Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Localização no Espaço de de Sitter em 2+1 Dimensões

Thiago Costa Raszeja

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Alves Barata

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de
Física para a obtenção do título de Mestre em
Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata (IFUSP)
Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IFUSP)
Prof. Dr. André Gustavo Scagliusi Landulfo (UFABC)

São Paulo
2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Raszeja, Thiago Costa

Localização no espaço de de Sitter em 2+1 dimensões. São Paulo, 2015.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física.
Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Alves Barata

Área de Concentração: Física Matemática

Unitermos: 1. Física teórica; 2. Teoria quântica de campo; 3. Física matemática.

USP/IF/SBI-131/2015

Sumário

1	Motivações do Trabalho e Comentários Iniciais	11
2	Preliminares	13
2.1	Espaço de Minkowski	14
2.2	Equações Diferenciais e Funções Especiais I: de polinômios de Legendre associados a funções harmônicas esféricas	14
2.3	Equações Diferenciais e Funções Especiais II: funções de Legendre associadas e suas propriedades	16
3	Introdução	25
3.1	Propriedades Locais do Espaço de de Sitter	25
3.2	Solução da equação de Klein-Gordon em coordenadas do Espaço de de Sitter: Modos de Energia e suas propriedades	26
3.3	Propriedades Analíticas das Soluções da Equação de Klein-Gordon	28
3.4	O Espaço de uma Partícula e a Quantização Canônica	32
3.5	Ação do Grupo de Isometria no Espaço das Soluções de Energia Positiva	33
3.5.1	Operadores de Troca de Paridade e de Inversão Temporal	34
3.5.2	O Subgrupo das Rotações e o Caso Infinitesimal	35
3.6	O Subgrupo dos Boosts e o Caso Infinitesimal	36
4	Localizabilidade: de Newton-Wigner a Espaços de de Sitter	39
4.1	Postulados de Sistemas Localizáveis	39
4.2	Determinação das Transformações Unitárias para o caso 2+1 dimensional	41
4.3	Aspectos heurísticos da ambiguidade de sinais	49
5	Conclusões e Perspectivas	53
6	Apêndice	55

Lista de Figuras

2.1	Cortes das funções $P_v^\sigma(z)$, $Q_v^\sigma(z)$ e $T_v^\sigma(z)$ estendidas analiticamente ao plano complexo para $v, \sigma \notin \mathbb{Z}$. As bordas dos cortes estão inclusas nos mesmos.	19
2.2	Família de abertos C_k , $k \in \mathbb{Z}$ do domínio de T_v^σ utilizados para a sua extensão analítica.	20
2.3	O domínio de $P_v^\sigma(z)$, $z = x + iy$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dividido nos quadrantes I, II, III e IV. A semi-reta $(-\infty, a)$, onde $a = 1$, representa o corte dessa função. f e f' correspondem ao ponto -1 aproximando-se pelos semiplanos superior e inferior respectivamente. Além disso, b e b' representam a assíntota negativa do eixo real, também aproximando-se respectivamente pelos semiplanos superior e inferior. . .	23
2.4	Quadrantes mapeados por $\omega = -\operatorname{sgn}(y)\frac{\pi}{2} + i \operatorname{arcsinh} y $. O semi-eixo $\operatorname{Re}(\omega) = -\pi$ e as semi-retas pontilhadas representam as respectivas semi-retas da figura 2.3 que passam pelos pontos destacados.	24

Resumo

A partir de uma versão análoga ao operador de Newton-Wigner construída para o espaço de de Sitter bidimensional, provamos que a noção de localização de Newton-Wigner também existe para o caso tridimensional. Identificamos o subespaço de uma partícula da teoria, gerado pelos modos positivos de energia da solução da equação de Klein-Gordon em coordenadas esféricas, com uma representação irredutível do grupo de de Sitter. Tais modos são compatíveis com o vácuo de Bunch-Davies e portanto eles satisfazem a condição de Hadamard. Generalizamos para $2 + 1$ dimensões a versão de de Sitter dos postulados de localização de Newton-Wigner, considerando-se ambas as séries principal e complementar. A evolução temporal do operador de Newton-Wigner foi obtida explicitamente, e para a série complementar a evolução é trivial, i.e, não há dinâmica. Também discutimos heurísticamente a ambiguidade de sinais existente quando não exigimos como postulado que as funções de Newton-Wigner sejam proporcionais às suas respectivas soluções na representação das soluções da equação de Klein-Gordon.

Abstract

From an analogue version of the Newton-Wigner operator built for the two-dimensional de Sitter space, we proved that the Newton-Wigner localization notion also exists for the three-dimensional case. We identified the one-particle subspace, generated by positive energy modes solution of the Klein-Gordon equation in spherical coordinates, with a irreducible representation of the de Sitter group. Such methods are compatible with the Bunch-Davies vacuum and thus satisfy the Hadamard condition. We generalized to $2+1$ dimension the de Sitter version of the Newton-Wigner postulates considering both the principal and the complementary series. The time evolution of the Newton-Wigner operator was obtained explicitly and for the complementary series the evolution is trivial, i.e., there is no dynamics. Also we discussed heuristically the existing sign ambiguity when we do not require as postulate that the Newton-Wigner functions must be proportional to their respective solutions in the representation of solutions of the Klein-Gordon equation.

Agradecimentos

“Passion is what gets you through
the hardest times that might
otherwise make strong men weak,
or make you give up.”

Neil deGrasse Tyson

Posso dizer com todas as letras que este trabalho marcou a minha vida. Muitas vezes pensei que não conseguiria concluí-lo, pensei em desistir algumas vezes. Contudo, não foi a dificuldade técnica dele que me fez pensar isso, eu amo meu trabalho e não consigo me ver fazendo outra coisa com a tanto prazer. Passei por uma fase difícil de minha vida pessoal que afetou as demais esferas dela. Minha paixão pelo meu trabalho me influenciou muito para que eu superasse esses pensamentos tolos que me assombravam. Tive mérito pessoal por isso? Sem dúvida. As contas e demonstrações não se fazem sozinhas. Alguém tem de fazê-las. Eu fiz. Contudo, não posso esquecer de agradecer àquelas pessoas que me apoiaram todo esse tempo e que sempre me lembraram da minha paixão para com o entendimento do Universo.

Agradeço primeiramente à minha família que sempre me incentivou a estudar e sempre moveu esforços para tal. Solange, Airton, Fabrício e Jader.

Agradeço ao meu orientador, prof. João, que contribuiu imensamente em minha formação desde a graduação, que confiou a mim este projeto e que teve paciência durante o período crítico que passei.

Agradeço ao Nelson, que me auxiliou no início do mestrado com boas referências de leitura e que me tirou dúvidas.

Agradeço a todos os meus amigos, em especial, Benedito, Isabela, Cibele, Juliana, Gabriela (Gabi), Carolina (Carol), Marcela, Rodrigo (Rod), Lucas (Grassetti), Pedro (Blue), Lissa, Wilson, Pietro (Pi), Thomas (Verde), Rita, Mariana, André (Mattos), André (Vitorelli), Rafael (Campos), Arthur, Gustavo, Meera, Javier, Pablo, Alessandra, Anastasia, Maria Fernanda, Daniel (Kuririn), Bruno (Hideki), Amélia, Cecília e Simone.

Agradeço também aos meus amigos Lucas (Lucaix) por conversas sobre Física-Matemática de madrugada que me ajudaram a pensar; Ricardo, por me ajudar a entender melhor partes do meu trabalho com discussões que me fizeram preencher lousas inteiras; José Fernando por me fazer ter um “insight”; e Kaonan, pelo belo template de LaTeX fornecido para este trabalho.

Por fim, agradeço ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo (IFUSP) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo suporte técnico e financeiro.

Muito obrigado.

Motivações do Trabalho e Comentários Iniciais

“Somewhere, something incredible
is waiting to be known.”

Carl Sagan

Medir posições de partículas sem dúvida é uma das mais intuitivas noções que temos em Mecânica Quântica, noção esta que provém da combinação dos conceitos probabilísticos das interpretações quânticas com as ideias de posição e trajetória conhecidas da Mecânica Clássica, e que constitui um exemplo do que chamamos de observável quântico. Entretanto, no contexto de teorias quânticas relativísticas, medir posições de partículas não possui uma contraparte matemática óbvia e tem sido alvo de estudo há muito tempo e por diversos autores [1, 2, 3, 4, 5]. Assim como em [5], tomamos esse conflito com a intuição de um assunto tão fundamental como nossa motivação principal.

A Teoria Quântica de Campos possui grande importância no estudo de interações entre partículas, em especial no entendimento dos processos de colisão entre estas, e naturalmente exige-se uma interpretação que as inclua. Em experimentos de colisão, geralmente é feita uma análise estatística de posições medidas através de detectores numa região limitada [6, 7, 8, 9] e, tendo em vista que existe um limite clássico que leva sistemas quânticos em sistemas clássicos de partículas [10, 11], o uso de um operador de posição acaba sendo modo natural para se tratar tal limite.

Contudo, há grande interesse em se construir uma teoria unificada para os fenômenos físicos e nesse contexto encontra-se a Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos (TQCETC), uma teoria semiclássica da Gravitação responsável por prodigiosas previsões como, por exemplo, a radiação Hawking [12, 13] e o efeito Unruh [14, 15, 16]. Em se tratando de localizabilidade, resultados da Cosmologia incentivam o estudo desse assunto no contexto de TQCETC. São eles: a atual expansão acelerada do Universo [17, 18] e a existência de uma era inflacionária no Universo primitivo [19, 20, 21]. Tais descobertas indicam a existência de eras no começo do Universo e num futuro distante tais que a geometria universal consista em um trecho de um espaço de de Sitter, e dinâmica de partículas tem sido alvo de estudo nos níveis clássicos e quânticos [22, 23, 24].

Em [1], uma primeira resolução foi apresentada por T. D. Newton e E. P. Wigner para o espaço de Minkowski, sendo posteriormente mais rigorosamente revisada por A. S. Wightman em [2]. Ambos trabalhos consistem na formulação de um conjunto de postulados que constituem exigências de invariância naturais em sistemas de partículas e que, uma vez satisfeitos no problema de uma partícula massiva, definem um único operador de posição. E apesar desses axiomas definirem univocamente um operador de posição, a solução encontrada não é covariante; os trabalhos [3, 4] apresentam uma concepção covariante alternativa para a localização. Há discussões quanto à interpretações desses operadores e a possibilidade de medições em Teoria Quântica de

Campos, sob particulares modelos de interação entre detectores e campos [25, 26].

Estendendo-se a localização para a TQCETC encontramos complicações, uma vez que a teoria geral pode ser formulada sem o conceito de partículas, conforme [27]. Contudo, em situações específicas ainda é possível a formulação de partículas como, por exemplo, no caso de espaços ultraestáticos¹ [28]. E considerando que experimentos de alta energia, em que ainda existe o conceito de partícula, são feitos em espaços ligeiramente curvados, segue que existem partículas em espaços de curvatura pequena. O que não sabemos a respeito desse contexto são os requisitos necessários explícitos pra que elas existam.

Este trabalho consiste no estudo da localização no caso de um campo escalar neutro massivo no espaço de de Sitter tridimensional, sendo uma generalização para uma dimensão adicional do que foi feito em [5]. Através de uma metodologia análoga àquela feita neste trabalho, provamos que é possível estabelecer a noção de partícula para esta teoria, considerando-se a formulação moderna de TQCETC, que encontra-se em [27, 28]. Partículas são difíceis de serem definidas em espaços-tempos curvos gerais principalmente porque estes possuem uma diversidade de representações de Fock inequivalentes, e em geral não existe um critério fisicamente embasado para selecionarmos uma representação especificamente, tornando o conceito de partícula ambíguo. Entretanto, espaços de de Sitter possuem a peculiaridade de possuir um vácuo preferível para a teoria [29], a saber, o vácuo de Bunch-Davies [30]. Sua representação de Fock satisfaz a condição de Hadamard, o que significa que o tensor de energia-momento médio é renormalizável por uma prescrição point-splitting [27]. Além disso, essa representação é invariante pela ação do grupo de de Sitter [29, 31].

Uma importante menção é feita em [5] e repetimos aqui: no caso do espaço plano de Minkowski, o conceito de localização de Newton-Wigner pertence à área da Mecânica Quântica Relativística, não exatamente à Teoria Quântica de Campos, e é implementada no espaço de Hilbert de uma partícula. Todavia em espaços-tempos curvos a escolha do espaço de uma partícula adequado, mesmo que para campos livres, é feita de acordo com o interesse do modelo de campo quântico que se deseja implementar. Por conseguinte, a possibilidade de definir uma noção de localização razoável também é relacionada à escolha de representações para as relações de comutações canônicas, não sendo, portanto, uma questão exclusivamente inerente à Mecânica Quântica.

O capítulo 2 apresenta uma coleção de definições, proposições e teoremas que serão utilizados ao longo do trabalho. No capítulo 3, a equação de Klein-Gordon no espaço de de Sitter para coordenadas esféricas é apresentada e solucionada. Em seguida é feito um estudo quanto as propriedades analíticas das soluções, em que caracterizamos o subespaço de modos positivos de energia, seguido da quantização canônica sob a base constituída por esses modos. Além disso, uma análise sobre a ação do grupo de isometrias no espaço de de Sitter é realizada para os modos positivos, surgindo a classificação das séries principal e complementar. O capítulo 4 apresenta a localização de Newton-Wigner e sua versão para o espaço de de Sitter tridimensional. Por fim, seguem as construções da transformação unitária que leva o espaço de soluções da equação de Klein-Gordon à sua representação de Newton-Wigner e do operador de posição, seguidas de uma discussão sobre uma ambiguidade de sinais encontrada quando não impomos um desses postulados. As conclusões e perspectivas de futuros trabalhos relacionados estão no capítulo 5.

¹Um espaço é dito ser ultraestático se ele for estático e se o campo de Killing for unitário.

Preliminares

“Aos conhecimentos acima mencionados convém acrescentar o de disciplina. Possuir a arte de ordenar as tropas; não ignorar nenhuma das leis da hierarquia e fazer com que sejam cumpridas com rigor; estar ciente dos deveres particulares de cada subalterno; conhecer os diferentes caminhos que levam a um mesmo lugar; não desdenhar o conhecimento exato e detalhado de todos os fatores que podem intervir; e informar-se de cada um deles em particular. Tudo isso somado constitui uma doutrina, cujo conhecimento prático não deve escapar à sagacidade nem à atenção de um general.”

Sun Tzu (traduzido)

Primeiramente vamos estabelecer notações e apresentar algumas definições matemáticas, proposições e teoremas que são essenciais a este trabalho e que possivelmente atrapalhariam a cadência de uma boa leitura se inseridas ao longo do texto. Demais definições serão apresentadas conforme a necessidade.

Na presente dissertação é determinado que

- o uso da notação da soma de Einstein será utilizada apenas quando indicado;
- o símbolo ♠ marca o fim do enunciado de uma definição;
- o símbolo ◇ marca o fim do enunciado de uma proposição;
- o símbolo ♣ marca o fim do enunciado de um teorema;
- denotamos por $\mathbb{N}_0$ o conjunto dos números naturais incluindo o zero;
- denotamos por $i\mathbb{R}$ o eixo dos números imaginários puros;

2.1 Espaço de Minkowski

Definição 1 (Espaço de Minkowski $n+1$ -dimensional). *Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos de Espaço de Minkowski $n+1$ -dimensional M^{n+1} o espaço vetorial $\mathbb{R}^{n+1}$, munido das operações usuais de soma e produto por escalar de seus vetores, bem como do produto interno usual $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$, e também munido da forma bilinear simétrica e não degenerada $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M^{n+1}} : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por*

$$\langle x, y \rangle_{M^{n+1}} := \langle x, \eta y \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \eta_{ab} x^a y^b \quad (2.1)$$

em que a soma de Einstein foi convencionada para índices repetidos. $\eta \in \mathbb{R}$ é dita ser a assinatura ou métrica de M^{n+1} e é definida por¹

$$\eta_{ab} = \begin{cases} 1 & \text{se } a = b = 0 \\ -1 & \text{se } a = b \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.2)$$

que também possui a notação

$$\eta_{ab} = \text{diag}(1, \underbrace{-1, \dots, -1}_{n \text{ vezes}})$$

♠

Fisicamente, as n dimensões são espaciais, enquanto dimensão restante é temporal.

2.2 Equações Diferenciais e Funções Especiais I: de polinômios de Legendre associados a funções harmônicas esféricas

As definições e fatos apresentados nesta seção foram baseados no texto [32], com uma pequena adaptação que envolve uma introdução mais direta dos polinômios de Legendre associados de ordem negativa. Além disso, o teorema 2.2.1 também inclui combinações de resultados dessa mesma referência.

Definição 2 (Equação de Legendre Associada). *Sejam $\nu, \sigma \in \mathbb{C}$. A equação diferencial ordinária*

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\sigma^2}{1 - x^2} \right] y(x) = 0 \quad (2.3)$$

é dita ser a equação de Legendre associada de grau ν e ordem σ

♠

Definição 3 (Polinômios de Legendre Associados²). *Sejam $l \in \mathbb{N}_0$, e $m \in \mathbb{Z}_0$ tal que $-l \leq m$. A função $P_l^m : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$P_l^m(x) := (-1)^m \frac{1}{2^l l!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} ((x^2 - 1)^l) \quad (2.4)$$

¹Textos mais voltados para Cosmologia costumam trocar o sinal da métrica, enquanto a literatura referente a Teorias Quânticas de Campos usam a assinatura definida nesta dissertação. Os resultados não se alteram com a mudança de uma definição para outra, salvo adaptações da definição para o tensor de Riemann.

²Há três comentários a se fazer aqui. O primeiro refere-se ao termo $(-1)^m$, também conhecido como *fase de Condon-Shortley*: alguns textos utilizam-no diretamente na definição das funções harmônicas esféricas, nós escolhemos usá-lo na definição de polinômio de Legendre associado, mudando apenas alguns sinais em suas propriedades. O segundo comentário está relacionado ao domínio destes polinômios: naturalmente eles podem ser definidos em um domínio maior, a saber, o próprio plano complexo. Por fim, lembramos ao leitor que os polinômios referidos tem a mesma origem que as funções de Legendre associadas, a saber a equação de Legendre associada, contudo resolvemos apresentar os resultados separadamente, para seguir a ordem de uso das definições.

é dita ser o polinômio de Legendre associado de grau l e ordem m . Além disso, para $l > 0$ o definimos em graus negativos por

$$P_{-l}^m := P_{l-1}^m. \quad (2.5)$$

Para $m < -l$, definimos P_l^m como sendo a função identicamente nula, tal como ocorre em $m > l$. ♠

Os polinômios associados de Legendre são soluções da equação de Legendre associada (2.3), sendo que o polinômio $P_l^m(\pm x)$ resolve essa equação para o caso $\nu \in \{-l-1, l\}$ e $\sigma = \pm m$. Contudo, no caso dos polinômios associados as soluções $P_l^m(x)$ e $P_l^m(-x)$ são linearmente dependentes, pois

$$P_l^m(-x) = (-1)^{l-m} P_l^m(x) \quad (2.6)$$

para todos $l, m \in \mathbb{Z}$. O próximo resultado consiste em relações entre polinômios de Legendre associados de graus e ordens diferentes e entre estes e suas derivadas.

Teorema 2.2.1 (Relações de Recorrência dos Polinômios de Legendre Associados³). *Sejam $l, m \in \mathbb{Z}$. Os polinômios de Legendre associados obedecem as seguintes relações de recorrência:*

$$(2l+1)xP_l^m(x) = (l+m)P_{l-1}^m(x) + (l-m+1)P_{l+1}^m(x); \quad (2.7)$$

$$\frac{2mx}{\sqrt{1-x^2}}P_l^m(x) = -P_{l+1}^{m+1}(x) - (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x); \quad (2.8)$$

$$(2l+1)\sqrt{1-x^2}P_l^m(x) = -P_{l+1}^{m+1}(x) + P_{l-1}^{m+1}(x); \quad (2.9)$$

$$2\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}P_l^m(x) = (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(x) - P_l^{m+1}(x); \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} P_{l-1}^{m+1}(x) - P_{l+1}^{m+1}(x) &= (l-m+1)(l-m+2)P_{l+1}^{m-1}(x) \\ &\quad - (l+m)(l+m-1)P_{l-1}^{m-1}(x); \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \quad (2.12)$$

♣

Definição 4 (Equação de Laplace Esférica). *A equação diferencial parcial dada por*

$$\frac{1}{r^2}[\partial_r(r^2\partial_r)\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta y(r, \theta, \varphi)) + \frac{1}{\sin^2\theta}\partial_{\varphi\varphi}y(r, \theta, \varphi) + l(l+1)y(r, \theta, \varphi)] = 0 \quad (2.13)$$

é denominada equação de Laplace esférica. ♠

Definição 5 (Funções Harmônicas Esféricas). *Sejam $l \in \mathbb{N}_0$, e $m \in \mathbb{Z}_0$ tal que $-l \leq m \leq l$. A função $Y_l^m : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ definida por*

$$Y_l^m(\theta, \varphi) := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\varphi} \quad (2.14)$$

é denominada função harmônica esférica de grau l e ordem m ou simplesmente harmônico esférico de grau l e ordem m . Por simplicidade, muitas vezes apenas omite-se o grau e o índice, sendo estes implícitos ao contexto. ♠

³As funções de Legendre associadas, que veremos mais adiante, possuem propriedades semelhantes a algumas das aqui listadas. Preferimos expor os resultados separadamente por mera questão de organização.

As funções harmônicas esféricas são soluções da parte angular da equação de Laplace, isto é, soluções da equação (2.13) para r constante não-nulo. O teorema a seguir é uma série de propriedades que serão utilizadas mais adiante neste trabalho.

Teorema 2.2.2 (Propriedades das Funções Harmônicas Esféricas). *Sejam $l, p \in \mathbb{N}_0$ e $m, s \in \mathbb{Z}$ tais que $-l \leq m \leq l$ e $-p \leq s \leq p$, então são válidas as seguintes propriedades*

1. Para todo $\theta \in [0, \pi]$ e para todo $\varphi \in [0, 2\pi]$, temos que

$$Y_l^{m*}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \varphi); \quad (2.15)$$

2. para uma casca esférica C , de raio $r > 0$, segue que

$$\int_C Y_l^{m*}(\theta, \varphi) Y_p^{s*}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{lp} \delta_{ms}; \quad (2.16)$$

3. na esfera unitária S^2 , vale o resultado

$$\int_{S^2} Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) Y_{l_3}^{m_3}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

em que

$$\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

é o símbolo $3j$ de Wigner.

♣

Observe que a segunda propriedade não depende do raio porque as coordenadas das funções harmônicas esféricas dependem apenas do versor da componente radial da esfera, logo a integração é a mesma que aquela realizada sobre a esfera unitária.

2.3 Equações Diferenciais e Funções Especiais II: funções de Legendre associadas e suas propriedades

Nesta seção, a função gama de Euler e suas propriedades tem como base o texto [32]. A função hipergeométrica e a proposição 1 são encontradas em [33]. As definições das funções de Legendre associadas e das funções de Ferrer, assim como todos os fatos acerca dessas funções que não foram aqui demonstrados, tem como referência o texto [34].

Definição 6 (Símbolo de Pochhammer). *Sejam $n \in \mathbb{N}_0$ e $z \in \mathbb{C}$. O símbolo de Pochhammer de z em n é definido por*

$$(a)_n := \begin{cases} \prod_{k=0}^{n-1} (a+k), & \text{se } n \neq 0 \\ 1, & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

♠

Definição 7 (Função Gama de Euler). *A função $\Gamma : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-^* \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.20)$$

é denominada função gama de Euler ou simplesmente função gama.

♠

Teorema 2.3.1 (Propriedades da Função Gamma de Euler). *São válidas as seguintes propriedades para a função gama de Euler:*

1. para todo $z \in \text{Dom } \Gamma$, vale que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad (2.21)$$

2. para todo $z \in \text{Dom } \Gamma$, vale que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi z)}; \quad (2.22)$$

3. o comportamento assintótico de $\Gamma(z)$ para $|z| \rightarrow \infty$ tal que $-\pi < \arg z < \pi$ é

$$\Gamma(z) \simeq \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z}. \quad (2.23)$$

Em particular, para $z = x + iy$, x e y reais, o comportamento assintótico para $|y| \rightarrow \infty$ no fornece

$$|\Gamma(x + iy)| \simeq \sqrt{2\pi} |y|^{x-\frac{1}{2}} e^{-\pi \frac{|y|}{2}}. \quad (2.24)$$

♣

Definição 8 (A Função Hipergeométrica). *Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \notin \mathbb{Z}_-$. A função ${}_2F_1(a, b, c) : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ define por*

$${}_2F_1(a, b, c; z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (2.25)$$

é dita ser a função hipergeométrica.

♠

A proposição a seguir encontra-se demonstrada em [33].

Proposição 1. *Para todos $a, b, c \in \mathbb{C}$, $c \notin \mathbb{Z}_-$, as funções hipergeométricas satisfazem a propriedade*

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(2a, 2b, a+b+\frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)} {}_2F_1\left(a, b, \frac{1}{2}; z^2\right) + \\ &\quad z \frac{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} {}_2F_1\left(a+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z^2\right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

para todo $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ (considerando a extensão analítica).

◇

Definição 9 (Funções de Legendre de Primeiro e Segundo Tipos). *Sejam $\sigma, \nu \in \mathbb{C}$. Definimos as funções de Legendre de primeiro e segundo tipos [34] de grau ν e ordem σ , $P_\nu^\sigma : \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\} \rightarrow \mathbb{C}$ e $Q_\nu^\sigma : \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 2\} \rightarrow \mathbb{C}$, pelas equações (2.27) e (2.28) respectivamente.*

$$P_\nu^\sigma(z) := \frac{(z^2-1)^{\frac{\sigma}{2}} \Gamma(\nu+\sigma+1)}{2^\sigma \Gamma(\sigma+1) \Gamma(\nu-\sigma+1)} {}_2F_1\left(\sigma-\nu, \nu+\sigma+1, \sigma+1; \frac{1-z}{2}\right). \quad (2.27)$$

$$Q_\nu^\sigma(z) := -\frac{\pi}{2} \cot(\mu\pi) \left[P_\nu^\sigma(z) - \frac{\Gamma(\nu+\sigma+1)}{\Gamma(\nu-\sigma+1)} P_\nu^{-\sigma}(z) \right]. \quad (2.28)$$

♠

Definição 10 (Funções de Legendre na Notação de Ferrer). *Sejam $\sigma, \nu \in \mathbb{C}$. As funções $T_\nu^\sigma : \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 2\} \setminus [1, 3) \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por*

$$T_\nu^\sigma(z) := e^{\mp i \frac{\sigma\pi}{2}} P_\nu^\sigma(z), \quad \pm \Im(z) > 0 \quad (2.29)$$

em que $\Im(z)$ é a parte imaginária de z , são denominadas funções de Legendre associadas na notação de Ferrer de grau ν e ordem σ ou simplesmente funções de Ferrer, e ela é expressada explicitamente por

$$T_\nu^\sigma(z) = \frac{(1 - z^2)^{\frac{\sigma}{2}} \Gamma(\nu + \sigma + 1)}{2^\sigma \Gamma(\sigma + 1) \Gamma(\nu - \sigma + 1)} {}_2F_1\left(\sigma - \nu, \nu + \sigma + 1, \sigma + 1; \frac{1 - z}{2}\right). \quad (2.30)$$

♠

Quanto às funções de Legendre, cabem diversas observações que são essenciais ao presente trabalho. Em primeiro lugar, temos que $P_\nu^\sigma(\pm z)$, $Q_\nu^\sigma(\pm z)$ e $T_\nu^\sigma(\pm z)$ são soluções da equação de Legendre (2.3). Contudo, diferente do que ocorre com os polinômios associados, a mudança de sinal no argumento das funções de Ferrer gera uma solução linearmente independente da mesma função sem troca de sinal quando $\sigma - \nu \notin \mathbb{Z}$. Outro fato importante consiste na mudança de índice $\nu \rightarrow -\nu - 1$ nas funções supracitadas inalterar a equação a qual são soluções, entretanto T_ν^σ e $T_{-\nu-1}^\sigma$ são linearmente dependentes.

Além disso, essas funções são analíticas em todo o domínio e portanto, pelo teorema da continuação analítica, possuem extensões analíticas em todo plano exceto na região de seus cortes de ramificação. Para índices não inteiros, as funções $P_\nu^\sigma(z)$ e $Q_\nu^\sigma(z)$ possuem cortes em $(-\infty, 1]$, enquanto $T_\nu^\sigma(z)$ possui cortes em $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$, conforme mostra a figura 2.1.

A partir deste ponto, vamos nos referir às funções de Ferrer como sendo suas respectivas versões estendidas analiticamente. O próximo teorema apresenta algumas relações entre as funções de Ferrer de diferentes índices superiores e entre estas e suas derivadas. Demais relações encontram-se na proposição 2.

Teorema 2.3.2 (Relações de Recorrência das Funções de Ferrer[34]). *Para todos $\nu, \sigma \in \mathbb{C}$, são válidas as seguintes relações de recorrência para as funções de Ferrer:*

$$\frac{2\sigma z}{\sqrt{1 - z^2}} T_\nu^\sigma(z) = (\sigma + \nu)(\nu - \sigma + 1) T_\nu^{\sigma-1}(z) + T_\nu^{\sigma+1}(z); \quad (2.31)$$

$$2\sqrt{1 - z^2} \frac{d}{dz} T_\nu^\sigma(z) = -(\sigma + \nu)(\nu - \sigma + 1) T_\nu^{\sigma-1}(z) + T_\nu^{\sigma+1}(z). \quad (2.32)$$

♣

Proposição 2. *Sejam $\nu, \sigma \in \mathbb{C}$. São válidas as seguintes propriedades para as funções de Ferrer:*

1. se $\nu(\nu + 1) = \frac{3}{4} - M^2$, $M \in \mathbb{R}$, então para todo $z \in i\mathbb{R}$ e para todo $l \in \mathbb{N}_0$ são válidas as identidades

$$[T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z)]^* = -T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(-z) \quad \text{para } M > 1; \quad (2.33)$$

$$[T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z)]^* = T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(-z) \quad \text{para } M < 1; \quad (2.34)$$

$$[\pm i T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z)]^* = \pm i T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(-z) \quad \text{para } M > 1; \quad (2.35)$$

2. para todo z no domínio de $T_\nu^\sigma(z)$ vale

$$(1 - z^2) \left[T_\nu^\sigma(z) \frac{d}{dz} T_\nu^\sigma(-z) - T_\nu^\sigma(-z) \frac{d}{dz} T_\nu^\sigma(z) \right] = \frac{2 \sin[(\nu - \sigma)\pi]}{\sin[(\nu + \sigma)\pi] \Gamma(-\nu - \sigma) \Gamma(\nu - \sigma + 1)}. \quad (2.36)$$

(a) $P_v^\sigma(z)$ e $Q_v^\sigma(z)$. (b) $T_v^\sigma(z)$.

Figura 2.1: Cortes das funções $P_v^\sigma(z)$, $Q_v^\sigma(z)$ e $T_v^\sigma(z)$ estendidas analiticamente ao plano complexo para $\nu, \sigma \notin \mathbb{Z}$. As bordas dos cortes estão inclusas nos mesmos.

◇

Vamos agora provar a primeira propriedade da proposição 2. Segue a demonstração.

Demonstração. A equação $\nu(\nu+1) = \frac{3}{4} - M^2$ no fornece as raízes $\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1 - M^2}$. Da igualdade (2.30) da definição 10, temos

$$T_v^\sigma(z) = \frac{(1-z^2)^{\frac{\sigma}{2}} \Gamma(\nu + \sigma + 1)}{2^\sigma \Gamma(\sigma + 1) \Gamma(\nu - \sigma + 1)} r(z),$$

em que

$$r(z) := {}_2F_1\left(\sigma - \nu, \nu + \sigma + 1, \sigma + 1; \frac{1-z}{2}\right).$$

O j -ésimo termo c_j , da expansão de r em potências de $\frac{1-z}{2}$ em torno de $|1-z| < 2$, é dado por

$$c_j = \frac{(\sigma - \nu)_j (\nu + \sigma + 1)_j}{(\sigma + 1)_j j!} = \frac{\prod_{k=0}^j (\sigma - \nu + k)(\sigma + \nu + 1 + k)}{j! \prod_{k=0}^j (\sigma + 1 + k)}. \quad (2.37)$$

Contanto, temos que $\sigma = l + \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$, e portanto o denominador em (2.37) é real. Por outro lado, o p-ésimo fator do produtório do numerador da mesma expressão pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} (\sigma - \nu + p)(\sigma + \nu + 1 + p) &= (\sigma + p)^2 + (\sigma + p) - \nu(\nu + 1) \\ &= (\sigma + p)^2 + (\sigma + p) - \left(\frac{3}{4} - M^2\right) \in \mathbb{R}; \end{aligned}$$

que implica no fato do numerador de (2.37) também ser real. Uma vez que os coeficientes da aplicação r são todos reais e com o uso da continuação analítica por meio de expansões centradas nos abertos C_k , $k \in \mathbb{Z}$, da figura 2.3, tem-se que $[r(z)]^* = r(z^*)$ para todo z puramente imaginário.

Figura 2.2: Família de abertos C_k , $k \in \mathbb{Z}$ do domínio de T_v^σ utilizados para a sua extensão analítica.

O termo $\frac{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$ por sua vez, é sempre real para $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, pois

$$\frac{(1-z^2)^{\frac{\lambda}{2}}}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)} = \frac{(1+y^2)^{\frac{l}{2} + \frac{1}{4}}}{2^{l+\frac{1}{2}} \Gamma\left(l + \frac{3}{2}\right)}.$$

Resta-nos analisar o fator $G := \frac{\Gamma(\nu+\lambda+1)}{\Gamma(\nu-\lambda+1)}$. Através da propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para funções gama de Euler, e da igualdade $\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1-M^2}$, podemos simplificar G conforme segue:

$$\begin{aligned} G &= \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \prod_{p=0}^{l-1} \left[\left(\nu + l + \frac{1}{2} - p\right) \left(\nu - l + \frac{1}{2} + p\right) \right] = \\ &= \pm \sqrt{1-M^2} \prod_{p=0}^{l-1} [(1-M^2) - (l-p)^2]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

O produtório da última passagem de (2.38) sem dúvida é real. Além disso, para $M < 1$, temos que $\pm\sqrt{1-M^2} \in \mathbb{R}$, resultando em $G \in \mathbb{R}$. Por outro lado, se $M > 1$, segue que $\pm\sqrt{1-M^2} \in i\mathbb{R}$, e portanto $G \in i\mathbb{R}$.

Para o caso $G \in \mathbb{R}$, a série para $T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z)$ é dada por coeficientes reais, então para $M < 1$ e $z \in i\mathbb{R}$ obtemos

$$[T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z)]^* = T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(-z).$$

Já para o caso $G \in i\mathbb{R}$, a série para $T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z)$ é dada por coeficientes puramente imaginários e, portanto, para $M > 1$ e $z \in i\mathbb{R}$, segue que

$$[T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z)]^* = -T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(-z);$$

$$[\pm iT_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z)]^* = \pm iT_\nu^{l+\frac{1}{2}}(-z).$$

□

Proposição 3 (Cálculo de $T_\nu^\sigma(0)$). *Sejam $\nu, \sigma \in \mathbb{C}$. Então,*

$$T_\nu^\sigma(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\sigma} \frac{\Gamma(\nu + \sigma + 1)}{\Gamma(\nu - \sigma + 1) \Gamma(\frac{\sigma-\nu+1}{2}) \Gamma(\frac{\nu+\sigma}{2} + 1)}. \quad (2.39)$$

◇

Demonstração. A bola aberta $|z| < 1$ está contida na bola (também aberta) $|z-1| < 2$ e não está na região dos cortes. Portanto $T_\nu^\sigma(z)$ pode ser escrita conforme (2.30), que possui uma função geométrica. Esta pode ser escrita conforme (2.26). Desse modo, temos

$${}_2F_1\left(2a, 2b, a+b+\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(a+b+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(b+\frac{1}{2}\right)} {}_2F_1\left(a, b, \frac{1}{2}; 0\right). \quad (2.40)$$

Através da substituição

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sigma - \nu}{2}; \\ b &= \frac{\sigma + \nu + 1}{2}; \end{aligned}$$

obtemos

$${}_2F_1\left(\sigma - \nu, \sigma + \nu + 1, \sigma + 1; \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\sigma + 1) \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{\sigma-\nu+1}{2}) \Gamma(\frac{\nu+\sigma}{2} + 1)}, \quad (2.41)$$

resultado esse que após inserido em (2.30) nos fornece

$$T_v^\sigma(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\sigma} \frac{\Gamma(v + \sigma + 1)}{\Gamma(v - \sigma + 1)\Gamma(\frac{\sigma - v + 1}{2})\Gamma(\frac{v + \sigma}{2} + 1)}. \quad (2.42)$$

□

Por fim desta seção, mostraremos os teoremas 2.3.3 e 2.3.4, que se referem respectivamente aos comportamentos assintóticos de $T_v^\sigma(z)$ em altas ordens e de $P_v^\sigma(z)$ em altos valores do módulo da parte imaginária de seu grau.

Teorema 2.3.3. *Seja $v \in \mathbb{C}$. Então para $|\sigma| \rightarrow \infty$ segue que*

$$\Gamma(v - \sigma + 1)T_v^\sigma(z) \simeq \left(\frac{1 - z}{1 + z}\right)^{\sigma/2} \sigma^v, \quad (2.43)$$

para $|z - 1| < 2$ e $0 \leq |\arg \sigma| < \pi + \epsilon$, com $\epsilon > 0$, ϵ pequeno. ♣

Teorema 2.3.4. *Seja $\sigma \in \mathbb{C}$ e seja $v = v_1 + iv_2$, com $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$. Então segue que*

$$P_v^\sigma(z) \simeq \frac{v^{\sigma-1/2}}{\sqrt{2\pi}(z^2 - 1)^{1/4}} \left[-e^{\pm i(\sigma-1/2)\pi} e^{i(v+1/2)\omega} + e^{-i(v+1/2)\omega} \right], \quad (2.44)$$

para $v_2 \rightarrow \pm\infty$, em que $z = \cos \omega$. As folhas de Riemann escolhidas tais que para $z = x + iy$, x e y reais, temos

$$\omega = -\operatorname{sgn}(y)\frac{\pi}{2} + i \operatorname{arcsinh} |y|. \quad (2.45)$$

♣

Dividindo-se o domínio de P_v^σ em quatro quadrantes, conforme mostra a figura 2.3, a transformação (2.45) leva esses quadrantes nas semifaixas da figura 2.3, e aumentando-se indefinidamente o raio da circunferência $|z| = 1$ daquela figura equivale a tomarmos o limite $\Im(\omega) \rightarrow \infty$ na imagem de ω .

Figura 2.3: O domínio de $P_v^\sigma(z)$, $z = x + iy$ e $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dividido nos quadrantes I, II, III e IV. A semi-reta $(-\infty, a)$, onde $a = 1$, representa o corte dessa função. f e f' correspondem ao ponto -1 aproximando-se pelos semiplanos superior e inferior respectivamente. Além disso, b e b' representam a assíntota negativa do eixo real, também aproximando-se respectivamente pelos semiplanos superior e inferior.

Figura 2.4: Quadrantes mapeados por $w = -\text{sgn}(y)\frac{\pi}{2} + i \text{arcsinh } |y|$. O semi-eixo $\text{Re}(w) = -\pi$ e as semi-retas pontilhadas representam as respectivas semi-retas da figura 2.3 que passam pelos pontos destacados.

“Sleep is good, he said, and books are better.”

George R. R. Martin

3.1 Propriedades Locais do Espaço de de Sitter

Nosso principal objetivo nesta seção consiste em apresentar a equação de Klein-Gordon (KG) no espaço de de Sitter. Para isso, faz-se necessário o estudo de suas propriedades locais a partir de um sistema de coordenadas conveniente, que em seguida nos fornecerá seu respectivo operador D'Alembertiano.

Definição 11 (Espaço de de Sitter). *Sejam $\alpha > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Seja a subvariedade lorentziana¹ $dS^n \subset M^{(n+1)+1}$ dada por*

$$dS^n := \{\mathbf{X} \in M^{(n+1)+1} : \mathbf{X}^2 = X^a X^b \eta_{ab} = -\alpha^2\}, \quad (3.1)$$

cuja definição utilizou-se da soma de Einstein para índices repetidos, é dita ser o espaço de de Sitter de $n+1$ dimensões, e α é denominado o raio de Sitter desse conjunto. ♠

Uma vez que a questão da localizabilidade para espaços de de Sitter neste trabalho será feito para o caso 2+1 dimensional, temos que o espaço de Minkowski em questão é o M^4 , de métrica $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Como consideração geométrica, mostraremos agora que dS^3 consiste num hiperbolóide de uma folha, cuja topologia é $S^2 \times \mathbb{R}$, a saber, a topologia produto, nesta ordem, da parte espacial com a parte temporal. Para provar isso, basta mostrarmos que sua métrica é lorentziana². Podemos representar o hiperbolóide através de um sistema de coordenadas espacialmente esféricas e temporalmente hiperbólicas, conforme segue:

$$\begin{aligned} X^0 &= \alpha \sinh(t/\alpha); \\ X^1 &= \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \theta \cos \varphi; \\ X^2 &= \alpha \cosh(t/\alpha) \sin \theta \sin \varphi; \\ X^3 &= \alpha \cosh(t/\alpha) \cos \theta; \end{aligned}$$

em que $t \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$.

¹Isto é, dotada de uma métrica lorentziana.

²A condição do hiperbolóide ser constituído por pontos que pertencem ao lado direito de (3.1) para $n = 3$ é trivialmente satisfeita, pois a equação $X^2 = -\alpha$ no nosso caso é uma equação de hiperbolóide.

Uma vez estabelecido o sistema de coordenadas supracitado, podemos estudar suas propriedades locais. Uma vez que a métrica de M^4 é diagonal, o tensor métrico do hiperbolóide é dado por

$$g_{ab} = \sum_{c=0}^3 \eta_{cc} \frac{\partial X^c}{\partial q^a}, \frac{\partial X^c}{\partial q^b} = g_{ba}, \quad (3.2)$$

em que $(q^0, q^1, q^2) = (t, \theta, \varphi)$. As componentes não-nulas do tensor métrico são

$$g_{00} = 1, g_{11} = -\alpha^2 \cosh^2(t/\alpha), g_{22} = -\alpha^2 \cosh^2(t/\alpha) \sin^2 \theta. \quad (3.3)$$

De fato, trata-se de uma métrica lorentziana e, portanto, o hiperbolóide em questão é o espaço de de Sitter dS^3 . A partir deste ponto, definamos o operador D'Alembertiano.

Definição 12 (Operador D'Alembertiano). *Seja $\Omega \subset M^4$ uma variedade diferenciável e $f \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$. O operador D'Alembertiano $\square : C^2(\Omega, \mathbb{C}) \rightarrow C(\Omega, \mathbb{C})$ é definido por*

$$\square f := \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} \partial^a f) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_a (\sqrt{g} g^{ab} \partial_b f), \quad (3.4)$$

em que g é o módulo do determinante do tensor métrico de Ω . Nesta definição, está subentendida a notação de Einstein. Além disso, $D_g := \sqrt{g}$ é dito ser a densidade de volume de Ω . ♠

Em se tratando de dS^3 , segue que $D_g = \alpha^2 \cosh^2(t/\alpha) \sin \theta$, e portanto o D'Alembertiano no sistema de coordenadas adotado é

$$\square = \partial_{tt} + \frac{2}{\alpha} \tanh(t/\alpha) \partial_t - \frac{1}{\alpha^2 \cosh^2(t/\alpha)} \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\varphi\varphi} \right]. \quad (3.5)$$

Definição 13. *Equação de Klein-Gordon* Seja $\Omega \subset M^4$ uma variedade diferenciável e $\phi \in C^2(\Omega, \mathbb{C})$. A equação de Klein-Gordon é definida por

$$\left(\square + \frac{m_p^2 + \xi R}{\hbar^2} \right) \phi = 0, \quad (3.6)$$

em que m_p é a massa de uma partícula; R , o escalar de curvatura; e ξ , um parâmetro.

No contexto de dS^3 , temos que $R = \frac{6}{\alpha^2}$. Estabelecendo-se $\mu^2 := m_p^2 + \xi R$ e inserindo-se essa notação em (3.6), a equação de KG adquire uma forma mais prática e que será adotada, a saber

$$\left(\square + \frac{\mu^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0. \quad (3.7)$$

3.2 Solução da equação de Klein-Gordon em coordenadas do Espaço de de Sitter: Modos de Energia e suas propriedades

Para resolvermos a equação de KG (3.7), utilizamos do Método de Separação de Variáveis, a fim de encontrar uma base para o espaço produto das soluções temporais com as soluções espaciais, de acordo com a topologia do domínio das soluções: $S^2 \times \mathbb{R}$. Introduzindo-se em (3.7) o Ansatz

$$\phi(t, \theta, \varphi) = \frac{T(x)}{\sqrt[4]{x^2 - 1}} Y(\theta, \varphi), \quad (3.8)$$

em que $x = i \sinh(t/\alpha)$, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$(1 - x^2)T''(x) - 2xT'(x) + \left[\left(\frac{3}{4} - M^2 \right) - \frac{l(l+1) + 1/4}{1 - x^2} \right] T(x) = 0; \quad (3.9a)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y(\theta, \varphi)) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\varphi\varphi} Y(\theta, \varphi) + l(l+1)Y(\theta, \varphi) = 0. \quad (3.9b)$$

em que $M = \frac{\alpha\mu}{\hbar}$. A equação (2.13) é o termo angular da equação de Laplace. Para que a função Y seja derivável de segunda ordem e contínua, condição necessária para que sejam campos quânticos, temos que ela precisa ser periódica na esfera unitária S^2 . Logo, conclui-se que $l \in \mathbb{N}_0$. Assim, as soluções de (2.13) são as funções harmônicas esféricas Y_l^m , expostas na definição 5.

A equação (3.9a), por sua vez, trata-se da equação de Legendre associada, que podemos reescrever conforme mostra (2.3), com $\nu(\nu+1) = \left(\frac{3}{4} - M^2 \right)$ e $\lambda^2 = l(l+1) + \frac{1}{4} = (l + \frac{1}{2})^2$, ou seja,

$$\nu = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{1 - M^2}; \quad (3.10)$$

$$\lambda = \pm \left(l + \frac{1}{2} \right). \quad (3.11)$$

Repara-se que para o caso $M^2 \geq 0$ ($\mu^2 \geq 0$), ν será real se $M \in [-1, 1]$ e $\nu = -\frac{1}{2} \pm i\sqrt{M^2 - 1}$ caso contrário. Já para $M^2 < 0$ ($\mu^2 < 0$), sempre teremos $\nu \in \mathbb{R}$. Neste trabalho consideraremos apenas o caso $M^2 > 0$, em que não há grande acoplamento negativo com o escalar de curvatura.

As soluções de (2.3) são as *funções de Legendre associadas* P_ν^λ e Q_ν^λ , apresentadas na definição 9. Reparemos porém que a variável de tempo deve ser real, que é uma imposição do fato de construirmos dS^2 imerso em M^4 , logo o domínio de T para a variável x é o eixo $i\mathbb{R}$. Conclui-se portanto que o domínio das funções de Legendre não é compatível com o domínio exigido pela nossa estrutura espaço-temporal devido ao corte feito em $(-\infty, 1)$, referente aos pontos de ramificação destas aplicações, pois ele inclui a origem de $\mathbb{C}$. Para resolver esse problema, escolhemos as funções de Ferrer apresentadas na definição 10. Doravante, as funções de Ferrer serão as únicas soluções da parte temporal da equação de KG que permearão este trabalho.

A equação de Legendre (2.3), por ser uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, possui apenas duas soluções independentes. Com base nisso e nas observações feitas a respeito das funções de Ferrer da página 18, temos que o conjunto

$$\{T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z), T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(-z), T_\nu^{-l-\frac{1}{2}}(z), T_\nu^{-l-\frac{1}{2}}(-z)\} \quad (3.12)$$

é linearmente dependente, e, portanto, podemos simplesmente escolher um par de soluções temporais convenientes desse conjunto, a saber

$$T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha)) \text{ e } T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(-i \sinh(t/\alpha)).$$

Portanto as funções que compõem a base de soluções de (3.7) são

$$u_{l,m}(t, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} N(\nu) \frac{T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}} Y_l^m(\theta, \varphi); \quad (3.13)$$

$$v_{l,m}(t, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} N(\nu) \frac{T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(-i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3.14)$$

onde

$$N(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \\ -i & \text{se } x \in \mathbb{C}, \Im(x) > 0 \\ i & \text{caso contrario} \end{cases}$$

é uma fase adotada, e $\gamma_l = \Gamma(-\nu - l - \frac{1}{2})\Gamma(\nu - l + \frac{1}{2})$ é um fator de normalização, ambos escolhidos convenientemente. Também temos que $l, m \in \mathbb{N}_0$ e $-l \leq m \leq l$. As soluções $u_{l,m}$ e $v_{l,m}$ são interpretadas, respectivamente, como sendo os modos de energia positiva e negativa da solução da equação de KG. O que faremos a seguir é construir seus respectivos espaços de soluções, denotados por S^+ e S^- , bem como o espaço geral das soluções da equação de KG, S , todos sob condições de Cauchy suaves.

3.3 Propriedades Analíticas das Soluções da Equação de Klein-Gordon

O espaço S de soluções complexas da equação de KG no espaço de de Sitter sob condições de Cauchy suaves é dado pelos vetores ϕ dados por

$$\phi(t, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [c_{l,m}u_{l,m} + d_{l,m}v_{l,m}], \quad (3.15)$$

com coeficientes $c_{l,m}$ e $d_{l,m}$ de decaimento rápido, isto é, $c_{l,m}$ satisfaz

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |c_{l,m}|(l^2 + m^2)^{j/2} < \infty, \forall j > 0; \quad (3.16)$$

sendo também válido analogamente para $d_{l,m}$. O que faremos nesta seção é provar que essas soluções estão bem definidas para se construir S , e para isso, vamos provar que a série (3.15) converge absoluta e uniformemente para as soluções C^2 da equação de KG com condições iniciais suaves.

Antes disso, observemos que o conjunto de possíveis índices para $c_{l,m}$ é dado por $\{(l, m) \in \mathbb{Z}^2 : l \geq 0 \text{ e } -l \leq m \leq l\} \subset \mathbb{R}^2$. Sabendo-se $\dim \mathbb{R}^2 = 2 < \infty$, e que todas as métricas³ de um espaço de dimensão finita são equivalentes, podemos por conseguinte estudar o problema através da métrica do supremo em $\mathbb{R}^2$ em vez da métrica usual. Pela equivalência entre métricas, existem constantes estritamente positivas R_1 e R_2 tais que

$$\begin{aligned} R_1 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |c_{l,m}|(\max\{|l|, |m|\})^j &\leq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |c_{l,m}|(l^2 + m^2)^{j/2} \\ &\leq R_2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |c_{l,m}|(\max\{|l|, |m|\})^j. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Segue pela finitude do termo central das desigualdades em (3.17) que

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |c_{l,m}|(l^2 + m^2)^{j/2} \leq R_2 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |c_{l,m}|l^j < \infty. \quad (3.18)$$

³No sentido de espaços métricos.

Assim sendo, a dependência do decaimento dos coeficientes é escrito de forma mais simples, além de ser facilmente comparável ao caso do espaço de de Sitter bidimensional feito em [5].

Para o caso envolvendo apenas os termos $c_{l,m}$, consideremos a expansão em harmônicos esféricos com t fixo

$$H(t, \theta, \varphi) := \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l p_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (3.19)$$

onde

$$p_{l,m} := c_{l,m} \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} N(\nu) \frac{T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}}.$$

O comportamento assintótico dos coeficientes $p_{l,m}$ é obtido através da equação (2.43), do teorema 2.3.3, resultado este que nos fornece

$$\left| \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} N(\nu) T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z) \right| \simeq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \left| \frac{\Gamma(-\nu - l + \frac{1}{2})}{\Gamma(\nu - l + \frac{1}{2})} \right|^{\frac{1}{2}} \left| \Gamma(\nu - l + \frac{1}{2}) T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(z) \right| \simeq \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} l^{-\frac{1}{2} \pm \chi}, \quad (3.20)$$

onde $0 \leq \chi \leq 1$, e então,

$$|p_{l,m}| = |c_{l,m}| \frac{l^{-\frac{1}{2} \pm \chi}}{\sqrt{2\alpha \cosh(t/\alpha)}}, \quad (3.21)$$

e, portanto, pelo decaimento rápido de $c_{l,m}$, segue a convergência absoluta e uniforme de (3.19) em dS^3 , e o argumento é análogo para $d_{l,m}$. Além disso, todos os termos da série (3.15) são contínuos, o que implica, pela convergência uniforme, que $\phi(t, \theta, \varphi)$ é uma função contínua. Analisemos suas derivadas também, termos do tipo $\partial_\varphi^n \partial_\theta^q \partial_t^2 \phi$, $\{m, q\} \subset \mathbb{N}_0$. Derivadas angulares com relação a φ de ordem n apenas inserem um fator $(im)^n$ nos coeficientes, preservando a continuidade após a derivação. Derivadas com relação a θ agem apenas nos polinômios associados de Legendre da seguinte maneira:

$$\frac{\partial P_l^m}{\partial \theta}(\cos \theta) = \frac{1}{2} [P_l^{m+1}(\cos \theta) - (l+m)(l-m+1)P_l^{m-1}(\cos \theta)]. \quad (3.22)$$

Para derivadas de ordem q nessa variável temos ainda séries em polinômios associados de Legendre, com no máximo fatores polinomiais em l e m , e logo o resultado também será convergente. Por fim, as derivadas em t em primeira e segunda ordens afetam apenas os fatores $T(t) = \frac{T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}}$. Utilizando-se o fato de a equação diferencial que estes fatores satisfazem ser⁴

$$(1-x^2) \frac{d^2 T}{dx^2}(x) - 3x \frac{dT}{dx}(x) - \left[M^2 + \frac{l(l+1/2)}{1-x^2} \right] T(x) = 0, \quad (3.23)$$

com $x = i \sinh(t/\alpha)$, e também fazendo uso das relações de recorrência das funções de Ferrer do teorema 2.3.2, segue no limite assintótico de altos valores de l que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}} \right) \simeq \frac{il^2 T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{2\alpha \sqrt{\cosh(t/\alpha)}}, \quad (3.24)$$

⁴A equação diferencial (3.23) é obtida com o uso do Ansatz (3.8) sem o fator $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}} \right) \simeq -\frac{l^2}{\alpha^2} \left[i \frac{\sinh(t/\alpha)}{\cosh(t/\alpha)} + \frac{1}{\cosh^2(t/\alpha)} \right] \frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}}. \quad (3.25)$$

Nota-se, portanto, que derivadas temporais de primeira e segunda ordem apenas acrescentam coeficientes polinomiais em l , e o rápido decaimento de $c_{l,m}$ garante a convergência da primeira e segunda derivadas temporais em (3.19). Os argumentos aqui apresentados são os mesmos utilizados para o caso $d_{l,m}$. Portanto, $\phi(t, \theta, \phi)$ é uma função do tipo C^2 e, por meio de superposições de soluções da equação de KG, também é uma solução desta equação. Além disso, para tempo fixo segue que ϕ é uma função suave na casca esférica, uma vez que um número qualquer de derivadas angulares, tanto azimutais quanto polares, podem ser aplicadas em (3.19), e graças ao resultado (3.25) isso também vale para a primeira derivada temporal de ϕ . Portanto doravante consideraremos apenas os dados de Cauchy suaves $\phi(0, \theta, \varphi)$ e $\dot{\phi}(0, \theta, \varphi)$. Lembremos por último que toda função na casca esférica possui uma expansão de Laplace com coeficientes de decaimento rápido, então S contém todas as soluções com coeficientes iniciais suaves.

O espaço S possui uma forma sesquilinear hermitiana utilizada em TQC, a saber

$$\langle f, g \rangle = i[a(t)]^2 \int_{S_t} d\varphi d\theta [(f^* \overrightarrow{\partial}_t g) \sin \theta], \quad (3.26)$$

em que S_t é qualquer fatia espacial de tempo constante t , $a(t) := \alpha \cosh(t/\alpha)$ é o raio da esfera S_t e

$$f \overrightarrow{\partial}_t g := f \frac{\partial g}{\partial t} - g \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (3.27)$$

Observe que essa forma tem a propriedade $\langle f^*, g^* \rangle = -\langle f, g \rangle$. A proposição 4 nos garante ser possível separarmos as S em subespaços cuja interpretação física corresponde aos estados de energia positiva S^+ e de energia negativa S^- .

Proposição 4 (Relações de Ortonormalidade em S). *Considere os espaço de soluções S da equação de KG munido da forma sesquilinear (3.26), de base dada pelas funções (3.13) e (3.14). Então,*

$$\langle u_{l,m}, u_{p,s} \rangle = \delta_{lp} \delta_{ms}, \quad \langle v_{l,m}, v_{p,s} \rangle = -\delta_{lp} \delta_{ms} \quad e \quad \langle u_{l,m}, v_{p,s} \rangle = 0 \quad (3.28)$$

para todo $M \neq 1$.⁵

Demonstração. Definamos $z := i \sinh(t/\alpha)$. Desse modo, temos que $\partial_t = \frac{i}{\alpha} \sqrt{1-z^2} \partial_z$. Além disso, a integral em S_t envolve apenas os harmônicos esféricos. Pela relação de ortogonalidade (2.16) do teorema 2.2.2 e evocando a identidade $a(t) = \alpha \sqrt{1-z^2}$, podemos escrever $\langle u_{l,m}, u_{p,s} \rangle$ como

$$\langle u_{l,m}, u_{p,s} \rangle = -(1-z^2)^{\frac{3}{2}} \frac{|\gamma_l|}{2} \left[\left(\frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(z)}{\sqrt[4]{1-z^2}} \right)^* \overrightarrow{\partial}_z \left(\frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(z)}{\sqrt[4]{1-z^2}} \right) \right] \delta_{lp} \delta_{ms},$$

resultado este que analisaremos para cada caso. Para $M < 1$, vale a identidade $[T_v^{l+\frac{1}{2}}(z)]^* = T_v^{l+\frac{1}{2}}(-z)$, demonstrada na proposição 2, que nos leva a

$$\langle u_{l,m}, u_{p,s} \rangle = -(1-z^2)^{\frac{3}{2}} \frac{|\gamma_l|}{2} \left[T_v^{l+\frac{1}{2}}(-z) \overrightarrow{\partial}_z T_v^{l+\frac{1}{2}}(z) \right]. \quad (3.29)$$

Evocando-se a equação (2.36), também da proposição 2, obtemos

⁵O caso $M = 1$ não será tratado neste trabalho.

$$\langle u_{l,m}, u_{p,s} \rangle = -\frac{|\gamma_l|}{\gamma_l} \delta_{lp} \delta_{ms}. \quad (3.30)$$

Por outro lado, para $M > 1$, vale a identidade $[T_v^{l+\frac{1}{2}}(z)]^* = -T_v^{l+\frac{1}{2}}(-z)$, também demonstrada na proposição 2, o que gera simplesmente a inclusão de um fator -1 no resultado (3.29), e então segue que

$$\langle u_{l,m}, u_{p,s} \rangle = \frac{|\gamma_l|}{\gamma_l} \delta_{lp} \delta_{ms}. \quad (3.31)$$

Cabe então analisarmos o sinal de $\gamma_l = (-\nu - l - \frac{1}{2})$ para cada caso. Por meio da propriedade $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ obtemos

$$\frac{1}{\gamma_l} = \frac{\prod_{p=0}^l \left[\left(-\nu - p - \frac{1}{2} \right) \left(\nu - p + \frac{1}{2} \right) \right]}{\Gamma \left(-\nu - \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(\nu + \frac{1}{2} \right)} = \frac{1}{\gamma_0} \underbrace{\prod_{p=1}^l (|1 - M^2| + p^2)}_{>0}. \quad (3.32)$$

Logo, o sinal de γ_l depende exclusivamente de γ_0 , então

$$\frac{1}{\gamma_0} = \frac{1}{\Gamma \left(-\nu - \frac{1}{2} \right) \Gamma \left(\nu + \frac{1}{2} \right)} = -\frac{\nu + \frac{1}{2}}{\Gamma \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \Gamma \left(\frac{1}{2} + \nu \right)}.$$

Pela propriedade (2.22) do teorema 2.3.1, segue que

$$\frac{1}{\gamma_0} = -\left(\nu + \frac{1}{2} \right) \frac{\cos(\nu\pi)}{\pi}. \quad (3.33)$$

Para $M < 1$, necessariamente temos $\nu \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, cujas implicações são

$$\nu \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right) \Rightarrow \cos(\nu\pi) < 0 \quad \text{e} \quad -\left(\nu + \frac{1}{2} \right) > 0,$$

$$\nu \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \cos(\nu\pi) > 0 \quad \text{e} \quad -\left(\nu + \frac{1}{2} \right) < 0,$$

e logo segue que $\gamma_l < 0$ para $M < 1$, por conseguinte temos

$$\langle u_{l,m}, u_{p,s} \rangle = \delta_{lp} \delta_{ms}, \quad M < 1. \quad (3.34)$$

Para $M > 1$, definamos $\lambda := \pm \sqrt{M^2 - 1}$. Então, (3.33) fica

$$\frac{1}{\gamma_0} = \frac{\lambda}{\pi} \sinh(\lambda\pi), \quad (3.35)$$

sendo uma função par positiva em relação a λ , portanto obtemos $\gamma_l > 0$ e segue que

$$\langle u_{l,m}, u_{p,s} \rangle = \delta_{lp} \delta_{ms}, \quad M > 1. \quad (3.36)$$

Por fim, a relação $\langle u_{l,m}, v_{p,s} \rangle = 0$ trivialmente é obtida pela propriedade $\langle f^*, g^* \rangle = -\langle f, g \rangle$ combinada com fato de que $v_{l,m}^* = u_{l,-m}$. Para $m \neq 0$, o resultado provém da relação de ortogonalidade entre as funções harmônicas esféricas, enquanto para $m = 0$ o mesmo resultado provem do cancelamento do termo temporal. $\square$

3.4 O Espaço de uma Partícula e a Quantização Canônica

Definiremos o operador de Newton-Wigner no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ gerado pelo completamento de S^+ . Tal espaço é denominado *espaço de uma partícula* e tem como produto interno a forma sesquilinear (3.26). Esta forma, quando restrita a S^+ , torna-se positiva, agindo como um produto interno nesse caso.

Os vetores $\phi \in S^+$ são superposições dos modos de energia positiva, podendo ser representados sob a escrita

$$\phi(t, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,m} u_{l,m}, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |\phi_{l,m}|^2 = 1, \quad \phi_{l,m} \in \mathbb{C}. \quad (3.37)$$

E assim, o produto escalar nesse espaço, para dois vetores $\phi, \psi \in S^+$ quaisquer, resume-se em

$$\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,m}^* \psi_{l,m}. \quad (3.38)$$

Concebe-se neste trabalho que o *subespaço de uma partícula*, que descreve a dinâmica de uma única partícula no espaço de de Sitter, é utilizado conforme a interpretação física usual, tal como feito em [5]: $\phi(t, \theta, \varphi)$ é a representação no espaço-tempo da função de onda relacionada à partícula. Uma vez que o conceito de partícula não é bem definido em TQCES, problemas são esperados ao adaptarmos tal visão. Há, no entanto, situações em que essa perspectiva é válida, de tal forma que há claramente um comportamento de partículas nesses sistemas físicos. Como suporte ao uso dessa interpretação física, argumenta-se que experimentos de partículas são realizados num espaço ligeiramente curvo, conforme mencionado em [35].

A quantização no espaço de de Sitter é análoga àquela feita no espaço de Minkowski, feita a partir dos modos de energia positivos [36]: a partir do espaço de Hilbert do estado de uma partícula, define-se o espaço de Fock para bósons, a saber,

$$\mathcal{F} := \mathbb{C} \oplus_{n=1}^{\infty} (\mathcal{H}^{\otimes n})_s, \quad (3.39)$$

em que o índice s denota a simetrização dos produtos tensoriais, necessária devido ao fato de tratarmos de bósons.

A Lagrangiana $\mathcal{L}$ da equação de KG para um campo ϕ é dada por

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} (\partial_{\sigma} \phi) (\partial_{\tau} \phi) - \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\hbar^2} \phi^2 \quad (3.40)$$

sendo $\mu = m_p^2 + \xi R$ tal como em (3.7) e com a convenção da soma de Einstein. O momento conjugado do campo ϕ , denotado por π_{ϕ} , é dado por

$$\pi_{\phi} := \frac{\partial(D_g \mathcal{L})}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi, \quad (3.41)$$

em que D_g é a densidade volumétrica, tal como na definição 12.

Desse modo, o campo escalar massivo e neutro quantizado é dado por (3.42).

$$\hat{\phi}(t, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (a_{l,m} u_{l,m} + a_{l,m}^* u_{l,m}^*). \quad (3.42)$$

onde $u_{l,m}$ são os modos de energia positiva, enquanto $a_{l,m}$ e $a_{l,m}^*$ são respectivamente os operadores de aniquilação e criação de partícula no estado $u_{l,m}$, que obedecem as relações de comutação

$$[a_{lm}, a_{ps}^*] = \delta_{lp} \delta_{ms} \text{ e } [a_{lm}, a_{ps}] = [a_{lm}^*, a_{ps}^*] = 0. \quad (3.43)$$

Nessa construção, o vácuo é definido como sendo o estado o qual é eliminado por todos os operadores de aniquilação, e para criarmos estados de muitas partículas, basta aplicarmos os operadores de criação no estado de vácuo muitas vezes.

Além disso, atentemos ao fato de que a representação de campos livres em espaços curvos não é unívocamente determinada, de tal modo que poderíamos escolher uma decomposição diferente de modos positivos e consequentemente gerarmos uma outra representação da álgebra das relações canônicas de comutação que não seja equivalente à aqui escolhida e, por consequência, podendo ser necessário escolher outro estado de vácuo.

A escolha de modos positivos aqui feita corresponde à escolha do vácuo de Bunch-Davies. Baseamo-nos na escolha de base de $\mathcal{H}$ estabelecida para o espaço de de Sitter bidimensional em [5], em que o termo espacial dos modos positivos é a base de Fourier, respeitando uma simetria esférica. No trabalho supracitado, a base escolhida corresponde à representação cujo vácuo é o de Bunch-Davies, cuja demonstração provém do cálculo explícito da função de dois pontos, em que o resultado trata-se exatamente daquele obtido nos trabalhos de Bunch e Davies [30]. Uma vez que as funções harmônicas esféricas são a versão generalizada da expansão em Fourier, é razoável esperarmos semelhante resultado de escolha de vácuo para nosso trabalho. Como argumento adicional, a solução temporal dos modos positivos também é similar àquela encontrada em [5]. A função de dois pontos G para o campo quantizado no espaço de de Sitter tridimensional é dada por

$$G := \langle V | \hat{\phi}(t, \theta, \varphi), \hat{\phi}(t', 0, 0) | V \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l u_{l,m}(t, \theta, \varphi) u_{l,m}(t', 0, 0)^*, \quad (3.44)$$

onde $|V\rangle$ é o estado de vácuo.

3.5 Ação do Grupo de Isometria no Espaço das Soluções de Energia Positiva

Até o momento, solucionamos a equação de Klein-Gordon para um espaço de Sitter tridimensional obtendo-se uma base de soluções que separa o próprio espaço de soluções S em uma soma direta de dois subespaços, cuja possível interpretação se deve ao sinal em (3.28) dos modos energéticos⁶. Em seguida, determinamos a quantização de um campo associado ao espaço de energias positivas S^+ é invariante sob a ação do grupo de Lorentz quadridimensional. A consequência imediata desse resultado é a independência de coordenadas do espaço em questão, além disso poderemos interpretar o estado de uma partícula H como sendo uma representação irredutível do grupo de de Sitter. Aproveitaremos para entender como o grupo de Lorentz age nos modos energéticos.

Primeiramente vamos apresentar algumas definições e resultados úteis com relação ao grupo de Lorentz e suas propriedades. Assumiremos conhecidas pelo leitor as definições de grupo e de ação de grupo.

Definição 14 (Grupo de Lorentz). *Seja $Mat(\mathbb{R}, 4)$ o conjunto das matrizes quadradas 4×4 e considere o espaço vetorial usual de $\mathbb{R}^4$. O grupo de Lorentz é definido pelo conjunto*

$$\mathcal{L} := \{L \in Mat(\mathbb{R}, 4) : \eta L^T \eta L = \mathbb{1}\},$$

onde η é a assinatura, de coordenadas definidas em (2.2). O produto entre as matrizes aqui é o produto usual.

⁶Neste trabalho, não temos um campo de Killing do tipo tempo. A nomenclatura, no entanto, provém de uma analogia ao caso do espaço plano de Minkowski, na TQC.

Esse grupo possui uma ação à esquerda bem conhecida no espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ usual, a saber o produto da matriz pelo vetor coluna. Contudo, o mesmo grupo define também uma ação à esquerda no espaço de funções complexas definidas em $\mathbb{C}$, dada por

$$(Lf)(x) := f(L^{-1}x), L \in \mathcal{L}, \forall x \in \mathbb{R}^4. \quad (3.45)$$

Esta ação relaciona transformações ativas com passivas em TQC. Outro fato importante sobre o grupo de Lorentz diz respeito à sua composição: ele pode ser dividido em quatro componentes conexas disjuntas. São elas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^\uparrow &:= \{L \in \mathcal{L} : \det(L) = 1 \text{ e } \text{sgn}(L_{00}) = 1\}, \\ \mathcal{L}_-^\uparrow &:= \{L \in \mathcal{L} : \det(L) = -1 \text{ e } \text{sgn}(L_{00}) = 1\}, \\ \mathcal{L}_+^\downarrow &:= \{L \in \mathcal{L} : \det(L) = 1 \text{ e } \text{sgn}(L_{00}) = -1\}, \\ \mathcal{L}_-^\downarrow &:= \{L \in \mathcal{L} : \det(L) = -1 \text{ e } \text{sgn}(L_{00}) = -1\}. \end{aligned}$$

O primeiro é denominado *grupo de Lorentz próprio ortócrono* e é o único dos quatro subconjuntos supracitados que é um subgrupo de $\mathcal{L}$. Além disso qualquer elemento de $\mathcal{L}$ pode ser escrito como uma composição formada pelo produto de um elemento de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ com matrizes de troca de paridade e reversão temporal. Assim sendo, basta saber como seus elementos agem como representações na base de S^+ para entendermos como todo o grupo de Lorentz atua nesse espaço. Todavia somente dois subgrupos de $\mathcal{L}_+^\uparrow$ nos interessam o estudo, a saber o dos *boosts de Lorentz* e o das *rotações*, estudo este que faremos a partir de seus geradores. As rotações, conforme o nome diz, se referem a mudanças de referencial relativos a giros em torno de algum eixo; já o dos boosts, a mudanças de referenciais inerciais.

3.5.1 Operadores de Troca de Paridade e de Inversão Temporal

Entendamos primeiramente as simetrias discretas de S^+ .

Definição 15 (Operadores de Troca de Paridade e de Inversão Temporal). *Sejam $P_a \in \mathcal{L}$, $a = 1, 2, 3$ matrizes definidas por*

$$(P_a)_{\tau\sigma} := \begin{cases} \delta_{\tau\sigma}, & \text{se } \tau \neq a \\ -\delta_{\tau\sigma}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.46)$$

em que $\delta_{\tau\sigma}$ é a função delta de Kronecker. Então P_a é dita ser o operador de inversão de paridade com relação ao eixo X^a . Além disso, $P := P_1 P_2 P_3$ é dita ser o operador de inversão de paridade (total).

Seja agora $T' \in \mathcal{L}$ definido por

$$(T')_{\tau\sigma} := \begin{cases} -\delta_{\tau\sigma}, & \text{se } \tau = 0 \\ \delta_{\tau\sigma}, & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (3.47)$$

e T a representação antiunitária de T' como ação de grupo em S^+ , definida por

$$(Tf)(x) := [f(T'^{-1}x)]^*.$$

Dizemos que T é o operador de inversão temporal. ♠

Cabe aqui uma observação importante: T foi assim construído com o intuito de sua imagem permanecer em S^+ , uma vez que para uma função de onda ϕ qualquer desse espaço, a simples

troca de sinal do tempo levaria a uma combinação linear exclusivamente composta de elementos de S^- , ou seja, $(T'\phi) \in S^-, \forall \phi \in S^+$.

Os operadores de troca de paridade agem direto e exclusivamente nos harmônicos esféricos das funções da base de S^+ , logo obtemos

$$P_1 u_{l,m}(t, \theta, \varphi) = u_{l,m}(t, \theta, \pi - \varphi) = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} u_{l,-m}(t, \theta, \varphi), \quad (3.48)$$

$$P_2 u_{l,m}(t, \theta, \varphi) = u_{l,m}(t, \theta, -\varphi) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} u_{l,-m}(t, \theta, \varphi), \quad (3.49)$$

$$P_3 u_{l,m}(t, \theta, \varphi) = u_{l,m}(t, \pi - \theta, \varphi) = (-1)^{l-|m|} u_{l,m}(t, \theta, \varphi), \quad (3.50)$$

$$P u_{l,m}(t, \theta, \varphi) = (-1)^l u_{l,m}(t, \theta, \varphi). \quad (3.51)$$

Por outro lado, T age tanto nos fatores temporais quanto nos harmônicos esféricos, contudo sabemos que $[N(\nu)T_\nu^\mu(ix)]^* = N(\nu)T_\nu^\mu(-ix)$, $\forall x, \mu \in \mathbb{R}$ e que $[Y_l^m(\theta, \varphi)]^* = (-1)^m Y_l^m(\theta, \varphi)$, logo

$$T u_{l,m}(t, \theta, \varphi) = [u_{l,m}(-t, \theta, \varphi)]^* = (-1)^m u_{l,m}(t, \theta, \varphi). \quad (3.52)$$

3.5.2 O Subgrupo das Rotações e o Caso Infinitesimal

Doravante denotaremos por SRot o grupo das rotações espaciais no espaço de Minkowski, e por $U_{ab}(\psi)$, $a, b = 1, 2, 3$; $a \neq b$, a matriz de rotação que gira os eixos espaciais a e b de um ângulo ψ no sentido anti-horário. Temos ao todo três matrizes, cada uma sendo o elemento geral de um dos três possíveis subgrupos uniparamétricos de SRot. São elas

$$U_{23}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix},$$

$$U_{31}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{pmatrix}$$

$$U_{12}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No caso infinitesimal, temos que $\cos \psi \simeq 1$ e $\sin \psi \simeq \psi$. Tomando-se como exemplo o caso U_{23} , a ação numa função qualquer se dá pela expansão de Taylor de primeira ordem em torno do ponto antes da rotação, em outras palavras

$$(U_{23}(\psi)f)(x) = f(U_{23}(-\psi)x) \simeq f(x) + \left(X^3 \frac{\partial}{\partial X^2} - X^2 \frac{\partial}{\partial X^3} \right) (f)(x). \quad (3.53)$$

Logo, o gerador das rotações infinitesimais em torno do eixo X^1 , N_{23} , é dado por

$$N_{23} = X^3 \frac{\partial}{\partial X^2} - X^2 \frac{\partial}{\partial X^3}. \quad (3.54)$$

O cálculo para as demais rotações segue o mesmo procedimento. A forma geral dos operadores para os três subgrupos de SRot aqui estudados é

$$N_{ij} = - \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} X^i \frac{\partial}{\partial X^j}, \quad (3.55)$$

em que ϵ_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita. Podemos escrever esses operadores em termos de θ e φ , dessa maneira sendo possível restringir sua ação apenas nos harmônicos esféricos presentes nos vetores da base de soluções. Desse modo, os operadores de rotação infinitesimal são descritos por

$$N_{12} = -\frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.56)$$

$$N_{23} = -\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.57)$$

$$N_{31} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (3.58)$$

$$(3.59)$$

Aplicando-os nos modos normais de S^+ , obtemos⁷

$$N_{12}u_{l,m} = -imu_{l,m}, \quad (3.60a)$$

$$N_{23}u_{l,m} = \frac{i}{2}u_{l,m+1} + \frac{i}{2}[l(l+1) - m(m-1)]u_{l,m-1}, \quad (3.60b)$$

$$N_{31}u_{l,m} = \frac{1}{2}u_{l,m+1} - \frac{1}{2}[l(l+1) - m(m-1)]u_{l,m-1}. \quad (3.60c)$$

3.6 O Subgrupo dos Boosts e o Caso Infinitesimal

Para cada eixo espacial existe um subgrupo uniparamétrico de $\mathcal{L}$ relacionado ao que localmente equivale a uma mudança de referencial inercial em Relatividade Restrita. Para um boost no eixo X^k , $k = 1, 2, 3$, usaremos a notação N_{0k} . Desse modo, temos que

$$U_{01}(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & -v\gamma(v) & 0 & 0 \\ -v\gamma(v) & \gamma(v) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_{02}(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & 0 & -v\gamma(v) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -v\gamma(v) & 0 & \gamma(v) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U_{03}(v) = \begin{pmatrix} \gamma(v) & 0 & 0 & -v\gamma(v) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -v\gamma(v) & 0 & 0 & \gamma(v) \end{pmatrix}.$$

em que $\gamma(v) := (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$. No caso infinitesimal é válida a aproximação $\gamma(v) \simeq 1$, e através do mesmo procedimento realizado para se obter os operadores para rotações infinitesimais, também conseguimos uma fórmula geral para os operadores dos boosts infinitesimais, N_{0k} , a saber

⁷A demonstração de como os operadores de rotação infinitesimal agem nos elementos da base de modos positivos é feito através do uso das relações de recorrência dos polinômios de Legendre associados, que foram apresentadas no teorema 2.2.1.

$$N_{0k} = X^k \frac{\partial}{\partial X^0} + X^0 \frac{\partial}{\partial X^k}, \quad k = 1, 2, 3; \quad (3.61)$$

e a ação desses operadores na base de modos positivos é dada por⁸

$$N_{01}u_{l,m} = i \frac{\sqrt{\left(-\nu - l - \frac{3}{2}\right)\left(\nu - l - \frac{1}{2}\right)}}{2(2l+1)} [(l-m+1)(l-m+2)u_{l+1,m-1} - u_{l+1,m+1}] \\ - i \frac{\sqrt{\left(-\nu - l - \frac{1}{2}\right)\left(\nu - l + \frac{1}{2}\right)}}{2(2l+1)} [(l+m)(l+m-1)u_{l-1,m-1} - u_{l-1,m+1}], \quad (3.62a)$$

$$N_{02}u_{l,m} = - \frac{\sqrt{\left(-\nu - l - \frac{3}{2}\right)\left(\nu - l - \frac{1}{2}\right)}}{2(2l+1)} [(l-m+1)(l-m+2)u_{l+1,m-1} + u_{l+1,m+1}] \\ + \frac{\sqrt{\left(-\nu - l - \frac{1}{2}\right)\left(\nu - l + \frac{1}{2}\right)}}{2(2l+1)} [(l+m)(l+m-1)u_{l-1,m-1} + u_{l-1,m+1}], \quad (3.62b)$$

$$N_{03}u_{l,m} = i \frac{\sqrt{\left(-\nu - l - \frac{3}{2}\right)\left(\nu - l - \frac{1}{2}\right)}}{2l+1} (l-m+1)u_{l+1,m} \\ + i \frac{\sqrt{\left(-\nu - l - \frac{1}{2}\right)\left(\nu - l + \frac{1}{2}\right)}}{2l+1} (l+m)u_{l-1,m}. \quad (3.62c)$$

A forma como os operadores de rotações e boosts infinitesimais se apresentaram agindo na base de $\mathcal{H}$ mostra que este espaço é algebricamente fechado com relação a esses operadores. Os operadores de Casimir que caracterizam as representações irredutíveis do grupo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ são dados por

$$Q = N_{12}^2 + N_{23}^2 + N_{31}^2 - N_{01}^2 - N_{02}^2 - N_{03}^2, \quad (3.63a)$$

$$R = -N_{01}N_{23} - N_{02}N_{31} - N_{03}N_{12}. \quad (3.63b)$$

e com as devidas substituições, nos fornecem

$$Q = \left(\frac{3}{4} - \nu(\nu+1)\right) = \frac{\alpha^2 \mu^2}{\hbar^2} \mathbb{1}, \quad (3.64a)$$

$$R = 0. \quad (3.64b)$$

Devido à nossa restrição $\mu^2 > 0$, vimos que ν pode ser um número real ou um valor complexo da forma $-\frac{1}{2} + i\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Segundo o trabalho de Bargmann⁹ [37], e fazendo-se $Q = q\mathbb{1}$, o

⁸A demonstração de como os operadores de boosts de Lorenz infinitesimais agem nos elementos da base de modos positivos é feita através do uso das relações de recorrência dos polinômios de Legendre associados, encontradas no teorema 2.2.1, combinado com o uso das relações de recorrência das funções de Ferrer do teorema 2.3.2.

⁹Os geradores de rotações e boosts do trabalho de Bargmann foram construídos unitariamente, o que não ocorre com nossos geradores. Isso justifica a troca de sinal dos nossos operadores de Casimir com relação aos daquele trabalho.

caso $\nu \in \mathbb{R}$ nos fornece $0 < q < 1$, correspondente ao intervalo excepcional das representações contínuas do grupo de de Sitter C_q^0 , denominadas *séries complementares*. Para $\nu \notin \mathbb{R}$, temos $q > 1$, que por sua vez corresponde às chamadas séries principais, isto é, às representações contínuas de C_q^0 fora do intervalo excepcional.

Localizabilidade: de Newton-Wigner a Espaços de de Sitter

“Veni, vidi, vici”

Gaius Julius Cæsar (supostamente)

4.1 Postulados de Sistemas Localizáveis

O artigo [1], de Theodore D. Newton e Eugene Wigner, sobre localização de partículas quânticas relativísticas é o ponto de partida para tentativas de extrapolar localizabilidade para TQCES. No trabalho referido, foram postuladas condições as quais nos permitem construir um operador de posição, razoável em termos de interpretação, em sistemas relativísticos, denominado atualmente *operador de posição de Newton-Wigner* (NW). No mesmo trabalho foram demonstradas a existência e a unicidade para tal operador. Um entendimento mais imediato desse objeto encontra-se no livro [38].

Em resumo, tomemos um campo escalar neutro massivo definido no espaço M^{1+1} e consideremos agora o subespaço de uma partícula, que consiste basicamente nos vetores $\phi \in L^2\left(\mathbb{R}, \frac{dp}{\omega(p)}\right)$, com $\omega(p) := \sqrt{p^2 + m^2}$, na representação dos momentos p . Neste caso, m é a massa da partícula. O produto escalar desse espaço está definido em (4.1).

$$\langle \phi, \psi \rangle := \int \frac{dp}{\omega(p)} \phi^*(p) \psi(p), \quad \forall \psi, \phi \in L^2\left(\mathbb{R}, \frac{dp}{\omega(p)}\right). \quad (4.1)$$

Seja $M_\omega : L^2\left(\mathbb{R}, \frac{dp}{\omega(p)}\right) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dp)$ uma transformação unitária que absorve o fator $\omega(p)$ presente na medida nas funções do subespaço de uma partícula, isto é,

$$[M_\omega(\phi)](p) \equiv \phi_{NW}(p) := \frac{\phi(p)}{\sqrt{\omega(p)}} \quad (4.2)$$

e definamos também o *operador de evolução temporal* $U_t : L^2(\mathbb{R}, dp) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, dp)$, $t \in \mathbb{R}$ conforme (4.3).

$$[U_t(\phi_{NW})](p) := e^{-i\omega(p)t/\hbar} \phi_{NW}(p). \quad (4.3)$$

A transformada de Fourier de $\phi_{NW}(x, t)$ dada por

$$\phi_{NW}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dp e^{ipx/\hbar} [U_t(\phi_{NW})](p) \quad (4.4)$$

é dita ser a *função de onda de Newton-Wigner*, e naturalmente é a representação espacial de $\phi_{NW}(p)$ evoluída no tempo t . A função de densidade de probabilidade $P(x, t)$ em que encontramos a partícula na posição x e no tempo t é dada por

$$P(x, t) := |\phi_{NW}(x, t)|^2. \quad (4.5)$$

Nessas condições, o operador de posição q_t , no tempo t é dado por

$$q_t(\phi_{NW}(x, t)) = x\phi_{NW}(x, t). \quad (4.6)$$

Em [5], o subespaço dos modos de energia positivos foram construídos com uma base de exponenciais complexas na variável espacial, e vetores desse espaço nada mais são do que expansões dessas base. Tais expansões foram abordadas como um análogo à transformada de Fourier para o espaço de de Sitter em 1 + 1 dimensões. Uma vez que não há uma definição canônica para a representação do espaço de momentos, a perspectiva adotada para as expansões acabou por desviar desse problema. Em nosso trabalho esse empecilho também é evitado, dado que expansões em funções harmônicas esféricas são a versão generalizada de expansões em Fourier para uma dimensão a mais.¹

Uma ressalva importante que deve ser feita é o fato de o operador de posição de Newton-Wigner não ser covariante sequer no espaço de Minkowski, portanto há um operador diferente para cada referencial adotado. Esse problema foi carregado em [5] assim como neste trabalho, e não pretendemos aqui resolvê-lo, e consequentemente não será uma preocupação o fato de as expansões em modos serem dependentes de coordenadas.

Definição 16 (Transformações unitárias entre espaços de Hilbert). *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ dois espaços de Hilbert. Uma transformação $W : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ é dita ser uma transformação unitária entre os espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ se W for*

1. *um isomorfismo entre $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$;*
2. *uma isometria com relação aos produtos internos em $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, isto é,*

$$\langle W(f), W(g) \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_1}.$$

Definição 17 (Postulados de Localizabilidade para o Espaço de de Sitter Tridimensional). *Um campo livre no espaço de de Sitter é dito localizável se satisfaz*

1. *Existe uma família $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ de transformações unitárias $W_t : \mathcal{H} \rightarrow L^2(S^2)$ tal que $W_t(\phi) := \phi_{NW}(t, \theta, \varphi)$, sendo $L^2(S^2)$ o espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável na esfera S^2 , e as respectivas transformações inversas dessa família dependem continuamente da massa da partícula m_p , da equação (3.6);*
2. *para uma rotação $U(\lambda) \in \text{SRot}$ de um ângulo $\lambda \in [0, 2\pi]$ com relação a qualquer um dos três eixos cartesianos, temos que $W_t \circ U(\lambda) = R(\lambda) \circ W_t$, em que $R(\lambda)$ é uma rotação de ângulo λ do mesmo eixo e sentido de rotação de U , porém aplicado em $L^2(S^2)$;*
3. *com relação aos operadores de troca de paridade e de inversão temporal, temos que W_t realiza*

¹Para o caso de mais dimensões, existe também a generalização de funções harmônicas esféricas.

as transformações

$$P_1\phi(t, \theta, \varphi) \rightarrow \phi_{NW}(t, \theta, \pi - \varphi),$$

$$P_2\phi(t, \theta, \varphi) \rightarrow \phi_{NW}(t, \theta, -\varphi),$$

$$P_3\phi(t, \theta, \varphi) \rightarrow \phi_{NW}(t, \pi - \theta, \varphi),$$

$$T\phi(t, \theta, \varphi) \rightarrow \phi_{NW}(-t, \theta, \varphi)^*;$$

4. para $W_t(\phi) = \phi_{NW}$, $\phi \in \mathcal{H}$, temos que no limite de grandes massas segue $\phi_{NW}(t, \theta, \varphi) \propto \phi(t, \theta, \varphi)$.

Os postulados supracitados são entendidos sob a mesma análise do que é feito no caso bidimensional em [5], vamos aqui explicar a importância de cada um deles.

O primeiro postulado nos garante a interpretação probabilística das funções de onda $\phi_{NW}(t, \theta, \varphi) \in L^2(S^2)$ para cada instante de tempo t , sendo a probabilidade $P(I)$ de encontrarmos uma partícula num conjunto Lebesgue mensurável $I \subset S^2$ dada por

$$P(I) = \int_I |\phi(t, \theta, \varphi)|^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (4.7)$$

O segundo postulado, por sua vez, impõe bom comportamento da representação de Newton-Wigner sob o efeito de rotações, o que significa que rotações espaciais nas funções em $\mathcal{H}$ simplesmente rodam as amplitudes de probabilidade na superfície esférica S^2 sob o mesmo ângulo e eixo de rotação.

O terceiro postulado impõe que as simetrias discretas em $\mathcal{H}$ sejam levadas em transformações geométricas na representação de Newton-Wigner. A conjugação oriunda do operador de inversão temporal foi preservada na representação de Newton-Wigner, a fim de se respeitar o requisito de que operadores anti-unitários sob equivalências unitárias deverem se manter anti-unitários. Isso apenas mudem de paridade das amplitudes de probabilidade na casca esférica S^2 . O mesmo argumento é válido para a inversão temporal, associando inversões em $\mathcal{H}$ a inversões da amplitude de probabilidade. Segundo o teorema de Wigner, uma simetria quântica é, em geral, definida a menos de uma fase e aqui vamos tomá-las iguais a 1, a fim de evitar lidarmos com uma representação projetiva do grupo de de Sitter estendido.

E o quarto postulado elimina ambiguidades que veremos na próxima seção, ao determinarmos as transformações $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. A forma hermitiana definida em (3.26) torna-se um produto interno para funções em $L^2(S)$ no limite de grandes massas. Em outras palavras,

$$\langle f, g \rangle \simeq 2 \frac{\mu[a(t)]^2}{\hbar} \int f(t, \theta, \varphi)^* g(t, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (4.8)$$

conforme demonstrado no apêndice. Dessa maneira, é intuitivo entendermos $|\phi(t, \theta, \varphi)|^2$ como uma distribuição probabilística.

4.2 Determinação das Transformações Unitárias para o caso 2+1 dimensional

O que faremos a seguir será a construção de uma transformação unitária para o sistema de uma partícula bosônica, partindo das soluções de energia positiva e com base nos quatro postulados da definição 17.

Começemos pelo fato de que para todo tempo real existe uma base $\mathfrak{B}$ no espaço de funções $L^2(S^2)$ cujos elementos são auto-vetores do gerador hermitiano das rotações em torno do eixo X^3 , J , definido por

$$J := iN_{12} \quad (4.9)$$

e essa base é composta pelas funções harmônicas esféricas (2.14). Em outras palavras, podemos escrever a função de Newton-Wigner $\phi_{NW} = W_l(\phi)$ de um campo de Klein-Gordon ϕ como sendo uma expansão nessa base.

$$\phi_{NW} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l q_{lm}(t) Y_l^m(\theta, \varphi), \text{ com } \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l |q_{lm}(t)|^2 = 1 \text{ e } q_{lm} \in \mathbb{C}. \quad (4.10)$$

Através dos postulados 1 e 2, podemos escrever para qualquer um dos três eixos de rotação que

$$W_l \circ U_{ij}(\alpha) = R_{ij}(\alpha) \circ W_l, \quad (4.11)$$

em que α é o ângulo de rotação. Uma vez que as rotações U_{ij} são operadores lineares, podemos simplesmente utilizar a expressão (4.11) separadamente nos elementos da base de soluções de energia positiva. Para rotações no eixo X^3 , temos que

$$W_l(U_{12}(\alpha)u_{l,m}) = W_l(e^{-i\alpha}u_{l,m}) = e^{-i\alpha}W_l(u_{l,m}) \quad (4.12)$$

e a expressão (4.11) nos fornece

$$R_{12}(\alpha)W_l(u_{l,m}) = e^{-i\alpha}W_l(u_{l,m}) \quad (4.13)$$

Logo, $W_l(u_{l,m})$ é auto-vetor de $R_{12}(\alpha)$ com autovalor $e^{-i\alpha}$.

Considerando que a base escolhida para $L^2(S^2)$ é composta por auto-vetores de R_{12} e que J é não degenerado para cada $l \in \mathbb{N}_0$ fixado, $W_l(u_{l,m})$, um candidato necessariamente é dado por

$$W_l(u_{l,m}(t, \theta, \varphi)) = b_{l,m}(t)Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.14)$$

e o que garante que não haja combinações de harmônicos esféricos de diferentes graus são as rotações nos outros eixos. Através da representações de rotações em qualquer eixo pelos ângulos de Euler sob a forma de três rotações consecutivas, que aqui adotamos como sendo uma rotação em torno do eixo X^3 , seguida de outra em torno de X^2 e por fim uma terceira rotação novamente em torno do eixo X^3 , todas no sentido anti-horário. Denotaremos uma rotação genérica de ângulos de Euler ξ, ϵ e τ , respectivos às rotações supracitadas, por $R(\xi, \epsilon, \tau)$. Sua ação nos harmônicos esféricos é dada por

$$R(\xi, \epsilon, \tau)Y_l^m(\theta, \varphi) = \sum_{k=-l}^l D_{km}^{(l)}(\xi, \epsilon, \tau)Y_l^k(\theta, \varphi) \quad (4.15)$$

em que $D_{km}^{(l)} \in \mathbb{C}$, para todo $k \in -l, -l+1, \dots, l-1, l$, é um elemento da denominada *matriz de Wigner* [39]. O resultado (4.15) nos diz que para qualquer $l \in \mathbb{N}_0$ fixado, o espaço $\text{span}\{Y_l^m : m \in \mathbb{Z}, |m| \leq l\}$ é invariante por rotações, e portanto o espaço de soluções da equação (4.13), sob a imposição do segundo postulado, necessariamente possui dimensão 1, e portanto a solução da referida equação é a transformação (4.14), necessariamente.

Contudo, esse resultado é refinado mais ainda pelo fato de W_l ser uma transformação unitária entre espaços de Hilbert. Pelo produto interno relacionado à medida de $L^2(S^2)$ segue que

$$\langle W_l(u_{l,m}), W_l(u_{l,m}) \rangle = |b_{l,m}(t)|^2 \quad (4.16)$$

e uma vez que W_l é uma transformação unitária entre espaços de Hilbert, pelo segundo item da definição 16 segue o resultado

$$|b_{l,m}(t)|^2 = 1. \quad (4.17)$$

Portanto $b_{l,m}$ deve ser uma fase dependente do tempo, ou seja,

$$W_t(u_{l,m}(t, \theta, \varphi)) = e^{-i\zeta_{l,m}(t)} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (4.18)$$

Pelo postulado 3, segue que

$$W_t(u_{l,m}) = W_t \left(\frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_1 u_{l,-m} \right) = e^{-i\zeta_{l,-m}(t)} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.19)$$

$$W_t(u_{l,m}) = W_t((-1)^m T u_{l,-m}) = e^{i\zeta_{l,-m}(-t)} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (4.20)$$

A equação (4.19) gera exatamente o mesmo resultado se substituirmos P_1 por P_2 . Tanto P_3 quanto P não geram resultados com índices diferentes (vide equações (3.50) e (3.51)), logo não acrescentam novas condições para $W_t(u_{l,m})$.

Definamos $s_{l,m} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, com $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ e $|m| \leq l$ como sendo

$$s_{l,m}(t) := e^{-i\zeta_{l,m}(t)}. \quad (4.21)$$

As equações (4.19) e (4.20) nos fornecem, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$s_{l,m}(t) = s_{l,-m}(t) \text{ e } s_{l,m}(t) = s_{l,-m}(-t)^* \quad (4.22)$$

Apesar de restrita, a transformação obtida em (4.18) ainda está arbitrária com relação à arbitrariedade da fase $\zeta_{l,m}$, o que no fornece a conclusão imediata de que os postulados 1-3 não tornam W_t univocamente determinada. Construindo-se de modo análogo ao que é feito no espaço de Minkowski em [1], vamos determinar a transformação unitária do caso $t = 0$ e em seguida mostrar que o postulado 4 conserta a questão da unicidade, e então vamos determinar W_t para $t \neq 0$ através da evolução temporal.

Para o caso $t = 0$, as condições em (4.22) resumem-se em

$$s_{l,m}(0) = s_{l,-m}(0) = \pm 1. \quad (4.23)$$

A transformação até aqui determinada pelos três primeiros postulados é dada por

$$\phi(0, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \phi_{l,m} \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} (-i) T_v^{l+\frac{1}{2}}(0) Y_l^m(\theta, \varphi) \rightarrow \phi_{NW}(0, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} \phi_{l,m} s_{l,m}(0) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (4.24)$$

Nota-se que há uma ambiguidade de sinais para W_0 em cada termo da série de ϕ_{NW} causada pelo fator $s_{l,m}(0)$. Essa ambiguidade também ocorre no caso 1 + 1-dimensional [5]. Este trabalho compara essa ambiguidade com o trabalho de Philips e Wigner [40], onde esta ambiguidade surgiu pela primeira vez.

Dadas as duas soluções para ν em (3.10), temos que o limite assintótico estabelecido para grandes massas será aquele tal que

$$\nu \simeq -\frac{1}{2} \pm iM, \quad (4.25)$$

em que $M = \frac{\alpha\mu}{\hbar} \simeq \frac{\alpha m_p}{\hbar}$, com m_p sendo a massa da partícula, esta presente na equação (3.6). Para que o postulado 4 seja satisfeito, faz-se necessário que ocorra $\phi_{NW}(0, \theta, \varphi) = f(m_p)\phi(0, \theta, \varphi)$ em (4.24), sendo $f(m_p)$ um fator de normalização dependente da massa. Através do valor de $T_v^\sigma(0)$ dado por (2.39) e da aproximação de Stirling da função gama (2.23), obtemos

$$\sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} N(\nu) T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(0) \simeq (-1)^l (2\alpha M)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.26)$$

O termo $(2\alpha M)$ está diretamente relacionado à aproximação (4.8), que é consequência do postulado 4, servindo como um fator de normalização dependente da massa no limite assintótico em que esta é grande, para tempo $t = 0$. Desta forma, o postulado 4 impõe a escolha de sinais

$$s_{l,m}(0) = (-1)^l. \quad (4.27)$$

Notemos dois fatos importantes. O primeiro consiste na independência do sinal escolhido com relação à ordem da função harmônica esférica. Isso significa que os subespaços invariantes por rotações possuem a mesma escolha de sinal, e doravante abandonaremos o índice m em $s_{l,m}$. O segundo fato é a necessidade da escolha de sinal ser a mesma pra todas as massas uma vez que exigimos que a transformação inversa W_0^{-1} seja contínua com relação à massa da partícula m_p . Se o sinal mudasse, necessariamente essa mudança deveria ser descontínua, pois as únicas opções possíveis são $s_l(0) = 1$ e $s_l(0) = -1$. A transformação W_0 está, portanto, completamente determinada pelos 4 postulados de sistemas localizáveis. Na seção 4.3, discutiremos de modo heurístico a ambiguidade de sinais aqui encontrada. Prossigamos à determinação da evolução temporal da função de Newton-Wigner e consequente obtenção da transformação unitária W_t .

Como asserção inicial sobre busca da evolução temporal para ϕ_{NW} , afirmamos que, apesar de os 4 postulados fixarem univocamente a transformação unitária para tempo nulo W_0 , a própria evolução temporal não é única, e o que faremos aqui será discutir uma das possíveis soluções, que é feita de modo análogo ao caso do espaço de Minkowski feita por Newton e Wigner [1] e que é a origem de toda a discussão sobre sistemas relativísticos.

Considerando os modos de energias positivos, podemos escrever um vetor ϕ qualquer de $\mathcal{H}$ como sendo

$$\phi(t, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,m} \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} N(\nu) \frac{T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.28)$$

com $\sum_{l,m} |\phi_{l,m}| = 1$. Pelo produto interno (3.26), segue $\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{l,m} \phi_{l,m}^* \psi_{l,m}$. Definamos $\Xi_l(t)$ e $\zeta_l(t)$, $l \in \mathbb{N}_0$ como sendo

$$\Xi_l(t) := \frac{\alpha \cosh(t/\alpha)}{\gamma_l \left| T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha)) \right|^2} \quad (4.29)$$

e

$$\zeta_l(t) := -\arg \left(N(\nu) \frac{T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}} \right). \quad (4.30)$$

Em seguida, definamos a transformação unitária temporalmente dependente W_t como sendo

$$\phi(t, \theta, \varphi) \rightarrow \phi_{NW}(t, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,m} e^{-i\zeta_l(t)} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.31)$$

que consiste na absorção do fator $[2\Xi_l(t)]^{-\frac{1}{2}}$ em cada coeficiente $\phi_{l,m}$ e na implementação da exponencial $e^{-i\zeta_l(t)}$, que está relacionada à evolução temporal em cada modo energético. A absorção mencionada é consequência dos três primeiros postulados de sistemas localizáveis.

Verifiquemos então a validade dos postulados sobre W_t . A construção até aqui feita por si já demonstra o postulado 1 e em parte 2 e 3. Para estes dois últimos postulados ainda falta mostrar

que o fator de fase satisfaz (4.22) para todo t . A primeira igualdade é trivialmente satisfeita pela independência entre a fase e a ordem de cada harmônico esférico; segunda igualdade é provada com o uso da identidade $[\pm i T_v^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))]^* = \pm i T_v^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))$. Para mostrar que a transformação W_t satisfaz o postulado 4, demonstraremos que o fator de fase em $t = 0$ vale $(-1)^l$. Através do valor de $T_v^\sigma(0)$ em (2.39) e utilizando $\nu = -\frac{1}{2} + A$, temos

$$\zeta_l(0) = -\arg \left(N(\nu) \frac{\sqrt{\pi}}{2^{l+\frac{1}{2}}} (l+A) \frac{\Gamma(l+A)}{\Gamma(-l+A) \Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 + \frac{A}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 - \frac{A}{2}\right)} \right). \quad (4.32)$$

O termo $\Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 + \frac{A}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 - \frac{A}{2}\right)$ é sempre positivo no nosso trabalho, pois $A \in (0, 1) \cup i\mathbb{R}$. Através da propriedade de recorrência da função gama (2.21), temos que

$$\frac{\Gamma(l+A)}{\Gamma(-l+A)} = \begin{cases} 1 & \text{se } l = 0 \\ N(\nu)^* A(-l+A)(-1)^{l-1} H(A) & \text{se } l \neq 0 \end{cases}, \quad (4.33)$$

onde

$$H(A) = \prod_{k=1}^{l-1} (k^2 - A^2), \quad (4.34)$$

que também é sempre positivo, pelos mesmos argumentos utilizados em $\Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 + \frac{A}{2}\right) \times \Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 - \frac{A}{2}\right)$, e, portanto,

$$\zeta_l(t) = -\arg((-1)^l \Lambda^2), \quad \Lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.35)$$

o que nos leva a

$$e^{-i\zeta_l(t)} = (-1)^l, \quad (4.36)$$

e a função escolhida para a fase satisfaz a escolha de sinais imposta pelo postulado 4. Para $t \neq 0$, notemos que pela fórmula de Stirling (2.24), para assíntotas do eixo imaginário, temos que

$$\sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} = \frac{|\Gamma(-l + iM)|}{\sqrt{2\alpha}} \simeq \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} M^{-l-\frac{1}{2}} e^{-\pi M/2}. \quad (4.37)$$

Utilizando-se a fórmula assintótica para $P_v^{l+\frac{1}{2}}(z)$, segundo (2.44), combinada com a definição de $T_v^{l+\frac{1}{2}}(z)$ em termos de $P_v^{l+\frac{1}{2}}(z)$, dada pela equação (2.29), obtém-se para $t > 0$ ²:

$$\frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}} \simeq \frac{(-1)^l M^l e^{\pi M/2} e^{-iMt/\alpha}}{\sqrt{2\pi} \cosh(t/\alpha)}. \quad (4.38)$$

Para $t < 0$, o resultado acima recebe um fator $-i$. Contudo sempre podemos refixar o tempo inicial em $t = 0$, e fazer a evolução temporal sendo apenas para tempo crescente. Combinando-se os resultados de (4.37) e (4.38), temos que

$$\sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} \frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}} \simeq (-1)^l (2\alpha M [\cosh(t/\alpha)]^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-iMt/\alpha} \quad (4.39)$$

²Nesse caso, temos que $\omega \simeq -\frac{\pi}{2} + i\frac{l}{\alpha}$ na folha de Riemann escolhida para o limite assintótico

e $(2\alpha M[\cosh(t/\alpha)]^2)^{\frac{1}{2}}$ corresponde a um coeficiente de normalização dependente da massa, encontrado na equação (4.8).

A função ϕ_{NW} tal como construída em (4.31) é uma função de quadrado integrável na casca da esfera unitária. A interpretação física dada a ela consiste em seu módulo ao quadrado nos fornecer a probabilidade de achar a partícula numa porção infinitesimal de S^2 , ou seja, dentro de intervalos infinitesimais dos ângulos polar e azimutal. Contudo, o raio real do problema da partícula, correspondente à fatia espacial no tempo t , varia com o tempo e é dado pelo fator de escala $a(t) = \alpha \cosh(t/\alpha)$ e, portanto, a função densidade de probabilidade na fatia espacial associada ao tempo t é obtida absorvendo-se o fator $a(t)$. Dessa maneira,

$$\tilde{\phi}_{NW}(t, \theta, \varphi) = \frac{1}{\alpha \cosh(t/\alpha)} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,m} e^{-i\zeta_l(t)} Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (4.40)$$

O novo fator absorvido $[2\omega_l^{dS}(t)]^{-\frac{1}{2}}$ é tal que

$$\omega_l^{dS}(t) := \frac{1}{\gamma_l \left| T_v^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha)) \right|^2}. \quad (4.41)$$

Como observação, segue que, ao derivarmos a fase ζ_l em relação a t , obtemos

$$\zeta'_l(t) = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{1-z^2} \frac{\left[g_l(z) \overleftrightarrow{\partial}_z g_l(-z) \right]}{|g_l(z)|^2}, \quad (4.42)$$

onde $g_l(z) := -i \frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(z)}{(1-z^2)^{1/4}}$ e $z = i \sinh(t/\alpha)$. Utilizando-se a relação (2.36), entre g_l e sua derivada, e dividindo-a por $|g_l(z)|^2$, obtemos

$$\zeta'_l(t) = \frac{1}{\gamma_l a(t) \left| T_v^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha)) \right|^2} = \frac{\omega_l^{dS}(t)}{a(t)}, \quad (4.43)$$

que é uma difere da mesma relação para o caso bidimensional em [5] por um fator $\frac{1}{a(t)}$ em ω_l^{dS} .

Nossa construção, portanto, culmina em que a transformação

$$W_t(\phi) := \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{2\omega_l^{dS}(t)} \phi_{l,m} \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} \frac{N(v) T_v^{l+\frac{1}{2}}(i \sinh(t/\alpha))}{\sqrt{\cosh(t/\alpha)}} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.44)$$

é aquela que satisfaz os postulados de localização para o problema de uma partícula bosônica no espaço de de Sitter tridimensional. Além disso, é notável que W_t serve tanto como transformação para a série principal quanto para a série complementar. Contudo esta não é oscilatória pois se trata de uma série real, logo as fases $e^{-i\zeta_l(t)}$ são constantes para todo $l \in \mathbb{N}_0$, caso este em que a dinâmica da função de Newton-Wigner é trivial, ou seja, ela não evolui temporalmente. Lembrando que a série complementar é determinada pela inequação

$$\frac{\alpha^2 \mu^2}{\hbar^2} < 1, \quad (4.45)$$

que provem do índice ν da equação de Legendre associada. Como consequência temos que o comprimento de onda Compton é maior que o raio de de Sitter α e portanto a partícula está confinada. Sendo desprovida de movimento, a noção de localização fica óbvia. Em contrapartida, as representações da série principal são oscilatórias, pois o comprimento de onda Compton é

menor que o raio de de Sitter, indicando uma dinâmica não-trivial. Nesse caso, a evolução temporal da função de distribuição de posição podem ser utilizadas para entendermos como pacotes de onda se movem.

Para o caso de partículas na série principal, o operador de posição se faz útil para entendermos a dinâmica de partículas relativísticas no espaço de de Sitter em um regime semi-clássico, construindo-se um pacote de ondas inicialmente localizado e analisando-se como a função densidade de probabilidade se difunde. E a expansão do Universo impõe uma difusão maior do que o ocorrido no caso do espaço de Minkowski e, por consequência, um pacote de ondas similar ao de uma partícula localizada dura apenas um intervalo de tempo finito. Não obstante, limites clássicos em sistemas quânticos gerais são aproximados apenas a intervalos finitos de tempo, conforme é argumentado no célebre trabalho de Hepp³ [10]. A evolução temporal é justamente o que descreve por quanto tempo o limite clássico é razoável, bem como também descreve de que modo os pacotes de ondas se propagam nesse regime.

Como último resultado deste trabalho, obteremos o operador de posição para o espaço de de Sitter tridimensional, partindo-se diretamente da construção feita no caso do espaço plano de Minkowski. A equação (4.6) nos sugere a o operador de posição $\vec{q}_t$, definido por

$$\vec{q}_t \phi_{NW}(t, \theta, \varphi) := \hat{r} \phi_{NW}(t, \theta, \varphi), \quad (4.46)$$

em que ϕ_{NW} é uma função de onda da representação de Newton-Wigner e $\hat{r} = \hat{r}(\theta, \varphi)$ é um vetor unitário, dado por

$$\hat{r}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (4.47)$$

e cada componente corresponde, na ordem em que são apresentadas, aos eixos cartesianos X^1 , X^2 e X^3 nos pontos em que eles cruzam a casca esférica S^2 . A expansão de Laplace dessas componentes nos leva a

$$\hat{r}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} [Y_1^1(\theta, \varphi) + Y_1^{-1}(\theta, \varphi)] \\ \frac{i}{2} [Y_1^1(\theta, \varphi) - Y_1^{-1}(\theta, \varphi)] \\ Y_1^0(\theta, \varphi) \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Mostraremos o cálculo do operador de posição para X^3 . As demais componentes são obtidas de modo análogo, e portanto apenas serão apresentados os resultados para estas. Denotaremos o operador da j -ésima componente por $\hat{X}_{L^2(S^2)}^j$, e o mesmo operador na representação $\mathcal{H}$ será denotado por $\hat{X}_{\mathcal{H}}^j$. Uma vez que W_t é um isomorfismo entre $\mathcal{H}$ e $L^2(S^2)$ para cada t fixado, então uma função qualquer $\phi_{NW} \in L^2(S^2)$ pode ser escrita como sendo

$$\phi_{NW}(t, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,m} e^{-i\zeta_l(t)} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.49)$$

com $\zeta_l(t)$ dada por (4.30). É trivial que $\hat{X}_{L^2(S^2)}^j$, $j = 1, 2, 3$, levam o espaço $L^2(S^2)$ em si próprio e, portanto, existe uma expansão em funções harmônicas esféricas para $\hat{X}_{L^2(S^2)}^j \phi_{NW}$. Desse modo, segue que

$$\left[\hat{X}_{L^2(S^2)}^3 \phi_{NW} \right] (t, \theta, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{s=-p}^p \langle Y_p^s, \hat{X}_{L^2(S^2)}^3 \phi_{NW} \rangle_{L^2(S^2)} Y_p^s(\theta, \varphi), \quad (4.50)$$

onde

³Há exceções.

$$\langle Y_p^s, \hat{X}_{L^2(S^2)}^3 \phi_{NW} \rangle_{L^2(S^2)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,m} e^{-i\zeta_l(t)} \int_{S^2} d\Omega \left[Y_1^0(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) Y_p^{s*}(\theta, \varphi) \right]. \quad (4.51)$$

Pelas equações (2.17) e (2.15) do teorema 2.2.2, segue que

$$\begin{aligned} \langle Y_p^s, \hat{X}_{L^2(S^2)}^3 \phi_{NW} \rangle_{L^2(S^2)} &= (-1)^s \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,m} e^{-i\zeta_l(t)} \sqrt{\frac{3(2l+1)(2p+1)}{4\pi}} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & l & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l & p \\ 0 & m & -s \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

O operador de posição que buscamos é o da representação do espaço de uma partícula $\mathcal{H}$. Temos que, se $W_t(\phi) = \phi_{NW}$, então

$$[\hat{X}_H^j \phi] = W_t^{-1} \left(\hat{X}_{L^2(S^2)}^j \phi_{NW} \right). \quad (4.53)$$

Dado que a transformação W_t^{-1} , também unitária, apenas devolve o fator $[2\omega_l^{dS}(t)]^{-\frac{1}{2}}$, isto é

$$[W_t^{-1}(\phi_{NW})](t, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,m} \frac{e^{-i\zeta_l(t)}}{\sqrt{2\omega_l^{dS}(t)}} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.54)$$

temos portanto que

$$\begin{aligned} [\hat{X}_H^3 \phi](t, \theta, \varphi) &= \sum_{p,l=0}^{\infty} \sum_{s=-p}^p \sum_{m=-l}^l (-1)^s \phi_{l,m} e^{-i\zeta_l(t)} \sqrt{\frac{3(2l+1)(2p+1)}{8\pi\omega_p^{dS}(t)}} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & l & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & l & p \\ 0 & m & -s \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} [\hat{X}_H^1 \phi](t, \theta, \varphi) &= \sum_{p,l=0}^{\infty} \sum_{s=-p}^p \sum_{m=-l}^l (-1)^s \phi_{l,m} e^{-i\zeta_l(t)} \sqrt{\frac{3(2l+1)(2p+1)}{32\pi\omega_p^{dS}(t)}} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & l & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & l & p \\ 1 & m & -s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & l & p \\ -1 & m & -s \end{pmatrix} \right], \end{aligned} \quad (4.56)$$

$$\begin{aligned} [\hat{X}_H^2 \phi](t, \theta, \varphi) &= i \sum_{p,l=0}^{\infty} \sum_{s=-p}^p \sum_{m=-l}^l (-1)^s \phi_{l,m} e^{-i\zeta_l(t)} \sqrt{\frac{3(2l+1)(2p+1)}{32\pi\omega_p^{dS}(t)}} \\ &\times \begin{pmatrix} 1 & l & p \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & l & p \\ 1 & m & -s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & l & p \\ -1 & m & -s \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Finalmente, o operador de posição $\hat{R}$ para o espaço de uma partícula no caso de de Sitter é definido por

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \hat{X}_H^1 \\ \hat{X}_H^2 \\ \hat{X}_H^3 \end{pmatrix}, \quad (4.58)$$

cuja unicidade é garantida pela unicidade da representação de Newton-Wigner.

4.3 Aspectos heurísticos da ambiguidade de sinais

Conforme escrito na sessão anterior, vamos argumentar heurísticamente alguns pontos da distribuição de probabilidade de posição encontrados, bem como discutir a ambiguidade de sinais encontrada nos fatores de fase temporal $s_l(0)$ antes da imposição do postulado 4, tal como feito em [5]. Conforme mostrado anteriormente, a existência dessa ambiguidade existe porque os postulados 1, 2 e 3 não são suficientes para determinarmos a localização no espaço de uma partícula $\mathcal{H}$ relativa à localização no espaço da representação de Newton-Wigner $L^2(S^2)$.

Por simplicidade, vamos considerar já conhecida a independência entre a escolha de sinais de $s_{l,m}$ e o índice m , e utilizaremos a notação $s_l \equiv s_{l,m}$. Tome uma específica escolha de sinais s_l . Se esses coeficientes mudam de acordo com $s_l \rightarrow s'_l = (-1)^l$, então a representação de Newton-Wigner é submetida à rotação $\theta \rightarrow \pi - \theta$, em que θ é o ângulo polar, que constitui parte da liberdade de escolha de sinais. Essa mudança constitui uma reflexão antípoda, dado que θ é refletido em relação ao plano dos eixos X^1 e X^2 . E podemos na verdade reparar a ambiguidade de sinais apenas analisando a ação de W_0 num conjunto de estados cuidadosamente escolhidos grande o suficiente, e a partir disso escolher os sinais que evitam reflexões antípodas.

Como exemplo de como essa escolha de estados funciona, considere a superposição de estados $l = 0$ (e consequentemente $m = 0$) e $l = 1$ com $m = 1$, e tome como coeficientes de cada estado como sendo $a_0 = s_0$ e $a_1 = \frac{s_1}{\sqrt{3}}$ respectivamente. Desse modo, temos

$$\phi(0, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\alpha}} N(\nu) T_{\nu}^{\frac{1}{2}}(0) s_0 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}} + \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\alpha}} N(\nu) T_{\nu}^{\frac{3}{2}}(0) s_1 \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad (4.59)$$

$$\phi_{NW}(0, \theta, \varphi) = \frac{1 + \cos \theta}{2\sqrt{\pi}}. \quad (4.60)$$

A função de Newton-Wigner (4.60) possui um máximo em $\theta = 0$ e decresce monotonicamente com θ , sendo nula em $\theta = \pi$, seu ponto antípoda. Essa função descreve então uma partícula que é mais provavelmente encontrada no hemisfério de X^3 positivo da esfera. Por outro lado, segue de (2.39) que para $A = \sqrt{1 - M^2} \in (0, 1) \cup i\mathbb{R}$

$$N(\nu) T_{\nu}^{l+\frac{1}{2}}(0) = (-1)^l \frac{\sqrt{\pi}}{2^{l+\frac{1}{2}}} (l + A) \frac{\Gamma(l + A)}{\Gamma(l - A)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 + \frac{A}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l}{2} + 1 - \frac{A}{2}\right)}, \quad (4.61)$$

e sabemos, conforme mostrado anteriormente, que o único fator em $T_{\nu}^{l+\frac{1}{2}}(0)$ que não é necessariamente positivo é o termo $(-1)^l$, isto é, $N(\nu) T_{\nu}^{l+\frac{1}{2}}(0)$ possui sinais alternantes em l . Desse modo, temos duas opções para a escolha de sinais, a saber, $s_0 = s_1$ ou $s_0 \neq s_1$. A escolha $s_0 = s_1$ nos fornece

$$\phi(0, \theta, \varphi) \propto \frac{1 - \cos \theta}{2\sqrt{\pi}}, \quad (4.62)$$

ou seja, tal escolha gera um termo proporcional ao lado direito de (4.60), exceto pela troca $\cos \theta \rightarrow -\cos \theta$. A função (4.62) cresce monotonicamente com θ e possui um máximo em $\theta = \pi$, o que significa que esta função descreve uma partícula mais provavelmente encontrável no hemisfério de X^3 positivo da esfera. Por outro lado, a escolha $s_0 \neq s_1$ fornece uma função proporcional a (4.60) e sem troca de sinal no termo cossenoidal, e portanto esta escolha de sinais fornece as mesmas regiões de maior probabilidade de acharmos a partícula que ϕ_{NW} . A conclusão dessa análise é direta: precisamos escolher $s_0 \neq s_1$ para que, após a ação de W_0 , ϕ mantenha-se concentrada na mesma região em vez de sua região antípoda.

Podemos repetir os mesmos argumentos para superposições de dois estados de subseqüentes $l, l+1 \in \mathbb{N}_0$, e a escolha de sinais é feita entre s_l e s_{l+1} . Como importante observação, segue que isso só pode ser feito com um conjunto muito pequeno de estados, pois combinações mais complicadas estão relacionadas a transformações mais complicadas do que reflexões antípoda.

Fica evidente após essa análise que a escolha de sinais reflete diretamente na localização de estados de uma partícula em $\mathcal{H}$ relacionados ao espaço de representação de Newton-Wigner $L^2(S^2)$, de modo semelhante ao que ocorre em [5]. Tal como feito neste trabalho, utilizamos a interpretação usual de operadores de localização e das funções de onda e, com isso, é natural a escolha sinais de tal modo que ambos os espaços tenham a mesma interpretação para a localização. Resumidamente, se as funções de Newton-Wigner estão concentradas em certa região, então seus correspondentes estados de uma partícula também devem estar concentrados na mesma região, e não na região antípoda. Uma observação importante quanto à função escolhida como exemplo: ela não é a única combinação que serve para $l=0$ e $l=1$, e os casos podem incluir a variável φ ; há combinações que envolvem Y_0^0, Y_1^{-1} e Y_1^1 e também servem como exemplo, contudo a análise deve ser feita para cada $\varphi \in [0, 2\pi]$ fixado. Escolhemos Y_0^0 e Y_1^0 por mera simplicidade.

Também podemos escolher os sinais s_l por meio de uma condição de “máxima localização” da posição dos auto-estados: considere a sequência de funções $\{\delta_{NW}^L\}_{L \in \mathbb{N}_0}, \delta_{NW}^K : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$, na representação de Newton-Wigner, dadas por

$$\delta_{NW}^L(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) := \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta_0, \varphi_0)^* Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.63)$$

onde $\theta_0 \in [0, \pi]$ e $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$.

A sequência (4.63) converge quando $L \rightarrow \infty$, no sentido distribucional, para a função delta de Dirac $\delta_{NW}(\theta, \varphi)$ na esfera S^2 , ou seja

$$\delta_{NW}(\theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) := \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta_0, \varphi_0)^* Y_l^m(\theta, \varphi) = \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (4.64)$$

onde $\theta_0 \in [0, \pi]$ e $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$. Observe que nos casos particulares $\theta_0 = 0$ e $\theta_0 = \pi$, temos que a série independe de φ , pois não há distinção entre pontos de ângulos azimutais diferentes nos polos de S^2 , e a sequência pra esses casos simplesmente exclui o termo $\delta(\varphi - \varphi_0)$. Para o caso de $\theta_0 = 0$, temos

$$\delta_{NW}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} Y_l^0(0, 0)^* Y_l^0(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right) P_l(\cos \theta) = \delta(\cos \theta - 1) \quad (4.65)$$

sendo $P_l \equiv P_l^0$.

Permitindo-se liberdade de sinal nos coeficientes $S_l(0)$, as funções (4.63) para o caso $\theta_0 = 0$ nos fornecem

$$\delta^L(0, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^L s_l(0) \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\alpha}} N(\nu) T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(0) \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} Y_l^0(\theta, \varphi), \quad (4.66)$$

que para $\theta = 0$ fica

$$\delta^L(0, 0, \varphi) = \sum_{l=0}^L s_l(0) \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\alpha}} N(\nu) T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(0) \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} Y_l^0(0, \varphi). \quad (4.67)$$

Dado que $\text{sgn} \left(N(\nu) T_\nu^{l+\frac{1}{2}}(0) \right) = (-1)^l$, temos que a escolha $s_l(0) = (-1)^l$ maximiza o valor de $|\delta^L(0, 0, \varphi)|$ para todo L , o que significa que essa escolha de sinais faz $\delta_{NW}(\theta, \varphi)$ ser o mais

concentrado possível em $\theta = 0$ em $t = 0$, ou seja, concentra a distribuição o máximo possível no hemisfério de eixo X^3 positivo. A noção de localizabilidade em W_0 está associada a funções maximalmente localizadas com relação aos polos e bem comportadas com relação às simetrias do grupo de de Sitter.

Como observação final desta seção, lembramos que, diferentemente do que ocorre em [5], onde a discussão heurística dos sinais compara a escolha dos sinais a partir de valores da função de onda em pontos completamente opostos em S^1 , nossa discussão não envolve pontos diametralmente opostos, mas sim pontos espelhados sobre o eixo X^3 . Naturalmente isso é esperado devido à independência dos sinais com relação à ordem das funções harmônicas esféricas. Isso pode indicar que a ambiguidade de sinais fixa probabilidades marginais provenientes da integração da função densidade de probabilidade com relação ao ângulo azimutal.

Conclusões e Perspectivas

In life, unlike chess, the game
continues after checkmate.

Isaac Asimov

Mostramos no presente trabalho que a noção de localização existente para campos escalares massivos neutros no espaço de de Sitter bidimensional [5] também existe no caso tridimensional, com análoga escolha de modos de energia positiva, sob a condição de Hadamard. Para tal, caracterizamos a equação de Klein-Gordon no espaço de de Sitter tridimensional e a resolvemos para coordenadas esféricas, separando as soluções em modos positivos e negativos de energia. Os modos positivos foram escolhidos para a quantização canônica, uma vez que isso corresponde à escolha do vácuo de Bunch-Davies, o que nos assegura a condição de Hadamard. Esta corresponde ao que chamamos de “vácuo físico” dentre os possíveis existentes na família dos α -vácuos, o que mostra que o conceito de localização está de acordo com tal vácuo. Adiante, estudamos as propriedades dos geradores do grupo de isometrias do espaço de de Sitter através de seu subgrupo próprio conexo $\mathcal{L}_+^\uparrow$ e dos operadores de troca de paridade e de inversão temporal, e foram encontrados os operadores de Casimir da Teoria, o que nos permitiu classificar as séries principal e complementar. Através dos postulados de localização para espaços de de Sitter em $1 + 1$ dimensões, adaptamos sua versão para $2 + 1$ dimensões, obtendo-se finalmente a transformação unitária que leva a representação do espaço de soluções da equação de Klein-Gordon na representação de Newton-Wigner e o operador de posição correspondente, sendo que no caso das séries complementares, a representação de Newton-Wigner mostrou-se desprovida de dinâmica.

Toda abordagem aqui feita foi uma reprodução adaptada nos mesmos passos que [5], e algumas alterações técnicas eram esperadas como, por exemplo, com relação à equação de Klein-Gordon: a parte angular referente a essa equação no trabalho supracitado geram a caracterização da expansão em Fourier, enquanto que neste trabalho a equação angular gerou uma generalização de Fourier para duas variáveis angulares, a saber, a expansão de Laplace. Tal extensão reflete-se inclusive nas simetrias das isometrias do grupo de de Sitter. Podemos então esperar que o mesmo aconteça para uma dimensão genérica, bastando-se entender como a equação temporal varia segundo essa generalização. Nesses termos, esperamos também que o vácuo permaneça sendo o de Bunch-Davies, motivando pesquisa futura para o caso geral de $n + 1$ dimensões.

Além disso, é conhecido que a teoria quântica de campos escalares neutros e massivos no espaço de Minkowski possui dois limites clássicos, a saber, um que descreve uma teoria clássica de campos e outro que descreve a dinâmica de partículas clássicas; resultado este que encontra-se em [11], baseado na análise de Hepp para limites clássicos [10]. Uma vez que o operador de Newton-Wigner é utilizado no limite equivalente à descrição particular clássica naquele trabalho, especula-se a possibilidade de uma analogia do mesmo limite para o espaço de de Sitter através do operador análogo que encontramos, servindo de motivação para estudos nessa questão.

Proporcionalidade entre a forma unitária (3.26) e o produto interno usual de funções de $\mathcal{H}$

Teorema 6.0.1. *No limite de grandes massas, a forma hermitiana (3.26) é proporcional ao produto interno usual no espaço de Hilbert $L^2(S^2)$, das funções definidas na esfera S^2 , através da relação*

$$\langle \phi, \psi \rangle \simeq 2 \frac{\mu[a(t)]^2}{\hbar} \int_{S_t} \phi^*(t, \theta, \varphi) \psi(t, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (6.1)$$

Demonstração. Na base $\{u_{l,m} : l \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z} \text{ e } |m| \leq l\}$, podemos escrever ϕ e ψ como sendo

$$\phi(t, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{l,m} u_{l,m}(t, \theta, \varphi) \quad \text{e} \quad \psi(t, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \psi_{l,m} u_{l,m}(t, \theta, \varphi). \quad (6.2)$$

Para calcular o lado esquerdo de (6.1), tomemos dois elementos quaisquer da base. Pela proposição 4 temos que

$$\langle u_{l,m}, u_{p,s} \rangle = \delta_{lp} \delta_{ms}, \quad (6.3)$$

para qualquer valor de $v \notin \mathbb{R}$, o que significa que (6.3) segue também no limite assintótico por continuidade da função constante. Portanto,

$$\langle \phi, \psi \rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}^* \psi_{lm}. \quad (6.4)$$

Analisemos agora a integral do lado direito de (6.1). Para dois elementos quaisquer da base, segue pelo segundo item do teorema 2.2.2 que

$$\int_{S_t} \phi^*(t, \theta, \varphi) \psi(t, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \left| \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} \frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(z)}{(1-z^2)^{1/4}} \right|^2 \delta_{lp} \delta_{ms}. \quad (6.5)$$

Separemos em dois casos: $z = 0$ e $z \neq 0$.

Para $z = 0$, utilizamos (2.39) e obtemos

$$\left| \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} \frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(0)}{(1-z^2)^{1/4}} \right|^2 = \frac{\pi}{2^{2l+2}\alpha} \left| \frac{\Gamma(-l-i\lambda)\Gamma(l+1+i\lambda)^2}{\Gamma(-l+i\lambda)\Gamma\left(\frac{l+2-i\lambda}{2}\right)^2 \Gamma\left(\frac{l+2+i\lambda}{2}\right)^2} \right|, \quad (6.6)$$

e através da equação (2.24) do teorema 2.3.1, segue que

$$\left| \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} \frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(z)}{(1-z^2)^{1/4}} \right|^2 \simeq \frac{\hbar}{2\mu[a(0)]^2}, \quad (6.7)$$

onde foram utilizados os resultados $\alpha = a(0)$ e $|\lambda| \simeq \frac{\alpha\mu}{\hbar}$.

Para $z \neq 0$, segue pela definição 10 que $|T_v^\sigma(z)| = |P_v^\sigma(z)|$. Usando a expressão assintótica (2.44) para $\lambda \rightarrow \pm\infty$ e sabendo-se que $\alpha\sqrt{1-z^2} = a(t)$, temos que

$$\left| \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} \frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(z)}{(1-z^2)^{1/4}} \right|^2 \simeq \frac{\alpha}{2[a(t)]^2} \frac{e^{-\pi|\lambda|}}{|\lambda|} \left| (-1)^{l+1} e^{-\lambda\omega} + e^{\lambda\omega} \right|^2. \quad (6.8)$$

Calculando-se as exponenciais dentro do módulo quadrático em (6.8) obtemos

$$\left| (-1)^{l+1} e^{-\lambda\omega} + e^{\lambda\omega} \right|^2 = 2 \cosh(2\lambda\Re(\omega)) + 2(-1)^{l+1} \cosh(2i\lambda\Im(\omega)). \quad (6.9)$$

O termo $2(-1)^{l+1} \cosh(2i\lambda\Im(\omega))$ tem módulo máximo 2 e é desprezível quando comparado ao termo $2 \cosh(2\lambda\Re(\omega))$, além disso $\cosh$ é uma função par. A partir desses fatos e com o uso das folhas de Riemann dadas pela equação (2.45) do teorema 2.3.4, concluimos que

$$\left| (-1)^{l+1} e^{-\lambda\omega} + e^{\lambda\omega} \right|^2 \simeq e^{\pi|\lambda|} \quad (6.10)$$

e portanto

$$\left| \sqrt{\frac{\gamma_l}{2\alpha}} \frac{T_v^{l+\frac{1}{2}}(z)}{(1-z^2)^{1/4}} \right|^2 \simeq \frac{\hbar}{2\mu[a(t)]^2}, \quad (6.11)$$

e por consequência de (6.7) e de (6.7), temos que para todo $t \in \mathbb{R}$ vale

$$2 \frac{\mu[a(t)]^2}{\hbar} \int_{S_t} \phi^*(t, \theta, \varphi) \psi(t, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \simeq \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}^* \psi_{lm}, \quad (6.12)$$

levando à verificação da tese deste teorema. $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] T. D. Newton and E. P. Wigner, “Localized States for Elementary Systems,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 21, pp. 400–406, jul 1949.
- [2] A. S. Wightman, “On the Localizability of Quantum Mechanical Systems,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 34, pp. 845–872, oct 1962.
- [3] T. O. Philips, “Lorentz Invariant Localized States,” *Physical Review*, vol. 136, pp. B893–B896, nov 1964.
- [4] G. R. Kaiser, “Phase-space approach to relativistic quantum mechanics. II. Geometrical aspects,” *J. Math. Phys.*, vol. 19, no. 2, p. 502, 1978.
- [5] N. Yokomizo and J. C. A. Barata, “Localizability in de Sitter space,” *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 45, no. 36, pp. 365–401, 2012.
- [6] R. Haag and J. A. Swieca, “When does a Quantum Field Theory describe particles?,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 1, pp. 308–320, dec 1965.
- [7] D. Buchholz and E. H. Wichmann, “Causal independence and the energy-level density of states in local quantum field theory,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 106, pp. 321–344, jun 1986.
- [8] B. Schroer, “Localization and the interface between quantum mechanics, quantum field theory and quantum gravity I,” *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, vol. 41, pp. 104–127, may 2010.
- [9] H. Araki and R. Haag, “Collision cross sections in terms of local observables,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 4, pp. 77–91, apr 1967.
- [10] K. Hepp, “The classical limit for quantum mechanical correlation functions,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 35, pp. 265–277, dec 1974.
- [11] N. Yokomizo and J. C. A. Barata, “Multiple classical limits in relativistic and nonrelativistic quantum mechanics,” *J.Math.Phys.* 50:123512,2009, July 2009.
- [12] S. W. Hawking, “Black hole explosions?,” *Nature*, vol. 248, pp. 30–31, mar 1974.
- [13] W. G. Unruh, “Experimental black-hole evaporation?,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 46, pp. 1351–1353, May 1981.
- [14] S. A. Fulling, “Nonuniqueness of canonical field quantization in riemannian space-time,” *Phys. Rev. D*, vol. 7, pp. 2850–2862, May 1973.
- [15] P. C. W. Davies, “Scalar production in schwarzschild and rindler metrics,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 8, no. 4, p. 609, 1975.

- [16] W. G. Unruh, “Notes on black-hole evaporation,” *Phys. Rev. D*, vol. 14, pp. 870–892, Aug 1976.
- [17] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiattia, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant,” *Astron.J.* 116:1009-1038, 1998, May 1998.
- [18] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, and W. J. Couch, “Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae,” *Astrophys.J.* 517:565-586, 1999, Dec. 1998.
- [19] S. Weinberg, *Cosmology*. Cosmology, OUP Oxford, 2008.
- [20] A. Linde, “Particle Physics and Inflationary Cosmology,” *Contemp. Concepts Phys.* 5 (2005) 1-362, Mar. 2005.
- [21] A. Liddle and D. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*. Cambridge University Press, 2000.
- [22] S. Cacciatori, V. Gorini, A. Kamenshchik, and U. Moschella, “Conservation laws and scattering for de Sitter classical particles,” *Class.Quant.Grav.* 25:075008, 2008, Feb. 2008.
- [23] J. Bros, H. Epstein, and U. Moschella, “Lifetime of a massive particle in a de Sitter universe,” *JCAP* 0802:003, 2008, Nov. 2007.
- [24] R. Aldrovandi, J. P. B. Almeida, and J. G. Pereira, “Cosmological Term and Fundamental Physics,” *Int.J.Mod.Phys. D* 13 (2004) 2241-2248, May 2004.
- [25] W. G. Unruh and R. M. Wald, “What happens when an accelerating observer detects a Rindler particle,” *Physical Review D*, vol. 29, pp. 1047–1056, mar 1984.
- [26] D. Marolf and C. Rovelli, “Relativistic quantum measurement,” *Phys.Rev. D* 66 (2002) 023510, Mar. 2002.
- [27] R. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*. Chicago: The University of Chicago Press, 1994.
- [28] S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [29] B. Allen, “Vacuum states in de Sitter space,” *Physical Review D*, vol. 32, pp. 3136–3149, dec 1985.
- [30] T. S. Bunch and P. C. W. Davies, “Quantum Field Theory in De Sitter Space: Renormalization by Point-Splitting,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 360, pp. 117–134, Mar. 1978.
- [31] R. Brunetti, K. Fredenhagen, and S. Hollands, “A remark on alpha vacua for quantum field theories on de Sitter space,” *JHEP* 0505:063, 2005, Mar. 2005.
- [32] F. W. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1st ed., 2010.

- [33] N. N. Lebedev, R. A. Silverman, and D. B. Livhtenberg, “Special functions and their applications,” *Phys. Today*, vol. 18, no. 12, p. 70, 1965.
- [34] C. Snow and U. S. N. B. of Standards, *Hypergeometric and Legendre functions with applications to integral equations of potential theory*. Washington : U.S. Govt. Printing Office, [2nd ed.] ed., 1961. Supersedes MT15.
- [35] C. J. Fewster, *Lectures on quantum field theory in curved spacetime*, vol. Lecture note 39/2008. Max-Planck-Institut fuer Mathematik in der Naturwissenschaften, 2008.
- [36] N. Birrel and P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space*. Cambridge: Cambridge University Press, 1982.
- [37] V. Bargmann, “Irreducible Unitary Representations of the Lorentz Group,” *Annals of Mathematics*, vol. 48, pp. 568–640, July 1947.
- [38] R. Haag, *Local Quantum Physics*. Springer Science Business Media, 1996.
- [39] A. W. Joshi, *Elements of group theory for physicists*. New York : Wiley, 2d ed ed., 1977. "A Halsted Press book."
- [40] T. O. Philips and E. P. Wigner, “De Sitter Space and Positive Energy,” in *Group Theory and its Applications* (E. M. LOEBL, ed.), pp. 631–676, Academic Press, 1968.