UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Física

Transporte de Partículas
no Texas Helimak

Rafael Minatogau Ferro

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo, para obtenção
do Título de Mestre em Ciências.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (Orientador, Instituto de Física da USP)

Prof^a. Dr^a. Marisa Roberto (Instituto Tecnológico de Aeronáutica)

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (Universidade Federal do Paraná)

São Paulo

2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Ferro, Rafael Minatogau

Transporte de partículas no Texas Helimak. São Paulo, 2016.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física.
Depto. de Física Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Área de Concentração: Física de Plasmas.

Unitermos: 1. Física de plasmas; 2. Sistemas hamiltonianos
3. Caos (Sistemas dinâmicos).

USP/IF/SBI-014/2016

Ce que nous appellons *hazard* n'est,
& ne peut être
que la cause ignorée d'un effet connu.

Voltaire

Agradecimentos

À minha família, pelo apoio e pela paciência.

Ao Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas, pelos ensinamentos e pelo suporte em todas as etapas do trabalho. Pela confiança e pela oportunidade de trabalhar no seu grupo de pesquisa. De quem a sabedoria e a postura acadêmica constituem inspiração e exemplo a serem seguidos por todos.

A todo o pessoal do Grupo Controle de Oscilações, pelo acolhimento e pela motivação. Em especial, ao Prof. Dennis Lozano Toufen, pelo apoio técnico em grande parte deste trabalho.

À MSc. Natália Fiorini da Silva, pelo apoio, carinho e paciência.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

À memória de meu avô.

Resumo

Através de um mapa de ondas de deriva, estudamos o transporte de partículas no Texas Helimak, considerando diversos perfis do campo elétrico radial. O Texas Helimak é um equipamento de confinamento magnético caracterizado por linhas de campo helicoidais e que fornece uma aproximação experimental de um plasma unidimensional. Ele possibilita a imposição de um potencial elétrico externo ao plasma, chamado *bias*, que altera o perfil radial do campo elétrico de equilíbrio e, conseqüentemente, possui influência sobre as características de transporte no plasma. Para estudar o efeito do *bias* sobre o transporte, utilizamos um modelo que considera flutuações eletrostáticas, associadas à deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, como mecanismo de turbulência. Com isso, introduzimos um mapa de ondas de deriva, cujos parâmetros estão relacionados a dados experimentais para diversos valores de *bias*. Assim, ao variar o *bias*, pudemos observar a formação e a destruição da curva sem *shear*, bem como seu efeito sobre o transporte das trajetórias no espaço de fase.

Abstract

Using a drift wave map, we studied the particle transport in Texas Helimak considering various electric field radial profiles. Texas Helimak is a device for magnetic confinement characterized by helical field lines, and constitutes an experimental approximation to a one-dimensional plasma. It allows for the imposing of an external electric potential, known as *bias*, which changes the equilibrium electric field radial profile and hence the transport properties of the plasma. In order to study the effects of the bias potential on the particle transport, we used a model with electrostatic fluctuations associated to $\vec{E} \times \vec{B}$ drift as the turbulence mechanism. Thus, we introduced a drift wave map whose parameters are related to experimental data for various values of bias. Therefore, by varying the bias, we observed the formation and destruction of the shearless curve, as well as its effects on trajectories transport in the map's phase space.

Lista de Figuras

2.1	Representação esquemática de um tokamak. ¹	12
3.1	Desenho esquemático do Texas Helimak.	19
3.2	Corrente de saturação iônica média em função das coordenadas radial (R) e vertical (z). A figura mostra apenas a faixa radial de maior interesse, $1,10 < R < 1,25$. Fonte: Toufen (2012)	20
3.3	Perfil radial da velocidade vertical média, $V_z(r)$	22
3.4	Espectros de potência (escala de cores) em função do raio, a uma altura $z = 1,747$ m, para alguns valores de <i>bias</i> positivos. Fonte: Toufen (2012)	25
3.5	Perfil radial do campo elétrico para alguns valores de <i>bias</i>	26
4.1	(a) Ilustração de uma trajetória sendo marcada na seção de Poincaré. (b) Trajetórias regulares sobre curvas unidimensionais no espaço de fase, caracterizando um sistema integrável. Cada cor corresponde a uma condição inicial. (c) Trajetórias caóticas espalhadas pelo espaço de fase, caracterizando um sistema não integrável.	34
4.2	Espaço de fase do mapa padrão <i>twist</i> com parâmetro de controle (a) $K = 0$; (b) $K = 0,5$; (c) $K = 0,95$; (d) $K = 3$	39
4.3	Espaço de fase do mapa padrão não- <i>twist</i> com parâmetros de controle $a = 0,35$ e (a) $b = 1 \times 10^{-6}$; (b) $b = 0,4$; (c) $b = 0,7$; (d) $b = 0,98$	42

4.4	(a) Em vermelho, curva sem <i>shear</i> do mapa padrão não- <i>twist</i> com parâmetros $a = 0,35$ e $b = 0,4$. (b) Perfil do número de rotação do mapa em (a) ao longo de condições iniciais sobre $\chi_0 = 0,5$	43
6.1	Espaço de fase do mapa de ondas de deriva com aproximação de campo elétrico uniforme, para (a) $bias = 0$ V; (b) $bias = 4$ V; (c) $bias = 8$ V; (d) $bias = 10$ V; (e) $bias = 15$ V; (f) $bias = 20$ V.	59
6.2	Número de rotação, ω , para $\alpha = 0$, na aproximação de <i>shear</i> uniforme do campo elétrico. Os pontos em destaque indicam o local onde $d\omega/dI$ é nulo.	60
6.3	Espaço de fase do mapa de ondas de deriva com aproximação de <i>shear</i> uniforme do campo elétrico, para (a) $bias = 0$ V; (b) $bias = 4$ V; (c) $bias = 8$ V; (d) $bias = 10$ V; (e) $bias = 15$ V; (f) $bias = 20$ V.	61
6.4	<i>Shear</i> do campo elétrico, dE_{dr} , em função do raio.	62
6.5	Número de rotação, ω , para $\alpha = 0$, na aproximação de <i>shear</i> linear do campo elétrico. Os pontos em destaque indicam o local onde $d\omega/dI$ é nulo.	62
6.6	Espaço de fase do mapa de ondas de deriva com aproximação de <i>shear</i> do campo elétrico linear, para (a) $bias = 0$ V; (b) $bias = 4$ V; (c) $bias = 8$ V; (d) $bias = 10$ V; (e) $bias = 15$ V; (f) $bias = 20$ V.	63
6.7	$bias = 0$ V: (a) Espaço de fase do mapa de ondas de deriva mostrando a curva sem <i>shear</i> (em azul). (b) Perfil do número de rotação do mapa em (a), com condições iniciais sobre $\chi = 0,5$. O ponto em azul indica o máximo do número de rotação, correspondendo à localização da curva sem <i>shear</i>	64
6.8	$bias = 4$ V: (a) Espaço de fase do mapa de ondas de deriva mostrando a curva sem <i>shear</i> (em azul). (b) Perfil do número de rotação do mapa em (a), com condições iniciais sobre $\chi = 0,5$. O ponto em azul indica o máximo do número de rotação, correspondendo à localização da curva sem <i>shear</i>	65

6.9	$bias = 6$ V: (a) Espaço de fase do mapa de ondas de deriva mostrando a curva sem <i>shear</i> (em azul). (b) Perfil do número de rotação do mapa em (a), com condições iniciais sobre $\chi = 0,5$. O ponto em azul indica o máximo do número de rotação, correspondendo à localização da curva sem <i>shear</i> . .	65
6.10	$bias = 8$ V: (a) Espaço de fase do mapa de ondas de deriva com ampliação da região onde se esperaria encontrar a curva sem <i>shear</i> . (b) Perfil do número de rotação do mapa em (a), com condições iniciais sobre $\chi = 0,5$ . .	67
6.11	Mapas com perfil radial do campo elétrico interpolado dos valores experimentais. Os pontos destacados nos perfis do número de rotação, calculados sobre $\chi = 0,5$, indicam as localizações das curvas sem <i>shear</i> , mostradas em azul nos mapas. $bias = 7$ V: (a) Espaço de fase. (b) Número de rotação. $bias = 9$ V: (c) Espaço de fase. (d) Número de rotação.	68
6.12	(a) $bias = 10$ V; (b) $bias = 15$ V; (c) $bias = 20$ V. Em (a), ocorre a quebra da curva sem <i>shear</i> , mas o efeito de barreira de transporte ainda é visível. Em (b) e (c), o efeito da barreira se desvanece.	69
6.13	$bias = 10$ V: Ampliação da região onde antes existia a curva sem <i>shear</i> . A área hachurada destaca a região onde se localizam as condições iniciais para o cálculo do desvio quadrático médio e do tempo de escape das mesmas. .	70
6.14	Escape das trajetórias: órbitas remanescentes em função do tempo. 2×10^4 condições iniciais entre $0,4 \leq \chi \leq 0,6$ e $0,9 \leq I \leq 1$	71
6.15	Desvio quadrático médio, σ^2 , calculado para 20000 condições iniciais distribuídas entre $0,4 \leq \chi \leq 0,6$ e $0,9 \leq I \leq 1$, ou seja, na região superior do espaço de fase.	72

Sumário

1	Introdução	1
2	Transporte de Partículas em Tokamaks	7
2.1	Plasmas	7
2.2	Confinamento magnético	10
2.2.1	Tokamaks	11
2.2.2	Ondas de Deriva	14
3	Texas Helimak	17
3.1	Texas Helimak	18
3.2	Características do Texas Helimak	19
3.3	Campo magnético	23
3.4	Campo elétrico e <i>bias</i>	24
4	Mapas e Transporte	29
4.1	Sistemas Hamiltonianos	30
4.1.1	Seção de Poincaré: órbitas regulares e caóticas	32
4.2	Mapas	35
4.2.1	Mapas simpléticos	35
4.2.2	Número de rotação	36
4.2.3	Mapa padrão <i>twist</i>	38

4.2.4	Mapa padrão não- <i>twist</i>	40
4.2.5	Aprisionamento	44
4.2.6	Transporte	45
5	Transporte de Partículas no Texas Helimak	49
5.1	Modelo de ondas de deriva	49
5.2	Mapa de ondas de deriva	54
6	Resultados	57
6.1	Resultados	57
6.1.1	Campo elétrico uniforme	58
6.1.2	<i>Shear</i> uniforme	59
6.1.3	<i>Shear</i> linear	61
7	Conclusão	75
	Referências Bibliográficas	79

Capítulo 1

Introdução

Ao atingir temperaturas suficientemente elevadas, uma quantidade significativa das partículas que compõem um gás pode ser ionizada. Forma-se, assim, um estado da matéria, chamado *plasma*, em que íons e elétrons constituem um sistema macroscopicamente neutro, mas no qual ocorrem interações de Coulomb e de Lorentz, dando origem ao movimento coletivo das partículas carregadas ([Miyamoto, 2005](#)). O plasma pode existir sob diversos valores de temperatura e densidade, de forma que a física de plasmas abrange uma grande variedade de aplicações, dentre as quais é de particular interesse a obtenção de energia por termofusão nuclear controlada.

Essa aplicação da física de plasmas envolve altas temperaturas para possibilitar a fusão nuclear entre os íons do plasma e visa aproveitar a energia resultante da reação. Para tanto, é preciso sustentar o plasma por tempo suficientemente longo, de forma a se obter um balanço energético positivo. Nesse sentido, desenvolveram-se equipamentos chamados *tokamaks*, que utilizam campos magnéticos toroidais para o confinamento do plasma ([Miyamoto, 2005](#)).

No entanto, os experimentos envolvendo o confinamento magnético de plasmas nos tokamaks têm mostrado limitações não previstas pela teoria neoclássica, como o transporte anômalo de partículas na borda do plasma, com consequente perda de energia do sistema. Esse efeito é atribuído à turbulência associada às ondas de deriva e flutuações

eletrostáticas (Horton, 1999; Hidalgo, 2004), na borda do plasma, permanecendo um assunto de grande interesse científico e fundamental para os avanços do confinamento magnético e sua aplicação à fusão nuclear. Por outro lado, o estudo experimental dos fenômenos de ondas de deriva e turbulência em plasmas apresenta certas dificuldades. Isso se deve tanto à complexidade da geometria toroidal, necessária ao confinamento, quanto às restrições de diagnóstico em função da alta temperatura envolvida (Horton *et al.*, 2006).

Considerando essas questões, foi desenvolvido o Texas Helimak: um equipamento concebido para realizar experimentos em confinamento magnético que reproduzam características selecionadas de um plasma na borda do tokamak. Esse tipo de equipamento possui uma geometria mais simples e é caracterizado por linhas de campo helicoidais. Com isso, ele fornece uma aproximação experimental de um plasma unidimensional com curvatura e cisalhamento magnético, além de facilitar métodos de diagnóstico, devido à temperatura e à densidade do plasma mais baixas (Horton *et al.*, 2006).

O Texas Helimak possui dispositivos chamados “placas de *bias*”, utilizados para impor um potencial elétrico externo ao plasma (potencial de *bias* ou simplesmente *bias*), cuja função é alterar o perfil radial do campo elétrico de equilíbrio. Estudos acerca dos efeitos desse mecanismo têm mostrado alterações das características espectrais do plasma (Toufen *et al.*, 2012, 2013). Em particular, observa-se o surgimento de um largo espectro de frequências para valores positivos do potencial de *bias*. Assim, faz-se viável a abordagem através de um mapa de ondas de deriva, no qual a turbulência eletrostática é descrita por múltiplas ondas, como proposto em (Horton *et al.*, 1998).

O modelo considera a deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ como mecanismo de turbulência, cujo campo elétrico é a soma de um campo de equilíbrio e de um termo perturbativo referente às flutuações eletrostáticas. Com isso, a partir das equações de movimento de uma partícula em um campo eletromagnético, obtém-se um mapa de ondas de deriva dependente do perfil radial do campo elétrico. A abordagem do transporte de partículas no Texas Helimak através de um mapa possibilita investigar a estabilidade das órbitas e as regiões acessíveis

ao movimento, fornecendo uma estimativa acerca da influência do *bias* sobre o transporte.

O mapa de ondas de deriva utilizado neste trabalho consiste em um mapa simplético bidimensional, descrito em termos das variáveis canônicas de ação-ângulo. Ele possui dois parâmetros de controle adimensionais relacionados às grandezas físicas do sistema. Um dos parâmetros é proporcional à amplitude da perturbação, o outro é dependente do perfil radial do campo elétrico, que varia para cada valor do potencial de *bias*.

Para este estudo, foram utilizados os dados experimentais do Texas Helimak obtidos por Toufen (2012); Toufen *et al.* (2012, 2013), concentrando-se na região radial $1,10 < r < 1,25$, para a qual a densidade média e o potencial flutuante médio apresentam gradientes aproximadamente uniformes, o que favorece a análise teórica da turbulência. Cada disparo foi realizado para um valor fixo de *bias*, a saber, 4, 6, 8, 10, 15 e 20 volts, além do valor nulo. Assim, cada valor de *bias* designa uma configuração do campo elétrico, cujo perfil radial foi estimado a partir da velocidade vertical média, medida por meio de um espectrômetro posicionado sob o vaso do Texas Helimak.

Foram feitas três aproximações para a dependência radial do campo elétrico, na região de interesse: uniforme, linear e quadrática. Na primeira, o mapa de ondas de deriva satisfaz a condição *twist*¹, ou seja, o número de rotação² apresenta um perfil monotônico, e o espaço de fase apresenta características desse tipo de sistema. Nas outras duas, o *shear* do campo elétrico, isto é, o cisalhamento das linhas de campo, atribui ao mapa a propriedade não-*twist*, e o número de rotação passa a apresentar um ponto de mínimo. Sistemas não-*twist* são caracterizados pela presença da curva sem *shear*, uma estrutura regular bastante resistente à perturbação e que funciona como uma barreira de transporte em sistemas bidimensionais (del Castillo-Negrete *et al.* , 1996).

Assim, foram estudadas as características do espaço de fase do mapa de ondas de deriva para cada valor de *bias*, comparando os efeitos deste sobre o transporte de partículas. Com isso, pôde-se observar a existência de uma barreira de transporte para os mapas com

---

¹Para definição, vide p. 38

²Para definição, vide p. 36

bias até 10 V. Neste valor, ocorre a quebra da curva sem *shear*, mas nota-se que o efeito da barreira ainda tem grande influência sobre as trajetórias. Para melhor caracterizar esse fenômeno, foram calculados o desvio quadrático médio e o tempo de escape das partículas, para os quais a comparação entre os diversos valores de *bias* mostrou uma forte dependência do transporte em relação à existência da curva sem *shear*.

Em resumo, o objetivo deste trabalho é introduzir um mapa de ondas de deriva para a geometria do Texas Helimak, cujos parâmetros são calculados a partir de dados experimentais, visando, assim, estudar o efeito do potencial de *bias* sobre o transporte de partículas no plasma. Para tanto, foram elaborados códigos em *Python*, uma linguagem de programação de alto nível, interpretada, que possibilita uma abordagem concisa e clara de modelos físicos e matemáticos. O texto desta dissertação está estruturado como descrito a seguir.

O capítulo 2 faz uma revisão dos conceitos fundamentais da física de plasmas, os quais servirão de base e motivação para o presente trabalho. Também são discutidos o conceito de confinamento magnético e algumas propriedades dos tokamaks. Então, é deduzida a equação para o movimento do centro de guia das partículas em um campo eletromagnético, dando enfoque à deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, que será o mecanismo de turbulência no modelo utilizado neste trabalho.

No capítulo 3, apresenta-se o Texas Helimak, para cuja turbulência é aplicado o modelo de mapa de ondas de deriva. São discutidas suas principais características como dispositivo experimental para estudos sobre plasmas de fusão, como sua geometria e configurações dos campos. Ainda, são apresentados resultados obtidos de experimentos recentes, os quais serviram para o cálculo dos parâmetros do mapa.

Já o capítulo 4 traça uma revisão dos conceitos básicos sobre sistemas hamiltonianos e mapas que serão aplicados no desenvolvimento do trabalho. São abordadas as definições de variáveis ação-ângulo, integrabilidade e seção de Poincaré, bem como a distinção entre órbitas periódicas e caóticas segundo sua dinâmica no espaço de fase. Além disso, são

discutidas algumas propriedades e dinâmica de mapas simpléticos, utilizando conceitos como matriz jacobiana, condição *twist* e número de rotação. Em especial, são analisados o mapa padrão *twist* e o mapa padrão não-*twist*, segundo as características do espaço de fase de cada um e as propriedades de transporte.

No capítulo 5, é apresentado o modelo para o estudo do transporte de partículas no Texas Helimak. Utilizando a equação de movimento deduzida no capítulo 2, são introduzidas flutuações eletrostáticas à deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ como mecanismo de turbulência. Assim, obtém-se um mapa de ondas de deriva para o Texas Helimak que possibilita o estudo da influência do potencial de *bias* sobre o transporte de partículas.

Por fim, o capítulo 6 apresenta os resultados do estudo do mapa de ondas de deriva, divididos conforme a aproximação utilizada para o perfil radial do campo elétrico de equilíbrio. São mostradas as principais diferenças entre cada caso e são discutidos os efeitos da curva sem *shear* sobre o transporte das trajetórias em função dos valores de *bias* utilizados.

Finalmente, no capítulo 7, são resumidas as principais conclusões a que o presente estudo permitiu chegar, além de traçar algumas perspectivas para a continuidade deste trabalho.

Capítulo 2

Transporte de Partículas em Tokamaks

Neste capítulo, são tratados os conceitos fundamentais acerca da física de plasmas, os quais servirão de base e motivação para o presente trabalho. Inicialmente, na seção 2.1, são apresentados a definição e os critérios para obtenção do que se chama *plasma*, envolvendo conceitos como *comprimento de Debye* e *frequência de plasma*. Em seguida, a seção 2.2 discute o conceito de confinamento magnético e algumas propriedades dos dispositivos, chamados *tokamaks*, concebidos para tal finalidade. Por fim, é deduzida a equação para o movimento do centro de guia das partículas em um campo eletromagnético. Essa abordagem do movimento das partículas leva ao fenômeno de *ondas de deriva*. Em particular, dá-se enfoque à chamada *deriva elétrica*, com origem no produto $\vec{E} \times \vec{B}$, que será o principal mecanismo de turbulência no modelo utilizado neste trabalho.

2.1 Plasmas

Diz-se que o plasma é o quarto estado da matéria, consistindo de um gás ionizado, ou seja, trata-se de um estado da matéria caracterizado por um número mínimo de partículas ionizadas. Contudo, para que um conjunto de partículas ionizadas possa ser chamado de plasma, ele deve constituir um sistema quase neutro e que apresenta efeitos coletivos. Para melhor expressar essas características, é preciso introduzir os conceitos de *comprimento de*

Debye e frequência de plasma.

O comprimento de Debye para os elétrons é definido como (Bittencourt, 2004)

$$\lambda_{De} \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n e^2}} \quad (2.1.1)$$

onde ϵ_0 , k_B , T_e , n e e são, respectivamente, a permissividade elétrica do vácuo, a constante de Boltzmann, a temperatura dos elétrons, a densidade de partículas e a carga do elétron. Em condições de equilíbrio, os campos das cargas que compõem o plasma se cancelam mutuamente, de forma que uma região macroscópica permanece neutra. Ao mesmo tempo, a energia térmica das partículas tende a perturbar a neutralidade do sistema, enquanto a energia potencial eletrostática que resulta da separação das cargas tende a restaurar a neutralidade.

Nesse sentido, o comprimento de Debye caracteriza as distâncias em que podem ocorrer desvios da neutralidade macroscópica no sistema. As partículas podem se mover livremente para neutralizar regiões com concentração de carga, “blindando” o campo eletrostático em uma região de dimensões da ordem do comprimento de Debye. Esse efeito é chamado *blindagem de Debye* e é uma consequência dos efeitos coletivos do plasma.

Já a frequência de plasma é dada por (Bittencourt, 2004)

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}} \quad (2.1.2)$$

onde m_e é a massa dos elétrons. Quando um plasma em condição de equilíbrio sofre uma pequena perturbação, a separação entre as cargas no seu interior gera um campo elétrico que tende a acelerar os elétrons, pois estes são mais leves que os íons, afim de restaurar a neutralidade. Devido à inércia dos elétrons, surge um movimento oscilatório destes em torno dos íons, sendo a força restauradora mantida pela atração coulombiana entre elétrons e íons. A frequência desse movimento oscilatório é dado pela (2.1.2).

Com base nesses conceitos, um critério para definição de plasma é que a dimensão

característica do sistema, denotada por L , satisfaça a condição

$$L \gg \lambda_{De} \quad (2.1.3)$$

Outro critério é dado por

$$n_e \lambda_{De} \gg 1 \quad (2.1.4)$$

de forma que a quantidade de elétrons dentro de uma esfera de raio λ_{De} , a esfera de Debye, seja muito grande, possibilitando o efeito de blindagem das cargas. Dessa forma, pode-se definir uma grandeza chamada *parâmetro de plasma*,

$$g = \frac{1}{n_e \lambda_{De}} \quad (2.1.5)$$

de forma que a condição $g \ll 1$ é chamada *aproximação de plasma*.

Por fim, outro critério para a existência de um plasma é dado por

$$\omega_{pe} \tau > 1 \quad (2.1.6)$$

onde τ é o tempo médio entre colisões de elétrons com partículas neutras, fenômeno que amortece as oscilações dos elétrons. Assim, o tempo entre colisões deve ser maior que o tempo característico dos parâmetros do plasma.

A velocidade térmica, v_T , de uma partícula de massa m de um gás tridimensional a temperatura T é dada por

$$\frac{1}{2} m v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T \quad (2.1.7)$$

Essa energia pode ser comparada à energia de ionização da substância que compõe o gás, de forma que o grau de ionização desse gás depende da sua temperatura. Logo, é comum utilizar a unidade de elétron volt (eV) para expressar a energia térmica do gás e, conseqüentemente, sua temperatura.

O plasma pode existir sob diversos valores de densidade e temperatura. Por exemplo, a ionosfera terrestre apresenta densidade $n \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$ e $k_B T \approx 0,2 \text{ eV}$, enquanto a coroa solar possui $n \approx 10^{14} \text{ m}^{-3}$ e $k_B T \approx 100 \text{ eV}$ (Miyamoto, 2005). Com isso, há uma grande variedade de aplicações do plasma, desde áreas como a astrofísica até equipamentos industriais. Em particular, uma importante motivação para o estudo da física de plasmas é a obtenção de energia por termofusão nuclear controlada, que envolve o confinamento de plasmas a elevadas temperaturas, da ordem de 10^7 K .

2.2 Confinamento magnético

A interação das partículas ionizadas com campos elétricos e magnéticos é uma característica essencial dos plasmas. Ela dá origem a diversos fenômenos específicos de sistemas envolvendo plasmas e campos eletromagnéticos. Em particular, a interação das partículas com o campo magnético oferece um mecanismo para o confinamento do plasma sem que este entre em contato direto com um meio material. Essa propriedade oferece muitas aplicação da física de plasmas e tem sido estudada de inúmeras formas.

Diferentes abordagens com diversas aproximações podem ser feitas para a descrição teórica dos fenômenos em plasmas. Conforme discutido por Horton (1999), uma possível abordagem sobre a dinâmica de um plasma pode ser feita através das equações da teoria magneto-hidrodinâmica ideal (MHD). Com base nela, podemos usar a equação da lei de Ohm para um fluido que se move com resistividade zero:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0 \quad (2.2.1)$$

onde $\vec{E}$ é um campo elétrico, $\vec{B}$ é um campo magnético e $\vec{v}$ é a velocidade do fluido. Tomando o rotacional da equação acima e usando a lei de indução magnética de Faraday,

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2.2)$$

obtemos

$$\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2.3)$$

Se considerarmos um elemento de área A que se move com o fluido, o fluxo magnético Φ_M através dessa área, dado por $\Phi_M = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$, é constante. Logo,

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.2.4)$$

E, portanto,

$$B_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2.5)$$

Esse resultado mostra que o fluido deve ficar confinado em um movimento ao longo do tubo de fluxo magnético Φ_M .

Embora a teoria MHD seja muito poderosa na descrição de diversos fenômenos, ela não faz distinção entre os movimentos dos elétrons e dos íons, a qual pode levar a fenômenos importantes. Nesse sentido, a abordagem do movimento de uma partícula em um campo eletromagnético leva ao fenômeno das ondas de deriva. Apesar de não ser rigorosamente uma teoria de plasmas, essa descrição fornece informações importantes sobre os processos dinâmicos em um plasma. Ela se mostra útil na obtenção de informações sobre fenômenos macroscópicos devidos ao comportamento coletivo do sistema. Em particular, observa-se uma deriva devida ao produto $\vec{E} \times \vec{B}$, a qual será estudada neste trabalho.

2.2.1 Tokamaks

O plasma necessário para a obtenção de energia por termofusão nuclear controlada apresenta temperaturas bastante elevadas, da ordem de 10^7 K (Miyamoto, 2005). Em função disso, o confinamento magnético tem como objetivo evitar o contato do plasma com as paredes do equipamento e a consequente perda de partículas, de forma que o processo se mantenha por tempo suficiente para haver balanço energético positivo. Nesse

sentido, têm-se desenvolvido máquinas chamadas tokamaks, caracterizadas por superfícies magnéticas toroidais. O termo tokamak tem origem na língua russa, referindo-se a uma câmara toroidal com bobinas magnéticas.

O tokamak consiste essencialmente em uma câmara de vácuo toroidal envolta por espiras, que constituem as chamadas bobinas de campo toroidal, e um solenoide central. A representação esquemática de um tokamak com esses elementos está ilustrada na Figura 2.1. As bobinas geram um campo magnético toroidal intenso, B_φ , enquanto o solenoide central induz uma corrente de plasma toroidal, j , a qual, por sua vez, gera um campo magnético poloidal, B_θ . Assim, formam-se linhas de campo helicoidais que compõem superfícies magnéticas topologicamente toroidais. Em cada uma dessas superfícies, a pressão p do plasma é constante, mas, das equações da MHD ideal, tem-se $\nabla p = \vec{j} \times \vec{B}$, de forma que a pressão aumenta na direção do interior do plasma. Se na superfície mais externa tivermos $p = 0$, pode-se, teoricamente, isolar o plasma das paredes da máquina.

Figura 2.1: Representação esquemática de um tokamak. ¹

Um tokamak pode ser caracterizado pela sua razão de aspecto, isto é, a razão entre o raio menor, a , e o raio maior, R , do toroide. Para $R \gg a$, podemos utilizar uma

¹Fonte: http://www.plasma.inpe.br/LAP_Portal/LAP_Sitio/Texto/Tokamaks.htm. Acessado em novembro de 2015.

aproximação cilíndrica de uma coluna de plasma na direção z , com o ângulo toroidal dado por $\varphi = z/R$ e período $2\pi R$; o raio da coluna de plasma é r , $0 < r < a$, e o ângulo poloidal θ . Considerando uma linha de campo em uma superfície $r = \text{constante}$, a inclinação local dessa linha é dada por

$$\nu = \frac{d\varphi}{d\theta} \quad (2.2.6)$$

Assim, a inclinação média será

$$q(r) = \frac{1}{2\pi} \int \nu d\theta \quad (2.2.7)$$

Para o campo magnético dado por $\vec{B} = B_\varphi(r)\hat{e}_\varphi + B_\theta(r)\hat{e}_\theta$, a expressão para as linhas de força, $\vec{B} \times d\vec{l} = 0$, fornece

$$\frac{R d\varphi}{B_\varphi} = \frac{r d\theta}{B_\theta} \quad (2.2.8)$$

Substituindo em (2.2.7), obtém-se

$$q(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r B_\varphi}{R B_\theta} d\theta = \frac{r B_\varphi}{R B_\theta} \quad (2.2.9)$$

Essa grandeza é denominada fator de segurança. O perfil do fator de segurança é um parâmetro importante para o confinamento em tokamaks. Estudos mostram a influência deste parâmetro sobre a configuração das linhas de campo magnético, bem como a formação de barreiras ao transporte de partículas em função da variação do perfil do fator de segurança (Horton *et al.* , 1998; Constantinescu & Firpo, 2012; Rosalem *et al.* , 2014).

Após uma revolução na direção toroidal, a linha de campo forma um ângulo poloidal ι com sua posição inicial, ou seja,

$$\iota = \int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\nu} = \frac{2\pi}{q} \quad (2.2.10)$$

Quando as linhas de campo se fecham após m revoluções na direção poloidal ($\theta = 2\pi m$) e n revoluções na direção toroidal ($\varphi = 2\pi n$), tem-se $q = n/m$, caracterizando o que se chamam superfícies racionais.

2.2.2 Ondas de Deriva

Consideremos, agora, o movimento de uma partícula com carga q_j e massa m_j , onde o índice j designa a espécie da partícula, em um campo eletromagnético uniforme. A equação de movimento é dada por

$$m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} = q_j(\vec{E} + \vec{v}_j \times \vec{B}) \quad (2.2.11)$$

É possível separar o movimento em termos das componentes paralela e perpendicular:

$$m \frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = q\vec{E}_{\parallel} \quad (2.2.12a)$$

$$m \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = q(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}) \quad (2.2.12b)$$

onde omitimos o índice j para facilitar a notação.

A equação (2.2.12a) resulta em uma aceleração constante do centro de guia na direção de $\vec{B}$,

$$\vec{v}_{\parallel}(t) = \left(\frac{q\vec{E}_{\parallel}}{m} \right) t + \vec{v}_{\parallel}(0) \equiv v_{\parallel}(t) \frac{\vec{B}}{B} \quad (2.2.13)$$

Na equação (2.2.12b), podemos escrever a componente perpendicular do campo elétrico como

$$\vec{E}_{\perp} = \frac{\vec{B}}{B} \times \left(\vec{E}_{\perp} \times \frac{\vec{B}}{B} \right) = - \left(\frac{\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}}{B^2} \right) \times \vec{B} \quad (2.2.14)$$

Ainda, se mudarmos o referencial para um sistema de coordenadas que se move com a velocidade uniforme

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.2.15)$$

ou seja, $\vec{v}'_{\perp}(t) = \vec{v}_{\perp}(t) - \vec{v}_E$, obtemos

$$m \frac{d\vec{v}'_{\perp}}{dt} = q \left(\vec{v}'_{\perp} + \vec{v}_E - \frac{\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}}{B^2} \right) \times \vec{B} = q \left(\vec{v}'_{\perp} \times \vec{B} \right) \quad (2.2.16)$$

O que indica que, nesse sistema de coordenadas, a partícula descreve apenas o movimento ciclotrônico,

$$\vec{v}'_{\perp} = \vec{\Omega}_c \times \vec{r}_c \quad (2.2.17)$$

onde $\Omega_c = q_j B / m_j$ é a frequência ciclotrônica e r_c é o raio de Larmor.

Portanto, a partícula descreve um movimento circular no plano perpendicular a $\vec{B}$ superposto a uma velocidade constante $\vec{v}_E = \vec{E} \times \vec{B} / B^2$, com uma aceleração uniforme ao longo de $\vec{B}$. A solução geral fica

$$\vec{v}(t) = v_{\parallel}(t) \frac{\vec{B}}{B} + \vec{\Omega}_c \times \vec{r}_c + \frac{\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.2.18)$$

Dessa descrição microscópica do movimento, podemos isolar as componentes que contribuem para os efeitos macroscópicos, ou seja, que descrevem os efeitos coletivos do plasma. Assim, a trajetória das partículas é descrita pelo movimento do centro guia através da equação

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = v_{\parallel}(t) \frac{\vec{B}}{B} + \frac{\vec{E}_{\perp} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.2.19)$$

Gradientes de densidade no plasma geram instabilidades que podem ser responsáveis por um transporte anômalo de partículas em dispositivos de confinamento magnético. A turbulência gerada por tais instabilidades é consequência de ondas de deriva, que incluem contribuições significativas da velocidade de deriva elétrica, mostrada na Equação (2.2.15). Com isso, a Equação (2.2.19) será empregada no modelo apresentado no capítulo 5, para que se possa estudar o fenômeno de ondas de deriva.

Considerações gerais

O plasma é caracterizado por partículas ionizadas que compõem um sistema quase neutro e que apresenta efeitos coletivos. Para compreender essas características, são utilizados conceitos fundamentais como o comprimento de Debye e a frequência de plasma.

Nessas condições, plasmas podem se manifestar sob diversos valores de temperatura e pressão, abrangendo diversas áreas de estudo e possibilitando muitas aplicações práticas.

A interação das partículas ionizadas constituintes do plasma com um campo magnético possibilita um mecanismo de confinamento em que não há contato físico entre o plasma e o equipamento. Essa propriedade é explorada em dispositivos chamados tokamaks, cuja função inicial é o confinamento de plasmas a elevadas temperaturas, com aplicação na obtenção de energia por termofusão nuclear controlada.

Os tokamaks são caracterizados por um campo magnético formado por componentes toroidal e poloidal. O estudo do movimento das partículas em um campo eletromagnético mostra a origem de uma velocidade de deriva, v_E , devida ao produto $\vec{E} \times \vec{B}$. Para campos não uniformes, outras derivas são geradas. No entanto, neste trabalho, consideramos a deriva v_E , de forma consistente com a aproximação cilíndrica para o equilíbrio considerado. Flutuações do gradiente de densidade do plasma levam a instabilidades e turbulência que, neste trabalho, são abordadas em um modelo para ondas de deriva com contribuições do termo v_E .

Capítulo 3

Texas Helimak

Neste capítulo, é apresentado um tipo de dispositivo de confinamento magnético de plasmas, o *helimak*. Para tanto, são discutidas as características gerais do equipamento. Dentre as máquinas do tipo helimak, o Texas Helimak, localizado no *Institute for Fusion Studies*, na Universidade do Texas, Austin, será o foco do presente estudo.

Na seção 3.2, são apresentadas as características do Texas Helimak. Em particular, são discutidas as chamadas placas de *bias*, cuja principal função é alterar o perfil do campo elétrico radial através de um potencial elétrico externo ao plasma. Esse mecanismo é um dos diferenciais do Texas Helimak e possibilita diversos estudos acerca da influência do perfil do campo elétrico em várias propriedades do plasma.

Em seguida, a seção 3.3 detalha a configuração do campo magnético neste equipamento. Por fim, na seção 3.4, são apresentados dados experimentais acerca da influência do potencial de *bias* sobre o perfil do campo elétrico. Esses dados serão utilizados em um modelo de ondas de deriva nos capítulos seguintes, afim de estimar a influência do *shear* do campo elétrico no transporte de partículas no Texas Helimak.

3.1 Texas Helimak

O helimak é um tipo de máquina de confinamento magnético de plasmas que possui geometria e configuração dos campos diferentes das dos tokamaks. O campo magnético do helimak é formado por um componente toroidal (B_φ) e um componente vertical (B_z), em geral, menos intenso, resultando, assim, em linhas de campo helicoidais. Essa configuração possibilita a existência de equilíbrio magneto-hidrodinâmico (MHD) e, embora as linhas de campo sejam abertas, pode-se desprezar os efeitos de borda, de maneira que o equilíbrio passa a depender apenas da coordenada radial. Dessa forma, o helimak fornece uma aproximação experimental de um plasma unidimensional com curvatura e cisalhamento magnético, características importantes para o estudo de instabilidades em plasmas. Esse aspecto do helimak facilita o estudo teórico do confinamento de plasma no equipamento, pois simplifica a modelagem e as simulações computacionais.

O helimak possibilita a realização de experimentos para o estudo de ondas de deriva e turbulência, pois trabalha com plasmas de baixas densidade e temperatura, que se assemelham a regiões da borda e *scrape-off layer* (SOL) do tokamak. Além disso, essas características também facilitam a implementação de sondas em diversas regiões do plasma, o que faz do helimak um equipamento muito útil para o estudo de instabilidade e métodos de diagnóstico em plasmas. Dentre as máquinas do tipo helimak, destacam-se o BLAAMANN (Rypdal *et al.*, 1994), o TORPEX (Fasoli *et al.*, 2006) e o Texas Helimak (Gentle & Huang, 2008). Este último, localizado no *Institute for Fusion Studies*, na Universidade do Texas, Austin, será o foco do presente estudo e suas principais características serão apresentadas a seguir. Os dados utilizados nesta dissertação foram publicados em (Toufen *et al.*, 2012, 2013), boa parte destes tendo sido obtida pelo Prof. D. Toufen, em estágios no Texas Helimak nos anos de 2012 e 2013.

3.2 Características do Texas Helimak

Assim como o tokamak, o Texas Helimak possui simetria toroidal, consistindo de uma câmara de aço inoxidável com seção reta retangular de $H = 2$ m de altura, raio interno $R_{int} = 0,6$ m e raio externo $R_{ext} = 1,6$ m. O campo magnético é formado por um componente toroidal e um componente vertical, resultando, assim, em linhas de campo helicoidais. Essa geometria do campo magnético sugere o uso de coordenadas cilíndricas, como ilustrado na Figura 3.1. Assim, designamos por B_φ o componente toroidal do campo e B_z o componente vertical. O campo magnético toroidal é gerado por um conjunto de dezesseis bobinas com 28 voltas cada, enquanto o campo magnético vertical é produzido por um conjunto de três bobinas, das quais a superior e a inferior possuem 126 voltas e a central possui 75 voltas. A razão B_z/B_φ pode ser ajustada através de resistências adicionadas em série às bobinas de campo vertical. Dessa forma, o campo magnético vertical pode atingir até 10% do valor do campo magnético toroidal.

Figura 3.1: Desenho esquemático do Texas Helimak.

O Texas Helimak fornece uma boa aproximação de um plasma unidimensional, uma vez que suas principais características variam apenas com a coordenada radial. A

Figura 3.2 mostra valores experimentais da corrente de saturação iônica média, que é aproximadamente proporcional à densidade do plasma, em função das coordenadas radial e vertical (Toufen, 2012). Observam-se pequenas variações na direção vertical, mas uma forte dependência da posição radial. Medidas dos perfis radiais da densidade média e do potencial flutuante médio apresentam gradientes aproximadamente constantes dessas grandezas na região $1,10 < R < 1,25$ (Toufen *et al.*, 2012), tornando-a uma região de particular interesse para esse trabalho.

Figura 3.2: Corrente de saturação iônica média em função das coordenadas radial (R) e vertical (z). A figura mostra apenas a faixa radial de maior interesse, $1,10 < R < 1,25$. Fonte: Toufen (2012)

No seu interior, o equipamento dispõe de dezesseis placas condutoras, chamadas “placas de *bias*”, divididas em quatro conjuntos, dois no topo e dois no fundo do vaso, separados de 180° , como ilustra a Figura 3.1. As linhas do campo magnético começam e terminam nessas placas e a direção normal a elas está na direção da coordenada φ , que é aproximadamente a direção do campo magnético. As placas de *bias* são utilizadas para impor um potencial elétrico externo ao plasma, ao qual vamos nos referir apenas como *bias*. Para isso, um determinado conjunto de placas é ligado a uma fonte de tensão externa,

enquanto as demais, bem como o vaso, são mantidas aterradas. Assim, os valores de *bias* podem ser tanto negativos quanto positivos e têm a função de alterar o perfil do campo elétrico radial.

A possibilidade de alterar o perfil do campo elétrico radial através da aplicação de um potencial externo é um aspecto importante do Texas Helimak. Estudos acerca dos efeitos desse mecanismo têm mostrado alterações das características espectrais do plasma (Toufen *et al.*, 2012). Em particular, observa-se o surgimento de um largo espectro de frequências para os valores positivos do potencial de *bias*, além da diminuição do transporte em determinada região radial do plasma. Neste trabalho, pretende-se investigar os efeitos da imposição de valores de *bias* positivos sobre o transporte de partículas no Texas Helimak.

As placas de *bias* também servem de suporte para a implantação de sondas de Langmuir, que constituem o principal sistema de diagnóstico no Texas Helimak. São cerca de 700 sondas montadas sobre os quatro conjuntos de placas e distribuídas ao longo da direção radial, cobrindo uma faixa de mais de 10 cm de altura. Além das sondas de Langmuir, o Texas Helimak possui um espectrômetro utilizado para medir a velocidade vertical média de fluxo de plasma (V_z), através do deslocamento Doppler das linhas de emissão do íon. Como o fluxo de plasma no Texas Helimak é essencialmente na direção vertical, posiciona-se o espectrômetro abaixo do vaso, diretamente na direção do fluxo. Com isso, variando a posição radial do espectrômetro, obtém-se o perfil radial da velocidade vertical média, $V_z(r)$. A Figura 3.3 mostra a variação de $V_z(r)$ para alguns valores positivos de *bias*.

Por fim, o Texas Helimak pode operar com os gases nobres hélio, neônio, xenônio e argônio. A Tabela 3.1 apresenta os valores de alguns parâmetros relevantes para o equipamento operando com o gás argônio, para o qual os resultados experimentais utilizados neste trabalho foram obtidos (Toufen, 2012).

Figura 3.3: Perfil radial da velocidade vertical média, $V_z(r)$.

Tabela 3.1: Valores de alguns parâmetro do Texas Helimak.

densidade média (m^{-3})	$n = 2,0 \times 10^{16}$
temperatura eletrônica média (eV)	$T_e = 12,0$
campo elétrico radial médio (V/m)	$E_0 = 5,0$
frequência giroscópica do elétron (Hz)	$f_{ce} = 2,0 \times 10^9$
frequência giroscópica do íon (Hz)	$f_{ci} = 2,7 \times 10^4$
frequência de plasma do elétron (Hz)	$f_{pe} = 1,3 \times 10^9$
frequência de plasma do íon (Hz)	$f_{pi} = 4,7 \times 10^6$
comprimento de Debye (m)	$\lambda_D = 1,8 \times 10^{-4}$
raio de giro dos elétrons (m)	$\rho_e = 1,7 \times 10^{-4}$
raio de giro dos íons (m)	$\rho_i = 2,3 \times 10^{-3}$
velocidade térmica dos elétrons (m/s)	$v_{Te} = 2,1 \times 10^6$
velocidade térmica dos íons (m/s)	$v_{Ti} = 3,9 \times 10^2$

3.3 Campo magnético

Sabe-se que a geometria das linhas de campo dá origem às velocidades de deriva devidas ao seu gradiente (v_G) e à sua curvatura (v_C). A soma dessas velocidades (v_{GC}) pode ser expressa como (Bittencourt, 2004)

$$\vec{v}_{GC} = v_G + v_C = -\frac{\frac{1}{2}mv_{\perp}^2}{qB^3}(\nabla B) \times \vec{B} - \frac{mv_{\parallel}^2}{qB^4}[(\vec{B} \cdot \nabla)\vec{B}] \times \vec{B} \quad (3.3.1)$$

onde m , q , $v_{\perp}$ e $v_{\parallel}$ são a massa, a carga e as velocidades da partícula perpendicular e paralela ao campo magnético, respectivamente. Devido à componente toroidal do campo, a velocidade $\vec{v}_{GC}$ será orientada na direção vertical com sentido dependente da carga q da partícula, o que leva à separação das cargas positivas e negativas. Surge, em função disso, um campo elétrico $\vec{E}$ na direção vertical e, conseqüentemente, uma velocidade de deriva elétrica, dada por

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (3.3.2)$$

Essa velocidade possui uma componente na direção radial que empurra o plasma contra a parede da máquina, prejudicando seu confinamento. Em vista disso, faz-se necessária uma componente vertical no campo magnético, de maneira que ambas as cargas possam se deslocar nessa direção e, assim, o fluxo de cargas nos dois sentidos anule o campo elétrico vertical. Dessa forma, a componente vertical do campo magnético torna possível a existência de equilíbrio MHD no Texas Helimak.

Por fim, o campo magnético do Texas Helimak pode ser expresso como

$$\vec{B} = B_{\varphi}(r)\hat{e}_{\varphi} + B_z(r)\hat{e}_z \quad (3.3.3)$$

onde B_{φ} é a componente toroidal e B_z é a componente vertical, enquanto o fator de

segurança é dado por (Luckhardt, 1999)

$$q(r) = \frac{HB_\varphi}{2\pi r B_z} \quad (3.3.4)$$

onde H é definido como a altura total do vaso. O módulo de B_φ é aproximadamente de 0,1 T e pode ser obtido a partir da lei de Ampère, $2\pi r B_\varphi = \mu_0 I$, onde I é a corrente nas bobinas de campo toroidal, da ordem de 10 kA, enquanto o módulo de B_z é aproximadamente $0,1B_\varphi$. A corrente de plasma é da ordem de 100 A e, portanto, pode ser desprezada, de forma que o campo magnético de vácuo é dominante (Horton *et al.*, 2006).

3.4 Campo elétrico e *bias*

Como mencionado anteriormente, as placas de *bias* são utilizadas para impor um potencial elétrico externo ao plasma. Essa constitui uma importante característica do Texas Helimak, pois permite alterar o perfil radial do campo elétrico e, assim, estudar seus efeitos sobre a turbulência e o transporte de partículas no plasma. Através de uma fonte de tensão externa, o *bias* pode ser aplicado a um determinado conjunto de placas, assumindo valores positivos ou negativos, que podem ou não variar ao longo de cada disparo. Nos dados utilizados para esse trabalho, cada disparo foi feito com um valor de *bias* constante ao longo do tempo e aplicado às placas na posição radial $r = 0,863$ m (Toufen, 2012). Com isso, cada valor de *bias* caracteriza um perfil radial do campo elétrico.

O efeito do *bias* sobre a corrente de saturação iônica (Figura 3.2) é pequeno. Consequentemente, os perfis radiais de densidade do plasma, obtidos da corrente de saturação, também sofrem pouca alteração. Por outro lado, o potencial do plasma é intensamente afetado pelo *bias*, principalmente na região radial onde estão localizadas as placas em uso.

A alteração do perfil radial do campo elétrico tem efeitos sobre as características espectrais do plasma. Nesse sentido, valores negativos do *bias* induzem uma frequência dominante, enquanto valores positivos apresentam um largo espectro de frequências. A

Figura 3.4 mostra os espectros de potência para $bias = 0V$ e alguns valores positivos de $bias$ (Toufen, 2012). Em comparação com o espectro para $bias$ nulo, os gráficos para $bias$ positivos apresentam um espectro mais largo, concentrando-se em posições radiais mais internas.

Figura 3.4: Espectros de potência (escala de cores) em função do raio, a uma altura $z = 1,747$ m, para alguns valores de $bias$ positivos. Fonte: Toufen (2012)

Ainda para valores positivos do $bias$, observa-se uma diminuição significativa do transporte em uma região do plasma, o que sugere a existência de uma barreira de transporte (Toufen *et al.*, 2012). Assim, pretende-se, neste trabalho, utilizar os perfis radiais do campo elétrico obtidos pela imposição de $bias$ positivos, afim de investigar os efeitos desse mecanismo sobre o transporte.

Para estimar o perfil radial do campo elétrico associado a um valor de $bias$, foram utilizados os perfis radiais da velocidade vertical média, mostrados na Figura 3.3. Nesse sentido, assumimos que essas velocidades são causadas pela deriva $\vec{v}_E = \vec{E} \times \vec{B}/B^2$. O

campo magnético pode ser obtido pela lei de Ampère, como descrito acima, de maneira que obtemos os perfis radiais do campo elétrico mostrados na Figura 3.5. Esses dados serão empregados no modelo apresentado no capítulo 5, afim de estimar a influência do *bias* no transporte de partículas.

Figura 3.5: Perfil radial do campo elétrico para alguns valores de *bias*.

Considerações gerais

O Texas Helimak é uma máquina de confinamento magnético caracterizada por linhas de campo helicoidais. Assim, o campo magnético é formado por uma componente toroidal e uma componente vertical de menor intensidade. Ele fornece uma aproximação experimental de um plasma unidimensional com curvatura e cisalhamento magnético, características importantes para o estudo de instabilidades em plasmas.

O equipamento dispõe de dezesseis placas condutoras, chamadas placas de *bias*, que são utilizadas para aplicar um potencial elétrico externo ao plasma e, com isso, alterar o perfil do campo elétrico radial. Esse potencial elétrico externo imposto pelas placas é chamado de potencial de *bias* ou simplesmente *bias*. Este é um aspecto importante do Texas Helimak, pois possibilita estudos acerca da influência do perfil do campo elétrico

sobre características espectrais e de transporte no plasma.

Em particular, observa-se o surgimento de um largo espectro de frequências para os valores positivos do *bias*, além da diminuição do transporte em determinada região radial do plasma. Em função disso, o presente trabalho pretende investigar os efeitos da imposição de valores positivos de *bias* sobre o transporte de partículas no Texas Helimak.

Capítulo 4

Mapas e Transporte

Neste capítulo, são revisados os conceitos básicos sobre sistemas hamiltonianos e mapas que serão aplicados no desenvolvimento do trabalho. A seção 4.1 trata de sistemas hamiltonianos e equações de Hamilton. Nela, são introduzidas as variáveis ação-ângulo, bem como o conceito de integrabilidade e sua relação com as constantes do movimento e com a introdução de termos perturbativos a um sistema integrável. Também é apresentado o conceito de seção de Poincaré, que facilita a visualização do espaço de fase e possibilita a interpretação e distinção entre órbitas periódicas e caóticas conforme sua dinâmica no espaço de fase.

Na seção 4.2, são discutidas algumas propriedades e dinâmica de mapas simpléticos, utilizando conceitos como matriz jacobiana, condição *twist* e número de rotação. Em especial, são analisados o mapa padrão *twist* e o mapa padrão não-*twist*, segundo as características do espaço de fase de cada um, como o fenômeno de aprisionamento (*stickiness*) e as propriedades de transporte. Esses conceitos serão estendidos ao modelo utilizado no capítulo seguinte.

4.1 Sistemas Hamiltonianos

Um sistema dinâmico consiste de regras que descrevem a evolução temporal da posição de um ponto no espaço de fase, definindo, assim, os possíveis estados de um sistema. Essas regras podem ser um conjunto de equações diferenciais, que tratam o tempo como uma variável contínua, ou um conjunto de relações recursivas, chamado *mapa*, em que o tempo é uma variável discreta (Meiss, 1992). Assim, mapas são transformações M que descrevem a evolução temporal (órbita) de um ponto $\mathbf{x}$ no espaço de fase S através de sucessivas iterações, $\{M : S \rightarrow S \mid \mathbf{x}_{n+1} = M(\mathbf{x}_n), \mathbf{x} \in S\}$.

Chama-se sistema hamiltoniano aquele cuja dinâmica é descrita pela função hamiltoniana $H(p_i, q_i, t)$, onde (p_i, q_i) são N pares de variáveis canônicas de momento e posição, respectivamente. Nesse caso, as equações de movimento são dadas pelas equações de Hamilton,

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (4.1.1)$$

compondo um sistema de $2N$ equações diferenciais de primeira ordem. Uma das vantagens do formalismo hamiltoniano é que as equações de Hamilton podem ser escritas em termos de qualquer conjunto de variáveis generalizadas.

Com o intuito de facilitar a resolução, é possível mudar o sistema de coordenadas enquanto se mantém a forma das equações de Hamilton através de transformações canônicas, $(p_i, q_i) \rightarrow (P_i, Q_i)$. Há, em particular, a transformação para as variáveis canônicas de ação-ângulo, (I, χ) , que costuma simplificar a forma das equações de movimento. Ela é definida de maneira que a nova hamiltoniana, K , dependa apenas da variável ação, $K = K(I)$. Com isso, das equações de Hamilton, segue que

$$\dot{I} = -\frac{\partial K}{\partial \chi} = 0, \quad \dot{\chi} = \frac{\partial K}{\partial I} = \omega = \text{constante}, \quad (4.1.2)$$

cujas soluções são $I = I_0$ e $\chi = \chi_0 + \omega t$.

Se considerarmos o caso de um grau de liberdade em termos das coordenadas (p, q) e

hamiltoniana $H(p,q)$, define-se a variável ação como (Reichl, 2004)

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \quad (4.1.3)$$

enquanto a variável ângulo é dada por

$$\chi - \chi_0 = \frac{\partial}{\partial I} \int_{q_0}^q p dq \quad (4.1.4)$$

Nota-se que a ação é proporcional à área no espaço de fase definida pelo caminho da integral em (4.1.3). Dessa forma, obtém-se uma transformação canônica entre as variáveis (p,q) e (I,χ) , e o sistema torna-se integrável.

Um sistema com N graus de liberdade é dito *integrável* se existirem N funções independentes G_i tais que

$$G_i(p_1, \dots, p_N, q_1, \dots, q_N) = C_i \quad (4.1.5)$$

onde $i = 1, \dots, N$ e C_i são chamadas *constantes do movimento*. Cada constante do movimento reduz em um grau a dimensão do espaço de fase. Com isso, um sistema com número de graus de liberdade igual à quantidade de constantes do movimento implica a existência de variáveis de ação-ângulo, de forma que o sistema é integrável.

Consideremos, agora, uma hamiltoniana na forma

$$H(I,\chi) = H_0(I) + \epsilon H_1(I,\chi) \quad (4.1.6)$$

onde as variáveis ação-ângulo, (I,χ) , são determinadas para a hamiltoniana integrável H_0 . A função H_1 consiste de um termo perturbativo modulado pela constante ϵ . Quando $\epsilon = 0$, o sistema é integrável e as soluções são aquelas mencionadas acima. Por outro lado, para $\epsilon \neq 0$, a perturbação introduzida ao sistema pode destruir as constantes de movimento tornando-o não integrável (Vieira Abud, 2013).

Nesse sentido, um sistema de equações diferenciais que pode ser integrado analiticamente em determinados intervalos de tempo é denominado quase-integrável, e este, por vezes, pode ser transformado em um mapa (Ullmann, 1998). É o caso, por exemplo, de sistemas submetidos a perturbações impulsivas, ou seja, perturbações externas periódicas cuja intensidade é não nula em espaços de tempo muito inferiores à escala de tempo do sistema como um todo. Em geral, essas perturbações podem ser representadas por uma somatória de funções delta de Dirac:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \delta(t - n\tau) \quad (4.1.7)$$

onde A_n é a intensidade da perturbação e τ é o período entre elas. Nesse caso, o sistema pode ser integrado no intervalo de tempo entre dois impulsos, fornecendo, assim, um mapa estroboscópico.

Muitos fenômenos físicos podem ser modelados como um sistema dinâmico através de mapas. Isso pode ser feito ao se analisar as interseções de uma trajetória com uma determinada superfície, ou utilizando uma aproximação do movimento através de pontos estroboscópicos de uma trajetória com intervalos de tempo fixos (Lichtenberg & Lieberman, 1992). A abordagem de um sistema dinâmico através de mapas possibilita o estudo das trajetórias no seu espaço de fase durante um intervalo de tempo longo com pouca propagação de erro numérico. Assim, é possível investigar a estabilidade das órbitas e as regiões acessíveis ao movimento, o que pode ser útil, por exemplo, em problemas de transporte (Horton *et al.*, 1998; Meiss, 1992).

4.1.1 Seção de Poincaré: órbitas regulares e caóticas

Para um sistema com dois graus de liberdade, uma maneira prática de investigar se este é integrável ou não consiste em analisar numericamente as trajetórias obtidas em uma seção de Poincaré. Tal método reduz a dimensão do espaço de fase, de forma que é

possível visualizar a evolução do sistema.

Por exemplo, em um sistema conservativo com dimensão $N = 2$, a energia é uma constante do movimento, ou seja, $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = E$. Se houver uma segunda constante do movimento, C , podemos escrever uma das coordenadas como função das demais e das constantes E e C , por exemplo, $p_1 = p_1(q_1, q_2, E, C)$, de forma que as trajetórias ficam restritas a duas dimensões, em um espaço de fase com quatro dimensões. Neste caso, se considerarmos a superfície $q_2 = 0$, a trajetória se reduz a uma curva unidimensional.

No entanto, sem conhecer a existência da constante C , podemos integrar numericamente as equações de movimento, Equações (4.1.1), para $i = 1, 2$, e plotar p_2 e q_2 sempre que, por exemplo, $q_1 = 0$ e $p_1 \geq 0$. Com isso, obtém-se a chamada seção de Poincaré, como podemos observar na Figura 4.1a. Se o sistema for integrável, ela apresentará uma série de pontos distribuídos sobre uma curva, caracterizando uma dinâmica periódica ou quase-periódica, como ilustra a Figura 4.1b. Por outro lado, se o sistema não for integrável, ou seja, se existir apenas a constante de integração E , os pontos da trajetória não formam uma estrutura regular, mas preenchem uma área limitada, devido à conservação de energia, como mostra a Figura 4.1c. Em ambas as figuras, cada cor corresponde a uma condição inicial, a qual define os valores das constante E e C .

Da mesma forma, mapas bidimensionais apresentam órbitas regulares como pontos distribuídos ao longo de uma curva e órbitas caóticas como pontos espalhados pelo espaço de fase. Cada condição inicial define uma trajetória e é possível que, após um número finito de iterações, uma órbita retorne ao seu ponto inicial, o que caracteriza uma órbita regular periódica. Assim, aquela trajetória aparece como uma série de pontos ao longo de uma linha em quantidade igual ao seu período, como parece mostrar os pontos em preto na Figura 4.1b.

Também é possível que uma órbita passe arbitrariamente próximo de suas condições iniciais, sem retornar exatamente aquele ponto, caracterizando uma órbita regular quase-periódica. Com isso, os pontos da órbita ficam muito próximos uns dos outros, de forma

Figura 4.1: (a) Ilustração de uma trajetória sendo marcada na seção de Poincaré. (b) Trajetórias regulares sobre curvas unidimensionais no espaço de fase, caracterizando um sistema integrável. Cada cor corresponde a uma condição inicial. (c) Trajetórias caóticas espalhadas pelo espaço de fase, caracterizando um sistema não integrável.

que, após um grande número de iterações, tal conjunto de pontos forma uma “curva contínua” no espaço de fase. Observando os pontos em vermelho na Figura 4.1b, é possível notar conjuntos de pontos próximos entre si, de modo que eles devem formar uma “curva fechada” após um número suficientemente grande de iterações. Essa região do espaço de fase, delimitada por uma curva fechada, costuma ser chamada de *ilha*.

Por outro lado, órbitas caóticas não formam uma estrutura através da qual se possa

inferir um padrão para a evolução das trajetórias. Elas parecem se espalhar pelo espaço de fase aleatoriamente. Além disso, as órbitas caóticas apresentam sensibilidade às condições iniciais, ou seja, condições iniciais muito próximas podem apresentar comportamentos bastante distintos, cujas trajetórias divergem exponencialmente ao longo das iterações. Por exemplo, na Figura 4.1c, nota-se que há pontos de órbitas diferentes relativamente próximos entre si, mas que percorrem trajetórias completamente diferentes. Em vista disso, é possível determinar se uma órbita é regular ou caótica através do *expoente de Lyapunov*, que fornece uma medida da sensibilidade às condições iniciais de um sistema.

4.2 Mapas

4.2.1 Mapas simpléticos

Mapas simpléticos podem ser usados para descrever sistemas hamiltonianos conservativos, como uma representação analítica de uma seção de Poincaré. Eles também podem descrever a dinâmica de um sistema em intervalos discretos de tempo. Em todo caso, esses mapas são caracterizados por preservar a área no espaço de fase, devido à conservação de energia, o que pode ser expresso através da *matriz jacobiana* da transformação.

Seja um mapa T que descreve a dinâmica de variáveis canônicas x e y ,

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (4.2.1)$$

Nesse caso, a matriz jacobiana da transformação é dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} \quad (4.2.2)$$

Para que o mapa seja simplético, é preciso que o determinante da matriz jacobiana seja

unitário, ou seja, $\det(J) = 1$.

4.2.2 Número de rotação

Consideremos um sistema hamiltoniano descrito por um mapa em termos das variáveis ação e ângulo, (I, χ) , na forma

$$I_{n+1} = I_n + \epsilon f(I_n, \chi_n) \quad (4.2.3a)$$

$$\chi_{n+1} = \chi_n + 2\pi\omega(I_n) + \epsilon g(I_n, \chi_n) \quad (4.2.3b)$$

Na expressão (4.2.3), f e g representam perturbações introduzidas ao sistema, moduladas pela constante ϵ e escolhidas de forma que o mapa continue sendo simplético. Para isso, é preciso que o determinante do Jacobiano da transformação seja unitário,

$$|J| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \chi_n} \\ \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial \chi_n} \end{pmatrix} = 1 \quad (4.2.4)$$

Quando $\epsilon = 0$, I permanece constante e a função $\omega(I_n)$ é chamada *número de rotação*. Com $\epsilon \neq 0$, para cada condição inicial $x_0 = (I_0, \chi_0)$, define-se o número de rotação como

$$\begin{aligned} \omega(x_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{\chi}_i - \hat{\chi}_{i-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\hat{\chi}_n - \hat{\chi}_{n-1}) + (\hat{\chi}_{n-1} - \hat{\chi}_{n-2}) + \cdots + (\hat{\chi}_1 - \hat{\chi}_0)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{\chi}_n - \hat{\chi}_0}{n} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

onde $\hat{\chi}_n$ refere-se à coordenada angular sem o operador módulo, ou seja, $\text{mod}(\hat{\chi}_n, 2\pi) = \chi_n$, e n designa a n -ésima iteração.

Nota-se que o número de rotação corresponde à média das variações angulares de cada iteração a partir de uma dada condição inicial. Nesse sentido, ele pode ser usado para

estudar o comportamento da órbita associada a cada condição inicial no espaço de fase. Se uma condição inicial corresponde a uma órbita caótica, o limite na Equação (4.2.5) não existe, ou seja, $\omega(x_0)$ não converge, de forma que o limite só está definido para órbitas regulares.

Quando o número de rotação corresponde a uma fração racional, ou seja, quando $\omega = r/s$, com r e s primos entre si, tem-se uma órbita regular periódica com período s . Assim, a órbita é representada por s pontos distintos no espaço de fase, chamados *pontos fixos*, e cada um deles corresponde à mesma trajetória sob o mapa T . Com isso, designando por $(I_n^{(0)}, \chi_n^{(0)})$ um ponto qualquer dessa trajetória, tem-se que $\chi_{n+s} = \chi_n^{(0)} + 2\pi r$, ou seja, após r voltas, o ponto se repete. Por outro lado, quando ω corresponde a um número irracional, não há números r e s para satisfazer a condição acima, de forma que os pontos nunca se repetem. Tem-se, então, uma órbita regular quase-periódica, e, após várias iterações, os pontos preenchem uma curva no espaço de fase. Por esse motivo, órbitas periódicas também são chamadas de órbitas racionais, enquanto órbitas quase-periódicas são chamadas de irracionais.

Quando uma órbita irracional abrange todo o intervalo da coordenada χ , formando uma curva que atravessa o espaço de fase, ela recebe o nome de *círculo invariante rotacional* ou *curva invariante*. Por outro lado, se a curva se fecha antes de percorrer todo o intervalo da coordenada angular, forma-se, no espaço de fase, uma estrutura chamada de *ilha* ou *ressonância*. A importância dessas estruturas regulares reside no consequente confinamento das órbitas a determinadas regiões do espaço de fase, formando, como veremos adiante, barreiras de transporte em sistemas bidimensionais e delimitando regiões de órbitas caóticas.

4.2.3 Mapa padrão *twist*

Considerando, ainda, o mapa expresso em (4.2.3), dizemos que ele é um mapa *twist* se satisfaz a seguinte condição, chamada *condição twist*:

$$\frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial I_n} \neq 0 \quad (4.2.6)$$

Nesse caso, notamos que essa condição depende do número de rotação, ω , e da função perturbativa g . No caso integrável, ou seja, se $\epsilon = 0$, a Equação (4.2.6) corresponde ao gradiente do número de rotação. A condição *twist* é, para mapas, o análogo da *condição de não degenerescência* em sistemas hamiltonianos, dada por

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \neq 0 \quad (4.2.7)$$

onde H_0 é a hamiltoniana integrável da Equação (4.1.6).

Um caso particular dos mapas *twist* é obtido com f independente de I e com $g \equiv 0$. Com isso, é possível definir o *mapa padrão twist* (MPT), também conhecido como *mapa de Chirikov-Taylor*, dado por

$$I_{n+1} = I_n + K \sin(\chi_n) \quad (4.2.8a)$$

$$\chi_{n+1} = \chi_n + I_{n+1} \quad (4.2.8b)$$

onde K é o parâmetro de controle do mapa, referente aos fenômenos não-lineares no mesmo. Alguns sistemas não-integráveis com ressonâncias não-lineares podem ser localmente reduzidos ao MPT. Assim, através de um único parâmetro de controle, ele tem sido utilizado para estudar a transição do movimento regular para o movimento caótico.

Para $K = 0$, o sistema é integrável; I permanece constante, enquanto χ varia linearmente com o tempo. Quando a condição inicial corresponde a uma órbita irracional, após várias iterações, forma-se no espaço de fase uma linha paralela à direção do eixo χ .

Figura 4.2: Espaço de fase do mapa padrão *twist* com parâmetro de controle (a) $K = 0$; (b) $K = 0,5$; (c) $K = 0,95$; (d) $K = 3$.

Por outro lado, órbitas racionais, cujo número de rotação é da forma $\omega = r/s$, apresentam s pontos distintos no espaço de fase. Algumas trajetórias racionais e irracionais estão representadas na Figura 4.2a.

Para valores pequenos do parâmetro K , como na Figura 4.2b, com $K = 0,5$, obser-

vamos a persistência das órbitas regulares, com o surgimento de ressonâncias no lugar dos pontos fixos. Essas regiões são limitadas por separatrizes, em torno das quais podem haver pequenas regiões caóticas. Aumentando um pouco o valor de K , é possível observar regiões maiores de trajetórias caóticas, como na Figura 4.2c, com $K = 0,95$. Já na Figura 4.2d, para a qual $K = 3$, grande parte das estruturas regulares foi destruída e as órbitas caóticas predominam no espaço de fase.

4.2.4 Mapa padrão não-*twist*

Quando a condição *twist*, dada pela Equação (4.2.6), não é satisfeita para todo o espaço de fase de um determinado mapa, este é chamado mapa não-*twist*. Uma das formas mais simples de mapas simpléticos não-*twist* é dada por (del Castillo-Negrete *et al.*, 1996)

$$I_{n+1} = I_n - b \sin(2\pi\chi_n) \quad (4.2.9a)$$

$$\chi_{n+1} = \chi_n + a(1 - I_{n+1}^p) \mod 1 \quad (4.2.9b)$$

onde $a \in (0,1)$ e $b \in \mathbb{R}$ são os parâmetros de controle e $p > 1$ é um inteiro positivo. Em particular, um mapa não-*twist* bastante estudado é o *mapa padrão não-*twist** (MPNT), para o qual $p = 2$. O MPNT viola a condição *twist*, uma vez que

$$\frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial I_n} = 0 \quad \text{para} \quad I_n = b \sin(2\pi\chi_n) \quad (4.2.10)$$

O MPNT apresenta os comportamentos gerais de mapas não-*twist* e pode representar diversos sistemas físicos, como a trajetória de linhas de campo magnético com cisalhamento em tokamaks (Boozer, 2005; Caldas *et al.*, 2012) e dinâmica de fluidos (del Castillo-Negrete & Morrison, 1992, 1993). Além disso, a condição não-*twist* é necessária para a validade de resultados aplicados a sistemas *twist*, como o teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) (Möser, 1962), de forma que, se um modelo físico é estudado através de mapas não-*twist*,

tais resultados não podem ser aplicados. Assim, o MPNT é estudado, também, do ponto de vista matemático da teoria de sistemas dinâmicos. A Figura 4.3 mostra o comportamento do MPNT conforme se aumenta o efeito da perturbação, relativo ao parâmetro b , enquanto se mantém o parâmetro $a = 0,35$.

No limite $b = 0$, o MPNT torna-se integrável e, assim como no mapa padrão *twist*, cada condição inicial define uma linha com I constante no espaço de fase, ao longo da qual as sucessivas iterações do mapa podem levar a trajetória, como mostra a Figura 4.3a. Para $b = 0$, o número de rotação possui perfil não-monotônico, dado por $\omega = a(1 - I_{n+1}^2)$, cujo máximo ocorre em $I = 0$. O ponto de máximo ou mínimo do perfil do número de rotação define a chamada *curva sem shear*, que será discutida a seguir. Órbitas para as quais o número de rotação é irracional formam as chamadas *curvas invariantes*. Em sistemas bidimensionais, elas funcionam como barreiras ao transporte, uma vez que qualquer ponto sobre uma curva invariante fica confinado a ela, de forma que as órbitas ao redor não podem passar por ela. Para valores pequenos do parâmetro b , curvas invariantes ainda persistem, mas são destruídas conforme se aumenta o efeito da perturbação. Esse fenômeno é de interesse para muitos sistemas que visam estudar o transporte, uma vez que a ausência de curvas invariantes indica a falta de confinamento.

Na Figura 4.3b, com $b = 0,4$, observa-se que há formação de regiões caóticas, mas muitas órbitas regulares ainda se mantêm. Na região central, em torno de $I = 0$, formam-se curvas invariantes que funcionam como barreiras ao transporte, de forma que as órbitas acima e abaixo dessas estruturas ficam separadas. Forma-se, também, um par de cadeia de ilhas em meio às curvas invariantes, bem como duas ilhas externas, cercadas por órbitas caóticas. Com o aumento do parâmetro, muitas estruturas regulares são destruídas e regiões caóticas começam a dominar o espaço de fase. No entanto, algumas curvas invariantes ainda existem na região central, como é possível ver na Figura 4.3c, onde são mostradas em preto. Elas separam completamente as órbitas caóticas da região superior, mostradas em verde, daquelas na região inferior, em azul.

Já para $b = 0,98$, as curvas invariantes são destruídas e todo o espaço de fase é tomado por órbitas caóticas. Sem o efeito das barreiras de transporte, as trajetórias caóticas em verde e em azul, antes confinadas a determinadas regiões, agora se confundem por todo o espaço de fase, como é possível observar na Figura 4.3d.

Figura 4.3: Espaço de fase do mapa padrão não-*twist* com parâmetros de controle $a = 0,35$ e (a) $b = 1 \times 10^{-6}$; (b) $b = 0,4$; (c) $b = 0,7$; (d) $b = 0,98$.

Curva sem *shear*

Uma característica dos sistemas não-*twist* é a presença de curvas invariantes para as quais o *shear*, definido como $\partial\chi_{n+1}/\partial I_n$, é nulo. Elas são chamadas *curvas sem shear* e correspondem aos extremos (máximo/mínimo local) do perfil do número de rotação.

A Figura 4.4b mostra o número de rotação calculado ao longo de condições iniciais com $\chi_0^{(\omega)} = 0.5$ para o MPNT com parâmetros $a = 0,35$ e $b = 0,4$. O ponto vermelho indica o máximo local do número de rotação. Ele ocorre em $I_0^{(\omega)} = -0,059255925$, de forma que o ponto $(I_0^{(\omega)}, \chi_0^{(\omega)})$ está localizado sobre a curva sem *shear*. Diversas iterações desse ponto traçam a curva mostrada em vermelho na Figura 4.4a. A região onde o número de rotação permanece constante no gráfico de $I_0 \times \omega$ corresponde a uma ilha no espaço de fase.

Figura 4.4: (a) Em vermelho, curva sem *shear* do mapa padrão não-*twist* com parâmetros $a = 0,35$ e $b = 0,4$. (b) Perfil do número de rotação do mapa em (a) ao longo de condições iniciais sobre $\chi_0 = 0,5$.

A violação da condição *twist* assegura a existência de ao menos uma curva sem *shear*. Essa estrutura é bastante resistente à perturbação, pois dado o gradiente do número de rotação próximo de zero nessa região, tem-se maior espaçamento entre as ressonâncias. No

entanto, valores elevados da perturbação fazem com que as estruturas regulares no espaço de fase deem lugar a órbitas caóticas, podendo ocorrer, também, a quebra da curva sem *shear*. Nesse sentido, o estudo dos mecanismos de quebra da curva sem *shear* é relevante para o entendimento da transição para o caos em sistemas não-*twist* (del Castillo-Negrete *et al.*, 1996).

4.2.5 Aprisionamento

Como vimos nos casos acima, órbitas regulares e caóticas coexistem no espaço de fase de sistemas hamiltonianos não integráveis. A topologia desses sistemas compõe uma estrutura fractal entre as trajetórias, de maneira que a vizinhança de uma ilha imersa em regiões caóticas abriga outras ilhas secundárias de tamanho menor, preenchidas por órbitas periódicas ou quase-periódicas e cuja vizinhança também apresenta ilhas menores imersas em órbitas caóticas, e assim por diante. Essa estrutura auto similar de ilhas foi observada por Birkhoff (Birkhoff (1935)), em 1935, e é um aspecto importante para o estudo da dinâmica do sistema, pois pode afetar significativamente a maneira como as trajetórias se dispersam pelo espaço de fase (Zaslavsky, 2002a).

Algumas órbitas caóticas podem passar longos períodos de tempo “aprisionadas” em regiões onde há estruturas de múltiplas ilhas invisíveis. Nesses casos, elas podem se confundir com trajetórias regulares, em intervalos de tempo específicos, mas acabam escapando para regiões caóticas e, assim, o seu comportamento global é o de órbitas caóticas. Esse fenômeno é conhecido como aprisionamento ou *stickiness* e os domínios no espaço de fase onde ele ocorre são chamados armadilhas dinâmicas (*dynamical traps*) (Zaslavsky, 2002b).

Na Figura 4.2c, que ilustra o mapa padrão *twist*, é possível observar regiões mais escuras ao redor das ilhas que surgem entre a ilha principal, em torno de $I = 0$, e as curvas invariantes em torno de $I = 0,5$. Essas regiões parecem mais densamente povoadas devido ao longo tempo que as trajetórias passam por lá. A propriedade de *stickiness* presente

em algumas regiões de um dado sistema está ligada à existência de estruturas chamadas cantores, que surgem ao redor das ilhas no espaço de fase (Efthymiopoulos *et al.*, 1997). O aumento do termo perturbativo tende a destruir essas estruturas, mas, em geral, o efeito persiste em diversas regiões do espaço de fase, como é possível observar na Figura 4.3c. Nesse caso, nota-se que a maior parte do espaço de fase está tomado por órbitas caóticas, mas há regiões mais escuras nas proximidades das estruturas regulares remanescentes, indicando uma forte presença de aprisionamento nessas regiões.

Existem descrições qualitativas acerca das armadilhas dinâmicas em diversos sistemas (Contopoulos & Harsoula, 2008; Zaslavsky, 2002a,b), enquanto uma possível abordagem quantitativa consiste em calcular a distribuição de tempos distintos gastos entre a entrada e a saída de uma órbita em uma região de interesse no espaço de fase. A compreensão do fenômeno de aprisionamento é de grande relevância para estudos com interesse em transporte, pois a maneira como algumas órbitas caóticas são afetadas pela perturbação do sistema está relacionada com tal propriedade das armadilhas dinâmicas. Nesse sentido, o presente trabalho visa utilizar o desvio quadrático médio da variável radial para estudar o transporte de partículas em um plasma.

4.2.6 Transporte

Vimos que as curvas invariantes podem funcionar como barreiras ao transporte, em sistemas bidimensionais. Com o aumento do parâmetro perturbativo, algumas estruturas regulares ainda sobrevivem e podemos observar o efeito de aprisionamento das trajetórias nas proximidades dessas estruturas. No caso do mapa padrão não-*twist*, mesmo com um termo perturbativo um pouco acima do valor crítico para a quebra da curva sem *shear*, as trajetórias não ficam completamente livres para se dispersar pelo espaço de fase. O efeito da barreira ainda permanece e muitas órbitas podem ficar longos períodos de tempo aprisionadas naquela região (Portela *et al.*, 2007).

Dessa forma, o efeito de *stickiness* tem um importante papel no estudo do transporte

das trajetórias, ou seja, como elas se difundem pelo espaço de fase ao longo do tempo. Uma maneira de caracterizar o transporte é o cálculo do desvio quadrático médio, σ^2 , de uma variável do sistema para uma quantidade de condições iniciais. Neste trabalho, pretende-se utilizar a variável radial, de forma que σ^2 é dado por

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i(t) - r_i(0))^2 \quad (4.2.11)$$

onde N é o número de condições iniciais para o cálculo da média, tomadas em uma região de órbitas caóticas no espaço de fase.

A Equação (4.2.11) fornece o desvio radial médio de um conjunto de partículas em relação à posição inicial e como função do tempo. A partir dela é possível calcular o coeficiente de difusão, definido como

$$D_r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i(t) - r_i(0))^2 \quad (4.2.12)$$

Assim, a maneira como o desvio quadrático médio cresce com o tempo caracteriza o tipo de transporte. Ou seja, dado $\sigma^2 \propto t^\gamma$, o expoente γ indica se o sistema é difusivo, subdifusivo ou superdifusivo. Quando $\gamma = 1$, o sistema é dito difusivo, enquanto $\gamma < 1$ e $\gamma > 1$ indicam sistemas subdifusivos e superdifusivos, respectivamente.

Em sistemas com escape, ou seja, sistemas para os quais as trajetórias podem ser interrompidas, o desvio quadrático médio pode não fornecer um bom resultado, devido à perda das condições iniciais que contribuem para a estatística. Nesses casos, é interessante analisar o tempo de escape, isto é, o tempo que uma condição inicial demora para sair de uma região de interesse no espaço de fase. Com isso, dado um conjunto de condições iniciais, pode-se calcular a quantidade de órbitas remanescentes ao longo do tempo, o que fornece um indicativo de quão boa é a estimativa do desvio quadrático médio para aquelas condições iniciais.

Considerações gerais

Os sistemas hamiltonianos têm a dinâmica descrita pela função hamiltoniana $H(p_i, q_i, t)$, onde (p_i, q_i) são N pares de variáveis canônicas de momento e posição, respectivamente. Nesse caso, as equações de movimento são dadas pelas equações de Hamilton (4.1.1). É possível mudar o sistema de coordenadas enquanto se mantém a forma das equações de Hamilton, através de transformações canônicas. A transformação para as variáveis canônicas de ação-ângulo costuma simplificar a forma das equações de movimento.

A integrabilidade de um sistema está relacionada com as constantes de movimento do mesmo. Um sistema integrável, quando submetido a uma perturbação, pode ter as constantes de movimento destruídas, tornando-se não integrável. Nesse sentido, a chamada seção de Poincaré permite visualizar a dinâmica de um sistema e fazer distinção entre órbitas regulares e caóticas, fornecendo, assim, uma maneira prática de analisar a integrabilidade de um sistema.

Mapas simpléticos podem ser utilizados para descrever a dinâmica de sistemas hamiltonianos conservativos, possibilitando um estudo sobre a estabilidade das trajetórias. Em particular, o mapa padrão não-*twist* pode representar diversos sistemas físicos com interesse em transporte. Esse mapa é caracterizado pela presença de (pelo menos) uma curva invariante, chamada curva sem *shear*, que corresponde a um extremo local do perfil do número de rotação. Ela funciona como uma barreira de transporte e sua quebra está relacionada com a transição para o caos global.

Capítulo 5

Transporte de Partículas no Texas

Helimak

Neste capítulo, é apresentado o modelo para o estudo do transporte de partículas no Texas Helimak. Utilizando a equação de movimento deduzida no capítulo 2, o modelo leva em conta a velocidade de deriva v_E , causada pelo produto $\vec{E} \times \vec{B}$, como mecanismo de turbulência (ondas de deriva). Dessa forma, são introduzidas flutuações eletrostáticas em forma de termos impulsivos, com um período fixo. Assim, obtém-se um mapa de ondas de deriva para o Texas Helimak que possibilita o estudo da influência do potencial de *bias* sobre a transporte de partículas.

5.1 Modelo de ondas de deriva

Para estudar o transporte de partículas na borda do plasma no Texas Helimak, consideramos um modelo similar ao apresentado por [Horton *et al.* \(1998\)](#). Neste, considera-se o fenômeno de ondas de deriva, cujas instabilidades provêm de gradientes de densidade no plasma. Tais instabilidades se manifestam como ondas eletrostáticas que se propagam na direção poloidal. Ainda de acordo com o modelo, o movimento do centro de guia das partículas é governado pela deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, dada pela Equação (2.2.15) (p. 14).

Assim, o campo elétrico considerado possui um termo radial ao qual soma-se um termo perturbativo referente às ondas eletrostáticas. Este último é dado por

$$\tilde{E} = -\nabla\tilde{\phi} \quad (5.1.1)$$

onde $\tilde{\phi}$ é o potencial eletrostático definido como

$$\tilde{\phi} = \sum_{l,m,n} \phi_{l,m,n} \cos(m\varphi - l_z z - n\omega_0 t) \quad (5.1.2)$$

com $l_z \equiv \frac{2\pi}{H}l$ ($l = 0, 1, \dots$) e $\phi_{l,m,n}$ a amplitude das ondas. Com isso, utiliza-se a hipótese de um amplo espectro de frequências $m\omega_0$, compondo, assim, um modelo idealizado de infinitas ondas. Mais adiante, são feitas aproximações acerca da amplitude e fase dessas ondas.

Reescrevendo a Equação (5.1.2) como

$$\tilde{\phi} = \sum_{l,m,n} \phi_{l,m,n} [\cos(m\varphi - l_z z) \cos(n\omega_0 t) - \sin(m\varphi - l_z z) \sin(n\omega_0 t)] \quad (5.1.3)$$

e utilizando as identidades

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(n\omega_0 t) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_0 t - 2\pi n) \quad (5.1.4a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin(n\omega_0 t) = 0 \quad (5.1.4b)$$

obtemos

$$\tilde{\phi} = 2\pi \sum_{l,m,n} \phi_{l,m,n} \cos(m\varphi - l_z z) \delta(\omega_0 t - 2\pi n) \quad (5.1.5)$$

Com isso, designando o campo elétrico radial não perturbado por E_0 , obtemos o

campo elétrico total, $\vec{E} = E_0 \hat{e}_r - \nabla \tilde{\phi}$, na forma

$$\vec{E} = \underbrace{\left(E_0 - \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \right)}_{E_r} \hat{e}_r - \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \varphi}}_{E_\varphi} \hat{e}_\varphi - \underbrace{\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z}}_{E_z} \hat{e}_z \quad (5.1.6)$$

onde estão indicadas as componentes radial (E_r), poloidal (E_φ) e vertical (E_z) do campo elétrico total. Nota-se que a componente radial consiste de um termo não perturbado somado a um termo perturbativo, enquanto as componentes poloidal e vertical são devidas apenas às flutuações eletrostáticas.

Equação de movimento

A velocidade do centro de guia das partículas é dada pela Equação (2.2.19), deduzida no capítulo 2:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = v_{\parallel} \frac{\vec{B}}{B} + \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

Dela, obtêm-se as equações de movimento:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{B_z}{B^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \varphi} + \frac{B_\varphi}{B^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \quad (5.1.7a)$$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = v_{\parallel} \frac{B_\varphi}{B} - \frac{B_z}{B^2} E_0 + \frac{B_z}{B^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \quad (5.1.7b)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{\parallel} \frac{B_z}{B} + \frac{B_\varphi}{B^2} E_0 - \frac{B_\varphi}{B^2} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \quad (5.1.7c)$$

Uma vez que $B \approx B_\varphi \gg B_z$ (p. 19), tem-se:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} \quad (5.1.8a)$$

$$r \frac{d\varphi}{dt} = v_{\parallel} \quad (5.1.8b)$$

$$\frac{dz}{dt} = v_{\parallel} \frac{B_z}{B} + \frac{E_0}{B} - \frac{1}{B} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial r} \quad (5.1.8c)$$

Por outro lado, tomando a derivada da Equação (5.1.5), tem-se

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial z} = 2\pi \sum_{l,m,n} l_z \phi_{l,m,n} \sin(m\varphi - l_z z) \delta(\omega_0 t - 2\pi n) \quad (5.1.9)$$

Com isso, a expressão para $\frac{dr}{dt}$ fica

$$\frac{dr}{dt} = \frac{2\pi}{B} \sum_{l,m,n} l_z \phi_{l,m,n} \sin(m\varphi - l_z z) \delta(\omega_0 t - 2\pi n) \quad (5.1.10)$$

Neste ponto, convém fazer a seguinte mudança de variáveis:

$$I = \frac{r^2 - R_{\text{int}}^2}{R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2} \quad (5.1.11)$$

onde R_{int} e R_{ext} são os raios interno externo do Texas Helimak, respectivamente. Dessa forma, I varia no intervalo $[0,1]$, para $R_{\text{int}} \leq r \leq R_{\text{ext}}$. Além disso, o termo r^2 faz com que a nova variável seja proporcional à área no espaço de fase original, como ocorre com a variável canônica ação. Também pode ser usada a seguinte notação, para facilitar a leitura

$$a^2 \equiv R_{\text{ext}}^2 - R_{\text{int}}^2 \quad (5.1.12)$$

$$b^2 \equiv \frac{R_{\text{int}}^2}{a^2} \quad (5.1.13)$$

$$J = I + b^2 \quad (5.1.14)$$

Com essas mudanças, obtemos uma relação entre $\frac{dr}{dt}$ e $\frac{dI}{dt}$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial r} \frac{dr}{dt} = \frac{2r}{a^2} \frac{dr}{dt} = \frac{2\sqrt{J}}{a} \frac{dr}{dt} \quad (5.1.15)$$

Então, o modelo assume um modo espacial dominante, M/L , com amplitude cons-

tante ao longo do tempo. Dessa forma, as Equação (5.1.10) e (5.1.15) fornecem

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{2\sqrt{J}}{a} \frac{2\pi}{B} \frac{2\pi}{H} L\phi \sin\left(M\varphi - L\frac{2\pi z}{H}\right) \sum_n \delta(\omega_0 t - 2\pi n) \quad (5.1.16)$$

Finalmente, definindo a variável angular como $\chi = M\varphi - \frac{2\pi L}{H}z$ e utilizando as equações 5.1.8, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} &= M\frac{v_{\parallel}}{r} - L\frac{2\pi}{H}\left(v_{\parallel}\frac{B_z}{B} + \frac{E_0}{B}\right) \\ &= v_{\parallel}\frac{2\pi}{H}\frac{B_z}{B}\left[M\frac{HB}{2\pi r B_z} - L\left(1 + \frac{E_0}{v_{\parallel}B_z}\right)\right] \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Logo, as equações (5.1.16) e (5.1.17) descrevem as trajetórias das partículas no espaço de fase das variáveis ação-ângulo. É possível notar, na Equação (5.1.5), que o termo perturbativo consiste de impulsos periódicos de período $T = 2\pi/\omega_0$. Em função disso, a Equação (5.1.16) mostra que a ação permanece constante entre dois impulsos e sofre um “salto” em instantes de tempo múltiplos de T . Portanto, a integração das equações diferenciais acima se dá no intervalo entre os tempos $\tau_n = nT$ e $\tau_{n+1} = (n+1)T$, com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, sobre um impulso. Tomando um valor infinitesimalmente próximo desses instantes de tempo, a integral de (5.1.16) fica

$$\int_{J_n}^{J_{n+1}} dJ = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\tau_n - \epsilon}^{\tau_{n+1} - \epsilon} \frac{4\pi L\phi}{a^2 B_z q(J)} \sin\left(M\varphi(t) - L\frac{2\pi}{H}z(t)\right) \delta(\omega_0 t - 2\pi n) dt \quad (5.1.18)$$

Resultando

$$J_{n+1} = J_n + \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{2L\phi}{a^2 q(J_n) B_z} \sin\left(M\varphi(t_n) - L\frac{2\pi}{H}z(t_n)\right) \quad (5.1.19)$$

Finalmente, integrando a Equação (5.1.17), obtém-se

$$\chi_{n+1} = \chi_n + \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{v_{\parallel}}{a\sqrt{J_n}q} [Mq - L] - \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{LE_0(J_n)}{a\sqrt{J_n}q B_z} \quad (5.1.20)$$

Em resumo, a integração das equações (5.1.16) e (5.1.17) fornece

$$J_{n+1} = J_n + \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{2L\phi}{qa^2B_z} \sin(\chi_n) \quad (5.1.21a)$$

$$\chi_{n+1} = \chi_n + \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{aq} \left[v_{\parallel} (Mq - L) - L \frac{E_0}{B_z} \right] \frac{1}{\sqrt{J_n}} \quad (5.1.21b)$$

No entanto, para que o mapa definido acima seja simplético, é preciso que o determinante da matriz jacobiana seja unitário. Para isso, a mudança de J_n para J_{n+1} na expressão (5.1.21b) satisfaz essa condição:

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} & \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \chi_n} \\ \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial J_n} & \frac{\partial \chi_{n+1}}{\partial \chi_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{2L\phi}{qa^2B_z} \cos(\chi_n) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (5.1.22)$$

5.2 Mapa de ondas de deriva

Para facilitar a notação, pode-se reescrever as expressões (5.1.21) em termos da variável I , inicialmente definida, e dos parâmetro adimensionais

$$\alpha \equiv \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{2L\phi}{qa^2B_z} \quad (5.2.1a)$$

$$\beta \equiv \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{aq} \left[v_{\parallel} (Mq - L) - L \frac{E_0}{B_z} \right] \quad (5.2.1b)$$

$$(5.2.1c)$$

Assim, o mapa de ondas de deriva para o Texas Helimak é dado por

$$I_{n+1} = I_n + \alpha \sin(\chi_n) \quad (5.2.2a)$$

$$\chi_{n+1} = \chi_n + \frac{\beta}{\sqrt{I_{n+1} + b^2}} \quad (5.2.2b)$$

Nota-se que os parâmetros α e β nas expressões acima dependem da amplitude da

perturbação, ϕ , e do campo elétrico de equilíbrio, E_0 , respectivamente. Assim, para cada perfil do campo elétrico, definido pelo valor do *bias* na Figura 3.5 (p. 26), corresponde um valor do parâmetro β , de forma que o mapa permite estudar a influência do potencial de *bias* sobre o transporte. Eles também dependem do fator de segurança, q , que, a princípio, é uma função do raio. Diversos trabalhos investigam a influência do perfil do fator de segurança sobre o transporte em tokamaks (Horton *et al.* , 1998; Constantinescu & Firpo, 2012; Rosalem *et al.* , 2014). Neste estudo, porém, utiliza-se um valor constante para q , a saber, obtido na posição radial $r = 1,1$ m, dentro do intervalo de interesse mencionado no capítulo 3.

Por outro lado, a dependência do campo elétrico com a posição radial é abordada de três maneiras. Uma primeira abordagem considera o campo elétrico de equilíbrio uniforme. Com isso, é possível observar as características gerais do mapa expresso em (5.2.2) ao variar o seu parâmetro β para cada valor de *bias*. As outras duas abordagens consistem em aproximar o perfil do campo elétrico radial por uma reta ou uma parábola, respectivamente, na região radial de interesse. Essas aproximações, no entanto, alteram a forma da expressão (5.2.2b), pois fazem com que o parâmetro β dependa de I_{n+1} . Nesse sentido, β passa a ser um polinômio de primeiro ou segundo grau, cujo ajuste varia de acordo com o campo elétrico (Figura 3.5).

Considerações gerais

O modelo considera a deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ para introduzir flutuações eletrostáticas em forma de termos impulsivos, com períodos de tempo fixos. Para isso, o campo elétrico é composto por um termo de equilíbrio somado a um termo perturbativo referente às ondas de deriva. A forma da perturbação permite a integração do sistema em intervalos de tempo para os quais as variáveis permanecem constantes. Dessa forma, obtém-se, a partir da equação de movimento do centro de guia das partículas, um mapa de ondas de deriva.

A abordagem através do mapa possibilita o estudo das trajetórias durante um

intervalo de tempo longo, tornando possível estimar a estabilidade das órbitas e as regiões acessíveis no espaço de fase. As expressões derivadas aqui mostram a dependência dos parâmetros do mapa em relação ao campo elétrico e à amplitude da perturbação. Com isso, pode-se investigar a influência do *bias* sobre o transporte de partículas, uma vez que esse mecanismo tem influência sobre o perfil do campo elétrico.

Capítulo 6

Resultados

Neste capítulo, são apresentados os resultados do estudo do mapa de ondas de deriva obtido no capítulo anterior. Estes estão divididos conforme a aproximação utilizada para o perfil radial do campo elétrico de equilíbrio. Na seção 6.1.1, constam os resultados para uma aproximação uniforme do campo elétrico. São mostrados os espaços de fase dos mapas para cada valor de *bias* e são discutidas suas principais características. Em seguida, na seção 6.1.2, é feita uma aproximação em que o campo elétrico varia linearmente com o raio. São mostradas as principais diferenças entre este e o caso anterior.

Já na seção 6.1.3, são apresentados os resultados para uma abordagem em que o *shear* do campo elétrico varia linearmente com o raio. Neste caso, são discutidos os efeitos da curva sem *shear* sobre o transporte das trajetórias em função dos valores de *bias* utilizados. Por fim, são resumidas as principais conclusões a que o presente estudo permitiu chegar, além de traçar algumas perspectivas para a continuidade deste trabalho.

6.1 Resultados

Como discutido no final do capítulo anterior, o potencial de *bias* tem influência sobre perfil radial do campo elétrico de equilíbrio, de forma que três aproximações do perfil do campo foram feitas para estudar esse efeito: uniforme, linear e quadrático. Nos três casos,

são utilizados os dados experimentais indicados na Figura 3.5 (p. 26), para os valores de $bias = 0, 4, 6, 8, 10, 15$ e 20 V. Para o caso de um campo elétrico de equilíbrio uniforme, foram utilizados os valores médios do campo, no intervalo radial $1,10 < r < 1,25$. Quando o perfil do campo elétrico é aproximado por uma reta, no mesmo intervalo dado acima, o *shear* do campo elétrico, definido como $S_E = dE/dr$, é constante. Já quando o perfil do campo elétrico é aproximado por uma parábola, o *shear* é uma função linear do raio.

Os mapas foram iterados com $I > 0$ e com a condição de escape $\sqrt{I_{n+1} + b^2} \leq 0$, ou seja, as iterações são interrompidas sempre que a variável I satisfaz essa condição. Assim, nos gráficos do espaço de fase, são indicadas as posições R_{ext} , R_{int} e $-b^2$. Por fim, nos mesmos, a variável χ foi renormalizada para o intervalo $[0,1)$, ou seja, o que se lê no respectivo eixo é o valor $\chi/2\pi$.

6.1.1 Campo elétrico uniforme

Na aproximação para o campo elétrico uniforme, o parâmetro β do mapa de ondas de deriva também permanece uniforme. Com isso, o mapa satisfaz a condição *twist* e, portanto, se comporta como um mapa *twist*. Com o parâmetro $\alpha = 0$, o número de rotação varia como $\omega = \Delta\chi = \beta/\sqrt{I + b^2}$, ou seja, é uma função monotonicamente decrescente de I .

Assim, o espaço de fase apresenta as mesmas características gerais daquele do mapa padrão *twist*, como mostra a Figura 6.1. Observa-se uma ilha principal, no centro, em torno da qual surgem algumas órbitas caóticas. Acima da ilha principal, há curvas invariantes, enquanto abaixo dela, notam-se algumas cadeias de ilhas. A variação do *bias*, e, conseqüentemente, do parâmetro β , (Figuras 6.1a - f) altera a densidade de órbitas caóticas em torno da ilha central, mas as estruturas regulares ainda se preservam.

Figura 6.1: Espaço de fase do mapa de ondas de deriva com aproximação de campo elétrico uniforme, para (a) $bias = 0$ V; (b) $bias = 4$ V; (c) $bias = 8$ V; (d) $bias = 10$ V; (e) $bias = 15$ V; (f) $bias = 20$ V.

6.1.2 *Shear* uniforme

Nesta abordagem, o campo elétrico é aproximado por uma função linear do raio, na região $1,10 < r < 1,25$, onde o plasma apresenta características mais uniformes, como visto na seção 3.2. Com isso, o parâmetro β também varia linearmente com a ação, I , e o mapa é modificado com relação à condição *twist*. A dependência linear de β com relação a I e a raiz no denominador da expressão (5.2.2b) fazem com que, para $\alpha = 0$, o número de rotação seja proporcional a $\sqrt{I}$, de forma que o mapa não mais satisfaz a condição *twist* para todo o espaço de fase. Entretanto, o número de rotação é monotônico em quase todo

o intervalo de I analisado. Apenas para valores próximos de $I = 1$, ocorre o decréscimo de ω . Isso pode ser visto na Figura 6.2, que mostra o número de rotação para $\alpha = 0$ e destaca os pontos onde $d\omega/dI = 0$. Nesse caso, o efeito da condição *twist* não deve ser observado na região das ilhas principais, presentes no espaço de fase das figuras mostradas a seguir, distantes de $I = 1$.

Figura 6.2: Número de rotação, ω , para $\alpha = 0$, na aproximação de *shear* uniforme do campo elétrico. Os pontos em destaque indicam o local onde $d\omega/dI$ é nulo.

As Figuras 6.3a - f mostram o espaço de fase para cada valor de *bias*. Nota-se que, para *bias* = 0 V, o mapa apresenta similaridades com o caso anterior, cujo campo elétrico é uniforme. De fato, sem um potencial externo, o campo elétrico radial apresenta um perfil mais uniforme na região de interesse, como pode ser visto na Figura 3.5. Nos demais casos, com *bias* > 0 V, o campo elétrico possui *shear* negativo naquela região, de forma que o ajuste linear fornece coeficientes angulares negativos, o que introduz uma fase de π na variável angular. Nas Figuras 6.3b, c e e, o espaço de fase apresenta órbitas regulares, na parte superior, e uma região caótica, abaixo, com uma ilha central em torno da qual observa-se o efeito de aprisionamento das trajetórias. Nas Figuras 6.3d e f, para as quais o *shear* do campo elétrico é maior, a região superior também dá espaço a órbitas caóticas,

aprisionadas nas proximidades de uma ilha central.

Figura 6.3: Espaço de fase do mapa de ondas de deriva com aproximação de *shear* uniforme do campo elétrico, para (a) $bias = 0$ V; (b) $bias = 4$ V; (c) $bias = 8$ V; (d) $bias = 10$ V; (e) $bias = 15$ V; (f) $bias = 20$ V.

6.1.3 *Shear* linear

Nesta etapa, o perfil do campo elétrico radial é aproximado por uma função quadrática, de forma que o *shear*, dE/dr , varia linearmente com o raio, como mostra a Figura 6.4. O número de rotação em função de I , para $\alpha = 0$, é mostrado na Figura 6.5, onde os pontos indicam o mínimo da função, isto é, com $d\omega/dI = 0$, eles localizam a região onde deve ocorrer a curva sem *shear*. Para valores muito pequenos da perturbação, esses extremos se deslocam um pouco, alterando a posição da curva sem *shear*, como pode ser visto

nas Figuras 6.8b e 6.9b. As Figuras 6.6a - f mostram como o espaço de fase se modifica conforme se altera o valor do *bias*. Os mesmos gráficos são mostrados e discutidos em maiores detalhes mais adiante.

Figura 6.4: *Shear* do campo elétrico, dE/dr , em função do raio.

Figura 6.5: Número de rotação, ω , para $\alpha = 0$, na aproximação de *shear* linear do campo elétrico. Os pontos em destaque indicam o local onde $d\omega/dI$ é nulo.

Figura 6.6: Espaço de fase do mapa de ondas de deriva com aproximação de *shear* do campo elétrico linear, para (a) $bias = 0$ V; (b) $bias = 4$ V; (c) $bias = 8$ V; (d) $bias = 10$ V; (e) $bias = 15$ V; (f) $bias = 20$ V.

Na Figura 6.7a, com $bias = 0$ V, observa-se a curva sem *shear*, destacada em azul. Nota-se que ela separa o espaço de fase em duas regiões. Na parte superior, há a formação de cadeias de ilhas nas proximidades da curva sem *shear*; mais acima, observa-se um forte *stickiness* em torno de uma série de ilhas menores. Na parte inferior, dominam órbitas caóticas, cuja concentração de pontos é bastante rarefeita, devido ao escape das trajetórias, isto é, a interrupção das iterações do mapa quando $\sqrt{I_{n+1} + b^2} \leq 0$.

Para traçar a curva sem *shear*, calculou-se o perfil do número de rotação sobre condições iniciais com $\chi = 0,5$, mostrado na Figura 6.7b. Nesta, o ponto em destaque, que corresponde a um máximo local, identifica a condição inicial I_0 que traça a curva sem

shear mostrada ao lado.

Nas Figuras 6.8a e 6.9a, respectivamente com $bias = 4$ e $bias = 6$ V, as órbitas em vermelho e as órbitas em verde permanecem separadas pela curva sem *shear* (em azul), que forma uma barreira de transporte. As Figuras 6.8b e 6.9b mostram os perfis do número de rotação utilizados para identificar a curva sem *shear* nos respectivos espaços de fase.

Figura 6.7: $bias = 0$ V: (a) Espaço de fase do mapa de ondas de deriva mostrando a curva sem *shear* (em azul). (b) Perfil do número de rotação do mapa em (a), com condições iniciais sobre $\chi = 0,5$. O ponto em azul indica o máximo do número de rotação, correspondendo à localização da curva sem *shear*.

Figura 6.8: $\text{bias} = 4$ V: (a) Espaço de fase do mapa de ondas de deriva mostrando a curva sem *shear* (em azul). (b) Perfil do número de rotação do mapa em (a), com condições iniciais sobre $\chi = 0,5$. O ponto em azul indica o máximo do número de rotação, correspondendo à localização da curva sem *shear*.

Figura 6.9: $\text{bias} = 6$ V: (a) Espaço de fase do mapa de ondas de deriva mostrando a curva sem *shear* (em azul). (b) Perfil do número de rotação do mapa em (a), com condições iniciais sobre $\chi = 0,5$. O ponto em azul indica o máximo do número de rotação, correspondendo à localização da curva sem *shear*.

Para o caso do mapa com $bias = 8$ V, não foi possível encontrar a curva sem *shear*. A Figura 6.10a mostra o espaço de fase e uma ampliação das estruturas regulares na região onde se esperaria encontrá-la. Nota-se o surgimento de algumas ilhas em meio às curvas invariantes. Como se pode verificar na Figura 6.10b, dentro da precisão do cálculo efetuado, não identificamos um ponto de máximo ou mínimo no perfil do número de rotação. Para tentar verificar quando ocorre essa mudança, foram interpolados perfis radiais do campo elétrico para os valores de $bias$ 7 e 9 V, ou seja, valores inteiros imediatamente abaixo e acima de $bias = 8$ V. Os resultados são mostrados nas Figuras 6.11a - d. Uma mudança notável que ocorre entre esses casos é a direção da concavidade do perfil do número de rotação. Pode-se supor, então, que o comportamento particular do mapa quando $bias = 8$ V ocorre para um parâmetro de transição do perfil do número de rotação.

Figura 6.10: $bias = 8$ V: (a) Espaço de fase do mapa de ondas de deriva com ampliação da região onde se esperaria encontrar a curva sem *shear*. (b) Perfil do número de rotação do mapa em (a), com condições iniciais sobre $\chi = 0,5$.

Figura 6.11: Mapas com perfil radial do campo elétrico interpolado dos valores experimentais. Os pontos destacados nos perfis do número de rotação, calculados sobre $\chi = 0,5$, indicam as localizações das curvas sem *shear*, mostradas em azul nos mapas.

bias = 7 V: (a) Espaço de fase. (b) Número de rotação.

bias = 9 V: (c) Espaço de fase. (d) Número de rotação.

Com o aumento do *bias*, em particular, a partir de $bias = 10$ V, ocorre a quebra da curva sem *shear*. As Figuras 6.12a - c ilustram o comportamento das órbitas caóticas após esse evento. Nesses casos, sem a barreira de transporte, o espaço de fase não fica mais dividido em duas partes e as órbitas caóticas podem se difundir por ele. Nota-se, entretanto, que, logo após a quebra da curva sem *shear*, o efeito da barreira ainda persiste e as trajetórias tendem a permanecer provisoriamente (durante um número finito de iterações) nas regiões antes delimitadas. Tal efeito, conhecido como *stickiness* (Efthymiopoulos *et al.*, 1997; Contopoulos & Harsoula, 2008; Szezech Jr *et al.*, 2009, 2012) pode ser visto na Figura 6.13, com ampliação da região que separa as trajetórias. As Figuras 6.12b e c mostram que, gradativamente, as órbitas se espalham mais pelo espaço de fase. É natural que esse efeito tenha um impacto sobre o transporte e, nesse sentido, possa ser caracterizado pelo cálculo do desvio quadrático médio, discutido a seguir.

Figura 6.12: (a) $bias = 10$ V; (b) $bias = 15$ V; (c) $bias = 20$ V. Em (a), ocorre a quebra da curva sem *shear*, mas o efeito de barreira de transporte ainda é visível. Em (b) e (c), o efeito da barreira se desvanece.

Figura 6.13: $bias = 10$ V: Ampliação da região onde antes existia a curva sem *shear*. A área hachurada destaca a região onde se localizam as condições iniciais para o cálculo do desvio quadrático médio e do tempo de escape das mesmas.

Para analisar o impacto da destruição da curva sem *shear* sobre o transporte, foram calculados o desvio quadrático médio da posição radial, σ^2 , e o tempo de escape das trajetórias, para cada valor de *bias*. O desvio quadrático médio é dado pela Equação (4.2.11),

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (r_i(t) - r_i(0))^2$$

O tempo de escape é melhor ilustrado em termos da quantidade de órbitas remanescentes ao longo do tempo, $N(n)$, para uma dada quantidade de condições iniciais. Vale lembrar que os mapas foram iterados com a condição de escape $\sqrt{I_{n+1} + b^2} \leq 0$, ou seja, as iterações são interrompidas sempre que a variável I satisfaz essa condição. Tanto σ^2 quanto N foram calculados para 2×10^4 condições iniciais uniformemente distribuídas na região entre $0,4 \leq \chi \leq 0,6$ e $0,9 \leq I \leq 1$, ilustrada na área hachurada da Figura 6.13.

A Figura 6.14 ilustra o “decaimento” exponencial das órbitas, ou seja, a quantidade de trajetórias que permanecem na região do espaço de fase definido pela condição $I_{n+1} + b^2 > 0$. Os valores de *bias* utilizados foram 10, 15 e 20 V, apenas, uma vez que a curva sem *shear*

existente para valores menores de *bias* impede o acesso daquelas condições iniciais à região de escape. Neste gráfico, é notável a persistência das órbitas no mapa com *bias* = 10 V, devido ao efeito remanescente da barreira de transporte relacionado ao fenômeno de *stickiness*. Com o aumento do *bias*, as trajetórias escapam mais rapidamente, e apenas algumas centenas delas ainda permanecem ao fim de 10^6 iterações.

Figura 6.14: Escape das trajetórias: órbitas remanescentes em função do tempo. 2×10^4 condições iniciais entre $0,4 \leq \chi \leq 0,6$ e $0,9 \leq I \leq 1$.

A Figura 6.15a mostra o desvio quadrático médio para as primeiras mil iterações, enquanto a Figura 6.15b mostra o mesmo cálculo até 10^6 de iterações. Em (a), mesmo com poucas iterações, já é possível notar a diferença no comportamento dos mapas para diferentes valores de *bias*. Nesse sentido, observa-se um deslocamento maior para os valores 10, 15 e 20 V, relacionando-se à quebra da curva sem *shear* nesses casos. No gráfico mostrado em (b), fica ainda mais evidente a diferença entre os mapas antes e depois da quebra da barreira de transporte. Para os *bias* 4, 6 e 8 V, o desvio quadrático médio tende a saturar rapidamente, uma vez que a região do espaço de fase acessível às órbitas é limitada pela curva sem *shear*. Por outro lado, para os valores 10, 15 e 20 V, após a quebra da barreira, σ^2 aumenta significativamente, e é tanto maior quanto maior o valor do *bias*, com menor efeito de aprisionamento das trajetórias (*stickiness*). Além disso, nestes três

últimos casos, σ^2 passa a oscilar cada vez mais ao longo do tempo, em decorrência do escape das trajetórias e consequente diminuição dos dados estatísticos. No entanto, as curvas para os *bias* 4, 6 e 8 V apresentam pouca variação, pois o número de trajetórias que contribuem para o cálculo de σ^2 permanece sempre o mesmo.

Figura 6.15: Desvio quadrático médio, σ^2 , calculado para 20000 condições iniciais distribuídas entre $0,4 \leq \chi \leq 0,6$ e $0,9 \leq I \leq 1$, ou seja, na região superior do espaço de fase.

Com isso, é possível calcular o coeficiente de difusão, dado pela Equação (4.2.12), e estimar o valor do expoente γ que satisfaz $\sigma^2 \propto t^\gamma$, fornecendo, assim, uma estimativa sobre o tipo de transporte. A Tabela 6.1 resume os valores de γ encontrados em três intervalos de tempo distintos, para cada valor de *bias*. As primeiras 100 iterações apresentam valores de γ mais próximos de 1, em particular para *bias* = 15 V, que pode ser considerado difusivo, enquanto *bias* = 20 V corresponde a um valor maior que 1, indicando um sistema superdifusivo. Em seguida, no intervalo de 100 a 1000 iterações, os valores de γ diminuem, mesmo para o caso de *bias* = 20 V. De maneira geral, o intervalo de 0 a 1000 iterações apresenta valores ligeiramente abaixo de 1, de forma que esse transporte é, essencialmente, subdifusivo.

Tabela 6.1: Valores do expoente γ para três intervalos de tempo distintos.

Iterações (n)	<i>bias</i> (V)					
	4	6	8	10	15	20
0 - 100	0,855	0,883	0,841	0,909	0,998	1,102
100 - 1000	0,851	0,813	0,871	0,832	0,803	0,908
0 - 1000	0,860	0,824	0,849	0,813	0,835	0,918

Considerações gerais

Os resultados acima foram divididos conforme a aproximação para a dependência radial do campo elétrico de equilíbrio. Em particular, a aproximação quadrática do perfil do campo elétrico introduz uma dependência do parâmetro β em relação à variável I , de forma que o mapa não satisfaz a condição *twist* e o número de rotação adquire um perfil não monotônico, cujo ponto de mínimo corresponde à localização da curva sem *shear*.

Esse efeito é observado nos mapas com os valores de *bias* disponíveis entre 4 e 10 V. A partir de *bias* = 10 V, a curva sem *shear* é destruída, embora, para este valor, o efeito da barreira de transporte ainda persista. Já para os valores de *bias* 15 e 20 V, o efeito da barreira de transporte desaparece e as órbitas podem se difundir pelo espaço de fase. Para o valor de *bias* = 8 V, não foi possível encontrar a curva sem *shear* e a interpolação do perfil do campo elétrico para os valores de 7 e 9 V mostrou que ocorre a inversão da concavidade do perfil do número de rotação para os mapas entre esses valores.

A quantidade de trajetórias que permanece no espaço de fase definido pela condição de escape mostrou-se notavelmente maior para *bias* = 10 V, enquanto valores maiores do *bias* apresentam apenas algumas poucas trajetórias remanescentes ao fim de 10^6 iterações. O desvio quadrático médio também apresenta diferenças significativas entre os diversos valores de *bias*. Nos mapas com *bias* 4, 6 e 8 V, este tende a saturar rapidamente, enquanto os demais casos, após a quebra da curva sem *shear*, apresentam σ^2 ainda crescente com o

tempo.

Com isso, para as primeiras 100 iterações, o mapa para $bias = 15$ V apresenta um valor de γ muito próximo de 1, podendo ser considerado um sistema difusivo. Já para $bias = 20$ V, encontrou-se um valor maior que 1, indicando um sistema superdifusivo. Por outro lado, os demais valores de $bias$ resultam em coeficiente menores que 1, indicando sistemas subdifusivos. No intervalo de 100 a 1000 iterações, os valores de γ diminuem, bem como se observados sobre todo o intervalo, ou seja, de 0 a 1000 iterações, apresentando valores ligeiramente abaixo de 1.

Capítulo 7

Conclusão

Como apresentado na introdução desta dissertação, o objetivo do trabalho foi introduzir um mapa de ondas de deriva para o Texas Helimak, visando estudar o efeito do potencial de *bias* sobre o transporte de partículas no plasma confinado neste equipamento. Este consiste em um mapa simplético bidimensional, descrito em termos das variáveis canônicas de ação-ângulo, (I, χ) . Ele possui dois parâmetros de controle adimensionais, α e β , relacionados às grandezas físicas do sistema. O parâmetro α é proporcional à amplitude da perturbação, enquanto o parâmetro β é dependente do perfil radial do campo elétrico, que varia para cada valor do potencial de *bias*.

Os parâmetros do mapa foram calculados a partir de dados experimentais obtidos em trabalhos recentes, nos quais o valor do potencial de *bias* é fixado em cada disparo. Os valores de *bias* disponíveis foram 4, 6, 8, 10, 15 e 20 V, além do valor nulo. Com isso, tem-se uma configuração do campo elétrico para cada um desses valores, e, conseqüentemente, um conjunto de parâmetros associado a cada um deles.

Os resultados foram apresentados conforme a aproximação para a dependência radial do campo elétrico de equilíbrio. Na aproximação de um campo elétrico uniforme, o parâmetro β permanece constante e o mapa apresenta características de mapas simpléticos *twist*. Por outro lado, as aproximações linear e quadrática do perfil do campo elétrico introduzem uma dependência do parâmetro β em relação à variável I , de forma que o

mapa não mais satisfaz a condição *twist*.

Com isso, o número de rotação adquire um perfil não monotônico, cujo ponto de mínimo corresponde à localização da curva sem *shear*. Esta, por sua vez, tem o efeito de uma barreira de transporte, dividindo o espaço de fase em duas regiões: órbitas com condições iniciais acima da curva sem *shear* não acessam a região do espaço de fase abaixo dela, e vice-versa. Esse efeito é observado nos mapas com valores de *bias* aplicados ao Texas Helimak entre 4 e 10 V.

A partir de $bias = 10$ V, a curva sem *shear* é destruída. Para avaliar como ocorre sua destruição, consideramos mapas com valores de *bias* diferentes dos medidos experimentalmente. Mais precisamente, escolhemos os valores de 7 e 9 V. Ao fazer a interpolação do perfil do campo elétrico para esses valores, observa-se a inversão da concavidade do perfil do número de rotação. Ou seja, para $bias = 9$ V, a curva sem *shear* passa a ser localizada por um máximo local do perfil do número de rotação, e não mais por um ponto de mínimo, como para os valores de *bias* menores que 9 V. É interessante notar que, para o valor de $bias = 8$ V, não foi possível encontrar a curva sem *shear*.

Ainda para $bias = 10$ V, no entanto, o efeito da barreira de transporte ainda persiste, devido ao efeito de *stickiness*, de maneira que poucas órbitas cruzam a região onde antes se encontrava a curva sem *shear* e ainda é possível observar uma divisão do espaço de fase. Já para os valores de *bias* 15 e 20 V, o efeito da barreira de transporte desaparece e as órbitas podem facilmente se difundir pelo espaço de fase. Em vista disso, foram calculados o desvio quadrático médio e o tempo de escape das trajetórias, σ^2 e N , respectivamente, que fornecem informações acerca do impacto da quebra da curva sem *shear* sobre o transporte.

A quantidade de trajetórias que permanece no espaço de fase definido pela condição de escape mostrou-se notavelmente maior para $bias = 10$ V, enquanto valores maiores do *bias* apresentam apenas algumas poucas trajetórias remanescentes ao fim de 10^6 iterações. Isso ocorre em função da persistência do efeito da barreira de transporte e do efeito de *stickiness* nas proximidades de pequenas ilhas remanescentes, mesmo após a quebra

da curva sem *shear*. Tal resultado também possui efeito sobre o cálculo de σ^2 , pois a diminuição da quantidade de órbitas ao longo do tempo prejudica a estimativa daquela grandeza.

Logo nas primeiras iterações ($n \sim 10^3$), o desvio quadrático médio apresenta diferenças significativas entre os diversos valores de *bias*, aumentando mais rapidamente para valores maiores do *bias*. Após diversas iterações ($n \sim 10^6$), é possível observar o impacto da quebra da curva sem *shear* sobre σ^2 : nos mapas com *bias* 4, 6 e 8 V, para os quais o espaço de fase é dividido pela barreira de transporte, o desvio quadrático médio tende a saturar rapidamente, enquanto os demais casos, após a quebra da curva sem *shear*, apresentam σ^2 ainda crescente com o tempo.

Utilizando os resultados para o desvio quadrático médio, pôde-se calcular o valor do expoente γ que satisfaz $\sigma^2 \propto t^\gamma$, obtendo, assim, uma estimativa sobre o tipo de transporte. Com isso, observou-se que, para as primeiras 100 iterações, o mapa para *bias* = 15 V pode ser considerado como um sistema difusivo, apresentando valor de γ muito próximo de 1. Já para *bias* = 20 V, encontrou-se um valor maior que 1, indicando um sistema superdifusivo. Por outro lado, os demais valores de *bias* resultam em coeficiente menores que 1, indicando sistemas subdifusivos. No intervalo de 100 a 1000 iterações, os valores de γ diminuem, bem como se observados sobre todo o intervalo, ou seja, de 0 a 1000 iterações, apresentando valores ligeiramente abaixo de 1.

Portanto, este trabalho constituiu uma oportunidade para o estudo do transporte de partículas no Texas Helimak, considerando suas características geométricas e de confinamento do plasma. Nesse sentido, o modelo do mapa de ondas de deriva permitiu observar a formação e destruição da curva sem *shear*, bem como seu efeito sobre o transporte, em função do valor do potencial de *bias*. Também pôde-se trabalhar conceitos fundamentais da teoria de sistemas dinâmicos, com a possibilidade de visualizar sua aplicação a um sistema conhecido, baseado em dados experimentais e através da elaboração de códigos computacionais específicos para o problema.

Por fim, nota-se, ainda, a possibilidade de uma investigação mais acurada sobre o comportamento do mapa com $bias = 8$ V, para o qual ocorre a inversão da concavidade do perfil do número de rotação e a dificuldade, no âmbito deste trabalho, de investigar a dinâmica da curva sem *shear*. Também seria possível estudar o comportamento do mapa em função da variação da amplitude da perturbação, à qual é proporcional o parâmetro α do mapa, bem como introduzir o *shear* do campo magnético.

Referências Bibliográficas

- Birkhoff, G. D. 1935. *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques*. Ex aedibus academicis in Civitate Vaticana.
- Bittencourt, J. A. 2004. *Fundamentals of Plasma Physics*. 3rd edn. Springer-Verlag.
- Boozer, A. H. 2005. Physics of magnetically confined plasmas. *Rev. Mod. Phys.*, **76**(Jan), 1071–1141.
- Caldas, I. L., Viana, R. L., Jr., J. D. Szezech, Portela, J. S. E., Fonseca, J., Roberto, M., Martins, C. G. L., & da Silva, E. J. 2012. Nontwist symplectic maps in tokamaks. *Commun Nonlinear Sci. Numer. Simulat.*, **17**(2012).
- Constantinescu, D., & Firpo, M-C. 2012. Modifying locally the safety profile to improve the confinement of magnetic field lines in tokamak plasmas. *Nuclear Fusion*, **52**(5), 054006.
- Contopoulos, G., & Harsoula, M. 2008. Stickiness in chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **18**(10), 2929–2949.
- del Castillo-Negrete, D., & Morrison, P. J. 1992. Hamiltonian chaos and transport in quasigeostrophic flows. *Chaotic dynamics and transport in fluids and plasmas*, 181–207.
- del Castillo-Negrete, D., & Morrison, P. J. 1993. Chaotic transport by Rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics (1989-1993)*, **5**(4), 948–965.
- del Castillo-Negrete, D., Greene, J. M., & Morrison, P. J. 1996. Area preserving non-twist maps: periodic orbits and transition to chaos. *Physica D*, **91**, 1–23.
- Efthymiopoulos, C., Contopoulos, G., Voglis, N., & Dvorak, R. 1997. Stickiness and cantori. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **30**(23), 8167.
- Fasoli, A., Labit, B., McGrath, M., Müller, S. H., Plyushchev, G., Podestà, M., & Poli, F. M. 2006. Electrostatic turbulence and transport in a simple magnetized plasma. *Physics of Plasmas*, **13**(5), 055902.
- Gentle, K. W., & Huang, H. 2008. Texas Helimak. *Plasma Science and Technology*, **10**(3), 284–289.
- Hidalgo, C. 2004. On the nature of transport in fusion plasmas. *Astrophysics and Space Science*, **292**, 681–690.

- Horton, W. 1999. Drift waves and transport. *Reviews of Modern Physics*, **71**(3), 735–778.
- Horton, W., Hyoungh-Bin, P., Jae-Min, K., Strozzi, D., Morrison, P. J., & Duk-In, C. 1998. Drift wave test particle transport in reversed shear profile. *Physics of Plasmas*, **5**(11), 3910–3917.
- Horton, W., Perez, J. C., Gentle, K., Rowan, W. L., Lee, K., & Dahlburg, R. B. 2006. Drift wave instability in the Helimak experiment. *Physics of Plasmas*, **13**(032101).
- Lichtenberg, A. N., & Lieberman, M. A. 1992. *Symplectic maps, variational principles, and transport*. 2nd edn. Berlin: Springer-Verlag.
- Luckhardt, S. 1999. The Helimak: A one dimensional toroidal plasma system. *Technical report, San Diego: University of California*.
- Meiss, J. D. 1992. Symplectic maps, variational principles, and transport. *Reviews of Modern Physics*, **64**(3), 795–848.
- Miyamoto, K. 2005. *Plasma Physics and Controlled Nuclear Physics*. Springer-Verlag.
- Möser, J. 1962. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II*, 1–20.
- Portela, J. S. E., Caldas, I. L., Viana, R. L., & Morrison, P. J. 2007. Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **17**(05), 1589–1598.
- Reichl, L. E. 2004. *The transition to chaos: conservative classical systems and quantum manifestations*. 2nd edn. Springer-Verlag.
- Rosalem, K. C., Roberto, M., & Caldas, I. L. 2014. Influence of the electric and magnetic shears on tokamak transport. *Nuclear Fusion*, **54**(6), 064001.
- Rypdal, K., Gronvoll, E., Oynes, F., Fredriksen, A., Armstrong, R. J., Trulsen, J., & Pécseli, H. L. 1994. Confinement and turbulent transport in a plasma torus with no rotational transform. *Plasma physics and controlled fusion*, **36**(7), 1099.
- Szezech Jr, J. D., Caldas, I. L., Lopes, S. R., Viana, R. L., & Morrison, P. J. 2009. Transport properties in nontwist area-preserving maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **19**(4), 043108.
- Szezech Jr, J. D., Caldas, I. L., Lopes, S. R., Morrison, P. J., & Viana, R. L. 2012. Effective transport barriers in nontwist systems. *Physical Review E*, **86**(3), 036206.
- Toufen, D. L. 2012. *Controle da Turbulência em Plasmas*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Departamento de Física Aplicada.
- Toufen, D. L., Guimarães-Filho, Z. O., Caldas, I. L., Marcus, F. A., & Gentle, K. W. 2012. Turbulence driven particle transport in Texas Helimak. *Physics of Plasmas*, **19**(012307).

- Toufen, D. L., Guimarães-Filho, Z. O., Caldas, I. L., Szezech, J. D., Lopes, S., Viana, R. L., & Gentle, K. W. 2013. Analysis of the influence of external biasing on Texas Helimak turbulence. *Physics of Plasmas (1994-present)*, **20**(2), 022310.
- Ullmann, K. 1998. *Métodos de Análise de Mapeamentos Não-lineares com Aplicações em Física de Plasmas*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Departamento de Física Aplicada.
- Vieira Abud, C. 2013. *Transporte em sistemas hamiltonianos não-twist*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Departamento de Física Aplicada.
- Zaslavsky, G. M. 2002a. Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. *Physics Reports*, **371**(6), 461–580.
- Zaslavsky, G. M. 2002b. Dynamical traps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **168**, 292–304.