow \infty$ nos fornece o resultado:

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) \approx \frac{i\pi N\Lambda}{2(2\pi)^2\theta\sqrt{\pi\theta}|k|^3|\vec{k}|^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} \int_0^1 dx \frac{e^{\theta x(1-x)\vec{k}^2} e^{\frac{\theta\Lambda}{2}|\vec{k}(1-2x)|}}{\{[x(1-x)+\epsilon](1-2x)\}^{\frac{3}{2}}} + A. \qquad \text{(B.3.6)}$$

nesse caso $\epsilon = \frac{M^2+r^2}{k^2}$.

O limite $k^0 \longrightarrow \infty$ mantendo $\vec{k}$ fixo é mais simples. Nesse caso podemos empregar a representação em séries de potência da função de Bessel (A.4.1):

$$\Gamma_{\lambda}^{(2)}(k) = -\frac{\pi N \Lambda}{4(2\pi)^2 \theta |k_0|^3} e^{-\frac{\theta}{2}\vec{k}^2} \int_0^1 dx \frac{e^{\theta x(1-x)\vec{k}^2}}{[x(1-x)+\epsilon]^{\frac{3}{2}}} \tag{B.3.7}$$

onde $\epsilon = -\frac{x(1-x)\vec{k}^2 + M^2 + r^2}{k_0^2}$.

Apêndice C

Fórmulas

A função de Bessel é definida da seguinte maneira [24]:

$$I_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi d\theta e^{\pm z\cos\theta}(\sin\theta)^{2\nu}. \tag{C.1.1}$$

Afunção erro $\mathrm{Erf}(z)$ tem a seguinte defínção:

$$\mathrm{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{-t^2}, \tag{C.1.2}$$

com $\mathrm{Erfc}(z) = 1 - \mathrm{Erf}(z)$.

A transformada de Fourier empregada na igualdade (4.3.9) é dada por [25]:

$$\int d^n x (c^2 + P + i\varepsilon)^\lambda e^{i(x,s)} = \mathcal{F}\left[(c^2 + P + i\varepsilon)^\lambda\right]$$

$$= \frac{2^{\lambda+1}(2\pi)^{\frac{n}{2}} c^{\frac{n}{2}+\lambda}}{\Gamma(-\lambda)\sqrt{\Delta}} \frac{K_{\frac{n}{2}+\lambda}[c(Q-i\varepsilon)^{\frac{1}{2}}]}{(Q-i\varepsilon)^{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+\lambda)}}, \tag{C.1.3}$$

onde n o número de dimensões, P a forma quadrática $P = \sum_{k,r=1}^n g_{kr} x^k x^r$, assim como $Q = \sum_{k,r=1}^n g_{kr} s^k s^r$ e Δ é o determinante dos coeficientes de P.

Referências Bibliográficas

[1] Itzykson, C., Zuber, J. : "Quantum Field Theory" - McGraw-Hill (1980).

[2] Gomes, M. : "Teoria Quântica dos Campos" - edusp (2002).

[3] Coleman, S. : "1/N" - International School os Subnuclear Physics: Pointlike Structures Inside and Outside Hadrons (1979).

[4] Gross, David J., Neveu, A. : "Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories" - Phys. Review D **V.10 N.10** (1974) 3235-3253.

[5] Gell-Mann, M., Levy, M. - Nuovo Cimento **16** (1960) 705.

[6] Manohar, Aneesh V. : "LARGE N QCD" - hep-ph/9802419.

[7] Zwiebach, B., : "A First Course in String Theory" - Cambridge University Press (2004).

[8] Polchinski, J., : "String Theory" **V.1** - Cambridge University Press (1998).

[9] Kaku, M., : "Introduction to Superstrings" - Springer-Verlag (1988).

[10] Seiberg, N., Witten, E. : "String theory and noncommutative geometry" - hep-th/9908142.

[11] Abouelsaood, A., Callan, C. G., Nappi, C. R., Yost, S. A. : "Open String In Background Gauge Fields" - Nuclear Phys. **B**280 (1987) 599-624

[12] Snyder, Hartland S. : "Quantized Space-Time" - Phys. Review **V.71 N.1** (1947) 38-41.

[13] Gomes, M. : "Renormalization in Noncommutative Field Theory" - Escola de Partículas e Campos J. A. Swieca (2001).

[14] Akhmedov, Emil T., DeBoer, P., Semenoff, Gordon W.: "Noncommutative Gross-Neveu model at large N- hep-th/0103199.

[15] Szabo, Richard J., : "Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces" - hep-th/0109162.

[16] Girotti, H. O.: "Noncommutative Quantum Field Theories- hep-th/0301237.

[17] Douglas, Michael R., Nekrasov, Nikita A.: "Noncommutative field theory- Rev. Modern Phys. **V. 73** (2001) 977-1029.

[18] Das, A. : " Field Theory: A Path Integral Approach" - World Scientific **V.52** (1993)

[19] Smailagic, A., Spallucci, E. : "Feynman path integral on the noncommutative plane" - J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 467-471

[20] Smailagic, A., Spallucci, E. : "UV divergence-free QFT on noncommutative plane" - J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003) 517-521

[21] Smailagic, A., Spallucci, E. : "Lorentz invariance, unitarity and UV-finiteness of QFT on noncommutative spacetime" - J. Phys. A: Math. Gen. **37** (2004) 7169-7178

[22] Carone, E. Carlson, Carone, D. Cristopher : "Noncommutative gauge theory without Lorentz violation" - Phys. Review D **66** (2002).

[23] Kase, H., Morita, K., Okumura, Y., Umezawa, E. : "Lorentz-Invariant Non-Commutative Space-Time Based On DFR Algebra" - hep-th/9908142.

[24] Gradshteyn, I. S., Ryzhik, I. M. : "Table of integrals, series and products" - Academic Press (1980)

[25] Gel'fand, I. M. : "Generalized Functions" - Academic Press **V.1** (1966)