UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

André Luís Prando Livorati

INFLUÊNCIA DO FENÔMENO DE *STICKINESS* EM ALGUNS SISTEMAS DINÂMICOS CLÁSSICOS

Tese de Doutoramento apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Física da Universidade de São Paulo, câmpus de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Edson Denis Leonel
Co-orientador: Iberê Luiz Caldas

Banca Examinadora

Prof. Dr. Edson Denis Leonel (orientador) - (UNESP - Rio Claro)
Prof. Dr. José Carlos Sartorelli - (IFUSP - São Paulo)
Prof. Dr. Mário José de Oliveira - (IFUSP - São Paulo)
Prof. Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau - (INPE - São José dos Campos)
Prof. Dr. Renê Orlando Medrano Torricos - (UNIFESP - Diadema)

São Paulo
2014

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Livorati, André Luís Prando

Influência do fenômeno de *stickiness* em alguns sistemas dinâmicos clássicos. São Paulo, 2015.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física (UNESP)

Orientador: Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Área de Concentração: Sistemas Dinâmicos e Dinâmica Não-Linear

Unitermos: 1. Caos (Sistemas dinâmicos); 2. Sistemas não lineares; 3. Sistemas Hamiltonianos; 4. Sistemas dinâmicos; 5. Bilhares.

USP/IF/SBI-017/2015

Dedico esta tese de doutoramento a minha família.

"Não sei como o mundo me vê, mas eu me sinto como um garoto brincando na praia, contente em achar aqui e ali, uma pedra mais lisa ou uma concha mais bonita, mas tendo sempre diante de mim, ainda por descobrir, o grande oceano da verdade".

Isaac Newton

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família, especialmente, a minha mãe Miriam e minha irmã Ana Carolina, por sempre acreditarem em mim e me darem forças para prosseguir nos momentos difíceis.

Ao meu amigo e orientador Prof. Edson Denis Leonel, pelo constante entusiasmo, dicas e lições preciosas. Por estar sempre disposto a discutir as dúvidas e possíveis ideias, os meus mais sinceros agradecimentos e admiração.

Agradeço também a minha companheira Mirian, que sempre me alegra nos momentos tristes, me dá forças e sempre me entusiasma a conseguir os objetivos.

Ao Prof. Iberê Luiz Caldas pela co-orientação e pelas preciosas discussões e dicas sobre sistemas dinâmicos.

Ao Prof. Alexander Loskutov pelas dicas preciosas sobre caos e bilhares e pelas discussões em grupo.

Ao Prof. Carl Dettmann pelos conselhos e dicas sobre caos e sistemas dinâmicos e lições sobre a vida acadêmica no meio científico em geral.

Ao CNPq e a CAPES pelo apoio e suporte financeiro.

Ao NCC/Grid UNESP, pela oportunidade de utilização dos computadores para simulação computacional.

Aos meus amigos de república e de turma, companheiros de laboratório e demais colegas, pelos momentos de descontração e alegria.

Ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP), pelo acesso e uso das dependências, computadores e laboratórios.

Ao DEMAC (Depatamento de Estatística Matemática Aplicada e Computação) e ao Departamento de Física, ambos da UNESP-IGCE-Rio Claro, pelo acesso e uso dos laboratórios e computadores.

A School of Mathematics-University of Bristol-UK, pela hospitalidade e também pelo acesso a estruturas, computadores e laboratórios.

E principalmente a Deus que tornou tudo isso possível.

Resumo

Nesta Tese de Doutoramento investigamos a influência das órbitas em regime de *stickiness*, para com a dinâmica de alguns sistemas dinâmicos clássicos. Tais órbitas são caracterizadas como aprisionamentos de tempo finito ao redor de estrututas de regularidade no espaço de fases. Esse comportamento ao longo da dinâmica, pode afetar propriedades estatísticas, de difusão e de transporte, dependendo do ensemble de condições iniciais e parâmetros de controle. Caracterizamos a influência deste fenômeno em três sistemas dinâmicos: *(i)* modelo Fermi-Ulam (FUM), onde órbitas em regime de *stickiness* produzem decaimento de correlações em forma de exponencial esticada e de lei de potência, e toda uma análise estatística ao longo da dinâmica é feita, tanto analítica quanto numericamente; *(ii)* no modelo Bouncer, essas órbitas são caracterizadas via expoentes de Lyapunov e decaimento de correlações, onde elas funcionam como um mecanismo para atrasar a difusão ilimitada de energia; e finalmente *(iii)* no bilhar *Stadium*, onde aliado a ressonância, o *stickiness* atua como um facilitador na troca de comportamento de órbitas, onde as mesmas sofrem uma transição de difusão ilimitada, para platô estacionário, perto da criticalidade ressonante.

Palavras Chaves: Caos, *Stickiness*, Sistemas Dinâmicos, Transporte e Difusão.

Abstract

In this Doctorate Thesis we investigate how the sticky orbits influence the dynamics of some classical dynamical systems. These orbits are characterized as finite-time trapping around stability islands in the phase space. This behaviour along the dynamics, may affect statistical properties, diffusion and transport, depending on the ensemble of energies, initial conditions and control parameters. We characterize this stickiness influence in three dynamical systems: *(i)* in the Fermi-Ulam Model (FUM), where orbits in sticky regime produce a decay of correlations, of a stretched exponential and power law kinds and a whole statistics analysis is made concerning numerical and analytical approaches; *(ii)* in the Bouncer model, these orbits are characterized along the dynamics via Lyapunov exponents and decay of correlations, where they play the role of a mechanism to slow down the unlimited diffusion of energy; and finally *(iii)* in the Stadium billiard, where allied with the resonance, stickiness allows a change in the orbits behaviour, where we can set a transition from unlimited diffusion to stationary state, near the critical resonance.

Key Words: Chaos, Stickiness, Dynamical Systems, Transport and Diffusion.

SUMÁRIO

1 Introdução **1**

1.1 Breve revisão histórica 1

1.2 Alguns conceitos de caos clássico 2

1.2.1 Sistemas Hamiltonianos 2

1.2.2 Transporte 10

1.2.3 Expoentes de Lyapunov 12

1.3 Bilhares 16

1.3.1 Dinâmica e Geometria 16

1.3.2 Aceleração de Fermi e mecanismos geradores de caos 17

1.4 Estrutura e informações sobre a Tese 19

2 Modelo Fermi-Ulam (FUM) **22**

2.1 Modelo Fermi-Ulam 22

2.1.1 Descrição do Mapeamento 23

2.1.2 Propriedades caóticas 25

2.2 Análise Estatística 27

2.2.1 Velocidade quadrática média (V_{RMS}) 27

2.2.2 Probabilidade de sobrevivência e influência de *stickiness* 30

2.3 Transporte e Difusão 33

2.3.1 Tratamento analítico 33

2.3.2 Tratamento Numérico 35

2.4 Conclusões parciais 38

3 Modelo *Bouncer* **39**

3.1 O modelo e o mapeamento 39

3.1.1 Mapa Completo 40

3.1.2 Propriedades Caóticas 43

3.2 Aceleração de Fermi 46

3.2.1 Modos Aceleradores e Desaceleradores 47

3.2.2 Simetria e Variedades 52

3.3 Órbitas em regime de *stickiness* 53

3.3.1 Expoentes de Lyapunov a tempo finito (FTLE) 54
3.3.2 Propriedades de Transporte e Formalismo de Escape 55
3.3.3 Mecanismo de retardo de aceleração de Fermi 60
3.4 Conclusões parciais 62

4 O Bilhar *Stadium* Dependente do Tempo 63
4.1 O bilhar e o mapeamento 63
4.1.1 Colisões Sucessivas e Indiretas 64
4.1.2 Lei de Reflexão 66
4.2 Velocidade de Ressonância 69
4.2.1 *Stickiness* 70
4.3 Separação de Ensembles 71
4.3.1 Aceleração de Fermi 72
4.3.2 Discussão de Escala 73
4.3.3 Análise estatística para o ensemble de baixa de energia 75
4.3.4 Análise de transporte 79
4.4 Conclusões parciais 81

5 Considerações Finais 83
5.1 Perspectivas 84
5.1.1 FUM 84
5.1.2 Modelo *Bouncer* 85
5.1.3 Bilhar *Stadium* 85
5.2 Publicações 86

Capítulo 1

Introdução

Esta Tese de Doutoramento é um trabalho essencialmente teórico/numérico, em que foram estudados vários aspectos relacionados ao fenômeno conhecido como stickiness*, que basicamente é descrito como o aprisionamento temporário de órbitas por estruturas de estabilidade, e sua influência para com a dinâmica, propriedades caóticas, estatísticas, de difusão e transporte de alguns sistemas dinâmicos clássicos. Começaremos nosso estudo na seção 1.1, onde uma revisão histórica e motivacional é feita. Na seção 1.2, faremos uma revisão sobre alguns conceitos de caos clássico. Já a seção 1.3 tem por objetivo descrever os sistemas dinâmicos utilizados em nosso estudo e algumas de suas propriedades. Finalmente, na seção 1.4 relataremos alguns detalhes sobre o período de Doutoramento e discutiremos a estrutura da Tese.*

1.1 Breve revisão histórica

Ao longo do desenvolvimento da ciência, o estudo de sistemas dinâmicos sempre foi uma área muito atraente, pois permite modelar matematicamente sistemas naturais. Desde os estudos experimentais de Galileu Galilei [1, 2], envolvendo pêndulos, planos inclinados, projéteis e queda livre; passando por Isaac Newton [3, 4], que foi um dos pioneiros a ser capaz de descrever sistemas físicos através de um conjunto de leis, que por sua vez tornou possível escrever conjuntos de equações; acreditava-se que os fenômenos descritos no mundo macroscópico poderiam ser teoricamente previsíveis, devido ao seu caráter determinístico, onde a partir de uma condição inicial e conhecendo as suas equações de movimento, poderíamos construir sua trajetória. No entanto, muitas das propriedades dos sistemas dinâmicos, que utilizaremos nesta Tese, ficaram ignoradas até meados do século XX, ainda que estivessem contidas em equações diferenciais conhecidas há três séculos. Isso se deve à dificuldade de um tratamento analítico das equações não lineares que descrevem propriedades caóticas.

Os trabalhos de Poincaré [5], no famoso problemas de três corpos, foram os pioneiros no tratamento da teoria do caos. Ele foi capaz de mostrar, através de técnicas geométricas e topológicas, que a evolução temporal de tal sistema é frequentemente caótica, no sentido de que

um conjunto de condições iniciais, quando levemente perturbadas, poderiam levar a uma grande mudança em seu estado final. Seguindo essa mesma linha de estudos, seguiram-se os trabalhos de Birkhoff [6] no final dos anos 20 do século passado, que futuramente dariam luz ao estudos de bilhares, seguidos dos importantes trabalhos de Kolmogorov [7] e Smale [8], já nos anos 50 e 60, respectivamente.

Porém, do ponto de vista do desenvolvimento do caos determinístico, é somente a partir da integração numérica de equações diferenciais não lineares, possibilitadas pelo advento de computadores, que resultados começaram a surgir. Contando a partir do pioneiro trabalho de Lorenz [9] em meteorologia, nos anos 70 e 80, surge na literatura uma série de trabalhos com resultados novos sobre comportamentos de sistemas caóticos. São exemplos os trabalhos de Feigenbaum [10], Kaplan e Yorke [11], Chirikov [12], May [13], Hénon [14], Pomeau-Manneville [15] e Grebogi, Ott e Yorke ([16], os quais nos fornecem propriedades de dinâmica caótica, bem como sua descrição, e de como tal dinâmica se instala em sistemas físicos. Esses estudos e uma série incontável de estudos posteriores descrevem a dinâmica temporal de sistemas físicos, analisando universalidades no comportamento dinâmico desses sistemas e confirmando que os mesmos apresentam propriedades caóticas.

Atualmente, o tema tem sido continuamente desenvolvido, tanto do ponto de vista de métodos analíticos, mas em sua grande maioria por métodos e comparações numéricas. Ainda, podemos encontrar a teoria do caos expandida nas mais diversas áreas do conhecimento, como Biologia, Astronomia, Economia, Engenharia, Química, entre outras.

1.2 Alguns conceitos de caos clássico

Nesta seção nos focaremos em alguns conceitos de dinâmica não linear que serão fundamentais para o entendimento posterior e discussão dos resultados.

1.2.1 Sistemas Hamiltonianos

A abordagem via teoria dos sistemas dinâmicos e do estudo da evolução temporal dos sistemas físicos pressupõe que esta evolução pode ser descrita por um conjunto de equações envolvendo variáveis relevantes, denominado estado, que caracterizam o sistema. Dá-se o nome de espaço de fases ao conjunto de todos os estados acessíveis. Ao evoluir, a partir de um estado inicial, o sistema passa por pontos do espaço de fases; ao conjunto assim percorrido denomina-se órbita. Assim, o espaço de fases é também o conjunto de todas as órbitas possíveis [17, 18].

A maneira mais comum para descrevermos as equações de movimentos de corpos é utilizando o formalismo Hamiltoniano, onde o estado do sistema é descrito pelo conjunto de N coordenadas generalizadas $q = (q_1, q_2, ..., q_N)$ e de N momentos conjugados generalizados $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$, onde N está relacionado com o número de graus de liberdade do sistema. Cada par (p, q) define um grau de liberdade. Veremos ainda mais adiante na Tese, que o número

de graus de liberdade de um sistema coincide com a dimensão topológica do espaço de fases do sistema. A evolução temporal para este formalismo é obtida através das equações de Hamilton [19] dadas por

$$\begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} \end{cases} , \tag{1.1}$$

sendo que $H(q,p)$ é a função Hamiltoniana do sistema. Qualquer conjunto de variáveis (q,p) tal que as suas evoluções temporais sejam dadas pelas equações de movimento acima são chamadas de canônicas [18].

A estrutura do espaço de fases caracteriza portanto os comportamentos dinâmicos possíveis do sistema. De uma maneira geral esta estrutura pode se apresentar de várias maneiras, em graus distintos de organização e contendo hierarquias de arranjos. Se considerarmos um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade, dizemos que o sistema é integrável se o mesmo apresentar N constantes de movimento. Desta maneira, podemos realizar uma transformação canônica de variáveis $(q,p) \rightarrow (\tilde{q},\tilde{p})$, de forma que a nova função Hamiltoniana $\tilde{H}(\tilde{p})$ dependa apenas do novo momento, de modo que $\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i} = 0$ [19]. Essa transformação, nos fornece novos momentos, que são interpretados como constantes arbitrárias. Ainda, se considerarmos que as variáveis da transformação canônica sejam escolhidas como as variáveis de ação-ângulo $(\tilde{q},\tilde{p}) \rightarrow (I,\theta)$ [18, 19, 20], podemos escrever as novas equações de movimento como

$$\frac{dI}{dt} = 0; \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H(I)}{\partial I} \equiv \omega(I) , \tag{1.2}$$

sendo que as soluções das Eqs.(1.2), são respectivamente

$$\begin{cases} I(t) = I(0) \\ \theta(t) = \theta(0) + \omega[I(0)]t \end{cases} . \tag{1.3}$$

As soluções para estes sistemas são representadas por toros N dimensionais, sendo que cada componente da dimensão rotaciona com uma frequência ω_i, onde $i = 1, ..., N$. Uma forma geométrica de representar as soluções das Eqs.(1.3) é ilustrada na Fig.1.1, onde a variável de ação representa os raios constantes, e a variável ângulo evolui ciclicamente no tempo. As trajetórias sobre o toro podem ser analisadas quanto a sua periodicidade ou quase-periodicidade através das frequências $\omega_i(I)$ [19]. Se considerarmos uma trajetória periódica, a mesma deve obedecer a relação de ressonância $\vec{m}.\vec{\omega_i} = 0$, sendo $\vec{m}$ um vetor de valores inteiros. Para o caso bidimensional, a condição de ressonância é

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{m_2}{m_1} . \tag{1.4}$$

Os toros racionais são encontrados quando a razão entre as frequências é um número racional. Assim, quando uma órbita completar m_1 voltas em θ_1 e m_2 voltas em θ_2, a órbita se fecha sobre si mesma, e temos uma órbita periódica. No entanto, se a Eq.(1.4) não for satisfeita,

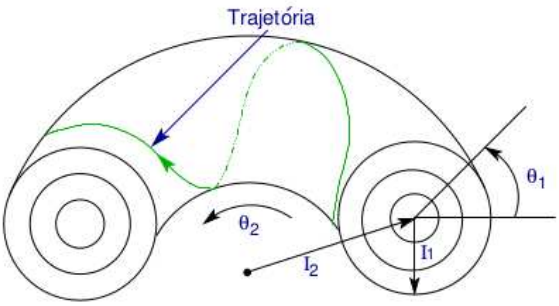

Figura 1.1: *Movimento de um ponto no espaço de fases para um sistema integrável com dois graus de liberdade. Figura retirada da Ref.[19].*

lidamos com o caso quase-periódico, onde as órbitas nunca fecham sobre si mesmas, para este caso temos os toros irracionais. Este último ocorre com muito mais frequência, uma vez que num dado domínio, a probabilidade de encontrarmos razões irracionais é muito maior que a de encontrar razões racionais.

Teorema *KAM*

Uma abordagem para verificar a robustez da integrabilidade do sistema, é submetê-lo a uma pequena perturbação [17, 18]. Neste caso, representamos a Hamiltoniana, já na variáveis ação e ângulo como:

$$H(I,\theta) = H_0(I) + \epsilon H_1(I,\theta) \ , \tag{1.5}$$

onde a função $H(I,\theta)$ é separada em duas partes, uma integrável H_0, mais a parte perturbativa H_1, sendo ϵ o parâmetro que controla a transição de integrabilidade para não integrabilidade.

A pergunta sobre em quais condições a Hamiltoniana perturbada da Eq.(1.5) apresenta trajetórias que permanecem confinadas a toros N dimensionais só foi respondida pelo teorema de Kolmogorov [7], Arnol'd [21, 22], Moser [23, 24], usualmente chamado de teorema *KAM (Kolmogorov-Arnol'd-Moser)*. O teorema estabelece que, se um sistema dinâmico integrável for submetido a uma pequena perturbação não-linear, determinados toros serão deformados e outros destruídos. Nesse contexto, definimos toros como sendo curvas invariantes no espaço de fases, onde condições iniciais dadas em cima do toro, permanecem sobre o mesmo, preenchendo uma curva fechada toroidal com a evolução temporal [17, 18, 19, 20]. Assim, os toros sobreviventes são aqueles que possuem uma razão de frequências suficientemente irracionais, ou seja, são destruídos aqueles cujo quociente de frequências mais se aproxima de um número racional. Sendo assim, o último toro a ser destruído é o que apresentar o quociente de frequências mais irracional de todos (muito próximo da razão áurea) [17, 18, 19, 20]. Em outras palavras, o sistema deve obedecer os seguintes critérios para que os toros sobrevivam:

- *(i)* independência linear das frequências [18]: $\vec{m}.\vec{\omega}_i(I) \neq 0$,
- *(ii)* a perturbação deve ser suave [18], com um número suficiente de derivadas contínuas

de H_1 ,

- *(iii)* condições iniciais devem ser fornecidas suficientemente afastadas das ressonâncias [18].

Para uma perturbação ϵ suficientemente grande todos os toros são destruídos. Da condição *(iii)*, temos que o último toro a ser destruído é aquele cuja razão de frequências é o número mais irracional. Podemos entender o significado do "número mais irracional" através de algumas ferramentas matemáticas da teoria de números. Um número irracional R, pode ser representado através de frações continuadas infinitas [17] na forma:

$$R = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}} \ , \tag{1.6}$$

onde a_i assumem valores inteiros. Ao truncarmos a fração em um determinado a_n, obtemos um valor racional próximo do número irracional. Desta maneira, o número "mais irracional" é definido como o que se aproxima mais lentamente do valor da Eq.(1.6) [17]. O número mais irracional que existe é conhecido como razão áurea [17] denotada como: $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

No entanto, os toros com razão de frequência racional, são destruídos com valores de perturbação ϵ muito pequenos. Após essa destruição, surgem pontos fixos ou de equilíbrio aos pares, identificados como elípticos e hiperbólicos, conforme o Teorema de Poincaré-Birkhoff [17, 18, 20]. Os pontos elípticos são estáveis. Assim, condições iniciais em sua vizinhança, geram órbitas elípticas, em um movimento periódico ou quase-periódico; movimento esse que se repete em menores escalas, caracterizando sua estrutura hierárquica. Já pontos fixos hiperbólicos, também chamados de pontos de sela, apresentam direções instáveis e estáveis. Ao conjunto de pontos que tendem ou escapam iterativamente para o ponto de sela denominamos variedade (*manifold*) [17, 18, 20]. Nesse cenário, encontramos órbitas homoclínicas e heteroclínicas, onde órbita homoclínica é definida como um conjunto de pontos que liga um ponto de sela a ele mesmo; já órbita heteroclínica, também é definida como um conjunto de pontos, porém, eles ligam diferentes pontos de sela. Ainda, a instabilidade dos pontos fixos hiperbólicos é responsável pela formação de regiões caóticas em sistemas conservativos. Ou seja, caso um sistema apresente um ponto hiperbólico, uma "pequena perturbação" pode levar o mesmo a apresentar dinâmica caótica.

Para o caso de sistemas não-integráveis, que constituem a grande maioria dos sistemas Hamiltonianos, encontramos a coexistência de diferentes tipos de órbitas no espaço de fases, geradas por diferentes condições iniciais, que são controladas pela intensidade da não-linearidade do sistema. Assim, podemos encontrar regiões caóticas coexistindo com regiões estáveis. Tal coexistência é responsável pela quebra de ergodicidade do sistema. Um sistema dinâmico é classificado como ergódico, quando uma única condição inicial, evoluída em um tempo suficientemente longo, preenche todo o espaço de fases. Em particular, para sistemas bidimensionais, uma linha divide um plano, e um toro *KAM* separa o espaço de fases em duas regiões distintas.

Assim, uma região caótica é separada por um toro *KAM* no espaço bidimensional. Nestes casos, os toros *KAM* atuam como se fossem barreiras que não podem ser atravessadas por qualquer órbita. Tal comportamento dá origem ao fenômeno de *stickiness*, o qual nos referiremos mais adiante ao longo da Tese.

Seção de Poincaré

A abordagem que enfocamos até o momento está relacionada com sistemas de tempo contínuo. Geralmente são representados por conjuntos de equações diferenciais ordinárias ou parciais, juntamente com condições iniciais e parâmetros de controle externos que permitem descrever o comportamento dinâmico dos sistemas ao longo do tempo. Podemos ainda, estudar um sistema dinâmico considerando o tempo como uma variável discreta. Nesses casos, normalmente temos uma modelagem através de mapas, nos quais existe uma lei de recorrência relacionando os valores das variáveis dinâmicas no instante posterior com seus valores em instantes anteriores [25]. Sendo assim, uma das maneiras pela qual um fluxo contínuo dá origem a um mapa discreto é pela utilização de seções de Poincaré. A seção de Poincaré é uma maneira de simplificar o estudo de um fluxo em um espaço de fases $N-$dimensional a uma aplicação, chamada mapa de Poincaré, ou mapa de retorno, num espaço de fases com $N-1$ dimensões [25].

Dada uma equação diferencial genérica do tipo $\ddot{x} + a_1(t)\dot{x} + a_2(t)x = 0$, onde $a_1(t)$ e $a_2(t)$, são periódicos com período T. O mapa de Poincaré é obtido considerando as sucessivas interseções das trajetórias com uma superfície Ω chamada *seção de Poincaré*, toda vez que o tempo for um múltiplo de T [25]. Ainda, caso essa superfície coincida com o plano $(\dot{x}, x)$, encontramos o chamado mapa estroboscópico [20]. Na Fig.1.2, podemos perceber como o fluxo de trajetórias intercepta a superfície Ω, após a aplicação do mapa de Poincaré P. Aqui temos o exemplo de uma órbita periódica $\vec{x_0}$, na qual a transformação $P(\vec{x_0}^*) = {x_0}^*$, ou seja, a órbita $\vec{x_0}$ intercepta a seção de Poincaré no mesmo ponto ${x_0}^*$ onde foi iniciada. Temos também o exemplo de uma órbita não-periódica $\vec{x_1}$, onde $P(\vec{x_1}') \neq {x_1}'$, ou seja, aqui a órbita $\vec{x_1}'$ não intercepta a seção de Poincaré no mesmo ponto inicial x_1'.

Algumas das vantagens de utilizarmos a seção de Poincaré, são: *(i)* a redução dimensional, onde reduzimos o espaço de fases de uma variável; *(ii)* dinâmica global, onde em sistemas com baixa dimensão, a integração numérica das equações diferenciais do problema original, nos fornecem a dinâmica global do sistema; e *(iii)* a melhor visualização de fenômenos, onde conceitos físicos difíceis de se caracterizar no problema original, tornam-se claros quando olhamos para a seção de Poincaré.

Mapa padrão

No caso de sistemas dinâmicos com tempo discreto, o sistema bidimensional integrável mais simples, onde a Hamiltoniana é proporcional ao quadrado da variável de ação (caso típico

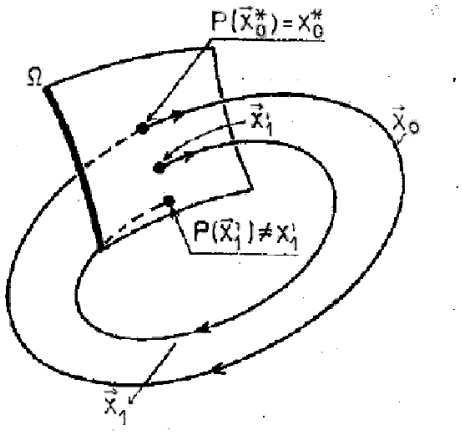

Figura 1.2: *Representação geométrica do mapa de Poincaré P: $\vec{x_0}$ é uma órbita periódica, e $x_0{}^*$ é o ponto onde a órbita intercepta a hipersuperfície Ω; $\vec{x_1}$ é uma órbita não periódica que corta Ω, onde $P(\vec{x_1}') \neq x_1{}'$. Figura retirada da Ref.[25].*

relacionado à energia cinética) foi proposto pela primeira vez por Chirikov [12], onde após uma perturbação da variável de ação I por uma função senoidal do ângulo θ e de intensidade K, obtemos o seguinte mapeamento

$$\begin{cases} I_{n+1} = I_n + K\sin(\theta_n) \quad mod(2\pi) \\ \theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1} \quad mod(2\pi) \end{cases} . \tag{1.7}$$

Aqui, o conjunto de Eqs.(1.7) é definido como mapa padrão, e modulação em 2π de ambas das variáveis (I_n, θ_n), remete a dinâmica confinada em uma geometria toroidal. Se $K = 0$, o sistema é integrável. Quando $K > 0$, o sistema é não-integrável e pode ocorrer a coexistência de regiões caóticas e regulares. Aqui encontramos uma transição de integrabilidade para não integrabilidade. Quando temos o parâmetro K próximo a um valor crítico, dito $K_c \approx 0,9716$, temos a destruição da última curva invariante, e encontramos uma outra transição, de caos local para caos global no espaço de fases. A Fig.1.3, representa o espaço de fases para alguns valores do parâmetro K, com 400 condições iniciais distintas evoluídas até $n = 10^3$ iterações.

O mapa padrão tem sido amplamente utilizado na investigação de processos de difusão e transporte anômalos, e também no decaimento anômalo das correlações temporais e recorrências de Poincaré [26, 27]. Ainda, podemos obter o mapeamento padrão, através da análise da dinâmica do rotor quicado.

Stickiness

Na literatura científica existem diversos exemplos numéricos que confirmam a existência de um comportamento anômalo de algumas órbitas caóticas, quando elas se aproximam das bordas de ilhas de estabilidade, onde longos intervalos de tempo são gastos nas vizinhanças dessas regiões. As órbitas inicializadas no mar de caos, podem ser aprisionadas por diferentes estru-

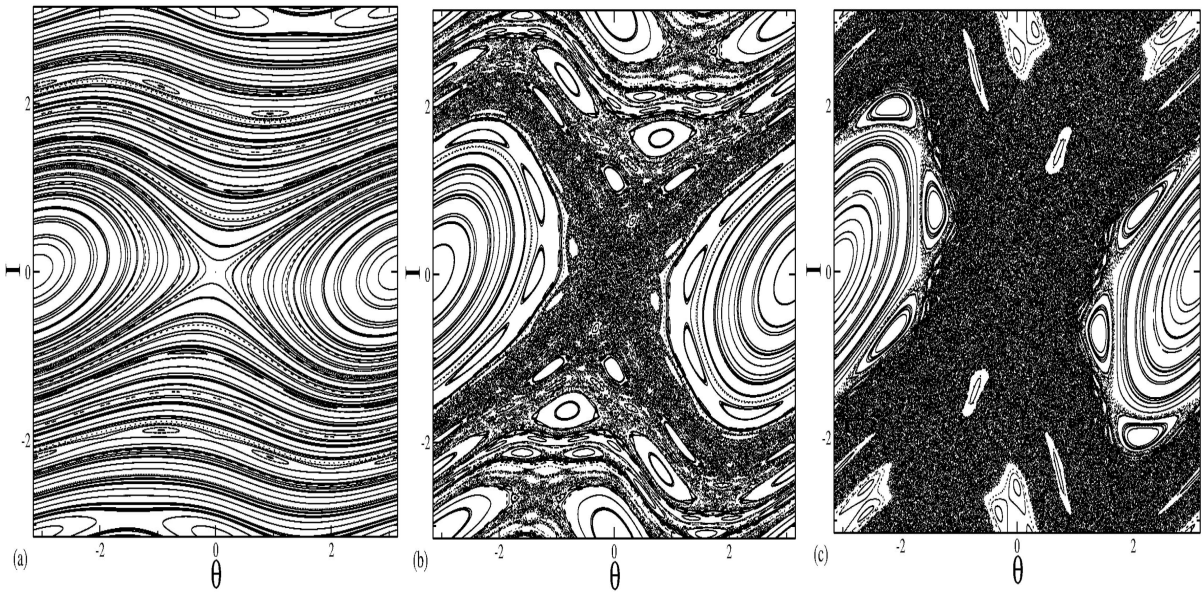

Figura 1.3: *Espaço de fases para o mapa padrão. Em (a)* $K = 0,4$*, em (b)* $K = K_c \approx 0,9716$ *e em (c)* $K = 1,5$

turas de estabilidade, e em determinado momento, escapam desse aprisionamento temporário e continuam visitando diferentes regiões imersas no mar de caos. Tal comportamento "intermitente", não pode ser atribuído a um toro *KAM*, uma vez que o mesmo representa uma barreira para órbitas caóticas independentemente do tempo de evolução do sistema.

As primeiras observações numéricas da existência desse aprisionamento de órbitas caóticas nas vizinhanças de ilhas de estabilidade, foram realizadas nas décadas de 70 por George Contopoulos [28]. Na década de 80, foi proposto por Mackay, Meiss e Percival [29] a existência de objetos chamados de *cantori*. Eles são definidos como um conjunto invariante infinito de pontos, mas que não formam uma linha contínua (toro), e sim um conjunto fractal [17, 18, 20]. Esses *cantori* se formam através da destruição dos toros invariantes conforme se aumenta a perturbação do sistema. Ainda, diferentemente dos toros *KAM*, eles formam barreiras parciais no espaço de fases. A existência destes *cantori* tem grande influência sobre como ocorre o transporte de órbitas caóticas no espaço de fases, e teve como consequência principal, uma reformulação topológica dos estudos sobre espaços de fases. Quando a dinâmica é evoluída, a evolução da órbita pela região onde se encontram as ilhas de estabilidade se torna complicada, pois o *cantori* mais próximo bloqueia o escape da órbita da fronteira na vizinhança da ilha de estabilidade. Essa órbita bloqueada, acaba ficando "presa" dentro da área entre o mais próximo *cantori* e a fronteira da ilha de estabilidade. Desta maneira, observamos uma maior densidade de pontos ao redor da ilhas de estabilidade, como mostra a Fig.1.4.

Durante esse processo, tais órbitas são aprisionadas ou ainda "coladas" nas bordas *(sticky motion)* [30]) de verdadeiras quase-armadilhas dinâmicas *(quasi-dynamical traps)* [31] por um intervalo finito de tempo. De acordo com Zaslavsky [32], como o aprisionamento das órbitas caóticas ocorre por um instante de tempo finito, não é correto dizer que existe aprisionamento

de órbitas em armadilhas dinâmicas absolutas, como um *sink*, como é observado para sistemas dissipativos, mas sim em quase-armadilhas dinâmicas. Ainda, Zaslavsky foi um dos pioneiros e muito bem sucedido cientista na investigação do fenômeno de *stickiness*. Na Fig.1.4 temos várias ampliações em torno das ilhas de estabilidade de um espaço de fases para o mapa padrão com o parâmetro de controle $K = 6,908743$, onde encontramos os *cantori* e suas cadeias de ilhas correlacionadas. Podemos ver em particular na Fig.1.4(b), uma maior densidade de pontos em torno das três ilhas, caracterizando o aprisionamento de órbitas pelo fenômeno de *stickiness*.

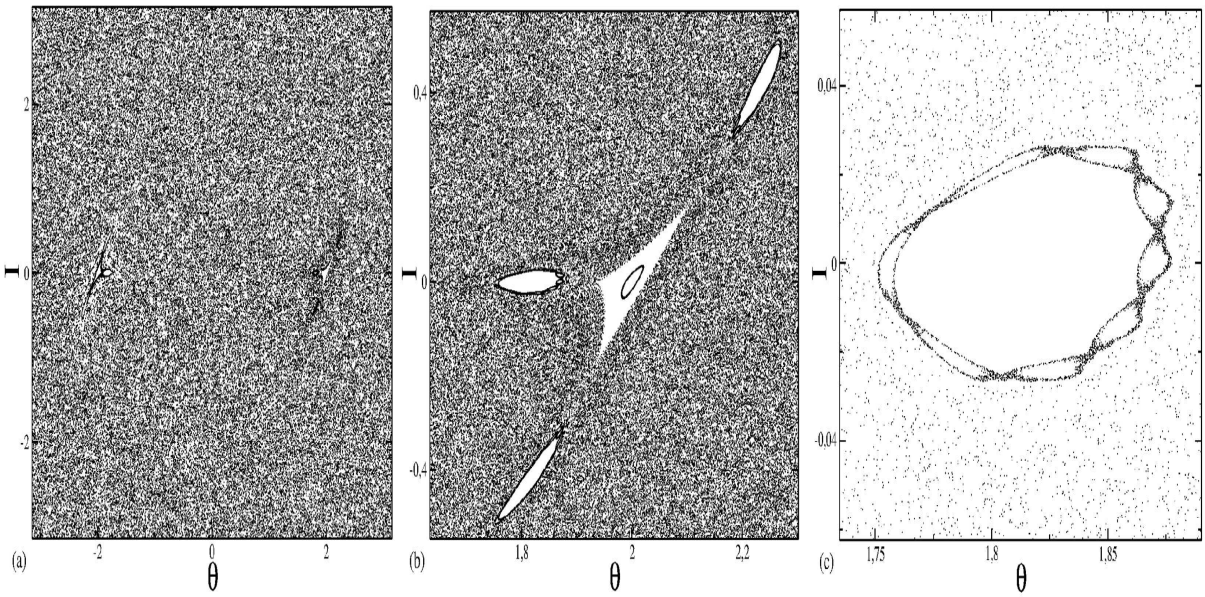

Figura 1.4: *Sucessivas ampliações do espaço de fases para o mapa padrão nas proximidades das ilhas de estabilidade, caracterizando o fenômeno de stickiness. O parâmetro de controle utilizado foi* $K = 6,908743$.

De forma simplificada, o aprisionamento de órbitas caóticas pode ser definido como longos e sucessivos intervalos de tempo em que a dinâmica do sistema, torna-se "menos caótica". Ainda, durante o aprisionamento, as órbitas tendem a apresentar um movimento "quase regular", ou em determinados casos, até regular [31, 32]; contrastando com sua dinâmica caótica quando elas estão longe das ilhas de estabilidade. Tal comportamento pode ser considerado como o que conhecemos por processo intermitente [15, 17], onde existe uma alternância entre períodos de movimento regular e caótico (mesmo que não ocorram os estouros *burst*). Ainda, algumas aplicações resultantes desse fenômenos de aprisionamento de órbitas por estruturas regulares pode ser encontradas em astronomia [33], em mecânica dos fluidos [34], em dinâmica de vôos de Levy [35] e biologia [36].

1.2.2 Transporte

O comportamento de uma órbita iniciada em uma região caótica do espaço de fases de um sistema que apresenta espaço de fases do tipo misto é bastante complexo. Apesar da órbita não penetrar nas regiões de estabilidade (ilhas), percebemos que a presença de algumas dessas estruturas afeta de maneira decisiva o comportamento das órbitas. De fato, graças à presença de *cantori* (toróides de dimensão fractal) e de um labirinto de cadeias de ilhas dentro de cadeias de ilhas, geradas por ressonâncias, órbitas do mar de caos podem ser aprisionadas em regiões estreitas próximas as ilhas, permanecendo um tempo muito longo até escapar novamente para o mar de caos. Aqui definimos a dimensão fractal basicamente como estrututas que possuem geometria irracional, embora existam definições matemáticas extremamente mais rigorosas [37].

No entanto, muitas vezes não estamos interessados em saber o comportamento individual de partículas, mas sim, em conhecer comportamentos médios do sistema. Essa é a principal razão para considerarmos métodos estatísticos na descrição dos fenômenos dinâmicos. Um exemplo intuitivo é pensarmos em como se afastam as partículas, se pingarmos uma gota de tinta em uma superfície líquida.

Ao tomarmos um sistema físico e introduzirmos um vazamento, ou ainda mesmo uma barreira, dizemos que a probabilidade da amostragem inicial de condições iniciais sobreviver ao vazamento é denominada $\rho(\vec{r},t)$, onde $\vec{r}$ representa uma variável de ação genérica. Considerando que podemos separar a "região de sobrevivência" em duas partes; as partículas que escaparam, e as que ainda não escaparam, podemos definir uma "corrente de fluxo" para o escape, onde esta deve ser proporcional a diferença de concentração das duas regiões. De acordo com [38, 39], escrevemos

$$\vec{j}(\vec{r},t) = -D\vec{\nabla}\rho(\vec{r},t) \ , \tag{1.8}$$

onde D é o coeficiente de difusão. Ao considerarmos ainda a propriedade da conservação das partículas temos

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{\nabla}.\vec{j}(\vec{r},t) \ . \tag{1.9}$$

Combinando as Eqs.(1.8) e (1.9), obtemos a equação de difusão

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = D\nabla^2\rho(\vec{r},t) \ . \tag{1.10}$$

A distribuição de probabilidades em sistemas unidimensionais que obedecem a Eq.(1.10) são dadas por [38, 39]

$$\rho(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) \ . \tag{1.11}$$

Podemos destacar dois tipos de comportamento, ressaltando os aspectos temporais da probabilidade de sobrevivência.

- *(i) Mar de caos:* A órbita realiza um movimento *errático* similar a um movimento Browniano *(random walk)* [40], possuindo uma estatística do tipo exponencial para os tempos

de retorno (escape através do buraco).

- *(ii) Próximo às ilhas de estabilidade:* A órbita pode ficar confinada por um longo tempo próximo às ilhas em um processo de aprisionamento *(stickiness)*. Durante esse tempo o comportamento da dinâmica é aproximadamente regular. O tempo de aprisionamento típico segue o formato de uma lei de potência, para as correlações (escape) [39, 41].

Uma vez a órbita iniciada em uma região do mar de caos, ela pode alternar entre estes dois regimes de comportamento indefinidamente, dizemos assim que se trata de um movimento intermitente. Apesar da alternância ser entre regimes regulares e caóticos, essa intermitência se distingue do conceito usual pois o movimento caótico não se dá no formato de um estouro (*burst*). A distribuição do tempo de retorno, ou probabilidade de sobrevivência em um sistema deste tipo, refletirá a presença desses dois processos.

Para tempos de retorno curtos, ou rápido escape, esperamos uma queda exponencial (movimento no mar de caos). Já para tempos de retorno longos, ou escapes demasiadamente demorados, esperamos que os aprisionamentos ao redor das ilhas predomine, provocando uma distribuição do tipo lei de potência. Em equações temos que

$$\begin{cases} \rho(\vec{r},t) \propto Ae^{-\zeta t} & tempos \ \ \text{“}curtos\text{”} \\ \rho(\vec{r},t) \propto Bt^{-\gamma} & tempos \ \ \text{“}longos\text{”} \end{cases} , \tag{1.12}$$

onde em princípio as constantes A, B, ζ e γ são não negativas, e podem depender da posição e/ou tamanho do buraco introduzido no sistema, em relação a alguma variável relevante de análise do sistema ($\vec{r}$). Recentemente, foi mostrado que se a região de escape for dependente do tempo, temos também dependência temporal no decaimento das correlações [42]. Para sistemas caóticos, ou hiperbólicos, é natural encontrarmos um decaimento exponencial [39, 43, 44]; e para sistemas mistos, isto é, onde ilhas de estabilidade e mares de caos coexistem, o decaimento é característico de lei de potência (mais lento) [45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53], mas podemos também encontrar decaimento de probabilidade de sobrevivência no formato de exponencial esticada (*stretched exponential*) [54, 55]. Ainda, se for observado um decaimento em lei de potência ou de exponencial esticada, com longas “caudas”, existem grandes chances de se observar *stickiness* no sistema.

Deste modo, quantidades como difusão e transporte são afetadas diretamente pela existência de órbitas aprisionadas em regime de *stickiness*, e por essa razão são chamadas de difusão e transporte anômalos [56]. Grandezas utilizadas na quantificação de caos em sistemas dinâmicos são extremamente sensíveis a existência de trajetórias aprisionadas: é o caso dos expoentes de Lyapunov e a probabilidade de sobrevivência. Além destes exemplos, a influência do fenômeno de aprisionamento pode ser observado diretamente no decaimento das correlações temporais [57, 58] e nas recorrências de Poincaré [38, 59, 60, 61, 62], que neste caso também apresentam um comportamento anômalo, de alguma maneira proporcional a uma lei de potência [39].

1.2.3 Expoentes de Lyapunov

Na literatura existem diversas definições para a dinâmica caótica [17, 18, 20, 25, 63], onde tais definições dependem explicitamente da escolha da condição inicial. Desta maneira, sistemas que apresentam coexistência de domínios que possuem dinâmica caótica e regular no espaço de fases, faz com que a análise da dinâmica do mesmo seja muito mais complexa. Ainda, o entendimento entre a iteração entre esses dois comportamentos é um campo de pesquisa em constante desenvolvimento.

Citando Zaslavsky [31, 32] na literatura contemporânea, as definições mais usuais para um sistema caótico são, se o mesmo apresenta em algum domínio do espaço de fases: *(i)* pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, ou *(ii)* entropia de Kolmogorov-Sinai positiva, ou *(iii)* se o sistema for hiperbólico.

Diante deste contexto, torna-se essencial ressaltar um vínculo entre estas definições, que é a existência de uma instabilidade local e consequentemente do afastamento exponencial de trajetórias geradas a partir de condições iniciais escolhidas muito próximas, porém diferentes. Tanto para sistemas de tempo contínuo quanto discreto, a sensibilidade às condições iniciais pode ser avaliada através do cálculo dos expoentes de Lyapunov. Essa técnica, representa um dos meios mais utilizados e eficientes na obtenção de informações a respeito da instabilidade local no espaço de fases de sistemas dinâmicos, em particular, com relação às direções de aproximação e/ou afastamento das condições iniciais.

Em sistemas Hamiltonianos com dois graus de liberdade, como por exemplo o mapa padrão, teremos dois expoentes de Lyapunov, onde seus valores dependem das condições iniciais escolhidas. Para sistemas N dimensionais, podemos encontrar N expoentes de Lyapunov [64]. O conjunto de todos os expoentes de Lyapunov é chamado de espectro de Lyapunov. Para sistemas conservativos a soma de todos os elementos do espectro de Lyapunov deve ser igual a zero, como uma consequência da conservação do volume do espaço de fases, garantida pelo Teorema de Liouville [18, 19]. Sendo assim, tomando o mapa padrão como exemplo, escolhendo condições inicias no mar de caos, teremos dois expoentes de Lyapunov: um positivo e outro negativo, onde deve ser obedecida a relação $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, para garantir o Teorema de Liouville. Assim, ao tomarmos um sistema N dimensional, para garantirmos que a órbita gerada pela condição inicial será caótica, devemos ter no espectro de Lyapunov, pelo menos um expoente positivo. Ainda, podemos associar o expoente de Lyapunov, com a estabilidade da trajetória. Da mesma forma que os autovalores da matriz Jacobiana dos sistema, utilizados para determinar o expoente de Lyapunov, são invariantes sob uma mudança de coordenadas, os próprios expoentes de Lyapunov também serão, garantindo assim um considerável grau de robustez.

Definição

Considerando um sistema dinâmico avaliado com espectro de tempo discreto, embora todos os resultados apresentados aqui possam ser expandidos para o espectro de tempo contínuo.

Inicialmente, temos um mapa genérico unidimensional da forma $x_{n+1} = F(x_n)$. A estabilidade de uma trajetória qualquer, chamada x_n, pode ser determinada através da evolução de uma trajetória vizinha (satélite) à x_n, chamada $x_n{}'$. Aqui $x_n{}'$ é obtida através de $x_n{}'(0)$, que nada mais é do que uma perturbação infinitesimal de $x_n(0)$, onde o número zero simboliza o tempo ou iterada inicial. Assim, $x_n{}'(0) = x_n(0) + \delta x_n(0)$, ou como $\delta x_n(0) = x_n{}'(0) - x_n(0)$, com $|\delta x_n(0)| << 1$.

Para sistemas que não sejam caóticos, a distância δx_n entre a trajetória de referência original e a trajetória perturbada é limitada na média, ou ainda pode crescer linearmente com o tempo. Por outro lado, em sistemas caóticos, essa distância cresce exponencialmente com o tempo, de acordo com

$$\delta x_n \propto \delta x_n(0) e^{\lambda n} \ , \tag{1.13}$$

onde λ é a taxa de expansão exponencial local. Deste modo, podemos definir um parâmetro capaz de determinar o grau de instabilidade de uma dada trajetória da seguinte forma

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \lim_{\delta x_n(0)\to 0} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{|\delta x_n|}{|\delta x_n(0)|}\right) \ , \tag{1.14}$$

onde λ representa a quantidade responsável pela estimativa da taxa exponencial média de afastamento entre as trajetórias original e vizinha, conhecida como expoente de Lyapunov. Quando o limite positivo existir, a trajetória mostra sensibilidade às condições iniciais e deste modo o sistema é caracterizado como sendo caótico. Na grande maioria das vezes, as análises numéricas são feitas usando o maior expoente de Lyapunov.

Expoentes de Lyapunov a tempo finito (FTLE)

Como já visto, o princípio básico de obtenção dos expoentes de Lyapunov consiste em verificar se duas trajetórias vizinhas divergem em média exponencialmente uma da outra com o decorrer do tempo. Contudo, tomar o tempo infinito na Eq.(1.14) é inviável. Assim, trunca-se a evolução temporal até um certo tempo finito. Ainda, para sistemas que apresentam regiões de estabilidade imersas em mares de caos, temos o fenômeno de *stickiness* inerte na dinâmica do sistema. Uma vez que esses aprisionamentos temporários podem ser considerados a priori como órbitas periódicas, ou quasi-periódicas, ao calcularmos o expoente de Lyapunov durante esses aprisionamentos, este deveria se apresentar com valores muito próximos de nulo. Logicamente, o valor mais próximo de zero é obtido, quando o tempo de aprisionamento é bem longo.

Considerando este comportamento, pode-se escolher um ensemble de condições iniciais e então construir distribuição dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, que chamaremos de $\rho(\lambda)$, para investigarmos propriedades da influência do *stickiness*. As flutuações no valor de λ são responsáveis pelo aumento da largura e do formato de $\rho(\lambda)$. Devido aos diferentes comportamentos existentes em sistemas que apresentem propriedades mistas no espaço de fases, o valor de λ e a sua distribuição, $\rho(\lambda)$, passam a depender das condições iniciais utilizadas. Nes-

ses sistemas, cuja dinâmica seja regular, caótica ou haja a coexistência de ambos os regimes, $\rho(\lambda)$ deixam de ser do tipo Gaussiana, e passam a apresentar caudas mais alongadas, ou até picos secundários, próximos do zero. No entanto, o valor do pico principal da função, é muito próximo do valor médio do expoente de Lyapunov [61, 62, 65].

Desde a década de 80 até atualmente, o estudo das informações contidas nas distribuições do expoentes de Lyapunov a tempo finito, tem servido para explicar diferentes comportamentos, como propriedades anômalas de transporte, difusão e recorrências de Poincaré.

Método de triangularização para mapas 2-D

Faremos agora um detalhamento de como obter os expoentes de Lyapunov para mapeamentos bidimensionais, como o mapa padrão. Assim, partimos da definição dos expoentes de Lyapunov. A forma unidimensional pode ser encontrada na Eq.(1.14). Já na forma bidimensional, os expoentes são definidos como [66]

$$\lambda_j = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j^i| \quad j = 1, 2 \ , \tag{1.15}$$

onde Λ_j^i, são os autovalores da matriz $M = \prod_{i=1}^{n} J(x_i, y_i)$. Aqui J_i é a matriz Jacobiana do mapeamento avaliada ao longo da órbita (x_i, y_i). Aqui trocamos a notação das variáveis originais do mapa padrão, por variáveis genéricas x e y por conveniência.

Utilizamos a técnica proposta por Eckmann e Ruelle [66], que basicamente garante que o produtório não irá divergir, caso o módulo de algum autovalor fique maior do que 1. O procedimento adotado na determinação dos autovalores da matriz M, consiste em escrever J como o produto de uma matriz ortogonal θ por uma matriz triangular superior T da seguinte forma: $J = \theta T$. Uma vez que $M = J_n J_{n-1} ... J_2 J_1 = J_n J_{n-1} ... J_2 \theta_1 \theta_1^{-1} J_1$. Definindo $\tilde{J}_2 = J_2 \theta_1$, podemos aplicar o mesmo procedimento para obter $M = J_n J_{n-1} ... J_3 \theta_2 \theta_2^{-1} \tilde{J}_2 T_1$, e assim sucessivamente. Deste modo, a matriz M é reescrita como o produto de matrizes triangulares T cujos autovalores são T_{11}^i, T_{22}^i.

Para obter a expressão dos autovalores de T, devemos explicitar as matrizes θ e T. Escolhendo a matriz ortogonal

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

e a matriz triangular superior

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

temos assim os elementos de θ que podem ser escritos em termos dos coeficientes de J como o

produto das matrizes $\theta J = T$. Assim

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} , \tag{1.18}$$

onde j_{11}, j_{12}, j_{21} e j_{22} representam os coeficientes das matrizes Jacobianas. Feita a multiplicação das matrizes, chegamos a

$$\begin{pmatrix} j_{11}\cos(\theta) + j_{21}\sin(\theta) & j_{12}\cos(\theta) + j_{22}\sin(\theta) \\ j_{21}\cos(\theta) - j_{11}\sin(\theta) & j_{22}\cos(\theta) - j_{12}\sin(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix} . \tag{1.19}$$

Comparando os coeficientes, temos $j_{21}\cos(\theta) = j_{11}\sin(\theta)$, e assim $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{j_{21}}{j_{11}}$. Para obtermos as expressões das razões trigonométricas $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$, vamos recorrer ao triângulo retângulo, sendo j_{11} o eixo das abscissas e j_{21} o eixo das ordenadas, e aplicando as conhecidas relações de seno e cosseno e também o teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo, chegamos a

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{j_{21}}{\sqrt{j_{21}^2+j_{11}^2}}}{\frac{j_{11}}{\sqrt{j_{21}^2+j_{11}^2}}} , \tag{1.20}$$

onde as expressões de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$ podem ser obtidas por comparação. Com esses resultados, os autovalores de T são dados por

$$\begin{cases} T_{11} = j_{11}\cos(\theta) + j_{21}\sin(\theta) \\ T_{22} = j_{22}\cos(\theta) - j_{12}\sin(\theta) \end{cases} . \tag{1.21}$$

Considerando as definições de $\sin(\theta)$ e $\cos(\theta)$, encontramos

$$\begin{cases} T_{11} = \frac{j_{11}^2+j_{21}^2}{\sqrt{j_{11}^2+j_{21}^2}} \\ T_{22} = \frac{j_{22}j_{11}-j_{12}j_{21}}{\sqrt{j_{11}^2+j_{21}^2}} \end{cases} . \tag{1.22}$$

A expressão de $\tilde{J}_2$, é obtida da seguinte maneira $\tilde{J}_2 = J_1\theta_1$, onde

$$\tilde{J}_2 = \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) \end{pmatrix} , \tag{1.23}$$

$$\tilde{J}_2 = \begin{pmatrix} j_{11}\cos(\theta_1) + j_{12}\sin(\theta_1) & j_{12}\cos(\theta_1) - j_{11}\sin(\theta_1) \\ j_{21}\cos(\theta_1) + j_{22}\sin(\theta_1) & j_{22}\cos(\theta_1) - j_{21}\sin(\theta_1) \end{pmatrix} . \tag{1.24}$$

Assim, usando os resultados de T_{11} e T_{22}, podemos encontrar numericamente os expoentes de Lyapunov, iterando diversas condições iniciais em sucessivas triangularizações, até um tempo finito.

1.3 Bilhares

O estudo de sistemas dinâmicos e sua evolução temporal em função dos parâmetros de controle, sempre foi uma área muito atraente de pesquisa, pois permite reproduzir comportamentos complexos e diversos fenômenos naturais. Uma classe de sistemas dinâmicos, ditos bilhares, possui fácil visualização de trajetórias e simples modelagem dinâmica. Definimos aqui um bilhar como um sistema dinâmico, onde uma partícula se move com trajetória retilínea, dentro de uma região fechada (fronteira) [67]. Ainda, dependendo de parâmetros externos, como geometria da fronteira e perturbações externas, podemos fazer uma análise qualitativa e quantitativa de fenômenos relacionados com dinâmica caótica, bem como caracterizar suas propriedades. Nesta Tese, estudaremos três casos de sistemas dinâmicos, dois deles com dinâmica unidimensionais (modelo Fermi-Ulam e modelo *Bouncer*), e o bilhar *Stadium* (bidimensional). Embora os modelos FUM e *Bouncer*, não se enquadrem rigorosamente na definição de bilhar, podemos dizer que eles possuem dinâmica do tipo de bilhares *(billiard-like dynamics)*. As definições rigrosas dos modelos serão fornecidas em seus capítulos específicos.

Na história contemporânea, a noção de bilhar é conhecida desde que Birkhoff [6] propôs o problema do movimento de uma esfera em várias direções colidindo com fronteiras. Entretanto, graças aos trabalhos de Sinai [68, 69, 70], que desenvolveu teorias matemáticas sobre propriedades dos bilhares com fronteiras dispersivas, e também Krylov [71], que fez uma análise mais completa sobre as características deste tipo de dinâmica, uma nova época sobre análises de propriedades de bilhares começou. Essas ideias levaram a um crescimento do tipo "avalanche" de trabalhos sobre propriedades e características de bilhares. Um avanço considerável foi encontrar a solução, considerando a teoria ergódica de Boltzmann para a dinâmica de gases [72].

Basicamente os bilhares são sistemas físicos cuja dinâmica consiste de um domínio fechado Q, com fronteira suave ∂Q, em que uma partícula puntual (bola de bilhar) se move livremente em trajetórias retilíneas com velocidade constante. Ao colidir com a fronteira a partícula é refletida elasticamente, de modo que sua componente normal muda de sinal, enquanto que sua componente tangencial é preservada, no caso de bilhares bidimensionais. Essa condição nos leva a consequência de que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão [67]. Ainda, considerando o caso unidimensional, a lei de reflexão se aplica apenas a componente normal da variável levada em questão. Se o domínio ∂Q não depende do tempo, então o sistema não troca energia e/ou velocidade com a partícula e é dito um sistema de fronteira fixa. Por outro lado, se $\partial Q = \partial Q(t)$, dizemos então que o sistema apresenta dependência temporal.

1.3.1 Dinâmica e Geometria

Dependendo da geometria da fronteira, podemos dividir os bilhares em dispersivos, convergentes e neutros. Bilhares neutros, possuem fronteiras formadas por segmentos de reta, como por exemplo o bilhar quadrado [67]. Bilhares dispersivos, algumas vezes conhecidos por bilha-

res de Sinai [68], consistem de componentes divergentes, e em alguns casos há a coexistência de componentes divergentes e neutras [68]. Um dos exemplos mais populares desse tipo de bilhar é o Gás de Lorentz [72, 73, 74]. A análise desse modelo resultou na prova de que a dinâmica puramente determinística pode ser ergódica com propriedades mistas e similar ao movimento Browniano [72]. A fronteira de bilhares convergentes, consiste somente de componentes convergentes ou de componentes focais conectadas por retas (componentes neutras). Exemplos típicos desse tipo de bilhar pertencem a Bunimovich [75, 76]. Um desses exemplos é o bilhar *Stadium*, que é constituído de dois arcos conectados por segmentos de retas paralelas. Para esse bilhar já foi provado que para uma combinação de parâmetros geométricos, ele possui propriedades caóticas e mistas [67].

De uma maneira geral, a dinâmica de uma partícula em um bilhar, pode ser classificada de três maneiras: *(i)* completamente integrável, ou seja, regular; *(ii)* ergódica, e *(iii)* mista. Exemplos típicos do caso *(i)* são os bilhares elíptico e circular [67, 77, 78], cuja integrabilidade vem da conservação do momento angular e da energia. O bilhar de Sinai e o bilhar *Stadium* de Bunimovich, são exemplos do caso *(ii)*; para esses sistemas a evolução temporal de uma única condição inicial, para combinações apropriadas de parâmetros de controle, é condição suficiente para preencher o espaço de fases ergodicamente [68, 67, 75, 76]. Finalmente, para o caso *(iii)*, existe um número significativo de sistemas que apresentam características mistas para o espaço de fases, cujos parâmetros de controle possuem diferentes significados físicos. Para esses sistemas observamos um conjunto de ilhas *KAM*, geralmente envoltas por um mar de caos e curvas invariantes (*invariant tori*), assim separando diferentes regiões do espaço de fases [67, 79, 80]. Atualmente, o estudo de bilhares tem aplicações em vários campos de pesquisa, como mecânica estatística não linear, sistemas hiperbólicos, acústica, plasmas, microondas, pontos quânticos, ótica, entre outras áreas. [81, 82, 83, 84, 85, 86, 87].

1.3.2 Aceleração de Fermi e mecanismos geradores de caos

A nossa motivação principal para o estudo de aceleração de Fermi, remete ao trabalho de Enrico Fermi em 1949 [88], onde é feita uma tentativa de explicar as altas energias dos raios cósmicos que viajam no meio interestelar. Fermi disse, que partículas carregadas, interagem com campos magnéticos oscilantes de grandes estruturas no espaço, como galáxias. Essa interação, faz com que as partículas carregadas eventualmente ganhem ou percam energia. Fermi disse que na média, as partículas tendem a ganhar energia, e isso explicaria as altas energias encontradas em partículas proveniente de raios cósmicos.

A partir dessa ideia pioneira de Fermi, são propostos alguns sistemas, que tentam modelar esse mecanismo proposto por Fermi, chamado de acelerador de Fermi. São modelos unidimensionais relativamente simples, onde as partículas cósmicas são representadas por partículas clássicas de massa m. O modelo Fermi-Ulam *(Fermi-Ulam model - FUM)*, proposto por Stanislaw Ulam [89], consiste de uma partícula clássica sofrendo colisões entre 2 paredes, uma

delas sendo fixa e a outra móvel. Neste modelo a fronteira móvel, faz o papel da interação eletromagnética (que tira ou fornece energia), e a fronteira fixa é o mecanismo de retorno da partícula. O modelo *Bouncer*, proposto originalmente por Pystilnikov [90], segue basicamente a mesma linha, onde agora uma partícula clássica, colide com uma única fronteira que se move periodicamente no tempo, sob a ação de um campo gravitacional constante, que faz o papel do mecanismo de retorno.

Considerando a dinâmica dos dois modelos, o FUM não apresenta aceleração de Fermi, ao passo que o modelo *Bouncer* pode apresentar. No modelo FUM, curvas invariantes do tipo *spanning* impedem o crescimento ilimitado de energia [91]. Já no caso do modelo *Bouncer*, dependendo das condições iniciais e dos parâmetros de controle, as curvas invariantes são destruídas e o crescimento ilimitado de energia pode ser observado, levando ao fenômeno de aceleração de Fermi. Existe ainda, uma versão híbrida dos modelo Fermi-Ulam e *Bouncer*, conhecido como modelo Fermi-Ulam bouncer [92, 93]. Também, partículas confinadas em poços e barreiras de potencial [94, 95, 96, 97, 98, 99], são descritos por mapeamentos discretos. Outras não linearidades também podem ser consideradas no modelo FUM, como o caso da perturbação biela-manivela [100].

O mecanismo gerador de caos em bilhares depende basicamente da fronteira. Para bilhares divergentes, a própria geometria da fronteira faz com que a trajetória da partícula divirja em relação a um ponto focal. No caso convergente, as trajetórias tendem a convergir para um ponto focal após interagirem com a fronteira convergente. Nesses bilhares, o caos aparece, quando o tempo de divergência, ou seja, o tempo gasto pela partícula, depois que ela passou pelo ponto focal até colidir novamente com a fronteira convergente, for maior que o tempo de convergência, que é o tempo gasto entre a colisão com a componente convergente até o ponto focal. Este mecanismo é denominado mecanismo desfocalizador *defocusing mechanism* [67, 75, 76, 101].

Particularmente, em bilhares bidimensionais, existe uma conjectura sobre o fenômeno de aceleração de Fermi. A conjectura LRA (Loskutov-Ryabov-Akinshin) [102, 103, 104, 105, 106] diz que para bilhares que possuem alguma componente caótica em seu espaço de fases na sua versão com fronteira estática, a introdução da perturbação temporal na fronteira é condição suficiente para que seja observardo o fenômeno de aceleração de Fermi. No bilhar elípitico, que possui a dinâmica integrável em sua versão estática, Lenz e coloboradores [107, 108, 109], mostraram que, quando introduzida a dependência temporal na fronteira, o fenômeno de aceleração de Fermi ocorria. Para este caso em particular, constatou-se que a aceleração de Fermi se dá porque algumas órbitas cruzam a região da curva *separatrix* no espaço de fases, que se torna uma *stochastic layer* quando a perturbação é introduzida. Definimos aqui *separatrix* como uma curva que separa duas regiões distintas do espaço de fases, onde sua origem e fim coincidem com os pontos de sela do sistema; e definimos *stochastic layer* como sendo uma curva que possui uma "camada porosa" (*layer*), onde as órbitas podem cruzar as regiões distintas do espaço de fases. Esse cruzamento permite que órbitas troquem de comportamento nas regiões de libração e rotação, fazendo com que a partícula sofra os efeitos da aceleração de Fermi, no caso do bilhar

elíptico. Tal comportamento aliado a fenômenos de ressonância e *stickiness*, leva a dinâmica a platôs estacionários para tempos longos, como veremos no Cap.4. Recentemente, Leonel e Bunimovich [110], complementaram a conjectura LRA, confirmando que somente a presença de órbitas heteroclínicas no espaço de fases da versão estática do bilhar, é condição suficiente para que o bilhar experimente aceleração de Fermi, quando a dependência temporal na fronteira é introduzida.

Frequentemente, a dinâmica de um sistema depende dos seus parâmetros de controle. Em alguns casos, esses parâmetros controlam a intensidade da não-linearidade dos sistemas. Quando esse parâmetros variam, quantidades médias de observáveis mensuráveis podem experimentar mudanças súbitas de comportamento, caracterizando portanto transições de fase [40]. Muitas dessas transições, podem ser descritas utilizando-se de argumentos de escala, onde expoentes críticos desempenham um importante papel na descrição completa de propriedades médias. Em particular, uma transição de integrabilidade para não integrabilidade pode ser estudada [111, 112, 113, 114], e portanto classes de universalidade podem ser obtidas [112, 115]. Esse formalismo de escala se mostrou útil e válido em diferentes tipos de transições em bilhares, considerando casos com fronteiras estáticas e dependentes do tempo [111, 116, 117, 118], conservativos e dissipativos [115, 119, 120, 121, 122, 123].

1.4 Estrutura e informações sobre a Tese

A presente Tese de Doutoramento tem como missão e principal objetivo estudar e caracterizar alguns dos efeitos causados na dinâmica, e para com algumas propriedades estatísticas, da influência do fenômeno de *stickiness* em alguns sistemas dinâmicos clássicos. Utilizando técnicas descritas ao longo das seções anteriores, como análise de transporte e difusão, expoentes de Lyapunov e probabilidade de sobrevivência, procuramos caracterizar como as órbitas em regime de *stickiness* afetam tais observáveis. Através disso, pudemos entender como o *stickiness* afeta a aceleração de Fermi, no modelo *Bouncer* e no bilhar *Stadium*; retardando o seu crescimento, ou ainda, aliado a ressonâncias e pertubações, impedir que essa difusão ilimitada ocorra. Já no modelo Fermi-Ulam, onde não ocorre aceleração de Fermi, caracterizamos a influência das órbitas de *stickiness* em algumas propriedades estatísticas relacionadas ao transporte no modelo. Todos os capítulos podem ser lidos de forma independente, sem prejudicar o entendimento da Tese.

Começaremos com o modelo Fermi-Ulam no capítulo 2, onde temos a dinâmica confinada dentro de duas paredes, onde uma delas move-se periodicamente no tempo e a outra encontra-se fixa, ainda, sem nenhuma ação de força externa. Um mapeamento bidimensional é obtido, nas variáveis velocidade da partícula V, e fase da parede móvel ϕ, e algumas propriedades caóticas são caracterizadas. Estudamos como ocorre o transporte no modelo, através de técnicas de probabilidade de sobrevivência e análise de difusão. Vimos que o fenômeno de *stickiness* existe, e provoca comportamentos distintos no decaimento de correlações para diferentes ensembles

de energia. Ainda, caracterizamos a difusão no mar de caos, com expoente característico $\beta = 1/2$, tanto do ponto de vista analítico, quanto numérico e também propomos uma relação de renormalização envolvendo o parâmetro de controle.

O capítulo 3 está dedicado a estudar a dinâmica do modelo *Bouncer*, onde uma partícula clássica sofre sucessivas colisões com uma fronteira móvel, sob a ação de uma força externa gravitacional. Um mapeamento não-linear bidimensional foi obtido, para as versões completa e simplificada, nas variáveis velocidade da partícula V, e fase da parede móvel ϕ. Propriedades caóticas foram caracterizadas e ainda uma conexão com o mapa padrão é feita. Crescimento ilimitado de energia foi estudado e modos aceleradores foram encontrados no sistema. Além do mais, órbitas em regime de *stickiness* influenciam bastante a regência da dinâmica, podendo inclusive atrasar o crescimento de energia. Essas órbitas foram caracterizadas utilizando formalismo de escape e estudo de propriedades de transporte e de expoentes de Lyapunov a tempo finito. Desta maneira, podemos dizer que o *stickiness* age como um mecanismo de retardo para a aceleração de Fermi.

Já no capítulo 4 analisamos o caso da dinâmica de um bilhar do tipo *Stadium*, que basicamente é descrito por fronteiras côncavas, que se movem no tempo, conectados a linhas paralelas. Para este caso, um tratamento mais robusto é necessário para descrever a dinâmica, uma vez que temos agora movimento bidimensional. Um mapeamento não-linear quadrimensional é obtido considerando os ângulos polares α e ϕ, a velocidade da partícula V e o tempo t e um espaço de fases do tipo misto foi encontrado. Foi caracterizado uma velocidade de ressonância, que basicamente funciona como um divisor de ensembles de velocidades. Tal ressonância, permite que as curvas invariantes que delimitam os pontos fixos, atuem como *stochastic layers*, permitindo que a maior parte do espaço de fases fique acessível. Assim, órbitas podem mudar de comportamento durante a dinâmica. Comportamento esse que era impossível na versão com fronteira estática. Caso, seja fornecida uma velocidade acima do valor de ressonância, observamos difusão ilimitada na velocidade. Tal comportamento, ainda foi caracterizado usando argumentos de escala. No entanto, se uma condição inicial tiver velocidade inicial abaixo do valor ressonante, existem grandes chances dessa órbita ficar aprisionada ao redor das ilhas de estabilidade por longos períodos de tempo. Assim, o *stickiness* atua como facilitador da troca entre comportamento caótico e regular, onde a dinâmica para tempos longos acaba se tornando estacionária.

Finalmente, algumas considerações finais, conclusões e perspectivas serão mostradas no capítulo 5. Aqui também será mostrada uma lista com as publicações obtidas ao longo do período de Doutoramento.

O desenvolvimento desta Tese de doutoramento é resultado de estudos iniciados em Março de 2011 e concluídos em Dezembro de 2014. O período de doutoramento foi financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Houve também um estágio internacional, com duração de seis meses na School of Mathematics - University of Bristol - United Kingdon, com financiamento do programa Ciência sem fronteiras (CsF - CAPES).

Todas as pesquisas desenvolvidas durante esse tempo de Doutorado resultaram em algumas publicações científicas, citadas ao longo do texto e também disponível na lista de referências, onde algumas delas em particular deram origem a esta Tese. As simulações numéricas que viabilizaram a obtenção dos resultados que possibilitaram a realização dos trabalhos que serão apresentados nesta Tese de Doutoramento, foram executados com a utilização integral do sistema operacional Linux, compiladores e programas de visualização gráfica a ele associado, como Xmgrace, Kate, Kile, Gimp, Gnuplot, etc. A linguagem de programação utilizada variou entre Fortran 77, Fortran 90, C, C++ e Shell Script, dependendo do algoritmo numérico utilizado. Ainda, a grande maioria dos resultados numéricos foram obtidos nos Clusters de computadores do laboratório do grupo de investigação em sistemas complexos e dinâmica não linear, do departamento de Física - UNESP, Rio Claro, e também do Cluster de computadores do Núcleo de Computação Científica NCC/UNESP São Paulo.

Capítulo 2

Modelo Fermi-Ulam (FUM)

Neste capítulo, descreveremos algumas propriedades do modelo Fermi-Ulam. Começaremos com a obtenção do seu mapeamento e algumas propriedades caóticas na Sec.2.1. Logo sem seguida na Sec.2.2, trataremos o problema com o ponto de vista estatístico e abordando o formalismo de escape, para caracterizar as órbitas em regime de stickiness. *Ainda, na Sec.2.3, faremos o estudo de algumas propriedades de transporte, como a difusão considerando um tratamento analítico e comparando com os resultados numéricos. Finalmente, na Sec.2.4 nos referimos a conclusões parciais e perspectivas.*

2.1 Modelo Fermi-Ulam

O modelo Fermi-Ulam consiste basicamente de uma partícula clássica sofrendo colisões com duas paredes rígidas. A primeira parede é dita fixa, e a segunda move-se periodicamente com o tempo [111]. Uma versão ilustrativa do modelo pode ser vista na Fig.2.1. A parede

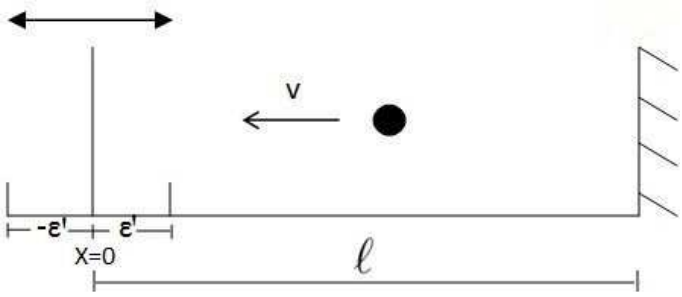

Figura 2.1: *Esquema ilustrativo do modelo Fermi-Ulam.*

móvel está localizada em $x = \ell$ em relação à parede fixa quando esta estiver na posição de equilíbrio. A parede que oscila periodicamente com o tempo tem o seu movimento definido por $x_w(t) = \epsilon' \cos(wt)$, onde ϵ' é a amplitude de oscilação da parede móvel e w é a frequência

angular da oscilação. Não há presença de campo gravitacional ou quaisquer outros campos e forças externas. Isso implica que a partícula se move com velocidade constante entre os choques.

2.1.1 Descrição do Mapeamento

A dinâmica do sistema é descrita por um mapeamento não linear nas variáveis velocidade da particula v e tempo t imediatamente após a enésima colisão da partícula com a parede móvel. Podemos ainda descrever o modelo em duas versões: versão completa, que considera o movimento real da parede móvel, e a simplificada, que geralmente é usada para acelerar as simulações numéricas, onde ambas as paredes são assumidas como fixas, porém, a partícula troca energia e momentum com uma delas, como se ela estivesse em movimento. A versão simplificada, facilita no tratamento analítico das propriedades caóticas da dinâmica do modelo que faremos ao longo desse capítulo.

Mudança de Referencial

Para realizar os cálculos da velocidade após a colisão (seja versão simplificada ou completa), é necessário fazer uma mudança de referencial inercial para referencial não inercial, pois a colisão ocorre em um referencial que está acelerado (referencial da parede móvel). Para obter uma melhor visualização de tal mudança de referencial, vamos observar a Figura 2.2. O referencial inercial é representado pelo par (xy) e o referencial não inercial é representado por $(x'y')$. Sendo que o ponto P representa o instante da colisão, temos que: $\vec{R}$ é o vetor posição da partícula no referencial inercial, $\vec{r}$ representa a posição da parede medida no referencial inercial e $\vec{r'}$ é a posição da parede no referencial não-inercial. Podemos representar esta relação vetorial de mudança de referenciais, como

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{r'} \ . \tag{2.1}$$

Como estamos interessados em obter a relação entre as velocidades, derivamos no tempo a Eq.(2.1) e $\dot{\vec{R}} = \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r'}}$, o que pode ser representado como $\dot{x_p} = \dot{x_p}' + \dot{x_w}$, onde os subíndices p e w representam respectivamente a partícula e a parede móvel. Assim, no instante imediatamente antes da colisão (t_n), temos $v'_{p_{antes}} = v_p(t_n) - v_w(t_n)$. No instante imediatamente depois da colisão (t_{n+1}) temos que

$$v'_{p_{depois}} = -v'_{p_{antes}} \ , \tag{2.2}$$

onde esta relação define a "lei de reflexão". Substituindo a expressão de $v'_{p_{antes}}$ na Eq.(2.2), obtemos $v'_{p_{depois}} = -(v_p(t_n) - v_w(t_{n+1}))$. Voltando agora para o referencial inercial onde podemos escrever a relação com o instante imediatamente depois da colisão $v_p(t_{n+1}) = v'_{p_{depois}} + v_w(t_{n+1})$, como

$$v_{n+1} = -v_n + 2v_w(t_{n+1}) \ . \tag{2.3}$$

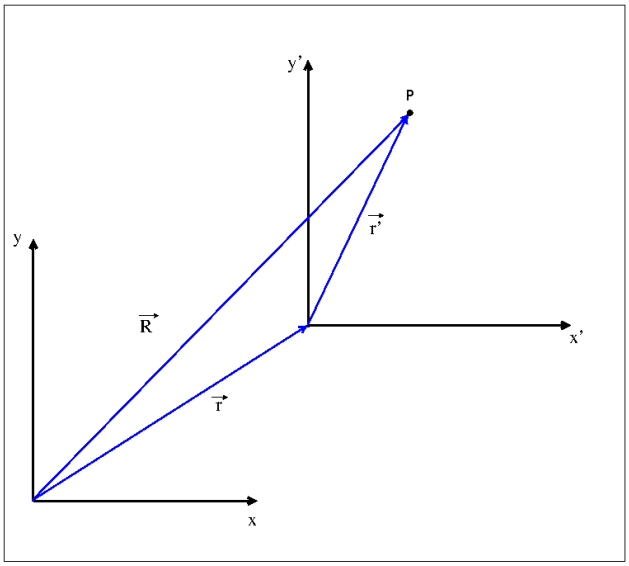

Figura 2.2: *Esquema ilustrativo de uma mudança de referencial inercial para referencial não-inercial.*

Versão Completa

O tempo de voo é definido como o tempo gasto pela partícula para ir de uma colisão com a parede móvel, até uma colisão com a parede fixa, e colidir novamente com a parede móvel. Definindo ainda algumas variáveis adimensionais e mais convenientes para a descrição da dinâmica como: $V_n = v_n/w\ell$, $\epsilon = \epsilon'/\ell$, medindo o tempo em função da fase da parede móvel $\phi_n = wt_n$ e considerando uma condição inicial (V_n, ϕ_n) com posição inicial da partícula dada por $x_p(\phi_n) = \epsilon\cos(\phi_n)$, a dinâmica é evoluída por um mapeamento T que nos fornece o seguinte par recorrente (V_{n+1}, ϕ_{n+1}) na $(n+1)$-ésima colisão com a parede móvel, podemos encontrar o mapeamento que se segue como

$$T_c : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - 2\epsilon\sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n] \mod(2\pi) \end{cases} . \tag{2.4}$$

As expressões de V_n^* e ΔT_n dependem do tipo de colisão que ocorre: (i) colisões múltiplas ou (ii) colisões simples. O caso de colisões múltiplas ocorre quando a partícula entra na zona de colisão, $x \in [-\epsilon, +\epsilon]$, colide com a parede móvel e, antes de sair da zona de colisão, a partícula sofre uma segunda colisão, ou eventualmente mais colisões dependendo da combinação de V_n e ϕ_n. Para este caso as expressões são $V_n^* = -V_n$ e $\Delta T_n = \phi_c$. O valor numérico de ϕ_c é obtido da solução da equação $G(\phi_c) = 0$, onde

$$G(\phi_c) = \epsilon\cos(\phi_n + \phi_c) - \epsilon\cos(\phi_n) - V_n^*\phi_c \ , \tag{2.5}$$

com $\phi_c \in (0, 2\pi]$. Entre duas colisões com a parede móvel, a partícula viaja com velocidade constante, uma vez que não há gradiente de potencial entre essas colisões. Então, a equação de movimento da partícula é dada por uma equação linear no tempo. A função $G(\phi_c)$ é obtida usando a condição onde $x_p(t) = x_w(t)$. Caso a função $G(\phi_c)$ não tenha raiz no intervalo $\phi_c \in (0, 2\pi]$, podemos concluir que a partícula saiu da zona de colisão, e colisões sucessivas não ocorrerão mais.

Considerando agora o caso de colisões simples, temos que $V_n^* = V_n$ e $\Delta T_n = \phi_r + \phi_l + \phi_c$, onde os termos auxiliares são $\phi_r = (1 - \epsilon\cos(\phi_n))/V_n$ e $\phi_l = (1 - \epsilon)/V_n$. A expressão ϕ_r denota o tempo que a partícula gasta viajando para a direita, até atingir a parede fixa. Então a partícula sofre uma colisão completamente elástica e é refletida de volta com velocidade $-V_n$. O termo ϕ_l denota o tempo que a partícula leva até entrar na zona de colisão viajando para o lado esquerdo. Finalmente, ϕ_c é numericamente obtido da solução da equação $F(\phi_c) = 0$ com $F(\phi_c)$ dado por

$$F(\phi_c) = \epsilon\cos(\phi_n + \phi_r + \phi_l + \phi_c) - \epsilon + V_n^*\phi_c \,. \tag{2.6}$$

A mesma argumentação usada para a função $G(\phi_c)$ também serve para a função $F(\phi_c)$. Então a Eq.(2.6) vem da condição em que a posição da partícula é a mesma da posição na parede móvel no instante do impacto. Ainda, para encontrar as raízes de ambas as equações $G(\phi_c)$ e $F(\phi_c)$, utilizamos o método da bisseção [124].

Versão Simplificada

A versão simplificada do modelo, assume que a parede móvel seja considerada fixa no instante da colisão com a partícula. Contudo, consideramos trocas de energia e momentum, entre a parede e a partícula, como se a mesma estive movendo-se normalmente. A versão simplificada se fez muito útil, quando os computadores eram um pouco lentos. Sendo assim, definimos o mapeamento simplificado como

$$T_s : \begin{cases} V_{n+1} = |V_n - 2\epsilon\sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \frac{2}{V_n}] \mod(2\pi) \end{cases} . \tag{2.7}$$

O módulo na primeira equação da velocidade está presente, pois nessa versão velocidades negativas são proibidas. Esta versão retém a não linearidade do sistema, e ainda permite que resultados analíticos sejam obtidos com maior facilidade. Por fim, análises de relações com outros mapeamentos, como o mapa padrão, são muito mais simples com a versão simplificada, do que com a completa.

2.1.2 Propriedades caóticas

A Figura 2.3 mostra o espaço de fases para três diferentes valores de ϵ, para 50 condições iniciais diferentes. Podemos ver que o espaço de fases basicamente apresenta estrutura do

tipo mista para todos os valores de ϵ utilizados, onde um mar de caos aparece no regime de baixa energia (velocidade), e então uma cadeia de ilhas de estabilidade surge com o aumento da velocidade. Definimos aqui baixa energia, partículas que tenham velocidade da ordem de ϵ. Ainda, encontramos a primeira curva invariante *(First invariant spanning curve - FISC)*, que limita o crescimento do mar de caos, consequentemente limita o crescimento da velocidade. Esta é a razão de não observarmos difusão ilimitada na dinâmica do modelo. A posição da FISC varia de acordo com ϵ. Uma aproximação analítica para a sua posição pode ser feita, comparando o mapa simplificado dado na Eq.(2.7), adicionado de uma pequena perturbação, com o mapeamento padrão, assim como feito para uma família de mapas Hamiltonianos [116, 117, 118]. Sendo assim, encontramos a primeira curva invariante no eixo das velocidades de acordo com

$$V_{FISC} = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{K_c}} \approx 2\sqrt{\epsilon}\,, \tag{2.8}$$

onde ϵ é o parâmetro de controle do modelo FUM e K_c é o parâmetro crítico do mapa padrão. Analisando o espaço de fases misto do modelo FUM, percebemos que dependendo da condição

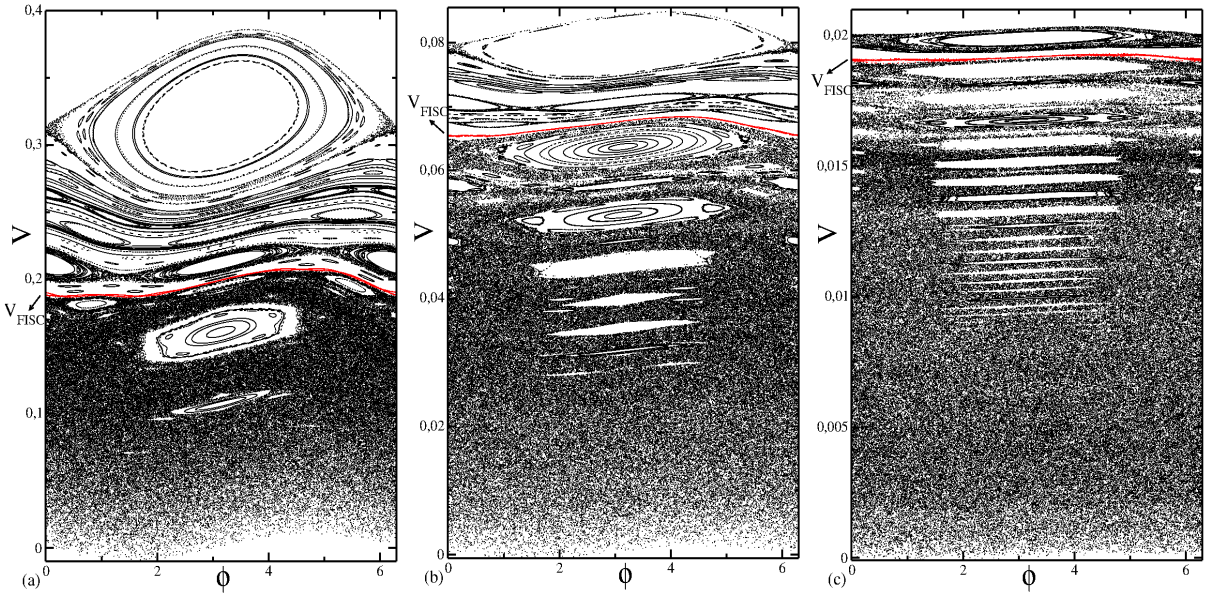

Figura 2.3: *Espaço de fases para o modelo completo Fermi-Ulam. Em (a)* $\epsilon = 10^{-2}$*, em (b)* $\epsilon = 10^{-3}$*, e em (c)* $\epsilon = 10^{-4}$.

inicial, podemos ter tipos distintos de dinâmica. Se uma partícula possui velocidade inicial acima de V_{FISC}, dependendo da condição inicial, a mesma poderá se encontrar em uma órbita periódica, quase periódica, ou ainda localmente caótica. Pode-se perceber esses comportamentos olhando a Fig.2.3(a), na região acima de V_{FISC}. No entanto, se a velocidade inicial for fornecida abaixo de V_{FISC}, a partícula possui regiões mais amplas para percorrer em sua dinâmica. Esse último regime dinâmico, se mostra mais interessante de se estudar, pois é bem possível que encontremos fenômeno de *stickiness* ao longo da evolução temporal, pois temos a

coexistência de ilhas de estabilidade e mar de caos. Ainda, podemos dizer que nessa dinâmica, possuímos um espaço de fases limitado com fronteira superior V_{FISC} e fronteira inferior $V = 0$ (podemos ter velocidade negativas, até $-\epsilon$, porém, com a simetria no eixo das fases, podemos considerar essa contribuição nula).

Neste espaço podemos caracterizar alguns pontos fixos de período-1, como $V_{n+1} = V_n = V^*$, e $\phi_{n+1} = \phi_n = \phi^* + 2m\pi$, de acordo com o mapeamento dado na Eq.(2.4). Assim, obtemos V^* e ϕ^* como

$$\phi^* = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \pi \end{array} \right\} , V^* = \frac{1 - \epsilon \cos(\phi^*)}{m\pi} , \tag{2.9}$$

onde para as ilhas de estabilidade, devemos considerar $\phi^* = \pi$, assim $V^* = (1 + \epsilon)/m\pi$, onde m é um número inteiro, com $m = 1, 2, 3....$ Ainda, para garantir que estamos lidando com os pontos fixos elípticos, é necessário que $|Tr\ J| < 2$ [18], onde J é a matriz Jacobiana do sistema, avaliada nos pontos fixos. Desta maneira, encontramos que

$$m \geq \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}} . \tag{2.10}$$

Conhecendo a expressão do primeiro ponto fixo elíptico, podemos então estimar a posição da primeira ilha de estabilidade de período-1 (FSIP1) *(fisrt stability island of period-1)* no espaço fases de acordo com o valor de ϵ. Mais detalhes sobre a obtenção do mapeamento, análise de pontos fixos e equações da matriz Jacobiana, podem ser encontradas na Ref.[125].

2.2 Análise Estatística

Nesta seção faremos uma análise estatística da dinâmica do FUM, considerando propriedades médias da velocidade quadrática, onde podemos prever analiticamente, como será a dinâmica e comparar com os resultados numéricos. Também calculamos o decaimento de tempos de correlação, para dois ensembles opostos de energias. Vimos que o fenômeno de *stickiness* se faz presente em ambos os sistemas, no entanto se comporta de maneira distinta, quando existe um maior número de ilhas de estabilidade influenciando na dinâmica.

2.2.1 Velocidade quadrática média (V_{RMS})

Em uma primeira abordagem, a variável velocidade é a mais interessante a ser estudada, portanto investigamos propriedades médias da velocidade. Assim, tomando a expressão da velocidade no mapeamento simplificado (embora no modelo completo a análise seria basicamente a mesma) dada pela Eq.(2.7), elevando ao quadrado ambos os lados e realizando uma média, temos que $\overline{(V_{n+1})^2} = \overline{(V_n)^2} - \overline{4V_n\epsilon\sin(\phi_{n+1})} + \overline{4\epsilon^2\sin^2(\phi_{n+1})}$. Considerando a média em um ensemble uniformemente distribuído no intervalo de $\phi \in [0, 2\pi]$ nos termos dependentes de ϕ, que é zero no termo do $\sin(\phi_{n+1})$, e igual à $1/2$ no termo do $\sin^2(\phi_{n+1})$, e definindo que

$(\Delta V)^2 = \overline{(V_{n+1})^2} - \overline{(V_n)^2}$, temos que

$$(\Delta V)^2 = 2\epsilon^2 \ . \tag{2.11}$$

Como em nossa dinâmica verificamos as propriedades da velocidade no intervalo entre colisões, tomamos a expressão de $(\Delta V)^2$ no intervalo entre colisões. Aqui podemos extrapolar e interpretar esse intervalo como o menor possível, e como uma variável de integração [122, 123], onde podemos aproximar que

$$\frac{\overline{(V_{n+1})^2} - \overline{(V_n)^2}}{(n+1) - n} \approx \frac{\partial \overline{V^2}}{\partial n} \ . \tag{2.12}$$

Integrando ambos os lados temos que

$$\int_{V_0}^{V_n} d\overline{V^2} = \int_0^n 2\epsilon^2 dn \ \ \rightarrow \overline{(V_n)^2} = (V_0)^2 + 2\epsilon^2 n \ . \tag{2.13}$$

Podemos ainda definir

$$V_{RMS} = \sqrt{\overline{V^2}} \ , \tag{2.14}$$

e assim, encontramos uma expressão analítica para a velocidade com o passar das colisões,

$$V_{RMS} = \sqrt{(V_0)^2 + 2\epsilon^2 n} \ . \tag{2.15}$$

Salientamos que essa expressão não é sempre válida, e deve somente ser aplicada para n "pequenos"($n \propto 1/\epsilon$).

Conhecida a expressão analítica para a velocidade, vamos então comparar com o caso numérico [111]. Assim, iteramos computacionalmente a expressão

$$\overline{V^2} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} {V_{i,j}}^2 \ , \tag{2.16}$$

onde M é o ensemble de condições iniciais, e n é o número de iterações. Aqui, realizamos a média ao longo da órbita e ao longo do ensemble de condições iniciais. Ainda, evoluímos condições iniciais sempre escolhidas dentro do mar de caos, tanto com altas energias, onde $V_0 \approx V_{FISC}$; quanto de baixas energias, com $V_0 \approx \epsilon$.

A Figura 2.4, mostra as curvas de V_{RMS} calculadas ao longo de um ensemble de 1000 condições iniciais, escolhidas em ambas as regiões de alta e baixa energia no mar de caos e iteradas até 10^6 colisões com a parede móvel. Percebe-se que as curvas de diferentes velocidade iniciais, para o mesmo parâmetro de controle ϵ, convergem para a mesma região de velocidade final no limite $n \rightarrow \infty$.

Analisando as curvas de V_{RMS}, podemos ver que basicamente as que possuem ensembles

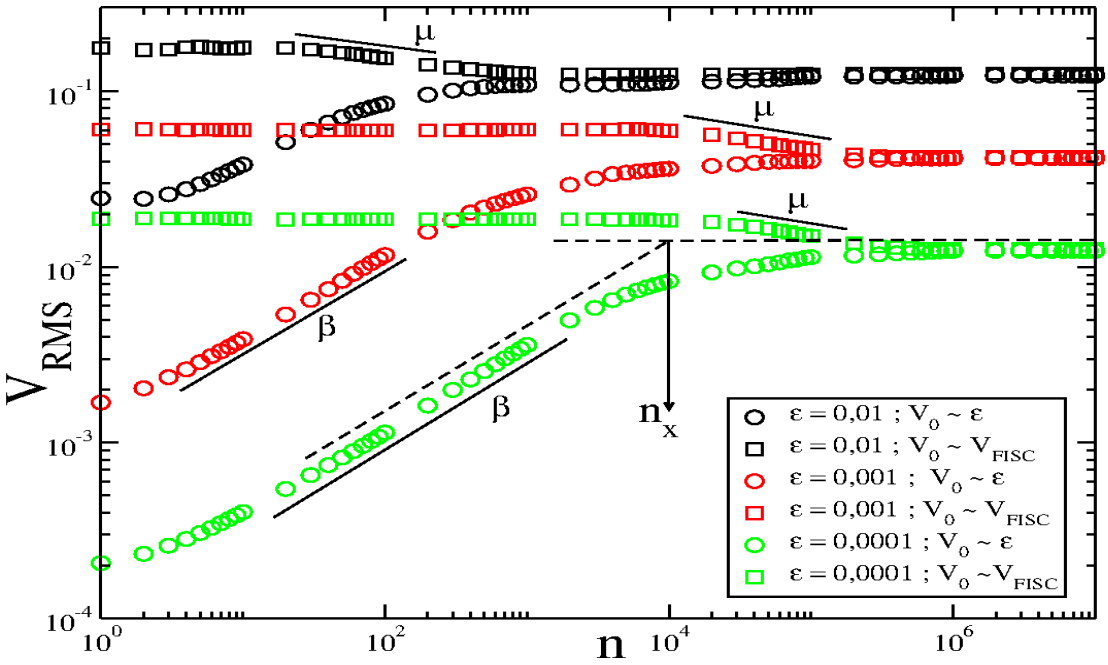

Figura 2.4: *Curvas de V_{RMS} para o modelo Fermi-Ulam, para diferentes valores de ϵ. Para baixas energias temos que as curvas de V_{RMS} apresentam crescimento de acordo com $\sqrt{n}$ para tempos curtos, passam por um* crossover *(n_x) e tendem a um regime de saturação para tempos longos. Já para altas energias, as curvas de V_{RMS} tem um regime inicial decaimento linear muito suave, depois passam por um* crossover *com decaimento em lei de potência $\mu \cong 0.1$, e tendem para tempos longos com mesmo platô de saturação que as curvas de V_{RMS} iniciadas com $V_0 \approx \epsilon$.*

de velocidades iniciais no regime de baixa energia, apresentam um regime de crescimento, caracterizado por uma lei de potência de acordo com n^{β}, onde $\beta \approx 1/2$ para tempos curtos, e depois passam por um *crossover*, onde tendem a um platô de saturação para tempos longos. Tal regime, se mostrou anteriormente invariante de escala para as versões completa e simplificada [126]. Podemos perceber ainda, que no regime ${V_0}^2 \approx 0$, o termo dominante na expressão dada na Eq.(2.15) é $V_{RMS} = \sqrt{2\epsilon^2 n}$, confirmando portanto que $\beta = 1/2$.

Já as curvas com ensemble inicial de velocidade em altas energias, tipicamente próximo a curva invariante observamos um decaimento linear muito suave para a dinâmica inicial, depois um decaimento em lei de potência $n^{-\mu}$, com expoente $\mu \cong 0,1$, seguido por um platô de saturação basicamente na mesma região, onde as curvas com ensemble de baixa energia saturam. Comparando com a expressão analítica da Eq.(2.15) onde $V_0 \approx V_{FISC} \approx 2\sqrt{\epsilon}$, temos que dentro da raiz quadrada, o termo $4\epsilon >> 2\epsilon^2 n$ para tempos curtos. Isso explica o platô inicial quase constante, com decaimento linear, até que a ordem de grandeza de $2\epsilon^2 n$ começa a dominar e mudar a dinâmica. Notemos ainda, que dependendo do parâmetro ϵ esse fenômeno pode demorar a acontecer.

Ainda, para ambos os ensembles de velocidade inicial as curvas de V_{RMS} convergem para

uma mesma região. Tal região de convergência depende do parâmetro ϵ. Foi interessante observar que essa região de saturação comum para ambos os ensembles de alta e baixa energia, é aproximadamente a metade do valor da região delimitada entre V_{FISC} e 0, não importando a velocidade inicial escolhida. Nesse caso então, podemos dizer que a velocidade final de convergência para tempos muito longos, ou seja no estado estacionário V_{SS} *(stationary state)* é aproximadamente

$$V_{SS} = \frac{V_{FISC}}{2} \; = \; \sqrt{\frac{\epsilon}{K_c}} \approx \sqrt{\epsilon} \; , \tag{2.17}$$

onde, podemos escrever esse platô de saturação como $\propto \epsilon^{1/2}$. Tal expoente $1/2$, coincide com o expoente de escala encontrado, na análise via formalismo de escala para a região de saturação de V_{RMS} [111, 126, 127].

2.2.2 Probabilidade de sobrevivência e influência de *stickiness*

Nesta Tese de Doutoramento, estamos interessados em saber como o fenômeno de *stickiness* afeta algumas propriedades dinâmicas, sendo assim, uma pergunta natural, seria se o *stickiness* afeta propriedades da velocidade média, ou de transporte no sistema. Como sabemos para onde a dinâmica convergirá, para tempos longos, faremos uso da técnica de introduzir buracos nos sistema, onde podemos estudar propriedades de transporte ao longo do espaço de fases do tipo misto e fazer uma análise estatística da difusão caótica. Sendo assim, introduzimos um buraco distinto para cada regime de velocidade inicial. Para o ensemble inicial de baixa energia, colocamos um buraco no espaço de fases um pouco abaixo de V_{SS}, chamado de H_d *(hole down)*. Já para o ensemble inicial de altas energia, introduzimos o buraco no espaço de fases um pouco acima de V_{SS}, denominado H_u *(hole up)*.

Basicamente, a dinâmica com buraco funciona da seguinte maneira. Ao evoluirmos uma condição inicial de qualquer ensemble de energia, a mesma tenderá, com o passar o tempo, a se estabelecer próximo da região de V_{SS}. Assim, com o buraco introduzido, no caso do ensemble de baixa energia, consideramos que a condição inicial escapou, se a velocidade da órbita for maior que H_d. Da mesma forma, consideramos que a órbita escapou se no ensemble de alta energia, a velocidade da órbita for menor do que H_u. A partir daí, salvamos cada condição inicial que escapou em um vetor, e também, a iteração n, na qual o escape ocorreu, e construímos um histograma para o escape. Assim, podemos caracterizar diferentes tipos de transporte, quando o escape ocorre de maneira rápida, ou se ele se dá de maneira lenta.

A análise estatística cumulativa para distribuição dos tempos de recorrência é obtida através da integração do histograma para o escape de partículas. Essa distribuição cumulativa de recorrência também pode ser chamada como probabilidade de sobrevivência e é escrita como

$$P_{surv} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} N_{rec}(j) \; , \tag{2.18}$$

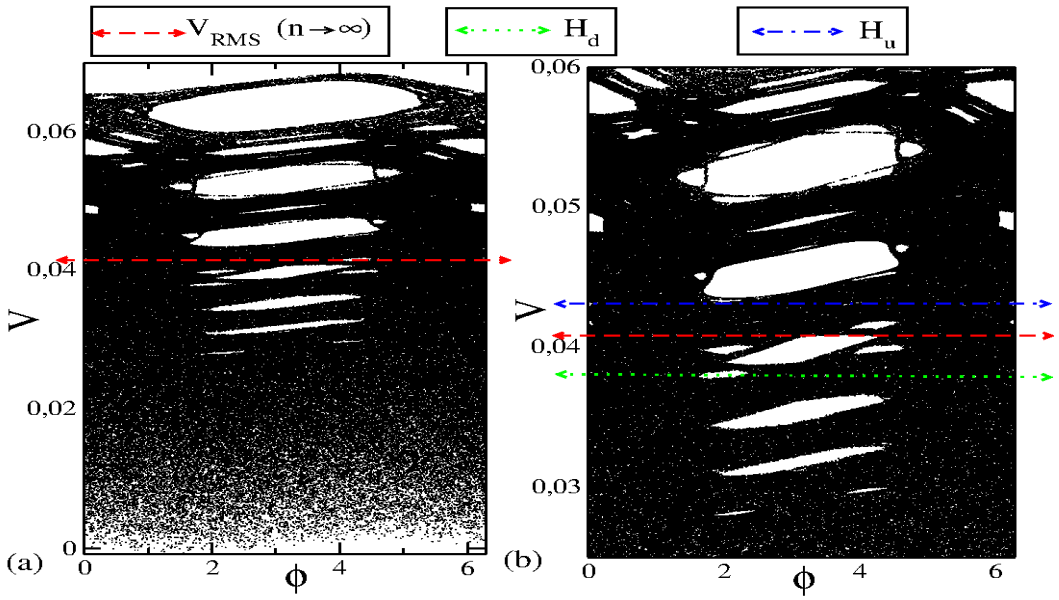

Figura 2.5: *Em (a) temos o espaço de fases para* $\epsilon = 0,001$*, e em (b) uma ampliação de região de alta energia de (a). Ainda evidenciamos a posição de ambos os buracos* H_u *e* H_d*, e também do valor de* V_{RMS} *estacionária para* $n \to \infty$*.*

onde o somatório é feito ao longo de um ensemble de $N = 10^6$ condições iniciais distintas. O termo $N_{rec}(j)$ representa o número de condições iniciais que não escaparam pelo buraco colocado, ou seja, recorreram, até a j-ésima colisão [38]. O ensemble de condições iniciais foi definido sempre no mar de caos, tomando o extremo cuidado ao definir a faixa de condições iniciais para a variável da fase, para garantir que não estamos escolhendo nenhuma condição que por ventura, estaria dentro de alguma ilha de estabilidade. Caso isso ocorresse, a estatística ficaria comprometida, uma vez que queremos estudar órbitas que em princípio tenham um comportamento caótico, ou quase regular (*stickiness*). Ainda, P_{surv} desempenha o mesmo papel da grandeza $\rho(\vec{r}, t)$, apresentada na Sec.1.3, mas agora as variáveis seriam a velocidade V, e o número de colisões n, ao invés da variável de ação genérica $\vec{r}$ e do tempo t.

Já é conhecido na literatura, que se um sistema apresenta algum comportamento caótico, as curvas de P_{surv} possuem um decaimento exponencial [38]. Entretanto, quando temos estrutura mista no espaço de fases, isto é, ilhas *KAM*, curvas invariantes e mares de caos, as curvas de P_{surv} podem apresentar distintos comportamentos de decaimento, onde podemos incluir: *(i)* decaimento em lei de potência [39], ou *(ii)* decaimento em exponencial esticada [54, 55]. Basicamente, o decaimento exponencial, indica que as órbitas estão em um regime caótico, e escapam mais rapidamente. Já para um decaimento em lei de potência e em exponencial esticada, podemos notar um escape mais lento, onde órbitas em regime de *stickiness* acabam exercendo uma certa influência para o escape. Essas órbitas, quando passam muito perto da ilha de estabilidade, acabam ficando aprisionadas durante um tempo ao redor da ilha, causando

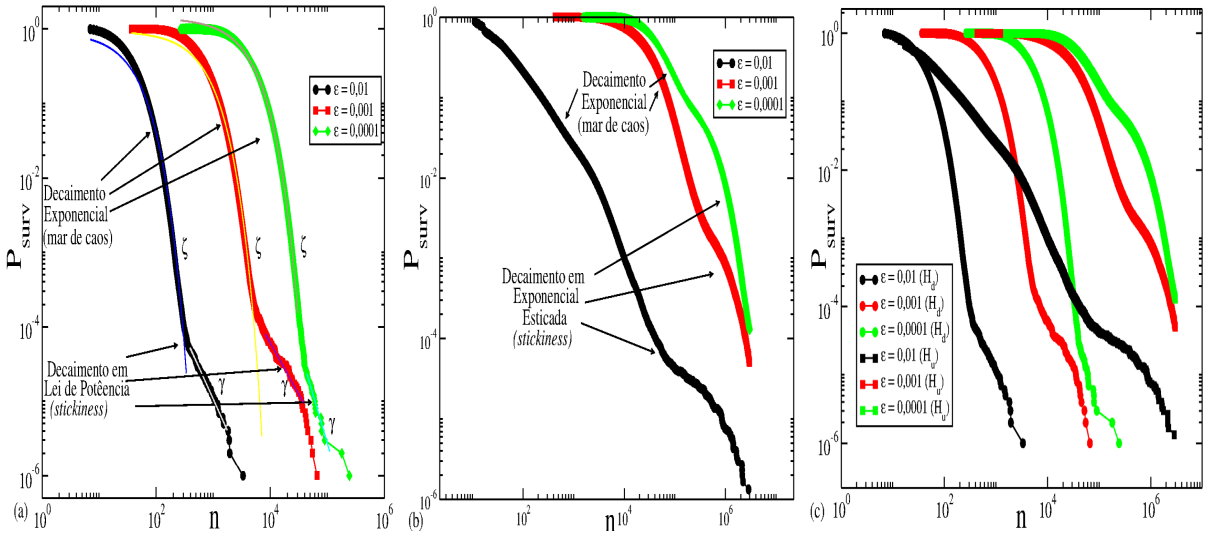

Figura 2.6: *Curvas de probabilidade de sobrevivência para o modelo FUM para alguns valores de ϵ. Em (a) escolhemos o escape no buraco (H_d) para o ensemble de baixas energias, onde basicamente, todas as curvas decaem exponencialmente, seguidas por uma lei de potência. Em (b) foi escolhida como condição de escape no buraco (H_u) para o ensemble de altas energias, onde as curvas apresentam decaimento com formato de exponencial esticada. Em (c) temos a comparação entre os decaimentos.*

um "atraso"notável para a difusão normal das órbitas no mar de caos. Para o modelo Fermi-Ulam, que possui estrutura mista no espaço de fases, as curvas de P_{surv} podem apresentar ambos os decaimentos dependendo do valor do parâmetro de controle ϵ, da posição escolhida para o buraco, ou seja, o valor de V_{hole} e também do conjunto de condições iniciais escolhidas, como é mostrado na Fig.2.6(a). Quando considerado o escape pelo primeiro buraco (H_d) para o ensemble de baixas energias, observamos um decaimento exponencial das curvas de P_{surv}, seguido por uma lei de potência. Logicamente, esse decaimento é esperado, uma vez que a posição do buraco escolhido está um pouco acima de V_{SS}. Ainda, mesmo com apenas algumas ilhas de estabilidade no espaço delimitado para a dinâmica, o fenômeno de *stickiness* se faz presente e influencia o decaimento.

Quando escolhemos o segundo buraco (H_u), podemos notar na Fig.2.6(b) que o decaimento exponencial existe, ocorre de maneira bem mais lenta, o qual chamamos de exponencial esticada [54, 55], e pode ser descrito da seguinte maneira

$$P_{surv} \propto Ce^{-\alpha n^y} \ , \tag{2.19}$$

onde em princípio C, α e y são constantes não negativas, e y determina o quanto "esticada"é a exponencial. Tal decaimento, assim como a lei de potência, é uma assinatura da influência do fenômeno de *stickiness* no sistema. Ainda podemos perceber a diferença entre os decaimentos na Fig.2.6(c), onde para o ensemble de altas energias e com escape H_u, temos um decaimento

bem mais lento, do que quando consideramos o ensemble de baixas energias com escape em H_d.

Não se sabe ainda se existe alguma correlação entre a quantidade de ilhas e a frequência do fenômeno de *stickiness*. Pois, quando consideramos ensembles de altas energias, temos mais ilhas de estabilidade influenciando a dinâmica, do que no ensemble de baixas energias, como mostra a Fig.2.5, onde $\epsilon = 0,001$. Estamos atualmente considerando a relação entre o número de ilhas e *stickiness*. É um trabalho ainda em aberto, porém em desenvolvimento [128].

2.3 Transporte e Difusão

Uma vez que o fenômeno de *stickiness* está presente em ambos os ensembles, escolhemos o de baixa energia para tentar caracterizar algumas propriedades relacionadas a transporte e difusão, uma vez que os decaimentos de correlação se mostram do tipo mais convencional (exponencial), e não do tipo exponencial esticada. Primeiramente, faremos um tratamento analítico na resolução da equação de difusão, considerando a introdução de buracos no espaço de fases. Depois faremos uma análise numérica, considerando propriedades estatísticas da velocidade. Os nossos resultados, dizem que o tratamento analítico é confirmado pelo procedimento numérico.

2.3.1 Tratamento analítico

Como visto na introdução, analisando propriedades de transporte de partículas, encontramos a equação de difusão [38, 40], dada por

$$\frac{\partial \rho(v,n)}{\partial n} = D\nabla^2 \rho(v,n) \ , \tag{2.20}$$

onde agora a variável de ação é a velocidade. Para resolver a Eq.(2.20) vamos fazer uso da técnica de resolução de EDO, chamada método de separação de variáveis, onde podemos reescrever $\rho(v,n) = V(v)T(n)$. Desta maneira temos que

$$T'(n)V(v) = DV''(v)T(n) \ , \tag{2.21}$$

onde $T'(n)$ é a primeira derivada da função separável $T(n)$, D é o coeficiente de difusão e $V''(v)$ é a segunda derivada da função separável $V(v)$.

Separando as variáveis, podemos encontrar as seguintes igualdades

$$\frac{T'(n)}{T(n)} = D\frac{V''(v)}{V(v)} = \zeta \ , \tag{2.22}$$

onde ζ é uma constante arbitrária.

Resolvendo a equação Eq.(2.22) considerando primeiramente apenas a variável n, encontramos

$$T(n) = C_1 e^{-\zeta n} \ , \tag{2.23}$$

onde C_1 é uma constante. Tomando agora os termos da Eq.(2.22) relacionados com a variável da velocidade, podemos obter

$$\frac{V''(v)}{V(v)} = -\frac{\zeta}{D} = -\eta^2 \ . \tag{2.24}$$

Vamos supor que a função $V(v)$ seja do tipo combinação linear de senos e cossenos.

$$V(v) = A\cos(\eta v) + B\sin(\eta v) \ , \tag{2.25}$$

onde A e B são contantes a serem definidas. Derivando a Eq.(2.25) e assim podemos obter $V'(v)$ e $V''(v)$

$$\begin{aligned} V'(v) &= -A\eta\sin(\eta v) + B\eta\cos(\eta v) \ , \\ V''(v) &= -A\eta^2\cos(\eta v) - B\eta^2\sin(\eta v) \ . \end{aligned}$$

Consideramos agora duas condições de contorno para o nosso escape

$$\frac{\partial\rho(v,n)}{\partial v} = 0 \ , \tag{2.26}$$

onde, quando $v = 0$ temos que $V'(0) = 0$, logo

$$\rho(v,n) = 0 \ , \tag{2.27}$$

quando $v = v_{hole}$. Esta condição nos diz que $V(v_{hole}) = 0$, sendo v_{hole} a velocidade pré-definida para o escape das partículas. Fisicamente, podemos interpretar essas duas condições de contorno descritas nas Eqs.(2.26) e (2.27) respectivamente como sendo a conservação de partículas da amostragem inicial, e pela distinção da divisão do espaço de fases em partículas que escaparam e partículas que não escaparam, partir do momento que atingiram a velocidade limite de escape pré-definida. Aplicando a condição de contorno descrita pela Eq.(2.26) na relação de $V'(v)$, encontramos que $B = 0$. Fazendo procedimento similar agora com a segunda condição de contorno, definida na Eq.(2.27) e aplicando esta na relação de $V(v)$, definida na Eq.(2.25), e já considerando que $B = 0$, podemos obter a seguinte relação

$$A\cos(\eta v_{hole}) = 0 \ . \tag{2.28}$$

Ao expandirmos a Eq.(2.28) em série de Fourier, considerando que seja satisfeita a condição não trivial $(A \neq 0)$ e com o argumento da função cosseno ηv_{hole} seja sempre um valor onde o

cosseno se anula, podemos dizer que

$$\eta v_{hole} = \pi \left(m + \frac{1}{2} \right) \ , \eta v_{hole} = \frac{l\pi}{2} \ , \tag{2.29}$$

onde l é o índice do somatório da expansão em série de Fourier, considerando somente os termos ímpares, como $l = 1, 3, 5, ...$ Lembrando da Eq.(2.24), onde $\eta^2 = \frac{\zeta}{D}$, podemos obter o expoente ζ, em função do coeficiente de difusão D, da velocidade de escape (v_{hole}) e do índice de somatório da expansão de Fourier como

$$\zeta = \frac{(l\pi)^2 D}{4 v_{hole}^2} \ . \tag{2.30}$$

Desta maneira podemos reescrever a expressão de $\rho(v,t) = V(v)T(n)$ como a combinação das Eqs.(2.24), (2.25),(2.27), (2.28) e (2.30), e ainda considerando a troca de notação de $v_{hole} = h$ e a troca do índice de somatório da expansão de série de Fourier de l para $(k + 1/2)$, onde ao invés de considerarmos somente os termos ímpares, podemos agora contar com todos os termos da expansão. Desta maneira obtemos

$$\rho(v,n) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \left[\frac{v\pi}{h} \left(k + \frac{1}{2} \right) \right] \exp \left[\frac{-\pi^2 D n}{h^2} \left(k + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \ , \tag{2.31}$$

onde o expoente de difusão é definido como

$$D = \frac{4 (v_{hole})^2 \zeta}{\pi^2 \left(k + 1/2 \right)^2} \ , \tag{2.32}$$

onde, podemos ter várias ordens de aproximação para k.

A expressão fornecida pela Eq.(2.31) nos fornece uma relação analítica da probabilidade de sobrevivência para o ensemble de baixas energia, quando condicionamos o sistema a um "vazamento"através do buraco H_d [118]. Vale a pena ressaltar, que a Eq.(2.31) descreve bem o comportamento das curvas de P_{surv} apenas enquanto o decaimento é exponencial. Para o caso, onde a dinâmica evolui através do espaço de fases misto, a resolução da equação de difusão se torna muito mais complicada e ainda é considerada um problema em aberto.

2.3.2 Tratamento Numérico

Quando avaliamos o transporte e a difusão [38, 40] para sistemas caóticos, a expressão encontrada que relaciona a variável de ação do sistema, com a difusão é:

$$< r(n)^2 >= \int r(n)^2 \rho(\vec{r}, n) d^3 r = 2Dn \ , \tag{2.33}$$

onde r é a variável de ação do sistema, D é o expoente de difusão, n é o número de iterações e $\rho(\vec{r}, n)$ é a distribuição de probabilidades de um sistema. Para o caso do modelo FUM, podemos utilizar na expressão fornecida pela Eq.(2.33), os resultados já obtidos previamente na equação de $< (\Delta V)^2 >= 2\epsilon^2$, para obter uma aproximação numérica do coeficiente de difusão, onde no caso a nossa variável de ação é a velocidade da partícula. Assim, após cada iteração calculamos o valor da velocidade quadrática média, ou dispersão, como

$$< \Delta V^2 >= \lim_{NP\to\infty} \frac{1}{NP} \sum_{i=1}^{NP} ({V_n}^i - {V_0}^i)^2 \ , \tag{2.34}$$

onde NP é o número de partículas que estamos utilizando, o índice i marca as NP partículas utilizadas e V_n é a posição após n iterações da i-ésima partícula. O coeficiente de difusão, coerentemente com o que foi estabelecido na Eq.(2.33), é

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} < \Delta V^2 > \ . \tag{2.35}$$

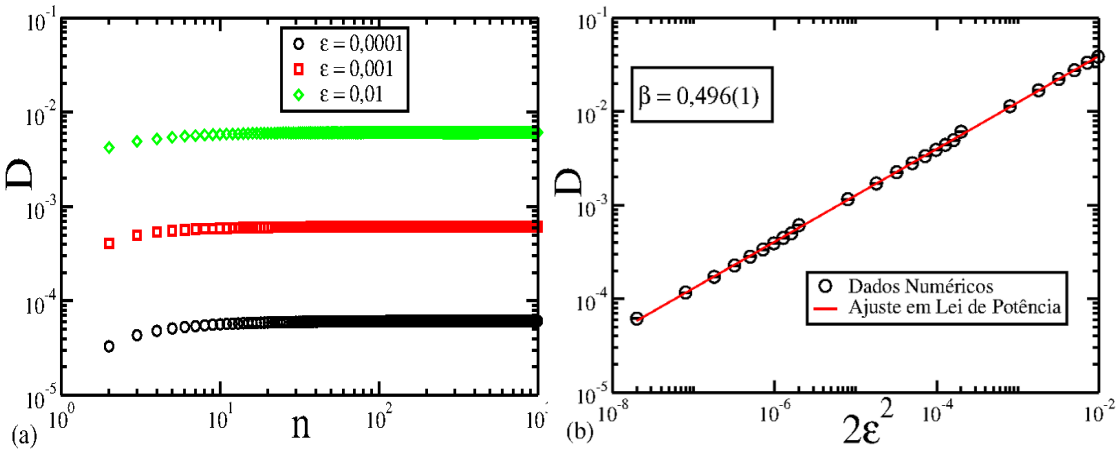

Figura 2.7: *Em (a) temos o comportamento do coeficiente de difusão em função de n para alguns parâmetros ϵ, no ensemble de baixas energias. Em (b) temos o comportamento do coeficiente de difusão D e sua relação de proporcionalidade com $2\epsilon^2$. Um ajuste em lei de potência com expoente $\beta \approx 1/2$ é obtido, confirmando assim, o expoente de crescimento.*

A Figura 2.7(a) mostra os coeficientes de difusão, obtidos pelas Eq.(2.35) ao longo do número de colisões. Quando comparamos a proporcionalidade da difusão com $< (\Delta V)^2 >$, ou seja $D \propto 2\epsilon^2$ como mostrado na Fig.2.7(b), encontramos o mesmo expoente de crescimento $\beta \approx 1/2$. O que era de se esperar, pois estamos avaliando a dinâmica, para o ensemble de baixa energia, ou seja, no tempo inicial a partícula está errante no mar de caos, e difunde como no processo difusivo normal [40], ou seja $\propto \sqrt{n}$ [115, 122, 123, 129].

A título de comparação, usaremos agora a expressão da difusão obtida na Eq.(2.32), onde no regime de baixa energia, consideramos 10 buracos distintos igualmente espaçados a partir de 2ϵ ao longo do eixo da velocidade, até valor de V_{FSIP1}. Essas posições dos buracos estão

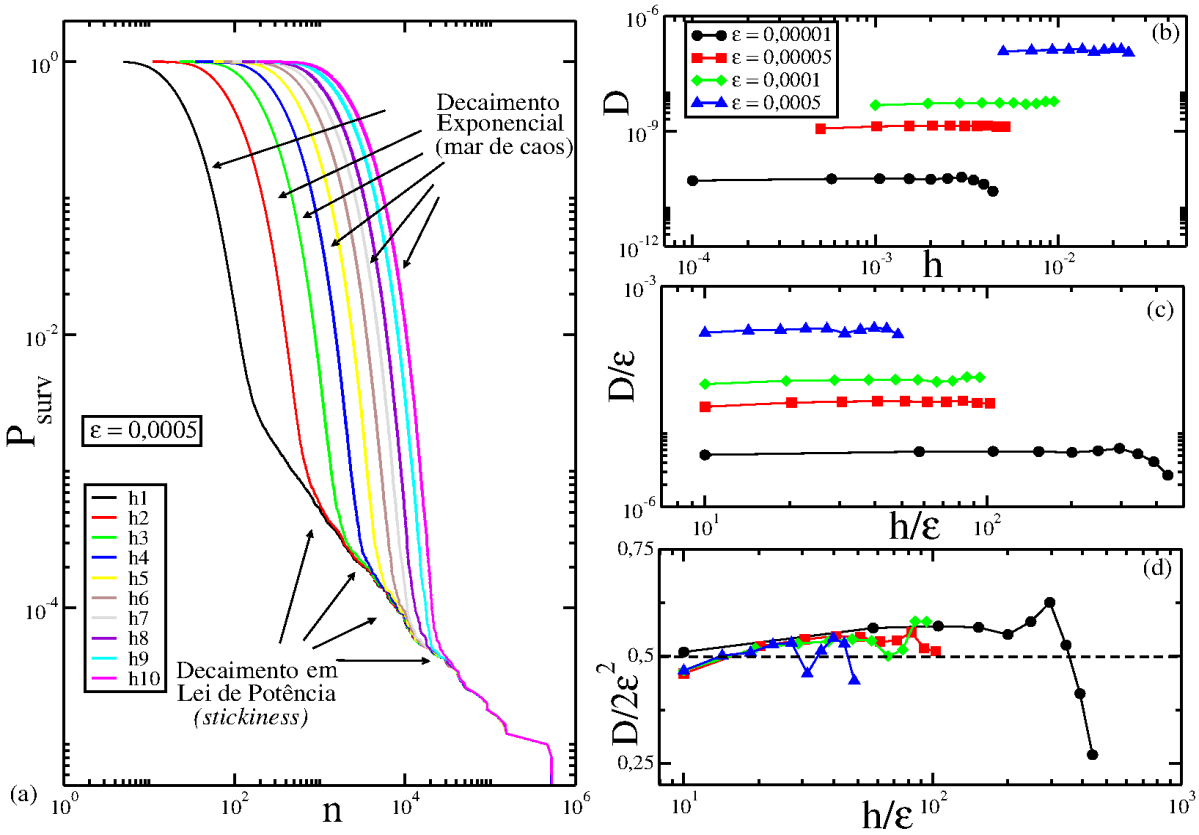

Figura 2.8: *Em (a) temos curvas de P_{surv} para 10 buracos distintos, para $\epsilon = 0,0005$. Em (b), temos o comportamento do coeficiente de difusão analítico, em função dos buracos h. Em (c) temos uma renormalização dos buracos pelo parâmetro ϵ; e finalmente em (d), temos uma sobreposição dos valores do coeficiente de difusão para os 10 buracos, onde confirmamos o expoente $1/2$ como fator normalizador da dinâmica em baixas energias.*

sempre abaixo de V_{SS}. Assim, conseguimos um bom ajuste exponencial (ζ) no decaimento da probabilidade de sobrevivência, como mostra a Fig.2.8(a). Aqui consideramos a evolução de 10^6 condições iniciais de baixa energia, iteradas até 10^6 colisões. Podemos ver ainda, que conforme aumentamos o buraco, ou seja, aumentamos o tamanho do mar de caos para a partícula difundir, o expoente do decaimento exponencial diminui. Ainda, podemos notar a influência de *stickiness* nessas curvas, onde para tempos longos temos decaimento em lei de potência. Esse decaimento é causado por ilhas secundárias no espaço de fases, uma vez que estamos em uma região com poucas ilhas.

Já na Fig.2.8(b) mostramos o valor do coeficiente de difusão já calculado para os 10 buracos, para alguns valores de ϵ, pela análise analítica, dada na Eq.(2.32). Na Fig.2.8(c), renormalizamos os eixos da difusão e dos buracos pelo parâmetro ϵ. E, finalmente, na Fig.2.8(d), usamos o parâmetro de renormalização $2\epsilon^2$, para obter um colapso de difusão, independentemente do buraco h analisado. Podemos perceber que encontramos uma reescala em torno de $1/2$ (linha tracejada), o que era esperado pelos resultados analíticos e numéricos mostrados anteriormente. Ainda, para altas posições do buraco h, temos uma pequena oscilação nessa reescala. Isso também é de se esperar, pois quanto mais subimos no espaço de fases no eixo da velocidade,

ilhas de estabilidade secundárias e as de período-1 começam a aparecer, e temos o fenômeno de *stickiness* presente, que acaba influenciando o expoente de difusão, causando anomalias nas propriedades de difusão e transporte.

2.4 Conclusões parciais

A dinâmica de uma partícula confinada entre duas paredes, uma delas sendo fixa e outra periodicamente perturbada no tempo foi estudada. Um mapeamento bidimensional é obtido, onde encontramos espaço de fases misto e curvas invariantes impedem o crescimento do mar de caos. Analisamos a expressão da velocidade quadrática média, conseguimos estimar analiticamente o comportamento da dinâmica ao longo do tempo, para os ensembles de alta e baixa energia.

Estudando o decaimento de curvas de probabilidade de sobrevivência para ambos os ensembles, percebemos que o fenômeno de *stickiness* está presente na dinâmica, e acaba influenciando de maneira distinta os decaimentos nos ensembles. Para baixas energias, onde temos regime de poucas ilhas de estabilidade, o decaimento de curva de probabilidade de sobrevivência é exponencial para tempos curtos e em lei de potência para tempos longos, como é mais usual na literatura. No entanto, para altas energias, existem mais cadeias de ilhas de regularidade, e para esse caso, o decaimento de curvas de probabilidade de sobrevivência é do tipo exponencial esticada. Ainda, é feita uma análise analítica e numérica para o comportamento da difusão no mar de caos, onde os resultados coincidem muito bem, fornecendo expoente de crescimento $\beta = 1/2$.

Os resultados apresentados nesse capítulo estão em processo final de preparação para submissão [127, 128].

Capítulo 3

Modelo *Bouncer*

Neste capítulo detalharemos o comportamento da dinâmica do modelo Bouncer. Na Sec.3.1 relatamos todos os detalhes para a obtenção do mapeamento da dinâmica, e listamos algumas propriedades caóticas e conexões com o mapa padrão. O fenômenos de aceleração de Fermi e a caracterização de modos aceleradores, são descritos na Sec.3.2. Propriedades de recorrência e transporte, são estudadas na Sec.3.3, onde via método de expoentes de Lyapunov a tempo finito e análise de probabilidade de sobrevivência, constatamos que órbitas em regime de stickiness *exercem influência na dinâmica, ao ponto de serem consideradas um mecanismo de retardo para a difusão ilimitada da velocidade. Finalmente, algumas conclusões e perspectivas são dadas na Sec.3.4.*

3.1 O modelo e o mapeamento

A motivação para estudarmos o modelo *Bouncer*, está em descrever o fenômeno de aceleração de Fermi. Em 1949, o físico italiano Enrico Fermi [88], estudava o comportamento da iteração dos raios cósmicos de altas energias com campos magnéticos oscilantes. Ele percebeu, que na média, a energia das partículas tendia ao crescimento. Esse fenômeno de crescimento de energia foi chamado de *aceleração de Fermi*. Desta maneira, o modelo *Bouncer* pode ser interpretado como uma versão do acelerador de Fermi, onde a partícula livre faz o papel das partículas cósmicas de altas energias, o campo gravitacional constante funciona como mecanismo de re-injeção da partícula à zona de colisão e a parede movendo-se periodicamente no tempo desempenha a mesma função dos campos magnéticos oscilantes.

A dinâmica do modelo será descrita nas variáveis velocidade da partícula livre (v_n) e o tempo em que ocorre uma colisão (t_n). Descrevemos também a equação que governa o movimento da parede móvel como sendo $y_w(t_n) = \varepsilon \cos(\omega t_n)$, onde ε e ω representam respectivamente a amplitude e a frequência de oscilação da parede móvel. Como no modelo FUM, podem ocorrer ainda dois tipos de colisões entre a partícula e a parede móvel: *(i)* colisões indiretas e *(ii)* colisões sucessivas. No caso *(i)* de colisões indiretas, a partícula ao sofrer uma colisão, sai

da chamada zona de colisão $y_w \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, sobe até uma altura máxima e desce, sob a ação do campo gravitacional, para uma nova colisão com a parede móvel. Por outro lado, no caso *(ii)* colisões sucessivas ocorrem quando, após uma colisão a partícula não abandona a zona de colisão, e sofre uma colisão novamente. Este processo pode se repetir muitas vezes. A Figura 3.1 mostra um esquema ilustrativo do modelo *Bouncer*.

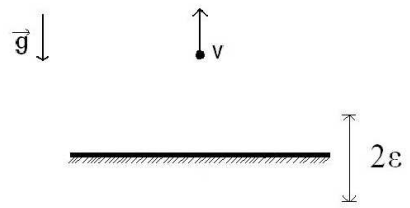

Figura 3.1: *Esquema ilustrativo do modelo* Bouncer.

3.1.1 Mapa Completo

Vamos descrever primeiramente o caso de colisões indiretas. Supomos que no instante $t_n = 0$, a posição da partícula seja a mesma da parede móvel, $v_n = v_0 > 0$. Devemos obter agora o momento da próxima colisão. A equação da posição da partícula em função do tempo é dada por: $y_p(t_n) = y_0 + v_n(t_n) - \frac{1}{2}g{t_n}^2$, onde $y_0 = y_w$, representa que a partícula acabou de sair de uma colisão. Através da equação da velocidade da partícula onde $\dot{y_p}(t_n) = v_n - gt_n$, podemos encontrar o tempo de subida (t_s) da partícula até atingir uma altura máxima onde sua velocidade é zero. Esse tempo de subida escrito como t_s, é dado como

$$t_s = \frac{v_n}{g} \,. \tag{3.1}$$

Devemos também determinar a altura máxima que a partícula atinge, até que sua velocidade seja nula $y_p^{max} = \varepsilon \cos(\omega t_n) + v_n t_s - \frac{1}{2}g{t_s}^2$. Assim, obtemos

$$y_p^{max} = \varepsilon \cos(\omega t_n) + \frac{1}{2}\frac{{v_n}^2}{g} \,. \tag{3.2}$$

Para encontrar o tempo de descida até a entrada da zona de colisão, usaremos a equação de Torricelli ${v_f}^2 = {v_0}^2 + 2g\Delta y$, onde $\Delta y = (\varepsilon - y_p^{max})$ e v_f é a velocidade de entrada na zona de colisão, que denotaremos por v_{ent}. Lembrando sempre que a velocidade inverte de sinal ao longo do movimento de descida, com isso podemos descartar a solução matemática positiva e expressar v_{ent} como

$$v_{ent} = -\sqrt{2g(y_p^{max} - \varepsilon)} \,. \tag{3.3}$$

Utilizando a expressão de v_{ent} na equação da velocidade da partícula $\dot{y}_p(t_n) = v_{ent} - gt_d$, podemos encontrar o tempo de descida (t_d) até a entrada na zona de colisão, como

$$t_d = \frac{v_{ent}}{-g} \ . \tag{3.4}$$

Assim, encontramos uma expressão para o tempo total (t_t), para a partícula sair de uma colisão, atingir uma altura máxima e entrar novamente na zona de colisão, que é a soma do tempo de subida com o tempo de descida. Assim, $t_t = t_s + t_d$. Para que ocorra uma colisão é necessário que $y_w = y_p$, onde y_p tem que estar de acordo com o momento em que a partícula entra na zona de colisão, e na equação de y_w, devemos levar em consideração todo o tempo gasto pela partícula até uma nova colisão, assim temos

$$y_p = y_w \quad \Rightarrow \qquad \varepsilon \cos[\omega(t_n + t_t + t_c)] = \varepsilon + v_{ent}t_c - \frac{1}{2}g{t_c}^2 \ , \tag{3.5}$$

onde t_c é o chamado tempo de colisão.

Desta forma, obtemos uma equação transcendental $F(t)$, onde o instante de colisão t_c é a raiz desta equação

$$F(t_c) = \varepsilon \cos(t_n + t_t + t_c) - \varepsilon - v_{ent}t_c + \frac{1}{2}g{t_c}^2 \ , \tag{3.6}$$

onde $t_c \in [0, \frac{2\pi}{\omega}]$ e $F(t_c) = 0$.

Considerando o tempo total gasto entre as colisões podemos escrever para o caso de colisões indiretas, a seguinte relação de recorrência no tempo $t_{n+1} = t_n + t_s + t_d + t_c$. Para o caso, onde ocorrem colisões sucessivas, como a partícula não deixa a zona de colisão, não é necessário levar em conta o tempo de subida e descida da partícula, então a relação de recorrência no tempo é $t_{n+1} = t_n + t_c$.

Descrevendo de maneira semelhante, o processo de mudança de referencial inercial para referencial não inercial feito no capítulo 2 para o modelo FUM, obtemos a velocidade da partícula após a colisão como sendo

$$v_{n+1} = -v_n + gt_c - \varepsilon\omega \sin(\omega t_{n+1}) \ . \tag{3.7}$$

Analisando as expressões de recorrência para o tempo e para a velocidade em ambos os casos de colisões, percebemos que temos três parâmetros de controle para levar em consideração: ε que é a amplitude de oscilação da parede móvel; g que representa o campo gravitacional e ω indicando a frequência de oscilação da parede móvel. Podemos então definir um conjunto de variáveis adimensionais, como: $V_n = \frac{v_n\omega^2}{g}$, $\epsilon = \frac{\varepsilon\omega^2}{g}$ e medindo o tempo como $\phi = \omega t$, obtemos

o seguinte mapeamento para o modelo *Bouncer*

$$T_c : \begin{cases} V_{n+1} = -V_n^* + \phi_c - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + \Delta T_n] \mod(2\pi) \end{cases} , \tag{3.8}$$

onde as expressões de V_n^* e ΔT_n dependem do tipo de colisão, e o parâmetro ϵ é interpretado fisicamente como razão de acelerações, entre a parede vibrante e o campo gravitacional.

Para o caso de colisões sucessivas $V_n^* = V_n$ e $\Delta T_n = \phi_c$. O termo ϕ_c é obtida da solução da equação transcendental $G(\phi_c) = 0$, onde

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_c) - \epsilon \cos(\phi_n) - V_n \phi_c + \frac{1}{2}\phi_c^2 , \tag{3.9}$$

com $\phi_c \in (0, 2\pi]$. Quando temos o caso de colisões indiretas $V_n^* = -\sqrt{V_n^2 + 2\epsilon(\cos(\phi_n) - 1)}$ e $\Delta T_n = \phi_s + \phi_d + \phi_c$ com $\phi_s = V_n$ denotando tempo de subida da partícula até chegar ao ponto de velocidade nula e $\phi_d = \sqrt{V_n^2 + 2\epsilon(\cos(\phi_n) - 1)}$ corresponde ao tempo de descida da partícula até a entrada na zona de colisão. Finalmente, o termo ϕ_c deve ser obtido numericamente a partir da expressão $F(\phi_c) = 0$ onde

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_u + \phi_d + \phi_c) - \epsilon - V_n^* \phi_c + \frac{1}{2}\phi_c^2 , \tag{3.10}$$

com $\phi_c \in [0, 2\pi)$.

Mapa Simplificado

Podemos ainda obter uma outra versão do mapeamento, chamada de versão simplificada, onde a parede é considerada fixa e nenhuma equação transcendental precisa ser resolvida para se obter o instante da colisão. Ainda, nessa versão, consideramos que a troca de momentum entre a partícula e a parede, ocorre como se a parede estivesse se movendo. Tal cálculo é obtido de maneira similar ao realizado na mudança de referencial inercial para não-inercial. Sendo assim, o tempo de subida será igual ao tempo de descida.

$$t_s = t_d = \frac{v_n}{g} . \tag{3.11}$$

O tempo total então é calculado como $t_t = 2v_n/g$. Utilizando-se da mesma estratégia de descrever o mapeamento nas variáveis adimensionais, e já considerando a troca de momentum entre parede e partícula, podemos escrever o mapeamento simplificado como sendo:

$$T_s : \begin{cases} V_{n+1} = |V_n - 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})| \\ \phi_{n+1} = [\phi_n + 2V_n] \mod(2\pi) \end{cases} , \tag{3.12}$$

O módulo é necessário, pois se a velocidade da partícula for negativa, fisicamente seria representado como se a partícula tivesse atravessado a parede, uma vez que esta encontra-se parada na versão simplificada.

3.1.2 Propriedades Caóticas

A versão simplificada, se mostrou muito útil no passado quando os computadores eram demasiadamente lentos, pois as simulações numéricas com esse tipo de dinâmica eram mais rápidos. No entanto, com o avanço da tecnologia e a velocidade de processamento de microprocessadores, a dinâmica completa torna-se aplicável. A matriz Jacobiana é dada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} \\ \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} & \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} \end{pmatrix} , \tag{3.13}$$

onde para a versão completa da dinâmica, no caso de colisões sucessivas, as derivadas parciais se apresentam como

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= -(1 - \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}) - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} , \\
\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} , \\
\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} , \\
\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1 + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} .
\end{aligned}$$

As derivadas $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$, são obtidas derivando implicitamente a equação transcendental $G(\phi_c)$. Já no caso da versão completa, considerando colisões indiretas, temos as derivadas parciais da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= -(\frac{\partial V_{ent}}{\partial V_n} - \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}) - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} , \\
\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= -(\frac{\partial V_{ent}}{\partial \phi_n} - \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}) - 2\epsilon \cos(\phi_{n+1}) \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} , \\
\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= 1 - \frac{\partial V_{ent}}{\partial V_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial V_n} , \\
\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1 - \frac{\partial V_{ent}}{\partial \phi_n} + \frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n} .
\end{aligned}$$

Onde $\frac{\partial V_{ent}}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial V_{ent}}{\partial \phi_n}$ são obtidos derivando implicitamente V_{ent} em relação a V_n e a ϕ_n respectivamente; e $\frac{\partial \phi_c}{\partial V_n}$ e $\frac{\partial \phi_c}{\partial \phi_n}$, são obtidos derivando implicitamente a função $F(\phi_c)$ em relação a V_n e ϕ_n respectivamente. Quando consideramos a versão simplificada, as derivadas são calculadas

como:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_{n+1}}{\partial V_n} &= 1 - 2\epsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n}\ , \\
\frac{\partial V_{n+1}}{\partial \phi_n} &= -2\epsilon\cos(\phi_{n+1})\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n}\ , \\
\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial V_n} &= 2\ , \\
\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \phi_n} &= 1\ .
\end{aligned}
$$

Ao calcularmos o determinante da matriz Jacobiana, para ambas as versões, percebemos que esses determinantes apresentam expressões distintas. Por construção, o sistema é conservativo, e se espera que o determinante nesse caso seja unitário [18], para que ocorra presenvação de área no espaço de fases. Essa propriedade é observada no caso da versão simplificada no modelo, onde $Det\ J = 1$. No entanto, para a versão completa, o determinante obtido foi

$$
\text{Det J} = \left[\frac{V_n + \epsilon\sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon\sin(\phi_{n+1})}\right]\ . \tag{3.14}
$$

Tal diferença entre os determinantes da versão simplificada e completa, tem uma explicação [18]. Quando consideramos a dinâmica completa, as variáveis levadas em consideração são y_w (posição da parede móvel), v_p (velocidade da partícula), E_p (energia da partícula) e o tempo. Os pares canônicos para as variáveis são (x_w, v_p) e (E_p, t). Da maneira que o mapeamento foi construído, não foi levada em conta os pares canônicos das variáveis, pois as variáveis do mapeamento são velocidade da partícula (v_p) e o tempo. Assim, o $Det\ J$ nunca será igual a unidade para esse par de variáveis, mesmo que por construção o mapa seja conservativo. Já quando consideramos a versão simplificada, as variáveis analisadas se tornam as canônicas, pois a posição da parede é sempre fixa, e a energia da partícula, pode ser entendida somente como a componente de energia cinética, diretamente relacionada com a velocidade. Para esse caso em particular, é como se estivéssemos analisando as variáveis canônicas, por isso, o $Det\ J = 1$. Entretanto, o modelo completo preserva a seguinte medida no espaço de fases $d\mu = (V + \epsilon\sin(\phi))dVd\phi$ [115].

Conexão com mapa padrão

Ao avaliarmos a dinâmica em função do parâmetro de razão de acelerações ϵ, observamos que, quando $\epsilon = 0$, o sistema é integrável, já para $\epsilon \neq 0$, o sistema é não integrável. Além disso, quando $\epsilon_c \approx 0,2429$, o sistema apresenta outra transição de comportamento, de localmente caótico, para globalmente caótico, com estrutura do tipo mista no espaço de fases, com ilhas *KAM* imersas no mar de caos [18]. Tal transição é análoga a que encontramos no mapeamento padrão [12]. Inclusive, podemos obter o mapa padrão a partir da versão simplificada do modelo

Bouncer. Fazendo $I_n = 2V_n$, $K = 4\epsilon$ e $\theta_n = \phi_{n+1} + \pi$, recuperamos o mapa padrão descrito como

$$T_{std} : \begin{cases} I_{n+1} = I_n + K\sin(\theta_n)| \\ \theta_{n+1} = [\theta_n + I_{n+1}] \quad mod(2\pi) \end{cases} , \tag{3.15}$$

que é o mesmo mapeamento da Eq.(1.8) onde o parâmetro K, controla a não linearidade do sistema. Para o valor $K_c \approx 0,9716$, temos o análogo $\epsilon_c \approx 0,2429$, já que $K = 4\epsilon$ [114].

Podemos observar a evolução do espaço de fases em função de ϵ na Fig. 3.2, onde vemos dois tipos de regimes. O primeiro se dá para $0 < \epsilon < \epsilon_c$, onde o sistema apresenta uma mundança de localmente caótico para globalmente caótico em $\epsilon = \epsilon_c$. A segunda ocorre para $\epsilon > \epsilon_c$, nesta, os pontos fixos estáveis, representados pelas ilhas de estabilidade se tornam instáveis a medida que aumentamos o valor de ϵ.

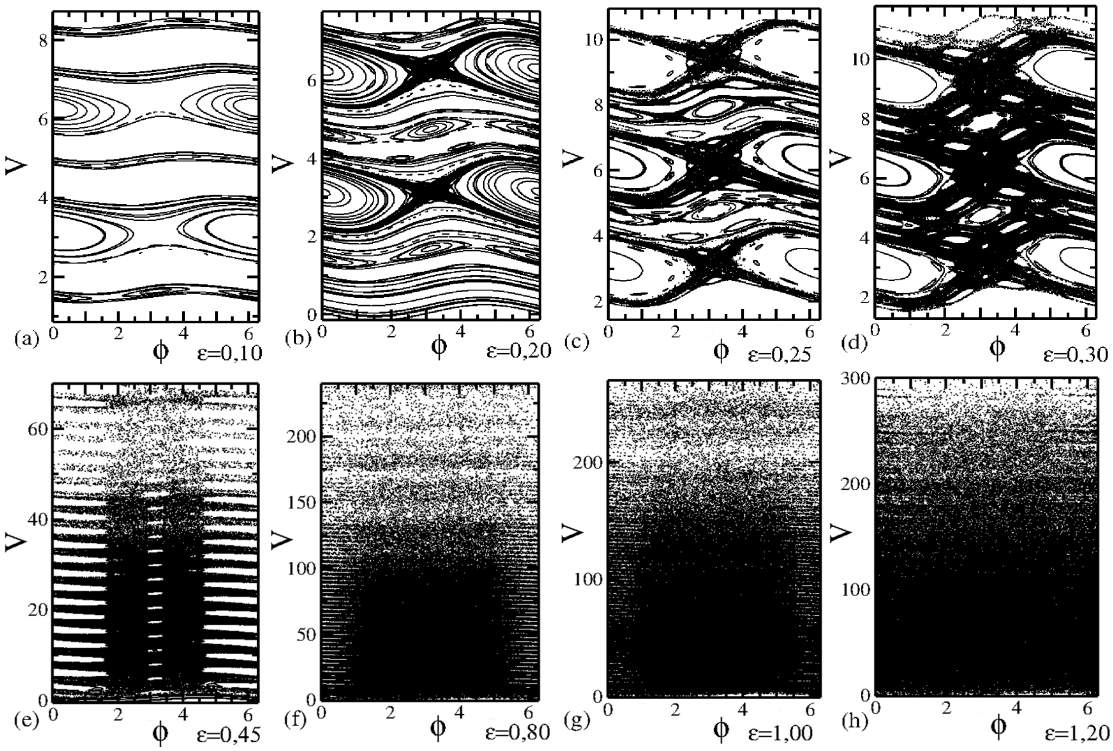

Figura 3.2: *Espaço de fases para o modelo* Bouncer *considerando a versão completa.*

Como mostra a Fig. 3.2, para $\epsilon < \epsilon_c \approx 0,2429$ o espaço de fases possui curvas invariantes do tipo *spanning* (também conhecidas como toros invariantes) e o crescimento ilimitado de energia, que caracteriza a aceleração de Fermi não é observado. Já para $\epsilon > \epsilon_c$, essas curvas são destruídas, permitindo difusão ilimitada em V e o fenômeno de aceleração de Fermi ocorre. Além disso, podemos também observar que os pontos fixos sofrem uma série de mudanças na estabilidade. Esses pontos fixos são obtidos da seguinte maneira para o período 1: $V_{n+1} = V_n = V^*$ e $\phi_{n+1} = \phi_n = \phi^* + 2m\pi$, assim, podemos identificá-los como

$$V^* \quad = \quad \pi l \quad , \quad l = 1, 2, \ldots \tag{3.16}$$

$$\phi^* \quad = \quad \arcsin\left(\frac{\pi m}{2\epsilon}\right) \quad , \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.17}$$

Ao analisarmos a estabilidade linear dos pontos fixos de período 1 através do cálculo dos autovalores da matriz Jacobiana, encontramos a seguinte expressão

$$(2\pi m)^2 < 16\epsilon^2 < 16 + (2\pi m)^2 \ . \tag{3.18}$$

Este resultado nos fornece os intervalos onde as órbitas periódicas são estáveis para valores arbitrários de ϵ. O primeiro intervalo ($m = 0$), diz que para $0 < \epsilon < 1$, os pontos fixos de período 1 são estáveis. Para o próximo intervalo, ($m = 1$), encontramos que em $\epsilon = \pi/2$ começa um novo intervalo onde os pontos fixos são estáveis, e para $\epsilon > \sqrt{1 + \pi^2/4}$ eles se tornam instáveis. Tomando agora os pontos fixos de período 2, obtidos como $V_{n+2} = V_n = V^*$ e $\phi_{n+2} = \phi_n = \phi^* + 2m\pi$, e aplicando procedimento semelhante, podemos encontrar que as janelas de periodicidade para os pontos fixos de período 2 estão compreendidas entre

$$(2\pi)^2(p-1)^2 < 16\epsilon^2 < (2\pi)^2(p-1)^2 + 4 \ , \tag{3.19}$$

onde $p = l - m$.

Afim de compreender melhor como essas mudanças de estabilidade dos pontos fixos alteram a dinâmica do modelo, podemos construir um espaço de fases com a variável velocidade modulada em π. Ao observarmos a Fig.3.2(a,b,c,d,e) vemos que a estrutura de ilhas de estabilidade é repetida em múltiplos de π. A Figura3.3 mostra os espaços de fases para os mesmos parâmetros da Fig.3.2, com o eixo vertical $V\ (mod(\pi))$. Vale salientar que ambas as Figs. 3.2 e 3.3 são simulações numéricas considerando a dinâmica do modelo completo, e que a tolerância usada na solução das equações transcendentais $F(\phi_c)$ e $G(\phi_c)$ foi de 10^{-12}. Além disso, as velocidades iniciais usadas para a construção da Fig. 3.3 foram escolhidas, de modo que seu valor mínimo estivesse fora da região de estabilidade $V \in [0, 2\epsilon]$.

Como podemos ver nas Figs.3.2 e 3.3, o sistema apresenta uma dinâmica bastante rica, com mudanças na estrutura no espaço de fases. Alguns fenômenos em particular podem ser observados nessa dinâmica. É o caso de órbitas em regime de *stickiness*, modos aceleradores e crescimento ilimitado de energia, além de algumas propriedades de transporte caótico. Vamos falar de cada um desses fenômenos em separado nas próximas seções.

3.2 Aceleração de Fermi

Ao avaliarmos a mundança de comportamento quando $\epsilon \approx \epsilon_c$, observamos uma transição de caos local para caos global. Tal mundança se deve ao fato das curvas invariantes *spanning* serem destruídas, permitindo assim a união dos mares de caos locais, como é ilustrado nas Figs. 3.3(c,d). Avaliando a dinâmica em função do número de colisões, notamos que a velocidade,

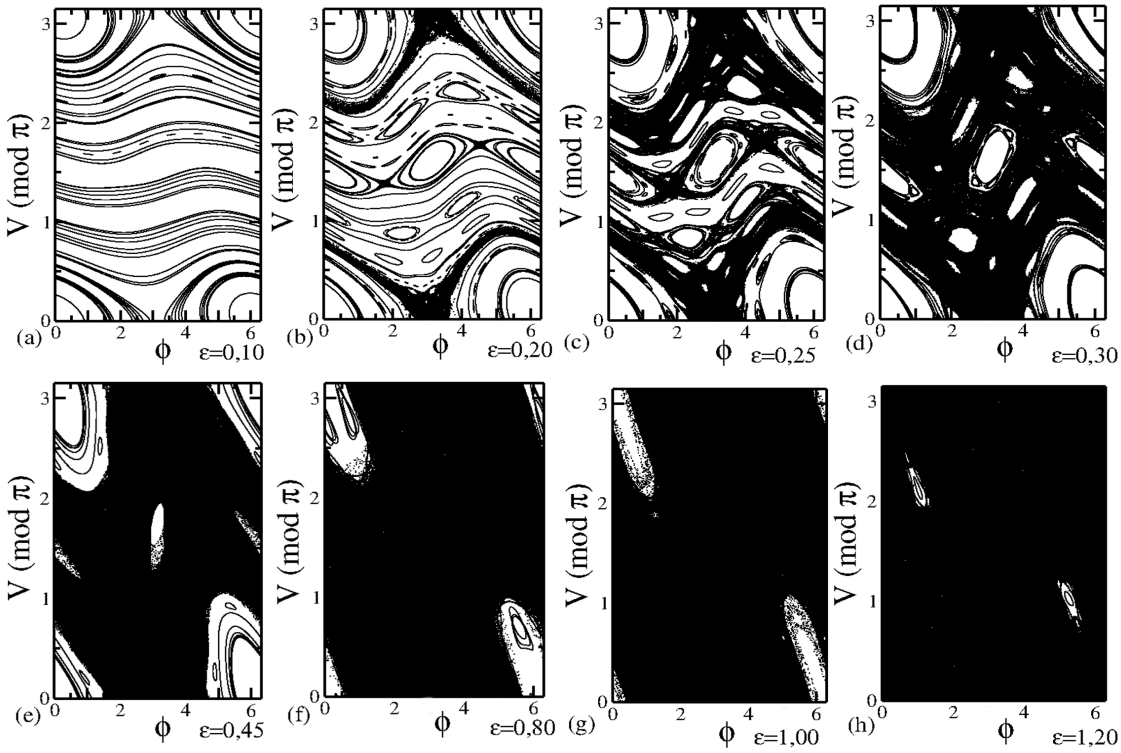

Figura 3.3: *Espaço de fases para o modelo* Bouncer *considerando a versão completa com o eixo das velocidades representado como* $V\ mod(\pi)$.

exibe uma tendência de crescimento. Tal comportamento é mostrado na Fig.3.4(a,b), para diversos valores do parâmetros $\epsilon > \epsilon_c$ iterados até 10^7 colisões, onde a velocidade média é mostrada no eixo vertical, e calculada considerando 1000 condições iniciais distintas.

3.2.1 Modos Aceleradores e Desaceleradores

Podemos notar dois regimes distintos de crescimento. Em um deles, V_{RMS} cresce com n de acordo com uma lei de potência com expoente $\beta_1 \approx 1/2$. O outro regime de crescimento, obedece uma lei de potência com expoente de crescimento $\beta_2 \approx 1$. Além da diferença no expoente de crescimento, temos também a diferença na ordem de grandeza da velocidade. Enquanto, o crescimento normal, a velocidade não ultrapassa a barreira dos 10^4, a velocidade que cresce com expoente $\beta_2 \approx 1$, atinge valores muito altos, inclusive, algumas ordens de grandeza maior, chegando até 10^7. Em particular, podemos ainda observar uma transição entre os dois tipos de crescimento. Na Figura 3.4(b), para os valores de $\epsilon = 1,2$ e $\epsilon = 1,4$, a curva de V_{RMS} começa em um regime de crescimento com β_1 e após aproximadamente 10^4 colisões, muda para o regime de crescimento em β_2.

Esse crescimento na velocidade, tem interpretação física. Para o primeiro regime de crescimento com β_1, dizemos que a partícula está sob a influência do fenômeno de aceleração de Fermi, ou crescimento ilimitado de energia. Ainda, o expoente de crescimento em lei de potência $\beta_1 \approx 1/2$ é característico desse fenômeno. Já para o segundo regime de crescimento,

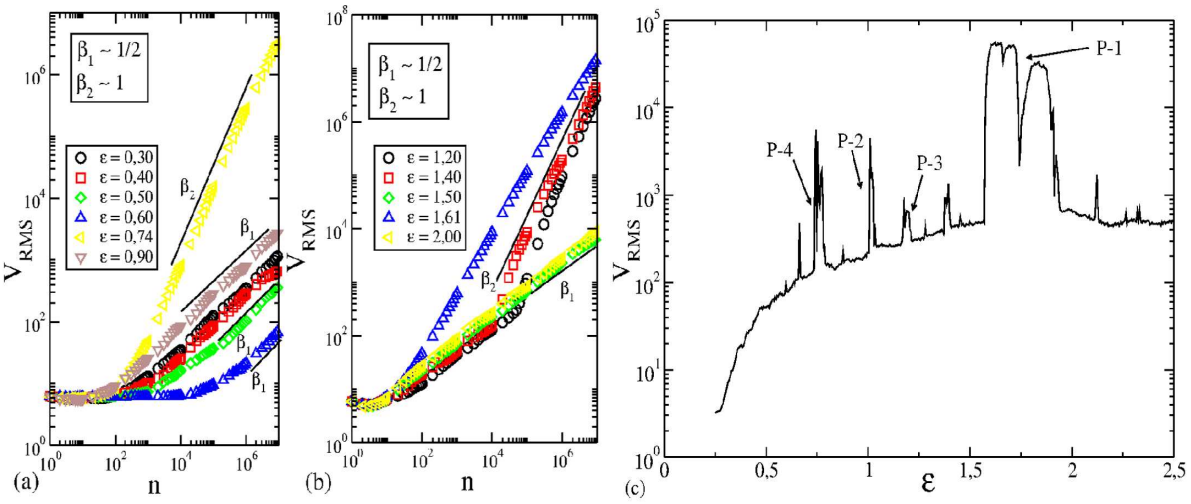

Figura 3.4: *Evolução de V_{RMS} da partícula para diversos valores do $\epsilon > \epsilon_c$. Em (a) e em (b) observamos dois tipos de crescimento. Algumas curvas crescem com expoente em lei de potência $\beta_1 \approx 1/2$, e outras curvas crescem com expoente $\beta_2 \approx 1$. Em particular ainda, podemos caracterizar a transição de um tipo de crescimento para o outro no item (b), para os casos onde $\epsilon = 1,2$ e $\epsilon = 1,4$. Já em (c), temos a faixa de parâmetros de ϵ onde podemos encontrar os modos aceleradores, responsáveis pelo crescimento de V_{RMS} com expoente β_2. Os picos mais acentuados, representam essas faixas, onde se localizam os modos aceleradores. Em particular, mostramos os períodos de cada faixa de parâmetros.*

encontramos a explicação no surgimento de modos aceleradores *(AM accelerator mode)* no sistema, ou modos balísticos [130, 131]. Tais modos aceleradores, surgem no modelo com a característica de pontos assintoticamente estáveis. Basicamente, podemos definir ponto assintoticamente estável, como aquele que com o passar das iterações, a dinâmica converge para o ponto fixo. Assim, pelo fato de podermos avaliar a variável velocidade de maneira "repetitiva"em π, observamos essa convergência para o ponto. Entretanto, ao considerarmos o eixo das velocidades "aberto", a dinâmica no modo acelerador provoca um movimento contínuo e periódico no eixo das velocidades, ou seja, a velocidade sempre cresce.

No entanto, como podemos perceber das Figs.3.4(a,b), somente para alguns valores do parâmetro ϵ, encontramos os modos aceleradores. Afim de uma melhor caracterização desse fenômeno de crescimento diferenciado, plotamos um gráfico do valor final de V_{RMS} para as mesmas 200 condições inciais anteriores, iteradas até 10^4 colisões, em função do parâmetro ϵ. Tal curva é mostra na Fig. 3.4(c), onde podemos ver claramente a ocorrência dos modos aceleradores nos picos de velocidade em determinadas faixas do parâmetro de controle. Ainda, encontramos que eles apresentam periodicidade. Para um determinada faixa de parâmetros de controle ϵ, encontramos diversos períodos. Como o crescimento contínuo se dá em múltiplos de π, se a órbita no modo acelerador é de período 1, significa que ela tem um crescimento modulado em π, ou seja, a cada colisão sua velocidade aumenta uma unidade de π. Já se a órbita é de período 2, significa que temos que considerar duas colisões, para que a velocidade da partícula aumente seu módulo de π, e assim por diante com os outros períodos.

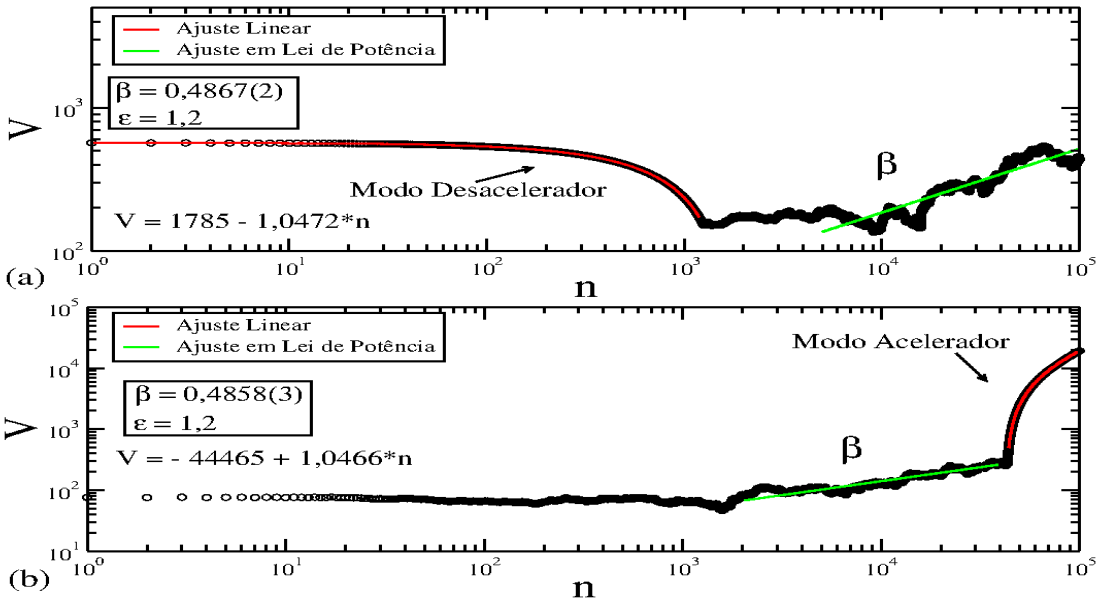

Figura 3.5: *Gráfico de V vs. n. Em (a) mostramos a evolução de uma órbita começando exatamente de um modo desacelerador, onde a velocidade decresce linearmente com inclinação $\pi/3$, até esta sair da zona de influência do modo desacelerador e passa a crescer com expoente de lei de potîncia $\beta = 0,4667(2)$. Em (b) a órbita segue um padrão de crescimento com expoente $\beta = 0,4458(3)$ e depois é atraída para o modo acelerador, onde sua velocidade passa a crescer linearmente, com expoente de crescimento $1,0466$.*

De uma maneira geral, quando consideramos o espaço de fases onde $V\ mod(\pi)$, os modos aceleradores podem ser considerados pontos fixos atrativos do sistema, ou seja, uma vez que uma órbita passa por sua região de influência, ela é atraída para esse ponto, ou seja, o modo acelerador é um ponto fixo classificado como assintoticamente estável. Analogamente, ao que ocorre no Terorema de Poincaré-Birkhoff [20, 25], onde na quebra de integrabilidade do sistema surgem pontos fixos aos pares, um deles sendo estável e o outro instável (ponto de sela); quando um modo acelerador aparece na dinâmica, juntamente com ele, se apresenta também um modo desacelerador, que seria interpretado como o seu par instável.

A figura 3.5 mostra a evolução de duas condições iniciais, uma em cima do modo desacelerador e outra no meio do mar de caos. Uma vez que o modo desacelerador é instável, ou seja, é um repulsor, esta condição se faz necessária. Assim, na Fig.3.5(a), podemos observar que essa condição dada em cima do modo desacelerador faz com que a velocidade da partícula diminua.

No entanto, essa influência do modo desacelerador acaba (10^3 colisões) pela própria instabilidade (repulsividade) do mesmo, e a órbita volta a percorrer o mar de caos, onde sua velocidade aumenta conforme a lei de potência de crescimento com expoente $\beta \approx 1/2$. Ainda, um ajuste linear na região do decréscimo de velocidade do modo desacelerador, nos fornece o coeficiente linear de $1,0472$. Se multiplicarmos esse número por 3, obteremos um valor muito próximo do valor de π, confirmando assim a órbita como período-3. Já no caso da Fig.3.5(b), onde a condição inicial foi dada no meio do mar de caos, a órbita evolui normalmente, crescendo a sua velocidade com expoente $\beta \approx 1/2$. Eventualmente ela encontra um modo acelerador e sua

velocidade passa a crescer linearmente com n. Nota-se que um ajuste linear na região de alto crescimento, também nos fornece um coeficiente angular da ordem de $\pi/3$, indicando assim um modo acelerador de período 3. O valor de ϵ considerado em ambas as Figs.3.5(a,b) foi $\epsilon = 1,2$.

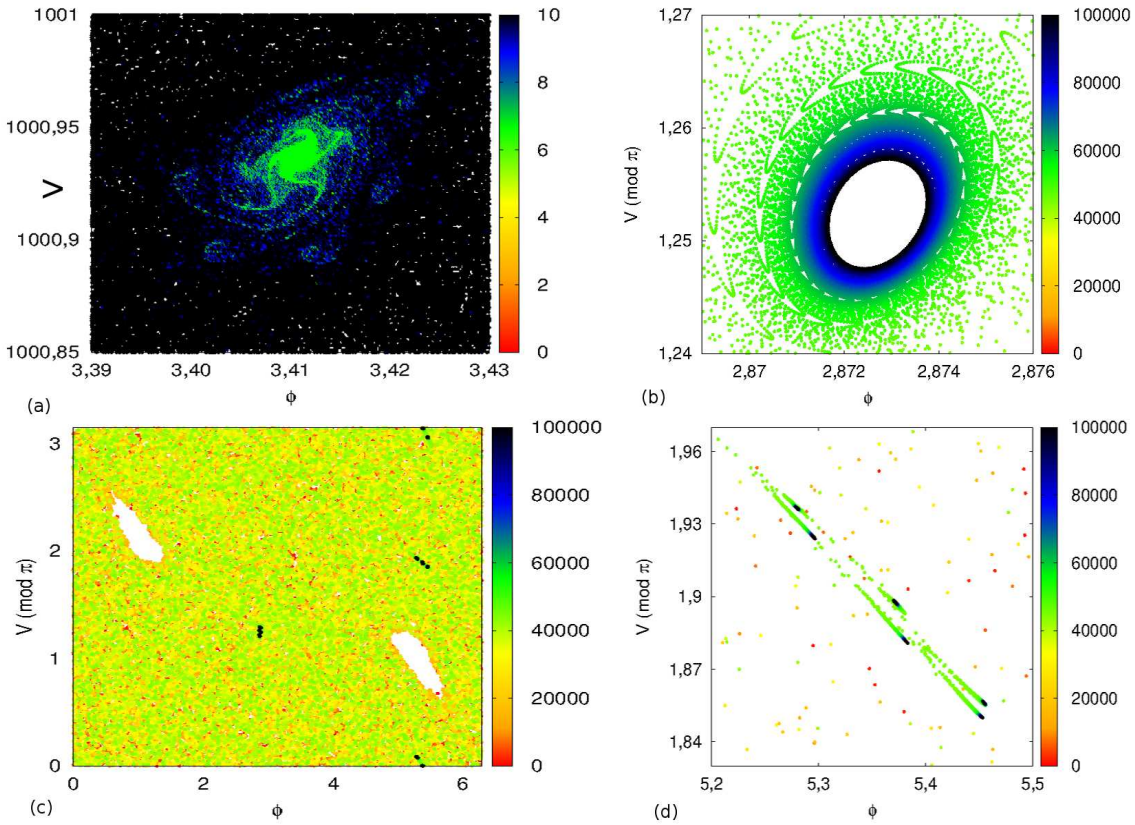

Figura 3.6: *Evolução da dinâmica mostrando o número de colisões com a escala do gradiente de cores. Em (a) modo desacelerador para $\epsilon = 1,25$, em (b) ampliação da convergência para um modo acelerador de período 3 para $\epsilon = 1,2$. Em (c) e (d) um modo acelerador de período-18, onde em particular para (d), temos uma ampliação em uma das 3 regiões de (c). É bom lembrar que em (b), (c) e (d), o eixo das velocidades foi modulado em π.*

Já na Fig. 3.6, avaliamos a evolução dinâmica em função do número de colisões com a ajuda de um gradiente de cores. Na Fig.3.6(a) podemos ver a atuação do modo desacelerador. Uma grade 1000×1000 de condições iniciais foi estabelecida bem em cima de uma região de modo desacelerador. Utilizamos o formalismo de escape de partículas, onde cada condição inicial foi evoluída até 10^5 colisões, e se a velocidade atingisse um valor menor do que $V_h = 200$, tal condição inicial e também a colisão em que o escape ocorreu eram salvas (este formlaismo de escape será descrita melhor na próxima seção). Assim, pudemos identificar o formato do modo acelerador e a sua zona de influência. Em verde (cinza claro), podemos ver o modo desacelerador atuando, onde as velocidades passam de $V_h = 200$ rapidamente e sua zona de influência em volta representada em cor azul (cinza). Já em preto, são as condições iniciais que não passaram de $V_h = 200$. Para a Fig.3.6(a) em particular, o gradiente de cores equivale a iteração de escape na escala logarítmica. Tal escala se faz útil pois queremos representar toda

a extensão dinâmica, desde as colisões iniciais, até para grandes n. Por exemplo, a escala em verde corresponde a iteração $n \cong \exp(6)$, ou seja, o modo desacelerador faz com que as órbitas diminuam de sua velociadade inicial, até a velocidade de escape V_h em aproximadamente 400 colisões.

Considerando agora as Figs.3.6(b,c,d), observamos a evolução da influência da dinâmica para os modos aceleradores. Podemos ver a convergência das órbitas para os modos com o passar das iterações. Para as Figs.3.6(b,c,d) o gradiente de cores equivale as colisões na escala linear. Aqui, estamos interessados somente no regime final de convergência para o modo acelerador, por isso a escala linear no gradiente de cores é melhor do que a escala logarítmica. Em particular para as Figs.3.6(c,d) constatamos um período 18, onde a Fig.3.6(d) é uma ampliação de um dos pontos em preto da Fig.3.6(c). Vale lembrar que os eixos das velocidades para as Figs.3.6(b,c,d) estão moduladas em π.

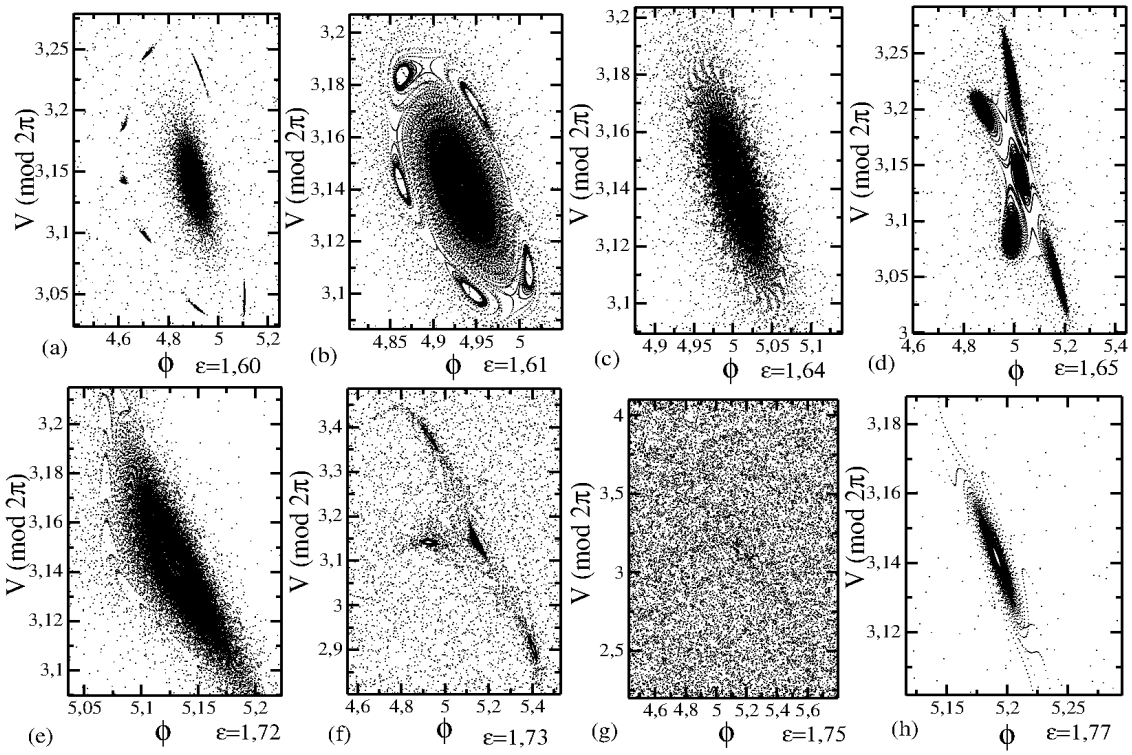

Figura 3.7: *Evolução das bifurcações sofridas pelo modo acelerador de período 1, ao longo da variação do parâmetro ϵ.*

O (in)oportuno achado do período 18 na Fig.3.6(c), indica que esses modos aceleradores (desaceleradores) também estão sujeitos a mundaças de estabilidade. De fato, ao voltarmos e analisarmos o modo acelerador de período-1 na Fig.3.4(c), percebemos que ele sofre algum tipo de alteração, enquanto o parâmetro ϵ varia entre $1,58$ e $1,90$. Acreditamos que nessa faixa de parâmetros o modo acelerador esteja sofrendo mundanças em sua estabilidade, o que acarreta em sucessivas bifurcações de períodos. Na Figura 3.7, é possível observar o formato do modo acelerador de período-1, para diferentes valores de ϵ. Bifurcações de vários períodos são encontradas, causadas por essas mundaças de estabilidade. A bifurcação mais influente,

é a bifurcação de período-3 [132], e o "desaparecimento momentâneo" do modo acelerador próximo de $\epsilon \approx 1,74$. Ainda, para os modos de período-1, podem ser encontrados considerando a Eq.(3.18), para $m = 1, 2, 3, ...$, onde os modos aceleradores sofrem o mesmo processo de mundaça de estabilidade que a ilha de estabilidade principal também de período-1.

3.2.2 Simetria e Variedades

Tentando ir um pouco mais a fundo nas propriedades caóticas dessas órbitas balísticas, os modos desaceleradores aparecem no sistema com uma simetria oposta à posição original dos modos aceleradores, exatamente como pontos elípticos e hiperbólicos, que aparecem aos pares com simetria oposta.

Para entender melhor como funciona esse processo, desenhamos as variedades instáveis e estáveis de um ponto de sela e modulamos a sua velocidade em múltiplo de π. Como citado na introdução, um ponto de sela (hiperbólico), possui duas direções preferenciais. Uma delas estável, onde órbitas convergem para o ponto, e outra instável onde órbitas divergem do ponto. Sendo assim, quando evoluímos o mapeamento da Eq.(3.8), no ponto de sela, obtemos as chamadas variedades instáveis. Para obter as variedades estáveis, é necessário considerar a dinâmica reversa avaliada no ponto de sela, ou seja, deveremos obter a transformação $T^{-1}(V_{n+1}, \phi_{n+1}) = (V_n, \phi_n))$. Desta maneira, depois de alguma álgebra obtemos

$$T^{-1} : \begin{cases} \phi_n = \phi_{n+1} - V_n - \nu \\ h(V_n) = V_n^2 + 2\epsilon[\cos(\phi_{n+1} - V_n - \nu) - \cos(\phi_{n+1})] - \nu^2 \end{cases} , \tag{3.20}$$

onde $\nu = [V_{n+1} + 2\epsilon \sin(\phi_{n+1})]$. Aqui, como a função $h(V_n)$ depende de V_n e V_{n+1}, e devemos resolvê-la numericamente. Então fazemos uso do método de Newton [124] para obter a raiz, onde $V_n = V_{n+1} - h(V_n)/h'(V_n)$, e $h'(V_n) = 2V_n + 2\epsilon \sin(\phi_{n+1} - V_n - \nu)$.

Na Fig.3.8 mostramos um gráfico de $V(mod\ 2\pi)$ vs. $\phi(mod\ 2\pi)$, onde podemos percerber a simetria entre os modos aceleradores e desaceleradores, para dois períodos. Para $\epsilon \approx \pi/4$, observamos um período-4, onde após 4 iterações, temos uma mudança de valor π no eixo das velocidades, como mostrado na Fig.3.8(a). Já para $\epsilon \approx \pi/2$, temos um modo de período-1, onde a cada iteração avançamos π unidades no eixo da velocidade, como exibido na Fig.3.8(b). Modulamos os itens da Fig.3.8(a,b) em velocidades diferentes, para uma melhor visualização em relação ao período dos modos.

Podemos perceber nas variedades, ambas estáveis e instáveis, o comportamento de estica e encolhe ao longo do espaço de fases. Observamos que a variedade estável (em azul) possui ramos (acúmulos de dobras) que decrescem para a direita, e a variedade instável, possui um acúmulo de ramos para cima, na região de $\phi \approx 3\pi/2$. Ainda, em relação a posição dos modos, percebemos que os mesmos sempre se encontram em ilhas de emaranhado das variedades (*tangle islands*), conforme proposto por Zaslavsky [133]. Ainda, é interessante notar que, as posições dos modos balísticos, coincidem com algum tipo de interseção das varieda-

des. Por exemplo, em ambas as Figs.3.8(a,b), os modos aceleradores aparecem quando temos a interseção dos ramos crescentes da variedade instável, com ramos de dobras decrescentes da variedade estável. Da mesma forma, os modos desaceleradores, são encontrados nas interseções das dobras crescentes da variedade estável, e nos ramos decrescentes da variedade instável. Ainda, não é sabido ao certo, qual é o grau de hierarquia e correlação entre essas interseções das variedades, entre dobras crescentes e decrescentes, e a natureza dos modos balísticos.

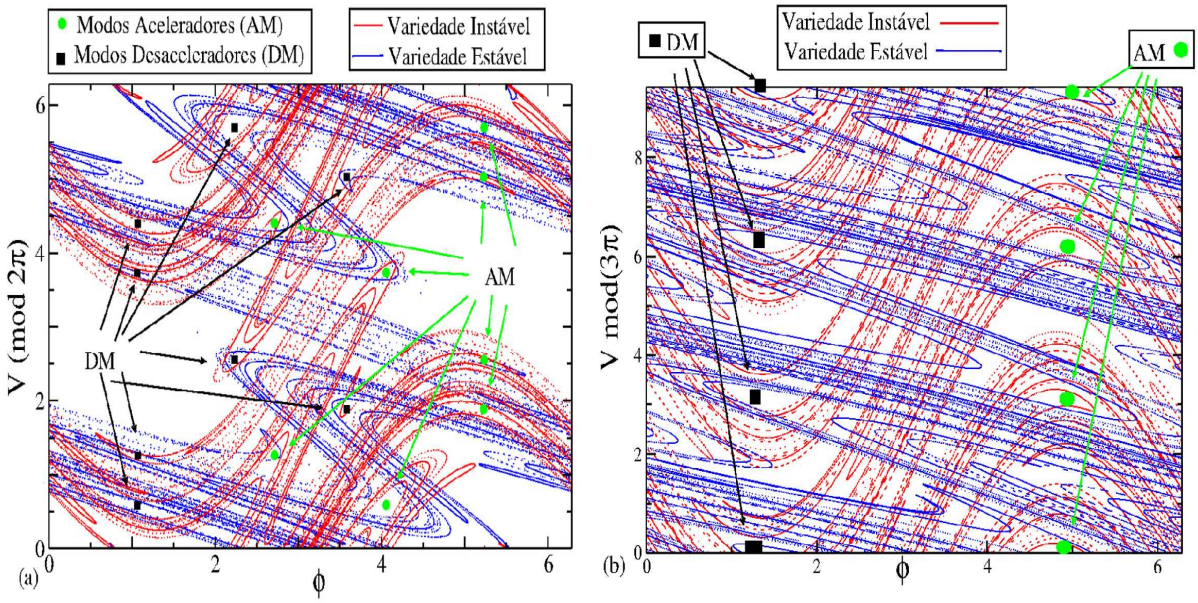

Figura 3.8: *Simetria entre modos aceleradores e modos desaceleradores e sua interação com as variedades estáveis (cor azul) e instáveis (cor vermelha) de um ponto de sela. Em (a) para uma órbita de período 4 onde* $\epsilon = 0,744$*, e em (b) para uma órbita de período 1, onde* $\epsilon = 1,61$.

3.3 Órbitas em regime de *stickiness*

Quando o espaço de fases de um sistema físico exibe propriedades do tipo mista, isto é, com mares de caos, toros invariantes (curvas invariantes), ilhas *KAM*, é comum o aparecimento de um fenômeno chamado de *stickiness*. Tal fenômeno está relacionado com as ilhas de estabilidade em si. Se uma órbita passa próximo de uma ilha de estabilidade, ela pode ficar aprisionada por um determinado intervalo de tempo finito ao redor dessa ilha, escapar e seguir seu caminho normalmente pelo mar de caos. Se a ilha de estabilidade possuir um conjunto de *cantori*, esse aprisionamento temporário é ainda mais forte [45, 46, 47, 60, 65, 134]. Esse processo dinâmico de aprisionamento de órbitas influencia a dinâmica do sistema, de maneira a ser um mecanismo para retardar o fenômeno de aceleração de Fermi [114].

Ao evoluir a dinâmica em função do parâmetro de controle ϵ, podemos notar que as propriedades de espaço de fases misto, ou seja, ilhas de estabilidade, sejam elas de qualquer período, aparecendo juntamente com o mar de caos, ocorrem para o intervalo $\epsilon_c < \epsilon < \pi/2$, onde em $\epsilon = \pi/2$ aparece o primeiro modo acelerador de período-1. Logicamente, quanto mais e mais

ilhas de estabilidade aparecerem no espaço de fases misto maior será a chance de incidência do fenômeno de *stickiness*. Assim, para valores de ϵ próximos ao valor crítico, podemos observar melhor esses aprisionamentos. Ainda, afim de caracterizar melhor a influência desses aprisionamentos temporários, faremos uso das técnicas numérias de Expoente de Lyapunov a tempo finito (FTLE) e também de propriedades de transporte, como escape de partículas e tempos de recorrência estatísticos (decaimento de correlações), também conhecido como probabilidade de sobrevivência.

3.3.1 Expoentes de Lyapunov a tempo finito (FTLE)

Como visto na Introdução, os expoentes de Lyapunov quantificam o afastamento exponencial de condições iniciais suficientemente próximas. Caso ao menos um expoente seja positivo, a órbita é dita ser caótica. Tal ferramenta, é aplicável na caracterização do fenômeno de *stickiness*. Neste caso o aprisionamento leva a uma órbita que pode ser considerada "quase" regular, onde teríamos um valor de expoente de Lyapunov próximo de nulo.

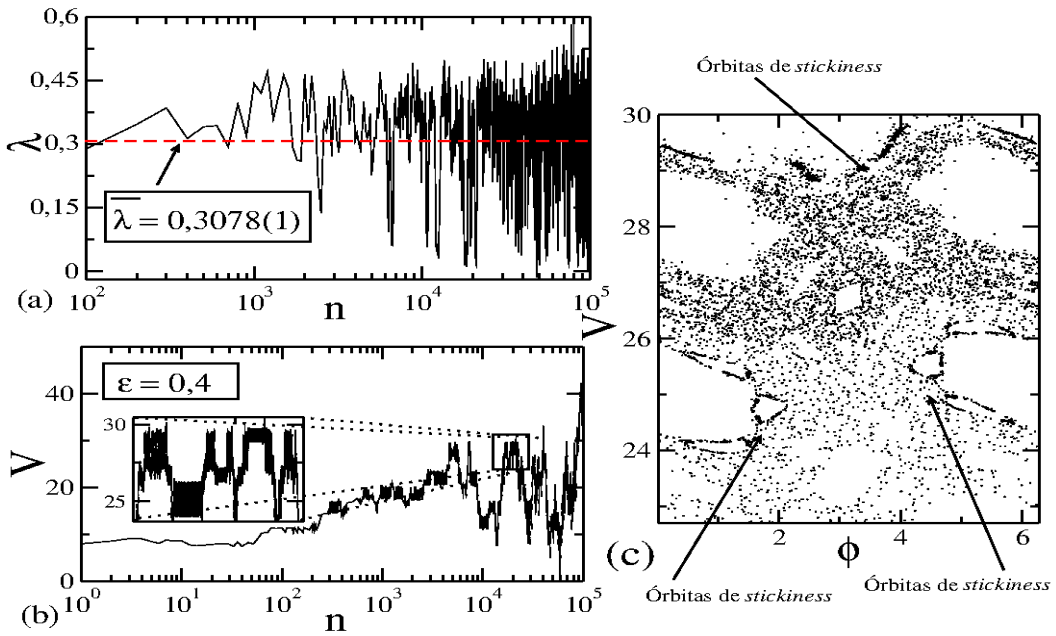

Figura 3.9: *Influência de órbitas em regime de stickiness na dinâmica do modelo* Bouncer. *Em (a) evolução do expoente de Lyapunov em função das iterações. Os sucessivos aprisionamentos levam o valor do expoente para próximo de zero, confirmando a regularidade da órbita. Em (b) mostramos a evolução da mesma condição inicial de (a) em função de velocidade e do número de colisões. Já em (c) mostramos o espaço de fases para a ampliação de (b), onde fica caracterizado o aprisionamento da órbita em regime de stickiness ao redor das ilhas de estabilidade.*

Podemos observar o comportamento de uma órbita em regime de *stickiness* e seu respectivo expoente no Lyapunov na Fig.3.9. Consideramos o parâmetro de controle $\epsilon = 0,40$, onde há uma quantidade razoável de ilhas de estabilidade. Analisando a Fig.3.9(a) temos o comportamento do expoente de Lyapunov a cada 100 iterações mostrada no eixo horizontal em escala

logarítmica iterada até 10^5 vezes, onde observamos grandes flutuações entre o valor médio $\bar{\lambda} = 0,3078(1)$ e valores próximos de zero ou até mesmo negativos. Tais valores, indicam que a condição inicial escolhida sofreu influência do fenômeno de *stickiness* onde o valor do expoente de Lyapunov durante o aprisionamento temporário aproximou-se de zero. Na Fig.3.9(b) mostramos a evolução da mesma condição inicial da Fig.3.9(a) em função do número de colisões. Observamos que por várias vezes a velocidade ficou confinada em uma determinada faixa de valores. Tal acontecimento ocorre com frequência e as vezes de maneira sucessiva. Uma janela de ampliação evidencia esse fenômeno. Esse aprisionamento da velocidade pode ser melhor interpretado e entendido observando a Fig.3.9(c), onde é mostrado o espaço de fases para a mesma região de ampliação da Fig.3.9(b), onde é nítido o aprisionamento da órbita ao redor das ilhas de estabilidade. Ainda, o fenômeno de *stickiness* influencia bastante a dinâmica da órbita, impedindo o seu rápido crescimento de velocidade; fenômeno este que caracteriza a aceleração de Fermi.

Para verificar qual é a influência das órbitas em regime de *stickiness* ao longo da dinâmica, construímos um histograma de distruibuição dos valores do expoente de Lyapunov, mencionado na Introdução, como $\rho(\lambda)$. Tal ferramenta já se mostrou bem útil na caracterização desse fenômeno [65]. Basicamente, essa distribuição se apresenta em um formato Gaussiano, onde o pico principal da curva de distribuição pode ser interpretado como o valor médio do expoente de Lyapunov [65]. Caso o sistema possua qualquer tipo de movimento ou órbita periódica ou quase-periódica, o histograma de distruibuição dos valores do expoente de Lyapunov a tempo finito, apresenta um pico secundário próximo da região onde o expoente é nulo. Esse pico secundário, pode ser interpretado como órbitas em regime de *stickiness* na dinâmica do sistema, responsável pelos aprisionamentos temporários. Essas distribuições são mostradas na Fig.3.10, onde para diversos valores do parâmetro ϵ, 7 condições iniciais distintas foram escolhidas em meio ao mar de caos e iteradas até 10^5 colisões. Vale relembrar também que a janela de intervalo de tempo finito considerada foi igual a 100.

Analisando a Fig.3.10 podemos ver que o pico secundário perto da região de expoente nulo é mais evidente para valores menores de ϵ. Isso já era esperado, pois para valores menores de ϵ mais e mais ilhas de estabilidade aparecem na dinâmica. Em particular para as Figs.3.10(a,b) temos que os picos secundários representam da ordem de 30% e 20% respectivamente da distruibuição total. Contudo, quando aumentamos o valor de ϵ, o pico secundário se torna cada vez menor para valores de ϵ próximos de $\pi/2$. É importante notar também, que conforme aumentamos o valor do parâmetro ϵ, o pico principal da distribuição vai se deslocando para a direita.

3.3.2 Propriedades de Transporte e Formalismo de Escape

Nesta seção discutimos a dinâmica para as órbitas que evoluem (sobrevivem) até atingirem uma velocidade pré definida. Para fazer tal procedimento, consideramos a introdução de uma

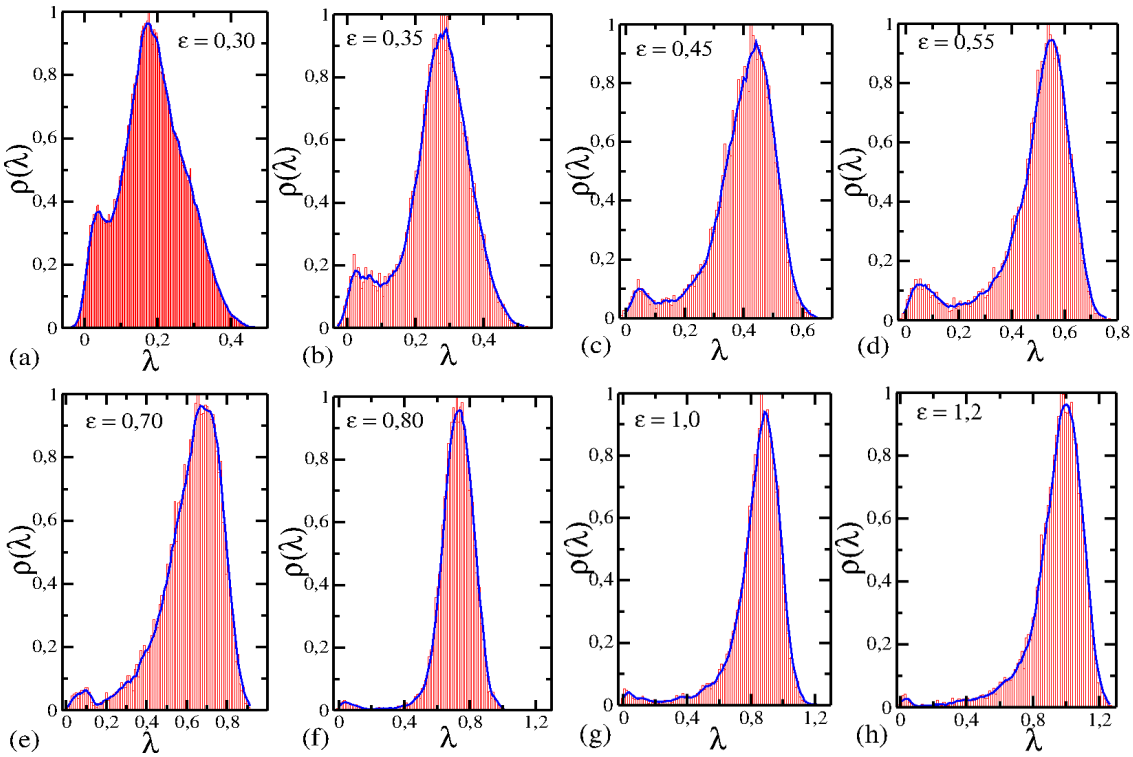

Figura 3.10: *Distribuições do expoente de Lyapunov a tempo finito para vários valores de ϵ. Podemos observar dois picos distintos, o maior e principal representando o valor médio do expoente de Lyapunov, e o secundário é devido a órbitas em regime de stickiness. A medida que ϵ aumenta, a magnitude do pico secundário diminui, indicando que para altos valores de ϵ, cada vez menos órbitas em regime de stickiness são observadas.*

velocidade de corte que assumimos como sendo um"buraco"na variável velocidade no espaço de fases. Se a órbita atingir tal velocidade ou maior, a dinâmica é interrompida e uma nova condição inicial é iterada, e assim por diante. A introdução do buraco na dinâmica nos permite estudar propriedades de transporte, bem como caracterizar através de análises estatísticas de probabilidade de sobrevivência e decaimentos de tempo de correlação, a influência que as órbitas em regime de *stickiness* trazem para a dinâmica do modelo [50, 51, 52].

Transporte

Assim, selecionamos uma grade de 500×500 condições iniciais igualmente distribuídas ao longo dos eixos $V_0 \in [0, 30]$ e $\phi_0 \in [0, 2\pi]$. Cada condição inicial foi iterada até 10^5 colisões, ou até que a dinâmica atingisse o valor da velocidade de escape pelo buraco introduzido na velocidade, o qual condicionamos como $V_h = 30$. A Figura 3.11 mostra a evolução da grade de condições iniciais para 10^5 colisões ou até a velocidade de escape ser atingida. O gradiente de cores equivale ao número de colisões, plotadas em escala logarítmica, que a partícula teve com a parede móvel até atingir o escape pelo buraco $(V_h = 30)$. Tal escala no gradiente de cores é útil pois podemos observar o escape durante toda a evolução dinâmica da órbita. Interpretamos a escala do degradê de cores como sendo o vermelho representando o escape rápido das partículas,

e o azul mostrando dinâmica para tempos muito longos. As regiões brancas denotam que a partícula nunca escapou, ou seja, as condições iniciais foram dadas exatamente em cima de uma ilha de estabilidade e as órbitas ficam ali confinadas para sempre.

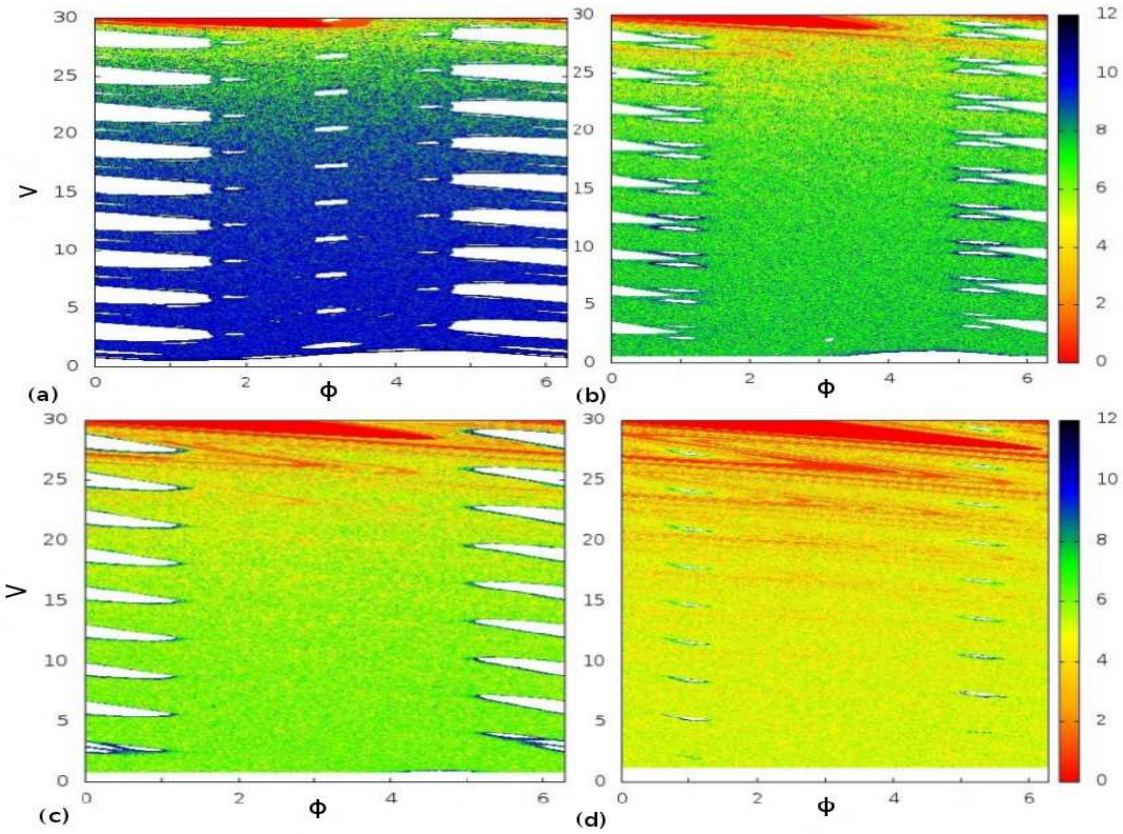

Figura 3.11: *Evolução temporal da grade de condições iniciais até atingirem a velocidade de escape pelo buraco* $V_{hole} = 30$. *Os parâmetros de controle usados foram (a)* $\epsilon = 0,40$, *(b)* $\epsilon = 0,60$, *(c)* $\epsilon = 0,80$ *e (d)* $\epsilon = 1,20$. *Azul escuro indica evolução dinâmica de longa duração até atingir o buraco, enquanto vermelho, indica o escape rápido de partículas. A cor branca denota que as partícula nunca escaparam até* 10^5 *colisões com a parede móvel.*

Podemos observar na Fig.3.11(a), onde $\epsilon = 0,40$, que velocidades iniciais muito baixas gastam muito tempo até atingirem a velocidade de escape em $V_{hole} = 30$. Ainda, podemos ver várias ilhas de estabilidade onde órbitas ficam presas temporariamente. Tal influência dinâmica pode ser observada nas regiões de cor azul escura nas Figs.3.11(b,c), onde os parâmetros de controle são respectivamente $\epsilon = 0,60$ e $\epsilon = 0,80$. Quando aumentamos o valor do parâmetro de controle, o escape através do buraco ocorre de maneira mais rápida, como podemos observar das Figs.3.11(b,c,d). As regiões de estabilidade vão se tornando cada vez menores, a medida que aumentamos ϵ, e na Fig.3.11(d) elas jé aparecem bem pequenas para $\epsilon = 1,2$. No entanto, mesmo para um parâmetro de controle onde as ilhas de estabilidade são pequenas, podemos perceber que as órbitas em regime de *stickiness* ainda estão presentes na dinâmica denotadas também pela cor azul escuro, embora em menor número quando comparado com os demais valores do parâmetro ϵ. Em particular, podemos notar nas Figs.3.11(c,d), que o rápido escape coincide com as variedades estáveis do modelo, onde basicamente, elas descrevem um caminho

para a difusão ilimitada.

Probabilidade de Sobrevivência

Como é sabido, se um sistema apresenta comportamento caótico, as curvas de P_{surv} possuem um decaimento do tipo exponencial [38]. Entretanto, quando temos estrutura mista no espaço de fases, as curvas de P_{surv} podem apresentar distintos comportamentos de decaimento, onde podemos incluir: *(i)* decaimento em lei de potência [39], ou *(ii)* decaimento em exponencial esticada [54, 55]. Para o modelo *Bouncer*, que possui estrutura mista no espaço de fases, as curvas de P_{surv} podem apresentar ambos os decaimentos dependendo do valor do parâmetro de controle ϵ e também do conjunto de condições iniciais escolhidas, como é mostrado na Fig.3.12.

Introduzimos um novo buraco agora em $V_{hole} = 100$, no entanto qualquer outro valor para a posição do buraco pode ser escolhido. O ensemble de condições iniciais foi definido com uma velocidade constante $V_0 = 2\pi$, enquanto a fase (ϕ_0) foi dividida uniformemente em 10^6 partes iguais onde $\phi_0 \in [2,8; 3,2]$. Tomamos o cuidado ao escolher essa faixa de condições inicias para a variável da fase, para garantir que não estamos escolhendo nenhuma condição que por ventura estaria dentro de alguma ilha de estabilidade. Caso isso ocorresse, a estatística ficaria comprometida, uma vez que queremos estudar órbitas que tenham um comportamento caótico.

Analisando a Fig.3.12, podemos ver uma transição no comportamento do decaimento das curvas de P_{surv} a medida que diminuímos o valor de ϵ. Para altos valores de ϵ, como por exemplo $\epsilon = 1,4$ e $\epsilon = 1,3$, a estrutura do espaço de fases tem algumas pequenas ilhas de estabilidade e o mar de caos é praticamente dominante sobre a dinâmica do sistema. Assim, é portanto esperado um decaimento exponencial para as curvas de P_{surv}, como mostra a Fig.3.12(a,b). Reduzindo o valor do parâmetro ϵ, cada vez mais e mais ilhas de estabilidade vão aparecendo na estrutura do espaço de fases, levando a dinâmica do sistema a apresentar cada vez mais órbitas em regime de *stickiness*. Considerando essas regiões de estabilidade no espaço de fases, uma mudança de comportamento nas curvas de P_{surv} é esperado. De fato, para valores de $\epsilon < 1$, podemos observar uma combinação de distintos decaimentos nas curvas de P_{surv}. Primeiramente, as curvas exibem um decaimento exponencial, e subitamente, mudam de comportamento apresentando um decaimento bem mais lento, onde podemos encontrar um ajuste em lei de potência para descrevê-lo. Tal decaimento mais lento em lei de potência é característico de órbitas em regime de *stickiness* [39], e sua influência acaba atrasando o escape em $V_{hole} = 100$.

Considerando as curvas de probabilidade de sobrevivência mostradas na Fig.3.12, podemos encontrar um ajuste numérico que pode ser feito de acordo com o tipo de decaimento observado. Para um decaimento exponencial temos

$$P_{surv}(n) \propto \exp(-n\zeta) \ , \tag{3.21}$$

onde ζ é o expoente do decaimento exponencial. Por outro lado, se o decaimento estiver sofrendo influência das órbitas em regime de *stickiness*, dizemos que obedece uma lei de potência

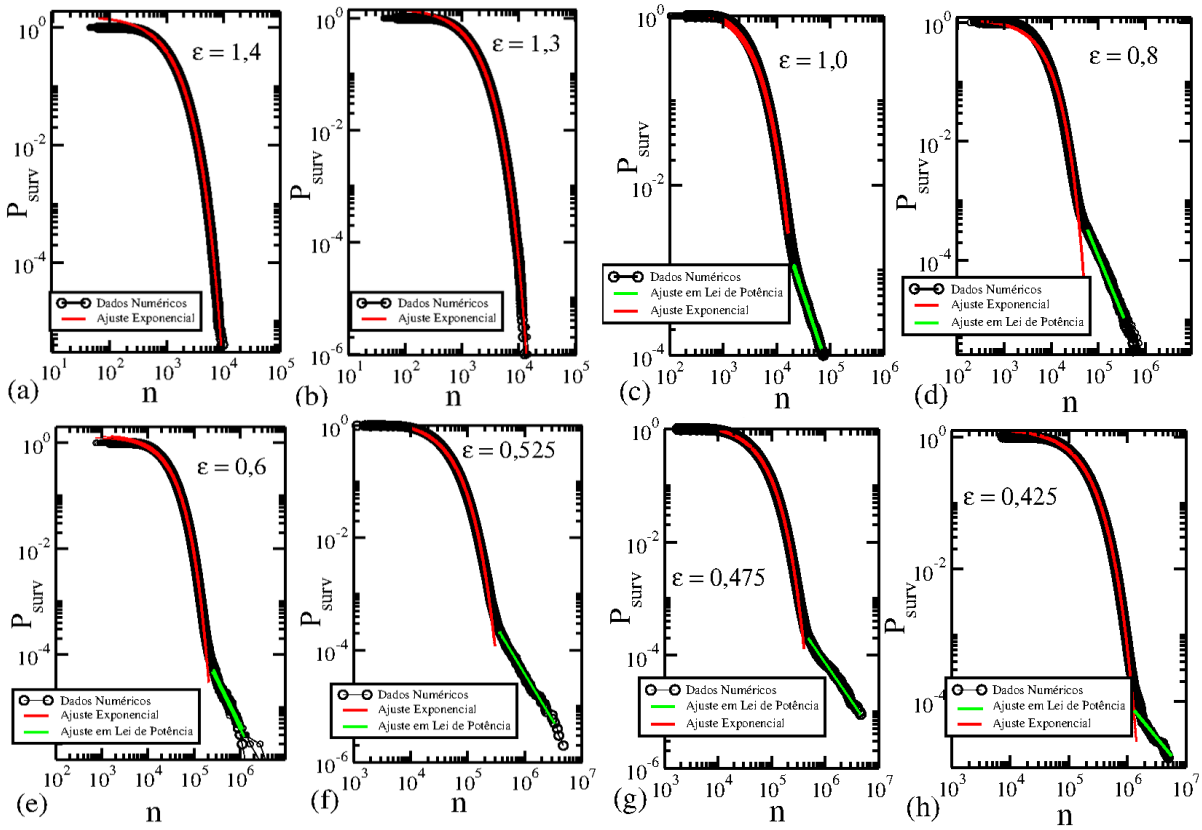

Figura 3.12: *Comportamento das curvas de P_{surv} para diferentes valores do parâmetro de controle ϵ. Podemos observar claramente a mudança de comportamento nas curvas de P_{surv} a medida que diminuímos o valor do parâmetro ϵ.*

de acordo com

$$P_{surv}(n) \propto n^{-\gamma} \ , \tag{3.22}$$

onde consideramos γ como sendo o expoente de decaimento em lei de potência.

Podemos observar o comportamento dos expoentes ζ e γ em função de $\ln(\epsilon - \epsilon_c)$, como mostra a Fig.3.13. A transformação na horizontal $\ln(\epsilon - \epsilon_c)$ se faz necessária para descrever a dinâmica próximo a transição de caos local para caos global. Analisando a Fig.3.13(a), podemos perceber que a medida que diminuímos o valor do parâmetro ϵ, o decaimento exponencial das curvas de probabilidade de sobrevivência também sofrem alteração. O expoente ζ, que é encontrado a partir do ajuste exponencial de acordo com a Eq.(3.21) também diminui. Tal resultado é esperado, uma vez que temos um aumento da região de periodicidade da estrutura do espaço de fases a medida que ϵ decresce. Ainda, podemos ver que o comportamento do expoente ζ em função de $\ln(\epsilon - \epsilon_c)$ pode ser descrito por uma lei te potêcia do tipo

$$\zeta \propto \ln(\epsilon - \epsilon_c)^z \ , \tag{3.23}$$

onde a inclinação da lei de potência é dado por $z = 2,709(4)$.

A descrição do expoente γ entretanto, não apresenta a mesma beleza matemática observada

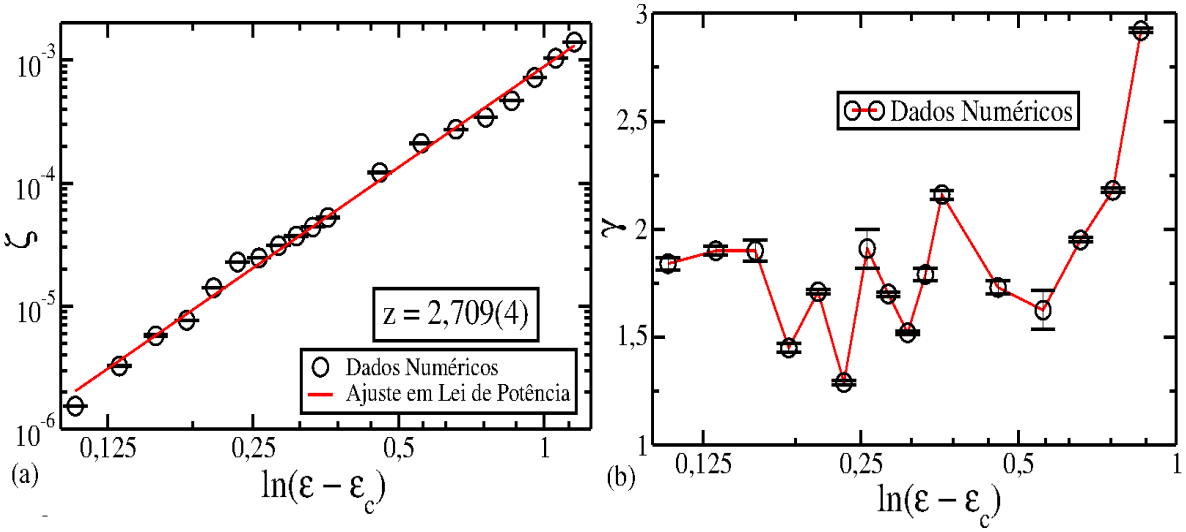

Figura 3.13: *Comportamento dos expoentes* ζ *e* γ *em função de* $\ln(\epsilon - \epsilon_c)$.

na análise do expoente ζ. O decaimento mais lento observado nas curvas de probabilidade de sobrevivência é de fato devido a influência das órbitas em regime de *stickiness* encontradas no espaço de fases. Para as nossas simulações numéricas, a grande maioria do decaimento mais lento foi caracterizada por uma lei de potência. De fato, é conhecido na literatura, que para tal distribuição de tempo cumulativo recorrente para outros sistemas dinâmicos, inclusive bilhares [45, 46, 60, 108, 134], que também apresentam estrutura mista no espaço de fases e também o fenômeno de órbitas em regime de *stickiness*; o expoente γ se encontra sempre dentro de uma faixa $\gamma \in [1,5; 2,5]$. Nossos resultados coincidem com essa faixa de parâmetro γ, como mostra a Fig.3.13(b). Ainda, é importante ressaltar que o completo entendimento do comportamento desse decaimento em lei de potência e do expoente γ ainda é um problema em aberto, e são necessários muitos cálculos teóricos e simulações numéricas para descrever seu comportamento de maneira adequada.

3.3.3 Mecanismo de retardo de aceleração de Fermi

De fato podemos comprovar que o fenômeno de órbitas em regime de *stickiness* afeta a dinâmica do sistema, bem como as propriedades de transporte, quando consideramos a evolução da dinâmica em função do número de colisões. No entanto, para verificar qual é a influência desses sucessivos aprisionamentos temporários no fenômeno de aceleração de Fermi, calculamos a evolução da velocidade média da partícula para um conjunto muito especial de condições iniciais.

Considerando as curvas de decaimento de probabilidade de sobrevivência mostradas na Fig.3.12, escolhemos condições iniciais que possuem um escape normal, isto é, sua curva característica de decaimento é a exponencial. E escolhemos para o outro conjunto, as condições iniciais que possuem um escape mais lento, ou seja, são caracterizadas pelo decaimento em lei de potência das curvas de probabilidade de sobrevivência. A figura 3.14 mostra o comporta-

mento da evolução da velocidade média para um ensemble de 200 condições iniciais de cada grupo pré-selecionado.

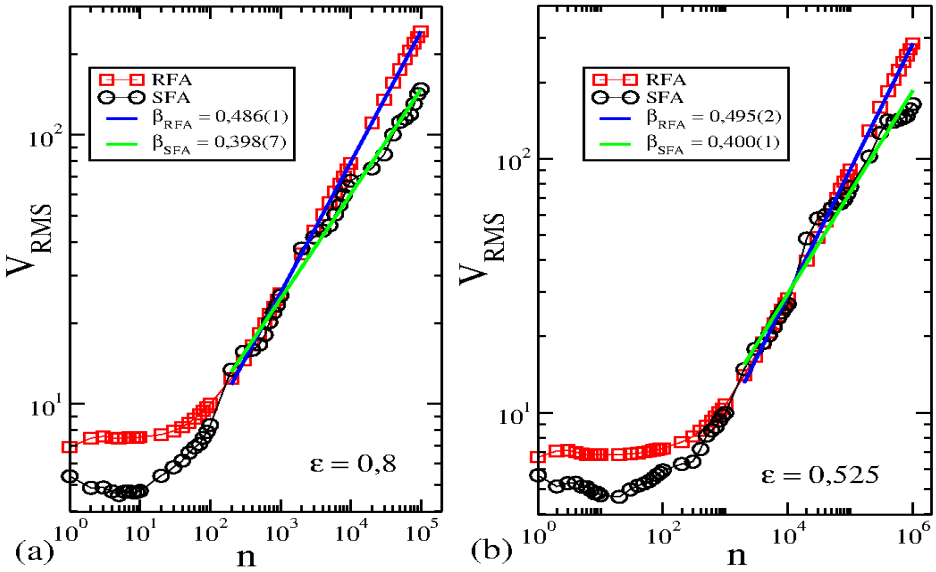

Figura 3.14: *Comportamento das curvas de V_{RMS} em função do número de colisões n para: (a) $\epsilon = 0,8$ e (b)$\epsilon = 0,525$. Podemos observar dois regimes distintos de crescimento, que levam a diferentes expoentes para* Regular Fermi Acceleration (RFA) *e* Sticky Fermi Acceleration (SFA). *Tal distinção dos expoentes de crescimento, nos leva a propor que órbitas em regime de* stickiness *são um mecanismo para retardar a aceleração de Fermi.*

Para as condições iniciais escolhidas no grupo do decaimento exponencial, que leva a partícula a sofrer difusão na velocidade, onde $\overline{V} \propto \sqrt{n}$, observamos que realmente elas apresentam um expoente de crescimento $\cong 1/2$, ou como denominado anteriormente β_1, para diferentes parâmetros de ϵ. Tais curvas foram denominadas *Regular Fermi Acceleration* (RFA), e estão representadas por quadrados em ambas as Figs.3.14(a,b). No entanto ao selecionarmos o conjunto de condições iniciais que estão na região do decaimento em lei de potência das curvas de probabilidade de sobrevivência e calcularmos de maneira semelhante ao realizado para o conjunto de condições iniciais no decaimento exponencial, encontramos um expoente de crescimento menor que $1/2$. Representadas por círculos nas Figs.3.14(a,b), as curvas de *Sticky Fermi acceleration* (SFA), mostram expoentes menores para o crescimento na velocidade, onde para $\epsilon = 0,8$, $\beta_{SFA} = 0,398(7)$ e para $\epsilon = 0,525$, $\beta_{SFA} = 0,400(1)$. A confirmação do valor desse expoentes de decaimento menor do que $1/2$, necessita ser melhor estudada e entendida. Mas, esses resultados comprovam que órbitas em regime de *stickiness* acabam atrasando o processo de difusão na velocidade. Sendo assim, podemos concluir que esses aprisionamentos temporários funcionam como um mecanismo para retardar o crescimento ilimitado de energia que caracteriza o fenômeno de aceleração de Fermi [114].

3.4 Conclusões parciais

Analisamos a dinâmica de uma partícula livre sob a ação de um campo gravitacional, sofrendo colisões elásticas com uma parede móvel no tempo. Um mapeamento bidimensional foi obtido, e um espaço de fases do tipo misto foi encontrado, onde algumas propriedades caóticas foram caracterizadas e uma conexão com mapa padrão foi feita, onde algumas transições são observadas. De $\epsilon = 0$ para $\epsilon \neq 0$, temos a quebra da integrabilidade do sistema; e quando $\epsilon \approx \epsilon_c$, temos uma transição de caos local para caos global. Tal transição dá origem ao fenômeno de aceleração de Fermi no sistema.

A difusão ilimitada, foi caracterizada e modos balísticos foram encontrados. Quando órbitas em regime de *stickiness* estão presentes no sistema, as mesmas atuam como um mecanismo que retarda a aceleração de Fermi. Tal mecanismo foi caracterizado via expoentes de Lyapunov a tempo finito, e curvas de probabilidade de sobrevivência.

Os resultados apresentados neste capítulo sobre a influência das órbitas em regime de *stickiness* foram publicados na Ref.[114]. Um outro artigo está em fase final de preparação sobre a dinâmica dos modos aceleradores [135].

Capítulo 4

O Bilhar *Stadium* Dependente do Tempo

Neste capítulo investigaremos o bilhar Stadium *com fronteiras que dependem periodicamente do tempo. Na Sec.4.1 descreveremos os procedimentos para a obtenção do mapeamento quadridimensinal, para a aproximação de fronteira fixa, onde colisão sucessivas e indiretas são consideradas. Na Sec.4.2, encontramos um valor crítico para a velocidade, através da linearização do mapa não perturbado. Caracterizamos uma ressonância entre a pertubação externa e o número de rotação de uma órbita, onde curvas invariantes que delimitam pontos fixos se comportam como* stochastic layers*, tornando a grande maioria do espaço de fases acessível. Aliado ao fenômeno de* stickiness*, órbitas ressonantes, podem mudar de comportamento, caótico para estável, e convergem para estados estacionários para tempos longos. Tal comportamento caracteriza uma divisão no ensemble de energias, que é caracterizado na Sec.4.3. Para altas energias, encontramos uma dinâmica típica de aceleração de Fermi, também analisado via formalismo de escala. Já para baixas energias, o* stickiness *aliado com a ressonância, leva a dinâmica a platôs estacionários para tempos longos. Ainda, caracterizamos a relação dos platôs com a posição das ilhas, e também analisamos o transporte perto da velocidade de ressonância. Finalmente, algumas conclusões e perspectivas são dadas na Sec.4.4.*

4.1 O bilhar e o mapeamento

O bilhar *Stadium* foi proposto por Bunimovich [75, 76] (veja Fig.4.1(a)), e consiste basicamente de uma partícula clássica que colide elasticamente entre dois segmentos de reta paralelos conectados por dois semi-círculos. Em nosso estudo, analisaremos o bilhar *Stadium-like*, que consiste em uma generalização do bilhar *Stadium* original proposto, onde podemos ter, dependendo dos parâmetros de controle a, b e l, fronteiras convergentes no formato de semi-círculos inteiros ou somente segmentos de semi-círculos, como no caso da Fig.4.1(b).

Introduzimos a dependência temporal, fazendo a fronteira $\partial Q = \partial Q(t)$, na forma de uma perturbação periódica nas fronteiras convergentes. Assim, a equação da fronteira pode ser es-

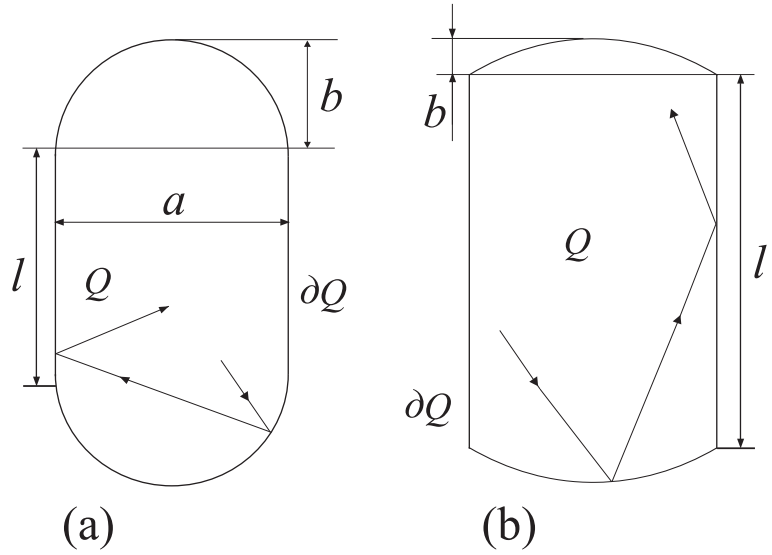

Figura 4.1: *O Bilhar* Stadium. *Em (a) a versão original de Bunimovich e em (b) o bilhar* Stadium-like.

crita como

$$R(t) = R_0 + rf(t) \ , \tag{4.1}$$

onde $r \ll R_0$ e $f(t)$ é uma perturbação do tipo harmônica, ou seja, $\sin(wt)$. Ao derivarmos, a Eq.(4.1), obtemos a equação da velocidade da fronteira móvel, como sendo

$$\dot{R}(t) = B(t) = B_0 f'(wt) \ , \tag{4.2}$$

onde $B_0 = rw$ é a amplitude de oscilação, w é a frequência de oscilação e $f' = df/dt$.

É importante ressaltar, que as fronteiras neutras (retas paralelas) não se movem na dinâmica. Assim, o procedimento descrito acima para a perturbação da fronteira convergente (circular) é feito considerando a aproximação da fronteira de fixa, ou seja, no momento da colisão a partícula troca momentum com a fronteira como se esta estivesse se movendo. Esse tipo de simplificação da dinâmica, já foi feita para outros bilhares e não afeta a não-linearidade do sistema [104, 105, 106]. Ainda, esse método pode ser considerado análogo ao usado na simplificação do mapeamento do modelo FUM e do modelo *Bouncer*.

4.1.1 Colisões Sucessivas e Indiretas

A Figura 4.2 mostra um esquema ilustrativo de uma trajetória típica de colisões sucessivas com os parâmetros de controle, juntamente com R e Φ. Analisando a Fig.4.2, podemos encontrar as expressões de R e Φ como sendo

$$R = \frac{a^2 + 4b^2}{8b} \quad , \quad \Phi = \arcsin\left(\frac{2a}{R}\right) \ , \tag{4.3}$$

onde em particular se $a = 2b$, recuperamos o bilhar *Stadium* original proposto por Bunimovich.

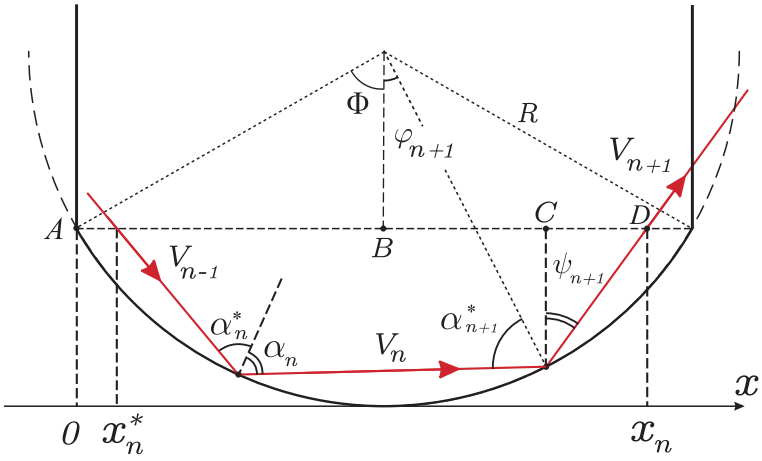

Figura 4.2: *Esquema ilustrativo de uma trajetória sofrendo colisões sucessivas com a mesma componente convergente explicitando algumas de suas variáveis dinâmicas.*

Para descrever a dinâmica do sistema, utilizaremos quatro variáveis principais, sendo duas delas angulares, além do tempo e da velocidade da partícula. As condições iniciais angulares são α_n, que é o ângulo medido entre a trajetória e a reta normal ao ponto de colisão com a componente convergente, e φ_n, que é o ângulo medido entre a vertical ao eixo de simetria do bilhar e a reta normal ao ponto de colisão com a componente convergente. Para facilitar a notação, as variáveis indexadas por $*$ são medidas imediatamente antes da colisão. Assumimos então, que V_n e t_n, são respectivamente a velocidade e o tempo da partícula no instante da enésima colisão, e que no instante inicial $t = 0$, a partícula parta da fronteira convergente do bilhar ∂Q, e o vetor velocidade aponte para dentro da mesa de bilhar Q.

Consideramos dois casos distintos para descrever a dinâmica da partícula: *(i)* colisões sucessivas e *(ii)* colisões indiretas. Em *(i)* consideramos que a partícula, após sofrer uma colisão com a componente convergente, sofre uma colisão subsequente com a mesma componente. Já em *(ii)* consideramos que após uma colisão com a componente convergente, a próxima colisão se dá com a componente oposta. Para este segundo caso, utilizamos o método do desdobramento *(unfolding)* para avaliar a dinâmica [67, 101].

Vamos primeiramente introduzir as equações dinâmicas para o primeiro caso, ou seja, colisões sucessivas com a mesma componente convergente. Como mostra a Fig.4.2, esse tipo de colisão ocorrerá somente quando for satisfeita a condição $|\ \varphi_{n+1}\ | \leq \Phi$. Assim, usando algumas propriedades geométricas, obtemos

$$\begin{cases} \alpha_{n+1}^* = \alpha_n \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \pi - 2\alpha_n \ \ (mod\, 2\pi) \\ t_{n+1} = t_n + \frac{2R\cos(\alpha_n)}{V_n} \end{cases} . \tag{4.4}$$

Agora devemos considerar o segundo caso onde a partícula, após sofrer uma colisão com

a componente convergente, colidindo em sequência com a componente oposta. Para que esta condição seja satisfeita, é necessário que $\Phi < | \quad \varphi_{n+1} \quad |$. Além disso, introduziremos algumas variáveis dinâmicas auxiliares no mapeamento, como ψ que é o ângulo medido entre a trajetória e a reta vertical ao ponto de colisão e x_n que é a projeção da posição da partícula no eixo horizontal. Vale ressaltar que a dinâmica do bilhar que estamos estudando consiste em considerar o modelo de aproximação de fronteira fixa, ou modelo simplificado, por isso x_n é somente a projeção da posição da partícula no momento em que ela entra na zona das componentes convergentes, ou zona de colisão, como mostra a Fig.4.2. A partir dessas considerações, e considerando algumas relações de geometria na Fig.4.3, obtemos as seguintes relações de recorrências

$$\begin{cases} \psi_n = \alpha_n - \varphi_n \;\; mod(\pi/2) \\ x_n = \frac{R}{\cos(\psi_n)}[\sin(\alpha_n) + \sin(\Phi - \psi_n)] \\ x_{n+1} = x_n + l\tan(\psi_n) \;\; mod(a) \\ \alpha^*_{n+1} = \arcsin[\sin(\psi_n + \Phi) - x_{n+1}\cos(\psi_n)/R] \\ \varphi_{n+1} = \psi_n - \alpha^*_{n+1} \\ t_{n+1} = t_n + \frac{R[\cos(\varphi_n)+\cos(\varphi_{n+1})-2\cos(\Phi)]+l}{V_n\cos(\psi_n)} \end{cases} . \tag{4.5}$$

Os detalhes específicos para a obtenção do mapeamento, e toda a geometria envolvida neste

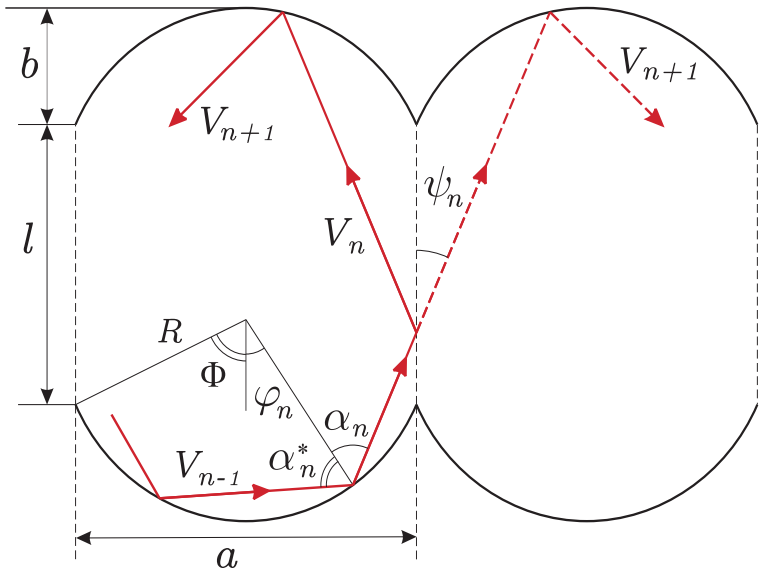

Figura 4.3: *Esquema ilustrativo de uma trajetória sofrendo colisões indiretas com as duas componentes convergentes.*

processo, podem ser encontrados na Ref.[136]

4.1.2 Lei de Reflexão

Analisando agora a reflexão especular, temos que a expressão da velocidade da partícula depois da colisão pode ser obtida decompondo a mesma em duas componentes distintas, que

são

$$\begin{cases} \vec{v}_n \cdot \vec{T}_n = v_n \sin(\alpha_n^*) \\ \vec{v}_n \cdot \vec{N}_n = -v_n \cos(\alpha_n^*) \end{cases} , \tag{4.6}$$

onde $\vec{T}$ e $\vec{N}$ são respectivamente os vetores unitários tangencial e normal no ponto de colisão. Ainda, como as colisões ocorrem em um referencial não inercial, devemos considerar essa mudança de referencial. Exatamente como feito no obtenção do mapeamento do modelo FUM na Sec.2.1. Desta maneira, temos que a lei de reflexão é dada por

$$\begin{cases} \vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\kappa \vec{V}'_n \cdot \vec{N}_{n+1} \\ \vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \eta \vec{V}'_n \cdot \vec{T}_{n+1} \end{cases} , \tag{4.7}$$

onde $\kappa \in [0,1]$ e $\eta \in [0,1]$ são os respectivos coeficientes de restituição para a componente normal e tangencial e o super índice $'$ se refere ao referencial não inercial. Para o caso conservativo em estudo na presente Tese, tomamos $\kappa = \eta = 1$, embora a construção do mapeamento tenha sido feita para o caso mais geral. Alguns resultados para a dinâmica dissipativa, podem ser encontrados em [137].

Ao voltarmos para o referencial inercial, as componentes da velocidade depois de considerada a colisão da partícula serão

$$\begin{cases} \vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\kappa \vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} + (1+\kappa)\vec{B}(t_{n+1}) \cdot \vec{N}_{n+1} \\ \vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \eta \vec{V}_n \cdot \vec{T}_{n+1} + (1-\eta)\vec{B}(t_{n+1}) \cdot \vec{T}_{n+1} \end{cases} . \tag{4.8}$$

Finalmente, a expressão da velocidade após o choque dada por

$$\mid \vec{V}_{n+1} \mid = \sqrt{(\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2 + (\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2} \, . \tag{4.9}$$

As duas componentes da velocidade podem ser usadas para obter o ângulo α levando à

$$\alpha_n = \arcsin \left[\frac{\mid \vec{V}_n \mid}{\mid \vec{V}_{n+1} \mid} \sin(\alpha_n^*) \right] . \tag{4.10}$$

Assim, a dinâmica da partícula pode ser avaliada considerando os conjuntos de Eqs.(4.4), (4.5), (4.9) e (4.10).

Na Fig.4.4, podemos ver a composição do espaço de fases para diferentes combinações de condições iniciais. O espaço de fases se apresenta do tipo misto, com ilhas *KAM* e mares de caos. Como podemos ver das Fig.4.2 e 4.3, a coordenada angular ϕ_n varia entre $[-\Phi, \Phi]$ e α_n tem valor livre entre $-\pi/2$ e $\pi/2$, se contarmos a dinâmica no sentido anti-horário. Considerando isso e a simetria axial do bilhar, podemos descrever o domínio de α_n no espaço de fases somente de $[0, \pi/2]$, sendo que a outra metade negativa, seria espelhada. Ainda, podemos representar suas coordenadas, de acordo com a conveniência, usando tanto as coordenadas angulares α_n e ϕ_n, ou variáveis auxiliares ψ e ξ, onde $\xi = 0,5 + R_0 \sin(\phi_{n+1})/a$ é a projeção ao

longo do eixo horizontal e é usualmente tomado em $mod(1)$. O mesmo procedimento aplicado a simetria de α_n se estende para ψ_n. Se considerarmos as coordenadas auxiliares do bilhar, muitas das propriedades caóticas são derivadas da dinâmica com fronteira estática, e de outras aproximações, como fronteiras parabólicas [101, 136]. Assim, as posições das ilhas de estabilidade de período-1 no eixo horizontal do espaço de fases são dadas por

$$\psi^* = \arctan\left(\frac{ma}{l}\right) , \tag{4.11}$$

onde m é o número de stadiums espelhados que uma partícula intercepta antes de colidir com a outra componente focal. Dependendo do valor de m, existe uma sequência de pontos fixos correspondendo a órbitas que sempre ficam dentro do *Stadium* (não colidem com as retas paralelas), caso de $\phi_n = 0$ (período-1), que intercepta diferentes múltiplos do parâmetro a na direção horizontal, de acordo com o método de *unfolding* [67, 101]. Elas são representadas no espaço de fases como as maiores ilhas de estabilidade, como mostrado na Fig.4.4. Ainda, essas órbitas estáveis, podem ser entendidas como trajetórias de libração dentro do bilhar [67].

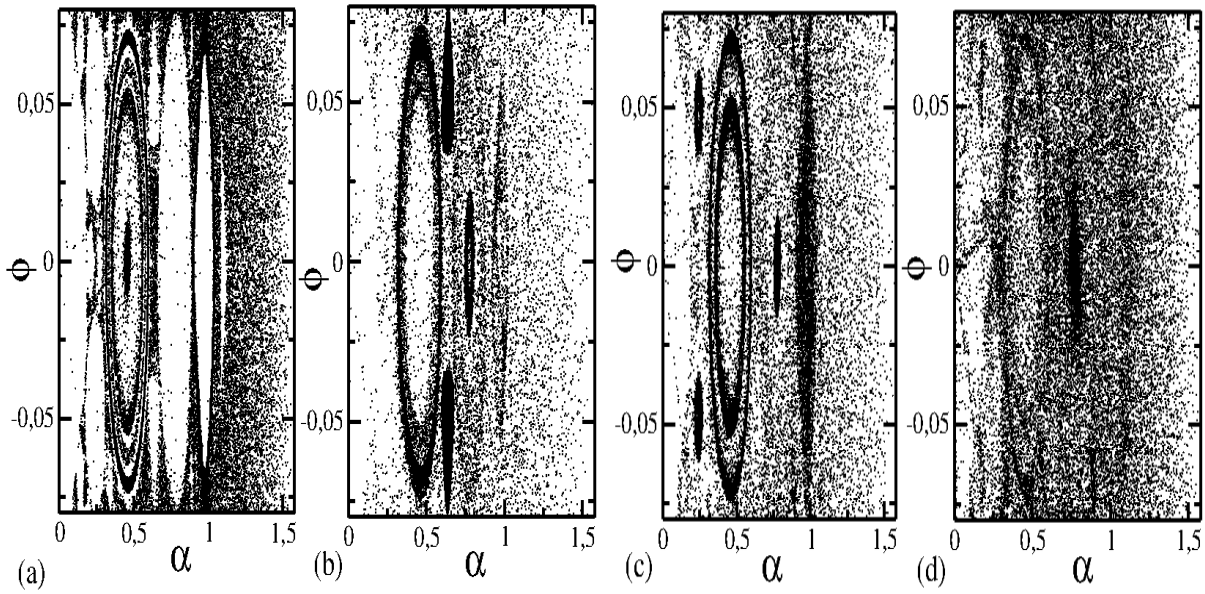

Figura 4.4: *Espaços de fase para o modelo perturbado periodicamente no tempo para 50 condições iniciais diferentes. Os parâmetros de controle utilizados foram* $l = 1$, $a = 0,5$, $b = 0,01$ *e* $B_0 = 0,01$ *e se mantiveram constantes nos 4 itens da figura. As velocidades iniciais são: (a)*$V_0 = 5$, *(b)*$V_0 = 1,5$, *(c)*$V_0 = 1,2$ *e (d)*$V_0 = 0,5$.

4.2 Velocidade de Ressonância

Ao linearizamos o mapa não perturbado estudado [103, 104, 105, 106], encontramos de acordo com a variáveis ação-ângulo, o número de rotação

$$\sigma = \arccos\left(1 - \frac{8bl}{a^2\cos^2(\psi_n^*)}\right) , \tag{4.12}$$

onde ψ_n^* é o ponto fixo dado na Eq.4.11e $m \geq 1$. Detalhes específicos sobre a obtenção da expressão dada pela Eq.(4.12), são encontrados na Ref.[136]. Se considerarmos uma órbita em que a partícula se move ao redor de algum ponto fixo no modelo não perturbado, o tempo entre duas colisões de duas componentes focais, considerando órbitas de período-1 é dado por

$$\tau \approx \frac{l}{\cos(\psi_n^*)V_n} . \tag{4.13}$$

Assim, podemos encontrar um período de rotação dessa órbita ao redor do ponto fixo como

$$T_{rot} = \frac{2\pi\tau}{\sigma} . \tag{4.14}$$

Quando introduzimos a perturbação externa, encontramos que o período dessa perturbação é dado por

$$T_{ext} = \frac{2\pi}{\omega} . \tag{4.15}$$

Quando o período de rotação externa for igual ao período de rotação de uma órbita ao redor do ponto fixo, temos então uma ressonância entre as oscilações da fronteira móvel e a rotação ao redor de um ponto fixo. Sendo assim, ao igualarmos as Eqs.(4.14) e (4.15), obtemos a expressão da velocidade de ressonância para o modelo perturbado [104, 105, 106], dada por

$$V_r = \frac{\omega l}{\cos(\psi_n^*)\arccos\left(1 - \frac{8bl}{a^2\cos^2(\psi_n^*)}\right)} . \tag{4.16}$$

É evidente que o valor de V_r depende de qual ponto fixo estamos considerando para fazer a linearização do mapeamento. Entretanto, para todos os pontos fixos de período-1, encontramos um valor muito próximo para a velocidade de ressonância deles. Para a combinação de parâmetros $l = 1$, $a = 0,5$, $b = 0,01$, temos $V_r = 1,2$. Este valor é aproximadamente uma média de todos os valores possíveis para os diferentes pontos fixos de período-1, que podemos obter considerando esses parâmetros geométricos. Então, próximo do valor de V_r, os pontos fixos de período-1 se tornam ressonantes. Como essas ilhas são as maiores em área no espaço de fases, elas se mostram mais influentes para a ressonância. Ainda vale ressaltar que tal ressonância é observada no sistema se o mecanismo gerador de caos *(defocusing mechanism)* não está ativo [67, 75, 76], ou seja, $4bl/a^2 < 1$ [101, 136].

O fenômeno de ressonância é típico de sistemas dinâmicos que possuem espaço de fases do tipo misto. Quando uma órbita encontra-se na velocidade igual ou menor do que a velocidade de ressonância, a partícula pode penetrar nas vizinhanças dos pontos fixos permanecendo por algum intervalo de tempo dentro da ilha de estabilidade [18, 32], ficando presa em uma órbita estável por tempos que podem ser longos. Tal comportamento se assemelha a um ponto fixo assintoticamente estável *(sink)*. Uma possível explicação para esse tipo de penetração nas ilhas de estabilidade, pode ser caracterizado quando as curvas invariantes que antes delimitavam a estrutura regular para fronteiras fixas, com a introdução da perturbação, tornaram-se "porosas", e se comportam de maneira semelhante a uma *stochastic layer* [107, 110]. Como consequência disso, a maior parte do espaço de fases se torna acessível para a partícula, assim como mostra a Fig.4.4, para valores de $V_0 < V_r$. Desta maneira, a partícula pode alternar entre comportamento caótico e regular, durante a evolução dinâmica com $V_0 < V_r$. Tal velocidade divide o ensemble de condições iniciais em duas partes. Chamaremos de alta energia, o ensemble com velocidade inicial $V_0 > V_r$, e o ensemble de baixa energia será para $V_0 < V_r$.

4.2.1 *Stickiness*

Fazendo uma análise mais aprofundada na Fig.4.4, vemos que quando $V_0 > V_r$, as ilhas de estabilidade não se tornam acessíveis a partícula como mostra a Fig.4.4(a) em que $V_0 = 5$. Já na Fig.4.4(b), onde $V_0 = 1,5$, podemos ver que algumas órbitas penetram um pouco nas ilhas de estabilidade. Agora, ao analisarmos a Fig.4.4(c), onde $V_0 = V_r$, podemos ver que a maioria do espaço de fases se torna acessível, o mesmo comportamento acontece quando $V_0 < V_r$, como é o caso da Fig.4.4(d), onde $V_0 = 0,5$. Podemos ver ainda, em ambas as Figs.4.4(c,d), uma densidade maior de pontos, ao redor de algumas ilhas de estabilidade sugerindo que a ressonância entre a rotação ao redor de um ponto fixo e a perturbação externa, levou a partícula a ter um comportamento de uma órbita em um regime de *stickiness* [32, 31, 129, 138].

Acreditamos que o comportamento de órbitas em regime de *stickiness* aliado com a ressonância, seja o mecanismo responsável pelo decréscimo de velocidade da partícula [138], quando evoluímos a dinâmica em função do número de colisões com a fronteira móvel convergente, com um ensemble de baixas energias $(V_0 < V_r)$, onde muitas órbitas decrescem de velocidade, e ficam estacionárias em um platô. Nessa evolução dinâmica, como uma parte siginificativa do espaço de fases é acessível, quando as órbitas ficam presas em regime de *stickiness*, existe uma grande possibilidade de que ela mude de comportamento, ou seja, passe para dentro da ilha de estabilidade. Assim, as órbitas se movem em sucessivos aprisionamentos de uma ilha para outra, impedindo a velocidade da partícula de atingir valores elevados. Para tempos longos, a órbita escolhe uma ilha, de acordo com a condição inicial, e sua dinâmica fica concentrada nessa região para tempos extremamente longos (estudamos casos até 10^9 colisões), como se essa órbita tivesse sido atraída para o ponto fixo, numa órbita assintoticamente estável. A Figura 4.5 mostra uma única condição inicial sendo evoluída até 10^5 colisões.

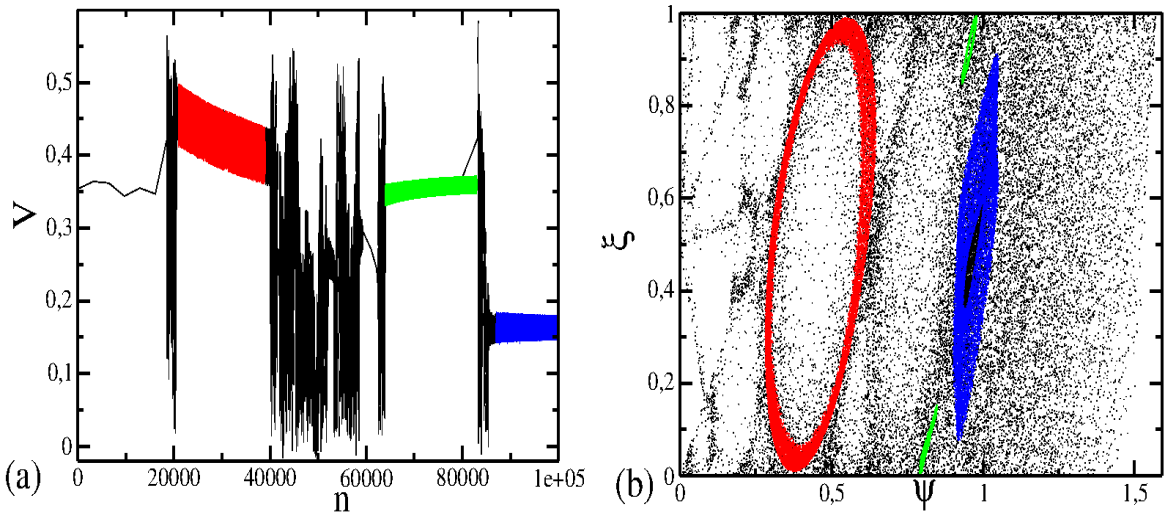

Figura 4.5: *Influência das órbitas de* stickiness *na dinâmica. Em (a) mostramos a evolução da velocidade em função do número de colisões , e em (b) é mostrado a mesma órbita no espaço de fases ψ e ξ. A velocidade inicial considerada foi $V_0 = 0,35$.*

Analisando a Fig.4.5(a), podemos ver destacado nas cores azul, vermelho e verde, como esse comportamento de *stickiness* influencia a velocidade em função do número de colisões. Ainda, podemos perceber que após uma dinâmica inicial em regime de *stickiness*, a curva de velocidade sofre um decréscimo, e fica presa até o final das 10^5 colisões consideradas. Já, na Fig.4.5(b), podemos ver ressaltado nas cores azul, vermelho e verde, o comportamento da órbita que fica aprisionada em regime de *stickiness*.

Em tempo, para o ensemble de altas energias $(V_0 > V_r)$, o fenômenos de *stickiness* também ocorre, pois a estrutura de ilhas não muda com a variação de velocidade. No entanto, como a velocidade é maior do que a da ressonância, a "porosidade"das curvas invariantes que delimitam a região dos pontos fixos, não é mais observada (vide Fig.4.4(a)), e as órbitas em regime de *stickiness* não são mais eficientes nessa troca de comportamento, entre caos e estabilidade. Sendo assim, a velocidade cresce, e observamos difusão ilimitada caracterizando aceleração de Fermi.

4.3 Separação de Ensembles

Nesta seção discutiremos algumas propriedades estatísticas e de transporte para os ensembles de condições iniciais em altas energias $(V_0 > V_r)$ e baixas energias $(V_0 < V_r)$. Diferentemente do que ocorre no modelo FUM, os ensembles não levam a dinâmica ao mesmo comportamento para tempos longos. Para altas energias, observamos aceleração de Fermi, e para baixas energias, decréscimo de velocidade, ou mesmo comportamento estável. Sendo assim, estudamos os ensembles em separado. Primeiramente, para caracterizar os ensembles, mostramos na Fig.4.6 as curvas de V_{RMS} para uma extensa faixa de velocidades iniciais.

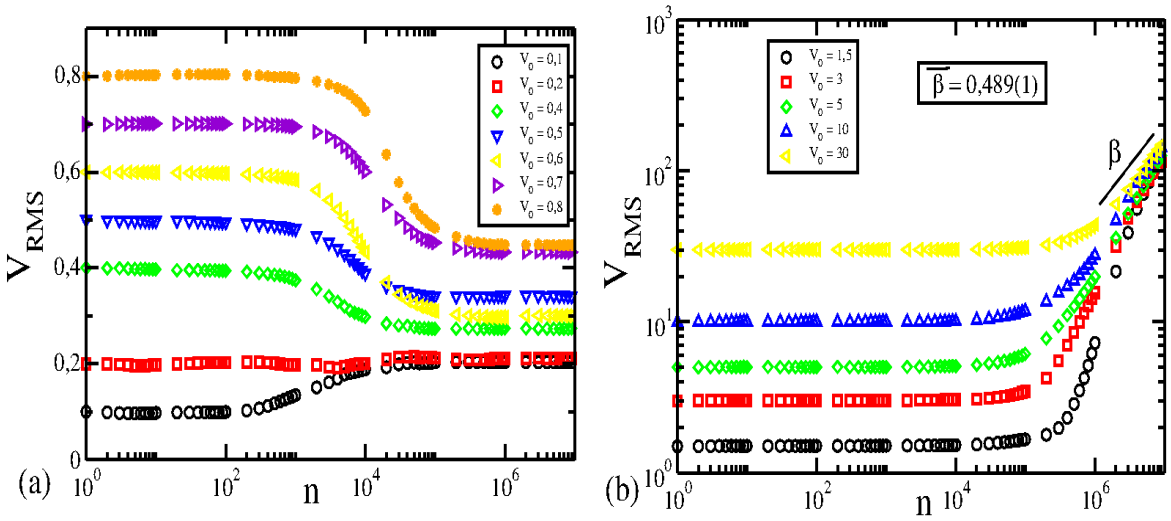

Figura 4.6: *Comportamento das curvas de V_{RMS} em função de n. Em (a) podemos ver o decréscimo de velocidade em função de n, para o ensemble de baixas energias, e em (b) temos o comportamento característico de aceleração de Fermi.*

Para a construção das curvas de V_{RMS} foram utilizadas 5000 condições iniciais distintas para diferentes valores de velocidade inicial, para diferentes ensembles, escolhidas na região do mar de caos. Podemos perceber na Fig.4.6(a), que mostra a evolução de V_{RMS} para o ensemble de baixa energia, que o decrescésimo de velocidade da partícula em função de n é nítido. As curvas de V_{RMS} começam com um regime constante para as colisões iniciais próximas ao valor de sua velocidade inicial. Aqui, as órbitas sofrem sucessivos aprisionamentos ao redor das ilhas, e a mudança de comportamento, de caos para estabilidade pode ocorrer com maior probabilidade, assim como mostra também as Figs.4.4 e 4.5. Logo depois desse regime de *stickiness* no platô inicial da dinâmica, as curvas de V_{RMS} experimentam um repentino decaimento (ou crescimento, como em particular para $V_0 = 0,1$) com a evolução de n, e depois se estabilizam em um regime de velocidade constante novamente (até 10^7 colisões). Ainda, podemos perceber que para diferentes valores de V_0, todas as curvas convergem para a mesma faixa de velocidade final. Tal comportamento, será analisado nas próximas seções.

4.3.1 Aceleração de Fermi

Mostramos na Fig.4.6(b) as curvas de V_{RMS} para o ensemble de altas energias ($V_0 > V_r$). Essas curvas se estabelecem em um platô inicial, próximo ao valor da velocidade inicial, e depois tendem a um envelope de crescimento dado por uma lei de potência ($V_{RMS} \propto n^{\beta}$) com expoente $\beta \approx 1/2$.

Entretanto, não são todas as condições iniciais que sofrem os efeitos do fenômeno de aceleração de Fermi. A Figura 4.7(a,b) mostra um gráfico de $\alpha \times \varphi$ e $\psi \times \xi$, para $V_0 = 3,6$, onde as condições iniciais angulares foram escolhidas no intervalo $[0, \pi/2]$. Vale a pena notar que nesse caso teremos outra configuração geométrica do bilhar, uma vez que a variável ϕ atinge

valores mais altos do que os mostrados na Fig. 4.4.

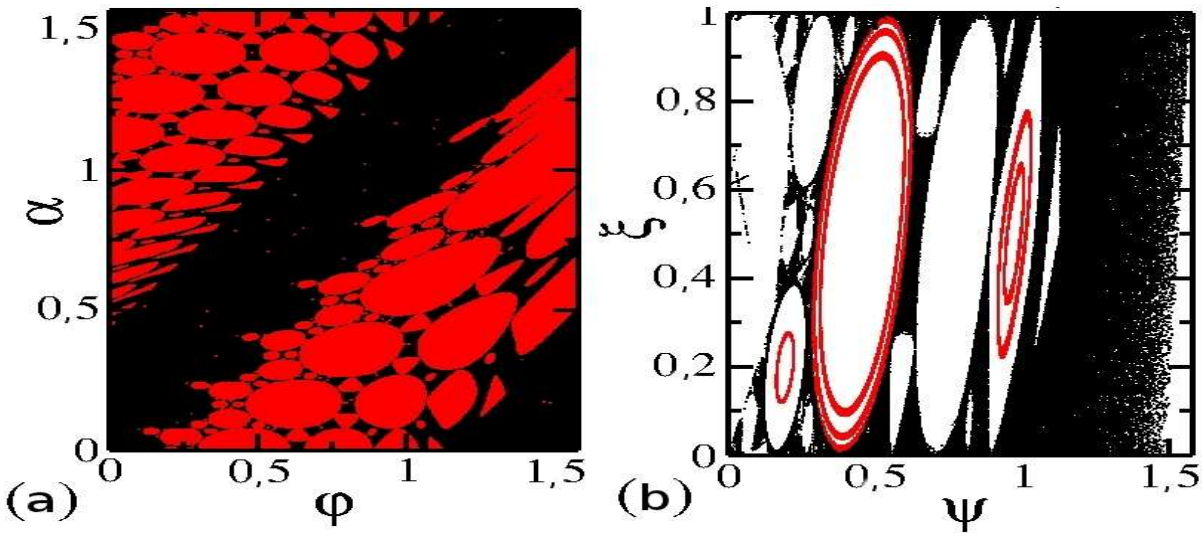

Figura 4.7: *Em (a) temos uma grade de condições iniciais angulares α e φ, onde $V_0 = 3,6$. A região em preto indica crescimento de energia, ao passo, que a região em vermelho, não exibe aceleração de Fermi para pelo menos 10^8 colisões. Em (b), podemos ver o respectivo comportamento das condições iniciais que sofreram aceleração de Fermi e as que não sofreram, no espaço de fases das variáveis $\psi \times \xi$, indicada pela mesma escala de cor de (a).*

A região em preto corresponde as condições iniciais que sofrem aceleração de Fermi e as ilhas em vermelho mostram as que não sofreram os efeitos do crescimento ilimitado de energia. Essa distinção de condições iniciais acontece pois ao escolhermos um par (α,φ) dentro das ilhas em vermelho, corresponde a uma escolha dentro de uma ilha de estabilidade no espaço de fases (ξ,ψ), como mostra a Fig.4.7(b). Sendo assim, tal condição inicial não sofre aceleração de Fermi pois a sua dinâmica é majoritariamente regular. Para a confecção da Fig.4.7, foi utilizada uma grade de 1500×1500 condições iniciais, onde iteramos cada par de condição inicial 10^8 vezes. Classificamos as condições iniciais que sofreram aceleração de Fermi, somente aquelas que após esse número de iteração, tiveram sua velocidade aumentada no mínimo em uma ordem de grandeza, quando comparada com $V_0 = 3,6$.

4.3.2 Discussão de Escala

É conhecido na literatura, que os parâmetros geométricos são invariantes de escala [101]. Sendo assim, basta somente uma combinação desses parâmetros para uma boa análise estatística, então manteremos fixos os parâmetros nos seguintes valores $l = 1$, $a = 0,5$ e $b = 0,01$, que são os que fornecem o valor crítico da velocidade de ressonância em $V_r \approx 1,2$.

Geralmente, o parâmetro que controla a amplitude da perturbação temporal, se mostra uma boa variável para análise. Em nosso caso, o parâmetro B_0, que é definido como amplitude de oscilação da perturbação na fronteira focal do bilhar faz esse papel. Desta maneira, consideramos algumas curvas de V_{RMS} para o ensemble de altas energias, iteradas até 10^8 colisões, com

5000 pares condições iniciais (α, φ) distintas escolhidas em meio ao mar de caos. A análise foi feita em duas partes. Na primeira, variamos a velocidade inicial da partícula e mantivemos constante a amplitude de oscilação da fronteira móvel. Já na segunda parte, fizemos o processo inverso, ou seja, variamos a amplitude de oscilação da fronteira móvel e a velocidade inicial foi mantida fixa. A Figura 4.8 mostra o comportamento das curvas de V_{RMS}, em função de n e as suas respectivas invariâncias de escala, para com os parâmetros V_0 e B_0.

Na Fig.4.8(a) podemos ver que todas as curvas de V_{RMS} se comportam de maneira semelhante, para diversos valores de velocidade iniciais, mas com o valor da amplitude de oscilação da fronteira móvel sendo mantido constante em $B_0 = 0,01$. As curvas obedecem a um regime constante no início que depende da velocidade inicial, e então, elas passam por uma mudança de comportamento, e iniciam um regime de crescimento com um expoente $\beta \approx 1/2$. Já na Fig.4.8(c), são mostradas as curvas de V_{RMS} para diferentes valores da amplitude de oscilação da fonteira móvel, mas com o valor da velocidade inicial sempre constante, $V_0 = 50$. Para as primeiras colisões há um regime de V_{RMS} constante, e depois de passar por uma mundança de comportamento (*crossover* n_x), as curvas experimentam o crescimento ilimitado de energia, com um expoente de crescimento $\beta \approx 1/2$. Basicamente temos o mesmo comportamento dinâmico para o ensemble de altas energias.

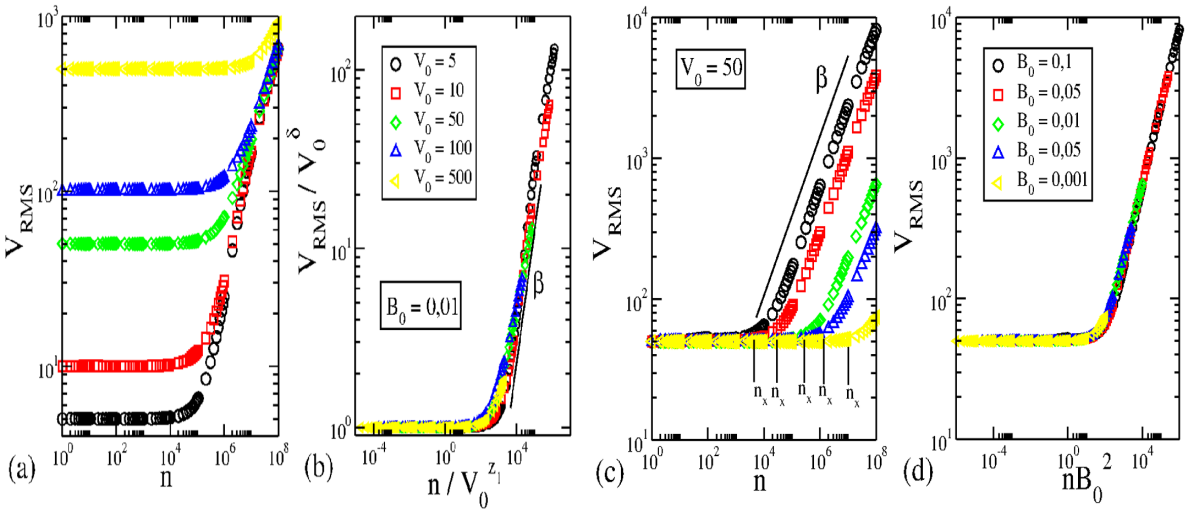

Figura 4.8: *Comportamento das curvas V_{RMS}, com diferentes valores de velocidade inicial (V_0) e amplitude de perturbação (B_0) em função do número de colisões. Podemos ver claramente o típico comportamento do fenômeno de aceleração de Fermi para tempos longos.*

Analisando o comportamento das curvas de V_{RMS}, mostradas nas Figs.4.8(a,c) podemos propor algumas hipóteses de escala para caracterizar o fenômeno de aceleração de Fermi para qualquer faixa de parâmetros, desde que estes obedeçam as condições $V_0 > V_r$ (altas energias) e $B_0/\omega \ll l$ [104, 105]. Sendo assim, propomos que:

- *(i)* $V_{RMS} \propto V_0^{\delta}$, para $n \ll n_x$, onde δ é um expoente crítico,
- *(ii)* $V_{RMS} \propto n^{\beta}$, para $n \gg n_x$, onde $\beta \approx 1/2$ é o expoente de aceleração,

- *(iii)* $n_x \propto V_0^{z_1} B_0^{y+z_2}$, onde z_1 e z_2 são expoentes dinâmicos e y é um expoente de escala [115, 122, 123, 129] obtido na Fig4.8(d), de forma que $y = 2$.

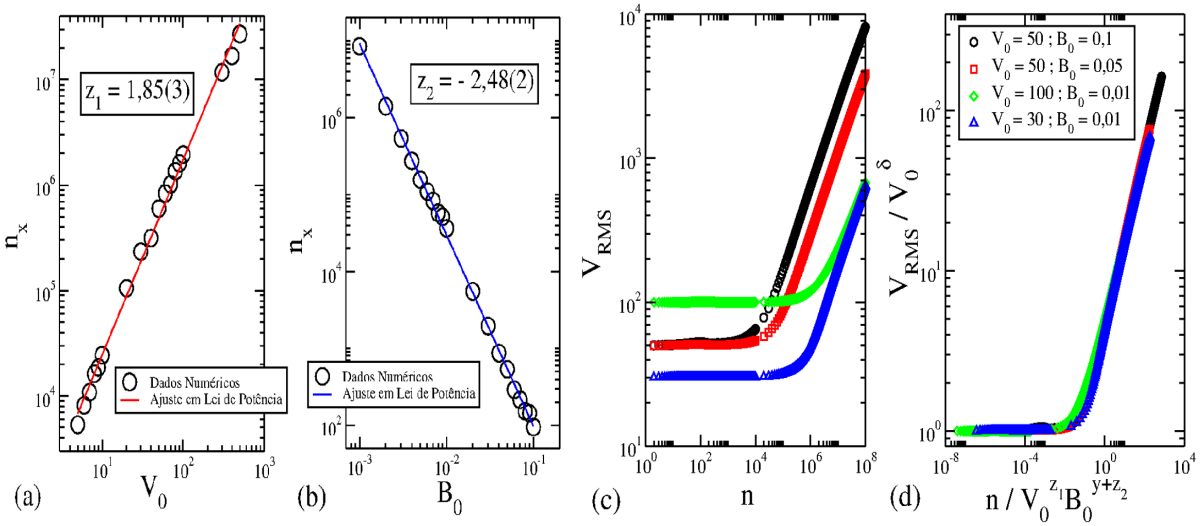

Figura 4.9: *Em (a) temos o ajuste em lei de potência de $n_x \times V_0$, onde foi mantido constante $B_0 = 0,01$ e em (b) mostramos o ajuste em lei de potência de $n_x \times B_0$, onde foi mantido constante $V_0 = 10$. Ambos os ajustes nos fornecem os respectivos expoentes: $z_1 = 1,85(3)$ e $z_2 = -2,48(2)$. Em (c) mostramos o comportamento de algumas curvas de V_{RMS} e em (d) temos a sobreposição de todas as curvas de (c) em uma única curva.*

Considerando que nas curvas de V_{RMS} o regime inicial para $n \ll n_x$, a velocidade permanece constante, percebemos que $\delta = 1$. Os expoente z_1 e z_2 são obtidos através de ajustes em lei de potência pelo número de colisão de *crossover* (n_x) contra a velocidade inicial e novamente n_x contra a amplitude de oscilação da fronteira móvel respectivamente. Esse ajustes numéricos são mostrados na Fig.4.9(a,b), onde encontramos $z_1 = 1,85(3)$ e $z_2 = -2,48(2)$.

De acordo com as hipóteses da escala propostas e com os expoentes encontrados, podemos agora sobrepor as curvas de V_{RMS} em uma única curva que descreve o comportamento da dinâmica da partícula ao longo do número de colisões e dos parâmetros de controle velocidade inicial e amplitude de oscilação da fronteira móvel [129]. Tal curva confirma assim uma invariância de escala de V_{RMS} em função dos parâmetros de controle V_0 e B_0. A Figura 4.8(c,d) mostra perfeitamente essa sobreposição, confirmando a validade das hipóteses de escala sugeridas, descrevendo assim por completo o fenômeno de aceleração de Fermi e sua invariância de escala em função dos parâmetros de controle [129].

4.3.3 Análise estatística para o ensemble de baixa de energia

Como discutido anteriormente, o ensemble de altas energias, onde $V_0 > V_r$, leva o sistema a apresentar difusão ilimitada na velocidade. Daremos agora atenção especial e focaremos nossos estudos no ensemble de baixas energias $(V_0 < V_r)$ e sua relação com o fenômeno de órbitas em regime de *stickiness*. Como visto na Fig.4.6, a separação dos ensembles de energias

é visualizada quando consideramos propriedades médias de alguma observável, no caso V_{RMS}. Tal observável é responsável por caracterizar a difusão na energia, e é útil para quantificar fenômenos dinâmicos. Ainda, podemos considerar distribuições médias da velocidade ao longo do tempo, fazendo histogramas para analisar qual região no espaço de fases, seria responsável pela presença de *stickiness* no ensemble de baixas energias, como mostra a Fig. 4.10.

Começamos então considerando as variáveis angulares, isto é, os ângulos polares (α, ϕ), como mostrado no espaço de fases da Fig.4.4. Escolhendo um conjunto de 10^6 condições iniciais ao longo do mar de caos, onde cada condição inicial foi iterada por até 10^6 colisões. Coletamos então o par final (α, ϕ), de cada condição inicial ao final das 10^6 iterações. Vemos das Figs.4.10(a,b,c) que para $V_0 < V_r$ a grande maioria dos pontos está localizado dentro das regiões onde estariam as ilhas de estabilidade. Esse comportamento final, indica que a grande maioria das condições iniciais, mudaram de comportamento durante a dinâmica, isto é, saíram do caos, e foram para regiões de estabilidade, uma vez que na ressonância, a maioria do espaço de fases fica acessível, e essas órbitas ficam aprisionadas na região próxima ao ponto fixo para tempos longos. Para fazer uma comparação, nas Figs.4.10(e,f,g) mostramos os histogramas do ângulo α, para um ensemble de 10^5 condições iniciais escolhidas no mar de caos, durante toda a sua evolução dinâmica até 10^6 colisões. Podemos ver regiões de preferência para a variável α. Ainda, tais regiões coincidem com as posições das ilhas e dos pontos fixos das Figs.4.10(a,b,c). Particularmente, o formato das fronteiras das ilhas de estabilidade, são bem definidas no histograma da Fig 4.10(g).

Vale lembrar que a influência das órbitas de *stickiness* na ressonância, faz com que essa troca de comportamento, ocorra com maior facilidade. Assim, órbitas em regime de *stickiness* agem como facilitadoras do processo de troca de comportamento entre caos e estabilidade, o que consequentemente faz com que ocorra decaimento de energia no sistema para tempos longos [138].

A título de comparação com o ensemble de altas energias, mostramos na Fig.4.10(d), os pares finais de (α, ϕ), para a mesma situação das Figs.4.10(a,b,c). Podemos ver, que não há mais uma convergência do par final de variáveis angulares para as regiões onde as ilhas de estabilidade estão localizadas, como visto no caso do ensemble de baixa energia. O par final (α, ϕ) fica errante no mar de caos, devido a não influência da ressonância. Na Fig.4.10(h), onde novamente o mesmo procedimento do histograma da variável α é feito, e em uma comparação com a distribuição da variável ao longo da dinâmica, vemos que não existem mais tantas regiões preferenciais. De fato, a região onde o mar de caos está localizado, aumenta sua distribuição, indicando um aumento do comportamento caótico, corroborando assim, para o aparecimento de aceleração de Fermi para altas energias.

Analisando o histograma da Fig.4.10, vemos que algumas ilhas são mais preferenciais do que outras. Isso explica, o porque de na Fig.4.6(a), vermos tantos platôs diferentes de convergência para o ensemble de baixas energias, que é claro dependem da velocidade inicial. Cada um desses platôs está relacionado com a troca de comportamento entre caos e estabili-

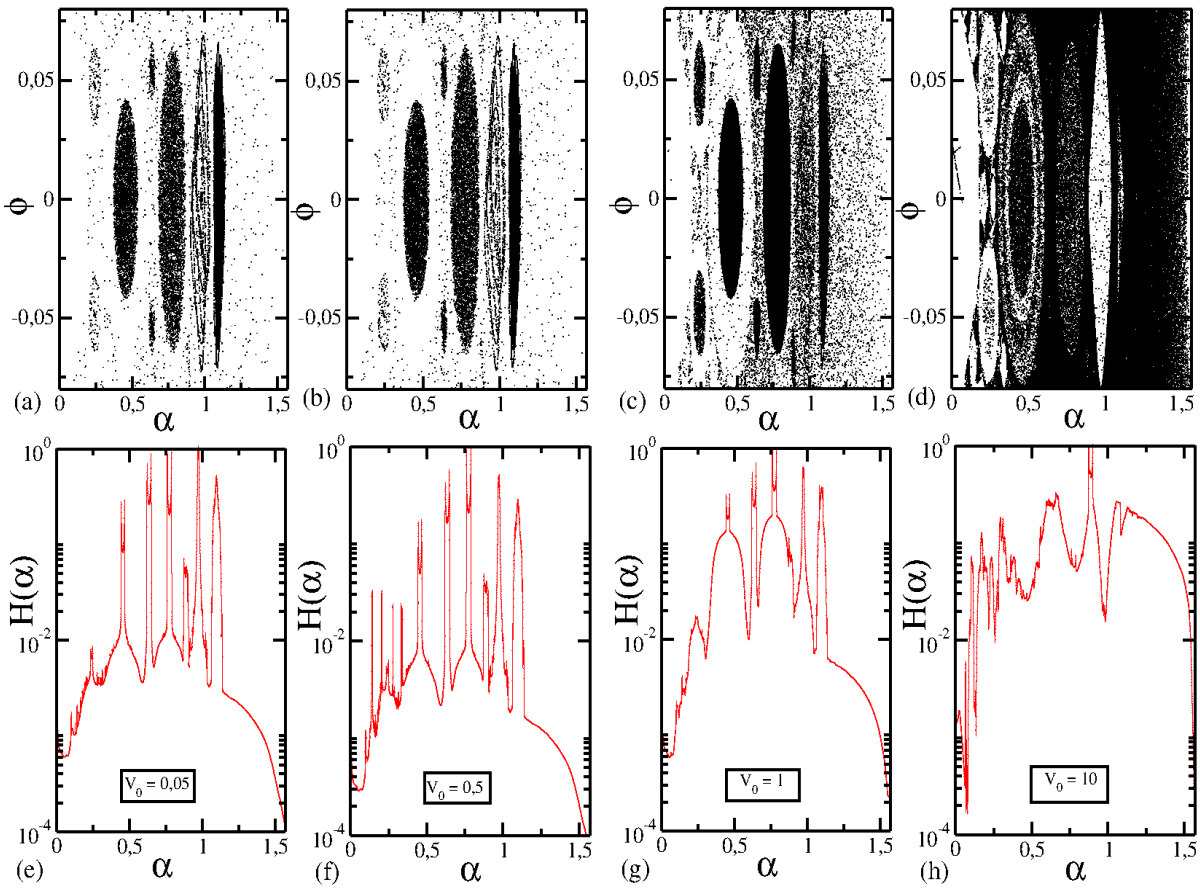

Figura 4.10: *Comparação para o par final das variáveis angulares* (α, ϕ) *para ambos os ensembles de energia, com o histograma para a variável* α *ao longo da evolução dinâmica. Em (a) e em (e)* $V_0 = 0,05$*; em (b) e em (f)* $V_0 = 0,5$*; em (c) e em (g)* $V_0 = 1$*; e finalmente em (d) e em (h)* $V_0 = 10$*. O eixo do histograma* $H(\alpha)$ *em (e), (f), (g) e (h) é mostrado em escala logarítmica.*

dade ao longo da dinâmica, presente na ressonância do ensemble de baixa energia. Assim, para tempos longos cada ilha de estabilidade representa um platô distinto na velocidade. Tal faixa de convergência está numa região finita $V_{final} \in (0,55; 0,15)$. Em particular, a curva de $V_0 = 0,1$, "cresce"para essas regiões de convergência. Ainda, no caso da dinâmica dissipativa, percebemos que isso ocorre de fato, onde as ilhas de estabilidade se tornam *sinks*, e atraem as órbitas para si exatamente na mesma faixa de valores que estamos vendo aqui [137]. Isso confirma que os platôs finais estão relacionados com órbitas estáveis, cada qual com sua ilha de estabilidade.

Em uma tentativa de quantificar os diferentes platôs, fizemos um histograma ao longo da distribuição da velocidade para toda a dinâmica para o mesmo conjunto de condições iniciais usadas nas Figs.4.10(e,f,g,h), e evoluindo até 10^6 colisões. Na Fig.4.11(a) mostramos essas distribuições para três valores de velocidade inicial. Podemos notar uma maior concentração no regime de baixa energia com $V \in [0,1; 1,0]$. Diversos picos são fáceis de serem vistos nesta região, e vão desaparecendo a medida que aumentamos o valor da velocidade inicial, como

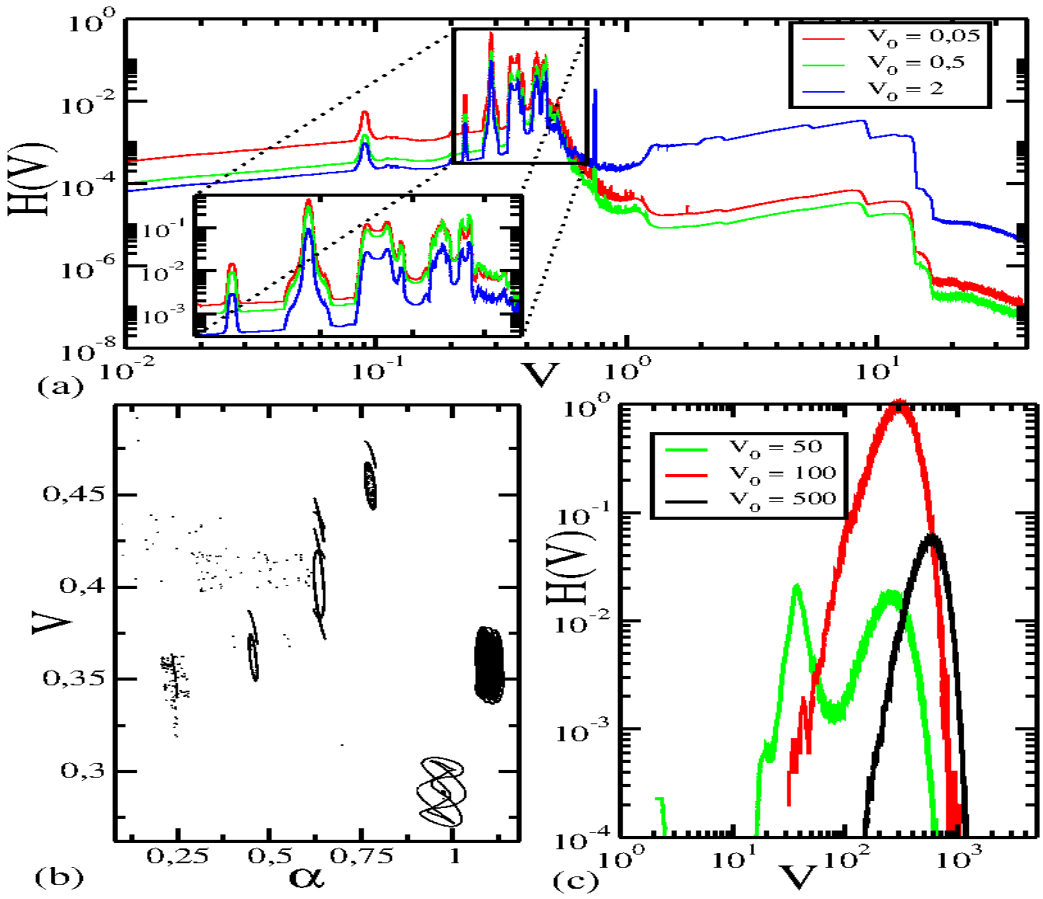

Figura 4.11: *Em (a) temos o histograma do ensemble de baixa energia para a velocidade durante toda a evolução dinâmica, para* $V_0 = 0,05$, $V_0 = 0,5$ *e* $V_0 = 2$. *Em particular, a janela de ampliação mostra os picos com mais intensidade. Em (b) é mostrada a região de convergência da velocidade em função do ângulo* α, *onde podemos identificar em qual respectiva ilha a órbita estacionou. E em (c), temos o histograma para o ensemble de alta energia, onde não aparecem mais diversos picos de intensidade, mas sim uma distribuição melhor definida. Em tempo, os histograma de (a) e (c) estão em escala logarítmica para melhor visualização.*

mostrado na janela de ampliação da Fig.4.11(a), mesmo para $V_0 = 2$, já no considerado ensemble de alta energia $(V_0 > V_r)$. Ainda, para o ensemble de baixa energia, quando a ressonância está presente, existe uma faixa da distribuição de velocidades, acima do valor V_r. Distribuição essa, que não é tão intensa para $V_0 = 0,05$ e $V_0 = 0,5$; mas bem significativa para $V_0 = 2,0$. Com isso, acreditamos que tais distribuições confirmem o que já era previamente suposto, que nem todas as condições iniciais com ensemble de baixa energia, experimentam decaimento de energia, por confinamento em ilhas de estabilidade, que é facilitado por órbitas em regime de *stickiness*. Da mesma maneira, nem todas as condições iniciais do ensemble de alta energia experimentam aceleração de Fermi.

A Figura 4.11(b) mostra a distribuição de velocidades para o ensemble de baixas energias, em comparação com suas posições considerando a coordenada polar α. Essa comparação permite distinguir em qual ilha de estabilidade do espaço de fases, as órbitas convergirão, para

cada platô de velocidade para tempos longos. Por exemplo, a comparação entre a Fig.4.11(a) e Fig.4.11(b), mostra picos pronunciados para velocidade para $V \approx 0,29$ e $V \approx 0,35$. Eles indicam que as órbitas preferem ficar confinadas nas duas últimas ilhas de período-1 no espaço de fases, as que estão localizadas perto de $\alpha \approx 0,97$ e $\alpha \approx 1,10$ respectivamente. Ainda, acreditamos que as ilhas de período-1, sejam as preferidas para a convergência de órbitas. Finalmente, na Fig.4.11(c) mostramos o histograma das velocidades para o ensemble de altas energias a título de comparação. Percebemos que os diversos picos não são mais observados. Agora temos uma distribuição mais bem definida, significando que para altas energias a difusão ilimitada de energia está presente no sistema. Apenas algumas órbitas isoladas levam a um decaimento, como mostra a curva verde da Fig.4.11(c) para $V_0 = 50$.

Todos nossos resultados são baseados na velocidade de ressonância e na separação dos ensembles de energia, que acabam marcando uma transição, de difusão ilimitada de energia, para órbitas estacionárias. Acreditamos que nesta transição, o fenômeno de *stickiness* faz o papel de "facilitador" da troca de comportamento nas baixas energias. Quando a ressonância está presente, ela influencia a dinâmica, e a maior parte do espaço de fases fica acessível para uma órbita, uma vez que as curvas invariantes que delimitam os pontos fixos elípticos (no caso estático), se comportam como *stochastic layers*. Assim, órbitas iniciadas no mar de caos, podem acabar aprisionadas nas ilhas de estabilidade para longos tempos. Tal acesso ao espaço de fases não ocorre quando temos altas energias, pois a ressonância não influencia a evolução dinâmica. Ainda, como o espaço de fases possui uma grande quantidade de ilhas, o fenômeno de *stickiness* é inerente, não tendo um papel tão influente assim nas altas energias, mas agindo como um facilitador, nessa transição entre os comportamentos de caos e estabilidade na ressonância.

A expressão analítica da velocidade de ressonância, foi obtida considerando a análise ao redor das ilhas de estabilidade dos pontos fixos de período-1, que são os maiores em área no espaço de fases, e mais influentes no *stickiness*, umas vez que os platôs de convergência para tempos longos coincidem com as ilhas de período-1. Ainda, poderíamos encontrar diferentes velocidades de ressonância, para diferentes pontos fixos, de diferentes períodos, mas acreditamos que mesmo assim, as ilhas de período-1 continuariam sendo as mais influentes.

4.3.4 Análise de transporte

Vamos agora mapear ao longo do espaço de fases, as condições iniciais, que levam a separação dos ensembles, para velocidades perto da velocidade de ressonância. Para começar, consideramos uma grade de condições iniciais uniformemente distribuída ao longo das variáveis α e ϕ assumindo tanto velocidades acima $(V_0 > V_r)$ e abaixo $(V_0 < V_r)$ da ressonância. Com a evolução da dinâmica, marcamos se uma órbita de baixa energia atinge altas energias e vice-versa. Consideramos como distribuição inicial de 2000×2000 órbitas para $\alpha \in [0, \pi/2]$ e $\phi \in [-\Phi, +\Phi]$, e evoluímos a dinâmica, considerando um buraco no eixo das velocidades. Aqui o buraco introduzido é exatamente na velocidade de ressonância $V_r = 1,2$.

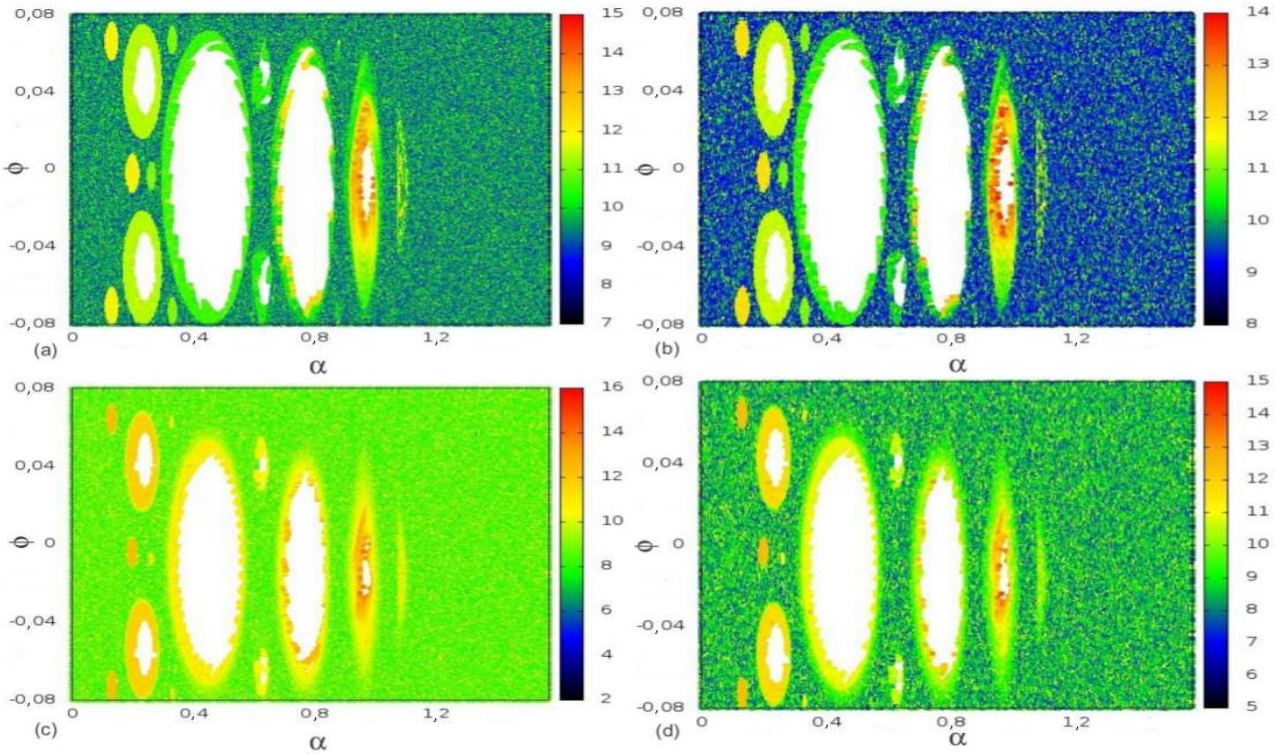

Figura 4.12: *Quantificação da separação de ensembles. Em (a) e (b), temos $V_0 = 2$, e em (c) e (d) temos $V_0 = 1$. A escala de cor representa a colisão de escape. Em (a) e (c) temos condições iniciais que escaparam para cima e foram para o regime de altas energias, e em (b) e (d), temos condições iniciais que escaparam para baixo, e ficam presas em órbitas estacionárias. Preto e azul indicam, escape rápido, enquanto que amarelo e vermelho representam escape lento. Regiões brancas, denotam as ilhas de estabilidade.*

Na tentativa de caracterizar a quantificação da separação dos ensembles, consideramos duas condições acopladas para o escape. Se uma condição inicial de baixa velocidade, adquire energia o suficiente para passar para o regime de alta energia $(V > V_r)$, e ao final de 10^7 colisões, mantém-se nesse regime, dizemos que tal órbita escapou, consequentemente produzindo aceleração de Fermi. Caso contrário, dizemos que ela ficou aprisionada. O mesmo raciocínio vale para órbitas iniciadas no regime de alta energia, que podem escapar para cima ou para baixo, dependendo do seu regime de velocidade final. Tal quantificação é mostrada na Fig. 4.12.

Considerando primeiramente o caso de $V_0 = 2$ (dito, alta energia $V_0 > V_r$), marcamos as condições iniciais que escaparam para cima e atingiram altas energias para tempos longos na Fig.4.12(a). Da mesma maneira, para condições iniciais que escaparam para baixo, e ficaram presas em platôs estacionários, são mostradas na Fig.4.12(b). Fazemos o mesmo procedimento com o caso de $V_0 = 1$, onde condições iniciais que escaparam para cima e atingiram altas energias são ilustradas nas Fig.4.12(c), e finalmente, condição iniciais que escaparam para baixo, e ficam no regime de baixa energia para tempos longos, são representadas na Fig.4.12(d). O gradiente de cores, mostrado na escala logarítmica, onde novamente essa escala é útil para ana-

lisarmos todos os intervalos de escape ao longo da dinâmica (10^7 colisões). Na escala de cores temos que, cores como preto e azul, indicam que o escape ocorre de maneira rápida. Já para as cores como amarelo e vermelho, o escape ocorre de maneira lenta. Por exemplo, na Fig.4.12(a), a cor verde está denotada como 10 na escala de cores. Isso significa que as condições inicias marcadas com essa cor escaparam na colisão $n \approx \exp(10)$, ou seja, por volta da colisão 22.000. Ainda, regiões brancas denotam que nenhuma órbita escapou, e coincidem com as ilhas de estabilidade.

Nas Figs.4.12(a,b) temos que por volta de $1/7$ das condições iniciais escaparam para baixo e ficam saturadas em platôs estacionários; aproximadamente $3/7$ escaparam para cima e experimentam difusão ilimitada; e ou outros $3/7$ não chegam a cruzar a linha de V_r, e também experimentam aceleração de Fermi. Ou seja, esse resultado indica que a grande maioria das condições inicias $\approx 6/7$, ficam no regime de alta energia para $V_0 = 2$. Para as condições iniciais de $V_0 = 1$ dado nas Figs.4.12(c,d) encontramos que aproximadamente $4/7$ delas, escapam para baixo, ficando confinadas, pouco menos de $1/7$ escaparam para cima experimentando aceleração de Fermi; e pouco mais de $2/7$ nunca escaparam do regime de baixa energia. Esses resultados, mostram que para condições iniciais com $V_0 = 1$, aproximadamente $6/7$ da órbitas ficam confinadas no regime de baixa energia. É importante frisar, que as condições que são dadas nas ilhas de estabilidade e nunca escapam, não foram consideradas.

Essa quantificação nos resultados mostra como a velocidade de ressonânica atua na separação dos ensembles da dinâmica do sistema. Em particular, em todos os itens da Fig.4.12, podemos ver órbitas em regime de *stickiness* ao redor de todas as ilhas de estabilidade, comprovando que, independente do ensemble inicial escolhido, o fenômeno é inerente no sistema, porém desempenhando diferentes papéis em cada ensemble. Ainda, podemos interpretar que, ao contrário do observado para o regime de baixas energias, onde o *stickiness* age como facilitador de estabilidades, podemos considerar que para altas energias, ele atua como um mecanismo de retardo da difusão ilimitada da velocidade, assim como no modelo *Bouncer* estudado no Cap.3.

4.4 Conclusões parciais

A dinâmica de um ensemble de partículas não interagentes dentro de um bilhar do tipo *Stadium* é obtida via um mapeamento quadri-dimensional. Obtemos uma velocidade de ressonância que é responsável por separar o ensemble de energias (velocidade). Quando tal ressonância é influente na dinâmica, curvas invariantes que delimitam a fronteira dos pontos fixos se comportam como *stochastic layers*, tornando a grande maioria do espaço de fases acessível. Esse comportamento, faz com que órbitas possam mudar de comportamento para tempos longos.

No ensemble de altas energias, obtemos a difusão ilimitada da velocidade, onde a mesma foi caracterizada via formalismo de escala. Já no ensemble de baixas energias, a ressonância aliada ao *stickiness* inerente ao sistema, faz com que a troca de comportamento entre caos e

estabilidade ocorra com maior possibilidade. Sendo assim, para tempos longos, observamos platôs estacionários para baixas energias. Ainda foi caracterizado cada platô, com a sua respectiva ilha de estabilidade, e feito uma análise de transporte nas proximidades de V_r para os dois tipos de ensembles.

Os resultados apresentados neste Capítulo, foram publicados em [129] e em [138]. Ainda, um artigo sobre os expoentes de Lyapunov e caracterização do estado estacionário do ensemble de baixa energia está em preparação [139].

Capítulo 5

Considerações Finais

Nesta Tese de doutoramento, caracterizamos a influência que o fenômeno de *stickiness* traz para a dinâmica de alguns sistemas dinâmicos. Esse aprisionamento temporário ao redor das ilhas de estabilidade, influencia propriedades de transporte e difusão de órbitas no mar de caos.

Quando consideramos a dinâmica do modelo FUM, um mapeamento bidimensional foi obtido e um espaço de fases misto, onde curvas invariantes impedem o crescimento do mar de caos foi caracterizado. Analisamos a expressão de V_{RMS}, e analiticamente, conseguimos estimar o comportamento da dinâmica ao longo do tempo, para os ensembles de alta e baixa velocidade.

Estudando a probabilidade de sobrevivência para ambos os ensembles, percebemos que o fenômeno de *stickiness* influencia de maneira distinta os decaimentos nos ensembles. Para baixas energias, onde temos poucas ilhas de estabilidade, o decaimento da curva de probabilidade de sobrevivência, é exponencial para tempos curtos e em lei de potência para tempos longos. No entanto, para altas energias, existem muito mais cadeias de ilhas, e para esse caso, o decaimento de curvas de probabilidade de sobrevivência observado é do tipo exponencial esticada. Ainda, fizemos um estudo analítico e numérico para o comportamento da difusão e do transporte no mar de caos. Nossos resultados coincidem de maneira satisfatória, fornecendo expoente de aceleração $\beta = 1/2$.

Já a dinâmica do modelo *Bouncer* foi investigada utilizando o basicamente o mesmo formalismo de mapeamento do FUM, onde espaço de fases do tipo misto também foi caracterizado. Para $\epsilon = 0$ o sistema é integrável, enquanto que para $\epsilon \neq 0$ a dinâmica se apresenta não integrável. A medida que ϵ cresce, as regiões periódicas no espaço de fases se reduzem dando assim início a dinâmica caótica. De fato, para $\epsilon > \epsilon_c$ curvas invariantes e toros invariantes não são observados no espaço de fases, ao passo que regiões periódicas podem ainda ser observadas.

A influência das regiões de *stickiness* também reduz a medida que aumentamos o valor do parâmetro ϵ. Nossas investigações numéricas do espectro de distribuição do Expoente de Lyapunov a tempo finito, nos dão suporte para afirmar que a dinâmica de aprisionamentos temporários que caracteriza o fenômeno de *stickiness* estão presentes no espaço de fases. Elas são caracterizadas por um pico secundário na distribuição dos expoentes de Lyapunov. A probabilidade de sobrevivência é caracterizada por dois regimes distintos de decaimento: *(i)* para dinâmica

caótica, o decaimento é caracterizado por uma curva exponencial, enquanto que na presença de ilhas *(ii)*, a curva característica de decaimento é mais lenta, podendo ser dada por uma lei de potência; resultado este esperado para quando temos estrutura do tipo mista no espaço de fases. Ainda, de acordo com o resultados mostrados na Fig.3.14, podemos perceber que quando o regime *stickiness* está presente no sistema, essas órbitas atuam como um mecanismo que retarda o fenômeno de aceleração de Fermi, caracterizado pelo crescimento ilimitado de energia.

Finalmente em relação ao Bilhar *Stadium*, investigamos a dinâmica do bilhar com fronteiras dependentes do tempo. Um mapeamento quadridimensional foi obtido e uma velocidade de ressonância entre período de rotação ao redor dos pontos fixos e período de perturbação externa foi caracterizada. Tal ressonância faz com que curvas invariantes que delimitam as regiões ao redor dos pontos fixos elípticos, se comportem como *stochastic layers*. Dessa forma, órbitas inicialmente no mar de caos, podem mudar sua dinâmica e atingir platôs estacionários para tempos longos.

A difusão ilimitada de energia é caracterizada no ensemble de alta anergia. Leis de escala foram utilizadas para o estudo desse regime de energia e uma curva tipicamente universal foi obtida para V_{RMS}, mostrando que a aceleração de Fermi no sistema é invariante de escala com relação aos parâmetros de controle V_0 e B_0, para o caso onde $(V_0 > V_r)$.

Quando o ensemble de baixa energia é considerado e a ressonância está presente, o *stickiness* faz o papel de facilitador da troca de comportamento das órbitas, onde para tempos longos, encontramos que V_{RMS} satura em diferentes platôs. Ainda, caracterizamos uma transição para o transporte perto da velocidade de ressonância, que caracteriza a separação dos ensembles de energia, e discutimos a estatística de cada platô estacionário e suas relações com as ilhas de estabilidade de período-1.

5.1 Perspectivas

Essa Tese de doutoramento conclui que órbitas em regime de *stickiness* afetam significativamente a dinâmica dos sistemas estudados. Dependendo do espaço de fases, o fenômeno pode desempenhar funções diferentes, como mecanismo de retardo de aceleração de Fermi ou facilitador de troca de comportamento de órbitas em sistemas ressonantes.

Contudo, o estudo e a investigação não param por aqui. Como trabalhos futuros seria interessante estudar nos sistemas analisados os seguintes segmentos:

5.1.1 FUM

Seria interessante analisar mais a fundo, como o *stickiness* influencia o decaimento da probabilidade de sobrevivência. Isto é, como o regime de *stickiness*, se relaciona com decaimento em lei de potência ou com o decaimento em exponencial esticada.

Também, podemos tentar propor um tratamento analítico para descrever um comportamento de escala, independente dos ensembles de energia associados.

Ainda, estudar a relação do expoente ζ do decaimento de probabilidade de sobrevivência exponencial, com o tamanho do mar de caos no espaço de fases. Uma vez que em princípio tal relação deve ser proporcional ao tamanho do buraco na variável analisada [42].

5.1.2 Modelo *Bouncer*

Seria interessante verificar futuramente assim como no caso do FUM, considerando o transporte, como o expoente ζ do decaimento exponencial, se associa com o tamanho do mar de caos no sistema.

Ainda, em relação as curvas de probabilidade de sobrevivência, seria interessante investigar se o fenômeno de *stickiness* associado com a estrutura mista do espaço de fases, em outros modelos, pode levar a um expoente universal de decaimento para a lei de potência.

Uma outra linha, seria analisar os modos balísticos e sua relação com as interseções das variedades, e encontrar alguma ressonância entre as dobras e o aparecimento dos modos. Além disso tentarmos um tratamento qualitativo estatístico para a difusão anômala observada.

Pretendemos também estudar a influência que a introdução da dissipação poderia trazer para a dinâmica do modelo *Bouncer*, como crises de fronteiras e estruturas do tipo camarão *(shrimps)*.

5.1.3 Bilhar *Stadium*

Seria interessante tentar estudar o fenômeno de ressonância para os outros pontos fixos do bilhar, ou seja, para os períodos 2 e 3. Além disso, podemos variar a frequência de oscilação da fronteira do bilhar e tentar encontrar fenômenos relacionados com sincronização de ressonâncias e rotações. Tentaremos caracterizar essas relações calculando expoentes de Lyapunov e probabilidades de sobrevivência. Acredito que seria posível ainda, caracterizar uma bacia de atração para o ensemble de baixa energia, onde poderíamos separar as condições iniciais que convergem para cada ponto fixo estável.

Uma outra linha seria tentar encontrar estruturas do tipo línguas de Arnol'd, em torno do número de rotação *(winding number)*, para diferentes períodos e pontos fixos.

Ainda, podemos tentar expandir o conhecimento adquirido na análise da dinâmica do bilhar *Stadium*, e na influência da ressonância e *stickiness*, para outros tipos de bilhares, com espaço de fases do tipo misto onde ocorre essa mesma troca de comportamento, como no bilhar elíptico-ovóide [107, 110].

5.2 Publicações

Ao longo do meu Doutoramento foram publicados os seguintes artigos científicos, onde alguns deles deram origem a essa Tese.

- A. L. P. Livorati, T. Kroetz, C. P. Dettmann, I. L. Caldas e E. D. Leonel, *"Stickiness in a Bouncer model: a slowing mechanism for Fermi acceleration*", Phys. Rev. E, v.86, pp. 036204, (2012).

- A. L. P. Livorati, A. Loskutov e E. D. Leonel, *"A peculiar Maxwell's Demon observed in a time-dependent stadium-like billiard*", Physica A, v. 391, pp. 4756, (2012).

- A. L. P. Livorati, I. L. Caldas e E. D. Leonel, *"Decay of energy and suppression of Fermi acceleration in a dissipative driven stadium-like billiard*", Chaos, v. 22, pp. 026122, (2012).

- D. R. Costa, A. L. P. Livorati; E. D. Leonel, *"Critical exponents and scaling properties for the chaotic dynamics of a particle in a time-dependent potential barrier*", Int. J. Bifurc. Chaos, v. 22, pp. 1250250, (2012).

- A. L. P Livorati, O. Georgiou, C. P. Dettmann e E. D. Leonel, *"Escape through a time-dependent hole in the doubling map*", Phys. Rev. E, v. 89, pp. 052913, (2014).

- E. D. Leonel, A. L. P. Livorati e A. M. Cespedes, *"A theoretical characterization of scaling properties in a bouncing ball system*", Physica A, v. 404 , pp. 279, (2014).

- A. L. P. Livorati, M. S. Palmero, C. P. Dettmann, I. L. Caldas e E. D. Leonel, *"Separation of particles leading either to decay or unlimited growth of energy in a driven stadium-like billiard*", J. Phys. A, v. 47, pp. 365101, (2014).

- A. L. P. Livorati, J. A. de Oliveira, D. G. Ladeira e E. D. Leonel, *"Time-dependent properties in two-dimensional and Hamiltonian mappings*", Eur. Phys. J. Special Topics, v. 223, pp. 02308, (2014).

- E. D. Leonel e A. L. P. Livorati, *"Thermodynamics of a bouncer model: a simplified one-dimensional gas*", Comm. Nonl. Sci. Num. Simul., v. 20, pp. 159, (2015).

Referências Bibliográficas

[1] G. Galilei, *"Siderus Nuncious: O mensageiro das estrelas"*, Tradução: Henrique Leitão, Fundação Calouste Gulbenkian, (2010).

[2] G. Galilei, *"O ensaiador"*, São Paulo, Ed. Nova Cultural, (2000).

[3] I. Newton, *"Newton's principia: mathematical principles of natural philosophy"*, New York, published by Daniel Adee, (1846).

[4] I. Newton, *"Principia: pincípios matemáticos da filosofia natural"*, Tradução: Ricci, São Paulo, Editora USP, (1990).

[5] J. H. Poincaré, *"Les Methodes Nouvelles de la Méccanique Celeste"*, Paris: Gauthier-Villars, (1899).

[6] G. D. Birkhoff, *"Dynamical Systems"*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 9. Providence: American Mathematical Society, (1927).

[7] A. N. Kolmogorov, *"Preservation of conditionally periodic movements with small change in hamiltonian function"*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, v. 98, pp. 527, (1954).

[8] S. Smale, *"Differentiable dynamical systems"*, Bull. Amer. Math. Soc., v. 73, pp. 747, (1967).

[9] E. N. Lorenz, *"Deterministic nonperiodic flow"*, J. of Atmospheric Sciences, v. 20, pp. 130, (1963).

[10] M. Feigenbaum, *"Quantitative universality for a class of nonlinear transformations"*, J. of Stat. Phys., v. 19, pp. 25, (1978).

[11] J. L. Kaplan e J. A. Yorke, *"Preturbulence: A regime observed, in a fluid flow model of lorenz"*, Commu. Math. Phys., v. 67, pp. 93, (1979).

[12] B. V. Chirikov, *"An universal instability of many-dimensional oscillator systems"*, Phys. Rep., v. 52, pp. 263, (1979).

[13] R. M. May, *"Simple mathematical models with very complicated dynamics"*, Nature, v. 261, pp. 459, (1976).

[14] M. Hénon, *"A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor"*, Comm. Math. Phys., v. 50, pp. 69, (1976).

[15] Y. Pomeau e P. Manneville, *"Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems"*, Comm. Math. Phys., v. 74, pp. 189, (1980).

[16] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke, *"Chaotic attractors in crisis"*, Phys. Rev. Lett., v. 48, pp. 1507, (1982).

[17] E. Ott, *"Chaos in Dynamical Systems"*, New York, Cambridge University Press, (1993).

[18] A. J. Lichtenberg e M.A. Lieberman, *"Regular and Chaotic Dynamics"*, Appl. Math. Sci. 38, Springer Verlag, New York, (1992).

[19] H. Goldstein, *"Classical Mechanics"*, United States of America, Addison-Wesley, (1969).

[20] K. T. Alligood, T. D. Sauer e J. A. Yorke, *"Chaos: An introduction to dynamical systems"*, Springer-Verlag, New York, (1996).

[21] V. I. Arnol'd e A. Avez, *"Ergodic problems of Classical Mechanics"*, Springer-Verlag, New York, (1968).

[22] V. I. Arnol'd, *"Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics"*, Uspehi Mat. Nauk (18), Issue. 6 v. 114, pp. 91, (1963).

[23] J. Moser, *"On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus"*, Nach. Akad. Wiss. Gottingen II Math. Phys., v. 1, pp. 1, (1962).

[24] J. Moser, *"Stable and random motions in dynamical systems"*, New York, Princenton university press, (1973).

[25] N. Fiedler-Ferrara e C. P. C. do Prado, *"Caos - Uma Introdução"*, Editora Edgard Blücher, São Paulo, (1994).

[26] R. Venegeroles, *"Calculation of Superdiffusion for the Chirikov-Taylor Model"*, Phys. Rev. Lett., v. 101, pp. 054102, (2008).

[27] R. Venegeroles, *"Universality of Algebraic Laws in Hamiltonian Systems"*, Phys. Rev. Lett., v. 102, pp. 064101, (2009).

[28] G. Contopoulos, *"The equilibrium of rapidly rotating galaxies"*, The Astrophys. Journal, v. 17, pp. 147, (1971).

[29] R. S. Mackay, J. D. Meiss e I. C. Percival, *"Transport in hamiltonian-systems"*, Physica D, v. 13, pp. 55, (1984).

[30] G. M. Zaslasvsky, *"Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport*", Phys. Rep., v. 371, pp. 461, (2002).

[31] G. M. Zaslasvsky, *"Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*", Oxford University Press, New York (2008).

[32] G. M. Zaslasvsky, *"Physics of Chaos in Hamiltonian Systems*", Imperial College Press, New York (2007).

[33] G. Contopoulos e M. Harsoula, *"Stickiness Effects in Chaos*", Celest. Mech. Dyn. Astr., v. 107, pp. 77, (2010).

[34] T. H. Solomon, E. R. Weeks e H. L. Swinney, *"Observation of anomalous diffusion and Lévy flights in a two-dimensional rotating flow*", Phys. Rev. Lett., v. 71, pp. 3975, (1993).

[35] M. F. Shlesinger, G. M. Zaslavsky e J. Klafter, *"Strange Kinects*", Nature, v. 63, pp. 31, (1993).

[36] T. Tél, A. de Moura, C. Grebogi e G. Károlyi, *"Chemical and Biological Activity in Open Flows: A Dynamical System Approach*", Phys. Rep., v. 413, pp. 91, (2005).

[37] A-L. Barabasi e H. E. Stanley, *"Fractal Concepts in Surface Growth*", Cambridge University - New York (2008).

[38] P. Gaspard, *"Chaos, Scattering and Statistical Mechanics*", Cambridge: Cambridge University Press, (1998).

[39] E. G. Altmann, J. S. E. Portela e T. Tél, *"Leaking chaotic systems*", Rev. Mod. Phys., v. 85, pp. 869, (2013).

[40] Pathria, R. K., *"Statistical Mechanics*". Elsevier - Burlington (2008).

[41] E. G. Altmann, *"Intermittent Chaos in Hamiltonian Dynamical Systems*", Tese (Doutorado) - Max Planck Institut für Physik Komplexer Systeme, (2007).

[42] A. L. P Livorati, O. Georgiou, C. P. Dettmann e E. D. Leonel, *"Escape through a time-dependent hole in the doubling map*", Phys. Rev. E, v. 89, pp. 052913, (2014).

[43] P. Gaspard e G. Nicolis, *"Transport properties, Lyapunov exponents, and entropy per unit time*", Phys. Rev. Lett., v. 65, pp. 1693, (1990).

[44] P. Gaspard e D. A. Ramirez, *"Ruelle classical resonances and dynamical chaos: The three- and four-disk scatterers*", Phys. Rev. A, v. 45, pp. 8383, (1992).

[45] E. G. Altmann, A. E. Motter e H. Krantz, *"Stickiness in mushroom billiards*", Chaos, v. 15, pp. 033105, (2005).

[46] E. G. Altmann, A. E. Motter e H. Krantz, *"Stickiness in Hamiltonian systems: from sharply divided to hierarchical phase space*", Phys. Rev. E, v. 73, pp. 026207, (2006).

[47] E. G. Altmann e T. Tél, *"Poincaré recurrences and transient chaos in systems with leaks*", Phys. Rev. E, v. 79, pp. 016204, (2009).

[48] E. G. Altmann, *"Emission from dielectric cavities in terms of invariant sets of the chaotic ray dynamics*", Phys. Rev. A, v. 79, pp. 013830, (2009).

[49] O. Georgiou, C. P. Dettmann e E. G. Altmann, *"Faster than expected escape for a class of fully chaotic maps*", Chaos, v. 22, pp. 043115, (2012).

[50] C. P. Dettmann e O. Georgiou, *"Survival probability for the stadium billiard*", Physica D, v. 238, pp. 2395, (2009).

[51] C. P. Dettmann e T. B. Howard, *"Asymptotic expansions for the escape rate of stochastically perturbed unimodal maps*", Physica D, v. 238, pp. 2404, (2009).

[52] C. P. Dettmann e O. Georgiou, *"Open mushrooms: Stickiness revisited*", J. Phys. A, v. 44, pp. 195102, (2011).

[53] D. R. Costa, C. P. Dettmann e E. D. Leonel,*"Escape of particles in a time-dependent potential well*", Phys. Rev. E, v. 83, pp. 066211, (2011).

[54] C. P. Dettmann e E. D. Leonel, *"Escape and transport for an open bouncer: Stretched exponential decays*", Physica D, v. 241, pp. 403, (2012).

[55] E. D. Leonel e C. P. Dettmann, *"Recurrence of particles in static and time varying oval billiards*", Phys. Lett. A, v. 376, pp. 1669, (2012).

[56] R. Klanges, *"Microscopic Chaos, Fractals and Transport in Nonequilibrium Statistical Me- chanics*". Cingapura: World Scientific Publising Co. Pte. Ltd., (2007).

[57] G. M. Zaslasvsky e M. Edelman, *"Polynomial dispersion of trajectories in sticky dynamics*", Phys. Rev. E, v. 72, pp. 036204, (2005).

[58] S. V. Prants, M. V. Budyansky, M. Yu. Uleysky e G. M. Zaslasvsy, *"Chaotic mixing and transport in a meandering jet flow*". arXvi:nlin.CD/0607016 v1, (2006).

[59] N. N. Thyagu e N. Gupte, *"Transport and diffusion in the embedding map*", Phys. Rev. E, v. 79, pp. 066203, (2009).

[60] J. D. Szezech, I. L. Caldas, S. R. Lopes, R. L. Viana e P. J. Morrison, *"Transport properties in nontwist area-preserving maps*", Chaos, v. 19, pp. 043108, (2009).

[61] C. Manchein, J. Rosa e M. W. Beims, *"Chaotic motion at the emergence of the time averaged energy decay*", Physica D, v. 238, pp. 1688, (2009).

[62] M. W. Beims e C. Manchein, *"Gauss map and Lyapunov exponents of interacting particle in a billiard*", Chaos, Solitons and Fractals, v. 39, pp. 2041-2047, (2007).

[63] R. C. Hilborn, *"Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*". Oxford University Press, New York, (1994).

[64] A. Wolf, J. B. Swinney e J. A. Vastano, *"Determining Lyapunov expoents from a time series*", Physica D, v. 16, pp. 285, (1985).

[65] J. D. J. Szezech, S. R. Lopes e R. L. Viana, *"Finite-time Lyapunov spectrum for chaotic orbits of non-integrable Hamiltonian systems*", Phys. Lett. A, v. 335, pp.394, (2005).

[66] J. P. Eckmann e D. Ruelle, *"Ergodic theory of chaos and strange attractors*". Rev. Mod. Phys., v. 57, pp. 617, (1985).

[67] N. Chernov e R. Markarian, *"Chaotic Billiards*", American Mathematical Society, v. 127, (2006).

[68] Y. G. Sinai, *"On the foundations of the ergodic hypothesis for a dynamical system of statistical mechanics*", Math. Dokl., v. 4, pp. 1818, (1963).

[69] Y. G. Sinai, *"Dynamical systems with elastic reflections*", Russ. Math. Surveys., v. 25, pp. 137-189, (1970).

[70] Y. G. Sinai, *"Dynamical systems with elastic reflections: Ergodic properties of dispersive billiards*", Russ. Math. Surv., v. 25, pp. 141-192, (1970).

[71] N. Krylov, *"Works on the Foundations of Statistical Physics*", Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, (1979).

[72] L. A. Bunimovich e Y. G. Sinai, *"Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers*", Comm.. Math. Phys., v. 78, pp. 479-497, (1981).

[73] D. F. M. Oliveira, J. Vollmer e E. D. Leonel, *"Fermi acceleration and suppression of Fermi acceleration in a time-dependent Lorentz Gas*", Physica D, v. 240, pp. 389–396, (2011).

[74] C. P. Dettmann, *"New horizons in multidimensional diffusion: The Lorentz gas and the Riemann Hypothesis*", J. Stat. Phys., v. 146, pp. 181, (2012).

[75] L. A. Bunimovich, *"On Ergodic Properties of Certain Billiards*". Funct. Anal. Appl., v. 8, pp. 254-255, (1974).

[76] L. A. Bunimovich, *"On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards*". Comm. Math. Phys., v. 65, pp. 295, (1979).

[77] M. V. Berry, *"Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard*", Eur. J. Phys. v. 2, pp. 91, (1981).

[78] D. G. Ladeira e J. K. L. da Silva, *"Scaling features of a breathing circular billiard*", J. Phys. A, v. 41, pp. 365101, (2008).

[79] D. F. M. Oliveira e E. D. Leonel, *"On the dynamical properties of an elliptical oval billiard with static boundary*", Comm. Nonli. Sci. and Numer. Simulat., v. 15, pp. 1009, (2010).

[80] J. Koiller, R. Markarian, S. P. Carvalho e S. O. Kamphorst, *"Static and Timedependent perturbations of the classical elliptical billiard*", J. Stat. Phys., v. 83, pp. 127, (1996).

[81] J. Stein e H. J. Stokmann, *"Experimental determination of billiard wave functions*", Phys. Rev. Lett., v. 68, pp. 2867, (1992).

[82] H. J. Stokmann, *"Quantum Chaos: An Introduction*", Cambridge University Press, (1999).

[83] V. Milner *et al.*, *"Optical Billiards for Atoms*", Phys. Rev. Lett., v. 86, pp.1514, (2001).

[84] N. Friedman *et al.*, *"Observation of Chaotic and Regular Dynamics in Atom-Optics Billiards*", Phys. Rev. Lett., v. 86, pp. 1518, (2001).

[85] M. F. Andersen *et al.*, *"Revivals of coherence in chaotic atom-optics billiards*", Phys. Rev. A, v. 69, pp. 63413, (2004).

[86] M. F. Andersen *et al.*, *"Decay of Quantum Correlations in Atom Optics Billiards with Chaotic and Mixed Dynamics*", Phys. Rev. Lett., v. 97, pp. 104102, (2006).

[87] C. M. Marcus *et al.*, *"Conductance fluctuations and chaotic scattering in ballistic microstructures"*, Phys. Rev. Lett., v. 69, pp.506, (1992).

[88] E. Fermi, *"On the Origin of the Cosmic Radiation*", Phys. Rev., v. 75, No 8, pp. 1169, (1949).

[89] S. M. Ulam, *"A collection of mathematical problems. Interscience Tracts in Pure and Applied Math- ematics*", no. 8. Interscience Publishers, New York-London, (1960).

[90] L. D. Pustilnikov, *"On Ulam's problem*", Theor. Math. Phys., v. 57, pp. 1035, (1983).

[91] E. D. Leonel, *"Breaking down the Fermi acceleration with inelastic collisions*", J. Phys. A, v. 40, pp. F1077, (2007).

[92] E. D. Leonel e P. V. E. McClintock, *"A hybrid Fermi-Ulam-bouncer model*". J. Phys. A, v. 38, pp. 823, (2005).

[93] D. G. Ladeira e E. D. Leonel, *"Dynamical Properties of a Dissipative Hybrid Fermi-Ulam-bouncer model*", Chaos, v. 17, pp. 013119, (2007).

[94] E. D. Leonel e J. K. L. da Silva, *"Dynamical properties ofa particle in a classical time-dependent potential well*", Physica A, v. 323, pp. 181, (2003).

[95] E. D. Leonel e P. V. E. McClintock, *"Dynamical properties of a particle in a time-dependent double-well potential*", J. Phys. A, v. 37, pp. 8949, (2004).

[96] D. R. Costa, M. R. Silva, J. A. de Oliveira e E. D. Leonel, *"Scaling dynamics for a particle in a time-dependent potential well*", Physica A, v. 391, pp. 3607, (2012).

[97] D. R. Costa, I. L. Caldas e E. D. Leonel, *"Dynamical properties for an ensemble of classical particles moving in a driven potential well with different time perturbation*", Phys. Lett. A, v. 377, pp. 1814, (2013).

[98] E. D. Leonel e P. V. E. McClintock, *"Chaotic properties of a time-modulated barrier*", Phys. Rev. E, v. 70, pp. 016214, (2004).

[99] D. R. Costa, A. L. P. Livorati; E. D. Leonel, *"Critical exponents and scaling properties for the chaotic dynamics of a particle in a time-dependent potential barrier*", Int. J. Bifurc. Chaos, v. 22, pp. 1250250, (2012).

[100] E. D. Leonel e M. R. Silva, *"A bouncing ball model with two nonlinearities: a prototype for Fermi acceleration"*, J. Phys. A, v. 41, pp. 015104, (2008).

[101] A. L. P. Livorati, A. Loskutov e E. D. Leonel, *"A family of stadium-like billiards with parabolic boundaries under scaling analysis*", J. Phys. A, v. 44 , pp. 175102, (2011).

[102] A. Loskutov, A. B. Ryabov e L. G. Akinshin, *"Mechanism of Fermi acceleration in dispersing billiards with perturbed boundaries*", J. Exp. and Theor. Physics, v. 89, No 5, pp. 966, (1999).

[103] A. Loskutov, L. G. Akinshin e A. N. Sobolevsky, *"Dynamics of billiards with periodically time-dependent boundaries*", Applied Nonlin. Dyn., v. 9, No 4-5, pp. 50, (2001).

[104] A. Loskutov, A. B. Ryabov e L. G. Akinshin, *"Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries*", J. Phys. A, v. 33, No 44, pp. 7973, (2000).

[105] A. Loskutov e A. Ryabov, *"Particle dynamics in time-dependent stadium-like billiards*", J. Stat. Phys., v. 108, No 5-6, pp. 995, (2002).

[106] A. Loskutov e A. Ryabov, *"Chaotic time-dependent billiards*", Int. J. of Comp. Anticipatory Syst., v. 8, pp. 336, (2001).

[107] F. Lenz, F. K. Diakonos e P. Schmelcher, *"Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard*", Phys. Rev. Lett., v. 100, pp. 014103, (2008).

[108] F. Lenz, C. Petri, F. R. N. Koch, F. K. Diakonos e P. Schmelcher, *"Evolutionany phase space in driven elliptical billiards*", New J. Phys., v. 11, pp. 083035, (2009).

[109] F. Lenz, C. Petri, F. K. Diakonos e P. Schmelcher, *"Phase space focusing in dissipative driven elliptical billiards*", Phys. Rev. E, v. 82, pp. 016206, (2010).

[110] E. D. Leonel e L. Bunimovich, *"Suppressing Fermi Acceleration in a Driven Elliptical Billiard*", Phys. Rev. Lett., v. 104, pp.224101, (2010).

[111] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock e J. K. L. da Silva, *"Fermi-Ulam Accelerator Model under Scaling Analysis*", Phys. Rev. Lett., v. 93, pp. 014101, (2004).

[112] J. A. de Oliveira, R. A. Bizão e E. D. Leonel, *"Finding critical expoenents for two-dimensional Hamiltonian maps*", Phys. Rev. E, v. 81, pp. 046212, (2010).

[113] E. D. Leonel, D. F. M. de Oliveira e A. Loskutov, *"Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard*", Chaos, v .19, pp. 033142, (2009).

[114] A. L. P. Livorati, T. Kroetz, C. P. Dettmann, I. L. Caldas e E. D. Leonel, *"Stickiness in a Bouncer model: a slowing mechanism for Fermi acceleration*", Phys. Rev. E, v.86, pp. 036204, (2012).

[115] A. L. P. Livorati, D. G. Ladeira e E. D. Leonel, *"Scaling investigation of Fermi acceleration on a dissipative bouncer model*", Phys. Rev. E, v. 78, pp. 056205, (2008).

[116] J. A. de Oliveira e E. D. Leonel, *"Locating invariant tori for a family of two-dimensional Hamiltonian mappings*", Physica A, v. 390, pp. 3727, (2011).

[117] E. D. Leonel, J. A. de Oliveira e F. Saif, *"Critical exponents for a transition from integrability to non-integrability via localization of invariant tori in the Hamiltonian system*", J. Phys. A, v. 44, pp. 302001, (2011).

[118] J. A. de Oliveira, C. P. Dettmann, D. R. Costa e E. D. Leonel, *"Scaling invariance of the diffusion coefficient in a family of two-dimensional Hamiltonian mappings*", Phys. Rev. E, v. 87, pp. 062904, (2013).

[119] E. D. Leonel e A. L. P. Livorati, *"Describing Fermi acceleration with a scaling approach: bouncer model revisited*", Physica. A, v. 387, pp. 1155, (2008).

[120] D. F. M. Oliveira e E. D. Leonel, *"Suppressing Fermi acceleration in a two-dimensional non-integrable time-dependent oval-shaped billiard with inelastic collisions*", Physica. A, v. 389, pp. 1009, (2010).

[121] E. D. Leonel e L. Bunimovich, *"Suppressing Fermi acceleration in two-dimensional driven billiards*", Phys. Rev. E., v. 82, pp. 016202, (2010).

[122] E. D. Leonel, A. L. P. Livorati e A. M. Cespedes, *"A theoretical characterization of scaling properties in a bouncing ball system*", Physica A, v. 404 , pp. 279, (2014).

[123] E. D. Leonel e A. L. P. Livorati, *"Thermodynamics of a bouncer model: a simplified one-dimensional gas*", Comm. Nonl. Sci. Num. Simul., v. 20, pp. 159, (2015).

[124] M. A. G. Ruggiero e V. L. R. Lopes, *"Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais*", 2ª Ed., Makron Books, São Paulo (1996).

[125] R. M. T. Nascimento, *"Crises de fronteira em aceleradores de Fermi*", Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual Paulista - Rio Claro, (2013).

[126] E. D. Leonel, J. K. L. Silva e S. O. Kamphorst, *"On the dynamical properties of a Fermi accelerator model*", Physica A, v. 331, pp. 435, (2004).

[127] A. L. P. Livorati e E. D. Leonel, *"Analytical approach and scaling arguments for the dynamics of a conservative Fermi-Ulam model*", em preparação para submissão (2014).

[128] A. L. P. Livorati, C. P. Dettmann, I. L. Caldas e E. D. Leonel, *"Transport and diffusion for a conservative Fermi-Ulam model*", em preparação para submissão (2014).

[129] A. L. P. Livorati, A. Loskutov e E. D. Leonel, *"A peculiar Maxwell's Demon observed in a time-dependent stadium-like billiard*", Physica A, v. 391, pp. 4756, (2012).

[130] S. T. Dembinski e P. Pepłowski, *"Accelerator mode in a gravitational bouncer as an attracting mode in a globally chaotic Hamiltonian system*", Phys. Rev. E, v. 55, pp. 212, (1997).

[131] S. Saitô, K. Hirose e Y. H. Ichikawa, *"Symmetry structure of accelerator modes in the standard map*", Chaos, Sollitons andFractals, v. 11, pp. 1433, (2000).

[132] Y. H. Ichikawa, Y. Nomura e T. Kamimura, *"Period-3 catastrophe and enhanced diffusion in two-dimensional Hmailtonian systems"*, Prog. Theor. Phys. Suppl., v. 99, pp. 220, (1989).

[133] V. Rom-Kedar e G. M. Zaslavsky, *"Islands of accelerator modes and homoclinic tangles*", Chaos, v. 9, pp. 697, (1999).

[134] M. S. Custódio e M. W. Beims, *"Intrinsic stickiness and chaos in open integrable billiards: tiny border effects*", Phys. Rev. E, v. 83, pp. 056201, (2011).

[135] T. Kroetz, A. L. P. Livorati, I. L. Caldas, C. P. Dettmann e E. D. Leonel, *"Accelerator modes in a Bouncer model*", em preparação, (2015).

[136] A. L. P. Livorati, *"O bilhar Stadium dependente do tempo: aceleração de Fermi e o fenômeno de retardo de velocidade*", Dissertação (Mestrado), Universidade Estadual Paulista - Rio Claro, (2011).

[137] A. L. P. Livorati, I. L. Caldas e E. D. Leonel, *"Decay of energy and suppression of Fermi acceleration in a dissipative driven stadium-like billiard*", Chaos, v. 22, pp. 026122, (2012).

[138] A. L. P. Livorati, M. S. Palmero, C. P. Dettmann, I. L. Caldas e E. D. Leonel, *"Separation of particles leading either to decay or unlimited growth of energy in a driven stadium-like billiard*", J. Phys. A, v. 47, pp. 365101, (2014).

[139] M. S. Palmero, A. L. P. Livorati, C. P. Dettmann e E. D. Leonel, *"Caractherizing ensemble separation of energy via Lyapunov exponents for a time-dependent stadium billiard*", em preparação, (2015).