UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

**Sobre o Papel de Modos Quase-Normais
na Descrição de Aspectos Quânticos da Gravitação**

Karlúcio Heleno Castro Castello Branco

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: T4368

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos
para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: *Prof. Dr. Élcio Abdalla*

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Élcio Abdalla (Orientador)

Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vanzella (USP-São Carlos)

Prof. Dr. Odylio Denis Aguiar (INPE)

Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (USP)

Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo (USP)

São Paulo

2005

SBI-IFUSP

305M810T4368

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

530.1

CEPEC

D

F

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Castello Branco, Karlúcio Heleno Castro

Sobre o Papel de Modos Quase-Normais na Descrição
de Aspectos Quânticos da Gravitação.
São Paulo 2005.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Élcio Abdalla
Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Física Teórica;
2. Teoria de Campos e Ondas;
3. Relatividade e Gravitação.

USP/IF/SBI-061/2005

ARGUMENTUM ORNITHOLOGICUM

Fecho os olhos e vejo um bando de pássaros. A visão dura um segundo, talvez menos; não sei quantos pássaros vi. Era definido ou indefinido seu número? O problema envolve o da existência de Deus. Se Deus existe, o número é definido, porque Deus sabe quantos pássaros eu vi. Se Deus não existe, o número é indefinido, porque ninguém conseguiu fazer a conta. Neste caso, vi menos de dez pássaros (digamos) e mais de um, mas não vi nove, oito, sete, seis, cinco, quatro, três, ou dois pássaros. Vi um número entre dez e um, que não é nove, oito, sete, seis, cinco, etcétera. Este número inteiro é inconcebível; ergo, Deus existe.

Jorge Luís Borges, em O Fazedor.

RESUMO

Esta tese trata das perturbações dos espaços-tempos de de-Sitter e de certos buracos negros. Determinam-se os chamados *Modos Quase-Normais* (MQNs) associados a essas perturbações e investiga-se, no caso do espaço-tempo de de-Sitter, a possível realização de uma *dualidade holográfica interior-borda*, examinando-se a relação entre os MQNs devidos a uma perturbação escalar no interior do espaço-tempo e os pólos da função de correlação da Teoria de Campos Conforme, que “reside” na borda de tal espaço-tempo. No que diz respeito aos buracos negros, determinam-se os MQNs num certo regime assintótico e, mediante uma conjectura, recentemente discutida na literatura, acerca de tais MQNs e o espaçamento do espectro (quântico) de área de buracos negros, estabelecem-se como seriam tais espectros, ainda que não por meio de uma teoria quântica de gravitação formal.

ABSTRACT

In this thesis, perturbations of the de-Sitter and certain black holes space-times are studied. The so-called *Quasi-Normal Modes* (QNMs) associated to these perturbations are determined and, in the case of the de-Sitter space-time, the possible realization of a *bulk-boundary holographic duality* is investigated, by examining the relation between the QNMs due to a scalar perturbation in the bulk of the space-time and the poles of the correlation function of the Conformal Field Theory, which “lives” on the boundary of such space-time. In what concerns the black holes, the QNMs are determined in a certain asymptotic regime and, by means of a conjecture, recently discussed in the literature, regarding such QNMs and the spacing of the (quantum) area spectrum of black holes, it is established how these spectra would be, though not by means of formal quantum theory of gravity.

AGRADECIMENTOS

Várias pessoas contribuíram ao logo desta jornada de minha formação acadêmica. *Mui sinceramente*, gostaria de agradecer:

Ao meu orientador, o Prof. Dr. *Élcio Abdalla*, pelo imediato aceite em orientar-me, pelo incentivo, apoio e entusiasmo constantes, durante todos os momentos da orientação, pelas discussões e pela compreensão e preocupação durante a etapa de escrita da tese, fase em que problemas pessoais mantiveram-me “fora de órbita”. Gostaria ainda de destacar a liberdade sempre dada, quer nas discussões ou nas investigações de problemas e temas para a tese. Enfim, agradeço-lhe, muito, por tudo!

Ao Prof. Antônio Lima Santos, pela colaboração científica, pelas discussões, conversas e por todos os incentivos.

À toda a minha família, que sempre me apoiou nesta escolha de querer estudar Física.

Ao professor e amigo *José Maria Filardo Bassalo*, pela motivação e orientação sempre dadas, desde a iniciação científica, em que tive a oportunidade de começar a estudar Relatividade Geral. Não é exagero afirmar que você foi a *força motriz* que me impulsionou para que eu deixasse o nosso, para usar uma expressão sua, “quarto mundo”. É um prazer poder contar com sua amizade, pela pessoa singular que você é e por tudo.

Aos meus diletos amigos e conterrâneos, *Alexandre Guimarães Rodrigues, Andrey Gomes Martins, Edson Akira Asano, Ivens Carneiro Martins, Leônidas Melo, Luís Cléber Tavares de Brito, Manoel Reinaldo Elias Filho, Reginaldo Farias e Ruy Guilherme Castro de Almeida*, que, da mesma forma que eu, resolveram deixar as proximidades da linha do equador, e tudo o que de bom há ali, para cruzar este país-continente, em busca de ampliar nossos conhecimentos. Fez, sinceramente, *muita* diferença tê-los por perto, neste *país dentro de um país*, chamado São Paulo. As incontáveis conversas, momentos de descontração e discussões, quer científicas ou não, tiveram papel importante. Não poderia deixar que destacar o quão valoroso foi, não apenas para mim, mas certamente para todos que tiveram a oportunidade de, poder discutir e aprender matemática e física com o

Andrey. Que logo, logo possamos começar alguma colaboração científica.

Ao amigo *Carlos Molina Mendes*, pelas muitas discussões e ajudas ao longo de todo este doutorado. Fizeste, em diversos momentos, as vezes de um legítimo *co-orientador*, por todas as dicas, conversas e auxílios dados. Muito obrigado, mesmo!

Aos amigos do meu grupo de pesquisas, por todas as discussões, conversas, ajudas, incentivos e tudo o mais: *Adenauer Girardi Casali*, *Alan Bandasoli Pavan*, *Cecília Bertoni Martha Hadler Chirenti*, *Davi Giugno*, *Jeferson Oliveira*, *Luís Alejandro Corrêa-Borbonet*, *Michele Ferraz Figueiro*, *Rodrigo dal Bosco Fontana* e *Roman Konoplya* (também pela colaboração científica).

Aos amigos e diversos colegas do Instituto de Física em geral e do Departamento de Física-Matemática, pelos conversas, ajudas e por proporcionarem um ambiente descontraído e agradável. Merecem destaque os sujeitos que mais me fizeram rir: *José Clériston Campos de Souza*, *Leonardo Sioufi Fagundes dos Santos*, *Marcelo Pires* e *Mário César Baldiotti*, cujas veias humorísticas sempre estiveram afiadas! Agradeço ainda à *Andreza Fedalto*, *José Clériston* e *Fábio Cabral*, pelo sempre amigável compartilhamento da sala de estudos, ajuda e todas as conversas que tivemos. Agradeço ao amigo, desde os idos do memorável tempo de *UnB*, *Alessandro Martim Marques*, pelas incontáveis conversas diárias, as diversas análises dos muitos assuntos de interesse, de futebolísticos a científicos. Valeu, meu caro!

Aos professores do Instituto que, através de seminários e colóquios, contribuíram com minha formação. Em especial, agradeço aos professores do Departamento de Física-Matemática, *Henrique Fleming*, *João Carlos Alves Barata* e *Antônio de Toledo Piza*, pelo sempre *excelentes* e motivantes seminários e colóquios que tive a oportunidade de assistir. Não poderia deixar também de agradecer aos professores com quem fiz disciplinas: *Emérson Veloso de Passos*, *Marcelo Otávio Caminha Gomes* e *Said Rabani*.

Às “meninas” da secretaria (*Amélia Ferrari*, *Bety* e *Simone*), assim como ao *João Borges* e à *Sibele Groff*, pelas bom funcionamento das coisas neste Departamento e à gentileza constante.

Gostaria ainda de agradecer aos meus ex-professores do mestrado, *José Wadih Maluf* e *Carlos Augusto Pinto Galvão*, pelos incentivos e ajudas, desde os tempo de *UnB* até

hoje!

Agradeço ainda ao meu amigo *José Francisco da Rocha Neto*, pela amizade, pronta ajuda e colaboração científica.

Ao *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)* e à Fundação de Amparo à Pesquisa no Estado de São Paulo (FAPESP), pelas bolsas concedidas.

Sumário

1	Introdução	11
2	Perturbações e Modos Quase-Normais de Buracos Negros	23
3	Modos Quase-Normais e a Possível Existência de uma Correspondência de-Sitter/Teoria de Campos Conforme	48
3.1	O Espaço-Tempo de de-Sitter: Geometria e Estrutura Causal	55
3.2	Perturbações Escalares do Espaço-Tempo de de-Sitter	62
3.3	Função de Correlação de Dois Pontos para Operadores na Teoria de Campos Conforme na Borda do Espaço de de-Sitter	66
4	Modos Quase-Normais e a Quantização da Área de Buracos Negros	78
4.1	A Proposição de Hod	82
4.2	Quantização da Área de Buracos Negros Quase Extremos de Kerr e Schwarzschild-de-Sitter	85
4.3	Determinação Analítica de Modos Quase-Normais Assintóticos	90
4.4	Modos Quase-Normais Assintóticos de Buracos Negros Pequenos de Schwarzschild-de-Sitter	98
5	Conclusões	104
	Apêndice A	108
	Apêndice B	109

Lista de Figuras

2.1	Potenciais de Regge-Wheeler (Axial) e Zerilli (Polar), para $\ell = 2$ e 3	32
2.2	Evolução temporal de uma perturbação inicial de um buraco negro de Schwarzschild, em escala logarítmica (quadro maior) e linear (quadro interno), para um certo valor fixo de r	35
2.3	Plano- ω complexo, mostrando a deformação do contorno de integração da integral (2.50). As cruces, simetricamente dispostas em relação ao eixo $Im\omega$, marcam a posição de alguns MQNs, localizados no semi-plano $Im\omega < 0$	38
3.1	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de de-Sitter d -dimensional (dS_d). A coordenada conforme temporal, T , varia (tomando-se $a = 1$) de $-\pi/2$, em I^- , a $+\pi/2$, em I^+	58
3.2	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de de-Sitter, mostrando o passado causal de um observador tipo-tempo, no pólo sul.	58
3.3	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de de-Sitter, mostrando o futuro de um observador tipo-tempo, no pólo sul.	59
3.4	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de de-Sitter, mostrando a região causalmente conexa de um observador tipo-tempo, no pólo sul.	59
3.5	Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de de-Sitter, mostrando a região (hachurada) casualmente conexa ($0 \leq r \leq a$); $r = a$ corresponde às linhas tracejadas e $I^\pm$ correspondem a $r = \infty$	61

4.1	(a) O plano- r complexo e o contorno γ . Tomando-se $2M = 1$, tem-se que $r_+ = 1$. A parte mais escura marca a região onde $Re\,x < 0$; (b) O contorno correspondente àquele em (a), no plano- z complexo (ambas as figuras foram extraídas da Ref. [74]).	92
4.2	O plano- r complexo e o contorno γ . A parte hachurada marca a região onde $Re\,x < 0$	100
5.1	Parte real de ω , como função da parte imaginária, para $\mu = 1$	116
5.2	Parte real de ω , como função da parte imaginária, para $\mu = 2$	117

Capítulo 1

Introdução

A Teoria da Relatividade revolucionou profundamente a concepção de *espaço* e *tempo* vigentes na Física até praticamente um século atrás. Tal revolução iniciou-se com a formulação da *Teoria da Relatividade Restrita* [1], culminando, cerca de uma década depois, com a *Teoria da Relatividade Geral* [1], que descreve a Gravitação relativisticamente. A concepção de *espaço-tempo* estabelecida por Minkowski [1], na Relatividade Restrita, passou a ser entendida na Relatividade Geral como sendo *dinâmica*, sendo que agora a própria *geometria do espaço-tempo* está sujeita a uma evolução. Esta é governada pela *equação de campo de Einstein*¹, a saber,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad . \quad (1.1)$$

Dentre algumas das extraordinárias conseqüências da Relatividade Geral, citem-se, por exemplo, o desvio da luz num campo gravitacional, o arrasto do espaço-tempo num campo gravitacional devido a um objeto em rotação (*efeito Lense-Thirring*), a previsão da existência de ondas gravitacionais, a existência de buracos negros e, ainda, a possibilidade de se descrever o Universo em grande escala (*Cosmologia*). Em particular, buracos negros são, sem dúvida, alguns dos mais interessantes objetos que podem existir no Universo, possuindo uma imensa importância para a compreensão da Gravitação Relativística e,

¹Para a definição das quantidades envolvidas, ver o Apêndice A.

portanto, da própria natureza do espaço-tempo. A idéia de buraco negro, no entanto, surgiu ainda no contexto da Gravitação newtoniana, através dos trabalhos, independentes, de Michell (1783) [2] e de Laplace (1796) [3] ².

Observações evidenciam fortemente a presença de buracos negros em vários sistemas binários (de raios-X) de nossa galáxia [6], assim como de buracos negros supermassivos no centro não só da mesma, bem como de outras galáxias [7]. Portanto, buracos negros têm uma imensa relevância para a Astrofísica, já que seriam os responsáveis pela produção das grandes quantidades de raios-X provenientes de sistemas binários. Acredita-se também que uma das mais potentes fontes de radiação gravitacional no Universo possa ser devida à colisão de dois buracos negros [8].

Estudos sobre buracos negros têm revelado que os mesmos são objetos cuja física envolvida é riquíssima. De fato, eles não têm tido papel importante apenas astrofisicamente, mas têm-se revelado também fundamentais do ponto de vista teórico, suscitando questões e contribuindo para a elucidação de aspectos do comportamento quântico da Gravitação, funcionando, portanto, como verdadeiros "laboratórios" para o entendimento da própria Gravitação e na busca da desejada síntese entre esta e a Mecânica Quântica, isto é, no estabelecimento de uma *Teoria Quântica da Gravitação*. Tem-se, por exemplo, o caso do *Princípio Holográfico*, segundo o qual, numa teoria quântica da gravitação, *a física num certo volume do espaço-tempo pode ser descrita em termos de uma teoria em sua borda, possuindo um grau de liberdade por área de Planck* [9], cuja formulação tem por base a *relação entropia-área* de buracos negros ³ e também o chamado *limite de Bekenstein*, um *limite superior* para a entropia de uma dada região do espaço-tempo [11] ⁴. Este princípio

²Ver [4], p. 365, para uma tradução de um ensaio de Laplace, de 1798, em que o mesmo prova que "...the attractive force of a heavenly body could be so large that light could not flow out of it", prova esta não contida na primeira edição de seu *Exposition du Système du Monde* [3], de 1796, no qual apenas foi discutida a idéia de buraco negro como uma hipótese. Para uma discussão detalhada não apenas acerca de tal ponto, mas também da evolução da idéia e da física de buracos negros, até 1987, ver [5].

³A relação entropia-área, dada pela fórmula de Bekenstein-Hawking [10], $S = A/4$ (em unidades $c = G = \hbar = \kappa_B = 1$), tem natureza *holográfica*, já que a entropia de um buraco negro seria proporcional à área de seu horizonte de eventos e não ao volume deste.

⁴O limite de Bekenstein estabelece que a *máxima entropia* de uma região do espaço é, em unidades $c = \kappa_B = 1$, $S_{max} = A/4G\hbar$, em que A é a área da região em questão, G a constante gravitacional

tem na teoria de cordas uma realização concreta, que se dá através da chamada *correspondência AdS/CFT* [12], de acordo com a qual a *teoria de cordas em espaços-tempos Anti-de-Sitter (AdS) tem uma descrição dual em termos de uma Teoria de Campos Conforme (CFT, na sigla em inglês), de uma dimensão a menos*, que pode ser pensada como “residente na borda deste espaço” ⁵. Pode-se dizer então que a informação (física) no interior (*bulk*) de um espaço de AdS está *holograficamente codificada em sua borda*. É válido ainda mencionar que o Princípio Holográfico foi aplicado à Cosmologia, por Susskind [15], o que motivou várias discussões de holografia em contexto cosmológico (ver, por exemplo, [16, 17]).

A Gravitação e a Teoria Quântica, ainda que parcialmente combinadas, isto é, ainda que se esteja apenas no nível *semi-clássico* da Gravitação ⁶, já deu mostras de quão profícua pode ser uma completa união entre ambas. Por exemplo, o resultado semi-clássico, devido a Hawking [20], de que buracos negros comportam-se como sistemas termodinâmicos, emitindo radiação térmica, semelhantemente a um corpo aquecido, com uma temperatura dada por $T_H = \hbar c^3 / 8\pi \kappa_B G M$ (*temperatura de Hawking*), em que M é a massa do buraco negro, é uma das mais interessantes predições da Física teórica. Tal radiação, denominada *radiação de Hawking*, é extremamente difícil de ser detectada, já que seria apreciável apenas para buracos negros pequenos, isto é, cujas massas são muito pequenas em relação à massa solar, que poderiam ter existido no Universo primordial. Através de estudos experimentais dos chamados *análogos gravitacionais* de buracos negros, ou seja, sistemas que exibem um comportamento que “mimetiza” o horizonte de eventos de um buraco negro, espera-se que seja possível obter a detecção do análogo à radiação de Hawking, a fim de que se chegue, no caso de buracos negros reais, a um maior entendimento

newtoniana e $\hbar = h/2\pi$, em que h é a constante de Planck.

⁵A teoria de cordas é uma das mais promissoras propostas para se quantizar a gravitação, sendo que, além de ser uma teoria de unificação das interações fundamentais da natureza, é uma teoria quântica da gravitação [13]. Outra proposta promissora para a quantização da gravitação é a chamada *Gravitação Quântica de Laço* [14], que é uma teoria de quantização canônica da relatividade geral.

⁶Por gravitação *semi-clássica*, entende-se que o campo gravitacional é *clássico* e os demais campos de interação, que se propagam nele, são quantizados. Dito de outra forma, tem-se a teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos (ver, por exemplo, [18, 19]).

de tal radiação e da física associada à mesma ⁷.

Em linhas gerais, esta dissertação tem como tema as *perturbações de espaços-tempos*, em particular os de buracos negros e o espaço-tempo de de-Sitter (vazio).

Os chamados *Modos Quase-Normais* (MQNs) de buracos negros e de estrelas, ou mesmo de um espaço-tempo arbitrário que seja descrito por uma solução exata da equação de Einstein, constituem um dos principais tópicos de estudo da teoria da Relatividade Geral. Basicamente, derivam da linearização da equação de Einstein, ao se considerarem pequenas perturbações de um dado espaço-tempo de fundo, fixo, o qual é descrito por uma solução exata da mesma. No entanto, MQNs têm-se revelado extremamente importantes também em processos em que o campo gravitacional envolvido é muito forte. De fato, a análise numérica da equação de Einstein, completamente não-linear, em processos de colisão entre dois buracos negros, ou de duas estrelas de nêutrons, assim como de colapsos estelares, mostra que a radiação gravitacional resultante é dominada, para tempos intermediários, por MQNs [23]. Isto implica que MQNs não têm existência limitada apenas ao regime linear da gravitação. Pode-se dizer então que o grande papel dos MQNs na Relatividade Geral e na Astrofísica Relativística reside na análise de ondas gravitacionais [23], além do que, tem sido cada vez maior a expectativa da detecção de tais ondas, sendo que atualmente há em curso vários projetos de detectores (antenas) de ondas gravitacionais (sobre tais projetos, ver, por exemplo, [25]) ⁸. A análise dos sinais de ondas gravitacionais permitirá que sejam inferidas informações dos sistemas envolvidos nos processos de geração de ondas acima referidos, como acerca de massas e raios de estrelas e massas de buracos negros [26].

⁷A idéia do estudo de sistemas análogos à gravitação foi sugerida por Unruh, ao propôr um *análogo sonoro* de um buraco negro. De acordo com Unruh [21], os mesmos argumentos que levam à emissão de radiação por um buraco negro, também implicam na existência de um espectro térmico de ondas sonoras, provenientes de um *horizonte sônico*, resultante da propagação de ondas sonoras num fluido (irrotacional) de velocidade um pouco acima da do som. Atualmente, tem havido grande interesse pelo estudo de modelos análogos à Gravitação, com expectativas de criação, em laboratório, de análogos sonoros e eletromagnéticos de buracos negros (ver, por exemplo, [22] e referências aí citadas).

⁸Há inclusive um projeto de detecção sendo implantado no *Instituto de Física da Universidade de São Paulo*. Trata-se do detector *Mario Schenberg*, uma antena esférica, que deverá ser sensível na faixa de 3,0 – 3,4 kHz [24].

O estudo das perturbações de buracos negros originou-se com o trabalho de Regge e Wheeler [27], no qual foi analisada a questão da estabilidade de um buraco negro de Schwarzschild, sujeito a uma pequena perturbação gravitacional inicial, conforme será discutido no Cap. 2. A continuidade deste estudo deu-se somente vários anos mais tarde, por Vishveshwara [28], Edelstein e Vishveshwara [29] e Zerilli [30]. Em particular, Vishveshwara [28] verificou, através de simulações numéricas, que quando um buraco negro de Schwarzschild é submetido a uma pequena perturbação inicial (um pulso de onda gaussiano, no caso), a resposta da mesma (sua evolução temporal) é dominada por vibrações muito características, *exponencialmente amortecidas no tempo*, que depois viriam a ser denominadas, por Press [31], de *modos quase-normais* (MQNs), sendo independentes da forma inicial da perturbação, dependendo apenas da massa do buraco negro, neste caso seu único parâmetro característico. Estudos de outros tipos de perturbações (gravitacionais, eletromagnéticas e de *spin*-1/2), bem como de outros tipos de buracos negros (Reissner-Nordström e Kerr), conduziram ao panorama geral de que se um buraco negro sofre uma pequena perturbação inicial, a resposta à mesma é marcada inicialmente por uma fase transiente, seguida, para tempos intermediários, por oscilações amortecidas (vibrações quase-normais) e, por fim, para tempos muito longos, de caudas, isto é, um decaimento do tipo lei-de-potência ⁹.

Tipicamente, os MQNs de um buraco negro são frequências *complexas*, obtidas como os "auto-valores" de uma equação de onda que descreve as (pequenas) perturbações (independentes do tempo) do mesmo, com certas condições de contorno. As partes reais destas frequências podem ser interpretadas como representando a "oscilação do buraco negro" (mais precisamente, do espaço-tempo exterior ao mesmo), enquanto que as partes imaginárias representam os tempos de decaimento das perturbações, podendo ser interpretadas como associadas ao amortecimento das "oscilações do buraco negro", já que ambas

⁹Convém já neste ponto observar que tais caudas decorrem da estrutura assintótica do espaço-tempo, sendo que para buracos negros em espaços-tempos com constante cosmológica, notadamente os de tipo de-Sitter (dS) e Anti-de-Sitter (AdS), o comportamento das perturbações para tempos muito longos apresenta-se bastante diferente daquele no caso de espaços-tempos assintoticamente planos. Uma análise detalhada do decaimento de perturbações em dS e AdS, incluindo o caso *d*-dimensional, está tratada em [32] e em algumas referências ali citadas.

são características do buraco negro. Por exemplo, no caso de um buraco negro de Kerr, tais oscilações dependerão de sua massa e seu momento angular, os únicos parâmetros característicos do mesmo. No caso de estrelas, os MQNs, em geral, dependerão ainda do raio desta. Conseqüentemente, MQNs funcionam como as "impressões digitais" de buracos negros e estrelas. Revisões sobre MQNs de buracos negros e estrelas, bem como sobre o papel dos mesmos na análise dos sinais de ondas gravitacionais, podem ser vistas em [33, 34].

Esta tese trata também das perturbações e MQNs de um espaço-tempo que não é associado a um buraco negro, mas que é de bastante relevância, qual seja, o espaço-tempo de de-Sitter (vazio), dotado de um horizonte de eventos (cosmológico), ao qual se podem atribuir uma temperatura e uma entropia, em analogia com o que se dá no caso de um buraco negro, conforme mostrado por Gibbons e Hawking [35]. Para que se entenda melhor a motivação do estudo de MQNs do espaço-tempo de de-Sitter, tal como feito nesta dissertação, é conveniente que se trace, a seguir, um pouco do desenvolvimento da literatura acerca das perturbações de espaços-tempos dotados de constante cosmológica, isto é, dS e AdS.

Nos últimos anos tem havido bastante interesse pelo estudo de perturbações e MQNs de buracos negros em espaços-tempos *não-assintoticamente planos*, a saber, espaços-tempos de de-Sitter (dS) e Anti-de-Sitter (AdS), motivados pela análise da estabilidade do horizonte de Cauchy de buracos negros [36] e pela correspondência AdS/CFT [37], respectivamente (mais recentemente, uma outra motivação vem de uma possível correspondência dS/CFT; sobre esta, ver adiante). No caso de espaços-tempos do tipo dS, o decaimento de perturbações de buracos negros de Schwarzschild e Reissner-Nordström, nele imersos, mostrou a influência do horizonte de eventos cosmológico sobre o decaimento das mesmas [36, 32]. No caso de buracos negros de AdS, a análise dos MQNs e do decaimento das perturbações iniciou-se com Chan e Mann [38], seguidos de Horowitz e Hubeny [37], estes fortemente motivados pela correspondência AdS/CFT. O estudo de perturbações nestes espaços-tempos dotados de constante cosmológica é importante não apenas como mera extensão da análise dos casos tratados na literatura, até então em grande maioria para espaços-tempos assintoticamente planos, mas também devido ao grande interesse, nos

últimos anos, por espaços do tipo AdS, devido à correspondência AdS/CFT [12] e, mais recentemente, devido também à conjectura dS/CFT (mais detalhes são dados adiante), no caso de espaços-tempos de dS.

Para espaços-tempos assintoticamente AdS, a dinâmica das perturbações apresenta-se um tanto distinta do que ocorre no caso de espaços-tempos que são assintoticamente planos. Na ausência de um buraco negro, os campos que se propagam em espaços-tempos de AdS podem, em geral, ser expandidos em modos normais, o que se deve ao fato de que a constante cosmológica fornece um "potencial confinador", sendo que há somente soluções com frequências reais e discretas [37]. Havendo a presença de um buraco negro, os campos decaem devido à presença do horizonte de eventos do mesmo e haverá, então, oscilações cujas frequências, complexas, serão características do buraco negro (MQNs) [37]. É oportuno mencionar que, neste caso, como o potencial diverge no infinito, não há a presença de caudas, conforme mostrado em [39].

Invocando a correspondência AdS/CFT, Horowitz e Hubeny sugeriram [37] que as frequências quase-normais associadas a perturbações de buracos negros em espaços-tempos de AdS possuem uma interpretação direta em termos da correspondente teoria de campos conforme dual que "reside" na borda de tal espaço-tempo. De acordo com tal correspondência, um buraco negro grande num espaço-tempo assintoticamente AdS, isto é, cujo raio do horizonte de eventos é muito maior que o raio cosmológico, corresponderia a um estado (aproximadamente) térmico na teoria de campos conforme dual [40]. Assim sendo, perturbar um buraco negro corresponderia a perturbar tal estado térmico, de modo que o decaimento da perturbação no *interior* do espaço-tempo descreveria o retorno ao equilíbrio da teoria de campo na borda. Isto permite, então, que se obtenha uma predição da escala temporal de termalização da teoria de campo dual, o que seria, em princípio, bastante difícil de ser conseguido diretamente via esta última [37]. Horowitz e Hubeny [37], ao estudarem as perturbações de um buraco negro grande de Schwarzschild-AdS, por meio de um campo escalar não-massivo, minimamente acoplado à curvatura, obtiveram que os MQNs resultantes estão em escala com a temperatura do mesmo.

O trabalho de Horowitz e Hubeny motivou outros estudos de perturbações de buracos negros em espaços-tempos do tipo AdS, como o das perturbações e determinação dos

correspondentes MQNs de buracos negros de Reissner-Nordström-AdS [41] e de BTZ [42], sendo que resultados qualitativamente análogos àqueles em [37] foram obtidos, corroborando também a conjectura AdS/CFT. Todavia, até então, os MQNs de buracos negros AdS forneciam apenas uma evidência qualitativa da dualidade AdS/CFT. Por outro lado, de acordo com esta correspondência, a parte imaginária dos MQNs deveria ser interpretada como a escala temporal para a termalização de pequenas perturbações na teoria de campo conforme dual. Assim sendo, os MQNs devidos a uma perturbação Φ no *interior* de um espaço-tempo de AdS deveriam corresponder aos pólos da função de Green retardada (função de correlação retardada), associada a um operador O , dual ao campo Φ , na CFT. Este teste quantitativo da correspondência AdS/CFT pôde ser explicitamente realizado ao considerar-se um buraco negro de BTZ, que é uma solução do tipo AdS, em $(2 + 1)$ -dimensões [43]. Neste caso, como mostrado por Birmingham, Sachs e Solodukhin, tanto os MQNs, associados a uma perturbação no *interior*, quanto os pólos da função de correlação (retardada) na CFT na borda, associada a um operador dual à perturbação no *interior*, podem ser analítica e exatamente determinados, havendo entre eles uma concordância exata [44].

Como já dito, a destacada dualidade AdS/CFT é formulada em teoria de cordas. No entanto, pode-se dizer que um dos grandes objetivos desta teoria, hoje, é a mesma provar ser capaz de coadunar-se com a evidência experimental de que se vive num Universo do tipo de-Sitter, já que dados provenientes de observações das chamadas *supernovas do tipo Ia* [45] indicam que atualmente o Universo encontra-se em *expansão acelerada*, o que é coerente com uma constante cosmológica *positiva* [46]. Pode-se, portanto, dizer que o Universo encontra-se numa fase em que se pode descrevê-lo por um espaço-tempo do tipo de-Sitter [46]. É, portanto, instigante que a teoria de cordas esteja formulada apenas em fundos (espaços-tempos) de Anti-de-Sitter (AdS), que são dotados de constante cosmológica *negativa* ¹⁰.

¹⁰Há que se mencionar, contudo, que segundo os chamados modelos cosmológicos de *(mem-)branas*, inspirados em teoria de cordas, há a possibilidade de que a natureza comporte dimensões extras não-compactas grandes, podendo, assim, ocorrer que o Universo quadridimensional esteja imerso num espaço-tempo de dimensão maior, do tipo AdS. É, obviamente, somente através de testes experimentais que se poderá vir a ter alguma evidência de uma tal dimensão extra. É oportuno mencionar que através do

Por outro lado, movido pelo sucesso da conjectura AdS/CFT, e em grande analogia com a mesma, Strominger, em 2001, propôs [48] o análogo desta para espaços-tempos de de-Sitter, ou seja, ele conjecturou uma *correspondência dS/CFT*, segundo a qual haveria a existência de uma dualidade holográfica relacionando a gravitação quântica num espaço-tempo de de-Sitter d -dimensional (dS_d) a uma teoria de campos conforme residente na borda do mesmo (CFT_{d-1}). Isto motivou vários trabalhos discutindo o estabelecimento de tal dualidade, como, por exemplo, em [52]. Contudo, esta conjectura carece ainda de um maior suporte, não tendo, portanto, o mesmo *status* da correspondência AdS/CFT. Por outro lado, como já dito, o trabalho de Birmingham, Sachs e Solodukhin [44], que, através de MQNs de um buraco negro $((2+1)$ -dimensional) de BTZ, corroborou a dualidade AdS/CFT, motivou um estudo totalmente análogo para o espaço-tempo de de-Sitter tridimensional, por Abdalla *et al.* [49], tendo sido encontrado suporte quantitativo em favor de uma dualidade dS/CFT. Isto fez com que se procurasse investigar a extensão de tal trabalho para o caso quadridimensional, assim como para dimensões maiores, o que foi tratado por Abdalla *et al.* [50] e será discutido no Cap. 3 desta tese. Objetivou-se, nessa Ref. [50], contribuir para uma extensão dessa dualidade *interior-borda*, agora para o caso quadridimensional em que a constante cosmológica do *interior* é positiva, isto é, tratou-se de investigar, via a análise de MQNs, se o *interior* do espaço-tempo de de-Sitter quadridimensional é "holograficamente dual" a uma teoria de campos conforme na borda do mesmo, o que, por conseguinte, daria um maior suporte ao estabelecimento de uma possível correspondência dS/CFT. É bastante desejável que se estabeleça uma correspondência do tipo dS/CFT, a fim de que se possa estender a descrição holográfica da gravitação para o caso de espaços-tempos do tipo de-Sitter. Aliás, tem-se discutido inclusive a descrição holográfica de espaços-tempos arbitrários [51].

Uma outra questão tratada nesta tese diz respeito ao papel que pode ter o *espectro assintótico* de MQNs *fortemente amortecidos* (i.e., cujas partes imaginárias são muito grandes comparadas às suas partes reais) de um buraco negro na quantização de sua área, como sugerido por Hod [55]. Hod usou o espectro assintótico de MQNs fortemente amortecidos para estudar as caudas associadas às perturbações de buracos negros em *branas*, pode-se obter tal evidência [47].

tecidos para determinar, semiclassicamente (ou melhor, *heurísticamente*), o espaçamento (unidade fundamental de área) do espectro quântico de área de um buraco negro. Desde então, tem havido na literatura várias investigações com interesse neste tipo de MQNs ¹¹.

Para que se entenda a proposta de Hod, deve-se começar destacando que, conforme pioneiramente conjecturado por Bekenstein, numa teoria quântica da gravitação, a área do horizonte de eventos de um buraco negro deve ter um espectro *discreto*, com autovalores *uniformemente* espaçados [57, 58, 59]. A fim de determinar o espaçamento de tal espectro (unidade fundamental de área), Hod observou que ao se considerarem as partes reais dos MQNs (gravitacionais) *assintóticos* (*i.e.*, *aqueles fortemente amortecidos*) de um buraco negro de Schwarzschild, de massa M , os quais foram obtidos *numericamente* por Nollert [60], e são dados por

$$\omega_n = 0,0437123M^{-1} - \frac{i}{4M} \left(n + \frac{1}{2} \right) + O(n^{-1/2}) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad , \quad (1.2)$$

então, valendo-se da aproximação $0,0437123 \sim \frac{\ln 3}{8\pi}$, a parte real dos mesmos poderia ser escrita como $\omega_R = \frac{\ln 3}{8\pi M}$, em unidades $c = G = 1$ (ou $\omega_R = T_H \ln 3$, em unidades tais que $c = G = \hbar = \kappa_B = 1$). Além disto, invocando o *Princípio da Correspondência de Bohr*, segundo o qual “*para números quânticos grandes, as frequências de transição devem-se igualar às frequências clássicas*”, Hod considerou que ao “absorver um MQN” assintótico, um buraco negro de Schwarzschild deveria sofrer uma variação de energia (massa) dada por $\delta M = \hbar \omega_R$. Como esta variação de massa implica numa correspondente variação de

¹¹Astrofisicamente, os MQNs que têm relevância são aqueles fracamente amortecidos, que darão contribuições dominantes para a radiação gravitacional gerada, por exemplo, em colapsos estelares, em colisões de estrelas de nêutrons ou de buracos negros. MQNs relacionam-se essencialmente à dinâmica clássica de buracos negros, não tendo, assim, pelo menos *a priori*, nenhuma relação com os aspectos quânticos destes. Porém, mesmo antes de Hod fazer uso dos MQNs de um buraco negro com vistas a extrair alguma informação à respeito de seu espectro quântico de área, o possível papel que os mesmos podem vir a desempenhar na descrição quântica de um buraco negro foi aventado primeiramente por York, ainda no início da década de 1980 [56], ao descrever dinamicamente a origem da radiação de Hawking. Porém, sua proposta de relacionar os MQNs de um buraco negro (esférico) a este aspecto quântico do mesmo, deu-se através do emprego de modos fracamente amortecidos, isto é, com uso apenas dos primeiros sobretons do espectro de MQNs do buraco negro (aqueles de menor parte imaginária).

sua área, Hod pôde determinar o espaçamento do espectro de área de tal buraco negro, conforme será discutido no Cap. 4.

O trabalho de Hod, acima referido, é de 1998, sendo que o interesse pelo possível papel de MQNs assintóticos na descrição do espectro de área de um buraco negro, e, portanto, pela própria determinação de tais modos, somente se tornou atrativo após Dreyer [63], em fins de 2002, seguindo a sugestão de Hod, ter fixado um parâmetro livre que há na chamada *Gravitação Quântica de Laço* (*Loop Quantum Gravity (LQG)*), denominado parâmetro de Barbero-Immirzi ¹². Com isto, Dreyer pôde obter a entropia de Bekenstein-Hawking na teoria de *LQG* (ver Apêndice B). Evidência de que o espectro de área de um buraco negro é uniformemente espaçado, foi dada, por meio do uso da proposta de Hod, no contexto da *LQG*, por Polychronakos [65]. É válido também ressaltar que logo após o trabalho de Dreyer, Kunstatter [66] generalizou o argumento de Hod para o caso de um buraco negro de Schwarzschild d -dimensional, obtendo um espectro de área uniformemente espaçado, bem como o espaçamento do mesmo, fazendo então uma predição do espectro assintótico de MQNs, o que depois foi analiticamente confirmado por Motl e Neitzke (ver adiante).

Poder-se-ia, naturalmente, argumentar que a observação de Hod, de que as partes reais dos MQNs (gravitacionais) assintóticos de um buraco negro de Schwarzschild são dadas por $\omega_R = (\ln 3)/8\pi M$, seria, tão-somente, uma coincidência numérica e que poderia, portanto, não mais ser válida, por exemplo, na próxima casa decimal, como enfatizado por Baez [67], pouco tempo depois do trabalho de Dreyer, em que se pode ver um resumo, até aquele momento, desta questão da determinação do *quantum de área* de um buraco negro, via seus MQNs assintóticos. Contudo, após o interesse despertado na literatura pelo trabalho de Dreyer, Motl [73] e Motl e Neitzke [74] derivaram analiticamente aquele resultado, verificando que o mesmo é válido não só para MQNs gravitacionais, mas também para aqueles escalares [74], conforme será visto no Cap. 4. Além disto, confirmaram ainda a predição de Kunstatter para o valor assintótico de ω_R , no caso de um buraco negro de Schwarzschild d -dimensional. Mais ainda, Motl e Neitzke também estenderam a análise para o caso de um buraco negro (quadridimensional) de Reissner-Nordström [74].

Além dos casos de buracos negros de Schwarzschild e Reissner-Nordström, era natural

¹²Para uma revisão de LQG e seus principais resultados, ver [14] e, mais recentemente, [64].

e interessante que fossem analisados outros tipos de buracos negros, no que diz respeito à relação entre MQNs assintóticos ($n \rightarrow \infty$) e o possível papel que estes podem desempenhar na quantização de suas áreas. Sendo assim, após o trabalho de Motl e Neitzke, surgiram vários trabalhos [68] que visavam determinar os MQNs assintóticos de buracos negros mais gerais, como no caso do buraco negro (girante) de Kerr e daqueles imersos em espaços-tempos de dS ou AdS [69], analisando também a relação de tais MQNs com a questão da quantização da área de destes buracos negros (uma pequena revisão, não-completa, portanto, da literatura pode ser vista em [70]). Assim, considerando-se a hipótese de Hod, analisou-se na Ref. [145] (Abdalla *et al.*) a quantização da área de buracos negros de Kerr e Schwarzschild-dS (SdS), quando ambos são *quase extremos*, ou seja, quando, no caso Kerr, os horizontes de eventos e de Cauchy são muito próximos e quando, no caso SdS, o horizonte do buraco negro é muito próximo do horizonte cosmológico, conforme será discutido no Cap. 4. Ademais, o estudo de MQNs de buracos negros em tais espaços-tempos tem sido bastante corrente nos últimos anos [71, 72].

Ainda no Cap. 4, será discutido como Motl e Neitzke [74] determinaram analiticamente os MQNs fortemente amortecidos de um buraco negro de Schwarzschild, reproduzindo analiticamente a fórmula numérica obtida por Nollert [60]. Tais autores analisaram o problema estudando a *monodromia* tanto da equação diferencial que descreve as perturbações, como de suas soluções assintóticas, monodromias estas que surgem ao se estender analiticamente tal equação para o plano complexo. A análise dependerá essencialmente do comportamento do potencial efetivo que figura na equação de perturbação, tanto na região em torno da singularidade do buraco negro, como na região assintótica.

Empregando-se tal "*método da monodromia*", determinaram-se, na Ref. [146] (Castello-Branco e Abdalla), os MQNs assintóticos (com partes imaginárias grandes) de um buraco negro de Schwarzschild-dS *pequeno*, isto é, para o qual o raio de seu horizonte de eventos é muito menor que o raio do horizonte cosmológico, conforme será discutido na Seq. 4.4.

Por fim, no Cap. 5, apresentar-se-ão as conclusões e discussões gerais dos resultados obtidos nesta tese.

Capítulo 2

Perturbações e Modos

Quase-Normais de Buracos Negros

Foram Regge e Wheeler quem, em 1957, iniciaram a teoria de perturbações de buracos negros [27], ao analisarem a questão da *estabilidade* de um buraco negro de Schwarzschild, sujeito a uma pequena perturbação inicial, isto é, a pequenos desvios iniciais de sua simetria esférica ¹. Pequenas perturbações de um buraco negro de Schwarzschild são perturbações lineares de sua configuração de equilíbrio. Regge e Wheeler obtiveram então as equações lineares que governam pequenos desvios, em primeira ordem, da métrica de Schwarzschild. Para isto, estudaram a equação de Einstein linearizada sobre o espaço-tempo descrito por tal métrica.

A formulação mais simples da teoria das perturbações lineares da gravitação relativística consiste no chamado *formalismo de quadrupolo*, no qual se consideram (i) pequenas perturbações, $h_{\mu\nu}$, do espaço-tempo (plano) de Minkowski (aproximação de campo fraco), ou seja:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad , \quad (2.1)$$

¹À época, e até durante algum tempo depois, usava-se o termo *singularidade de Schwarzschild*, pois ainda não se havia cunhado o termo *buraco negro*, o que só viria a ser feito a seguir, pelo próprio Wheeler (ver prefácio em [75]).

com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, em que $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, e também (ii) que as velocidades dos corpos (fontes) devem ser muito menores que a da luz (aproximação de movimentos lentos). Pode-se mostrar que se linearizando a equação de Einstein em tais condições, a perturbação $h_{\mu\nu}$ estará relacionada à variação temporal do momento de quadrupolo da fonte (ver, por exemplo, [76]).

Talvez a mais importante aplicação do formalismo quadrupolar seja aquela feita por Hulse e Taylor [77], no caso do sistema binário compacto *PSR B913 + 16* (pulsar binário, formado por duas estrelas de nêutrons), já que permitiu a determinação da taxa de variação de seu período orbital, em excelente concordância com o valor observado. A diminuição do período desse pulsar binário constitui a primeira evidência indireta da existência de ondas gravitacionais, pois a mesma seria devida à perda de energia do sistema, sob a forma de radiação gravitacional.

No caso geral, deve-se linearizar a equação de Einstein não sobre um espaço-tempo de fundo que é plano, mas sim curvo, descrito por uma solução exata da equação de Einstein, solução esta que nos casos de grande interesse astrofísico representará um buraco negro ou uma estrela de nêutrons. Além destes, outro caso de grande interesse para o estudo de perturbações é o caso do modelo cosmológico padrão, descrito pela solução de Friedman-Robertson-Walker, cujas perturbações na fase primordial do Universo podem explicar as *anisotropias da radiação cósmica de fundo* [78].

A equação que governa uma pequena perturbação, $h_{\mu\nu}$, de um dado espaço-tempo, descrito por uma métrica fixa, $g_{\mu\nu}^{(0)}$, designada *métrica de fundo*, é obtida linearizando-se a equação de Einstein sobre tal fundo. Para isto, necessita-se resolvê-la para a métrica total perturbada, dada por

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h_{\mu\nu} \quad , \quad (2.2)$$

com $|h_{\mu\nu}| \ll |g_{\mu\nu}^{(0)}|$, isto é, a perturbação de $g_{\mu\nu}^{(0)}$ é considerada ser pequena. Deste modo, podem-se desprezar termos de segunda ordem, e superiores, em $h_{\mu\nu}$, tal que $R_{\mu\nu}(g)$ pode ser expandido e expresso como [34]

$$R_{\mu\nu}(g) = R_{\mu\nu}^{(0)}(g^{(0)}) + \delta R_{\mu\nu}(h) \quad , \quad (2.3)$$

em que $\delta R_{\mu\nu}(h)$ é um termo que contém apenas termos de primeira ordem em $h_{\mu\nu}$.

Sendo o espaço-tempo de fundo um espaço-tempo de vácuo, para o qual $R_{\mu\nu}^{(0)}(g^{(0)}) = 0$, e impondo-se que o espaço-tempo perturbado também seja de tal tipo, segue-se então, de (2.3), que

$$\delta R_{\mu\nu}(h) = 0 \quad , \quad (2.4)$$

que conduzirá a uma equação diferencial linear, de segunda ordem, para a perturbação $h_{\mu\nu}$. Com isto, obtém-se a linearização da gravitação.

A expressão para $\delta R_{\mu\nu}(h)$ foi deduzida por Eisenhart [79] e é dada por

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma_{\mu\lambda;\nu}^{\lambda} - \delta \Gamma_{\mu\nu;\lambda}^{\lambda} \quad , \quad (2.5)$$

em que ";" representa a derivada covariante, com respeito a $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda(0)}(g^{(0)})$, sendo que

$$\delta \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{(0)\lambda\alpha} (h_{\mu\alpha;\nu} + h_{\nu\alpha;\mu} - h_{\mu\nu;\alpha}) \quad . \quad (2.6)$$

Pode-se obter a expressão (2.5) levando-se em conta que apenas termos lineares (1ª ordem) em $h_{\mu\nu}$ devem ser mantidos no cálculo do tensor de Ricci, $R_{\mu\nu}$, correspondente à métrica perturbada (2.2). Para isto, é conveniente que se use a métrica de fundo, $g_{\mu\nu}^{(0)}$, para abaixar e levantar índices das quantidades tensoriais.

Regge e Wheeler estudaram as perturbações gravitacionais de um buraco negro de Schwarzschild, cuja métrica, em coordenadas de Schwarzschild, (t, r, θ, ϕ) , e em unidades geométricas ($G = c = 1$), é dada por [80]

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad , \quad (2.7)$$

sendo M a massa do buraco negro.

A fim de obterem uma equação simplificada para a perturbação $h_{\mu\nu}$, Regge e Wheeler procuraram separar as soluções da mesma num produto de quatro fatores, cada um dependendo só de uma das variáveis t, r, θ e ϕ . Para isto, levando-se em conta que a métrica de fundo, (2.7), é esfericamente simétrica, eles fizeram uma decomposição de $h_{\mu\nu}$ em *harmônicos esféricos tensoriais*, generalizando-se, portanto, para tensores, a conhecida decomposição em harmônicos esféricos escalares ($Y_{\ell m}(\theta, \phi)$) e vetoriais. Estudaram então o comportamento de $h_{\mu\nu}$ sob rotações na variedade bidimensional $t = cte, r = cte$,

isto é, sobre uma esfera. Isto equivale a procurar obter-se a expansão de um tensor (no caso, simétrico) de segunda ordem, sobre uma esfera imersa no espaço-tempo (plano) de Minkowski [30]. A base conveniente para tal expansão é justamente construída através do produto tensorial de harmônicos esféricos vetoriais, tendo sua construção sido elaborada por Zerilli, em trabalho muito posterior ao de Regge e Wheeler. Para isto, Zerilli utilizou as *representações irredutíveis do grupo de rotações* [30]. Sob rotações, um tensor de segunda ordem pode ser decomposto numa parte que se transforma como um escalar (invariante sob rotações), descrita em termos de harmônicos esféricos escalares, uma parte que se transforma como um vetor, sendo descrita em termos de harmônicos esféricos vetoriais, e uma terceira parte que se transforma como um tensor de 2ª ordem simétrico e de traço nulo [81]. No total, há dez componentes independentes para $h_{\mu\nu}$, de modo que sua decomposição é dada por [30, 34, 81]

$$h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_{n=1}^{10} C_{\ell m}^n(t, r) (Y_{\ell m}^n)_{\mu\nu}(\theta, \phi) \quad , \quad (2.8)$$

em que $C_{\ell m}^n(t, r)$ são os coeficientes da expansão e $(Y_{\ell m}^n)_{\mu\nu}(\theta, \phi)$ denotam os harmônicos esféricos tensoriais, que formam a base (tensorial) para a expansão das funções (tensoriais) $h_{\mu\nu}(t, r, \theta, \phi)$ sobre uma esfera. A construção e as expressões explícitas de $(Y_{\ell m}^n)_{\mu\nu}(\theta, \phi)$, bem como a determinação de $C_{\ell m}^n(t, r)$, são dadas em [81].

Com isto, foi possível mostrar que as perturbações dividem-se em dois conjuntos distintos de paridade, para cada valor de ℓ : as que se transformam como $(-1)^\ell$, denominadas de perturbações de *paridade par*, ou perturbações *polares*, e as que se transformam como $(-1)^{\ell+1}$, chamadas de perturbações de *paridade ímpar* ou perturbações *axiais*.

A forma geral de uma perturbação *axial*, com dado ℓ e m , é a seguinte [34]

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_0(t, r) \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} & h_0(t, r) \sin \theta \partial_\theta Y_{\ell m} \\ 0 & 0 & -h_1(t, r) \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} & h_1(t, r) \sin \theta \partial_\theta Y_{\ell m} \\ * & * & \frac{1}{2} h_2(t, r) \frac{1}{\sin \theta} X_{\ell m} & -\frac{1}{2} h_2(t, r) \sin \theta W_{\ell m} \\ * & * & * & -\frac{1}{2} h_2(t, r) \sin \theta X_{\ell m} \end{pmatrix} \quad , \quad (2.9)$$

em que "*" denotam as componentes simétricas de $h_{\mu\nu}$ e

$$X_{\ell m} = 2 \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} - \cot \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} \right) \quad , \quad (2.10)$$

$$W_{\ell m} = \left(\frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial \theta^2} - \cot \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial \phi^2} \right) . \quad (2.11)$$

A simetria esférica da métrica de fundo faz com que a equação que resulta de (2.4) não misture componentes com valores distintos de ℓ e do tipo de paridade. Especificando-se uma solução com um dado ℓ , um dado m e uma dada paridade, pode-se obter a forma geral de cada um desses dois tipos de perturbação. A simetria da métrica de fundo permite ainda que se escolha um particular valor de m para se trabalhar, sendo $m = 0$, obviamente, o mais conveniente para efeitos de simplificação, já que elimina do problema a dependência na variável ϕ . Assim, segue-se que (2.9) se reduz a

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(t, r) \sin \theta \partial_\theta Y_{\ell m} \\ 0 & 0 & 0 & h_1(t, r) \sin \theta \partial_\theta Y_{\ell m} \\ * & * & \frac{1}{2} h_2(t, r) \frac{1}{\sin \theta} X_{\ell m} & -\frac{1}{2} h_2(t, r) \sin \theta W_{\ell m} \\ * & * & * & -\frac{1}{2} h_2(t, r) \sin \theta X_{\ell m} \end{pmatrix} . \quad (2.12)$$

Explorando a liberdade de calibre que há na relatividade geral, correspondente à invariância pelo grupo de difeomorfismos do espaço-tempo [76], Regge e Wheeler obtiveram uma forma bastante simplificada de $h_{\mu\nu}$, para o caso de perturbações axiais, através de uma conveniente fixação de calibre [27]. De fato, mediante uma transformação infinitesimal de coordenadas, $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu$, em que $|\xi^\mu| \ll |x^\mu|$, tem-se que $h_{\mu\nu}$ se transforma, em 1ª ordem em h , como $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu}$, de modo que se tenha $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(0)} + h'_{\mu\nu}$.

Obviamente que não haverá nenhuma simplificação no problema para qualquer escolha do vetor de calibre, ξ^μ . A escolha deste deve ser feita de modo que se preserve o tipo de paridade da perturbação em questão. No caso axial, uma escolha natural é $\xi^0 = 0$, $\xi^1 = 0$, $\xi^i = \Lambda(t, r) \epsilon^{ij} \partial_j Y_{\ell m}(\theta, \phi)$, em que ϵ^{ij} ($i, j = 2, 3$) é o símbolo de Levi-Civita em duas dimensões e $\Lambda(t, r)$ é uma função arbitrária. Explicitamente, pode-se ver que $\xi^\mu = \Lambda(t, r) (0, 0, \frac{-1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m}, \sin \theta \partial_\phi Y_{\ell m})$, que se trata, portanto, de um vetor axial. Deste modo, $h'_{\mu\nu}$ terá a mesma forma axial de $h_{\mu\nu}$, dada por (2.9) ou (2.12).

A forma simplificada final obtida por Regge e Wheeler para perturbações axiais resultou da escolha de calibre em que $\Lambda(t, r)$ fosse escolhido de modo a anular a função $h_2(t, r)$ em (2.12). Esta fixação de calibre (*calibre de Regge-Wheeler*) é conveniente porque elimina do problema contribuições com derivadas em θ maiores que de primeira ordem. Obtém-se,

assim, a forma final de $h_{\mu\nu}$ para perturbações axiais:

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_0(t, r) \sin \theta \partial_\theta Y_{\ell 0} \\ 0 & 0 & 0 & h_1(t, r) \sin \theta \partial_\theta Y_{\ell 0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (2.13)$$

Usando-se (2.13) em (2.4), tendo-se em vista (2.5) e (2.6), resulta que algumas equações são trivialmente satisfeitas e outras não. As equações não-triviais derivam de δR_{23} , δR_{13} e δR_{03} , sendo dadas, respectivamente, por [34]

$$f^{-1} \frac{\partial h_0}{\partial t} - \frac{\partial [f(r) h_1]}{\partial r} = 0 , \quad (2.14)$$

$$f^{-1} \left(\frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_0}{\partial t \partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial h_0}{\partial t} \right) + \frac{1}{r^2} [\ell(\ell+1) - 2] h_1 = 0 , \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{2} f(r) \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 h_1}{\partial t \partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial h_1}{\partial t} \right) + \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \right) h_0 = 0 , \quad (2.16)$$

em que

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} . \quad (2.17)$$

À primeira vista, parece que há três equações para apenas duas incógnitas, $h_0(t, r)$ e $h_1(t, r)$. No entanto, há uma redundância no sistema de equações acima, já que qualquer conjunto de soluções das equações (2.14) e (2.15) satisfará a derivada temporal de (2.16). Além disto, h_0 aparece apenas com sua derivada temporal em (2.14) e (2.15), de modo que sempre é possível adicionar-se uma função arbitrária de r a ele. Esta outra redundância pode ser fixada determinando-se tal função arbitrária pelo uso de (2.16). Em suma, segue-se que (2.16) deriva essencialmente de (2.14) e (2.15).

Substituindo-se em (2.15) o termo $\frac{\partial h_0}{\partial t}$ da Eq. (2.14), tem-se

$$f^{-1} \frac{\partial^2 h_1}{\partial t^2} - f^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \left[f \frac{\partial (f h_1)}{\partial r} \right] + \frac{2}{r} \frac{\partial (f h_1)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} L h_1 = 0 , \quad (2.18)$$

em que $L = \ell(\ell+1) - 2$.

Definindo-se

$$\Psi(t, r) = \frac{1}{r} f(r) h_1(t, r) , \quad (2.19)$$

tem-se, de (2.18), que

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f \frac{\partial(r\Psi)}{\partial r} \right] + \frac{2f^2}{r^2} \frac{\partial(r\Psi)}{\partial r} + \frac{Lf\Psi}{r^2} = 0 \quad . \quad (2.20)$$

Introduzindo-se, agora, a chamada *coordenada tartaruga*, x , definida por

$$dx = \frac{dr}{f(r)} \quad , \quad (2.21)$$

tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial x} = f(r) \frac{\partial}{\partial r} \quad . \quad (2.22)$$

Logo, o segundo e terceiro termos em (2.20) podem ser expressos, respectivamente, como

$$\frac{f}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[f \frac{\partial(r\Psi)}{\partial r} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} (r\Psi) \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (r\Psi) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \Psi + 2f \frac{\partial \Psi}{\partial x} + r \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) \quad (2.23)$$

e

$$\frac{2f^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi) = \frac{2f}{r^2} \frac{\partial}{\partial x} (r\Psi) = \frac{2f}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \Psi + r \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) \quad . \quad (2.24)$$

Usando-se (2.22), tem-se que

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (r) = f \quad , \quad (2.25)$$

da qual se segue que

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} f = f \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{2Mf}{r^2} \quad . \quad (2.26)$$

Assim, resulta que (2.20) toma a forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V(x)\Psi(t, x) = 0 \quad , \quad (2.27)$$

sendo $V(x) \equiv V(r(x))$, em que

$$V(r) = V^-(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right) \quad , \quad (2.28)$$

que é o denominado *potencial de Regge-Wheeler*. A Eq. (2.27) denomina-se *equação de Regge-Wheeler*. Deste modo, tem-se que as perturbações axiais são descritas por uma equação de onda unidimensional, com um potencial adicional.

Esperar-se-ia que a quantidade determinada pela equação de Regge-Wheeler dependesse do calibre escolhido. Contudo, embora a Eq. (2.27) tenha sido deduzida num calibre específico, pode-se mostrar que a quantidade governada por ela é *invariante de calibre* [82].

Integrando-se (2.21) resulta que

$$x = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) . \quad (2.29)$$

Vê-se, de imediato, que $r = r_+ = 2M$ (horizonte de eventos do buraco negro) corresponde a $x \rightarrow -\infty$ e que $r \rightarrow \infty$ corresponde a $x \rightarrow +\infty$. Portanto, a região $r_+ < r < \infty$ é mapeada em $-\infty < x < \infty$.

Tomando-se, agora, a dependência temporal da perturbação $h_{\mu\nu}$ como sendo da forma $e^{-i\omega t}$, o que implica em $\Psi(t, r) = e^{-i\omega t}\psi(r)$, em que $\psi(r) = \frac{1}{r}f(r)h_1(r)$, obtém-se que as perturbações *independentes do tempo* são descritas pela equação [27]

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (\omega^2 - V(x))\psi(x) = 0 . \quad (2.30)$$

Nota-se que a transformação (2.29) limita o domínio de (2.27) e (2.30) à região exterior ao horizonte de eventos do buraco negro.

No caso de perturbações *polares*, a análise geral para a obtenção da equação que as governa é semelhante ao caso axial. Porém, é bastante dificultada pelo fato de que, agora, há seis equações não-triviais que resultam da equação de Einstein, para três incógnitas. De fato, a forma simplificada da equação para o caso polar foi obtida somente muito tempo depois da análise de Regge e Wheeler, por Zerilli [30]². Neste caso, para que se expandisse $h_{\mu\nu}$, e, portanto, para que se fizesse a separação das equações, foi fundamental a construção de uma base conveniente, dada em termos de harmônicos esféricos tensoriais. Ressalte-se que, neste trabalho, Zerilli analisou a perturbação de um buraco negro de Schwarzschild, quando esta é devida à queda de uma pequena partícula movendo-se rumo ao mesmo, ao longo de uma geodésica. Em particular, ele estudou a radiação gravitacional emitida em tal processo, no limite de altas frequências. Além disto, Zerilli levou ainda em conta, em [30], as condições de contorno para MQNs (ver detalhadamente adiante), ao impor que “a radiação gravitacional não apenas escapa para o infinito, como também

²Nesse trabalho de Zerilli, já aparece o uso da expressão *buraco negro*.

desaparece para dentro do buraco". A queda de uma partícula rumo a um buraco negro é, de fato, um dos processos pelos quais se podem excitar os MQNs do mesmo. Zerilli considerou o campo produzido pela partícula em queda como uma perturbação na geometria do espaço-tempo, contribuindo com um termo-fonte do tipo função-delta, e cujo tensor de energia-momento foi também decomposto em harmônicos esféricos tensoriais [30].

A equação obtida por Zerilli, para as perturbações polares, tem exatamente a mesma forma que a equação de Regge-Wheeler, mas com o potencial dado por [30]

$$V(r) = V^+(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2n^2(n+1)r^3 + 6n^2Mr^2 + 18nM^2r + 18M^3}{r^3(nr + 3M)^2}\right) , \quad (2.31)$$

em que $n = \frac{1}{2}(\ell - 1)(\ell + 2)$, que se denomina de *potencial de Zerilli*.

Apesar de terem forma analítica bem distintas, os potenciais de Regge-Wheeler e Zerilli têm valores muito próximos, sendo ambos positivos, conforme é ilustrado na figura 2.1. Deste modo, pode-se pensar num buraco negro de Schwarzschild como envolto por uma barreira de potencial. De fato, de (2.30), tem-se que o problema de perturbação de um buraco negro de Schwarzschild reduz-se a um problema unidimensional de penetração de barreira de potencial, analogamente àquele que se encontra associado à equação de Schrödinger independente do tempo, na mecânica quântica.

É simples verificar-se, mediante (2.29), que o comportamento assintótico dos potenciais $V(x) = V^{(\pm)}(x)$ é dado por

$$V^{(\pm)} \sim \frac{\ell(\ell + 1)}{x^2} , \quad (2.32)$$

no infinito ($x \rightarrow +\infty$), e

$$V^{(\pm)} \sim e^{x/2M} , \quad (2.33)$$

às proximidades do horizonte de eventos do buraco negro ($x \rightarrow -\infty$).

Vê-se, então, que $V(x) \rightarrow 0$, para $x \rightarrow \pm\infty$. Logo, as soluções de (2.30) comportam-se assintoticamente, tanto no horizonte de eventos do buraco negro como no infinito, da forma

$$\psi(x) \sim e^{\pm i\omega x} . \quad (2.34)$$

Sendo (2.34) a forma assintótica geral das soluções de (2.30), há vários tipos de soluções $\psi(x)$ que satisfazem tal comportamento. Em geral, assintoticamente ($x \rightarrow \pm\infty$), as

Figura 2.1: Potenciais de Regge-Wheeler (Axial) e Zerilli (Polar), para $\ell = 2$ e 3 .

soluções serão combinações lineares de $e^{\pm i\omega x}$. Há quatro classes básicas de soluções que devem ser destacadas (ver [75]). Uma destas classes satisfaz à condição causal de que não haja ondas emergindo do (horizonte de eventos do) buraco negro, ou seja,

$$\psi^{in}(x) \sim \begin{cases} e^{-i\omega x} & , \quad x \rightarrow -\infty \\ A_{out}(\omega)e^{i\omega x} + A_{in}(\omega)e^{-i\omega x} & , \quad x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.35)$$

em que se supõe que ω seja real e positivo. Soluções desta classe denominam-se de modos *in* e as que se obtêm pelo seu complexo conjugado são chamadas de modos *out*.

Sendo (2.30) uma equação diferencial de segunda ordem, o wronskiano de duas soluções da mesma é uma constante em x . Calculando-se o wronskiano das soluções de tipos *in* e *out*, em $x = \pm\infty$, decorre que

$$1 + |A_{out}|^2 = |A_{in}|^2 \quad , \quad (2.36)$$

ou ainda

$$|T|^2 + |R|^2 = 1 \quad , \quad (2.37)$$

em que se introduziram os coeficientes de transmissão e reflexão, $T = 1/A_{in}$ e $R = A_{out}/A_{in}$, respectivamente.

Uma outra classe típica de soluções é aquela que corresponde a ondas puramente emergentes no infinito, ou seja,

$$\psi^{up}(x) \sim \begin{cases} B_{out}(\omega)e^{i\omega x} + B_{in}(\omega)e^{-i\omega x} & , \quad x \rightarrow -\infty \\ e^{+i\omega x} & , \quad x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.38)$$

Tais modos denomina-se modos *up*. Aqueles obtidos pelo complexo conjugado, denominam-se modos *down*.

Usando-se novamente o fato de que os wronskianos são constantes em x , pode-se mostrar que

$$B_{out}(\omega) = A_{in}(\omega) \quad , \quad B_{in}(\omega) = -A_{out}^*(\omega) = -A_{out}(-\omega) \quad . \quad (2.39)$$

Quaisquer duas das quatro classes de soluções mencionadas podem ser escolhidas como soluções básicas num dado problema. Para a caracterização de MQNs, os modos *in* e *up* são os tipos adequados, cujo wronskiano é

$$W(\psi^{in}(x), \psi^{up}(x)) \equiv \psi^{in}(x) \frac{d\psi^{up}(x)}{dx} - \psi^{up}(x) \frac{d\psi^{in}(x)}{dx} = 2i\omega A_{in}(\omega) = 2i\omega B_{out}(\omega) \quad . \quad (2.40)$$

A Eq. (2.30), com os potenciais (2.28) e (2.31), descreve as perturbações *gravitacionais* de um buraco negro de Schwarzschild. No caso de perturbações *eletromagnéticas*, deve-se decompor o campo eletromagnético em harmônicos esféricos *vetoriais*, o que leva, naturalmente, à separação das equações de Maxwell em tal espaço-tempo. No caso homogêneo, primeiramente estudado por Wheeler [83] e, posteriormente, por Price [84] e Ruffini *et al.* [85], tem-se que a equação que descreve uma perturbação axial é também da forma (2.30), mas com o potencial dado por

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \quad . \quad (2.41)$$

O caso de perturbações *escalares* (não-massivas) foi tratado inicialmente por Matzner [86] e, posteriormente, por Price [87] e Ruffini *et al.* [85], sendo o correspondente potencial dado por

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right) \quad . \quad (2.42)$$

Portanto, de acordo com o *spin*, j , do campo perturbativo, pode-se resumir o potencial dos três tipos de perturbações axiais consideradas como

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2M(j^2-1)}{r^3}\right), \quad (2.43)$$

em que $j = 0, 1$ e 2 para perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais, respectivamente.

O estudo das perturbações gravitacionais e eletromagnéticas de um buraco negro eletricamente carregado e sem rotação, isto é, de um buraco negro de Reissner-Nordström, foi primeiramente desenvolvido por Zerilli [88], seguido de Moncrief [89]. Devida à simetria esférica da solução de Reissner-Nordström, a análise do problema, no que diz respeito à separação das equações, é realizada de modo análogo ao caso de Schwarzschild. Uma característica bastante interessante acerca das perturbações de buracos negros carregados é que perturbações gravitacionais dos mesmos induzem perturbações eletromagnéticas e vice-versa [90].

Nesta tese, o interesse é pelo estudo das perturbações independentes do tempo, particularmente sobre MQNs. Evidentemente, é a equação dependente do tempo que permite que se obtenha a evolução temporal de uma dada perturbação inicial. De fato, tanto a análise numérica como analítica de tal equação revela o seguinte panorama típico: inicialmente, a evolução é marcada por uma fase transiente, seguida, para tempos intermediários, de oscilações amortecidas, essencialmente independentes da perturbação inicial (fase dominada pelos MQNs) e, por fim, para tempos muito longos, eventualmente, por caudas, fase em que o decaimento da perturbação pode apresentar-se como predominantemente descrito por uma lei-de-potência, dependendo do comportamento assintótico do potencial. Este panorama é ilustrado na figura 2.2. Por outro lado, a análise da equação independente do tempo permite que sejam obtidas informações sobre o próprio buraco negro, notadamente acerca de sua *estabilidade*, aspecto que será abordado mais adiante, que, aliás, foi o principal fator motivante para a análise empreendida por Regge e Wheeler [27], pois era importante saber se uma “singularidade de Schwarzschild” seria, ou não, estável ao sofrer pequenas perturbações.

Agora, considere-se, por exemplo, a evolução temporal de um campo escalar não-

Figura 2.2: Evolução temporal de uma perturbação inicial de um buraco negro de Schwarzschild, em escala logarítmica (quadro maior) e linear (quadro interno), para um certo valor fixo de r .

massivo, que se propaga no espaço-tempo de um buraco negro de Schwarzschild. Tem-se, portanto, que estudar o problema de Cauchy associado à Eq. (2.27), com condições iniciais $\psi(0, x)$ e $\partial_t \psi(0, x)$. A evolução temporal do campo $\psi(t, x)$ pode ser expressa por [75]

$$\psi(t, x) = \int G(t, x, x') \partial_t \psi(0, x') dx' + \int \partial_t G(t, x, x') \psi(0, x') dx' \quad , \quad (2.44)$$

para $t > 0$.

A função de Green retardada é definida por

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] G(t, x, x') = \delta(t) \delta(x - x') \quad , \quad (2.45)$$

com a condição de que $G(t, x, x') = 0$, para $t < 0$.

Considerando-se, agora, a transformação

$$\hat{G}(x, x', \omega) = \int_{0^-}^{+\infty} G(t, x, x') e^{i\omega t} dt \quad , \quad (2.46)$$

que é bem definida para $Im \omega > 0$, segue-se, de (2.45), que

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(x) \right] \hat{G}(x, x', \omega) = \delta(x - x') \quad . \quad (2.47)$$

A função de Green é determinada em termos de duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada, Eq. (2.30). Uma destas soluções é determinada pela condição de contorno causal de que não haja ondas emergentes no horizonte de eventos do buraco negro. Tal solução corresponde então ao que se denominou de modos *in*, dados por (2.35). Deve-se observar que, para $Im \omega > 0$, tal solução é de quadrado integrável em $x \rightarrow -\infty$. Uma segunda solução que é de quadrado integrável, corresponde a ondas puramente emergentes no infinito ($x \rightarrow +\infty$) e a uma combinação linear de ondas emergentes e imergentes, no horizonte de eventos do buraco negro. Esta solução corresponde então aos modos *up*, dados por (2.38). Em termos das soluções *in* e *up*, a função de Green pode portanto ser escrita como

$$\hat{G}(x, x', \omega) = \frac{-1}{W(\psi^{in}(x), \psi^{up}(x))} \begin{cases} \psi^{in}(x, \omega) \psi^{up}(x', \omega) & , \quad x < x' \\ \psi^{in}(x', \omega) \psi^{up}(x, \omega) & , \quad x > x' \end{cases} \quad . \quad (2.48)$$

Usando-se (2.40), tem-se

$$\hat{G}(x, x', \omega) = \frac{-1}{2i\omega A_{in}(\omega)} \begin{cases} \psi^{in}(x, \omega)\psi^{up}(x', \omega) & , \quad x < x' \\ \psi^{in}(x', \omega)\psi^{up}(x, \omega) & , \quad x > x' \end{cases} \quad (2.49)$$

Finalmente, a função de Green fica formalmente determinada por

$$G(t, x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{+\infty} \hat{G}(x, x', \omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad , \quad (2.50)$$

em que $c > 0$.

Para que se obtenha a caracterização da perturbação em diferentes intervalos de tempo, é conveniente que se faça uma deformação no contorno de integração, no plano- ω complexo (ver Fig.2.3), em (2.50). É importante, para isto, que se conheça o comportamento analítico de $\psi^{in}(x, \omega)$ e $\psi^{up}(x, \omega)$ não apenas no semi-plano superior ($Im\omega > 0$), onde tais funções são funções analíticas de ω , mas também no semi-plano inferior ($Im\omega < 0$). Porém, como se vê de (2.40), $W(\psi^{in}(x), \psi^{up}(x))$ tem zeros, em ω , isolados. De (2.49), tem-se que isto implica na existência de pólos na função de Green $\hat{G}(x, x', \omega)$, que corresponderão aos MQNs do buraco negro, localizados no semi-plano $Im\omega < 0$ (ver Fig.2.3). A contribuição dos mesmos para a radiação é levada em conta por meio do teorema dos resíduos [94].

Modos Quase-Normais

É por meio de um texto de Chandrasekhar que talvez melhor se possa compreender a noção de MQNs de um buraco negro. De acordo com Chandrasekhar [95], a evolução de uma pequena perturbação inicial de um buraco negro pode, em princípio, ser determinada expressando-a como uma superposição de modos normais. Porém, em seu estágio final, espera-se que qualquer perturbação inicial decaia de maneira característica do próprio buraco negro e independentemente da causa da mesma. Ou seja, pode-se esperar que em estágios finais de uma perturbação, o buraco negro oscile com frequências e taxas de amortecimento características unicamente dele próprio. Tem-se então a seguinte definição de MQNs de um buraco negro: *"MQNs são definidos como as soluções próprias*

Figura 2.3: Plano- ω complexo, mostrando a deformação do contorno de integração da integral (2.50).
As cruzeiras, simetricamente dispostas em relação ao eixo $Im\omega$, marcam a posição de alguns MQNs, localizados no semi-plano $Im\omega < 0$.

das equações de perturbação pertencendo a frequências características complexas que são apropriadas para ondas puramente imergindo no horizonte de eventos e ondas puramente emergindo no infinito" [95].

Assim, as condições de contorno para MQNs são dadas por (considerando-se a fase $e^{-i\omega t}$)

$$\psi(x) \sim e^{\pm i\omega x} \quad , \quad x \rightarrow \pm\infty \quad , \quad (2.51)$$

sendo que correspondem a frequências complexas

$$\omega = Re\omega + i Im\omega \quad , \quad (2.52)$$

com $Im\omega < 0$, o que caracteriza a estabilidade do buraco negro, quando sujeito a uma pequena perturbação inicial, já que o mesmo oscilará amortecidamente, em função do tempo ($e^{-i\omega t} = e^{-i Re\omega t} e^{Im\omega t} \rightarrow 0$, para $t \rightarrow \infty$, quando $Im\omega < 0$).

Para que melhor se entenda a definição de MQNs, deve-se notar que se deseja estudar a resposta da métrica de um buraco negro, para pequenas perturbações iniciais da mesma. Para isto, não é desejável que haja radiação vindo do infinito, continuando a perturbar o buraco negro. Além disto, assume-se que nada escapa para fora do horizonte de eventos do mesmo. As frequências ω que permitem soluções de (2.30), com as condições de contorno (2.51), são chamadas de *modos (frequências) quase-normais*, isto é, as condições de contorno, então, são que haja ondas que são apenas *puramente imergentes no horizonte de eventos* do buraco negro e ondas *puramente emergentes no infinito*. É importante notar que tais condições de contorno não se aplicam a MQNs de quaisquer buracos negros, mas sim para aqueles em espaços assintoticamente planos ou assintoticamente de-Sitter, uma vez que é a *estrutura assintótica* do espaço-tempo que determina tais condições. No caso assintoticamente anti-de-Sitter, a condição de contorno no infinito é que não haja onda emergente nem imergente [32].

Como visto, para buracos negros, MQNs são os análogos das ressonâncias de espalhamento na mecânica quântica, haja visto serem modos que decaem com o tempo (sendo, portanto, ao contrário de modos normais, não-estacionários) e que podem ser identificados com os pólos de uma apropriada função de Green (ver Leaver [94]). Do ponto de vista da teoria de espalhamento, MQNs são considerados como os pólos das amplitudes

de reflexão e transmissão, conforme a definição das quantidades envolvidas na Eq. (2.37). Além do mais, Leaver mostrou que as caudas do tipo lei-de-potência que, para tempos muito longos, dominam a resposta de um buraco negro de Schwarzschild a pequenas perturbações iniciais do mesmo, originam-se de um corte de ramo na função de Green do problema, o qual, por sua vez, deriva do comportamento assintótico do potencial (ver, também, [39]). No caso de um buraco negro de Kerr, os resultados são qualitativamente semelhantes ao que ocorre no caso de Schwarzschild [96], com os MQNs sendo seguidos, para tempos muito longos, de caudas, refletindo, agora, como esperado, o efeito da rotação do buraco negro [97]. De fato, como efeito desta rotação, há, comparativamente ao caso de perturbações de um buraco negro de Schwarzschild, um desacoplamento dos modos azimutais, m , associados a cada valor de ℓ , o índice de multipólo da perturbação, o que é bastante intuitivo, já que agora há uma quebra da simetria esférica, do próprio espaço-tempo não-perturbado, devida à rotação do buraco negro de Kerr.

Bachelot e Motet-Bachelot [142], mostraram que há um conjunto contável infinito de valores de ω que correspondem a soluções de (2.30), com condições de contorno (2.51), sendo que todos têm parte imaginária negativa. Intuitivamente, tal resultado faz bastante sentido, pois uma frequência imaginária negativa corresponde a uma solução que se anula exponencialmente com o tempo, comportamento este que caracteriza as vibrações amortecidas (quase-normais) do buraco negro.

Já que não há MQNs com $Im\omega > 0$, isto implica que se está procurando soluções de (2.30) tais que a parte exponencialmente *decrecente* não esteja presente. É impondo-se tal condição que se deduz, por exemplo, a fórmula de Schutz e Will, obtida empregando-se o método WKB, a qual fornece uma expressão aproximada para os sobretons mais baixos (aqueles fracamente amortecidos) dos MQNs de buracos negros de Schwarzschild [98], Reissner-Nordström [99] e Kerr [100]. O fato de que assintoticamente $\|\psi(x)\|$ cresce ilimitadamente representa um sério problema para a determinação numérica de MQNs [34]. Em consequência, faz-se preponderante a determinação analítica (ou semi-analítica) de tais modos, o que dificilmente é possível em situações bastante genéricas.

Nollert e Schmidt analisaram a questão da definição de MQNs (das condições de contorno) e propuseram uma definição mais rigorosa dos mesmos (das mesmas), em termos da

transformada de Laplace [144], da qual decorre que as condições de contorno apropriadas para MQNs seriam dadas pela extensão analítica de ψ , para $Im\omega > 0$, e impondo-se que haja somente contribuições do tipo exponencialmente decrescente.

Estabilidade das Perturbações

Foi Vishveshwara [101] quem primeiramente deu uma demonstração de que a Eq. (2.30), com condições de contorno (2.51), não pode ter soluções para as quais ω tenha parte imaginária positiva. A prova rigorosa da estabilidade das perturbações da solução de Schwarzschild foi dada por Wald [102] e Kay e Wald [103], ao provarem que as perturbações lineares são limitadas no tempo, isto é,

$$|\Phi(t, x, \theta, \phi)| < C \quad , \quad (2.53)$$

para todo t e (x, θ, ϕ) , desde que os dados iniciais sejam de *suporte compacto*.

Buraco Negro de Kerr

Uma outra métrica de buraco negro cujas perturbações serão consideradas nesta tese é aquela que descreve um buraco negro, eletricamente neutro, em rotação (solução de Kerr), a qual é *axi-simétrica*. Em coordenadas de Boyer-Lindquist ela dada por (ver, por exemplo, [80])

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + (r^2 + a^2 + 2Ma^2 r \sin^2 \theta) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad , \quad (2.54)$$

em que

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (2.55)$$

e

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad . \quad (2.56)$$

Os parâmetros M e a ($0 \leq a \leq M$) são a massa e o momento angular específico ($a = J/M$) do buraco negro, respectivamente, sendo J o seu momento angular. As raízes de (2.55) são

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad , \quad (2.57)$$

que correspondem aos horizontes de eventos (r_+) e de Cauchy (r_-) do buraco negro.

O tratamento das perturbações de um buraco negro de Kerr é muito mais intrincado que no caso de buracos negros esfericamente simétricos. As perturbações escalares, evidentemente o mais simples dos casos, foram tratadas por Brill *et al.* [91], sendo a decomposição das mesmas feita em termos dos chamados *harmônicos esferoidais* (generalização, para superfícies oblatas, dos harmônicos esféricos) [92]. No caso de perturbações eletromagnéticas e gravitacionais, mesmo com o auxílio dos harmônicos esferoidais, a separação das equações de perturbação é bem mais complicada, mostrando-se inviável através de uma análise do tipo daquela feita por Regge e Wheeler (as chamadas *perturbações métricas*). Contudo, por meio do chamado *formalismo de Newman-Penrose* [93] (ver também [90]), em que são consideradas as *perturbações da curvatura*, através da variação dos invariantes do tensor de Weyl (ver [90]), Teukolsky mostrou que as perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais de um buraco negro de Kerr podem ser descritas por uma única equação (*equação mestra de Teukolsky*), dada, no caso em que não há fontes envolvidas, por [104] (ver também [33, 34, 75])

$$\begin{aligned} & \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta} - a \sin^2 \theta \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{4Mar}{\Delta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial \phi} + \left[\frac{a^2}{\Delta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + \\ & - \Delta^{-s} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta^{s+1} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) - 2s \left[\frac{a(r-M)}{\Delta} + \frac{i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \right] \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} + \\ & - 2s \left[\frac{M(r^2 - a^2)}{\Delta} - r - ia \cos \theta \right] \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} + (s^2 \cot^2 \theta - s) \Psi = 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.58)$$

em que $s = 0, \pm 1, \pm 2$, para perturbações escalares, eletromagnéticas e gravitacionais, respectivamente, é o *spin* (*spin-weight*) do campo perturbativo.

Em virtude da simetria axial da métrica de Kerr, é natural considerar-se que a decomposição de Ψ se dá com o *ansatz*

$$\Psi_{\ell m} = e^{-i\omega t} R_{\ell m}(r, \omega) S_{\ell m}(\theta, \omega) e^{im\phi} \quad , \quad (2.59)$$

em que m é um inteiro positivo, negativo ou nulo. Com uso deste *ansatz*, Teukolsky conseguiu a separação da Eq. (2.58) nas variáveis angular e radial, obtendo (a seguir, os índices ℓ e m serão suprimidos)

$$\Delta^{-s} \frac{d}{dr} \left(\Delta^{s+1} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Delta} [K^2 - 2is(r-M)K + (4is\omega r - \lambda)\Delta] R = 0 \quad (2.60)$$

e

$$\begin{aligned} & \left[a^2 \omega^2 \cos^2 \theta - 2a\omega s \cos \theta - \frac{(m^2 + 2ms \cos \theta)}{\sin^2 \theta} - s^2 \cot^2 \theta + E - s^2 \right] S + \\ & + \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dS}{d\theta} \right) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.61)$$

em que

$$K = (r^2 + a^2)\omega - am \quad (2.62)$$

e

$$\lambda = E + a^2 \omega^2 - 2am\omega - s(s+1) \quad . \quad (2.63)$$

$E = E(a, \omega)$ é a constante de separação.

Deve-se notar que as equações são acopladas, de modo que não se pode resolvê-las simplesmente, já que R e S dependem de ω . Para cada $a^2 \omega^2$ *complexo*, e m inteiro positivo, a Eq. (2.61), juntamente com a condição de contorno de que a solução é regular para $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, determina um problema de Sturm-Liouville, cujas auto-funções e auto-valores são $S_{l|m}(\theta, \omega)$ e $E(l, |m|, \omega)$, respectivamente, sendo $|m| < \ell$. As auto-funções $S_{l|m}(\theta, \omega)$ são os chamados *harmônicos esferoidais*, que formam um conjunto completo, no caso de ω^2 ser real [92].

Por meio da transformação

$$\psi = \Delta^{s/2} (r^2 + a^2)^{1/2} R \quad , \quad (2.64)$$

a equação radial, Eq. (2.60), pode ser transformada em [75]

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + Q(x; \omega, \lambda, s) \psi(x) = 0 \quad , \quad (2.65)$$

sendo

$$Q(x; \omega, \alpha, s) = \frac{K^2 - 2is(r - M)K + \Delta(4i\omega sr - \lambda)}{(r^2 + a^2)^2} - \left(G^2 + \frac{dG}{dx} \right) \quad (2.66)$$

e

$$G = \frac{s(r - M)}{r^2 + a^2} + \frac{r\Delta}{(r^2 + a^2)^2} \quad (2.67)$$

A coordenada tartaruga, x , é agora definida por

$$dx = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} dr \quad (2.68)$$

Explicitamente, para $a < M$, tem-se

$$x = r + \frac{2Mr_+}{r_+ + r_-} \ln \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right) - \frac{2Mr_-}{r_+ + r_-} \ln \left(\frac{r}{r_-} - 1 \right) \quad (2.69)$$

Assim, em virtude de (2.65), da mesma forma que no caso sem rotação (Schwarzschild e Reissner-Nordström), tem-se que o problema de perturbações da solução de Kerr reduz-se, formalmente, a um problema de penetração de barreira de potencial. Note-se, porém, que $Q(x; \omega, \lambda, s)$ é complexo, sendo real apenas no caso de perturbações escalares ($s = 0$). A análise deste caso é mais simples, pois, vê-se de (2.66) que $Q(x)$ se torna real, além de sofrer uma considerável simplificação.

O comportamento assintótico de (2.66) implica que a solução ψ comporta-se como [75, 150]

$$\psi \sim \Delta^{\pm s/2} e^{\pm i\kappa x} \quad , \quad r \rightarrow r_+ \quad (2.70)$$

e

$$\psi \sim r^{\pm s} e^{\mp i\omega x} \quad , \quad r \rightarrow \infty \quad (2.71)$$

sendo $\kappa = \omega - m\Omega$, em que $\Omega = a/2Mr_+$ é a velocidade angular do buraco negro.

Logo, para R tem-se que

$$R \sim \begin{cases} e^{+i\kappa x} \\ \Delta^{-s} e^{-i\kappa x} \end{cases} \quad , \quad r \rightarrow r_+ \quad (2.72)$$

e

$$R \sim \begin{cases} \frac{e^{+i\omega x}}{r^{-(2s+1)}} & , \\ \frac{e^{-i\omega x}}{r} & , \end{cases} \quad r \rightarrow \infty . \quad (2.73)$$

As condições de contorno para MQNs são, então, as seguintes:

$$R \sim \begin{cases} \Delta^{-s} e^{-i\kappa x} & , \quad r \rightarrow r_+ ; \\ \frac{e^{+i\omega x}}{r^{-(2s+1)}} & , \quad r \rightarrow \infty . \end{cases} \quad (2.74)$$

Buraco Negro de Schwarzschild-de-Sitter

Uma outra métrica de buraco negro a ser analisada nesta tese é a solução de Schwarzschild-de-Sitter (SdS). Esta é uma solução estática da equação de Einstein com o termo cosmológico, Λ , positivo. O elemento de linha que descreve o espaço-tempo de um buraco negro de SdS é, em coordenadas (t, r, θ, ϕ) , e em unidades geométricas, dado por [35]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) , \quad (2.75)$$

em que

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{r^2}{a^2} . \quad (2.76)$$

O parâmetro M é a massa do buraco negro e a é o chamado raio de de-Sitter, ou "raio cosmológico", relacionado à constante cosmológica, por $a^2 = 3/\Lambda$. Para que descreva um buraco negro num fundo cosmológico de de-Sitter, M deve ser limitado ao intervalo $0 < M < M_N = a/3\sqrt{3}$. Neste intervalo, a função $f(r)$ possui três zeros reais distintos: em $r = r_e$, que corresponde ao horizonte de eventos do buraco negro, $r = r_c (> r_e)$, correspondente ao horizonte de eventos cosmológico, e em $r = r_0 = -(r_e + r_c)$, ao qual não é atribuído significado físico. O valor extremo M_N dá o chamado *limite de Nariai* [105], para o qual os horizontes de eventos do buraco negro e cosmológico coincidem.

Associada a cada um dos valores r_i , há uma constante definida por $\kappa_i = \frac{1}{2} \left| \frac{df}{dr} \right|_{r=r_i}$, que, no caso dos horizontes de eventos r_e e r_c , é denominada de *gravidade superficial*. Explicitamente, obtêm-se que

$$\kappa_e = \frac{(r_c - r_e)(r_e - r_0)}{2a^2 r_e} , \quad (2.77)$$

$$\kappa_c = \frac{(r_c - r_e)(r_c - r_0)}{2a^2 r_c} , \quad (2.78)$$

$$\kappa_0 = \frac{(r_e - r_0)(r_c - r_0)}{2a^2(-r_0)} . \quad (2.79)$$

Os parâmetros da métrica, M e a , podem ser escritos em termos de r_e e r_c como

$$a^2 = r_e^2 + r_c^2 + r_e r_c \quad (2.80)$$

e

$$2Ma^2 = r_e r_c (r_e + r_c) , \quad (2.81)$$

o que será útil posteriormente.

Assumindo-se uma dependência temporal da forma $e^{-i\omega t}$, expandindo-se a perturbação em multipólos e definindo-se a coordenada tartaruga, x , por $dx = dr/f(r)$, pode-se mostrar que as perturbações escalar, gravitacional-axial e electromagnética de um buraco negro de Schwarzschild-de-Sitter podem ser descritas também por uma equação exatamente da forma (2.30), mas com o potencial, $V(x) \equiv V(r(x))$, dado por [106]

$$V(r) = f(r) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2M(j^2-1)}{r^3} \right) , \quad (2.82)$$

para perturbações gravitacionais ($j = 2$) e eletromagnéticas ($j = 1$); ℓ e j são o índice de multipólo e o *spin* da perturbação, respectivamente.

No caso de perturbações escalares (não-massivas), o potencial é

$$V(r) = f(r) \left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{2}{a^2} \right) . \quad (2.83)$$

Nesta tese, as perturbações gravitacionais consideradas serão apenas as axiais, já que, em quatro dimensões, apesar da forma analítica bastante distinta, os potenciais axial e polar são *isospectrais*, ou seja, conduzem a MQNs idênticos [107]. Isto deixa de ser válido em dimensões maiores [108].

Explicitamente, a coordenada tartaruga para o caso SdS é dada por

$$x = \frac{1}{2\kappa_e} \ln \left(\frac{r}{r_e} - 1 \right) - \frac{1}{2\kappa_c} \ln \left(1 - \frac{r}{r_c} \right) + \frac{1}{2\kappa_0} \ln \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) . \quad (2.84)$$

De (2.82) e (2.84), é fácil verificar que $V(x) \equiv V(r(x))$ vai exponencialmente a zero para $x \rightarrow \pm\infty$. Deste modo, em termos da coordenada tartatuga, as condições de contorno para os MQNs de um buraco negro de Schwarzschild-de-Sitter são tipicamente as mesmas que no caso de um buraco negro de Schwarzschild assintoticamente plano, ou seja, ondas puramente *imergentes* no horizonte de eventos do buraco negro ($x \rightarrow -\infty$) e ondas puramente *emergentes* no horizonte de eventos cosmológico ($x \rightarrow +\infty$), *i.e.*,

$$\psi \sim e^{\pm i\omega x} \quad , \quad x \rightarrow \pm\infty \quad . \quad (2.85)$$

Capítulo 3

Modos Quase-Normais e a Possível Existência de uma Correspondência de-Sitter/Teoria de Campos Conforme

Grosso modo, o *Princípio Holográfico* estabelece que a física numa região (volume) do espaço-tempo pode ser descrita por graus de liberdade que vivem em sua borda. Tal princípio foi suscitado pela idéia de que a gravitação quântica deve ser *holográfica*, como primeiramente foi sugerido por 't Hooft [9] e, posteriormente, por Susskind [15]. 't Hooft foi levado à tal idéia motivado, essencialmente, pela natureza holográfica da relação entropia-área de buracos negros, já que, segundo esta, a entropia de um buraco negro é proporcional à área de seu horizonte de eventos [10].

Como mencionado na Introdução, pode-se dizer que a mais concreta realização do princípio holográfico veio da teoria de cordas, com a *correspondência AdS/CFT* [12], devida a Maldacena, que estabelece que a teoria de cordas em espaços-tempos Anti-de-Sitter (AdS) é equivalente (*dual*) a uma Teoria de Campos Conforme (CFT) em uma dimensão a menos, "residente" na borda deste espaço-tempo. Pode-se dizer então que a

informação (física) no *interior* de um espaço de AdS está holograficamente codificada em sua borda. Mais concretamente, tal correspondência estabelece que *a teoria de cordas em espaços-tempos que assintoticamente tendem ao produto de um espaço-tempo AdS por um espaço (variedade) compacto (a) é completamente descrita por uma teoria de campos conforme, num espaço de uma dimensão a menos, "residente na borda no infinito" (ver p.10 de [118])*. O caráter *dual* desta correspondência se deve ao fato de que se a teoria no *interior* for fracamente acoplada, a correspondente teoria de campos conforme, na borda, é fortemente acoplada, e vice-versa [12]. Esta correspondência é, de fato, uma *conjectura*, inspirada no caso particular que sugere que a teoria de cordas em $AdS_5 \times S^5$ é *holograficamente dual* a uma teoria de calibre quadridimensional, invariante conforme, com número de supersimetria igual a quatro [12]. Não há, até então, uma *prova* desta conjectura. Contudo, a mesma tem sido verificada com sucesso em vários testes (ver, por exemplo, [118] e, para uma discussão completa, [12]). Como será discutido, um destes testes é realizado via a determinação dos MQNs de perturbações lineares no *interior* de espaços AdS.

Em termos da correspondência AdS/CFT, um buraco negro grande num espaço de anti-de-Sitter, isto é, cujo raio do horizonte de eventos é muito maior que o raio de AdS, corresponde a um estado (aproximadamente) térmico na teoria de campos conforme dual [40]. Deste modo, perturbar um buraco negro imerso num fundo de AdS corresponderia a perturbar tal estado térmico, sendo que o decaimento da perturbação no *interior* descreveria o retorno do sistema ao equilíbrio térmico, do ponto de vista da CFT. Pode-se, portanto, obter uma predição para a escala temporal para o retorno do sistema ao equilíbrio térmico, isto é, a escala de termalização da CFT (*fortemente acoplada*, para ser mais preciso), que agora seria dada simplesmente pelo inverso da parte imaginária do mais baixo MQN, isto é, de menor parte imaginária, $\tau = 1/Im\omega$. Em princípio, parece que seria bastante difícil de se obter diretamente na CFT esta escala [37, 118]. Pelo cálculo dos MQNs de perturbações escalares, minimamente acopladas, de um buraco negro de Schwarzschild-AdS, que poderiam, por exemplo, representar o *dilaton*, Horowitz e Hubeny [37] determinaram tal escala temporal para teorias de campos fortemente acopladas, em três, quatro e seis dimensões, as quais são duais à teoria de cordas em espaço-tempos

assintoticamente AdS em quatro, cinco e sete dimensões, respectivamente [12].

Como será discutido a seguir, foi o trabalho de Birmingham *et al.* [44] que mostrou que de fato há uma estreita relação entre perturbações no *interior* de um espaço AdS e na teoria de campos conforme, “residente” em sua borda, implicando em mais um exemplo da existência de uma dualidade holográfica entre a física no *interior* de um espaço-tempo de AdS e aquela na borda do mesmo, dualidade esta a qual se referirá algumas vezes no texto simplesmente como *dualidade interior-borda*.

O trabalho de Hawking sobre a emissão térmica que buracos negros podem produzir (*radiação de Hawking*) [20], assim como estudos sobre a *segunda lei generalizada da mecânica de buracos negros* [114], mostraram que realmente se pode atribuir uma *temperatura* e uma *entropia* a buracos negros, estabelecendo-se então que os mesmos se comportam, de fato, como *sistemas termodinâmicos*, como anteriormente já havia sido sugerido por Bekenstein [10] e pela analogia das leis da mecânica de buracos negros com as leis da termodinâmica [115]¹. É importante então que se caracterize como buracos negros retornam ao equilíbrio ao serem perturbados. Aliás, esta é uma questão importante não apenas neste caso, mas, obviamente, na mecânica estatística e ainda na teoria de campos à temperatura finita, sendo que para pequenas perturbações o processo de retorno ao equilíbrio é descrito pela chamada *teoria da resposta linear* [117], em que o processo de relaxação é, neste caso, completamente determinado pelos pólos, na representação de momento, da função de correlação (retardada) da perturbação. No caso de buracos negros, o decaimento de pequenas perturbações é descrito pelos MQNs, sendo que a parte imaginária destes determina o tempo de decaimento das mesmas ou, equivalentemente, o retorno do sistema ao equilíbrio.

Birmingham *et al.* [44] deram uma interpretação na teoria de campos conforme para os MQNs de um buraco negro de AdS em $(2 + 1)$ dimensões (*buraco negro de BTZ* [43]), ao mostrarem que há uma concordância exata entre MQNs de perturbações de vários tipos de *spin* e os pólos da função de correlação (retardada) das correspondentes perturbações na teoria de campos conforme dual, “residente” na borda de tal espaço-tempo.

¹Para uma revisão e extensa lista de referências sobre a *termodinâmica de buracos negros*, veja-se, por exemplo, [116].

Isto então forneceu um novo teste *quantitativo* da *correspondência AdS/CFT*. Como mencionado, a existência de uma relação entre MQNs no *interior* do espaço-tempo de AdS e o decaimento das correspondentes perturbações na teoria de campos conforme dual foi qualitativamente sugerida em [37], ao serem analisadas, por sugestão justamente da *correspondência AdS/CFT*, as perturbações de um buraco negro de SAdS em quatro, cinco e sete dimensões. Uma análise semelhante, que igualmente endossou, também qualitativamente, a relação entre MQNs em AdS e o decaimento das perturbações na teoria de campos conforme dual, foi realizada por Wang *et al.*, ao considerarem um buraco negro de Reissner-Nordström-AdS [41].

Voltada para o caso de um buraco negro de BTZ, a correspondência *AdS/CFT*, isto é, de acordo a correspondência *AdS₃/CFT₂*, tem-se que para cada campo de *spin* s , propagando-se no *interior* de *AdS₃*, existe, na teoria de campos conforme dual (*CFT₂*), um correspondente operador, O , caracterizado pelos seus denominados *pesos-conforme* h_R e h_L , sendo $h_R + h_L = \Delta$ e $h_R - h_L = \pm s$, em que Δ é determinado em termos da massa, m , do campo. Especificamente, $\Delta = 1 + \sqrt{1 + m^2}$, para campos escalares e $\Delta = 1 + |m|$, ambos para campos vetoriais e fermiônicos [12].

A análise de Birmingham *et al.* [44] estabeleceu uma relação direta entre o tempo de decaimento das perturbações no *interior* do espaço-tempo de um buraco negro de BTZ e o tempo de relaxação, isto é, a escala temporal para o retorno ao equilíbrio (escala de termalização), da teoria de campos conforme dual na borda deste espaço-tempo. De fato, em tal análise foi mostrado [44] que os MQNs são dados por $\omega_L = \frac{\kappa_L}{a} - 4\pi i T_L (n + h_L)$ e $\omega_R = -\frac{\kappa_R}{a} - 4\pi i T_R (n + h_R)$, em que $\kappa_{L,R} \in \mathbb{Z}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $T_{L,R} = (r_+ \mp r_-)/2\pi a^2$ são as temperaturas dos setores esquerdo (L) e direito (R) da CFT, relacionados à temperatura de Hawking do buraco negro, T_H , por $\frac{1}{T_L} + \frac{1}{T_R} = \frac{1}{T_H}$, conjunto de pólos este que caracteriza o decaimento da perturbação na CFT, sendo exatamente igual àquele dos MQNs de um buraco negro de BTZ.

Dado que se estabeleceu uma descrição holográfica para espaços-tempos de AdS, e tendo a correspondência AdS/CFT levado a um entendimento natural da entropia de buracos negros, em termos de estados quânticos [118], é natural que se busque por uma tal descrição em espaços-tempos de dS. Investigar se é possível atribuir uma descrição

holográfica ao espaço-tempo de dS é ainda mais atrativo quando se tem em mente que buracos negros, sejam em espaços assintoticamente planos, AdS ou dS, exibem um comportamento holográfico, manifesto na relação entropia-área ($S = A/4$, em unidades naturais) e que se pode atribuir a espaços-tempos de dS um horizonte de eventos (cosmológico), dotado de temperatura e entropia, analogamente a um buraco negro [35]. É, portanto, bastante natural que se investigue a possível natureza holográfica da gravitação (e, eventualmente, da física no *interior*) em (de) espaços-tempos de dS. Ademais, pode-se pensar em descrever holograficamente espaços-tempos genéricos [51, 53].

Além do interesse do ponto de visto cosmológico acerca de espaços de dS, tem-se procurado entendê-los no contexto da teoria de cordas, a fim de que se possa estabelecer uma descrição plenamente quântica do mesmo. Além disto, do mesmo modo como foi possível à teoria de cordas dar uma descrição microscópica da entropia de buracos negros, a mesma questão se coloca quanto à descrição da entropia associada ao espaço-tempo de dS. Contudo, enquanto que a teoria de cordas em espaços-tempos de AdS possui uma descrição dual em termos de certas teorias de campos conforme, “residentes em suas bordas”, até agora não se conseguiu obter *rigorosamente* uma dualidade semelhante para o caso de espaços-tempos de dS. Isto se deve ao fato de que até o momento não se conseguiu obter de modo completamente satisfatório uma solução de de-Sitter a partir da teoria de cordas. Argumenta-se que o espaço de de-Sitter não pode resultar de uma compactificação convencional da supergravidade, da teoria de cordas ou da teoria- M , mas sim de modo não-convencional, através do produto do espaço de de-Sitter por uma variedade *não-compacta* [119] (veja-se, também, as referências ali citadas) ².

Por outro lado, conforme enfatizado por Strominger [48], mesmo que ainda não se tenha como tratar o espaço de dS na teoria de cordas, ocorre que esta pode não ser a

²Hull [120], através de uma dualidade entre as teorias de cordas dos tipos IIB e IIA [13], obteve uma decomposição para o espaço de dS, na forma $dS_5 \times H^5$, em que H^5 é o espaço hiperbólico pentadimensional. Baseado nisto, ele propôs uma dualidade entre a teoria de cordas do chamado tipo IIB^* , em $dS_5 \times H^5$, e uma teoria de campos conforme euclidiana. Essa teoria IIB^* deriva da teoria IIA por uma dualidade- T do tipo-tempo [120]. Isto representou uma evidência da existência de uma correspondência dS/CFT , embora tal exemplo leve a patologias (existência de *fantasmas*) em ambas as teorias, tanto no interior como na borda [120, 121].

única maneira de se obter uma descrição, pelo menos parcial, do espaço de dS . De fato, segundo ainda Strominger [48], convém observar que a dualidade entre a física no *interior* de um espaço AdS_3 e uma CFT_2 , “residente” em sua borda, foi descoberta por Brown e Henneaux (1986) [122], a partir de uma análise geral das *simetrias assintóticas* de espaços-tempos tridimensionais, assintoticamente AdS . Tais autores mostraram que o grupo de simetria assintótica é o grupo conforme bidimensional, além do que determinaram também a *carga central* [123] da correspondente CFT . Muito posteriormente, Strominger (1998) [124], usando tal carga central e a *fórmula de Cardy* ³, mostrou que a entropia da CFT leva exatamente à entropia de Bekenstein-Hawking ($S = A/4$, em unidades $G = c = \hbar = \kappa_B = 1$) de um buraco negro de BTZ, o qual é um buraco negro em $(2 + 1)$ dimensões, assintoticamente AdS [43]. Para a obtenção deste resultado, observa Strominger [48], não se fez necessário, em princípio, o uso da teoria de cordas. Entretanto, obviamente que os argumentos de Brown e Henneaux [122] são reforçados pelos exemplos concretos fornecidos pela teoria de cordas. De fato, mais tarde esta dualidade AdS_3/CFT_2 foi entendida como um caso particular da correspondência (dualidade) AdS/CFT , a qual se conjectura ser válida em d dimensões.

Na ausência de um exemplo do espaço dS na teoria de cordas, Strominger fez uma análise das *simetrias assintóticas* do espaço dS_3 , na mesma linha daquela de Brown e Henneaux para o caso AdS_3 ⁴. Guiado então pela analogia com a correspondência AdS/CFT , Strominger conjecturou uma dualidade holográfica *interior-borda*, relacionando a gravitação (“quântica”), no (*interior* do) espaço-tempo de de-Sitter, a uma teoria de campos conforme (euclideana), que reside em sua borda, propondo, pois, uma *correspondência* dS_3/CFT_2 [48]. Strominger propôs, ainda, a generalização desta correspondência, para o caso d -dimensional, ou seja, uma possível correspondência dS_d/CFT_{d-1} , na qual as funções de correlação no *interior* do espaço de de-Sitter, com pontos na borda, são relacionadas às funções de correlação da CFT [48].

³A *fórmula de Cardy* [125] fornece a *densidade de estados* de uma CFT bidimensional, a partir da carga central, o que, portanto, permite que se calcule a entropia de uma CFT bidimensional, uma vez dada aquela quantidade [123].

⁴As simetrias assintóticas de dS_3 são difeomorfismos que preservam a forma assintótica de sua métrica. O grupo de simetria assintótica de dS_3 é o grupo conforme euclideo em duas dimensões.

A noção de que a gravitação quântica no espaço-tempo de de-Sitter pode ter um dual holográfico (euclidiano), possivelmente relacionado às suas bordas-conforme passada (I^-) e/ou futura (I^+) (ver detalhes adiante), surgiu, de fato, em alguns trabalhos anteriores àquele de Strominger, como, por exemplo, os de Hull [120] e Witten [126] (ver ainda outras referências em [48]). Inspirado pelas discussões de tais trabalhos, é que Strominger propôs essa dualidade holográfica entre a física no *interior* do espaço de dS e uma teoria de campos conforme (euclidiana), que “reside” na borda deste espaço, isto é, uma *correspondência dS/CFT*.

Em [129], Klemm discutiu aspectos da correspondência *dS/CFT*, de acordo como proposta por Strominger, re-obtendo de dois modos alternativos, e independentes, a carga central que aparece na álgebra de simetria assintótica do espaço de de-Sitter tridimensional: mediante a anomalia conforme (ou do traço) e, também, através da lei de transformação do tensor de momento-energia da *CFT*, usando, neste último caso, coordenadas estáticas. Klemm determinou ainda, em coordenadas estáticas, a função de dois pontos para operadores da *CFT* acoplados a campos escalares no *interior*.

Em analogia com o trabalho de Birmingham *et al.* [44], que estabeleceu uma concordância precisa entre MQNs e a localização dos pólos da função de correlação (retardada) das correspondentes perturbações na dual *CFT*, Abdalla *et al.* [49] encontraram uma correspondência análoga, no caso do espaço-tempo de dS tridimensional, ao mostrarem que o espectro de MQNs, devidos a uma perturbação escalar no *interior*, coincide com os pólos da função de dois pontos da *CFT* bidimensional, na borda. A investigação de tal correspondência para o caso do espaço-tempo de dS quadridimensional, assim como sua possível extensão para dimensões maiores, é, naturalmente, uma questão de interesse e foi analisada por Abdalla *et al.*, em [50], com o objetivo de investigar a possível generalização do resultado obtido no caso tridimensional, o que resultaria em outra indicação da possível dualidade interior-borda, para espaços-tempos de de-Sitter, isto é, da correspondência holográfica dS/CFT. Este capítulo, portanto, baseia-se no que foi analisado em [50].

3.1 O Espaço-Tempo de de-Sitter: Geometria e Estrutura Causal

O espaço-tempo de de-Sitter *puro*, isto é, *vazio*, é a solução de vácuo da equação de Einstein com o termo cosmológico *positivo*, isto é, com a *constante cosmológica*, Λ , positiva [4],

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad . \quad (3.1)$$

O espaço-tempo de de-Sitter d -dimensional, dS_d , é mais facilmente visualizado como um hiperbolóide (de uma folha),

$$\eta_{AB}X^AX^B \equiv -(X^0)^2 + (X^1)^2 + \dots + (X^d)^2 = a^2 \quad , \quad (3.2)$$

imerso no espaço-tempo de Minkowski $(d+1)$ -dimensional, cuja métrica é

$$ds^2 = \eta_{AB}dX^AdX^B \quad , \quad (3.3)$$

em que $\eta_{AB} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ e $A, B = 0, 1, \dots, d$ [4]. O parâmetro a é o chamado *raio de de-Sitter*, relacionado à constante cosmológica por $\Lambda = (d-1)(d-2)/2a^2$ [127, 128]. A métrica dS_d é induzida pela métrica plana (3.3). A imersão (3.2) é conveniente por tornar manifesta a simetria $O(d, 1)$ (este é o *grupo de isometria* de dS_d).

Alguns dos sistemas de coordenadas mais apropriados, como, por exemplo, coordenadas globais, coordenadas conforme e coordenadas estáticas, para que se explorem as propriedades do espaço-tempo dS_d , são discutidos, por exemplo, em [127, 128]. A idéia do estabelecimento de tais coordenadas consiste na introdução de uma certa parametrização e no uso de (3.1) e do vínculo (3.2). A seguir, faz-se uma breve descrição da métrica expressa nas coordenadas acima citadas, sendo que se estará seguindo essencialmente a discussão apresentada em [127], que é complementada por aquela da Ref. [128].

Coordenadas Globais

A parametrização

$$X^0 = \sinh \frac{\tau}{a}, \quad (3.4a)$$

$$X^i = \omega^i \cosh \frac{\tau}{a}, \quad (3.4b)$$

sendo $i = 1, \dots, d$, $-\infty < \tau < \infty$ e com ω^i dados por

$$\omega^1 = \cos \theta_1, \quad (3.5a)$$

$$\omega^2 = \sin \theta_1 \cos \theta_2, \dots \quad (3.5b)$$

$$\omega^{d-1} = \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \cos \theta_{d-1}, \quad (3.5c)$$

$$\omega^d = \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{d-2} \sin \theta_{d-1}, \quad (3.5d)$$

em que $0 \leq \theta_i < \pi$, para $1 \leq i < d-1$, e $0 \leq \theta_{d-1} < 2\pi$. Tem-se, portanto, que

$$d\Omega_{d-1}^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{d-2} d\theta_{d-1}^2 \quad (3.6)$$

é a métrica da esfera unitária $(d-1)$ -dimensional, S^{d-1} .

De (3.2) e (3.3), a métrica induzida sobre a hipersuperfície (3.2) é então dada por

$$ds^2 = d\tau^2 + (\cosh^2 \tau) d\Omega_{d-1}^2, \quad (3.7)$$

que constitui a métrica de dS_d em coordenadas globais, (τ, θ_i) . Neste caso, o espaço-tempo de de-Sitter é descrito como uma esfera $(d-1)$ -dimensional, que é infinitamente grande em $\tau = -\infty$, é comprimida a um volume mínimo em $\tau = 0$ e volta a expandir-se infinitamente à medida que $\tau \rightarrow +\infty$.

Coordenadas Conforme

A partir das coordenadas globais, podem-se definir as chamadas coordenadas conforme, (T, θ_i) , através da relação

$$\cosh \tau = \frac{1}{\cos \frac{T}{a}}, \quad (3.8)$$

de modo que $-\infty < \tau < \infty$ é mapeado em $-\pi/2 < \frac{T}{a} < \pi/2$ e a métrica (3.7) toma a forma

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{T}{a}} (-dT^2 + a^2 d\Omega_{d-1}^2) \quad , \quad (3.9)$$

que, como se vê, é *conforme* à métrica

$$d\tilde{s}^2 \equiv (\cos^2 \frac{T}{a}) ds^2 = -dT^2 + a^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad . \quad (3.10)$$

Uma vez que métricas *conformemente* relacionadas têm *geodésicas nulas* associadas *idênticas* [80] (de fato, $ds^2 = 0$ implica que $d\tilde{s}^2 = 0$), vê-se que a grande vantagem de se trabalhar com a métrica de de-Sitter na forma (3.10) consiste na descrição da *estrutura causal* do espaço-tempo, por ser a mesma mais simples que a forma (3.9).

A estrutura causal de um dado espaço-tempo é codificada no seu *diagrama conforme*, ou de *Penrose-Carter*, que no caso do espaço de de-Sitter d -dimensional é dado na Fig. 3.1. Cada ponto deste diagrama representa uma esfera S^{d-2} , à exceção daqueles nos lados esquerdo e direito, que representam linhas tipo-tempo, situando-se nos pólos norte e sul, respectivamente, enquanto que uma linha horizontal representa uma esfera S^{d-1} . Os lados superior (I^+) e inferior (I^-) são superfícies onde todas as geodésicas *nulas* iniciam e terminam, sendo denominadas, respectivamente, de *infinito-nulo futuro* e *infinito-nulo passado*.

Uma característica bastante especial do espaço-tempo de de-Sitter, no que concerne à sua estrutura causal, consiste no fato de que *um único observador não pode ter acesso a todo o espaço-tempo* [4]. Um observador localizado no pólo sul (portanto, um observador do tipo-tempo) nunca poderá observar nada (receber informação) a respeito de eventos que estejam situados acima da linha diagonal que vai do pólo norte, em I^- , ao pólo sul, em I^+ (ver Fig.3.2). Além disto, tal observador só poderá enviar informação para a região hachurada na Fig.3.3. Portanto, as linhas diagonais (tracejadas) representam o *horizonte-futuro* e o *horizonte-passado* de um observador tipo-tempo, situado no pólo sul. Conseqüentemente, a região *causalmente conexa*, para um observador tipo-tempo, situado no pólo sul, corresponde à intersecção das duas regiões mencionadas, ou seja, àquela hachurada na Fig.3.4, sendo então a região que é totalmente acessível a um único observador no pólo sul.

Figura 3.1: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de de-Sitter d -dimensional (dS_d). A coordenada conforme temporal, T , varia (tomando-se $a = 1$) de $-\pi/2$, em I^- , a $+\pi/2$, em I^+ .

Figura 3.2: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de de-Sitter, mostrando o passado causal de um observador tipo-tempo, no pólo sul.

Figura 3.3: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de de-Sitter, mostrando o futuro de um observador tipo-tempo, no pólo sul.

Figura 3.4: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de de-Sitter, mostrando a região causalmente conexa de um observador tipo-tempo, no pólo sul.

Coordenadas Estáticas

Dentre os sistemas de coordenadas em que se pode expressar a métrica de de-Sitter, o de coordenadas estáticas é particularmente útil para a determinação de MQNs, uma vez que permite que a métrica seja escrita numa forma que lembra a de um buraco negro de Schwarzschild, já permite a identificação de um *horizonte de eventos cosmológico*, associado a todo observador estático.

Introduzindo-se um parâmetro r , tal que [128, 129]

$$-(X^0)^2 + (X^d)^2 = a^2 f(r) \quad , \quad (3.11)$$

sendo

$$f(r) = 1 - \frac{r^2}{a^2} \quad , \quad (3.12)$$

logo, (3.11) descreve uma hipérbole de raio $\sqrt{a^2 - r^2}$.

Usando-se (3.2), chega-se ao vínculo

$$(X^1)^2 + \dots + (X^{d-1})^2 = r^2 \quad , \quad (3.13)$$

de modo que as coordenadas $X^1, \dots, X^{d-1}$ descrevem uma esfera $(d-2)$ -dimensional, S^{d-2} , de raio r . Parametrizando-se a hipérbole (3.11) por

$$X^0 = \sqrt{a^2 - r^2} \cosh \frac{t}{a} \quad , \quad (3.14)$$

$$X^d = \sqrt{a^2 - r^2} \sinh \frac{t}{a} \quad , \quad (3.15)$$

é fácil ver, de (3.3), que a métrica induzida sobre a hipersuperfície (3.2) é então dada por

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2 \quad , \quad (3.16)$$

em que $d\Omega_{d-2}^2$ é a métrica da esfera unitária S^{d-2} , ou seja,

$$d\Omega_{d-2}^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2 + \dots + \sin^2 \theta_1 \dots \sin^2 \theta_{d-3} d\theta_{d-2}^2 \quad . \quad (3.17)$$

Esta é a forma da métrica dS_d em coordenadas estáticas. De (3.16), vê-se que um observador em $r = 0$ encontra-se envolvido por um *horizonte de eventos (cosmológico)*, localizado em $r = a$. Deve-se mencionar que as coordenadas estáticas não cobrem inteiramente o espaço-tempo de de-Sitter, mas, tão-somente, a região interior ao horizonte cosmológico ($0 \leq r \leq a$), que corresponde ao triângulo direito no diagrama de *Penrose-Carter*, mostrado na Fig.3.5 [35]. Esta, corresponde precisamente à região causalmente conexa do espaço-tempo, para um observador tipo-tempo, que agora se encontra em $r = 0$. Os *infinitos-nulo passado e futuro*, $I^\pm$, correspondem a $r = \infty$.

Figura 3.5: Diagrama de Penrose para o espaço-tempo de de-Sitter, mostrando a região (hachurada) casualmente conexa ($0 \leq r \leq a$); $r = a$ corresponde às linhas tracejadas e $I^\pm$ correspondem a $r = \infty$.

Distância Geodésica

Em virtude do cálculo da função de dois pontos de Hadamard, invariante de de-Sitter (ver Seq. 3.3), é conveniente que se defina o *invariante* $P(X, X')$, associado aos pontos

X e X' , no espaço de de-Sitter. Define-se então (ver, por exemplo, [127])

$$a^2 P(X, X') = \eta_{AB} X^A X'^B \quad , \quad (3.18)$$

relacionado à chamada *distância geodésica* entre dois pontos, $D(X, X')$, por $P = \cos(D/a)$. Em coordenadas estáticas, usando-se (3.14-3.15), pode-se facilmente expressar $P(X, X')$ como

$$a^2 P(X, X') = -\sqrt{r^2 - a^2} \sqrt{r'^2 - a^2} \cosh\left(\frac{t - t'}{a}\right) + rr' \cos \Theta \quad , \quad (3.19)$$

em que $\Theta = \Theta(\Omega, \Omega')$ denota a distância geodésica entre dois pontos na esfera unitária S^{d-2} . Posteriormente, restringir-se-á a análise para o caso $d = 4$, para o qual

$$\cos \Theta = \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta' \quad , \quad (3.20)$$

como facilmente se pode obter em termos dos usuais ângulos polar e azimutal, θ e ϕ , respectivamente.

3.2 Perturbações Escalares do Espaço-Tempo de de-Sitter

No regime de perturbações lineares, uma dada perturbação pode ser expressa em termos de um campo-teste, de certa massa e *spin*, que se propaga em uma dada geometria de fundo, fixa. Conseqüentemente, perturbações escalares do espaço-tempo de de-Sitter d -dimensional, dS_d , podem ser descritas simplesmente pela equação de Fock-Klein-Gordon,

$$(\square - \mu^2)\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) - \mu^2 \Phi = 0 \quad , \quad (3.21)$$

em que μ é a massa do campo escalar Φ e $g_{\mu\nu}$ é a métrica de dS_d , que em coordenadas estáticas é dada por

$$g_{\mu\nu} = \text{diagonal}(-f(r), f^{-1}(r), r^2 \hat{1}_{d-2}) \quad , \quad (3.22)$$

sendo $\hat{1}_{d-2}$ a matriz identidade sobre S^{d-2} . Então, tem-se que

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} = r^{(d-2)} \sin^{d-3} \theta_1 \sin^{d-4} \theta_2 \dots \sin \theta_{d-3} \quad (3.23)$$

e, de (3.21), pode-se obter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^{d-2}} \partial_t [r^{d-2} (-f^{-1}(r)) \partial_t \Phi(t, r, \Omega)] + \frac{1}{r^{d-2}} \partial_r [r^{d-2} f(r) \partial_r \Phi(t, r, \Omega)] + \\ & + \frac{1}{r^2} \nabla_{d-2}^2 \Phi(t, r, \Omega) - \mu^2 \Phi(t, r, \Omega) = 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.24)$$

em que Ω denota o conjunto de variáveis angulares e ∇_{d-2}^2 é o laplaciano sobre a esfera unitária S^{d-2} .

A equação (3.21) é separável com o *ansatz*

$$\Phi(t, r, \Omega) = e^{-i\omega t} R_\ell(r) Y_\ell^{\{m\}}(\Omega) \quad , \quad (3.25)$$

em que $Y_\ell^{\{m\}}(\Omega)$ são os harmônicos (hiper-)esféricos sobre S^{d-2} e obedecem a

$$\nabla_{d-2}^2 Y_\ell^{\{m\}}(\Omega) = -\ell(\ell + d - 3) Y_\ell^{\{m\}}(\Omega) \quad . \quad (3.26)$$

Em $Y_\ell^{\{m\}}$, ℓ é um inteiro positivo e m é um índice coletivo ($m = m_1, m_2, \dots, m_{d-3}$) [130].

Assim, tem-se para a dependência radial, R_ℓ , que

$$\frac{f(r)}{r^{d-2}} \frac{d}{dr} \left(f(r) r^{d-2} \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left[\omega^2 - f(r) \left(\frac{\ell(\ell + d - 3)}{r^2} + \mu^2 \right) \right] R(r) = 0 \quad , \quad (3.27)$$

em que a partir daqui será omitido o índice ℓ em $R_\ell(r)$.

Definindo-se

$$z = \frac{r^2}{a^2} \quad , \quad (3.28)$$

a equação (3.27) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \frac{4}{a^2} z(z-1)^2 \frac{d^2 R(z)}{dz^2} + \frac{2}{a^2} (z-1)[z(d+1) - (d-1)] \frac{dR(z)}{dz} + \\ & + \left[\omega^2 - (1-z) \left(\frac{\ell(\ell + d - 3)}{a^2 z} + \mu^2 \right) \right] R(z) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.29)$$

Tomando-se, agora, como *ansatz*

$$R = z^\alpha (1-z)^\beta F(z) \quad , \quad (3.30)$$

a equação (3.29) pode ser transformada em

$$\begin{aligned}
& z(z-1)\frac{d^2F(z)}{dz^2} + \frac{1}{2}[(4\alpha + 4\beta + d + 1)z - (4\alpha + d - 1)]\frac{dF(z)}{dz} + \\
& + \left((\alpha + \beta)^2 + \frac{d-1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{\mu^2 a^2}{4} \right) F(z) + \\
& + \frac{(4\beta^2 + \omega^2 a^2)z - [4\alpha^2 + 2\alpha(d-3) - \ell(\ell + d - 3)](z-1)}{4z(z-1)} F(z) = 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

que é uma equação hipergeométrica, isto é,

$$z(z-1)\frac{dF(z)}{dz} + [(1 + A + B)z - C]\frac{dF(z)}{dz} + ABF(z) = 0 \quad , \tag{3.32}$$

desde que

$$\begin{aligned}
4\alpha^2 + 2\alpha(d-3) - \ell(\ell + d - 3) &= 0 \quad , \\
4\beta^2 + \omega^2 a^2 &= 0 \quad ,
\end{aligned}$$

cujas soluções são

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad \alpha &= \frac{\ell}{2} \quad , \quad \beta = \frac{i\omega a}{2} \quad ; \\
\text{(ii)} \quad \alpha &= \frac{\ell}{2} \quad , \quad \beta = -\frac{i\omega a}{2} \quad ; \\
\text{(iii)} \quad \alpha &= -\frac{\ell+d-3}{2} \quad , \quad \beta = \frac{i\omega a}{2} \quad ; \\
\text{(iv)} \quad \alpha &= -\frac{\ell+d-3}{2} \quad , \quad \beta = -\frac{i\omega a}{2} \quad .
\end{aligned}$$

Para o caso (i), as constantes A , B , e C são dadas pelo conjunto

$$A_{\mp} = B_{\pm} = \frac{\ell + i\omega a}{2} + \frac{1}{4} \left[d - 1 \pm \sqrt{(d-1)^2 - 4\mu^2 a^2} \right] \quad , \tag{3.33}$$

$$C = \ell + \frac{d-1}{2} \quad . \tag{3.34}$$

Há, portanto, duas soluções para $R(z)$, a saber,

$$R(z) = z^{\ell/2}(1-z)^{i\omega a/2} F\left(\frac{\ell + i\omega a + h_-}{2}, \frac{\ell + i\omega a + h_+}{2}, \ell + \frac{d-1}{2}, z \right) \tag{3.35}$$

e

$$R(z) = z^{\ell/2}(1-z)^{ia\omega/2} F\left(\frac{\ell + ia\omega + h_+}{2}, \frac{\ell + ia\omega + h_-}{2}, \ell + \frac{d-1}{2}, z\right) , \quad (3.36)$$

em que F é a função hipergeométrica [131] e

$$h_{\pm} = \frac{1}{2} \left[d-1 \pm \sqrt{(d-1)^2 - 4\mu^2 a^2} \right] . \quad (3.37)$$

Os correspondentes MQNs são soluções das equações

$$C - A = -n , \quad C - B = -n , \quad (3.38)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \ell + \frac{d-1}{2} - \frac{\ell + ia\omega + h_{\pm}}{2} + n &= 0 , \\ \ell + \frac{d-1}{2} - \frac{\ell + ia\omega + h_{\pm}}{2} + n &= 0 . \end{aligned}$$

As frequências quase-normais são então dadas por :

$$ia\omega = 2n + \ell + d - 1 - h_{\pm} , \quad (3.39)$$

ou seja,

$$ia\omega = 2n + \ell + h_{\mp} , \quad (3.40)$$

o que significa que há quatro conjuntos de soluções :

$$\pm ia\omega_R = 2n + \ell + h_+ , \quad \pm ia\omega_L = 2n + \ell + h_- , \quad (3.41)$$

em que se incluíram as soluções complexo-conjugadas.

O caso (ii) é obtido de (i) por conjugação complexa e as frequências quase-normais são soluções que implicam no caso (ii) como uma solução. Além disto, MQNs podem ser obtidos a partir da simetria $\ell \rightarrow -(\ell + d - 3)$, que implica nos casos (iii) e (iv) acima, ou seja, tem-se também o seguinte conjunto de MQNs :

$$\pm ia\omega_R = 2n - (\ell + d - 3) + h_+ , \quad \pm ia\omega_L = 2n - (\ell + d - 3) + h_- . \quad (3.42)$$

3.3 Função de Correlação de Dois Pontos para Operadores na Teoria de Campos Conforme na Borda do Espaço de de-Sitter

Funções de dois pontos na teoria de campos em espaços-tempos de de-Sitter foram bastante estudadas na literatura (ver [132] e referências ali citadas). Isto decorre do fato de que o espaço de de-Sitter é um espaço *maximalmente simétrico*⁵. Assim sendo, no caso, por exemplo, de uma teoria de campo escalar, as funções de dois pontos, $G(x, x')$, podem ser expressas em termos de um *invariante de de-Sitter*, desde que se considerem estados invariantes de de-Sitter. Por exemplo, a função de dois pontos de *Hadamard* de um campo escalar $\Phi(x)$, associada, portanto, à equação de onda (3.21), é definida por

$$G(x, x') = \text{cte} \langle 0 | \{ \Phi(x), \Phi(x') \} | 0 \rangle \quad . \quad (3.43)$$

que, para $x \neq x'$, satisfaz, tendo-se em vista (3.21), a

$$(\square_x - \mu^2)G(x, x') = 0 \quad , \quad (3.44)$$

em que $\square_x$ é o d'alambertiano em dS_d .

Para estados $|0\rangle$ invariantes de de-Sitter, tem-se que $G(x, x')$ é uma função apenas da distância geodésica entre os pontos x e x' , ou seja, uma função apenas de $D(x, x')$, ou, equivalentemente, de $P(X, X')$ (ver (3.18)). É fácil ver que $P(X, X')$ é um invariante de de-Sitter. Obtém-se, assim, a função de Hadamard invariante de de-Sitter. Como consequência, consegue-se expressar (3.44) como uma equação diferencial ordinária, em termos de P , o que será mostrado a seguir.

⁵Um espaço (métrico) d -dimensional é dito ser *maximalmente simétrico* se sua métrica admitir o número máximo de vetores de Killing, a saber, $d(d+1)/2$ (para uma discussão de isometrias e espaços maximalmente simétricos, veja-se [133]). Além do espaço de de-Sitter, são exemplos, em se tratando de geometrias pseudo-riemannianas, o espaço de anti-de-Sitter e o de Minkowski. E como exemplos de espaços riemannianos dessa classe, têm-se o plano euclideo, a esfera e o espaço hiperbólico.

Como $P(X, X') = P(X(x), X'(x'))$, tem-se que $G(P(X, X')) = G(x, x')$. Deste modo, sendo

$$\square_x G(x, x') = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu G(x, x')) \quad , \quad (3.45)$$

e como a métrica (3.22) é diagonal, obtém-se que

$$\square_x G(x, x') = \frac{-1}{f(r)} \partial_t^2 G + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} f(r)) \partial_r G + f(r) \partial_r^2 G + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_m (\sqrt{-g} g^{mn} \partial_n G) \quad , \quad (3.46)$$

com $m, n = \theta, \phi$.

Abrindo-se as componentes em θ e ϕ , e sendo $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$, obtém-se

$$\square_x G(x, x') = \frac{-1}{f(r)} \partial_t^2 G + \left(\partial_r f + \frac{2f}{r} \right) \partial_r G + f \partial_r^2 G + \frac{\cos \theta}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta G + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 G + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\phi^2 G \quad . \quad (3.47)$$

Como $G(x, x') = G(P(x, x'))$, seguem-se que

$$\partial_\mu G(x, x') = \partial_\mu G(P(x, x')) = \partial_P G \partial_\mu P \quad (3.48)$$

e

$$\partial_\nu \partial_\mu G(x, x') = \partial_P^2 G \partial_\mu P \partial_\nu P + \partial_\nu \partial_\mu P \quad , \quad (3.49)$$

das quais se derivam

$$\partial_t^2 G = \partial_P^2 G (\partial_t P)^2 + \partial_P G \partial_t^2 P \quad , \quad (3.50)$$

$$\partial_r G = \partial_P G \partial_r P \quad , \quad (3.51)$$

$$\partial_r^2 G = \partial_P^2 G (\partial_r P)^2 + \partial_P G \partial_r^2 P \quad , \quad (3.52)$$

$$\partial_\theta G = \partial_P G \partial_\theta P \quad , \quad (3.53)$$

$$\partial_\theta^2 G = \partial_P^2 G (\partial_\theta P)^2 + \partial_P G \partial_\theta^2 P \quad , \quad (3.54)$$

e

$$\partial_\phi^2 G = \partial_P^2 G (\partial_\phi P)^2 + \partial_P G \partial_\phi^2 P \quad . \quad (3.55)$$

De (3.19) e (3.20), têm-se que

$$\partial_t P = -\frac{1}{a^3} \sqrt{r^2 - a^2} \sqrt{r'^2 - a^2} \sinh \left(\frac{t - t'}{a} \right) \quad (3.56)$$

e

$$\partial_t^2 P = -\frac{1}{a^4} \sqrt{r^2 - a^2} \sqrt{r'^2 - a^2} \cosh\left(\frac{t - t'}{a}\right) . \quad (3.57)$$

Logo, de (3.50), tem-se

$$\partial_t^2 G = \partial_P^2 G a^{-6} (r^2 - a^2)(r'^2 - a^2) \sinh^2\left(\frac{t - t'}{a}\right) - \partial_P G a^{-4} \sqrt{r^2 - a^2} \sqrt{r'^2 - a^2} \cosh\left(\frac{t - t'}{a}\right) . \quad (3.58)$$

De (3.19), vê-se que

$$\partial_r P = \frac{-r}{a^2} (r^2 - a^2)^{-1/2} \sqrt{r'^2 - a^2} \cosh\left(\frac{t - t'}{a}\right) + \frac{1}{a^2} r' \cos \Theta , \quad (3.59)$$

da qual se segue que

$$\partial_r^2 P = \frac{1}{r^2 - a^2} \sqrt{\frac{r'^2 - a^2}{r^2 - a^2}} . \quad (3.60)$$

De (3.19) e (3.20), tem-se

$$\partial_\theta P = \frac{rr'}{a^2} (\cos \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') - \sin \theta \cos \theta') , \quad (3.61)$$

da qual resulta

$$\partial_\theta^2 P = \frac{-rr'}{a^2} (\sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') - \cos \theta \cos \theta') . \quad (3.62)$$

De (3.19) e (3.20), tem-se

$$\partial_\phi P = \frac{-rr'}{a^2} \sin \theta \sin \theta' \sin(\phi - \phi') , \quad (3.63)$$

da qual deriva

$$\partial_\phi^2 P = \frac{-rr'}{a^2} \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') . \quad (3.64)$$

Portanto, de (3.54) e (3.55), obtêm-se

$$\partial_\theta^2 G = \partial_P^2 G (\cos \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') - \sin \theta \cos \theta')^2 - \partial_P G \frac{rr'}{a^2} (\sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') - \cos \theta \cos \theta') \quad (3.65)$$

e

$$\partial_\phi^2 G = \partial_P^2 G \frac{r^2 r'^2}{a^2} \sin^2 \theta \sin^2 \theta' \sin^2(\phi - \phi') - \partial_P G \frac{rr'}{a^2} \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') . \quad (3.66)$$

Finalmente, de (3.47), tem-se que

$$\square_x G = \frac{1}{a^2}(1 - P^2)\partial_P^2 G - \frac{4}{a^2}P\partial_P G \quad . \quad (3.67)$$

Logo, de (3.44), finalmente, tem-se que

$$(P^2 - 1)\partial_P^2 G + 4P\partial_P G + \mu^2 a^2 G = 0 \quad . \quad (3.68)$$

Em d dimensões, o resultado acima é generalizado para [134, 129]

$$(1 - P^2)\frac{d^2 G}{dP^2} - dP\frac{dG}{dP} - \mu^2 a^2 G(P) = 0 \quad , \quad (3.69)$$

que, por meio da mudança de variável $z = (1 + P)/2$, torna-se uma equação hipergeométrica [134]:

$$z(1 - z)\frac{d^2 G}{dz^2} + d\left(\frac{1}{2} - z\right)\frac{dG}{dz} - \mu^2 a^2 G(z) = 0 \quad . \quad (3.70)$$

É simples de se verificar que a Eq. (3.70) é invariante pela transformação $z \rightarrow 1 - z$. Logo, duas soluções linearmente independentes são $F(h_+, h_-, \frac{d}{2}; z)$ e $F(h_+, h_-, \frac{d}{2}; 1 - z)$, sendo que F é a função hipergeométrica e $h_{\pm}$ são as quantidades dadas por (3.37). Tais soluções são singulares em $z = 1$ e $z = 0$, respectivamente. O ponto $z = 1$ corresponde ao cone de luz. Uma vez que se está interessado em pontos no infinito-nulo, dentre estas soluções deve-se considerar aquela que tenha singularidades apenas no cone de luz. A única solução que é deste tipo é [132]

$$G(z) = \text{Re } F\left(h_+, h_-, \frac{d}{2}; z\right) \quad , \quad (3.71)$$

i.e.,

$$G(P) = \text{Re } F\left(h_+, h_-, \frac{d}{2}; \frac{1 + P}{2}\right) \quad . \quad (3.72)$$

A fim de se calcular explicitamente a função de correlação de dois pontos, para um operador O , da CFT na borda, acoplado ao campo Φ , no *interior*, restringir-se-ão agora as considerações para o caso quadridimensional ($d = 4$). Os resultados podem ser naturalmente estendidos para qualquer dimensão. Em total analogia com a correspondência

AdS/CFT , Strominger [48] propôs que a função de correlação de dois pontos pode ser obtida por meio de uma expressão equivalente àquela usada em tal correspondência. Analogamente como considerado em [48, 129], no estudo da correspondência dS_3/CFT_2 , será considerado, aqui, que a função de correlação consistirá no coeficiente quadrático de Φ_- na seguinte expressão:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{I^-} dt d\theta d\phi dt' d\theta' d\phi' \sin \theta \sin \theta' \frac{(rr')^3}{a^2} \times \left[\Phi(t, r, \theta, \phi) \overleftrightarrow{\partial}_{r_*} G(t, r, \theta, \phi; t', r', \theta', \phi') \overleftrightarrow{\partial}_{r'_*} \Phi(t', r', \theta', \phi') \right]_{r=r'} , \quad (3.73)$$

em que $dr_* = (-f(r))^{-1/2} dr$.

Sendo $A \overleftrightarrow{\partial} B \equiv A \partial B - (\partial A) B$, pode-se escrever a expressão entre colchêtes em (3.73) como

$$\begin{aligned} \Phi(x) \overleftrightarrow{\partial}_{r_*} G(x, x') \overleftrightarrow{\partial}_{r'_*} \Phi(x') &= \Phi(x) \partial_{r_*} G(x, x') \partial_{r'_*} \Phi(x') + \\ &- \partial_{r_*} \Phi(x) G(x, x') \partial_{r'_*} \Phi(x') + \\ &+ \partial_{r_*} \Phi(x) \partial_{r'_*} G(x, x') \Phi(x') + \\ &- \Phi(x) \partial_{r'_*} \partial_{r_*} G(x, x') \Phi(x') , \end{aligned} \quad (3.74)$$

em que $\Phi(x) \equiv \Phi(t, r, \theta, \phi)$, $\Phi(x') \equiv \Phi(t', r', \theta', \phi')$ e $G(x, x') \equiv G(t, r, \theta, \phi; t', r', \theta', \phi')$.

Sendo $G = G(x, x')$, então:

$$\partial_{r_*} G = \partial_r G \frac{dr}{dr_*} = (-f(r))^{1/2} \partial_r G , \quad (3.75)$$

$$\partial_{r'_*} G = (-f(r'))^{1/2} \partial_{r'} G , \quad (3.76)$$

$$\partial_{r_*} \Phi(x) = (-f(r))^{1/2} \partial_r \Phi(x) , \quad (3.77)$$

$$\partial_{r'_*} \Phi(x') = (-f(r'))^{1/2} \partial_{r'} \Phi(x') . \quad (3.78)$$

De (3.75), tem-se

$$\partial_{r'_*} \partial_{r_*} G = (-f(r))^{1/2} (-f(r'))^{1/2} \partial_{r'} \partial_r G(x, x') . \quad (3.79)$$

Voltando-se à Eq. (3.74), e utilizando-se as equações (3.75-3.79), é imediata a obtenção de

$$\begin{aligned} \Phi(x) \overleftrightarrow{\partial}_{r_*} G(x, x') \overleftrightarrow{\partial}_{r_*'} \Phi(x') &= (-f(r))^{1/2} (-f(r'))^{1/2} \left[\Phi(x) \partial_r G(x, x') \partial_{r'} \Phi(x') + \right. \\ &\quad - \partial_r \Phi(x) G(x, x') \partial_{r'} \Phi(x') + \partial_r \Phi(x) \partial_{r'} G(x, x') \Phi(x') + \\ &\quad \left. - \Phi(x) \partial_{r'} \partial_r G(x, x') \Phi(x') \right] . \end{aligned} \quad (3.80)$$

Como em [48, 129], impõe-se na borda-conforme I^- a seguinte condição de contorno para o campo Φ :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \Phi(t, r, \theta, \phi) = r^{-h_-} \Phi_-(t, \theta, \phi) . \quad (3.81)$$

Obter-se-á, a seguir, o comportamento assintótico de $G(x, x')$, em coordenadas estáticas, na borda-conforme I^- , de acordo como mostrado em [129].

Tem-se, de (3.72), que

$$G(P) \sim \text{Re} \left(h_+, h_-, \frac{d}{2}; \frac{P}{2} \right) , \quad (3.82)$$

para $P \rightarrow \infty$.

Porém, de (3.19), vê-se, de imediato, que

$$\lim_{r, r' \rightarrow \infty} P(t, r, \Omega; t', r', \Omega') \sim \frac{-rr'}{a^2} \left[\cosh \left(\frac{t-t'}{a} \right) - \cos \Theta \right] , \quad (3.83)$$

que diverge. No entanto, sendo

$$F(h_+, h_-, \frac{d}{2}; z) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(h_- - h_+)}{\Gamma(h_-)\Gamma(\frac{d}{2} - h_+)} (-z)^{-h_+} F \left(h_+, h_+ - \frac{d}{2} + 1, h_+ - h_- + 1; \frac{1}{z} \right) + (h_+ \leftrightarrow h_-) \quad (3.84)$$

e $F(\alpha, \beta, \gamma; 0) = 1$, é fácil ver que

$$G(P) \sim \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(h_- - h_+)}{\Gamma(h_-)\Gamma(\frac{d}{2} - h_+)} \left(\frac{-P}{2} \right)^{-h_+} + (h_+ \leftrightarrow h_-) , \quad (3.85)$$

para $P \rightarrow \infty$, que pode ser reescrita, tendo-se em vista (3.83), como

$$\lim_{r, r' \rightarrow \infty} G(t, r, \Omega; t', r', \Omega') \sim \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(h_- - h_+)}{\Gamma(h_-)\Gamma(\frac{d}{2} - h_+)} \left(\frac{rr'}{2a^2} \right)^{-h_+} \left[\cosh \left(\frac{t-t'}{a} \right) - \cos \Theta \right] + (h_+ \leftrightarrow h_-) . \quad (3.86)$$

No caso $d = 4$,

$$\lim_{r, r' \rightarrow \infty} G(t, r, \theta, \phi; t', r', \theta', \phi') = \gamma_+ \left(\frac{rr'}{2a^2} \right)^{-h_+} \left[\cosh \left(\frac{t-t'}{a} \right) - \cos \Theta \right]^{-h_+} + (h_+ \leftrightarrow h_-) \quad , \quad (3.87)$$

em que

$$\gamma_+ = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(h_- - h_+)}{\Gamma(h_-)\Gamma(\frac{d}{2} - h_+)} \quad (3.88)$$

e $\cos \Theta$ é dado por (3.20), ao se considerar o caso quadridimensional.

De (3.81), tem-se que

$$\partial_r \Phi(x) = -h_- r^{-(h_-+1)} \Phi_-(t, \theta, \phi) \quad (3.89)$$

e

$$\partial_{r'} \Phi(x') = -h_- (r')^{-(h_-+1)} \Phi_-(t', \theta', \phi') \quad . \quad (3.90)$$

De (3.87), tem-se que

$$\partial_r G(x, x') = -\frac{\gamma_+ h_+}{2a^2} r^{-(h_++1)} (r')^{-h_+} A^{-h_+} - \frac{\gamma_- h_-}{2a^2} r^{-(h_-+1)} (r')^{-h_-} A^{-h_-} \quad (3.91)$$

e

$$\partial_{r'} G(x, x') = -\frac{\gamma_+ h_+}{2a^2} (r')^{-(h_++1)} r^{-h_+} A^{-h_+} - \frac{\gamma_- h_-}{2a^2} (r')^{-(h_-+1)} r^{-h_-} A^{-h_-} \quad , \quad (3.92)$$

em que

$$A \equiv \cosh \left(\frac{t-t'}{a} \right) - \cos \Theta \quad . \quad (3.93)$$

Para que se completem os termos necessários para o cálculo da expressão (3.80), falta ainda o termo

$$\begin{aligned} \partial_{r'} \partial_r G(x, x') &= \partial_{r'_*} [\partial_r G(x, x')] \\ &= \frac{\gamma_+ h_+^2}{2a^2} r^{-(h_++1)} (r')^{-(h_++1)} A^{-h_+} \\ &\quad + \frac{\gamma_- h_-^2}{2a^2} r^{-(h_-+1)} (r')^{-(h_-+1)} A^{-h_-} \quad . \end{aligned} \quad (3.94)$$

Substituindo-se as equações de (3.89) a (3.94) em (3.80) e, em seguida, levando-se o resultado à Eq. (3.73), e usando-se ainda que $(-f(r))^{1/2}(-f(r'))^{1/2} \sim \frac{rr'}{a^2}$, para $r \rightarrow \infty$, obtém-se, após alguns cancelamentos e o agrupamento de termos semelhantes, que

$$L = - \int_{I^-} dt d\theta d\phi dt' d\theta' d\phi' \sin \theta \sin \theta' \frac{r^8}{2a^6} \Phi_-(t, \theta, \phi) (h_+ - h_-)^2 \gamma_+ A^{-h_+} r^{-2(h_+ + h_- + 1)} \Phi_-(t', \theta', \phi'). \quad (3.95)$$

De (3.37), tem-se, para o caso quadridimensional ($d = 4$), que $h_+ + h_- = 3$ e $h_+ - h_- = \sqrt{9 - 4\mu^2 a^2}$. Substituindo-se estas relações na expressão acima, vê-se que

$$L = \int_{I^-} dt d\theta d\phi dt' d\theta' d\phi' \sin \theta \sin \theta' \frac{1}{2a^6} \Phi_-(t, \theta, \phi) (4\mu^2 a^2 - 9) \gamma_+ A^{-h_+} \Phi_-(t', \theta', \phi') \quad , \quad (3.96)$$

ou seja, substituindo-se a expressão para A , tem-se que

$$L = \int_{I^-} dt d\theta d\phi dt' d\theta' d\phi' \sin \theta \Phi_-(t, \theta, \phi) \frac{cte}{[\cosh(\frac{t-t'}{a}) - \cos \Theta]^{h_+}} \sin \theta' \Phi_-(t', \theta', \phi') \quad . \quad (3.97)$$

Logo, substituindo-se na equação acima a expressão para $\cos \Theta$, a função de correlação de dois pontos, na borda I^- , é dada por

$$\langle O(t, \theta, \phi) O(t', \theta', \phi') \rangle = \frac{cte}{[\cosh(\frac{t-t'}{a}) - (\sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta')]^{h_+}} \quad , \quad (3.98)$$

que generaliza, para 3+1 dimensões, a expressão correspondente ao caso 2+1-dimensional, obtida no estudo da correspondência dS_3/CFT_2 , em [129].

Para a obtenção de (3.98), foi usada a condição de contorno (3.81). Contudo, como enfatizado por Strominger [48], (3.81) não é uma condição mandatória, sendo que se pode também escolher $\Phi(t, r, \theta, \phi) = r^{-h_+} \Phi_+(t, \theta, \phi)$ no infinito. Isto conduz a funções de correlação similares, obtidas pela troca $h_+ \leftrightarrow h_-$. Portanto, de agora em diante, simplesmente será usado h , sendo que, ao fim, obter-se-á o conjunto total de soluções escolhendo-se um ou outro valor de h . Assim, denota-se que

$$D(\Phi, \Phi') \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \int dt d\theta d\phi dt' d\theta' d\phi' \sin \theta \sin \theta' \frac{(rr')^3}{a^2} \times \left[\Phi(x) \overleftrightarrow{\partial}_{r_*} G(x, x') \overleftrightarrow{\partial}_{r'_*} \Phi(x') \right]_{r=r'} = \quad (3.99)$$

$$= \int dt d\theta d\phi dt' d\theta' d\phi' \frac{\sin \theta \sin \theta' \Phi_-(t, \theta, \phi) \Phi_-(t', \theta', \phi')}{[\cosh(\frac{t-t'}{a}) - (\sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta')]^h}. \quad (3.100)$$

Agora, substitua-se na equação acima o *ansatz* $\Phi_-(t, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} Y_\ell^m(\theta, \phi)$. Deve-se notar que até este ponto não há, *a priori*, nenhuma relação entre o parâmetro ω neste *ansatz* e aquele denotando os MQNs relativos às perturbações no *interior*, em (3.25), ainda que se esteja empregando a mesma notação. Segue-se então que

$$D_{\omega\omega'} = \int dt d\theta d\phi dt' d\theta' d\phi' \frac{\sin \theta \sin \theta' Y_\ell^m(\theta, \phi) Y_{\ell'}^{m'}(\theta', \phi') e^{-i\omega t} e^{-i\omega' t'}}{[\cosh(\frac{t-t'}{a}) - (\sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') + \cos \theta \cos \theta')]^h}, \quad (3.101)$$

que pode ser convenientemente escrito na forma (a menos de um fator constante, C , que vem da normalização dos harmônicos esféricos)

$$D_{\omega\omega'} = C \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') \int d\tau d\theta d\theta' d\varphi \sin \theta \sin \theta' P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta') \times \\ e^{im\varphi} e^{-i\omega\tau} \left[\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right) - (\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi + \cos \theta \cos \theta') \right]^{-h}, \quad (3.102)$$

em que $\varphi = \phi - \phi'$ e $\tau = t - t'$.

Objetiva-se obter o espectro das perturbações, ou seja, os pólos em ω em (3.102), o que não é tão difícil, já que cada pólo é caracterizado pelo comportamento assintótico do integrando, para $\tau \rightarrow \infty$. De fato, um pólo $1/(\omega^2 - \omega_0^2)$ corresponde a um comportamento assintótico $\exp(-i\omega_0\tau)$. Logo, expandindo-se (3.102) em potências da quantidade

$$\epsilon \equiv \frac{1}{\cosh(\frac{\tau}{a})} (\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi + \cos \theta \cos \theta') \quad , \quad (3.103)$$

tem-se

$$D_{\omega\omega'} = C \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') \int \frac{d\tau e^{-i\omega\tau}}{\cosh(\frac{\tau}{a})^h} \left[a_0 + a_1 \frac{h}{\cosh(\frac{\tau}{a})} + a_2 \frac{h(h+1)}{2! \cosh^2(\frac{\tau}{a})} + \right. \\ \left. + a_3 \frac{h(h+1)(h+2)}{3! \cosh^3(\frac{\tau}{a})} + \dots \right], \quad (3.104)$$

em que

$$a_0 = \int d\theta d\theta' \sin \theta \sin \theta' P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta') \int d\varphi e^{im\varphi} \quad , \quad (3.105)$$

$$a_1 = \int d\theta d\theta' \sin \theta \sin \theta' P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta') \int d\varphi e^{im\varphi} \times \\ [\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi + \cos \theta \cos \theta'] , \quad \dots \quad (3.106)$$

$$a_N = \int d\theta d\theta' \sin \theta \sin \theta' P_\ell^m(\cos \theta) P_{\ell'}^m(\cos \theta') \int d\varphi e^{im\varphi} \times \\ [\sin \theta \sin \theta' \cos \varphi + \cos \theta \cos \theta']^N \quad \dots \quad (3.107)$$

É simples resolverem-se as integrais em φ , por meio da relação de ortogonalidade de $\exp(im\varphi)$. Isto fixará o valor de m em cada termo da expansão. As integrais em θ e θ' são um pouco intrincadas, podendo, porém, ser manipuladas usando-se integrais padrões (como, *e.g.*, em [131]) envolvendo os próprios $P_\ell^m(\theta)$'s e contribuições envolvendo senos e cossenos. Por exemplo, até o termo de segunda ordem na expansão em ϵ , serão encontradas integrais do tipo

$$a_0 = 2\pi\delta_{m,0} \int_{-1}^1 dx' P_{\ell'}^0(x') \int_{-1}^1 dx P_\ell^0(x) , \quad (3.108)$$

$$a_1 = \pi\delta_{m,1} \int_{-1}^1 dx' P_{\ell'}^1(x') (1-x'^2)^{1/2} \int_{-1}^1 dx P_\ell^1(x) (1-x^2)^{1/2} + \\ 2\pi\delta_{m,0} \int_{-1}^1 dx' P_{\ell'}^0(x') x' \int_{-1}^1 dx P_\ell^0(x) x , \quad (3.109)$$

$$a_2 = \frac{\pi}{2}\delta_{m,2} \int_{-1}^1 dx' P_{\ell'}^2(x') (1-x'^2) \int_{-1}^1 dx P_\ell^2(x) (1-x^2) + \\ 2\pi\delta_{m,1} \int_{-1}^1 dx' P_{\ell'}^1(x') x' (1-x'^2)^{1/2} \int_{-1}^1 dx P_\ell^1(x) x (1-x^2)^{1/2} + \\ 2\pi\delta_{m,0} \int_{-1}^1 dx' P_{\ell'}^0(x') x'^2 \int_{-1}^1 dx P_\ell^0(x) x^2 + \\ \pi\delta_{m,0} \int_{-1}^1 dx' P_{\ell'}^0(x') (1-x'^2) \int_{-1}^1 dx P_\ell^0(x) (1-x^2) + \\ \frac{\pi}{2}\delta_{m,-2} \int_{-1}^1 dx' P_{\ell'}^{-2}(x') (1-x'^2) \int_{-1}^1 dx P_\ell^{-2}(x) (1-x^2) , \quad (3.110)$$

em que $x = \cos \theta$ e $x = \cos \theta'$.

O cálculo das integrais acima fixa os valores de ℓ e ℓ' que conduzem a uma contribuição não-nula para os coeficientes a_0 , a_1 , e a_2 . Isto pode ser facilmente feito usando-se, para

algumas integrais, a ortogonalidade dos $P_\ell^m(\theta)$'s, e, para outras, fazendo-se uso de uma tabela. Quase todas as integrais que aparecem em a_0, a_1 , e a_2 podem ser expressas como o produto de P_ℓ^m 's com o mesmo índice m , o que permite então que se obtenham para aquelas integrais

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell^0(x) = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,0} \quad , \quad (3.111)$$

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell^1(x)(1-x^2)^{1/2} = \frac{2(\ell+1)!}{(2\ell+1)(\ell-1)!} \delta_{\ell,1} \quad , \quad (3.112)$$

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell^0(x)x = \frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell,1} \quad , \quad (3.113)$$

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell^2(x)(1-x^2) = \frac{2(\ell+2)!}{3(2\ell+1)(\ell-2)!} \delta_{\ell,2} \quad , \quad (3.114)$$

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell^1(x)x(1-x^2)^{1/2} = \frac{2(\ell+1)!}{3(2\ell+1)(\ell-1)!} \delta_{\ell,2} \quad (3.115)$$

$$\int_{-1}^1 dx P_\ell^0(x)x^2 = \frac{4}{3(2\ell+1)} \delta_{\ell,2} + \frac{4}{3(2\ell+1)} \delta_{\ell,0} \quad , \quad (3.116)$$

de onde se vê que apenas $\ell, \ell' = 0; 1; 1; 2; 2; (0, 2)$ contribuem para as integrais acima, respectivamente. As integrais contendo P_ℓ^{-m} podem ser resolvidas por meio da relação $P_\ell^{-m} = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_\ell^m$.

Resta ainda, em (3.54), a integral $\int_{-1}^1 dx P_\ell^0(x)(1-x^2)$, que não pode ser escrita como um produto dos P_ℓ^m 's com o mesmo m . Neste caso, pode-se recorrer a uma tabela de integrais [131] e então obter-se

$$\frac{\int_{-1}^1 dx' P_{\ell'}^0(x')(1-x'^2) \int_{-1}^1 dx P_\ell^0(x)(1-x^2)}{\pi \Gamma(2 + \frac{\ell'}{2} + \frac{1}{2}) \Gamma(2 - \frac{\ell'}{2}) \Gamma(\frac{\ell'}{2} + 1) \Gamma(-\frac{\ell'}{2} + \frac{1}{2})} \times (\ell' \leftrightarrow \ell) \quad . \quad (3.117)$$

Conclue-se que apenas $\ell, \ell' = 0, 2$ contribuem com um valor não-nulo para as integrais em (3.117).

É fácil verificar que as contribuições não-nulas para as integrais em cada termo de ordem superior na expansão (3.104) são similares àsquelas mostradas acima. Com efeito, para o termo de terceira ordem têm-se as contribuições $\ell, \ell' = 1, 3$, e, como mostra a

inspeção de um termo genérico a_N na expansão, as contribuições de ℓ, ℓ' , neste caso, serão do tipo $\ell, \ell' = N, N - 2, N - 4, \dots$. Isto permite, portanto, que se escreva (3.102) como

$$D_{\omega\omega'} = \delta(\omega - \omega') \sum_{N=0} c_N \int d\tau e^{-i\omega\tau} \left[\cosh\left(\frac{\tau}{a}\right) \right]^{-(h+\ell+2N)}. \quad (3.118)$$

A integral que aparece acima tem pólos em

$$\omega = \pm \frac{i}{a}(2n + \ell + h_{\pm}) \quad , \quad (3.119)$$

em virtude do comportamento do integrando para valores suficientemente grandes de τ .

O espectro (3.119) coincide exatamente com as frequências quase-normais (3.41), obtidas da perturbação no *interior* do espaço-tempo, exceto apenas pelos valores $\pm\xi \pm 1/2$, em que $\xi = \sqrt{9 - 4\mu^2 a^2}$. Isto pode ser facilmente verificado por inspeção do espectro do *interior*, dado por (3.41-3.42).

Conclue-se, portanto, que os MQNs, devidos a perturbações escalares no *interior* do espaço-tempo de de-Sitter, estão contidos no espectro da função de dois pontos da teoria conforme na borda do espaço. Isto representa uma forte evidência de que, de fato, se pode descrever holograficamente o espaço-tempo de de-Sitter.

Capítulo 4

Modos Quase-Normais e a Quantização da Área de Buracos Negros

Espera-se que efeitos quânticos da gravitação tornem-se preponderantes na *escala de Planck*, cuja massa (energia) e comprimento são, respectivamente, $M_P = \sqrt{\hbar} \sim 10^{19} GeV$ e $l_P = \sqrt{\hbar} \sim 10^{-33} cm$, em unidades $G = c = 1$ ¹, extremamente distantes, portanto, das possibilidades de acesso em laboratório. Porém, Bekenstein coloca a seguinte questão: é possível que algum efeito quântico da gravitação possa vir a manifestar-se numa escala de energia bem abaixo da energia da escala de Planck ?! [58].

De acordo com Bekenstein e Mukhanov, sendo a área de um buraco negro quantizada, há a possibilidade de que ocorram “*transições entre níveis de área*”, em pura analogia com transições atômicas, sendo que em tais processos poderia haver a emissão de um *quantum* (ou até de *quanta*) de quaisquer dos campos existentes na natureza [135]. No caso de a emissão ocorrer em *quantum*, ter-se-ia, portanto, um correspondente espectro de linha, que compreenderia certas frequências que seriam múltiplos inteiros de uma

¹O comprimento de Planck é definido por $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$.

certa frequência fundamental, que no caso de um buraco negro de Schwarzschild seria inversamente proporcional à sua massa, o que se verificaria em *todas as escalas de massa* [135]. Resulta então, segundo Bekenstein e Mukhanov, que isto forneceria um meio para que se detectassem efeitos de gravitação quântica, bem abaixo da energia da escala de Planck, por meio, simplesmente, de uma *espectroscopia de buracos negros* [135].

A quantização da área de buracos negros (estacionários) foi proposta por Bekenstein, ao sugerir que *numa teoria quântica da gravitação, a área do horizonte de eventos de um buraco negro deveria ser quantizada*, possuindo um espectro *discreto e uniformemente espaçado* [57, 58, 59]. No entanto, deve-se ressaltar que a quantização da área de buracos negros proposta por Bekenstein é uma quantização *heurística*, não sendo resultado de uma formal Teoria Quântica da Gravitação, mas que, porém, tem sido bastante explorada desde sua proposição, tendo contribuído para lançar alguma luz em tal direção ². Como o próprio Bekenstein ressalta [58], tem-se uma situação tal como aquela do modelo (semi-clássico) de Bohr para o átomo de hidrogênio, que serviu de guia para diversos desenvolvimentos que, nele baseados, ajudaram a conduzir à formulação da Mecânica Quântica, propriamente dita, desenvolvimentos estes que pertencem ao que depois ficou conhecido sob a denominação de “*Velha Mecânica Quântica*” [136]. De fato, Bekenstein considera que buracos negros desempenham, para a busca de uma teoria quântica da gravitação, um papel semelhante àquele desempenhado pelo átomo de hidrogênio nas origens da Mecânica Quântica.

Convém, agora, que se discutam, brevemente, quais resultados conduziram Bekenstein a conjecturar que, numa teoria quântica da gravitação, um buraco negro deve ter um espectro *discreto e uniformemente espaçado*. Para isto, baseou seus argumentos no fato que a área do horizonte de eventos de um buraco negro, não-extremo, comporta-se, classicamente, como um *invariante adiabático*, isto é, para pequenas variações, a variação da área, A , de seu horizonte de eventos é nula ($\delta A = 0$) (ver, por exemplo, [58]). Invocando-se o *Princípio de Ehrenfest*, de acordo com o qual “*qualquer invariante adiabático clássico*

²Na *Gravitação Quântica de Laço*, sendo esta, formalmente, uma teoria quântica de gravitação, pode-se construir um *operador de área* e obter-se a expressão para seu espectro. Em particular, pode-se descrever a área de um buraco negro (ver Apêndice B).

corresponde a uma grandeza quântica com espectro discreto" [137], a área do horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr-Newman, não-extremo, deveria ter, portanto, um espectro *discreto*. Além desta, outra "evidência" na qual se baseou Bekenstein para conjecturar a quantização da área de buracos negros, foi o fato de que quando uma *partícula quântica* é assimilada (absorvida) por um buraco negro, há, necessariamente, uma variação (acrécimo) de sua área, sendo este independente do valor dos parâmetros característicos do mesmo (massa, carga elétrica e momento angular).

Como mostrado por Christodoulou e Ruffini, se uma partícula (neutra) clássica é capturada (no horizonte) por um buraco negro de Kerr-Newman, não-extremo, de um ponto de retorno radial de seu movimento, tal processo é *reversível*, sendo que a área do buraco negro permanece invariante, comportando-se, então, como um invariante adiabático (processo de Christodoulou-Ruffini [138])³. Neste processo, como a partícula assimilada é clássica, a mesma segue uma trajetória bem definida, além do que deve ser uma partícula *pontual*, a fim de que sua absorção pelo buraco negro deixe a área do mesmo inalterada. De fato, considerando-se que a partícula absorvida é *quântica*, a mesma deve ter uma dimensão finita, isto é, um raio (próprio) finito, b . Inspirado pelo teorema de Ehrenfest, da Mecânica Quântica, Bekenstein admitiu que o centro de massa de tal partícula move-se numa trajetória clássica e, por meio de uma análise semelhante àquela de Christodoulou e Ruffini, mostrou que, agora, a absorção de uma partícula pelo buraco negro implica, necessariamente, num aumento da área do horizonte de eventos do mesmo, sendo que tal acréscimo é *mínimo* quando a partícula é capturada na posição em que seu centro de massa está num ponto de retorno de seu movimento e correspondendo exatamente a uma distância própria do horizonte de eventos igual a b , o raio da partícula. Tal variação mínima da área do horizonte é dada por [58, 139]

$$(\delta A)_{min} = 8\pi\mu b \quad , \quad (4.1)$$

em que μ é a massa de repouso da partícula. Este resultado não é válido para buracos negros extremos, caso em que o acréscimo mínimo na área dependeria dos parâmetros característicos dos mesmos [58, 59].

³Tal processo não permanece válido para buracos negros extremos (ver, por exemplo, [58, 59]).

Ao se tomar o limite $b \rightarrow 0$ em (4.1), recupera-se o caso do processo reversível de Christodoulou-Ruffini, para o qual a variação da área é nula. Todavia, como enfatizado por Bekenstein, quanticamente tal limite não é permitido, uma vez que uma partícula (pontual) quântica é sujeita ao *Princípio da Incerteza*, de modo que se a mesma se encontra com grande precisão no horizonte de eventos, a componente radial de seu momento terá uma grande indeterminação, o que impede que se cumpra, portanto, a condição de ponto de retorno. Ademais, nota ainda Bekenstein, uma partícula puntiforme quântico-relativística não pode ser localizada com precisão maior do que seu comprimento de onda de Compton, isto é, $\hbar/\mu$ ($c = 1$). Assim sendo, Bekenstein propõe que o menor acréscimo possível na área do horizonte de eventos de um buraco negro seja dado por (4.1), ao se fazer a troca $b \rightarrow \xi \hbar/\mu$, sendo $\xi \sim O(1)$. Deste modo, tem-se que

$$(\delta A)_{min} = 8\pi\hbar \equiv \gamma l_P^2 \quad , \quad (4.2)$$

em que $l_P^2 = \hbar$, em unidades $G = c = 1$.

No caso da assimilação de partículas quânticas (portanto, de tamanhos finitos) eletricamente carregadas, por um buraco negro de Reissner-Nordström, a versão da análise de Christodoulou e Ruffini foi feita por Hod, há alguns anos atrás [140], sendo que, neste caso, tem-se que $(\delta A)_{min} = 4l_P^2$, que é um valor menor que aquele para o caso de uma partícula neutra.

Por conseguinte, dos casos tratados por Bekenstein e Hod, vê-se que $(\delta A)_{min}$ independe dos parâmetros característicos do buraco negro.

Já que há um incremento mínimo da área de buracos negros não-extremos, Bekenstein sugere que $(\delta A)_{min}$, como dado em (4.2), corresponda, numa teoria quântica da gravitação, ao espaçamento entre os autovalores da área dos mesmos. Além disto, devido ao fato de que $(\delta A)_{min}$, como dado em (4.2), não depende dos parâmetros característicos do buraco negro, sendo, portanto, uma constante universal, Bekenstein segere ainda que o espaçamento do espectro de área seja *uniforme*. Diante de tais argumentos, Bekenstein propõe que para buracos negros de Kerr-Newman, não-extremos, o espectro quântico de área seja dado por

$$A_n = (\delta A)_{min} \cdot n = \gamma l_P^2 \cdot n \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad , \quad (4.3)$$

em que γ é uma constante adimensional (o *espaçamento do espectro*), indeterminada. Na seção seguinte, será visto como Hod propõe que seja feita a determinação de tal espaçamento, através do uso das “oscilações clássicas” de um buraco negro, quer dizer, de seus MQNs.

4.1 A Proposição de Hod

Hod [55] propôs que se pode obter o espaçamento do espectro quântico da área de um buraco negro (γ em (4.3)), através do conhecimento do espectro de suas “oscilações clássicas”, ou seja, a partir do espectro de MQNs do mesmo. Para isto, fez uso do espectro assintótico de MQNs fortemente amortecidos, de um buraco negro de Schwarzschild, e invocou o *Princípio da Correspondência de Bohr*, mais precisamente na seguinte versão: “*freqüências de transição para números quânticos grandes devem ser iguais às freqüências de oscilação clássicas*” (ver, por exemplo, [137]).

O possível papel de MQNs de buracos negros na descrição de seus aspectos quânticos foi inicialmente conjecturado por York, ao fazer uso dos MQNs (apenas dos primeiros sobrettons) de um buraco negro de Schwarzschild, para a obtenção da radiação de Hawking do mesmo [56]. York foi então quem primeiro sugeriu uma relação entre MQNs e aspectos quânticos de um buraco negro.

O comportamento assintótico dos MQNs gravitacionais fortemente amortecidos, *i.e.*, com partes imaginárias muito grandes, para o caso de um buraco negro de Schwarzschild, foi obtido numericamente por Nollert [60], ao aperfeiçoar um método numérico, devido a Leaver [141], em que a determinação dos MQNs é feita através do uso de *frações continuadas*, sem que haja a necessidade de se lidarem com as correspondentes soluções numericamente, as quais são exponencialmente divergentes (devido às condições de contorno para MQNs), o que é um enorme obstáculo para a determinação numérica dos MQNs, como se enfatizou ainda no Cap.1. Neste método, os MQNs aparecem como soluções de uma equação implícita, dada em termos de uma fração continuada, infinita. Através deste método, Leaver pôde obter sessenta MQNs gravitacionais de Schwarzschild (para

$\ell = 2$ e $\ell = 3$), portanto, ainda um pequeno número de MQNs, mas que, por outro lado, indicava que poderia haver uma infinidade deles, para cada valor de ℓ , o que, de fato, foi demonstrado (não só no caso de perturbações gravitacionais, mas, também, escalares e eletromagnéticas) por Bachelot e Motet-Bachelot [142], num dos estudos matematicamente mais rigorosos sobre MQNs de buracos negros. Porém, a análise de Bachelot e Motet-Bachelot não forneceu um método numérico para a determinação dos MQNs com partes imaginárias muito grandes, o que foi conseguido, como dito, por Nollert [60], ao melhorar a convergência do método de Leaver, que se tornava pior à medida que as partes imaginárias dos MQNs aumentavam em relação às partes reais, sendo então que pôde obter MQNs com partes imaginárias arbitrariamente grandes com tal modificação que implementou. A forma assintótica desses MQNs é dada por (ver, também, [34]):

$$M\omega_n = 0,0437123 - \frac{i}{4} \left(n + \frac{1}{2} \right) + O(n^{-1/2}) \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad . \quad (4.4)$$

Portanto, vê-se que a parte real dos MQNs com parte imaginária muito grande (correspondentes a $n \rightarrow \infty$) tem um valor assintótico constante de, aproximadamente, $0,0437123M^{-1}$, sendo independente do índice de multipólo, ℓ . Este resultado de Nollert foi primeiramente confirmado, também numericamente, por Andersson [61] e Liu [62], e, mais recentemente, por Cardoso *et al.* [143]. A dedução analítica do mesmo só foi dada recentemente, por Motl [73] e Motl e Neitze [74], como será discutido na Seq. 4.3.

Hod fez então a seguinte observação: uma vez que $0,0437123 \approx \ln 3/8\pi$, a parte real dos MQNs gravitacionais assintóticos (fortemente amortecidos), de um buraco negro de Schwarzschild, $Re\omega_n = 0,0437123M^{-1}$, pode portanto ser escrita como

$$\omega_R \equiv Re\omega_n = \frac{\ln 3}{8\pi M} \quad , \quad (4.5)$$

ou seja,

$$\omega_R = T_H \ln 3 \quad , \quad (4.6)$$

em que $T_H = 1/8\pi M$ é a temperatura de Hawking do buraco negro, em unidades tais que $c = G = \kappa_B = \hbar = 1$.

Invocando o Princípio da Correspondência, Hod então propôs que a variação da massa do buraco negro, devida à “*emissão de um quantum*”, ocorreria com uma frequência de

transição dada por (4.5). Deste modo, a variação da massa do buraco negro seria dada por [55]

$$\delta M = \hbar \omega_R = \frac{\hbar \ln 3}{8\pi M} . \quad (4.7)$$

Por outro lado, sendo a área, A , de um buraco negro de Schwarzschild, de massa M , dada por (ver, por exemplo, [76])

$$A = 16\pi M^2 , \quad (4.8)$$

então, sua variação é dada por

$$\delta A = 32\pi M \delta M , \quad (4.9)$$

que combinada com (4.7) leva a

$$\delta A = (4 \ln 3) \hbar = (4 \ln 3) l_P^2 , \quad (4.10)$$

resultado do qual se deduz, portanto, comparando-se com (4.3), que $\gamma = 4 \ln 3$ é o espaçamento do espectro de área de um buraco negro de Schwarzschild.

Seguindo a proposta de Hod, Dreyer [63] pôde fixar um parâmetro livre que aparece no espectro de autovalores de área no contexto da *Gravitação Quântica de Laço* (*Loop Quantum Gravity (LQG)*) [14]. Tal parâmetro é o chamado parâmetro de Barbero-Immirzi. Para alguns detalhes sobre este trabalho de Dreyer, veja-se o Apêndice B.

Até antes dos trabalhos de Motl [73] e Motl e Neitzke [74], poder-se-ia dizer que o resultado (4.5), ou equivalentemente (4.6), era apenas uma simples coincidência numérica. Porém, tais autores obtiveram analiticamente tal resultado, conforme será discutido na Seq. 4.3.

4.2 Quantização da Área de Buracos Negros Quase Extremos de Kerr e Schwarzschild-de-Sitter

Seguindo a sugestão de Hod, analisou-se em [145] a quantização da área de buracos negros *quase extremos*, dos tipos Kerr e Schwarzschild-de-Sitter, já que em tais casos se conhecem analiticamente os espectros de MQNs. Logo, esta seção é inteiramente baseada na Ref. [145], cujas discussões serão aqui, porém, apresentadas com mais detalhes.

Um buraco negro de Kerr é dito ser *extremo*, quando seu momento angular específico, a , é igual à sua massa, M , isto é, $M = a$, caso em que os horizontes de eventos e de Cauchy coincidem ($r_+ = r_-$). No entanto, ao invés deste limite extremo, pode-se considerar o regime em que a é *muito próximo* de M , ou seja, quando $a \approx M$, que mais apropriadamente pode ser caracterizado pela condição

$$\epsilon = \frac{M - a}{M} \ll 1 \quad . \quad (4.11)$$

Tais buracos negros denominam-se *quase extremos*. Neste caso, como a aproxima-se de seu máximo valor, tem-se que se trata de um buraco negro que gira muito rapidamente.

Detweiler, baseando-se numa aproximação devida a Teukolsky e Press [148], mostrou que para um buraco negro de Kerr *muito próximo de seu limite extremo*, ou seja, estando em seu estágio quase extremo ($a \approx M$), há uma infinidade de MQNs, que podem ser analiticamente obtidos, via a equação de Teukolsky e o uso das condições de contorno para MQNs, quando $\omega \approx m\Omega$, em que $\Omega = 4\pi a/A$ é a velocidade angular do horizonte de eventos do buraco negro, e $\ell = m$, sendo dados por [149, 150]

$$\omega_n M \approx \frac{m}{2} - \frac{1}{4m} \exp \left(\frac{\xi - 2n\pi}{2\delta} + i\eta \right) \quad , \quad (4.12)$$

em que $n = 0, 1, 2, \dots$ indexa o modo, m é o autovalor azimutal do modo, enquanto que ξ, δ , e η são constantes positivas (para mais detalhes, ver [148, 149, 150]). Vê-se então que, contrariamente ao caso de Schwarzschild, no qual $n \rightarrow \infty$ dá modos fortemente amortecidos, agora, têm-se modos praticamente não-amortecidos, cujas frequências são muito próximas do valor $\omega \approx m\Omega \approx \frac{m}{2M}$.

Os MQNs (4.12) são relativos a uma perturbação escalar não-massiva de um buraco negro quase extremo de Kerr. Já no caso gravitacional (ver [150]), os correspondentes modos são dados por uma expressão bastante similar àquela em (4.12).

A fim de usar a proposição de Hod no caso em questão, necessita-se primeiramente determinar a variação da área do buraco negro. Em unidades $G = c = 1$, a área do horizonte de eventos de um buraco negro de Kerr e sua gravidade superficial são dadas, respectivamente, por (ver, por exemplo, [76])

$$A = 4\pi(r_+^2 + a^2) \quad (4.13)$$

e

$$\kappa = \frac{1}{4A}(r_+ - r_-) \quad (4.14)$$

Como no trabalho de Hod, espera-se que a parte real dos MQNs para n grande corresponda a uma variação de energia do buraco negro igual a $\delta M = \hbar\omega_R$. Portanto, tomando-se o limite $n \rightarrow \infty$ em (4.12), tem-se simplesmente que

$$\omega_n \approx \frac{m}{2M} \quad , \quad n \rightarrow \infty \quad , \quad (4.15)$$

de modo que se tem

$$\delta M = \frac{\hbar m}{2M} \quad (4.16)$$

Supondo-se que a perturbação se dá por uma onda escalar composta de *quanta* que carregam momento angular $\hbar m$, então, a “*absorção de um MQN*”, com frequência (4.15), além de uma variação da massa do buraco negro, provocará uma variação de seu momento angular, de uma quantidade $\hbar m$, isto é,

$$\delta J = \hbar m \quad (4.17)$$

Logo, sendo $a = J/M$, tem-se que

$$\delta a = \hbar m \left(\frac{1}{M} - \frac{a}{2M^2} \right) \quad (4.18)$$

Fazendo-se uso das relações (4.16), (4.17) e (4.18), pode-se obter, de (4.13), que para um buraco negro de Kerr quase extremo, a variação de sua área é dada por

$$\delta A = 8\pi\hbar m \left(1 + \sqrt{\frac{M-a}{2M}}\right) , \quad (4.19)$$

que, em vista da condição (4.11), pode ser considerada como, aproximadamente, dada por

$$\delta A \simeq 8\pi m \ell_P^2 . \quad (4.20)$$

Considerando-se a absorção de um *quantum* ($m = 1$), vê-se que este resultado concorda com aquele proposto por Bekenstein, dado por (4.2).

Assim, fazendo-se uso da conjectura de Bekenstein, expressa por (4.3), pode-se prever a quantização da área de um buraco negro de Kerr quase extremo como

$$A_n \simeq 8\pi m \ell_P^2 n , \quad (4.21)$$

com $n = 1, 2, \dots$

Para pequenas variações, a variação da área de um buraco negro relaciona-se às variações de sua massa e de seu momento angular pela primeira lei da termodinâmica de buracos negros (ver, por exemplo, [116]),

$$\delta M = \kappa \delta A + \Omega \delta J . \quad (4.22)$$

Para $a \approx M$, pode-se expressar κ e Ω , respectivamente, como

$$\kappa \approx \frac{1}{16\pi} \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{M^2} \left(1 - \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{M}\right) \quad (4.23)$$

e

$$\Omega \approx \frac{a}{2M^2} \left(1 - \frac{\sqrt{M^2 - a^2}}{M} + \frac{M^2 - a^2}{M^2}\right) . \quad (4.24)$$

Deste modo, nota-se que de (4.18), (4.19), (4.23) e (4.24), pode-se obter que

$$\kappa \delta A + \Omega \delta J \approx \frac{\hbar m}{2M} = \delta M , \quad (4.25)$$

isto é, a primeira lei da termodinâmica de buracos negros é satisfeita para buracos quase extremos, como esperado.

Um segundo caso em que se conhece analiticamente o espectro de MQNs de um buraco negro quase extremo, é aquele que diz respeito a um buraco negro quase extremo de Schwarzschild-de-Sitter. Como visto no Cap. 2, este é o caso em que a massa do buraco negro é *muito próxima* do limite de Nariai ($M_N = R/3\sqrt{3}$), caso em que os horizontes do buraco negro e cosmológico coincidem (exclusivamente nesta seção, o raio de de-Sitter será denotado por R).

Como no caso de Kerr, será considerada a variação de M , sendo que se é útil fazer uso de M e R em termos de r_e e r_c (ver Eq.s (2.80) e (2.81)), isto é,

$$2MR^2 = r_e r_c (r_e + r_c) \quad , \quad (4.26)$$

$$R^2 = r_e^2 + r_e r_c + r_c^2 \quad . \quad (4.27)$$

A expressão analítica para os MQNs de um buraco negro quase extremo de SdS foi obtida por Cardoso e Lemos [42] e é dada por

$$\omega_n = \kappa_e \left[\sqrt{\frac{V_0}{\kappa_e^2} - \frac{1}{4}} - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \quad , \quad (4.28)$$

em que $n = 0, 1, \dots$, $V_0 = \kappa_e^2 \ell(\ell + 1)$, para perturbações escalar e eletromagnética, e $V_0 = \kappa_e^2(\ell + 2)(\ell - 1)$, para perturbações gravitacionais; κ_e é gravidade superficial do buraco negro.

Um vez que se está considerando a proximidade do limite extremo da solução de SdS, ou seja,

$$\frac{r_c - r_e}{r_e} \ll 1 \quad , \quad (4.29)$$

pode-se escrever a massa do buraco negro como

$$M = M_N + \mu = \frac{R}{3\sqrt{3}} + \mu \quad , \quad (4.30)$$

em que μ tem valor pequeno relativamente a M_N . Logo, uma vez que se pode considerar $R = \sqrt{3/\Lambda}$ fixo, o uso de (4.26), (4.27) e da condição (4.29) leva a

$$\delta M = \delta \mu = \frac{r_e \Delta r \delta r_e}{2R^2} \quad , \quad (4.31)$$

em que $\Delta r = r_c - r_e$.

Semelhanamente ao que foi feito no caso de Kerr quase extremo, será considerado que $\delta M = \hbar \omega_R$ e, em virtude de (4.28), e substituindo-se a expressão para κ_e (ver Eq. (2.77)), pode-se escrever

$$\delta M = \hbar \frac{\Delta r}{2r_e^2} \sqrt{(\ell + 2)(\ell - 1) - \frac{1}{4}} \quad , \quad (4.32)$$

em que se usou $R^2 \sim 3r_e^2$, bem como considerou-se V_0 para o caso gravitacional.

A variação da área do horizonte do buraco negro, isto é,

$$\delta A_b = 8\pi r_e \delta r_e \quad , \quad (4.33)$$

dá então que

$$\delta A_b = 24\pi \hbar \sqrt{(\ell + 2)(\ell - 1) - \frac{1}{4}} \quad , \quad (4.34)$$

para o caso gravitacional, e

$$\delta A_b = 24\pi \hbar \sqrt{\ell(\ell + 1) - \frac{1}{4}} \quad , \quad (4.35)$$

nos casos escalar e eletromagnético.

Sendo $\ell \geq j$, em que j é o *spin* da perturbação, então, tomando-se o valor mínimo para ℓ em cada caso, pode-se, de acordo com a proposta de Bekenstein, prescrever o espectro quântico de área para um buraco negro quase extremo de SdS como:

$$A_{b_n} = n \delta A_b l_P^2 \simeq 12\pi \sqrt{15} l_P^2 n \quad , \quad (4.36)$$

com $n = 1, 2, \dots$, ou $12\pi \sqrt{7} l_P^2 n$, no caso de perturbações escalar e eletromagnética.

4.3 Determinação Analítica de Modos Quase-Normais Assintóticos

Nollert [60] obteve *numericamente* a forma *assintótica* dos MQNs *fortemente amortecidos* de um buraco negro de Schwarzschild. A obtenção analítica de tal resultado foi feita há pouco tempo, por Motl e Neitzke [74], ao considerarem a continuação analítica, para o plano- r complexo, da equação de perturbação de um buraco negro de Schwarzschild e o cálculo da *monodromia* associada. Este método baseia-se na continuação analítica da coordenada radial. Como observado por Motl e Neitzke, deve-se notar que a continuação analítica da variável radial, r , já foi várias vezes empregada na literatura para o cálculo de MQNs, sendo que uma revisão sobre a aplicação do uso de métodos que envolvem a complexificação de coordenadas, para este objetivo, pode ser vista em [147].

Nesta e na próxima seção, para que se siga a notação de Motl e Neitzke [74] e se facilitem comparações, se considerará o sinal positivo em $e^{\pm i\omega t}$, tal que, para MQNs, se terá agora $\text{Im } \omega > 0$, ao invés de $\text{Im } \omega < 0$, quando o sinal negativo é escolhido. Assim sendo, as condições de contorno para MQNs serão agora dadas por $\psi \sim e^{\pm i\omega x}$, $x \rightarrow \mp \infty$.

A idéia do método de Motl e Neitzke consiste em se estudar o comportamento da solução $\psi(r)$ à medida que se percorre um contorno γ no plano- r complexo e, então, determinar-se a monodromia por dois modos distintos: um cálculo *local*, via integração direta da equação diferencial que descreve as perturbações, e um cálculo *global*, usando-se a condição de contorno no horizonte de eventos do buraco negro. A comparação da monodromia calculada local e globalmente fornece as frequências quase-normais assintóticas.

Conforme foi visto no Cap. 2, as perturbações *axiais* da métrica de Schwarzschild são descritas, na região exterior ao buraco negro ($2M < r < \infty$), pela Eq. (2.30), isto é,

$$\left(\left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{d}{dr} \right]^2 + \omega^2 - V(r) \right) \psi(r) = 0 \quad , \quad (4.37)$$

com $V(r)$ dado por (2.43).

A Eq. (4.37) é uma equação diferencial de segunda ordem, com pontos singulares regulares em $r = 0$ e $r_+ = 2M$ ($r = \infty$ é um ponto singular irregular). Uma vez estendida

analiticamente ao plano- r complexo, qualquer solução da mesma, $\psi(r)$, na região exterior ao buraco negro (“região física”), estende-se a todo o plano- r . No entanto, agora, tal solução será, em geral, *multivalente* em torno dos pontos $r = 0$ e $r_+ = 2M$.

Analisando-se o problema em termos da equação mais simples (2.30), ou seja,

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (\omega^2 - V(x)) \psi(x) = 0 \quad , \quad (4.38)$$

em que $V(x) \equiv V(r(x))$, vê-se, de (2.29), isto é, de

$$x = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \quad , \quad (4.39)$$

que ao se complexificar r , a coordenada x passa a ser multivalente, com os ramos diferindo por $\Delta x = 2\pi i n r_+$ ($n \in \mathbb{Z}$), em que $r_+ = 2M$. Assim, um contorno fechado no plano- r pode corresponder a um contorno aberto no plano- x . São justamente estas multivalências que desempenham um papel-chave no método de Motl e Neitzke. Estas, estarão associadas à determinação da monodromia em torno de um caminho fechado no plano- r . Basicamente, a idéia deste “método da monodromia” consiste em se fazer uso das condições de contorno para MQNs para se calcular a monodromia de $\psi(r)$, à medida que se percorre um contorno convenientemente escolhido no plano- r (ver Fig. 4.1). A comparação da monodromia calculada local (via resolução direta da equação diferencial para a perturbação) e globalmente (aplicando-se diretamente apenas as condições de contorno para MQNs) permitiu a determinação dos MQNs tais que $Im \omega \gg Re \omega$.

Entretanto, a ambigüidade em x , acima mencionada, é somente devida à sua parte imaginária, de modo que se pode especificar o sinal de sua parte real no plano- r , o que será útil adiante. De (4.39), tem-se que

$$Re x = Re r + r_+ \ln \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| \quad , \quad (4.40)$$

que, sendo $\frac{r}{r_+} = \rho e^{i\theta}$, pode ser escrita como

$$Re x = r_+ \rho \cos \theta + r_+ \ln |\rho e^{i\theta} - 1| \quad . \quad (4.41)$$

Impondo-se, agora, a condição de que $Re x < 0$, e considerando-se $\rho \rightarrow 0$, conclui-se facilmente que $\theta < \pi/4$. Assim, pode-se demarcar a região em que $Re x < 0$, conforme ilustrado na Fig.(4.1).

Figura 4.1: (a) O plano- r complexo e o contorno γ . Tomando-se $2M = 1$, tem-se que $r_+ = 1$. A parte mais escura marca a região onde $\text{Re } x < 0$; (b) O contorno correspondente àquele em (a), no plano- z complexo (ambas as figuras foram extraídas da Ref. [74]).

Uma vez que r é complexo, pode-se simplesmente definir a condição de contorno em r_+ , pois as funções $e^{\pm i\omega x}$ são distinguíveis aí por suas *monodromias*. De fato, de (4.39), tem-se

$$e^{\pm i\omega x} = e^{\pm i\omega r} e^{\pm i\omega r_+ \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right)} . \quad (4.42)$$

Sendo

$$\Delta_C \ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right) = \oint_C \frac{dr}{r - r_+} = \pm 2\pi i \quad (4.43)$$

a variação que $\ln\left(\frac{r}{r_+} - 1\right)$ adquire ao longo de uma volta num contorno C , que envolve a singularidade $r = r_+$, então, segue-se que

$$e^{\pm i\omega x} = \left(\frac{r}{r_+} - 1\right)^{\pm i\omega r_+} e^{\pm i\omega r} , \quad x \rightarrow \mp\infty . \quad (4.44)$$

Isto implica que para que próximo de $r = r_+$ ($x \rightarrow -\infty$) se tenha $\psi \sim e^{i\omega x}$, exige-se simplesmente que $\psi(r)$ tenha monodromia $e^{2\pi\omega r_+}$, numa curva fechada, no sentido horário (sinal + em (4.43)), em torno de $r = r_+$.

Uma vez que, para $r \rightarrow \infty$, $V(r)$ se anula mais rapidamente que $1/|r|$, à medida que se vai para o infinito no plano- r , em qualquer direção, as assíntotas de uma solução $\psi(r)$

de (4.38) tendem a

$$\psi(r) \sim C_+ e^{+i\omega x} + C_- e^{-i\omega x} . \quad (4.45)$$

Conforme já se disse, há uma ambigüidade ao se definirem $e^{\pm i\omega x}$, o que implica numa ambigüidade compensadora ao se definirem $C_{\pm}$, ainda que seja para $\psi(r)$ fixa. Tal ambigüidade decorre do fato de que $\psi(r)$ é multivalente, já que se trata de uma solução de uma equação diferencial com singularidades. Em consequência, quando se percorre o contorno γ na Fig. (4.1) e se retorna ao ponto inicial, os coeficientes $C_{\pm}$ não retornam aos seus valores iniciais, uma vez que este retorno se dá, necessariamente, num ramo diferente para $\psi(r)$. Assim, $C_{\pm}$ têm monodromias não-triviais. De fato, em vista da condição de contorno em r_+ , apenas C_- terá monodromia não-trivial.

Globalmente, a obtenção da monodromia é muito simples. Na Fig. 4.1, a curva γ envolve uma singularidade em $r = r_+$, em torno da qual ambos $x(r)$ e $\psi(r)$ são multivalentes. A condição de contorno (4.44) implica que $\psi(r)$ adquire uma fase $e^{2\pi\omega r_+}$, em qualquer contorno envolvendo r_+ , no sentido horário, enquanto que $e^{-i\omega x}$ é multiplicado por $e^{-2\pi\omega r_+}$. Portanto, estas duas fases implicam que C_- deve ser multiplicado, após uma volta ao longo do contorno γ , por $e^{4\pi\omega r_+}$. Este é o valor *global* da monodromia. Já o cálculo *local* da mesma requer uma análise mais detalhada, conforme se seguirá.

Seguindo-se [74], para se definir a condição de contorno em $x = \infty$, faz-se simplesmente a continuação analítica de $\psi(r)$, via uma rotação, para a linha $Im(\omega x) = 0$. Resulta, assim, que se terá um comportamento assintótico puramente oscilatório sobre a linha real ωx , o que implica que é possível selecionar-se uma solução particular especificando-se suas assíntotas. Ajustar-se-ão as assíntotas ao longo da linha $Re x = 0$ (que corresponde à parte esquerda do contorno γ entre A e B na figura 4.1) e serão usadas as condições de contorno para se determinarem os MQNs. Tomando-se o limite em que ω é *quase-puramente imaginário* (modos fortemente amortecidos, *i.e.*, $\omega \rightarrow i\infty$), vê-se que a linha $Im(\omega x) = 0$ é levemente inclinada em relação à linha $Re x \approx 0$.

Sendo

$$Im(\omega x) = Re \omega Im x + Im \omega Re x , \quad (4.46)$$

então a condição $Im(\omega x) = 0$ implica em

$$Im \omega = -Re \omega \frac{Im x}{Re x} , \quad (4.47)$$

que para ω quase que puramente imaginário dá

$$Re x \approx 0 , \quad (4.48)$$

Deste modo, a linha $Im(\omega x) = 0$ é levemente inclinada em relação à linha $Re x = 0$.

Sendo

$$Re(\omega x) = Re \omega Re x - Im \omega Im x , \quad (4.49)$$

tem-se de (4.47) que

$$\omega x = Re(\omega x) = \frac{Re \omega}{Re x} |x|^2 , \quad (4.50)$$

da qual se segue que $x \rightarrow \infty$ é levado em $\omega x \rightarrow \infty$, assumindo-se, inicialmente, que $Re \omega > 0$. Logo, a condição de contorno no infinito é

$$\psi(x) \sim e^{-i\omega x} , \quad \omega x \rightarrow +\infty . \quad (4.51)$$

De acordo com Motl e Neitzke, é mais conveniente, contudo, introduzir-se a variável

$$z = x + cte , \quad (4.52)$$

em que a constante aditiva será escolhida de modo que se tenha $z = 0$ para $r = 0$. Isto implica em se tomar o ramo $n = 0$ para $\log(-1) = (2n + 1)\pi i$. Assim sendo, tem-se

$$z = r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) - 2M\pi i , \quad (4.53)$$

Como mencionado, o cálculo local da monodromia localmente será feito interpolando-se as assíntotas ao longo da linha $Im(\omega x) = 0$ (ou ao longo de $Im(\omega z) = 0$, para ω quase-puramente imaginário). Iniciar-se-á em A e mover-se-á ao longo do contorno γ , rumo à origem (ver figura 4.1). As assíntotas em A podem ser ajustadas àquelas próximas da origem. Antes, a fim de se obter a solução próxima da origem, deve-se expandir x próximo de $r = 0$. Expandindo-se (4.53) em torno da origem resultará

$$z \sim -\frac{r^2}{2} , \quad (4.54)$$

em que se considera $2M = 1$.

Assim, numa vizinhança em torno de $r = 0$, ou seja, para z pequeno, obtém-se, de (2.43), que

$$V(z) \equiv V(r(z)) \sim \frac{j^2 - 1}{4z^2} . \quad (4.55)$$

Em virtude de (4.55), (4.38) pode ser reduzida a

$$\frac{d^2\psi(r)}{dz^2} + \left(\omega^2 + \frac{1 - j^2}{4z^2} \right) \psi(z) = 0 , \quad (4.56)$$

isto é, a uma equação de Bessel, cuja solução geral, para um j genérico, é dada por

$$\psi(z) = A_+ c_+ \sqrt{\omega z} J_{j/2}(\omega z) + A_- c_- \sqrt{\omega z} J_{-j/2}(\omega z) , \quad (4.57)$$

que dá a solução próxima à origem.

Agora, se interpolará a solução (4.57) com as assíntotas longe da origem. Tomando-se o comportamento assintótico de $J_{\pm\nu}(\omega z)$ para $\omega z \rightarrow \infty$, podem-se escolher as constantes $c_{\pm}$, em (4.57), tais que

$$c_{\pm} \sqrt{\omega z} J_{\pm\nu}(\omega z) \sim 2 \cos(\omega z - \alpha_{\pm}) , \quad \omega z \rightarrow \infty , \quad (4.58)$$

em que

$$\alpha_{\pm} = \frac{\pi}{4}(1 \pm j) \quad (4.59)$$

e o fator 2 em (4.58) é introduzido apenas por propósito de normalização.

De (4.58) e (4.57), pode-se escrever para as assíntotas em A

$$\psi(z) \sim (A_+ e^{-i\alpha_+} + A_- e^{-i\alpha_-}) e^{i\omega z} + (A_+ e^{i\alpha_+} + A_- e^{i\alpha_-}) e^{-i\omega z} , \quad \omega z \rightarrow \infty . \quad (4.60)$$

Fazendo-se uso da condição de contorno (4.51), tem-se para as assíntotas em A

$$\psi(z) \sim (A_+ e^{i\alpha_+} + A_- e^{i\alpha_-}) e^{-i\omega z} , \quad \omega z \rightarrow \infty , \quad (4.61)$$

além do que se obtém a relação

$$A_+ e^{-i\alpha_+} + A_- e^{-i\alpha_-} = 0 . \quad (4.62)$$

Para que se siga o contorno γ até B , tem-se que contornar a origem. Logo, deve-se realizar uma rotação de $3\pi/2$ no plano- r , o que corresponde a 3π no plano- z , como imediatamente se vê de (4.54). Usando-se o comportamento assintótico da função de Bessel próxima à origem, pode-se interpolá-lo à solução assintótica. De fato, usando-se para a função de Bessel próxima à origem o comportamento

$$J_{\pm\nu}(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\nu}, \quad (4.63)$$

após a rotação de 3π tem-se que

$$c_{\pm}\sqrt{\omega z}J_{\pm\nu}(\omega z) \sim e^{6i\alpha_{\pm}}2\cos(-\omega z - \alpha_{\pm}) \quad , \quad \omega z \rightarrow -\infty \quad , \quad (4.64)$$

que combinada com (4.57) dará para as assíntotas em B

$$\psi(z) \sim (A_+e^{5i\alpha_+} + A_-e^{5i\alpha_-})e^{-i\omega z} + (A_+e^{7i\alpha_+} + A_-e^{7i\alpha_-})e^{i\omega z}, \quad \omega z \rightarrow -\infty. \quad (4.65)$$

Pode-se ir de B de volta a A ao longo do grande semi-círculo no semi-plano- z na Fig. 4.1, correspondente a $|r| \rightarrow \infty$. Nesta região, tem-se que $x \rightarrow \infty$, o que implica que $V(x)$ tende aproximadamente a zero aí, de modo que, em (2.30), ω^2 domina sobre o mesmo, o que permite que se possa aproximar, em tal região, a solução da equação por ondas planas. Com isto, o coeficiente de $e^{-i\omega z}$ poder ser considerado essencialmente constante ao retornar-se para A , o que não é válido para o coeficiente de $e^{i\omega z}$, que dá uma contribuição exponencialmente pequena para $\psi(r)$ na região onde $Re x > 0$. Conseqüentemente, de (4.61) e (4.65), vê-se que a monodromia em torno do contorno γ é dada simplesmente por

$$\frac{A_+e^{5i\alpha_+} + A_-e^{5i\alpha_-}}{A_+e^{i\alpha_+} + A_-e^{i\alpha_-}} = \frac{e^{6i\alpha_+} - e^{6i\alpha_-}}{e^{2i\alpha_+} - e^{2i\alpha_-}} = -\frac{\sin 3\pi j/2}{\sin \pi j/2} = -(1 + 2\cos 2\pi\nu) \quad , \quad (4.66)$$

em que se levou em conta (4.62).

Comparando-se com o valor obtido globalmente, tem-se

$$e^{4\pi\omega} = -(1 + 2\cos 2\pi\nu) \quad . \quad (4.67)$$

Caso se tivesse escolhido $Re \omega < 0$, se teria que considerar a rotação no sentido oposto, revertendo-se então as considerações feitas relativamente aos pontos A e B , bem

como percorrer-se o contorno γ no sentido anti-horário. Neste caso, obter-se-ia (4.67) com $e^{-4\pi\omega}$, de modo que as duas possibilidades podem ser expressas como

$$e^{\epsilon(Re\omega)4\pi\omega} = -(1 + 2 \cos 2\pi\nu) \quad . \quad (4.68)$$

Tomando-se o módulo na equação acima, obtém-se que

$$|4\pi Re\omega| = \ln |1 + 2 \cos \pi j| \quad . \quad (4.69)$$

Restaurando-se o fator $2M$, conclue-se, portanto, que o espectro assintótico de MQNs fortemente amortecidos, de um buraco negro de Schwarzschild, é dado por

$$\omega = i \left(n + \frac{1}{2} \right) \kappa_e \pm \frac{\kappa_e}{2\pi} \ln |1 + 2 \cos \pi j| \quad , \quad (4.70)$$

com $n \rightarrow \infty$ e sendo $\kappa_e = 1/4M$.

Motl e Neitzke generalizaram o resultado (4.70) para buracos negros de Schwarzschild d -dimensionais, verificando, deste modo, a predição que havia sido feita por Kunstatter [66]. Além disto, determinaram ainda os MQNs assintóticos, fortemente amortecidos, de um buraco negro de Reissner-Nordström, quadridimensional. Deve-se, também, mencionar que o mesmo método foi aplicado, por Neitzke, na determinação dos coeficientes de reflexão e transmissão, assim como no caso Reissner-Nordström quadridimensional, no limite de frequências imaginárias grandes [151]. A generalização para o caso de Schwarzschild d -dimensional é praticamente direta, no caso de perturbações escalares ($j = 0$), o que foi tratado por Motl e Neitzke [74], assim como, uma vez conhecido o potencial (ver [108]), para perturbações gravitacionais, conforme tratado por Birmingham [152]. Em todos estes casos d -dimensionais, a expressão assintótica para os MQNs toma a forma [152]

$$\omega = \pm T_H \log 3 + 2\pi i T_H \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad , \quad (4.71)$$

com $n \rightarrow \infty$, em que T_H é a temperatura de Hawking, em d -dimensões.

4.4 Modos Quase-Normais Assintóticos de Buracos Negros Pequenos de Schwarzschild-de-Sitter

O conteúdo desta seção é baseado no trabalho [146]. Empregando-se técnica de monodromias, faz-se a determinação dos MQNs assintóticos de buracos negros *pequenos* de Schwarzschild de-Sitter, *i.e.*, cujos raios dos horizontes de eventos são muito menores que o raio do horizonte cosmológico ($r_c \gg r_e$). Como será mostrado, quando a constante cosmológica é tomada estritamente como nula, recupera-se o resultado obtido por Motl e Neitzke, para o caso Schwarzschild.

Embora a região física de interesse para o problema de MQNs de um buraco negro de Schwarzschild-de-Sitter seja $r_e < r < r_c$, uma extensão analítica para a região $0 < r < r_c$ é essencial para uma análise pelo método da monodromia. Como será visto adiante, os casos Schwarzschild e Schwarzschild-de-Sitter têm a mesma característica, no que diz respeito ao comportamento do potencial na região próxima à singularidade do buraco negro ($r = 0$).

Como no caso de Schwarzschild, no caso de um buraco negro de Schwarzschild de-Sitter, devido aos termos logarítmicos na coordenada tartaruga, agora dada por (2.84), a continuação analítica para o plano- r complexo implica que x é uma função multivalente de r . Novamente, entretanto, $Re\,x$ é não-ambíguo, e se pode determinar seu sinal no plano- r . A multivalência de $x(r)$ é aqui também fundamental na análise. Juntamente com a multivalência de $\psi(r)$ em torno do ponto singular (regular) r_e , ela conduzirá à determinação dos MQNs assintóticos, analogamente à análise da Seq. 4.3.

Como em [74], será introduzida também a variável $z = x + cte$. Escolhendo-se a constante tal que $z = 0$ para $r = 0$, e o ramo $n = 0$ para $\ln(\pm 1)$, tem-se de (2.84) que $z = x - \pi i/2\kappa_e$, sendo κ_e dado por (2.77).

Fazendo-se a continuação analítica de r , podem-se novamente distinguir as funções $e^{\mp i\omega x}$ por suas monodromias em $r = r_e$, o que permite que se defina a condição de contorno em $r = r_e$ exigindo-se simplesmente que $\psi(r)$ tenha monodromia $e^{2\pi(\omega/2\kappa_e)} = e^{\pi\omega/\kappa_e}$, num contorno-horário em torno deste ponto. Note-se, porém, que não se pode fazer o

mesmo com relação ao ponto $r = r_c$, pois, agora, sendo r complexo, x não tende a infinito, para $r = r_c$. Entretanto, considerando-se o caso particular de buracos negros *pequenos* ($|r_c| \gg |r_e|$), pode-se considerar, aproximadamente, que $|x| \gg 1$, para $r \rightarrow r_c$, como se pode ver da expansão de $x(r)$ quando $|r_c/r_e| \gg 1$. Portanto, isto, ao lado do comportamento assintótico em torno da origem, reduzirá o problema a uma análise totalmente análoga àquela do caso de Schwarzschild.

Seguindo-se [74], para se definir a condição de contorno em r_c , faz-se simplesmente a continuação analítica de $\psi(r)$, via uma rotação para a linha $Im(\omega x) = 0$. Resulta, assim, que se terá um comportamento assintótico puramente oscilatório sobre a linha real ωx . Tomando-se o limite em que ω é quase-puramente imaginário (modos fortemente amortecidos), vê-se que a linha $Im(\omega x) = 0$ é levemente inclinada em relação à linha $Re x = 0$. Novamente, devem-se ajustar as assíntotas ao longo da linha $Re x \approx 0$ (que corresponde à parte esquerda do contorno γ entre A e B na figura 4.2) e se usar as condições de contorno para se determinarem então os MQNs assintóticos.

Como na Seq. anterior, assumindo-se inicialmente que $Re \omega > 0$, tem-se, em virtude da condição $Im(\omega x) = 0$, que $x = +\infty$ é levado a $\omega x = +\infty$, na aproximação de buracos negros pequenos. Sobre esta linha, a condição de contorno em $x = +\infty$ é

$$\psi(r) \sim e^{-i\omega x} \quad , \quad \omega x \rightarrow +\infty \quad . \quad (4.72)$$

O cálculo local da monodromia será também feito interpolando-se as assíntotas ao longo da linha $Im(\omega x) = 0$ (ou ao longo de $Im(\omega z) = 0$, para ω quase puramente imaginário). Iniciar-se-á em A e mover-se-á ao longo do contorno γ , rumo à origem (ver figura 4.2). As assíntotas em A podem ser ajustadas àquelas próximas da origem. Antes, a fim de se obter a solução próxima da origem, deve-se expandir x próximo de $r = 0$.

Para z pequeno, expandindo-se (2.84), obtém-se que

$$z \sim \alpha r + \beta r^2 \quad , \quad (4.73)$$

em que

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\kappa_c r_c} - \frac{1}{\kappa_e r_e} - \frac{1}{\kappa_0 r_0} \right) \equiv 0 \quad , \quad (4.74)$$

como decorre do uso de (2.77-2.79), e

$$\beta = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\kappa_c r_c^2} - \frac{1}{\kappa_e r_e^2} - \frac{1}{\kappa_0 r_0^2} \right) . \quad (4.75)$$

Figura 4.2: O plano- r complexo e o contorno γ . A parte hachurada marca a região onde $Re\,z < 0$.

Portanto, próximo à origem, o potencial comporta-se como $1/z^2$, ou seja,

$$V(z) \sim \frac{4M^2\beta^2(j^2 - 1)}{z^2} . \quad (4.76)$$

Observe-se que (4.73) foi deduzida sem o uso da aproximação para buracos negros pequenos, de modo que próximo à origem o comportamento (4.76) permanece válido em geral. Note-se também que em (4.76) pode-se agora incluir a perturbação escalar.

Em virtude de (4.76), (2.30) pode ser reduzida a uma equação de Bessel, sendo, portanto, a solução próxima da origem dada por

$$\psi(z) = A_+ c_+ \sqrt{\omega z} J_\nu(\omega z) + A_- c_- \sqrt{\omega z} J_{-\nu}(\omega z) , \quad (4.77)$$

em que o índice ν é dado por

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{1 + (4M\beta)^2(j^2 - 1)} . \quad (4.78)$$

A seguir, irá se interpolar a solução (4.77) com as assíntotas longe da origem. Tomando-se o comportamento assintótico de $J_{\pm\nu}(\omega z)$, para $\omega z \rightarrow \infty$, podem-se escolher as constantes $c_{\pm}$, em (4.77), tais que

$$c_{\pm}\sqrt{\omega z}J_{\pm\nu}(\omega z) \sim 2\cos(\omega z - \alpha_{\pm}) \quad , \quad \omega z \rightarrow \infty \quad , \quad (4.79)$$

em que $\alpha_{\pm} = \frac{\pi}{4}(1 \pm 2\nu)$.

De (4.79) e (4.77), e fazendo-se uso da condição de contorno (4.72), pode-se escrever para as assíntotas em A

$$\psi(z) \sim (A_+e^{i\alpha_+} + A_-e^{i\alpha_-})e^{-i\omega z} \quad , \quad \omega z \rightarrow \infty \quad , \quad (4.80)$$

sendo que

$$A_+e^{-i\alpha_+} + A_-e^{-i\alpha_-} = 0 \quad . \quad (4.81)$$

Para se seguir o contorno até B , tem-se que contornar a origem. Logo, deve-se realizar uma rotação de $3\pi/2$ no plano- r , o que corresponde a 3π no plano- z . Usando-se o comportamento assintótico da função de Bessel próxima à origem, pode-se interpolá-lo à solução assintótica. De fato, usando-se para a função de Bessel próxima da origem o comportamento

$$J_{\pm\nu}(z) \sim \left(\frac{z}{2}\right)^{\pm\nu} \quad , \quad (4.82)$$

após a rotação de 3π tem-se

$$c_{\pm}\sqrt{\omega z}J_{\pm\nu}(\omega z) \sim e^{6i\alpha_{\pm}}2\cos(-\omega z - \alpha_{\pm}) \quad , \quad \omega z \rightarrow -\infty \quad , \quad (4.83)$$

que combinada com (4.77) dá para as assíntotas em B

$$\psi(z) \sim (A_+e^{5i\alpha_+} + A_-e^{5i\alpha_-})e^{-i\omega z} + (A_+e^{7i\alpha_+} + A_-e^{7i\alpha_-})e^{i\omega z} \quad , \quad \omega z \rightarrow -\infty \quad . \quad (4.84)$$

Pode-se ir de B de volta a A ao longo do grande semi-círculo ($|r| \approx |r_c|$). Nesta região, levando-se em conta a aproximação de buracos negros pequenos, tem-se que $x \gg 1$, o que implica que $V(x)$ tende aproximadamente a zero aí, de modo que ω^2 domina sobre o mesmo, o que permite que se possa aproximar, nessa região, a solução da equação de onda por ondas planas. Com isto, o coeficiente de $e^{-i\omega z}$ poder ser considerado

essencialmente constante ao retornar-se para A , o que não é válido para o coeficiente de $e^{i\omega z}$, que dá uma contribuição exponencialmente pequena para $\psi(r)$ na região onde $Re x > 0$. Conseqüentemente, de (4.80) e (4.84), vê-se que a monodromia em torno do contorno γ é dada simplesmente por

$$\frac{A_+ e^{5i\alpha_+} + A_- e^{5i\alpha_-}}{A_+ e^{i\alpha_+} + A_- e^{i\alpha_-}} = -(1 + 2 \cos 2\pi\nu) \quad , \quad (4.85)$$

em que se levou em conta (4.81).

O cálculo global da monodromia em torno de γ pode ser obtido por meio do uso da condição de contorno de MQN em r_e , uma vez que a única singularidade de $\psi(r)$ ou $e^{-i\omega z}$ dentro de tal contorno ocorre neste ponto. A condição de contorno em r_e implica que, após uma volta-horária completa ao longo do contorno, $\psi(r)$ adquire uma fase $e^{\pi\omega/\kappa_e}$, enquanto que $e^{-i\omega z}$ adquire uma fase $e^{-\pi\omega/\kappa_e}$. Assim, deve-se multiplicar o coeficiente de $e^{-i\omega z}$ nas assíntotas de $\psi(r)$ por $e^{2\pi\omega/\kappa_e}$.

Por conseguinte, comparando-se a monodromia local, (4.85), com a global, tem-se que

$$e^{2\pi\omega/\kappa_e} = -(1 + 2 \cos 2\pi\nu) \quad . \quad (4.86)$$

Analogamente ao caso de Schwarzschild, se se tivesse escolhido $Re \omega < 0$, ter-se-ia que considerar a rotação no sentido oposto, revertendo-se então as considerações feitas relativamente aos pontos A e B , bem como se percorrer o contorno γ no sentido anti-horário. Conclue-se, portanto, que o espectro de MQNs assintóticos fortemente amortecidos, de um buraco negro *pequeno* de Schwarzschild-de-Sitter é dado por

$$\frac{\omega}{\kappa_e} = \left(n + \frac{1}{2}\right) i \pm \frac{1}{2\pi} \ln |1 + 2 \cos 2\pi\nu| \quad , \quad (4.87)$$

com $n \rightarrow \infty$.

A parte real das frequências quase-normais fortemente amortecidas é então

$$Re \omega = \pm \frac{\kappa_e}{2\pi} \ln |1 + 2 \cos 2\pi\nu| \quad . \quad (4.88)$$

A expressão (4.87) tem a mesma forma que aquela obtida por Motl and Neitzke, para o caso de Schwarzschild, Eq. (4.70), sendo que para $\Lambda = 0$, (4.87) reduz-se à Eq. (4.70). De

fato, escrevendo-se (4.75) como $4M\beta = -\left[1 + \frac{r_e r_c}{2(r_e + r_c)^2}\right]$ e tomando-se aí o limite $r_c \rightarrow \infty$, o que corresponde a tomar $a = \infty$ (e, portanto, $\Lambda = 0$), vê-se que $4M\beta = -1$. Além disto, ao se tomar o limite $a = \infty$ em (2.75), recobra-se a métrica assintoticamente plana do buraco negro de Schwarzschild, cuja gravidade superficial associada ao seu horizonte de eventos é $\kappa_e = 1/2r_e$, em que, agora, $r_e = 2M$. De fato, tomando-se o limite de κ_e com $a \rightarrow \infty$, obtém-se $\kappa_e = 1/2r_e$. Finalmente, em vista de (4.78) e (4.87), recupera-se então o resultado de Motl e Neitzke (ver Eq. (4.70)),

$$8\pi M\omega_n = (2n + 1)\pi i \pm \ln |1 + 2 \cos \pi j| \quad . \quad (4.89)$$

O resultado (4.87) mostra que a parte real dos modos assintóticos possui um valor constante, o que não concorda com o comportamento oscilatório encontrado por Konoplya e Zhidenko [153], no caso de perturbações gravitacionais ($j = 2$). Todavia, para o caso eletromagnético ($j = 1$), tem-se que $Re \omega = 0$, em concordância com o resultado daqueles autores. Há que se mencionar, também, que o comportamento da parte imaginária dos modos dados por (4.87) concorda apenas parcialmente com aquele encontrado em [153], já que não exhibe comportamento oscilatório em seu espaçamento, encontrado tanto no caso gravitacional como eletromagnético, em [153]. De acordo com [153], um termo oscilatório deveria aparecer em $Im \omega$, além de $(n + \frac{1}{2})\kappa_e$.

Capítulo 5

Conclusões

Na primeira parte dos problemas considerados nesta tese, estudaram-se as perturbações escalares de um espaço de de-Sitter d -dimensional, tendo sido determinados de maneira exata os correspondentes MQNs. No caso do espaço-tempo de de-Sitter quadridimensional, foi mostrado que os MQNs estão, à exceção de apenas quatro deles, contidos no espectro da função de dois pontos da correspondente teoria de campos conforme tridimensional, “residente” na borda do espaço-tempo.

Embora o cálculo da função de dois pontos tenha sido realizado no espaço-tempo de de-Sitter quadridimensional, a correspondência mencionada pode, em princípio, ser generalizada para d dimensões, caso em que, presumivelmente, os MQNs, devidos a perturbações no *interior* do espaço-tempo, estariam, com exceção de um pequeno número deles, contidos no espectro da função de dois pontos da teoria de campos conforme $(d-1)$ -dimensional, “residente” na borda do espaço-tempo. Com efeito, isto parece mesmo ocorrer, pois a forma da função de dois pontos, como dada na Eq. (3.101), poderia ser diretamente generalizada para d dimensões. Neste caso, haveria necessidade de lidarem-se com harmônicos hipersféricos e o denominador de (3.101) tomaria a forma $[\cosh \frac{\tau}{a} - \cos \Theta]^{-h}$, em que $\Theta = \Theta(\Omega, \Omega')$ é distância geodésica entre dois pontos na esfera unitária S^{d-2} .

Seguindo Strominger, deve-se enfatizar o fato de que o espaço-tempo de de-Sitter não pode, todo ele, ser acessado por um único observador, e que tentar descrevê-lo como um

todo seria o análogo de se tentar descrever ambas as regiões, interna e externa, ao horizonte de eventos de um buraco negro. Apesar da discussão aqui tratada ter envolvido uma região menor que o espaço de de-Sitter todo, mostrou-se que há evidência de que uma teoria de campos conforme dual, na fronteira do espaço-tempo, pode vir, de fato, a descrever bem a projeção holográfica do *interior* do espaço-tempo, fornecendo, portanto, um forte indício de uma correspondência dS/CFT, já que os modos do *interior* são completamente descritos na região do espaço que pode ser acessada por um único observador.

O resultado obtido dá suporte à existência de uma possível correspondência dS/CFT. Quanto à interpretação do pequeno número de modos que ficaram de fora do espectro da teoria de campos conforme, nada se sabe afirmar. Todavia, para quantidades extensivas, como entropia, presume-se que eles não contribuirão.

O rigoroso estabelecimento de uma correspondência dS/CFT não foi ainda atingido, pelo fato de até então não haver uma descrição completamente satisfatória do espaço-tempo de de-Sitter na teoria de cordas. No entanto, a evidência aqui estabelecida, juntamente com outras que têm sido descritas na literatura (ver Cap. 3), conduzem à expectativa de que a gravitação em espaços-tempos de de-Sitter, assim como no caso de espaços-tempos de AdS, também tem um caráter *holográfico*, constituindo-se, portanto, em mais uma provável realização do *Princípio Holográfico*.

Outra questão abordada nesta tese, diz respeito ao possível papel que MQNs assintóticos (em geral, fortemente amortecidos) teriam na descrição do espectro de área de buracos negros quânticos. Esta idéia baseia-se na hipótese de Hod [55], de que as frequências quase-normais assintóticas de um buraco negro podem, invocando-se o “Princípio da Correspondência” (Bohr), ser usadas para a determinação do espaçamento daquele espectro de área. Fazendo-se uso desta hipótese, prescreveu-se como a área de buracos negros quase-extremos, de Kerr e Schwarzschild-de-Sitter, seria quantizada. Para isto, admitiu-se também a hipótese de Bekenstein [58, 59], segundo a qual o espectro de área de um buraco negro seria discreto e uniformemente espaçado. Deste modo, Hod propôs que esse espectro seria dado por $A_n = \delta A \ell_P^2 n$, em que δA seria a variação da área causada pela absorção de um modo quase-normal. No caso SdS, obteve-se que o

espaçamento do espectro de área seria dado pelas Eq.'s (4.34) e (4.35), que difere daquele para o caso Schwarzschild assintoticamente plano, em que é dado por $4\ln 3$. Este valor provém da parte real dos MQNs assintóticos daquele tipo de buraco negro. Já no caso Kerr quase-extremo, o resultado, dado pela Eq. (4.20), é compatível com aquele proposto por Bekenstein, em (4.2), ao se considerar a absorção de um *quantum*. Tanto no caso Kerr como no de SdS, a diferença encontrada em relação aos casos não-extremos, é reflexo direto da natureza completamente distinta entre os espectros assintóticos de MQNs.

Ainda acerca do papel que MQNs assintóticos podem vir a desempenhar na descrição da área de buracos negros, considerou-se a determinação dos MQNs (fortemente amortecidos) de um buraco negro *pequeno* de Schwarzschild-de Sitter. Para isto, foi feito uso do “método da monodromia”, devido a Motl e Neitzke [74], que se baseia no cálculo das monodromias associadas ao problema de condições de contorno que é posto pela determinação dos MQNs de um buraco negro, quando se estuda, no plano complexo, a equação que descreve as perturbações do mesmo. Considerando-se tal complexificação, verificou-se que a contribuição dominante para o potencial, na região próxima à origem, tem exatamente o mesmo comportamento que no caso de Schwarzschild assintoticamente plano. Uma vez que, em termos da *coordenada tartaruga*, as condições de contorno para MQNs em SdS são do mesmo tipo que para o caso de Schwarzschild, foi possível determinarem-se as monodromias envolvidas e obter-se uma expressão para os MQNs assintóticos. A expressão obtida, Eq. (4.87), tem forma muito similar àquela do caso de Schwarzschild, sendo que se reduz a deste último ao se tomar nula a constante cosmológica. O resultado (4.87) mostra que a parte real dos modos assintóticos ($Re\omega$) possui um valor constante, o que não concorda com o comportamento oscilatório encontrado por Konoplya e Zhidenko [153], no caso de perturbações gravitacionais ($j = 2$). Todavia, para o caso eletromagnético ($j = 1$), tem-se que $Re\omega = 0$, em concordância com o resultado daqueles autores. Há que se mencionar, também, que o comportamento da parte imaginária dos modos dados por (4.87) concorda apenas parcialmente com aquele encontrado em [153], já que não exhibe comportamento oscilatório em seu espaçamento, encontrado tanto no caso gravitacional como eletromagnético, em [153]. De acordo com [153], um termo oscilatório deveria aparecer em $Im\omega$, além de $(n + \frac{1}{2})\kappa_e$. Deve-se mencionar que a completa concordância

com os resultados de [153] foi posteriormente obtida por Cardoso *et al.* [154].

Por fim, no que diz respeito à investigação do comportamento assintótico dos MQNs no caso de perturbações de *spin semi-inteiro*, até recentemente não havia estudos disponíveis na literatura. Tendo-se em vista a hipótese de Hod, este é um caso em que é muito interessante conhecer-se qual seria o valor da parte real dos MQNs assintóticos, uma vez que permitiria a comparação com valor correspondente nos casos de *spin inteiro*, isto é, 0, 1 e 2. Isto permitiria, no caso de um buraco negro de Schwarzschild, saber se o espaçamento de seu espectro de área seria *universal*, ou seja, independente do tipo de perturbação considerada. No caso de perturbações de Dirac (*spin*-1/2), estudou-se, em [155] (Castello-Branco *et al.*), o comportamento assintótico dos correspondentes MQNs (ver Apêndice C). Para isto, fez-se uso do método de Leaver [141], que, através de frações continuadas infinitas, permite determinarem-se numericamente os MQNs com partes imaginárias grandes (fortemente amortecidos). Em [155], obteve-se que a parte real de tais modos é aproximadamente *nula*, ou seja, $Re\omega \approx 0$. Portanto, o valor de $Re\omega$, no caso do mais simples buraco negro, que é o de Schwarzschild, não teria um valor *universal*. Além do mais, pela hipótese de Hod, $Re\omega$ implicaria que o espectro de área do buraco negro não seria discreto. Portanto, neste caso, a hipótese de Hod não seria mais adequada para a determinação do espaçamento do espectro de área de um buraco negro quântico. Espera-se que uma *teoria quântica da gravitação* venha a dar a palavra final nesta e em outras questões que envolvem a física de buracos negros.

Apêndice A

Definições de Quantidades Geométricas

Nesta tese, adota-se o uso da assinatura $(-, +, +, +)$ para a métrica do espaço-tempo, $g_{\mu\nu}$. As demais quantidades usadas nos cálculos do Cap. 2 são definidas abaixo.

Conexão Métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\mu\alpha;\nu} + g_{\nu\alpha;\mu} - g_{\mu\nu;\alpha}) \quad . \quad (5.1)$$

Derivada Covariante:

$$A_{\nu;\mu} \equiv \nabla_{\mu}A_{\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}A_{\alpha} \quad . \quad (5.2)$$

Tensor de Riemann:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\rho} = \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} - \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\rho\mu}^{\alpha} - \Gamma_{\rho\alpha}^{\lambda}\Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} \quad . \quad (5.3)$$

Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu} \quad . \quad (5.4)$$

Escalar de Curvatura:

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad . \quad (5.5)$$

Apêndice B

Fixação do Espectro de Área de um Buraco Negro na Gravitação Quântica de Laço: a Proposta de Dreyer

A *Gravitação Quântica de Laço* (*Loop Quantum Gravity (LQG)*) é, juntamente com a Teoria de Cordas, uma das mais promissoras propostas para se quantizar a gravitação. Este *status* foi adquirido tendo-se em vista a sua previsão de *quantização da geometria* e a dedução da relação entropia-área de Bekenstein-Hawking [14].

Na teoria da *LQG*, uma base para o espaço de Hilbert que descreve os estados físicos é dada pelas chamadas *redes de spin* (*spin networks*) [14].

A área de uma superfície que intercepta um lado da referida rede de *spin* e que carrega o índice j é dada por

$$A(j) = 8\pi \ell_P^2 \gamma \sqrt{j(j+1)} \quad , \quad (5.6)$$

em que, aqui, γ é o chamado *parâmetro de Barbero-Immirzi*, um *parâmetro livre* que está associado a uma ambigüidade que existe na escolha das variáveis canonicamente conjugadas que devem ser quantizadas [14]. Diferentes valores de γ implicam em teorias quânticas inequivalentes. Não há nenhuma razão, *a priori*, para que se fixe qualquer valor particular de tal parâmetro.

Antes do trabalho de Dreyer, o único argumento até então usado para se fixar γ era por meio do uso da fórmula para a entropia de buracos negros, de modo que se reproduzisse o resultado de Bekenstein-Hawking.

Considerando-se um buraco negro no contexto da *LQG*, pode-se pensar na área de

seu horizonte de eventos como sendo consequência de um grande número de lados da rede de *spin*, atravessando a superfície. Cada lado da rede, com *spin* j , contribui com uma porção dada por (5.6) para a área total da superfície. No horizonte, cada lado, ao atravessá-lo, aumenta a dimensão do espaço de Hilbert da teoria (conforme) na borda do mesmo. Cada furo de um lado com *spin* j aumenta a dimensão por um fator $(2j + 1)$, que é a dimensão da representação de *spin* j . Para um número N grande de lados com *spins* j_i , $i = 1, \dots, N$ interceptando o horizonte, a dimensão do espaço de Hilbert da teoria na borda é $\prod (2j + 1)$.

A entropia de um buraco negro é dada então pelo logaritmo da dimensão do espaço de Hilbert da teoria que reside na borda (ver [63] e referências ali citadas). Pode ser mostrado que a contribuição estatística mais importante deriva de configurações para as quais o *spin mais baixo possível*, j_{min} , domina [63]. A entropia é portanto dada por [63]

$$S = N \ln (2j_{min} + 1) \quad , \quad (5.7)$$

em que N pode ser calculado a partir da área do buraco negro, A , e da contribuição $A(j_{min})$ devida a cada intersecção de um dado lado da rede de *spin*. Deste modo, tem-se que $N = A/A(j_{min})$. Obtém-se então que

$$N = \frac{A}{8\pi \ell_P^2 \gamma \sqrt{j_{min}(j_{min} + 1)}} \quad . \quad (5.8)$$

Usando-se em (5.7) a relação entropia-área de Bekenstein-Hawking ($S = A/4\ell_P^2$), vê-se, de imediato, que

$$\frac{\ln (2j_{min} + 1)}{2\pi \gamma \sqrt{j_{min}(j_{min} + 1)}} = 1 \quad , \quad (5.9)$$

que implica em

$$\gamma = \frac{\ln (2j_{min} + 1)}{2\pi \sqrt{j_{min}(j_{min} + 1)}} \quad (5.10)$$

A representação mais baixa, não-trivial, do grupo $SU(2)$ tem $j_{min} = 1/2$, o que, de (5.10), dá

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\pi \sqrt{3}} \quad , \quad (5.11)$$

o que fixa, portanto, o parâmetro de Barbero-Immirzi.

Dreyer buscou, porém, fixar γ de um modo um pouco diferente do acima, sem fazer uso tão direto da relação entropia-área. Para isto, ele usou a conjectura de Hod, sobre MQNs de um buraco negro e seu espectro de área, obtendo, como será visto adiante, um valor diferente para γ .

De acordo com Dreyer, no contexto da *LQG*, o candidato mais natural para uma “transição entre níveis de área” de um buraco negro quântico, a que se referiria o Princípio da Correpondência, de acordo com a sugestão de Hod, seria o aparecimento ou desaparecimento de um furo no horizonte de eventos do mesmo, devido à intersecção de um lado com *spin* j_{min} . Isto é, Dreyer assumiu que a variação da área é devida ao aparecimento ou desaparecimento de um furo, com $j = j_{min}$. Portanto, a área de um buraco negro variaria de uma quantidade dada por (5.6), com $j = j_{min}$, ou seja,

$$\delta A = A(j_{min}) = 8\pi \ell_P^2 \gamma \sqrt{j_{min}(j_{min} + 1)} \quad . \quad (5.12)$$

Com isso, pode-se fixar γ através da hipótese de Hod (ver Eq. (4.7)), isto é, exigindo-se que uma variação da massa do buraco negro, δM , correspondente à variação de sua área, (5.12), seja igual à energia de um *quantum*, com frequência ω_R , dada por (4.6).

Comparando-se (4.10) com (5.12), obtém-se

$$\gamma_D = \frac{\ln 3}{2\pi \sqrt{j_{min}(j_{min} + 1)}} \quad . \quad (5.13)$$

Agora, vem a fixação do valor de j_{min} e, portanto, de γ_D . De (5.7), (5.8), (5.12) e (5.13), vê-se que

$$S = \frac{A}{4\ell_P^2} \frac{\ln(2j_{min} + 1)}{\ln 3} \quad . \quad (5.14)$$

Por fim, exigindo-se que haja concordância com a fórmula de Bekenstein-Hawking, Dreyer impôs que

$$\frac{\ln(2j_{min} + 1)}{\ln 3} = 1 \quad , \quad (5.15)$$

da qual se conclui que $j_{min} = 1$, que levado em (5.13) dará:

$$\gamma_D = \frac{\ln 3}{2\pi \sqrt{2}} \quad , \quad (5.16)$$

o que fixa o parâmetro de Barbero-Immirzi.

Deve-se mencionar que, sendo $j_{min} = 1$, a conjectura de Dreyer implicaria que o grupo de calibre da LQG não mais seria o grupo $SU(2)$, mas sim o $SO(3)$. Isto gerou várias discussões na literatura. Ressalte-se, por exemplo, o trabalho de Corichi [156], segundo o qual seria ainda possível reconciliar o valor (5.16) do parâmetro de Barbero-Immirzi, sem que houvesse necessidade de mudança do grupo de calibre da teoria, mantendo-se, pois, o $SU(2)$. É desejável que assim seja para que se possa incluir a descrição de férmions na teoria.

Apêndice C

Modos Quase-Normais Assintóticos de Perturbações de Dirac de um Buraco Negro de Schwarzschild

Neste apêndice, tratar-se-á da discussão feita na Ref. [155], sobre o comportamento assintótico dos MQNs associados a perturbações (não-massivas) de Dirac, de um buraco negro de Schwarzschild.

A equação de Dirac num espaço-tempo curvo é dada por [157]:

$$\left(\gamma^a e_a^\mu (\partial_\mu + \Gamma_\mu) + \frac{mc}{\hbar} \right) \Psi = 0 \quad , \quad (5.17)$$

em que m é a massa do campo de Dirac, Ψ , e_a^μ são as chamadas tétradas, definidas através da métrica, $g_{\mu\nu}$, por $g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_a^\mu e_b^\nu$, sendo que $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ é a métrica de Minkowski. E Γ_μ é a *conexão de spin*, dada por $\Gamma_\mu = \frac{1}{8} [\gamma^a, \gamma^b] e_a^\nu e_{b\nu;\mu}$, em que γ^a são as matrizes de Dirac e $e_{b\nu;\mu}$ é a derivada covariante de $e_{b\nu}$ [157].

Considerando-se, agora, um campo Ψ , não-massivo, propagando-se num fundo de Schwarzschild, a Eq. (5.17) pode ser reduzida a uma equação onda, com um potencial adicional, do mesmo tipo daquela encontrada nos casos das perturbações de *spin* inteiro (0, 1 e 2). Admitindo-se uma dependência temporal $e^{-i\omega t}$ e tomando-se $\Psi = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/4} \psi$, tem-se

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(x) \right) \psi(x) = 0 \quad , \quad (5.18)$$

em que x é a coordenada tartaruga, sendo que o potencial efetivo é dado por [90]:

$$V(r(x)) = V_{\pm}(r) = |\mu|f(r) \left(\frac{|\mu|}{r^2} \pm \frac{d}{dr} \sqrt{\frac{f(r)}{r^2}} \right) , \quad (5.19)$$

em que $f(r) = (1 - \frac{2M}{r})$ e $\mu = \pm(j + \frac{1}{2})$, sendo $j = \ell \pm \frac{1}{2}$ e ℓ é o índice de multipolo. Sendo $V_{\pm}$ potenciais *supersimétricos* (podem ser obtidos de um mesmo potencial), eles têm o mesmo espectro de MQNs [90], de modo que se pode escolher, por exemplo, apenas V_+ para que se trabalhe. Em termos de x , tal potencial tende a zero, tanto no horizonte de eventos do buraco negro, como no infinito, ou seja, $V(x \rightarrow \pm\infty) = 0$.

Em [155], os MQNs foram determinados usando-se o método de Leaver [141], que consiste em expressar as soluções de (5.18), em termos da variável radial r , por meio de uma série de potências, em que as condições de contorno para MQNs traduzem-se numa condição de convergência para a série. Tal condição pode ser expressa como uma equação que envolve frações continuadas (infinitas). Os coeficientes da expansão são determinados por uma relação de recorrência, cujos coeficientes serão funções de ω . As frequências quase-normais corresponderão aos valores de ω tais que a série de potências seja convergente em $r = \infty$ [141].

Os MQNs satisfazem às condições de contorno:

$$\psi(x) \sim e^{\pm i\omega x} , \quad x \rightarrow \pm\infty . \quad (5.20)$$

Seguindo-se Leaver [141], tome-se

$$\psi(x) = e^{\pm i\omega x} u(x) , \quad (5.21)$$

em que $u(r)$ tem uma singularidade regular no horizonte de eventos e irá se impor que seja finita em $x \rightarrow \infty$, de modo que a série

$$u(r) = f(r)^{2s} \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(r)^{n/2} , \quad (5.22)$$

seja convergente em $r = \infty$. Tem-se que

$$f(r)^s \propto e^{-i\omega x} , \quad x \rightarrow -\infty , \quad (5.23)$$

com $s = -2Mi\omega$.

Substituindo-se (5.21) e (5.22) em (5.18), pode-se obter uma relação de recorrência de cinco termos, que, após uma série de eliminações de Gauss, pode ser reduzida a uma relação de recorrência de três termos, a saber,

$$a_{n+1}\alpha_n(\omega) + a_n\beta_n(\omega) + a_{n-1}\gamma_n(\omega) = 0 \quad . \quad (5.24)$$

Quando ω for uma frequência quase-normal, a razão dos coeficientes da série é *finita*, podendo ser encontrada a partir de frações continuadas [141], a saber:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \frac{\alpha_{n-1}}{\beta_{n-1} - \frac{\alpha_{n-2}\gamma_{n-1}}{\beta_{n-2} - \alpha_{n-3}\gamma_{n-2}/\dots}} - \frac{\beta_n}{\alpha_n} = - \frac{\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \alpha_{n+3}\gamma_{n+3}/\dots}} \quad . \quad (5.25)$$

Tem-se então uma equação implícita para ω , em termos de frações continuadas invertidas. Assim, os MQNs são então as raízes da fração continuada invertida:

$$\beta_n - \frac{\alpha_{n-1}\gamma_n}{\beta_{n-1} - \frac{\alpha_{n-2}\gamma_{n-1}}{\beta_{n-2} - \alpha_{n-3}\gamma_{n-2}/\dots}} = \frac{\alpha_n\gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1}\gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \alpha_{n+3}\gamma_{n+3}/\dots}} \quad , \quad (5.26)$$

que pode ser resolvida numericamente, uma vez encontrados $\alpha_n(\omega)$, $\beta_n(\omega)$ e $\gamma_n(\omega)$.

A principal diferença para o que se sabe sobre o regime de forte amortecimento para perturbações devidas a campos de *spin* inteiro (escalar, gravitacional e eletromagnética) é que, agora, o espaçamento na parte imaginária não é $i/4M$, mas sim $i/8M$. A parte real de ω (ver Fig. 5.1 e Fig. 5.2) cai rapidamente a valores próximos de zero, valores que já não podem ser encontrados com precisão razoável pelo método de Leaver. Isto ocorre já em torno de $n = 400 - 500$, para $\mu = 1$ e em torno de $n = 8000$, para $\mu = 2$. Note-se que quanto maior a razão $Im \omega_n / Re \omega_n$, mais lentamente é a convergência da série de potências. Assim sendo, tem-se que ser cuidadoso ao se encontrar MQNs com parte imaginária grande, sendo que se deve verificar a convergência aumentando o “comprimento” da fração continuada, até que o resultado para ω_n não se altere. Tendo-se em conta isto, o “comprimento” da fração continuada é, por exemplo, de 5 milhões de termos, para $n = 7000$. Resulta que, para obter-se a convergência no método de Leaver, necessita-se de um tempo de computação numérica muito grande. É em função disto que não se pôde obter modos com valores de n acima daqueles mostrados nas figuras 5.1

Figura 5.1: Parte real de ω , como função da parte imaginária, para $\mu = 1$.

e 5.2. Deve-se notar ainda que para valores de n maiores que 500, é demasiadamente grande o tempo requerido para se calcular um a um os modos, de forma que se necessitou saltar vários valores de sobretons, como mosrtado na Fig.5.2. No entanto, mesmo com um número não tão grande de modos individuais calculados, acredita-se que se tenha um panorama do comportamento no regime assintótico.

Como se pode ver das figuras 5.1 e 5.2, os MQNs demonstram o seguinte comportamento assintótico:

$$\text{Re } \omega_n \approx 0 \quad , \quad \text{para } n \rightarrow \infty \quad , \quad (5.27)$$

$$\text{Im } \omega_{n+1} - \text{Im } \omega_n \approx \frac{-i}{8M} \quad , \quad \text{para } n \rightarrow \infty \quad . \quad (5.28)$$

Pode-se obter analiticamente a fórmula para o espaçamento da parte imaginária, Eq. (5.28), usando-se, por exemplo, um procedimento devido a Choudhury e Padmanabhan [158], que usa a aproximação de Born para determinar, como em Mecânica Quântica, amplitudes de espalhamento ¹. Para modos formente amortecidos, a amplitude de espa-

¹Deve-se lembrar que os MQNs podem ser interpretados como pólos dos coeficientes de transmissão e reflexão, no problema de espalhamento associado ao potencial das perturbações de um buraco negro de Schwarzschild (ver Cap.1).

Figura 5.2: Parte real de ω , como função da parte imaginária, para $\mu = 2$.

lhamento é dada pela fórmula [158]:

$$S(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} V[(x)] e^{2ikx} dx \quad . \quad (5.29)$$

A contribuição significativa para esta integral vem apenas da região próxima ao horizonte de eventos do buraco negro. Usando-se (5.19) para $V[r(x)]$, encontra-se que

$$S(k) \sim \text{combinações de } \Gamma(4ikM) \text{ e } \Gamma((1/2) + 4ikM) \quad .$$

Vê-se, portanto, que os pólos de $S(k)$ ocorrem quando $(1/2) + 4ikM = -n$, ou, $4ikM = -n$ ($n \geq 0$ é um inteiro), *i.e.*, em $k_n = in/8M$, o que concorda com o valor observado numericamente, através do método de Leaver (ver Eq. (5.28)).

Referências Bibliográficas

- [1] H. A. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski. *O Princípio da Relatividade*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1989.
- [2] J. Michell, *On the Means of Discovering of Distance, Magnitude, etc. of the Fixed Stars*, *Philos. Trans.*, **74**, 35-57 (1783), reimpresso em *Black Holes: Selected Reprints*, p. 8, editado por S. Detweiler. American Assoc. Physics Teachers, 1982.
- [3] P. S. Laplace, *Exposition du Système du Monde*, **2**, 305. Cercle-Social, Paris, 1796.
- [4] S. Hawking e J. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (UK) (1973).
- [5] W. Israel, *Dark stars: the Evolution of an Idea*, em *Three Hundred Years of Gravitation*, ed. por S. Hawking e W. Israel, Cambridge Univ. Press, Cambridge (UK) (1987).
- [6] R. Narayan, *Evidence for the Black Hole Event Horizon*, *astro-ph/0310692*; J. A. Orosz, *Inventory of Black Hole Binaries*, *astro-ph/0209041*.
- [7] L. Ferrarese e H. Ford, *Supermassive Black Holes in Galactic Nuclei: Past, Present and Future Research*, *astro-ph/0411247*.
- [8] R. A. Matzner, H. E. Seidel, S. L. Shapiro, L. Smarr, W-M Suen, S. A. Teukolsky e J. Winicour, *Geometry of a Black Hole Collision*, *Science* **270**, 941 (1995).

- [9] G. 't Hooft, *Dimensional Reduction in Quantum Gravity*, *gr-qc/9310026*; *The Holographic Principle*, *hep-th/0003004*; R. Bousso, *The Holographic Principle*, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 825-874 (2002) [*hep-th/0203101*].
- [10] J. D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, *Phys. Rev.* **D7**, 2333 (1973).
- [11] J. D. Bekenstein, *Entropy Bounds and Black Hole Remnants*, *Phys. Rev.* **D49**, 1912 (1994) [*gr-qc/9307035*].
- [12] J. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998); S. S. Gubser, I. Klebanov e A. Polyakov, *Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory*, *Phys. Lett.* **B428**, 105 (1998); E. Witten, *Anti de Sitter Space and Holography*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 253 (1998); O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri e Y. Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, *Phys. Rep.* **323**, 183 (2000) [*hep-th/9905111*].
- [13] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (UK)(2004).
- [14] C. Rovelli, *Loop Quantum Gravity*, *Living Rev. Rel.* **1**, 1 (1998) [*gr-qc/9710008*]; L. Smolin, *How Far are we from the Quantum Theory of Gravity ?*, *hep-th/0303185*; T. Thiemann, *Lectures on Loop Quantum Gravity*, *Lect. Notes Phys.* **631**, 41-135 (2003) [*gr-qc/0210094*].
- [15] L. Susskind, *The World as a Hologram*, *J. Math. Phys.* **36**, 6377-6396 (1995) [*hep-th/9409089*].
- [16] W. Fischler e L. Susskind, *Holography and Cosmology*, *hep-th/9806039*.
- [17] B. Wang, E. Abdalla e T. Osada, *Entropy and Holography Constraints for Inhomogeneous Universes*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5507-5510 (2000) [*astro-ph/0006395*].
- [18] N. Birrel e P. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Univ. Press, Cambridge (UK) (1982).

- [19] R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, Chicago Lectures in Physics, The University of Chicago Press, Chicago and London (1994).
- [20] S. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974); *Particle Creation by Black Holes*, *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975).
- [21] W. G. Unruh, *Experimental Black-Hole Evaporation ?*, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981).
- [22] M. Visser, *Acoustic Black Holes*, *Proceedings of Advanced School on Cosmology and Particle Physics (ASCPP 98)*, Peniscola, Spain (1998); *gr-qc/9901047*; M. Novello, M. Visser e G. Volovik, *Artificial Black Holes*. River Edge, USA: World Scientific (2002).
- [23] A. Abrahams, D. Bernstein, D. Hobill, E. Seidel e L. Smarr, *Numerically Generated Black-Hole Spacetimes: Interaction with Gravitational Waves*, *Phys. Rev.* **D45**, 3544 (1992); P. Anninos, D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr e W.-M. Suen, *Collision of Two Black Holes*, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2851 (1993).
- [24] O. D. Aguiar et al., *The Gravitational Wave Detector "Mario Schenberg": Status of the Project*, *Braz. J. Phys.*, **32**, 866 (2002).
- [25] C. M. Will, *The Confrontation between General Relativity and Experiment*, *Living Rev. in Rel.* **4**, 4 (2001) [*gr-qc/0103036*].
- [26] N. Andersson e K. D. Kokkotas, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **299**, 1059 (1998); *Gravitational Waves and Pulsating Stars: What Can We Learn from Future Observations?*, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4134 (1996); K. D. Kokkotas, T. A. Apostolatos e N. Andersson, *The Inverse Problem for Pulsating Neutron Stars: a "Fingerprint Analysis" for the Supranuclear Equation of State*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **320**, 307-315 (2001) [*gr-qc/9901072*].
- [27] T. Regge e J. A. Wheeler, *Stability of a Schwarzschild Singularity*, *Phys. Rev.* **108**, 1063 (1957).

- [28] C. V. Vishveshwara, *Scattering of Gravitational Radiation by a Schwarzschild Black-Hole*, *Nature* **227**, 936 (1970).
- [29] L. A. Edelstein e C. V. Vishveshwara, *Differential Equations for Perturbations on the Schwarzschild Metric*, *Phys. Rev.* **D1**, 3514 (1970).
- [30] F. J. Zerilli, *Gravitational Field of a Particle Falling in a Schwarzschild Geometry Analyzed in Tensor Harmonics*, *Phys. Rev.* **D2**, 2141 (1970); *Effective Potential for Even-Parity Regge-Wheeler Gravitational Perturbation Equations*, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 737 (1970).
- [31] W. H. Press, *Long Wave Trains of Gravitational Waves from a Vibrating Black Hole*, *Astrophys. J.* **170**, L105 (1971).
- [32] C. Molina Mendes, *Propagação de Campos em Buracos Negros Esféricos*, Tese de Doutorado, Instituto de Física da Universidade de São Paulo (2003).
- [33] K. D. Kokkotas e B. G. Schmidt, *Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes*, *Living Rev. Rel.* **2**, 2 (1999) [*gr-qc/9909058*].
- [34] H.-P. Nollert, *Quasinormal Modes: the Characteristic 'Sound' of Black Holes and Neutron Stars*, *Class. Quant. Grav.* **16**, R159-R216 (1999).
- [35] G. W. Gibbons e S. W. Hawking, *Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation*, *Phys. Rev.* **D15**, 2738 (1977).
- [36] P. R. Brady, C. M. Chambers, W. Krivan e P. Laguna, *Telling Tails in the Presence of a Cosmological Constant*, *Phys. Rev.* **D55**, 7538 (1997); P. R. Brady, C. M. Chambers, W. G. Laarakkers e E. Poisson, *Radiative Falloff in Schwarzschild-de Sitter Spacetime*, *Phys. Rev.* **D60**, 064003 (1999); W. G. Laarakkers e E. Poisson, *Radiative Falloff in Black-Hole Spacetimes*, *gr-qc/9908041*.
- [37] G. Horowitz e V. Hubeny, *Quasinormal Modes of AdS Black Holes and the Approach to Thermal Equilibrium*, *Phys. Rev.* **D62**, 024027 (2000) [*hep-th/9909056*].

- [38] S.F.J. Chan e R.B. Mann, *Scalar Wave Falloff in Asymptotically Anti-de Sitter Backgrounds*, *Phys. Rev.* **D55**, 7546 (1997) [*gr-qc/9612026*].
- [39] E. S. C. Ching, P. T. Leung, W. M. Suen e K. Young, *Phys. Rev.* **D52**, 2118 (1995).
- [40] E. Witten, *Anti-de Sitter Space, Thermal Phase Transition, and Confinement in Gauge Theories*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 505-532 (1998) [*hep-th/9803131*].
- [41] B. Wang, C-Y. Lin e E. Abdalla, *Quasinormal Modes of Reissner-Nordström Anti-de Sitter Black Holes*, *Phys. Lett.* **B481**, 79 (2000); B. Wang, C. M. Mendes e E. Abdalla, *Phys. Rev.* **D63**, 084001 (2001); J-M. Zhu, B. Wang e E. Abdalla, *Phys. Rev.* **D63**, 12404 (2001).
- [42] V. Cardoso e J. P. S. Lemos, *Phys. Rev.* **D63**, 124015 (2001).
- [43] M. Bañados, C. Teitelboim e J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992).
- [44] D. Birmingham, I. Sachs, e S. N. Solodukhin, *Conformal Field Theory Interpretation of Black Hole Quasinormal Modes*, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 151301 (2002) [*hep-th/0112055*].
- [45] B. P. Schmidt *et al.*, *Astrophys. J.* **507**, 46 (1998); A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998); P. M. Garnavich *et al.*, *Supernova Limits on the Cosmic Equation of State*, *Astrophys. J.* **509**, 74 (1998) [*astro-ph/9806396*]; S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999); S. Perlmutter, em *Proc. of the 19th Intl. Symp. on Photon and Lepton Interactions at High Energy LP99*, ed. J. A. Jaros e M. E. Peskin, *Int. J. Mod. Phys. A* **15S1**, 715 (2000).
- [46] M. Trodden e S. M. Carrol, *TASI Lectures: Introduction to Cosmology*, *astro-ph/0401547*.
- [47] S. S. Seahra, C. Clarkson e R. Maartens, *Detecting Extra Dimensions with Gravity Wave Spectroscopy*, *gr-qc/0408032*.
- [48] A. Strominger, *The dS/CFT Correspondence*, *JHEP* **0110**, 034 (2001) [*hep-th/0106113*].

- [49] E. Abdalla, B. Wang, A. Lima-Santos e W. G. Qiu, *Support of dS/CFT Correspondence from Perturbations of Three Dimensional Spacetime*, *Phys. Lett.* **B538**, 435 (2002) [*hep-th/0204030*].
- [50] E. Abdalla, K. H. C. Castello-Branco e A. Lima-Santos, *Support of dS/CFT Correspondence from Space-Time Perturbations*, *Phys. Rev.* **D66**, 104018 (2002) [*hep-th/0208065*].
- [51] R. Bousso, *Holography in General Space-times*, *JHEP* **028**, 9906 (1999) [*hep-th/9906022*]; *ibidem*, *Adventures in de Sitter Space*, *hep-th/0205177*.
- [52] S. Nojiri e S. D. Odintsov, *Phys. Lett.* **B531**, 143 (2002); S. Nojiri, S. D. Odintsov, e S. Oguchi, *Phys. Rev.* **D66**, 023522 (2002); H. W. Lee e Y. S. Myung, *Phys. Lett.* **B537**, 117 (2002); B. McInnes, *Nucl. Phys.* **B627**, 311 (2002); M. Cvetič, S. Nojiri e S. D. Odintsov, *Nucl. Phys.* **B628**, 295 (2002); Z. Chang e C.-B. Guan, *hep-th/0204014*; B. C. da Cunha, *Phys. Rev.*, **D66**, 124011 (2002).
- [53] R. Bousso, *The Holographic Principle*, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 825-874 (2002), [*hep-th/0203101*].
- [54] E. Witten, *Quantum Gravity in de Sitter Space*, *hep-th/0106109*.
- [55] S. Hod, *Bohr's Correspondence Principle and the Area Spectrum of Quantum Black Holes*, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4293 (1998).
- [56] J. W. York, Jr., *Dynamical Origin of Black Hole Radiance*, *Phys. Rev.* **D28**, 2929 (1983).
- [57] J. D. Bekenstein, *The Quantum Mass Spectrum of the Kerr Black Hole*, *Lett. Nuovo Cim.* **11**, 467 (1974).
- [58] J. D. Bekenstein, *Quantum Black Holes as Atoms*, *Proceedings of the Eight Marcel Grossmann Meeting*, T. Piran e R. Ruffini, eds. (World Scientific Singapore 1999), pp. 92-111 [*gr-qc/9710076*].

- [59] J. D. Bekenstein, *Black Holes: Classical Properties, Thermodynamics and Heuristic Quantization, Proceedings of the IX Brazilian School of Cosmology and Gravitation*, Rio de Janeiro, Brazil, ed. by M. Novello (Atlantisciences, France, 2000) [*gr-qc/9808028*].
- [60] H.-P. Nollert, *Quasinormal Modes of Schwarzschild Black Holes: The Determination of Quasinormal Frequencies with Very Large Imaginary Parts*, *Phys. Rev. D* **47**, 5253 (1993).
- [61] N. Andersson, *Class. Quant. Grav.* **10**, L61 (1993).
- [62] H. Liu, *Class. Quant. Grav.* **12**, 543 (1995).
- [63] O. Dreyer, *Quasinormal Modes, the Area Spectrum, and Black Hole Entropy*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 081301 (2003) [*gr-qc/0211076*].
- [64] L. Smolin, *An Invitation to Loop Quantum Gravity*, *hep-th/0408048*.
- [65] A. P. Polychronakos, *Area Spectrum and Quasinormal Modes of Black Holes*, *Phys. Rev. D* **69**, 044010 (2004) [*hep-th/0304135*].
- [66] G. Kunstatter, *d-Dimensional Black Hole Entropy Spectrum from Quasi-Normal Modes*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 161301 (2003) [*gr-qc/0212014*].
- [67] J. Baez, *The Quantum of Area ?*, *Nature* **421**, 702-703 (2003).
- [68] S. Hod, *Phys. Rev. D* **67**, 081501 (2003), *gr-qc/0301122*; E. Berti e K. D. Kokkotas, *Phys. Rev. D* **68**, 044027 (2003), *hep-th/0303029*; A. Polychronakos, *Phys. Rev. D* **69**, 044010 (2004), *hep-th/0304135*; D. Birmingham, *Phys. Lett. B* **569**, 199 (2003), *hep-th/0306004*; E. Berti, V. Cardoso, K. D. Kokkotas e H. Onozawa, *Phys. Rev. D* **68**, 124018 (2003), *hep-th/0307013*; N. Andersson e C. J. Howls, *gr-qc/0307020*; S. Hod, *gr-qc/0307060*; J. Oppenheim, *Phys. Rev. D* **69**, 044012 (2004), *gr-qc/0307089*; Y. Ling e H. Zhang, *Phys. Rev. D* **68**, 101501 (2003), *gr-qc/0309018*; V. Cardoso, J. P. S. Lemos e S. Yoshida, *Phys. Rev. D* **69**, 044004 (2004), *gr-qc/0309112*; M. R. Setari,

- Phys. Rev.* **D69**, 044016 (2004), *hep-th/0312061*; E. Berti, V. Cardoso e S. Yoshida, *gr-qc/0401052*.
- [69] V. Cardoso, R. A. Konoplya, e J. P. S. Lemos, *Phys. Rev.* **D68**, 044024 (2003), *gr-qc/0305037*; S. Yoshida e T. Futamase, *gr-qc/0308077*; A. J. M. Medved, D. Martin e M. Visser, *gr-qc/0310097*; *gr-qc/0311086*; M. R. Setare, *Class. Quant. Grav.* **21**, 1453 (2004), *hep-th/0401063*; L. Vanzo e S. Zerbini, *hep-th/0402103*.
- [70] V. Cardoso, J. P. S. Lemos e S. Yoshida, *Quasinormal Modes of Schwarzschild Black Holes in Four and Higher Dimensions*, *Phys. Rev.* **D69**, 044004 (2004) [*gr-qc/0309112*].
- [71] V. Cardoso e J. P. S. Lemos, *Phys. Rev.* **D67**, 084020 (2003), *gr-qc/0301078*; V. Suneeta, *Phys. Rev.* **D68** 024020 (2003), *gr-qc/0303114*; A. Zhidenko, *Class. Quant. Grav.* **21**, 273 (2004), *gr-qc/0307012*; C. Molina, D. Giugno, E. Abdalla e A. Saa, *Phys. Rev.* **D69**, 104013 (2004), *gr-qc/0309079*.
- [72] G. T. Horowitz e V. E. Hubeny, *Phys. Rev.* **D62** 024027 (2000), *hep-th/9909056*; B. Wang, C.-Y. Lin, Elcio Abdalla, *Phys. Lett.* **B481**, 79 (2000), *hep-th/0003295*; B. Wang, C. Molina, e E. Abdalla, *Phys. Rev.* **D63**, 084001 (2001), *hep-th/0005143*; J.-M. Zhu, B. Wang e E. Abdalla, *Phys. Rev.* **D63**, 124004 (2001), *hep-th/0101133*; V. Cardoso e J. P. S. Lemos, *Phys. Rev.* **D64**, 084017 (2001), *gr-qc/0105103*; B. Wang, E. Abdalla e R. B. Mann, *Phys. Rev.* **D65**, 084006 (2002), *hep-th/0107243*; R. Konoplya, *Phys. Rev.* **D66**, 084007 (2002), *gr-qc/0207028*; E. Berti e K.D. Kokkotas, *Phys. Rev.* **D67**, 064020 (2003), *gr-qc/0301052*; S. Musiri e G. Siopsis, *Phys. Lett.* **B563**, 102 (2003), *hep-th/0301081*; Z-X. Shen, B. Wang e R. K. Su, *gr-qc/0307097*; S. Musiri e G. Siopsis, *hep-th/0308196*;
- [73] L. Motl, *An Analytical Computation of Asymptotic Schwarzschild Quasinormal Frequencies*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **6**, 1135 (2003) [*gr-qc/0212096*].
- [74] L. Motl e A. Neitzke, *Asymptotic Black Hole Quasinormal Frequencies*, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 2 (2003) [*hep-th/0301173*].

- [75] Frolov e Novikov, *Black Hole Physics*. Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht (Netherlands) (1998).
- [76] R. M. Wald, *General Relativity*. Chicago Univ. Press, Chicago (USA) (1984).
- [77] R. A. Hulse e J. H. Taylor, *Astrophys. J.* **195**, L51 (1975); J. M. Weisberg e J. H. Taylor, *Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis*, *astro-ph/0407149*.
- [78] C. L. Bennett et al., *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Preliminary Maps and Basic Results*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003) [*astro-ph/0302207*]; WMAP Collaboration (D.N. Spergel et al.), *First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003) [*astro-ph/0302209*].
- [79] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry*. Princeton University Press, Princeton, N. J. (1926).
- [80] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford Univ. Press, New York (1992).
- [81] F. Zerilli, *Tensor Harmonics in Canonical Form for Gravitational Radiation and Other Applications*, *J. Math. Phys.*, **11**, 2203 (1970).
- [82] V. Moncrief, *Gravitational Perturbations of Spherically Symmetric Systems. I. The Exterior Problem*, *Ann. Phys. (New York)*, **88**, 323 (1974).
- [83] J. A. Wheeler, *Geons*, *Phys. Rev.*, **97**, 511 (1955).
- [84] R. Price, *Nonspherical Perturbations of Relativistic Gravitational Collapse, II: Integer-Spin, Zero-Rest-Mass Fields*, *Phys. Rev.*, **D5**, 2439 (1972).
- [85] R. Ruffine, J. Tiomno e C. V. Vishveshwara, *Electromagnetic Fields of a Particle Moving in a Spherically Symmetric Black Hole Background*, *Nuov. Cim. Lett.* **3**, 211 (1972).

- [86] R. Matzner, *Scattering of Massless Scalar Waves by a Schwarzschild Singularity*, *J. Math. Phys.* **9**, 163 (1968).
- [87] R. Price, *Phys. Rev.* **D5**, 2419 (1972).
- [88] F. Zerilli, *Perturbation Analysis for Gravitational and Electromagnetic Radiation in a Reissner-Nordström Geometry*, *Phys. Rev.* **D9**, 860 (1974).
- [89] V. Moncrief, *Odd-Parity Stability of a Reissner-Nordström Black Hole*, *Phys. Rev.* **D9**, 2707 (1974).
- [90] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Cambridge University Press, Cambridge (1983).
- [91] D. R. Brill *et al.*, *Solution of the Scalar Wave Equation in a Kerr Background by Separation of Variables*, *Phys. Rev.* **D5**, 1913 (1972).
- [92] E. Seidel, *Class. Quant. Grav.* **6**, 1057 (1989).
- [93] E. Newman e R. Penrose, *J. Math. Phys.* **3**, 566 (1962).
- [94] E. W. Leaver, *Spectral Decomposition of the Perturbation Response of the Schwarzschild Geometry*, *Phys. Rev.* **D34**, 384 (1986).
- [95] S. Chandrasekhar, *On the Potential Barriers Surrounding the Schwarzschild Black Hole*, em *Spacetime and Geometry: The Alfred Schild Lectures*, pp.120-46, ed. R. A. Matzner e L. C. Shepley. Austin: Univ.of Texas Press, 1982.
- [96] W. Krivan, P. Laguna e P. Papadopoulos, *Dynamics of Scalar Fields in the Background of Rotating Black Holes*, *Phys. Rev.* **D54**, 4728 (1996) [*gr-qc/9606003*]; W. Krivan, P. Laguna, P. Papadopoulos e N. Andersson, *Dynamics of Perturbations of Rotating Black Holes*, *Phys. Rev.* **D56**, 3395 (1997) [*gr-qc/9702048*].
- [97] W. Krivan, P. Laguna e P. Papadopoulos, *Phys. Rev.* **D54**, 4728 (1996); W. Krivan, P. Laguna, P. Papadopoulos e N. Andersson, *Phys. Rev.* **D56**, 3395 (1997); N. Andersson, P. Laguna e P. Papadopoulos, *Phys. Rev.* **D58**, 087503 (1998); W. Krivan

- [108] H. Kodama e A. Ishibashi, *A Master Equation for Gravitational Perturbations of Maximally Symmetric Black Holes in Higher Dimensions*, *Prog. Theor. Phys.* **110**, 701 (2003) [*hep-th/0305147*].
- [109] J. S. F. Chan e R. B. Mann, *Phys. Rev.* **D59**, 064025 (1999); J. S. F. Chan e R. B. Mann, *Phys. Rev.* **D55**, 7546 (1997).
- [110] G. T. Horowitz e V. E. Hubeny, *Phys. Rev.* **D62**, 024027 (2000); G. T. Horowitz, *Class. Quant. Grav.* **17**, 1107 (2000).
- [111] B. Wang, C. Y. Lin e E. Abdalla, *Phys. Lett.* **B481**, 79 (2000); B. Wang, C. Molina e E. Abdalla, *Phys. Rev.* **D63**, 084001 (2001); J. M. Zhu, B. Wang e E. Abdalla, *Phys. Rev.* **D63**, 124004 (2001).
- [112] V. Cardoso e J. P. S. Lemos, *Phys. Rev.* **D63**, 124015 (2001).
- [113] B. Wang, E. Abdalla e R. B. Mann, *Phys. Rev.* **D65**, 084006 (2002).
- [114] J. D. Bekenstein, *Generalized Second Law of Thermodynamics in Black Hole Physics*, *Phys. Rev.* **D9**, 3292 (1974).
- [115] J. M. Bardeen, B. Carter e S. Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [116] R. M. Wald, *The Thermodynamics of Black Holes*, *Living Reviews in Relativity* **4**, 6 (2001) [*gr-qc/gr-qc/9912119*].
- [117] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1996); J. I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1989).
- [118] G. Horowitz, *Space-Time in String Theory*, *gr-qc/0410049*.
- [119] C. M. Hull, *De Sitter Space in Supergravity and M Theory*, *JHEP* **0111 (2001) 012** [*hep-th/0109213*].

- [120] C. M. Hull, *Timelike T-Duality, de Sitter Space, Large N Gauge Theories and Topological Field Theory*, *JHEP* **021**, 9807 (1998) [*hep-th/9806146*].
- [121] C. M. Hull e R. R. Khuri, *Worldvolume Theories, Holography, Duality and Time*, *Nucl. Phys.* **B575**, 231-254 (2000) [*hep-th/9911082*].
- [122] J. D. Brown e M. Henneaux, *Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three-Dimensional Gravity*, *Commun. Math. Phys.* **104**, 207 (1986).
- [123] J. A. Cardy, *Boundary Conformal Field Theory*, *hep-th/0411189*.
- [124] A. Strominger, *Black Hole Entropy from Near-Horizon Microstates*, *JHEP* **009**, 9802 (1998).
- [125] J. A. Cardy, *Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories*, *Nucl. Phys.* **B270**, 186-204 (1986).
- [126] E. Witten, *Quantum Gravity in de Sitter Space*, *hep-th/0106109*.
- [127] M. Spradlin, A. Strominger e A. Volovich, *Les Houches Lectures on de Sitter Space*, *hep-th/0110007*.
- [128] Y Kim, C. Young Oh e N. Park, *Classical Geometry of De Sitter Spacetime: An Introductory Review*, *hep-th/0212326*.
- [129] D. Klemm, *Some Aspects of the de Sitter/CFT Correspondence*, *Nucl. Phys.* **B625**, 295 (2002) [*hep-th/0106247*] (ver também: D. Klemm e L. Vanzo, *Aspects of Quantum Gravity in de Sitter Space*, *JCAP* **0411**, 006 (2004) [*hep-th/0407255*]).
- [130] *Higher Transcendental Functions, V. II (Bateman Manuscript Project)*, ed. by A. Erdélyi (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [131] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic Press (2000).

- [132] B. Allen e T. Jacobson, *Vector Two-Point Functions in Maximally Symmetric Spaces*, *Commun. Math. Phys.* **103**, 669 (1986).
- [133] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, Inc., USA (1972).
- [134] P. Candelas e D. J. Raine, *Phys. Rev.* **D12**, 965 (1975).
- [135] J. D. Bekenstein e V. F. Mukhanov, *Spectroscopy of the quantum black hole*, *Phys. Lett.* **B360**, 7 (1995) [*gr-qc/9505012*].
- [136] J. F. T. Piza, *Introdução à Mecânica Quântica*, EDUSP, São Paulo (2003).
- [137] M. Born, *Atomic Physics* (Blackie, London, 1969), 8th ed.
- [138] D. Christodoulou, *Reversible and Irreversible Transformations in Black Hole Physics*, *Phys. Rev. Lett.* **25**, 1596 (1970);
D. Christodoulou e R. Ruffini, *Reversible Transformations of a Charged Black Hole*, *Phys. Rev.* **D4**, 3552 (1971).
- [139] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D7**, (1973).
- [140] S. Hod, *Best Approximation to a Reversible Process in Black-hole Physics and the Area Spectrum of Spherical Black Holes*, *Phys. Rev.* **D59**, 024014 (1999).
- [141] E. W. Leaver, *Proc. R. Soc. London* **A402**, 285 (1985).
- [142] A. Bachelot e A. Motet-Bachelot, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **59**, 3 (1993).
- [143] V. Cardoso, J. P. S. Lemos e S. Yoshida, *Phys. Rev.* **D69**, 044004 (2004).
- [144] H.-P. Nollert e B. G. Schmidt, *Quasinormal Modes of Schwarzschild Black Holes: Defined and Calculated via Laplace Transformation*, *Phys. Rev.* **D45**, 2617 (1992).
- [145] E. Abdalla, K. H. C. Castello-Branco e A. Lima-Santos, *Area Quantization in Quasi-Extreme Black Holes*, *Mod. Phys. Lett. A* **18**, 1435-1440 (2003) [*gr-qc/0301130*].

- [146] K. H. C. Castello-Branco e E. Abdalla, *Analytic Determination of the Asymptotic Quasi-Normal Mode Spectrum of Small Schwarzschild-de Sitter Black Holes*, *gr-qc/0309090*.
- [147] M. E. Araújo, D. Nicholson e B. F. Schutz, *Class. Quant. Grav.* **10**, 1127 (1993); K. Glampedakis e N. Andersson, *Quick and Dirty Methods for Studying Black-Hole Resonances*, *Class. Quant. Grav.* **20**, 3441-3464 (2003) [*gr-qc/0304030*].
- [148] S. A. Teukolsky e W. H. Press, *Perturbations of a Rotating Black Hole. III - Interaction of the Hole with Gravitational and Electromagnetic Radiation*, *Astrophys. J.* **193**, 443 (1974).
- [149] S. Detweiler, *Black Holes and Gravitational Waves. I - Circular Orbits about a Rotating Hole*, *Astrophys. J.* **225**, 687 (1978).
- [150] K. Glampedakis e N. Andersson, *Late-Time Dynamics of Rapidly Rotating Black Holes*, *Phys. Rev.* **D64**, 104021 (2001).
- [151] A. Neitzke, *Greybody Factors at Large Imaginary Frequencies*, *hep-th/0304080*.
- [152] D. Birmingham, *Asymptotic Quasinormal Frequencies of d-Dimensional Schwarzschild Black Holes*, *Phys. Lett.* **B569**, 199 (2003) [*hep-th/0306004*].
- [153] R. Konoplya e A. Zhidenko, *High Overtones of Schwarzschild-de-Sitter Quasinormal Spectrum*, *JHEP* **037**, 0406 (2004) [*hep-th/0402080*].
- [154] V. Cardoso, J. Natario e R. Schiappa, *Asymptotic Quasinormal Frequencies for Black Holes in Non-Asymptotically Flat Spacetimes*, *J. Math. Phys.*, **45**, 4698 (2004) [*hep-th/0403132*].
- [155] K. H. C. Castello-Branco, R.A. Konoplya e A. Zhidenko, *High Overtones of Dirac Perturbations of a Schwarzschild Black Hole*, *Phys. Rev.* **D71**, 047502 (2005) [*hep-th/0411055*].
- [156] A. Corichi, *Phys. Rev.* **D67**, 087502 (2003).

- [157] D. R. Brill e J. A. Wheeler, *Interaction of Neutrinos and Gravitational Fields*, *Rev. Mod. Phys.* **29**, 465 (1957).
- [158] T. R. Choudhury e T. Padmanabhan, *Quasi Normal Modes in Schwarzschild-deSitter Spacetime: A Simple Derivation of the Level Spacing of the Frequencies*, *Phys. Rev.* **D69**, 064033 (2004).