Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Integrabilidade Quântica do Modelo de Alday-Arutyunov-Frolov

Eliane Pereira

Orientador: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles
Co-orientador: Prof. Dr. Arsen Melikyan

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física
para a obtenção do título de Doutor em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles - IFUSP
Prof. Dr. Adilson José da Silva - IFUSP
Prof. Dr. Diego Trancanelli - IFUSP
Prof. Dr. Aleksandr Nikolaievich Pinzul - UNB
Prof. Dr. Gabriel Weber Martins – EEL/USP

São Paulo
2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Pereira, Eliane

Integrabilidade quântica do modelo de Alday-Arutyunov-Frolov. São Paulo, 2015.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teoria Quântica de Campos; 2. Teoria das Cordas; 3. Sistemas Dinâmicos.

USP/IF/SBI-013/2015

Agradecimentos

Aproveito a oportunidade para agradecer algumas pessoas sem as quais este trabalho não seria possível: ao meu orientador Victor Rivelles, ao meu coorientador Arsen Melikyan e à FAPESP pelo apoio financeiro (processo 2009/17918-5).

Resumo

Nesta tese investigamos a integrabilidade quântica do modelo de Alday-Arutyunov-Frolov (AAF) através da diagonalização da Hamiltoniana do modelo transformado de AAF. O modelo transformado de AAF é obtido do modelo original após uma redefinição nos campos que tem o objetivo de transformar os parênteses de Dirac na estrutura canônicos padrão entre dois férmions. Para diagonalização da Hamiltoniana do modelo transformado nós usamos um método desenvolvido para o modelo de Landau-Lifshitz. Este método exige regularização do produto de operadores definidos no mesmo ponto bem como a construção de extensões auto-adjuntas. Mostramos que a função de onda e os estados do modelo transformado de AAF apresentam descontinuidades que devem ser tratadas cuidadosamente. Nós também investigamos a equivalência entre as matrizes S das duas formulações do modelo de AAF através do cálculo direto da matriz S em ambas as teorias. Também consideramos o teorema da equivalência para o modelo de AAF, para mostrar que a matriz S é invariante por redefinições dos campos da teoria.

Abstract

In this thesis we investigate the quantum integrability of the Alday-Arutyunov-Frolov model (AAF) by diagonalization of the Hamiltonian of the AAF transformed model. The AAF transformed model is obtained from original model after fields redefinition whose purpose is to transform the Dirac brackets in the standard canonical structure between two fermions. For the diagonalization of the Hamiltonian of the transformed model we use the method developed for the Landau-Lifshitz model. This method requires regularization of the singular product of operators at the same point as well as construction of the self-adjoint extensions. We show that the wave function and the states of the transformed AAF exhibit discontinuities. We also investigated the equivalence of the matrices S of the two formulations of the AAF model through direct calculation of the S -matrix in both theories. We also consider the equivalence theorem applied to AAF model. To shows that the S matrix is invariant under field redefinitions.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Índice	iv
1 Introdução	1
2 Modelo de Thirring	5
2.1 Introdução	6
2.2 Regularização dos operadores	7
2.3 Diagonalização da Hamiltoniana do modelo de Thirring	9
2.4 Hamiltoniana auto-adjunta do modelo de Thirring.	13
3 Modelo de Landau-Lifshitz	15
3.1 Modelo de Landau-Lifshitz	16
3.2 Hamiltoniana auto-adjunta do modelo de LL.	18
3.3 Regularização dos operadores	21
3.4 Hamiltoniana regularizada do modelo de LL	22

4	Modelo de Alday-Arutyunov-Frolov (AAF)	25
4.1	Introdução	27
4.2	Estrutura canônica e a Hamiltoniana do modelo transformado	30
4.3	Hamiltoniana quântica do modelo de AAF.	33
4.4	Diagonalização da Hamiltoniana do modelo de AAF	34
4.5	Hamiltoniana auto-adjunta do modelo de AAF.	42
4.6	Teorema da equivalência	44
4.6.1	Invariância da função de Green	44
	Conclusão	52
A	Estrutura de Dirac do modelo de AAF	54
B	Transformações de variáveis do modelo de AAF.	58
C	Transformação de coordenada	62
D	Transformações de variáveis fermiônicas em componentes para o modelo de AAF.	66
E	Fórmulas gerais dos parênteses de Poisson	68
F	Relação entre as matrizes ρ^μ e γ^μ.	71
G	Termos resultantes da ação da Hamiltoniana do modelo de AAF no estado de duas partículas	72
H	Produto de Sklyanin	74
	Bibliografia	76

Capítulo 1

Introdução

A correspondência AdS/CFT conjectura a equivalência entre a teoria supersimétrica de Yang-Mills ($\mathcal{N} = 4 SYM$) quadridimensional e a teoria de supercordas do tipo IIB em $AdS_5 \times S^5$. O fato interessante desta conjectura é que ela relaciona o limite de acoplamento fraco de uma teoria com o limite de acoplamento forte da outra. Assim, podemos usar métodos perturbativos de um lado da dualidade para obter informações sobre o regime não perturbativo do outro. Contudo, existe uma grande dificuldade de verificar a validade da conjectura, porque uma comparação direta entre os resultados fornecidos em ambos os lados geralmente não é possível.

A motivação deste trabalho vem da necessidade de que para entender melhor a correspondência AdS/CFT é necessário quantizar a teoria de supercordas em $AdS_5 \times S^5$, porém, esta é uma tarefa muito complicada de se realizar. Uma possibilidade de quantizar parcialmente a teoria de supercordas em $AdS_5 \times S^5$ seria através de truncamentos consistentes a certos subsectores. Logo, a quantização do modelo de Landau-Lifshitz (LL) e do modelo de Alday-Arutyunov-Frolov (AAF), são exemplos importantes neste sentido, visto que eles surgem do truncamento consistente aos sectores $su(2)$ e $su(1|1)$ respectivamente.

O modelo de AAF é uma teoria puramente fermiônica que foi originalmente obtida

em [1]. Sua Lagrangeana é invariante sob transformações de Lorentz. Este modelo possui parênteses de Dirac extremamente complicados envolvendo até a oitava ordem nos férmions e suas derivadas espaciais. O modelo de AAF é um modelo contínuo e é um exemplo muito interessante de modelo singular. Ele contém potenciais do tipo $\delta''(x)$ semelhante ao modelo de Landau-Lifshitz (LL) [2, 3]. O modelo de AAF possui uma segunda formulação que é obtida do modelo original de AAF através de uma transformação nos campos, com o objetivo de simplificar os parênteses de Dirac na estrutura canônicos padrão entre dois férmions. Entretanto, neste caso, a Lagrangeana do modelo AAF se torna significativamente mais complicada e não é mais explicitamente invariante por transformações de Lorentz.

A primeira tentativa de provar a integrabilidade quântica do modelo de AAF foi feita em [4], onde foi estudado o espalhamento de três partículas e foi demonstrado a fatorabilidade [4] na primeira ordem não trivial. Entretanto, a forma mais elegante de se provar a integrabilidade quântica de sistemas integráveis é através da diagonalização da Hamiltoniana. Além disso, muitas propriedades interessantes do modelo só podem ser compreendidas com este método.

Escolhemos a segunda formulação do modelo de AAF para fazer a diagonalização da Hamiltoniana, porque a regularização dos operadores deste modelo é a mesma que no modelo de Thirring, visto que ambos os modelos são fermiônicos e possuem a mesma álgebra de operadores. Para o modelo de Thirring a quantização é realizada usando a técnica da regularização de operadores. E para tratar o potencial que é bastante complicado por ser altamente singular, nós usamos o método já existente na literatura para o modelo de LL [2, 3] cujo potencial apresenta dificuldades semelhantes às que nós encontramos na quantização do modelo de AAF.

Como já discutimos, o modelo transformado de AAF é obtido do modelo original de AAF [1] através de uma transformação nos campos. Então é necessário investigar a invariância da matriz S após esta redefinição nos campos. O primeiro indício desta

invariância foi obtida pelo cálculo das matrizes S nas duas teorias. A matriz S do modelo original de AAF foi obtida em [4] e a matriz S do modelo transformado foi calculada neste trabalho através da diagonalização da Hamiltoniana. Outra possibilidade de demonstrar que a matriz S obtida nas duas teoria são iguais é através do teorema da equivalência. Existem várias demonstração deste teorema [9–19]. Uma demonstração clara foi dada em [20] para um modelo bosônico. Então a ideia é adaptar o teorema de [20] para um modelo fermiônico e mostrar que ele se aplica ao modelo de AAF.

Este trabalho está organizado da seguinte forma. No capítulo 2, nós realizamos a quantização do modelo de Thirring massivo através do procedimento desenvolvido originalmente em [2, 3] para o modelo de LL. Discutimos a regularização dos operadores e também discutimos a álgebra dos operadores regularizados. Mostramos que a Hamiltoniana do modelo de Thirring massivo é auto-adjunta.

No capítulo 3, fazemos uma revisão da quantização do modelo de LL efetuado [2,3]. Nós consideramos em detalhe o procedimento de regularização e renormalização dos campos necessário para definir consistentemente o produto de operadores atuando num mesmo ponto. Após isto podemos diagonalizar a Hamiltoniana do modelo de LL. Finalmente, construímos a extensão auto-adjunta da Hamiltoniana do modelo de LL.

No capítulo 4, inicialmente, apresentamos um resumo dos resultados do modelo de AAF que serão relevante para este trabalho. Apresentamos a redefinição das variáveis fermiônicas que transforma o termo cinético do modelo de AAF original em uma forma extremamente simples. Explicamos como diagonalizar a Hamiltoniana do modelo transformado de AAF e mostramos que isto requer a regularização da Hamiltoniana quântica, bem como a construção dos auto-estados que obedecem a uma complicada relação de descontinuidade. Finalmente, mostramos que para uma teoria fermiônica a função de Green é invariante sob transformações de campos utilizando o teorema da equivalência. O conteúdo deste capítulo deu origem ao trabalho [7].

No último capítulo, apresentamos as conclusões obtidas neste trabalho e as perspectivas futuras.

Capítulo 2

Modelo de Thirring

O modelo de Thirring massivo é um modelo fermiônico que apresenta muitos resultados interessantes. Uma das suas características importantes mostrada em [21] é a equivalência com o modelo de Sine-Gordon em nível quântico. O modelo de Sine-Gordon é um modelo bosônico bem conhecido na literatura. Esta equivalência é conhecida como bosonização do modelo de Thirring. O atrativo dessa dualidade entre férmions e bósons é a possibilidade de extrair várias informações sobre o modelo de Thirring apenas do conhecimento do modelo de Sine-Gordon.

O modelo de Thirring massivo foi o primeiro modelo da teoria de campos relativísticos resolvido por meio do Ansatz de Bethe coordenado [24]. Sua quantização envolve algumas sutilezas assim como outros modelos contínuos integráveis. O problema é devido à presença de produtos de operadores atuando em um mesmo ponto. Isto torna as integrais mal definidas. O modelo de Thirring tem um potencial do tipo $\delta(x)$. Na sua quantização [24] foram usados procedimentos em que é empregada uma regularização, da forma $\epsilon(x)\delta(x) = 0$. No modelo de LL, assim como no modelo de AAF, nós não podemos fazer a quantização de forma similar, pois possuem potenciais do tipo $\delta''(x)$. O modelo de LL e o modelo de AAF são mais representativos da dificuldade que se enfrenta para quantizar modelos

contínuos integráveis. Uma solução para este problema foi apresentada em [2, 3] para o modelo de LL e em [7] e no capítulo 4 deste trabalho para o modelo de AAF.

2.1 Introdução

Aqui, vamos fazer uma introdução do modelo de Thirring massivo necessária para a diagonalização da sua Hamiltoniana. Este é um modelo fermiônico em duas dimensões e sua Lagrangeana é dada por [24]:

$$\mathcal{L} = \int \left[i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_0\bar{\psi}\psi - \frac{1}{2}g : (\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) : \right] d^2x, \quad (2.1)$$

onde $\mu = 1, 2$, $\gamma^0 = \sigma^1$, $\gamma^1 = i\sigma^2$ são duas das matrizes de Pauli e a métrica usada é dada por $\text{diag}(-1, 1)$. O espinor de Dirac conjugado é definido como $\bar{\psi} = \psi^\dagger\sigma^0$. As constantes m_0 e g são a massa nua e a constante de acoplamento nua respectivamente. Os campos satisfazem as seguintes relações de anti-comutação:

$$\begin{aligned} \{\psi_k(x), \psi_m^\dagger(y)\} &= \delta_{km}\delta(x-y); \\ \{\psi_k(x), \psi_m(y)\} &= \{\psi_k^\dagger(x), \psi_m^\dagger(y)\} = 0; \quad k, m = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Através da transformação de Legendre podemos encontrar a Hamiltoniana do modelo:

$$\mathcal{H} = \int dx \left[-\Pi_\psi\dot{\psi} - \Pi_{\bar{\psi}}\dot{\bar{\psi}} - \mathcal{L} \right], \quad (2.3)$$

Os momentos canônicos conjugados são definidos como:

$$\begin{aligned} \Pi_\psi &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = i\bar{\psi}\sigma_1, \\ \Pi_{\bar{\psi}} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

A Hamiltoniana é dada por:

$$\mathcal{H} = \int dx \left[-i\psi^\dagger\sigma_3\partial_1\psi + m_0\psi^\dagger\sigma_0\psi + 2g\psi_1^\dagger\psi_2^\dagger\psi_2\psi_1 \right]. \quad (2.5)$$

onde $\sigma_3 = \sigma_0\sigma_1$.

O vácuo de Fock $|0\rangle$ é definido por:

$$\psi(x) |0\rangle = 0. \quad (2.6)$$

É importante notar que este é um pseudovácuo que é diferente do vácuo físico o qual é o estado fundamental da Hamiltoniana. O pseudovácuo dual $\langle 0|$ é definido como $|0\rangle^\dagger = \langle 0|$ e satisfaz as relações:

$$\langle 0| \psi^\dagger(x) = 0; \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (2.7)$$

2.2 Regularização dos operadores

Nesta seção, nós mostraremos o método de como tratar as singularidades do produto de operadores em um mesmo ponto para o modelo de Thirring massivo. Este método foi originalmente desenvolvido em [2,3] para quantizar o modelo de Landau-Lifshitz.

Devido a enorme semelhança entre o modelo de Thirring e o modelo de Dutyshev esta seção e a próxima foram baseadas na referência [23].

Uma solução para o problema é a regularização dos campos. No caso do modelo de Thirring ela é dada por:

$$\psi_{Fi}(x) = \int dy F_\epsilon(x-y) \psi_i(y), \quad \psi_{Fi}^\dagger(x) = \int dy F_\epsilon(x-y) \psi_i^\dagger(y), \quad (2.8)$$

onde $F_\epsilon(x-y)$ é suave, simétrica em (x,y) , depende somente do parâmetro ϵ e decresce rapidamente no infinito de forma a tornar (2.8) bem definida.

O operador inverso da expressão (2.8):

$$\psi_i(y) = \int dz G_\epsilon(y-z) \psi_{Fi}(z), \quad \psi_i^\dagger(y) = \int dz G_\epsilon(y-z) \psi_{Fi}^\dagger(z), \quad (2.9)$$

onde $G_\epsilon(y-z)$ também é uma função suave, simétrica em (y,z) , depende somente do

parâmetro ϵ e decresce rapidamente no infinito e satisfaz:

$$\begin{aligned}\psi_{Fi}(x) &= \int dydz F_\epsilon(x-y)G_\epsilon(y-z)\psi_{Fi}(z) \iff \int dy F_\epsilon(x-y)G_\epsilon(y-z) = \delta(x-z), \\ \psi_{Fi}^\dagger(x) &= \int dydz F_\epsilon(x-y)G_\epsilon(y-z)\psi_{Fi}^\dagger(z) \iff \int dy F_\epsilon(x-y)G_\epsilon(y-z) = \delta(x-z).\end{aligned}$$

Da álgebra (2.2) podemos calcular a álgebra:

$$\{\psi_{Fi_1}(x_1), \psi_{Fi_2}^\dagger(x_2)\} = \delta_{i_1 i_2} k_\epsilon(x_1 - x_2), \quad \{\psi_{Fi_1}(x_1), \psi_{Fi_2}(x_2)\} = \{\psi_{Fi_1}^\dagger(x_1), \psi_{Fi_2}^\dagger(x_2)\} = 0, \quad (2.10)$$

onde o núcleo $k_\epsilon(x_1 - x_2)$ é uma função simétrica em x_1 e x_2 dada por:

$$k_\epsilon(x_1 - x_2) \equiv \int dy F_\epsilon(x_1 - y) F_\epsilon(y - x_2). \quad (2.11)$$

Também será de grande importância para a quantização da Hamiltoniana do modelo de Thirring conhecermos a álgebra mista, isto é, a álgebra entre os operadores regularizados e os não regularizados. É fácil mostrar que os operadores regularizados e não regularizados satisfazem as seguintes relações de anti-comutação:

$$\{\psi_{Fi_1}(x_1), \psi_{i_2}^\dagger(x_2)\} = \int dy F_\epsilon(x_1 - y) \{\psi_{i_1}(y), \psi_{i_2}^\dagger(x_2)\} = \delta_{i_1 i_2} F_\epsilon(x_1 - x_2), \quad (2.12)$$

$$\{\psi_{Fi_1}(x_1), \psi_{i_2}(x_2)\} = \{\psi_{Fi_1}^\dagger(x_1), \psi_{i_2}^\dagger(x_2)\} = 0. \quad (2.13)$$

É importante enfatizar que ao remover a regularização, ou seja, ao tomarmos o limite $\epsilon \rightarrow 0$, nós requeremos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(x - y) \rightarrow \xi \delta(x - y), \quad (2.14)$$

Veremos mais adiante que o parâmetro ϵ foi introduzido para tornar a álgebra finita. Da condição (2.14) é fácil mostrar que os operadores regularizados e o núcleo no limite de $\epsilon \rightarrow 0$ tornam-se:

$$\psi_{Fi}(x) \rightarrow \xi \psi_i(x); \quad \psi_{Fi}^\dagger(x) \rightarrow \xi \psi_i^\dagger(x), \quad (2.15)$$

$$k(x_1 - x_2) \rightarrow \xi^2 \delta(x_1 - x_2). \quad (2.16)$$

Então, com o uso da equação (2.14) podemos ver que quando removemos a regularização a algebra (2.10) transforma-se em:

$$\{\psi_{F i_1}(x_1), \psi_{F i_2}^\dagger(x_2)\} \rightarrow \delta_{i_1 i_2} \xi^2 \delta(x_1 - x_2). \quad (2.17)$$

Nós queremos tornar a álgebra finita quando $x_1 \rightarrow x_2$, então nós podemos escolher $\xi^2 \rightarrow 1/\delta(0)$.

2.3 Diagonalização da Hamiltoniana do modelo de Thirring

Nesta seção, nós vamos fazer a diagonalização da Hamiltoniana do modelo de Thirring massivo utilizando a regularização acima descrita. O primeiro passo nesta direção é escrever a Hamiltoniana (2.5) em termos dos campos ψ_F e $\psi_F^\dagger$:

$$\mathcal{H} = \int dx [i\psi_{F i_1}^\dagger \sigma_{i_1 i_2}^3 \partial_1 \psi_{F i_2} + m_0 \psi_{F i_1}^\dagger \sigma_{i_1 i_2}^1 \psi_{F i_2} + 2g \psi_{F 1}^\dagger \psi_{F 2}^\dagger \psi_{F 2} \psi_{F 1}]. \quad (2.18)$$

Agora, todos os produtos de operadores estão bem definidos, pois a Hamiltoniana está escrita em termos dos campos regularizados.

Usando a álgebra (2.13) vemos que a ação da Hamiltoniana (2.18) no estado de uma partícula resulta em:

$$\mathcal{H}|\psi_1 > \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} E_1 |\psi_1 >, \quad (2.19)$$

onde E_1 é a energia do estado de uma partícula e $|\psi_1 >$ é o estado de uma partícula:

$$|\psi_1 > = \int dx_1 \chi^{j_1}(x_1) \psi_{j_1}^\dagger(x_1) |0\rangle. \quad (2.20)$$

onde $\chi^j(x_1)$ é a função de onda de uma partícula.

Ao aplicarmos a Hamiltoniana no estado de uma partícula é possível mostrar que:

$$\chi^{j_1}(x_1) = \begin{pmatrix} e^{-\beta_1/2} \\ e^{\beta_1/2} \end{pmatrix} e^{ix_1 p_1}, \quad (2.21)$$

e

$$p_1 = m_0 \sinh \beta_1 \quad (2.22)$$

$$E_1 = m_0 \cosh \beta_1. \quad (2.23)$$

onde β_1 é a rapidez.

O estado de duas partículas tem a seguinte forma:

$$|\psi_2\rangle = \int d^2x \chi^{j_1 j_2}(x_1, x_2) \psi_{j_1}^\dagger(x_1) \psi_{j_2}^\dagger(x_2) |0\rangle, \quad (2.24)$$

A função $\chi^{j_1 j_2}(x_1, x_2)$ é antissimétrica: $\chi^{j_1 j_2}(x_1, x_2) = -\chi^{j_2 j_1}(x_2, x_1)$. Nós supomos que a função $\chi^{j_1 j_2}(x_1, x_2)$ é descontínua em $x_1 = x_2$, porque a Hamiltoniana antes de ser regularizada possui um produto de operadores mal definido no mesmo ponto. Isto significa que quando fizermos o calculo $\mathcal{H}|\psi_2\rangle$, nós consideremos o estado de duas partículas da forma:

$$|\psi_2\rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int dx_2 \left(\int_{-\infty}^{x_2 - \eta} dx_1 + \int_{x_2 + \eta}^{+\infty} dx_1 \right) \psi_{k_1}^\dagger(x_1) \psi_{k_2}^\dagger(x_2) \chi^{j_1 j_2}(x_1, x_2) |0\rangle \quad (2.25)$$

Para o setor de duas partículas, nós adotamos uma regularização concreta, adotada originalmente em [23]:

$$F_\epsilon(x - y) = \tau \omega_\epsilon(x - y), \quad (2.26)$$

onde

$$\begin{aligned} \omega_\epsilon(x - y) &\equiv C_\epsilon e^{-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 - |x - y|^2}}; \quad |x - y| \leq \epsilon, \\ \omega_\epsilon(x - y) &\equiv 0 \quad ; \quad |x - y| > \epsilon, \end{aligned} \quad (2.27)$$

e C_ϵ é tal que $\int \omega_\epsilon(x)dx = 1$ e τ é um parâmetro introduzido para tornar a álgebra finita quando $\epsilon \rightarrow 0$. Note que a distribuição (2.26) é consistente com (2.14); quando nós tomamos o limite de $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos a função delta.

Ao aplicarmos a Hamiltoniana (2.18) no estado de duas partículas (2.25), nós obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} |\psi_2\rangle &= m_0 [\cosh(\beta_1) + \cosh(\beta_2)] |\psi_2\rangle + \\ &+ c_1 \int dx_2 \Gamma_1(x_2) \psi_1^\dagger(x_2) \psi_2^\dagger(x_2) |0\rangle + c_2 \int dx_2 \Gamma_2(x_2) \psi_1^\dagger(x_2) \psi_2^\dagger(x_2) |0\rangle, \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde β_1 e β_2 são as rapidez da partícula 1 e 2 respectivamente, $c_1 = 16\epsilon^2(\xi)^2$, $c_2 = 64\epsilon^4(\xi)^4$, $\xi = \tau\omega_\epsilon(0)$ e $\Gamma_1(x_2)$ e $\Gamma_2(x_2)$ são dados pelas expressões:

$$\Gamma_1(x_2) = 2i [\chi^{12}(x_2 - \eta, x_2) - \chi^{12}(x_2 + \eta, x_2)] + 2i [\chi^{21}(x_2 - \eta, x_2) - \chi^{21}(x_2 + \eta, x_2)], \quad (2.29)$$

$$\Gamma_2(x_2) = 4g [\chi^{12}(x_2 - \eta, x_2) + \chi^{12}(x_2 + \eta, x_2)]. \quad (2.30)$$

Observe da equação (2.28) para que a Hamiltoniana seja diagonalizável, o integrando da segunda linha da equação (2.28) devem ser iguais a zero. Assim nós obtemos:

$$\mathcal{H} |\psi_2(\beta_1, \beta_2)\rangle = E_2 |\psi_2(\beta_1, \beta_2)\rangle, \quad (2.31)$$

onde $E_2 = m_0 [\cosh(\beta_1) + \cosh(\beta_2)]$ é a energia do estado de duas partículas se a condição:

$$\begin{aligned} 2ic_1 [\chi^{12}(x_2 - \eta, x_2) - \chi^{12}(x_2 + \eta, x_2)] + 2ic_1 [\chi^{21}(x_2 - \eta, x_2) - \chi^{21}(x_2 + \eta, x_2)] + \\ + 4gc_2 [\chi^{12}(x_2 - \eta, x_2) + \chi^{12}(x_2 + \eta, x_2)] = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

for satisfeita.

Agora nós vamos usar o ansatz para o modelo de Thirring na equação (2.32). Este ansatz é:

Para $x < y$:

$$\chi^{k_1 k_2}(x, y) = Au^{k_1}(\beta_1)u^{k_2}(\beta_2)e^{i(p_1 x + p_2 y)} - Bu^{k_1}(\beta_2)u^{k_2}(\beta_1)e^{i(p_1 y + p_2 x)}, \quad (2.33)$$

Para $x > y$:

$$\chi^{k_1 k_2}(x, y) = Bu^{k_1}(\beta_1)u^{k_2}(\beta_2)e^{i(p_1 x + p_2 y)} - Au^{k_1}(\beta_2)u^{k_2}(\beta_1)e^{i(p_1 y + p_2 x)}. \quad (2.34)$$

onde A e B são funções de β que serão determinadas logo a seguir e

$$u^{k_1}(\beta) = c_0 \begin{pmatrix} e^{-\beta/2} \\ e^{\beta/2} \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

onde c_0 é um fator normalização e o momento $p_i = m \sinh(\beta_i)$.

Usando o ansatz dado pelas equações (2.33) e (2.34) na condição (2.32), nós encontramos a matriz S :

$$S(\beta_1, \beta_2) = \frac{1 - \frac{ig}{2} \tanh\left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}{1 + \frac{ig}{2} \tanh\left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}. \quad (2.36)$$

A matriz S encontrada aqui é igual a obtida por outros métodos [24].

Aqui e na próxima seção nós consideramos o setor com duas partículas, posto que ele já exhibe todas as ideias importantes. Porém é muito fácil nos convencer que para o setor de n partículas do modelo de Thirring, a energia é dada pela soma das energias de cada partícula individual: $E_n = m_0 \sum_{k=1}^n \cosh(\beta_k)$ desde que a condição dada por:

$$\begin{aligned} & 2ic_1 [\chi_n(\mathbf{x} - \eta, \mathbf{x}) - \chi_n(\mathbf{x} + \eta, \mathbf{x})] + 2ic_1 [\chi_n(\mathbf{x} - \eta, \mathbf{x}) - \chi_n(\mathbf{x} + \eta, \mathbf{x})] + \\ & + 4gc_2 [\chi_n(\mathbf{x} - \eta, \mathbf{x}) + \chi_n(\mathbf{x} + \eta, \mathbf{x})] = 0, \end{aligned} \quad (2.37)$$

seja satisfeita. Onde $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)$.

2.4 Hamiltoniana auto-adjunta do modelo de Thirring.

Como discutimos, o modelo de Thirring foi quantizado anteriormente por outros métodos diferentes do método usado neste capítulo. Porém, não verificaram se a Hamiltoniana do modelo de Thirring é auto-adjunta. Como mostrado para o modelo de LL [2, 3] e para o modelo de AAF [7], é necessário verificar que a Hamiltoniana é auto-adjunta como um teste final de consistência. Então nesta seção, nós vamos mostrar que a Hamiltoniana do modelo de Thirring é auto-adjunta.

É fácil verificar que o produto escalar entre dois estados do tipo (2.25) é dado por:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\int_{-\infty}^{y-\eta} dx + \int_{y+\eta}^{+\infty} dx \right) g^{*ij}(x, y) f^{ij}(x, y). \quad (2.38)$$

Aqui nós mudamos a notação: $f^{ij}(x, y)$ corresponde a função $\chi^{ij}(x, y)$ da equação (2.25). Note que a descontinuidade do produto escalar (2.38) vem do estado de duas partículas (2.25) ser descontínuo .

Ao aplicarmos a Hamiltoniana em $f^{mn}(x, y)$, nós obtemos:

$$\hat{H} f^{mn}(x, y) = \left(\hat{D}_{x,y} f \right)^{mn}(x, y), \quad (2.39)$$

onde o operador $(\hat{D}_{x,y} f)^{mn}(x, y)$ tem a forma:

$$\left(\hat{D}_{x,y} f \right)^{mn}(x, y) = \left[(-i\sigma_{mk_1}^3 \delta_{nk_2} \partial_x + m\sigma_{mk_1}^0 \delta_{nk_2}) + (-i\sigma_{nk_2}^3 \delta_{mk_1} \partial_y + m\sigma_{nk_2}^0 \delta_{mk_1}) \right] f^{k_1 k_2}(x, y), \quad (2.40)$$

que reproduz o espectro correto (2.31), quando atua sobre o ansatz (2.33) e (2.34).

Agora vamos mostrar que a Hamiltoniana é auto-adjunta, ou seja, a condição a seguir

é satisfeita:

$$\langle \phi | \hat{H} \psi \rangle = \langle \hat{H} \phi | \psi \rangle . \quad (2.41)$$

Usando a equação (2.38), e levando em consideração que a função $f^{k_1 k_2}(x, y)$ e suas derivadas são descontínuas, após integrarmos por partes, a equação (2.41) fornece:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \sigma_{mk_1}^3 \delta_{nk_2} g^{*mn}(x, y) f^{k_1 k_2}(x, y) \Big|_{x=y+\eta}^{x=y-\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \sigma_{nk_2}^3 \delta_{mk_1} g^{*mn}(x, y) f^{k_1 k_2}(x, y) \Big|_{x=y+\eta}^{x=y-\eta} , \quad (2.42)$$

Finalmente, após escrever a equação (2.42) em componentes e em seguida substituímos o ansatz (2.33) e (2.34), vemos que a Hamiltoniana do modelo de Thirring massivo é auto-adjunta.

Capítulo 3

Modelo de Landau-Lifshitz

A quantização do modelo de LL foi um avanço importante no que diz respeito a quantização de modelos contínuos integráveis. Em [3] foi desenvolvido um esquema de regularização e renormalização dos operadores, que permite lidar com as singularidades dos produtos de operadores. O ponto positivo é que o método desenvolvido em [2, 3] pode ser aplicado em um grande número de modelos contínuos integráveis. Este método foi aplicado para o modelo de Thirring no capítulo 2, para o modelo de Dutyshev em [23] e para o modelo de AAF [4] no próximo capítulo.

A quantização do modelo de LL distingue-se dos modelos contínuos integráveis, quantizados anteriormente, por possuir uma natureza altamente singular. Modelos mais simples como o modelo de Schrödinger não-linear e o modelo de Thirring massivo foram quantizados anteriormente pelo Ansatz de Bethe coordenado. Apesar dos resultados da quantização destes dois modelos estarem corretos, não é possível aplicar a mesma técnica para modelos mais complexos, como para o modelo de LL e o modelo de AAF. Uma forma de se lidar com o modelo de LL e o modelo de AAF foi obtida originalmente em [2, 7], onde no exemplo do modelo de LL, mostrou-se que é necessário ser muito cuidadoso com potenciais singulares como $\delta''(x)$, e também é necessário que se construa extensões auto-adjuntas.

Neste capítulo, nós vamos fazer uma revisão da quantização do modelo de LL baseada nas referências [2, 3].

3.1 Modelo de Landau-Lifshitz

Aqui, vamos partir da Hamiltoniana para o modelo de LL que possui a seguinte forma [2,3]:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \int dx \, \eta_{ij} \, \partial_x S^i(x) \partial_x S^j(x), \quad (3.1)$$

onde a métrica do espaço interno é $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, -1, 1)$.

Os campos S^i ($i = 1, 2, 3$) definem um vetor no espaço interno de três dimensões, $\vec{S} = (S^1, S^2, S^3)$.

A dinâmica clássica é governada pela estrutura de Poisson:

$$\{S^i(x), S^j(y)\} = \varepsilon^{ijk} S_k(y) \delta(x - y), \quad (3.2)$$

onde ε^{ijk} é o tensor totalmente antissimétrico, normalizado a $\varepsilon^{123} = 1$.

A relação de comutação na teoria quântica é dada por:

$$[S^3(x), S^\pm(y)] = \pm S^\pm(x) \delta(x - y) \text{ e } [S^-(x), S^+(y)] = 2S^3(x) \delta(x - y), \quad (3.3)$$

onde $S^\pm = S^1 \pm iS^2$ e impomos as seguintes condições de conjugação:

$$[S^3(x)]^* = S^3(x) \text{ e } [S^\pm(x)]^* = S^\mp(x). \quad (3.4)$$

A construção a representação da álgebra (3.3) é feita com respeito ao vácuo:

$$S^3(x) |0\rangle = |0\rangle, \quad S^-(x) |0\rangle = 0. \quad (3.5)$$

Agora nós vamos introduzir os estados de n-partículas:

$$|f_n\rangle = \int \prod_{i=1}^n dx_i f_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{j=1}^n S^+(x_j) |0\rangle, \quad (3.6)$$

onde as funções $f_n(x_1, \dots, x_n)$ são contínuas, simétricas com respeito $\{x_1, \dots, x_n\}$ e decrescem suficientemente rápido no infinito, de forma que a integral (3.6) seja bem definida.

Como discutimos anteriormente, o problema geralmente enfrentado na quantização de modelos contínuos integráveis está relacionado com o produto de operadores em um mesmo ponto e, portanto as integrais de densidades locais são mal definidas. Uma solução para este problema foi regularizar o produto de operadores através do método da separação de pontos [2] de modo que a Hamiltoniana quântica tenha a forma:

$$H_Q = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int dx dy \mathcal{F}_\epsilon(x, y) [-\partial_x S^3(x) \partial_y S^3(y) + \partial_x S^+(x) \partial_y S^-(y) + \partial_x \partial_y (S^3(x) \delta(x-y)) - \partial_x \partial_y \delta(x-y)], \quad (3.7)$$

onde $\mathcal{F}_\epsilon(x, y)$ é alguma função suave, simétrica em (x, y) e que decresce suficientemente rápido no infinito, de forma a tornar a integral presente em (3.7) bem definida. A dependência da função $\mathcal{F}_\epsilon(x, y)$ é tal que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}_\epsilon(x, y) = \delta(x - y). \quad (3.8)$$

É fácil nos convenceremos de que a ação da Hamiltoniana (3.7) no vácuo e no estado de uma partícula é

$$H_Q |0\rangle = 0, \quad (3.9)$$

$$H_Q |f_1\rangle = \int dx [-\partial_x^2] f_1(x) S^+(x) |0\rangle, \quad (3.10)$$

onde $|f_1\rangle$ é o estado de uma partícula. Quando aplicamos a Hamiltoniana no estado de duas partículas encontramos:

$$\begin{aligned} H_Q |f_2\rangle = & - \int dx dy (\partial_x^2 + \partial_y^2) f_2(x, y) S^+(x) S^+(y) |0\rangle + \\ & + \int dx [(\partial_x - \partial_y) f_2(x, y) \Big|_{x=y+\epsilon}^{x=y-\epsilon} + \partial_x \partial_y f_2(x, y) \Big|_{x=y}] S^+(x) S^+(x) |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.11)$$

Para que $|f_2\rangle$ seja auto estado da Hamiltoniana H_Q , nós temos que requerer:

$$(\partial_x - \partial_y)f_2(x, y) \Big|_{x=y+\epsilon}^{x=y-\epsilon} + \partial_x \partial_y f_2(x, y) \Big|_{x=y} = 0. \quad (3.12)$$

Para o caso mais geral de n-partículas, podemos mostrar que a ação da Hamiltoniana H_Q no estado de n-partículas resulta em:

$$\begin{aligned} H_Q |f_n\rangle = & - \int dx [\Delta_2 f_n(\mathbf{x})] \prod_{i=1}^n S^+(x_i) |0\rangle + \\ & + \sum_{i>j} \int \prod_{k \neq j} dx_k \left\{ [\partial_i f_n(\mathbf{x}) - \partial_j f_n(\mathbf{x})]_{x_i=x_j+\epsilon}^{x_i=x_j-\epsilon} + \partial_i \partial_j f_n(\mathbf{x}) \Big|_{x_i=x_j} \right\} \prod_{i=1}^n S^+(x_i) \Big|_{x_i=x_j} |0\rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)$ e $\Delta_2 = \sum_{i=1}^N \partial_i^2$. Para $|f_n\rangle$ ser auto função da Hamiltoniana H_Q nós temos que ter a seguinte condição:

$$[\partial_i f_n(\mathbf{x}) - \partial_j f_n(\mathbf{x})]_{x_i=x_j+\epsilon}^{x_i=x_j-\epsilon} + \partial_i \partial_j f_n(\mathbf{x}) \Big|_{x_i=x_j} = 0. \quad (3.14)$$

Segue da equação (3.13) que:

$$-\Delta_2 f_n(x) = E_n f_n(x) \Leftrightarrow H_Q |f_n\rangle = E_n |f_n\rangle, \quad (3.15)$$

onde E_n é a energia do estado com n partículas.

Note que as expressões (3.12) e (3.14) tem a mesma forma, proporcionando a fatorabilidade da matriz S.

3.2 Hamiltoniana auto-adjunta do modelo de LL.

A última etapa da quantização do modelo de LL consiste na construção da extensão auto-adjunta da Hamiltoniana. Por simplicidade, consideramos somente o setor com duas partículas, posto que ele já exhibe todas as ideias importantes. Para tanto, introduzimos o espaço vetorial V gerado pelos vetores da forma:

$$\Psi = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

A função $f_1(x)$ será fixada mais tarde. Vamos ver que ela é determinada pela função $f_2(x, y)$ quando $x \rightarrow y$. Nós definimos o produto escalar em V como:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} g_1^*(x) f_1(x) dx + \int \int_{x \neq y} g_2^*(x, y) f_2(x, y) dx dy, \quad (3.17)$$

onde α é um número positivo, Ψ é dado por (3.16) e Φ é dado por:

$$\Phi = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Nós definimos o operador $\hat{H} : V \rightarrow V$ por duas condições: a primeira condição, a ação de $\hat{H}$ sobre $f_2(x, y)$ é o laplaciano $\Delta \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$, ou seja,

$$\hat{H}\Psi = \begin{pmatrix} \hat{h}f_1(x) \\ -\Delta f_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

com o operador $\hat{h}$ sendo determinado mais tarde. A segunda condição, o operador $\hat{H}$ é Hermitiano em V com respeito ao produto escalar (3.17), isto é,

$$\langle \Phi | \hat{H}\Psi \rangle = \langle \hat{H}\Phi | \Psi \rangle, \quad (3.20)$$

usando

$$g^*(x, y) \Delta f(x, y) = \partial_i (g^*(x, y) \partial_i f(x, y)) - \partial_i ((\partial_i g(x, y))^* f(x, y)) + (\Delta g(x, y))^* f(x, y), \quad (3.21)$$

onde i é igual a x ou y . Por enquanto nós não supomos que estas funções e as suas derivadas

são contínuas em $x = y$. Temos:

$$\begin{aligned} \int \int_{x \neq y} g_2^*(x, y) \Delta f_2(x, y) dx dy &= \int \int_{x \neq y} (\Delta g_2(x, y))^* f_2(x, y) dx dy + \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} dy [g_2^*(x, y) \partial_x f_2(x, y) - (\partial_x g_2(x, y))^* f_2(x, y)]_{x=y-\epsilon}^{x=y+\epsilon} + \\ &- \int_{-\infty}^{\infty} dx [g_2^*(x, y) \partial_y f_2(x, y) - (\partial_y g_2(x, y))^* f_2(x, y)]_{y=x-\epsilon}^{y=x+\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Aqui, nós requeremos que a função $f_2(x, y)$ seja contínua em $x = y$, assim a equação (3.22) torna-se:

$$\begin{aligned} \int \int_{x \neq y} g_2^*(x, y) \Delta f_2(x, y) dx dy &= \int \int_{x \neq y} (\Delta g_2(x, y))^* f_2(x, y) dx dy + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dx \{g_2^*(x, x) [\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_2(x, y)]_{y=x-\epsilon}^{y=x+\epsilon} + \\ &- [(\partial_x g_2(x, y))^* - (\partial_y g_2(x, y))^*]_{y=x-\epsilon}^{y=x+\epsilon} f_2(x, x)\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

A primeira linha da equação (3.23) é hermitiano, já a segunda e terceira linhas vão ser combinadas com o termo que vem de $\hat{h}$ (veja a equação (3.19)); desta forma o operador $\hat{H}$ é hermitiano. Agora, já podemos fixar a relação entre $f_1(x)$ e $f_2(x, y)$. Da integral unidimensional da equação (3.23), nós vemos que uma escolha para a função $f_1(x)$ é $f_1(x) = f_2(x, x)$. Podemos mostrar que a forma de $\hat{h}$ é dada por:

$$\hat{h} f_1(x) := \frac{1}{\alpha} [\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_2(x, y)]_{y=x-\epsilon}^{y=x+\epsilon} + \hat{h}_1 f_1(x), \quad (3.24)$$

onde $\hat{h}_1$ é um operador hermitiano.

O requerimento de $\hat{H}$ ser hermitiano com respeito ao produto escalar (3.17) não fixa a Hamiltoniana completamente, mesmo depois de escolhidas algumas condições sobre a componente $|\Psi\rangle$. De fato nós temos que considerar mais uma condição de consistência, dada por:

$$\hat{h}f_1(x) := \frac{1}{\alpha}[\partial_x f_2(x, y) - \partial_y f_2(x, y)]_{y=x-\epsilon}^{y=x+\epsilon} + \hat{h}_1 f_1(x) \equiv -\Delta f_2(x, y)|_{x=y}, \quad (3.25)$$

a qual impõe uma condição sobre a forma de $\hat{h}_1$ e também impõe uma condição sobre $f_2(x, y)$ em $x = y$. Usando a equação (3.12) nós encontramos que $\hat{h}_1 = -\partial_x^2$. Assim, obtemos de (3.19):

$$H_2 |f\rangle = \begin{pmatrix} 2(\partial_{x_1} - \partial_{x_2})f_2|_{x_2=x_1-\epsilon}^{x_2=x_1+\epsilon} - \partial_x^2 f_2(x, x) \\ -(\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2)f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

3.3 Regularização dos operadores

Nesta seção, nós vamos fazer uma revisão do método apresentado em [3] para o modelo de LL. Este método lida com as singularidades associadas com o produto de operadores no mesmo ponto. O nosso objetivo é reformular completamente a teoria singular em termos de campos regularizados na forma:

$$S_F^i(x) := \int d\xi F_\epsilon(x, \xi) S^i(\xi), \quad (3.27)$$

onde $i = +, -, 3$ e $F_\epsilon(x, y)$ é uma função suave, simétrica em (x, y) , dependente de um parâmetro ϵ e que decresce rapidamente no infinito de forma a tornar a integral (3.27) bem definida.

A expressão inversa de (3.27) é dada por:

$$S^i(\xi) = \int dz G_\epsilon(\xi, z) S_F^i(z), \quad (3.28)$$

onde $G_\epsilon(x, y)$ é uma função suave, simétrica em (x, y) , dependente do parâmetro ϵ e que decresce rapidamente no infinito, de maneira que:

$$S_F^i(x) = \int d\xi dz F_\epsilon(x, \xi) G_\epsilon(\xi, z) S_F^i(z) \quad \Leftrightarrow \quad \int d\xi F_\epsilon(x, \xi) G_\epsilon(\xi, z) = \delta(x - z). \quad (3.29)$$

O próximo passo é derivar a álgebra para os operadores regularizados. Da expressão (3.27) podemos mostrar que os operadores regularizados satisfazem:

$$[S_F^3(x), S_F^\pm(y)] = \pm \int dz K_\epsilon(x, y, z) S_F^\pm(z), \quad (3.30)$$

$$[S_F^-(x), S_F^+(y)] = 2 \int dz K_\epsilon(x, y, z) S_F^3(z), \quad (3.31)$$

onde o núcleo $K_\epsilon(x, y, z)$ é dado por:

$$K_\epsilon(x, y, z) \equiv \int d\xi F_\epsilon(x, \xi) F_\epsilon(y, \xi) G_\epsilon(z, \xi). \quad (3.32)$$

Observe que, ao removermos a regularização da álgebra dos operadores regularizados dado pelas equações (3.30) e (3.31), ou seja, ao tomarmos o limite de $\epsilon \rightarrow 0$, a álgebra que é não local, recupera a localidade.

Ao tomarmos o limite de $x = y$ e $\epsilon \rightarrow 0$ a álgebra fornecida pelas expressão (3.30) e (3.31) se reduz a seguinte condição:

$$[S_F^3(x), S_F^\pm(x)] = \pm S_F^\pm(x) \text{ e } [S_F^-(x), S_F^+(x)] = 2S_F^3(x), \quad (3.33)$$

Pode se mostrar facilmente que estas restrições impõem uma condição sobre a função $F_\epsilon(x, y)$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [F_\epsilon(x)]^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_\epsilon(x). \quad (3.34)$$

A função (3.34) possui uma solução na classe das funções generalizadas:

$$F_\epsilon(x, y) = \frac{\delta_\epsilon(x - y)}{\delta_\epsilon(0)}, \quad (3.35)$$

onde $\delta_\epsilon(x)$ é alguma regularização da função $\delta(x)$.

3.4 Hamiltoniana regularizada do modelo de LL

Agora que já sabemos como tratar as singularidades relacionadas ao produto de operadores em um mesmo ponto para o modelo de LL, nós podemos escrever a Hamiltoniana (3.7)

em termos dos campos regularizados (3.27). Porém, primeiramente vamos considerar a renormalização do vácuo. Vimos anteriormente que o vácuo para os operadores nus são:

$$S^3 |0\rangle = a_0 |0\rangle \quad e \quad S^- |0\rangle = 0, \quad (3.36)$$

em termos dos operadores regularizados o vácuo fica:

$$S_F^3 |0\rangle = \zeta_\epsilon |0\rangle \quad e \quad S_F^- |0\rangle = 0, \quad (3.37)$$

onde os parâmetros a_0 e ζ_ϵ serão determinados logo a seguir. Ao usarmos a relação entre os operadores dada por (3.27) e tomarmos o limite $\epsilon \rightarrow 0$, nós obtemos um relação entre as constantes:

$$\zeta_\epsilon = \frac{a_0}{\delta_\epsilon(0)}. \quad (3.38)$$

Finalmente, a Hamiltoniana (3.7) em termos dos campos regularizados S_F , é dada por:

$$\mathcal{H} = \frac{\eta(\epsilon)}{4} \int dx [-2\partial_x S_F^3(x) \partial_x S_F^3(x) + \partial_x S_F^+(x) \partial_x S_F^-(x) + \partial_x S_F^-(x) \partial_x S_F^+(x)], \quad (3.39)$$

onde $\eta(\epsilon)$ é um parâmetro arbitrário que será fixado posteriormente¹.

Quando aplicamos a Hamiltoniana (3.39) no vácuo obtemos a energia do vácuo:

$$\mathcal{H} |0\rangle = \frac{\eta(\epsilon)\zeta(\epsilon)}{2} \int dx dz \partial_x \partial_z K_\epsilon(x, y, z) |_{x=y} |0\rangle \equiv h_0(\epsilon) |0\rangle. \quad (3.40)$$

Já para o setor de uma partícula:

$$[\mathcal{H} - h_0(\epsilon)] |f_1\rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{a_0 \eta(\epsilon)}{\delta^2(0)} \int dx \partial_x^2 f_1(x) S^+(x) |0\rangle, \quad (3.41)$$

¹É possível começar com uma fórmula mais geral para a Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{4} \int dx [-2\eta_1(\epsilon) \partial_x S_F^3(x) \partial_x S_F^3(x) + \eta_2(\epsilon) \partial_x S_F^+(x) \partial_x S_F^-(x) + \eta(\epsilon) \partial_x S_F^-(x) \partial_x S_F^+(x)]$$

onde $\eta_1(\epsilon)$, $\eta_2(\epsilon)$ e $\eta_3(\epsilon)$ são arbitrários. Porém, a condição de diagonalização requer que fixemos $\eta(\epsilon) = \eta_1(\epsilon) = \eta_2(\epsilon) = \eta_3(\epsilon)$, de forma que obtemos o Hamiltoniana na forma (3.39)

onde $\delta(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(0)$. Aplicando a Hamiltoniana (3.39) no estado de duas partículas:

$$|f_2\rangle = \int dx dy f_2(x, y) S^+(x) S^+(y) |0\rangle, \quad (3.42)$$

fornece o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} [\mathcal{H} - h_0(\epsilon)] |f_2\rangle &\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{a_0 \eta(\epsilon)}{\delta^2(0)} \int dx dy \Delta_2 f_2(x, y) S^+(x) S^+(y) |0\rangle + \\ &+ \eta(\epsilon) \left[\frac{a_0}{\delta^2(0)} - \frac{1}{2\delta(0)} \right] \int dx [(\partial_x - \partial_y) f_2(x, y)]_{y=x-\epsilon}^{y=x+\epsilon} S^+(x) S^+(x) |0\rangle + \\ &- \frac{\eta(\epsilon)}{\delta^2(0)} \int dx \partial_x \partial_y f_2(x, y) \big|_{x=y} S^+(x) S^+(x) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Se utilizarmos a condição (3.14), obtemos o valor do parâmetro a_0 ²:

$$a_0 = 1 + \frac{\delta(0)}{2}. \quad (3.44)$$

Agora, nós podemos fixar o valor de $\eta(\epsilon)$. Para obter o espectro físico escolhemos seu valor no limite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \eta(\epsilon) \rightarrow \frac{\delta^2(0)}{a_0} E_0 \quad (3.45)$$

onde E_0 é uma constante finita arbitrária. Então, as expressões (3.41) e (3.43) tornam-se.

$$[\mathcal{H} - h_0(\epsilon)] |f_1\rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -E_0 \int dx \partial_x^2 f_1(x) S^+(x) |0\rangle, \quad (3.46)$$

$$[\mathcal{H} - h_0(\epsilon)] |f_2\rangle \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -E_0 \int dx dy \Delta_2 f_2(x, y) S^+(x) S^+(y) |0\rangle \quad (3.47)$$

Também podemos aplicar a Hamiltoniana regularizada no setor de n partículas, isto é, podemos demonstrar a validade de relações similares a (3.14) e (3.15) para a Hamiltoniana F_ϵ -regularizada (3.39).

²O parâmetro a_0 possui uma interpretação importante relacionado ao operador de Casimir, porém esta análise não faz parte deste trabalho. Remetemos o leitor interessado a referência [3].

Capítulo 4

Modelo de Alday-Arutyunov-Frolov (AAF)

O modelo de AAF é obtido partindo da teoria das supercordas completa em $AdS_5 \times S^5$, consistentemente reduzida ao setor $su(1|1)$. Para isto é necessária a imposição do calibre uniforme, que corresponde à identificação da coordenada temporal global do espaço de Anti de Sitter (AdS_5) com o tempo da folha-mundo, bem como a igualar o momento de uma das coordenadas angulares de S^5 à carga J do grupo $U(1)$ correspondente. A dedução deste modelo foi realizada em [1].

Supondo que o modelo de AAF herda da teoria das supercordas em $AdS_5 \times S^5$ a integrabilidade, em particular, supõe-se a propriedade de fatoração da matriz S que permite escrever a matriz S para o espalhamento de n partículas como um produto de matrizes S para o espalhamento de duas partículas. Em [4] já foi calculada a amplitude de espalhamento de três partículas para o modelo de AAF e foi mostrado que a matriz S é fatorável nessa ordem.

O modelo de AAF fornece o primeiro exemplo não trivial de férmions em teoria de cordas que mostra uma estrutura altamente não linear e singular quando comparado com

o modelo de Thirring estudado no capítulo 2. Essas singularidades aparecem devido a presença de produto de operadores no mesmo ponto. Para tratar estas singularidades vamos usar a técnica de regularização anteriormente utilizada para o modelo de Landau-Lifshitz [2, 3].

O modelo de AAF possui duas formulações que foram derivadas inicialmente em [1]. A primeira formulação possui parênteses de Dirac com uma expressão altamente não trivial, estendendo-se até a oitava ordem nos férmions e suas derivadas espaciais. A segunda formulação é obtida da primeira formulação através de uma transformação nos campos, com o objetivo de simplificar os parênteses de Dirac complicados na estrutura canônicos padrão entre dois férmions. O preço que pagamos com esta transformação é que a Lagrangeana de interação do modelo transformado torna-se muito mais complicada do que a do modelo original, envolvendo termos até sexta ordem nos campos fermiônicos e suas derivadas espaciais. Também, a Lagrangeana do modelo transformado não é mais explicitamente invariante de Lorentz.

O modelo de AAF fornecido pela segunda teoria parece ser a alternativa mais viável para uma investigação mais aprofundada das propriedades quânticas do modelo. Isto porque seus parênteses de Dirac são o mais simples das duas opções. Além disso, a regularização do modelo de AAF neste caso é a mesma do modelo de Dutyshev e do modelo de Thirring [23]. O modelo transformado de AAF assim como o modelo de LL possuem uma dificuldade extra quando comparado com os modelos de Dutyshev e o modelo de Thirring. O modelo transformado de AAF e o modelo de LL possuem um potencial com duas derivadas da função delta, enquanto que o modelo de Dutyshev e o modelo de Thirring possuem um potencial do tipo delta [23]. Em [2, 3] foi mostrado como tratar este problema. A diagonalização da Hamiltoniana do modelo transformado de AAF foi feita neste trabalho, também foram derivada as funções de onda explícitas. Mostrar isso requer a construção de extensões auto-adjuntos de forma semelhante ao caso considerado

em [2, 3].

Como o modelo de AAF possui duas formulações somos levados considerar o teorema da equivalência para o modelo de AAF. Este teorema é uma prova sobre a invariância das matrizes S por redefinição de campos. Existem na literatura muitas formas de provar este teorema [12–19]. Uma demonstração consistente e clara foi dada em [20]; esta demonstração foi feita em teoria de perturbação. Aqui estamos interessados em investigar a invariância das matrizes S obtidas nas duas formulações do modelo de AAF. A primeira evidência da equivalência das matrizes S foi obtida através do cálculo direto da matriz S em ambas as teorias. A matriz S da teoria original foi obtida em [4] através de um método perturbativo, enquanto a matriz S do modelo transformado foi obtida através da diagonalização direta da Hamiltoniana, que é um método não perturbativo de obter a matriz S . Vamos também fornecer uma segunda prova da equivalência das matrizes S através da aplicação do teorema da equivalência para o modelo de AAF.

4.1 Introdução

Nesta seção, vamos fazer uma introdução do modelo de AAF necessária para quantizar a teoria. Como já falamos, o modelo de AAF surge como um truncamento consistente ao setor $su(1|1)$ no calibre uniforme [1]. Após o truncamento permanecem apenas os graus de liberdade fermiônicos e obtemos a Lagrangeana correspondente. Para uma análise completa da obtenção do modelo de AAF consulte o artigo original [1] e o artigo de revisão [27]. Nosso ponto de partida é a Lagrangeana do modelo de AAF obtida após o truncamento consistente ao setor $su(1|1)$ que tem a forma [1]:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -J - \frac{iJ}{2}(\bar{\psi}\rho^0\partial_0\psi - \partial_0\bar{\psi}\rho^0\psi) + i\kappa(\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\rho^1\psi) + J\bar{\psi}\psi + \\ & + \frac{\kappa g_2}{2}\epsilon^{\alpha\beta}(\bar{\psi}\partial_\alpha\psi\bar{\psi}\rho^5\partial_\beta\psi - \partial_\alpha\bar{\psi}\psi\partial_\beta\bar{\psi}\rho^5\psi) - \frac{\kappa g_3}{8}\epsilon^{\alpha\beta}(\bar{\psi}\psi)^2\partial_\alpha\bar{\psi}\rho^5\partial_\beta\psi,\end{aligned}\quad (4.1)$$

onde $\kappa = \sqrt{\lambda}/2$, λ é a tensão da corda, J é o momento angular total da corda em S^5 , o tensor de Levi-Civita é tal que $\epsilon^{01} = \epsilon_{10} = 1$ e g_2 e g_3 são constantes de acoplamento (vamos explicar com mais detalhes estas constantes logo a abaixo).

Nós adotamos a representação para as matrizes de Dirac com duas dimensões:

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \rho^5 = \rho^0\rho^1. \quad (4.2)$$

e definimos o espinor de Dirac conjugado $\bar{\psi} = \psi^\dagger\rho^0$.

Ao fazermos a seguinte mudança na coordenada σ da folha-mundo:

$$\sigma \rightarrow -\frac{2\kappa}{J}\sigma, \quad (4.3)$$

nós temos uma teoria invariante de Lorentz com férmions de Dirac em duas dimensões da folha mundo, definida pela Lagrangeana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -J - \frac{iJ}{2}(\bar{\psi}\rho^\alpha\partial_\alpha\psi - \partial_\alpha\bar{\psi}\rho^\alpha\psi) + J\bar{\psi}\psi + \\ & - \frac{Jg_2}{4}\epsilon^{\alpha\beta}(\bar{\psi}\partial_\alpha\psi\bar{\psi}\rho^5\partial_\beta\psi - \partial_\alpha\bar{\psi}\psi\partial_\beta\bar{\psi}\rho^5\psi) + \frac{Jg_3}{16}\epsilon^{\alpha\beta}(\bar{\psi}\psi)^2\partial_\alpha\bar{\psi}\rho^5\partial_\beta\psi,\end{aligned}\quad (4.4)$$

Aqui, vamos notar as diferenças presentes na Lagrangeana (4.4) quando comparada à Lagrangeana (5.5) do trabalho original [1]. A primeira diferença aparece no último termo de interação da Lagrangeana (4.4), onde um fator adicional de $\frac{1}{2}$ neste termo é importante para garantir a integrabilidade quântica do modelo [4]. A segunda diferença são as constantes de acoplamento g_2 e g_3 que aparecem na Lagrangeana (4.4), mas não

estão no artigo original [1]. Estas constantes são introduzidas, porque a ausência delas leva a um análise dimensional errada, pois g_2 e g_3 possuem diferentes dimensões de massa [4]. O principal resultado da análise em [4] foi a relação necessária entre as constantes de acoplamentos g_2 e g_3 , a fim de garantir a integrabilidade quântica do modelo, ou seja, para que a matriz S seja fatorável, a seguinte relação deve ser satisfeita:

$$g_2^2 = g_3 \quad (4.5)$$

Por enquanto, nós vamos considerar uma teoria mais geral definida por (4.1), onde as constantes g_2 e g_3 são constantes independentes. Essa generalização é conveniente para os cálculos que vamos realizar, pois permite que mantenhamos controle sobre a contribuição de cada termo.

Agora vamos voltar nossa atenção para a estrutura de Poisson. Esta análise foi realizada no artigo original [1], entretanto devido a erros nos coeficientes da Lagrangeana original, em [8] foi refeito esta derivação. O primeiro passo é obter a Hamiltoniana do modelo. Para isto é conveniente fazer a seguinte mudança de variável $\psi \rightarrow J^{-\frac{1}{2}}\psi$ na Lagrangeana: (4.1)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -J - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\rho^0\partial_0\psi - \partial_0\bar{\psi}\rho^0\psi) + i\frac{\kappa}{J}(\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\rho^1\psi) + \bar{\psi}\psi \\ & + \frac{\kappa g_2}{2J^2}\epsilon^{\alpha\beta}(\bar{\psi}\partial_\alpha\psi\bar{\psi}\rho^5\partial_\beta\psi - \partial_\alpha\bar{\psi}\psi\partial_\beta\bar{\psi}\rho^5\psi) - \frac{\kappa g_3}{8J^3}\epsilon^{\alpha\beta}(\bar{\psi}\psi)^2\partial_\alpha\bar{\psi}\rho^5\partial_\beta\psi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

A Hamiltoniana do modelo AAF pode ser determinada pela transformação de Legendre:

$$\mathcal{H} = -\Pi_\psi\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\Pi_{\bar{\psi}} - \mathcal{L}, \quad (4.7)$$

onde os momentos canônicos conjugados são definidos por:

$$\Pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\rho^0 + \frac{\kappa g_2}{2J^2}(-\bar{\psi}\bar{\psi}\rho^5\partial_1\psi + \bar{\psi}\partial_1\psi\bar{\psi}\rho^5) - \frac{\kappa g_3}{8J^3}(\bar{\psi}\psi)^2\partial_1\bar{\psi}\rho^5, \quad (4.8)$$

$$\Pi_{\bar{\psi}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\bar{\psi}}} = \frac{i}{2}\rho^0\psi + \frac{\kappa g_2}{2J^2}(-\psi\partial_1\bar{\psi}\rho^5\psi + \partial_1\bar{\psi}\psi\rho^5\psi) - \frac{\kappa g_3}{8J^3}(\bar{\psi}\psi)^2\rho^5\partial_1\psi, \quad (4.9)$$

Então a Hamiltoniana é dada por:

$$\mathcal{H} = J - \frac{i\kappa}{J}(\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\rho^1\psi) - \bar{\psi}\psi. \quad (4.10)$$

A Lagrangeana (4.6) admite a seguinte estrutura:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cinética} - \mathcal{H}, \quad (4.11)$$

onde $\mathcal{H}$ é a Hamiltoniana (4.10) e $\mathcal{L}_{cinética}$ é a parte cinética da Lagrangeana que contém derivadas temporais:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{cinética} = & -\frac{i}{2}(\bar{\psi}\rho^0\partial_0\psi - \partial_0\bar{\psi}\rho^0\psi) + \frac{\kappa g_2}{2J^2}\epsilon^{\alpha\beta}(\bar{\psi}\partial_\alpha\psi\bar{\psi}\rho^5\partial_\beta\psi - \partial_\alpha\bar{\psi}\psi\partial_\beta\bar{\psi}\rho^5\psi) + \\ & -\frac{\kappa g_3}{8J^3}\epsilon^{\alpha\beta}(\bar{\psi}\psi)^2\partial_\alpha\bar{\psi}\rho^5\partial_\beta\psi. \end{aligned} \quad (4.12)$$

O termo cinético define a estrutura de Dirac a qual foi calculada anteriormente usando o formalismo de Faddeev-Jackiw em [8]:

$$\begin{aligned} \{\psi_i(\sigma), \psi_j(\sigma')\} &= -i\frac{\kappa g_2}{2J^2}(\psi_k\psi_l)'\delta_{ij}\epsilon_{kl}\delta(\sigma - \sigma') + \dots \\ \{\psi_i(\sigma), \psi_j^*(\sigma')\} &= \left[i\delta_{ij} + i\frac{\kappa g_2}{J^2}(\epsilon_{ik}\delta_{jl}\psi_l'\psi_k^* + \epsilon_{jk}\delta_{il}\psi_k\psi_l'^*) \right] \delta(\sigma - \sigma') + \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde ψ_i , $i = 1, 2$ são as componentes do espinor de Dirac e σ e σ' são coordenadas da folha mundo. Os parênteses de Dirac possuem uma expressão não trivial, estendendo-se até a oitava ordem nos férmions ψ e suas derivadas espaciais ψ' . A expressão completa pode ser encontrada no apêndice A.

4.2 Estrutura canônica e a Hamiltoniana do modelo transformado

Na seção anterior, nós vimos que a Hamiltoniana do modelo de AAF é simples, porém a estrutura de Dirac é bastante complicada. Nesta seção, nós iremos encontrar as transformações nos campos fermiônicas que transformam os parênteses de Dirac na forma

canônica. O preço a pagar é que a Hamiltoniana torna-se altamente não trivial. Esta análise já foi realizada no artigo original [1].

Nós queremos encontrar uma redefinição não linear nas variáveis fermiônicas que transforma o termo cinético (4.12) na forma canônica:

$$\mathcal{L}_{T \text{ cinético}} = -\frac{i}{2}(\bar{\psi}\rho^0\partial_0\psi - \partial_0\bar{\psi}\rho^0\psi). \quad (4.14)$$

onde $\mathcal{L}_{T \text{ cinético}}$ denota a Lagrangeana cinética do modelo transformado de AAF.

O termo cinético (4.14) implica em uma estrutura mais simples para o parênteses de Dirac:

$$\{\psi_\alpha^*(\sigma), \psi_\beta(\sigma')\} = i\delta_{\alpha\beta}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (4.15)$$

Os cálculos das transformações nas variáveis fermiônicas mencionado é bastante extenso. Por simplicidade nós omitimos o cálculo que pode ser encontrado no apêndice B, assim como os cálculos que fizemos para eliminar a dependência na ordem mais alta da derivada temporal da Lagrangeana cinética (4.12).

Verificamos que com a finalidade de deixar o termo cinético (4.12) na forma canônica, as seguintes mudanças de variáveis em (4.12) devem serem realizadas.

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi + \frac{a_1}{J^2}\rho^1\psi(\partial_1\bar{\psi}\psi) + \frac{a_2}{J^3}\rho^1\partial_1\psi(\bar{\psi}\psi)^2 + \frac{a_3}{J^4}\partial_1^2\psi(\bar{\psi}\psi)^2 + \\ &+ \frac{a_4}{J^4}\partial_1\psi(\partial_1\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\partial_1\psi)\bar{\psi}\psi + \frac{a_5}{J^4}\rho^0\psi(\partial_1\bar{\psi}\rho^0\partial_1\psi)\bar{\psi}\psi + \frac{a_6}{J^6}\rho^1\partial_1\psi(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi)(\bar{\psi}\psi)^2, \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} + \frac{a_1^*}{J^2}\bar{\psi}\rho^1(\bar{\psi}\partial_1\psi) + \frac{a_2^*}{J^3}\partial_1\bar{\psi}\rho^1(\bar{\psi}\psi)^2 + \frac{a_3}{J^4}\partial_1^2\bar{\psi}(\bar{\psi}\psi)^2 + \\ &+ \frac{a_4}{J^4}\partial_1\bar{\psi}(\bar{\psi}\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\psi)\bar{\psi}\psi + \frac{a_5}{J^4}\bar{\psi}\rho^0(\partial_1\bar{\psi}\rho^0\partial_1\psi)\bar{\psi}\psi + \frac{a_6^*}{J^6}\partial_1\bar{\psi}\rho^1(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi)(\bar{\psi}\psi)^2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde

$$\begin{aligned}
a_1 &= i\kappa g_2, \quad a_2 = -i\frac{1}{8}\kappa g_3, \quad a_3 = -\frac{1}{4}\kappa^2 g_2^2, \\
a_4 &= -\frac{1}{2}\kappa^2 g_2^2, \quad a_5 = \frac{1}{2}\kappa^2 g_2^2, \quad a_6 = -i\frac{5}{4}\kappa^3 g_2^3,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

e a_i^* é o complexo conjugado de a_i .

Substituindo (4.16) na Hamiltoniana (4.10), nós obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_T &= J - i\frac{\kappa}{J}(\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\rho^1\psi) - \bar{\psi}\psi + \\
&+ \frac{2\kappa^2}{J^3}g_2((\bar{\psi}\partial_1\psi)^2 + (\partial_1\bar{\psi}\psi)^2) - i\frac{\kappa}{J^2}g_2\bar{\psi}\psi(\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\rho^1\psi) + \\
&- i\frac{\kappa^3}{J^5}g_2^2(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\rho^1\partial_1^2\psi - \partial_1^2\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi) - \frac{\kappa^2}{J^4}\left[\frac{g_3}{2} + g_2^2\right](\bar{\psi}\psi)^2\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi + \\
&+ i4\frac{\kappa^3}{J^5}g_2^2\bar{\psi}\psi(\bar{\psi}\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\psi)\partial_1\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi - 8\frac{\kappa^4}{J^7}g_2^3(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi)^2.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde $\mathcal{H}_T$ denota a Hamiltoniana do modelo transformado de AAF. Daqui para frente, nós sempre vamos usar o índice T para o modelo transformado de AAF e quando não escrevemos o índice T , trata-se do modelo original de AAF.

O nosso sistema dinâmico agora é descrito pela Hamiltoniana acima com a estrutura de Poisson canônica.

Depois de algumas mudanças nas coordenadas e uma mudança na base das matrizes de Dirac através da transformação de similaridade (F.3), a Lagrangeana do modelo transformado de AAF pode ser escrita na forma (veja mais detalhes no apêndice C):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_T &= \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi - \partial_0\bar{\psi}\gamma^0\psi) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi) - m\bar{\psi}\psi + \\
&+ \frac{i}{2}g_2(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi) + \frac{g_2}{2m}[(\bar{\psi}\partial_1\psi)^2 + (\partial_1\bar{\psi}\psi)^2] + \\
&- \frac{g_3}{8m}(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi) - \frac{g_2^2}{4m}(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi) - i\frac{g_2^2}{8m^2}(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\partial_1^2\psi - \partial_1^2\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi) \\
&- i\frac{g_2^2}{2m^2}(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\psi)(\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi) - \frac{g_2^3}{2m^3}(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi)^2.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

m é a massa da teoria dada por $m = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$ e as matrizes de Dirac γ^ν tem a forma:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1, \quad (4.20)$$

Note que a Lagrangeana (4.19) não é invariante sob transformação de Lorentz.

4.3 Hamiltoniana quântica do modelo de AAF.

Agora, nós vamos obter a Hamiltoniana quântica do modelo de AAF e seus auto-valores. Com este objetivo, devemos tratar as singularidades que aparecem devido ao produto de operadores no mesmo ponto. Isto requer a aplicação da técnica de regularização proposta anteriormente para o modelo de LL [2,3]. Como já mencionamos, anteriormente, o modelo de AAF possui duas formulações possíveis e aparentemente a sua formulação transformada parece ser a melhor opção para realizarmos a quantização. Isto ocorre porque a estrutura da álgebra do modelo de AAF na sua formulação do modelo transformado é mais simples. Além disso, a regularização dos operadores do modelo de AAF neste caso é a mesma do modelo de Thirring que já foi estudada no capítulo 2. Resta, portanto, tratar as singularidades vindas do potencial do tipo $\delta''(x)$. Em [2,3] foi mostrado como tratar potenciais semelhantes ao que aparece no modelo de AAF.

Como discutimos anteriormente é possível obter a Hamiltoniana da Lagrangeana (4.19), através da equação (4.11) onde $\mathcal{L}_T$ é dada pela equação (4.19) e o termo cinético $\mathcal{L}_T$ *cinético* é dado por (4.14). Adicionalmente, nós usamos a técnica de regularização de operadores descritos na seção (2.2). Assim, obtemos a Hamiltoniana escrita em termos dos campos ψ_F e $\psi_F^\dagger$:

$$\begin{aligned}
H_T = & -\frac{i}{2}(\psi_{Fi_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^3 \partial_1 \psi_{Fi_2} - \partial_1 \psi_{Fi_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^3 \psi_{Fi_2}) + m \psi_{Fi_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \psi_{Fi_2} + \\
& + \frac{i}{2} g_2 (\psi_{Fi_1}^\dagger \psi_{Fj_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^3 \psi_{Fi_2} \partial_1 \psi_{Fj_2} - \psi_{Fi_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fj_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^3 \psi_{Fi_2} \psi_{Fj_2}) + \\
& + \frac{g_2}{2m} (\psi_{Fi_1}^\dagger \psi_{Fj_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^0 \partial_1 \psi_{Fi_2} \partial_1 \psi_{Fj_2} + \partial_1 \psi_{Fi_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fj_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^0 \psi_{Fi_2} \psi_{Fj_2}) + \\
& - \left(\frac{g_3 + 2g_2^2}{8m} \right) (\psi_{Fi_1}^\dagger \psi_{Fj_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fk_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^0 \gamma_{k_1 k_2}^0 \psi_{Fi_2} \psi_{Fj_2} \partial_1 \psi_{Fk_2}) + \\
& + i \frac{g_2^2}{8m^2} (\psi_{Fi_1}^\dagger \psi_{Fj_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fk_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^0 \gamma_{k_1 k_2}^3 \psi_{Fi_2} \psi_{Fj_2} \partial_1^2 \psi_{Fk_2} + \\
& \quad - \psi_{Fi_1}^\dagger \psi_{Fj_1}^\dagger \partial_1^2 \psi_{Fk_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^0 \gamma_{k_1 k_2}^3 \psi_{Fi_2} \psi_{Fj_2} \partial_1 \psi_{Fk_2}) + \\
& - i \frac{g_2^2}{2m^2} (\psi_{Fi_1}^\dagger \psi_{Fj_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fk_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^0 \gamma_{k_1 k_2}^3 \psi_{Fi_2} \partial_1 \psi_{Fj_2} \partial_1 \psi_{Fk_2} + \\
& \quad - \psi_{Fi_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fj_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fk_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^0 \gamma_{k_1 k_2}^3 \psi_{Fi_2} \psi_{Fj_2} \partial_1 \psi_{Fk_2}) + \\
& + \frac{g_2^3}{2m^3} (\psi_{Fi_1}^\dagger \psi_{Fj_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fk_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fl_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^0 \gamma_{k_1 k_2}^0 \gamma_{l_1 l_2}^0 \psi_{Fi_2} \psi_{Fj_2} \partial_1 \psi_{Fk_2} \partial_1 \psi_{Fl_2}). \quad (4.21)
\end{aligned}$$

4.4 Diagonalização da Hamiltoniana do modelo de AAF

Nesta seção, nós estamos especialmente interessados em fazer a quantização do modelo de AAF utilizando o método que trata todas as singularidades associadas aos produtos de operadores em um mesmo ponto.

É fácil nos convenceremos que ao aplicarmos a Hamiltoniana H_T no estado de uma partícula e de duas partículas, somente os termos até a ordem $\psi^4(x)$ vão contribuir. Por este motivo, aqui estamos interessados na Hamiltoniana transformada do modelo de AAF (4.21) até a ordem $\psi^4(x)$, dada por:

$$\begin{aligned}
H_T^4 = & -\frac{i}{2}(\psi_{Fi_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^3 \partial_1 \psi_{Fi_2} - \partial_1 \psi_{Fi_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^3 \psi_{Fi_2}) + m \psi_{Fi_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \psi_{Fi_2} + \\
& + \frac{i}{2} g_2 (\psi_{Fi_1}^\dagger \psi_{Fj_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^3 \psi_{Fi_2} \partial_1 \psi_{Fj_2} - \psi_{Fi_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fj_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^3 \psi_{Fi_2} \psi_{Fj_2}) + \\
& + \frac{g_2}{2m} (\psi_{Fi_1}^\dagger \psi_{Fj_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^0 \partial_1 \psi_{Fi_2} \partial_1 \psi_{Fj_2} + \partial_1 \psi_{Fi_1}^\dagger \partial_1 \psi_{Fj_1}^\dagger \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^0 \psi_{Fi_2} \psi_{Fj_2}). \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Aqui, vamos considerar o pseudovácuo $|0\rangle$ que satisfaz:

$$\psi(x) |0\rangle = 0. \quad (4.23)$$

É fácil mostrar que a Hamiltoniana (4.22) satisfaz as seguintes propriedades:

$$H_T^4 |0\rangle = 0. \quad (4.24)$$

$$H_T^4 |\psi\rangle_1 = E_1 |\psi\rangle_1, \quad (4.25)$$

onde E_1 é a energia do estado de uma partícula e $|\psi\rangle_1$ é o estado de uma partícula:

$$|\psi\rangle_1 = \int dx \psi_k^\dagger(x) \chi^k(x) |0\rangle, \quad (4.26)$$

Ao aplicarmos a Hamiltoniana H_T^4 no estado de uma partícula, e usando a solução de uma partícula livre, é possível mostrar que:

$$\chi^k(x) = \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix} e^{ix p_1}, \quad (4.27)$$

e

$$p_1 = m \sinh(\theta), \quad (4.28)$$

$$E_1 = m \cosh(\theta), \quad (4.29)$$

onde θ é a rapidez.

Agora, vamos escrever o estado de duas partículas da seguinte forma:

$$|\psi\rangle_2 = \int dx dy \psi_{k_1}^\dagger(x) \psi_{k_2}^\dagger(y) \chi^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle. \quad (4.30)$$

A função $\chi^{k_1 k_2}(x, y)$ satisfaz a condição: $\chi^{k_1 k_2}(x, y) = -\chi^{k_2 k_1}(y, x)$. Nós supomos que a função $\chi^{k_1 k_2}(x, y)$ não é contínua em $x = y$, porque a Hamiltoniana, antes de ser regularizada, possui um produto de operadores mal definido em um mesmo ponto. Isto significa que quando fizermos o cálculo de $H_T |\psi\rangle_2$, nós consideramos o estado de duas partículas na forma:

$$|\psi\rangle_2 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \int dy \left(\int_{-\infty}^{y-\eta} dx + \int_{y+\eta}^{+\infty} dx \right) \psi_{k_1}^\dagger(x) \psi_{k_2}^\dagger(y) \chi^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle, \quad (4.31)$$

onde η é uma constante infinitesimal. Mesmo que a função $\chi^{k_1 k_2}(x, y)$ não seja contínua ainda se pode escrever uma função de onda adicional para o ponto $x = y$. A primeira tentativa de resolver este problema é somar ao estado de duas partículas alguma função como: $\int dy \psi_1^\dagger(y) \psi_2^\dagger(y) f(y)$, onde $f(y)$ é uma função contínua que descreve o que acontece no ponto $x = y$. Entretanto, nós precisamos ser mais cuidadosos. Essencialmente, também gostaríamos de saber o comportamento da derivada da função f próximo ao ponto $x = y$. Então nós consideramos um estado localizado mais geral

$$|\psi'\rangle_2 = \frac{1}{\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dx \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dy \psi_{k_1}^\dagger(x) \psi_{k_2}^\dagger(y) f^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle. \quad (4.32)$$

Esta é uma forma natural de escrever um estado localizado e é conhecido como produto de Sklyanin. Este produto foi encontrado anteriormente para o modelo de Landau-Lifshitz [22]. As funções $f^{k_1 k_2}(x, y)$ são consideradas contínuas e no limite $\eta \rightarrow 0$, nós recuperamos a função de onda em um ponto $\sim \int dy \psi_1^\dagger(y) \psi_2^\dagger(y) f(y)$

Portanto, o estado de duas partículas completo é dado pela soma das funções de onda (4.31) e (4.32):

$$\begin{aligned}
|\psi_{completa}\rangle &= |\psi\rangle_2 + |\psi'\rangle_2 \\
&= \lim_{\eta \rightarrow 0} \int dy \left(\int_{-\infty}^{y-\eta} dx + \int_{y+\eta}^{+\infty} dx \right) \psi_{k_1}^\dagger(x) \psi_{k_2}^\dagger(y) \chi^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle + \\
&+ \frac{1}{\eta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dx \int_{v-n/2}^{v+\eta/2} dy \psi_{k_1}^\dagger(x) \psi_{k_2}^\dagger(y) f^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Aplicando a Hamiltoniana regularizada (4.22) no estado de duas partículas $|\psi_{completa}\rangle$ (4.33) resulta:

$$H_T |\psi_{completa}\rangle = H_T |\psi'\rangle_2 + B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5, \quad (4.34)$$

onde as expressões B_1 , B_2 , B_3 , B_4 e B_5 encontram-se no apêndice G.

Nós vamos tratar o termo $H_T |\psi'\rangle_2$ mais tarde, pois a análise de (4.34) vai sugerir uma forma para função $f^{k_1 k_2}(x, y)$. Na resolução das integrais da Hamiltoniana (4.34), vamos adotar a mesma regularização usada para o modelo de Thirring no capítulo 2 dada pela equação (2.26). Após resolver as integrais da equação (4.34), encontramos:

$$\begin{aligned}
H_T |\psi_{completa}\rangle &= H_T^4 |\psi'\rangle_2 + m[\cosh(\theta_1) + \cosh(\theta_2)] |\psi\rangle_2 + \\
&+ \epsilon^0 \int dy \Omega_1(y) \psi_1^\dagger(y) \psi_2^\dagger(y) |0\rangle + \frac{1}{\epsilon} \int dy \Omega_2(y) \psi_1^\dagger(y) \psi_2^\dagger(y) |0\rangle + \\
&+ \epsilon \int dy \Omega_3(y) |0\rangle. \quad (4.35)
\end{aligned}$$

Para a Hamiltoniana ser diagonalizável, a segunda linha da equação (4.35) deve desapa-

recer. A fórmula exata do termo Ω_1 é dada por:

$$\begin{aligned}
\Omega_1 = & 2i [\chi^{12}(y - \eta, y) - \chi^{12}(y + \eta, y)] + \\
& + 2i [\chi^{21}(y - \eta, y) - \chi^{21}(y + \eta, y)] + \\
& - ig_2 [\partial_x \chi^{11}(x, y)|_{x=y-\eta} + \partial_x \chi^{11}(x, y)|_{x=y+\eta}] + \\
& - ig_2 [\partial_x \chi^{22}(x, y)|_{x=y-\eta} + \partial_x \chi^{22}(x, y)|_{x=y+\eta}] + \\
& + \frac{1}{m} g_2 [\partial_y \partial_x \chi^{12}(x, y)|_{x=y-\eta} + \partial_y \partial_x \chi^{12}(x, y)|_{x=y+\eta}] + \\
& - \frac{1}{m} g_2 [\partial_y \partial_x \chi^{21}(x, y)|_{x=y-\eta} + \partial_y \partial_x \chi^{21}(x, y)|_{x=y+\eta}]. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Notação utilizada: a função $\chi^{k_1 k_2}(x, y)$ é descontínua apenas em $x = y$, a função $\chi^{k_1 k_2}(x, y)|_{x < y}$ ou $\chi^{k_1 k_2}(x, y)|_{x > y}$ são contínuas. A notação $\partial_x \chi^{k_1 k_2}(x, y)|_{x=y-\eta}$ significa que tomamos como a derivada parcial da função $\chi^{k_1 k_2}(x, y)|_{x < y}$ e depois tomamos $x = y$. Similarmente a notação $d_x \chi^{k_1 k_2}(y - \eta, y)$ significa que primeiro tomamos $\chi^{k_1 k_2}(x, y)|_{x=y-\eta}$ e então tomamos a derivada total.

O termo Ω_2 é dada por:

$$\begin{aligned}
\Omega_2 = & ig_2 [\chi^{11}(y - \eta, y) - \chi^{11}(y + \eta, y)] + \\
& + ig_2 [\chi^{22}(y - \eta, y) - \chi^{22}(y + \eta, y)] + \\
& + \frac{1}{m} g_2 [\partial_x \chi^{12}(x, y)|_{x=y-\eta} - \partial_x \chi^{12}(x, y)|_{x=y+\eta}] + \\
& - \frac{1}{m} g_2 [\partial_x \chi^{21}(x, y)|_{x=y-\eta} - \partial_x \chi^{21}(x, y)|_{x=y+\eta}] + \\
& - \frac{1}{2m} g_2 \left[\frac{d}{dy} \chi^{12}(y - \eta, y) - \frac{d}{dy} \chi^{12}(y + \eta, y) \right] + \\
& + \frac{1}{2m} g_2 \left[\frac{d}{dy} \chi^{21}(y - \eta, y) + \frac{d}{dy} \chi^{21}(y + \eta, y) \right]. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Note que o termo com Ω_3 está multiplicado por ϵ , então quando $\epsilon \rightarrow 0$ este termo desaparece, mas por enquanto vamos deixar Ω_3 na forma geral e mais tarde nós vamos voltar a discutir este termo.

O problema agora é encontrar $\chi^{k_1 k_2}(x, y)$. Nós vamos usar o ansatz padrão do modelo de Thirring e de outros modelos integráveis, este ansatz é:

Para $x < y$:

$$\chi^{k_1 k_2}(x, y) = Au^{k_1}(\theta_1)u^{k_2}(\theta_2)e^{i(p_1 x + p_2 y)} - Bu^{k_1}(\theta_2)u^{k_2}(\theta_1)e^{i(p_1 y + p_2 x)}, \quad (4.40)$$

Para $x > y$:

$$\chi^{k_1 k_2}(x, y) = Bu^{k_1}(\theta_1)u^{k_2}(\theta_2)e^{i(p_1 x + p_2 y)} - Au^{k_1}(\theta_2)u^{k_2}(\theta_1)e^{i(p_1 y + p_2 x)}. \quad (4.41)$$

onde $u^{k_1}(\theta) = c_0 \begin{pmatrix} e^{\theta/2} \\ e^{-\theta/2} \end{pmatrix}$, c_0 é uma normalização e o momento $p_i = m \sinh(\theta_i)$.

Usando este ansatz para Ω_1 e Ω_2 , tomamos $\Omega_1 = 0$ reproduz a matriz S que foi encontrado usando métodos perturbativos em [4] para o modelo original de AAF:

$$S = \frac{1 - \frac{img_2}{4} \sinh(\theta_1 - \theta_2)}{1 + \frac{img_2}{4} \sinh(\theta_1 - \theta_2)}. \quad (4.42)$$

Entretanto, com este ansatz Ω_2 não é igual a zero. Obtemos:

$$\frac{1}{\epsilon} \int dy \Omega_2(y) \psi_1^\dagger(y) \psi_2^\dagger(y) |0\rangle = C \frac{1}{\epsilon} (A - B) i g_2 [\cosh(\theta_1) + \cosh(\theta_2)] * \quad (4.43)$$

$$* \cosh\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) \int dy \psi_1^\dagger(y) \psi_2^\dagger(y) e^{i(p_1 + p_2)y} |0\rangle, \quad (4.44)$$

onde $C = 64\xi^2\epsilon^4$ e $\xi = [\tau\omega_\epsilon(0)]^2$. A constante ξ vem da regularização (2.26) quando resolvemos as integrais da equação (4.34).

O termo (4.44) contém o fator $1/\epsilon$ que vai para o infinito quando $\epsilon \rightarrow 0$. Vamos mostrar mais tarde que a equação (4.44) vai-se combinar com parte dos termos vindo $H_T^4 |\psi'\rangle_2$ da equação (4.35).

Agora, podemos calcular o termo $H_T^4 |\psi'\rangle_2$ da equação (4.35). Antes vamos lembrar que temos também o termo Ω_3 em $H_T^4 |\psi\rangle_2$ (4.35). O termo Ω_3 adquire a seguinte forma após usar o ansatz (4.40) e (4.41):

$$\begin{aligned}
\epsilon \int dy \Omega_3(y) = & -irg_2\xi^4 \int dy \left[\psi_1^\dagger(y) \partial_y \psi_1^\dagger(y) e^{i(p_1+p_2)y} \right] + \\
& -irg_2\xi^4 \int dy \left[\psi_2^\dagger(y) \partial_y \psi_2^\dagger(y) e^{i(p_1+p_2)y} \right] + \\
& + \frac{2}{m}rg_2\xi^4 \int dy \left[\partial_y \psi_1^\dagger(y) \partial_y \psi_2^\dagger(y) e^{i(p_1+p_2)y} \right], \tag{4.45}
\end{aligned}$$

onde $r \equiv 4\epsilon(A+B)\sinh\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)$.

O cálculo do termo $H_T^4 |\psi'\rangle_2$ na equação (4.34) fornece:

$$\begin{aligned}
H_T^4 |\psi'\rangle_2 = & (\text{outros termos}) + \\
& -ig_2\xi^4 \int dy \left[\psi_1^\dagger(y) \partial_y \psi_1^\dagger(y) f^{12}(y, y) \right] |0\rangle + \\
& -ig_2\xi^4 \int dy \left[\psi_2^\dagger(y) \partial_y \psi_2^\dagger(y) f^{12}(y, y) \right] |0\rangle + \\
& + \frac{2}{m}g_2\xi^4 \int dy \left[\partial_y \psi_1^\dagger(y) \partial_y \psi_2^\dagger(y) f^{12}(y, y) \right] |0\rangle. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Se compararmos os termos (4.45) com (4.46), vemos que (4.45) cancela com os termos de (4.46), se o estado tiver a forma:

$$f^{12}(y, y) = -re^{i(p_1+p_2)y}. \tag{4.47}$$

Vamos mostrar mais tarde que esta escolha de $f^{12}(y, y)$ está em perfeita concordância com uma Hamiltoniana auto-adjunta.

Organizando os termos que restaram de $H_T^4 |\psi_{\text{completo}}\rangle$, encontramos:

$$\begin{aligned}
H_T^4 |\psi_{\text{completo}}\rangle_2 = & m [\cosh\theta_1 + \cosh\theta_2] |\psi\rangle_2 + \\
& + C \frac{1}{\epsilon} (A-B) ig_2 [\cosh\theta_1 + \cosh\theta_2] \cosh\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \int dy \psi_1^\dagger(y) \psi_2^\dagger(y) e^{i(p_1+p_2)y} |0\rangle \\
& - ig_2 C \int dy \psi_1^\dagger(y) \psi_2^\dagger(y) [\partial_x f^{11}(x, y) + \partial_x f^{22}(x, y)] |_{x=y} |0\rangle + \\
& + \frac{2}{m} g_2 C \int dy \psi_1^\dagger(y) \psi_2^\dagger(y) [\partial_x \partial_y f^{12}(x, y)] |_{x=y} |0\rangle + \\
& - 2iC \int dy \psi_1^\dagger(y) \psi_2^\dagger(y) [\partial_x f^{12}(x, y) - \partial_y f^{12}(x, y)] |_{x=y} |0\rangle, \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Da equação (4.48) vemos que para diagonalizar a Hamiltoniana, encontramos a seguinte forma para $f^{11}(x, y)$, $f^{22}(x, y)$ e para $f^{12}(x, y)$:

$$f^{12}(x, y) = -2(A + B)\epsilon \left[\lambda_1 e^{i(p_1 x + p_2 y)} - \lambda_2 e^{i(p_1 y + p_2 x)} \right], \quad (4.49)$$

$$f^{11}(x, y) = -2(A + B)\epsilon a_{11} \left[e^{i(p_1 x + p_2 y)} - e^{i(p_1 y + p_2 x)} \right], \quad (4.50)$$

$$f^{22}(x, y) = -2(A + B)\epsilon a_{22} \left[e^{i(p_1 x + p_2 y)} - e^{i(p_1 y + p_2 x)} \right], \quad (4.51)$$

com

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2 \sinh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right). \quad (4.52)$$

Esta escolha é consistente com a propriedade de anti-simetria $f^{ij}(x, y) = -f^{ji}(y, x)$ e também com a escolha para $f^{12}(y, y)$ (4.47). Nós podemos escolher $a_{11} = a_{22} = 0$, porque estamos trabalhando com férmions. Então fica fácil encontrar a solução para λ_1 e λ_2 :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[1 + 2 \sinh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) + g_2 h_1 + (g_2)^2 h_2 \right], \quad (4.53)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[1 - 2 \sinh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right) + g_2 h_1 + (g_2)^2 h_2 \right], \quad (4.54)$$

onde h_1 e h_2 são funções de θ_i .

No apêndice H, explicamos como é possível fazer a quantização do modelo de AAF utilizando o produto de Sklyanin.

Assim, mostramos que:

$$H_T |\psi_{completa}\rangle = m [\cosh(\theta_1) + \cosh(\theta_2)] |\psi_{completa}\rangle. \quad (4.55)$$

Nesta seção mostramos que a Hamiltoniana do modelo de AAF transformado no setor de duas partículas é diagonalizável. Para mostrar que o modelo de AAF é integrável falta ainda mostrar que a Hamiltoniana do modelo de AAF no setor de três e quatro partículas são diagonalizáveis. Somente depois disto nós podemos generalizar o resultado para o setor de n partículas. E provar que o modelo de AAF é integrável.

4.5 Hamiltoniana auto-adjunta do modelo de AAF.

O teste final de consistência da presente construção consiste em verificar se a Hamiltoniana é auto-adjunta. Para isto vamos considerar um espaço vetorial gerado por vetores da forma:

$$\psi = f_1^{ij}(x, y) \otimes f_2^{mn}(x, y). \quad (4.56)$$

Aqui nós mudamos a notação: $f_1^{ij}(x, y)$ corresponde ao que chamamos $f^{ij}(x, y)$ em (4.32) que aparece no estado extra e $f_2^{ij}(x, y)$ corresponde a função $\chi^{ij}(x, y)$ em (4.31). Então, o estado de duas partículas (4.33) tem a forma:

$$\begin{aligned} |\psi_{completa}\rangle_2 = & \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\int_{-\infty}^{y-\eta} dx + \int_{y+\eta}^{+\infty} dx \right) \psi_{k_1}^\dagger(x) \psi_{k_2}^\dagger(y) f_2^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle + \\ & + \frac{1}{\eta^2} \int_{+\infty}^{+\infty} dv \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dx \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dy \psi_{k_1}^\dagger(x) \psi_{k_2}^\dagger(y) f_1^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.57)$$

Nós definimos o produto escalar entre dois estados do tipo (4.56) como:

$$\begin{aligned} \langle \phi | \psi \rangle = & \alpha \left(\frac{1}{\eta^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dx \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dy g_1^{*ij}(x, y) f_1^{ij}(x, y) + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left(\int_{-\infty}^{y-\eta} dx + \int_{y+\eta}^{+\infty} dx \right) g_2^{*ij}(x, y) f_2^{ij}(x, y). \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde ϕ é um estado definido similarmente a (4.56): $\phi = g_1^{ij}(x, y) \otimes g_2^{mn}(x, y)$, e α é uma constante que será escolhida mais tarde pela condição da Hamiltoniana auto-adjunta.

A ação da Hamiltoniana em ψ pode ser escrita como:

$$\hat{H}\psi = \left(\hat{h} f_1 \right)^{ij}(x, y) \otimes \left(\hat{D}_{x,y} f_2 \right)^{mn}(x, y), \quad (4.59)$$

o operador $(\hat{D}_{x,y} f_2)^{mn}(x, y)$ tem a forma:

$$\left(\hat{D}_{x,y} f_2 \right)^{mn}(x, y) = \left[(-i\gamma_{mk_1}^3 \delta_{nk_2} \partial_x + m\gamma_{mk_1}^0 \delta_{nk_2}) + (-i\gamma_{nk_2}^3 \delta_{mk_1} \partial_y + m\gamma_{nk_2}^0 \delta_{mk_1}) \right] f_2^{k_1 k_2}(x, y), \quad (4.60)$$

e é definido de tal forma que reproduz o espectro correto (4.55), quando atuado sobre o ansatz (4.40) e (4.41) para $f_2^{k_1 k_2}(x, y)$. O operador $(\hat{h}f_1)^{ij}(x, y)$ é fixado da condição de ser Hermitiano:

$$\langle \phi | \hat{H} \psi \rangle = \langle \hat{H} \phi | \psi \rangle. \quad (4.61)$$

Substituindo (4.58) em (4.61), e tendo em conta o fato de que nem a função $f_2^{k_1 k_2}(x, y)$ nem suas derivadas são contínuas, após várias integrações por partes, obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{1}{\eta^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dy \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dx \left[g_1^{*ij}(x, y) \cdot (\hat{h}f_1)^{ij}(x, y) - (\hat{h}g_1)^{*ij}(x, y) \cdot f_1^{ij}(x, y) \right] = \\ & = i \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[\gamma_{mk_1}^3 \delta_{nk_2} - \gamma_{nk_2}^3 \delta_{mk_1} \right] g_2^{*mn}(x, y) f_2^{k_1 k_2}(x, y) \Big|_{x=y+\eta}^{x=y-\eta}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

Agora vamos escrever o lado direito da equação (4.62) em componentes:

$$\begin{aligned} & \alpha \left(\frac{1}{\eta^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dy \int_{v-\eta/2}^{v+\eta/2} dx \left[g_1^{*ij}(x, y) \cdot (\hat{h}f_1)^{ij}(x, y) - (\hat{h}g_1)^{*ij}(x, y) \cdot f_1^{ij}(x, y) \right] \\ & = (2i) \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[g_2^{*12}(x, y) f_2^{12}(x, y) - g_2^{21}(x, y) f_2^{21}(x, y) \right] \Big|_{x=y+\eta}^{x=y-\eta}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Integrando o lado esquerdo a equação (4.63), tomando o limite $\eta \rightarrow 0$ e denotando:

$f_{2(\pm)}^{ij} = f_2^{ij}(y \pm \eta, y)$ e similarmente para $g_{2(\pm)}^{ij}$, podemos escrever (4.63) como:

$$\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[g_1^{*12} (\hat{h}f_1)^{12} - (\hat{h}g_1)^{*12} f_1^{12} \right](y, y) = (2i) \int_{-\infty}^{+\infty} dy [g_{2(-)}^{*12} f_{2(-)}^{12} - g_{2(+)}^{*12} f_{2(+)}^{12}]. \quad (4.64)$$

Agora das equações (4.49) e (4.52) podemos escrever $f_1^{12}(y, y)$ na forma (veja (4.40) e (4.41)) :

$$f_1^{12}(y, y) = -\epsilon [f_{2(-)}^{12} + f_{2(+)}^{12}]. \quad (4.65)$$

Da equação (4.65) podemos definir o operador $\hat{h}$:

$$(\hat{h}f_1)^{12}(y, y) = -\frac{i}{\epsilon} [f_{2(-)}^{12} - f_{2(+)}^{12}]. \quad (4.66)$$

Agora, é fácil ver que o integrando lado esquerdo da expressão (4.64), torna-se:

$$\left[g_1^{*12}(\hat{h}f_1)^{12} - (\hat{h}g_1)^{*12}f_1^{12} \right] (y, y) = (2i) \left[g_{2(-)}^{*12}f_{2(-)}^{12} - g_{2(+)}^{*12}f_{2(+)}^{12} \right]. \quad (4.67)$$

Então, o lado direito e o lado esquerdo de (4.64) coincide, se escolhermos $\alpha = 1$. Assim, mostramos que $\hat{H}$ é auto adjunto.

4.6 Teorema da equivalência

Provamos que as matrizes S de duas partículas, do modelo transformado de AAF e do modelo original de AAF, são iguais. Aqui, estamos interessados em fornecer mais uma prova, que após uma mudança de variáveis na Lagrangeana do modelo de AAF as matrizes S fornecidas por estas Lagrangeanas são equivalentes. Esta segunda demonstração é conhecida como teorema da equivalência.

Uma demonstração consistente e clara do teorema da equivalência para um modelo bosônico foi feita no artigo [20]. Nas próximas seções, estamos interessados em fazer a mesma demonstração só que para um modelo fermiônico.

4.6.1 Invariância da função de Green

Nesta seção, vamos mostrar que as funções de Green das Lagrangeanas antes e depois de transformações das variáveis estão relacionadas, e usando este resultado, vamos mostrar que a matriz S das duas Lagrangeanas também estão relacionadas. A ideia é demonstrar isto para o modelo de AAF, porém aqui vamos considerar um modelo fermiônico geral no

qual o modelo de AAF esta incluído. A Lagrangeana de um modelo de férmions é dada por:

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = i\bar{\psi}\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - m\bar{\psi}\psi + \lambda\mathcal{L}_{int} \quad (4.68)$$

onde $\mathcal{L}_{int}$ é o termo de interação e as matrizes de Dirac são dadas por (C.11).

A ideia é mostrar que a matriz S é invariante pela mudanças de variáveis:

$$\psi \rightarrow \psi + F(\psi, \bar{\psi}), \quad (4.69)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} + \bar{F}(\psi, \bar{\psi}), \quad (4.70)$$

onde $\bar{F}(\psi, \bar{\psi}) = F^\dagger(\psi, \bar{\psi})\gamma^0$. A função $F(\psi, \bar{\psi})$ é um polinômio de ψ , $\bar{\psi}$ e das derivadas destes campos, e satisfaz a seguinte restrição $F(\psi, \bar{\psi}) \neq -\psi$.

Vamos chamar a lagrangeana transformada de $\mathcal{L}_T(\psi, \bar{\psi})$, ou seja,

$$\mathcal{L}_T(\psi, \bar{\psi}) = \mathcal{L}(\psi + F(\psi, \bar{\psi}), \bar{\psi} + \bar{F}(\psi, \bar{\psi})) \quad (4.71)$$

Para mostrar que a função de Green é invariante pela mudanças de variáveis (4.69) e (4.70), propomos reescrever as transformações (4.69) e (4.70) na seguinte forma:

$$W_\rho(\psi, \bar{\psi}) = \psi + \rho F(\psi, \bar{\psi}), \quad (4.72)$$

$$\bar{W}_\rho(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi} + \rho \bar{F}(\psi, \bar{\psi}), \quad (4.73)$$

onde o parâmetro ρ está entre 0 e 1 inclusive; assim a Lagrangeana torna-se:

$$\mathcal{L}_\rho(\psi, \bar{\psi}) = \mathcal{L}(W_\rho(\psi, \bar{\psi}), \bar{W}_\rho(\psi, \bar{\psi})). \quad (4.74)$$

Note que quando $\rho = 0$, obtemos a Lagrangeana original (4.68) e se $\rho = 1$, encontramos a Lagrangeana transformada (4.71).

Agora vamos determinar as equações clássicas do movimento que serão úteis para análise de suas versões quantizadas. A equação do movimento para o campo ψ é obtido da forma usual pelo princípio da variação da ação. Assim encontramos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial x_{\mu_1} \dots \partial x_{\mu_n} \psi} \right) = 0 \quad (4.75)$$

e a equação do movimento clássica para o campo $\bar{\psi}$ é dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial x_{\mu_1} \dots \partial x_{\mu_n} \bar{\psi}} \right) = 0 \quad (4.76)$$

Se Q e Y são funcionais de ψ , $\bar{\psi}$ e de suas derivadas de alta ordem, vamos definir algumas relações úteis:

$$\frac{\delta Q}{\delta f_j} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \frac{\partial Q}{\partial \partial x_{\mu_1} \dots \partial x_{\mu_n} f_j} \quad (4.77)$$

onde $j = 1, 2$ e $f_1 = \psi$ e $f_2 = \bar{\psi}$.

$$\frac{\vec{\delta} Q}{\delta f_j} Y \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial Q}{\partial \partial x_{\mu_1} \dots \partial x_{\mu_n} f_j} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} Y \quad (4.78)$$

A motivação da definição (4.77) são as equações de movimento (4.75) e (4.76), e a motivação da equação (4.78) foi o seguinte procedimento: multiplicamos a equação (4.77) por Y , integrarmos por partes e desprezamos as derivadas totais.

Para a Lagrangeana $\mathcal{L}_\rho(\psi, \bar{\psi})$, a equação de movimento para ψ é

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\rho(\psi, \bar{\psi})}{\delta \psi} = 0 \quad (4.79)$$

e a equação do movimento para $\bar{\psi}$ é

$$\frac{\delta \mathcal{L}_\rho(\psi, \bar{\psi})}{\delta \bar{\psi}} = 0. \quad (4.80)$$

Usando a regra da cadeia para a equação (4.79), ela torna-se:

$$\left(1 + \rho \frac{\delta F}{\delta \psi} \right) \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta W_\rho} + \left(\rho \frac{\delta \bar{F}}{\delta \psi} \right) \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta \bar{W}_\rho} = 0, \quad (4.81)$$

e a equação (4.80) torna-se:

$$\left(\rho \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}}\right) \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta W_\rho} + \left(1 + \rho \frac{\delta \bar{F}}{\delta \bar{\psi}}\right) \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta \bar{W}_\rho} = 0. \quad (4.82)$$

A equação do movimento clássica do modelo fermiônico é mais complicada do que para um modelo bosônico [20], pois se os termos $\frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}}$ e $\frac{\delta \bar{F}}{\delta \bar{\psi}}$ fossem iguais a zero, nós teríamos uma relação semelhante a encontrada em [20] e a demonstração da invariância da função de Green seria praticamente a mesma. Porém estes dois termos são diferentes de zero. Devido a isto nós vamos ter algumas alterações na demonstração do teorema da equivalência para os férmions.

Para funções quaisquer $\theta_1(\psi, \bar{\psi})$, $\theta_2(\psi, \bar{\psi})$, ..., $\theta_s(\psi, \bar{\psi})$ e $Y(\psi, \bar{\psi})$ de ψ e $\bar{\psi}$ e de suas derivadas, é possível mostrar que a equação do movimento quântica é dada por:

$$\left\langle T \left[\int dy^2 \left\{ \frac{\vec{\delta} \mathcal{L}_\rho(\psi, \bar{\psi})}{\delta \bar{\psi}} Y \right\} (y) X(x) \right] \right\rangle = i \left\langle T \left[\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\delta \bar{\psi}} Y \right\} (x) \right] \right\rangle, \quad (4.83)$$

onde

$$X(x) = \prod_{i=1}^s \theta_i(\psi, \bar{\psi})(x_i) \quad (4.84)$$

$$\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\delta \bar{\psi}} Y \right\} (x) = \sum_{i=1}^s (-1)^{i+1} \left\{ \frac{\vec{\delta} \theta_i}{\delta \bar{\psi}} Y \right\} (y_i) \prod_{j \neq i} \theta_j(y_j), \quad (4.85)$$

onde $(-1)^{i+1}$ surge porque os campos são anticomutativos.

Agora, vamos escolher $X(x)$ como:

$$X(x) = \prod_{i=1}^s \left\{ \theta_i(W_\rho(\psi, \bar{\psi}), \bar{W}_\rho(\psi, \bar{\psi})) \right\} (x_i), \quad (4.86)$$

onde $W_\rho(\psi, \bar{\psi})$ e $\bar{W}_\rho(\psi, \bar{\psi})$ são dados por (4.72) e (4.73) respectivamente.

Usando a regra da cadeia podemos ver que:

$$\frac{\delta X}{\delta \bar{\psi}} = \frac{\delta X}{\delta W_\rho} \left(1 + \rho \frac{\delta F}{\delta \bar{\psi}} \right) + \frac{\delta X}{\delta \bar{W}_\rho} \left(\rho \frac{\delta \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right). \quad (4.87)$$

Novamente, se do lado direito da equação (4.87), não tivéssemos o segundo termo, esta equação seria semelhante ao caso do modelo bosônico; portanto a demonstração do teorema seria semelhante ao feito em [20].

Usando as equações (4.81), (4.87) e (4.83), após algumas manipulações, a versão quantizada da equação do movimento fica:

$$\begin{aligned} \left\langle T \left[\int dy^2 \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta W_\rho} \left(1 + \rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \psi} \right) Y + \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta \bar{W}_\rho} \left(\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \psi} \right) Y \right\} (y) X(x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} = \\ (4.88) \\ = i \left\langle T \left[\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\delta W_\rho} \left(1 + \rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \psi} \right) Y + \frac{\vec{\delta} X}{\delta \bar{W}_\rho} \left(\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \psi} \right) Y \right\} (x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} \end{aligned}$$

onde M é alguma ordem do parâmetro ρ .

O mesmo pode ser feito para equação do movimento de $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned} \left\langle T \left[\int dy^2 \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta \bar{W}_\rho} \left(1 + \rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{Y} + \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta W_\rho} \left(\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{Y} \right\} (y) X(x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} = \\ (4.89) \\ = i \left\langle T \left[\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\delta \bar{W}_\rho} \left(1 + \rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{Y} + \frac{\vec{\delta} X}{\delta W_\rho} \left(\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{Y} \right\} (x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} \end{aligned}$$

As duas últimas equações são bem mais complicadas do que sua correspondente para o campo bosônico obtida em [20]. A primeira diferença é que aqui temos duas equações, enquanto em [20] temos somente uma equação. A segunda diferença, e mais importante, são os termos mistos que aparecem nas equações acima, isto é, os termos com $\frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \psi}$ e $\frac{\vec{\delta} F}{\delta \bar{\psi}}$ nas equações (4.88) e (4.89) respectivamente. Vamos ver daqui a pouco que estes termos extras induzem algumas modificações na prova do teorema.

O truque para mostrar que a função de Green é invariante sobre as transformações de variáveis (4.72) e (4.73), consiste em derivar a função de Green transformada em relação ao parâmetro ρ e depois de algumas manipulações algébricas, mostrar que tal é igual a zero. Assim podemos concluir que a função de Green independe de ρ .

Derivando a função de Green em relação a ρ temos:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \langle T[X(x)] \rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} = \left\langle T \left[\int dy^2 \frac{\partial \mathcal{L}_\rho}{\partial \rho}(y) X(x) \right] \right\rangle_{M-1}^{\mathcal{L}_\rho} + \left\langle T \left[\frac{\partial X}{\partial \rho}(x) \right] \right\rangle_{M-1}^{\mathcal{L}_\rho} \quad (4.90)$$

temos $M - 1$ porque derivamos em relação ao parâmetro ρ , o que diminui a ordem em ρ .

Usando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial X}{\partial \rho}(x) = \left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\partial W_\rho} F + \frac{\vec{\delta} X}{\partial \bar{W}_\rho} \bar{F} \right\}(x).$$

Logo:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \langle T[X(x)] \rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} = \left\langle T \left[\int dy^2 \frac{\partial \mathcal{L}_\rho}{\partial \rho}(y) X(x) \right] \right\rangle_{M-1}^{\mathcal{L}_\rho} + \left\langle T \left[\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\partial W_\rho} F + \frac{\vec{\delta} X}{\partial \bar{W}_\rho} \bar{F} \right\}(x) \right] \right\rangle_{M-1}^{\mathcal{L}_\rho}. \quad (4.91)$$

Primeiramente, vamos manipular o primeiro termo do lado direito da equação (4.91).

Usando a relação:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\rho}{\partial \rho}(y) = \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta W_\rho} F + \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta \bar{W}_\rho} \bar{F} \right\}(y) \quad (4.92)$$

podemos escrever:

$$\left\langle T \left[\int dy^2 \frac{\partial \mathcal{L}_\rho}{\partial \rho}(y) X(x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} = \left\langle T \left[\int dy^2 \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta W_\rho} F + \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta \bar{W}_\rho} \bar{F} \right\}(y) X(x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} \quad (4.93)$$

Escolhendo $Y = F$ e $\bar{Y} = \bar{F}$ na equação de movimento (4.88) e (4.89) respectivamente, e combinando com o resultado (4.93), nós obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left\langle T \left[\int dy^2 \frac{\partial \mathcal{L}_\rho}{\partial \rho}(y) X(x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} = \\
& = \left\langle T \left[\int dy^2 \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta W_\rho} \left[\left(-\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \psi} \right) F + \left(-\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{F} \right] \right\} (y) X(x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} + \\
& + \left\langle T \left[\int dy^2 \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta \bar{W}_\rho} \left[\left(-\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{F} + \left(-\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \psi} \right) F \right] \right\} (y) X(x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} + \\
& + i \left\langle T \left[\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\delta W_\rho} \left[\left(1 + \rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \psi} \right) F + \left(\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{F} \right] \right\} (x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} + \\
& + i \left\langle T \left[\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\delta \bar{W}_\rho} \left[\left(1 + \rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{F} + \left(\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \psi} \right) F \right] \right\} (x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} \tag{4.94}
\end{aligned}$$

Usando as equações (4.88) e (4.89) repetidas vezes com $Y \equiv Y_2 = \left(-\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \psi} \right) Y_1 + \left(-\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{Y}_1$, $Y_3 = \left(-\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \psi} \right) Y_2 + \left(-\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{Y}_2$, ..., $Y_n = \left(-\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \psi} \right) Y_{n-1} + \left(-\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{Y}_{n-1}$ e $\bar{Y} \equiv \bar{Y}_2 = \left(-\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{Y}_1 + \left(-\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \psi} \right) Y_1$, $\bar{Y}_3 = \left(-\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{Y}_2 + \left(-\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \psi} \right) Y_2$, ..., $\bar{Y}_n = \left(-\rho \frac{\vec{\delta} \bar{F}}{\delta \bar{\psi}} \right) \bar{Y}_{n-1} + \left(-\rho \frac{\vec{\delta} F}{\delta \psi} \right) Y_{n-1}$ respectivamente, a equação (4.94) torna-se:

$$\begin{aligned}
& \left\langle T \left[\int dy^2 \frac{\partial \mathcal{L}_\rho}{\partial \rho}(y) X(x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} = \left\langle T \left[\int dy^2 \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta W_\rho} Y_n \right\} (y) X(x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} + \\
& + \left\langle T \left[\int dy^2 \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta \bar{W}_\rho} \bar{Y}_n \right\} (y) X(x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} + \\
& + i \left\langle T \left[\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\delta W_\rho} [F + Y_n] \right\} (x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} + \\
& + i \left\langle T \left[\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\delta \bar{W}_\rho} [\bar{F} + \bar{Y}_n] \right\} (x) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} \tag{4.95}
\end{aligned}$$

A equação (4.95) é verdadeira para todos $n \geq 0$, se os dois últimos termos do lado direito forem iguais a zero quando $n = 0$. Observe que Y_n é da ordem ρ^n . Nós vamos ver mais tarde que isto é importante para mostrar a invariância da função de Green pela mudança de variáveis. As séries de Y e $\bar{Y}$ usadas neste trabalho são muito mais complicadas que a série obtida para o modelo bosônico [20].

Podemos reescrever (4.91) como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \rho} \langle T [X(x)] \rangle &= i \left\langle T \left[\int d^2 y \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta W_\rho} Y_n \right\} (y) X(x) \right] \right\rangle_{M-1}^{\mathcal{L}_\rho} + \\ &+ i \left\langle T \left[\int d^2 y \left\{ \frac{\delta \mathcal{L}(W_\rho, \bar{W}_\rho)}{\delta \bar{W}_\rho} \bar{Y}_n \right\} (y) X(x) \right] \right\rangle_{M-1}^{\mathcal{L}_\rho} + \\ &+ \left\langle T \left[\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\delta W_\rho} Y_n \right\} (y) \right] \right\rangle_{M-1}^{\mathcal{L}_\rho} + \left\langle T \left[\left\{ \frac{\vec{\delta} X}{\delta \bar{W}_\rho} \bar{Y}_n \right\} (y) \right] \right\rangle_{M-1}^{\mathcal{L}_\rho}. \end{aligned} \quad (4.96)$$

Na equação (4.96) sempre é possível fazer $n \geq M$, assim o lado direito da equação (4.96) é igual a zero, porque a ordem em ρ é excedida, visto que Y_n e $\bar{Y}_n$ são de ordem de ρ^n . Portando mostramos que a função de Green é invariante sobre as transformações de variáveis (4.72) e (4.73). Então encontramos:

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left\langle T \left[\prod_{i=1}^s \{ \theta_i(W_\rho(\psi, \bar{\psi}), \bar{W}_\rho(\psi, \bar{\psi})) \bar{\theta}_i(W_\rho(\psi, \bar{\psi}), \bar{W}_\rho(\psi, \bar{\psi})) \} (x_i) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_\rho} = 0. \quad (4.97)$$

Consequentemente, a matriz $\langle T [\prod_{i=1}^s \{ \theta_i(W_\rho(\psi, \bar{\psi}), \bar{W}_\rho(\psi, \bar{\psi})) \bar{\theta}_i(W_\rho(\psi, \bar{\psi}), \bar{W}_\rho(\psi, \bar{\psi})) \} (x_i)] \rangle_M^{\mathcal{L}_\rho}$ é independente de ρ . Escolhendo sucessivamente $\rho = 0$ e $\rho = 1$, nós temos que para todo M ,

$$\left\langle T \left[\prod_{i=1}^s \{ \theta_i(\psi, \bar{\psi}) \bar{\theta}_i(\psi, \bar{\psi}) \} (x_i) \right] \right\rangle^{\mathcal{L}} = \left\langle T \left[\prod_{i=1}^s \{ \theta_i(\psi + F, \bar{\psi} + \bar{F}) \bar{\theta}_i(\psi + F, \bar{\psi} + \bar{F}) \} (x_i) \right] \right\rangle_M^{\mathcal{L}_T} \quad (4.98)$$

Agora M refere-se ao número de vértice de F .

Com estes resultados é possível mostrar a invariância da matriz S para o modelo de AAF. Estes resultados foram apresentados em [7].

Conclusão

Mostramos que o modelo de AAF é um exemplo representativo das dificuldades encontradas para se quantizar modelos contínuos integráveis. Neste trabalho, para a diagonalização do modelo de AAF usamos a mesma técnica empregada para diagonalizar o modelo de LL [2, 3] que exige a regularização do produto singular de operadores no mesmo ponto e também a construção das extensões auto-adjuntas. Mostramos também que este método se aplica ao caso mais simples do modelo de Thirring massivo para o qual já era conhecido a diagonalização da Hamiltoniana através de outro método [24].

Verificamos que a diagonalização da Hamiltoniana do modelo de AAF é mais viável, se usarmos o modelo transformado de AAF. Este modelo é obtido do modelo original após uma redefinição nos campos que transforma os parênteses de Dirac complicado na estrutura canônicos padrão entre dois férmions. Apesar da diagonalização da Hamiltoniana ser um procedimento relativamente direto, a presença de singularidades requer uma análise mais cuidadosa do produto de operadores e de sua regularização. Mostramos que a função de onda e suas derivadas são funções descontínuas e satisfazem equações de descontinuidade complicadas.

Como discutimos anteriormente, a Hamiltoniana transformada do modelo de AAF é obtida através de uma redefinição nos campos do modelo original de AAF. Portanto precisamos mostrar que as matrizes S de ambas as teorias são iguais. A primeira evidência da invariância da matriz S foi obtida por cálculo direto da matriz S em ambas as formulações

do modelo de AAF. A matriz S para o modelo original foi obtida em [4] através de um método perturbativo, enquanto a matriz S do modelo transformado foi obtida através da diagonalização da Hamiltoniana. Também utilizamos o teorema da equivalência para o modelo de AAF.

Para mostrar que o modelo de AAF é integrável, falta ainda mostrar que a Hamiltoniana do modelo de AAF é diagonalizável no setor de três e quatro partículas. De posse deste resultado podemos generalizar o resultado para o setor de n partículas, assim a aintegrabilidade do modelo de AAF fica provada.

Agora, de posse dos resultados obtidos neste trabalho, nós seremos capazes de encontrar o espectro das partículas e estados ligados no vácuo falso. Esta última já foi encontrada em [4] na aproximação de 1-loop. Preenchendo o vácuo falso com partículas de energia negativa iremos obter o estado de menor energia (vácuo verdadeiro) . Ao fazermos o espalhamento no vácuo verdadeiro obtemos a matriz- S verdadeira e as equações de Bethe correspondentes, à partir das quais será obtido o espectro físico.

O modelo de AAF constitui um exemplo especialmente interessante no contexto da análise acima, pois como foi visto para o caso mais simples do modelo de Thirring, a análise acima é diferente para os casos atrativo e repulsivo. Foi mostrado em [8] que o modelo de AAF possui duas constantes de acoplamento que estão relacionadas pelo vínculo de integrabilidade quântica.

Podemos derivar a termodinâmica das equações de Bethe Ansatz seguindo os métodos convencionais [30]. Iremos verificar se existe alguma restrição a termodinâmica devido a natureza singular do modelo de AAF. Já é conhecido para o caso análogo do modelo de LL, que existem restrições gerais sobre a natureza do espectro no limite de temperatura nula.

Apêndice A

Estrutura de Dirac do modelo de AAF

Neste apêndice, nós apresentamos a estrutura de Dirac do modelo de AAF que foi calculado anteriormente pelo formalismo de Faddeev-Jackiw em [8].

Aqui nós utilizaremos a notação auxiliar para os campos fermiônicos:

$$\chi_1 = \psi_1, \quad \chi_2 = \psi_2, \quad \chi_3 = \psi_1^*, \quad \chi_4 = \psi_2^*. \quad (\text{A.1})$$

e

$$\{\chi_i(x), \chi_j(y)\} = \Omega_{ij}^{-1} \delta(x - y). \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{11}^{-1} &= \frac{i\sqrt{\lambda}}{2J^2} g_2 (-\chi_1 \chi_2' + \chi_2 \chi_1') + \frac{i\sqrt{\lambda}}{4J^3} g_3 \chi_1 \chi_2 \chi_4 \chi_2' + \\
&+ \frac{i\lambda}{2J^4} g_2^2 (\chi_1 \chi_2 \chi_2' \chi_3' + \chi_1 \chi_4 \chi_1' \chi_2') + \\
&+ \frac{i\lambda^{\frac{3}{2}}}{4J^6} g_2^3 (-\beta_1 \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_1' \chi_2' \chi_4' - 3\chi_1 \chi_2 \chi_4 \chi_1' \chi_2' \chi_3'), \tag{A.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{22}^{-1} &= \frac{i\sqrt{\lambda}}{2J^2} g_2 (-\chi_1 \chi_2' + \chi_2 \chi_1') - \frac{i\sqrt{\lambda}}{4J^3} g_3 \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_1' + \\
&+ \frac{i\lambda}{2J^4} g_2^2 (-\chi_1 \chi_2 \chi_1' \chi_4' - \chi_2 \chi_3 \chi_1' \chi_2') + \\
&+ \frac{i\lambda^{\frac{3}{2}}}{4J^6} g_2^3 (3\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_1' \chi_2' \chi_4' + \beta_2 \chi_1 \chi_2 \chi_4 \chi_1' \chi_2' \chi_3'), \tag{A.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{12}^{-1} &= \frac{i\sqrt{\lambda}}{8J^3} g_3(-\chi_1\chi_2\chi_3\chi_2' + \chi_1\chi_2\chi_4\chi_1') + \\
&+ \frac{i\lambda}{4J^4} g_2^2(-\chi_1\chi_3\chi_1'\chi_2' + \chi_1\chi_2\chi_2'\chi_4' - \chi_1\chi_2\chi_1'\chi_3' + \chi_2\chi_4\chi_1'\chi_2') + \\
&- \frac{i\lambda}{2J^5} g_2 g_3 \chi_1\chi_2\chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2' + \frac{i\lambda^{\frac{3}{2}}}{2J^6} g_2^3(\chi_1\chi_2\chi_3\chi_1'\chi_2'\chi_3' - \chi_1\chi_2\chi_4\chi_1'\chi_2'\chi_4'), \tag{A.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{14}^{-1} &= -\frac{i\sqrt{\lambda}}{2J^2} g_2(\chi_1\chi_3' + \chi_4\chi_2') + \\
&+ \frac{i\sqrt{\lambda}}{8J^3} g_3(-\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4' + \chi_2\chi_3\chi_4\chi_1' + 2\chi_1\chi_2\chi_4\chi_3' - 2\chi_1\chi_3\chi_4\chi_2') + \\
&+ \frac{i\lambda}{4J^4} g_2^2(-\chi_1\chi_3\chi_2'\chi_3' + \chi_1\chi_4\chi_1'\chi_3' + \chi_1\chi_4\chi_2'\chi_4' - \chi_2\chi_4\chi_2'\chi_3') - \\
&- \frac{i\lambda^{\frac{3}{2}}}{4J^6} g_2^3(\beta_3\chi_1\chi_2\chi_3\chi_1'\chi_3'\chi_4' + \beta_4\chi_2\chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2'\chi_4'), \tag{A.6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{23}^{-1} &= \frac{i\sqrt{\lambda}}{2J^2} g_2(\chi_3\chi_1' + \chi_2\chi_4') + \\
&+ \frac{i\sqrt{\lambda}}{8J^3} g_3(\chi_1\chi_2\chi_4\chi_3' - \chi_1\chi_3\chi_4\chi_2' - 2\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4' + 2\chi_2\chi_3\chi_4\chi_1') + \\
&+ \frac{i\lambda}{4J^4} g_2^2(-\chi_1\chi_3\chi_1'\chi_4' + \chi_2\chi_3\chi_1'\chi_3' + \chi_2\chi_3\chi_2'\chi_4' - \chi_2\chi_4\chi_1'\chi_4') + \\
&+ \frac{i\lambda^{\frac{3}{2}}}{4J^6} g_2^3(\beta_4\chi_1\chi_2\chi_4\chi_2'\chi_3'\chi_4' + \beta_3\chi_1\chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2'\chi_3'), \tag{A.7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{13}^{-1} &= i + \frac{i\sqrt{\lambda}}{2J^2} g_2(\chi_2\chi_3' - \chi_4\chi_1') + \\
&+ \frac{i\sqrt{\lambda}}{8J^3} g_3\chi_2\chi_4(\chi_1\chi_4' - \chi_3\chi_2') + \\
&+ \frac{i\lambda}{4J^4} g_2^2(\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4' - \chi_1\chi_3\chi_1'\chi_3' + \beta_5\chi_1\chi_3\chi_2'\chi_4' - \chi_1\chi_4\chi_2'\chi_3' + \\
&- \chi_2\chi_3\chi_1'\chi_4' - \chi_2\chi_4\chi_1'\chi_3' - \chi_2\chi_4\chi_2'\chi_4' + \chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2') + \\
&+ \frac{i\lambda}{4J^5} g_2 g_3 \chi_1\chi_2\chi_3\chi_4(-\chi_1'\chi_3' + 2\beta_6\chi_2'\chi_4') + \\
&+ \frac{i\lambda^{\frac{3}{2}}}{4J^6} g_2^3(-\chi_1\chi_2\chi_4\chi_1'\chi_3'\chi_4' + \chi_2\chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2'\chi_3' + 2\beta_7\chi_1\chi_2\chi_3\chi_2'\chi_3'\chi_4' - 2\beta_8\chi_1\chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2'\chi_4') + \\
&- \frac{3i\lambda^2}{4J^8} f(g_2, g_3)\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2'\chi_3'\chi_4', \tag{A.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{24}^{-1} = & i - \frac{i\sqrt{\lambda}}{2J^2} g_2(\chi_1\chi_4' - \chi_3\chi_2') + \\
& + \frac{i\sqrt{\lambda}}{8J^3} g_3\chi_1\chi_3(\chi_2\chi_3' - \chi_4\chi_1') + \\
& + \frac{i\lambda}{4J^4} g_2(\chi_1\chi_2\chi_3'\chi_4' - \chi_1\chi_3\chi_1'\chi_3' - \chi_1\chi_3\chi_2'\chi_4' - \chi_1\chi_4\chi_2'\chi_3' + \\
& - \chi_2\chi_3\chi_1'\chi_4' + \beta_9\chi_2\chi_4\chi_1'\chi_3' - \chi_2\chi_4\chi_2'\chi_4' + \chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2') + \\
& + \frac{i\lambda}{4J^5} g_2g_3\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4(-2\beta_{10}\chi_1'\chi_3' + \chi_2'\chi_4') + \\
& + \frac{i\lambda^{\frac{3}{2}}}{4J^6} g_3^2(\chi_1\chi_2\chi_3\chi_2'\chi_3'\chi_4' - \chi_1\chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2'\chi_4' - 2\beta_{11}\chi_1\chi_2\chi_4\chi_1'\chi_3'\chi_4' + 2\beta_{12}\chi_2\chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2'\chi_3') + \\
& - \frac{3i\lambda^2}{4J^8} f(g_2, g_3)\chi_1\chi_2\chi_3\chi_4\chi_1'\chi_2'\chi_3'\chi_4', \tag{A.9}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{33}^{-1} = & \frac{i\sqrt{\lambda}}{2J^2} g_2(-\chi_4'\chi_3 + \chi_3'\chi_4) + \frac{i\sqrt{\lambda}}{4J^3} g_3\chi_4'\chi_2\chi_4\chi_3 + \\
& + \frac{i\lambda}{2J^4} g_2^2(\chi_1'\chi_4'\chi_4\chi_3 + \chi_4'\chi_3'\chi_2\chi_3) + \\
& + \frac{i\lambda^{\frac{3}{2}}}{4J^6} g_2^3(-\beta_1\chi_2'\chi_4'\chi_3'\chi_1\chi_4\chi_3 - 3\chi_1'\chi_4'\chi_3'\chi_2\chi_4\chi_3), \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{44}^{-1} = & \frac{i\sqrt{\lambda}}{2J^2} g_2(-\chi_4'\chi_3 + \chi_3'\chi_4) - \frac{i\sqrt{\lambda}}{4J^3} g_3\chi_3'\chi_1\chi_4\chi_3 + \\
& + \frac{i\lambda}{2J^4} g_2^2(-\chi_2'\chi_3'\chi_4\chi_3 - \chi_4'\chi_3'\chi_1\chi_4) + \\
& + \frac{i\lambda^{\frac{3}{2}}}{4J^6} g_2^3(3\chi_2'\chi_4'\chi_3'\chi_1\chi_4\chi_3 + \beta_2\chi_1'\chi_4'\chi_3'\chi_2\chi_4\chi_3), \tag{A.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_{34}^{-1} = & \frac{i\sqrt{\lambda}}{8J^3} g_3(-\chi_4'\chi_1\chi_4\chi_3 + \chi_3'\chi_2\chi_4\chi_3) + \\
& + \frac{i\lambda}{4J^4} g_2^2(-\chi_4'\chi_3'\chi_1\chi_3 + \chi_2'\chi_4'\chi_4\chi_3 - \chi_1'\chi_3'\chi_4\chi_3 + \chi_4'\chi_3'\chi_2\chi_4) + \\
& - \frac{i\lambda}{2J^5} g_2g_3\chi_4'\chi_3'\chi_2\chi_1\chi_4\chi_3 + \frac{i\lambda^{\frac{3}{2}}}{2J^6} g_2^3(\chi_1'\chi_4'\chi_3'\chi_1\chi_4\chi_3 - \chi_2'\chi_4'\chi_3'\chi_2\chi_4\chi_3). \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Apêndice B

Transformações de variáveis do modelo de AAF.

Aqui, nós vamos apresentar os principais passos para encontrar as transformações de variáveis que transforma o termo cinético (4.12) na forma canônica (4.14). Primeiramente, nós reescrevemos o termo cinético (4.12) abrindo a soma em α e β :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{cinética} = & -\frac{i}{2}(\bar{\psi}\rho^0\partial_0\psi - \partial_0\bar{\psi}\rho^0\psi) - \frac{\sqrt{\lambda}g_2}{2J^2}(\bar{\psi}\partial_1\psi\bar{\psi}\rho^5\partial_0\psi - \partial_1\bar{\psi}\psi\partial_0\bar{\psi}\rho^5\psi) + \\ & -\frac{\sqrt{\lambda}g_3}{16J^3}(\bar{\psi}\psi)^2\partial_0\bar{\psi}\rho^5\partial_1\psi + \frac{\sqrt{\lambda}g_3}{16J^3}(\bar{\psi}\psi)^2\partial_1\bar{\psi}\rho^5\partial_0\psi.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Para obter a ordem mais baixa das transformações ($1/J^2$), nós integramos por parte em relação ao tempo os termos de ordem $1/J^0$ da equação (B.1) e descartamos os termos que contem derivada total, pois eles não mudam as equações de movimento. Após estas manipulações nós encontramos:

$$\mathcal{L}_{cinética} = \left(-i\bar{\psi} + \frac{\sqrt{\lambda}g_2}{2J^2}\bar{\psi}\rho^1(\partial_1\psi\bar{\psi})\right)\rho^0\partial_0\psi + \partial_0\bar{\psi}\rho^0\left(i\psi + \frac{\sqrt{\lambda}g_2}{2J^2}\rho^1\psi(\partial_1\bar{\psi}\psi)\right) + \dots\tag{B.2}$$

onde $\dots$ significa os termos de mais alta ordem em $1/J$. Para a expressão (B.2) ser igual

a zero na ordem $(1/J^2)$, nós temos que ter:

$$\psi \rightarrow i \frac{\kappa g_2}{J^2} \rho^1 \psi (\partial_1 \bar{\psi} \psi) \quad e \quad \bar{\psi} \rightarrow -i \frac{\kappa g_2}{J^2} \bar{\psi} \rho^1 (\partial_1 \psi \bar{\psi}). \quad (\text{B.3})$$

Para encontrar as transformações de variáveis fermiônicas na ordem $1/J^3$, procedemos de forma similar que fizemos para a ordem $1/J^2$ e encontramos:

$$\mathcal{L}_{cinética} = \partial_0 \bar{\psi} \rho^0 \left(i \psi - \frac{\sqrt{\lambda} g_3}{16 J^3} \rho^1 \partial_1 \psi (\bar{\psi} \psi)^2 \right) + \left(-i \bar{\psi} - \frac{\sqrt{\lambda} g_3}{16 J^3} \partial_1 \bar{\psi} \rho^1 (\bar{\psi} \psi)^2 \right) \rho^0 \partial_0 \psi + \dots \quad (\text{B.4})$$

Para os termos da ordem $1/J^3$ da equação (B.4) serem iguais a zero, as transformações de variáveis nesta ordem devem ser iguais a:

$$\psi \rightarrow -i \frac{\kappa g_3}{8 J^3} \rho^1 \partial_1 \psi (\bar{\psi} \psi)^2 \quad e \quad \bar{\psi} \rightarrow i \frac{\kappa g_3}{8 J^3} \partial_1 \bar{\psi} \rho^1 (\bar{\psi} \psi)^2. \quad (\text{B.5})$$

A obtenção da próxima ordem das transformações é muito mais trabalhosa. Observe que na Lagrangiana cinética (B.1) não temos explicitamente termos de ordem $1/J^4$. Nesta parte dos cálculos os termos de ordem $1/J^4$ vem da substituição das transformações de variáveis de ordem $1/J^2$ (B.3) na Lagrangiana (B.1). Note ainda, apenas os quatros primeiros termos da Lagrangiana cinética contribuem e existem várias combinações possíveis. É possível mostrar que as transformações nas variáveis fermiônicas na ordem $1/J^4$ são:

$$\psi \rightarrow -\frac{\kappa^2 g_2^2}{4 J^4} \partial_1^2 \psi (\bar{\psi} \psi)^2 - \frac{\kappa^2 g_2^2}{2 J^4} \partial_1 \psi (\partial_1 \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \partial_1 \psi) \bar{\psi} \psi + \frac{\kappa^2 g_2^2}{2 J^4} \rho^0 \psi (\partial_1 \bar{\psi} \rho^0 \partial_1 \psi) \bar{\psi} \psi, \quad (\text{B.6})$$

e

$$\bar{\psi} \rightarrow -\frac{\kappa^2 g_2^2}{4 J^4} \partial_1^2 \bar{\psi} (\bar{\psi} \psi)^2 - \frac{\kappa^2 g_2^2}{2 J^4} \partial_1 \bar{\psi} (\bar{\psi} \partial_1 \psi - \partial_1 \bar{\psi} \psi) \bar{\psi} \psi + \frac{\kappa^2 g_2^2}{2 J^4} \bar{\psi} \rho^0 (\partial_1 \bar{\psi} \rho^0 \partial_1 \psi) \bar{\psi} \psi. \quad (\text{B.7})$$

Os termos de ordem $1/J^5$ envolvem combinações mais complexas de ordem $1/J^2$ e $1/J^3$ das transformações na Lagrangiana cinética, porém usando a propriedade dos férmions chegamos a conclusão que as transformações de variáveis na ordem $1/J^5$ são iguais a zero.

Finalmente, vamos calcular a ordem mais alta das transformações. Os termos de ordem $1/J^6$ das transformações são encontrados através da combinação das equações (B.3), (B.5), (B.6) e (B.7) na Lagrangiana (B.1). Podemos mostrar que:

$$\psi \rightarrow -i\frac{5}{4}\frac{\kappa^3}{J^6}g_2^3\rho^1\partial_1\psi(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi)(\bar{\psi})^2 \quad e \quad \bar{\psi} \rightarrow i\frac{5}{4}\frac{\kappa^3}{J^6}g_2^3\partial_1\bar{\psi}\rho^1(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi)(\bar{\psi}\psi)^2. \quad (\text{B.8})$$

Devido as propriedades dos férmions, as transformações possuem termos apenas até a ordem $1/J^6$. As mudanças de variáveis fermiônicas em todas as ordens estão escritas em (4.16).

Uma forma equivalente aos cálculos acima para obter as transformações nas variáveis fermiônicas, seria substituir as transformações (4.16) na Lagrangiana cinética (4.12) com o conjunto de coeficientes $\{a_i\}$ arbitrários e escolher os coeficientes tais que o termo cinético tenha a forma canônica (4.14).

Como uma segunda verificação se as transformações (4.16) estão corretas, iremos checar os resultados através dos parênteses de Poisson, isto é, ao calcularmos $\{\psi_i(x), \psi_j(y)\}$, $\{\psi_i^\dagger(x), \psi_j^\dagger(y)\}$ ou $\{\psi_i(x), \psi_j^\dagger(y)\}$ nós temos que encontrar os parênteses de Poisson do Apêndice A os quais foram calculados anteriormente pelo formalismo de Faddeev-Jackiw em [8].

Para facilitar o nosso trabalho, nós reescrevemos as transformações nas variáveis fermiônicas (4.16) em componentes que estão escritas no apêndice D.

Os cálculos dos parênteses de Poisson são muito trabalhosos e extensos. Para tornar o nosso trabalho mais organizado calculamos a estrutura de Poisson ordem por ordem. Para exemplificar nós vamos fazer os cálculos para a ordem $1/J^2$. Então usando a equação (D.2) do apêndice E, nós temos:

$$\begin{aligned} \{\chi_1(x), \chi_1(y)\} &= \left\{ \chi_1(x) - \frac{ia_1}{J^2}\chi_1\chi_2\chi_3'(x) + \cdots, \chi_1(y) - \frac{ia_1}{J^2}\chi_1\chi_2\chi_3'(y) + \cdots \right\} \\ &= -\frac{ia_1}{J^2}\{\chi_1(x), \chi_1\chi_2\chi_3'(y)\} - \frac{ia_1}{J^2}\{\chi_1\chi_2\chi_3'(x), \chi_1(y)\}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde introduzimos, a notação auxiliar para os campos fermiônicos:

$$\chi_1 = \psi_1, \quad \chi_2 = \psi_2, \quad \chi_3 = \psi_1^*, \quad \chi_4 = \psi_2^*. \quad (\text{B.10})$$

No apêndice E, nós colocamos algumas fórmula gerais da estrutura de Dirac que vai nos ajudar na tarefa de checar se as transformações nas variáveis fermiônicas estão corretas. Com o auxílio da fórmula geral (E.3) do apêndice E, a equação (B.9) torna-se:

$$\{\chi_1(x), \chi_1(y)\} = \frac{i\kappa}{J^2} g_2 \left\{ \left(-\chi_1 \chi_2' + \chi_2 \chi_1' \right) \delta(x - y) \right\}, \quad (\text{B.11})$$

O valor obtido na equação (B.11) coincide com a fórmula (A.3) do apêndice A a qual foi deduzida em [8] por meio do formalismo de Faddeev-Jackiw.

A obtenção das próximas ordem em J do parêntese de Poisson é muito mais trabalhosa, porém análoga ao que fizemos para encontrar a equação (B.11), isto é, usamos as transformações de variáveis dadas no apêndice D e escrevemos os parênteses de Dirac na ordem desejada. Em seguida, utilizamos as fórmulas gerais dos parênteses de Dirac fornecidos no apêndice E e finalmente comparamos o resultado com o resultado obtido com a estrutura de Dirac para o modelo AAF do apêndice A.

Apêndice C

Transformação de coordenada

Como comentamos anteriormente, um dos objetivos deste trabalho é mostrar a equivalência entre as matrizes S das duas teorias. A matriz S do modelo original de AAF foi calculada em [4] usando um método perturbativo. Em [7] foi calculada a matriz S do modelo transformado de AAF, através da diagonalização direta da Hamiltoniana, este método possibilita obter a matriz S de uma forma não perturbativa. O resultado encontrado será uma prova da equivalência das matrizes S . Para isto nesta seção, nós vamos fazer algumas mudanças de coordenadas, isto vai facilitar comparar a matriz S obtida pelos diferentes métodos.

A ação do modelo transformado de AAF é:

$$S_T = \int d\tau \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{2\pi} \mathcal{L}_T, \quad (\text{C.1})$$

onde τ e σ são as coordenadas da folha mundo e

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_T = & -J - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\rho^0\partial_0\psi - \partial_0\bar{\psi}\rho^0\psi) + i\frac{\kappa}{J}(\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\rho^1\psi) + \bar{\psi}\psi + \\
& + i\frac{\kappa}{J^2}g_2(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\rho^1\psi) - 2\frac{\kappa^2}{J^3}g_2[(\bar{\psi}\partial_1\psi)^2 + (\partial_1\bar{\psi}\psi)^2] + \\
& + \frac{\kappa^2}{2J^4}g_3(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi) + \frac{\kappa^2}{J^4}g_2^2(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi) + i\frac{\kappa^3}{J^5}g_2^2(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\rho^1\partial_1^2\psi - \partial_1^2\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi) \\
& - i4\frac{\kappa^3}{J^5}g_2^2(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\psi)(\partial_1\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi) + 8\frac{\kappa^4}{J^7}g_2^3(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi)^2.
\end{aligned} \tag{C.2}$$

A Lagrangeana transformada dada por (C.2) foi obtida da Hamiltoniana (4.18) que admite a estrutura (4.11), porém o termo cinético aqui tem a forma (4.14).

Fazendo a mudança (4.3) na coordenada σ da folha mundo e também a seguinte reescala nos férmions

$$\psi \rightarrow \sqrt{J}\psi. \tag{C.3}$$

a ação se torna:

$$S_T = \frac{k}{\pi J} \int d\tau \int_{-\frac{\pi J}{\kappa}}^0 d\sigma \mathcal{L}_T, \tag{C.4}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_T = & -J - \frac{i}{2}J(\bar{\psi}\rho^0\partial_0\psi - \partial_0\bar{\psi}\rho^0\psi) - i\frac{J}{2}(\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\rho^1\psi) + J\bar{\psi}\psi + \\
& - i\frac{J}{2}g_2(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\rho^1\psi) - \frac{J}{2}g_2[(\bar{\psi}\partial_1\psi)^2 + (\partial_1\bar{\psi}\psi)^2] + \\
& + \frac{J}{8}g_3(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi) + \frac{J}{4}g_2^2(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi) - i\frac{J}{8}g_2^2(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\rho^1\partial_1^2\psi - \partial_1^2\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi) \\
& + i\frac{J}{2}g_2^2(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\psi)(\partial_1\bar{\psi}\rho^1\partial_1\psi) + \frac{J}{2}g_2^3(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi)^2.
\end{aligned} \tag{C.5}$$

Na Lagrangeana (C.5), como comentado em [4], o termo cinético possui um sinal negativo global em comparação com a convenção usual. Existem duas forma equivalentes de se desenvolver a teoria. Uma delas consiste em lidar diretamente com a convenção de sinal de (C.5) e neste caso a energia é negativa. Alternativamente, é possível modificar a

Lagrangeana de modo a tornar o termo cinético, bem como a energia, positivos definidos, ao se considerar a transformação $\mathcal{L}_T \rightarrow (-1)\mathcal{L}_T$. Conforme afirmamos, ambas as abordagens são equivalentes, mas não podem ser misturadas. Preferimos proceder da segunda maneira, fazendo com que o termo cinético seja positivo ao multiplicar a Lagrangeana por (-1) .

Para tornar os limites de integração positivos, redefinimos a variável de integração:

$$\sigma \rightarrow \sigma + \frac{2\pi J}{\sqrt{\lambda}}. \quad (\text{C.6})$$

Aqui podemos desprezar o termo constante da equação (C.5), visto que sua remoção implica apenas em uma translação da origem da escala de energia. A ação fica então:

$$S_T = -\frac{\kappa}{\pi J} \int d\tau \int_0^{\frac{2\pi J}{\sqrt{\lambda}}} d\sigma \mathcal{L}_T, \quad (\text{C.7})$$

onde $\mathcal{L}_T$ é dada pela equação (C.5)

Até agora, nós trabalhamos apenas com as quantidades adimensionais obtidas da teoria de supercordas, porem, é importante para nossa análise atribuir dimensões canônicas de massa aos campos, com este intuito consideramos a seguinte transformações de coordenadas:

$$\tau \rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \tau; \sigma \rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \sigma. \quad (\text{C.8})$$

Além do mais, mudamos a base das matrizes de Dirac através da transformação de similaridade (F.3). Então a ação (C.7) assume a forma:

$$S_T = \int d\tau \int_0^J d\sigma \mathcal{L}_T, \quad (\text{C.9})$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_T = & \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi - \partial_0\bar{\psi}\gamma^0\psi) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi) - \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}\bar{\psi}\psi + \\
& + \frac{i}{2}g_2(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi) + \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}g_2[(\bar{\psi}\partial_1\psi)^2 + (\partial_1\bar{\psi}\psi)^2] + \\
& - \frac{\sqrt{\lambda}}{16\pi}g_3(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi) - \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi}g_2^2(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi) + i\frac{\lambda}{32\pi^2}g_2^2(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\partial_1^2\psi - \partial_1^2\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi) \\
& - i\frac{\lambda}{8\pi^2}g_2^2(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\psi)(\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi) - \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{16\pi^3}g_2^3(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi)^2, \tag{C.10}
\end{aligned}$$

onde

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \gamma^0\gamma^1, \tag{C.11}$$

Identificamos o parâmetro na frente de $\bar{\psi}\psi$ como a massa da teoria:

$$m = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}, \tag{C.12}$$

Finamente obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_T = & \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi - \partial_0\bar{\psi}\gamma^0\psi) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi) - m\bar{\psi}\psi + \\
& + \frac{i}{2}g_2(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi) + \frac{g_2}{2m}[(\bar{\psi}\partial_1\psi)^2 + (\partial_1\bar{\psi}\psi)^2] + \\
& - \frac{g_3}{8m}(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi) - \frac{g_2^2}{4m}(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi) - i\frac{g_2^2}{8m^2}(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\partial_1^2\psi - \partial_1^2\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi) \\
& - i\frac{g_2^2}{2m^2}(\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\partial_1\psi - \partial_1\bar{\psi}\psi)(\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi) - \frac{g_2^3}{2m^3}(\bar{\psi}\psi)^2(\partial_1\bar{\psi}\partial_1\psi)^2. \tag{C.13}
\end{aligned}$$

Apêndice D

Transformações de variáveis fermiônicas em componentes para o modelo de AAF.

Aqui nós vamos apresentar as transformações de variáveis fermiônicas (4.16) em componentes.

Nós utilizaremos a notação auxiliar para os campos fermiônicos:

$$\chi_1 = \psi_1, \quad \chi_2 = \psi_2, \quad \chi_3 = \psi_1^*, \quad \chi_4 = \psi_2^*. \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{aligned} \chi_1 \rightarrow & \chi_1 - \frac{ia_1}{J^2} \chi_1 \chi_2 \chi_3' + \frac{2ia_2}{J^3} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_2' + \frac{2a_3}{J^4} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_1'' + \frac{a_4}{J^4} [\chi_1 \chi_2 \chi_4 \chi_1' \chi_3' + \\ & - \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_1' \chi_4' + \chi_1 \chi_3 \chi_4 \chi_1' \chi_2'] + \frac{a_5}{J^4} [-\chi_1 \chi_2 \chi_4 \chi_1' \chi_3' - \chi_1 \chi_2 \chi_4 \chi_2' \chi_4'] + \\ & - \frac{2ia_6}{J^6} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_1' \chi_2' \chi_3', \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

$$\begin{aligned}
\chi_2 \rightarrow & \chi_2 - \frac{ia_1}{J^2} \chi_1 \chi_2 \chi_4' + \frac{2ia_2}{J^3} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_1' + \frac{2a_3}{J^4} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_2'' + \frac{a_4}{J^4} [\chi_1 \chi_2 \chi_4 \chi_2' \chi_3' + \\
& - \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_2' \chi_4' + \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_1' \chi_2'] + \frac{a_5}{J^4} [\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_1' \chi_3' + \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_2' \chi_4'] + \\
& - \frac{2ia_6}{J^6} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_1' \chi_2' \chi_4',
\end{aligned} \tag{D.3}$$

$$\begin{aligned}
\chi_3 \rightarrow & \chi_3 - \frac{ia_1^*}{J^2} \chi_3 \chi_4 \chi_1' - \frac{2ia_2^*}{J^3} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_4' + \frac{2a_3}{J^4} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_3'' - \frac{a_4}{J^4} [\chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_1' \chi_3' + \\
& - \chi_1 \chi_3 \chi_4 \chi_2' \chi_3' - \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_3' \chi_4'] - \frac{a_5}{J^4} [-\chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_1' \chi_3' - \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_2' \chi_4'] + \\
& - \frac{2ia_6^*}{J^6} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_1' \chi_3' \chi_4',
\end{aligned} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
\chi_4 \rightarrow & \chi_4 - \frac{ia_1^*}{J^2} \chi_3 \chi_4 \chi_2' - \frac{2ia_2^*}{J^3} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_3' + \frac{2a_3}{J^4} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_4'' + \frac{a_4}{J^4} [-\chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_1' \chi_4' + \\
& + \chi_1 \chi_3 \chi_4 \chi_2' \chi_4' + \chi_1 \chi_2 \chi_4 \chi_3' \chi_4'] + \frac{a_5}{J^4} [-\chi_1 \chi_3 \chi_4 \chi_1' \chi_3' - \chi_1 \chi_3 \chi_4 \chi_2' \chi_4'] + \\
& - \frac{2ia_6^*}{J^6} \chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4 \chi_2' \chi_3' \chi_4'.
\end{aligned} \tag{D.5}$$

Apêndice E

Fórmulas gerais dos parênteses de Poisson

Neste apêndice, nós apresentamos algumas fórmulas gerais para o cálculo dos parênteses de Poisson. Primeiramente, nós vamos calcular $\{\chi'_i(x), \chi_j \chi_k(y)\}$ para exemplificar o método.

Nós utilizaremos a notação auxiliar para os campos fermiônicos:

$$\chi_1 = \psi_1, \quad \chi_2 = \psi_2, \quad \chi_3 = \psi_1^*, \quad \chi_4 = \psi_2^*. \quad (\text{E.1})$$

$$\begin{aligned} \{\chi'_i(x), \chi_j \chi_k(y)\} &= -\chi_j(y) \{\chi'_i(x), \chi_k(y)\} + \{\chi'_i(x), \chi_j(y)\} \chi_k(y) \\ &= -\chi_j(y) \partial_x [\Omega_{ik}^{-1}(x) \delta(x-y)] + \partial_x [\Omega_{ij}^{-1}(x) \delta(x-y)] \chi_k(y) \\ &= -\partial_x [\chi_j(y) \Omega_{ik}^{-1}(x) \delta(x-y)] + \partial_x [\chi_k(y) \Omega_{ij}^{-1}(x) \delta(x-y)] \\ &= \partial_x [-\chi_j \Omega_{ik}^{-1} + \chi_k \Omega_{ij}^{-1}] \delta(x-y) + [-\chi_j \Omega_{ik}^{-1} + \chi_k \Omega_{ij}^{-1}] \partial_x \delta(x-y) \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde $\Omega_{ij}^{-1} = \chi_i, \chi_j$. Note que nós escrevemos todos os campos χ do parênteses de Poisson (E.2) dependente apenas da variável x . Nas fórmulas a seguir das estruturas de Poisson os χ depende somente de x .

$$\{\chi_i(x), \chi_k \chi_l \chi'_m(y)\} = [-\partial_x(\chi_k \chi_l) \Omega_{im}^{-1} + \chi_l \chi'_m \Omega_{ik}^{-1} - \chi_k \chi'_m \Omega_{il}^{-1}] \delta(x-y) - \chi_k \chi_l \Omega_{im}^{-1} \partial_x \delta(x-y), \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} \{\chi_i(x), \chi_k \chi_l \chi_m \chi_n \chi'_p(y)\} &= [\chi_l \chi_m \chi_n \chi'_p \Omega_{ik}^{-1} - \chi_k \chi_m \chi_n \chi'_p \Omega_{il}^{-1} + \chi_k \chi_l \chi_n \chi'_p \Omega_{im}^{-1} - \chi_k \chi_l \chi_m \chi'_p \Omega_{in}^{-1} + \\ &- \partial_x(\chi_k \chi_l \chi_m \chi_n) \Omega_{ip}^{-1}] \delta(x-y) - \chi_k \chi_l \chi_m \chi_n \Omega_{ip}^{-1} \partial_x \delta(x-y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\chi_i \chi_j \chi'_k(x), \chi_l \chi_m \chi'_n(y)\} &= \{\partial_x[\chi_i \chi_j \chi_m \chi'_n \Omega_{kl}^{-1} - \chi_i \chi_j \chi_l \chi'_n \Omega_{km}^{-1} - \chi_i \chi_j \partial_x(\chi_l \chi_m) \Omega_{kn}^{-1}] + \\ &- \partial_x(\chi_i \chi_j) \chi_m \chi'_n \Omega_{kl}^{-1} + \partial_x(\chi_i \chi_j) \chi_l \chi'_n \Omega_{km}^{-1} + \partial_x(\chi_i \chi_j) \partial_x(\chi_l \chi_m) \Omega_{kn}^{-1} + \\ &- \partial_x(\chi_l \chi_m) \chi_j \chi'_k \Omega_{in}^{-1} + \partial_x(\chi_l \chi_m) \chi_i \chi'_k \Omega_{jn}^{-1} - \chi_j \chi_m \chi'_k \chi'_n \Omega_{il}^{-1} + \\ &+ \chi_j \chi_l \chi'_k \chi'_n \Omega_{im}^{-1} + \chi_i \chi_m \chi'_k \chi'_n \Omega_{jl}^{-1} - \chi_i \chi_l \chi'_k \chi'_n \Omega_{jm}^{-1}\} \delta(x-y) + \\ &+ \{\chi_i \chi_j \chi_m \chi'_n \Omega_{kl}^{-1} - \chi_i \chi_j \chi_l \chi'_n \Omega_{km}^{-1} - \chi_i \chi_j \partial_x(\chi_l \chi_m) \Omega_{kn}^{-1} + \\ &- \partial_x(\chi_i \chi_j \chi_l \chi_m \Omega_{kn}^{-1}) + \partial_x(\chi_i \chi_j) \chi_l \chi_m \Omega_{kn}^{-1} - \chi_j \chi_l \chi_m \chi'_k \Omega_{in}^{-1} + \\ &+ \chi_i \chi_l \chi_m \chi'_k \Omega_{jn}^{-1}\} \partial_x \delta(x-y) - \chi_i \chi_j \chi_l \chi_m \Omega_{kn}^{-1} \partial_x^2 \delta(x-y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\chi_i(x), \chi_k \chi_l \chi_m \chi'_n \chi'_p(y)\} &= [\chi_l \chi_m \chi'_n \chi'_p \Omega_{ik}^{-1} - \chi_k \chi_m \chi'_n \chi'_p \Omega_{il}^{-1} + \chi_k \chi_l \chi'_n \chi'_p \Omega_{im}^{-1} - \partial_x(\chi_k \chi_l \chi_m \chi'_n) \Omega_{ip}^{-1} + \\ &+ \partial_x(\chi_k \chi_l \chi_m \chi'_p) \Omega_{in}^{-2}] \delta(x-y) + [\chi_k \chi_l \chi_m \chi'_p \Omega_{in}^{-1} - \chi_k \chi_l \chi_m \chi'_n \Omega_{ip}^{-1}] \partial_x \delta(x-y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\chi_k \chi_l \chi_m \chi'_n \chi'_p(x), \chi_i(y)\} &= [\chi_k \chi_l \chi_m \chi'_n \partial_x \Omega_{pi}^{-1} - \chi_k \chi_l \chi_m \chi'_p \partial_x \Omega_{ni}^{-1} + \chi_k \chi_l \chi'_n \chi'_p \Omega_{mi}^{-1} - \chi_k \chi_m \chi'_n \chi'_p \Omega_{li}^{-1} + \\ &+ \chi_l \chi_m \chi'_n \chi'_p \Omega_{ki}^{-1}] \delta(x-y) + [\chi_k \chi_l \chi_m \chi'_n \Omega_{pi}^{-1} - \chi_k \chi_l \chi_m \chi'_p \Omega_{ni}^{-1}] \partial_x \delta(x-y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\chi_i(x), \chi_k \chi_l \chi_m \chi_n \chi''_p(y)\} &= [\chi_l \chi_m \chi_n \chi''_p \Omega_{ik}^{-1} - \chi_k \chi_m \chi_n \chi''_p \Omega_{il}^{-1} + \chi_k \chi_l \chi_n \chi''_p \Omega_{im}^{-1} - \chi_k \chi_l \chi_m \chi''_p \Omega_{in}^{-1} + \\ &+ \partial_x^2(\chi_k \chi_l \chi_m \chi_n) \Omega_{ip}^{-1}] \delta(x-y) + 2\partial_x(\chi_k \chi_l \chi_m \chi_n) \Omega_{ip}^{-1} \partial_x \delta(x-y) + \\ &+ \chi_k \chi_l \chi_m \chi_n \Omega_{ip}^{-1} \partial_x^2 \delta(x-y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{\chi_k \chi_l \chi_m \chi_n \chi_p''(x), \chi_i(y)\} &= [\chi_k \chi_l \chi_m \chi_n \partial_x^2 \Omega_{pi}^{-1} - \chi_k \chi_l \chi_m \chi_p'' \Omega_{ni}^{-1} + \chi_k \chi_l \chi_n \chi_p'' \Omega_{mi}^{-1} - \chi_k \chi_m \chi_n \chi_p'' \Omega_{li}^{-1} + \\
&+ \chi_l \chi_m \chi_n \chi_p'' \Omega_{ki}^{-1}] \delta(x-y) + 2 \chi_k \chi_l \chi_m \chi_n \partial_x \Omega_{pi}^{-1} \partial_x \delta(x-y) + \\
&+ \chi_k \chi_l \chi_m \chi_n \Omega_{pi}^{-1} \partial_x^2 \delta(x-y).
\end{aligned}$$

Apêndice F

Relação entre as matrizes ρ^μ e γ^μ .

As matrizes ρ^μ e γ^μ estão relacionadas pela seguinte transformação:

$$\gamma^\mu = M \rho^\mu M^{-1} \quad (\text{F.1})$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \quad (\text{F.2})$$

com $\mu = 0, 1$,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^3 = \gamma^0 \gamma^1 \quad (\text{F.3})$$

e

$$\rho^0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \rho^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \rho^5 = \rho^0 \rho^1 \quad (\text{F.4})$$

Apêndice G

Termos resultantes da ação da Hamiltoniana do modelo de AAF no estado de duas partículas

Fazendo a ação da Hamiltoniana regularizada (4.22) no estado $|\psi\rangle_2$ (4.31) resulta:

$$B_1 = i \int dxdydz \left[\partial_x \left(\psi_{Fi_1}^\dagger(z) \gamma_{i_1 k_1}^3 \psi_{k_2}^\dagger(y) F_\epsilon(z, x) \chi^{k_1 k_2}(x, y) \right) + \right. \\ \left. - \partial_y \left(\psi_{Fi_1}^\dagger(z) \gamma_{i_1 k_2}^3 \psi_{k_1}^\dagger(x) F_\epsilon(z, y) \chi^{k_1 k_2}(x, y) \right) \right] |0\rangle ,$$

$$B_2 = -i \int dxdydz \left[\psi_{Fi_1}^\dagger(z) \gamma_{i_1 k_1}^3 \psi_{k_2}^\dagger(y) F_\epsilon(z, x) \partial_x \chi^{k_1 k_2}(x, y) + \right. \\ \left. - \psi_{Fi_1}^\dagger(z) \gamma_{i_1 k_2}^3 \psi_{k_1}^\dagger(x) F_\epsilon(z, y) \partial_y \chi^{k_1 k_2}(x, y) \right] |0\rangle ,$$

$$B_3 = m \int dxdydz \left[\psi_{Fi_1}^\dagger(z) \gamma_{i_1 k_1}^0 \psi_{k_2}^\dagger(y) F_\epsilon(z, x) - \psi_{Fi_1}^\dagger(z) \gamma_{i_1 k_2}^0 \psi_{k_1}^\dagger(x) F_\epsilon(z, y) \right] \chi^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle ,$$

$$\begin{aligned}
B_4 = & ig_2 \int dx dy dz du_1 du_2 \psi_{i_1}^\dagger(u_1) \psi_{j_1}^\dagger(u_2) \gamma_{i_1 k_2}^0 \gamma_{j_1 k_1}^3 * \\
& * F_\epsilon(z, u_1) F_\epsilon(z, u_2) \partial_z F_\epsilon(z, x) F_\epsilon(z, y) \chi^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle + \\
& - ig_2 \int dx dy dz du_1 du_2 \psi_{i_1}^\dagger(u_1) \psi_{j_1}^\dagger(u_2) \gamma_{i_1 k_2}^0 \gamma_{j_1 k_1}^3 * \\
& * F_\epsilon(z, u_1) \partial_z F_\epsilon(z, u_2) F_\epsilon(z, x) F_\epsilon(z, y) \chi^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_5 = & \frac{1}{m} g_2 \int dx dy dz du_1 du_2 \psi_{i_1}^\dagger(u_1) \psi_{j_1}^\dagger(u_2) \gamma_{i_1 k_2}^0 \gamma_{j_1 k_1}^0 * \\
& * F_\epsilon(z, u_1) F_\epsilon(z, u_2) \partial_z F_\epsilon(z, x) \partial_z F_\epsilon(z, y) \chi^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle + \\
& + \frac{1}{m} g_2 \int dx dy dz du_1 du_2 \psi_{i_1}^\dagger(u_1) \psi_{j_1}^\dagger(u_2) \gamma_{i_1 k_2}^0 \gamma_{j_1 k_1}^0 * \\
& \partial_z F_\epsilon(z, u_1) \partial_z F_\epsilon(z, u_2) F_\epsilon(z, x) F_\epsilon(z, y) \chi^{k_1 k_2}(x, y) |0\rangle ,
\end{aligned}$$

Apêndice H

Produto de Sklyanin

Neste apêndice, nós vamos fazer a quantização do modelo de AAF usando o produto de Sklyanin, este é um outro método de se fazer a quantização de modelos contínuos integráveis. Sklyanin fez um pequeno erro no seu artigo original [22] e por causa disto em [2, 3] considerou-se este produto como não sendo muito útil. Aqui nós voltamos a considerar o produto de Sklyanin para fazer a quantização do modelo de AAF.

O ponto de partida é reescrever a Hamiltoniana (4.22) em termos do produto de Sklyanin que fica:

$$\begin{aligned}
H^4 = & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{z-\Delta/2}^{z+\Delta/2} du_1 \int_{z-\Delta/2}^{z+\Delta/2} du_2 * \\
& * \left[-i\psi_{i_1}^\dagger(u_1) \gamma_{i_1 i_2}^3 \partial_{u_2} \psi_{i_2}(u_2) + m\psi_{i_1}^\dagger(u_1) \gamma_{i_1 i_2}^0 \psi_{i_2}(u_2) \right] + \\
& + \frac{1}{\Delta^4} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{z-\Delta/2}^{z+\Delta/2} du_1 \int_{z-\Delta/2}^{z+\Delta/2} du_2 \int_{z-\Delta/2}^{z+\Delta/2} du_3 \int_{z-\Delta/2}^{z+\Delta/2} du_4 * \\
& * \left\{ \frac{ig_2}{2} \left(\psi_{i_1}^\dagger(u_1) \psi_{j_1}^\dagger(u_2) \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^3 \psi_{i_2}(u_3) \partial_{u_4} \psi_{j_2}(u_4) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \psi_{i_1}^\dagger(u_1) \partial_{u_2} \psi_{j_1}^\dagger(u_2) \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^3 \psi_{i_2}(u_3) \psi_{j_2}(u_4) \right) + \right. \\
& + \frac{g_2}{2m} \left(\psi_{i_1}^\dagger(u_1) \psi_{j_1}^\dagger(u_2) \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^3 \partial_{u_3} \psi_{i_2}(u_3) \partial_{u_4} \psi_{j_2}(u_4) \right. \\
& \quad \left. \left. - \partial_{u_1} \psi_{i_1}^\dagger(u_1) \partial_{u_2} \psi_{j_1}^\dagger(u_2) \gamma_{i_1 i_2}^0 \gamma_{j_1 j_2}^3 \psi_{i_2}(u_3) \psi_{j_2}(u_4) \right) \right\}, \tag{H.1}
\end{aligned}$$

Fazendo a ação da Hamiltoniana (H.1) no estado de duas partículas (4.33), após resolver todas as integrais o resultado final é igual ao encontrado pelo método anterior. Ambos os métodos mostraram ser muito bons para fazer a quantização de modelos contínuos integráveis, pois como já falamos encontramos os mesmos resultados.

Bibliografia

- [1] L. F. Alday, G. Arutyunov, S. Frolov, “*New Integrable System of 2dim Fermions from String on $AdS_5 \times S^5$* ,” JHEP **0601** (2006) 078.
- [2] A. Melikyan and A. Pinzul, “*On Quantum integrability of the Landau-Lifshitz model*,” J. Math. Phys. **50** (2009) 103518, arXiv:0812.0188v1.
- [3] A. Melikyan, A. Pinzul and G. Weber, “*Higher charges and regularized quantum trace identities in $su(1,1)$ Landau-Lifshitz model*,” J. Math. Phys. **51** (2010), no. 12, 123501, arXiv:1008.1054v2.
- [4] A. Melikyan, A. Pinzul, V. Rivelles, and G. Weber, “*Quantum integrability of the Alday-Arutyunov-Frolov model*,” JHEP **1109** (2011) 092, arXiv:1106.0512 [hep-th].
- [5] P. Dorey, “*Exact S matrices*,” arXiv:hep-th/9810026
- [6] A. Melikyan, A. Pinzul, V. O. Rivelles and G. Weber, “*On S -Matrix factorization of the Landau-Lifshitz model*,” JHEP **10** (2008) 002, arXiv:0808.2489 [hep-th].
- [7] A. Melikyan, E. Pereira, V. Rivelles, “*On the equivalence theorem for integrable systems*,” , arXiv:1412.1288.
- [8] A. Melikyan and G. Weber, “*The r -matrix of Alday-Arutyunov-Frolov model*,” JHEP **1211** (2012) 165, arXiv:1209.6042.

- [9] J. Chisholm, “*Change of variables in quantum field theories,*” Nuclear Physics **26** (2010), no. 3, (1961) 469–479.
- [10] S. Kamefuchi, L. O’Raifeartaigh, and A. Salam, “*Change of variables and equivalence theorems in quantum field theories,*” Nucl.Phys. **28** (1961) 529–549.
- [11] A. Salam and J. Strathdee, “*Equivalent formulations of massive vector field theories,*” Phys.Rev. **D2** (1970) 2869–2876.
- [12] I. Tyutin, “*Once again on the equivalence theorem,*” Phys.Atom.Nucl. **65** (2002) 194202, arXiv:hep-th/0001050 [hep-th].
- [13] Y.-M. P. Lam, “*Perturbation Lagrangian theory for scalar fields: Ward-Takahashi identity and current algebra,*” Phys.Rev. **D6** (1972)
- [14] D. Chicherin, V. Gorbenko, and V. Vereshagin, “*Equivalence theorem in effective theories,*” Phys.Rev. **D 84** (Nov, 2011) 105003.
- [15] Y.-M. P. Lam, “*Equivalence theorem on Bogolyubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann renormalized Lagrangian field theories,*” Phys.Rev. **D7** (1973) 2943–2949
- [16] H. S. Sharatchandra, “*The equivalence theorem is subtler,*” Annals of Physics **115** no. 1, (1978) 248
- [17] Y. Lamn, “*Perturbation lagrangian theory for dirac fields - Ward-Takahashi identity and current algebra,*” Phys.Rev. **D6** (1972) 2161–2167.
- [18] Y. Lam and B. Schroer, “*Note on the equivalence theorem,*” Phys.Rev. **D8** D8 (1973) 657–659.
- [19] A. Rouet, “*Equivalence theorems for effective lagrangians,*” Nucl.Phys. **B68** (1974) 605–614.

- [20] M. C. Bergere and Yuk-Ming P. Lam, “*Equivalence theorem and Faddeev-Popov ghosts,*” Jun 1975. 25 pp. Phys.Rev. **D13** (1976) 3247-3255.
- [21] S. Coleman, “*The Quantum Sine-Gordon Equation as the Massive Thirring Model,*” Phys.Rev. **D11** (1975) 2088.
- [22] E. K. Sklyanin, “*Quantization of the continuous Heisenberg ferromagnet,*” Lett. Math. Phys. **15** (1988) 357 368.
- [23] A. Melikyan, “*New exact solutions of the Dutyshev model,*” (2014, não publicado)
- [24] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, “*Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions,*” Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1997.
- [25] V. E. Korepin, “*Direct calculation of the S matrix in the massive Thirring model,*” Theor. Math. Phys. **41** (1979) 953967.
- [26] V. E. Korepin, “*New effects in the massive Thirring model: Repulsive case,*” Commun. Math. Phys. **76** (1980) 165.
- [27] G. Arutyunov and S. Frolov, “*Foundations of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring. Part I,*” J. Phys. **A42** (2009) 254003.
- [28] T. Klose and K. Zarembo, “*Bethe ansatz in stringy sigma models,*” J. Stat. Mech. **0605** (2006) P006, hep-th/0603039.
- [29] G. Arutyunov and S. Frolov, “*Foundations of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring. Part I,*” J. Phys. **A42** (2009) 254003.
- [30] A. Melikyan, A. Pinzul, “*Thermodynamics of the quantum $su(1,1)$ Landau-Lifshitz model ,*” J.Stat.Mech. **1006** (2010) P06007 , arXiv:1001:5450 .