

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

A equação de Dirac com uma superposição do  
campo de Aharonov-Bohm e um campo  
magnético uniforme colinear

Andrei Smirnov



**Orientador**

Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Guitman".

Tese apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade de São Paulo para obtenção do  
Título de Doutor em Ciências

**Banca examinadora**

Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman (orientador – IF USP)  
Prof. Dr. Marcelo Otávio Camonha Gomes (IF USP)  
Prof. Dr. Rogério Rosenfeld (IFT/UNESP)  
Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT/UNESP)  
Prof. Dr. Ivan Chestakov (IME USP)

São Paulo  
2004

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Armando Corbani Ferraz".

**Prof. Armando Corbani Ferraz**  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

530.14

S642c

D

Ex. 1

### FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Smirnov, Andrei

A Equação de Dirac com uma Superposição do Campo de Aharonov-Bohm e um Campo Magnético Uniforme Colinear. São Paulo, 2004.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo  
Instituto de Física - Depto. de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Dimitri Gitman  
Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Equações de Onda – Dirac;
2. Teoria de Campos e Ondas;
3. Análise Funcional - Operadores;
4. Física Matemática.

USP/IF/SBI-045/2004

SBI-IFUSP



305M810T4077

## Resumo

Neste trabalho é estudada a equação de Dirac com uma superposição do campo de Aharonov-Bohm (AB) e de um campo magnético colinear uniforme, que nós chamamos de campo magneto-solenoidal (MS). Usando a teoria de von Neumann das extensões auto-adjuntas de operadores simétricos, nós construímos no caso de  $2+1$  dimensões uma família uniparamétrica de hamiltonianos de Dirac auto-adjuntos especificados pelas condições de contorno no solenóide AB, e encontramos o espectro e as auto-funções para cada valor do parâmetro de extensão. Em seguida, reduzimos o problema em  $3+1$  dimensões ao problema em  $2+1$  dimensões pela escolha apropriada do operador de spin, o que permite realizar todo o programa de construção de extensões auto-adjuntas, e assim, também permite obter os espectros e auto-funções em termos do problema em  $2+1$  dimensões. Ademais, nós apresentamos o método reduzido de extensões auto-adjuntas do hamiltoniano radial de Dirac com o campo MS. Depois nós consideramos o caso regularizado do solenóide de raio finito. Nós estudamos a estrutura das auto-funções e a sua dependência com o comportamento do campo magnético dentro do solenóide. Considerando o limite de raio zero para o valor fixo do fluxo magnético, nós obtemos um hamiltoniano auto-adjunto particular que corresponde à condição de contorno específica para o caso do campo magneto-solenoidal com o solenóide AB. Nós chamamos estes casos particulares das extensões auto-adjuntas extensões naturais. Para completeza da investigação nós estudamos também o comportamento de uma partícula sem spin no campo magneto-solenoidal regularizado.

A etapa seguinte da investigação é a construção das funções de Green da equação de Dirac com o campo MS em  $2+1$  e  $3+1$  dimensões. As funções de Green são construídas por meio de um somatório sobre o conjunto completo das soluções da equação de Dirac. Ao construir as funções de Green, nós usamos as soluções exatas da equação de Dirac, que são relacionadas a valores específicos do parâmetro de extensão. Estes valores correspondem às extensões naturais. Depois nós estendemos os resultados ao caso em  $3+1$  dimensões. Nós apresentamos também as funções de Green não relativísticas e as funções de Green de uma partícula relativística escalar.

# Abstract

In the present work the Dirac equation with the superposition of the Aharonov-Bohm (AB) field and a collinear uniform magnetic field, which we call a magnetic-solenoid (MS) field, is studied. Using von Neumann's theory of the self-adjoint extensions of symmetric operators, in  $2 + 1$  dimensions we construct a one-parameter family of self-adjoint Dirac Hamiltonians specified by boundary conditions at the AB solenoid and find the spectrum and eigenfunctions for each value of the extension parameter. We reduce the  $(3 + 1)$ -dimensional problem to the  $(2 + 1)$ -dimensional one by a proper choice of the spin operator, which allows realizing all the programme of constructing self-adjoint extensions and finding spectra and eigenfunctions in the previous terms. We also present the reduced self-adjoint extension method for the radial Dirac Hamiltonian with the MS field. We then turn to the regularized case of finite-radius solenoid. We study the structure of the corresponding eigenfunctions and their dependence on the behavior of the magnetic field inside the solenoid. Considering the zero-radius limit with the fixed value of the magnetic flux, we obtain a concrete self-adjoint Hamiltonian corresponding to a specific boundary condition for the case of the magnetic-solenoid field with the AB solenoid. These particular cases of self-adjoint extensions we call natural extensions. For completeness we also study the behavior of the spinless particle in the regularized magnetic-solenoid field.

Successive step of our investigation is a construction of the Green functions of the Dirac equation with the MS field in  $2 + 1$  and  $3 + 1$  dimensions. The Green functions are constructed by means of summation over the complete set of solutions of the Dirac equation. Constructing the Green functions, we use the exact solutions of the Dirac equation that are related to the specific values of the extension parameter. These values correspond to the natural extension. Then we extend the results to the  $(3 + 1)$ -dimensional case. For the sake of completeness, we present nonrelativistic Green functions and Green functions of the relativistic scalar particle.

## **Agradecimentos**

Ao meu orientador professor Dr. Dmitri M. Gitman, ao professor Dr. Serguei P. Gavrilov, ao professor Dr. Boris L. Voronov pela ajuda e colaboração.

Aos amigos e colegas Mario Cesar Baldiotti, Rodrigo Fresneda e especialmente ao João Luis Meloni Assiratti pelos diversos auxílios.

À FAPESP pelo suporte financeiro.

## Conteúdo

1. Introdução .....	1
2. Os objetivos do trabalho .....	12
3. Soluções exatas da equação de Dirac .....	14
3.1 Soluções em 2+1 dimensões .....	15
3.1.1 O caso $B < 0$ . .....	20
3.2 Soluções em 3+1 dimensões .....	22
4. Extensões auto-adjuntas .....	24
4.1 Extensões em 2+1 dimensões .....	29
4.2 Extensões em 3+1 dimensões .....	32
4.3 Espectros das extensões auto-adjuntas .....	35
4.4 O método reduzido de extensão auto-adjunta .....	39
5. A regularização do solenóide .....	47
5.1 O caso da partícula com spin .....	47
5.2 O caso da partícula sem spin .....	51
6. As funções de Green .....	55
6.1 O caso de 2+1 dimensões .....	60
6.1.1 Os conjuntos das soluções exatas .....	60
6.1.2 A construção das funções de Green .....	62
6.1.3 O caso não relativístico .....	68
6.2 O caso de 3+1 dimensões .....	69
6.3 O caso escalar .....	71
Apêndice .....	73
Conclusões .....	76
Referências bibliográficas .....	78

# 1 Introdução

Em anos recentes muitas investigações foram feitas com potenciais singulares em Mecânica Quântica relativística e não-relativística. Investigações de tais situações estão fora dos procedimentos padrões da Mecânica Quântica e são de grande interesse na Teoria Quântica de Campo. Esses problemas também são interessantes, pois tais potenciais podem ser considerados como modelos de Teoria Quântica de Campo não-renormalizável.

O exemplo mais notável de potenciais singulares é o potencial de Aharonov-Bohm. Ele descreve o campo de um solenóide infinitamente longo e infinitamente fino, o campo Aharonov-Bohm (AB). O interesse dessa configuração de campo foi iniciado pelo artigo [1] de Y. Aharonov e D. Bohm. Nesse artigo os autores discutiram algumas propriedades dos potenciais eletromagnéticos no domínio quântico e mostraram que, em contraste com as conclusões da mecânica clássica, existe um efeito dos potenciais sobre uma partícula carregada, mesmo em uma região onde não haja campos e portanto onde não existem forças que atuem sobre a partícula. Desde então, o fenômeno é conhecido como o efeito Aharonov-Bohm. Os vários aspectos do efeito Aharonov-Bohm foram discutidos na literatura desde os anos sessenta. O número de publicações sobre o assunto é enorme. Atualmente o tema ainda persiste e atrai a atenção dos pesquisadores.

O conhecimento do efeito AB tanto teórico quanto experimental até os anos 90 foi descrito detalhadamente na monografia de M. Peshkin e A. Tonomura [2], publicada em 1989. Abaixo listamos brevemente alguns trabalhos sobre o efeito AB e problemas associados. Primeiramente mencionamos os trabalhos principais [3, 4]. Em [3] é mostrado que uma corda cósmica interage com a matéria através do seu potencial de calibre puro. A seção de choque é puramente geométrica, e não desaparece no limite do comprimento tendendo a zero da corda. O mecanismo relacionado à produção de partículas é discutido também. Em [4], o espalhamento de férmions em um tubo de fluxo infinitamente fino é estudado. O hamiltoniano de Dirac mostra que é necessária a especificação de uma extensão uniparamétrica auto-adjunta. Particularmente para uma faixa de valores do parâmetro de extensão a corda pode ligar férmions. O problema de estados ligados de partículas relativísticas de spin  $1/2$  no campo de calibre Aharonov-Bohm é considerado também em [5]. É mostrado que o potencial AB é suficientemente poderoso para

criar estados ligados. A função de onda, coeficientes de spin e os níveis de energia dos estados ligados dos férmions no campo de calibre de AB são discutidos também.

Em [6] o espalhamento de uma partícula relativística de spin  $1/2$  no potencial de AB é considerado. É mostrado que os enfoques anteriores ao problema negligenciaram a contribuição crucial da função delta ao potencial. Formulando o problema com uma fonte de raio finito que depois é feito tender a zero, estabeleceu-se que é a presença desta função delta que torna importantes as soluções singulares na origem. As mudanças de amplitude que surgem a devido inclusão do spin são entendidas; elas modificam a seção de choque no caso de raios polarizados. Em [7], são examinados os dois enfoques aos cálculos da Mecânica Quântica do espalhamento pelo tubo de fluxo em duas dimensões espaciais. É notado que mesmo quando se tomam os cuidados apropriados, o método padrão do deslocamento de fase falha em concordar com o resultado de Aharonov-Bohm. Esta discrepância é resolvida pela observação de que este cálculo usa uma permutação entre limite e somatório. Esta permutação é justificada somente quando o deslocamento de fase tende a zero suficientemente rápido. Como o momento angular se torna arbitrariamente grande, a condição não é satisfeita por este problema de espalhamento particular.

A conservação da helicidade é aplicada em [8] ao espalhamento de elétrons relativísticos por um solenóide infinitamente longo de raio arbitrariamente pequeno (espalhamento de Aharonov-Bohm). É mostrado também que a aproximação de Born, que falha quando aplicada ao espalhamento de Aharonov-Bohm no formalismo da equação de Schrödinger, dá resultados corretos no caso da equação de Dirac.

A expansão perturbativa da amplitude de espalhamento de Aharonov-Bohm é reconsiderada em [9] no formalismo do modelo em que a linha do fluxo tem raio finito e que, no final dos cálculos, tende a zero. Os cálculos são feitos para partículas de spin zero e de spin  $1/2$  e também na Teoria de Campo covariante Galileana. Obtem-se concordância geral com os resultados anteriores, mas com a vantagem de a técnica usada unificar todos os vários subcasos.

Em [10] a equação de Dirac no campo magnético cilíndricamente simétrico é considerada. São encontrados os modos normais como as autofunções de um conjunto completo de operadores que comutam entre si. Este conjunto consiste no operador de Dirac, a componente  $z$  do mo-

mento linear, a componente  $z$  do momento angular total e um dos operadores da polarização de spin possíveis. A estrutura de spin das soluções é completamente fixada, independentemente da distribuição radial do campo magnético, que influencia somente os modos radiais. As equações radiais para o campo magnético uniforme dentro do solenóide de raio finito são explicitamente resolvidas. O espalhamento de partículas escalares e de partículas de Dirac neste campo é considerado detalhadamente. Para as partículas de energia baixa, a seção de choque coincide com a seção de choque de espalhamento de Aharonov-Bohm. São elaboradas as correções de primeira ordem a este resultado, devidas à finitude do raio do solenóide. Nas energias altas, é obtido o resultado clássico para a seção de choque de espalhamento.

Em [11] é obtida a expressão geral para a amplitude de espalhamento de partículas não relativísticas sem spin no potencial de calibre de Aharonov-Bohm no formalismo independente do tempo. O resultado é válido tanto em direções para trás e para frente quanto para qualquer escolha das condições de contorno da função de onda no tubo de fluxo.

Em [12] é discutido o espalhamento de partículas relativísticas de spin zero no solenóide infinitamente longo e arbitrariamente fino. Nota-se que a solução exata do problema em primeira quantização pode ser obtida analogamente ao caso não relativístico, pelo método de Aharonov-Bohm original ou usando o esquema de magnetização de Berry. A técnica perturbativa é desenvolvida através do formalismo de duas componentes de Feshbach-Villars para a equação de Klein-Gordon. É mostrado que este formalismo precisa de renormalização como o seu correspondente na equação de Schrodinger. Os resultados são comparados com os da teoria de campo que corresponde ao setor de dois corpos da teoria escalar de Chern-Simons.

O espalhamento relativístico de uma partícula de spin  $1/2$  em um solenóide infinitamente longo é considerado em [13] usando a teoria perturbativa covariante. O termo de primeira ordem concorda com o termo correspondente à expansão em série da amplitude exata, e o termo da segunda ordem se anula, provando portanto que a aproximação de Born é consistente. Em [14] é completada a análise de onda parcial usando a base do operador do momento angular total  $J_3$  para a amplitude de Born de primeira ordem da partícula de Dirac no potencial de Aharonov-Bohm. É demonstrado que a onda parcial  $s$  contribui à amplitude de espalhamento em contraste com o caso de partículas escalares não relativísticas. Sugere-se que isto explica o

fato de que a amplitude de Born de primeira ordem de uma partícula de Dirac coincidir com a amplitude exata expandida até a mesma ordem; contudo, para uma partícula escalar isto não é verdade. Uma álgebra interessante envolvendo o operador de velocidade de Dirac e os observáveis angulares é apresentada e as suas conseqüências são exploradas.

Em [15] o espalhamento de Aharonov-Bohm de partículas massivas de spin 1 é computado. Começando pela equação de onda relativística da partícula carregada massiva de spin 1, é feita a redução a duas dimensões espaciais, que é consistente com a geometria padrão de Aharonov-Bohm. Chega-se ao resultado de que o problema consiste em um espalhamento independente dos spins de três mesons vetoriais. A amplitude para o modo de spin 0 é trivialmente idêntico à amplitude de AB. No entanto, as componentes de spin 1 para cima e para baixo são iguais, em contraste agudo com o resultado para a amplitude AB de spin 1/2. Isto indica que o hamiltoniano não é limitado como conseqüência da presença no potencial do termo com a função delta. No limite Galileano, é encontrado que a amplitude das componentes de spin não zero é idêntica à amplitude de spin 1/2, de acordo com entendimento geral do problema. É encontrado que o limite Galileano da seção de choque de AB de spin 1 muda, e cálculos de algumas polarizações de estado puro são apresentadas. O problema de Aharonov-Bohm de spin 1 é estudado também em [16], onde se discute como um tubo de fluxo magnético  $\Phi$  não blindado afeta as partículas carregadas de comprimento de onda arbitrariamente longo. As partículas de spin 1 não penetram o tubo para quase todos os  $\Phi$ , então a interação é essencialmente periódica em  $\Phi$ . Os estados ligados abaixo do limiar movem-se livremente somente ao longo do eixo do tubo, e correntes de vácuo conseqüentemente induzidas suprem  $\Phi$  mais do que blindam. Para a interação magnética pura o tubo deve ser mais largo do que o comprimento de onda de Compton da partícula, i.e., existe somente o problema não-relativístico de spin 1 de AB.

O problema da inclusão correta do spin no espalhamento de Aharonov-Bohm é considerado em [17]. É proposto que este problema pode ser resolvido pela imposição de que todas as singularidades, devidas a presença de spin nas equações de onda associadas, devem ser interpretadas como limites de distribuições de fluxo fisicamente realizadas. Isto leva a resultados que confirmam a seção de choque usual do caso sem spin mas implicam em modificações não triviais do espalhamento do feixe polarizado de spin 1/2. Aplicando a técnica dos cálculos de

coeficiente de virial a uma coleção de partículas de spin  $1/2$  que carregam o fluxo, é mostrado que existem obstáculos severos ao ponto de vista convencional do fluxo como um parâmetro que interpola as estatísticas bosônicas e fermiônicas. Embora resultados semelhantes para o espalhamento de partículas de spin arbitrário sejam obtidos no limite Galileano, é encontrado que quando spin 1 é considerado no contexto de equação de onda relativística a estrutura da singularidade é patológica demais para fornecer uma interpretação consistente. A equivalência exata dos efeitos Aharonov-Bohm para partícula de spin  $1/2$  e do efeito Aharonov-Casher é também demonstrada, e os resultados para os feixes polarizados são apresentados. É mostrado que o efeito Aharonov-Bohm de spin arbitrário, no limite Galileano, é a solução exata no setor de duas partículas da teoria de campo Galileana covariante.

O espalhamento de Aharonov-Bohm de um pacote de onda localizado é estudado em [18]. A análise cuidadosa da direção frontal indica os resultados seguintes: de acordo com a solução dependente de tempo, obtida por meio da representação assintótica do propagador (kernel), o fenômeno de auto-interferência ocorre ao longo da direção frontal, onde a densidade de probabilidade de corrente é calculada, demonstrando-se ser finita.

O problema do espalhamento sob a influência do potencial de Aharonov-Bohm é reconsiderado em [19]. Resolvendo a equação de Lippmann-Schwinger, a função de onda do estado de espalhamento neste sistema é obtida. Apesar do uso de uma onda plana como onda incidente, é obtida a mesma função de onda dada por Aharonov e Bohm. Um outro método para resolver o problema do espalhamento é dado por meio de uso da versão modificada da idéia de Gordon que foi inventada para considerar o espalhamento em um potencial de Coulomb. Estes dois métodos produzem o mesmo resultado, o que garante a validade da escolha da onda incidente plana usual para fazer a análise do problema de espalhamento. No problema de espalhamento por um solenóide do raio finito é discutido e encontrado que o potencial vetor do solenóide afeta as partículas carregadas mesmo que a magnitude do fluxo seja um número inteiro ímpar ou não inteiro. É mostrado que a unitariedade da matriz  $S$  vale contanto que uma onda plana seja escolhida como onda incidente.

Em [20] a relação de unitariedade da amplitude de espalhamento de Aharonov-Bohm é discutida com a esperança de que ela discriminará as diferentes técnicas que usam diferentes ondas

incidentes. É encontrado que a amplitude original de espalhamento de Aharonov-Bohm satisfaz a relação de unitariedade sob uma prescrição de regularização cujo fundamento teórico não é claramente entendido. Por outro lado, a amplitude obtida pelo uso de onda plana como onda incidente também satisfaz a relação de unitariedade, mas de uma maneira não usual.

Mencionamos também, o trabalho [21] em que é considerado o espalhamento elástico e estados ligados de partículas carregadas quânticas movendo-se em um potencial de Aharonov-Bohm e um potencial atrativo  $\rho^{-2}$  por uso da técnica de onda parcial. As soluções radiais da equação estacionária de Schrodinger são especificadas de tal maneira que o hamiltoniano do problema é auto-adjunto. É mostrado que elas não são fixadas univocamente, mas dependem de parâmetros livres. As consequências físicas relacionadas são discutidas. A seção de choque do espalhamento é calculada e o espectro de energia de estados ligados é obtido.

Em [22] é sugerido que o efeito Aharonov-Bohm mostra que o vácuo é estruturado, e que pode existir um potencial vetor finito  $A$  no vácuo para o qual o campo elétrico  $E$  e a densidade de fluxo magnético  $B$  são zero. É mostrado que a teoria de gauge produz energia inerente ao vácuo. O vácuo é considerado como o espaço interno da teoria de gauge, contendo um campo constituído pelas componentes de  $A$ , e uma aplicação da transformação local de gauge produz o campo eletromagnético, a densidade de carga/corrente do vácuo, e a carga topológica  $g$ . A transformação local de gauge é resultado da Relatividade Restrita e introduz a curvatura de espaço-tempo, a qual leva ao surgimento de um campo electromagnético cuja fonte é a densidade de corrente de carga do vácuo constituído de  $A$  e  $g$ . O campo leva energia ao sistema, portanto a energia em geral pode ser extraída do vácuo. O desenvolvimento é dado para a teoria de gauge invariante com relação aos grupos  $U(1)$  e  $O(3)$  e aplicada à eletrodinâmica.

Em [23] o efeito Aharonov-Bohm é considerado em descrição completamente da Mecânica Quântica. O magneto e a partícula carregada movendo-se são considerados como objetos quânticos e interações entre eles são realizadas por troca de fótons virtuais. Utilizando uma representação da integral de trajetória, não só é estabelecido o efeito AB de maneira exata, mas, também, é revelada a origem de sua natureza topológica para o sistema de AB proposto. Adicionalmente, as complicações surgindo da dispersão transversal da função de onda da partícula carregada e de precessão do magneto são examinadas.

Abaixo nós mencionamos os trabalhos dedicados ao efeito AB elaborados do ponto da vista da teoria quântica de campo. Em [24], o problema do movimento de um elétron de Dirac nas proximidades de um tubo fino de fluxo magnético é resolvido explicitamente. O somatório sobre os elétrons do "mar" permite calcular a corrente de polarização que corre ao redor do tubo de fluxo introduzido no vácuo físico. A fórmula para a densidade de energia é também dada.

Em [25] são examinados os efeitos da polarização do vácuo em volta de uma corda de fluxo magnético singular em 2+1 e 3+1 dimensões. São determinados os efeitos locais de densidades de carga e corrente e o fluxo induzido pela corrente do vácuo. A análise é realizada usando as soluções exatas das equações de Dirac pertinentes. É encontrado que os efeitos em 3+1 dimensões podem ser descritos de maneira simples como uma superposição dos efeitos em 2+1 dimensões.

Em [26] é considerado o espalhamento da onda de um elétron no background de uma corda magnética singular e a indução do número quântico do vácuo pelo mesmo background. Atenção é atraída à característica comum destes dois fenômenos diferentes, que consiste na periodicidade de valor do fluxo magnético. A influência específica do background gravitational nestes fenômenos é examinada. É mostrado que o fluxo da corda magnética aparece completamente não observável para uma fonte gravitational suficiente forte.

Em [27] é realizada a análise perturbativa do problema de Aharonov-Bohm até um loop na formulação da Teoria de Campo, e mostrado que as interações de contato são necessárias para renormalizabilidade. Em geral, a invariância clássica de escala deste problema é quebrada no nível da Mecânica Quântica. Entretanto, existe um ponto crítico para o qual esta anomalia desaparece.

Em [28] o spin induzido do vácuo em volta de uma corda de fluxo de Aharonov-Bohm na QED de massa zero em três dimensões é computado explicitamente e é mostrado que o resultado está em concordância com o teorema geral de índice. É reforçada a observação anterior na literatura de que a corda de fluxo AB inteiro fica visível na presença de números quânticos induzidos no vácuo, não periódicos no fluxo. Além disso, são elaboradas a discussão da quebra de simetria quiral pelos campos magnéticos externos na QED<sub>3</sub> invariante por paridade e a sua relação ao spin induzido na QED<sub>3</sub> não invariante por paridade. Finalmente, são mencionados

outros efeitos de polarização do vácuo em volta de tubos de fluxo em variantes diferentes da QED em três e quatro dimensões.

O espalhamento de elétrons pelo tubo reto do fluxo magnético infinitamente longo e infinitesimalmente fino é investigado em [29] usando a técnica da QED. As soluções para os campos de Dirac e de Maxwell no potencial de AB puro externo, o elemento de matriz e as probabilidades diferenciais para o processo de bremsstrahlung são discutidos. É analisada a dependência da seção de choque com a energia, direção e polarização das partículas envolvidas. No regime de energia baixa, é encontrado que a assimetria angular surge surpreendentemente, da interação do momento magnético do elétron com o campo magnético.

Em [30], usando a técnica da QED, é calculada a seção de choque da produção de pares de elétron-pósitron por um único fóton na presença do potencial de Aharonov-Bohm externo na primeira ordem da teoria de perturbação. As distribuições angular de energia e de polarização são analisadas nos regimes diferentes de energia: próximo do limiar e para as energias altas do fóton.

Os processos da QED na presença da corda reta infinitamente longa e infinitesimalmente fina com fluxo magnético dentro dela são considerados em [31]. São revistados o bremsstrahlung do elétron que passa próximo da corda magnética e a produção de pares de elétron-pósitron por um único fóton. Os elementos de matriz desses processos são apresentados. Os cálculos são baseados nas soluções exatas da equação de Dirac para elétron e pósitron no potencial de Aharonov-Bohm externo. A dependência da seção de choques de energias, direções e polarizações das partículas envolvidas é discutida para energias baixas.

Em [32] é considerado o espalhamento de elétrons relativísticos em um tubo de fluxo magnético. São calculadas correções radiativas de primeira ordem em  $\alpha$  na aproximação de Born. É mostrado que a amplitude de Born de segunda ordem se anula. O potencial de Aharonov-Bohm com correções radiativas é encontrado. É verificado que um campo magnético induzido é gerado fora do tubo de fluxo.

Finalmente nós mencionamos os trabalhos dedicados ao efeito gravitacional de Aharonov-Bohm. Em [33, 34], a partícula quântica escalar é considerada nos backgrounds dos campos gravitacionais devidos a (a) uma fonte de matéria tubular com o campo magnético axial interior

e o campo magnético exterior nulo; (b) correntes de massa movendo-se devagar (aproximação fraca); (c) uma corda cósmica girando. É mostrado que no espaço-tempo plano nas vizinhanças destas fontes, o espectro de energia e a função de onda da partícula dependem da quantidade de matéria e do campo magnético (caso da fonte tubular de matéria), da velocidade de correntes de massa se movendo e do momento angular no caso da corda cósmica girando. Estes casos representam as analogias gravitacionais do efeito Aharonov-Bohm da eletrodinâmica e são causados pelas características globais (de topologia) do background de espaços-tempos da consideração.

Em [35] as propriedades de alguns sistemas quânticos fora da corda cósmica de gauge girando são estudadas. É mostrado que as energias da partícula são acopladas à densidade do momento angular da corda, mesmo que as partículas se movam somente fora da corda, onde a curvatura Riemanniana se anula identicamente. Este efeito pode ser considerado como uma analogia gravitacional do efeito de Aharonov-Bohm. É mostrado que o espectro do momento angular da partícula quântica é deslocado por uma quantidade constante devido ao acoplamento da energia da partícula à densidade de momento angular da corda. É discutido que isto leva ao surgimento de uma densidade não nula de momento angular do vácuo quântico fora da corda girando. É mostrado também que a partícula quântica pode experimentar um deslocamento infinito para o violeta na presença das curvas temporais fechadas fora das cordas do este tipo.

Em [36] é desenvolvida a teoria quântica do espalhamento da partícula não relativística em um campo da corda cósmica considerada como a combinação das cordas magnética e gravitacional. Os efeitos devidos às dimensões transversais finitas da corda são levados em conta sob suposições bastante gerais sobre a distribuição do campo magnético e curvatura espacial da corda. É mostrado que a seção de choque diferencial para todos os valores absolutos do vetor de onda da partícula incidente, em um intervalo definido dos ângulos, depende fortemente do fluxo magnético da corda.

Em [37] é calculada a amplitude do espalhamento de Aharonov-Bohm no contexto da gravidade plana com as fontes localizadas que carregam também o fluxo magnético. As fontes geram o espaço-tempo com singularidades cônicas nas suas posições, e introduzem efeitos novos de espalhamento de partículas eletricamente carregadas. O comportamento da função de onda nas

proximidades das direções clássicas de espalhamento é analisado por meio da expansão asintótica. É encontrado que, em contraste com o efeito Aharonov-Bohm no espaço plano, valores numéricos inteiros do fluxo podem produzir os efeitos observáveis.

Em [38] são estudadas as mudanças introduzidas pelo fluxo magnético linear no espectro de energia de uma partícula livre confinada entre duas cascas cilíndricas concêntricas no espaço com a desclinação. É mostrado que a mudança da topologia causada pelo defeito produz as mudanças do espectro de energia que depende do fluxo e dos aspectos globais. A investigação do trabalho [38] é continuada em [39], onde são estudadas as mudanças introduzidas pelo fluxo magnético linear no espectro de energia de uma partícula livre confinada entre duas cascas cilíndricas concêntricas no espaço com a defeito linear o que é uma combinação da desclinação e o deslocamento e o que é chamado despiração. É mostrado que a mudança da topologia causada pelo defeito linear produz mudanças no espectro de energia.

Em [40] é investigado o espalhamento quântico do elétron em um deslocamento "parafusado" com um fluxo magnético interno. O efeito Aharonov-Bohm para os estados ligados é analisado e é demonstrado que a função de onda e os espectros de energia associados à partícula dependem dos vetores de Burgers do deslocamento e do fluxo magnético. A fase de Berry associada à dinâmica de elétrons nesse background é também calculada. Para alguns valores específicos do fluxo magnético, os efeitos produzidos pelo fluxo e pelo deslocamento são combinados de tal maneira que não existem nem espalhamento nem fase de Berry.

Em [41] é considerada uma partícula espinorial de massa zero no background do campo gravitacional produzido pelo corpo massivo girando. Na aproximação do campo fraco é mostrado que a solução da equação de Dirac de massa zero depende do momento angular do corpo girando, que não influencia a curvatura nesta aproximação. Este resultado pode ser interpretado como uma analogia gravitacional do efeito Aharonov-Bohm.

Em [42] uma partícula espinorial de massa zero é considerada no background do espaço-tempo gerado pela corrente de massa movendo-se e por uma corda cósmica girando. Na aproximação do campo fraco é mostrado que a solução das equações de Weyl depende da velocidade da fonte, que não influencia a curvatura nesta aproximação no caso da corrente de massa movendo-se. No caso da corda cósmica girando, a solução das equações de Weyl depende do

ângulo deficiente e do momento angular da corda. Estes efeitos podem ser considerados como exemplos de analogias gravitacionais do efeito Aharonov-Bohm da eletrodinâmica.

A discussão do efeito Aharonov-Bohm no espaço não comutativo pode ser encontrada em [43, 44]. A possibilidade da detecção de vestígios do espaço não comutativo é analisado usando o efeito Aharonov-Bohm em [43]. É mostrado que, se o espaço é não comutativo, então a holonomia recebe correções cinemáticas não triviais o que deve produzir uma figura de difração mesmo que o fluxo magnético seja quantizado. O problema do espalhamento é formulado também, e a seção de choque diferencial é calculada. Os resultados podem ser extrapolados até a física de alta energia, e o limite  $\theta \sim [10 \text{ TeV}]^{-2}$  é encontrado. Se este limite existe, então os efeitos não comutativos podem ser explorados nos experimentos do espalhamento pela medida das seções diferenciais de choque para os ângulos pequenos. Os estados ligados do efeito Aharonov-Bohm são discutidos também. Em [44] a amplitude da propagação de uma partícula em um espaço não comutativo é encontrada pelo desenvolvimento da formulação da integral de trajetória de Mecânica Quântica. É mostrado que o deslocamento da fase do propagador da partícula, causado pelo campo magnético do solenóide fino recebe correções invariantes de gauge pelo fato da não comutatividade. Avaliando o valor numérico desta correção, um limite superior do parâmetro da não comutatividade é obtido.

## 2 Os objetivos do trabalho

O objetivo principal de investigação neste trabalho é a equação de Dirac com uma superposição do campo Aharonov-Bohm e um campo magnético colinear uniforme. Nós chamamos esta superposição de campo magneto-solenoidal (MS). O programa da investigação consiste no estudo da equação de Dirac e na procura de um conjunto completo de soluções desta equação. A etapa seguinte é a construção das funções de Green da equação de Dirac por meio da técnica do somatório sobre o conjunto completo das soluções obtidas.

A investigação deste trabalho fornece uma oportunidade de continuar os estudos na área da radiação de uma partícula movendo-se no campo magneto-solenoidal. Usando os resultados deste trabalho as peculiaridades relacionadas as extensões auto-adjuntas podem ser incorporadas no estudo da radiação. Na teoria quântica de campos existe um problema atual de estudo da estrutura de vácuo sob a influência mútua de dois efeitos: um background e fronteiras. O campo magneto-solenoidal é o exemplo apropriado. Neste caso o campo magnético uniforme serve como o background e o campo Aharonov-Bohm fornece as condições de contorno. As funções de Green, calculadas neste trabalho levando em conta as extensões auto-adjuntas, são um instrumento efetivo para cálculos de teoria quântica de campos.

Nós notamos que tal campo de fundo é singular pelo fato da presença do campo AB. Uma das peculiaridades das teorias com potenciais singulares consiste em geral no fato de que os operadores correspondentes da mecânica quântica deixam de ser auto-adjuntos. Mas em alguns casos (não em todos) essa propriedade pode ser restaurada pela redefinição (extensão) do seu domínio.

O operador de Dirac com o campo MS não é auto-adjunto. A presença das autofunções com autovalores imaginários do hamiltoniano de Dirac indica este fato. Então, o nosso programa inicial deve necessariamente incluir mais uma etapa, isto é, a construção de operadores de Dirac auto-adjuntos.

O trabalho é organizado do seguinte modo. Nós começamos com separação de variáveis e descrição das soluções exatas de quadrado integrável da equação de Dirac radial no campo MS em 2+1 dimensões. Usando a teoria de von Neumann das extensões auto-adjuntas de operadores simétricos, nós construímos uma família uniparamétrica de hamiltonianos de Dirac

auto-adjuntos especificados pelas condições de contorno no solenóide AB e encontramos o espectro e as autofunções para cada valor do parâmetro de extensão. Em seguida, reduzimos o problema de 3+1 dimensões ao problema de 2+1 dimensões pela escolha apropriada do operador de spin, que permite realizar o programa inteiro de construção de extensões auto-adjuntas e obtenção dos espectros e autofunções nos termos anteriores. Vale notar no nosso caso particular que, como é o caso de muitos outros onde há presença de operadores diferenciais singulares, o procedimento geral de von Neumann para as extensões auto-adjuntas de operadores simétricos pode ser reduzido significativamente à análise do comportamento das funções correspondentes nas proximidades da singularidade. Nós apresentamos este método mais simples para as extensões auto-adjuntas do hamiltoniano radial de Dirac com o campo MS. Depois nós passamos ao caso regularizado do solenóide de raio finito. Nós estudamos a estrutura das autofunções e a sua dependência no comportamento do campo magnético dentro do solenóide. Considerando o limite de raio zero com valor fixo do fluxo magnético, nós obtemos o hamiltoniano auto-adjunto concreto que corresponde à condição de contorno específica para o caso do campo magneto-solenoidal com o solenóide AB. Estes casos particulares das extensões auto-adjuntas nós chamamos extensões naturais. Para completeza da nossa consideração nós estudamos também o comportamento de uma partícula sem spin no campo magneto-solenoidal regularizado.

A etapa seguinte da nossa investigação é a construção das funções de Green da equação de Dirac em 2 + 1 e 3 + 1 dimensões. Em princípio, as funções de Green podem ser construídas sempre que os conjuntos completos das soluções da equação de Dirac são conhecidos. Então podem ser obtidas por meio do somatório sobre o conjunto completo das soluções. Primeiramente, nós consideramos o caso de 2 + 1 dimensões detalhadamente. Neste caso, ao construir as funções de Green, nós usamos as soluções exatas da equação de Dirac que são relacionadas a valores específicos do parâmetro de extensão. Estes valores correspondem às extensões naturais. Depois nós estendemos os resultados ao caso de 3 + 1 dimensões. Nós apresentamos também as funções de Green não relativísticas e as funções de Green de uma partícula relativística escalar.

Em todo o trabalho nós adotamos  $c = 1$ ,  $\hbar = 1$ .

### 3 Soluções exatas da equação de Dirac

Neste capítulo, nós estudamos as soluções da equação de Dirac com o campo magneto-solenoidal. As soluções das equações de Schrödinger, Klein-Gordon e Dirac com o campo MS foram discutidas em vários trabalhos [45, 46, 47, 48]. Particularmente, a equação de Schrödinger é discutida em [45]. Neste trabalho, é analisado o papel do efeito AB para os estados ligados de uma partícula carregada no campo MS. São dadas as soluções exatas para o solenóide de raio zero, e discutidas as correções devido à finitude do raio. É mostrado que o espectro apresenta uma série nova de 'ressonâncias betatron', que depende do número quântico do fluxo. A ressonância betatron fundamental permanece estreita e não deslocada para raios bastante grandes. As soluções das equações de Klein-Gordon e Dirac em  $2 + 1$  e  $3 + 1$  dimensões foram encontradas em [48]. Em [49], estas soluções são usadas para calcular exatamente as características da radiação espontânea de um fóton, para uma partícula com spin e sem spin. A radiação cyclotron e synchrotron é analisada detalhadamente, considerando as aproximações relativísticas e não relativísticas. É mostrado que as peculiaridades da radiação, causadas pela presença do solenóide, podem ser consideradas como a manifestação do efeito AB na radiação. É demonstrado que linhas novas aparecem no espectro da radiação. Devido às peculiaridades da distribuição angular da intensidade da radiação, essas linhas podem ser separadas do espectro básico da radiação cyclotron e synchrotron.

Entretanto, o número de aspectos importantes relacionados à consideração rigorosa da mecânica quântica da equação de Dirac com o campo magneto-solenoidal singular não foram estudados. Particularmente, em [48] foi indicado que existe um subespaço crítico onde surge o problema de auto-adjunticidade do hamiltoniano de Dirac. Esse problema e o problema associado da completeza das soluções não foram resolvidos.

Nós consideramos a equação de Dirac em  $3 + 1$  e  $2 + 1$  dimensões

$$i\partial_0\Psi = H\Psi, \quad H = \gamma^0(\gamma\mathbf{P} + M). \quad (1)$$

Nós usamos  $\gamma^\nu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$ ,  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^k)$ ,  $P_k = i\partial_k - qA_k$ ,  $k = 1, 2$  para  $2 + 1$  e  $k = 1, 2, 3$  para  $3 + 1$ ,  $\nu = (0, k)$ ;  $q$  é uma carga algébrica, para elétrons  $q = -e < 0$ ;  $M$  é a massa do elétron. Como campo eletromagnético externo, tomamos o campo magneto-solenoidal. O

campo magneto-solenoidal é a superposição colinear do campo AB  $B^{AB}$  e do campo magnético constante uniforme  $B$ . O tensor de Maxwell completo é

$$F_{\lambda\nu} = \bar{B} (\delta_{\lambda}^2 \delta_{\nu}^1 - \delta_{\lambda}^1 \delta_{\nu}^2), \quad \bar{B} = B^{AB} + B.$$

O campo AB é singular em  $r = 0$ ,

$$B^{AB} = \Phi \delta(x^1) \delta(x^2).$$

O campo AB cria o fluxo magnético  $\Phi$ . É conveniente apresentar o fluxo como:

$$\Phi = (l_0 + \mu) \Phi_0, \quad \Phi_0 = 2\pi/e, \quad (2)$$

onde  $l_0$  é o número inteiro e  $0 \leq \mu < 1$ .

Nós usamos coordenadas cilíndricas  $\varphi$  e  $r$ :  $x^1 = r \cos \varphi$ ,  $x^2 = r \sin \varphi$ , portanto, os potenciais tomam a forma:

$$\begin{aligned} A_0 = 0, \quad eA_1 = [l_0 + \mu + A(r)] \frac{\sin \varphi}{r}, \quad eA_2 = -[l_0 + \mu + A(r)] \frac{\cos \varphi}{r}, \\ (A_3 = 0 \text{ in } 3 + 1), \quad A(r) = eBr^2/2. \end{aligned} \quad (3)$$

Nós tratamos convencionalmente a equação de Dirac, do ponto de vista da mecânica quântica, como equação de evolução do tipo de Schrödinger com hamiltoniano  $H$ , um operador no espaço de Hilbert apropriado. Consideramos somente as soluções estacionárias, i.e., as autofunções (generalizadas) do hamiltoniano de Dirac. Isto significa que procuramos as soluções estacionárias que são limitadas no infinito e localmente de quadrado integrável.

### 3.1 Soluções em 2+1 dimensões

Primeiramente, nós consideramos o problema em 2+1 dimensões. Em 2+1 dimensões, existem duas representações das matrizes  $\gamma$  não equivalentes:

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^2, \quad \gamma^2 = -i\sigma^1\zeta, \quad \zeta = \pm 1,$$

onde as "polarizações"  $\zeta = \pm 1$  correspondem às partículas de "spin para cima",  $\zeta = +1$ , e "spin para baixo",  $\zeta = -1$ , e  $\sigma = (\sigma^i)$  são as matrizes de Pauli. Para o caso estacionário é designada a seguinte forma para os espinores  $\Psi(x)$ :

$$\Psi(x) = \exp\{-i\epsilon x^0\} \psi_{\epsilon}^{(\zeta)}(x_{\perp}), \quad \zeta = \pm 1, \quad x_{\perp} = (0, x^1, x^2). \quad (4)$$

A equação de Dirac estacionária em ambos as representações é:

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}_\perp + M\sigma^3) \psi_\varepsilon^{(1)}(x_\perp) = \varepsilon\psi_\varepsilon^{(1)}(x_\perp), \quad P_\perp = (0, P_1, P_2), \quad (5)$$

$$(\sigma^1\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}_\perp\sigma^1 + M\sigma^3) \psi_\varepsilon^{(-1)}(x_\perp) = \varepsilon\psi_\varepsilon^{(-1)}(x_\perp). \quad (6)$$

Nós notamos que os autovalores de energia podem ser positivos,  $\varepsilon = +\varepsilon > 0$ , ou negativos,  $\varepsilon = -\varepsilon < 0$ . Além disso podemos verificar que (5) e (6) são relacionadas como

$$\psi_\varepsilon^{(-1)}(x_\perp) = \sigma^2\psi_{-\varepsilon}^{(1)}(x_\perp). \quad (7)$$

Portanto, abaixo nós usamos a representação definida por  $\zeta = 1$ .

Como operador de momento angular total, nós escolhemos  $J = -i\partial_\varphi + \sigma^3/2$  que é a redução dimensional do operador  $J^3$  em  $3 + 1$  dimensões. O operador  $J$  comuta com o hamiltoniano  $H$ . Portanto, nós podemos considerar a Eq. (5) separadamente em cada auto-espaço do operador  $J$ ,

$$J\psi_\varepsilon^{(1)}(x_\perp) = \left(l - l_0 - \frac{1}{2}\right) \psi_\varepsilon^{(1)}(x_\perp), \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Representando os espinores  $\psi_\varepsilon^{(1)}$  na forma

$$\psi_\varepsilon^{(1)}(x_\perp) = g_l(\varphi)\psi_l(r), \quad g_l(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{i\varphi\left[l - l_0 - \frac{1}{2}(1 + \sigma^3)\right]\right\}, \quad (9)$$

nós reduzimos a equação (5) à equação de Dirac radial para o espinor radial  $\psi_l(r)$ ,

$$h\psi_l(r) = \varepsilon\psi_l(r), \quad h = \Pi + \sigma^3 M, \quad (10)$$

$$\Pi = -i\left\{\partial_r + \frac{\sigma^3}{r}\left[\mu + l - \frac{1}{2}(1 - \sigma^3) + A(r)\right]\right\}\sigma^1, \quad (11)$$

com o hamiltoniano radial<sup>1</sup>  $h$ ;  $\Pi$  define a ação do operador de projeção de spin no espinor radial no subespaço com  $l$  dado,

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}_\perp g_l(\varphi)\psi_l(r) = g_l(\varphi)\Pi\psi_l(r).$$

É conveniente apresentar o espinor radial como

$$\psi_l(r) = [\sigma^3(\varepsilon - \Pi) + M] u_l(r), \quad (12)$$

---

<sup>1</sup>O Hamiltoniano radial  $h$  nós subentendemos como a família completa de  $h$  com  $l = 0, \pm 1, \dots$  diferentes e  $B$  arbitrários.

onde

$$u_l(r) = \sum_{\sigma=\pm 1} c_\sigma u_{l,\sigma}(r), \quad u_{l,\sigma}(r) = \phi_{l,\sigma}(r) v_\sigma, \\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

e  $c_\sigma$  são constantes. Da Eq. (10) segue que  $\Pi^2 u = (\varepsilon^2 - M^2) u$ ; portanto, as funções radiais  $\phi_{l,\sigma}(r)$  satisfazem a equação

$$\left\{ \rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} - \frac{\rho}{4} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\omega}{\gamma} - \xi \left( \mu + l - \frac{1}{2} (1 - \sigma) \right) \right] - \frac{\nu^2}{4\rho} \right\} \phi_{l,\sigma}(r) = 0, \quad (14) \\ \rho = \gamma r^2 / 2, \quad \gamma = e|B|, \quad \xi = \text{sgn} B, \quad \nu = \mu + l - (1 + \sigma) / 2, \quad \omega = \varepsilon^2 - M^2.$$

Soluções da equação (14) foram estudadas em [48]. Os resultados podem ser reunidos do seguinte modo.

Para qualquer  $l$ , existe um conjunto de soluções  $\phi_{l,\sigma} = (\phi_{m,l,\sigma}, m = 0, 1, 2, \dots)$ ,

$$\phi_{m,l,\sigma}(r) = I_{m+|\nu|,m}(\rho), \quad (15)$$

de quadrado integrável e regulares<sup>2</sup> em  $r = 0$ . Aqui,  $I_{n,m}(\rho)$  são as funções de Laguerre, que são apresentadas no Apêndice.

Para  $l = 0$ , existem soluções de quadrado integrável mas não analíticas, aqui denominadas de irregulares em  $r = 0$  se  $\mu \neq 0$ . Uma solução irregular geral para  $l = 0$  e  $\mu \neq 0$  tem a forma:

$$\phi_{\omega,\sigma}(r) = \psi_{\lambda,\alpha}(\rho) = \rho^{-1/2} W_{\lambda,\alpha/2}(\rho), \\ \alpha = \mu - (1 + \sigma) / 2, \quad 2\lambda = \omega / \gamma - \xi [\mu - (1 - \sigma) / 2], \quad (16)$$

onde  $W_{\lambda,\alpha/2}$  são as funções de Whittaker (ver [50], 9.220.4). Os espinores em (10) que são construídos por meio dessas funções são de quadrado integrável para  $\lambda$  complexo arbitrário. As funções  $\psi_{\lambda,\alpha}$  foram estudadas detalhadamente em [48]. Algumas relações importantes para estas funções são apresentadas no Apêndice. Vemos que a interpretação de  $\omega$  como energia é

---

<sup>2</sup>Aqui nós usamos os termos "regular" e "irregular" em  $r = 0$  no seguinte sentido. Chamamos uma função regular se ela se comporta como  $r^c$  em  $r = 0$  com  $c \geq 0$ , e irregular se  $c < 0$ . Chamamos um espinor regular se todos os seus componentes são regulares, e irregular se pelo menos um dos seus componentes é irregular.

impossível para  $\lambda$  complexo. Para  $\lambda$  real existe um conjunto de soluções (16) que podem ser escritas em termos das funções de Laguerre com índices inteiros:

$$\begin{aligned}\phi_{m,1}^{ir}(r) &= I_{m+\mu-1,m}(\rho), \quad \sigma = 1, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ \phi_{m,-1}^{ir}(r) &= I_{m-\mu,m}(\rho), \quad \sigma = -1, \quad m = 0, 1, 2, \dots.\end{aligned}\quad (17)$$

Todas as soluções  $\psi_l(r)$  da Eq. (10) são de quadrado integrável na semi-reta com medida  $rdr$ . As funções de Laguerre nas Eqs. (15), (17) são expressas através dos polinômios de Laguerre.

Os autovalores  $\omega$  e a forma dos espinores dependem de  $\text{sgn}B$ . Abaixo, nós apresentamos os resultados para  $B > 0$ . O espectro de  $\omega$  correspondente às funções  $\phi_{m,l,\sigma}(r)$  é

$$\omega = \begin{cases} 2\gamma(m+l+\mu), & l - (1+\sigma)/2 \geq 0 \\ 2\gamma(m + (1+\sigma)/2), & l - (1+\sigma)/2 < 0 \end{cases}, \quad (18)$$

e o espectro de  $\omega$  correspondente às funções  $\phi_{m,\sigma}^{ir}(r)$  é

$$\omega = \begin{cases} 2\gamma(m+\mu), & \sigma = 1 \\ 2\gamma m, & \sigma = -1 \end{cases}. \quad (19)$$

Nós exigimos que os espinores  $u_l(r)$  sejam autovetores do  $\Pi$ , tal que as funções  $u_{m,l,\pm}$  satisfaçam a equação

$$\Pi u_{m,l,\pm}(r) = \pm\sqrt{\omega} u_{m,l,\pm}(r). \quad (20)$$

Agora podemos especificar os coeficientes em (13).

No caso  $\omega = 0$ , temos

$$u_{0,l}(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{0,l,-1}(r) \end{pmatrix}, \quad l \leq -1; \quad u_0^I(r) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{0,-1}^{ir}(r) \end{pmatrix}, \quad l = 0. \quad (21)$$

Isto pode ser obtido usando as relações (179)-(182) para as funções de Laguerres  $I_{n,m}(\rho)$ .

No caso  $\omega \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned}
u_{m,l,\pm}(r) &= \begin{pmatrix} \phi_{m,l,1}(r) \\ \pm i\phi_{m,l,-1}(r) \end{pmatrix}, \quad l \geq 1, \quad \omega = 2\gamma(m+l+\mu), \\
u_{m+1,l,\pm}(r) &= \begin{pmatrix} \phi_{m,l,1}(r) \\ \mp i\phi_{m+1,l,-1}(r) \end{pmatrix}, \quad l \leq -1, \quad \omega = 2\gamma(m+1), \\
u_{m+1,\pm}^I(r) &= \begin{pmatrix} \phi_{m,0,1}(r) \\ \mp i\phi_{m+1,-1}^{ir}(r) \end{pmatrix}, \quad l = 0, \quad \omega = 2\gamma(m+1), \\
u_{m,\pm}^{II}(r) &= \begin{pmatrix} \phi_{m,1}^{ir}(r) \\ \pm i\phi_{m,0,-1}(r) \end{pmatrix}, \quad l = 0, \quad \omega = 2\gamma(m+\mu). \tag{22}
\end{aligned}$$

Para  $\omega \neq 0$ , nós construímos as soluções da equação de Dirac usando os espinores  $u$  correspondentes aos autovalores positivos do operador  $\Pi$ . Estas soluções são

$$\begin{aligned}
\psi_{m,l}(r) &= N [\sigma^3 (\varepsilon - \sqrt{\omega}) + M] u_{m,l,+}(r), \quad l \neq 0, \\
\psi_m^{I,II}(r) &= N [\sigma^3 (\varepsilon - \sqrt{\omega}) + M] u_{m,+}^{I,II}(r), \quad l = 0, \tag{23}
\end{aligned}$$

onde  $N$  é uma constante de normalização. Substituindo (23) em (10), nós obtemos os dois tipos de estados correspondentes às partículas,  $+\psi$ , e às antipartículas,  $-\psi$ , com  $\varepsilon = \pm\varepsilon = \pm\sqrt{M^2 + \omega}$ , respectivamente. Os espectros de partícula e antipartícula são simétricos, isto é,  $|+\varepsilon| = |-\varepsilon|$ , para números quânticos  $m$  e  $l$  fixos.

Agora consideremos o caso  $\omega = 0$ . Como segue de (10) e (21), somente as soluções de energia negativa (antipartículas) são possíveis. Elas coincidem com os espinores  $u$  a menos de constante de normalização,

$$-\psi_{0,l}(r) = Nu_{0,l}(r), \quad l \leq -1; \quad -\psi_0^I(r) = Nu_0^I(r), \quad l = 0. \tag{24}$$

Então, somente antipartículas têm nível de energia de repouso. O nível mais baixo de energia de partícula para  $l \leq 0$  é  $+\varepsilon = \sqrt{M^2 + 2\gamma}$ .

Todos os espinores radiais  $\psi_{m,l}(r)$  são ortogonais para  $m$  diferentes. Isto é verdade tanto para os espinores  $\psi_m^I$  quanto para  $\psi_m^{II}$ . No caso geral, os espinores des tipos diferentes não são ortogonais. Usando a Eq. (185) do Apêndice, podemos provar este fato e calcular o fator de

normalização que tem a mesma forma para todos os tipos de espinores,

$$N = \sqrt{\frac{\gamma}{2 [(\varepsilon - \sqrt{\omega})^2 + M^2]}}. \quad (25)$$

Ademais, no subespaço  $l = 0$ , existem soluções da Eq. (10) que são expressas através das funções  $\psi_{\lambda,\alpha}(\rho)$  (16). Nós representamos estas soluções como

$$\begin{aligned} \psi_\omega(r) &= [\sigma^3 (\varepsilon - \Pi) + M] u_\omega(r), \\ u_\omega(r) &= c_1 u_{\omega,1}(r) + c_{-1} u_{\omega,-1}(r), \quad u_{\omega,\sigma}(r) = \phi_{\omega,\sigma}(r) v_\sigma. \end{aligned} \quad (26)$$

Usando as relações (191) para as funções  $\psi_{\lambda,\alpha}(\rho)$ , obtemos as seguintes expressões úteis

$$\Pi u_{\omega,1}(r) = i\sqrt{2\gamma} u_{\omega,-1}(r), \quad \Pi u_{\omega,-1}(r) = -i\frac{\omega}{\sqrt{2\gamma}} u_{\omega,1}(r). \quad (27)$$

Os resultados para  $B < 0$  não podem ser obtidos trivialmente dos resultados correspondentes a  $B > 0$ . Nós apresentamos as modificações das fórmulas correspondentes para o caso  $B < 0$  no final dessa Seção.

Usando a Eq. (193) do Apêndice, podemos ver que os espinores  $\psi_\omega(r)$  e  $\psi_{\omega'}(r)$ ,  $\omega \neq \omega'$ , não são ortogonais no caso geral. A completeza de todas as soluções obtidas é também um problema aberto.

Nós convencionalmente tratamos as soluções e o espectro obtidos como os autovetores e autovalores de energia para o hamiltoniano de Dirac  $H$ . Tendo em vista que o campo magnético uniforme confina o movimento de uma partícula carregada e a levando em conta a auto-adjunticidade aparente de  $H$ , nós esperamos estados ligados e um espectro real discreto. A respeito dos subespaços  $l \neq 0$ , nossa esperança foi realizada completamente. Mas no subespaço  $l = 0$  para  $\mu \neq 0$ , existem soluções de quadrado integrável com autovalores complexos. No resto do trabalho, nós chamamos o subespaço  $l = 0$  de subespaço crítico e o subespaço  $l \neq 0$  de subespaço não crítico. Isto significa que existe o problema de auto-adjunticidade para o hamiltoniano de Dirac com o campo magneto-solenoidal, pelo menos no subespaço crítico. Nós resolvemos este problema na Seção 4.

### 3.1.1 O caso $B < 0$ .

Nesta subseção nós apresentamos as modificações das fórmulas correspondentes ao caso  $B < 0$ .

1. O espectro  $\omega$  correspondente às funções  $\phi_{m,l,\sigma}(r)$  é

$$\omega = \begin{cases} 2\gamma(m-l+1-\mu), & l - (1+\sigma)/2 < 0 \\ 2\gamma(m + (1-\sigma)/2), & l - (1+\sigma)/2 \geq 0 \end{cases}, \quad (28)$$

e o espectro  $\omega$  correspondente às funções  $\phi_{m,\sigma}^{ir}(r)$  é

$$\omega = \begin{cases} 2\gamma(m+1-\mu), & \sigma = -1 \\ 2\gamma m, & \sigma = 1 \end{cases}. \quad (29)$$

Estas expressões são as modificações das Eqs. (18) e (19).

2. Nós consideramos os espinores  $u_l(r)$  satisfazendo Eq. (20). No caso  $\omega = 0$ , eles são

$$u_{0,l}(r) = \begin{pmatrix} \phi_{0,l,1}(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l \geq 1; \quad u_0^{II}(r) = \begin{pmatrix} \phi_{0,1}^{ir}(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad l = 0. \quad (30)$$

No caso  $\omega \neq 0$ , eles são

$$\begin{aligned} u_{m,l,\pm}(r) &= \begin{pmatrix} \phi_{m,l,1}(r) \\ \mp i\phi_{m,l,-1}(r) \end{pmatrix}, \quad l \leq -1, \quad \omega = 2\gamma(m-l+1-\mu), \\ u_{m+1,l,\pm}(r) &= \begin{pmatrix} \phi_{m+1,l,1}(r) \\ \pm i\phi_{m,l,-1}(r) \end{pmatrix}, \quad l \geq 1, \quad \omega = 2\gamma(m+1), \\ u_{m+1,\pm}^{II}(r) &= \begin{pmatrix} \phi_{m+1,1}^{ir}(r) \\ \pm i\phi_{m,0,-1}(r) \end{pmatrix}, \quad l = 0, \quad \omega = 2\gamma(m+1), \\ u_{m,\pm}^I(r) &= \begin{pmatrix} \phi_{m,0,1}(r) \\ \mp i\phi_{m,-1}^{ir}(r) \end{pmatrix}, \quad l = 0, \quad \omega = 2\gamma(m+1-\mu). \end{aligned} \quad (31)$$

As expressões (31) são as modificações das Eqs. (21) e (22).

3. No caso  $\omega = 0$ , somente as soluções de energia positiva (partículas) da Eq. (10) são possíveis. Estas soluções coincidem com os espinores  $u$  a menos de uma constante de normalização:

$$+\psi_{0,l}(r) = Nu_{0,l}(r), \quad l \geq 1; \quad +\psi_0^{II}(r) = Nu_0^{II}(r), \quad l = 0. \quad (32)$$

Então, somente as partículas têm nível de energia de repouso. O espectro de energia de antipartículas começa de  $-\varepsilon = -\sqrt{M^2 + 2\gamma}$ .

4. As relações para os espinores irregulares  $u_{\omega,\sigma}(r)$  análogas às relações (27) são

$$\Pi u_{\omega,-1}(r) = i\sqrt{2\gamma}u_{\omega,1}(r), \quad \Pi u_{\omega,1}(r) = -i\frac{\omega}{\sqrt{2\gamma}}u_{\omega,-1}(r). \quad (33)$$

### 3.2 Soluções em 3+1 dimensões

Para levar em conta a simetria do problema sob translações em  $z$ , nós usamos para as matrizes  $\gamma$  as representações seguintes (ver [51]),

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & i\sigma^1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}.$$

Em 3 + 1 dimensões, escolhemos como conjunto completo de operadores que comutam entre si o seguinte ( $\gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ ):

$$H, P^3 = -i\partial_3, J^3 = -i\partial_\varphi + \Sigma^3/2, S^3 = \gamma^5\gamma^3 (M + \gamma^3 P^3) / M. \quad (34)$$

Nós exigimos que a função de onda seja um autovetor destes operadores,

$$H\Psi = \varepsilon\Psi, \quad (35)$$

$$P^3\Psi = p^3\Psi, \quad (36)$$

$$J^3\Psi = j^3\Psi, \quad (37)$$

$$S^3\Psi = s\widetilde{M}/M\Psi. \quad (38)$$

Onde  $\widetilde{M} = \sqrt{M^2 + (p_3)^2}$ ,  $p^3$  é o componente  $z$  do momento, e  $j^3$  é o componente  $z$  do momento angular total. Notamos que os autovalores de energia podem ser positivos,  $\varepsilon = +\varepsilon > 0$ , ou negativos,  $\varepsilon = -\varepsilon < 0$ . Os autovalores  $j^3$  são semi-inteiros, e nós usamos a representação  $j^3 = (l - l_0 - \frac{1}{2})$ , onde  $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Para especificar o grau de liberdade de spin, nós escolhemos o operador  $S^3$ , que é o componente  $z$  do pseudovetor de polarização [52],

$$S^0 = -\frac{1}{2M} (H\gamma^5 + \gamma^5 H), \quad S^i = \frac{1}{2M} (H\Sigma^i + \Sigma^i H), \quad (39)$$

os autovalores de projeção de spin são  $s\widetilde{M}/M$ ,  $s = \pm 1$ .

Então, em 3 + 1 dimensões, nós podemos separar as variáveis de spin e de coordenadas e, portanto, obter a seguinte representação para os espinores  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \exp \{ -i\varepsilon x^0 + ip^3 x^3 \} \Psi_s(x_\perp), \\ \Psi_s(x_\perp) &= N \begin{pmatrix} \left[ 1 + \frac{(p^3 + s\widetilde{M})}{M} \right] \psi_{\varepsilon,s}(x_\perp) \\ \left[ -1 + \frac{(p^3 + s\widetilde{M})}{M} \right] \psi_{\varepsilon,s}(x_\perp) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (40)$$

Onde  $\psi_{\varepsilon,s}(x_\perp)$  são os espinores de dois componentes,  $x_\perp = (0, x^1, x^2, 0)$ , e  $N$  é o fator de normalização.

A equação (35) reduz-se, portanto, à equação

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}_\perp + s\widetilde{M}\sigma^3\right)\psi_{\varepsilon,s}(x_\perp) = \varepsilon\psi_{\varepsilon,s}(x_\perp), \quad P_\perp = (0, P_1, P_2, 0). \quad (41)$$

Representando  $\psi_{\varepsilon,s}(x_\perp)$  na forma

$$\psi_{\varepsilon,s}(x_\perp) = g_l(\varphi)\psi_{l,s}(r), \quad (42)$$

onde  $g_l(\varphi)$  é dada pela Eq. (9), nós obtemos a equação radial

$$h_s\psi_{l,s}(r) = \varepsilon\psi_{l,s}(r), \quad h_s = \Pi + s\widetilde{M}\sigma^3, \quad (43)$$

onde  $h_s$  é o hamiltoniano radial que atua no subespaço com número quântico de spin  $s$ ,  $\Pi$  é dado pela Eq. (11). Notamos que

$$\psi_{\varepsilon,-1}(x_\perp) = \sigma^3\psi_{-\varepsilon,1}(x_\perp). \quad (44)$$

Então, podemos ver que para  $s$  e  $p^3$  fixos, a Eq. (41) é semelhante à Eq. (5) em  $2+1$  dimensões. Portanto, depois da separação da variável angular por (9), o espinor radial  $\psi_{l,+1}(r)$  (42) pode ser obtido do espinor radial  $\psi_l(r)$  (9) pela substituição de  $M$  por  $\widetilde{M}$ . Para o caso particular  $l=0$  isto é verdade também. Neste último caso, o espinor radial  $\psi_{\omega,+1}(r)$  pode ser obtido do espinor radial  $\psi_\omega(r)$  (26).

Usando os resultados do caso em  $2+1$  dimensões, nós concluímos que no subespaço crítico, os autovalores complexos da Eq. (35) realmente existem se  $\mu \neq 0$ . Isto significa que o problema de auto-adjunticidade do hamiltoniano de Dirac em  $2+1$  dimensões mencionado acima é reproduzido em  $3+1$  dimensões.

## 4 Extensões auto-adjuntas

Neste capítulo nós construímos extensões auto-adjuntas do hamiltoniano de Dirac com o campo MS. Nós notamos que, mesmo para o campo de AB puro, não foi simples resolver este problema inerente no caso tanto relativístico quanto não relativístico. A construção dos hamiltonianos auto-adjuntos não relativísticos para o caso do campo AB por meio do método de extensões auto-adjuntas de operadores simétricos foi estudada detalhadamente pela primeira vez em [53], onde o campo de AB regularizado também foi considerado. O problema de auto-adjunticidade e a necessidade do método de extensão auto-adjunta no caso do hamiltoniano de Dirac com o campo de AB puro em  $2 + 1$  dimensões foi reconhecido em [4, 54]. Extensões auto-adjuntas no caso do hamiltoniano de Dirac em  $3 + 1$  dimensões foram construídas em [5].

Em [55] é mostrado que o operador de helicidade  $\Lambda$  para uma partícula na presença de um tubo infinitesimalmente fino de fluxo magnético precisa para a sua determinação completa como um operador auto-adjunto, tanto quanto o hamiltoniano  $H$ , de uma especificação das condições de contorno. As condições devem ser escolhidas em uma família quadri-paramétrica de condições admissíveis. A cada valor dos parâmetros corresponde um operador auto-adjunto com autofunções e autovalores determinados pelas condições de contorno associadas. Para cada escolha da dinâmica  $H$ , é investigado sob quais condições a condição de contorno correspondente é também admissível para a helicidade  $\Lambda$ . Quando isto acontece, e somente quando isto acontece, é possível que os operadores  $H$  e  $\Lambda$  satisfaçam as condições de contorno idênticas. Embora os operadores formalmente comutem antes de especificação das condições de contorno, somente as condições de contorno idênticas garante a comutatividade efetiva. Somente neste caso os operadores têm um conjunto completo das autofunções comuns e  $\Lambda$  é uma quantidade conservada. A situação descrita é satisfeita somente para uma classe especial (mas grande) de condições de contorno. Os resultados de [55] significam que a conservação da helicidade, mesmo impondo restrições na escolha de dinâmica, não resolve o problema de indeterminação da escolha das condições de contorno no espalhamento de Aharonov-Bohm de partículas de Dirac. Os resultados mostram também que é possível escolher as condições de contorno de tal maneira que a helicidade é conservada e a simetria de Aharonov-Bohm (a mudança do fluxo magnético do solenóide AB em número inteiro das quântas do fluxo magnético) é preservada.

Em [56] é discutida a relação entre as extensões auto-adjuntas para uma partícula sem spin e para uma partícula de spin  $1/2$  no campo AB. As extensões auto-adjuntas são também consideradas quando o potencial de Coulomb é adicionado. Algumas questões confusas da partícula de Dirac relativística no campo Aharonov-Bohm são esclarecidas.

Em [57] é considerado o problema da extensão auto-adjunta de operadores de Hamilton para as partículas quânticas carregadas no potencial de Aharonov-Bohm puro. É apresentado um enfoque pragmático ao problema baseado na ortogonalização das soluções radiais para números quânticos diferentes. É discutido um modelo de uma partícula escalar com momento magnético que permite explicar porque a extensão auto-adjunta inclui parâmetros arbitrários e que permite dar uma interpretação física.

A auto-adjuncidade do hamiltoniano de Dirac em um campo de gauge de Aharonov-Bohm de um tubo infinitesimalmente fino de fluxo magnético é estudado em [58], usando as coordenadas esféricas em  $3+1$  dimensões. É mostrado que a parte angular do hamiltoniano de Dirac precisa extensões auto-adjuntas tanto quanto a parte radial. As extensões auto-adjuntas da parte angular são parametrizadas por uma matriz unitária  $2 \times 2$ .

Em [59], todos os hamiltonianos possíveis, que descrevem o efeito Aharonov-Bohm não relativístico são construídos usando a teoria de extensões auto-adjuntas. Em geral os hamiltonianos obtidos não são rotacionalmente invariantes, o que significa que o momento angular não é uma constante de movimento. As autofunções generalizadas e a amplitude de espalhamento são computados. O espectro é descrito, usando uma fórmula explícita para o resolvente.

Em [60] a partícula quântica interagindo com um solenóide fino e um fluxo magnético é descrita por uma família penta-paramétrica de operadores de Hamilton, obtida por meio do método de extensões auto-adjuntas. Um dos parâmetros, o valor do fluxo, corresponde ao efeito Aharonov-Bohm; os outros quatro parâmetros correspondem à força de barreira do potencial singular. O espectro e auto-estados são computados e o problema de espalhamento é resolvido.

Em [61] é mostrado que o hamiltoniano  $H$  e o operador de helicidade  $\Lambda$  da partícula de Dirac, movendo-se em duas dimensões na presença de um tubo infinitesimalmente fino de fluxo magnético, admitem ambos uma família quadri-paramétrica de extensões auto-adjuntas. Cada extensão está em correspondência um-a-um com as condições de contorno que as auto-

funções satisfazem na origem. Embora estes dois operadores comutem antes da especificação das condições de contorno, não é suficiente tomar as mesmas condições de contorno para ambos os operadores para assegurar a conservação de helicidade. Para algumas relações entre os parâmetros de extensões é possível escrever um domínio mais geral onde ambos os operadores  $H$  e  $\Lambda$  são auto-adjuntos, a helicidade é conservada e a simetria de Aharonov-Bohm é preservada também. A continuidade de dinâmica é obtida também. Os resultados significam que nem a conservação da helicidade nem a simetria de Aharonov-Bohm separadamente resolvem o problema da escolha das condições de contorno 'físicas' para este sistema.

O hamiltoniano para partículas relativísticas movendo-se no campo magnético Aharonov-Bohm em duas dimensões é considerado em [62]. É notado que o campo tem singularidade do tipo  $\delta$  na origem, e não é necessário que o hamiltoniano seja essencialmente auto-adjunto. A realização auto-adjunta precisa de uma família uniparamétrica das condições de contorno na origem. Portanto o campo puntiforme é aproximado por um campo suave e o problema da convergência em norma do resolvente é estudado para concluir qual condição de contorno é fisicamente razoável entre as condições de contorno admissíveis. O efeito de perturbações por potenciais escalares é estudado também. O resultado obtido é que a realização auto-adjunta do limite é diferente mesmo para uma perturbação de potenciais escalares pequena em relação aos valores do fluxo magnético. Este resultado muda para os fluxos semi-inteiros. O método é baseado na análise do resolvente de operadores magnéticos de Schrödinger em energia baixa com a ressonância em energia zero, e essa ressonância tem um papel importante do ponto de vista matemático. A atenção é focalizada nos aspectos naturais.

Em [63] é notado que o hamiltoniano de Aharonov-Bohm formal descrevendo a interação de uma partícula carregada com o vórtice magnético tem uma família quadri-paramétrica de extensões auto-adjuntas que se reduz à família biparamétrica se nós demandamos que o hamiltoniano comute com o operador de momento angular. A questão estudada em [63] é qual destas extensões auto-adjuntas podem ser consideradas como um limite de hamiltonianos regularizados de Aharonov-Bohm, isto é hamiltonianos de Pauli nos quais o campo magnético corresponde ao tubo de fluxo de diâmetro não zero. É mostrado que nem todas as extensões auto-adjuntas desta família biparamétrica podem ser obtidas por estas aproximações, mas somente duas sub-

famílias uniparamétricas. Nestes dois casos, a razão giromagnética no hamiltoniano de Pauli aproximado pode ser escolhida de tal maneira que obtemos uma convergência em norma do resolvente à extensão auto-adjunta correspondente.

Nós mencionamos também os trabalhos sobre as condições de contorno para o problema AB que são relacionadas ao problema das extensões auto-adjuntas. Em [64] é mostrado que as formas diferentes de impenetrabilidade quântica levam a consequências físicas diferentes. Este fato deve ser levado em conta na análise de dados experimentais. As condições de impenetrabilidade relativística são consideradas e as seções de choque de Aharonov-Bohm relativísticas correspondentes são obtidas. A possibilidade do efeito AB nas regiões de espaço simplesmente conexas é discutida. Em trabalhos mencionados acima [6, 25, 51], uma condição de contorno auto-adjunta possível foi obtida pela regularização específica da função delta de Dirac, com a condição de continuidade das componentes de espinor de Dirac para o raio finito, e depois a redução do raio a zero.

Em [65] é considerada a questão da escolha das condições de contorno fisicamente corretas, e portanto da dinâmica, para o espalhamento de partículas de spin  $1/2$  por um fio de fluxo magnético. É mostrado que a dinâmica resultante é uma consequência da possibilidade da profundidade da penetração da função de onda dentro do tubo, mesmo que o problema é considerado inicialmente com uma fonte de raio finito  $R$ . A indeterminação da condição de contorno ocorre para um valor do momento angular total, para um dado valor do fluxo. Se a interação de Coulomb da partícula com as fontes é introduzida no problema, a indeterminação mencionada acima aumenta. É mostrado que, para um valor dado do fluxo, existem pelo menos dois valores do momento angular para os quais a indeterminação acontece.

Em [66] a questão do papel das condições de contorno na Mecânica Quântica é considerada para o exemplo de partículas de spin  $1/2$  possuindo momento magnético e situadas no campo Aharonov-Bohm. O formalismo de extensões auto-adjuntas de operadores usado na teoria de potenciais de curto alcance é analisado, e os limites da sua aplicabilidade, no caso de ação do campo magnético externo, são discutidos. As consequências físicas da existência do momento magnético anômalo de partículas para este modelo são investigadas.

Em [67] o problema do campo de Dirac no background da corda do fluxo de Aharonov-Bohm

é estudado. A origem é excluída pela imposição das condições espectrais de contorno no raio finito e depois reduzido a zero. Portanto, o comportamento compatível de autofunções com a auto-adjunticidade do hamiltoniano radial e a invariância sob as translações inteiras do fluxo reduzido são obtidos. A influência do background de corda de fluxo na energia do vácuo de férmions de Dirac massivos confinados à região espacial finita através das condições MIT de contorno é estudada em 2+1 dimensões em [68] e em 3+1 dimensões em [69]. As duas extensões auto-adjuntas admissíveis do hamiltoniano são consideradas e os resultados são comparados.

Não é claro se o problema de auto-adjunticidade para o caso do campo magneto-solenoidal pode ser automaticamente resolvido pela extensão direta dos resultados do campo de AB puro, i.e., pela aplicação das mesmas condições de contorno, porque a presença do campo magnético uniforme essencialmente muda os domínios dos operadores relevantes, particularmente os subespaços de deficiência, e muda o espectro de energia da partícula com spin de contínuo a discreto. Portanto, o caso do campo magneto-solenoidal precisa ser estudado independentemente. Pela analogia com o campo de AB puro, achamos importante também considerar o campo magneto-solenoidal regularizado (nós chamamos o campo magneto-solenoidal regularizado a superposition do campo magnético uniforme e o campo regularizado de AB) e estudar as soluções da equação de Dirac com este campo. Este problema não foi resolvido antes e tem a importância própria, sem relação ao problema de extensão auto-adjunta.

A equação de Pauli com o campo magneto-solenoidal foi recente estudada em [70]. O problema da definição do hamiltoniano no caso particular do campo magneto-solenoidal (ambos os campos têm o mesmo sentido) foi considerado em [71, 72]. Em [71] o caso de partícula escalar é considerado. As condições de contorno mais gerais admissíveis são derivados para um fluxo de Aharonov-Bohm idealizado cruzando o plano na origem no background do campo magnético homogêneo. A técnica padrão baseada nas extensões auto-adjuntas dá uma família quadri-paramétrica das condições de contorno; os dois parâmetros a mais do modelo são o fluxo de Aharonov-Bohm e o campo magnético homogêneo. As condições de contorno generalizadas podem ser consideradas como uma combinação do efeito Aharonov-Bohm e a interação puntiforme. As propriedades espectrais dos hamiltonianos derivados são estudados detalhadamente. Em [72] o problema estacionário de uma partícula de Dirac carregada em 2+1 dimensões na

presença do campo magnético uniforme  $B$  e o tubo singular do fluxo magnético  $\Phi = 2\pi\kappa/e$  é estudado. A invariância rotacional desta configuração mostra que os subespaços do momento angular fixo  $l+1/2$  são invariantes sob a ação do hamiltoniano  $H$ . É mostrado que, para  $l$  diferente da parte inteira de  $\kappa$ , a restrição do  $H$  aos subespaços  $H_l$ , é essencialmente auto-adjunto, enquanto para  $l$  iguais à parte inteira de  $\kappa$ ,  $H_l$  admite a família uniparamétrica das extensões auto-adjuntas. No último caso, as funções do domínio de  $H_l$  são singulares (mas de quadrado integrável) na origem. O comportamento das funções é definido pelo valor do parâmetro  $\gamma$ , o qual identifica as extensões auto-adjuntas. O espectro do hamiltoniano e do seu fecho, como a função dos parâmetros  $\kappa$  e  $\gamma$ , é determinado também.

Nós notamos que a simetria AB é violada para o caso de partícula com spin, que é portanto sensível ao sentido do fluxo do solenóide. Como consequência alguns dos resultados podem depender da orientação mútua, do fluxo do solenóide e do campo magnético uniforme: paralelos ou antiparalelos. Nós estudamos ambas as possibilidades detalhadamente. O problema do caso com spin em  $(3+1)$  dimensões e a relação das extensões auto-adjuntas com os problemas regularizados antes não foram estudados.

Para resolver o problema nós usamos a teoria de von Neumann de extensões auto-adjuntas de operadores simétricos [73]. O procedimento canônico inclui as etapas seguintes: inicialmente, a definição do hamiltoniano de Dirac  $H$  como um operador simétrico, depois o cálculo do seu adjunto  $H^\dagger$  e do seu fecho  $\overline{H}$ , depois a procura dos subespaços de deficiência  $\mathcal{D}^+$  e  $\mathcal{D}^-$  e dos índices de deficiência, e, no final, no caso de igualdade de índices de deficiência, a descrição das isometrias de  $\mathcal{D}^+$  em  $\mathcal{D}^-$ , o que define as extensões auto-adjuntas do  $H$ . Estes passos constituem a teoria de von Neumann que é aplicada no caso geral. Na Seção 4.4, nós demonstramos que em nosso caso particular, este procedimento pode ser significativamente reduzido: é suficiente avaliar  $H^\dagger$  e depois analisar as suas propriedades de simetria

## 4.1 Extensões em 2+1 dimensões

Primeiramente nós estudamos o caso de  $(2+1)$  dimensões. Este caso foi parcialmente considerado em [72]. Nossa consideração é baseada no estudo detalhado das soluções da equação de Dirac. Nós generalizamos os resultados para um sinal arbitrário de  $B$ , o que permite determinar

uma dependência não trivial do espectro com os sinais de  $B$  e  $\Phi$ . Os resultados obtidos são estendidos ao caso de  $(3 + 1)$  dimensões. Do ponto de vista rigorosamente matemático, nossa exposição é qualitativa, alguns detalhes técnicos importantes serão apresentados na Seção 4.4.

O problema é definir o hamiltoniano (1) como um operador auto-adjunto no espaço de Hilbert de 2-espinores  $\psi(x_\perp)$  de quadrado integrável. Pela separação das variáveis, Eq. (9), o problema é reduzido ao problema correspondente para o hamiltoniano radial  $h$  (10), (11) para cada  $l = 0, \pm 1, \dots$  no espaço de Hilbert de 2-espinores  $\psi(r)$  de quadrado integrável na semi-reta com a medida  $rdr$ . Nós começamos com a escolha do domínio inicial  $\mathcal{D}(h)$  do operador  $h$ . Como a fonte do problema em consideração é a singularidade do potencial AB na origem  $r = 0$ , nós tentamos primeiramente evitar as dificuldades associadas a esta singularidade. Portanto, seja  $\mathcal{D}(h)$  o (sub)espaço de 2-espinores  $\psi(r)$  absolutamente contínuos que se anulam suficiente rápido com  $r \rightarrow 0$ ; claro que  $h\psi(r)$  deve ser de quadrado integrável junto com  $\psi(r)$ . É simples verificar que o  $h$  inicial é simétrico pela integração por partes. O seu adjunto  $h^\dagger$  é dado pela mesma expressão (10), (11), mas é definido no domínio  $\mathcal{D}(h^\dagger) \supset \mathcal{D}(h)$  de 2-espinores absolutamente contínuos, os quais não necessariamente se anulam quando  $r \rightarrow 0$  no subespaço crítico  $l = 0$  para  $\mu \neq 0$ . O seu fecho  $\bar{h}$  é definido no domínio  $\mathcal{D}(\bar{h})$  de 2-espinores absolutamente contínuos que se anulam quando  $r \rightarrow 0$ .

A próxima etapa é encontrar os subespaços de deficiência  $\mathcal{D}^+$  e  $\mathcal{D}^-$ ,  $\mathcal{D}^\pm = \text{Ker}(h^\dagger \mp iM)$  (onde  $M$  é introduzida por razões dimensionais), e os índices de deficiência  $n_\pm(h) = \dim(\mathcal{D}^\pm)$ , i.e. encontrar o número de soluções linearmente independentes de quadrado integrável das equações

$$h^\dagger \psi^\pm(r) = \pm iM \psi^\pm(r), \quad h^\dagger = \Pi^\dagger + \sigma^3 M, \quad (45)$$

$$\Pi^\dagger = -i \left\{ \partial_r + \frac{\sigma^3}{r} \left[ \mu + l - \frac{1}{2} (1 - \sigma^3) + A(r) \right] \right\} \sigma^1. \quad (46)$$

Nos subespaços não críticos  $l \neq 0$ , não existem tais soluções. No subespaço crítico  $l = 0$ , se  $\mu \neq 0$ , existe somente uma solução para  $\psi^+(r)$  e  $\psi^-(r)$ ,

$$\psi^\pm(r) = N \begin{pmatrix} \phi_1(r) \\ \pm e^{\pm i\pi/4} \frac{\sqrt{\gamma}}{M} \phi_{-1}(r) \end{pmatrix}, \quad B > 0, \quad (47)$$

$$\psi^\pm(r) = N \begin{pmatrix} \phi_1(r) \\ \pm e^{\pm i\pi/4} \frac{M}{\sqrt{\gamma}} \phi_{-1}(r) \end{pmatrix}, \quad B < 0, \quad (48)$$

onde

$$\phi_\sigma(r) = \psi_{\lambda,\alpha}(\rho), \quad 2\lambda = -2M^2/\gamma - \xi(\mu - (1 - \sigma)/2), \quad \sigma = \pm 1,$$

confirme (16), e  $N$  é o fator de normalização que normaliza as funções  $\psi^\pm(r)$  à unidade. Se  $\mu = 0$ , não existem tais soluções. Isto significa que nos subespaços não críticos, os índices de deficiência são  $(0, 0)$ , e no subespaço crítico, os índices de deficiência são  $(1, 1)$  a menos que  $\mu = 0$ ; se  $\mu = 0$ , os índices de deficiência são  $(0, 0)$ . Portanto, nos subespaços não críticos e, se  $\mu = 0$ , no subespaço crítico também, o hamiltoniano radial  $h$  é essencialmente auto-adjunto, i.e., a sua extensão auto-adjunta única é o seu fecho  $\bar{h} = h^\dagger$ . Isto garante a completeza das soluções correspondentes obtidas em Seção 3.1. No subespaço crítico, o hamiltoniano radial com  $\mu \neq 0$  possui uma família uniparamétrica  $\{h^\Omega\}$  de extensões auto-adjuntas, que é homeomorfica ao grupo  $U(1)$ . Cada membro  $h^\Omega$  desta família é definido pela isometria  $\psi^+(r) \rightarrow e^{i\Omega}\psi^-(r)$  de  $\mathcal{D}^+$  a  $\mathcal{D}^-$ ,  $0 \leq \Omega < 2\pi$ . O domínio de  $h^\Omega$  é

$$\mathcal{D}(h^\Omega) = \{\chi(r) = \psi(r) + c[\psi^+(r) + e^{i\Omega}\psi^-(r)] : \psi(r) \in \mathcal{D}(\bar{h})\}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (49)$$

Notamos que  $\mathcal{D}(h^\Omega)$  é completamente definido pelas condições de contorno asintóticas nos 2-espinores  $\chi(r) = (\chi^1(r), \chi^2(r))$  quando  $r \rightarrow 0$ . No caso  $c \neq 0$ , o comportamento de  $\chi(r)$  quando  $r \rightarrow 0$  é definido pelo comportamento singular de  $\psi^+(r)$  e de  $\psi^-(r)$  nas proximidades da origem, pois  $\psi(r) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ . Usando o comportamento (192) da função  $\psi_{\lambda,\alpha}(\rho)$  para  $\rho$  pequeno, nós obtemos

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\chi^1(r) (Mr)^{1-\mu}}{\chi^2(r) (Mr)^\mu} = \begin{cases} \frac{i2^{1-\mu}\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu+M^2/\gamma)}{(\tan \frac{\Omega}{2}-1)\Gamma(\mu)\Gamma(1+M^2/\gamma)} \left(\frac{M^2}{\gamma}\right)^{1-\mu}, & B > 0 \\ \frac{i2^{1-\mu}\Gamma(1-\mu)\Gamma(1+M^2/\gamma)}{(\tan \frac{\Omega}{2}-1)\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu+M^2/\gamma)} \left(\frac{M^2}{\gamma}\right)^{-\mu}, & B < 0 \end{cases} \quad (50)$$

no caso  $c \neq 0$ . (Claro que  $c$  pode ser igual a zero; neste caso  $\chi(r) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ .) Estas alternativas são as condições de contorno asintóticas que especificam o domínio  $\mathcal{D}(h^\Omega)$  unicamente e, portanto, a extensão auto-adjunta  $h^\Omega$ . As condições de contorno asintóticas auto-adjuntas podem ser unificadas na fórmula única

$$\chi(r) = c \begin{pmatrix} i\Lambda (Mr)^{\mu-1} \\ (Mr)^{-\mu} \end{pmatrix} + \epsilon(r), \quad r \rightarrow 0, \quad (51)$$

onde  $i\Lambda$  é dado pelo lado direito de (50),  $-\infty \leq \Lambda \leq \infty$ ,  $\epsilon(r) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ , e  $c$  é uma constante arbitrária. Nós podemos verificar que no limite  $\gamma \rightarrow 0$ , os lados direitos de (50) coincidem com as expressões correspondentes obtidas em [4] para o caso do campo de AB puro. Na verdade, a família das condições de contorno asintóticas auto-adjuntas é a mesma do caso do campo de AB puro, e é independente de  $B$ . Estas condições são definidas pelo comportamento singular do potencial AB na origem.

Para as nossos objetivos é conveniente passar da parametrização por  $\Omega$  à parametrização pelo ângulo  $\Theta$ ,  $0 \leq \Theta < 2\pi$ , que obedece

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\chi^1(r) (Mr)^{1-\mu}}{\chi^2(r) (Mr)^\mu} = i \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2} \right) \quad (52)$$

se  $c \neq 0$ .

Portanto, as soluções (26) obtidas em Seção 3.1 devem ser submetidas à condição asintótica (52) quando  $r \rightarrow 0$ , que garante a ortogonalidade e a completeza das soluções correspondentes. Usando (27), (33), e (192), nós encontramos

$$\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2} \right) = \begin{cases} -\frac{(\epsilon+M)}{M} \frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu-\omega/2\gamma)}{2^\mu \Gamma(\mu)\Gamma(1-\omega/2\gamma)} \left( \frac{M^2}{\gamma} \right)^{1-\mu}, & B > 0 \\ \frac{M}{(\epsilon-M)} \frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(1-\omega/2\gamma)}{2^{\mu-1} \Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu-\omega/2\gamma)} \left( \frac{M^2}{\gamma} \right)^{-\mu}, & B < 0. \end{cases} \quad (53)$$

## 4.2 Extensões em 3+1 dimensões

Agora nós passamos ao caso de  $(3+1)$  dimensões. O operador de helicidade  $S_h = \Sigma \mathbf{P}/|\mathbf{P}|$  é geralmente usado como o operador de spin. Ele é relacionado à componente zero do pseudovetor de polarização (39) por  $S_h = S^0 M/|\mathbf{P}|$ . As extensões para quais o operador  $S^0$  comuta com o hamiltoniano, foram construídas para o caso particular  $p^3 = 0$  em [55, 61]. Entretanto, o conjunto de tais extensões não exaure todas as possíveis extensões do hamiltoniano em  $2+1$  dimensões. A nossa escolha do operador  $S^3$  como operador de spin permite separar as variáveis de spin no começo da consideração e ficar com o problema de extensão somente para o hamiltoniano radial. Portanto, nós podemos aplicar eficiente nossa experiência de  $2+1$  dimensões para o caso de  $(3+1)$  dimensões.

No caso de  $(3+1)$  dimensões, depois da separação da variável  $z$ , o hamiltoniano  $H$  deve ser definido como o operador auto-adjunto no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de 4-espinores da forma (40). Este espaço de Hilbert pode ser representado como a soma direta de dois subespaços

ortogonais marcados pelo número quântico de spin  $s$ :  $\mathcal{H} = \{\Psi_{+1}\} \oplus \{\Psi_{-1}\}$ . Estes subespaços são invariantes com respeito a  $H$ , e por conseguinte, o hamiltoniano (1) pode ser considerado independente em cada um dos subespaços. O uso das Eqs. (41) e (9) permite reduzir o problema aos hamiltonianos radiais  $h_s$  (43) atuando nos subespaços de 2-espinores com número quântico de spin  $s = \pm 1$  e número quântico orbital  $l = 0, \pm 1, \dots$  fixos. O problema do hamiltoniano radial  $h_s$  no caso de  $(3+1)$  dimensões é absolutamente semelhante ao problema do hamiltoniano radial  $h$  no caso de  $(2+1)$  dimensões e pode ser resolvido por meio do mesmo método de von Neumann. O procedimento de definição de  $h_s$  como operador auto-adjunto literalmente repete o procedimento para  $h$  da seção anterior, e portanto lembramos somente os passos principais.

Primeiramente nós definimos o hamiltoniano radial  $h_s$  como um operador simétrico escolhendo para o domínio inicial  $\mathcal{D}(h_s)$  o espaço de 2-espinores absolutamente contínuos que se anulam na origem. O seu adjunto  $h_s^\dagger$  e o seu fecho  $\overline{h_s}$  são descritos nos mesmos termos de  $h^\dagger$  e  $\overline{h}$ , respectivamente, da subseção anterior. Agora nós aplicamos a teoria de von Neumann em cada um dos subespaços. Para achar os subespaços de deficiência e índices de deficiência dos operadores  $h_s$ , nós precisamos resolver as equações

$$h_s^\dagger \psi_s^\pm(r) = \pm is \widetilde{M} \psi_s^\pm(r), \quad h_s^\dagger = \Pi^\dagger + s \widetilde{M} \sigma^3, \quad s = \pm 1, \quad (54)$$

onde  $\Pi^\dagger$  é dado em (46). Estas equações são cópias da Eq. (45). Usando as Eqs. (47), (48) e (44), nós achamos que para  $l = 0$  e  $\mu \neq 0$ , as soluções são

$$\psi_s^\pm(r) = N \begin{pmatrix} \phi_{s,+1}(r) \\ \pm s e^{\pm i\pi/4} \frac{\sqrt{\gamma}}{\widetilde{M}} \phi_{s,-1}(r) \end{pmatrix}, \quad B > 0, \quad (55)$$

$$\psi_s^\pm(r) = N \begin{pmatrix} \phi_{s,+1}(r) \\ \pm s e^{\pm i\pi/4} \frac{\widetilde{M}}{\sqrt{\gamma}} \phi_{s,-1}(r) \end{pmatrix}, \quad B < 0, \quad (56)$$

$$\phi_{s,\sigma}(r) = \psi_{\lambda,\alpha}(\rho), \quad \alpha = \mu - (1 + \sigma)/2,$$

$$2\lambda = -2\widetilde{M}^2/\gamma - \xi(\mu - (1 - \sigma)/2), \quad \sigma = \pm 1,$$

e para  $l \neq 0$  e para  $l = 0$  e  $\mu = 0$ , não existem soluções de quadrado integrável. Isto significa que para cada  $s = \pm 1$ , os índices de deficiências nos subespaços não críticos  $l \neq 0$  são  $(0, 0)$ , e no subespaço crítico  $l = 0$ , os índices de deficiência são  $(1, 1)$  a menos que  $\mu = 0$ ; se  $\mu = 0$  eles são  $(0, 0)$ . Isto significa que nos subespaços não críticos e, se  $\mu = 0$ , no subespaço crítico também, o

hamiltoniano radial  $h_s$  é essencialmente auto-adjunto, i.e., a sua extensão auto-adjunta única é o seu fecho  $\bar{h} = h^\dagger$ . No subespaço crítico, se  $\mu \neq 0$ , existe uma família uniparamétrica  $\{h_s^{\Omega_s}\}$  de extensões auto-adjuntas do hamiltoniano radial  $h_s$ , marcada pelo parâmetro  $\Omega_s$ ,  $0 \leq \Omega_s < 2\pi$ . O domínio de  $h_s^{\Omega_s}$  é

$$\mathcal{D}(h_s^{\Omega_s}) = \{\chi_s(r) = \psi_s(r) + c[\psi_s^+(r) + e^{i\Omega_s}\psi_s^-(r)] : \psi_s(r) \in \mathcal{D}(\bar{h}_s)\}, c \in \mathbb{C}. \quad (57)$$

Semelhante ao caso de  $(2+1)$  dimensões,  $h_s^{\Omega_s}$  é especificado pelas condições de contorno assintóticas auto-adjuntas nos 2-espinores  $\chi(r) = (\chi^1(r), \chi^2(r))$  quando  $r \rightarrow 0$ . Usando a parametrização pelo ângulo  $\Theta_s$  semelhante à (52), estas condições de contorno são

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\chi_s^1(r) (\tilde{M}r)^{1-\mu}}{\chi_s^2(r) (\tilde{M}r)^\mu} = s i \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta_s}{2}\right), s = \pm 1 \quad (58)$$

se  $c \neq 0$  e  $\chi_s(r) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$  se  $c = 0$ , que pode ser unificadas na fórmula

$$\chi_s(r) = c_s \begin{pmatrix} i\Lambda_s (\tilde{M}r)^{\mu-1} \\ (\tilde{M}r)^{-\mu} \end{pmatrix} + \epsilon_s(r), r \rightarrow 0,$$

onde  $i\Lambda_s$  é dado pelo lado direito de (58),  $-\infty \leq \Lambda_s \leq \infty$ ,  $\epsilon(r) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ , e  $c_s$  são constantes arbitrárias.

Então, em cada subespaço  $s = \pm 1$  as soluções  $\psi_{\omega,s}(r)$  no subespaço crítico  $l = 0$  devem ser submetidas à condição (58).

As observações sobre a ortogonalidade e a completeza das soluções correspondentes são semelhantes às da Seção 4.1.

O resultado final é que em  $3+1$  dimensões existe uma família biparamétrica de hamiltonianos auto-adjuntos de Dirac. Esta família é a variedade  $U(1) \times U(1)$ . Nós acentuamos que isto é verdade somente quando  $S^3$  é conservado. Se nós não demandamos a conservação de  $S^3$ , segue da consideração acima que os índices de deficiência no subespaço crítico são  $(2, 2)$  a menos que  $\mu = 0$  (por exemplo, qualquer vetor satisfazendo Eqs. (35)-(37) pode ser construído usando dois vetores ortogonais determinados como a superposição de  $\Psi_{+1}$  e  $\Psi_{-1}$ ). Por conseguinte, a variedade dos hamiltonianos de Dirac auto-adjuntos é o grupo  $U(2)$  e é quadri-paramétrico. Somente para a subvariedade  $U(1) \times U(1) \subset U(2)$ , o hamiltoniano  $H$  e o operador  $S^3$  possuem um conjunto comum de autofunções.

### 4.3 Espectros das extensões auto-adjuntas

Agora nós estudamos os espectros das extensões auto-adjuntas  $h^\Omega$ . Para achá-los, nós precisamos resolver as equações transcendentais (53) com respeito a  $\omega$  considerando os dois ramos de  $\varepsilon$ , um para partículas e outro para antipartículas,  $\pm\varepsilon = \pm\sqrt{M^2 + \omega}$ . Introduzindo a notação

$$\begin{aligned}\omega &= 2\gamma x, \quad x = {}_\varsigma x = (\varsigma\varepsilon^2 - M^2)/2\gamma, \quad Q(x) = \frac{\varepsilon}{M} + 1, \quad \varsigma = \pm, \\ \eta &= \frac{2^\mu \Gamma(\mu)}{\Gamma(1-\mu)} \tilde{\eta}(\mu), \quad \tilde{\eta}(\mu) = -\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right) \left(\frac{\gamma}{M^2}\right)^{1-\mu},\end{aligned}\quad (59)$$

para  $B > 0$ , nós podemos reescrever a Eq. (53) como

$$Q({}_\varsigma x) \frac{\Gamma(\mu - {}_\varsigma x)}{\Gamma(1 - {}_\varsigma x)} = \eta. \quad (60)$$

Para  $\omega$  correspondente a  $B > 0$ , nós podemos obter  $\omega$  para  $B < 0$  usando as substituições

$$\varsigma \rightarrow -\varsigma, \quad \tilde{\eta}(\mu) \rightarrow 1/\tilde{\eta}(\mu), \quad \mu \rightarrow 1 - \mu.$$

Basta, portanto, considerar o caso  $B > 0$ .

As soluções possíveis  $x = x(\eta)$  da equação (60) são funções do parâmetro  $\eta$  (i.e., de  $\mu$ ,  $\gamma/M^2$ , e de  $\Theta$ ) e são marcadas por  $m = 0, 1, \dots$ . Nós achamos as seguintes representações assintóticas para estas soluções quando  $|\eta| \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}x_m(\eta) &= m + \Delta x_m, \quad \Delta x_m = \frac{\sin(\pi\mu) \Gamma(m+1-\mu)}{\pi \Gamma(m) Q(m)} \eta, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \\ -x_0(\eta) &= -\frac{\eta M^2}{\gamma \Gamma(\mu)}.\end{aligned}\quad (61)$$

Todos os  $x_m(0)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  são positivos e inteiros. A representação assintótica de  $+x_0(\eta)$  quando  $|\eta| \rightarrow 0$  é discutida abaixo. A função  $+x_0(\eta)$  se anula no ponto  $\eta = 2\Gamma(\mu)$ , e na vizinhança deste ponto ela tem a forma

$$+x_0(\eta) = \frac{\Gamma(\mu) - \eta/2}{\Gamma(\mu) (\psi(\mu) - \psi(1))}, \quad (62)$$

onde  $\psi(x)$  é a derivada logarítmica da função gamma  $\Gamma(x)$ , e  $-\psi(1) \simeq 0.577$  é a constante de Euler-Mascheroni [74]. Como  $|\eta| \rightarrow \infty$ , nós achamos as seguintes representações assintóticas:

$$\begin{aligned}{}_\varsigma x_m(\varsigma\eta) &= m + \mu + \Delta x_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad \eta \rightarrow \infty, \\ {}_\varsigma x_m(\varsigma\eta) &= m - 1 + \mu + \Delta x_m, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad \eta \rightarrow -\infty, \\ \Delta x_m &= -\frac{\sin(\pi\mu) \Gamma(m+\mu) Q(m+\mu)}{\pi \Gamma(m+1) \eta}.\end{aligned}\quad (63)$$

Estas aproximações são aplicáveis somente para  $|\Delta x_m| \ll \mu$  e  $|x_0(\eta)| \ll \mu$ .

Segundo [73] (ver corolário 1 do teorema 8.19), se  $T_1$  e  $T_2$  são duas extensões auto-adjuntas do mesmo operador simétrico com índices de deficiência  $(d, d)$  finitos e iguais, então qualquer intervalo  $(a, b) \subset \mathcal{R}$  que não cruza o espectro de  $T_1$  contém somente auto-valores isolados do operador  $T_2$  com a multiplicidade total de no máximo  $d$ . Por exemplo, nós escolhemos a extensão  $h^\Omega$  com  $\Theta = \pi/2$  cujo auto-valores são  $+\varepsilon = M\sqrt{1 + 2\gamma_+ x_0(\infty)/M^2}$  e  $\pm\varepsilon = \pm M\sqrt{1 + 2\gamma_\pm x_m(\pm\infty)/M^2}$ ,  $m \geq 1$ . O teorema mencionado acima significa que se  $(a, b)$  é um intervalo aberto, onde  $a$  e  $b$  são os dois auto-valores sucessivos de  $h^\Omega$  com  $\Theta = \pi/2$ , ou se  $\pm\varepsilon = 0$ , então qualquer extensão auto-adjunta  $h^\Omega$  com  $\Theta \neq \pi/2$  possui no máximo um auto-valor em  $(a, b)$ . Segundo [74] (ver teorema 3 da Seção 105 do Capítulo VIII), para qualquer  $\varepsilon \in (a, b)$ , existe uma extensão auto-adjunta  $h^\Omega$  com o auto-valor  $\varepsilon$ . Segue de (60) e (63) que nas faixas  $(m - 1 + \mu \leq \pm x_m(\eta) \leq m + \mu, m \geq 1)$  e  $(-M^2/2\gamma \leq x_0(\eta) \leq \mu)$  as funções  $\pm x(\eta) = (\pm\varepsilon^2 - M^2)/2\gamma$  são unívocas e contínuas. Esta observação está em concordância completa com os teoremas gerais mencionados acima. As funções  $\pm x_m(\eta)$  foram achadas numericamente no campo fraco,  $\gamma/M^2 \ll 1$ , para os primeiros valores de  $m$ . Os gráficos destas funções (para  $\mu = 0.8$ ) são apresentadas nas Figuras 1 e 2.

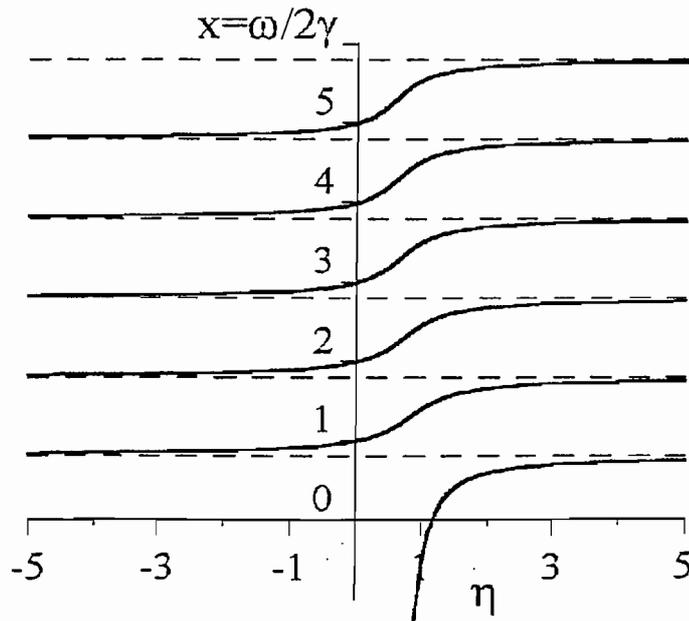


Figura 1: Dependência dos níveis de energia de partícula mais baixos em relação ao parâmetro

$$\eta_+ = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{\gamma}{2M^2}\right)^{1-\mu} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\Theta}{2}\right)$$

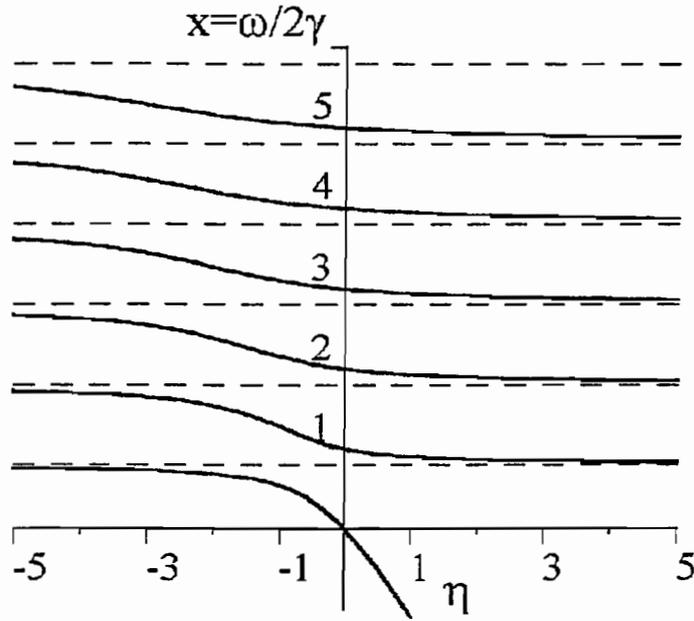


Figura 2: Dependência dos níveis de energia de antipartícula mais baixos em relação ao parâmetro  $\eta_- = \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{\gamma}{2M^2}\right)^{-\mu} \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$

Podemos ver que  $\delta x_m = x_{m+1}(\eta) - x_m(\eta) \rightarrow 1$  quando  $m$  cresce. Da equação (60) segue que

$$\delta x_m - 1 = \pi^{-1} \left\{ \cot(\pi x_m) - \cot[\pi(x_m - \mu)] \right\}^{-1} \left( \frac{1-\mu}{x_m} - \delta Q \right), \quad m \gg 1, \quad (64)$$

onde  $\delta Q = \frac{d}{dx} \ln Q(x) \Big|_{x=x_m} \leq 1/x_m$ . A curva  $x_5(\eta)$  dá uma idéia sobre o comportamento das funções  $x_m(\eta)$  para  $m$  grande.

Abaixo, nós discutimos alguns casos limites.

Primeiramente consideramos campos  $B$  fracos para quais  $\gamma/M^2 \ll 1$  e energias de elétron não relativísticas,  $x_m(\eta) \gamma/M^2 \ll 1$ . Vemos que as funções  $\pm x(\eta)$  mudam significativamente somente na vizinhança de  $\eta = 0$ . Fora da vizinhança de  $\eta = 0$ , as funções  $\pm x(\eta)$  tomam valores próximos aos valores assintóticos correspondentes, que são dados por (63).

No caso ultrarelativístico,  $x_m(\eta) \gamma/M^2 \gg 1$ , o comportamento de  $x_m(\eta)$  qualitativamente depende de  $\mu$ . Podemos diferenciar três casos:  $0 < \mu < 1/2$ ,  $\mu > 1/2$ , e  $\mu = 1/2$ . No caso  $0 < \mu < 1/2$ , o intervalo nas proximidades de  $\eta = 0$ , onde as funções variam significativamente, se estreita com  $m$  crescente. No caso  $\mu > 1/2$ , este intervalo expande com  $m$  crescente. Para

$\mu = 1/2$  e  $-\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{4} + \frac{\Theta}{2\pi}\right) < \frac{1}{2}$ , nós achamos a representação asintótica

$${}_s x_m(\eta) = m + \varsigma \left( \frac{1}{4} + \frac{\Theta}{2\pi} \right), \quad m \gg 1. \quad (65)$$

Nós vemos que  $\pm x_0(\eta)$  negativos existem somente para  $\eta > 0$ . O que significa que no problema em consideração, existe somente um estado de partícula e somente um estado de antipartícula com energias  $|\varepsilon| < M$  para  $\pi/2 < \Theta < 3\pi/2$ . A mesma situação foi observada no caso do campo de AB puro [4]. O  $x_0(\eta)$  negativo mínimo admissível é definido pela condição  $\varepsilon = 0$ . Para os campos  $B$  fortes, para as quais  $\gamma/M^2 \sim 1$ , a quantidade  $x_0(\eta)$  é próxima de zero. Por exemplo, seja  $\Theta_0$  correspondente à extensão que admite  $\varepsilon = 0$ . O valor de  $\Theta_0$  é definido por

$$\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\Theta_0}{2} \right) = - \frac{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\mu + M^2/2\gamma)}{2^\mu \Gamma(\mu)\Gamma(1 + M^2/2\gamma)} \left( \frac{M^2}{\gamma} \right)^{1-\mu}. \quad (66)$$

Nos campos fracos,  $\gamma/M^2 \ll 1$ ,  $x_0(\eta)$  toma valores absolutos grandes, e o ângulo  $\Theta_0$  é definido por

$$\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\Theta_0}{2} \right) = - \frac{\Gamma(1-\mu)}{2^{2\mu-1}\Gamma(\mu)} \quad (67)$$

e é independente do campo magnético. De (66) segue que nos campos  $B$  superfortes, para os quais  $\gamma/M^2 \gg 1$ , o ângulo  $\Theta_0$  é também independente do campo magnético.

Nos campos magnéticos fracos,  $\gamma/M^2 \ll 1$ , e para as energias não relativísticas,  $x_0\gamma/M^2 \ll 1$ , nós obtemos as relações

$${}_+ x_0(\eta) = - (2/\eta)^{1/(1-\mu)}, \quad (68)$$

$${}_ - x_0(\eta) = - (\eta M^2/\gamma)^{1/\mu} \quad (69)$$

que são válidas se  $\eta$  de (68) é pequeno e  $\eta M^2/\gamma \gg 1$  de (69).

Agora nós consideramos o caso particular  $\Theta = -\pi/2$ . De (53) segue que para  $B > 0$ , existe  ${}_ - \varepsilon = -M$ . As energias  $|\varepsilon| > M$  são definidas pelos polos de  $\Gamma(1-x)$  ou  $\Gamma(1-\mu-x)$  para  $B > 0$  ou  $B < 0$ , respectivamente. O espectro  $\varepsilon$  coincide com o espectro definido pelas Eqs. (31) e (23) para  $\psi^I$ . Além do mais, usando a relação (189), podemos ver que os espinores  $\psi_\omega(r)$  coincidem com  $\psi^I$  até uma constante de normalização,

$$\psi_\omega(r) \propto \psi^I(r) \text{ for } \Theta = -\pi/2. \quad (70)$$

No caso  $\Theta = \pi/2$ , nós temos o quadro seguinte: de (53) segue que para  $B < 0$  existe  $+\varepsilon = M$ . As energias  $|\varepsilon| > M$  são definidas pelos polos de  $\Gamma(\mu - x)$  ou  $\Gamma(1 - x)$  para  $B > 0$  ou  $B < 0$ , respectivamente. O espectro  $\varepsilon$  coincide com o espectro dado nas Eqs. (31) e (23) para  $\psi^{II}$ . De (189) segue que os espinores  $\psi_\omega(r)$  coincidem com  $\psi^{II}$  até uma constante de normalização,

$$\psi_\omega(r) \propto \psi^{II}(r) \text{ for } \Theta = \pi/2. \quad (71)$$

Usando os resultados para  $B < 0$ , podemos concluir que existe uma assimetria do espectro para as partículas com spin no campo magneto-solenoidal. Existe uma relação entre a anomalia chiral em três dimensões e os modos zero de férmion no campo magnético uniforme [77] (para revisão, ver [78, 79]). Nós vemos que o efeito existe também na presença do potencial AB.

Esta assimetria do espectro é conhecida na QED em 2+1 com campo magnético uniforme. No campo magnético uniforme, os estados com  $\omega = 0$  para  $l \neq 0$  são observados se  $\text{sgn}l = -\text{sgn}B$  (para uma antipartícula se  $B > 0$  e para uma partícula se  $B < 0$ ). O espectro muda especularmente quando muda o sinal do campo magnético. Nós vemos que para  $l \neq 0$  as propriedades do espectro no campo magneto-solenoidal são semelhantes às propriedades do espectro no campo magnético uniforme. A presença do potencial AB é especialmente essencial para os estados com  $l = 0$  onde a partícula penetra no solenóide.

Os espectros em 3 + 1 dimensões podem ser obtidos dos resultados de 2 + 1 dimensões. Nós usamos o fato de que as soluções  $\psi_{\varepsilon,1}(x_\perp)$  em 3 + 1 dimensões são obtidas das soluções  $\psi_\varepsilon^{(1)}(x_\perp)$  em 2 + 1 dimensões. Portanto, os espectros em 3 + 1 dimensões são obtidos dos resultados de 2 + 1 dimensões com a substituição de  $M$  por  $\widetilde{M}$  e usando a relação (44). Como uma consequência, nós obtemos uma interpretação adicional das Figuras 1 e 2. Particularmente, a Figura 1 mostra os níveis mais baixos de energia das partículas de spin  $s = 1$ , e a Figura 2 mostra os níveis mais baixos de energia das partículas de spin  $s = -1$ .

#### 4.4 O método reduzido de extensão auto-adjunta

Neste capítulo nós mostramos que o método geral de extensão auto-adjunta pode ser significativamente reduzido para o hamiltoniano radial  $h$  dado pelas Eqs. (10), (11).

Nós lembramos que o problema é definir o operador diferencial da matriz formal (10), (11) como um operador auto-adjunto no espaço de Hilbert de 2-espinores  $\chi(r)$  de quadrado integrável na semi-reta  $R_+ = \{r \geq 0\}$  com a medida  $rdr$ . É conveniente passar à medida padrão  $dr$  no  $R_+$  usando a substituição  $\chi(r) = r^{-1/2}\Psi(r)$ . O hamiltoniano radial portanto fica (nós não mudamos a notação para o hamiltoniano  $h$  transformado)

$$h = \Pi + \sigma^3 M, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu,B} \\ a_{-\nu,-B} & 0 \end{pmatrix}, \quad (72)$$

onde  $\nu = \mu + l - 1/2$  e o operador  $a_{\nu,B}: L_2 \rightarrow L_2$  é

$$a_{\nu,B} = -i \left( \partial_r + \frac{\nu}{r} + \frac{eBr}{2} \right) = -i \sigma_{-\nu,-B} \partial_r \sigma_{\nu,B} \quad (73)$$

com

$$\sigma_{\nu,B} = r^\nu \exp\left(\frac{eBr^2}{4}\right), \quad \sigma_{-\nu,-B} \sigma_{\nu,B} = 1.$$

Este  $h$  (72) deve ser definido como um operador auto-adjunto no espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = L_2(R_+) \oplus L_2(R_+)$$

de 2-espinores

$$\Psi(r) = \begin{pmatrix} \psi^1(r) \\ \psi^2(r) \end{pmatrix}$$

de quadrado integrável em  $R_+$ .

Primeiramente nós notamos que  $\sigma^3 M$  é um operador auto-adjunto limitado em  $\mathcal{H}$ . Portanto, o problema é equivalente ao problema da definição do operador aparentemente auto-adjunto<sup>3</sup>  $\Pi$  (72) como um operador realmente auto-adjunto em  $\mathcal{H}$ : nós devemos garantir a igualdade  $\Pi = \Pi^\dagger$  pela escolha apropriada de domínio

$$\mathcal{D}(\Pi) = \mathcal{D}(a_{-\nu,-B}) \oplus \mathcal{D}(a_{\nu,B}) \subset \mathcal{H},$$

---

<sup>3</sup>Formalmente,  $a_{\nu,B}^\dagger = a_{-\nu,-B}$ , portanto, formalmente,

$$\Pi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & a_{-\nu,-B}^\dagger \\ a_{\nu,B}^\dagger & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\nu,B} \\ a_{-\nu,-B} & 0 \end{pmatrix} = \Pi.$$

para qualquer  $\nu$  e  $B$ . Então, o problema é reduzido ao problema da definição de  $a_{\nu,B}$  (73) como um operador no  $L_2(R_+)$ , i.e., a definição  $\mathcal{D}(a_{\nu,B}) \subset L_2(R_+)$ , junto com  $a_{-\nu,-B}$ .

Canonicamente nós começamos pela definição de  $\Pi$  como um operador simétrico no  $\mathcal{H}$  escolhendo o domínio inicial  $\mathcal{D}(\Pi) = D \oplus D$ , tal que ambos  $a_{\nu,B}$  e  $a_{-\nu,-B}$  são inicialmente definidos no  $D \subset L_2(R_+)$ , onde  $D$  é o espaço linear de funções  $C^\infty$  com suporte compacto. Nós notamos que  $\Pi$  é densamente definido, pois  $\overline{D} \subset L_2(R_+)$ , e simétrico,  $\Pi \subseteq \Pi^\dagger$ , que é verificado de maneira simples pela integração por partes.

O próximo passo é o cálculo do seu adjunto  $\Pi^\dagger$ . É evidente que

$$\Pi^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & a_{-\nu,-B}^\dagger \\ a_{\nu,B}^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\Pi^\dagger) = \mathcal{D}(a_{\nu,B}^\dagger) \oplus \mathcal{D}(a_{-\nu,-B}^\dagger), \quad (74)$$

para qualquer  $\nu$  e  $B$ . Como  $a_{\nu,B}$  é um operador diferencial simples no  $L_2(R_+)$ , o seu adjunto  $a_{\nu,B}^\dagger$  é calculado de maneira simples (pelo método padrão para operadores diferenciais no  $L_2(R_+)$ ): a sua forma é

$$a_{\nu,B}^\dagger = -i\sigma_{\nu,B} \partial_r \sigma_{-\nu,-B} \quad (75)$$

(ele coincide com  $a_{-\nu,-B}$  (73)), e o seu domínio é

$$\mathcal{D}(a_{\nu,B}^\dagger) = \{*\psi_{\nu,B}(r)\}, \quad (76)$$

onde  $*\psi_{\nu,B}(r)$  são funções absolutamente contínuas (dentro do  $R_+$ ) de quadrado integrável que permitem a representação

$$*\psi_{\nu,B}(r) = i\sigma_{\nu,B}(r) \left[ \int_{r_0}^r d\xi \sigma_{-\nu,-B}(\xi) *\phi_{\nu,B}(\xi) + c_{\nu,B} \right]. \quad (77)$$

Aqui,  $*\phi_{\nu,B} = a_{\nu,B}^\dagger *\psi_{\nu,B}$ , a imagem de  $a_{\nu,B}^\dagger$  nos  $*\psi_{\nu,B}$  é de quadrado integrável,  $*\phi_{\nu,B} \in L_2(R_+)$ ;  $c_{\nu,B}$  é uma constante restrita pela demanda de que  $*\psi_{\nu,B} \in L_2(R_+)$ ;  $r_0 \geq 0$  é escolhido apropriadamente dependente do valor de  $\nu$  e do sinal de  $B$ . A mesma conclusão é válida para  $a_{-\nu,-B}^\dagger$ : é suficiente fazer as substituições  $\nu \rightleftharpoons -\nu$ ,  $B \rightleftharpoons -B$  em (75-77).

Neste ponto nós desviamos do procedimento geral usado na Seção 4.1: a definição dos subespaços de deficiência etc. Em vez disso, nós determinamos a "assimetria" do  $\Pi^\dagger$  calculando a diferença

$$\Delta = (*\Psi', \Pi^\dagger *\Psi) - (\Pi^\dagger *\Psi', *\Psi) \quad (78)$$

para qualquer  ${}^*\Psi$  e  ${}^*\Psi'$  pertencendo a  $\mathcal{D}(\Pi^\dagger)$ . Usando a forma de  ${}^*\Psi \in \mathcal{D}(\Pi^\dagger)$ , ver (74), (76), (77),

$${}^*\Psi(r) = \begin{pmatrix} {}^*\psi_{\nu,B}^1(r) \\ {}^*\psi_{-\nu,-B}^2(r) \end{pmatrix} \quad (79)$$

e a forma (74) de  $\Pi^\dagger$ , nós obtemos (aqui nós omitimos os índices  $*$  e  $B$  como irrelevantes, o que é claro abaixo)

$$\begin{aligned} \Delta &= \int_0^\infty dr \left[ \overline{\psi_\nu^1(r)} a_{-\nu}^\dagger \psi_{-\nu}^2(r) + \overline{\psi_{-\nu}^2(r)} a_\nu^\dagger \psi_\nu^1(r) \right] \\ &\quad - \int_0^\infty dr \left[ a_{-\nu}^\dagger \psi_{-\nu}^2(r) \psi_\nu^1(r) + a_\nu^\dagger \psi_\nu^1(r) \psi_{-\nu}^2(r) \right]. \end{aligned}$$

Resolvendo por partes a primeira integral, nós achamos

$$\Delta = -i \left[ \overline{\psi_\nu^1(r)} \psi_{-\nu}^2(r) + \overline{\psi_{-\nu}^2(r)} \psi_\nu^1(r) \right] \Big|_0^\infty,$$

i.e.,  $\Delta$  é determinado pelo comportamento assintótico de  ${}^*\Psi$  (79) nos limites quando  $r \rightarrow \infty$  e  $r \rightarrow 0$ . O comportamento assintótico para  ${}^*\psi_{\nu,B}(r)$  e  ${}^*\psi_{-\nu,-B}(r)$  pode ser estimado pelo uso da representação (77) com a escolha apropriada de  $r_0$  e a estimativa do termo integral em (77) pela desigualdade de Cauchy-Bounjakowsky.

Por exemplo, nós estimamos o comportamento de  ${}^*\psi_{\nu,B}(r)$  no infinito, quando  $r \rightarrow \infty$ , no caso  $B > 0$ . Neste caso, é conveniente escolher  $r_0 = \infty$ , de modo que

$${}^*\psi_{\nu,B}(r) = i\sigma_{\nu,B}(r) \left[ - \int_r^\infty d\xi \sigma_{-\nu,-B}(\xi) {}^*\phi_{\nu,B}(\xi) + c_{\nu,B} \right]. \quad (80)$$

A desigualdade de Cauchy-Bounjakowsky dá

$$\begin{aligned} \left| \int_r^\infty d\xi \xi^{-\nu} \exp\left(-\frac{eB\xi^2}{4}\right) {}^*\phi_{\nu,B}(\xi) \right| &\leq \left[ \int_r^\infty d\xi \xi^{-2\nu} \exp\left(-\frac{eB\xi^2}{4}\right) \right]^{1/2} \\ &\times \left[ \int_r^\infty d\xi |{}^*\phi_{\nu,B}(\xi)|^2 \right]^{1/2} = \frac{r^{-\nu-1/2}}{eB} \exp\left(-\frac{eBr^2}{4}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{r}\right)\right) \epsilon(r), \end{aligned} \quad (81)$$

onde  $\epsilon(r) \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow \infty$ . De (81) e da condição  ${}^*\psi_{\nu,B} \in L_2(R_+)$  segue que  $c_{\nu,B}$  em (80) deve ser zero e, por conseguinte,  ${}^*\psi_{\nu,B}(r)$  se anula quando  $r \rightarrow \infty$  mais rápido do que  $r^{-1/2}$ , independentemente de  $\nu$ . As mesmas conclusões são válidas para  $B < 0$ , o que é estabelecido pela desigualdade de Cauchy-Bounjakowsky com  $r_0 < \infty$ .

As estimativas assintóticas para  ${}^*\psi_{\nu,B}(r)$  quando  $r \rightarrow 0$  dependem do valor de  $\nu$ . O resultado é:

$$\begin{aligned} \nu > \frac{1}{2} & : \quad |{}^*\psi_{\nu,B}(r)| < c_{\nu} r^{1/2}, \\ \nu = \frac{1}{2} & : \quad |{}^*\psi_{1/2,B}(r)| < c_{1/2} r^{1/2} \ln \frac{r}{r_0}, \\ \nu \leq -\frac{1}{2} & : \quad {}^*\psi_{\nu,B}(r) = o(r^{1/2}), \\ -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2} & : \quad {}^*\psi_{\nu,B}(r) = c_{\nu,B} (rM)^{\nu} + o(r^{1/2}), \end{aligned}$$

independente de  $B$ ; o fator  $M$  é introduzido por razões dimensionais.

Nós concluímos que para  $|\nu| \geq 1/2$ , os 2-espinores  ${}^*\Psi(r)$  (79) se anulam tanto no infinito quanto na origem, e para  $|\nu| < 1/2$ , os 2-espinores  ${}^*\Psi(r)$  se anulam no infinito, mas em geral são singulares em  $r \rightarrow 0$ :

$${}^*\Psi(r) = \begin{pmatrix} c_{\nu,B}^1 (rM)^{\nu} \\ c_{-\nu,-B}^2 (rM)^{-\nu} \end{pmatrix} + o(r^{1/2}), \quad (82)$$

onde  $c^{1,2}$  são constantes arbitrárias. De posse destas estimativas, nós achamos

$$\Delta = \begin{cases} 0, & |\nu| \geq 1/2 \\ i [c_{\nu}^1 c_{-\nu}^2 + c_{-\nu}^2 c_{\nu}^1], & |\nu| < 1/2 \end{cases}, \quad (83)$$

independente de  $B$  (portanto nós omitimos os índices  $*$  e  $B$  como irrelevantes).

Então, nós achamos que se  $|\nu| \geq 1/2$ , i.e., se  $l \neq 0$  ou  $l = 0$  e  $\mu = 0$ , o operador  $\Pi^{\dagger}$  é simétrico,  $\Pi^{\dagger} \subseteq (\Pi^{\dagger})^{\dagger}$ , e portanto auto-adjunto,  $\Pi^{\dagger} = (\Pi^{\dagger})^{\dagger}$ : é suficiente levar em conta a inclusão inversa  $(\Pi^{\dagger})^{\dagger} \subseteq \Pi^{\dagger}$ , que é uma relação padrão para qualquer operador simétrico (que por sua vez é a consequência das relações gerais  $A \subseteq B \rightarrow B^{\dagger} \subseteq A^{\dagger}$  que valem para quaisquer operadores densos definidos). Então,  $\Pi^{\dagger}$  é uma extensão auto-adjunta de  $\Pi$ .

Isto significa que  $\Pi$  é essencialmente auto-adjunto, i.e., o seu fecho  $\bar{\Pi}$  é auto-adjunto,  $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}^{\dagger}$ , e em adição  $\bar{\Pi} = \Pi^{\dagger}$ , e é a extensão auto-adjunta única do  $\Pi$ . Nós lembramos os argumentos padrões. Como é conhecido,  $\bar{\Pi} = (\Pi^{\dagger})^{\dagger}$  e  $\bar{\Pi}^{\dagger} = \Pi^{\dagger}$ . Usando a auto-adjunticidade já estabelecida de  $\Pi^{\dagger}$ ,  $\Pi^{\dagger} = (\Pi^{\dagger})^{\dagger}$ , nós obtemos a série de igualdades  $\bar{\Pi} = (\Pi^{\dagger})^{\dagger} = \Pi^{\dagger} = \bar{\Pi}^{\dagger}$ , o que prova as duas primeiras afirmações. Não existem outras extensões auto-adjuntas porque qualquer tal extensão  $\Pi^{ext} = (\Pi^{ext})^{\dagger}$  deve satisfazer a relação  $\bar{\Pi} \subseteq \Pi^{ext} \subseteq \Pi^{\dagger}$ , ou seja,  $\Pi^{ext}$  deve ser a

extensão de  $\bar{\Pi}$  e a restrição de  $\Pi^\dagger$ , mas porque  $\bar{\Pi} = \Pi^\dagger$ , não existe "um lugar" para mais alguma extensão auto-adjunta.

A situação é não trivial no caso  $|\nu| < 1/2$ , i.e. se  $l = 0$  e  $\mu \neq 0$ , em que o operador  $\Pi^\dagger$  não é simétrico, o que significa que somente  $\bar{\Pi}$  é simétrico:  $\bar{\Pi} = (\Pi^\dagger)^\dagger \subset \Pi^\dagger = \bar{\Pi}^\dagger$  é a inclusão estrita. Esta relação permite achar  $\bar{\Pi}$ . A inclusão  $\bar{\Pi} \subset \Pi^\dagger$  significa que  $\mathcal{D}(\bar{\Pi}) \subset \mathcal{D}(\Pi^\dagger)$ , i.e.  $\Psi' \in \mathcal{D}(\bar{\Pi})$  tem representações como (77) e (82),

$$\Psi'(r) = \begin{pmatrix} c^1 (rM)^\nu \\ c^2 (rM)^{-\nu} \end{pmatrix} + o(r^{1/2}), \quad (84)$$

e se anulam no infinito. Portanto a igualdade  $\bar{\Pi} = (\Pi^\dagger)^\dagger \subset \Pi^\dagger$  significa, pela definição do  $(\Pi^\dagger)^\dagger$ , que  $\Psi' \in \mathcal{D}(\bar{\Pi})$  se e somente se a diferença  $\Delta$  (78) se anula para  $\Psi' \in \mathcal{D}(\bar{\Pi}) \subset \mathcal{D}(\Pi^\dagger)$  e qualquer  $\Psi \in \mathcal{D}(\Pi^\dagger)$ . Segundo (83), isto dá

$$\overline{c_\nu^1} c_{-\nu}^2 + \overline{c_{-\nu}^2} c_\nu^1 = 0, \quad \forall c_\nu^1, c_{-\nu}^2,$$

de que  $c_\nu^1 = c_{-\nu}^2 = 0$ .  $\bar{\Pi}$  é portanto definido como a restrição de  $\Pi^\dagger$  ao domínio  $\mathcal{D}(\bar{\Pi})$  das funções pertencendo a  $\mathcal{D}(\Pi^\dagger)$ , mas nulas na origem.

Nós precisamos achar as extensões auto-adjuntas  $\Pi^{ext} = (\Pi^{ext})^\dagger$  de  $\Pi$ . Elas "devem ficar entre"  $\bar{\Pi}$  e  $\Pi^\dagger$ ,  $\bar{\Pi} \subset \Pi^{ext} = (\Pi^{ext})^\dagger \subset \Pi^\dagger$ , como foi notado acima. Nós começamos a busca das extensões simétricas não triviais  $\Pi^{sym}$  de  $\Pi$ ,  $\bar{\Pi} \subset \Pi^{sym} \subseteq (\Pi^{sym})^\dagger \subseteq \Pi^\dagger$ , que não coincidem com  $\bar{\Pi}$ . Depois nós precisamos mostrar que estes  $\Pi^{sym}$  são a solução do problema. As últimas inclusões permitem repetir para  $\Pi^{sym}$  os argumentos anteriores feitos para  $\bar{\Pi}$  exceto que agora a diferença  $\Delta$  (78) deve se anular para qualquer  $\Psi, \Psi' \in \mathcal{D}(\Pi^{sym}) \subset \mathcal{D}(\Pi^\dagger)$ . Segundo (83) isto dá a equação para  $c_\nu^1, c_{-\nu}^2$  no  $\Psi$  (82) e  $c_\nu^1, c_{-\nu}^2$  no  $\Psi'$  (84),

$$\overline{c_\nu^1} c_{-\nu}^2 + \overline{c_{-\nu}^2} c_\nu^1 = 0, \quad (85)$$

Se  $\Psi, \Psi' \in \mathcal{D}(\bar{\Pi}) \subset \mathcal{D}(\Pi^{sym})$ , i.e. se anulam na origem, a Eq. (85) é válida. Para obedecer (85) é suficiente que somente  $\Psi$  ou  $\Psi'$  pertençam a  $\mathcal{D}(\bar{\Pi})$ . Mas  $\mathcal{D}(\Pi^{sym})$  deve incluir funções não nulas na origem. Seja  $\Psi$  uma tal função e, por exemplo, seja  $c_{-\nu}^2 \neq 0$ . Para  $\Psi' = \Psi$ , a Eq. (85) se torna

$$\overline{c_\nu^1} c_{-\nu}^2 + \overline{c_{-\nu}^2} c_\nu^1 = 0,$$

do que segue

$$\frac{c_\nu^1}{c_{-\nu}^2} = -\frac{\overline{c_\nu^1}}{c_{-\nu}^2} = i\Lambda, \quad \Lambda \in \mathbb{R}.$$

Portanto para qualquer  $\Psi' \in \mathcal{D}(\Pi^{sym})$  não nulo na origem e este  $\Psi$  fixo, a Eq. (85) toma a forma

$$\overline{c_\nu^1} + i\Lambda\overline{c_{-\nu}^2} = 0,$$

de que segue  $c_{-\nu}^2 \neq 0$  e  $c_\nu^1/c_{-\nu}^2 = i\Lambda$ , com o mesmo  $\Lambda$  para todos os  $\Psi \in \mathcal{D}(\Pi^{sym})$  não nulos na origem.

O caso  $c_{-\nu}^2 = 0$ ,  $c_\nu^1 \neq 0$  é considerado de maneira semelhante. Ele é formalmente coberto pelo caso  $\Lambda = \pm\infty$ , onde  $\Lambda = +\infty$  e  $\Lambda = -\infty$  são equivalentes (ambos os casos significam apenas  $c_{-\nu}^2 = 0$ ,  $c_\nu^1 \neq 0$ ). Então nós obtemos as condições de contorno assintóticas

$$\Psi(r) = c \begin{pmatrix} i\Lambda (rM)^\nu \\ (rM)^{-\nu} \end{pmatrix} + o(r^{1/2}) \quad (86)$$

na origem quando  $r \rightarrow 0$ , que define a família uniparamétrica  $\{\Pi^\Lambda\}$  de todas as extensões simétricas não triviais do  $\Pi$ .

Resta mostrar que estas extensões  $\Pi^\Lambda$  são realmente auto-adjuntas,  $\Pi^\Lambda = (\Pi^\Lambda)^\dagger$ . Para fazer isto, é necessário calcular  $(\Pi^\Lambda)^\dagger$ . Usando os argumentos semelhantes a os anteriores, nós concluímos que  $\Psi' \in \mathcal{D}((\Pi^\Lambda)^\dagger)$  se e somente se a diferença  $\Delta$  (78) se anula para  $\Psi' \in \mathcal{D}((\Pi^\Lambda)^\dagger) \subseteq \mathcal{D}(\Pi^\dagger)$  e qualquer  $\Psi \in \mathcal{D}(\Pi^\Lambda) \subset \mathcal{D}(\Pi^\dagger)$ , o que dá

$$\overline{c_\nu^1} + i\Lambda\overline{c_{-\nu}^2} = 0.$$

Se  $c_\nu^1$  e  $c_{-\nu}^2$  não são iguais a zero, isto dá

$$\frac{c_\nu^1}{c_{-\nu}^2} = i\Lambda.$$

Mas isto significa que  $\mathcal{D}((\Pi^\Lambda)^\dagger) \subseteq \mathcal{D}(\Pi^\Lambda)$ , i.e.  $(\Pi^\Lambda)^\dagger \subseteq \Pi^\Lambda$  é a inclusão inversa à inclusão inicial  $\Pi^\Lambda \subseteq (\Pi^\Lambda)^\dagger$ . Portanto  $\Pi^\Lambda = (\Pi^\Lambda)^\dagger$ , que prova a asserção final.

Então, nós achamos o conjunto inteiro das extensões auto-adjuntas do operador simétrico inicial  $\Pi$  (72) com  $\mathcal{D}(\Pi) = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}$ . Ele forma uma família uniparamétrica  $\{\Pi^\Lambda\}$ ,  $-\infty \leq \Lambda \leq \infty$ ,

em que cada membro  $\Pi^\Lambda = (\Pi^\Lambda)^\dagger$  é definido pela condição de contorno assintótica (86) na origem para os  $\Psi \in \mathcal{D}(\Pi^\Lambda) \subset \mathcal{D}(\Pi^\dagger)$ . Como  $\Lambda = +\infty$  e  $\Lambda = -\infty$  são equivalentes, esta família é homeomorfa ao círculo  $U(1)$ , mas não à reta aberta  $\mathbb{R}$ . As condições de contorno auto-adjuntas assintóticas obtidas em (86) aparentemente coincidem com as condições de contorno auto-adjuntas assintóticas (51) (até o fator comum  $M^{1/2}$ ) obtidas pelo método geral. Como o subproduto, nós achamos que os índices de deficiência de  $\Pi$  são  $(1, 1)$  no caso  $|\nu| < 1/2$ .

Nós concluímos esta seção com a observação que no caso em que as funções especiais são disponíveis e bem conhecidas o método geral é preferível para determinar efetivamente os subespaços de deficiência (nós notamos que, na verdade, somente o comportamento assintótico na origem das funções correspondentes é necessário). Mas, em qualquer caso, o cálculo do operador adjunto,  $\Pi^\dagger$  ou  $h^\dagger$ , é obrigatório para determinar corretamente o domínio das extensões auto-adjuntas.

## 5 A regularização do solenóide

### 5.1 O caso da partícula com spin

Nós podemos introduzir o campo AB como caso limite do campo de solenóide de raio finito (o campo AB regularizado), que permite fixar os parâmetros de extensão. Este enfoque ao campo de AB puro foi proposto por Hagen [6]. Neste capítulo, nós consideramos o problema na presença do campo magnético uniforme. Para fazer isto, nós precisamos estudar as soluções da equação de Dirac (1) com a combinação do campo do solenóide de raio finito e o campo magnético uniforme colinear.

Considere um solenóide de raio  $R$ . Nós supomos que dentro do solenóide existe um campo magnético axialmente simétrico  $B^{in}(r)$  que cria o fluxo  $\Phi = (l_0 + \mu) \Phi_0$ ,  $\Phi_0 = 2\pi/e$ , tal que  $e \int_0^R B^{in}(r) r dr = l_0 + \mu$ , e fora do solenóide ( $r > R$ ), o campo  $B^{in}(r)$  se anula. A função  $B^{in}(r)$  não é arbitrária, mas é tal que as integrais das funções  $\vartheta(x)$  e  $b(x)$  em (92) são convergentes. Nós escolhemos os potenciais do campo  $B^{in}(r)$  na forma

$$eA_1^{in} = \vartheta(x) \frac{\sin \varphi}{Rx}, \quad eA_2 = -\vartheta(x) \frac{\cos \varphi}{Rx}, \quad (87)$$

onde

$$\vartheta(x) = \int_0^x f(x') x' dx', \quad f(x) = R^2 e B^{in}(xR), \quad x = r/R.$$

Os potenciais do campo magnético uniforme são

$$A_0 = 0, \quad A_1 = A(r) \frac{\sin \varphi}{r}, \quad A_2 = -A(r) \frac{\cos \varphi}{r}, \quad A(r) = Br^2/2. \quad (88)$$

Fora do solenóide, os potenciais têm a forma (3).

Analisemos as soluções da equação de Dirac no campo definido acima. Para tanto, precisamos resolver a equação dentro e fora do solenóide e colar continuamente as soluções correspondentes. Nós chamamos as soluções correspondentes de internas e externas.

Primeiramente, nós estudamos o problema em  $2 + 1$  dimensões. Nós requeremos que as soluções sejam de quadrado integrável e regulares com  $r \rightarrow 0$ . Da mesma maneira como na Seção 3.1, nós obtemos que os espinores radiais internos  $\psi_{\omega,l}^{in}(r)$  ( $r \leq R$ ) satisfazem a equação

$$h^{in} \psi_{\omega,l}^{in}(r) = \varepsilon \psi_{\omega,l}^{in}(r), \quad h^{in} = \Pi^{in} + \sigma^3 M,$$

onde

$$\Pi^{in} = -\frac{i}{R} \left\{ \partial_x + \frac{\sigma^3}{x} \left[ l - l_0 - \frac{1}{2} (1 - \sigma^3) + \vartheta(x) + \xi \rho_R x^2 \right] \right\} \sigma^1, \quad \rho_R = \gamma R^2 / 2. \quad (89)$$

Nós requeremos que as funções  $\psi_{\omega,l}^{in}(r)$  sejam de quadrado integrável no intervalo  $(0, R)$ . Para  $\omega = 0$  ( $|\varepsilon| = M$ ), as soluções são

$$\begin{aligned} +\psi_{0,l}^{in}(r) &= \phi_{0,l,1}^{in}(x)v_1, \quad l - l_0 \geq 1, \\ -\psi_{0,l}^{in}(r) &= \phi_{0,l,-1}^{in}(x)v_{-1}, \quad l - l_0 \leq 0, \\ \phi_{0,l,\sigma}^{in}(x) &= cx^{|\eta|} \exp \left\{ \sigma \int_0^x \tilde{x}^{-1} (\vartheta(\tilde{x}) + \xi \rho_R \tilde{x}^2) d\tilde{x} \right\}, \quad \eta = l - l_0 - (1 + \sigma) / 2, \end{aligned} \quad (90)$$

onde  $c$  é uma constante arbitrária. Para  $\omega \neq 0$ , nós representamos os espinores na forma

$$\psi_{\omega,l}^{in}(r) = \begin{pmatrix} \psi_1^{in}(r) \\ \psi_2^{in}(r) \end{pmatrix} = [\sigma^3 (\varepsilon - \Pi^{in}) + M] [c_1 \phi_{l,1}^{in}(x)v_1 + ic_{-1} \phi_{l,-1}^{in}(x)v_{-1}],$$

onde  $c_\sigma$  são constantes arbitrárias. As funções  $\phi_{l,\sigma}^{in}(x)$  satisfazem a equação

$$\left[ \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} (\eta + \vartheta(x) + \xi \rho_R x^2)^2 + \omega R^2 - \sigma (f(x) + 2\xi \rho_R) \right] \phi_{l,\sigma}^{in}(x) = 0 \quad (91)$$

e devem ser regulares em  $r = 0$  para que a condição de integrabilidade seja satisfeita por  $\psi_{\omega,l}^{in}(r)$ . Nosso primeiro interesse principal é o caso do limite  $R \rightarrow 0$ . Para os nossos objetivos, é suficiente usar a aproximação  $\rho_R \ll 1$ ,  $\omega R^2 \ll 1$ . Rejeitando os termos proporcionais a  $R^2$  em (89) e (91), as soluções da Eq. (91) são

$$\begin{aligned} \phi_{l,\sigma}^{in}(x) &= \begin{cases} cx^{|\eta|} e^{\sigma b(x)}, & \sigma \eta \geq 0, \\ cx^{-|\eta|} e^{\sigma b(x)} \int_0^x d\tilde{x} \tilde{x}^{2|\eta|-1} e^{-2\sigma b(\tilde{x})}, & \sigma \eta < 0, \end{cases} \\ b(x) &= \int_0^x d\tilde{x} \tilde{x}^{-1} \vartheta(\tilde{x}). \end{aligned} \quad (92)$$

As soluções externas ( $r \geq R$ ) satisfazem a equação

$$h\psi_{\omega,l}^{out}(r) = \varepsilon\psi_{\omega,l}^{out}(r) \quad (93)$$

e devem ser de quadrado integrável no intervalo  $(R, \infty)$ . Onde  $h$  é definido pelas Eqs. (10) e (11). A forma geral das soluções externas é

$$\begin{aligned} \psi_{\omega,l}^{out}(r) &= [\sigma^3 (\varepsilon - \Pi) + M] (c_1 \phi_{l,1}^{out}(r)v_1 + ic_{-1} \phi_{l,-1}^{out}(r)v_{-1}), \\ \phi_{l,\sigma}^{out}(r) &= \psi_{\lambda,\alpha}(\rho), \quad \alpha = l + \mu - (1 + \sigma) / 2, \quad 2\lambda = \omega / \gamma - \xi (l + \mu - (1 - \sigma) / 2). \end{aligned} \quad (94)$$

As soluções  $\psi_{\omega,l}^{out}(r)$  e  $\psi_{\omega,l}^{in}(r)$  devem ser coladas continuamente em  $r = R$ ,

$$\psi^{out}(R) = \psi^{in}(R), \quad (95)$$

e devem satisfazer a condição de normalização

$$N_{\omega,l}^{in} + N_{\omega,l}^{out} = 1, \\ N_{\omega,l}^{in} = \int_0^R (\psi_{\omega,l}^{in}(r))^\dagger \psi_{\omega,l}^{in}(r) r dr, \quad N_{\omega,l}^{out} = \int_R^\infty (\psi_{\omega,l}^{out}(r))^\dagger \psi_{\omega,l}^{out}(r) r dr. \quad (96)$$

Nós podemos considerar o campo AB como o caso limite do campo do solenóide de raio finito se

$$\lim_{\rho_R \rightarrow 0} N_{\omega,l}^{in} = 0. \quad (97)$$

Nós podemos realizar a condição de junção (95) impondo as seguintes condições nas funções  $\phi_{l,\sigma}^{in}(r)$  e  $\phi_{l,\sigma}^{out}(r)$  em  $r = R$ :

$$\phi(R - \epsilon) = \phi(R + \epsilon), \quad \frac{d}{dr}\phi(R - \epsilon) = \frac{d}{dr}\phi(R + \epsilon). \quad (98)$$

É conveniente usar a representação (189) para  $\psi_{\lambda,\alpha}(\rho)$  em (94). As funções  $\phi_{l,\sigma}^{out}(r)$  são, portanto,

$$\phi_{l,\sigma}^{out}(r) = a_\sigma I_{n_\sigma, m_\sigma}(\rho) + b_\sigma I_{m_\sigma, n_\sigma}(\rho), \quad n_\sigma = \lambda - \frac{1 - \alpha}{2}, \quad m_\sigma = \lambda - \frac{1 + \alpha}{2}, \\ a_\sigma = K \sin n_\sigma \pi, \quad b_\sigma = -K \sin m_\sigma \pi, \quad K = \frac{\sqrt{\Gamma(1 + n_\sigma) \Gamma(1 + m_\sigma)}}{\sin(n_\sigma - m_\sigma) \pi}, \quad (99)$$

onde  $n_\sigma, m_\sigma$  são números reais.

Usando (98), podemos encontrar os coeficientes  $a_\sigma, b_\sigma$ : para o caso  $l - l_0 \leq 0$ ,

$$a_1 = \rho_R^{-(l+\mu-1)/2} \tilde{c} \tilde{a}_1, \quad b_1 = \rho_R^{(l+\mu-1)/2} \tilde{c} \tilde{b}_1, \quad (100)$$

$$a_{-1} = \rho_R^{-(l+\mu)/2+1} \tilde{c} \tilde{a}_{-1}, \quad b_{-1} = \rho_R^{(l+\mu)/2} \tilde{c} \tilde{b}_{-1}, \quad (101)$$

e para o caso  $l - l_0 > 0$ ,

$$a_1 = \rho_R^{-(l+\mu-1)/2} c' \tilde{a}'_1, \quad b_1 = \rho_R^{(l+\mu-1)/2+1} c' \tilde{b}'_1, \quad (102)$$

$$a_{-1} = \rho_R^{-(l+\mu)/2} c' \tilde{a}'_{-1}, \quad b_{-1} = \rho_R^{(l+\mu)/2} c' \tilde{b}'_{-1}, \quad (103)$$

onde os coeficientes não nulos  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{a}'$ ,  $\tilde{b}'$  são independentes de  $\rho_R$ , e os coeficientes  $c$  e  $c'$  são fatores de normalização que dependem de  $\rho_R$ .

Calculando os fatores de normalização, no limite  $R \rightarrow 0$ , obtemos

$$a_1 = \text{const} \neq 0, b_1 = 0, a_{-1} = b_{-1} = 0, l \geq 1,$$

$$a_1 = 0, b_1 = \text{const} \neq 0, a_{-1} = b_{-1} = 0, l \leq 0$$

para  $l - l_0 \leq 0$  e

$$a_1 = b_1 = 0, a_{-1} = \text{const} \neq 0, b_{-1} = 0, l \geq 0,$$

$$a_1 = b_1 = 0, a_{-1} = 0, b_{-1} = \text{const} \neq 0, l \leq -1$$

para  $l - l_0 > 0$ . Para  $l = 0$ , o valor dos coeficientes é definido por  $\text{sgn} \Phi$ . Nós podemos verificar que a condição (97) é satisfeita.

Então, nós obtemos que para qualquer sinal de  $B$ , as soluções são expressas através dos polinômios de Laguerre (23). Particularmente, para  $l = 0$ , as soluções  $\psi_{\omega,0}^{\text{out}}(r)$  coincidem com  $\psi_m^I(r)$  ou  $\psi_m^{II}(r)$  de acordo com  $\text{sgn}(\Phi)$ ,

$$\psi_{\omega,0}^{\text{out}}(r) = \begin{cases} \psi_m^I(r), & \text{sgn}(\Phi) = +1 \\ \psi_m^{II}(r), & \text{sgn}(\Phi) = -1 \end{cases} \quad (104)$$

Na Seção 4.1, nós achamos a relação entre os valores do parâmetro de extensão e os tipos de soluções no subespaço crítico  $l = 0$  (70), (71). Agora nós queremos refinar esta relação. Isto é, se nós introduzirmos o campo AB como o campo limite de raio zero para o solenóide de raio finito, então o parâmetro de extensão  $\Theta$  fica fixado como  $\Theta = -\text{sgn}(\Phi) \pi/2$ . Nós chamamos estas extensões de extensões naturais. Observamos que esta maneira de introdução do campo AB implica que não existe nenhuma interação adicional dentro do solenóide.

Para resolver o problema em  $3 + 1$  dimensões, usamos os resultados de  $2 + 1$  dimensões apresentados acima. No limite  $R \rightarrow 0$ , as soluções no subespaço crítico são

$$\Psi_s^{\text{out}}(x_{\perp}) = N \begin{pmatrix} \left[ 1 + \left( p^3 + s\tilde{M} \right) / M \right] g_0(\varphi) \psi_{\omega,l}^{\text{out}}(r) \\ \left[ -1 + \left( p^3 + s\tilde{M} \right) / M \right] g_0(\varphi) \psi_{\omega,l}^{\text{out}}(r) \end{pmatrix}, \quad (105)$$

onde as funções  $g_0(\varphi)$ ,  $\psi_{\omega,l}^{out}(r)$  são definidas em (9) e (104), (23), respectivamente. Os valores dos parâmetros de extensão em 3 + 1 dimensões são especificados como

$$\Theta_{+1} = \Theta_{-1} = -\frac{\pi}{2} \text{sgn } \Phi. \quad (106)$$

Uma interpretação de outros valores possíveis de  $\Theta$  por processos limite para outros potenciais regularizados não foi feita até agora.

## 5.2 O caso da partícula sem spin

Nesta subsecção nós consideramos o problema da regularização no caso da partícula sem spin. Para este caso a equação de Klein-Gordon com o campo magneto-solenoidal é, de fato, reduzida ao problema de autovalores do Hamiltoniano não relativístico em duas dimensões. Portanto, o problema da extensão auto-adjunta, assim como o problema da regularização do solenóide, é semelhante para o caso relativístico e não relativístico.

Tendo seu início com o trabalho clássico [1], o efeito AB no caso sem spin é usualmente associado com as funções radiais regulares em  $r = 0$ . Entretanto, a relação entre este tipo de condições de contorno e o solenóide regularizado é um problema importante e interessante. O objetivo desta subsecção é estudar este problema.

As extensões auto-adjuntas do Hamiltoniano não relativístico com o campo AB no caso sem spin já foram estudadas em alguns artigos [11, 53]. O caso do campo magneto-solenoidal foi considerado em [71], onde a família tetra-paramétrica mais geral de condições de contorno admissíveis foi obtida. A regularização do solenóide para algumas distribuições particulares do campo magnético dentro do solenóide foi estudada em [6, 53]. Mas o problema da regularização com o campo arbitrário dentro do solenóide não foi resolvido.

Ao contrário da equação de Dirac, a equação de Klein-Gordon não foi resolvida explicitamente para um campo arbitrário dentro do solenóide regularizado. Nós podemos obter as propriedades necessárias das soluções correspondentes sem resolver explicitamente a equação de Klein-Gordon. Então, podemos demonstrar que para um campo arbitrário dentro do solenóide, a utilização da regularização ( $R \rightarrow 0$ ) corresponde somente às funções radiais regulares.

Nós usamos o método do caso de Dirac formulado acima. As soluções da equação de Klein-

Gordon com energia  $\varepsilon$  e momento angular  $l - l_0$  têm a forma

$$\phi(x) = N e^{i\varepsilon x^0} e^{i(l-l_0)\varphi} \phi(r).$$

Nós procuramos a função radial  $\phi(r)$  que cola as soluções dentro e fora do solenóide.

As soluções externas têm a forma [48],

$$\phi^{out}(r) = \psi_{\lambda, \alpha/2}(\rho) = \rho^{-1/2} W_{\lambda, \alpha/2}(\rho), \quad 2\lambda = \omega/\gamma - \xi\alpha, \quad \alpha = l + \mu, \quad (107)$$

onde  $\omega = \varepsilon^2 - M^2$ . O subespaço crítico é definido por  $l = 0, -1$ . As soluções internas satisfazem a equação (91), onde precisamos pôr  $\sigma = 0$ . A aproximação  $\rho_R \ll 1$  e  $\omega R^2 \ll 1$  pode ser aplicada neste caso também. Portanto, nós chegamos à seguinte equação para as soluções internas,

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} - \frac{1}{x^2} (\eta + \vartheta(x))^2 \right] \phi^{in}(x) = 0, \quad (108)$$

onde  $0 \leq x \leq 1$ . Nós procuramos as soluções  $\phi^{in}(x)$  que são regulares em  $x = 0$ . Aplicando as condições de junção (98), nós obtemos

$$\alpha \phi_{in}(1) + \partial_x \phi^{in}(1) = 2\alpha a \rho_R^{\alpha/2}, \quad \alpha \phi_{in}(1) - \partial_x \phi^{in}(1) = 2\alpha b \rho_R^{-\alpha/2} \quad (109)$$

para a ordem mais baixa em  $\rho_R$ .

Para os nossos propósitos é importante demonstrar que as condições seguintes são válidas

$$|\alpha| \phi^{in}(1) + \partial_x \phi^{in}(1) \neq 0. \quad (110)$$

Para fazer isto, encontramos as soluções da equação (108) que são regulares em  $x = 0$ . A função  $\vartheta(x)$  é analítica no intervalo  $0 \leq x \leq 1$ , porque ela obedece às condições formuladas na Seção 5.1. Por que a Eq. (108) é a equação diferencial ordinária homogênea com ponto  $x = 0$  singular regular. De acordo com a teoria geral [80], é sabido que existem soluções de (108) que podem ser representadas na forma

$$\phi^{in}(x) = x^{|\eta|} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (111)$$

onde  $a_0$  é uma constante arbitrária e o restante dos coeficientes são definidos por meio de relações recorrentes. A série em (111) é absolutamente e uniformemente convergente no intervalo  $0 \leq$

$x \leq 1$ . Nós supomos por simplicidade que  $f(x)$  não muda de sinal em  $0 \leq x \leq 1$ . Portanto, podemos apresentar  $\phi^{in}(x)$  na forma

$$\phi_{in}(x) = \begin{cases} x^{|\eta|} e^{-|b(x)|} \varphi^{(-)}(x), & \text{sgn}(f) \eta \leq 0 \\ x^{-|\eta|} e^{-|b(x)|} \varphi^{(+)}(x), & \text{sgn}(f) \eta > 0 \end{cases}, \quad (112)$$

onde as funções  $\varphi^{(\pm)}(x)$  satisfazem a equação

$$H^{(\pm)} \varphi^{(\pm)} = 0, \quad H^{(\pm)} = H_0^{(\pm)} - |f(x)|, \quad H_0^{(\pm)} = \frac{d^2}{dx^2} + (1 \mp 2|\eta| - 2|\vartheta(x)|) \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \quad (113)$$

e as condições

$$\varphi^{(-)}(0) = 1, \quad x^{-2|\eta|} \varphi^{(+)}(x) \Big|_{x=0} = 1. \quad (114)$$

Para a análise seguinte é conveniente introduzir o propagador retardado  $G_{ret}^{(\pm)}(x, y)$ , que obedece a equação

$$H_0^{(\pm)} G_{ret}^{(\pm)}(x, y) = \delta(x - y).$$

Ele pode ser representado como  $G_{ret}^{(\pm)}(x, y) = \theta(x - y) G^{(\pm)}(x, y)$ , onde as funções  $G^{(\pm)}$  obedecem as condições

$$G^{(\pm)}(x, x) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} G^{(\pm)}(x, y) \Big|_{x=y} = 1,$$

e podem ser encontrados explicitamente para o caso considerado,

$$G^{(\pm)}(x, y) = \int_y^x \left( \frac{\tilde{x}}{y} \right)^{\pm 2|\eta| - 1} \exp\{2|b(\tilde{x})| - 2|b(y)|\} d\tilde{x}. \quad (115)$$

A equação diferencial (113) com as condições de contorno (114) é equivalente à equação integral seguinte,

$$\varphi^{(\pm)}(x) = \varphi_0^{(\pm)}(x) + \int_0^x G^{(\pm)}(x, y) |f(y)| \varphi^{(\pm)}(y) dy, \quad (116)$$

onde

$$\varphi_0^{(-)}(x) = 1, \quad \varphi_0^{(+)}(x) = \int_0^x \tilde{x}^{2|\eta| - 1} e^{2|b(\tilde{x})|} d\tilde{x}.$$

As soluções da equação (116) podem ser encontradas por iterações,

$$\begin{aligned}\varphi^{(\pm)}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} Y_k^{(\pm)}(x), \\ Y_k^{(\pm)}(x) &= \int_0^x G^{(\pm)}(x, y) |f(y)| Y_{k-1}^{(\pm)}(y) dy, \quad Y_0^{(\pm)}(x) = \varphi_0^{(\pm)}(x).\end{aligned}\quad (117)$$

Cada membro da série (117) é positivo. A série converge uniformemente. Logo,  $\varphi^{(\pm)}(x) > 0$  e  $\partial_x \varphi^{(\pm)}(x) > 0$  para  $x > 0$ . Então,

$$\phi^{in}(1) > 0, \quad \partial_x \phi^{in}(1) = -\text{sgn}(f) \alpha \phi^{in}(1) + e^{-|b(1)|} \partial_x \varphi^{(\pm)}(1). \quad (118)$$

Se  $\text{sgn}(f) \alpha < 0$ , então  $\partial_x \phi^{in}(1) > 0$  e a condição (110) é satisfeita. Se  $\text{sgn}(f) \alpha > 0$ , então de (118) segue que

$$|\alpha| \phi^{in}(1) + \partial_x \phi^{in}(1) > 0,$$

e a condição (110) é também satisfeita. O resultado obtido pode ser estendido a uma função  $f(x)$  que muda de sinal. Neste caso, o intervalo  $[0, 1]$  pode ser dividido em subintervalos nos quais  $f(x)$  não muda de sinal. As soluções  $\phi^{in}(x)$  podem ser encontradas sucessivamente em cada subintervalo começando do ponto  $x = 0$ .

Aplicando a condição de normalização para as soluções coladas,

$$\int_0^{\rho_R} |\phi^{in}|^2 d\rho + \int_{\rho_R}^{\infty} |\phi^{out}|^2 d\rho = 1,$$

obtemos

$$b = 0 \text{ se } \alpha > 0; \quad a = 0 \text{ se } \alpha < 0 \quad (119)$$

no limite  $R \rightarrow 0$ . Então, somente as soluções regulares em  $r = 0$  sobrevivem no limite  $R \rightarrow 0$ . As condições (119) também definem o espectro. Finalmente, de (99) segue que no limite  $R \rightarrow 0$  as funções radiais e o espectro associado têm a forma

$$\phi_{m,l}(r) = I_{m+|l+\mu|,m}(\rho), \quad \omega = \gamma(2m + |l + \mu| + \xi(l + \mu) + 1). \quad (120)$$

## 6 As funções de Green

Neste capítulo nós passamos à construção das funções de Green da equação de Dirac com o campo magneto-solenoidal. A importância física deste problema consiste no fato do conhecimento das funções de Green permitir estudar completamente os efeitos quânticos (e de campos quânticos) no campo magneto-solenoidal. A especificidade técnica do problema está relacionada à necessidade de levar em conta as peculiaridades relacionadas ao problema da extensão auto-adjunta do operador de Dirac no background em consideração. Primeiramente, mencionamos alguns trabalhos onde foi considerado o problema da construção das funções de Green das equações de onda com a presença do campo Aharonov-Bohm.

Em [81] o efeito Aharonov-Bohm é investigado na formulação de Feynman da mecânica quântica usando as integrais de trajetória. Neste artigo é considerada uma situação idealizada, com um elétron se movendo em uma região onde todo o campo magnético está localizado no interior de um solenóide cuja razão do raio com o comprimento é muito pequeno. O termo do potencial vetor não nulo na lagrangiana é escrito como um potencial dependente da velocidade angular. Para levar em conta a singularidade, devida à presença do solenóide, um vínculo periódico é imposto na integral de trajetória. O propagador é calculado usando o método de coordenadas polares de Peak e Inomata. O propagador encontrado tem a forma geral  $K(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'; \tau) = \sum_n \chi_n K_n(\mathbf{r}'', \mathbf{r}'; \tau)$ , onde o somatório se estende sobre todas as classes das trajetórias homotópicas e os  $\chi_n$  representam uma dimensão do grupo de homotopia.

Em [82] o efeito Aharonov-Bohm é formulado em termos da integral de trajetória vinculada. Para expressar o propagador como a soma dos propagadores parciais correspondentes às trajetórias homotopicamente diferentes, a integral de trajetória é calculada explicitamente no espaço de cobrimento do background físico. Os termos de interferência são calculados para um solenóide infinitesimalmente fino. É encontrado que estes termos contém como o efeito dominante observável o deslocamento usual dependente do fluxo e um deslocamento adicional topológico que não é visível no experimento de interferência de duas fendas.

Em [83] o movimento de uma partícula não relativística carregada no plano, em um região multiplamente conexa, é estudado usando o enfoque da integral de trajetória de Feynman. Particularmente, os autores estudam o caso mais simples, quando a região multiplamente conexa

é obtida pela exclusão de um disco do plano. Neste artigo é mostrado que, se o fluxo magnético está localizado dentro do disco, há uma mudança na representação unidimensional unitária do grupo fundamental do espaço que se reflete na própria definição da integral de trajetória. É mostrado que, desta maneira, surge uma explicação simples do efeito Aharonov-Bohm.

Em [84] é estudado o efeito Aharonov-Bohm nas teorias gerais de gauge para partículas em regiões livres de gauge e curvatura, usando o propagador da mecânica quântica na forma de soma de Feynman sobre trajetórias. Tais trajetórias são divididas em classes de equivalência homotópica, e as contribuições de cada classe são identificadas com os propagadores da equação de onda na variedade de cobrimento universal de  $M$ , este procedimento resulta numa forma simples para o propagador em  $M$ . Neste artigo é mostrado que o homomorfismo grupal de  $H$ , o grupo fundamental da homotopia de  $M$ , ao grupo de gauge  $G$  caracteriza os possíveis efeitos Aharonov-Bohm, que podem ser divididos em dois tipos: Abelianos e não Abelianos, dependendo se  $H^*$ , a imagem deste homomorfismo, é Abelianos ou não Abelianos. Para o efeito Aharonov-Bohm não Abelianos, é necessário que ambos  $H$  e  $G$  sejam não Abelianos. Exemplos simples ilustram a teoria.

Em [85] o propagador não relativístico é derivado no formalismo do efeito Aharonov-Bohm generalizado, isto é, válido para qualquer grupo de gauge numa variedade multiplamente conexa geral, como uma consequência do gauge no espaço de cobrimento universal. No problema considerado neste artigo os fatores de fase de loop e os propagadores da homotopia livre surgem naturalmente. Também é apresentada a expressão explícita para o propagador no caso da presença de dois solenóides.

A função de Green para a soma dos potenciais de Coulomb e de Aharonov-Bohm é calculada exatamente no formalismo da integral de trajetória em [86], onde o espectro de energia é deduzido.

Em [87] é discutido o movimento de partículas relativísticas livres em espaços multiplamente conexos. O efeito Aharonov-Bohm relativístico é considerado e é mostrado que a forma do propagador é semelhante ao não relativístico. Em ambas situações, os propagadores são calculados sem uso aproximações.

Em [88] a conexão entre a função de Green do oscilador harmônico isotrópico em duas

dimensões no espaço complexo e o do átomo hidrogenóide em um campo de monopolo de Dirac mais um campo Aharonov-Bohm é estabelecido por uso das integrais de trajetória. A conexão encontrada fornece o um método simples para a construção da função Green para os sistemas atômicos.

Em [89] potenciais de delta-função na mecânica quântica em duas e três dimensões são analisados pela incorporação do método da extensão auto-adjunta no método de função de Green. Neste artigo, são determinadas explicitamente as funções de Green dependentes de energia para sistemas de uma partícula livre mais o potencial de delta-função. Cálculos semelhantes são realizados também para um sistema Aharonov-Bohm de spin  $1/2$ . Com isto, é encontrado que o propagador dependente de tempo, para o segundo caso, não pode ser calculado analiticamente, exceto para um valor particular do parâmetro de extensão auto-adjunta.

Em [90] é derivado o propagador do sistema Aharonov-Bohm-Coulomb sem spin, segundo o método de Duru-Kleinert. Este propagador é usado para explorar o sistema Aharonov-Bohm-Coulomb de spin  $1/2$  que contém a interação puntiforme no termo de Zeeman. A incorporação do método da extensão auto-adjunta no formalismo da função de Green permite derivar de forma apropriada o propagador finito do sistema Aharonov-Bohm-Coulomb de spin  $1/2$ . Como o subproduto, é obtida a relação entre o parâmetro da extensão auto-adjunta e a constante de acoplamento. São examinados os espectros de energia do estado ligado dos sistemas Aharonov-Bohm-Coulomb, tanto sem spin como de spin  $1/2$ . Em [91] é resolvida a integral de trajetória para o sistema Aharonov-Bohm-Coulomb relativístico sem spin e os espectros de energia são extraídos da amplitude resultante. Em [92] é resolvida a integral de trajetória para o sistema de Aharonov-Bohm-Coulomb relativístico sem spin em três dimensões, e os espectros de energia são extraídos da amplitude resultante. Em [93] é dado o método para calcular a solução da integral de trajetória relativística através da soma sobre a série da perturbação. Como uma aplicação, é obtida a solução exata da integral de trajetória do sistema Aharonov-Bohm-Coulomb relativístico. Para achar a integral de trajetória, o método desenvolvido envolve somente uma forma explícita da função Green simples evitando a integral de trajetória explícita.

Em [94] é discutida a dinâmica quântica de uma partícula carregada em um plano hiperbólico sob a influência do campo Aharonov-Bohm por meio de integrais de trajetória. A integral de

trajetória é obtida em termos da expansão das classes de homotopia das trajetórias. A figura de interferência do espalhamento no campo Aharonov-Bohm no limite do espaço plano, que dá um comportamento oscilatório característico em termos da força do campo, é discutido. Em [95] é calculada a função de Green para um sistema Aharonov-Bohm-Coulomb relativístico sem spin na pseudo-esfera  $\Lambda^{(2)}$  usando a representação de Kleinert da integral de trajetória para partículas relativísticas sem spin. O espectro de energia e as funções de onda correspondentes são obtidos para os estados ligados e estados de espalhamento. Os resultados limites no caso não relativístico e no espaço plano são considerados.

O propagador quântico para sistemas com fronteiras e vínculos topológicos é calculado em [96], usando a formulação de Streit-Hida. Particularmente, a integral de Feynman é dada como funcionais generalizados de ruído branco para os sistemas com fronteiras retas e vínculos periódicos. Usando a transformação de Gauss-Fourier apropriada para estes funcionais, o propagador quântico é obtido para o sistema de Aharonov-Bohm. Com isto, o espectro de energia e as autofunções são obtidos.

Em princípio, as funções de Green podem ser construídas quando os conjuntos completos das soluções da equação de Dirac estão disponíveis. Notamos que a construção explícita do hamiltoniano de Dirac auto-adjunto na Seção 4 prova o fato que os conjuntos das soluções obtidos são completos.

Nós notamos que o campo magneto-solenoidal pertence ao tipo de campo que não viola a estabilidade do vácuo. Para os campos deste tipo, existe um vácuo estável único, e as definições da teoria quântica de campo das funções de Green que seguem abaixo são válidas [97]. Particularmente, o propagador causal  $S^c(x, x')$  e o propagador anticausal  $S^{\bar{c}}(x, x')$  são definidos pelas expressões

$$S^c(x, x') = i \langle 0 | T \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') | 0 \rangle, \quad (121)$$

$$S^{\bar{c}}(x, x') = i \langle 0 | \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') T | 0 \rangle, \quad (122)$$

onde  $\hat{\psi}(x)$  é o campo quântico espinorial na representação de Furry, satisfazendo a equação de Dirac com o campo magneto-solenoidal, e  $|0\rangle$  é o vácuo nesta representação. O símbolo  $T$ -produto atua em ambos os lados: ele ordena os operadores de campo a sua direita e antiordena

os a esquerdo. As funções  $S^c(x, x')$ ,  $S^{\bar{c}}(x, x')$  podem ser expressas através das funções  $S^{\mp}(x, x')$ ,

$$S^c(x, x') = \theta(\Delta x^0) S^-(x, x') - \theta(-\Delta x^0) S^+(x, x'), \quad \Delta x^0 = x^0 - x'^0, \quad (123)$$

$$S^{\bar{c}}(x, x') = \theta(-\Delta x^0) S^-(x, x') - \theta(\Delta x^0) S^+(x, x'). \quad (124)$$

As funções  $S^{\mp}(x, x')$  podem ser calculadas usando o conjunto completo  $\pm\psi_a(x)$  das soluções da equação de Dirac com o campo magneto-solenoidal como

$$S^{\mp}(x, x') = i \sum_a \pm\psi_a(x) \pm\bar{\psi}_a(x'). \quad (125)$$

As soluções com índice (+) pertencem ao espectro positivo de energia, e as soluções com índice (-) pertencem ao espectro negativo de energia. Nesta expressão,  $a$  denota todos os números quânticos possíveis.

A equação de Dirac com o campo magneto-solenoidal tem a forma

$$(\gamma^\nu P_\nu - M) \psi(x) = 0. \quad (126)$$

Para o caso de  $(2+1)$  dimensões usamos a letra grega  $\Gamma$  para denotar as gamma-matrizes. Nós usamos para estas matrizes a seguinte representação

$$\Gamma^0 = \sigma^3, \Gamma^1 = i\sigma^2, \Gamma^2 = -i\sigma^1,$$

onde  $\sigma^i$  são as matrizes de Pauli.

As funções  $S^{\mp}(x, x')$  obedecem a equação de Dirac (126), e os propagadores causal e anti-causal obedecem as equações de Dirac não homogêneas

$$(\gamma^\nu P_\nu - M) S^c(x, x') = -\delta(x - x'), \quad (\gamma^\nu P_\nu - M) S^{\bar{c}}(x, x') = \delta(x - x').$$

Nós notamos que a função de comutação  $S(x, x')$ , as funções de Green avançadas  $S^{adv}(x, x')$  e retardadas  $S^{ret}(x, x')$  podem ser expressas em termos das  $S^c(x, x')$  e  $S^{\bar{c}}(x, x')$  como

$$S(x, x') = S^-(x, x') + S^+(x, x') = \text{sgn}(\Delta x^0) [S^c(x, x') - S^{\bar{c}}(x, x')], \quad (127)$$

$$S^{adv}(x, x') = -\theta(-\Delta x^0) S(x, x'), \quad S^{ret}(x, x') = \theta(\Delta x^0) S(x, x'). \quad (128)$$

## 6.1 O caso de 2+1 dimensões

### 6.1.1 Os conjuntos das soluções exatas

Primeiramente, nós estudamos o caso de 2 + 1 dimensões, em que, como mostrado na Seção 4.1, o operador de Dirac com o campo magneto-solenoidal possui uma família uni-paramétrica de extensões auto-adjuntas. Isto define a família uni-paramétrica das condições de contorno na origem.

Em geral, a simetria AB é violada para uma partícula com spin, que portanto é sensível ao sinal do fluxo do solenoide. Como foi demonstrado na Seção 5.1, os valores  $\Theta = \pm\pi/2$  correspondem à extensão natural,  $\Theta = -\pi/2$  se o fluxo é positivo e  $\Theta = \pi/2$  se o fluxo é negativo. Abaixo nós apresentamos um conjunto de soluções  $\pm\psi_a(x)$  de (126) numa forma conveniente para a construção da função de Green segundo as formulas (125). Consideraremos o problema separadamente para dois valores do parâmetro de extensão.

Vamos começar com o caso  $\Theta = -\pi/2$ . O espectro de energia positiva é dado por  $+\varepsilon$  e o espectro de energia negativa é dado por  $-\varepsilon$ ,

$$+\varepsilon = -\varepsilon = \sqrt{M^2 + \omega}. \quad (129)$$

Ambos os ramos são determinados pelo espectro da quantidade  $\omega$ , que definiremos abaixo. As soluções  $\pm\psi_a(x)$  podem ser expressas através das soluções  $u(x)$  da equação Dirac ao quadrado. Estas soluções  $u(x)$  têm a forma

$$\begin{aligned} \pm u_{m,l,\sigma}(x) &= e^{-i\pm\varepsilon x^0} u_{m,l,\sigma}(x_\perp), \\ x_\perp &= (x^1, x^2), \quad m = 0, 1, \dots, \quad l = 0, \pm 1, \dots, \quad \sigma = \pm 1, \end{aligned} \quad (130)$$

onde

$$\begin{aligned} u_{m,l,\sigma}(x_\perp) &= \sqrt{\gamma} g_l(\varphi) \phi_{m,l,\sigma}(r) v_\sigma, \quad l \neq 0, \\ u_{m,0,+1}(x_\perp) &= \sqrt{\gamma} g_0(\varphi) \phi_{m,0,+1}(r) v_{+1}, \\ u_{m,0,-1}(x_\perp) &= \sqrt{\gamma} g_0(\varphi) \phi_{m,-1}^{ir}(r) v_{-1}, \quad \gamma = e|B|, \end{aligned}$$

e

$$g_l(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ i\varphi \left[ l - l_0 - \frac{1}{2} (1 + \sigma^3) \right] \right\},$$

$$v_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

As funções  $\phi_{m,l,\sigma}(r)$ ,  $\phi_{m,-1}^{ir}(r)$  são expressas através das funções de Laguerre  $I_{m+\alpha,m}(\rho)$  como

$$\phi_{m,l,\sigma}(r) = I_{m+|\nu|,m}(\rho), \quad \phi_{m,-1}^{ir}(r) = I_{m-\mu,m}(\rho),$$

$$\rho = \gamma r^2/2, \quad \nu = \mu + l - (1 + \sigma)/2. \quad (131)$$

Lembramos que as funções de Laguerre  $I_{m+\alpha,m}(\rho)$  se relacionam com os polinômios de Laguerre  $L_m^\alpha(x)$  (8.970, 8.972.1 [50]) através da expressão

$$I_{m+\alpha,m}(x) = \sqrt{\frac{m!}{\Gamma(m+\alpha+1)}} e^{-x/2} x^{\alpha/2} L_m^\alpha(x),$$

ver Apêndice (177). Para o campo magnético  $B > 0$ , o espectro de  $\omega$  correspondente às funções  $u_{m,l,\sigma}(x_\perp)$  dado em (18), exceto para as funções  $u_{m,0,-1}(x_\perp)$  para as quais o espectro de  $\omega$  é

$$\omega = 2\gamma m. \quad (132)$$

Então, o conjunto completo  $\pm\psi_a$ , com  $a = (m, l)$ , tem a forma

$$\pm\psi_{m,l}(x) = N(\Gamma P + M) \pm u_{m,l,-1}(x). \quad (133)$$

Esta última forma das soluções fornece as expressões corretas tanto para  $\omega \neq 0$  quanto para  $\omega = 0$ , porque os estados com  $\omega = 0$  podem ser expressos somente em termos dos espinores com  $\sigma = -1$  (notamos que  $+\psi \equiv 0$  para  $\omega = 0$ , mas é conveniente conservar  $u_+$  com  $+\varepsilon = M$  em (130)). O fator de normalização, com respeito ao produto escalar usual  $(\psi, \psi') = \int \psi^\dagger(x) \psi'(x) d\mathbf{x}$ , é

$$N = \begin{cases} [2|\pm\varepsilon| (|\pm\varepsilon| - M)]^{-1/2}, & \omega \neq 0, \\ [2M]^{-1}, & \omega = 0 \end{cases}.$$

O número quântico  $l$  caracteriza o momento angular da partícula e  $m$  seu número quântico radial, ver [48].

Para  $B < 0$  o espectro dos estados difere não trivialmente das expressões (18) e (19). Onde o  $\omega$  correspondente ao  $u_{m,l,\sigma}(r)$  é dado em (28), exceto para as funções  $u_{m,0,-1}(x_\perp)$  para as quais o espectro de  $\omega$  é

$$\omega = 2\gamma(m + 1 - \mu) . \quad (134)$$

Passemos agora ao caso com o parâmetro de extensão  $\Theta = \pi/2$ . Lembramos que as extensões auto-adjuntas do hamiltoniano de Dirac radial são necessárias somente no subespaço  $l = 0$ , o subespaço crítico. Portanto, quando  $r \rightarrow 0$ , somente as soluções no subespaço  $l = 0$  devem ser submetidas a uma condição assintótica da família uniparamétrica das condições de contorno. Por isso, para  $\Theta = \pi/2$ , as soluções são diferentes de (130) somente no subespaço  $l = 0$ ,

$$\begin{aligned} u_{m,0,+1}(x_\perp) &= \sqrt{\gamma}g_0(\varphi)\phi_{m,+1}^{ir}(r)v_{+1}, \quad \phi_{m,+1}^{ir}(r) = I_{m+\mu-1,m}(\rho), \\ u_{m,0,-1}(x_\perp) &= \sqrt{\gamma}g_0(\varphi)\phi_{m,0,-1}(r)v_{-1}, \end{aligned} \quad (135)$$

onde o espectro de  $u_{m,0,+1}(x_\perp)$  é dado por

$$\omega = 2\gamma(m + \mu), \quad B > 0, \quad (136)$$

$$\omega = 2\gamma m, \quad B < 0. \quad (137)$$

### 6.1.2 A construção das funções de Green

Um questão chave na construção das funções de Green são os somatórios na representação (125). No caso em consideração, este somatório pode ser completado por meio de relações específicas que podem ser estabelecidas para as soluções da equação de Dirac.

Nós começamos com o cálculo das funções de Green para o parâmetro de extensão  $\Theta = -\pi/2$  e  $B > 0$ . Neste caso, levando em conta que as autofunções  $u$  da equação  $[(\Gamma P_\perp)^2 + \omega]u = 0$ , correspondentes a qualquer  $\omega \neq 0$ , obedecem as relações

$$\begin{aligned} \Gamma P_\perp \pm u_{m_\pm, l, -\sigma}(x) &= -i\sqrt{\omega} \pm u_{m_\pm, l, \sigma}(x), \quad l \leq 0, \quad P_\perp = (0, P_1, P_2), \\ \Gamma P_\perp \pm u_{m, l, -\sigma}(x) &= i\sqrt{\omega} \pm u_{m, l, \sigma}(x), \quad l \geq 1, \quad m_\pm = m + (1 \pm \sigma)/2, \end{aligned} \quad (138)$$

e a forma explicita das soluções  $\pm\psi_{m,l}$ , podemos verificar que para  $|\varepsilon| \neq M$  são válidas as

seguintes relações

$$\begin{aligned} \pm\psi_{m,l}(x) \pm\bar{\psi}_{m,l}(x') &= (\Gamma P + M) \frac{1}{2_{\pm\varepsilon}} e^{-i\pm\varepsilon\Delta x^0} \sum_{\sigma=\pm 1} \phi_{m-,l,\sigma}(x_{\perp}, x'_{\perp}) \Xi_{\sigma}, \quad l \leq 0, \\ \pm\psi_{m,l}(x) \pm\bar{\psi}_{m,l}(x') &= (\Gamma P + M) \frac{1}{2_{\pm\varepsilon}} e^{-i\pm\varepsilon\Delta x^0} \sum_{\sigma=\pm 1} \phi_{m,l,\sigma}(x_{\perp}, x'_{\perp}) \Xi_{\sigma}, \quad l \geq 1, \end{aligned} \quad (139)$$

onde

$$\begin{aligned} \phi_{m,l,\sigma}(x_{\perp}, x'_{\perp}) &= \frac{\gamma}{2\pi} e^{i[l-l_0-(1+\sigma)/2]\Delta\varphi} I_{m+\alpha,m}(\rho) I_{m+\alpha,m}(\rho'), \quad (140) \\ \Delta\varphi = \varphi - \varphi', \quad \alpha &= \begin{cases} \mu + l - (1 + \sigma)/2, & l \geq 1 \\ -[\mu + l - (1 + \sigma)/2], & l \leq 0 \end{cases}, \quad \Xi_{\pm 1} = (1 \pm \sigma^3)/2. \end{aligned}$$

As relações acima e as Eqs. (123), (125) permitem representar a função de Green causal na forma

$$\begin{aligned} S^c(x, x') &= (\Gamma P + M) \Delta^c(x, x'), \\ \Delta^c(x, x') &= i \sum_{m,l,\sigma} \left[ \theta(\Delta x^0) \frac{e^{-i+\varepsilon\Delta x^0}}{2_{+\varepsilon}} - \theta(-\Delta x^0) \frac{e^{-i-\varepsilon\Delta x^0}}{2_{-\varepsilon}} \right] \phi_{m,l,\sigma}(x_{\perp}, x'_{\perp}) \Xi_{\sigma}. \end{aligned} \quad (141)$$

Portanto, podemos usar as representações

$$\theta(\Delta x^0) \frac{e^{-i+\varepsilon\Delta x^0}}{2_{+\varepsilon}} - \theta(-\Delta x^0) \frac{e^{-i-\varepsilon\Delta x^0}}{2_{-\varepsilon}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip_0\Delta x^0}}{\varepsilon^2 - p_0^2 - i\varepsilon} dp_0, \quad (142)$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2 - p_0^2 - i\varepsilon} = i \int_0^{\infty} e^{-i(\varepsilon^2 - p_0^2)s} ds, \quad (143)$$

na Eq. (141). Integrando sobre  $p_0$ , nós obtemos finalmente

$$\begin{aligned} \Delta^c(x, x') &= \int_0^{\infty} f(x, x', s) ds, \\ f(x, x', s) &= \frac{1}{2(\pi s)^{1/2}} e^{\frac{-i\Delta x_0^2}{4s}} e^{i\pi/4} e^{-iM^2 s} i \sum_{m,l,\sigma} e^{-i\omega s} \phi_{m,l,\sigma}(x_{\perp}, x'_{\perp}) \Xi_{\sigma}. \end{aligned} \quad (144)$$

O caminho da integração sobre  $s$  é deformado de forma a passar um pouco abaixo dos pontos singulares  $s_k = k\pi/\gamma$ ,  $k = 1, 2, \dots$ .

Usando (125), (139), e a representação

$$\begin{aligned} -\theta(-\Delta x^0) \frac{e^{-i+\varepsilon\Delta x^0}}{2_{+\varepsilon}} + \theta(\Delta x^0) \frac{e^{-i-\varepsilon\Delta x^0}}{2_{-\varepsilon}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ip_0\Delta x^0}}{\varepsilon^2 - p_0^2 + i\varepsilon} dp_0, \\ \frac{1}{\varepsilon^2 - p_0^2 + i\varepsilon} &= i \int_{-\infty}^0 e^{-i(\varepsilon^2 - p_0^2)s} ds. \end{aligned} \quad (145)$$

no lugar de (142), (143), nós obtemos de (124),

$$S^{\bar{c}}(x, x') = (\Gamma P + M) \Delta^{\bar{c}}(x, x'), \quad \Delta^{\bar{c}}(x, x') = \int_{-0}^{-\infty} f(x, x', s) ds, \quad (146)$$

onde  $f(x, x', s)$  é dada pela Eq. (144). Os valores negativos de  $s$  são definidos como  $s = |s| e^{-i\pi}$ , e o caminho de integração sobre  $s$  é deformado para passar um pouco abaixo dos pontos singulares  $-s_k$ .

Agora, consideraremos os somatórios em (144). Aplicando a formula (8.976 (1) [50]) podemos somar sobre  $m$  e obter

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-i2m\gamma s} I_{m+\alpha, m}(\rho) I_{m+\alpha, m}(\rho') &= \exp\left\{\frac{i}{2}(\rho + \rho') \cot(\gamma s)\right\} \\ &\times \frac{e^{i\alpha\gamma s} e^{i\gamma s}}{2i \sin(\gamma s)} e^{-\frac{i\pi\alpha}{2}} J_{\alpha}(z), \quad z = \sqrt{\rho\rho'} / \sin(\gamma s), \end{aligned} \quad (147)$$

onde  $J_{\alpha}(z)$  são as funções de Bessel (8.402 [50]), e para  $s$  negativo nós tomamos  $\arg s = -\pi + 0$ .

Resultados semelhantes podem ser obtidos para o caso  $B < 0$ . Neste caso, usamos as soluções correspondentes ao espectro de  $\omega$  (28), (134). Portanto, estes resultados podem ser unificados e permitem obter expressões que são válidas para qualquer sinal de  $B$ ,

$$\begin{aligned} f(x, x', s) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x, x', s), \quad f_l(x, x', s) = A(s) \sum_{\sigma=\pm 1} \Phi_{l, \sigma}(s) e^{-i\sigma eBs} \Xi_{\sigma}, \\ A(s) &= \frac{eB}{8\pi^{3/2} s^{1/2} \sin(eBs)} \exp\left\{\frac{i\pi}{4} - iM^2 s - il_0 \Delta\varphi\right\} \\ &\times \exp\left\{-\frac{i(\Delta x_0)^2}{4s} + \frac{ieB}{4}(r^2 + r'^2) \cot(eBs)\right\}, \end{aligned} \quad (148)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{l, \sigma}(s) &= e^{il_{\sigma} \Delta\varphi} e^{-i(l_{\sigma} + \mu)eBs} e^{-\frac{i\pi|l_{\sigma} + \mu|}{2}} J_{|l_{\sigma} + \mu|}(z), \quad l_{\sigma} = l - (1 + \sigma)/2, \quad l \neq 0, \\ \Phi_{0, +1}(s) &= e^{-i\Delta\varphi} e^{i(1-\mu)eBs} e^{-\frac{i\pi(1-\mu)}{2}} J_{1-\mu}(z), \quad \Phi_{0, -1}(s) = e^{-i\mu eBs} e^{\frac{i\pi\mu}{2}} J_{-\mu}(z). \end{aligned} \quad (149)$$

Agora, consideraremos o somatório sobre  $l$ . Podemos ver que as seguintes relações são válidas

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{l, -1}(s) &= \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_{l+1, +1}(s) = e^{-i\mu eBs} Y(z, \Delta\varphi - eBs, \mu), \\ \sum_{l=-1}^{-\infty} \Phi_{l, -1}(s) &= \sum_{l=-1}^{-\infty} \Phi_{l+1, +1}(s) = e^{-i\mu eBs} Y(z, -\Delta\varphi + eBs, -\mu), \end{aligned}$$

onde

$$Y(z, \eta, \mu) = a_1(z) + \tilde{Y}(z, \eta, \mu), \quad \tilde{Y}(z, \eta, \mu) = \sum_{l=2}^{\infty} a_l(z), \quad a_l(z) = e^{i\eta l} (-i)^{l+\mu} J_{l+\mu}(z). \quad (150)$$

A avaliação da soma em (150) pode ser feita de forma semelhante a realizada em [1]. Nós notamos que todas as derivadas  $\partial_z a_l(z)$  existem, na semi-reta  $0 < z < \infty$ , e a relação (8.471 (2) [50]),  $\partial_z J_\nu(z) = [J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z)]/2$ , pode ser usada. A série  $\tilde{Y}(z, \eta, \mu)$  é convergente e a série de derivadas  $\sum_{l=2}^{\infty} \partial_z a_l(z)$  é convergente uniformemente em  $(0, \infty)$ . Esta condição é suficiente para escrever  $\partial_z \tilde{Y}(z, \eta, \mu) = \sum_{l=2}^{\infty} \partial_z a_l(z)$ . Então, chegamos à equação diferencial com respeito a  $Y(z, \eta, \mu)$ ,

$$\frac{d}{dz} Y(z, \eta, \mu) = -Y(z, \eta, \mu) i \cos \eta + \frac{1}{2} (-i)^\mu [-ie^{i\eta} J_\mu(z) + J_{1+\mu}(z)]. \quad (151)$$

que é válida na semi-reta,  $0 < z < \infty$ . A solução de (151) é

$$Y(z, \eta, \mu) = \frac{1}{2} (-i)^\mu \int_0^z e^{i(y-z)\cos\eta} [-ie^{i\eta} J_\mu(y) + J_{1+\mu}(y)] dy, \quad (152)$$

a qual é bem definida também para  $Y(z, -\eta, -\mu)$ .

É útil introduzir a seguinte função

$$f_{nc}(x, x', s) = \sum_{l \neq 0} f_l(x, x', s).$$

Ela define a parte das funções de Green comum a todas as extensões. Usando a função  $Y(z, \eta, \mu)$  (150), (152) podemos escrever

$$f_{nc}(x, x', s) = A(s) e^{-i\mu eBs} e^{-ieBs\sigma^3} \left\{ Y(z, \Delta\varphi - eBs, \mu) + Y(z, -\Delta\varphi + eBs, -\mu) + \left[ e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} J_\mu(z) - e^{-i(\Delta\varphi - eBs)} e^{-\frac{i\pi(1-\mu)}{2}} J_{1-\mu}(z) \right] \Xi_{+1} \right\}. \quad (153)$$

A função  $f_0(x, x', s)$  é específica para cada extensão. Portanto, é razoável marcá-la por um índice que leva o valor do parâmetro de extensão. Então, para  $\Theta = -\pi/2$ , temos

$$f_0^{(-\pi/2)}(x, x', s) = A(s) e^{-i\mu eBs} \left[ e^{-i\Delta\varphi} e^{-\frac{i\pi(1-\mu)}{2}} J_{1-\mu}(z) \Xi_{+1} + e^{-ieBs\sigma^3} e^{\frac{i\pi\mu}{2}} J_{-\mu}(z) \Xi_{-1} \right]. \quad (154)$$

Por conseguinte, a função  $f(x, x', s)$  adquire o mesmo índice,

$$f^{(-\pi/2)}(x, x', s) = f_{nc}(x, x', s) + f_0^{(-\pi/2)}(x, x', s). \quad (155)$$

Para o parâmetro de extensão  $\Theta = \pi/2$ , obtemos

$$\begin{aligned} f_0^{(\pi/2)}(x, x', s) &= A(s) e^{-i\mu eBs} \left[ e^{-i\Delta\varphi} e^{-\frac{i\pi(\mu-1)}{2}} J_{\mu-1}(z) \Xi_{+1} + e^{-ieBs\sigma^3} e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} J_{\mu}(z) \Xi_{-1} \right], \\ f^{(\pi/2)}(x, x', s) &= f_{nc}(x, x', s) + f_0^{(\pi/2)}(x, x', s). \end{aligned} \quad (156)$$

Além disso, em 2 + 1 dimensões, podemos considerar partículas com a polarização "spin para baixo". As funções de onda correspondentes  $\psi^{(-1)}(x)$  podem ser apresentadas como

$$\psi^{(-1)}(x) = \sigma^1 (\Gamma P - M) u(x),$$

onde  $u(x)$  são as soluções (130) da equação de Dirac ao quadrado. O propagador relacionado às partículas deste tipo pode ser expresso em termos da função  $\Delta^c(x, x')$  (141),

$$S_{(-1)}^c(x, x') = -\sigma^1 (\Gamma P - M) \Delta^c(x, x') \sigma^1.$$

Neste ponto é interessante fazermos algumas observações.

Podemos ver que, para as extensões consideradas acima, existe uma relação simples entre as funções de Green escalares e as funções de Green da equação de Dirac ao quadrado. Agora, consideraremos esta relação para o exemplo das funções de Green causais. Primeiramente, notamos que a equação de Klein-Gordon difere da equação de Dirac ao quadrado pelo termo da interação de Zeeman. Depois, podemos ver (lembrando a origem do número quântico  $l$  para ambos os casos: para partículas com e sem spin) que o propagador escalar pode ser derivado da  $\Delta^c(x, x')$ , retendo somente os termos com  $\sigma = -1$ . O termo  $eB\sigma^3$ , que é responsável pela interação de Zeeman com o campo magnético uniforme, deve ser removido. A interação de Zeeman com o fluxo do solenóide, que influencia os termos com  $l = 0$ , depende do sinal do fluxo e pode ser repulsiva ou atrativa. A interação repulsiva de contato é fisicamente equivalente ao caso sem spin, porque, em ambos os casos, as funções de onda correspondentes se anulam na origem. A condição de contorno necessária é realizada para o parâmetro de extensão  $\Theta = \pi/2$ . Portanto, podemos obter as funções de Green escalares usando os coeficientes de  $\Xi_{-1}$  em  $f_l(x, x', s)$  (148), (149) e  $f_0^{(\pi/2)}(x, x', s)$  (156). Seguindo essas prescrições, chegamos à expressão (175) obtida por cálculo direto.

No caso sem spin não existe uma orientação fisicamente preferível do plano  $x^1 x^2$ . Portanto, o sentido do fluxo do solenóide não importa, i.e., a simetria AB,  $l_0 \rightarrow l_0 + 1$ , é conservada. O

sentido do campo magnético uniforme não importa também. Isto pode ser observado da forma explícita nas funções de Green (175), onde a mudança  $B \rightarrow -B$  é equivalente à escolha da orientação do plano no sentido oposto:  $l \rightarrow -l$ ,  $\Delta\varphi \rightarrow -\Delta\varphi$ ,  $\Phi \rightarrow -\Phi$ . No caso com spin, o sentido do spin quebra a simetria relacionada à orientação do plano. A interação de Zeeman do spin com o background viola tanto a simetria AB quanto a simetria com respeito à mudança  $B \rightarrow -B$ .

É conhecido, que a influência do fluxo do solenóide na partícula é observado somente quando o fluxo não é igual a um número quântico inteiro ( $\mu \neq 0$ ). Então, achamos instrutivo considerar as funções de Green para o caso particular  $\mu = 0$ . Notamos que a parte  $f_{nc}(x, x', s)$  (153) da função  $f(x, x', s)$  é regular para quaisquer valores dos argumentos, enquanto a parte  $f_0(x, x', s)$  é singular na origem. Então, tomando o limite  $\mu \rightarrow 0$  em (153) e usando a relação  $J_1(y) = -J'_0(y)$  obtemos,

$$f_{nc}(x, x', s) = A(s) e^{-ieBs\sigma^3} \left\{ e^{-iz \cos(\Delta\varphi - eBs)} - J_0(z) + [J_0(z) + ie^{-i(\Delta\varphi - eBs)} J_1(z)] \Xi_{+1} \right\}.$$

A expressão correspondente para  $f_0(x, x', s)$  pode ser obtida como segue. Nós restringimos o campo de valores de  $z$  ao intervalo  $0 < \delta < z < \infty$ , onde  $\delta \ll 1$ . Depois, tomamos o limite  $\mu \rightarrow 0$  e usamos a continuidade das funções de Bessel com respeito ao seu índice. Finalmente, construímos a continuação analítica das expressões obtidas no intervalo  $(0, \delta)$ . Então, começando de (154) ou de (156) obtemos,

$$f_0(x, x', s) = A(s) \left[ -ie^{-i\Delta\varphi} J_1(z) \Xi_{+1} + e^{ieBs} J_0(z) \Xi_{-1} \right],$$

onde o índice não é mais necessário. Então, a forma explícita da  $f(x, x', s)$  é

$$f(x, x', s) = \frac{eB}{8\pi^{3/2}s^{1/2} \sin(eBs)} \exp \left\{ \frac{i\pi}{4} - \frac{i(\Delta x_0)^2}{4s} - iM^2s - ieBs\sigma^3 \right\} \\ \times \exp \left\{ -il_0\Delta\varphi + \frac{ieB}{4} (r^2 + r'^2) \cot(eBs) - \frac{ieBrr' \cos(\Delta\varphi - eBs)}{2 \sin(eBs)} \right\}. \quad (157)$$

Aplicando uma transformação das coordenadas cilíndricas em (157) em coordenadas Cartesianas, e fazendo  $l_0 = 0$ , podemos obter o resultado conhecido para o campo magnético uniforme, ver por exemplo [98].

### 6.1.3 O caso não relativístico

Considerar as funções de Green, no background em questão, para o caso não relativístico é importante para várias aplicações físicas. Abaixo estudaremos este caso detalhadamente. As soluções da equação de Schrödinger para partículas (+) e antipartículas (-) de "spin para cima", no caso  $\Theta = -\pi/2$ , são

$$+\phi_{m,l}(x) = e^{-iEx^0} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} e^{i(l-l_0-1)\varphi} \phi_{m,l,+1}(r), \quad E = \frac{\omega_{m,l,\sigma}}{2M}, \quad (158)$$

$$-\phi_{m,l}(x) = e^{-iEx^0} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} e^{-i(l-l_0)\varphi} \phi_{m,l,-1}(r), \quad l \neq 0,$$

$$-\phi_{m,0}(x) = e^{-iEx^0} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} e^{il_0\varphi} \phi_{m,-1}^{ir}(r), \quad (159)$$

onde os valores  $\omega_{m,l,\sigma}$  são definidos por  $m, l, \sigma$  usando as formulas (18), (132) para  $B > 0$ , e (28), (134) para  $B < 0$ . As soluções  $+\phi_{m,l}(x)$  ( $-\phi_{m,l}(x)$ ) para o caso de "spin para baixo" podem ser obtidas das soluções  $-\phi_{m,l}(x)$  ( $+\phi_{m,l}(x)$ ) do caso de "spin para cima" pela mudança  $\varphi \rightarrow -\varphi$  em (158), (159).

As funções de Green retardadas para partículas e antipartículas são definidas como

$$S^{ret,(\pm)}(x, x') = \theta(\Delta x^0) \sum_l S_l^{(\pm)}(x, x'), \quad S_l^{(\pm)}(x, x') = i \sum_m \pm \phi_{m,l}(x) \pm \phi_{m,l}^*(x'),$$

$$S_{nc}^{(\pm)}(x, x') = \sum_{l \neq 0} S_l^{(\pm)}(x, x'), \quad (160)$$

onde a parte  $S_{nc}^{(\pm)}(x, x')$  é comum para todas as extensões, enquanto  $S_0^{(\pm)}(x, x')$  é específica para cada extensão. Completando os somatórios em (160) obtemos

$$S_l^{(\pm)}(x, x') = A_{nr}(x, x') e^{\mp i\gamma\tau} e^{\pm i(l_{\pm}-l_0)\Delta\varphi} e^{-i|l_{\pm}+\mu|\gamma\tau} e^{-\frac{i\pi|l_{\pm}+\mu|}{2}} J_{|l_{\pm}+\mu|}(z_{nr}),$$

$$A_{nr}(x, x') = \frac{\gamma}{4\pi \sin(\gamma\tau)} \exp\left[\frac{i}{2}(\rho + \rho') \cot(\gamma\tau)\right], \quad (161)$$

$$S_{nc}^{(+)}(x, x') = A_{nr}(x, x') e^{-il_0\Delta\varphi} e^{-i(1+\mu)eB\tau} \left\{ e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} J_{\mu}(z_{nr}) - e^{-i\Delta\varphi} e^{ieB\tau} e^{-\frac{i\pi(1-\mu)}{2}} J_{1-\mu}(z_{nr}) \right.$$

$$\left. + Y(z_{nr}, \Delta\varphi - eB\tau, \mu) + Y(z_{nr}, -\Delta\varphi + eB\tau, -\mu) \right\}, \quad (162)$$

$$S_{nc}^{(-)}(x, x') = A_{nr}(x, x') e^{il_0\Delta\varphi} e^{i(1-\mu)eB\tau}$$

$$\times \left\{ Y(z_{nr}, -\Delta\varphi - eB\tau, \mu) + Y(z_{nr}, \Delta\varphi + eB\tau, -\mu) \right\}, \quad (163)$$

$$z_{nr} = \sqrt{\rho\rho'}/\sin(\gamma\tau), \quad \tau = \Delta x^0/2M, \quad l_{\pm} = l - (1 \pm 1)/2, \quad l \neq 0,$$

e para  $l = 0$ ,

$$S_0^{(+)(\mp\pi/2)}(x, x') = A_{nr}(x, x') e^{-i(l_0+1)\Delta\varphi} e^{-i\mu eB\tau} e^{\mp\frac{i\pi(1-\mu)}{2}} J_{\pm(1-\mu)}(z_{nr}), \quad (164)$$

$$S_0^{(-)(\mp\pi/2)}(x, x') = A_{nr}(x, x') e^{il_0\Delta\varphi} e^{i(1-\mu)eB\tau} e^{\pm\frac{i\pi\mu}{2}} J_{\mp\mu}(z_{nr}). \quad (165)$$

A função de Green no caso de "spin para baixo" pode ser obtida pela mudança  $\Delta\varphi \rightarrow -\Delta\varphi$  em (161)-(165) e pela mudança  $S^{(\pm)}$  por  $S^{(\mp)}$  nas funções  $S(x, x')$  em (161)-(165). Então, podemos ver que as funções de Green para uma partícula não relativística são irregulares em  $r = 0$  quando a interação de contato é atrativa.

Notamos que para o caso limite  $B = 0$  (ausência do campo magnético uniforme),  $S_l^{(+)(-\pi/2)}(x, x')$  coincide com a expressão conhecida para uma partícula sem spin [81, 82, 83], como seria esperado para o caso da interação de contato repulsiva. Enquanto  $S_l^{(+)(\pi/2)}(x, x')$  para  $B = 0$  coincide com as expressões correspondentes obtidas em [89].

## 6.2 O caso de 3+1 dimensões

Para obter as funções de Green em 3 + 1 dimensões nós usamos as soluções ortonormalizadas  $\pm\Psi_{p_3, m, l, \sigma}(x)$  da equação de Dirac encontradas na Seções 3.2, 4.2. Os números quânticos  $m$  e  $l$  têm o mesmo sentido que no caso de (2 + 1) dimensões,  $p_3$  é o  $x^3$ -componente do momento, e  $\sigma$  é o número quântico de spin. O espectro de energia positiva é dado por  $+\varepsilon$  e o espectro de energia negativa é dado por  $-\varepsilon$ . Ambos são expressos através da quantidade  $\omega$  como

$$+\varepsilon = -\varepsilon = \sqrt{M^2 + p_3^2 + \omega}. \quad (166)$$

Os espectros de  $\omega$  são dados em (18), (132) para  $B > 0$ , e em (28), (134) para  $B < 0$ . Para  $\omega \neq 0$  apresentamos as soluções  $\pm\Psi_{p_3, m, l, \sigma}$  na seguinte forma

$$\begin{aligned} \pm\Psi_{p_3, m, l, \sigma}(x) &= N(\gamma^\nu P_\nu + M) \pm U_{p_3, m, l, \sigma}(x), \\ \pm U_{p_3, m, l, \sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\pm\varepsilon x^0 - ip_3 x^3} U_{m, l, \sigma}(x_\perp), \\ U_{m, l, \sigma}(x_\perp) &= \begin{pmatrix} u_{m, l, \sigma}(x_\perp) \\ \sigma^3 u_{m, l, \sigma}(x_\perp) \end{pmatrix}, \quad N = [2|\pm\varepsilon|(|\pm\varepsilon| + p_3)]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (167)$$

e para  $\omega = 0$ ,

$$\pm\Psi_{p_3, 0, l, -\xi}(x) = N(\gamma^\nu P_\nu + M) \pm U_{p_3, 0, l, -\xi}(x), \quad \xi = \text{sgn}(B),$$

onde  $u_{m,l,\sigma}(x_\perp)$  são os 2-espinores definidos em (130).

Nós construímos as funções de Green usando as soluções que correspondem às extensões naturais do operador de Dirac, i.e., para os parâmetros de extensão escolhidos como  $\Theta_{+1} = \Theta_{-1} = \Theta$ , e  $\Theta = \pm\pi/2$ . Primeiramente nós consideramos o caso  $\Theta = -\pi/2$ , e  $B > 0$ . Notamos que para  $\omega \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}\gamma^\nu P_{\perp\nu} U_{m,l,-\sigma} &= i\sqrt{\omega} U_{m,l,\sigma}, \quad l \geq 1, \\ \gamma^\nu P_{\perp\nu} U_{m+,l,-\sigma} &= -i\sqrt{\omega} U_{m-,l,\sigma}, \quad l \leq 0,\end{aligned}\tag{168}$$

onde  $P_\perp = (0, P_1, P_2, 0)$ . Os somatórios em (125) serão semelhantes ao caso de (2+1) dimensões se usarmos as importantes relações derivadas por nós para as soluções (167). Explicitamente, para os estados com  $\omega \neq 0$ , são válidas as seguintes relações

$$\begin{aligned}& \sum_{\sigma=\pm 1} \pm \Psi_{p_3,m,l,\sigma}(x) \pm \bar{\Psi}_{p_3,m,l,\sigma}(x') \\ &= \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{2_{\pm\varepsilon}} (\gamma^\nu P_\nu + M) \frac{1}{2} (1 + \sigma \Sigma^3) \pm \phi_{p_3,m,l,\sigma}(x, x'), \quad l \geq 1, \\ & \sum_{\sigma=\pm 1} \pm \Psi_{p_3,m+,l,-\sigma}(x) \pm \bar{\Psi}_{p_3,m+,l,-\sigma}(x') \\ &= \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{1}{2_{\pm\varepsilon}} (\gamma^\nu P_\nu + M) \frac{1}{2} (1 + \sigma \Sigma^3) \pm \phi_{p_3,m+,l,-\sigma}(x, x'), \quad l \leq 0,\end{aligned}\tag{169}$$

enquanto para  $\omega = 0$ , temos

$$\pm \Psi_{p_3,0,l,-1}(x) \pm \bar{\Psi}_{p_3,0,l,-1}(x') = \frac{1}{2_{\pm\varepsilon}} (\gamma^\nu P_\nu + M) \frac{1}{2} (1 - \Sigma^3) \pm \phi_{p_3,0,l,-1}(x, x'),$$

onde

$$\pm \phi_{p_3,m,l,\sigma}(x, x') = \frac{1}{2\pi} e^{-i \pm \varepsilon \Delta x^0 - i p_3 \Delta x^3} \phi_{m,l,\sigma}(x_\perp, x'_\perp), \quad \Delta x^3 = x^3 - x'^3.\tag{170}$$

As funções  $\phi_{m,l,\sigma}(x_\perp, x'_\perp)$  são definidas em (140). Com isto,

$$\begin{aligned}S^c(x, x') &= (\gamma^\nu P_\nu + M) \Delta^c(x, x'), \\ \Delta^c(x, x') &= i \sum_{m,l,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} dp_3 \frac{1}{2} (1 + \sigma \Sigma^3) \\ &\times \left[ \theta(\Delta x^0) \frac{1}{2_{+\varepsilon}} + \phi_{p_3,m,l,\sigma}(x, x') - \theta(-\Delta x^0) \frac{1}{2_{-\varepsilon}} - \phi_{p_3,m,l,\sigma}(x, x') \right].\end{aligned}\tag{171}$$

Aplicando as relações (142), (143), obtemos a representação de  $\Delta^c$  através da integral do tempo próprio,

$$\begin{aligned}\Delta^c(x, x') &= \int_0^\infty f(x, x', s) ds, \quad f(x, x', s) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x, x', s), \\ f_l(x, x', s) &= D(s) \sum_{\sigma=\pm 1} \Phi_{l,\sigma}(s) e^{-i\sigma eBs} \frac{1}{2} (1 + \sigma \Sigma^3), \\ D(s) &= \frac{eB}{16\pi^2 s \sin(eBs)} \exp \left\{ \frac{i}{4s} [(\Delta x_3)^2 - (\Delta x_0)^2] - iM^2 s \right\} \\ &\times \exp \left\{ -il_0 \Delta\varphi + \frac{ieB}{4} (r^2 + r'^2) \cot(eBs) \right\},\end{aligned}\tag{172}$$

onde  $\Phi_{l,\sigma}(s)$  são definidas em (149).

Completando os cálculos, de forma semelhantes ao caso  $B < 0$ , podemos verificar que (172) é válida para ambos os sinais de  $B$ . Portanto, para qualquer sinal de  $B$ , obtemos

$$\begin{aligned}f_{nc}(x, x', s) &= \sum_{l \neq 0} f_l(x, x', s) \\ &= D(s) e^{-ieBs(\mu + \Sigma^3)} \left\{ Y(z, \Delta\varphi - eBs, \mu) + Y(z, -\Delta\varphi + eBs, -\mu) \right. \\ &\quad \left. + \left[ e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} J_\mu(z) - e^{-i(\Delta\varphi - eBs)} e^{-\frac{i\pi(1-\mu)}{2}} J_{1-\mu}(z) \right] \frac{1}{2} (1 + \Sigma^3) \right\}, \\ f_0^{(-\pi/2)}(x, x', s) &= \frac{1}{2} D(s) e^{-i\mu eBs} \left[ e^{-i\Delta\varphi} e^{-\frac{i\pi(1-\mu)}{2}} J_{1-\mu}(z) (1 + \Sigma^3) \right. \\ &\quad \left. + e^{ieBs} e^{\frac{i\pi\mu}{2}} J_{-\mu}(z) (1 - \Sigma^3) \right], \\ f^{(-\pi/2)}(x, x', s) &= f_{nc}(x, x', s) + f_0^{(-\pi/2)}(x, x', s).\end{aligned}\tag{173}$$

Usando as soluções correspondentes ao caso  $\Theta = \pi/2$ , obtemos

$$\begin{aligned}f_0^{(\pi/2)}(x, x', s) &= \frac{1}{2} D(s) e^{-i\mu eBs} \left[ e^{-i\Delta\varphi} e^{-\frac{i\pi(\mu-1)}{2}} J_{\mu-1}(z) (1 + \Sigma^3) \right. \\ &\quad \left. + e^{ieBs} e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} J_\mu(z) (1 - \Sigma^3) \right], \\ f^{(\pi/2)}(x, x', s) &= f_{nc}(x, x', s) + f_0^{(\pi/2)}(x, x', s).\end{aligned}\tag{174}$$

### 6.3 O caso escalar

Nesta subsecção nós consideramos as funções de Green para uma partícula escalar. Elas são definidas pelas Eqs. (123), (124), (127), e (128), onde  $S^\mp(x, x')$  é

$$S^\mp(x, x') = \pm i \sum \pm \phi_n(x) \pm \phi_n^*(x'),$$

e  $\pm\phi_n(x)$  forma um conjunto completo de soluções ortonormalizadas da equação de Klein-Gordon. A extensão natural do operador de Klein-Gordon para as soluções em  $2 + 1$  dimensões e o espectro relacionado, como demonstrado na Seção 5.2, são

$$\begin{aligned}\pm\phi_{m,l}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-i\pm\varepsilon x^0} \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} e^{i(l-l_0)\varphi} I_{m+|l+\mu|,m}(\rho), \\ \pm\varepsilon &= \pm\sqrt{M^2 + \omega}, \quad \omega = \gamma[1 + 2m + |l + \mu| + \xi(l + \mu)], \\ l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad m = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Usando as Eqs. (142), (143), (145), e (147), nós calculamos os propagadores causal e anticausal. Eles têm a forma

$$\begin{aligned}S^c(x, x') &= \int_0^\infty f^{sc}(x, x', s) ds, \quad S^{\bar{c}}(x, x') = \int_{-\infty}^0 f^{sc}(x, x', s) ds, \\ f^{sc}(x, x', s) &= \sum_l f_l^{sc}(x, x', s), \quad f_l^{sc}(x, x', s) = A(s) e^{il\Delta\varphi} e^{-i(l+\mu)eBs} e^{-\frac{i\pi|l+\mu|}{2}} J_{|l+\mu|}, \\ f^{sc}(x, x', s) &= A(s) e^{-i\mu eBs} \left[ e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} J_\mu(z) \right. \\ &\quad \left. + Y(z, \Delta\varphi - eBs, \mu) + Y(z, -\Delta\varphi + eBs, -\mu) \right],\end{aligned}\tag{175}$$

onde  $A(s)$  é dado em (148), e  $Y(z, \eta, \mu)$  em (150), (152). A expressão (175) pode ser generalizada para o caso de  $(D + 1)$  dimensões, onde  $D$  é o número das dimensões espaciais, pela substituição de  $A(s)$  em (175) por  $A^{(D)}(s)$ ,

$$A^{(D)}(s) = A(s) \exp \left\{ \frac{i}{4s} \sum_{k=3}^D (\Delta x_k)^2 \right\} \left( \frac{e^{-\frac{i\pi}{2}}}{4\pi s} \right)^{(D-2)/2}, \quad D \geq 3.$$

## Apêndice

1. A função de Laguerre  $I_{n,m}(x)$  é definida como

$$I_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+n-m)}} \exp(-x/2) x^{(n-m)/2} \Phi(-m, n-m+1; x). \quad (176)$$

Onde,  $\Phi(a, b; x)$  é a função hipergeométrica confluyente padrão (ver [50], 9.210). Quando  $m$  é um número inteiro não-negativo; a função de Laguerre se relaciona com os polinômios de Laguerre  $L_m^\alpha(x)$  ([50], 8.970, 8.972.1) por

$$I_{m+\alpha,m}(x) = \sqrt{\frac{m!}{\Gamma(m+\alpha+1)}} e^{-x/2} x^{\alpha/2} L_m^\alpha(x), \quad (177)$$

$$L_m^\alpha(x) = \frac{1}{m!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^m}{dx^m} e^{-x} x^{m+\alpha}. \quad (178)$$

Usando as propriedades da função hipergeométrica confluyente ([50], 9.212; 9.213; 9.216), podemos obter as seguintes relações para as funções de Laguerre:

$$2\sqrt{x(n+1)}I_{n+1,m}(x) = (n-m+x)I_{n,m}(x) - 2xI'_{n,m}(x), \quad (179)$$

$$2\sqrt{x(m+1)}I_{n,m+1}(x) = (n-m-x)I_{n,m}(x) + 2xI'_{n,m}(x), \quad (180)$$

$$2\sqrt{xn}I_{n-1,m}(x) = (n-m+x)I_{n,m}(x) + 2xI'_{n,m}(x), \quad (181)$$

$$2\sqrt{xm}I_{n,m-1}(x) = (n-m-x)I_{n,m}(x) - 2xI'_{n,m}(x). \quad (182)$$

Usando as propriedades da função hipergeométrica confluyente, obtemos a seguinte representação

$$I_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+n-m)}} \exp(x/2) x^{(n-m)/2} \Phi(1+n, 1+n-m; -x) \quad (183)$$

e a relação ([50], 9.214)

$$I_{n,m}(x) = (-1)^{n-m} I_{m,n}(x), \quad n-m \text{ inteiro}. \quad (184)$$

As funções  $I_{\alpha+m,m}(x)$  satisfazem a condição de ortonormalidade,

$$\int_0^\infty I_{\alpha+n,n}(x) I_{\alpha+m,m}(x) dx = \delta_{m,n}, \quad (185)$$

que segue das propriedades correspondentes dos polinómios de Laguerre ( [50], 7.414.3). O conjunto das funções de Laguerre

$$I_{\alpha+m,m}(x), m = 0, 1, 2, \dots, \alpha > -1$$

é completo no espaço das funções de quadrado integráveis na semi-reta ( $x \geq 0$ ),

$$\sum_{m=0}^{\infty} I_{\alpha+m,m}(x) I_{\alpha+m,m}(y) = \delta(x-y). \quad (186)$$

2. A função  $\psi_{\lambda,\alpha}(x)$  é uma função par com respeito ao índice  $\alpha$ ,

$$\psi_{\lambda,\alpha}(x) = \psi_{\lambda,-\alpha}(x). \quad (187)$$

Ela pode ser expressa através das funções hipergeométricas confluentes,

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda,\alpha}(x) = e^{-\frac{x}{2}} & \left[ \frac{\Gamma(-\alpha) x^{\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{1-\alpha}{2} - \lambda)} \Phi\left(\frac{1+\alpha}{2} - \lambda, 1 + \alpha; x\right) \right. \\ & \left. + \frac{\Gamma(\alpha) x^{-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2} - \lambda)} \Phi\left(\frac{1-\alpha}{2} - \lambda, 1 - \alpha; x\right) \right], \end{aligned} \quad (188)$$

ou, usando (176), através das funções de Laguerre,

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda,\alpha}(x) &= \frac{\sqrt{\Gamma(1+n)\Gamma(1+m)}}{\sin(n-m)\pi} (\sin n\pi I_{n,m}(x) - \sin m\pi I_{m,n}(x)), \\ \alpha = n - m, \quad 2\lambda &= 1 + n + m, \quad n = \lambda - \frac{1-\alpha}{2}, \quad m = \lambda - \frac{1+\alpha}{2}. \end{aligned} \quad (189)$$

As relações

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda,\alpha}(x) &= \sqrt{x} \psi_{\lambda-\frac{1}{2},\alpha-1}(x) + \frac{1+\alpha-2\lambda}{2} \psi_{\lambda-1,\alpha}(x), \\ \psi_{\lambda,\alpha}(x) &= \sqrt{x} \psi_{\lambda-\frac{1}{2},\alpha+1}(x) + \frac{1-\alpha-2\lambda}{2} \psi_{\lambda-1,\alpha}(x), \\ 2x\psi'_{\lambda,\alpha}(x) &= (2\lambda-1-x) \psi_{\lambda,\alpha}(x) + \frac{1}{2} (2\lambda-1-\alpha)(2\lambda-1+\alpha) \psi_{\lambda-1,\alpha}(x), \\ 2x\psi'_{\lambda,\alpha}(x) &= (\alpha-x) \psi_{\lambda,\alpha}(x) + (2\lambda-1-\alpha) \sqrt{x} \psi_{\lambda-\frac{1}{2},\alpha+1}(x) \\ &= (x-2\lambda-1) \psi_{\lambda,\alpha} - 2\psi_{\lambda+1,\alpha} \end{aligned} \quad (190)$$

são válidas para as funções  $\psi_{\lambda,\alpha}(x)$ . A consequencia direta destas relações é

$$\begin{aligned} A_{\alpha} \psi_{\lambda,\alpha}(x) &= \frac{2\lambda-1+\alpha}{2} \psi_{\lambda-\frac{1}{2},\alpha-1}(x), \quad A_{\alpha}^{+} \psi_{\lambda-\frac{1}{2},\alpha-1}(x) = \psi_{\lambda,\alpha}(x), \\ A_{\alpha} &= \frac{x+\alpha}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \frac{d}{dx}, \quad A_{\alpha}^{+} = \frac{x+\alpha-1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \frac{d}{dx}. \end{aligned} \quad (191)$$

Usando o comportamento assintótico da função de Whittaker ([50], 9.227), nós obtemos

$$\psi_{\lambda,\alpha}(x) \sim x^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \rightarrow \infty; \quad \psi_{\lambda,\alpha}(x) \sim \frac{\Gamma(|\alpha|)}{\Gamma\left(\frac{1+|\alpha|}{2} - \lambda\right)} x^{-\frac{|\alpha|}{2}}, \quad \alpha \neq 0, \quad x \sim 0. \quad (192)$$

A função  $\psi_{\lambda,\alpha}(x)$  é bem definida e infinitamente diferenciável para  $0 < x < \infty$  e para qualquer  $\lambda, \alpha$  complexos. Com respeito a isto, notamos que a função de Laguerre não é definida para os  $n$  e  $m$  inteiros negativos. Nos casos particulares onde um dos números  $n$  ou  $m$  é não negativo e inteiro, a função  $\psi_{\lambda,\alpha}(x)$  coincide (a menos de um fator constante) com a função de Laguerre.

Segundo (192), as funções  $\psi_{\lambda,\alpha}(x)$  são de quadrado integráveis no intervalo  $0 \leq x < \infty$  mesmo para  $|\alpha| < 1$ . Isto não é verdade para  $|\alpha| \geq 1$ . As integrais correspondentes para  $\alpha \neq 0$  são (ver 7.611 em [50]):

$$\int_0^{\infty} \psi_{\lambda,\alpha}(x) \psi_{\lambda',\alpha}(x) dx = \frac{\pi}{(\lambda' - \lambda) \sin \alpha \pi} \left\{ \left[ \Gamma\left(\frac{1 + \alpha - 2\lambda'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 - \alpha - 2\lambda}{2}\right) \right]^{-1} - \left[ \Gamma\left(\frac{1 - \alpha - 2\lambda'}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1 + \alpha - 2\lambda}{2}\right) \right]^{-1} \right\}, \quad |\alpha| < 1, \quad (193)$$

$$\int_0^{\infty} |\psi_{\lambda,\alpha}(x)|^2 dx = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \frac{\psi\left(\frac{1+\alpha-2\lambda}{2}\right) - \psi\left(\frac{1-\alpha-2\lambda}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha-2\lambda}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1-\alpha-2\lambda}{2}\right)}, \quad |\alpha| < 1. \quad (194)$$

Onde  $\psi(x)$  é a derivada logarítmica da função  $\Gamma$  ([50], 8.360). No caso geral, as funções  $\psi_{\lambda,\alpha}(x)$  e  $\psi_{\lambda',\alpha}(x)$ ,  $\lambda' \neq \lambda$ , não são ortogonais, como segue de (193).

## Conclusões

Neste trabalho é estudada a equação de Dirac com o campo magneto-solenoidal e são obtidos os seguintes resultados.

1. A família uniparamétrica das extensões auto-adjuntas do hamiltoniano de Dirac é construída para o caso de  $2 + 1$  dimensões.

2. Para o caso de  $3 + 1$  dimensões, quando o operador de spin se conserva, é construída uma família biparamétrica de extensões auto-adjuntas do hamiltoniano de Dirac.

3. São consideradas a equação de Dirac em  $2 + 1$  e  $3 + 1$  dimensões e a equação de Klein-Gordon com um campo magneto-solenoidal regularizado. Os valores particulares dos parâmetros de extensão que correspondem ao solenóide regularizado são encontrados. Essas extensões são chamadas as extensões naturais.

4. Várias funções de Green da equação de Dirac em  $2 + 1$  e  $3 + 1$  dimensões são construídas para as extensões naturais.

5. São encontradas também as funções de Green não relativísticas e as funções de Green da equação de Klein-Gordon.

A tese foi preparada com base nos materiais publicados nos artigos seguintes:

1. S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Smirnov, Self-adjoint extensions of Dirac Hamiltonian in magnetic-solenoid field and related exact solutions, *Phys. Rev. A* 67 (2003) 024103.

2. S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Smirnov, Dirac equation in magnetic-solenoid field, *Eur. Phys. J. direct C* 30 (2003) 009; hep-th/0210312.

3. S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Smirnov, B.L. Voronov, Dirac fermions in a magnetic-solenoid field, in "Focus on Mathematical Physics Research" (Nova Science Publishers, New York, 2004), pp. 131-168; hep-th/0308093.

4. S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Smirnov, Green functions of the Dirac equation with magnetic-solenoid field, *J. Math. Phys.* 45 (2004) 1873; math-ph/0310007.

Os resultados foram apresentados em congressos seguintes:

1. S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Smirnov, Green functions of the relativistic wave equations for constant homogeneous external field in the presence of Aharonov-Bohm potential,

and their applications, XXII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Sao Lourenco (MG), Brasil, 22 a 26 de outubro de 2001.

2. S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Smirnov, Self-adjoint extension of the Dirac operator in the superposition of a uniform magnetic field and the Aharonov-Bohm potential, XXIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Aguas de Lindoia (SP), Brasil, 15 a 19 de outubro de 2002.

3. S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Smirnov, Green functions of the Dirac equation in the background of the magnetic-solenoid field, XII Escola de Verão Jorge André Swieca, Campos do Jordao (SP), Brazil, January 12 to 25, 2003.

4. S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Smirnov, New developments for the Dirac particle in a magnetic-solenoid field, XXIV Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Caxambu (MG), Brasil, 30 de setembro a 04 de outubro de 2003.

5. A.A. Smirnov, D.M. Gitman, Self-adjoint extensions of the Dirac operator with the Aharonov-Bohm potential, Lie and Jordan Algebras, their Representations and Applications-II, Guarujá (SP), Brasil, 3 de maio a 8 de maio de 2004.

## References

- [1] Y. Aharonov, D. Bohm, Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory, *Phys. Rev.* 115 (1959) 485.
- [2] M. Peshkin, A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect*, Lecture Notes in Physics, Vol. 340 (Springer Verlag, 1989)
- [3] M. G. Alford, F. Wilczek, Aharonov-Bohm interaction of cosmic strings with matter, *Phys. Rev. Lett.* 62 (1989) 1071.
- [4] Ph. Gerbert, Fermions in an Aharonov-Bohm field and cosmic strings, *Phys. Rev. D* 40 (1989) 1346.
- [5] S.A. Voropaev, D.V. Galtsov, D.A. Spasov, Bound states for fermions in the gauge Aharonov-Bohm field, *Phys. Lett. B* 267 (1991) 91.
- [6] C. R. Hagen, Aharonov-Bohm scattering of particles with spin, *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) 503.
- [7] C. R. Hagen, The Aharonov-Bohm scattering amplitude, *Phys. Rev. D* 41 (1990) 2015.
- [8] F. Vera, I. Schmidt, Helicity and the Aharonov-Bohm effect, *Phys. Rev. D* 42 (1990) 3591.
- [9] C.R. Hagen, Perturbation theory and the Aharonov-Bohm effect, *Phys. Rev. D* 52 (1995) 2466; hep-th/9503032.
- [10] V.D. Skarzhinsky, J. Audretsch, Scattering of scalar and Dirac particles by a magnetic tube of finite radius, *J. Phys. A* 30 (1997) 7603.
- [11] P. Giacconi, F. Maltoni, R. Soldati, On the scattering amplitude in the Aharonov-Bohm gauge field, *Phys. Rev. D* 53 (1996) 952; hep-th/9509003.
- [12] M. Gomes, J.M.C. Malbouisson, A.G. Rodrigues, A.J. da Silva, Relativistic scalar Aharonov-Bohm scattering, *J. Phys. A* 33 (2000) 5521; hep-th/0007080.

- [13] M. Boz, N.K. Pak, Consistency of the Born approximation for the spin 1/2 Aharonov-Bohm scattering, Phys. Rev. D 62 (2000) 045022; hep-th/0004162.
- [14] M.S. Shikakhwa, N.K. Pak, Partial wave analysis of the first order Born amplitude of a Dirac particle in an Aharonov-Bohm potential, Phys. Rev. D 67 (2003) 105019; hep-th/0302169.
- [15] C. R. Hagen, S. Ramaswamy, Aharonov-Bohm scattering of massive spin one particles, Phys. Rev. D 42 (1990) 3524.
- [16] M.L. Horner, A. S. Goldhaber, Aharonov-Bohm problem for spin one, Phys. Rev. D 55 (1997) 5951; hep-th/9702100.
- [17] C.R. Hagen, Spin dependence of the Aharonov-Bohm effect: a review, Int. J. Mod. Phys.A 6 (1991) 3119.
- [18] D. Stelitano, Aharonov-Bohm scattering of a localized wave packet. Analysis of the forward direction, Phys. Rev. D 51 (1995) 5876; hep-th/9411175.
- [19] S. Sakoda, M. Omote, The Aharonov-Bohm scattering: the role of the incident wave, J. Math. Phys. 38 (1997) 716; hep-th/9603185.
- [20] M. Arai, H. Minakata, Unitarity of the Aharonov-Bohm scattering amplitudes, Int. J. Mod. Phys. A 13 (1998) 831; hep-th/9610219.
- [21] J. Audretsch, V.D. Skarzhinsky, B.L. Voronov, Elastic scattering and bound states in the Aharonov-Bohm potential superimposed by an attractive  $\rho^{-2}$  potential, J. Phys. A 34 (2001) 235; quant-ph/0004065.
- [22] P.K. Anastasovski et al., Aharonov-Bohm effect as the basis of electromagnetic energy inherent in the vacuum, Found. Phys. Lett. 15 (2002) 561.
- [23] M.Y. Choi, M. Lee, Exact quantum description of the Aharonov-Bohm effect, Current Applied Physics 4 (2004) 267.
- [24] P. Gornicki, Aharonov-Bohm effect and vacuum polarization, Annals Phys. 202 (1990) 271.

- [25] E.G. Flekkøy, J.M. Leinaas, Vacuum currents around a magnetic flux string, *Int. J. Mod. Phys. A* 6 (1991) 5327.
- [26] Yu.A. Sitenko, The Aharonov-Bohm effect and inducing of vacuum charge by a singular magnetic string, *Nucl. Phys. B* 372 (1992) 622.
- [27] O. Bergman, G. Lozano, Aharonov-Bohm scattering, contact interactions and scale invariance, *Annals Phys.* 229 (1994) 416; hep-th/9302116.
- [28] R.R. Parwani, Spin polarization by external magnetic fields, Aharonov-Bohm flux strings, and chiral symmetry breaking in QED in three-dimensions, *Int. J. Mod. Phys. A* 11 (1996) 1715; hep-th/9506069.
- [29] J. Audretsch, U. Jasper, V.D. Skarzhinsky, Bremsstrahlung of relativistic electrons in the Aharonov-Bohm potential, *Phys. Rev. D* 53 (1996) 2178; hep-th/9709133.
- [30] V.D. Skarzhinsky, J. Audretsch, U. Jasper, Electron-positron pair production in the Aharonov-Bohm potential, *Phys. Rev. D* 53 (1996) 2190; hep-th/9709134.
- [31] J. Audretsch, V.D. Skarzhinsky, Quantum processes beyond the Aharonov-Bohm effect, *Found. Phys.* 28 (1998) 777; hep-th/9709095.
- [32] L. C. de Albuquerque, M. Gomes, A. J. da Silva, Radiative corrections to the Aharonov-Bohm scattering, *Phys. Rev. D* 61 (1999) 016003.
- [33] V.B. Bezerra, Gravitational analogs of the Aharonov-Bohm effect, *J. Math. Phys.* 30 (1989) 2895.
- [34] V.B. Bezerra, Gravitational Aharonov-Bohm effect in a locally flat space-time, *Class. Quant. Grav.* 8 (1991) 1939.
- [35] B. Jensen, J. Kucera, On a gravitational Aharonov-Bohm effect, *J. Math. Phys.* 34 (1993) 4975.
- [36] Yu.A. Sitenko, A.V. Mishchenko, Aharonov-Bohm effect in curved space and cosmic strings, *J. Exp. Theor. Phys.* 81 (1995) 831; hep-th/9711121.

- [37] M. Alvarez, Aharonov-Bohm scattering on a cone, *J. Phys. A* 32 (1999) 4079.
- [38] S. Azevedo, J. Pereira, Double Aharonov-Bohm effect in a medium with a disclination, *Phys. Lett. A* 275 (2000) 463.
- [39] S.R. Vieira, S. Azevedo, Double Aharonov-Bohm effect in a medium with a linear topological defect, *Phys. Lett. A* 288 (2001) 29.
- [40] C. Furtado, V.B. Bezerra, F. Moraes, Quantum scattering by a magnetic flux screw dislocation, *Phys. Lett. A* 289 (2001) 160.
- [41] G. de A. Marques, V.B. Bezerra, On a gravitational analogue of the Aharonov-Bohm effect, *Phys. Lett. A* 318 (2003) 1.
- [42] G. De A. Marques, V.B. Bezerra, Some remarks on the gravitational Aharonov-Bohm effect, *Mod. Phys. Lett. A* 19 (2004) 49.
- [43] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J.C. Rojas, Testing spatial noncommutativity via the Aharonov-Bohm effect, *Phys. Rev. D* 66 (2002) 045018; hep-th/0203260.
- [44] M. Chaichian, P. Prenajder, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, Aharonov-Bohm effect in noncommutative spaces, *Phys. Lett. B* 527 (2002) 149; hep-th/0012175.
- [45] R.R. Lewis, Aharonov-Bohm effect for trapped ions, *Phys. Rev. A* 28 (1983) 1228.
- [46] V.G. Bagrov, D.M. Gitman, V.D. Skarzhinsky, *Trudy FIAN* [Proceedings of Lebedev Institute], 176 (1986) 151.
- [47] E.M. Serebrianyi, V.D. Skarzhinsky, *Kratk. Soobshch. Fiz.* [Sov. Phys. Lebedev Inst.Rep.] 6 (1988) 56; *Trudy FIAN* [Proceedings of Lebedev Institute] 197 (1989) 181.
- [48] V.G. Bagrov, D.M. Gitman, V.B. Tlyachev, Solutions of relativistic wave equations in superpositions of Aharonov-Bohm, magnetic, and electric fields, *J. Math. Phys.* 42 (2001).1933; hep-th/0201068.
- [49] V.G. Bagrov, D.M. Gitman, A. Levin, V.B. Tlyachev, Aharonov-Bohm effect in synchrotron radiation, *Nucl. Phys. B* 605 (2001) 425; hep-th/0001108.

- [50] I.S. Gradshtein, I.W. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products (Academic Press, New York, 1994).
- [51] M.G. Alford, J. March-Russel, F. Wilczek, Enhanced baryon number violation due to cosmic strings, Nucl. Phys. B 328 (1989) 140.
- [52] A.A. Sokolov and I.M. Ternov, Synchrotron Radiation (Akademie-Verlag, Berlin, 1968).
- [53] I.V. Tyutin, Lebedev Physical Institute, Preprint N 27, Scattering of an electron off the solenoid, pp.1-46 (1974).
- [54] P. de Sousa Gerbert, R. Jackiw, Classical and quantum scattering on a spinning cone, Commun. Math. Phys. 124 (1989) 229.
- [55] F.A.B. Coutinho, J.F. Perez, Helicity conservation in the Aharonov-Bohm scattering of Dirac particles, Phys. Rev. D 49 (1994) 2092.
- [56] F.A.B. Coutinho, Y. Nogami, J.F. Perez, F.M. Toyama, Self-adjoint extensions of the Hamiltonian for a charged spin-1/2 particle in the Aharonov-Bohm field, J. Phys. A 27 (1994) 6539.
- [57] J. Audretsch, U. Jasper, V.D. Skarzhinsky, A pragmatic approach to the problem of the self-adjoint extension of Hamilton operators with the Aharonov-Bohm potential, J. Phys. A 28 (1995) :2359; quant-ph/9503006.
- [58] K. Odaka, K. Satoh, The Dirac Hamiltonian in an Aharonov-Bohm gauge field and its selfadjoint extensions, Mod. Phys. Lett. A 12 (1997) 337; hep-th/9604082.
- [59] R. Adami, A. Teta, On the Aharonov-Bohm Hamiltonian, Lett. Math. Phys. 43 (1998) 43-53; quant-ph/9702048.
- [60] L. Dabrowski, P. Stovicek, Aharonov-Bohm effect with delta type interaction, J. Math. Phys. 39 (1998) 47.
- [61] V.S. Araujo, F.A.B. Coutinho, J.F. Perez, On the most general boundary conditions for the Aharonov-Bohm scattering of a Dirac particle: helicity and Aharonov-Bohm symmetry conservation, J. Phys. A 34 (2001) 8859.

- [62] H. Tamura, Resolvent convergence in norm for Dirac operator with Aharonov–Bohm field, *J. Math. Phys.* 44 (2003) 2967.
- [63] J.L. Borg, J.V. Pulé, Pauli approximations to the self-adjoint extensions of the Aharonov–Bohm Hamiltonian, *J. Math. Phys.* 44 (2003) 4385.
- [64] G.N. Afanasev, V.M. Shilov, How quantum impenetrability affects Aharonov–Bohm scattering?, *J. Phys. A* 23 (1990) 5185.
- [65] F.A.B. Coutinho, J.F. Perez, Boundary conditions in the Aharonov–Bohm scattering of Dirac particles and the effect of Coulomb interaction, *Phys. Rev. D* 48 (1993) 932.
- [66] S.A. Voropaev, M. Bordag, The role of boundary conditions in the Aharonov–Bohm effect for particles with spin, *J. Exp. Theor. Phys.* 78 (1994) 127.
- [67] C.G. Beneventano, M. De Francia and E.M. Santangelo, Dirac fields in the background of a magnetic flux string and spectral boundary conditions, *Int. J. Mod. Phys. A* 14 (1999) 4749; hep-th/9809081.
- [68] C.G. Beneventano, M. De Francia, K. Kirsten, E.M. Santangelo, Casimir energy of massive MIT fermions in a Bohm–Aharonov background, *Phys. Rev. D* 61 (2000) 085019; hep-th/9910154.
- [69] M. De Francia, K. Kirsten, Massive 3+1 Aharonov–Bohm fermions in an MIT cylinder, *Phys. Rev. D* 64 (2001) 065021; hep-th/0104257.
- [70] H.-P. Thienel, Quantum mechanics of an electron in a homogeneous magnetic field and a singular magnetic flux tube, *Annals Phys.* 280 (2000) 140; quant-ph/9809047.
- [71] P. Exner, P. Stovicek, P. Vytas, Generalized boundary conditions for the Aharonov–Bohm effect combined with a homogeneous magnetic field, *J. Math. Phys.* 43 (2002) 2151.
- [72] H. Falomir, P.A.G. Pisani, Hamiltonian self-adjoint extensions for (2+1)-dimensional Dirac particles, *J. Phys. A* 34 (2001) 4143; math-ph/0009008.

- [73] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics* (Academic Press, New York, 1972), vol. II.
- [74] *Higher Transcendental Functions* (Bateman Manuscript Project), edited by A. Erdelyi et al. (McGraw-Hill, New York, 1953), Vol. 1.
- [75] J. Weidmann, *Linear Operators in Hilbert Spaces* (Springer-Verlag, New York, 1980).
- [76] N.I. Akhiezer and I.M. Glazman, *Theory of Linear Operators in Hilbert Space* (Pitman, Boston, 1981).
- [77] A.J. Niemi, G.W. Semenoff, Axial-anomaly-induced fermion fractionization and effective gauge-theory actions in odd-dimensional space-times, *Phys. Rev. Lett.* 51 (1983) 2077.
- [78] R. Jackiw, in: *Quantum Structure of Space and Time*, edited by M.J. Duff and C. Isham (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982).
- [79] A.J. Niemi, G.W. Semenoff, Fermion number fractionization in quantum field theory, *Phys. Rep.* 135 (1986) 99.
- [80] G.A. Korn, T. M. Korn, *Mathematical Handbook*, 2nd ed. (McGraw-Hill Book Company, 1968)
- [81] C.C. Gerry, V.A. Singh, Feynman path-integral approach to the Aharonov-Bohm effect, *Phys. Rev. D* 20 (1979) 2550.
- [82] C.C. Bernido, A. Inomata, Path integrals with a periodic constraint: The Aharonov-Bohm effect, *J. Math. Phys.* 22 (1981) 715.
- [83] G. Morandi, E. Menossi, Path-integrals in multiply-connected spaces and the Aharonov-Bohm effect, *Eur. J. Phys.* 5 (1984) 49.
- [84] R. Sundrum, L.J. Tassie, Non-abelian Aharonov-Bohm effects, Feynman paths, and topology, *J. Math. Phys.* 27 (1986) 1566.
- [85] C.H. Oh, C.P. Soo, C.H. Lai, The propagator in the generalized Aharonov-Bohm effect, *J. Math. Phys.* 29 (1988) 1154.

- [86] L. Chetouani, L. Guechi, T.F. Hammann, Exact path integral solution of the Coulomb plus Aharonov-Bohm potential, *J. Math. Phys.* 30 (1989) 655.
- [87] J. Gamboa, V.O. Rivelles, Quantum mechanics of relativistic particles in multiply connected spaces and the Aharonov-Bohm effect, *J. Phys. A* 24 (1991) L659.
- [88] V.H. Le, T.G. Nguyen, On the green function for a hydrogen-like atom in the Dirac monopole field plus the Aharonov-Bohm field, *J. Phys. A* 26 (1993) 3333.
- [89] D. K. Park, Green's-function approach to two- and three-dimensional delta-function potentials and application to the spin-1/2 Aharonov-Bohm problem, *J. Math. Phys.* 36 (1995) 5453.
- [90] D.K. Park, S.-K. Yoo, Propagator for spinless and spin 1/2 Aharonov-Bohm-Coulomb systems, *Annals Phys.* 263 (1998) 295; hep-th/9707024.
- [91] De-Hone Lin, Path integral for a relativistic Aharonov-Bohm-Coulomb system, *J.Phys.A*31 (1998) 4785; hep-th/9708125.
- [92] De-Hone Lin, Path integral for the relativistic three-dimensional Aharonov-Bohm-Coulomb system, *J. Math. Phys.* 40 (1999) 1246.
- [93] De-Hone Lin, Path integral solution by sum over perturbation series, *J. Math. Phys.* 41 (2000) 2723.
- [94] C. Grosche, On the path integral treatment for an Aharonov-Bohm field on the hyperbolic plane, *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999) 955; quant-ph/9808060.
- [95] Kh. Nouicer, L. Chetouani, Path integral for relativistic Aharonov-Bohm-Coulomb system on the pseudo-sphere, *J. Math. Phys.* 42 (2001) 1053.
- [96] C.C. Bernido, M.V. Carpio-Bernido, Path integrals for boundaries and topological constraints: A white noise functional approach, *J. Math. Phys.* 43 (2002) 1728.
- [97] E.S. Fradkin, D.M. Gitman, S.M. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).

- [98] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.E. Gonçalves, QED in external field with space-time uniform invariants. *Exact solutions*, J. Math. Phys. 39 (1998) 3547.