Universidade de São Paulo
Instituto de Física

GERAÇÃO DE ESTADOS NÃO CLÁSSICOS DO
CAMPO ELETROMAGNÉTICO ATRAVÉS DO
PROCESSO DE MISTURA DE QUATRO ONDAS
EM MEIOS ATÔMICOS

Carlos Andres Gonzalez Arciniegas

Orientador:

Prof. Dr. Marcelo Martinelli

Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Mestre em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Marcelo Martinelli- IFUSP

Prof. Dr. Arnaldo Gammal - IFUSP

Prof. Dr. Luis Eduardo Evangelista de Araujo - UNICAMP

São Paulo
2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

González Arciniegas, Carlos Andrés

Geração de estados não clássicos do campo eletromagnético através do processo de mistura de quatro ondas em meios atômicos – São Paulo, 2013.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Depto. de Física Experimental

Orientador: Prof Dr Marcelo Martinelli

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Informação quântica; 2. Física atômica;
3. Teoria quântica da luz; 4. Óptica quântica.

USP/IF/SBI-057/2013

Resumo

Estudamos teoricamente a geração de estados emaranhados do campo eletromagnético através do processo de mistura de quatro ondas em uma nuvem de átomos frios em configuração duplo- Λ trabalhando perto da ressonância. Mostra-se que neste caso é possível gerar emaranhamento com uma potência de bombeio muito menor do que na situação em que temos átomos quentes [17]. Baseando-se nos parâmetros da armadilha de átomos de rubídio de nosso laboratório, calcula-se uma violação de 46.5 % do limite imposto pela desigualdade DGCZ [59] para uma frequência de Rabi dos bombeios de $\Omega = 0.8$ MHz (neste caso, equivalente a uma potência de $0.3 \mu\text{W}$) e uma dessintonia de $\Delta = 20$ MHz para uma transição Λ enquanto a outra permanece ressonante.

Também foi analisado o emaranhamento entre as bandas laterais dos feixes de prova e conjugado, estudando a estrutura do emaranhamento entre estes quatro modos através do critério positividade sobre transposição parcial em variáveis contínuas. Nesta análise, se observaram correlações quânticas entre pares de campos (a banda superior do feixe de prova e a banda inferior do feixe conjugado, e a banda inferior do feixe de prova e a banda superior do feixe conjugado). Estas evidências, junto com as equações de evolução dos feixes, sugerem que a mistura de quatro ondas, dentro das considerações supostas neste trabalho, gera estados nos quais o emaranhamento é exclusivo entre as bandas laterais superior de um feixe com a inferior do outro.

[17] Vincent Boyer *et al.* Science, 321-544 (2008).

[59] Lu-Ming Duan *et al.* Phys. Rev. Lett 84-2722 (2000)

Abstract

We have theoretically studied the generation of entangled states of the electromagnetic field through the four wave mixing (FWM) process in a cold atomic cloud in a double- Λ , close to resonance configuration. It is shown that in this case it is possible to generate entanglement with a pump power much weaker than in the situation which we have with hot atoms [17]. Based on the parameters obtained in the magneto-optical trap (MOT) with rubidium at our laboratory, we calculated a violation of 46.5 % of the limit imposed by the DGCZ inequality [59] at a Rabi frequency of the pump fields of $\Omega = 0.8$ MHz (in this case, this is equivalent to a pump power of $0.3 \mu\text{W}$) and a detuning of $\Delta = 20$ MHz in one of the Λ transitions, while the other one remains resonant.

We also analysed the entanglement between the side bands of the probe and conjugate beams. Using the positive partial transpose criterion in continuous variables, we studied the structure of entanglement within these side bands. In this analysis we observed quantum correlations between pairs of fields (the upper side band of the probe beam with the lower side band of the conjugate beam, and the lower side band of the probe beam with the upper side band of the conjugate beam). These evidences, together with the evolution equations of the beams, suggest that the 4WM process, within the considerations made in this work, generates states where the entanglement is exclusive between the upper side band of one beam and the lower side band of the other.

[17] Vincent Boyer *et al.* Science, 321-544 (2008).

[59] Lu-Ming Duan *et al.* Phys. Rev. Lett 84-2722 (2000).

Agradecimentos

Em primeiro lugar, devo agradecer a meu pai, Eliecer Gonzalez, e a minha mãe, Elsy Maria Arciniegas, pelo apoio incondicional que têm me dado durante toda minha vida. O fato de conseguir estudar este mestrado é principalmente graças a eles.

Agradeço ao professor Marcelo Martinelli, por ter me aceito como seu estudante, e por sua excelente orientação, definitivamente aprendi muito graças a ele.

Agradeço a minha avó Yeyita, a minhas irmãs Diana e Mary, a meu sobrinho Emmanuel (Chaki), que me acompanharam desde a distância em todo momento e sempre estiveram ali pra mim, a toda minha família, meus tios e tias, primos e primas que sempre me apoiaram, obrigado a todos vocês.

Minha gratidão aos membros do grupo, o Professor Paulo Nussenzveig, sempre com seu ponto de vista crítico sobre os conceitos da física, aos colegas do LMCAL, o Antonio, o Felipe, o Hans, a Klara, o Igor, a Rayssa, o Renato, o Renné, o Ashok e a Paula, pelas discussões sobre temas diversos na hora do café, com vocês aprendi muitas coisas.

Agradeço ao todo o pessoal do Aconchego, república na qual morei durante quase todo o mestrado. Obrigado pelos bons momentos vividos nessa casa, gente boa que me recebeu no Brasil de braços abertos. Quero agradecer especialmente a Priscila por sua colaboração, sem sua ajuda esta tese tivesse ficado escrita numa mistura esquisita de espanhol com um português muito errado.

A todas as boas amizades que fiz aqui no Brasil, não só os brasileiros, mas de muitas partes do mundo (a fim de não fazer destes agradecimento um tratado à amizade, e para não correr o risco de esquecer alguém, prefiro não nomear individualmente cada um de vocês), obrigado por terem contribuído com minha formação como pessoa e por fazer com que minha estadia aqui no Brasil fosse muito mais legal. Agora sei que tenho casa onde ficar em muitos lugares do mundo.

Agradeço à Maria Isabel e ao Eber da CPG, e também à Juliane na secretaria da FEP, sempre dispostos a oferecer ajuda pra quem precisar.

Finalmente agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

"It doesn't matter how beautiful your theory is, it doesn't matter how smart you are. If it doesn't agree with experiment, it's wrong."

Richard P. Feynman

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos básicos de mecânica quântica	6
1.1 Introdução	6
1.2 Operador Densidade	9
1.3 Relações de Incerteza	11
1.4 Quantização do Campo Eletromagnético	12
1.4.1 Elementos de Eletrodinâmica Clássica e Equações de Maxwell . . .	13
1.4.2 Modos Normais e Quantização do Campo Livre no Calibre de Coulomb	15
1.4.3 Quadraturas do Campo, Estados Coerentes e Estados Comprimidos	19
1.4.4 Campos Quase-monocromáticos e Operadores no Domínio da Frequência	23
2 Interação Radiação-Matéria	27
2.1 Hamiltoniano de Interação Entre o Campo Eletromagnético e a Matéria .	27
2.2 Equações de Heisenberg-Langevin	30
3 Emaranhamento	35
3.1 Definição Formal do Emaranhamento	37
3.2 Critérios de Separabilidade	39
3.2.1 Critério de Transposição Parcial Positiva (PPT)	39
3.2.2 Soma de Variâncias	43
4 Mistura de Quatro Ondas	47
4.1 Modelo Duplo- Λ de interação	47
4.2 Amplitudes dos Campos	56
4.3 Matriz Espectral de Ruído dos Campos	60
4.4 Descrição e Análise das Bandas Laterais	64
4.4.1 Emaranhamento Entre 4 modos	68
4.4.2 Emaranhamento Entre 3 Modos	71
4.4.3 Emaranhamento Entre 2 Modos	72
Conclusões e Perspectivas	75
A Matriz de Difusão	77

Referências Bibliográficas

79

Introdução

O desenvolvimento da tecnologia da computação, impulsionado principalmente pela miniaturização dos circuitos integrados, vem crescendo a um ritmo exponencial, comprovando-se que, até a atualidade, é satisfeita a famosa lei de Moore, a qual prevê que aproximadamente a cada dois anos o número de transistores num circuito integrado tende a se duplicar. Atualmente o tamanho destes transistores já tem alcançado a escala dos nanômetros e, a fim de continuar com o ritmo de desenvolvimento atual, em pouco tempo o tamanho dos transistores alcançarão escalas nas quais o comportamento dos sistemas deixa de ser ditado pelas regras da física clássica e começam a se comportar segundo a mecânica quântica.

Nesta linha de pensamento, além de utilizar a mecânica quântica para a fabricação de dispositivos cada vez menores, é também possível utilizar as características desta teoria para o processamento da informação através da implementação de algoritmos intrinsecamente quânticos que utilizam os fenômenos próprios da teoria, como a superposição coerente de estados quânticos e o emaranhamento. Desta forma, a unidade de informação computacional clássica, o bit, que pode tomar os valores discretos de 0 ou 1, é substituído pelo bit quântico, também conhecido como qubit, o qual pode estar numa superposição coerente de 0 e 1 da forma $(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle)$. A ciência que utiliza a mecânica quântica como base para o desenvolvimento de algoritmos quânticos, assim como sua implementação física é conhecida como **Informação Quântica**.

A possibilidade de utilizar características quânticas na construção de algoritmos tem se mostrado como uma grande vantagem em relação a sua contraparte clássica, como por exemplo, em processos de criptografia com a distribuição de chaves em protocolos de encriptação de dados (*QKD Quantum Key Distribution*) [1, 2] ou na área da computação quântica [3, 4], onde se tem desenvolvido algoritmos como o algoritmo de Groover para a busca em lista [5], que provê uma otimização quadrática na demanda de recursos computacionais, ou o algoritmo de Shor [6] (implementado experimentalmente em 2001 [7]) para a fatoração de números inteiros que tem uma otimização impressionante com

relação a sua contraparte clássica já que a demanda de recursos cresce polinomialmente em vez de exponencialmente¹.

Talvez uma das aplicações mais fascinantes da computação quântica seria a implementação de simuladores quânticos, como foi proposto por Feynman já no ano de 1982 [8], o qual consiste em resolver problemas da mecânica quântica, que em geral é muito difícil computacionalmente (a demanda de recursos para resolver este tipo de problemas num computador clássico em geral é muito grande), inclusive em forma aproximada, com o uso de um computador quântico que resolva tal problema de uma forma muito mais eficiente. Avanços neste sentido foram feitos, já no campo experimental, onde o cálculo do espectro de energia de moléculas simples, como a molécula diatômica de H_2 foi feito em 2010 [9].

Existem dois caminhos diferentes no paradigma atual para implementar sistemas de computação quântica: a computação em variáveis discretas (DV²), e em variáveis contínuas (CV³). A computação quântica sobre DV utiliza sistemas quânticos que possuem um espectro discreto e finito, entre os quais se encontram os populares sistemas de dois níveis ou qubits já apresentados, que foram os primeiros a serem desenvolvidos, talvez pela semelhança que possuem com os sistemas de computação discreta clássica atual, embora também seja possível trabalhar com sistemas de d ($d > 2$) níveis na computação em DV, que são chamados de qudits. Entre os sistemas físicos nos quais é possível implementar a computação em DV, estão sistemas de polarização do fóton, sistemas de spin 1/2 (como o elétron) ou sistemas que utilizam só uns poucos níveis de energia interno de átomos. Algoritmos implementados nestes tipo de sistemas em geral são de caráter probabilístico (embora existam exceções), funcionando só em uma fração das realizações feitas, sendo necessário uma pós-seleção dos eventos bem sucedidos. Porém aqueles eventos bem sucedidos dão resultados muito acurados.

No regime de variáveis contínuas, que teve um desenvolvimento posterior, são utilizados sistemas que possuem um espectro contínuo, por exemplo a posição ou o momento de uma partícula, ou as quadraturas do campo eletromagnético. Nestes sistemas foram demonstrados experimentalmente vários protocolos e algoritmos em informação quântica, como o teletransporte [10] e a distribuição de chaves criptográficas [11], entre outras.

As implementações de algoritmos no regime de CV apresentam algumas vantagens sobre os sistemas em DV como por exemplo: a perspectiva de maiores taxas de repetição e

¹Um dos sistemas de encriptação mais populares, o RSA é baseado na assimetria da dificuldade do problema da fatoração de números grandes, (é muito fácil multiplicar dois números primos mas é muito difícil fatorá-lo) mas com um computador quântico a fatoração já não é mais um problema difícil e portanto a implementação eficiente do algoritmo de Shor suporia um grande risco na segurança destes cripto-sistemas

²do inglês *Discrete Variable*

³do inglês *Continuous Variable*

o caráter determinístico na implementação dos algoritmos [12]. Mas por outro lado a fidelidade dos processos fica comprometida, levando a resultados aproximados, o qual geralmente está relacionado com a impossibilidade de gerar grandes níveis de *squeezing*⁴ ou emaranhamento.

A realização prática de um computador quântico depende fortemente da viabilidade técnica de controlar e gerar sistemas quânticos, sendo os estados emaranhados uns dos recursos mais úteis, porém, tanto o emaranhamento como a superposição de estados são características facilmente degradadas quando os sistemas quânticos interagem com o ambiente [13]. No entanto, os estados emaranhados do campo eletromagnético possuem características muito interessantes para a realização de computação quântica, já que eles são um meio excelente para a transmissão de informação (viajam na velocidade da luz) e são relativamente robustos contra a decoerência. Porém, para a geração destes estados emaranhados é necessário ter um elemento intermediário para fazer interagir os campos.

O fenômeno da mistura de 4 ondas (FWM⁵) é um no qual é possível fazer interagir 4 feixes distintos intermediado por um meio não linear, que tem se mostrado como um bom gerador de estados não clássicos da luz. Foi através deste processo que foi feita, em 1985, a primeira demonstração experimental de luz comprimida, utilizando átomos de sódio como meio gerador da mistura de 4 ondas [14]. Além disso, também tem se demonstrado a geração de feixes correlacionados quanticamente. Em sistemas de 3 níveis em configuração Λ foi mostrado experimentalmente a produção de pulsos correlacionados em intensidade com uma redução de ruído de 0,2 dB abaixo do SQL⁶ [15]. A FWM em meios atômicos também foi implementada através de sistemas em configuração duplo Λ com nuvens quentes de vapor de Rubídio, no qual foi demonstrada a geração de feixes quanticamente emaranhados. Usando o processo de mistura de quatro ondas como amplificador de múltiplos modos espaciais, foram observadas correlações quânticas entre as imagens gêmeas geradas no processo [16, 17]. Este experimento foi realizado em situações onde os campos se encontravam muito afastados da ressonância atômica, permitindo assim uma baixa absorção, porém precisado de campos de bombeio muito intensos (com potencias da ordem de varias centenas de mW) capazes de induzir o processo de mistura de 4 ondas.

A motivação principal desde trabalho é o estudo teórico do uso do processo de mistura de quatro ondas na geração de emaranhamento, visando uma realização experimental próxima no Laboratório de Manipulação Coerente de Átomos e Luz (LMCAL). Mas diferente das realizações experimentais antes mencionadas, quer se estudar o processo num

⁴Alguns dos protocolos em CV poderiam se realizar com fidelidade unitária se fosse possível gerar estados com compressão infinita, mas isto não é possível pois um estado com squeezing infinito teria também, infinita energia.

⁵do inglês *Four Wave Mixing*

⁶do inglês *Standar Quantum Limit* (Limite quântico padrão)

regime de átomos resfriados numa armadilha magneto-ótica, sistema no qual faltam estudos detalhados na teoria. Nesta configuração de átomos frios, já que não apresenta alargamento Doppler significativo, é possível realizar uma configuração na qual o sistema pode se encontrar muito perto da ressonância atômica e desta forma obter grandes não linearidades com intensidades dos campos de bombeio muito menores que no caso do experimento antes mencionado. Esta configuração quase-ressonante tem como consequência a otimização do processo de mistura de quatro ondas e, dessa forma, pode-se compensar a baixa densidade ótica que apresenta o sistema de átomos frios.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 será feita uma introdução muito rápida nos conceitos básicos da mecânica e ótica quântica que serão utilizados durante todo o trabalho, como são a descrição de estados quânticos através do operador densidade e as relações de incerteza na teoria quântica. Também se introduzirá o leitor à descrição quântica da teoria eletromagnética e se apresentarão as chamadas quadraturas quânticas do campo eletromagnético, introduzindo dessa forma os estados coerentes e os estados comprimidos. Por último mostraremos uma descrição quântica muito útil de campos quase-monocromáticos, e através da transformada de Fourier dos ditos campos, se deduzirá uma relação de incerteza no domínio da frequência, da qual é possível obter uma relação de incerteza no domínio da frequência. Também se introduzirão as funções de correlação e sua correspondente densidade espectral de ruído. No capítulo 2 se descreverá a interação entre o campo eletromagnético quantizado e um sistema atômico de dois níveis, deduzindo as equações de Heisenberg-Langevin para os operadores atômicos, os quais levam em conta uma fonte de decoerência muito importante expressada nos operadores de Langevin, que tem como origem a dispersão de luz pelo átomo para outros modos do campo que não são de interesse. No capítulo 3 se introduzirá formalmente o conceito de emaranhamento quântico e se apresentarão dois critérios para demonstrar emaranhamento: o critério de Positividade sob Transposição Parcial (PPT) e o critério de soma de variâncias (desigualdade DGCZ) e finalmente, será feita uma demonstração que formalmente mostra que é possível a aplicação da desigualdade DGCZ ao operadores no domínio da frequência. No capítulo 4 será exposto o modelo duplo Λ que é usado para modelar a mistura de 4 ondas no meio atômico, e são introduzidos operadores atômicos coletivos que dependem da posição e a equação de propagação dos campos quânticos de prova e conjugado. A partir destas equações serão apresentados os resultados obtidos, primeiro para as amplitudes destes campos, estudando o comportamento da amplificação ou atenuação do campo de sonda (conhecido como campo de prova), e/ou a criação do campo conjugado a partir do processo da mistura. Logo depois se estudarão as correlações quânticas e o emaranhamento dos ditos campos utilizando os conceitos apresentados nos capítulos anteriores, particularmente a desigualdade DGCZ. Por último será feita uma descrição dos campos em termos das bandas laterais para

prosseguir com a análise do emaranhamento entre as mesmas, utilizando o critério PPT, e estudar a estrutura das correlações quânticas presentes entre as bandas laterais.

Capítulo 1

Conceitos básicos de mecânica quântica

1.1 Introdução

O principal objetivo deste capítulo é a introdução dos conceitos básicos da mecânica quântica como uma teoria que descreve as propriedades físicas dos sistemas num nível muito mais fundamental, e com um nível de precisão muito maior do que a teoria clássica faz. Estes conceitos (como também a notação) serão utilizados ao longo deste trabalho, o que justifica a existência deste capítulo. Explicações mais detalhadas e/ou com outras abordagens podem ser achadas em qualquer livro introdutório de mecânica quântica [18–20].

A mecânica clássica faz a descrição dos sistemas físicos por meio de um conjunto de variáveis $X = \{p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n\}$, que representam um ponto no chamado espaço de fase e onde n é a dimensão do sistema. O par p_i, q_i descrevem o i -ésimo grau de liberdade do sistema. A dinâmica do sistema vem dada por uma função $H(p_i, q_i, t)$ chamada função Hamiltoniana¹, por meio das chamadas equações de Hamilton

$$\begin{aligned}\frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i},\end{aligned}\tag{1.1}$$

dada uma condição inicial X_0 e a hamiltoniana do sistema, podemos obter toda a informação física possível do sistema para qualquer instante de tempo, já que todos os observáveis são funções das variáveis $X(t)$.

¹Geralmente, quando escrita no sistema de coordenadas correto, a função Hamiltoniana coincide com a Energia do sistema.

Já no caso quântico, estes observáveis são promovidos a operadores hermitianos que agem num espaço vetorial complexo que cumpre com as propriedades de espaço de Hilbert, e o estado do sistema num instante de tempo dado, é descrito por um vetor $|\psi\rangle$ normalizado, neste espaço. A evolução do estado é governada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle \quad (1.2)$$

onde $\hat{H}(t) = \hat{H}(\hat{p}_i, \hat{q}_i, t)$ é o operador hamiltoniano do sistema, e os operadores que compõem o vetor $\hat{X} = \{\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_n, \hat{q}_1, \dots, \hat{q}_n\}$ cumprem as relações de comutação canônicas

$$\hat{q}_i \hat{p}_j - \hat{p}_j \hat{q}_i \equiv [\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{i,j}. \quad (1.3)$$

Visto que o vetor $|\psi\rangle$ representa o estado do sistema, ele contém toda a informação física acessível do mesmo, que no caso da mecânica quântica são os valores esperados (ou valores médios) dos observáveis (representados por operadores hermitianos no espaço de Hilbert). Este valor esperado vem definido como: seja $\hat{A}$ um operador hermitiano, o valor médio dele no tempo t e no estado $|\psi(t)\rangle$ é

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle \quad (1.4)$$

onde $\langle \phi | \psi \rangle$ é o produto escalar entre os vetores $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$. Para cada medida, os possíveis valores que podem resultar da medição do observável $\hat{A}$ são os autovalores a_n do operador

$$\hat{A} |a_n\rangle = a_n |a_n\rangle \quad (1.5)$$

(com $|a_n\rangle$ sendo o correspondente autovetor) com probabilidade $P_n(t) = |\langle a_n | \psi(t) \rangle|^2$. Isto justifica a definição (1.4), já que se escrevemos o vetor $|\psi\rangle$ na base de autovetores de $\hat{A}$ como $|\psi(t)\rangle = \sum_n \langle a_n | \psi \rangle |a_n\rangle$, e levamos em conta que os vetores $|a_n\rangle$ formam uma base ortonormal, temos que $\langle \hat{A} \rangle(t) = \sum_n a_n P_n(t)$.

As definições anteriores são feitas para o chamado formalismo de Schrödinger, onde o vetor de estado evolui com o tempo enquanto os operadores estão fixos. Pode-se desenvolver um formalismo no qual os operadores variam no tempo e o vetor de estado permanece fixo, que é o chamado formalismo de Heisenberg.

Definindo o operador de evolução temporal $\hat{U}(t)$, que relaciona o estado inicial no tempo $t = 0$, $|\psi(0)\rangle$ com o estado num tempo arbitrário t , $|\psi(t)\rangle$ por meio de

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi(0)\rangle. \quad (1.6)$$

Juntando esta definição com a equação de Schrödinger (1.2), temos que o operador $\hat{U}(t)$ satisfaz a equação

$$i\hbar \frac{d\hat{U}(t)}{dt} = \hat{U}(t)\hat{H}(t), \quad (1.7)$$

junto com a condição inicial $\hat{U}(0) = \hat{\mathbb{I}}$ onde $\hat{\mathbb{I}}$ é o operador identidade. A solução da equação (1.7), no caso que $[\hat{H}(t), \hat{H}(t')] = 0$ é²

$$\hat{U}(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}(t') dt' \right]. \quad (1.8)$$

Usando a definição da equação (1.6) na equação (1.4) obtém-se

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \psi(0) | \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t) | \psi(0) \rangle \equiv \langle \psi(0) | \hat{A}(t) | \psi(0) \rangle, \quad (1.9)$$

onde temos definido o operador dependente do tempo $\hat{A}(t) \equiv \hat{U}^\dagger(t) \hat{A} \hat{U}(t)$. Este operador satisfaz a chamada equação de Heisenberg

$$i\hbar \frac{d\hat{A}(t)}{dt} = [\hat{A}(t), \hat{H}(t)]. \quad (1.10)$$

Neste formalismo podemos calcular valores esperados um pouco mais gerais, como por exemplo, valores esperados do tipo $\langle \hat{A}(t) \hat{B}(t') \rangle$ com $t \neq t'$, que não podem ser calculados no formalismo de Schrödinger.

Existe um terceiro formalismo que pode ser considerado intermediário entre o formalismo de Schrödinger e o de Heisenberg, que é chamado formalismo de interação ou de Dirac, no qual tanto os operadores como os estados evoluem no tempo. Neste formalismo devemos ter um Hamiltoniano que possa ser escrito da seguinte forma

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I \quad (1.11)$$

Onde em geral, e para que o formalismo seja útil, $\hat{H}_0$ é um Hamiltoniano conhecido que é fácil de diagonalizar, e $\hat{H}_I$ é uma interação ou uma perturbação que em geral é difícil de solucionar. Com esta separação, define-se o operador de evolução temporal $\hat{U}_0(t)$ que só depende do Hamiltoniano $\hat{H}_0$ como

$$\hat{U}_0(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{H}_0(t') dt' \right], \quad (1.12)$$

²É possível definir um operador de evolução temporal no caso em que a Hamiltoniana não comute com ela mesma para tempos diferentes, isso é feito com ajuda do operador de ordenamento temporal. Uma descrição deste procedimento pode ser encontrado em [21].

e com esta definição se definem os operadores e os estados (ambos dependentes do tempo) no formalismo de Dirac

$$|\psi_D(t)\rangle = \hat{U}_0^\dagger(t) |\psi_S(t)\rangle \quad (1.13)$$

$$\hat{A}_D(t) = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}_0(t), \quad (1.14)$$

onde o subíndices S e D fazem referência aos formalismos de Schrödinger e Dirac respectivamente. Neste formalismo a evolução dos operadores vem dada pelo operador $\hat{H}_{0D} = \hat{H}_0$ segundo a equação

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{A}_D(t) = [\hat{A}_D(t), \hat{H}_0]. \quad (1.15)$$

e a evolução dos estados vem dada pelo operador $\hat{H}_{ID} = \hat{U}_0^\dagger(t) \hat{H}_I \hat{U}_0(t)$ através da equação

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_D(t)\rangle = \hat{H}_{ID}(t) |\psi_D(t)\rangle, \quad (1.16)$$

A vantagem desta representação é que temos removida a evolução “trivial” dada por $\hat{H}_0$ da equação de Schrödinger, e colocado ela na equação de evolução para os operadores.

1.2 Operador Densidade

Em muitos casos, por diferentes motivos (por exemplo quando temos sistemas de muitas partículas ou quando temos perda de informação devido ao nosso sistema não ser um sistema fechado), não podemos ter conhecimento total de qual é o vetor de estado do sistema, mas podemos saber que o sistema se encontra em certo estado $|\psi_i\rangle$ com certa probabilidade p_i . Logo, na hora de fazer o cálculo dos valores esperados temos que levar em conta esse “desconhecimento”, e a equação (1.4) é modificada da seguinte forma

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \sum_i p_i \langle \psi_i(t) | \hat{A} | \psi_i(t) \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i(0) | \hat{A}(t) | \psi_i(0) \rangle \quad (1.17)$$

Seja $\{|n\rangle\}$ uma base do espaço de Hilbert, podemos escrever o operador identidade da forma $\hat{\mathbb{I}} = \sum_n |n\rangle \langle n|$, e introduzindo este operador na frente do operador $\hat{A}$ em (1.17) temos

$$\begin{aligned} \langle \hat{A} \rangle(t) &= \sum_{i,n} p_i \langle \psi_i | \hat{A} | n \rangle \langle n | \psi_i \rangle = \sum_n \langle n | \left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \right) \hat{A} | n \rangle, \\ &= Tr\{\hat{\rho} \hat{A}\}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Na equação anterior foi definido o operador densidade $\hat{\rho}$ como $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i|$ (onde temos que a soma das probabilidades é um, i.e. $\sum_i p_i = 1$), que é uma forma mais geral de representar o estado do sistema. No caso do formalismo de Schrödinger, é este operador quem varia no tempo

$$\hat{\rho}(t) = \sum_i p_i |\psi_i(t)\rangle \langle\psi_i(t)| = \hat{U}(t) \left(\sum_i p_i |\psi_i(0)\rangle \langle\psi_i(0)| \right) \hat{U}^\dagger(t) = \hat{U}(t) \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger(t) \quad (1.19)$$

e a evolução deste operador vem dada pela equação de Liouville-von Neumann (que pode ser deduzida com ajuda da equação 1.7)

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (1.20)$$

Entre as propriedades do operador densidade temos:

- É um operador semidefinido positivo, i.e. que para todo vetor $|\phi\rangle$ deve-se cumprir que $\langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle \geq 0$, e portanto todos seus autovalores devem ser maiores ou iguais que zero.
- $\hat{\rho}$ tem traço um, i.e. $Tr\{\hat{\rho}\} = 1$.
- $Tr\{\hat{\rho}^2\} \leq 1$ e $Tr\{\hat{\rho}\} = 1$ se e somente se o operador densidade é da forma $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle\psi|$ (que se conhece como estado puro).

Pode-se escrever o operador densidade numa base $\{|\varphi_i\rangle\}$ qualquer, na qual ele em geral não será diagonal

$$\hat{\rho} = \sum_{i,j} p_{i,j} |\varphi_i\rangle \langle\varphi_j|. \quad (1.21)$$

Na equação anterior os coeficientes $p_{i,i}$ são chamados de populações, já que representam a probabilidade de que o sistema se encontre no estado $|\varphi_i\rangle$, e os coeficientes $p_{i,j}$ $i \neq j$ são chamados coerências porque eles guardam informação sobre a possibilidade de ter interferência quântica entre os estados $\{|\varphi_i\rangle\}$, que também pode ser visto como o fato de que o estado do sistema está composto, pelo menos em parte, por uma superposição quântica destes estados, e não por uma mistura estatística dos mesmos. Estas coerências também possuem informação sobre quão puro é o estado.

1.3 Relações de Incerteza

Devido à natureza probabilística da teoria quântica, mesmo sem levar em conta a acurácia experimental, teremos uma quantidade de ruído (desvios ou flutuações em relação ao valor esperado) intrínseco em nossas medições. Este ruído é proveniente da própria natureza (assumindo que a natureza comporta-se segundo a teoria quântica), e é impossível de remover melhorando as técnicas experimentais. O fato de que a teoria seja descrita mediante operadores impõe restrições sobre os valores destas flutuações que são conhecidas como relações de incerteza.

Vamos introduzir uma demonstração das relações de incerteza um pouco diferente em relação à demonstração usual que pode ser achada em qualquer livro introdutório de mecânica quântica [18–20]. A principal motivação de utilizar esta demonstração é a introdução da matriz de covariância que será usada em capítulos posteriores. Esta demonstração é baseada na positividade desta matriz de covariância.

Sejam $\hat{A}$ e $\hat{B}$ dois operadores hermitianos correspondentes a dois observáveis, podemos construir um vetor com estes dois operadores como $\hat{\mathbf{X}} = \{\hat{A}, \hat{B}\}$ e a matriz de covariância é definida como

$$C = \left\langle \delta \hat{X}_i \delta \hat{X}_j \right\rangle = \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{A} \delta \hat{A} \rangle & \langle \delta \hat{A} \delta \hat{B} \rangle \\ \langle \delta \hat{B} \delta \hat{A} \rangle & \langle \delta \hat{B} \delta \hat{B} \rangle \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

com o operador $\delta \hat{X}_i$ definido como $\delta \hat{X}_i = \hat{X}_i - \langle \hat{X}_i \rangle$. Esta matriz é semidefinida positiva, que é denotado como,

$$C \geq 0. \quad (1.23)$$

Isto pode ser demonstrado facilmente, já que se definimos o operador $\hat{Y} = z_1 \hat{A} + z_2 \hat{B}$ com z_1, z_2 sendo qualquer número complexo, obtém-se, pela positividade de $\hat{\rho}$ ³

$$\langle \hat{Y}^\dagger \hat{Y} \rangle \geq 0, \quad (1.24)$$

que numa forma expandida pode ser escrita em termos da matriz de covariância como

$$\langle \hat{Y}^\dagger \hat{Y} \rangle = \sum_{i,j} z_i^* z_j \left\langle \delta \hat{X}_i \delta \hat{X}_j \right\rangle = z^\dagger \cdot C \cdot z \geq 0 \quad (1.25)$$

³Já que $\hat{\rho}$ é semidefinido positivo, existe uma base ortonormal $\{|\varphi_i\rangle\}$, na qual $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$ ($p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$), e definindo $|\psi_i\rangle = \hat{Y} |\varphi_i\rangle$, para qualquer operador $\hat{Y}$, obtém-se que, $\langle \hat{Y}^\dagger \hat{Y} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \psi_i \rangle \geq 0$.

com $z = \{z_1, z_2\}^T$, o que significa que C é uma matriz semidefinida positiva. Segue das propriedades das matrizes semidefinidas positivas que a matriz C deve ter determinante maior ou igual a zero, isto completa a demonstração da relação de incerteza da seguinte forma [22]

$$\det C = \langle \delta \hat{A}^2 \rangle \langle \delta \hat{B}^2 \rangle - \left| \langle \delta \hat{A} \delta \hat{B} \rangle \right|^2 \geq 0 \quad (1.26)$$

escrevendo $\delta \hat{A} \delta \hat{B} = \frac{1}{2} \left(\left\{ \delta \hat{A}, \delta \hat{B} \right\} + \left[\delta \hat{A}, \delta \hat{B} \right] \right)$ onde a parte que contém o comutador (anti-comutador) é um operador anti-hermitiano (hermitiano) e o valor esperado dele é uma grandeza imaginária (real), logo $\left| \langle \delta \hat{A} \delta \hat{B} \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left(\left| \langle \left\{ \delta \hat{A}, \delta \hat{B} \right\} \rangle \right|^2 + \left| \langle \left[\delta \hat{A}, \delta \hat{B} \right] \rangle \right|^2 \right)$, o que leva à relação de incerteza de Robertson-Schrödinger

$$\langle \delta \hat{A}^2 \rangle \langle \delta \hat{B}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left(\left| \langle \left\{ \delta \hat{A}, \delta \hat{B} \right\} \rangle \right|^2 + \left| \langle \left[\delta \hat{A}, \delta \hat{B} \right] \rangle \right|^2 \right). \quad (1.27)$$

Como caso particular de grande interesse temos que, quando substituimos $\hat{A} = \hat{q}$ e $\hat{B} = \hat{p}$, segundo o comutador canônico (1.3) a relação de incerteza fica como

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{q}^2 \rangle \langle \delta \hat{p}^2 \rangle &\geq \frac{1}{4} \left(\left| \langle \left\{ \delta \hat{q}, \delta \hat{p} \right\} \rangle \right|^2 + \hbar^2 \right) \\ \text{ou } \langle \delta \hat{q}^2 \rangle \langle \delta \hat{p}^2 \rangle &\geq \frac{\hbar^2}{4} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Esta última equação é conhecida como a relação de incerteza de Heisenberg. Geralmente a relação de incerteza para variáveis canonicamente conjugadas é escrita sem o termo do anticomutador, já que este termo depende do estado.

Para sistemas de uma dimensão, a relação de incerteza (1.27) é suficiente para que um estado seja físico, mas para casos de dimensão maior a relação (1.23) é uma condição muito mais forte que só a relação de incerteza (1.27).

1.4 Quantização do Campo Eletromagnético

Nesta seção iremos fazer a quantização do campo eletromagnético de uma forma na qual é feita na maioria de textos de ótica quântica [23–25] mas que é pouco rigorosa matematicamente falando, já que para realizar a quantização de qualquer teoria, é necessário partir de uma formulação lagrangiana da mesma e com esta, deduzir de forma precisa os pares de variáveis canonicamente conjugadas, para logo depois, por meio de uma transformação de Legendre reformular a teoria no formalismo hamiltoniano e realizar a quantização canônica (Este tipo de procedimento pode ser visto em [26, 27] e em outros textos introdutórios de teoria quântica de campos ou de eletrodinâmica quântica).

1.4.1 Elementos de Eletrodinâmica Clássica e Equações de Maxwell

Já que nosso objetivo é realizar uma descrição completa das propriedades do campo eletromagnético (ou pelo menos com uma precisão maior do que na teoria clássica), é preciso ter uma teoria quântica do mesmo. Começaremos fazendo uma descrição rápida da eletrodinâmica clássica para depois proceder com a quantização canônica.

O campo eletromagnético é descrito na teoria clássica pelas equações de Maxwell⁴

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (1.29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (1.32)$$

onde $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e $\rho(\mathbf{r}, t)$ são: o campo magnético, o campo elétrico e as densidades de corrente e de carga respectivamente. Estas equações, junto com as equações de movimento para as cargas (Força de Lorentz)⁵

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = q_i (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}(\mathbf{r}_i(t), t) + \mathbf{E}(\mathbf{r}_i(t), t)), \quad (1.33)$$

descrevem toda a eletrodinâmica clássica, com a densidade de carga e corrente descritas por

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \mathbf{v}_i \delta(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}); \quad \rho(\mathbf{r}, t) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r}_i(t) - \mathbf{r}). \quad (1.34)$$

Nas equações anteriores, $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i$ e q_i são a posição, a velocidade e a carga da i -ésima partícula respectivamente e $\delta(x)$ é a função delta de Dirac.

As equações (1.29) e (1.30) são solucionadas trivialmente por meio da introdução das grandezas auxiliares potencial escalar $\Phi(\mathbf{r}, t)$, e potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ definidos por meio das relações

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (1.35)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (1.36)$$

e as equações (1.31) e (1.32) escritas em termos dos potenciais ficam

⁴Para discussões mais profundas sobre eletrodinâmica clássica, podem ser consultados livros como [28–30].

⁵Esta equação é válida só no limite não relativista das cargas, i.e. para $\mathbf{v}_i \ll c$.

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (1.37)$$

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} \right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (1.38)$$

a introdução dos potenciais reduz os graus de liberdade do campo eletromagnético de 6 (cada uma das 3 componentes dos vetores campo elétrico e magnético) para somente 4 (o potencial escalar e as 3 componentes do potencial vetor), o que mostra que os campos elétrico e magnético são uma única entidade e não grandezas independentes⁶. Mesmo assim as relações (1.35) e (1.36) não definem univocamente os potenciais, já que sob a transformação⁷

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \nabla \Lambda(\mathbf{r}, t) \quad (1.39)$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda(\mathbf{r}, t) \quad (1.40)$$

os campos permanecem invariantes, logo é preciso impor alguma restrição adicional sobre os potenciais (escolha de calibre). Entre os calibres mais utilizados estão o calibre de Lorentz

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1.41)$$

que converte as equações de Maxwell (1.37) e (1.38) em duas equações de onda com fontes para os potenciais $\mathbf{A}$ e Φ

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (1.42)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (1.43)$$

Este calibre é muito útil quanto se quer deixar em evidência o caráter relativista da teoria eletromagnética, uma vez que as equações anteriores são explicitamente covariantes (já que esta equação de onda é invariante relativista). Outro calibre muito útil na descrição de campos que interagem com matéria não relativista localizada ou para o campo livre, é o calibre de Coulomb que impõe que o potencial vetor seja um campo transversal⁸

⁶Isto pode ser visto fisicamente no contexto da teoria da relatividade restrita, onde para certo sistemas, existem observadores inerciais que só percebem o campo elétrico, enquanto outro observador inercial poder perceber campo elétrico e magnético (ou só campo magnético). Também, como veremos mas na frente, no contexto da mecânica quântica, a quantização é feita para o campo eletromagnético como um todo, dando origem ao conceito de fóton como excitação de um modo de dito campo.

⁷Transformação de calibre

⁸Denomina-se campo transversal a um campo vetorial $\mathbf{V}$ que tem divergência nula, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. Igualmente se o campo tem rotacional nulo, $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ denomina-se campo longitudinal. Todo campo vetorial pode ser escrito como a soma de dois campos, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_T + \mathbf{V}_L$ com $\mathbf{V}_T$ sendo a parte transversal do campo e $\mathbf{V}_L$ um campo longitudinal

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.44)$$

esta escolha de calibre transforma as equações (1.37) e (1.38) em

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\rho(\mathbf{r}, t)}{\epsilon_0} \quad (1.45)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \nabla \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \equiv \mathbf{J}_T(\mathbf{r}, t) \quad (1.46)$$

onde temos que o potencial escalar satisfaz a mesma equação de Poisson,⁹ que no caso da eletrostática (independente do potencial vetor), cuja solução é

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}', \quad (1.47)$$

que é o potencial Coulombiano instantâneo que produz uma distribuição de carga na eletrostática (por isso no nome de Calibre de Coulomb). Na equação (1.46) foi colocada em evidência a parte transversal da densidade de corrente. Pode ser facilmente verificado que $\nabla \cdot \mathbf{J}_T = 0$ levando em conta a equação de continuidade que satisfazem $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ e $\rho(\mathbf{r}, t)$,

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (1.48)$$

que é consequência direta das equações de Maxwell (1.29) e (1.32)

1.4.2 Modos Normais e Quantização do Campo Livre no Calibre de Coulomb

Dada uma região do espaço sem fontes, i.e não temos portadores de carga nem correntes ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e $\rho = 0$), no calibre de Coulomb podemos impor que $\Phi = 0$, e ambos campos são determinados pelo potencial vetor que satisfaz a equação de onda homogênea

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (1.49)$$

É possível fazer uma decomposição da parte espacial do potencial vetor em componentes de Fourier, para isso vamos pensar no campo eletromagnético como contido num cubo muito grande cujo comprimento das arestas é L , e vamos impor condições de contorno periódicas, i.e. com a condição que $\mathbf{A}(x, y, L, t) = \mathbf{A}(x, y, 0, t)$ e relações semelhantes para direções x e y . Já que este comprimento L geralmente não tem nenhuma relação com o sistema físico estudado, as quantidades físicas calculadas devem ser independentes

⁹A covariância é perdida mas a teoria continua sendo relativista, já que os observáveis são os campos e não os potenciais. Os campos continuam satisfazendo as equações de Maxwell que são equações relativistas.

deste comprimento. O potencial vetor descrito em termos de modos de onda plana é dado por

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_n \mathcal{A}_{\mathbf{k}_n}(t) e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}}, \quad (1.50)$$

e já que devemos satisfazer as condições de contorno temos que os vetores de onda $\mathbf{k}_n$ são da forma

$$\mathbf{k}_n = \frac{2\pi}{L} \{n_1, n_2, n_3\} \text{ com } n_i = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (1.51)$$

A somatória $\sum_n$ deve se entender como a soma sobre os índices n_1, n_2, n_3 . O fato de que o potencial vetor seja uma grandeza real impõe que $\mathcal{A}_{\mathbf{k}_n}^*(t) = \mathcal{A}_{-\mathbf{k}_n}(t)$, e a condição de transversalidade (Calibre de Coulomb) adquire a forma $\mathbf{k}_n \cdot \mathcal{A}_{\mathbf{k}_n} = 0$ (i.e. o vetor $\mathcal{A}_{\mathbf{k}_n}$ é ortogonal a $\mathbf{k}_n$).

Nesta representação a equação de onda (1.49) é equivalente a

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_n^2 \right) \mathcal{A}_{\mathbf{k}_n}(t) = 0 \quad (1.52)$$

onde $\omega_n^2 = c|\mathbf{k}_n|^2$. A solução da equação anterior que satisfaz todas as propriedades anteriores é da forma $\mathcal{A}_{\mathbf{k}_n} = \sum_s \mathbf{a}_{n,s}(0) e^{-i\omega_n t} \vec{\epsilon}_{n,s} + \mathbf{a}_{-n,s}^*(0) e^{i\omega_n t} \vec{\epsilon}_{-n,s}^*$ e somando para todos os modos $\mathbf{k}_n$ obtemos a seguinte expressão para o potencial vetor

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{n,s} \left(\mathbf{a}_{n,s}(0) e^{-i\omega_n t} \vec{\epsilon}_{n,s} + \mathbf{a}_{-n,s}^*(0) e^{i\omega_n t} \vec{\epsilon}_{-n,s}^* \right) e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \quad (1.53)$$

$$= \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{n,s} \left(\mathbf{a}_{n,s}(t) \vec{\epsilon}_{n,s} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{a}_{n,s}^*(t) \vec{\epsilon}_{n,s}^* e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \right) \quad (1.54)$$

onde foi introduzido um novo índice $s = \{1, 2\}$ que, para cada vetor $\mathbf{k}_n$, define dois vetores complexos unitários (vetores de polarização) $\vec{\epsilon}_{n,1}$ e $\vec{\epsilon}_{n,2}$, que formam uma base ortonormal junto com $\mathbf{k}_n/|\mathbf{k}_n|$ no espaço tridimensional i.e. $\mathbf{k}_n \cdot \vec{\epsilon}_{n,s} = 0$, $\vec{\epsilon}_{n,s}^* \cdot \vec{\epsilon}_{n,s'} = \delta_{s,s'}$ e $\vec{\epsilon}_{n,1} \times \vec{\epsilon}_{n,2} = \mathbf{k}_n/|\mathbf{k}_n|$. Também foi introduzida a amplitude do modo $\{n, s\}$ dependente do tempo como $\mathbf{a}_{n,s}(t) = \mathbf{a}_{n,s}(0) e^{-i\omega_n t}$. Com ajuda das equações (1.35) e (1.36) podemos escrever o campo elétrico e o campo magnético como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\epsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{n,s} \omega_n \left(\mathbf{a}_{n,s}(t) \vec{\epsilon}_{n,s} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} - \mathbf{a}_{n,s}^*(t) \vec{\epsilon}_{n,s}^* e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \right) \quad (1.55)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{\epsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{n,s} \left(\mathbf{a}_{n,s}(t) \mathbf{k}_n \times \vec{\epsilon}_{n,s} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} - \mathbf{a}_{n,s}^*(t) \mathbf{k}_n \times \vec{\epsilon}_{n,s}^* e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \right) \quad (1.56)$$

Como se sabe da eletrodinâmica, a energia do campo eletromagnético (que coincide com a função Hamiltoniana) vem dada pela expressão

$$H = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)^2 \right) d^3r \quad (1.57)$$

com ajuda das equações (1.55) e (1.56) a energia do campo, em termos das amplitudes dos modos, torna-se

$$H = 2 \sum_{n,s} \omega_n^2 |\mathbf{a}_{n,s}(t)|^2. \quad (1.58)$$

Esta equação expressa a energia total do campo, como a soma das normas ao quadrado das amplitudes de cada um dos modos do campo. Para chegar ao resultado anterior foi considerado que os modos do campo são ortogonais, i.e. $\int_{L^3} e^{i(\mathbf{k}_n - \mathbf{k}_{n'})} = L^3 \delta_{n,n'}$ (no sentido de funções espaciais ortogonais) e $(\mathbf{k}_n \times \varepsilon_{n,s}) \cdot (\mathbf{k}_n \times \varepsilon_{n,s'}) = k^2 \delta_{s,s'}$ (polarizações ortogonais entre elas e ortogonais ao vetor de onda).

Para levar a cabo o processo de quantização canônica é preferível escrever a Hamiltoniana em termos de variáveis reais. Para isto introduzimos as grandezas

$$q_{n,s}(t) = \mathbf{a}_{n,s}(t) + \mathbf{a}_{n,s}^*(t) \quad (1.59)$$

$$p_{n,s}(t) = i\omega \left(\mathbf{a}_{n,s}(t) - \mathbf{a}_{n,s}^*(t) \right), \quad (1.60)$$

e com estas definições a Hamiltoniana do campo é dada por

$$H = \frac{1}{2} \sum_{n,s} \left(p_{n,s}^2(t) + \omega^2 q_{n,s}^2(t) \right). \quad (1.61)$$

Esta Hamiltoniana pode ser interpretada como a energia de um sistema de osciladores harmônicos independentes, onde $p_{n,s}(t)$ e $q_{n,s}(t)$ são variáveis canonicamente conjugadas. Isso pode-se justificar vendo que $p_{n,s}(t)$ e $q_{n,s}(t)$ satisfazem as equações.

$$\frac{dq_{n,s}(t)}{dt} = p_{n,s}(t), \quad \frac{dp_{n,s}(t)}{dt} = -\omega^2 q_{n,s}(t) \quad (1.62)$$

que são totalmente equivalentes às equações de Hamilton (1.1). Logo, para quantizar o campo eletromagnético, basta promover as variáveis $q_{n,s}(t)$ e $p_{n,s}(t)$ a operadores hermitianos $\hat{q}_{n,s}(t)$ e $\hat{p}_{n,s}(t)$ que agem num espaço de Hilbert, e impor relações de comutação canônicas entre eles

$$[\hat{q}_{n,s}(t), \hat{p}_{n',s'}(t)] = i\hbar \delta_{n,n'} \delta_{s,s'} \quad (1.63)$$

$$[\hat{q}_{n,s}(t), \hat{q}_{n',s'}(t)] = [\hat{p}_{n,s}(t), \hat{p}_{n',s'}(t)] = 0. \quad (1.64)$$

Cada par de operadores canonicamente conjugados age num espaço de Hilbert diferente, i.e. cada modo do campo possui um próprio espaço de estados $\mathcal{H}_{n,s}$, e é por isso que operadores pertencentes a diferentes modos comutam. Logo, os estados do campo eletromagnético total são vetores no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{Tot} = \otimes_{n,s} \mathcal{H}_{n,s}$, que é o produto tensorial de todos os espaços de Hilbert de cada modo. Podem-se definir operadores equivalentes às amplitudes dos modos $\mathbf{a}_{n,s}(t)$ (exceto por um fator constante que deixa o operador adimensional) e seus conjugados como

$$\hat{a}_{n,s}(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} (\omega\hat{q}_{n,s}(t) + i\hat{p}_{n,s}(t)) \quad (1.65)$$

$$\hat{a}_{n,s}^\dagger(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} (\omega\hat{q}_{n,s}(t) - i\hat{p}_{n,s}(t)) \quad (1.66)$$

respectivamente. Eles satisfazem a relação de comutação $[\hat{a}_{n,s}(t), \hat{a}_{n',s'}^\dagger(t)] = \delta_{n,n'}\delta_{s,s'}$. Em termos destes operadores temos que nosso operador Hamiltoniano tem a forma

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \sum_{n,s} \hbar\omega_n \left(\hat{a}_{n,s}(t) \hat{a}_{n,s}^\dagger(t) + \hat{a}_{n,s}^\dagger(t) \hat{a}_{n,s}(t) \right) \\ &= \sum_{n,s} \hbar\omega_n \left(\hat{a}_{n,s}^\dagger(t) \hat{a}_{n,s}(t) + \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.67)$$

O operador $\hat{\mathbf{n}}_{n,s} = \hat{a}_{n,s}^\dagger \hat{a}_{n,s}$ é conhecido como o operador número, dado que os autoestados dele, denotados como $|n\rangle_{n,s}$,¹⁰ são estados com um número n de fótons bem definido (e portanto, também tem energia $\hbar\omega(n + 1/2)$ bem definida). Os operadores (1.65) e (1.66) são chamados operadores de aniquilação e criação do modo $\{n, s\}$ respectivamente, já que $\hat{a}_{n,s}$ leva o estado com n fótons a um estado com $n - 1$ fótons e $\hat{a}_{n,s}^\dagger$ leva o mesmo estado a um com $n + 1$ fótons. O estado base do campo é um estado número que não contém fótons e é chamado de estado de vácuo $|0\rangle_{n,s}$.

Finalmente, com estas definições podemos escrever os operadores de campo que representam o potencial vetor $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$, o campo elétrico $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ e o campo magnético $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ como

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n,s} \left(\frac{\hbar}{2\omega_n \epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \left(\hat{a}_{n,s}(t) \vec{\epsilon}_{n,s} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} + \hat{a}_{n,s}^\dagger(t) \vec{\epsilon}_{n,s}^* e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \right) \quad (1.68)$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n,s} \left(\frac{\omega_n \hbar}{2\epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \left(i\hat{a}_{n,s}(t) \vec{\epsilon}_{n,s} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} - i\hat{a}_{n,s}^\dagger(t) \vec{\epsilon}_{n,s}^* e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \right) \quad (1.69)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n,s} \left(\frac{\hbar}{2\omega_n \epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \left(i\hat{a}_{n,s}(t) \mathbf{k}_n \times \vec{\epsilon}_{n,s} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} - i\hat{a}_{n,s}^\dagger(t) \mathbf{k}_n \times \vec{\epsilon}_{n,s}^* e^{-i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \right). \quad (1.70)$$

¹⁰Não confundir o n dentro do ket, que faz referência ao valor do autovalor do operador $\hat{\mathbf{n}}_{n,s}$, com o subíndice n que faz referência, junto com o subíndice s , a um modo do campo em específico.

É comum escrever estes operadores como uma parte que é proporcional aos operadores de aniquilação $\hat{a}$ e outra parte que é proporcional aos operadores de criação $\hat{a}^\dagger$ como

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{E}}^{[+]}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{E}}^{[-]}(\mathbf{r}, t) \quad \text{onde}$$

$$\hat{\mathbf{E}}^{[+]}(\mathbf{r}, t) = \sum_{n,s} \left(\frac{\omega_n \hbar}{2\epsilon_0 L^3} \right)^{1/2} i \hat{a}_{n,s}(t) \vec{\varepsilon}_{n,s} e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}} \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{E}}^{[-]}(\mathbf{r}, t) = \left(\hat{\mathbf{E}}^{[+]}(\mathbf{r}, t) \right)^\dagger \quad (1.71)$$

e definições similares para $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{A}}^{[+]}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{A}}^{[-]}(\mathbf{r}, t)$ e $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{B}}^{[+]}(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{B}}^{[-]}(\mathbf{r}, t)$.

Uma suposição muito forte foi feita na hora de fazer a quantização do campo, na qual nosso espaço estava limitado a uma caixa de lado L , mas poucas vezes esta configuração tem algum significado físico, e é mais comum ter o espaço livre infinito, ao passar de uma caixa de comprimento finito ao espaço infinito, os vetores de onda permitidos e o espaçamento entre eles são cada vez menores até formar um espectro contínuo de energias permitidas. Matematicamente pode-se passar da configuração de espectro discreto ao espectro contínuo tomando o limite $L \rightarrow \infty$, no qual a somatória sobre os modos discretos torna-se uma integral sobre o contínuo de todos os vetores de onda da seguinte forma

$$\left(\frac{2\pi}{L^3} \right) \sum_{n,s} \rightarrow \int d^3k \sum_s, \quad (1.72)$$

Os operadores de aniquilação discretos mudam para operadores contínuos da forma

$$\hat{a}_{n,s} \rightarrow \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{3/2} \hat{a}_{\mathbf{k},s}, \quad (1.73)$$

e o comutador canônico transforma-se da forma

$$\left[\hat{a}_{n,s}, \hat{a}_{n',s'}^\dagger \right] = \delta_{n,n'} \delta_{s,s'} \rightarrow \left[\hat{a}_{\mathbf{k},s}, \hat{a}_{\mathbf{k}',s'}^\dagger \right] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{s,s'}. \quad (1.74)$$

Iremos trocar entre modos contínuos e modos discretos segundo a conveniência do problema.

1.4.3 Quadraturas do Campo, Estados Coerentes e Estados Compridos

Classicamente, um campo eléctrico monomodo num ponto do espaço, pode ser descrito na chamada representação de Fresnel (ou representação de fasores), que consiste em escrever o campo da forma.

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} + E_0^* e^{i\omega t} \quad (1.75)$$

onde $E_0 = |E_0|e^{i\phi}$ é a amplitude complexa do campo, e num instante dado t_0 , a grandeza $\varphi = \phi - \omega t_0$ é a fase do campo. O que significa que se pode representar o campo como um ponto no espaço complexo como na figura (1.1) .

FIGURA 1.1: Diagrama de Fresnel para o campo clássico, onde X e Y são as quadraturas do campo e $E_0 = |E_0|e^{i\varphi}$ com φ a fase do campo.

Também, no lugar de descrever o campo em termos da amplitude complexa, pode-se descrever por meio das partes real $X = E_0 + E_0^*$ e imaginária $Y = -i(E_0 - E_0^*)$ da mesma, que são conhecidas como quadraturas do campo

$$E(t) = X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t). \quad (1.76)$$

No caso de um modo do campo quantizado podemos escrever o campo como

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_\omega (\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}) \quad (1.77)$$

onde $\mathcal{E}_\omega = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}}$ é o campo elétrico de um fóton. Igualmente é possível definir os operadores de quadraturas como

$$\hat{X}_\beta = \hat{a}e^{-i\beta} + \hat{a}^\dagger e^{i\beta} \quad (1.78)$$

$$\hat{Y}_\beta = \hat{X}_{\beta+\pi/2} = -i(\hat{a}e^{-i\beta} - \hat{a}^\dagger e^{i\beta}) \quad (1.79)$$

que satisfazem a relação de comutação

$$[\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\beta] = 2i, \quad (1.80)$$

estes operadores são uma generalização quantizada das quadraturas definidas anteriormente, onde os eixos estão rodados em um ângulo β em relação à definição anterior. Em termos destas quadraturas o campo toma a forma

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_\omega(\hat{X}_\beta \cos(\omega t - \beta) + \hat{Y}_\beta \sin(\omega t - \beta)) \quad (1.81)$$

Pelo fato destas quadraturas do campo não comutarem, é impossível ter um estado com valores bem definidos para as duas quadraturas simultaneamente, logo não é mais possível descrever o campo com um ponto no espaço complexo (ou no espaço real bidimensional). Porém é possível fazer uma representação equivalente de um diagrama de Fresnel para o estado quântico do campo como na figura (1.2), na qual a seta representa o valor médio do campo e a mancha representa a incerteza nas quadraturas do campo. Dada esta representação de Fresnel é interessante introduzir dois estados do campo que são particularmente interessantes, os estados coerentes e os estados comprimidos (em inglês *Squeezed states*). Estes estados caracterizam-se por terem incerteza mínima, o que significa que dada a relação de comutação (1.80), as quadraturas do campo devem cumprir a seguinte desigualdade de incerteza $\langle \delta \hat{X}_\beta^2 \rangle \langle \delta \hat{Y}_\beta^2 \rangle \geq 1$, e chama-se estado de mínima incerteza aquele que cumpre a igualdade.

Podemos definir os estados coerentes como auto-estados do operador aniquilação

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (1.82)$$

ou como gerados a partir da aplicação do chamado operador deslocamento $\hat{D}(\alpha)$ ao estado de vácuo

$$\hat{D}(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle \quad (1.83)$$

$$\text{com } \hat{D}(\alpha) = \exp\{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}\}. \quad (1.84)$$

Estes estados distribuem o ruído igualmente para todas as quadraturas i.e. $\langle \delta \hat{X}_\beta^2 \rangle = 1$ para todo β , o que é representado no diagrama de Fresnel como uma mancha em forma de círculo na ponta da seta (ver figura 1.2).

Os estados coerentes são considerados os estados mais semelhantes com um estado clássico do oscilador harmônico devido às propriedades do ruído que eles têm, e que a evolução das quadraturas no tempo é igual à evolução clássica [31].

FIGURA 1.2: Diagrama de Fresnel para o campo quântico, onde a seta representa o valor médio do campo, o círculo pontilhado representa a incerteza num estado coerente que está igualmente distribuída para todas as quadraturas e a mancha em forma de elipse representa um estado comprimido com compressão de ruído na quadratura de amplitude e excesso de ruído na quadratura de fase.

Os estados comprimidos são estados que também possuem incerteza mínima, mas o ruído numa quadratura está a baixo do limite quântico padrão (em inglês *Standard quantum limit (SQL)*) definido como ruído de um estado coerente ou particularmente o ruído do vácuo¹¹, e na correspondente quadratura ortogonal tem excesso de ruído do jeito que a relação de incerteza fica no limite, i.e. $\langle \delta \hat{X}_\beta^2 \rangle > 1$ e $\langle \delta \hat{Y}_\beta^2 \rangle < 1$ para algum β mantendo que $\langle \delta \hat{X}_\beta^2 \rangle \langle \delta \hat{Y}_\beta^2 \rangle = 1$. Isto pode ser representado como uma mancha em forma de elipse no diagrama de Fresnel onde o semieixo maior representa o excesso e o semieixo menor, a compressão do ruído.

Se escolhermos a fase das quadraturas na equação (1.78) e (1.79) como $\beta = \varphi$, sendo φ o valor médio da fase do campo¹² definida como o argumento do valor médio do operador aniquilação, ou seja $\langle \hat{a} \rangle = \alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$ com φ a fase do campo. Temos que, para valores grandes de $|\alpha|$, as flutuações do operador $\delta \hat{X}_\varphi \equiv \delta \hat{P}$ são proporcionais às flutuações do operador número $\hat{N}$ (que é proporcional á intensidade do campo), e por isso $\hat{P}$ é conhecida como quadratura de amplitude. A quadratura ortogonal $\hat{Y}_\varphi = \hat{Q}$ é conhecida como quadratura de fase, já que as flutuações desde operador são proporcionais às flutuações de fase, o que é representado na figura (1.2).

Mais à frente veremos que o conceito de *squeezing* (compressão) está estreitamente relacionado com o emaranhamento quando se fala de compressão em variáveis que agem em dois subsistemas diferentes.

¹¹É comum utilizar o termo compressão ou *squeezing* para dizer que a incerteza de certo operador específico está baixo da incerteza do estado de vácuo

¹²Embora não esteja definido um operador que corresponda ao observável clássico da fase [32, 33], é possível associar as flutuações do operador $\hat{Q}$ com as flutuações de um possível operador de fase, desde que o valor esperado da amplitude seja muito maior que as flutuações das quadraturas [34].

1.4.4 Campos Quase-monocromáticos e Operadores no Domínio da Frequência

Geralmente o campo elétrico produzido por um laser é modelado como um único modo do campo eletromagnético num estado coerente, mas o que acontece mais precisamente, é que nosso campo elétrico do laser se estende sobre a uma região de largura determinada (chamada largura de banda) em torno de uma frequência central conhecida como frequência portadora. As frequências ao redor da portadora são conhecidas como bandas laterais. Por este motivo é necessário fazer uma descrição quântica deste tipo de campos denominados campos quase-monocromáticos.

Um campo elétrico com uma polarização definida, uma largura de banda $\Delta\omega$, uma frequência portadora ω_c e nos restringindo na região de interesse, é descrito segundo (1.69) pelo operador de campo

$$\hat{E}(t) = \sum_{\omega_n=\omega_c-\Delta\omega/2}^{\omega_c+\Delta\omega/2} \sqrt{\frac{\hbar\omega_n}{2\epsilon_0 V}} \left(\hat{a}_{\omega_n} e^{-i\omega_n t} + \hat{a}_{\omega_n}^\dagger e^{i\omega_n t} \right) \quad (1.85)$$

onde trocamos o índice dos modo de $n \rightarrow \omega_n$ e redefinimos $i\hat{a} \rightarrow \hat{a}$ para facilitar e esclarecer a notação.

Geralmente se tem uma largura de banda muito estreita, que matematicamente significa que $\omega_c \gg \Delta\omega$, portanto temos que $\omega_n \approx \omega_c$ e a equação anterior pode ser escrita como

$$\hat{E}(t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2\epsilon_0 V}} \sum_{\Omega_n=-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \left(\hat{a}_{\Omega_n} e^{-i\Omega_n t} e^{-i\omega_c t} + \hat{a}_{\Omega_n}^\dagger e^{i\Omega_n t} e^{i\omega_c t} \right). \quad (1.86)$$

com $\Omega_n = \omega_n - \omega_c$. Se definimos o operador lentamente variável

$$\hat{A}(t) = \sum_{\Omega_n=-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} \hat{a}_{\Omega_n} e^{-i\Omega_n t} \quad (1.87)$$

que seria o equivalente do operador de aniquilação para o caso quase-monocromático, podemos escrever o campo da forma

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_c \left(\hat{A}(t) e^{-i\omega_c t} + \hat{A}^\dagger(t) e^{i\omega_c t} \right) \quad (1.88)$$

Similarmente ao caso monomodo, podemos definir as quadraturas deste campo quase-monocromático de forma análoga

$$\hat{X}_\beta(t) = \hat{A}(t)e^{-i\beta} + \hat{A}^\dagger(t)e^{i\beta} \quad (1.89)$$

$$\hat{Y}_\beta(t) = -i \left(\hat{A}(t)e^{-i\beta} - \hat{A}^\dagger(t)e^{i\beta} \right) \quad (1.90)$$

com as quais o campo fica escrito como

$$\hat{E}(t) = \mathcal{E}_c(\hat{X}_\beta(t) \cos(\beta - \omega_c t) - \hat{Y}_\beta(t) \sin(\beta - \omega_c t)). \quad (1.91)$$

Estes operadores satisfazem as seguintes relações de comutação [35]

$$[\hat{A}(t), \hat{A}^\dagger(t')] = \delta(t - t'), \quad (1.92)$$

$$[\hat{X}_\beta(t), \hat{Y}_\beta(t')] = 2i\delta(t - t'), \quad (1.93)$$

Outras quantidades que são de grande interesse na hora de caraterizar as propriedades quânticas do campo, e que serão utilizadas posteriormente são a função de correlação e a densidade espectral de ruído. Sejam dois operadores dependentes do tempo $\hat{O}(t)$ e $\hat{O}'(t)$, a função de correlação¹³ entre eles é definida por

$$C_{O,O'}(t, t') = \langle \delta\hat{O}(t)\delta\hat{O}'(t') \rangle. \quad (1.94)$$

Impondo que os operadores descrevam o que se conhece em teoria de probabilidade como processos mutuamente estacionários, se tem que a função de correlação depende unicamente da diferença dos tempos $\tau = t - t'$. Definimos a densidade espectral de ruído como a transformada de Fourier em τ da função de correlação

$$S_{O,O'}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{O,O'}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (1.95)$$

Para poder definir a densidade espectral de ruído diretamente como função dos operadores, primeiro vamos definir a transformada de Fourier destes operadores como

$$\hat{O}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{O}(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.96)$$

$$\hat{O}^\dagger(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{O}^\dagger(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (1.97)$$

cabe anotar que com esta definição temos que $[\hat{O}(\omega)]^\dagger = \hat{O}^\dagger(-\omega)$.

¹³Se os operadores são o mesmo, a função se denomina de auto-correlação e vamos denota-la como $C_O(t, t')$, caso contrario se denomina de correlação cruzada.

Uma vez que supusemos que os operadores descrevem um processo estacionário, as propriedades estatísticas deles não dependem da origem do tempo, portanto os operadores não tendem ao zero para tempos muito grandes e a transformada de Fourier deles será uma função muito singular. Tendo isto em mente e usando a definição (1.95) escrevemos o espectro de ruído como

$$\langle \delta \hat{O}(\omega) \delta \hat{O}'(\omega') \rangle = S_{O,O'}(\omega) \delta(\omega + \omega'). \quad (1.98)$$

A condição de estacionariedade traz como consequência que o operador $\hat{O}$ na frequência ω está correlacionado com o operador $\hat{O}'(\omega')$ unicamente na frequência $\omega' = -\omega$.

Especificamente temos interesse nos espectros de ruído das quadraturas do campo. Então, dadas as definições anteriores o equivalente das equações (1.92) e (1.93) no domínio da frequência são

$$[\hat{A}(\omega), \hat{A}^\dagger(\omega')] = \delta(\omega + \omega'), \quad (1.99)$$

$$[\hat{X}_\beta(\omega), \hat{Y}_\beta(\omega')] = 2i\delta(\omega + \omega') \quad (1.100)$$

é preciso dizer que, como a dependência com a frequência portadora ω_c foi removida no operador $\hat{A}(t)$ na equação (1.88), a frequência ω na equação anterior faz referência à frequência em relação à portadora (banda lateral), e não à frequência física do campo.

A fim de descrever as propriedades do espectro de ruído das quadratura do campo, é conveniente definir o vetor $\hat{\mathbf{Z}}_\beta = \{\hat{X}_\beta, \hat{Y}_\beta\}$ tanto no domínio do tempo como da frequência, e dada esta definição, podemos definir a matriz espectral de ruído $S_{ij}(\omega)$ como

$$S_{ij}(\omega) \delta(\omega + \omega') = \langle \delta \hat{Z}_i(\omega) \delta \hat{Z}_j(\omega') \rangle = \begin{pmatrix} S_{X_\beta}(\omega) & S_{X_\beta Y_\beta}(\omega) \\ S_{Y_\beta X_\beta}(\omega) & S_{Y_\beta}(\omega) \end{pmatrix} \delta(\omega + \omega'). \quad (1.101)$$

Esta matriz, tal como a matriz de covariância, é semidefinida positiva [25], o que permite escrever uma relação “tipo” princípio da incerteza no domínio da frequência

$$S_{X_\beta}(\omega) S_{Y_\beta}(\omega) \geq 1 \quad (1.102)$$

A demonstração da equação anterior (1.102) surge diretamente das propriedades da matriz $S(\omega)$

- Como $S(\omega)$ é semidefinida positiva deve se cumprir que $S_{X_\beta}(\omega)$ seja uma grandeza real maior ou igual que zero

- Como $S_{X_\beta}(\omega)$ é a transformada de Fourier de uma grandeza real temos que $S_{X_\beta}(\omega) = S_{X_\beta}^*(-\omega) = S_{X_\beta}(-\omega)$ i.e. $S_{X_\beta}(\omega)$ é uma função par.
- Da definição (1.98) se deduz que $S_{X_\beta Y_\beta}(\omega) = S_{Y_\beta X_\beta}^*(\omega)$

e além desta propriedades temos que $\det(S(\omega)) \geq 0$ de onde podemos deduzir

$$S_{X_\beta}(\omega)S_{Y_\beta}(\omega) \geq |S_{X_\beta Y_\beta}(\omega)|^2, \quad (1.103)$$

usando a simetria de $S_{X_\beta}(\omega)$, trocando ω por $-\omega$ na equação anterior e adicionando-a a ela mesma, obtemos

$$S_{X_\beta}(\omega)S_{Y_\beta}(\omega) \geq \frac{1}{2} (|S_{X_\beta Y_\beta}(\omega)|^2 + |S_{Y_\beta X_\beta}(-\omega)|^2), \quad (1.104)$$

e por último, uma vez que utilizamos a seguinte identidade

$$\begin{aligned} |S_{X_\beta Y_\beta}(\omega) + S_{Y_\beta X_\beta}(-\omega)|^2 + |S_{X_\beta Y_\beta}(\omega) - S_{Y_\beta X_\beta}(-\omega)|^2 &= \\ |S_{X_\beta Y_\beta}(\omega) + S_{Y_\beta X_\beta}(-\omega)|^2 + 4 &= \\ 2(|S_{X_\beta Y_\beta}(\omega)|^2 + |S_{Y_\beta X_\beta}(-\omega)|^2) & \end{aligned} \quad (1.105)$$

na qual foi usado que, segundo o comutador (1.100), $S_{X_\beta Y_\beta}(\omega) - S_{Y_\beta X_\beta}(-\omega) = 2i$. Juntando estas relações completamos a demonstração da seguinte forma

$$\begin{aligned} S_{X_\beta}(\omega)S_{Y_\beta}(\omega) &\geq \frac{1}{4} (|S_{X_\beta Y_\beta}(\omega) + S_{Y_\beta X_\beta}(-\omega)|^2 + 4) \\ \text{ou } S_{X_\beta}(\omega)S_{Y_\beta}(\omega) &\geq 1. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Do mesmo jeito que no caso da seção 1.3 diremos que temos compressão (*squeezing*) a certa frequência ω numa quadratura dada se a função de autocorrelação dela satisfaz que

$$S_{X_\beta}(\omega) < 1 \quad (1.107)$$

para algum β .

Definidos os operadores do campo, veremos como é a interação deles com um sistema atômico, e a influência que este terá sobre os campos.

Capítulo 2

Interação Radiação-Matéria

A principal motivação deste capítulo é introduzir de uma forma fenomenológica o processo de interação do campo eletromagnético com a matéria¹. Particularmente iremos descrever o processo físico de interação entre o campo eletromagnético e um átomo de 2 níveis. Veremos a origem dos processos decoerentes que dão conta da emissão espontânea e das forças de Langevin. O procedimento que será exposto aqui está baseado naquele feito em [37], onde pode-se achar uma explicação mais detalhada.

2.1 Hamiltoniano de Interação Entre o Campo Eletromagnético e a Matéria

Nesta seção não iremos fazer uma dedução formal e rigorosa sobre como é a interação entre a radiação e a matéria, porem é possível, por meio de argumentos clássicos achar o termo de interação radiação-matéria do seguinte jeito [38]: Fenomenologicamente pode-se propor uma Hamiltoniano de interação entre o campo eletromagnético e a matéria composta por átomos, utilizando a eletrodinâmica clássica. Se pensarmos no átomo como um dipolo elétrico na posição $\mathbf{r}$, segundo a eletrodinâmica clássica, e como primeira aproximação, a energia de interação vem dada por $H = -q\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ (geralmente este é o termo dominante no processo de interação átomo-campo, e somente em casos excepcionais é necessário levar em conta outros termos como por exemplo, a interação com o campo magnético [26]), então o Hamiltoniano total do sistema quântico fica

$$\hat{H} = \hat{H}_{atom} + \hat{H}_{camp} + \hat{H}_I \quad (2.1)$$

¹Tem-se formalismos de primeiros princípios para introduzir a forma em que interagem a radiação com a matéria que podem ser vistas em livros padrão de ótica quântica como [26, 36]

onde $\hat{H}_{atom}$ e $\hat{H}_{camp}$ são as energias livres do átomo e do campo eletromagnético respectivamente.

$$\begin{aligned}\hat{H}_{atom} &= E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| = \sum_{i=1}^2 E_i \hat{\sigma}_{ii} \\ \hat{H}_{camp} &= \sum_{n,s} \hbar\omega_n \hat{a}_{n,s}^\dagger \hat{a}_{n,s},\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde E_1 e E_2 ($E_1 < E_2$) são as energias dos níveis atômicos $|1\rangle$ (base) e $|2\rangle$ (excitado) respectivamente, e onde foram utilizados os operadores $\hat{\sigma}_{ij}$ definidos como $\hat{\sigma}_{ij} = |i\rangle\langle j|$. Eles satisfazem as seguintes relações de comutação

$$[\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\sigma}_{kl}] = \hat{\sigma}_{il}\delta_{j,k} - \hat{\sigma}_{kj}\delta_{l,i}.\tag{2.3}$$

Na linguagem da Física Atômica, os operadores da forma $\hat{\sigma}_{ij}$, $i \neq j$ são chamados coerências, e os operadores da forma $\hat{\sigma}_{ii}$ são chamados populações.

O hamiltoniano de interação $\hat{H}_I$ é dado pelo equivalente quântico da expressão clássica da energia de interação dipolo elétrico-campo

$$\hat{H}_I = -q\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}, t).\tag{2.4}$$

Já que nas situações a discutir neste trabalho, os comprimentos de onda com os quais o átomo interage são muito maiores que as dimensões atômicas², o átomo vê um campo aproximadamente constante no espaço e pode-se fazer a chamada aproximação de longo comprimento de onda, que consiste em desprezar as variações espaciais do campo substituindo o operador posição $\hat{\mathbf{r}}$ no argumento do campo elétrico na equação (2.4) pelo valor da posição do átomo $\mathbf{r}_0$, que se pode escolher como a origem do sistema coordenado $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$, isto leva à seguinte expressão do Hamiltoniano de interação

$$\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{0}, t)\tag{2.5}$$

onde se colocou explicitamente o operador de dipolo elétrico $\hat{\mathbf{d}} = e\hat{\mathbf{r}}$. Este operador de dipolo escrito na base de auto-estados do hamiltoniano livre do átomo $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ tem a seguinte forma

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_{ij} \mathbf{d}_{ij} \hat{\sigma}_{ij}\tag{2.6}$$

²Os comprimentos de onda nos quais estamos interessados estão na região que vai desde o infravermelho, passando pelo visível até o ultravioleta próximo, e possuem um comprimento de onda mínimo de uns 300 nm. que são comprimentos muito maiores que o tamanho do átomo que é da ordem do raio de Bohr, uns 60 pm.

com $\mathbf{d}_{ij} = \langle i | \hat{\mathbf{d}} | j \rangle$ os elementos de matriz do operador dipolo. Pelo fato de $\hat{\mathbf{d}}$ ser um operador ímpar por inversão espacial, estes elementos de matriz $\mathbf{d}_{ij}$ são nulos se os estados $|i\rangle$ e $|j\rangle$ tiverem paridade definida e igual (é por isto que os elementos de matriz diagonais são nulos). Se o elemento de matriz entre dois estados se anular, a transição é chamada proibida por dipolo. As regras de seleção para identificar as transições permitidas são bem conhecidas e estão relacionadas com o momento angular dos estados [18].

Logo, com ajuda da equação (1.71) o Hamiltoniano de interação fica da forma

$$\hat{H}_I = -(\mathbf{d}_{12}\hat{\sigma}_{12} + \mathbf{d}_{21}\hat{\sigma}_{21}) \cdot (\hat{\mathbf{E}}^{[+]}(0, t) + \hat{\mathbf{E}}^{[-]}(0, t)) \quad (2.7)$$

O Hamiltoniano anterior pode ser simplificado ainda mais usando uma das aproximações mais utilizadas na ótica, que é a chamada aproximação de onda girante (RWA³). Para isto vamos transformar o Hamiltoniano anterior no formalismo de Dirac.

$$\begin{aligned} \hat{H}_{ID} = & - \int d^3k \sum_s i\mathcal{E}_\omega \left(\hat{\sigma}_{12}\hat{a}_{\mathbf{k},s}(t)\mathbf{d}_{12} \cdot \vec{\varepsilon}(\mathbf{k}, s)e^{i(\omega_0+\omega)t} - \hat{\sigma}_{21}\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger(t)\mathbf{d}_{21} \cdot \vec{\varepsilon}^*(\mathbf{k}, s)e^{-i(\omega_0+\omega)t} \right. \\ & \left. + \hat{\sigma}_{21}\hat{a}_{\mathbf{k},s}(t)\mathbf{d}_{21} \cdot \vec{\varepsilon}(\mathbf{k}, s)e^{i(\omega_0-\omega)t} - \hat{\sigma}_{12}\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger(t)\mathbf{d}_{12} \cdot \vec{\varepsilon}^*(\mathbf{k}, s)e^{-i(\omega_0-\omega)t} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $\mathcal{E}_\omega = \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0(2\pi)^3} \right)^{1/2}$ e $\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar$ é a diferença das energias do estado fundamental e o estado excitado dividido por $\hbar$. Podemos observar que no caso que nos aproximamos na ressonância, i.e. $\omega \approx \omega_0$, os dois primeiros termos da equação anterior oscilam rapidamente devido ao fator $e^{i(\omega_0+\omega)t}$ (e o conjugado dele) e consequentemente, para tempos suficientemente longos estes termos tem uma contribuição que em média é aproximadamente zero. A aproximação de onda girante consiste em desprezar estes termos, que além disso, representam processos que individualmente não conservam a energia, já que o primeiro deles representa o processo no qual o átomo vai do estado excitado para o fundamental ao mesmo tempo que um fóton é aniquilado, enquanto que o segundo termo representa o processo inverso, onde o átomo vai do estado fundamental para o excitado no instante em que um fóton é emitido.

Passando da representação de Dirac à representação de Heisenberg, nosso Hamiltoniano de interação na aproximação RWA é

$$\hat{H}_{RWA} = -\mathbf{d}_{12} \cdot \hat{\mathbf{E}}^{[-]}(0, t)\hat{\sigma}_{12} - \mathbf{d}_{21} \cdot \hat{\mathbf{E}}^{[+]}(0, t)\hat{\sigma}_{21} \quad (2.9)$$

³Do inglês *Rotating Wave Approximation*.

O hamiltoniano anterior (2.9) descreve (dentro da RWA) a interação de dois níveis atômicos com todos os modos do campo eletromagnético,⁴ mas no caso no qual temos o átomo interagindo com a luz proveniente de um laser, teremos que só um modo ou uma banda de modos estreita em torno de um modo central do campo (um campo como aquele descrito na subseção (1.4.4)) estão populados (possuem um numero de fótons diferente de zero). Existem modelos no qual se descreve a interação de níveis atômicos com um único modo do campo, como é o modelo de Jaynes-Cummings, [24, 25, 36] os quais, embora sejam úteis no cálculo de algumas propriedades da interação átomo-campo, são modelos pouco exatos, já que ao contrário do caso clássico, os modos vazios do campo também interagem com a matéria, levando a efeitos puramente quânticos como a emissão espontânea.

2.2 Equações de Heisenberg-Langevin

Para nosso caso, vamos a levar em conta todos os modos do campo, incluindo aqueles que não estão populados, mas já que nós temos um interesse particular nas propriedades dos modos populados faremos um tratamento diferente para estes modos. Primeiro escreveremos o Hamiltoniano RWA separando os modos populados dos modos não populados

$$\hat{H}_{RWA} = -\mathbf{d}_{21} \cdot \hat{\mathbf{E}}_L^{(+)}(0, t) \hat{\sigma}_{21} - \mathbf{d}_{21} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{vac}^{(+)}(0, t) \hat{\sigma}_{21} + h.c. \quad (2.10)$$

com

$$\hat{\mathbf{E}}_{vac}^{(+)}(0, t) = \int' d^3k \sum_s \mathcal{E}_\omega i \hat{a}_{\mathbf{k},s}(t) \vec{\epsilon}(\mathbf{k}, s). \quad (2.11)$$

O termo $\hat{\mathbf{E}}_L^{(+)}$ é similar à expressão (1.71) só que contém unicamente os modos populados do campo pelo laser⁵, e no segundo termo o símbolo $\int'$ significa que somamos sobre todos os modos exceto os modos que estão no termo anterior e aqueles que não satisfazem a condição de longo comprimento de onda. Com ajuda das relações de comutação (2.3) e (1.74) pode-se achar as equações de Heisenberg (1.10) para os operadores atômicos e os modos vazios do campo

⁴Na realidade o Hamiltoniano é válido só para aqueles modos que cumpram com a condição de longo comprimento de onda.

⁵Numa primeira aproximação o campo pode ter um único modo populado ou, numa descrição um pouco mas completa, os modos populados estão conformados por uma soma de modos ao redor de uma portadora central dentro de uma banda estreita.

$$\frac{d\hat{\sigma}_{12}}{dt} = -i\omega_0\hat{\sigma}_{12} - \frac{i}{\hbar}(\hat{\sigma}_{22} - \hat{\sigma}_{11})\mathbf{d}_{21} \cdot (\hat{\mathbf{E}}_L^{[+]} + \hat{\mathbf{E}}_{vac}^{[+]}) \quad (2.12)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_{11}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\mathbf{d}_{12} \cdot (\mathbf{E}_L^{[-]} + \mathbf{E}_{vac}^{[-]})\hat{\sigma}_{12} - \frac{i}{\hbar}\mathbf{d}_{21} \cdot (\mathbf{E}_L^{[+]} + \mathbf{E}_{vac}^{[+]})\hat{\sigma}_{21} \quad (2.13)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_{21}}{dt} = \left(\frac{d\hat{\sigma}_{12}}{dt}\right)^\dagger \quad (2.14)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_{22}}{dt} = -\frac{d\hat{\sigma}_{11}}{dt} \quad (2.15)$$

$$\frac{d\hat{a}_{\mathbf{k},s}}{dt} = -i\omega\hat{a}_{\mathbf{k},s} + \frac{\mathcal{E}_\omega}{\hbar}(\mathbf{d}_{12} \cdot \vec{\varepsilon}^*(\mathbf{k}, s))\hat{\sigma}_{12}. \quad (2.16)$$

Dada a condição inicial no tempo $t_0 = 0$, podemos integrar formalmente a equação de evolução para os modos do campo no estado de vácuo (2.16) e achar a solução para o campo $\hat{\mathbf{E}}_{vac}$.

Seja $g_{\mathbf{k},s} = \mathcal{E}_\omega(\mathbf{d}_{12} \cdot \vec{\varepsilon}^*(\mathbf{k}, s))/\hbar$, a solução é dada por

$$\hat{a}_{\mathbf{k},s}(t) = \hat{a}_{\mathbf{k},s}(0)e^{-i\omega t} + \int_0^t d\tau e^{-i\omega\tau} g_{\mathbf{k},s}\hat{\sigma}_{12}(t+\tau) \quad (2.17)$$

Substituindo esta expressão na equação (2.11) obtemos

$$\hat{\mathbf{E}}_{vac}^{[+]}(t) = \int' d^3k \sum_s \mathcal{E}_\omega i \left(\hat{a}_{\mathbf{k},s}(0)e^{-i\omega t} + \int_0^t d\tau e^{-i\omega\tau} g_{\mathbf{k},s}\hat{\sigma}_{12}(t+\tau) \right) \vec{\varepsilon}(\mathbf{k}, s) \quad (2.18)$$

$$= \hat{\mathbf{E}}_{vac,l}^{[+]}(t) + \hat{\mathbf{E}}_{vac,f}^{[+]}(t) \quad (2.19)$$

onde

$$\hat{\mathbf{E}}_{vac,l}^{[+]}(t) = \int' d^3k \sum_s \mathcal{E}_\omega i \hat{a}_{\mathbf{k},s}(0) e^{-i\omega t} \vec{\varepsilon}(\mathbf{k}, s) \quad (2.20)$$

é a solução do campo livre, e

$$\hat{\mathbf{E}}_{vac,f}^{[+]}(t) = \int' d^3k \sum_s \mathcal{E}_\omega i \vec{\varepsilon}(\mathbf{k}, s) \int_0^t d\tau e^{-i\omega\tau} g_{\mathbf{k},s}\hat{\sigma}_{12}(t+\tau) \quad (2.21)$$

é o campo produzido pelo átomo (fonte). Observa-se que esta componente do campo é “proporcional” ao operador atômico $\hat{\sigma}_{12}$ e que para um dado tempo t , este campo depende dos valores do $\hat{\sigma}_{12}$ em todos os instantes anteriores até o instante inicial $t = 0$ i.e. o campo carrega informação do passado (memória) do operador dipolo.

Antes de substituir esta solução nas equações de evolução dos operadores atômicos (2.12-2.15) devemos enfrentar o problema do ordenamento. Temos que para qualquer instante de tempo t é válida a seguinte relação de comutação, $[\hat{\sigma}_{ij}(t), \mathbf{E}_{vac}^{[\pm]}(t)] = 0$, mas os operadores atômicos $\hat{\sigma}_{ij}(t)$ em geral não comutam separadamente com as componentes

$\mathbf{E}_{vac,l}^{[\pm]}(t)$ e $\mathbf{E}_{vac,p}^{[\pm]}(t)$ do campo. A fim de simplificar as contas é conveniente utilizar o chamado ordenamento normal no qual os operadores de aniquilação $\hat{a}_{\mathbf{k},s}(0)$ ficam do lado direito do resto dos operadores, e os operadores de criação $\hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger(0)$ ficam do lado esquerdo. Devido a que o estado inicial dos modos do campo contidos em $\mathbf{E}_{vac,l}^{[\pm]}(t)$ é o estado de vácuo, o ordenamento normal tem como vantagem que é possível usar diretamente as relações $\hat{a}_{\mathbf{k},s}(0) |0\rangle_{\mathbf{k},s} = \langle 0|_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger(0) = 0$.

Observa-se também que, o termo $\hat{\mathbf{E}}_{vac,f}^{[+]}(t)$ (ver equação 2.21) contém um fator da forma

$$f(\tau) = i \int d^3k \sum_s \mathcal{E}_\omega g_{\mathbf{k},s} \tilde{\epsilon}(\mathbf{k}, s) e^{-i\omega\tau} \quad (2.22)$$

que pode ser visto como integral tipo transformada de Fourier sobre uma faixa de frequências muito grande, mais especificamente sobre todos os comprimentos de onda que satisfazem a condição de longo comprimento de onda. Se k_m é a norma máxima do vetor de onda que satisfaz esta condição, a função $f(\tau)$ será uma função muito estreita ao redor de $\tau = 0$ com uma largura da ordem de $1/ck_m$. Neste tempo tão curto é razoável aproximar o operador $\hat{\sigma}_{12}(t + \tau)$ por $\hat{\sigma}_{12}(t)$ na expressão (2.21), e para facilitar as contas também podemos estender o limite da integral sobre τ até infinito somente introduzindo um erro muito pequeno. Ao realizar a primeira aproximação temos que ao contrário da expressão (2.21) o campo não carrega mais “informação sobre o passado” do operador $\hat{\sigma}_{12}$ e depende só do valor instantâneo. O fato de que esta aproximação seja possível de realizar implica que temos um processo markoviano[39, 40]. Fisicamente o que se tem é que o campo, ao possuir um número infinito de graus de liberdade, atua como um reservatório para o átomo que perde informação rapidamente dos tempos anteriores devido a possuir uma dinâmica muito mais rápida do que o átomo (o átomo evolui em tempos da ordem $1/\omega_0$, enquanto a resposta do campo ao átomo, dada pela função $f(\tau)$ evolui em tempos a ordem de $1/ck_m$).

Levando em conta as considerações anteriores, as equações (2.12-2.15) ficam da forma

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_{12}(t)}{dt} = & -i\omega_0\hat{\sigma}_{12}(t) - \frac{i}{\hbar} (\hat{\sigma}_{22}(t) - \hat{\sigma}_{11}(t)) \mathbf{d}_{12} \cdot \hat{\mathbf{E}}_L^{[+]}(t) \\ & -i (\hat{\sigma}_{22}(t) - \hat{\sigma}_{11}(t)) \int d^3k \sum_s i g_{\mathbf{k},s}^* \hat{a}_{\mathbf{k},s}(0) e^{-i\omega t} \\ & -i (\hat{\sigma}_{22}(t) - \hat{\sigma}_{11}(t)) \hat{\sigma}_{12}(t) \int d^3k \sum_s i |g_{\mathbf{k},s}|^2 \int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Usando a definição dos operadores atômicos $\hat{\sigma}_{ij}$ se deduz que $(\hat{\sigma}_{22}(t) - \hat{\sigma}_{11}(t)) \hat{\sigma}_{12}(t) = -\hat{\sigma}_{12}(t)$, e com a relação $\int_0^\infty d\tau e^{-i\omega\tau} = \pi\delta(\omega) + i\mathcal{P}\frac{1}{\omega}$, onde $\mathcal{P}\frac{1}{\omega}$ significa o valor principal

de Cauchy, a equação anterior se transforma em

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\sigma}_{12}(t)}{dt} = & -i\omega_0\hat{\sigma}_{12}(t) - \frac{i}{\hbar}(\hat{\sigma}_{22}(t) - \hat{\sigma}_{11}(t))\mathbf{d}_{12} \cdot \hat{\mathbf{E}}_L^{[+]}(t) \\ & + (\hat{\sigma}_{22}(t) - \hat{\sigma}_{11}(t)) \int' d^3k \sum_s g_{\mathbf{k},s}^* \hat{a}_{\mathbf{k},s}(0) e^{-i\omega t} \\ & - \hat{\sigma}_{12}(t) \int' d^3k \sum_s |g_{\mathbf{k},s}|^2 \left(\pi\delta(\omega) + i\mathcal{P}\frac{1}{\omega} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Fazendo um tratamento similar com o resto das equações de evolução dos operadores atômicos (2.12-2.15), obtemos as chamadas equações de Heisenberg-Langevin

$$\frac{d\hat{\sigma}_{12}(t)}{dt} = - \left(i(\omega_0 + \Delta_r) + \frac{\Gamma}{2} \right) \hat{\sigma}_{12}(t) - \frac{i}{\hbar}(\hat{\sigma}_{22}(t) - \hat{\sigma}_{11}(t))\mathbf{d}_{12} \cdot \hat{\mathbf{E}}_L^{[+]}(t) + \hat{F}_{12}(t) \quad (2.25)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_{11}(t)}{dt} = \Gamma\hat{\sigma}_{22}(t) + \frac{i}{\hbar}\mathbf{d}_{12} \cdot \hat{\mathbf{E}}_L^{[-]}(t)\hat{\sigma}_{12}(t) - \frac{i}{\hbar}\mathbf{d}_{21} \cdot \hat{\mathbf{E}}_L^{[+]}(t)\hat{\sigma}_{21}(t) + \hat{F}_{11}(t) \quad (2.26)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_{22}(t)}{dt} = -\Gamma\hat{\sigma}_{22}(t) - \frac{i}{\hbar}\mathbf{d}_{12} \cdot \hat{\mathbf{E}}_L^{[-]}(t)\hat{\sigma}_{12}(t) + \frac{i}{\hbar}\mathbf{d}_{21} \cdot \hat{\mathbf{E}}_L^{[+]}(t)\hat{\sigma}_{21}(t) + \hat{F}_{22}(t) \quad (2.27)$$

$$\frac{d\hat{\sigma}_{21}(t)}{dt} = \left(\frac{d\hat{\sigma}_{12}(t)}{dt} \right)^\dagger \quad (2.28)$$

onde temos definido a taxa de decaimento espontâneo Γ e o deslocamento radiativo Δ_r como

$$\Gamma = 2 \int' d^3k \sum_s |g_{\mathbf{k},s}|^2 \pi\delta(\omega) \quad (2.29)$$

$$\Delta_r = \int' d^3k \sum_s |g_{\mathbf{k},s}|^2 \mathcal{P}\frac{1}{\omega} \quad (2.30)$$

mas em geral o termo Δ_r é muito pequeno comparado com a frequência ω_0 , e por isso não vai ser levado em consideração.

Os operadores $\hat{F}_{ij}(t)$ são chamados operadores de Langevin pela semelhança que têm com as forças de Langevin no movimento browniano [37, 39, 40], e neste caso são definidos como

$$\hat{F}_{12}(t) = (\hat{\sigma}_{22}(t) - \hat{\sigma}_{11}(t)) \int' d^3k \sum_s g_{\mathbf{k},s}^* \hat{a}_{\mathbf{k},s}(0) e^{-i\omega t} \quad (2.31)$$

$$\hat{F}_{11}(t) = \hat{\sigma}_{12}(t) \int' d^3k \sum_s g_{\mathbf{k},s}^* \hat{a}_{\mathbf{k},s}(0) e^{-i\omega t} + h.c \quad (2.32)$$

$$\hat{F}_{22}(t) = -\hat{F}_{11}(t) \quad (2.33)$$

$$\hat{F}_{21}(t) = \hat{F}_{12}^\dagger(t). \quad (2.34)$$

É muito fácil observar que estes operadores tem valor esperado nulo $\langle \hat{F}_{ij}(t) \rangle = 0$, já que eles estão na ordem normal e o estado inicial dos modos do campo contidos em $\hat{F}_{ij}(t)$ é o estado de vácuo. A função de correlação entre qualquer par de operadores de Langevin tem a forma

$$\langle \hat{F}_{ij}(t) \hat{F}_{kl}(t') \rangle = D_{ij,kl}(t) \delta(t - t') \quad (2.35)$$

com $D_{ij,kl}(t)$ os chamados coeficientes de difusão (Ou em conjunto é chamada matriz de difusão). Estes coeficientes podem ser calculados diretamente através das definições dos operadores de Langevin $\hat{F}_{ij}$ [37], ou através das relações generalizadas de Einstein [37, 41, 42], as quais estabelecem que, dado um conjunto N de operadores $\{\hat{S}_i(t)\}$ que satisfazem equações de Heisenberg-Langevin

$$\frac{d\hat{S}_i(t)}{dt} = \mathcal{D}_i[\hat{S}_1(t), \dots, \hat{S}_N(t)] + \hat{F}_i(t) \quad (2.36)$$

onde $\mathcal{D}_i$ é denominado termo de arrasto e as forças $\hat{F}_i(t)$ satisfazem que

$$\langle \hat{F}_i(t) \rangle = 0, \quad (2.37)$$

$$\langle \hat{F}_i^\dagger(t) \hat{F}_j(t') \rangle = D_{ij} \delta(t - t'), \quad (2.38)$$

então as relações generalizadas de Einstein

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \langle \mathcal{D}(\hat{S}_i^\dagger \hat{S}_j) - \mathcal{D}_i^\dagger \hat{S}_j - \hat{S}_i^\dagger \mathcal{D}_j \rangle \quad (2.39)$$

dão os elementos da matriz de difusão. Na equação anterior, $\mathcal{D}(\hat{S}_i^\dagger \hat{S}_j)$ é o termo de arrasto na equação

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{S}_i^\dagger(t) \hat{S}_j(t) \rangle = \langle \mathcal{D}(\hat{S}_i^\dagger \hat{S}_j) \rangle. \quad (2.40)$$

Cabe anotar que nosso caso, os operadores $\hat{S}_i = \hat{\sigma}_{lm}$ tem uma álgebra fechada sob a multiplicação, i.e. o termo $\hat{S}_k^\dagger \hat{S}_l \in \{\hat{S}_i(t)\}$. Isto traz como resultado que o termo $\mathcal{D}(\hat{S}_k^\dagger \hat{S}_l)$ é simplesmente um dos termos $\mathcal{D}_i$ para algum i .

Estas funções de correlação serão muito úteis na hora de calcular o emaranhamento e os espectros de ruído dos campos.

Já sabendo como os átomos são afetados pelo campo electromagnético, iremos ver como podemos testar o emaranhamento entre diferentes modos do campo electromagnético gerado ao eles se propagarem através de um meio atômico.

Capítulo 3

Emaranhamento

O fenômeno do emaranhamento quântico é um fenômeno que tem atraído a atenção da comunidade científica, uma vez que ele é uns dos aspectos mais intrigantes, contra-intuitivos e, por falar de alguma forma, estranhos que tem na teoria quântica. O emaranhamento consiste qualitativamente no fato de que, quando temos sistemas quânticos compostos por vários subsistemas, ao eles interagirem uns com outros, eles “perdem” a individualidade no sentido que, ao contrário da teoria clássica, uma descrição *completa* de cada um dos subsistemas por separado não é possível sem ter uma perda de informação de dito subsistema, e só é possível uma descrição do sistema como um todo. Isto ocorre sem importar quão afastados estejam os subsistemas uns dos outros, o que leva a que a teoria seja fortemente não local. É esta perda de informação própria dos estados emaranhados que sugere que existem correlações entre os subsistemas muito mais fortes que aquelas que poderiam surgir entre subsistemas clássicos.

Já nos primeiros estágios da teoria quântica, grandes mentes da física como Schrödinger [43] e Einstein, Podolski e Rosen [44], no famoso artigo do paradoxo E.P.R., perceberam esta característica *esquisita* que poderiam chegar a ter os sistemas quânticos. Estes últimos (incluindo até o mesmo Einstein) pensavam que este fenômeno era tão pouco intuitivo e não local que faria da teoria quântica uma teoria incompleta. No artigo do paradoxo E.P.R. propõe-se um estado de duas partículas, cuja função de onda na representação de posição vem dada por $\psi(x_1, x_2) = C_x \delta(x_1 - x_2)$ ¹, o que representa uma perfeita correlação entre as posições das duas partículas. Ao calcular a função de onda na representação de momento, $\varphi(p_1, p_2) = C_p \delta(p_1 + p_2)$ observamos uma perfeita anticorrelação nos momentos das partículas. Isto significa que ao fazer medições da posição da partícula 1, obteríamos imediatamente a posição da partícula 2, e vice versa. O mesmo é válido para medições

¹Esta função de onda não corresponde a um estado físico, uma vez que não é normalizável, mas é possível fazer um exemplo mais rigoroso em termos de estados chamados *two-mode squeeze vacuum states*, que levam ao mesmo resultado [12].

nos momentos, ao medir o momento da partícula 1 obtemos imediatamente o momento da partícula 2. Supondo que as partículas estão muito afastadas de forma tal que não é possível interação entre elas, ou que a distância é grande suficiente que não permite a comunicação de informação no intervalo de tempo no qual as medidas são feitas, e se pensamos em termos de localidade, não haveria forma de modificar o estado de uma das partículas ao fazer medidas na outra, e portanto medindo x_1 na partícula 1 e p_2 na partícula 2 com precisão arbitrária, teríamos informação dos observáveis conjugados x_2 e p_1 . Mas, uma vez que a mecânica quântica impõe restrições sob as medidas em variáveis canonicamente conjugadas, dadas pelo princípio de incerteza de Heisenberg (1.28), o conhecimento com precisão arbitrária de ditas variáveis implicaria que a teoria quântica, embora explique satisfatoriamente muitos fenômenos, seria uma teoria não autoconsistente, e portanto uma teoria incompleta.

O raciocínio anterior está fundamentado nos conceitos de “*elemento de realidade*”, e “*localidade*” onde o primeiro faz referência a quando um observável físico tem um valor definido *a priori*, independente de ele ser medido ou não (segundo o princípio da incerteza, duas variáveis que não comutam não podem ser elementos de realidade ao mesmo tempo num sistema dado). O conceito de *localidade* está relacionado com o fato de que um objeto situado numa posição dada, só pode ser influenciado diretamente por aquilo que acontece nessa posição ou nos arredores imediatamente próximos dele. Em resposta ao problema apresentado no paradoxo EPR, Bohr publicou no mesmo ano um artigo [45] defendendo as previsões da teoria quântica, mas já que na época não tinha forma de comprovar experimentalmente a hipótese do *realismo local*, a discussão sobre o tema ficou mais no plano filosófico. Foi apenas em 1964, quando John S. Bell formulou o famoso teorema que leva seu nome [46, 47], no qual demonstra de formal genial e muito simples, que uma teoria que satisfaz a hipótese de realismo local deve também satisfazer certo tipo de desigualdades chamadas desigualdades de Bell. Estas desigualdades de Bell abrem a possibilidade de mover a discussão sobre o paradoxo EPR ao plano experimental, já que o fato de comprovar no laboratório uma violação de ditas desigualdades, provaria que a natureza é descrita de forma mais adequada por uma teoria *tipo* mecânica quântica que por uma teoria “*realista local*”.

Os primeiros experimentos feitos para demonstrar o teorema de Bell foram aqueles realizados por Clauser *et al.* em 1978 [48] e Aspect *et al.* em 1982 [49], nos quais utilizando estados de polarização dos fótons, é violada uma desigualdade *tipo* Bell conhecida como desigualdade CHSH [50]. Tanto estes testes experimentais que violam as desigualdades de Bell, como numerosos outros feitos em sistemas diversos, como por exemplo, usando íons [51], ou testes em variáveis contínuas usando as quadraturas do campo eletromagnético [52] fizeram, além de ratificar a teoria quântica, dos estados emaranhados uma realidade experimental.

O fenômeno do emaranhamento foi usado para tentar refutar (ou ratificar) a completeza da teoria quântica, e agora este mesmo fenômeno está sendo usado para tentar resolver problemas sobre os fundamentos da teoria quântica, como são o problema da decoerência quântica, a transição do mundo clássico ao quântico, o problema da medida e o colapso da função de onda [53–55] e, como consequência das fortes correlações existentes entre sistemas emaranhados, estes são de grande interesse e utilidade em áreas como a computação quântica, informação quântica, e criptografia quântica [4].

3.1 Definição Formal do Emaranhamento

O emaranhamento surge quando temos sistemas quânticos que são descritos num espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{sis}$, que é conformado pelo produto tensorial de dois ou mais subsistemas

$$\mathcal{H}_{sis} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N, \quad (3.1)$$

o caso mais simples é o caso bipartido i.e. um sistema composto por dois subsistemas onde $\mathcal{H}_{sis} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Sejam $\{|\varphi_i\rangle_1\}$ e $\{|\phi_j\rangle_2\}$ bases dos subespaços $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ respetivamente, o estado mais geral do sistema composto é escrito da forma

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |\varphi_i\rangle_1 \otimes |\phi_j\rangle_2. \quad (3.2)$$

Um vetor de estado se chama um estado separável se a expansão anterior pode-se fatorar como o produto tensorial de dois estados, cada um pertencente a um subespaço diferente.

$$|\Psi\rangle \text{ Separável} \iff |\Psi\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |\varphi_i\rangle_1 \otimes |\phi_j\rangle_2 = |\psi_1\rangle_1 \otimes |\psi_2\rangle_2. \quad (3.3)$$

No caso em que o estado não seja separável, temos um estado emaranhado.

O caso mais simples entre os sistemas bipartidos é o caso de dois subsistemas bidimensionais, como por exemplo, dois spins 1/2 ou dois estados de polarização do fóton. Os exemplos de estados emaranhados mais representativos destes sistemas são os chamados estados de Bell, que são estados maximamente emaranhados [54] que formam uma base ortogonal do sistema composto. Denotando os estados base dos subespaços bidimensionais como $|0\rangle_i$ e $|1\rangle_i$, $i = 1, 2$ estes estados de Bell são:

$$|\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (3.4)$$

$$|\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (3.5)$$

onde foi usada a notação mais compacta $|ij\rangle = |i\rangle_1 \otimes |j\rangle_2$, e onde é fácil ver que estes estados não podem ser escritos da forma (3.3). Estes estados, e estados de multipartições bidimensionais são muito usados nos campos de informação e computação quântica pela simplicidade que possuem, e pelo fato que a base 2 é a base na qual esta fundamentada a computação clássica [4].

Para o caso N-partite as definições são similares. Sejam $\{|n\rangle_i\}, i = 1, 2, \dots, N$ bases para os subespaços $\mathcal{H}_i$ se define um estado separável como

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle \text{ Separavel} &\iff |\Psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_N} c_{i_1, i_2, \dots, i_N} |i_1\rangle_1 \otimes |i_2\rangle_2 \otimes \dots \otimes |i_N\rangle_N \\ &= |\psi_1\rangle_1 \otimes |\psi_2\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle_N, \end{aligned} \quad (3.6)$$

e novamente definimos os estados emaranhados como aqueles que não podem ser escritos como o produto tensorial de estados, cada um pertencente a um subsistema diferente, i.e. um estado emaranhado é aquele que não é separável.

Entretanto, quando nosso sistema é descrito em termos de um operador densidade ao invés de um vetor de estado, a definição de estado emaranhado torna-se um pouco mais sutil. Poderíamos pensar em definir estados separáveis em forma análoga ao caso anterior, i.e. como estados que podem ser escritos como o produto tensorial de operadores densidade, cada um pertencente a um subsistema diferente

$$\hat{\rho}_{sis} \text{ Separável} \iff \hat{\rho}_{sis} = \hat{\rho}_1 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_N, \quad (3.7)$$

mas este é só um caso particular de estado separável chamado estado produto. O caso mais geral de um estado separável em estados mistos é uma soma convexa destes estados produto

$$\hat{\rho}_{sis} \text{ Separável} \iff \hat{\rho}_{sis} = \sum_i p_i (\hat{\rho}_1^i \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_N^i), \quad (3.8)$$

com $p_i \geq 0$ e $\sum_i p_i = 1$. A definição anterior pode ser interpretada como uma mistura estatística de estados produtos do tipo (3.7). Finalmente definimos os estados emaranhados (ou inseparáveis) no caso de estados mistos como todo aquele que não possa ser escrito da forma (3.8). Cabe observar que a propriedade de emaranhamento depende fortemente de como é feita a partição do sistema em subsistemas, para mostrar isto pensemos num sistema composto de 3 subsistemas A , B e C , mas podemos considerar o mesmo sistema como composto por 2 subsistemas fazendo bipartições. Estas bipartições podem ser feitas de três formas diferentes, $\{\{A, B\}, C\}$, $\{\{A, C\}, B\}$ e $\{\{B, C\}, A\}$ e,

embora o sistema possua emaranhamento tripartite, i.e. não pode ser escrito da forma (3.8)

$$\hat{\rho}_{sis} \neq \sum_i p_i (\hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i \otimes \hat{\rho}_C^i), \quad (3.9)$$

ele pode ser separável para alguma, várias ou todas das bipartições antes mencionadas, como por exemplo ele poderia ser escrito como

$$\hat{\rho}_{sis} = \sum_i p_i (\hat{\rho}_{A,B}^i \otimes \hat{\rho}_C^i), \quad (3.10)$$

neste caso o estado se chama parcialmente separável. Se um estado composto por N subsistemas é inseparável para todas as subpartições possíveis se diz que tem emaranhamento N -partite **genuíno**.

3.2 Critérios de Separabilidade

Especificamente não existe uma definição operacional do que é um estado emaranhado, só se deu uma definição do que é um estado separável, e todo estado que não seja separável é considerado emaranhado. O problema de determinar quando um estado está emaranhado ou não se conhece em informação quântica como o problema da separabilidade. Em geral, é um problema muito difícil em termos computacionais, e a dificuldade cresce muito rápido à medida que tanto as partições como a dimensão destas aumentam. No entanto, é possível aplicar, além das desigualdades de Bell, vários testes de separabilidade para determinar quando um estado dado está emaranhado ou não.

3.2.1 Critério de Transposição Parcial Positiva (PPT)

O critério de transposição parcial positiva (PPT²), também conhecido como critério Peres-Horodecki [56, 57] é um critério de separabilidade em sistemas bipartidos que é baseado nos conceitos de mapa positivo e mapa completamente positivo.

Um mapa positivo é uma aplicação linear $\mathcal{E} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ que preserva positividade, i.e leva operadores positivos (estados) em operadores positivos, onde $\mathcal{H}$ é o espaço vetorial formado pelos operadores que agem no espaço de Hilbert do sistema $\mathcal{H}$.

$$\mathcal{E} \text{ Positivo se } \forall \hat{\rho} > 0 \Rightarrow \hat{\rho}' = \mathcal{E}(\hat{\rho}) > 0. \quad (3.11)$$

²Do inglês *Positive Partial Transpose*.

Poderia se pensar que esta condição, junto com a condição de preservar o traço, seriam condições suficientes para que um mapa dado possa representar um processo físico. No entanto, isso não é suficiente já que extensões triviais deste mapa podem não preservar a positividade dos operadores. Para definir um mapa físico definimos os mapas completamente positivos, que são mapas $\mathcal{E} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}$ positivo, para o qual a extensão deste mapa num espaço maior, $\mathbb{I} \otimes \mathcal{E}$ também é um mapa positivo, onde $\mathbb{I}$ é o mapa identidade em qualquer outro espaço vetorial, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \text{ que age em } \mathcal{H}_B \text{ é completamente positivo se} \\ \forall \hat{\rho} \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \hat{\rho} > 0, \Rightarrow \hat{\rho}' = (\mathbb{I}_A \otimes \mathcal{E})\hat{\rho} > 0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

O critério PPT usa o fato de que, restringidos ao espaço de estado separáveis, os mapas positivos e completamente positivos são totalmente equivalentes. Para isto observamos que a operação de transposição $\mathcal{T}$ é um mapa positivo, já que os autovalores de uma matriz e de sua transposta são iguais. Mas a transposição não é um mapa completamente positivo.

Seja $\hat{\rho}_{AB}^{sep} = \sum_i p_i(\hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i)$ um estado separável bipartido, temos que

$$\hat{\sigma}_{AB} = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{T})\hat{\rho}_{AB}^{sep} = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{T}) \sum_i p_i(\hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i) = \sum_i p_i(\hat{\rho}_A^i \otimes \mathcal{T}(\hat{\rho}_B^i)) \quad (3.13)$$

também pode representar algum outro estado físico, já que os termos $\mathcal{T}(\hat{\rho}_B^i)$ são operadores densidades tão válidos quanto $\hat{\rho}_B^i$. Portanto, se a operação de transposição parcial $\mathbb{I} \otimes \mathcal{T}$ leva um estado $\hat{\rho}_{AB}$ fora do conjunto de operadores definidos positivos, significa que o estado $\hat{\rho}_{AB}$ é um estado emaranhado (o mesmo raciocínio não é só válido para a operação de transposição, mas para qualquer mapa positivo mas não completamente positivo). Para mostrar que a transposição não é um mapa completamente positivo, e como é utilizado para *detectar* emaranhamento, podemos tomar como exemplo um dos estados de Bell (3.4,3.5) e fazer a transposição sobre uns dos subsistemas.

A matriz densidade associada ao estado de Bell $|\Psi_+\rangle$ é

$$\hat{\rho}_{\Psi_+} = |\Psi_+\rangle \langle \Psi_+| = \frac{1}{2} (|00\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11| + |11\rangle \langle 00| + |00\rangle \langle 11|) \quad (3.14)$$

Agora, transpondo sobre o segundo subsistema (transposição parcial) temos que

$$\hat{\sigma}_{\Psi_+} = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{T})\hat{\rho}_{\Psi_+} = \frac{1}{2} (|00\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 11| + |10\rangle \langle 01| + |01\rangle \langle 10|) \quad (3.15)$$

cujos autovalores são $\{1/2, 1/2, 1/2, -1/2\}$, o que significa que o operador $\hat{\sigma}_{\Psi_+}$ não representa um estado físico e portanto o estado $\hat{\rho}_{\Psi_+}$ é um estado emaranhado. Está demonstrado que o critério PPT é necessário e suficiente para sistemas bipartidos de tipo (2×2) e (2×3) (usando a notação (*dimensão do sistema A* $\times$ *dimensão do sistema B*)) [57], mas se o teste PPT não detectar emaranhamento em sistemas de maior dimensionalidade, não significa que este não esteja presente, nesses casos o teste é inconclusivo.

Já no caso de variáveis contínuas (CV³), o critério PPT tem uma adaptação a qual traduz a operação de transposição parcial do operador densidade no contexto da matriz de covariância, usando para isto o formalismo da função de Wigner [58].

A função de Wigner é uma das mais utilizadas funções de quase-probabilidade que representam ao operador densidade num espaço de fase. Com esta função é possível calcular valores esperados dos observáveis da forma clássica. Podemos definir a função de Wigner no caso unidimensional como

$$W_{\rho}(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} \int \langle q+x | \hat{\rho} | q-x \rangle e^{2ixp/\hbar} dx. \quad (3.16)$$

Vemos que a operação de transposição do operador densidade tem como consequência uma reflexão especular do espaço de fase da função de Wigner, i.e.⁴

$$\begin{aligned} W_{\rho^T}(p, q) &= \frac{1}{\pi\hbar} \int \langle q+x | \hat{\rho}^T | q-x \rangle e^{2ixp/\hbar} dx \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int \langle q-x | \hat{\rho} | q+x \rangle e^{2ixp/\hbar} dx \\ &= \frac{1}{\pi\hbar} \int \langle q+x | \hat{\rho} | q-x \rangle e^{-2ixp/\hbar} dx \\ &= W_{\rho}(-p, q). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Para o caso bipartido é conveniente definir os vetores

$$\xi = \{p_1, q_1, p_2, q_2\}; \quad \hat{\xi} = \{\hat{p}_1, \hat{q}_1, \hat{p}_2, \hat{q}_2\} \quad (3.18)$$

onde o primeiro vetor contém os *c-numbers* correspondentes aos operadores no segundo vetor. Seguindo o mesmo procedimento que no caso unidimensional, é fácil ver que, no caso bidimensional, ao realizar a operação de transposição parcial sobre o segundo subsistema obtemos que a função de Wigner transforma-se da seguinte forma

³CV do ingles *Continuous Variable*. Sistemas infinito-dimensionais para o qual existe uma base na qual seus elementos estão indexadas por um índice contínuo, como por exemplo um modo do campo eletromagnético cuja base pode ser os autoestados de uma das quadraturas.

⁴Já que a operação de transposição depende da base na qual é feita, ao escrever a função de Wigner em termos dos elementos de matriz na base de momentos, o efeito da transposição seria uma reflexão especular da coordenada q, ao invés da coordenada p.

$$\hat{\rho} \rightarrow W(\xi) \quad (3.19)$$

$$\hat{\rho}^{T_2} \rightarrow W(\Lambda \cdot \xi) = W(p_1, q_1, -p_2, q_2) \quad (3.20)$$

com Λ definida como $\Lambda = \text{diag}(1, 1, -1, 1)$ e onde o superíndice (T_2) significa a transposição parcial sobre segundo subsistema.

Podemos definir uma matriz de covariância simetrizada parecida a aquela definida em (1.22) como

$$V_{ij} = \frac{1}{2} \left\langle \{ \delta \hat{\xi}_i, \delta \hat{\xi}_j \} \right\rangle = \int \delta \xi_i \delta \xi_j W(\xi) d^4 \xi. \quad (3.21)$$

mas desta vez, ao simetrizar o produto de operadores para obter operadores hermitianos, temos que esta matriz V é real e simétrica, além de semidefinida positiva. Sobre transposição parcial esta matriz V transforma-se segundo (3.20) como

$$\hat{\rho} \rightarrow V \implies \hat{\rho}^{T_2} \rightarrow \tilde{V} = \Lambda \cdot V \cdot \Lambda. \quad (3.22)$$

Para testar se esta nova matriz $\tilde{V}$ poderia ser gerada por algum outro estado físico utilizamos o fato de que, para que um operador possa ser considerado um operador densidade que represente um estado físico qualquer, a matriz C em (1.22) com $\hat{X} = \hat{\xi}$ deve cumprir a condição de positividade (1.23), que em termos da matriz de covariância simetrizada V pode ser escrito como

$$C_{ij} = \left\langle \delta \hat{\xi}_i \delta \hat{\xi}_j \right\rangle = \frac{1}{2} \left\langle \{ \delta \hat{\xi}_i, \delta \hat{\xi}_j \} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle [\delta \hat{\xi}_i, \delta \hat{\xi}_j] \right\rangle = V_{ij} + i \bar{\Omega}_{ij} \geq 0 \quad (3.23)$$

onde definimos a matriz $\bar{\Omega}$, com ajuda as relações de comutação canônicas (1.80), como

$$[\hat{\xi}_i, \hat{\xi}_j] = 2i \bar{\Omega}_{ij} \quad \bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & 0 \\ 0 & \mathbf{J} \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

portanto, para estados separáveis devemos ter, segundo o critério de transposição parcial positiva

$$\tilde{V} + i \bar{\Omega} \geq 0 \quad (3.25)$$

uma violação ao critério anterior significa que nosso operador densidade descreve um estado emaranhado, já que violações neste critério significam que a operação de transposição parcial, não preservou a positividade do operador densidade. Afirmar que a não violação do critério PPT equivale a ter um estado separável, é em geral falsa. Só

no caso de estados gaussianos, o critério PPT é necessário e suficiente para demonstrar emaranhamento [58].

3.2.2 Soma de Variâncias

Outro critério de separabilidade muito usado e prático em sistemas bipartidos, já que não precisa a medição de todos os elementos da matriz de covariância, é aquele proposto inicialmente por Duan *et al.* [59] relacionado com as variáveis do paradoxo EPR, para as quais um estado “maximamente” emaranhado possui correlações perfeitas entre posições e momentos. Para este par de variáveis EPR (diferença de posições e soma de momentos) o princípio da incerteza impõe certo limite nas suas variâncias, mas é possível encontrar outro limite menos forte (às vezes conhecida como desigualdade DGCZ⁵), o qual tem que ser obedecido por qualquer estado separável, i.e. só estados emaranhados possuem correlações fortes suficientes para violar este limite e se aproximar ao limite imposto pelo princípio da incerteza.

A demonstração a ser feita aqui está baseada na demonstração em [60] mais do que aquela feita no artigo original de Duan *et al.*, já que neste artigo temos uma generalização da desigualdade DGCZ basicamente seguindo os mesmos passos feitos por Duan *et al.*

Sejam dois subsistemas 1 e 2, e observáveis $\hat{r}_i, \hat{s}_i, i = 1, 2$ correspondentes a cada subsistema e que cumprem relações de comutação

$$[\hat{r}_i, \hat{s}_i] = i\hat{C}_i \quad (3.26)$$

onde $\hat{C}_i$ é um operador hermitiano que age no subsistema i . Com estes operadores podemos definir um par de observáveis que agem no sistema global como

$$\hat{u} = a_1\hat{r}_1 + a_2\hat{r}_2 \quad (3.27)$$

$$\hat{v} = b_1\hat{s}_1 + b_2\hat{s}_2 \quad (3.28)$$

sendo a_i, b_i parâmetros reais. Estes dois operadores possuem uma relação de incerteza (1.27) para qualquer estado $\hat{\rho}$ da forma

$$\langle \delta \hat{u}^2 \rangle \langle \delta \hat{v}^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \left| a_1 b_1 \langle \hat{C}_1 \rangle + a_2 b_2 \langle \hat{C}_2 \rangle \right|^2. \quad (3.29)$$

Usando que a função $f(x) = \gamma_1 x + \gamma_2/x$ com $\gamma_1, \gamma_2, x > 0$ tem como valor mínimo $f_{min} = 2\sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$, pode-se deduzir uma “relação de incerteza” para a soma das variâncias

⁵Dos sobrenomes dos autores Duan, Giedke, Cirac e Zoller.

como

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{u}^2 \rangle + \langle \delta \hat{v}^2 \rangle &\geq \langle \delta \hat{u}^2 \rangle + \frac{1}{4 \langle \delta \hat{u}^2 \rangle} \left| a_1 b_1 \langle \hat{C}_1 \rangle + a_2 b_2 \langle \hat{C}_2 \rangle \right|^2 \\ \langle \delta \hat{u}^2 \rangle + \langle \delta \hat{v}^2 \rangle &\geq \left| a_1 b_1 \langle \hat{C}_1 \rangle + a_2 b_2 \langle \hat{C}_2 \rangle \right|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Segundo a definição (3.8) um estado separável bipartido é da forma

$$\hat{\rho}_{sep} = \sum_k p_k (\hat{\rho}_1^k \otimes \hat{\rho}_2^k), \quad (3.31)$$

neste estado separável, a variância do observável $\hat{u}$ vem dada por

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{u}^2 \rangle_{sep} &= \langle \hat{u}^2 \rangle_{sep} - \langle \hat{u} \rangle_{sep}^2 \\ &= \sum_k p_k (a_1^2 \langle \hat{r}_1^2 \rangle_k + a_2^2 \langle \hat{r}_2^2 \rangle_k + 2a_1 a_2 \langle \hat{r}_1 \rangle_k \langle \hat{r}_2 \rangle_k) - \langle \hat{u} \rangle_{sep}^2 \\ &= \sum_k p_k (a_1^2 \langle (\delta \hat{r}_1^{(k)})^2 \rangle_k + a_2^2 \langle (\delta \hat{r}_2^{(k)})^2 \rangle_k) + \sum_k p_k \langle \hat{u} \rangle_k^2 - \left(\sum_k p_k \langle \hat{u} \rangle_k \right)^2 \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde utilizamos a notação $\delta \hat{r}_i^{(k)} = \hat{r}_i - \langle \hat{r}_i \rangle_k$ e similarmente para $\hat{s}_i$ e onde a expressão $\langle \dots \rangle_k$ significa o valor esperado sobre o estado produto $\hat{\rho}_1^k \otimes \hat{\rho}_2^k$. Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz $(\sum_k p_k) \left(\sum_k p_k \langle \hat{u} \rangle_k^2 \right) \geq (\sum_k p_k \langle \hat{u} \rangle_k)^2$ e calculando uma expressão similar para $\langle \delta \hat{v}^2 \rangle_{sep}$ obtemos

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{u}^2 \rangle_{sep} + \langle \delta \hat{v}^2 \rangle_{sep} &\geq \sum_k p_k \left(a_1^2 \langle (\delta \hat{r}_1^{(k)})^2 \rangle_k + b_1^2 \langle (\delta \hat{s}_1^{(k)})^2 \rangle_k + a_2^2 \langle (\delta \hat{r}_2^{(k)})^2 \rangle_k + b_2^2 \langle (\delta \hat{s}_2^{(k)})^2 \rangle_k \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Finalmente usando a relação de incerteza entre os operadores r_i e s_i e o comutador (3.26) podemos deduzir que $a_1^2 \langle (\delta \hat{r}_1^{(k)})^2 \rangle_k + b_1^2 \langle (\delta \hat{s}_1^{(k)})^2 \rangle_k \geq |a_1 b_1 \langle \hat{C}_1 \rangle_k|$ e assim, obtemos que todo estado separável deve cumprir a seguinte desigualdade

$$\langle \delta \hat{u}^2 \rangle_{sep} + \langle \delta \hat{v}^2 \rangle_{sep} \geq \sum_k p_k \left(|a_1 b_1 \langle \hat{C}_1 \rangle_k| + |a_2 b_2 \langle \hat{C}_2 \rangle_k| \right), \quad (3.34)$$

e pelo fato que $\sum_k p_k |\langle \hat{C}_i \rangle_k| \geq \left| \sum_k p_k \langle \hat{C}_i \rangle_k \right| = |\langle \hat{C}_i \rangle|$, finalmente obtemos

$$\langle \delta \hat{u}^2 \rangle_{sep} + \langle \delta \hat{v}^2 \rangle_{sep} \geq |a_1 b_1 \langle \hat{C}_1 \rangle| + |a_2 b_2 \langle \hat{C}_2 \rangle|. \quad (3.35)$$

A desigualdade anterior coloca uma restrição sobre os estados separáveis maior que o princípio da incerteza (3.30), já que $|a_1 b_1 \langle \hat{C}_1 \rangle| + |a_2 b_2 \langle \hat{C}_2 \rangle| \geq |a_1 b_1 \langle \hat{C}_1 \rangle + a_2 b_2 \langle \hat{C}_2 \rangle|$.

Para colocar estas desigualdades em contexto voltamos às variáveis EPR originais $\hat{u} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ e $\hat{v} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$, neste caso o lado esquerdo da desigualdade de incerteza (3.30) é igual a zero, devido que as variáveis EPR comutam, mas para estados separáveis as variâncias destes observáveis não podem ser arbitrariamente pequenas visto que o lado esquerdo da desigualdade de “separabilidade” (3.35) é igual à 2. Portanto só sistemas emaranhados podem ter correlações suficientemente fortes entre os momentos e as posições que possam violar a desigualdade (3.35).

Dado que temos interesse nas propriedades espectrais dos campos através das densidades espectrais definidas na seção (1.4.4) seria útil ter uma relação do estilo da equação (3.35) válida no domínio da frequência

$$S_u(\omega) + S_v(\omega) \geq |a_1 b_1 S_{[r_1, s_1]}(\omega)| + |a_2 b_2 S_{[r_2, s_2]}(\omega)| \quad (3.36)$$

onde definimos $S_{[r_i, s_i]}(\omega) \delta(\omega + \omega') = \langle [\hat{r}_i(\omega), \hat{s}_i(\omega')] \rangle$. Embora esta desigualdade seja muito usada para mostrar emaranhamento, segundo [12] não existe demonstração formal dela na literatura⁶. É por isso que vamos fazer uma rápida demonstração de dita desigualdade, e para isso vamos seguir um procedimento análogo que no caso anterior, começando por que, para estados separáveis da forma (3.8), temos que

$$\begin{aligned} \langle \delta \hat{u}(\omega) \delta \hat{u}(\omega') \rangle &= S_u(\omega) \delta(\omega + \omega') \\ &= \sum_k p_k \left(a_1^2 \langle \delta \hat{r}_1^{(k)}(\omega) \delta \hat{r}_1^{(k)}(\omega') \rangle_k + a_2^2 \langle \delta \hat{r}_2^{(k)}(\omega) \delta \hat{r}_2^{(k)}(\omega') \rangle_k \right) \\ &+ \sum_k p_k \langle \hat{u}(\omega) \rangle_k \langle \hat{u}(\omega') \rangle_k - \left(\sum_k p_k \langle \hat{u}(\omega) \rangle_k \right) \left(\sum_k p_k \langle \hat{u}(\omega') \rangle_k \right) \\ &= \sum_k p_k \left(a_1^2 S_{r_1}^{(k)}(\omega) + a_2^2 S_{r_2}^{(k)}(\omega) \right) \delta(\omega + \omega') \\ &+ \sum_k p_k \langle \hat{u}(\omega) \rangle_k \langle \hat{u}(\omega') \rangle_k - \left(\sum_k p_k \langle \hat{u}(\omega) \rangle_k \right) \left(\sum_k p_k \langle \hat{u}(\omega') \rangle_k \right). \end{aligned} \quad (3.37)$$

agora definimos a grandeza

$$A_k = \int_{\omega_0 - \epsilon_1}^{\omega_0 + \epsilon_2} \langle \hat{u}(\omega) \rangle_k d\omega \quad (3.38)$$

com ω_0 uma frequência qualquer e onde $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ são quantidades arbitrárias. Com esta grandeza partimos da seguinte desigualdade trivial

$$\sum_{km} p_k p_m |A_k - A_m|^2 \geq 0 \quad (3.39)$$

⁶Pelo menos até 2005 quando foi escrito [12], mas ainda assim não tenho conhecimento de que exista até o presente.

com um pouco de álgebra simples, e usando o fato de que o operador $\hat{u}(t)$ é hermitiano e portanto $[\hat{u}(\omega)]^\dagger = \hat{u}(-\omega)$, é fácil mostrar que

$$\sum_{km} p_k p_m |A_k - A_m|^2 = 2 \int_{\omega_0 - \epsilon_1}^{\omega_0 + \epsilon_2} d\omega \int_{\omega_0 - \epsilon_1}^{\omega_0 + \epsilon_2} d\omega' \left[\sum_k p_k \langle \hat{u}(\omega) \rangle_k \langle \hat{u}(-\omega') \rangle_k - \left(\sum_k p_k \langle \hat{u}(\omega) \rangle_k \right) \left(\sum_k p_k \langle \hat{u}(-\omega') \rangle_k \right) \right]. \quad (3.40)$$

Da equação (3.37) temos que, na expressão anterior os termos entre colchetes são da forma $f(\omega)\delta(\omega - \omega')$ com

$$f(\omega) = S_u(\omega) - \sum_k p_k \left(a_1^2 S_{r_1}^{(k)}(\omega) + a_2^2 S_{r_2}^{(k)}(\omega) \right). \quad (3.41)$$

Logo, fazendo a integração sobre a delta de Dirac obtemos

$$\sum_{km} p_k p_m |A_k - A_m|^2 = 2 \int_{\omega_0 - \epsilon_1}^{\omega_0 + \epsilon_2} f(\omega) d\omega \geq 0 \Rightarrow f(\omega) \geq 0. \quad (3.42)$$

Uma vez que, tanto ω_0 como ϵ_1 e ϵ_2 são grandezas arbitrárias, devemos ter que o integrando $f(\omega)$, na equação anterior tem que ser maior ou igual que zero, e segundo a definição da função $f(\omega)$ temos que

$$S_u(\omega) \geq \sum_k p_k \left(a_1^2 S_{r_1}^{(k)}(\omega) + a_2^2 S_{r_2}^{(k)}(\omega) \right). \quad (3.43)$$

O resto da demonstração é análoga que na desigualdade demonstrada no domínio do tempo, juntamos a desigualdade anterior com uma equivalente para a variável $\hat{v}$ e usamos o princípio da incerteza no domínio da frequência deduzido na seção (1.4.4), o que nos leva a

$$\begin{aligned} S_u(\omega) + S_v(\omega) &\geq \sum_k p_k \left(a_1^2 S_{r_1}^{(k)}(\omega) + b_1^2 S_{s_1}^{(k)}(\omega) + a_2^2 S_{r_2}^{(k)}(\omega) + b_2^2 S_{s_2}^{(k)}(\omega) \right) \\ &\geq \sum_k p_k \left(\left| a_1 b_1 S_{[r_1, s_1]}^{(k)}(\omega) \right| + \left| a_2 b_2 S_{[r_2, s_2]}^{(k)}(\omega) \right| \right) \\ &\geq \left| \sum_k p_k a_1 b_1 S_{[r_1, s_1]}^{(k)}(\omega) \right| + \left| \sum_k p_k a_2 b_2 S_{[r_2, s_2]}^{(k)}(\omega) \right| \\ &= \left| a_1 b_1 S_{[r_1, s_1]}(\omega) \right| + \left| a_2 b_2 S_{[r_2, s_2]}(\omega) \right| \end{aligned} \quad (3.44)$$

o que finaliza a demonstração.

As ferramentas aqui desenvolvidas para caracterizar o emaranhamento serão aplicadas aos campos eletromagnéticos após eles interagirem com o meio atômico através do processo da mistura de quatro ondas.

Capítulo 4

Mistura de Quatro Ondas

Neste capítulo vamos apresentar detalhadamente o modelo usado para descrever a mistura de quatro ondas num meio conformado por uma nuvem de átomos frios. Vamos expor os resultados obtidos para propriedades quânticas de dois dos feixes envolvidos no processo de mistura de quatro ondas, através das ferramentas desenvolvidas nos capítulos anteriores, como são as densidades espectrais de ruído, a desigualdade DGCZ e o critério PPT. Será apresentado um método no qual é possível fazer uma descrição individual de cada uma das bandas laterais dos campos a serem estudados, e por esse método analisar a estrutura do emaranhamento entre estas diferentes bandas laterais.

4.1 Modelo Duplo- Λ de interação

O modelo usado para esse trabalho está fortemente baseado naquele usado em [34], no qual, nossa nuvem atômica é modelada como conformada por átomos de 4 níveis interagindo com os campos numa configuração duplo- Λ . Esta configuração permite que dois feixes quase-monocromáticos (como aqueles descritos na seção (1.4.4)) denominados feixes de prova e conjugado, interajam entre eles mediados pelo meio atômico, o qual é bombeado por dois campos muito intensos em relação aos feixes prova e conjugado, que serão tratados como campos clássicos. Os campos quânticos $\hat{E}_1$ (campo de prova com frequência portadora ω_1) e $\hat{E}_2$ (campo conjugado com frequência portadora ω_2) acoplam transições entre os estados $|a_1\rangle \leftrightarrow |b_1\rangle$, e $|a_2\rangle \leftrightarrow |b_2\rangle$ respectivamente enquanto os campos de bombeio Ω_1 e Ω_2 , de frequências ω_{d_1} e ω_{d_2} acoplam transições entre os estados $|a_1\rangle \leftrightarrow |b_2\rangle$, e $|a_2\rangle \leftrightarrow |b_1\rangle$, as outras transições entre os demais estados são transições proibidas pelas regras de seleção (ver fig 4.1). A fim de simplificar o modelo, vamos supor que os campos $\hat{E}_1$ e Ω_1 estão em ressonância com suas correspondentes transições, enquanto que os campos $\hat{E}_2$ e Ω_2 tem cada um uma dessintonia $\Delta = \omega_2 - \omega_{a_2,b_2} = \omega_{d_2} - \omega_{a_2,b_1}$

FIGURA 4.1: Estrutura atômica consistente em 4 níveis atômicos em configuração duplo-Λ (direita) e linha D1 do átomo de Rubídio 85 (esquerda), onde é possível realizar uma configuração duplo-Λ

com suas correspondentes transições, sendo $\omega_{\mu,\nu} = (E_\mu - E_\nu)/\hbar$ a diferença de energias entre os níveis μ e ν dividida por $\hbar$.

Em nossa proposta experimental, o meio atômico é formado por uma nuvem de átomos frios que tem dimensões da ordem de milímetros, que é muito maior do que o comprimento de onda dos feixes que interagem na nuvem (na ordem de várias centenas de nanômetros), e portanto é necessário ter em conta a propagação dos feixes na interação destes com os átomos. Vamos supor que estes feixes são colineares e vamos colocar o eixo de propagação na direção do eixo z de nosso sistema coordenado. Nestas condições e segundo a descrição de feixes quase-monocromáticos feita na subseção 1.4.4, os operadores de campo que descrevem os feixes quânticos na região de interesse são dados por

$$\hat{E}_i(z, t) = \mathcal{E}_i \left(\hat{A}_i(z, t) e^{i(k_i z - \omega_i t)} + \hat{A}_i^\dagger(z, t) e^{-i(k_i z - \omega_i t)} \right) \quad (4.1)$$

com $\mathcal{E}_i = \sqrt{\frac{\hbar \omega_i}{2SL\epsilon_0}}$, L o comprimento da nuvem na direção z e S a área da seção transversal. ω_i é a frequência portadora do campo e $|k_i| = c\omega_i$ é o número de onda do feixe $i = 1, 2$, sendo c a velocidade da luz. Já que temos interesse na propagação dos campos, é importante levar em conta a dependência espacial dos campos, coisa que não foi feita na descrição dos operadores definidos na subseção 1.4.4.

Na equação anterior, os operadores $\hat{A}_i(z, t)$ são as amplitudes adimensionais e lentamente variáveis, no espaço e no tempo, dos campos quânticos definidas como

$$\hat{A}_i(z, t) = \left(\sum_n \hat{a}_n(t) e^{i(k_n - k_i)z} \right) e^{i\omega_i t} \quad (4.2)$$

onde a soma sobre n contem só aqueles modos que estão dentro da largura de banda de cada um dos feixes, e nosso operador de aniquilação $\hat{a}_n(t)$ dependente do tempo e aquele da equação (1.65).

Os campos de bombeio serão descritos por suas correspondentes frequências de Rabi, Ω_i , números de onda k_{d_i} , e frequências ω_{d_i} , $i = 1, 2$ que satisfazem a relação $\omega_{d_1} + \omega_{d_2} = \omega_1 + \omega_2$.

Para descrever a interação dos feixes com a nuvem atômica, é útil definir operadores atômicos coletivos que dependem da posição, para isto dividimos o comprimento da nuvem em $(2M + 1)$ partições de comprimento $\Delta z = L/(2M + 1)$ (ver figura 4.2), os operadores atômicos na posição z são definidos como operadores lentamente variáveis no espaço e no tempo, somando sobre todos os operadores dos átomos contidos dentro de uma fatia Δz centrada na posição z , e dividindo entre o número de átomos dentro desta fatia

$$\hat{\sigma}_{\mu\nu}(z, t) = \frac{(2M + 1)}{N} \sum_{z \leq z_j \leq z + \Delta z} \hat{\sigma}_{\mu\nu}(z_j, t) e^{i(\omega(\mu, \nu)t - k(\mu, \nu)z)} \quad (4.3)$$

com $\hat{\sigma}_{\mu\nu}(z_j, t) = |\mu\rangle\langle\nu|_j$, $\mu, \nu = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ ¹, é o operador que pertence ao átomo que se encontra dentro da j -ésima fatia, N é o número total de átomos na nuvem, $\omega(\mu, \nu) = -\omega(\nu, \mu)$, $k(\mu, \nu) = -k(\nu, \mu)$, $\omega(a_i, b_i) = \omega_i$, $\omega(a_2, b_1) = \omega_{d_2}$, $\omega(a_1, b_2) = \omega_{d_1}$, $\omega(b_1, b_2) = \omega_{d_2} - \omega_2$, $\omega(a_2, a_1) = \omega_1 - \omega_{d_2}$ e definições similares para as grandezas $k(\mu, \nu)$.

A evolução das amplitudes $\hat{A}_i(z, t)$ vem dada pela equação de propagação [41]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{A}_i(z, t) = ig_i N \hat{\sigma}_{b_i, a_i}(z, t), \quad (4.4)$$

que pode ser vista como versão quântica da equação de onda para o campo elétrico na aproximação de envelope lentamente variável (SVEA) [61]. O sinal $\pm$ depende se o campo se propaga na direção positiva (+) ou negativa (-) do eixo z .

Dadas estas definições podemos escrever o Hamiltoniano de interação entre os feixes e a nuvem na aproximação de longo comprimento de onda e na aproximação RWA como

¹Para facilitar a notação escreveremos os operadores referentes às populações $\hat{\sigma}_{\mu\mu}$ simplesmente como $\hat{\sigma}_\mu$, $\mu, \nu = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$

FIGURA 4.2: Divisão da nuvem atômica em fatias de comprimento Δz

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} = & -\hbar \frac{N}{L} \int_0^L g_1 \hat{A}_1(z, t) \hat{\sigma}_{a_1 b_1}(z, t) + g_2 \hat{A}_2(z, t) \hat{\sigma}_{a_2 b_2}(z, t) \\ & + \Omega_1 \hat{\sigma}_{a_1, b_2}(z, t) + \Omega_2 \hat{\sigma}_{a_2, b_1}(z, t) dz + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $g_i = d_{a_i, b_i} \sqrt{\omega_i / 2SL\epsilon_0 \hbar}$ é a constante de acoplamento do campo com a correspondente transição, e d_{a_i, b_i} é o momento de dipolo correspondente.

Utilizando o fato que devido à definição das variáveis atômicas coletivas, o comutador entre dois destes operadores é da forma

$$[\hat{\sigma}_{\mu\nu}(z, t), \hat{\sigma}_{\alpha\beta}(z', t)] = \frac{L}{N} \delta(z - z') \left(\hat{\sigma}_{\mu\beta}(z, t) \delta_{\nu, \alpha} e^{i\phi} - \hat{\sigma}_{\alpha\nu}(z, t) \delta_{\mu, \beta} e^{i\varphi} \right) \quad (4.6)$$

onde ϕ e φ dependem das fases definidas em (4.3), e com ajuda dos resultados obtidos na seção (2.2) podemos deduzir as equações de Heisenberg-Langenvin para estes operadores, que junto com as equações de propagação (4.4) dão a evolução do sistema campos-átomos.

$$\dot{\hat{\sigma}}_{a_1} = ig_1 \left(\hat{A}_1 \hat{\sigma}_{a_1, b_1} - \hat{A}_1^\dagger \hat{\sigma}_{b_1, a_1} \right) + i \left(\Omega_1 \hat{\sigma}_{a_1, b_2} - \Omega_1^* \hat{\sigma}_{b_2, a_1} \right) - \gamma_a \hat{\sigma}_{a_1} + \hat{F}_{a_1} \quad (4.7)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{b_1} = -ig_1 \left(\hat{A}_1 \hat{\sigma}_{a_1, b_1} - \hat{A}_1^\dagger \hat{\sigma}_{b_1, a_1} \right) - i \left(\Omega_2 \hat{\sigma}_{a_2, b_1} - \Omega_2^* \hat{\sigma}_{b_1, a_2} \right) + \frac{\gamma_a}{2} (\hat{\sigma}_{a_1} + \hat{\sigma}_{a_2}) + \hat{F}_{b_1} \quad (4.8)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{a_2} = ig_2 \left(\hat{A}_2 \hat{\sigma}_{a_2, b_2} - \hat{A}_2^\dagger \hat{\sigma}_{b_2, a_2} \right) + i \left(\Omega_2 \hat{\sigma}_{a_2, b_1} - \Omega_2^* \hat{\sigma}_{b_1, a_2} \right) - \gamma_a \hat{\sigma}_{a_2} + \hat{F}_{a_2} \quad (4.9)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{b_2} = -ig_2 \left(\hat{A}_2 \hat{\sigma}_{a_2, b_2} - \hat{A}_2^\dagger \hat{\sigma}_{b_2, a_2} \right) - i \left(\Omega_1 \hat{\sigma}_{a_1, b_2} - \Omega_1^* \hat{\sigma}_{b_2, a_1} \right) + \frac{\gamma_a}{2} (\hat{\sigma}_{a_1} + \hat{\sigma}_{a_2}) + \hat{F}_{b_2} \quad (4.10)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{b_2, a_1} = ig_1 \hat{A}_1 \hat{\sigma}_{b_2, b_1} - ig_2 \hat{A}_2 \hat{\sigma}_{a_2, a_1} + i\Omega_1 (\hat{\sigma}_{b_2} - \hat{\sigma}_{a_1}) - \frac{\gamma_a}{2} \hat{\sigma}_{b_2, a_1} + \hat{F}_{b_2, a_1} \quad (4.11)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{b_1, a_2} = - \left(i\Delta + \frac{\gamma_a}{2} \right) \hat{\sigma}_{b_1, a_2} - ig_1 \hat{A}_1 \hat{\sigma}_{a_1, a_2} e^{-i\Delta k z} + ig_2 \hat{A}_2 \hat{\sigma}_{b_1, b_2} e^{-i\Delta k z} + i\Omega_2 (\hat{\sigma}_{b_1} - \hat{\sigma}_{a_2}) + \hat{F}_{b_1, a_2} \quad (4.12)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{b_1, a_1} = ig_1 \hat{A}_1 (\hat{\sigma}_{b_1} - \hat{\sigma}_{a_1}) + i\Omega_1 \hat{\sigma}_{b_1, b_2} - i\Omega_2 \hat{\sigma}_{a_2, a_1} e^{i\Delta k z} - \frac{\gamma_a}{2} \hat{\sigma}_{b_1, a_1} + \hat{F}_{b_1, a_1} \quad (4.13)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{b_2, a_2} = - \left(i\Delta + \frac{\gamma_a}{2} \right) \hat{\sigma}_{b_2, a_2} + ig_2 \hat{A}_2 (\hat{\sigma}_{b_2} - \hat{\sigma}_{a_2}) + i\Omega_2 \hat{\sigma}_{b_2, b_1} e^{i\Delta k z} - i\Omega_1 \hat{\sigma}_{a_1, a_2} + \hat{F}_{b_2, a_2} \quad (4.14)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{b_1, b_2} = -ig_1 \hat{A}_1 \hat{\sigma}_{a_1, b_2} + ig_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{\sigma}_{b_1, a_2} e^{i\Delta k z} + i\Omega_1^* \hat{\sigma}_{b_1, a_1} - i\Omega_2 \hat{\sigma}_{a_2, b_2} e^{i\Delta k z} - \gamma_0 \hat{\sigma}_{b_1, b_2} + \hat{F}_{b_1, b_2} \quad (4.15)$$

$$\dot{\hat{\sigma}}_{a_2, a_1} = i(\Delta - \gamma_a) \hat{\sigma}_{a_2, a_1} + ig_1 \hat{A}_1 \hat{\sigma}_{a_2, b_1} e^{-i\Delta k z} - ig_2 \hat{A}_2^\dagger \hat{\sigma}_{b_2, a_1} + i\Omega_1 \hat{\sigma}_{a_2, b_2} - i\Omega_2^* \hat{\sigma}_{b_1, a_1} e^{-i\Delta k z} + \hat{F}_{a_2, a_1} \quad (4.16)$$

Nestas equações, γ_0 é a taxa de decoerência entre os estados base que tem como origem as colisões entre átomos, as inomogeneidades no campo magnético circundante, e os tempos de trânsito dos átomos dentro dos feixes. $\Delta k = k_{d_1} + k_{d_2} - k_1 - k_2$ é o chamado descasamento de fase (*phase mismatch*), e supomos que a taxa de decaimento dos níveis superiores $|a_i\rangle$, $i = 1, 2$ é a mesma para ambos níveis e igual a γ_a , sendo o decaimento simétrico em direção aos dois níveis base $|b_i\rangle$, $i = 1, 2$ (i.e. o decaimento do nível $|a_1\rangle$ para o nível $|b_1\rangle$ ($\gamma_a/2$) é igual que para o nível $|b_2\rangle$, a mesma situação ocorre com os decaimentos $|a_2\rangle$ (ver figura 4.1)).

Também estamos supondo que nosso sistema é um sistema fechado no sentido que não temos decaimentos desde, e para outros níveis atômicos não considerados, o que significa que

$$\hat{\sigma}_{a_1}(z, t) + \hat{\sigma}_{a_2}(z, t) + \hat{\sigma}_{b_1}(z, t) + \hat{\sigma}_{b_2}(z, t) = \mathbb{I}. \quad (4.17)$$

As forças de Langevin $\hat{F}_{\mu, \nu} = \hat{F}_{\mu, \nu}(z, t)$ estão delta-correlacionadas tanto em tempo como no espaço

$$\langle \hat{F}_{\mu\nu}(z, t) \hat{F}_{\alpha\beta}(z', t') \rangle = \frac{L}{N} \delta(z - z') \delta(t - t') D_{\mu\nu, \alpha\beta} \quad (4.18)$$

onde a matriz de difusão $D_{\mu\nu, \alpha\beta}$ pode ser calculada através das relações generalizadas de Einstein (ver seção 2.2).

Achar uma solução nas equações (4.4 e 4.7-4.16) em geral é muito complicado, inclusive numericamente, mas já que nosso interesse está mais centrado nas propriedades quânticas dos campos $\hat{E}_i$ de que nas propriedades dos átomos seria ideal poder escrever uma relação direta entre as coerências $\hat{\sigma}_{b_i, a_i}$ e os operadores de campo. Embora isto nem sempre seja possível, no regime no qual os campos clássicos Ω_i são muito intensos em relação

aos campos quânticos algumas aproximações podem ser feitas. Neste regime podemos aproximar a dinâmica das populações (eq 4.7-4.10) e as coerências $\hat{\sigma}_{b_2,a_1}, \hat{\sigma}_{b_1,a_2}, \hat{\sigma}_{a_1,b_2}$ e $\hat{\sigma}_{a_2,b_1}$ (eqs 4.11, 4.12 e as correspondentes adjuntas) como dominada pelos campos de bombeio e desprezar os termos que contem os operadores dos campos quânticos. Ao fazer esta aproximação vemos que estas equações se tornam independentes do resto e, utilizando a equação (4.17) para eliminar a variável $\hat{\sigma}_{b_2}$, tomam a forma

$$\frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial t} = \mathbb{M} \cdot \hat{\Sigma} + \mathbf{b} + \hat{\mathbf{f}}_0 \quad (4.19)$$

com a matriz $\mathbb{M}$ e os vetores $\hat{\Sigma}, \hat{\mathbf{f}}_0$ e $\mathbf{b}$ definidos como

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -\gamma_a & 0 & 0 & -i\Omega_1^* & i\Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_a & 0 & 0 & 0 & -i\Omega_2^* & i\Omega_2 \\ \gamma_a/2 & \gamma_a/2 & 0 & 0 & 0 & i\Omega_2^* & i\Omega_2 \\ -2i\Omega_1 & -i\Omega_1 & -i\Omega_1 & -\gamma_a/2 & 0 & 0 & 0 \\ 2i\Omega_1^* & i\Omega_1^* & i\Omega_1^* & 0 & -\gamma_a/2 & 0 & 0 \\ 0 & -i\Omega_2^* & i\Omega_2 & 0 & 0 & -i\Delta - \gamma_a/2 & 0 \\ 0 & i\Omega_2 & -i\Omega_2^* & 0 & 0 & 0 & i\Delta - \gamma_a/2 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{a_1} \\ \hat{\sigma}_{a_2} \\ \hat{\sigma}_{b_1} \\ \hat{\sigma}_{b_2,a_1} \\ \hat{\sigma}_{a_1,b_2} \\ \hat{\sigma}_{b_1,a_2} \\ \hat{\sigma}_{a_2,b_1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i\Omega_1 \\ -i\Omega_1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{f}}_0 = \begin{pmatrix} \hat{F}_{a_1} \\ \hat{F}_{a_2} \\ \hat{F}_{b_1} \\ \hat{F}_{b_2,a_1} \\ \hat{F}_{a_1,b_2} \\ \hat{F}_{b_1,a_2} \\ \hat{F}_{a_2,b_1} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

onde impusemos que os número de onda tem que cumprir a relação de casamento de fase $\Delta k = 0$.

Se não levamos em conta as forças de Langevin na equação (4.19) podemos achar uma solução estacionária de dita equação

$$\hat{\Sigma}^{st} = -\mathbb{M}^{-1}b \quad (4.22)$$

onde vemos que nesta aproximação esse conjunto de operadores atômicos são todos proporcionais ao operador identidade, o que simplifica muito a análise, já que não temos que levar em conta o ordenamento (pelo menos no que diz respeito esses operadores). Explicitamente, esta solução estacionária vem dada por

$$\begin{aligned}\sigma_{a_1} = \sigma_{a_2} &= \frac{2\Omega\Omega^*}{D} & \sigma_{b_1} &= \frac{1}{4} \left(\frac{\gamma_a^2 + 6\Delta^2}{D} + 1 \right) & \sigma_{b_2} &= \frac{\gamma_a^2 + 4\Omega\Omega^*}{2D} \\ \sigma_{b_2,a_1} = (\sigma_{a_1,b_2})^* &= \frac{i\gamma_a\Omega}{D} & \sigma_{b_1,a_2} = (\sigma_{b_1,a_2})^* &= \frac{\Omega(2\Delta + i\gamma_a)}{D}\end{aligned}\quad (4.23)$$

com $D = \gamma_a^2 + 8\Omega\Omega^* + 2\Delta^2$ e onde por simplicidade fizemos $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$. Nesta solução vemos que para o caso ressonante $\Delta = 0$ as populações tem um valor dado pela razão $\frac{\gamma_a^2}{\Omega\Omega^*}$, quanto maior for esta razão a população vai se concentrando em proporções iguais nos estados base $|b_i\rangle$, e quanto menor for, a população tende a se distribuir de forma mais uniforme entre os quatro estados do átomo, e para $|\Omega| \gg \gamma_a$ a população é igual em todos os níveis. Ao sair da ressonância, a simetria entre os estados base é quebrada e à medida que a dessintonia aumenta, a população vai tender a cair majoritariamente no estado $|b_1\rangle$, e no limite de $\Delta \gg \gamma_a, |\Omega|$ e basicamente só vamos ter átomos neste estado (ver gráfico 4.3). Isso é consequência de que, ao aumentar a dessintonia os campos $\hat{A}_1$ e Ω_2 não podem bombear a população fora do estado $|b_1\rangle$ já que o primeiro é muito fraco e o segundo está muito fora da ressonância. A população do estado $|b_2\rangle$ é bombeada para o estado $|a_2\rangle$ pelo campo intenso e ressonante Ω_1 . Esse processo, através dos decaimentos dos níveis excitados, leva a maioria da população ao estado $|b_1\rangle$.

FIGURA 4.3: Na esquerda, comportamento das populações atômicas em função da razão Ω/γ_a na ressonância ($\Delta=0$). Na direita comportamento em função da dessintonia, ($\Omega = 0.5\gamma_a$)

Utilizando esta solução estacionária (4.22) podemos escrever o resto das equações para as coerências atômicas (4.13-4.16) da seguinte forma matricial.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{P}}}{\partial t} = \alpha \cdot \hat{\mathbf{P}} + g\beta \cdot \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{f}} \quad (4.24)$$

onde por simplicidade aproximamos $g_1 \approx g_2 \equiv g$, e as matrizes α , β e os vetores $\hat{\mathbf{P}}$, $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\mathbf{f}}$, vem dados por

$$\alpha = \begin{pmatrix} -\gamma_a/2 & 0 & i\Omega_1 & -i\Omega_2 \\ 0 & -\gamma_a/2 + i\Delta & -i\Omega_2^* & i\Omega_1^* \\ i\Omega_1^* & -i\Omega_2 & -\gamma_0 & 0 \\ -i\Omega_2^* & i\Omega_1 & 0 & -\gamma_a + i\Delta \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} i(\sigma_{b_1}^{st} - \sigma_{a_1}^{st}) & 0 \\ 0 & -i(\sigma_{b_2}^{st} - \sigma_{a_2}^{st}) \\ -i\sigma_{a_1,b_2}^{st} & i\sigma_{b_1,a_2}^{st} \\ i\sigma_{a_2,b_1}^{st} & -i\sigma_{b_2,a_1}^{st} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{b_1,a_1} \\ \hat{\sigma}_{a_2,b_2} \\ \hat{\sigma}_{b_1,b_2} \\ \hat{\sigma}_{a_2,a_1} \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \hat{F}_{b_2,a_1} \\ \hat{F}_{a_2,b_2} \\ \hat{F}_{b_1,b_2} \\ \hat{F}_{a_2,a_1} \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1 \\ \hat{A}_2^\dagger \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Ao transformar a equação (4.24) no domínio da frequência conseguimos o objetivo de obter uma expressão que relacione diretamente as coerências $\hat{\sigma}_{a_i,b_i}$ com os campos $\hat{A}_i$, $i = 1, 2$

$$\hat{\mathbf{P}}(z, \omega) = g(i\omega\mathbb{I}_{4 \times 4} - \alpha)^{-1} \cdot \beta \cdot \hat{\mathbf{A}}(z, \omega) + (i\omega\mathbb{I}_{4 \times 4} - \alpha)^{-1} \hat{\mathbf{f}}(z, \omega). \quad (4.27)$$

FIGURA 4.4: Configurações geométricas possíveis para o processo de mistura de 4 ondas. Na esquerda, geometria contrapropagante, onde os feixes prova e conjugado se propagam em direções opostas. Na direita, geometria copropagante onde os feixes prova e conjugado se propagam na mesma direção. (Nesta figura o ângulo entre os feixes foi exagerado para maior claridade, a propagação dos feixes é suposta como colinear.)

Logo, na hora de descrever a propagação dos campos quânticos temos que ver as duas geometrias possíveis separadamente: o caso no qual ambos feixes se propagam na mesma direção (geometria co-propagante) e o caso no qual os feixes se propagam em direções opostas (geometria contra-propagante) (ver figura 4.4). No caso co-propagante, se impomos que ambos feixes se propagam na direção positiva do eixo z , as condições de contorno estão dadas por

$$\hat{\mathbf{A}}^{in} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1^{in} \\ \hat{A}_2^{\dagger in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1(0, \omega) \\ \hat{A}_2^\dagger(0, \omega) \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

já no caso contra-propagante, impondo que $\hat{A}_1$ se propaga na direção positiva do eixo z enquanto $\hat{A}_2$ se propaga na direção contrária, temos que as condições de contorno vem dadas por

$$\hat{\mathbf{A}}^{in} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1^{in} \\ \hat{A}_2^{\dagger in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1(0, \omega) \\ \hat{A}_2^{\dagger}(L, \omega) \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

e além das condições de contorno vemos que as equações de propagação são diferentes, já que, como vemos na equação (4.4), esta depende da direção na qual os campos se propagam. No caso de feixes co-propagantes, as equações de propagação (4.4) tomam explicitamente a forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{A}_1(z, t) = igN \hat{\sigma}_{b_1, a_1}(z, t) \quad (4.30)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{A}_2^{\dagger}(z, t) = -igN \hat{\sigma}_{a_2, b_2}(z, t), \quad (4.31)$$

enquanto no caso de feixes contra-propagantes temos que as equações de propagação (4.4) tomam explicitamente a forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{A}_1(z, t) = igN \hat{\sigma}_{b_1, a_1}(z, t) \quad (4.32)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial z} \right) \hat{A}_2^{\dagger}(z, t) = -igN \hat{\sigma}_{a_2, b_2}(z, t). \quad (4.33)$$

Utilizando a equação (4.27) e definindo as matrizes $\mathbb{B}(\omega), \mathbb{G}(\omega)$ como

$$\mathbb{B}(\omega) = \begin{cases} i \frac{g^2 N}{c} \mathbf{T} \cdot \chi(\omega) + i \frac{\omega}{c} \mathbf{K} & \text{no caso contra-propagantes} \\ -i \frac{g^2 N}{c} \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} \cdot \chi(\omega) - i \frac{\omega}{c} \mathbb{I}_{2 \times 2} & \text{no caso co-propagantes} \end{cases} \quad (4.34)$$

$$\mathbb{G}(\omega) = \begin{cases} i \mathbf{T} \cdot (i\omega \mathbb{I}_{4 \times 4} - \alpha)^{-1} & \text{no caso contra-propagantes} \\ -i \mathbf{K} \cdot \mathbf{T} \cdot (i\omega \mathbb{I}_{4 \times 4} - \alpha)^{-1} & \text{no caso co-propagantes} \end{cases} \quad (4.35)$$

onde $\mathbf{T}, \mathbf{K}, \chi(\omega)$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \chi(\omega) = (i\omega \mathbb{I}_{4 \times 4} - \alpha)^{-1} \cdot \beta \quad (4.36)$$

podemos escrever as equações de propagação dos campos, no domínio da frequência para ambos casos como

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{A}}(z, \omega)}{\partial z} = \mathbb{B}(\omega) \cdot \hat{\mathbf{A}}(z, \omega) + \frac{gN}{c} \mathbb{G}(\omega) \cdot \hat{\mathbf{f}}(z, \omega), \quad (4.37)$$

se a amplitude dos campos de bombeio se mantém constante através da nuvem, i.e. o meio é óticamente fino para os campos de bombeio, portanto $\Omega(z) = \Omega$, então a equação anterior pode ser integrada formalmente obtendo

$$\hat{\mathbf{A}}(L, \omega) = e^{L\mathbb{B}(\omega)} \cdot \left(\hat{\mathbf{A}}(0, \omega) + \frac{gN}{c} \int_0^L e^{-z\mathbb{B}(\omega)} \cdot \mathbb{G}(\omega) \cdot \hat{\mathbf{f}}(z, \omega) dz \right). \quad (4.38)$$

Queremos obter uma expressão na qual temos os campos de entrada em função dos campos de saída. No caso copropagante basta substituir na equação anterior $\hat{\mathbf{A}}(0, \omega) \rightarrow \hat{\mathbf{A}}^{in}(\omega)$ e $\hat{\mathbf{A}}(L, \omega) \rightarrow \hat{\mathbf{A}}^{out}(\omega)$. Mas no caso contrapropagante, segundo (4.29) temos que isolar os campos de saída na equação (4.38). Em ambos casos podemos escrever uma expressão da forma

$$\hat{\mathbf{A}}^{out}(\omega) = \mathbb{J}(\omega) \cdot \hat{\mathbf{A}}^{in}(\omega) + \frac{gN}{c} \int_0^L \mathbb{Q}(z, \omega) \cdot \hat{\mathbf{f}}(z, \omega) dz. \quad (4.39)$$

onde temos que as matrizes $\mathbb{J}(\omega)$ e $\mathbb{Q}(z, \omega)$ vem definidas por

$$\mathbb{J}(\omega) = \begin{cases} e^{L\mathbb{B}(\omega)} & \text{caso co-propagantes} \\ (\mathbb{I}_{2 \times 2} - \mathbb{M}_2(\omega))^{-1} \cdot \mathbb{M}_1(\omega) & \text{caso contra-propagantes} \end{cases} \quad (4.40)$$

$$\mathbb{Q}(z, \omega) = \begin{cases} e^{(L-z)\mathbb{B}(\omega)} \cdot \mathbb{G}(\omega) & \text{caso co-propagantes} \\ (\mathbb{I}_{2 \times 2} - \mathbb{M}_2(\omega))^{-1} \cdot \mathbb{M}_3(\omega) \cdot e^{-z\mathbb{B}(\omega)} \cdot \mathbb{G}(\omega) & \text{caso contra-propagantes} \end{cases} \quad (4.41)$$

com $\mathbb{M}_1(\omega)$, $\mathbb{M}_2(\omega)$, $\mathbb{M}_3(\omega)$ dadas por

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1(\omega) &= \begin{pmatrix} [e^{L\mathbb{B}(\omega)}]_{1,1} & 0 \\ 0 & [e^{-L\mathbb{B}(\omega)}]_{2,2} \end{pmatrix} & \mathbb{M}_2(\omega) &= \begin{pmatrix} 0 & [e^{L\mathbb{B}(\omega)}]_{1,2} \\ [e^{-L\mathbb{B}(\omega)}]_{2,1} & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{M}_3(\omega) &= \begin{pmatrix} [e^{L\mathbb{B}(\omega)}]_{1,1} & [e^{L\mathbb{B}(\omega)}]_{1,2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.2 Amplitudes dos Campos

Com o resultados da equação (4.39) é possível analisar a transformação das amplitudes dos campos ao sair da nuvem atômica. Inicialmente tomamos o valor esperado da equação

(4.39) que corresponderia à evolução clássica dos campos

$$\langle \hat{\mathbf{A}}^{out}(\omega) \rangle = \mathbb{J}(\omega) \cdot \langle \hat{\mathbf{A}}^{in}(\omega) \rangle. \quad (4.43)$$

Através desta equação vemos que o comportamento das amplitudes diferem muito dependendo se a geometria é copropagante ou contrapropagante. Como temos um número grande de parâmetros no problema, e a equação (4.39) escrita explicitamente em função de ditos parâmetros, no caso geral seria uma expressão muito complicada da qual seria muito difícil extrair informação dela, foi decidido fazer um estudo numérico desta solução. A fim de fazer a análise das amplitudes, vamos supor que ao ingressar na nuvem temos o campo de prova $\hat{A}_1$ entra como um estado coerente com um valor esperado $A_0 = \langle \hat{A}_1^{in}(\omega) \rangle$ enquanto o estado de entrada do campo conjugado $\hat{A}_2$ é o estado de vácuo, e portanto $\langle \hat{A}_2^{in}(\omega) \rangle = 0$. Também temos usado os seguintes valores para os parâmetros do sistema que foram escolhidos por serem valores obtidos em circunstâncias experimentais reais numa armadilha magneto-ótica (MOT²) de rubídio: $\gamma_a = 6\text{MHz}$, $g = 1.1 \times 10^{-1}\text{MHz}$, $\gamma_0 = 10^{-3}\text{MHz}$, $N = 7 \times 10^7$. No regime de átomos frios só o efeito das inhomogeneidades do campo magnético contribui em γ_0 , sendo este da ordem de $\gamma_0 = 10^{-3}\text{MHz} = 1\text{kHz}$ [34]. As amplitudes foram analisadas através do ganho de cada um dos feixes defino por $G_i = \left| \langle \hat{A}_i^{out}(\omega) \rangle / A_0 \right|^2$, com o espaço de parâmetros variando entre os seguintes valores: $2 \times 10^{-1}\text{MHz} \leq \Omega \leq 2 \times 10^2\text{MHz}$, $8 \times 10^{-2}\text{MHz} \leq \Delta \leq 8 \times 10^4\text{MHz}$ e $-100\text{MHz} \leq \omega \leq 100\text{MHz}$.

Na geometria copropagante vemos como para valores pequenos da amplitude dos campos de bombeio e dessintonia ($0.2\text{MHz} \leq \Omega \leq 5\text{MHz}$ e $0.08\text{MHz} \leq \Delta \leq 20\text{MHz}$) temos um incremento exponencial do ganho muito localizado perto da frequência portadora ($\omega = 0$) de ambos campos à medida que estes atravessam o meio atômico. Nas bandas laterais do feixe prova $\hat{A}_1$ temos uma forte e rápida atenuação (ver gráfico 4.5).

Aumentando a potência dos feixes de bombeio para valores acima de $\Omega \geq 8\text{MHz}$ (mantendo $0.08\text{MHz} \leq \Delta \leq 20\text{MHz}$) vemos como o ganho dos feixes se transforma em uma forma assimétrica para as bandas laterais num efeito de alagamento por potência embora o ganho seja muito menor do que tinha na portadora quando o bombeio era menor. No caso do feixe de prova $\hat{A}_1$, tanto a atenuação como o ganho nessa região dos parâmetros tem um perfil assimétrico, pois claramente a interação das bandas laterais inferior e superior não é simétrica (especialmente do feixe conjugado), mas quando a dessintonia aumenta ($\Delta > 20\text{MHz}$), tanto as regiões de ganho como o valor do mesmo são cada vez menores até que, para $\Delta \gg \Omega$ nosso sistema basicamente se transforma numa configuração Λ simples (Os feixes $\hat{A}_2$ e Ω_2 interagem muito pouco com os átomos) apresentando

²Do inglês *Magneto-optical trap*

FIGURA 4.5: Evolução dos ganhos dos feixes de prova $\hat{A}_1$ (esquerda) e conjugado $\hat{A}_2$ (direita) na configuração copropagante em função da frequência de análise a medida que eles se propagam através da nuvem atômica. No ganho do feixe de prova vemos além da amplificação exponencial na portadora uma atenuação nas bandas laterais próximas a esta portadora.

uma janela de transparência para o feixe de prova na frequência portadora (onde deveria ter atenuação na falta de feixes de bombeio), apresentado efeitos de EIT ³ e ATS ⁴ dependendo da potência do feixe de bombeio [62] (ver gráfico 4.6) com todas as características destes fenômenos (o espaçamento entre os picos de deamplificação aumenta ao aumentar Ω , e ao aumentar γ_0 o efeito fica cada vez mais fraco e tende a desaparecer). Isto era de se esperar, já que para valores de Δ muito grandes temos efetivamente um sistema de três níveis em configuração Λ entre os níveis a_1, b_1 e b_2 junto com os campos $\hat{E}_1$ e Ω_1 .

FIGURA 4.6: Evolução do ganho do feixe de prova $\hat{A}_1$ na configuração copropagante em função da frequência de análise a medida que se ele se propaga através da nuvem, para dois diferentes valores de Ω e Δ . Do lado direito observa-se uma clara janela de transparência na frequência portadora (que é ressonante com a transição $\|a_1\rangle \leftrightarrow \|b_1\rangle$).

³Electromagnetically induced transparency

⁴Autler Townes Splitting

Entretanto, no caso da geometria contrapropagante temos uma característica muito marcante que não está presente no caso anterior. Em certas configurações ($0.2\text{MHz} \leq \Omega \leq 5\text{MHz}$, $8 \times 10^{-2}\text{MHz} \leq \Delta \leq 8 \times 10^{-1}\text{MHz}$) e para determinados comprimentos da nuvem L_{res} , para os quais campos são ressonantes com o meio, e as amplitudes de saída divergem na frequência portadora. Isto é explicado por um efeito de oscilação ressonante no qual, já que os feixes se propagam em direções opostas, se tem um efeito de retroalimentação onde um feixe além de se amplificar através do meio, espalha-se no outro modo contrapropagante parecido ao processo numa cavidade ótica com um meio de ganho [63] (ver gráfico 4.7). Estes comprimentos ressonantes são cada vez mais espaçados entre eles à medida que se incrementa Ω , e nas bandas laterais perto da portadora temos atenuação do campo de prova, da mesma forma que no caso copropagante. Matematicamente a origem desta ressonância vem do comportamento da matriz $\mathbb{J}(\omega)$ em (4.43), no caso contrapropagante temos que esta matriz é singular quando os parâmetros do problema são tais que a matriz $(\mathbb{I}_{2 \times 2} - \mathbb{M}_2(\omega))$ não é inversível, coisa que não acontece no caso copropagante. Também é observado que entre estes comprimentos ressonantes L_{res} também existem comprimentos nos quais os campos não tem ganho nenhum, e o valor absoluto das amplitudes médias na saída são iguais as da entrada, i.e. o meio é transparente nestas configurações. Ao aumentar a dessintonia Δ (com $0.2\text{MHz} \leq \Omega \leq 5\text{MHz}$) vemos que para

FIGURA 4.7: Na esquerda, ganho dos feixes de prova e conjugado em função do comprimento da nuvem na frequência portadora na configuração contrapropagante para $\Omega = 0.8\text{MHz}$ e $\Delta = 0.2\text{MHz}$. Na direita, ganho do feixe prova em função da frequência de análise e o comprimento da nuvem

$\Delta > 2\text{MHz}$ o meio não apresenta mais um comportamento ressonante, mostrando que existe um tipo de limiar dependente de Δ que fixa uma potência mínima para o meio ser ressonante (ver gráfico 4.8).

Já para valores maiores dos parâmetros ($\Omega > 8\text{MHz}$ e $\Delta > 80\text{MHz}$) os perfis da amplitude são muito parecidos com os do caso copropagante (ver gráfico 4.6).

FIGURA 4.8: Na esquerda, ganho dos feixes de prova e conjugado em função do comprimento da nuvem na frequência portadora na configuração contrapropagante para $\Omega = 0.8\text{MHz}$ e $\Delta = 2\text{MHz}$. Na direita, ganho do feixe prova em função da frequência de análise e o comprimento da nuvem

Cabe anotar que as soluções aqui achadas perdem validade quando os valores das amplitudes dos campos quânticos começam a serem comparáveis com as amplitudes dos campos de bombeio, posto que a energia destes feixes quânticos vem do bombeio, ao eles se amplificarem muito é preciso, além de incluir estes campos nas equações de evolução das populações (4.19), levar em conta a depleção dos campos de bombeio através do meio quando eles transmitem sua energia aos feixes quânticos (isto pode ser feito através uma dependência das amplitudes com a posição z , e adicionando as equações de propagação deles). Portanto, perto das divergências no caso contrapropagante como para comprimentos muito longos no caso copropagante (em aquelas configurações onde temos amplificação exponencial dos campos) as soluções aqui achadas não são mais válidas.

4.3 Matriz Espectral de Ruído dos Campos

As equações de propagação (4.37) acoplam o operador $\hat{A}_1$ com $\hat{A}_2^\dagger$ (ou equivalentemente $\hat{A}_1^\dagger$ com $\hat{A}_2$), e para calcular a matriz de covariância é preciso os quatro operadores que descrevem o campo $\hat{A}_1, \hat{A}_2^\dagger, \hat{A}_1^\dagger, \hat{A}_2$, portanto é conveniente definir o vetor

$$\hat{\mathcal{A}}(\omega) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{A}}(\omega) \\ \hat{\mathbf{A}}^\dagger(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1(\omega) \\ \hat{A}_2^\dagger(\omega) \\ \hat{A}_1^\dagger(\omega) \\ \hat{A}_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_1(\omega) \\ \hat{A}_2^\dagger(\omega) \\ [\hat{A}_1(-\omega)]^\dagger \\ [\hat{A}_2^\dagger(-\omega)]^\dagger \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

e com esta definição e com ajuda de (4.39) podemos escrever

$$\hat{A}^{out}(\omega) = \mathcal{J}(\omega) \cdot \hat{A}^{in}(\omega) + \frac{gN}{c} \int_0^L \mathcal{Q}(z, \omega) \cdot \hat{\mathcal{F}}(z, \omega) dz \quad (4.45)$$

onde o vetor $\hat{\mathcal{F}}(z, \omega)$ e as matrizes $\mathcal{J}(\omega)$ e $\mathcal{Q}(z, \omega)$ são definidos por

$$\hat{\mathcal{F}}(z, \omega) = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{f}}(z, \omega) \\ \hat{\mathbf{f}}^\dagger(z, \omega) \end{pmatrix} \quad \mathcal{J}(\omega) = \begin{pmatrix} \mathbb{J}(\omega) & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbb{J}^*(-\omega) \end{pmatrix} \quad \mathcal{Q}(z, \omega) = \begin{pmatrix} \mathbb{Q}(z, \omega) & \mathbf{0}_{2 \times 4} \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} & \mathbb{Q}^*(z, -\omega) \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Com estas definições e com ajuda das relações (4.18) e (4.43) podemos calcular facilmente a matriz espectral de ruído $S(\omega)$ ⁵ como

$$\begin{aligned} \frac{L}{c} S^{out}(\omega) \delta(\omega + \omega') &= \left\langle \delta \hat{A}^{out}(\omega) \cdot \delta \hat{A}^{\dagger out}(\omega')^T \right\rangle \\ &= \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{A}_1 \delta \hat{A}_1^\dagger \rangle & \langle \delta \hat{A}_1 \delta \hat{A}_2^\dagger \rangle & \langle \delta \hat{A}_1 \delta \hat{A}_1 \rangle & \langle \delta \hat{A}_1 \delta \hat{A}_2^\dagger \rangle \\ \langle \delta \hat{A}_2 \delta \hat{A}_1^\dagger \rangle & \langle \delta \hat{A}_2 \delta \hat{A}_2^\dagger \rangle & \langle \delta \hat{A}_2 \delta \hat{A}_1 \rangle & \langle \delta \hat{A}_2 \delta \hat{A}_2^\dagger \rangle \\ \langle \delta \hat{A}_1^\dagger \delta \hat{A}_1^\dagger \rangle & \langle \delta \hat{A}_1^\dagger \delta \hat{A}_2^\dagger \rangle & \langle \delta \hat{A}_1^\dagger \delta \hat{A}_1 \rangle & \langle \delta \hat{A}_1^\dagger \delta \hat{A}_2 \rangle \\ \langle \delta \hat{A}_2 \delta \hat{A}_1^\dagger \rangle & \langle \delta \hat{A}_2 \delta \hat{A}_2^\dagger \rangle & \langle \delta \hat{A}_2 \delta \hat{A}_1 \rangle & \langle \delta \hat{A}_2 \delta \hat{A}_2^\dagger \rangle \end{pmatrix} \rightarrow \\ S^{out}(\omega) &= \mathcal{J}(\omega) \cdot S^{in}(\omega) \cdot \mathcal{J}^*(\omega)^T + \frac{g^2 N}{c} \int_0^L \mathcal{Q}(z, \omega) \cdot \mathbb{D} \cdot \mathcal{Q}^*(z, \omega)^T dz \end{aligned} \quad (4.47)$$

com $\mathbb{D}$ a matriz de difusão das forças de Langevin $\frac{L}{N} \mathbb{D}_{ij} \delta(\omega + \omega') \delta(z - z') = \langle \mathcal{F}_i(z, \omega) \mathcal{F}_j^\dagger(z', \omega') \rangle$ (ver Apêndice A).

Da equação (4.47) podemos deduzir que, para um estado quântico de entrada qualquer que tem como matriz espectral de ruído $S^{in}(\omega)$, é possível obter a matriz espectral de saída $S^{out}(\omega)$, onde podemos interpretar a matriz $\mathcal{J}$ como responsável pela compressão, amplificação ou rotação no espaço de fase, e o termo que tem a integral, é originado pelas forças de Langevin que agem como uma fonte de ruído pra o sistema. Com esta matriz espectral, é possível, tanto aplicar o teste PPT nela, como usá-la para calcular o teste da desigualdade DGCZ usando, por exemplo as variáveis EPR soma e subtração de quadraturas $\hat{X}_\pm^\theta = \hat{X}_1^\theta \pm \hat{X}_2^\theta$ cujos espectros de ruído em termos dos elementos da matriz de covariância (4.47), vem dados por

$$\begin{aligned} S_{X_\pm^\theta}(\omega) &= e^{-2i\theta} (S_{1,3} \pm S_{1,2} \pm S_{4,3} + S_{4,2}) + e^{2i\theta} (S_{3,1} \pm S_{2,1} \pm S_{3,4} + S_{2,4}) \\ &\quad + S_{1,1} + S_{2,2} + S_{3,3} + S_{4,4} \pm (S_{1,4} + S_{4,1} + S_{3,2} + S_{2,3}), \end{aligned} \quad (4.48)$$

e portanto para as variáveis $\hat{X}_+^\theta$ e $\hat{Y}_-^\theta = \hat{X}_-^{\theta+\pi/2}$, a desigualdade (3.36) toma a forma

⁵Ao contrario da matriz espectral de ruído definida na seção 1.4.4 a matriz introduzida aqui é definida em termos dos operadores de aniquilação e criação, no lugar de estar definida em termos das quadraturas

$$\begin{aligned}
I(\omega, \theta) &= S_{X_+^\theta}(\omega) + S_{Y_-^\theta}(\omega) \\
&= 2 \left(e^{-2i\theta} (S_{1,2} + S_{4,3}) + e^{2i\theta} (S_{2,1} + S_{3,4}) + S_{1,1} + S_{2,2} + S_{3,3} + S_{4,4} \right) \geq 4.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Novamente devido à complexidade da expressão para $I(\omega, \theta)$ no caso geral, vamos fazer uma análise numérico do critério DGCZ. Para esta análise foram utilizados novamente os mesmos valores dos parâmetros que na análise feita para as amplitudes: $\gamma_a = 6\text{MHz}$, $g = 1.1 \times 10^{-1}\text{MHz}$, $\gamma_0 = 10^{-3}\text{MHz}$, $N = 7 \times 10^7$ e além disso fixamos o valor do comprimento da nuvem como $L = 4\text{ mm}$, o qual também foi obtido de uma montagem experimental real feita no Laboratório de Manipulação Coerente de Átomos e Luz (LMCAL) na universidade de São Paulo. Desta vez supomos estados coerentes de entrada e portanto a matriz espectral inicial $S^{in}(\omega)$ vem dada por

$$S^{in}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.50}$$

Embora tenhamos visto uma grande diferença no comportamento das amplitudes nas duas geometrias anteriormente estudadas, as diferenças no comportamento da variável $I(\omega, \theta)$ de uma configuração para outra são mínimas. Observamos 3 comportamentos diferentes.

No primeiro lugar, quando a dessintonia (Δ) e a frequência de Rabi (Ω) dos campos de bombeio são pequenas ($0.2\text{MHz} \leq \Omega \leq 2\text{MHz}$ e $0.08\text{ MHz} \leq \Delta \leq 8\text{MHz}$) vemos que temos um excesso de ruído muito grande introduzido na frequência portadora, enquanto que nas bandas laterais temos uma pequena violação na desigualdade (4.49) numa grande faixa de θ , o que significa que temos feixes emaranhados para uma grande largura de banda embora as correlações entre as variáveis EPR sejam muito pequenas.

À medida que a dessintonia Δ aumenta (na região de Ω pequeno, $0.2\text{MHz} \leq \Omega \leq 2\text{MHz}$), vemos como diminui o excesso de ruído nas portadoras, e para $\Delta > 8\text{MHz}$ começamos a ter compressão do ruído na portadora, e portanto emaranhamento na frequência portadora. É nesta configuração onde se observou a maior violação na desigualdade (4.49), a um valor de $I(\omega) = 2.14 < 4$ para $\omega = 0, \theta = \pi/5, \Omega = 0.8\text{MHz}, \Delta = 20\text{MHz}$. Ao continuar aumentando a dessintonia tanto a compressão como o excesso de ruído diminuem, isto porque a interação entre os feixes fica cada vez mais fraca.

FIGURA 4.9: Lado esquerdo da desigualdade DGCZ em função da frequência de análise ω , e do angulo da quadratura θ . Na frequência portadora o excesso de ruído é muito grande e fica fora do gráfico chegando até um pouco mais de 1000

FIGURA 4.10: Lado esquerdo da desigualdade DGCZ em função da frequência de análise ω , e do angulo da quadratura θ . Para estes valores de Δ e Ω vemos emaranhamento na frequência portadora, chegando no valor $I(\omega = 0, \theta = \pi/5) = 2.14$ que é mínimo de $I(\omega, \theta)$ observado

FIGURA 4.11: Lado esquerdo da desigualdade DGCZ em função da frequência de análise ω , e do ângulo da quadratura θ .

Se temos frequências de Rabi maiores que 5 MHz já não temos mais aquela estrutura concentrada onde $I(\omega)$ é basicamente igual ao SQL nas bandas laterais e só temos variações significativa perto da portadora, mas temos um perfil no qual a compressão e amplificação do ruído é levada simetricamente para as bandas laterais, fisicamente poderíamos pensar que os bombeios são suficientemente fortes para levar a interação para as bandas laterais num efeito de alargamento por potência.

Na região de dessintonia pequena ($0.08 \text{ MHz} \leq \Delta \leq 8 \text{ MHz}$) e frequências de Rabi $> 5 \text{ MHz}$, somente temos excesso de ruído, i.e. temos $I(\omega) > 4$ para todo valor de ω e θ analisado em um perfil como aquele que vemos no gráfico (4.11), mas para valores de dessintonia maiores que $\Delta > 20 \text{ MHz}$ observemos violações para regiões muito grandes (comparada com o caso mostrado no gráfico 4.10) de ω centradas em $\omega = 0$. Novamente se a dessintonia continua crescendo, tanto a compressão como o excesso de ruído diminuem conforme a interação fica mais fraca.

Em geral foi observado que para ter uma violação significativa da desigualdade (4.49) devemos ter que $\Delta > \Omega$, caso contrário temos uma violação muito pequena como no caso da gráfico (4.9), ou só excesso de ruído como no caso mostrado no lado esquerdo de (4.11).

4.4 Descrição e Análise das Bandas Laterais

Nesta seção vamos introduzir uma descrição no domínio da frequência dos campos, de uma forma na qual são separadas individualmente as bandas lateral positiva (superior) da negativa (superior) e, desde esse formalismo olhar para as correlações que podem se apresentar entre estas bandas laterais [64].

Na seção 1.4.4 foram introduzidos os operadores $\hat{A}_i(\omega)$ como a transformada de Fourier do operador $\hat{A}(t)$, que em função da transformada de Fourier das quadraturas do campo é escrito como

$$\hat{A}(\omega) = \frac{1}{2} \left(\hat{X}(\omega) + \hat{Y}(\omega) \right). \quad (4.51)$$

Podemos pensar a $\hat{A}_i(\omega)$ como o operador que aniquila um fóton na banda lateral de frequência ω , mas não é possível dizer que os operadores $\hat{X}(\omega), \hat{Y}(\omega)$ são as quadraturas do campo referentes a dita frequência, já que estes operadores não são hermitianos. Aliás, estes operadores tem contribuição de ambas bandas laterais, já que se definimos $\hat{A}_\omega = \hat{A}(\omega)$ e seu conjugado $\hat{A}_\omega^\dagger = [\hat{A}(\omega)]^\dagger = \hat{A}^\dagger(-\omega)$ vemos que

$$\hat{X}(\omega) = \hat{A}(\omega) + \hat{A}^\dagger(\omega) = \hat{A}_\omega + \hat{A}_{-\omega}^\dagger \quad (4.52)$$

e portanto, quando na seção anterior (4.3) falamos de emaranhamento numa frequência ω , na verdade nos referimos a um emaranhamento entre modos que são uma combinação de modos das bandas laterais positiva e negativa.

A fim de construir quadraturas que se referem individualmente a cada uma das bandas laterais, basta escrever os operadores de aniquilação e criação de cada uma das bandas como

$$\hat{A}_\omega = \frac{1}{2} \left(\hat{X}_\omega + i\hat{Y}_\omega \right) \quad (4.53)$$

$$\hat{A}_\omega^\dagger = \frac{1}{2} \left(\hat{X}_\omega - i\hat{Y}_\omega \right) \quad (4.54)$$

$$(4.55)$$

onde $\hat{X}_\omega, \hat{Y}_\omega$ são operadores hermitianos que se referem às quadraturas do campo para uma banda lateral individualmente, e portanto satisfazem as relação de comutação

$$\left[\hat{X}_\omega, \hat{Y}_{\omega'} \right] = 2i\delta(\omega - \omega'). \quad (4.56)$$

Já com esta definição podemos escrever a relação entre as quadraturas das bandas laterais com as transformadas de Fourier. Para isso definimos os vetores

$$\hat{\mathbf{X}}_\omega = \{ \hat{X}_\omega, \hat{Y}_\omega, \hat{X}_{-\omega}, \hat{Y}_{-\omega} \}^T \quad (4.57)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(\omega) = \{ \hat{X}(\omega), \hat{Y}(\omega), \hat{X}(-\omega), \hat{Y}(-\omega) \}^T \quad (4.58)$$

com os quais escrevemos a relação entre eles como

$$\hat{\mathbf{X}}_\omega = \mathbb{L}_1 \hat{\mathbf{X}}(\omega) \quad (4.59)$$

onde

$$\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & -i \\ -i & 1 & i & 1 \\ 1 & -i & 1 & i \\ i & 1 & i & 1 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

No nosso caso temos duas frequências portadoras, e portanto teremos 4 modos que correspondem a cada uma das bandas laterais das portadoras e os equivalentes nas equações (4.58) e (4.59) seriam

$$\hat{\mathbf{X}}_\omega = \mathbb{L}_2 \hat{\mathbf{X}}(\omega) \quad (4.61)$$

onde, desta vez os vetores $\hat{\mathbf{X}}_\omega, \hat{\mathbf{X}}(\omega)$ e a matriz $\mathbb{L}_2$ no caso de duas portadoras são

$$\hat{\mathbf{X}}_\omega = \{\hat{X}_\omega^1, \hat{Y}_\omega^1, \hat{X}_{-\omega}^1, \hat{Y}_{-\omega}^1, \hat{X}_\omega^2, \hat{Y}_\omega^2, \hat{X}_{-\omega}^2, \hat{Y}_{-\omega}^2\}^T \quad (4.62)$$

$$\hat{\mathbf{X}}(\omega) = \{\hat{X}^1(\omega), \hat{Y}^1(\omega), \hat{X}^1(-\omega), \hat{Y}^1(-\omega), \hat{X}^2(\omega), \hat{Y}^2(\omega), \hat{X}^2(-\omega), \hat{Y}^2(-\omega)\}^T \quad (4.63)$$

$$\mathbb{L}_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{L}_1 & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \mathbb{L}_1 \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

Agora com estes quatro modos, é possível calcular a matriz de covariância deles, a qual permite fazer uma análise do emaranhamento quadripartite e observar a estrutura desde emaranhamento. Para construir dita matriz de covariância fazemos uso da matriz de covariância $S(\omega)$ construída na seção anterior (4.3) da seguinte forma.

Vamos definir a matriz de covariância das bandas laterais como $\mathbb{V}_\omega$ ⁶

$$\mathbb{V}_\omega^{i,j} = \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \delta \hat{\mathbf{X}}_\omega^i, \delta \hat{\mathbf{X}}_\omega^j \right\} \right\rangle. \quad (4.65)$$

A partir da matriz $S(\omega)$ podemos construir a matriz de spectral de ruído simetrizada das quadraturas

$$S_{i,j}^R(\omega) \delta(\omega + \omega') = \frac{1}{2} \left\langle \left\{ \hat{\mathbf{R}}^i(\omega), \hat{\mathbf{R}}^j(\omega') \right\} \right\rangle \quad (4.66)$$

onde o vetor $\hat{\mathbf{R}}(\omega) = \{\hat{X}^1(\omega), \hat{Y}^1(\omega), \hat{X}^2(\omega), \hat{Y}^2(\omega)\}$ é o vetor que contém a transformada de Fourier das quadraturas dos campos. Se definimos uma matriz $\mathbb{W}$ que relaciona as quadraturas do campo com vetor $\hat{\mathcal{A}}(\omega)$ definido em (4.44)

⁶Exceto por uma multiplicação de um termo da forma $\delta(0)$

$$\hat{\mathbf{R}}(\omega) = \mathbb{W} \cdot \hat{\mathcal{A}}(\omega); \quad \mathbb{W} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -i & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

obtemos

$$S^R(\omega) = \frac{1}{2} (\mathbb{W} \cdot S(\omega) \cdot \mathbb{W}^{*T} + \mathbb{W}^T \cdot S(-\omega)^T \cdot \mathbb{W}^*). \quad (4.68)$$

Com estas definições e devido ao fato que, por causa da estacionaridade do processo $\langle \hat{\mathbf{R}}^i(\omega), \hat{\mathbf{R}}^j(\omega) \rangle = 0$

$$\mathbb{V}_\omega = \mathbb{L}_2 \cdot \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 4} & S^R(\omega) \\ S^R(-\omega) & \mathbf{0}_{4 \times 4} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{D}^T \cdot \mathbb{L}_2^T \quad (4.69)$$

com $\mathbf{D}$ uma matriz de permutação, a qual reordena os elementos do vetor $\{\hat{\mathbf{R}}(\omega), \hat{\mathbf{R}}(-\omega)\}^T$ no vetor $\hat{X}(\omega)$

$$\hat{X}(\omega) = \mathbf{D} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{R}}(\omega) \\ \hat{\mathbf{R}}(-\omega) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

A matriz de covariância $\mathbb{V}_\omega$ está composta por submatrizes de covariância entre as diferentes bandas laterais de cada um dos modos

$$\mathbb{V}_\omega = \begin{pmatrix} V_{1+,1+} & V_{1+,1-} & V_{1+,2+} & V_{1+,2-} \\ V_{1-,1+} & V_{1-,1-} & V_{1-,2+} & V_{1-,2-} \\ V_{2+,1+} & V_{2+,1-} & V_{2+,2+} & V_{2+,2-} \\ V_{2-,1+} & V_{2-,1-} & V_{2-,2+} & V_{2-,2-} \end{pmatrix}, \quad (4.71)$$

onde as matrizes $V_{i,j}, i, j = \{1_+, 1_-, 2_+, 2_-\}$ são matrizes de covariância entre as bandas laterais superior (+) ou inferior (-) das portadoras 1 ou 2. Dada esta matriz de covariância expandida $\mathbb{V}_\omega$, nos podemos, além de analisar ela como um todo, analisar as submatrizes das quais ela é composta, e estudar o emaranhamento através do critério PPT entre as diferentes subbipartições do conjunto das 4 bandas laterais, i.e. podemos estudar o emaranhamento existente entre duas, três ou as quatro bandas laterais do campo.

4.4.1 Emaranhamento Entre 4 modos

Ao olhar para os 4 modos como um todo, observa-se que, é possível fazer bipartições destes 4 modos em duas diferentes formas, bipartições da forma (1x3) e da forma (2x2). Das agrupações da forma (1x3) temos somente duas bipartições não equivalentes entre elas, $P_1^{1 \times 3} = \{\{1_+\}, \{1_-, 2_+, 2_-\}\}$ e $P_2^{1 \times 3} = \{\{2_+\}, \{1_+, 1_-, 2_-\}\}$ (um conjunto de 4 elementos tem em geral, 4 partições do tipo (1x3), mas neste caso das bandas laterais, as outras 2 partições são equivalentes às anteriores já que, por exemplo $\{\{1_-\}, \{1_+, 2_+, 2_-\}\}$ é equivalente a $P_1^{1 \times 3}$ ao fazer $\omega \rightarrow -\omega$).

Dadas estas partições podemos aplicar o critério PPT (ver 3.2.1) para a matriz $\mathbb{V}_\omega$, o qual toma a forma

$$\tilde{\mathbb{V}}_\omega^i + i\bar{\Omega}_4 \geq 0 \quad (4.72)$$

onde $\tilde{\mathbb{V}}_\omega^i = \Pi_i \cdot \tilde{\mathbb{V}}_\omega \cdot \Pi_i$ é a matriz de covariância depois de realizar a operação de transposição parcial sobre o primeiro subsistema segundo as partições $P_i^{1 \times 3}, i = 1, 2$ e $\bar{\Omega}_4$ é a matriz que da conta das relações de comutação entre as quadraturas das bandas laterais

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \text{diag}\{1, -1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \\ \Pi_2 &= \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, 1\} \end{aligned} \quad \bar{\Omega}_4 = \begin{pmatrix} \bar{\Omega} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & \bar{\Omega} \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

com $\bar{\Omega}$ a matriz definida em (3.24), mas com um sinal negativo que provém da mudança de ordem das variáveis canonicamente conjugadas escolhida neste capítulo.

$$\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{J} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 2} & \mathbf{J} \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

Para provar se o critério da equação (4.72) é satisfeito ou não, olhamos para o menor dos autovalores da matriz $\tilde{\mathbb{V}}_\omega^i + i\bar{\Omega}_4$, o qual tem que ser maior ou igual que zero para satisfazer (4.72). No caso no qual o critério é violado temos emaranhamento entre as bipartições consideradas. O calculo numérico de dito autovalor foi feito para a mesma faixa de valores dos parâmetros, que na análise feita na seção anterior com a desigualdade DGCZ.

Observa-se que para valores pequenos de dessintonia e frequência de Rabi dos bombeios ($0.2\text{MHz} \leq \Omega \leq 5\text{MHz}$, $0.08\text{MHz} \leq \Delta \leq 5\text{MHz}$) temos violação do critério PPT para quase toda a largura de banda analisada exceto para uma região muito estreita ao redor de $\omega = 0$, e esta violação se dá de forma simétrica e quase igual para as duas partições possíveis, mas ao aumentar a frequência de Rabi dos bombeios, esta região de não violação

fica cada vez maior. Na região com $\Delta \geq 8\text{MHz}$ e $\Omega \leq 2\text{MHz}$ vemos que ambas partições estão emaranhadas para toda a faixa ω estudada, mas se começa a ver certa assimetria na violação do critério PPT, observando que uma partição é o reflexo especular da outra, e também se percebe uma zona de transição entre um comportamento e outro, observando que para $\Omega \approx \Delta$, $\Omega > 2\text{MHz}$ vemos regiões de transposição parcial positiva que não estão centradas em $\omega = 0$ como no caso anterior mas estão distribuídas sobre as bandas laterais. Finalmente, no caso de dessintonia muito grande ($\Delta \geq 200\text{MHz}$) vemos que nosso perfil é simétrico de novo (ver gráfico 4.12).

FIGURA 4.12: Mínimo dos autovalores da matriz do lado esquerdo de (4.72) em função da frequência ω para diferentes valores de dessintonia Δ y frequência de Rabi dos bombeios Ω

Entretanto, no caso de agrupamentos da forma (2×2) , todas as três bipartições possíveis são não equivalentes entre si $P_1^{2 \times 2} = \{\{1_+, 1_-\}, \{2_+, 2_-\}\}$, $P_2^{2 \times 2} = \{\{1_+, 2_+\}, \{1_-, 2_-\}\}$, $P_3^{2 \times 2} = \{\{1_+, 2_-\}, \{2_+, 1_-\}\}$. O critério PPT neste caso tem a mesma forma que na equação (4.72), só que desta vez a matriz $\tilde{\mathbb{V}}_\omega^i = \Upsilon_i \cdot \mathbb{V}_\omega \cdot \Upsilon_i$ é a matriz de covariância depois de realizada a operação de transposição parcial segundo as bipartições $P_i^{2 \times 2}$, $i = 1, 2, 3$

$$\Upsilon_1 = \text{diag}\{1, -, -1, 1, -1, 1, 1, 1\} \quad (4.75)$$

$$\Upsilon_2 = \text{diag}\{1, -, -1, 1, 1, 1, -1, 1\} \quad (4.76)$$

$$\Upsilon_3 = \text{diag}\{1, -, -1, 1, 1, 1, 1, -1\} \quad (4.77)$$

Ao fazer a análise numérica para estas partições, observamos uma particularidade que faz muita diferença respeito às bipartições anteriores. Para este tipo de bipartições 2×2 , temos numa delas, a bipartição $P_3^{2 \times 2}$, onde nunca é observada uma violação do critério PPT para a faixa de parâmetros estudados, enquanto que para as outras duas partições se observa que as curvas para o menor dos autovalores se superpõem uma sobre a outra, com um comportamento parecido que no caso anterior. Para valores de dessintonia Δ pequenos ($0.08 \text{ MHz} \leq \Delta \leq 5 \text{ MHz}$) vemos que se tem violação do critério PPT para todo o espectro analisado, exceto para uma faixa centrada em $\omega = 0$, a qual é muito estreita para $\Omega = 0.2 \text{ MHz}$ mas vai se alargando cada vez mais à medida que Ω vai aumentando. Já para $\Delta > 0.8 \text{ MHz}$ aquela região de não violação desaparece e temos emaranhamento para todo o espectro de ω estudado (ver gráfico 4.13).

FIGURA 4.13: Mínimo dos autovalores da matriz do lado esquerdo de (4.72) em função da frequência ω para diferentes valores de dessintonia Δ y frequência de Rabi dos bombeios Ω

Para esse tipo de bipartições 2×2 observa-se uma total simetria nas curvas com respeito a ω . Isto é devido a que ao passar de valores negativos de ω para valores positivos, ficamos na mesma partição original enquanto ao fazer a mesma operação no caso de bipartições 1×3 se tem uma mudança para outra partição diferente mas equivalente.

4.4.2 Emaranhamento Entre 3 Modos

Além de olhar para a matriz de covariância dos quatro modos das bandas laterais (4.71), é possível a partir desta mesma matriz construir matrizes de covariância envolvendo somente 3 modos, como por exemplo as matrizes

$${}^3\mathbb{V}_\omega^1 = \begin{pmatrix} V_{1+,1+} & V_{1+,1-} & V_{1+,2+} \\ V_{1-,1+} & V_{1-,1-} & V_{1-,2+} \\ V_{2+,1+} & V_{2+,1-} & V_{2+,2+} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad {}^3\mathbb{V}_\omega^2 = \begin{pmatrix} V_{1-,1-} & V_{1-,2+} & V_{1-,2-} \\ V_{2+,1-} & V_{2+,2+} & V_{2+,2-} \\ V_{2-,1-} & V_{2-,2+} & V_{2-,2-} \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

e, a partir destas matrizes fazer bipartições 1x2 a modo de aplicar o teste PPT. Devido as simetrias das bandas laterais, vemos que, embora seja possível construir mais duas matrizes de covariância de três modos a partir da matriz (4.71), todas as 6 bipartições não equivalentes entre si da forma 1x2 deste sistema de bandas laterais, podem ser realizadas a partir das duas matrizes em (4.78). As bipartições são, $P_1^{1 \times 2} = \{\{1_+\}, \{1_-, 2_+\}\}$, $P_2^{1 \times 2} = \{\{1_-\}, \{1_+, 2_+\}\}$, $P_3^{1 \times 2} = \{\{2_+\}, \{1_+, 1_-\}\}$, $P_4^{1 \times 2} = \{\{1_-\}, \{2_-, 2_+\}\}$, $P_5^{1 \times 2} = \{\{2_+\}, \{1_-, 2_-\}\}$ e $P_6^{1 \times 2} = \{\{2_+\}, \{1_+, 2_-\}\}$. Neste caso de bipartições 1x2 o critério PPT toma a forma

$${}^3\tilde{\mathbb{V}}_\omega^{i,j} + i\bar{\Omega}_3 \geq 0, \quad (4.79)$$

onde, analogamente ao caso de quatro modos, temos que ${}^3\tilde{\mathbb{V}}_\omega^{i,j} = \Xi_j \cdot ({}^3\mathbb{V}_\omega^i) \cdot \Xi_j$ $i = \{1, 2\}$, $j = \{1, 2, \dots, 6\}$ é a matriz de covariância depois de aplicar a transposição parcial referente a cada uma das bipartições antes mencionadas, e $\bar{\Omega}_3$ é de novo, a matriz que da conta das relações de comutação entre os três modos analisados

$$\begin{aligned} \Xi_1 &= \text{diag}\{1, -1, 1, 1, 1, 1\} \\ \Xi_2 &= \text{diag}\{1, 1, 1, -1, 1, 1\} \\ \Xi_3 &= \text{diag}\{1, 1, 1, 1, 1, -1\} \end{aligned} \quad \bar{\Omega}_3 = \begin{pmatrix} \bar{\Omega} & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} & \mathbf{J} \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

Agora, ao fazer novamente a análise numérica destes sistema através do testes PPT, observa-se que os gráficos do menor autovalor da matriz no lado esquerdo de (4.79), em função da frequência ω são iguais para as bipartições $P_2^{1 \times 2}, P_3^{1 \times 2}, P_4^{1 \times 2}, P_5^{1 \times 2}$, que por sua vez são iguais à curva da $P_2^{1 \times 3}$. Nestas bipartições sempre temos alguma faixa de frequência ω onde temos emaranhamento, porém se observa que para as bipartições $P_1^{1 \times 2}$ e $P_6^{1 \times 2}$ (cujos gráficos são iguais entre eles), não se tem nenhuma região para o qual tenha-se violado o critério PPT e o perfil do menor autovalor em função da frequência da matriz no lado esquerdo de (4.79), é muito parecido aquele da partição $P_3^{2 \times 2}$, sendo o perfil de $P_3^{2 \times 2}$ totalmente simétrico (ver gráfico 4.14).

FIGURA 4.14: Mínimo dos autovalores da matriz do lado esquerdo de (4.79) em função da frequência ω para diferentes valores de dessintonia Δ y frequência de Rabi dos bombeios Ω . As curvas para as partições $P_3^{1 \times 2}, P_4^{1 \times 2}, P_5^{1 \times 2}$ são iguais à curva $P_2^{1 \times 2}$ enquanto a curva de $P_6^{1 \times 2}$ é igual à $P_1^{1 \times 2}$

4.4.3 Emaranhamento Entre 2 Modos

Por último, vemos que também é possível construir matrizes de covariância de dois modos, e fazer a mesma análise utilizando o critério PPT. No caso de agrupações da forma 1×1 entre bandas laterais, é possível construir 4 bipartições não equivalentes entre si, que são $P_1^{1 \times 1} = \{\{1_+\}, \{1_-\}\}$, $P_2^{1 \times 1} = \{\{1_-\}, \{2_+\}\}$, $P_3^{1 \times 1} = \{\{2_+\}, \{2_-\}\}$, $P_4^{1 \times 1} = \{\{1_+\}, \{2_+\}\}$ e que correspondem às matrizes de covariância

$${}^2\mathbb{V}_\omega^1 = \begin{pmatrix} V_{1+,1+} & V_{1+,1-} \\ V_{1-,1+} & V_{1-,1-} \end{pmatrix} \quad {}^2\mathbb{V}_\omega^2 = \begin{pmatrix} V_{1-,1-} & V_{1-,2+} \\ V_{2+,1-} & V_{2+,2+} \end{pmatrix} \quad (4.81)$$

$${}^2\mathbb{V}_\omega^3 = \begin{pmatrix} V_{2+,2+} & V_{2+,2-} \\ V_{2-,2+} & V_{2-,2-} \end{pmatrix} \quad {}^2\mathbb{V}_\omega^4 = \begin{pmatrix} V_{1+,1+} & V_{1+,2+} \\ V_{2+,1+} & V_{2+,2+} \end{pmatrix}, \quad (4.82)$$

já com estas matrizes de covariância podemos fazer o teste de PPT

$${}^2\tilde{\mathbb{V}}_\omega^i + i\bar{\Omega} \geq 0 \quad (4.83)$$

com ${}^2\tilde{\mathbb{V}}_\omega^i = \Lambda \cdot ({}^2\mathbb{V}_\omega^i) \cdot \Lambda$, $i = \{1, 2, \dots, 4\}$ novamente a matriz de covariância depois da transposição parcial, e onde $\Lambda = \text{diag}\{1, 1, 1, -1\}$ é a matriz que realiza dita transposição.

Desta vez somente na partição $P_2^{1 \times 1}$ se tem violação ao critério PPT, e novamente o perfil da curva do menor autovalor da matriz do lado esquerdo de (4.83) é igual ao perfil de $P_2^{1 \times 3}$, enquanto para as partições $P_1^{1 \times 1}$, $P_3^{1 \times 1}$ e $P_4^{1 \times 1}$ se obteve que todas as curvas são iguais entre si, e não foi observada nenhuma situação na qual tenha-se violado o critério PPT (ver gráfico 4.15).

FIGURA 4.15: Mínimo dos autovalores da matriz do lado esquerdo de (4.79) em função da frequência ω para diferentes valores de dessintonia Δ y frequência de Rabi dos bombeios Ω . As curvas para as partições $P_3^{1 \times 1}$, $P_4^{1 \times 1}$ são iguais à curva $P_1^{1 \times 1}$.

Uma característica muito importante de toda a análise feita nas bandas laterais é que foi observado que cada vez que os modos da banda superior do feixe 1 e a banda inferior do feixe 2 (ou equivalentemente a banda inferior do feixe 1 e a banda superior do feixe 2) ficaram em grupos diferentes nas bipartições feitas para realizar o teste PPT, sempre foi observada violação a dito critério. Mas quando estes modos ficaram no mesmo grupo nunca foi observada violação nenhuma, e portanto nosso estado de saída é totalmente consistente com um estado no qual temos emaranhamento unicamente entre as bandas superior do feixe um e inferior do feixe dois, e entre as bandas inferior do feixe um e superior do feixe dois⁷. Esta é uma situação completamente razoável, já que segundo a equação (4.37) e sua conjugada vemos que a interação, dentro das aproximações feitas

⁷Não é possível afirmar que o estado dos campos seja parcialmente separável para, por exemplo a bipartição $P_3^{2 \times 2}$ já que a não violação do critério PPT não implica separabilidade

neste trabalho, é diretamente entre a banda superior do feixe 1 e banda inferior do feixe 2 e entre a banda inferior do feixe 1 e a banda superior do feixe 2.

Conclusões e Perspectivas

O fenômeno da mistura de quatro ondas já tinha se mostrado como uma fonte de feixes de luz emaranhados em sistemas de vapor atômico quente. A partir deste trabalho podemos observar que a geração de feixes com correlações quânticas também poderia ser possível utilizando o mesmo fenômeno do FWM mas em sistemas de átomos frios, embora a densidade atômica, e o comprimento do meio sejam consideravelmente menor do que aqueles que podem se conseguir no caso do vapor quente, esta desvantagem pode ser compensada com uma configuração muito mais perto da ressonância que nas configurações usadas no regime de átomos quentes, com a vantagem de gerar emaranhamento com uma potência de bombeio muito menor. Usando parâmetros da armadilha magneto-ótica do Laboratório de Manipulação Coerente de Átomos e Luz, foi calculado uma violação com valor de $I(\omega)$ da desigualdade DGCZ (4.49) de $I(\omega) = 2.14 < 4$ (na frequência portadora), equivalente a -2.72 dB abaixo de limite quântico padrão (ver gráfico 4.10) a uma potência de bombeio de $0.3 \mu\text{W}$ (correspondente a uma frequência de Rabi de 0.8 MHz) e com uma dessintonia de 20 MHz. embora seja um valor relativamente bom, falta investigar se em teoria poderia ser otimizado modificando os parâmetros da MOT, como o aumento da densidade atômica e/ou incrementando o comprimento da nuvem. Por outro lado também foi possível observar que o emaranhamento não se dá simplesmente entre as frequências portadoras dos feixes mas existem configurações onde as correlações são fortes numa largura de banda bastante grande ao redor da portadora (ver gráfico 4.11) o que em teoria permitiria a realização de processamento de informação quântica de banda larga.

Foi possível através da individualização das bandas laterais, ir além da análise das correlações de dois modos e estudar o emaranhamento entre as quatro bandas laterais dos feixes de prova e conjugado, onde nossos resultados foram totalmente compatíveis com um estado no qual o emaranhamento se dá entre a banda superior do feixe prova e a banda inferior do feixe conjugado, e a banda inferior do feixe prova e a banda superior do feixe conjugado.

FIGURA 4.16: Representação da possível estrutura do emaranhamento gerada nas bandas laterais pela mistura de 4 ondas

O próximo passo no estudo do emaranhamento via FWM em meios atômicos seria investigar como muda o emaranhamento em sistemas que tem outra estrutura atômica que possa ser implementados experimentalmente como sistemas duplo Λ em sistemas de três níveis, e passar para a realização experimental da mistura de 4 ondas na armadilha magneto-ótica do Laboratório de Manipulação Coerente de Átomos e Luz, para comprovar a acurácia dos resultados aqui obtidos.

Apêndice A

Matriz de Difusão

Segundo as relações generalizadas de Einstein descritas na seção (2.2), os elementos da matriz $\mathbb{D}$ na equação (4.47) podem ser calculados através da equação (2.39).

$$\mathbb{D}_{ij} = \left\langle \mathcal{D}(\hat{\mathcal{P}}_i \hat{\mathcal{P}}_j^\dagger) - \mathcal{D}_i \hat{\mathcal{P}}_j^\dagger - \hat{\mathcal{P}}_i \mathcal{D}_j^\dagger \right\rangle. \quad (\text{A.1})$$

Explicitamente o vetor $\mathcal{F}$ vem dado por

$$\mathcal{F} = \left(\hat{F}_{b_2, a_1} \quad \hat{F}_{a_2, b_2} \quad \hat{F}_{b_1, b_2} \quad \hat{F}_{a_2, a_1} \quad \hat{F}_{a_1, b_2} \quad \hat{F}_{b_2, a_2} \quad \hat{F}_{b_2, b_1} \quad \hat{F}_{a_1, a_2} \right)^T \quad (\text{A.2})$$

Para calcular o primeiro termo de (2.39) é necessário o cálculo de

$$\mathcal{P} \mathcal{P}^{\dagger T} \equiv \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}} \\ \hat{\mathbf{P}}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}}^{\dagger T} & \hat{\mathbf{P}}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^{\dagger T} & \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T \\ \hat{\mathbf{P}}^\dagger \hat{\mathbf{P}}^{\dagger T} & \hat{\mathbf{P}}^\dagger \hat{\mathbf{P}}^T \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

onde $\hat{\mathbf{P}}$ é definido em (4.24). Dos elementos anteriores temos que $\hat{\mathbf{P}}^\dagger \hat{\mathbf{P}}^{\dagger T} = \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^T = \mathbf{0}_{4 \times 4}$ enquanto

$$\hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^{\dagger T} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{b_1} & 0 & 0 & \hat{\sigma}_{b_1, a_2} \\ 0 & \hat{\sigma}_{a_2} & \hat{\sigma}_{a_2, b_1} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{b_1, a_2} & \hat{\sigma}_{b_1} & 0 \\ \hat{\sigma}_{a_2, b_1} & 0 & 0 & \hat{\sigma}_{a_2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{\mathbf{P}}^\dagger \hat{\mathbf{P}}^T = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{a_1} & 0 & \hat{\sigma}_{a_1, b_2} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{b_2} & 0 & \hat{\sigma}_{b_2, a_1} \\ \hat{\sigma}_{b_2, a_1} & 0 & \hat{\sigma}_{b_2} & 0 \\ 0 & \hat{\sigma}_{a_1, b_2} & 0 & \hat{\sigma}_{a_1} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Observamos que os elementos não nulos destas matrizes pertencem ao vetor Σ definido em (4.19), e já que estamos trabalhando com os valores estacionários destes operadores, temos que $\mathcal{D}(\mathcal{P}_i \mathcal{P}_j^\dagger) = 0$. A equação (4.24) nos diz que $\mathcal{D}(\mathbf{P}) = \alpha \cdot \mathbf{P}$ e portanto

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} -\alpha \cdot \langle \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^{\dagger T} \rangle - \langle \hat{\mathbf{P}} \hat{\mathbf{P}}^{\dagger T} \rangle \cdot \alpha^{*T} & \mathbf{0}_{4 \times 4} \\ \mathbf{0}_{4 \times 4} & -\alpha^* \cdot \langle \hat{\mathbf{P}}^\dagger \hat{\mathbf{P}}^T \rangle - \langle \hat{\mathbf{P}}^\dagger \hat{\mathbf{P}}^T \rangle \cdot \alpha^T \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Referências Bibliográficas

- [1] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on bell's theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 67:661–663, Aug 1991. doi: 10.1103/PhysRevLett.67.661. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.67.661>.
- [2] C. H. Bennet and G. Brassard. ?quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing*. 1 edition, 6 1984. ISBN 9780444825933.
- [3] David P. DiVincenzo. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik*, 48(9-11):771–783, 2000. ISSN 1521-3978.
- [4] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge Series on Information and the Natural Sciences. Cambridge University Press, 2000. ISBN 9780521635035.
- [5] Lov K. Grover. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Phys. Rev. Lett.*, 79:325–328, Jul 1997. doi: 10.1103/PhysRevLett.79.325. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.325>.
- [6] Peter W. Shor. Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer. *SIAM J. Comput.*, 26(5):1484–1509, 1997.
- [7] Experimental realization of shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 414:883– 887, 2001.
- [8] RichardP. Feynman. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21:467–488, 1982. ISSN 0020-7748. doi: 10.1007/BF02650179. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02650179>.
- [9] Towards quantum chemistry on a quantum computer. *Nat Chem*, 2:106 – 111, 2010.
- [10] A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, and E. S. Polzik. Unconditional quantum teleportation. *Science*, 282(5389):706–709, 1998. doi: 10.1126/science.282.5389.706. URL <http://www.sciencemag.org/content/282/5389/706.abstract>.

- [11] Frederic Grosshans, Gilles Van Assche, Jerome Wenger, Rosa Brouri, Nicolas J. Cerf, and Philippe Grangier. Quantum key distribution using gaussian-modulated coherent states. *Nature*, 421(6920):238 – 241, 2003.
- [12] Samuel L. Braunstein and Peter van Loock. Quantum information with continuous variables. *Rev. Mod. Phys.*, 77:513–577, Jun 2005. doi: 10.1103/RevModPhys.77.513.
- [13] Ting Yu and J. H. Eberly. Sudden death of entanglement. *Science*, 323(5914): 598–601, 2009. doi: 10.1126/science.1167343. URL <http://www.sciencemag.org/content/323/5914/598.abstract>.
- [14] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, and J. F. Valley. Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 55:2409–2412, Nov 1985. doi: 10.1103/PhysRevLett.55.2409.
- [15] C. H. van der Wal, M. D. Eisaman, A. André, R. L. Walsworth, D. F. Phillips, A. S. Zibrov, and M. D. Lukin. Atomic memory for correlated photon states. *Science*, 301(5630):196–200, 2003. doi: 10.1126/science.1085946. URL <http://www.sciencemag.org/content/301/5630/196.abstract>.
- [16] R. C. Pooser, A. M. Marino, V. Boyer, K. M. Jones, and P. D. Lett. Low-noise amplification of a continuous-variable quantum state. *Phys. Rev. Lett.*, 103:010501, Jun 2009. doi: 10.1103/PhysRevLett.103.010501. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.010501>.
- [17] Vincent Boyer, Alberto M. Marino, Raphael C. Pooser, and Paul D. Lett. Entangled images from four-wave mixing. *Science*, 321(5888):544–547, 2008. doi: 10.1126/science.1158275. URL <http://www.sciencemag.org/content/321/5888/544.abstract>.
- [18] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe. *Quantum Mechanics*. John Wiley & Sons, 2006. ISBN 9780471569527.
- [19] J.J. Sakurai and S.F. Tuan. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994. ISBN 9780201539295.
- [20] D.J. Griffiths. *Introduction to quantum mechanics*. Pearson Prentice Hall, 2005. ISBN 9780131118928.
- [21] R.R. Puri. *Mathematical Methods of Quantum Optics*. Springer Series in Optical Sciences. Springer, 2001. ISBN 9783540678021.

- [22] R. Simon, N. Mukunda, and Biswadeb Dutta. Quantum-noise matrix for multimode systems: $U(n)$ invariance, squeezing, and normal forms. *Phys. Rev. A*, 49:1567–1583, Mar 1994. doi: 10.1103/PhysRevA.49.1567.
- [23] M.O. Scully and S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997. ISBN 9780521435956.
- [24] D.F. Walls and G.J. Milburn. *Quantum Optics*. SpringerLink: Springer e-Books. Springer, 2008. ISBN 9783540285731.
- [25] L. Mandel and E. Wolf. *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995. ISBN 9780521417112.
- [26] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons and atoms: introduction to quantum electrodynamics*. Wiley professional paperback series. Wiley, 1997. ISBN 9780471184331.
- [27] W. Greiner and J. Reinhardt. *Field Quantization*. Springer, 1996. ISBN 9783540591795.
- [28] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, third edition, 1998.
- [29] Walter Greiner and Joachim Reinhardt. *Quantum Electrodynamics*. Springer, 4th ed. 2009 edition, 2008. ISBN 9783540875604.
- [30] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics*. Addison Wesley, 3rd edition, 1999. ISBN 9780138053260.
- [31] Richard W. Henry and Sharon C. Glotzer. A squeezed-state primer. *American Journal of Physics*, 56(4):318–328, 1988. doi: 10.1119/1.15631.
- [32] D. T. Pegg and S. M. Barnett. Unitary Phase Operator in Quantum Mechanics. *Europhysics Letters (epl)*, 6:483–487, 1988. doi: 10.1209/0295-5075/6/6/002.
- [33] D. T. Pegg and S. M. Barnett. Phase properties of the quantized single-mode electromagnetic field. *Phys. Rev. A*, 39:1665–1675, Feb 1989. doi: 10.1103/PhysRevA.39.1665.
- [34] Quentin Glorieux. *Quantum correlations by four-wave-mixing in atomic vapor. Theory and Experiments*. PhD thesis, 2011.
- [35] C. Fabre. Quantum fluctuations in light beams. In *Quantum Fluctuations, Volume 63 (Les Houches)*. North Holland, 1 edition, 6 1997. ISBN 9780444825933.

- [36] G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre, and C. Cohen-Tannoudji. *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light. Cambridge University Press, 2010. ISBN 9780521551120.
- [37] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Atom-Photon Interactions*. Wiley Science Paperback Series. Wiley, 1998. ISBN 9780471293361.
- [38] P. Meystre and M.I.I.I. Sargent. *Elements of Quantum Optics*. Springer-Verlag, 1999. ISBN 9783540642206.
- [39] C. Gardiner and P. Zoller. *Quantum Noise*. Springer Series in Synergetics. Springer, 2004. ISBN 9783540223016. URL http://books.google.com.br/books?id=a_xsT8oGhdgC.
- [40] C. Gardiner. *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences*. Springer Series in Synergetics. Springer, 2010. ISBN 9783642089626. URL <http://books.google.com.br/books?id=321EuQAACAAJ>.
- [41] Michael Fleischhauer and Thomas Richter. Pulse matching and correlation of phase fluctuations in λ systems. *Phys. Rev. A*, 51:2430–2442, Mar 1995. doi: 10.1103/PhysRevA.51.2430. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.51.2430>.
- [42] Luiz Davidovich. Sub-poissonian processes in quantum optics. *Rev. Mod. Phys.*, 68:127–173, Jan 1996. doi: 10.1103/RevModPhys.68.127. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.68.127>.
- [43] E. Schrödinger. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23:807–812, November 1935.
- [44] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 47:777–780, May 1935. doi: 10.1103/PhysRev.47.777.
- [45] N. Bohr. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Phys. Rev.*, 48:696–702, Oct 1935. doi: 10.1103/PhysRev.48.696. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.48.696>.
- [46] JOHN S. BELL. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics*, 1:195, 1964.
- [47] JOHN S. BELL. On the problem of hidden variables in quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 38:447–452, Jul 1966. doi: 10.1103/RevModPhys.38.447. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.38.447>.

- [48] J F Clauser and A Shimony. Bell's theorem. experimental tests and implications. *Reports on Progress in Physics*, 41(12):1881, 1978. URL <http://stacks.iop.org/0034-4885/41/i=12/a=002>.
- [49] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of bell's inequalities using time- varying analyzers. *Phys. Rev. Lett.*, 49:1804–1807, Dec 1982. doi: 10.1103/PhysRevLett.49.1804. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.49.1804>.
- [50] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Proposed experiment to test local hidden-variable theories. *Phys. Rev. Lett.*, 23:880–884, Oct 1969. doi: 10.1103/PhysRevLett.23.880. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.23.880>.
- [51] M. A. Rowe, D. Kielpinski, V. Meyer, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland. Experimental violation of a bell's inequality with efficient detection. *Nature*, 409:791–794, Feb 2001. URL <http://dx.doi.org/10.1038/35057215>.
- [52] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, and K. C. Peng. Realization of the einstein-podolsky-rosen paradox for continuous variables. *Phys. Rev. Lett.*, 68:3663–3666, Jun 1992. doi: 10.1103/PhysRevLett.68.3663. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.68.3663>.
- [53] Maximilian Schlosshauer. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 76:1267–1305, Feb 2005. doi: 10.1103/RevModPhys.76.1267. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.76.1267>.
- [54] M.A. Schlosshauer. *Decoherence: And the Quantum-To-Classical Transition*. The Frontiers Collection. Springer, 2007. ISBN 9783540357735.
- [55] E. Joos. *Decoherence and the Appearance of a Classical World in Quantum Theory*. Physics and astronomy online library. Springer, 2003. ISBN 9783540003908.
- [56] Asher Peres. Separability criterion for density matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1413–1415, Aug 1996. doi: 10.1103/PhysRevLett.77.1413. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.1413>.
- [57] Michal Horodecki, Pawel Horodecki, and Ryszard Horodecki. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Physics Letters A*, 223(1?2):1 – 8, 1996. ISSN 0375-9601. doi: 10.1016/S0375-9601(96)00706-2.
- [58] R. Simon. Peres-horodecki separability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2726–2729, Mar 2000. doi: 10.1103/PhysRevLett.84.2726. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.2726>.

- [59] Lu-Ming Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller. Inseparability criterion for continuous variable systems. *Phys. Rev. Lett.*, 84:2722–2725, Mar 2000. doi: 10.1103/PhysRevLett.84.2722. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.2722>.
- [60] Vittorio Giovannetti, Stefano Mancini, David Vitali, and Paolo Tombesi. Characterizing the entanglement of bipartite quantum systems. *Phys. Rev. A*, 67:022320, Feb 2003. doi: 10.1103/PhysRevA.67.022320. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.022320>.
- [61] P.N. Butcher and D. Cotter. *The Elements of Nonlinear Optics*. Cambridge Studies in Modern Optics. Cambridge University Press, 1991. ISBN 9780521424240.
- [62] Petr M. Anisimov, Jonathan P. Dowling, and Barry C. Sanders. Objectively discerning autler-townes splitting from electromagnetically induced transparency. *Phys. Rev. Lett.*, 107:163604, Oct 2011. doi: 10.1103/PhysRevLett.107.163604. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.163604>.
- [63] M.D. Lukin, P.R. Hemmer, and M.O. Scully. Resonant nonlinear optics in phase-coherent media. volume 42 of *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, pages 347 – 386. Academic Press, 2000. doi: 10.1016/S1049-250X(08)60190-1. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1049250X08601901>.
- [64] Felipe Barbosa. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2013.