

# Universidade de São Paulo

## Instituto de Física

### Dinâmica da decoerência com subsistemas dissipativos

SBI-IFUSP



305M810T3563

Augusto Massashi Horiguti

Tese apresentada ao  
IFUSP para obtenção do  
título de Doutor em  
Ciências.

Comissão examinadora:

Prof. Dr. Antônio Fernando Ribeiro de Toledo Piza (Orientador) - IFUSP

Prof.<sup>ª</sup> Dr.<sup>ª</sup> Coraci Pereira Malta - IFUSP

Prof. Dr. Paulo Reginaldo Pascholati - IFUSP

Prof. Dr. Antônio Vidiela Barranco - UNICAMP

Prof.<sup>ª</sup> Dr.<sup>ª</sup> Sara Cruz Barrios - Universidad de Sevilla, Espanha

*Armando Corbani Ferraz*  
Prof. Armando Corbani Ferraz  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

São Paulo

2 001

INSTITUTO DE FÍSICA  
Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3563  
ex. 1

535.44  
H811d  
D  
ex. 1

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Horiguti, Augusto Massashi

Dinâmica da Decoerência com Subsistemas  
Dissipativos. São Paulo, 2001.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo  
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Antonio F. R. de Toledo Piza  
Área de Concentração: Física Atômica

Unitermos: 1. Decoerência;  
2. Interferometria Ramsey;  
3. Sistemas Dissipativos ("banho")

USP/IF/SBI-050/2001

## **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer ao Prof. Toledo Piza pelo fato de aceitar me orientar e pelo apoio que me foi dado.

Agradeço também ao Centro Federal de Ensino Tecnológico de São Paulo pelo incentivo em horas aulas, de forma que foi possível executar este trabalho.

Para Angela,

Que me apoiou e incentivou em todos os momentos.

Ao meu amigo Celso Eduardo e aos meus Pais,  
que foram minha inspiração para a vida acadêmica.

Ao Senhor Jesus  
pela força em vários momentos.

## Resumo

Apresentamos um estudo sobre o fenômeno da decoerência durante a evolução temporal de um estado atômico ao interagir com o campo eletromagnético de uma cavidade não ideal. Apresentamos um modelo em que o campo da cavidade está acoplado a um “banho” externo e mostramos os efeitos dissipativos que este acoplamento pode gerar na decoerência para um sistema átomo – campo. Discutimos as grandezas relevantes para análise da decoerência através de modelos analíticos e numéricos, principalmente entre os acoplamentos átomo – campo e campo – banho. Sugerimos que o retardamento observado no processo de decoerência seja uma característica geral em sistemas analisáveis como constituídos de três subsistemas acoplados seqüencialmente, com propriedades espectrais e acoplamentos suficientemente assimétricos.

## **Abstract**

We present a study of the phenomenon of decoherence in the time evolution of an atomic state interacting with the electromagnetic field of a non-ideal cavity. We present a model where the cavity field is coupled to an external “bath” and show the dissipative effects this coupling can generate in the decoherence of the atom – field system. We discuss the relevant variables for the analysis of decoherence in terms of analytic and numerical models, especially the atom-field and field-bath couplings. We suggest that the observed hindrance of the decoherence process may be a general property in systems which can be considered as formed by three subsystems coupled sequentially, with spectral properties and sufficiently asymmetric coupling.

## Índice

Seção	Pág
1. Introdução	1
2. Decoerência	7
3. Hamiltoniana de Interação e Zona de Ramsey	17
4. Sistema spin - oscilador - banho	27
5. Sistema spin - spin + banho (contínuo)	39
6. Modelo numérico esquemático para as cavidades $R_1$ e $R_2$	49
7. Discussão	63



## 1. Introdução

Com o surgimento da física quântica, novos conceitos, intuitivos ou não, vieram se juntar aos antigos conhecimentos clássicos, outrora ditos como suficientes. Um dos fatos mais impressionantes é o caráter misterioso que está por trás de certas situações, onde muitas vezes parece fugir ao senso comum das pessoas. Um dos fatos mais intrigantes foi proposto por Schroedinger<sup>[1]</sup>, em que o estado de um átomo fica vinculado a uma situação macroscópica, de forma a obtermos uma situação em que um gato pode estar vivo ou morto.

A realização experimental controlada destas situações não é trivial, de forma que muito pouco se conseguiu na época em que foram inicialmente formuladas. Porém, foram desenvolvidos instrumentos conceituais para a caracterização de alguns desses fenômenos, dentre os quais podemos citar o “emaranhamento” e a decoerência<sup>[2]</sup>. Já na década de setenta, Kübler e Zeh<sup>[3]</sup> voltam a trabalhar com o conceito de decoerência. Antes disso Ramsey<sup>[4]</sup> desenvolve técnicas interferométricas para feixes atômicos, sendo que mais tarde, através do trabalho de Jaynes e Cummings<sup>[5]</sup> foi elucidada a interação de um campo não clássico simples com átomos de Rydberg circulares. Estes estudos foram o ponto de partida para o início de uma série de experimentos que visavam a realização experimental do chamado “gato de Schrödinger”.

A partir de meados da década de 80 verificamos o início de experimentos dedicados especificamente à manipulação do estado de sistemas quânticos<sup>[6]</sup>. Dentre eles, podemos citar a criação de estados tipo “gato de Schrödinger” por C. Monroe<sup>[7]</sup>, utilizando a *radiação*, através de feixes de laser, para manipular, por meio de transições

Raman o estado de sistemas *atômicos*, em particular íons presos em uma armadilha eletromagnética. Nesses experimentos o estado inicial de um íon é dado por

$$|\psi\rangle = |q_i\rangle \otimes |i\rangle, \quad (1.1)$$

sendo  $|q_i\rangle$  o estado que representa a localização espacial do íon enquanto  $|i\rangle$  representa o estado interno do mesmo, restrito a dois estados selecionados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ .

Após a interação com feixes de Laser, através de transições Raman, o íon passa a ficar num estado tipo “gato de Schrödinger”, isto é,

$$|\psi\rangle = |S_-\rangle \otimes |g\rangle + |S_+\rangle \otimes |e\rangle, \quad (1.2)$$

$$|S_\pm\rangle = \frac{\left| \alpha e^{\frac{i\phi}{2}} \right\rangle \pm \left| \alpha e^{-\frac{i\phi}{2}} \right\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.3)$$

onde  $\left| \alpha e^{\pm \frac{i\phi}{2}} \right\rangle$  representam estados coerentes da variável posição. No estado (1.2) cada um dos estados internos ( $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ ) está associado a uma superposição de estados coerentes da posição com fases diferentes, o que corresponde à superposição coerente dos estados “gato vivo” e “gato morto”. Estando o íon neste estado, a coerência é verificada através da probabilidade de se encontrar o íon no estado  $e$  ou  $g$ :

$$P_g = \langle \psi | (|g\rangle\langle g| \otimes 1_q) | \psi \rangle = \left( 1 - \text{Re} \left\langle \alpha e^{\frac{i\phi}{2}} \left| \alpha e^{-\frac{i\phi}{2}} \right\rangle \right\rangle \right), \quad (1.4)$$

que mostra dependência com a fase  $\phi$ . Para simplificar essas expressões supusemos que produto escalar dos dois estados coerentes é desprezível. Uma característica notável deste experimento é a pequena importância de acoplamentos externos, o que efetivamente dificulta um eventual estudo da decoerência do estado exótico produzido.

Nessa mesma década, também encontramos uma outra classe de experimentos onde se utilizam sistemas atômicos para manipular o estado de radiação em cavidades<sup>[8]</sup>, onde agora é um feixe atômico que será utilizado para manipular o estado do campo eletromagnético de uma cavidade quase ideal (com alto fator de qualidade, isto é,  $Q$  da ordem de  $10^7$ ). Estes dois esquemas diferentes para manipulação do estado de sistemas quânticos são ditos “duais” por Brune et al<sup>[9]</sup>: no primeiro esquema pulsos de radiação são usados para manipular o estado atômico, enquanto no segundo, projéteis atômicos são utilizados para manipular o estado do campo na cavidade.

O feixe atômico, cujos átomos estão inicialmente no estado interno  $|g\rangle$ , passa numa primeira cavidade onde é preparado, isto é, é levado a uma superposição de estados  $e$  e  $g$ , por exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle). \quad (1.5)$$

O estado do sistema conjunto formado pelo átomo e pelo campo da cavidade quase ideal (preparado num estado coerente  $|\alpha\rangle$ ) é portanto, inicialmente,

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \otimes |\alpha\rangle, \quad (1.6)$$

onde  $\alpha$  é o estado coerente do campo eletromagnético da cavidade quase ideal.

Durante a permanência do átomo nesta cavidade haverá a sua interação com o campo eletromagnético, de modo que o estado do sistema conjunto evolui para:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |e\rangle \otimes \left| \alpha e^{\frac{i\phi}{2}} \right\rangle + |g\rangle \otimes \left| \alpha e^{-\frac{i\phi}{2}} \right\rangle \right), \quad (1.7)$$

ou ainda,

$$|\varphi\rangle = \left( \frac{|e\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left( \left| \alpha e^{\frac{i\phi}{2}} \right\rangle + \left| \alpha e^{-\frac{i\phi}{2}} \right\rangle \right) + \left( \frac{|e\rangle - |g\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left( \left| \alpha e^{\frac{i\phi}{2}} \right\rangle - \left| \alpha e^{-\frac{i\phi}{2}} \right\rangle \right). \quad (1.8)$$

Finalmente, o estado do átomo ( $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ ) é detectado após ser manipulado por uma terceira cavidade, o que corresponde a detectar estados atômicos  $\left( \frac{|e\rangle \pm |g\rangle}{\sqrt{2}} \right)$  em (1.8). Vale a pena ressaltar que a primeira e a terceira cavidade são operadas como um Interferômetro Ramsey, o que permite utilizar na manipulação estados atômicos não estacionários como os que aparecem em (1.8). Os estados atômicos utilizados neste segundo processo são “estados de Rydberg circulares”, isto é, níveis atômicos com número quântico principal alto (da ordem de 50), e momento angular máximo, ressonantes ou quase com modo da segunda cavidade, cujo estado será manipulado, sendo que a frequência da transição entre esses estados é alta (da ordem de

dezenas de GHz). Para manipular o estado do campo da segunda cavidade é necessário ter sob controle o estado do átomo de dois níveis, o que é obtido com técnicas de interferometria Ramsey, que envolve, em particular, coerência de fase nos campos da primeira e terceira cavidades<sup>[4]</sup>.

Portanto, é necessário resolver dois problemas para se obter um controle desses átomos: 1) o tempo de interação do átomo dentro da segunda cavidade, do que depende, em particular, o valor da fase  $g$  e 2) as fases e intensidades dos campos nas zonas de Ramsey que devem estar ajustadas. Vale a pena ressaltar que, devido ao forte acoplamento dipolar dos estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , a intensidade do campo dentro das cavidades que constituem o Interferômetro Ramsey deve ser baixa (tipicamente da ordem do campo de um ou dois fótons).

No caso da cavidade onde teremos a manipulação do campo, o fator de qualidade é alto ( $Q$  da ordem de  $10^7$ ), de forma que teremos um “emaranhamento” do estado atômico com o estado do campo e dessa forma haverá uma decoerência concomitante do estado atômico. Por outro lado, nas chamadas Zonas de Ramsey, que são cavidades com baixo fator de qualidade (da ordem de  $10^3$ ), é não apenas suposto, mas experimentalmente verificado, que a interação do átomo com o campo não envolve qualquer decoerência mensurável do estado atômico. Isso implica que não há “emaranhamento” do estado atômico com o estado do campo destas cavidades, porém haverá a transformação, essencialmente unitária, de um estado inicial puro ( $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ ) para um estado que é uma combinação linear dos estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ .

Neste estudo pretendemos propor modelos que permitam uma análise da evolução do estado quântico do átomo (feixe atômico) ao atravessar a primeira cavidade ou “zona de Ramsey” em que se dá a preparação do estado atômico que interagirá com a cavidade de alto  $Q$ . Essa evolução deve dar conta, em particular, do caráter

essencialmente unitário, isto é, com decoerência desprezível, que é observado experimentalmente. De uma maneira geral, o feixe atômico entra num estado  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$  e sai num estado que é uma combinação linear destes dois, isto é,

$$|e\rangle \xrightarrow{R} \frac{|e\rangle + |g\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad |g\rangle \xrightarrow{R} \pm \frac{|e\rangle - |g\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.9)$$

onde a transformação R pode ser entendida como sendo uma rotação de spin<sup>[10]</sup>, de forma que a média do spin no eixo z sofre uma transição de 1 para 0, isto é, o equivalente a 1/4 de período, durante a travessia do átomo pela cavidade. Enquanto isso, o átomo praticamente não sofre decoerência. Como será visto, o caráter dissipativo das cavidades que constituem o interferômetro Ramsey desempenha um papel essencial neste fato<sup>[11]</sup>.

Na seção 2 iremos descrever o fenômeno da decoerência assim como mostrar que não há relação direta entre esta e a transferência de energia. Na seção 3 iremos descrever de forma sucinta o experimento interferométrico de Ramsey assim como mostrar a sua analogia com o experimento de espalhamento de átomos de Rydberg por um sistema de cavidades feito por M. Brune et al<sup>[8]</sup>. Na seção 4 analisaremos um modelo com três subsistemas: átomo, principal e banho, onde o átomo é descrito por um sistema de dois níveis, o subsistema principal é um oscilador e o banho discreto composto por n osciladores. Na seção 5 trataremos de um modelo parecido com o da seção 4 mas agora com banho composto por osciladores com uma distribuição contínua de frequências, enquanto que na seção 6 damos um tratamento numérico exato para uma versão discretizada deste modelo. Na seção 7 apresentamos uma discussão geral sobre os modelos propostos e conclusões finais.

## 2. Decoerência

Na mecânica quântica é geral a correlação dos estados de subsistemas acoplados, no sentido que o estado do sistema como um todo não é determinado pelos estados de cada um dos subsistemas. Isto pode ser visto facilmente num sistema de dois spins acoplados linearmente, isto é, com uma Hamiltoniana do tipo  $H = \hbar g S_1 S_2$ , com o estado inicial definido por um estado fatorado do tipo  $|0\rangle = |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$  e que, após um intervalo de tempo, o estado evoluirá para uma situação onde não será mais possível ser fatorado. Este fenômeno é chamado de “emaranhamento” (“entanglement”), e tem como contra-partida para o estado de cada um dos subsistemas a decoerência<sup>[12]</sup>, isto é, não existe para cada um destes estados uma descrição em termos de um vetor de estados, ou de uma função de onda.

O estudo da decoerência na mecânica quântica não é trivial e, para uma compreensão maior desse fenômeno, vamos procurar fazer uma análise mais prática através de modelos que permitam obter estimativas quantitativas e compreender suas aplicações e implicações.

Para ilustrar a utilidade deste fenômeno, basta lembrarmos que, embora os efeitos das interferências macroscópicas desaparecem quando um observável coletivo é medido em um estado inicialmente puro, de forma que desse ponto de vista o gato de Schroedinger está efetivamente vivo ou morto e o estado permanece puro após uma evolução temporal unitária, de forma que, em princípio, a interferência ainda poderia ser encontrada se utilizássemos um observável melhor<sup>[12]</sup>. Porém, a possibilidade real de implementação efetiva da medida de tais observáveis pode ser questionada de forma que é possível manter a decoerência como possível resposta para um dos problemas mais

velhos da mecânica quântica: a superposição de estados macroscopicamente distinguíveis.

O estudo da decoerência é relativamente antigo, visto que Schroedinger<sup>[2]</sup> já trabalhava em 1935 com esta idéia, apesar de não utilizar tal nomenclatura. Schroedinger, trabalhando com a representação de Schmidt, mostrava existir um “emaranhamento” (“entanglement”) entre os estados dos subsistemas após a interação, que nada mais era que uma correlação entre eles. Essas idéias foram retomadas mais tarde, Kübler e Zeh<sup>[3]</sup>.

Porém, apenas recentemente podemos encontrar um maior número de estudos da decoerência de vários sistemas, especialmente após o trabalho de Zurek<sup>[12]</sup>. Foi o próprio Zurek quem introduziu o termo decoerência como o aspecto da evolução quântica de sistemas compostos com muitos graus de liberdade que acompanha a correlação entre eles.

Desenvolveremos o conceito da decoerência para uma situação particular, onde temos um sistema constituído inicialmente de dois subsistemas desacoplados e em um estado quântico que pode ser escrito como o produto dos estados de cada um dos subsistemas e incluindo a seguir um acoplamento que produz correlações entre eles. Tal situação é muito comum de ser encontrada na Física, e na realidade reproduz o que foi considerado por Schroedinger em 1935: quando tratamos o sistema a ser observado desacoplado de qualquer interação, de forma que temos uma hamiltoniana do tipo:

$$H = H_1 + H_2 \quad (2.1)$$

onde  $H_1$  é a hamiltoniana do sistema em questão que está desacoplado dos demais subsistemas (representado por  $H_2$ ), isto é, não existe acoplamentos entre o subsistema 1



e os demais. Porém, para se ter uma descrição mais realística é necessário considerar a interação entre  $H_1$  e  $H_2$ , que pode representar algum sistema externo (o ambiente, por exemplo), introduzindo o acoplamento ( $H_{int}$ ), que será o responsável pela interação entre os dois sistemas  $H_1$  e  $H_2$ :

$$H = H_1 + H_2 + H_{int}. \quad (2.2)$$

Vale ressaltar que esta interação pode ser de várias formas desde que a hamiltoniana de interação ( $H_{int}$ ) seja hermiteana, a fim de que tenhamos uma evolução unitária. Caso esta interação seja independente do tempo o sistema será “fechado”, ou “autônomo”, caso contrário o sistema será “aberto”.

Diferentemente da Teoria Clássica, a Teoria Quântica prevê a existência de estados que correspondem à superposição de outros estados (“puros”), e não dispõe de qualquer mecanismo que impeça a extensão das superposições até aquelas que sejam “macroscopicamente” distinguíveis, isto é, estados que sejam uma combinação de dois ou mais destes estados “puros” (os famosos “gatos de Schroedinger”) e a interação entre os subsistemas poderá fazer com que o sistema evolua para estes estados. Sendo estados puros, estes por sua vez podem ser descritos através da matriz densidade  $\rho(t)$  ou pela função de onda  $\Psi(t)$  na descrição de Schroedinger.

Geralmente se utiliza a descrição de Schroedinger em termos do operador densidade  $\rho(t)$ . Podemos ter inicialmente, por exemplo, a matriz densidade no instante  $t = 0$  s como sendo:

$$\rho(0) = |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1| \otimes |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2| \equiv \rho_1(0) \otimes \rho_2(0), \quad (2.3)$$

onde  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são, respectivamente, os estados iniciais dos subsistemas 1 e 2, mostrando que, inicialmente, os sistemas se encontram fatorados, fazendo com que  $\rho^2(0) = \rho(0)$ .

Após um certo intervalo de tempo, temos:

$$\rho(t) = U(t;0)\rho(0)U^\dagger(t;0) \quad (2.4)$$

e, para  $H$  independente do tempo, temos:

$$\rho(t) = \exp\left(-\frac{iHt}{\hbar}\right)\rho(0)\exp\left(\frac{iHt}{\hbar}\right). \quad (2.5)$$

Devido às propriedades do operador de evolução  $U$  e  $U^\dagger$ , isto é,  $UU^\dagger = U^\dagger U = I$ , encontramos:

$$\rho^2(t) = U(t;0)\rho(0)U^\dagger(t;0)U(t;0)\rho(0)U^\dagger(t;0) = U(t;0)\rho(0)U^\dagger(t;0) = \rho(t). \quad (2.6)$$

Desta forma, não existe nenhum processo de perda de coerência ao se analisar o sistema como um todo. Porém, muitas vezes observamos o estado final apenas de um dos subsistemas. Dessa forma, analisamos apenas a parte da matriz densidade relativa ao subsistema efetivamente observado (geralmente o subsistema 1), o que nos leva a calcular a chamada densidade reduzida, na qual isolamos as variáveis do subsistema 1 da matriz densidade  $\rho(t)$ :

$$\rho_1(t) = \text{tr}_2 \rho(t), \quad (2.7)$$

onde  $\rho_1(t)$  representa a matriz reduzida para o sistema 1.

No caso de sistemas correlacionados, vamos notar que  $\rho_1^2(t) \neq \rho_1(t)$ , o que equivale a dizer que existem correlações (“emaranhamento”) entre os subsistemas 1 e 2. A perda de coerência do sistema considerado pode ser medida em termos de função tipo “entropia”, calculada em termos da matriz densidade reduzida<sup>[13]</sup>:

$$\delta(t) = -tr\{\rho(t) \cdot \ln[\rho(t)]\}. \quad (2.8)$$

Uma expressão de uso mais simples é a que é obtida substituindo o logaritmo por uma função linear. Equivalentemente, para evitar valores negativos, é conveniente usar a expressão<sup>[14]</sup>:

$$\delta_1(t) = tr_1\{\rho_1(t)\} - tr_1\{\rho_1^2(t)\} = 1 - tr_1\{\rho_1^2(t)\}. \quad (2.9)$$

Assim, podemos notar que a decoerência é um efeito dinâmico presente nos subsistemas do sistema completo que traduz quantitativamente as correlações existentes entre os subsistemas acoplados, porém de difícil verificação experimental, tendo em vista que é muito mais difícil medir propriedades de coerência do estado quântico, o que envolve tipicamente medidas de correlação, do que medir algum parâmetro, como energia, por exemplo. Mesmo assim, é um ingrediente importante para se entender processos quânticos envolvendo sistemas complexos, isto é com vários subsistemas.

Quando temos um sistema descrito pela hamiltoniana da equação (2.2), isto é, dois subsistemas que interagem entre si poderá em geral existir troca de energia entre os subsistemas descritos por  $H_1$  e  $H_2$ , sendo que podemos verificar tal troca pelo cálculo das energias médias:

$$\langle H_1(t) \rangle = \text{tr}_{1,2} \{ \rho(t) H_1 \} \quad (2.10)$$

e

$$\langle H_2(t) \rangle = \text{tr}_{1,2} \{ \rho(t) H_2 \}. \quad (2.11)$$

É muito comum haver uma associação entre decoerência e dissipação de energia, porém esses dois fenômenos são independentes. Para ilustrar este fato, basta citarmos dois casos particulares:

No primeiro, vamos estudar o caso que o acoplamento não provoca decoerência mas existem, assim mesmo, processos de troca de energia (dissipação). Isto pode ser ilustrado por um sistema composto por dois osciladores, subsistemas **a** e **b**, acoplados linearmente, com o estado inicial sendo um produto de estados coerentes, isto é,

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \quad (2.12)$$

com  $H_0 = \hbar \omega_a (a^\dagger a) + \hbar \omega_b (b^\dagger b)$ ,  $H_{\text{int}} = \hbar \lambda (a^- b + b^- a)$  e  $\rho(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes |\beta\rangle\langle\beta|$ .

Podemos verificar facilmente que a matriz reduzida num tempo  $t$  será dada

por:

$$\rho(t) = |u(t)\rangle\langle u(t)| \otimes |v(t)\rangle\langle v(t)| \quad (2.13)$$

onde  $u(t)$  e  $v(t)$  são estados coerentes com a condição inicial dada por  $u(t=0) = \alpha$  e  $v(t=0) = \beta$ . Dessa forma, como os estados não se misturam, isto é, continuam fatorados, não há decoerência, porém, existe a troca de energia entre os estados.

Também podemos chegar a este resultado usando a representação de interação e usando por simplicidade  $\beta = 0$ . Desse modo encontramos a matriz densidade no tempo  $t$  que é dada por:

$$\rho(t) = \rho(0) + \frac{i}{\hbar} \int_0^t [H_{\text{int}}, \rho(t')] dt' \quad (2.14)$$

onde  $H_{\text{int}}(t) = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} H_{\text{int}} e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}$ , que, para uma aproximação em 2ª ordem fornece uma matriz densidade reduzida:

$$\rho_a(t) = \text{Tr}_b \{ \rho(t) \} = \rho_a(0) - I(t) \lambda^2 (a^- a \rho_a - a \rho_a a^+), \quad (2.15)$$

onde 
$$I(t) = \frac{2}{(\omega_a - \omega_b)^2} \{1 - \cos[(\omega_a - \omega_b)t]\}.$$

Assim, podemos determinar a decoerência em relação ao subsistema **a**:

$$\delta_a(t) = 1 - \text{tr}_a \{ \rho_a^2(t) \} = 0, \quad (2.16)$$

isto é, não há decoerência no subsistema **a**.

Porém, ao calcularmos a energia média deste subsistema, vamos obter, na mesma aproximação:

$$\langle H_a \rangle = \text{tr} \{ H_a \rho(t) \} = \frac{2\omega_a \lambda^2 |\alpha|^2}{(\omega_a - \omega_b)^2} \{ 1 - \cos[(\omega_a - \omega_b)t] \} \quad (2.17)$$

indicando que esta média oscila com uma frequência dada por  $\omega_a - \omega_b$ .

No segundo caso particular verificaremos a situação inversa, isto é, a energia de um dos subsistemas é uma constante do movimento, mas mesmo assim há um processo de “emaranhamento”. Novamente temos, como exemplo, dois osciladores, **a** e **b**, acoplados de maneira não linear. O estado inicial de um dos osciladores não é um estado coerente, mas sim uma superposição de estados de Fock:

$$H = H_{\text{el}} + H_{\text{int}} \quad (2.18)$$

$$\text{onde } H_{\text{el}} = \hbar \omega_a (a^\dagger a) + \hbar \omega_b (b^\dagger b), \quad H_{\text{int}} = \hbar \lambda a^\dagger a (b + b^\dagger) \quad \text{e}$$

$$\rho(0) = |\alpha\rangle\langle\alpha| \otimes \left\{ \left( \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Note que  $[\hbar \omega_a (a^\dagger a), H] = 0$ , então a energia do subsistema **a** é uma constante do movimento.

Usando o mesmo procedimento utilizado no caso anterior, vamos encontrar a matriz densidade no tempo  $t$ , que, para uma aproximação em 2ª ordem fornece uma matriz densidade reduzida:

$$\rho_a(t) = \text{tr}_b\{\rho(t)\} = \rho_a(0) - I(t)\lambda^2(a^\dagger a \rho_a), \quad (2.19)$$

onde 
$$I(t) = \frac{2}{(\omega_b)^2} \{1 - \cos[(\omega_b)t]\}.$$

Da mesma forma, podemos determinar a decoerência em relação ao subsistema **a**:

$$\delta_a(t) = 1 - \text{tr}_a\{\rho_a^2(t)\} = \frac{\lambda^2}{(\omega_b)^2} \{1 - \cos[(\omega_b)t]\} \quad (2.20)$$

cujo valor agora oscila com uma frequência  $\omega_b$ . Porém, ao calcularmos a energia média do subsistema **a** vamos obter:

$$\langle H_a \rangle = \text{tr}\{H_a \rho(t)\} = \frac{\hbar\omega_a}{2} \quad (2.21)$$

que é um valor constante.

Assim, através destes dois casos, podemos verificar que existe uma independência entre a dissipação de energia e a decoerência de um subsistema. Logicamente estes casos são extremos, mas servem para ilustrar que não devemos identificar estes dois fenômenos.

No caso que iremos estudar, Zonas de Ramsey, vamos verificar a existência de uma decoerência muito pequena quando temos um dos subsistemas fortemente amortecido.



### 3. Hamiltoniana de Interação e Zona de Ramsey

O estudo de interações de feixes atômicos ou moleculares com campos eletromagnéticos foi introduzido por Rabi e seus associados<sup>[15]</sup> em 1938, através da ressonância magnética de feixes de moléculas. Entretanto, há descrições de alguns experimentos anteriores a esta data feitas por Darwin<sup>[16]</sup> em 1928, onde eram analisados os aspectos quânticos das transições não adiabáticas. Em outros trabalhos, Motz<sup>[17]</sup>, Rabi<sup>[18]</sup> e Schwinger<sup>[19]</sup> discutem o significado dos cálculos da probabilidade de transição para moléculas que atravessam uma região em que a direção de um campo que varia rapidamente.

Porém, foi Ramsey<sup>[4]</sup> que introduz o conceito de uma região contendo um campo clássico que interage com um feixe de partículas com um alto momento de dipolo, de forma que existe uma ressonância molécula-campo, sendo que esta é uma interação entre um campo magnético e moléculas.

O estudo deste tipo de interação em feixes atômicos ganhou força com os estudos de Jaynes e Cummings<sup>[5]</sup>, onde foi proposta a interação de um campo eletromagnético não clássico com átomos de Rydberg circulares, que são átomos, geralmente alcalinos, que possuem o último elétron (elétron “ativo”) num nível extremamente alto (por volta de  $n = 50$ ) e com o maior momento angular compatível com a energia de excitação, podendo ser considerado uma forma de “átomo de Hidrogênio” visto que os demais elétrons formam uma “blindagem” de forma que o elétron mais externo sente apenas o núcleo como tendo uma única carga positiva.

Ramsey fez experiências de interferometria com feixes de moléculas interagindo com campos clássicos. A experiência consistia basicamente em um feixe de moléculas tais como  $H_2$ ,  $D_2$  e  $HD$  sofrendo a interação de um campo magnético, sendo

que este campo possuía um alto valor (da ordem de  $10^3$  gauss), fato este necessário para que os efeitos da interação pudessem ser observados. Assim o campo magnético usado não foi um campo de radiação, mas, sim um campo externo intenso. Vale a pena ressaltar que neste tipo de arranjo os processos de interação elétrica são desprezíveis, o que permite o estudo da interação magnética.

O instrumental era basicamente composto por uma fonte de onde eram emitidos os feixes de moléculas que, logo em seguida, atravessavam o magneto "A", que foi chamado "defletor", passando pelo magneto "C", onde efetivamente agiria o campo de interação que iria "colimar" o feixe, passando pelo magneto "B", chamado "refocador", chegando finalmente a um detector. O campo magnético presente em "C" possuía uma dependência temporal, da mesma forma que em "A" e "B":

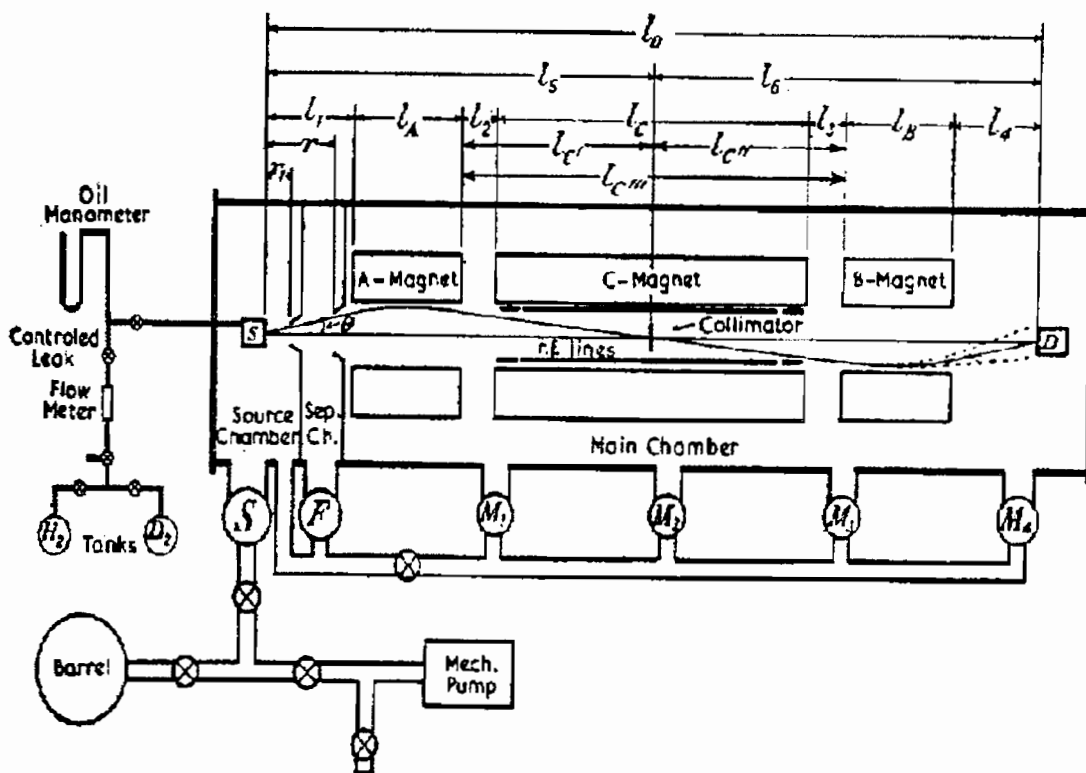


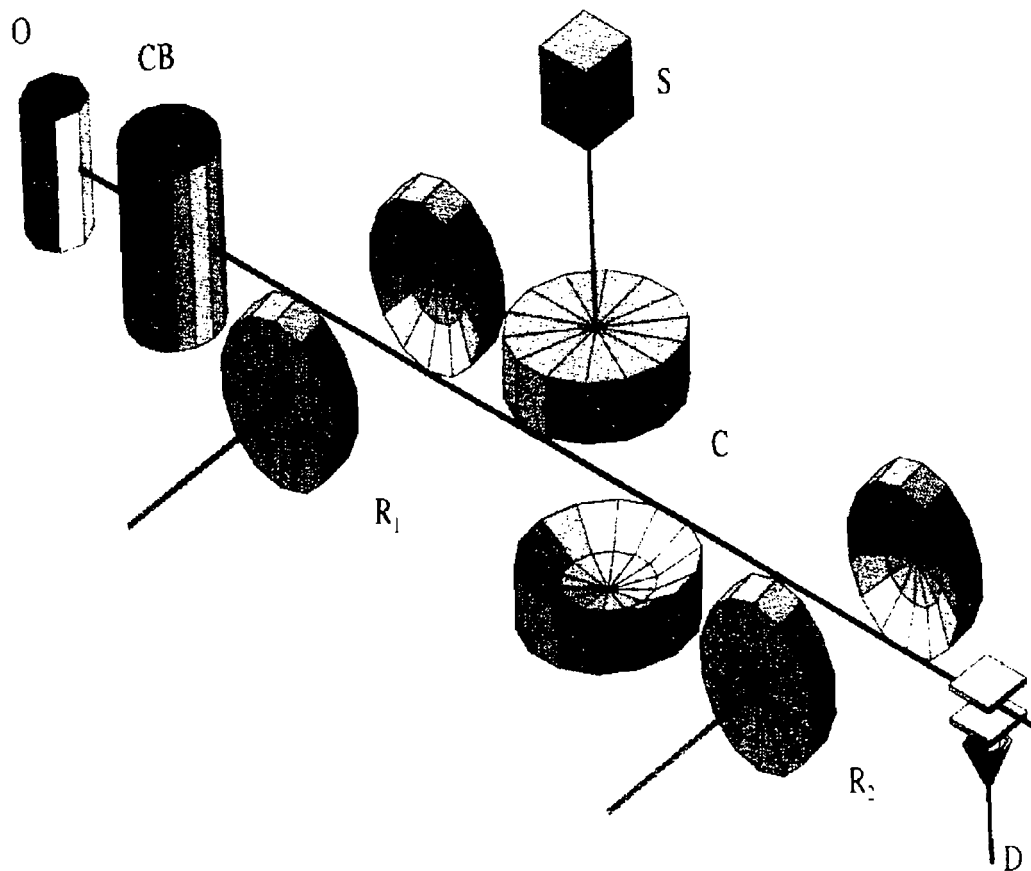
Figura 3.1. Descrição do aparato do Interferômetro Ramsey<sup>[4]</sup>.

Moléculas eletricamente neutras ou átomos que possuem momentos magnéticos serão defletidos pelos campos magnéticos não homogêneos e, conseqüentemente, sem esses campos, as moléculas se dirigiriam linearmente para o detector, conforme a linha reta na figura 3.1. A deflexão mostrada na figura 3.1 está caracterizada de forma exagerada, visto que na prática é na ordem de 0,006 cm. Numa situação em que não há campo no magneto “B”, as moléculas não serão captadas pelo detector. Porém, se o campo magnético no magneto “B” possui a direção do gradiente oposto ao do magneto “A” e com uma intensidade adequadamente selecionada, o feixe será redirecionado para o detector.

A condição de refocamento depende ainda da magnitude e orientação do momento magnético molecular resultante, sendo a mesma para o campo refocador e para o campo defletor. Como resultado, se o estado molecular se alterar entre as regiões “A” e “B”, a intensidade do feixe será reduzida, em geral. Dessa forma, estas duas regiões servem para determinar a alteração do estado molecular produzida pelo magneto “C”. Esta forma de medida é chamada “Interferometria de Ramsey”, sendo que este modelo de três regiões com campo é conhecido como “Interferômetro de Ramsey”.

Posteriormente, Jaynes e Cummings<sup>[5]</sup> estudaram a interação entre um átomo de Rydberg com o campo de radiação, não clássico, confinado numa cavidade ideal, em termos análogos aos da interferometria Ramsey, mas agora com campos elétricos da radiação interagindo com os momentos de dipolos elétricos dos átomos.

Recentemente, foram feitos experimentos por S Haroche<sup>[8]</sup> em que átomos de Rydberg sofrem interação de um campo de radiação (não clássico), e que são uma particular realização da proposta de Jaynes e Cummings. O sistema é atualmente estudado na ENS, que envolve estados circulares de Rydberg acoplados com Cavidade supercondutora com microondas conforme a figura 3.2.



*Figura 3.2. Representação esquemática do aparato da referência [8].*

A Hamiltoniana do sistema átomo-campo que descreve a interação de um campo de radiação  $E$  com o elétron “ativo” de um Átomo de Rydberg e pode ser descrita da forma:

$$H = H_A + H_F - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.1)$$

Aqui  $H_A$  e  $H_F$  são as energias do átomo e do campo de radiação, respectivamente, na ausência da interação, e  $e\mathbf{r}$  é o momento de dipolo elétrico do átomo. Na aproximação de dipolo, o campo é considerado como sendo uniforme no átomo.

A energia do campo livre  $H_F$  pode ser escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação para os diferentes modos do campo:

$$H_F = \sum_k \hbar \omega_k \left( a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \right). \quad (3.2)$$

Podemos expressar  $H_A$  e o termo  $e\mathbf{r}$  em termos do operador de transição atômico,  $\sigma_{ij} = |i\rangle\langle j|$ , sendo que  $\{|i\rangle\}$  representa um conjunto completo de autoestados de energia atômicos. isto é,  $\sum_i |i\rangle\langle i| = 1$ . Dessa forma podemos escrever:

$$H_A = \sum_i e_i \sigma_{ii} \quad (3.3)$$

$$e\mathbf{r} = \sum_{ij} \mathbf{d}_{ij} \sigma_{ij}. \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{d}_{ij}$  representa o elemento da matriz da transição de dipolo, isto é,  $\mathbf{d}_{ij} = e\langle i|\mathbf{r}|j\rangle$ . O operador campo elétrico é determinado pela aproximação de dipolo e, para o átomo na origem do sistema de coordenadas temos,

$$\mathbf{E} = \sum_k \varepsilon_k \xi_k (\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^\dagger), \quad (3.5)$$

onde  $\xi_k = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0V}}$  e  $\varepsilon_k$  é a polarização. Para simplificar, usaremos polarização linear e o vetor de polarização como sendo real. Adotando as fases dos átomos de modo que  $d_{ij}$  seja real, temos,

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + (E_a \sigma_{aa} + E_b \sigma_{bb}) + \hbar \sum_k g_k (\sigma_{ab} + \sigma_{ba})(a_k + a_k^\dagger) \quad (3.6)$$

onde  $g_k$  envolve as constantes e o elemento da matriz de transição de dipolo:

$$g_k^{ij} = g_k^j = g_k = \frac{d_{ij} \cdot \varepsilon_k \xi_k}{\hbar}. \text{ Estamos omitindo desta hamiltoniana os termos constantes.}$$

Como apenas os dois níveis de Rydberg estarão efetivamente acoplados com a frequência do campo, podemos considerar o átomo como de dois níveis, isto é,  $\sigma_z = \sigma_{11} - \sigma_{22} = |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|$ ,  $\sigma_- = \sigma_{12} = |1\rangle\langle 2|$ ,  $\sigma_+ = \sigma_{21} = |2\rangle\langle 1|$ , os quais satisfazem as relações de comutação de momento angular. Como o espaço possui duas dimensões podemos representá-lo pelas matrizes de Pauli.

Usando esses fatos em (3.6), em termos das matrizes de Pauli, podemos escrever a hamiltoniana como:

$$H = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \hbar\omega_a \sigma_z + \hbar \sum_k g_k (\sigma_- + \sigma_+)(a_k + a_k^\dagger). \quad (3.7)$$

A energia de interação na equação acima consiste de quatro termos. O termo  $a_k^\dagger \sigma_-$  descreve o processo em que o fóton do modo  $k$  é criado. O termo  $a_k \sigma_+$  descreve o processo oposto, sendo que existe uma compensação, em geral parcial, da

energia transferida no processo, por isso chamado “processo ressonante”. O termo  $a_k \sigma_-$  descreve o processo em que o átomo faz a transição de um nível mais excitado para um de menor energia de excitação e um fóton é aniquilado resultando em uma variação negativa de aproximadamente  $2\hbar\omega$ . Analogamente  $a_k^+ \sigma_+$  resulta numa variação positiva da ordem de  $2\hbar\omega$ , sendo que estes dois processos são chamados “anti-ressonantes”. A aproximação que consiste em ignorar os termos “anti-ressonantes” corresponde a chamada aproximação de onda girante, simplificando a hamiltoniana do sistema:

$$H \cong H_{RWI} = \sum_k \hbar\omega_k a_k^- a_k + \frac{1}{2} \hbar\omega_a \sigma_z + \hbar \sum_k g_k (\sigma_- a_k + \sigma_+ a_k^+). \quad (3.8)$$

A simplificação introduzida por essa aproximação resulta de que em (3.8)

$\sum_k a_k^- a_k + \frac{\sigma_z}{2}$  é uma constante do movimento, tornando o problema solúvel no sentido

de que estados estacionários de (3.8) podem ser obtidos pela diagonalização de matrizes  $2 \times 2$ .

Em termos práticos, a cavidade ideal é realizada em termos de uma cavidade supercondutora, o que permite operá-la em um regime dissipativo fraco na faixa de microondas<sup>[20], [21], [22] e [23]</sup>, isto é, com um fator de qualidade na ordem de até  $10^9$ , feita com nióbio supercondutor resfriado a 1K ou menos e dimensões da ordem de centímetros. Um dos modos baixos da cavidade está sintonizado com a transição entre dois estados atômicos de Rydberg circulares (átomos de Rubídio,  $n \approx 50$ ). Esses estados atômicos possuem um momento de dipolo elétrico de transição muito alto (em termos da equação (3.8), com um fator  $g$  na ordem de  $10^5$  rad/s) comparados com valores típicos de estados atômicos normais, porém com uma vida média “livre” muito longa, isto é,  $T_{at}$  da ordem de  $10^{-2}$  segundos para  $n = 50$ , devido à pequena energia envolvida

na transição. Estes átomos são preparados pela excitação de um feixe atômico saindo do forno O usando processos descritos em [24]. Desde que preparados, os átomos circulares propagam-se como um feixe atômico na velocidade térmica ( $v = 300$  m/s) ao passar por C. A frequência de ressonância  $\omega_0$  entre os estados circulares  $n$  e  $n-1$  (aqui chamados de  $e$  e  $g$ , respectivamente) é aproximadamente 50 GHz para  $n = 50$  (comprimento de onda aproximadamente 0,6 cm). Com esses parâmetros de acoplamento as condições de acoplamento coerente são satisfeitas, isto é,  $T_{at} > T_{cav} > \tau$ , sendo o tempo de relaxação  $T_{cav}$  da ordem de  $10^{-3}$  segundos e o tempo de trânsito do átomo na cavidade ( $\tau$ ) da ordem de  $10^{-5}$ , isto é, o número de períodos de Rydberg em  $T_{at}$  e  $T_{cav}$  são grandes.

É possível também preparar o estado inicial do átomo como sendo uma superposição de estados de Rydberg. Para isso utiliza-se outra cavidade  $R_1$  colocada entre CB e C na qual é mantido um campo de radiação para aplicar um pulso ressonante nos átomos preparados que atravessam essa cavidade antes de injetá-los na cavidade C, deixando-os na forma  $c_e|e\rangle + c_g|g\rangle$ , onde os coeficientes  $c_e$  e  $c_g$  podem ser ajustados pelos parâmetros do pulso aplicado através de  $R_1$ , efeito este devido à presença de um campo de radiação nesta cavidade. Após deixar a cavidade C os átomos são detectados por detectores de ionização e os íons resultantes contados no detector D. Esta detecção pode ser efetuada inserindo uma segunda zona de microondas  $R_2$  entre a cavidade C e o detector D misturando novamente  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ . A combinação de  $R_2$  e D atua como um detector sensível a qualquer superposição  $c_e'|e\rangle + c_g'|g\rangle$  de dois níveis relevantes de Rydberg.

Um importante comportamento desta construção é o caráter de interferometria de Ramsey, onde a primeira zona  $R_1$  prepara os átomos numa



superposição linear de estados atômicos, então os átomos experimentam, devido à diferente interação de  $e$  e  $g$  com o campo da cavidade  $C$ , diferentes “históricos” ao atravessar a cavidade  $C$  em qualquer nível  $e$  ou  $g$ . A segunda zona  $R_2$  mistura novamente as duas partes da função de onda antes da detecção ocorrer. A interação de um átomo com o campo  $e$  na cavidade  $C$  pode afetar diferentemente as duas probabilidades de amplitude associadas com a travessia do átomo na cavidade nos níveis  $e$  e  $g$ .

As cavidades  $R_1$  e  $R_2$  possuem características diferentes da cavidade principal  $C$ , visto que o tempo de relaxação da cavidade  $T_{\text{cav}}$  dessas cavidades é muito menor que  $T_{\text{cav}}$  da cavidade  $C$  e, portanto, com um fator de qualidade menor que  $C$  (na ordem de  $10^3$ ), de forma que estas cavidades devem ser constantemente “bombeadas” visto que, de outra forma, o campo presente nelas decairia rapidamente.

O campo de radiação das cavidades  $R_1$  e  $R_2$  pode ser estimado através do número médio de fótons que eles possuem, supondo uma excitação tipo coerente. Usando apenas o termo de interação da equação (3.7), vamos obter um operador de evolução temporal do tipo  $U(t) = \exp\{-2ig\langle a^\dagger + a \rangle \sigma_1 t\}$  que, para uma evolução de um estado puro  $e$  ou  $g$  para um estado “misturado”, fornece um entre  $0$  rad e  $\pi/4$  para o argumento  $2g\langle a^\dagger + a \rangle t$ . Assim, para uma cavidade de dimensões  $\lesssim 1$  centímetro, o que, com as velocidades atômicas típicas dá tempos de interação  $t$  da ordem de  $10^{-5}$  segundos e com o valor de  $g$  da ordem de  $10^5$  rad/s, vamos obter que o valor médio  $\langle a^\dagger + a \rangle \sim 1$ . Este valor indica que o número de fótons envolvidos é pequeno (o equivalente à presença de 1 fóton) de forma que características não clássicas deveriam ser esperadas.

Ao utilizarmos a hamiltoniana de Jaynes-Cummings (3.8) vamos obter um resultado diferente do que é obtido experimentalmente, isto é, supondo a cavidade

inicialmente num estado coerente  $\alpha$ , após a passagem do átomo fundamental  $g$ , o átomo teria uma decoerência dada por  $\delta(t) = 2g^2|\alpha|^2 \left\{ \frac{1 - \cos[(\varepsilon - \omega)t]}{\varepsilon - \omega} \right\}$ , de forma que a decoerência cresce com o tempo, fazendo com que a mistura dos estados  $e$  e  $g$  fosse meramente estatística. Isto é, devido ao fato de que a cavidade se correlaciona muito fortemente com o átomo. Porém, experimentalmente, esse processo de decoerência não é observado.

Tal situação mostra que a hamiltoniana de Jaynes-Cummings (3.8) não é capaz de descrever os fenômenos que ocorrem nessas cavidades. Esta situação sugere que mesmo a cavidade possuindo um campo quântico, ela passa a possuir características clássicas (Ramsey), no sentido de não levar a uma perda de coerência do estado atômico.

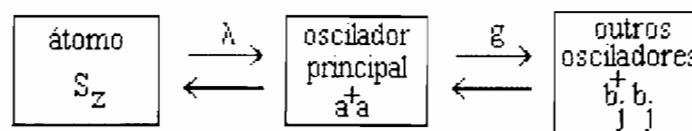
#### 4. Sistema spin - oscilador - banho

Quando o interesse principal recai sobre a análise da cavidade C, com alto fator de qualidade (da ordem de  $10^7$ ), temos como aproximação de ordem zero um modelo de interação do átomo com apenas um oscilador, que representa o modo relevante da cavidade C, isto é:

$$H = \hbar \varepsilon S_z + \hbar \omega_a a^\dagger a + \hbar \lambda (a^\dagger S_- + a S_+) \quad (4.1)$$

onde os autovalores de  $S_z$  representam os dois níveis do átomo de Rydberg, os operadores  $a^\dagger$  e  $a$  representam o oscilador e  $\lambda$  é um parâmetro com dimensões de frequência que caracteriza a interação entre átomo e o campo. Quando  $\varepsilon = \omega_b$  dizemos que o sistema é ressonante. Se  $\varepsilon \approx \omega_b$  dizemos então que o sistema é quase ressonante e definimos  $\Delta\varepsilon$  como sendo a chamada dessintonia, i.e.,  $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \omega_b$ .

Porém, conforme o capítulo anterior, nosso interesse recai não na cavidade principal mas, sim, nas cavidades de preparação  $R_1$  e  $R_2$ . A aproximação de ordem zero deve incluir o amortecimento da cavidade. Neste caso temos uma cavidade com temperaturas próximas de 0 K. Pode ser utilizado o modelo padrão para o banho, que consiste numa coleção de osciladores harmônicos acoplados ao oscilador que representa o modo relevante da cavidade:



Neste caso, podemos escrever a Hamiltoniana do sistema, utilizando a aproximação de onda girante, da seguinte forma:

$$H = \hbar \varepsilon S_z + \hbar \omega_a a^\dagger a + \hbar \lambda (a^\dagger S_- + a S_+) + \hbar \sum_j^n \omega_j b_j^\dagger b_j + \hbar \sum_j^n g_j (a^\dagger b_j + b_j a) \quad (4.2)$$

O subsistema átomo - oscilador principal se torna dissipativo, isto é, quando o átomo entra neste tipo de cavidade ele pode transferir energia para o oscilador principal e este transferi-la para o reservatório e, caso este tenha um tempo de relaxação suficientemente curto em relação ao tempo de evolução do sistema átomo - cavidade, tal energia ficaria perdida no reservatório. Assim, para manter um campo estacionário na cavidade, torna-se necessário que coloquemos uma antena nesta cavidade, cuja função é servir como fonte externa, mantendo na cavidade um campo estacionário. A dependência temporal de tal antena, ou fonte, pode ser tomada como sendo harmônica, isto é,

$$f(t) = f_0 \exp(-i \omega_F t). \quad (4.3)$$

O efeito de tal fonte é manter um estado coerente no oscilador principal. Assim, podemos descrever os efeitos desta antena adicionando a hamiltoniana os termos:

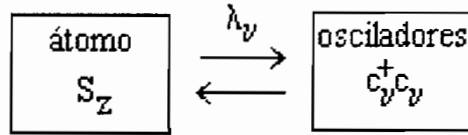
$$H_F = \hbar \alpha^- f(t) + \hbar \alpha f^*(t) \quad (4.4)$$

onde a existência dos dois termos (o segundo como complexo conjugado do primeiro) torna  $H_F$  hermitiano.

Finalmente, a Hamiltoniana total deste sistema ficará com a seguinte forma:

$$H = \hbar \varepsilon S_z + \hbar \omega_o \alpha^- a + \hbar \lambda (\alpha^+ S_- + \alpha S_+) + \hbar \sum_{j=1}^n \omega_j b_j^+ b_j + \\ + \hbar \sum_{j=1}^n g_j (\alpha^+ b_j + b_j^+ a) + \hbar \{ \alpha^- f(t) + \alpha f^*(t) \} \quad (4.5)$$

Podemos reescrever a Hamiltoniana (4.5) substituindo os osciladores (principal e do reservatório) por um novo conjunto de osciladores que representam os modos normais dos primeiros, isto é, o átomo agora irá interagir com  $n+1$  "novos" osciladores. Esquemáticamente,



fazendo com que a Hamiltoniana fique da seguinte forma:

$$H = \hbar \epsilon S_z + \hbar \sum_{\nu=0}^n \omega_{\nu} c_{\nu}^+ c_{\nu} + \hbar \sum_{\nu=0}^n \lambda_{\nu} (c_{\nu}^+ S_{-} + c_{\nu} S_{-}) + \hbar \sum_{\nu=0}^n [c_{\nu}^+ F_{\nu}(t) + c_{\nu} F_{\nu}^*(t)] \quad (4.6)$$

sendo que são válidas as seguintes relações entre os operadores  $a$ ,  $b_j$  e  $c_{\nu}$ :

$$c_{\nu} = A_{\nu} a + \sum_{j=1}^n B_{j\nu} b_j \quad (4.7)$$

$$c_{\nu}^+ = A_{\nu}^* a^+ + \sum_{j=1}^n B_{j\nu}^* b_j^+ \quad (4.8)$$

$$F_{\nu}(t) = A_{\nu} f(t) = A_{\nu} f_0 \exp(-i\omega_{\nu} t) \quad (4.9)$$

$$F_{\nu}^*(t) = A_{\nu}^* f^*(t) = A_{\nu}^* f_0^* \exp(i\omega_{\nu} t) \quad (4.10)$$

onde foi usada a convenção:  $\lambda_{\nu} = A_{\nu} \lambda$ .

Assim,  $\hbar \omega_{\nu} a^+ a + \hbar \sum_j \omega_j b^+ b + \hbar \sum_j g_j (a^+ b_j + a b_j^+) = \hbar \sum_{\nu} \omega_{\nu} c_{\nu}^+ c_{\nu}$  é diagonal em  $\nu$

e  $A_{\nu}^* A_{\nu} + \sum_j B_{j\nu}^* B_{j\nu} = \delta_{\nu\nu}$ . A quantidade  $|A_{\nu}|^2$  pode ser vista como o peso do oscilador de

frequência  $\omega_{\nu}$  no modo normal  $\nu$ , de modo que o conjunto dos  $|A_{\nu}|^2$  define a distribuição desse oscilador pelos modos normais.

É útil também considerar os estados coerentes  $|\alpha\rangle$ ,  $|\beta_j\rangle$  e  $|\gamma_{\nu}\rangle$ , autofunções dos operadores  $a$ ,  $b_j$  e  $c_{\nu}$ , respectivamente,

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (4.11a)$$

$$b_j |\beta_j\rangle = \beta_j |\beta_j\rangle \quad (4.11b)$$

$$c_\nu |\gamma_\nu\rangle = \gamma_\nu |\gamma_\nu\rangle \quad (4.11c)$$

com

$$|\alpha\rangle = \exp(\alpha a^\dagger + \alpha^* a) |0\rangle, \quad (4.12a)$$

$$|\beta\rangle = \exp(\beta b^\dagger + \beta^* b) |0\rangle \text{ e} \quad (4.12b)$$

$$|\gamma_\nu\rangle = \exp(\gamma_\nu c_\nu^\dagger + \gamma_\nu^* c_\nu) |0\rangle. \quad (4.12c)$$

Sendo  $a|0\rangle = b_j|0\rangle = c_\nu|0\rangle = 0$ , é fácil ver ainda que:

$$|\gamma_\nu\rangle = |\alpha_\nu\rangle \otimes \prod_j |\beta_{j\nu}\rangle \quad (4.13)$$

com  $\alpha_\nu = \gamma_\nu A_\nu^*$  e  $\beta_{j\nu} = \gamma_\nu B_{j\nu}^*$ .

Tendo em vista que queremos estudar a dinâmica átomo - campo, podemos agora utilizar a representação de Interação  $H_I^{int}$ ,

$$H_I^{int}(t) = \exp(iH_0 t/\hbar) H_I(t) \exp(-iH_0 t/\hbar) \quad (4.14)$$

onde

$$H_0 = \hbar \epsilon S_z + \hbar \sum_{\nu=0}^n \omega_\nu (c_\nu^\dagger c_\nu) \quad (4.15)$$

$$H_I = \hbar \sum_{\nu=0}^n \lambda_\nu [c_\nu^\dagger S_- + c_\nu S_+] + \hbar \sum_{\nu=0}^n [c_\nu^\dagger F_\nu(t) + c_\nu F_\nu^*(t)] \quad (4.16)$$

A substituição das equações (4.15) e (4.16) na equação (4.14) fornecerá a hamiltoniana de interação dependente do tempo:

$$H_I^{int}(t) = \hbar \sum_{v=0}^n \lambda_v [c_v^+(t) S_-(t) + c_v(t) S_+(t)] + \hbar \sum_{v=0}^n [c_v^+(t) F_v(t) + c_v(t) F_v^*(t)]. \quad (4.17)$$

Podemos escrever operadores dependentes do tempo em termos dos correspondentes operadores de Schroedinger:

$$c_v(t) = c_v \exp(-i\omega_v t) = [c_v^+(t)]^+ \quad (4.18)$$

$$S_-(t) = S_- \exp(-i\varepsilon t) = [S_+(t)]^+ \quad (4.19)$$

Substituindo estas relações na equação (4.17), vamos reescrever esta equação isolando a dependência temporal, isto é,

$$H_I^{int}(t) = \hbar \sum_{v=0}^n \lambda_v [\varphi(t) c_v^+ S_- - \varphi^*(t) c_v S_+] - \hbar \sum_{v=0}^n f_0 [A_v \varphi(t) c_v^- - A_v^* \varphi^*(t) c_v] \quad (4.20)$$

com

$$\varphi(t) = \exp[i(\omega_v - \varepsilon)t] \quad (4.21)$$

$$\varphi^*(t) = \exp[-i(\omega_v - \varepsilon)t] \quad (4.22)$$

$$\phi(t) = \exp[i(\omega_v - \omega_F)t] \quad (4.23)$$

$$\phi^*(t) = \exp[-i(\omega_v - \omega_F)t] \quad (4.24)$$

onde  $\omega_F$  é a frequência da fonte, conforme as equações (4.9) e (4.10).

Estamos interessados agora em resolver o problema de condições iniciais para a densidade  $\rho(t)$ , visto que é esta grandeza que permitirá o cálculo de médias e da decoerência deste sistema. Vamos supor que a densidade inicial desse sistema seja dada por:

$$\rho(0) = |\gamma_v e\rangle\langle\gamma_v e|. \quad (4.25)$$

A densidade  $\rho(t)$  satisfaz a equação diferencial:

$$i\hbar\dot{\rho}(t) = [H_I^{int}(t), \rho(t)] \quad (4.26)$$

ou ainda, tendo em conta a condição inicial, a equação integral não homogênea:

$$\rho(t) = \rho(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [H_I^{int}(t'), \rho(t')] dt'. \quad (4.27)$$

Porém, o cálculo exato não é fácil de ser feito, o que faz com que seja conveniente tratar a equação integral por um método iterativo e efetuar um truncamento até uma determinada ordem de interação, sendo que no nosso caso iremos utilizar até 2ª ordem. A expansão será considerada como sendo em potências de  $\lambda_v$ , isto é, vamos expandir em ordens de  $\lambda_v \omega_b \ll 1$  (valores realísticos para esses parâmetros são  $\lambda_v \sim 50$  kHz e  $\omega_b \sim 10$  GHz) até os termos de ordem 2:

$$\rho^{(0)}(t) = \rho(0) \quad (4.28)$$



$$\rho^{(1)}(t) = i \int_0^t dt' [H_I^{int}(t'), \rho(0)] \quad (4.29)$$

$$\rho^{(2)}(t) = i^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' [H_I^{int}(t'), [H_I^{int}(t''), \rho(0)]] . \quad (4.30)$$

Podemos a partir destas equações calcular as densidades reduzidas  $\rho_s(t)$  e  $\rho_{ab}(t)$ , sendo que para isto temos que calcular os traços parciais, isto é,

$$\rho_s(t) = tr_{ab} \rho(t) \quad (4.31)$$

$$\rho_{ab}(t) = tr_s \rho(t) \quad (4.32)$$

onde  $tr_{ab}$  indica o cálculo do traço sobre os graus de liberdade dos osciladores e  $tr_s$  indica o traço sobre os graus de liberdade do átomo.

Como estamos analisando  $\rho(t)$  com termos de ordem zero, primeira e segunda ordem,  $\rho_s(t)$  e  $\rho_{ab}(t)$  também irão possuir termos dessas mesmas ordens, obtidos substituindo as equações (4.28), (4.29) e (4.30) nas relações acima.

De maneira análoga, podemos ainda calcular as seguintes densidades parciais:

$$\rho_a(t) = tr_{as} \rho(t) \quad (4.33)$$

$$\rho_b(t) = tr_{bs} \rho(t). \quad (4.34)$$

Vamos inicialmente determinar a decoerência do estado do átomo. Para isto, vamos utilizar a equação (4.31) juntamente com as equações (4.28), (4.29) e (4.30):

$$\delta(t) = tr_s \rho_s^2(t) \approx tr_s \left\{ \rho_s^2(0) + [\rho_s^{(1)}(t)]^2 + 2\rho_s(0)\rho_s^{(1)}(t) + 2\rho_s(0)\rho_s^{(2)}(t) \right\}. \quad (4.35)$$

Ao calcularmos o traço parcial em  $s$  e eliminando os termos de ordem superior à segunda ordem, vamos obter:

$$\delta(t) = \lambda^2 \sum_v |A_v|^2 I_1 + \sum_v f_0^2 |A_v|^2 I_2 \quad (4.36)$$

onde

$$I_1(t) = i^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' [\varphi^*(t')\varphi(t'') + \varphi(t')\varphi^*(t'')] \quad (4.37)$$

$$I_2(t) = i^2 \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' [\phi^*(t')\phi(t'') + \phi(t')\phi^*(t'')] . \quad (4.38)$$

Podemos agora transformar as somatórias em integrais, o que equivale a transformar a distribuição discreta dos  $|A_v|^2$  em uma distribuição contínua, no caso da distribuição dos osciladores. A distribuição mais fácil de ser usada e que pode ser vista como realista, correspondendo a valores  $|g_j|^2 = |g|^2$  independentes de  $j$  e tais que  $\Gamma \approx \pi \frac{dn}{dE} |g|^2 \ll \omega_v$ , é uma Lorentziana:

$$\sum_v |A_v|^2 \rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_v \frac{\Gamma}{(\omega_v - \omega_0)^2 + \Gamma^2} \quad (4.39)$$

obtendo

$$\delta_s(t) = 4\lambda^2 \left\{ \frac{\Gamma t}{\Delta\varepsilon^2 + \Gamma^2} - \frac{1 - \cos(\Delta\varepsilon t) \exp(-\Gamma t)}{\Delta\varepsilon^2 + \Gamma^2} \right\} + 4f_0^2 \left\{ \frac{\Gamma t}{\Delta\omega^2 + \Gamma^2} - \frac{1 - \cos(\Delta\omega t) \exp(-\Gamma t)}{\Delta\omega^2 + \Gamma^2} \right\} \quad (4.40)$$

onde  $\Delta\varepsilon = \varepsilon - \omega_0$  e  $\Delta\omega = \omega_f - \omega_0$

Ao fazermos o limite em que  $\Delta\varepsilon = \Delta\omega = 0$ , vamos obter,

$$\delta_s(t) = 4(\lambda^2 + f_0^2) \left\{ \frac{t}{\Gamma} - \frac{1 - \exp(-\Gamma t)}{\Gamma^2} \right\} \rightarrow \begin{cases} 4(\lambda^2 + f_0^2) \frac{t}{\Gamma}, & t \gg \frac{1}{\Gamma} \\ 4(\lambda^2 + f_0^2) t^2, & t \ll \frac{1}{\Gamma} \end{cases} \quad (4.41)$$

Devido à expansão perturbativa, devemos ter ainda  $t \ll \lambda^{-1}$ , lembrando que  $\lambda$  é da ordem de 50 kHz e  $\Gamma$  da ordem de 10 MHz. Nos experimentos temos o tempo de trânsito do átomo na cavidade da ordem de  $10^{-5}$  s.

Claramente podemos ver através da equação (4.40) que  $\delta_s(0) = 0$ , sendo que  $\Gamma \approx 10^6$  Hz e  $\lambda \approx 10^4$  Hz e o tempo de interação é da ordem de  $10^{-6}$  s, assim o fator  $\lambda^2/\Gamma^2 \approx 10^{-4}$  é muito pequeno, fazendo que a decoerência evolua pouco durante o tempo de trânsito.

O termo linear na equação da decoerência existe devido ao truncamento usado no cálculo da densidade  $\rho(t)$ , sendo que a validade desta aproximação ocorre no limite em que o tempo de trânsito é aproximadamente  $1/\lambda$  ( $\approx 10^{-4}$ ). Neste caso, o termo linear teria ainda um valor da ordem de  $\lambda/\Gamma$  ( $\approx 10^{-2}$ ).

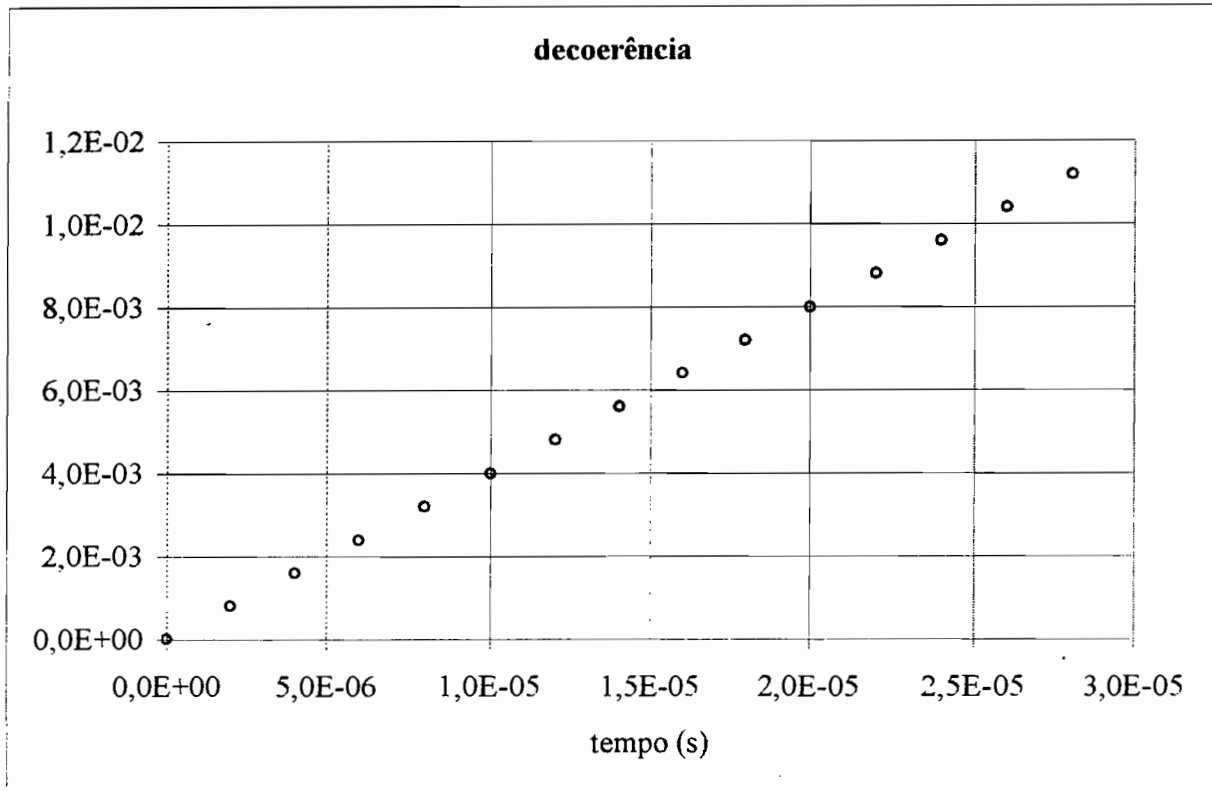


Fig 4.1. Gráfico da decoerência em função do tempo para  $\lambda/\Gamma \approx 10^{-2}$ . O tempo de interação típico é da ordem de  $10^{-5}$  s.

Outro resultado interessante de se calcular é a média de  $S_z(t)$ , isto é, a inversão atômica, definida por:

$$\langle S_z(t) \rangle = \text{Tr}_s [\rho_s(t) \cdot S_z(t)]. \quad (4.42)$$

Usando o mesmo método utilizado para a decoerência, vamos encontrar:

$$\begin{aligned} \langle S_z(t) \rangle = & 1 - 4\lambda^2 \left( 2|\gamma_0|^2 + 1 \right) \left\{ \frac{\Gamma t}{\Delta\varepsilon^2 + \Gamma^2} - \frac{1 - \cos(\Delta\varepsilon t) \exp(-\Gamma t)}{\Delta\varepsilon^2 + \Gamma^2} \right\} \\ & + 4f_0^2 \left\{ \frac{\Gamma t}{\Delta\omega^2 + \Gamma^2} - \frac{1 - \cos(\Delta\omega t) \exp(-\Gamma t)}{\Delta\omega^2 + \Gamma^2} \right\} \end{aligned} \quad (4.43)$$

de forma que podemos determinar qual o valor médio do número de fótons a ser bombeado na cavidade. Isto é feito ajustando o valor do número médio de fótons na cavidade  $|\gamma_0|^2$  até que o estado do átomo sofra uma rotação de  $\pi/4$  rad durante o tempo de trânsito do átomo na cavidade ( $\tau_T$ ), isto é, o valor médio de  $S_z$  deve ser zero quando  $\tau_T$  for da ordem de  $10^{-5}$  s. Neste caso, vamos verificar que o número médio de fótons é da ordem de algumas unidades.

Para o caso em que  $\Delta\varepsilon = \Delta\omega = 0$  e os tempos são pequenos quando comparados ao tempo de interação, obtemos a inversão atômica para a cavidade principal, isto é,

$$\langle S_z(t) \rangle \approx 1 - \left[ 4\lambda^2 (2|\gamma_0|^2 + 1) + 4f_0^2 \right] t^2 \rightarrow \cos\left( t \sqrt{4\lambda^2 (2|\gamma_0|^2 + 1) + 4f_0^2} \right) \quad (4.44)$$

Note que a escala de tempo para  $\langle S_z \rangle$  depende de  $\gamma_0$ , ao contrário do que acontece com  $\delta(t)$ .

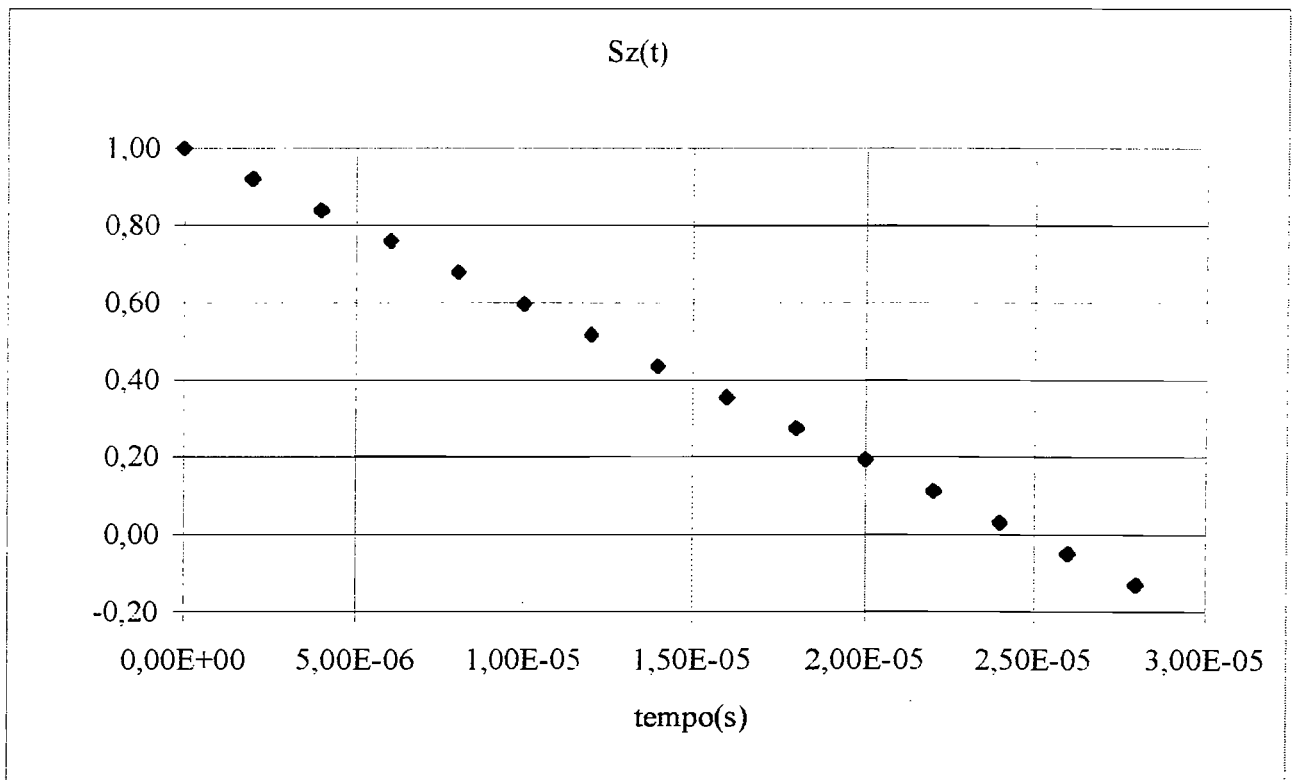


Fig 4.2. Gráfico de  $S_z$  em função de  $t$  para  $\lambda/T \approx 10^{-2}$ .

Podemos verificar aqui que ocorre a transição visto que  $S_z$  varia de 1 até 0 num intervalo de tempo igual ao tempo de interação do átomo na cavidade.

## 5. Sistema spin + spin + banho (contínuo)

Para testar o funcionamento e a generalidade dos efeitos estudados anteriormente em um sistema de dimensão finita, vamos considerar dois sistemas de dois níveis, (0) e (p) acoplados entre si, sendo que o último é por sua vez acoplado não mais a uma coleção de osciladores harmônicos, mas a um sistema envolvendo um grau de liberdade adicional, com espectro contínuo (b):

$$H = H_0 + H_p + H_b + H_{0p} + H_{pb} \quad (5.1a)$$

onde

$$H_0 = \varepsilon_0 \left( S_Z^{(0)} + \frac{1}{2} \right) \otimes 1_p \otimes 1_b \quad (5.1b)$$

$$H_p = \varepsilon_p \left( S_Z^{(p)} + \frac{1}{2} \right) \otimes 1_0 \otimes 1_b \quad (5.1c)$$

$$H_b = \left( \int_{\eta_0}^{\eta} |\eta\rangle \eta d\eta \langle \eta| + |0_b\rangle e_0 \langle 0_b| \right) \otimes 1_p \otimes 1_0 \quad (5.1d)$$

$$H_{0p} = \kappa (S_-^{(p)} S_-^{(0)} + S_-^{(p)} S_-^{(0)}) \otimes 1_b \quad (5.1e)$$

$$H_{pb} = \left( \int_{\eta_0}^{\eta} [g(\eta) |+_p 0_b\rangle \langle -_p \eta| + g^*(\eta) | -_p \eta\rangle \langle +_p 0_b| ] d\eta \right) \otimes 1_0. \quad (5.1f)$$

onde  $\varepsilon_0$  representa a separação em energia dos níveis do sistema (0),  $\varepsilon_p$  representa a quantidade correspondente para o sistema (p),  $\eta$  representa as energias dos estados do espectro contínuo de  $H_b$ , sendo que ainda existe ai um estado discreto com energia  $e_0$ , e sendo  $g(\eta)$  a função de  $\eta$  que caracteriza a interação entre o oscilador do modo relevante e

os demais. Note que  $\kappa$  tem dimensão de energia, enquanto  $g(\eta)$  tem dimensão  $E^{1/2}$  devido à normalização adotada para os estados do espectro contínuo, que é  $\langle \eta | \eta' \rangle = \delta(\eta - \eta')$ .

Assim, temos que a largura da distribuição, no caso em que  $g(\eta) = g = \text{constante}$ , será dada por  $\Gamma = \pi \frac{dn}{dE} g^2 = \pi g^2$ .

No espaço produto correspondente aos sistemas principal (p) e contínuo (b), temos uma base completa de vetores dada por  $\left\{ \left| -_p 0_b \right\rangle \right\}, \left\{ \left| +_p \eta \right\rangle \right\}$ , que são autovetores triviais de  $H_I = H_p - H_{pb}$  com autovalores  $\eta$ , e  $\left\{ \left| +_p 0_b \right\rangle, \left| -_p \eta \right\rangle \right\}$ . Estes últimos vetores definem um subespaço invariante por  $H_I$  e dão origem a autovetores não triviais. Assim, podemos escrever os autovetores não triviais de  $H_I$ , chamados aqui de  $|E\rangle$ , com autovalores  $E$ , em termos desta base de vetores:

$$|E\rangle = a_0^{(E)} \left| +_p 0_b \right\rangle + \int_{\eta_0}^{\eta} d\eta A^{(E)}(\eta) \left| -_p \eta \right\rangle. \quad (5.2)$$

Usando a equação de autovetores para  $H_I$ ,

$$H_I |E\rangle = E |E\rangle, \quad (5.3)$$

vamos obter duas equações:

$$(E - \eta) A^{(E)}(\eta) = g^*(\eta) a_0^{(E)}, \quad (5.4a)$$



$$(E - e_0 - \varepsilon_0) a_0^{(E)} = \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} g(\eta) A^{(E)}(\eta) d\eta. \quad (5.4b)$$

Para resolver este conjunto de equações podemos usar o procedimento proposto por U. Fano<sup>[25]</sup> que consiste em escrever a solução da equação (5.4a) sob a forma:

$$A^{(E)}(\eta) = \left( \frac{P}{E - \eta} + Z(E) \delta(E - \eta) \right) g^*(\eta) a_0^{(E)} \quad (5.5)$$

onde  $P$  indica que deve ser tomado o valor principal numa integração sobre  $\eta$ , isto é,

$$\frac{P}{E - \eta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{E + i\varepsilon - \eta} - \frac{1}{E - i\varepsilon - \eta} \right), \quad (5.6a)$$

$\varepsilon > 0$  é infinitesimal.

Essa expressão para  $A^{(E)}(\eta)$  satisfaz a equação (5.4a) qualquer que seja  $Z(E)$ .

Substituindo a equação (5.5) na equação (5.4b) e usando a condição de normalização

$$|a_0^{(E)}|^2 + \int |A^{(E)}|^2 d\eta = 1 \text{ resulta}$$

$$Z(E) = \frac{E - e_0 - \varepsilon_0 - F(E)}{|g(E)|^2} \quad (5.6b)$$

$$F(E) = P \int_{\eta_0}^{\bar{\eta}} \frac{|g(E)|^2}{E - \eta} d\eta \quad (5.6c)$$

e

$$|a_0^{(E)}|^2 = \frac{|g(E)|^2}{[E - e_0 - \varepsilon_0 - F(E)]^2 + \pi^2 |g(E)|^4}. \quad (5.7)$$

Com esta determinação, todo o subsistema  $H_I$  pode ser descrito pelos autovetores  $E$ , fazendo com que a hamiltoniana do sistema fique como

$$H = \varepsilon_0 \left( S_Z^{(0)} + \frac{1}{2} \right) + \int_{E_0}^{\bar{E}} |E\rangle dE \langle E| + | -_p 0_b \rangle e_0 \langle -_p 0_b | \\ + \kappa \int_{E_0}^{\bar{E}} \left[ a_0^{(E)*} | -_0 E \rangle \langle +_0 -_p 0_b | + a_0^{(E)} | +_0 -_p 0_b \rangle \langle -_0 E | \right] dE. \quad (5.8)$$

Note que o termo de acoplamento (último termo da equação acima) é alterado por fatores  $a_0^{(E)}$  e  $a_0^{(E)*}$ . Como o módulo desta amplitude possui um limite superior dado por:

$$|a_0^{(E)}|^2 \leq \frac{1}{\pi^2 |g|^2} = \frac{1}{\pi \Gamma}, \quad (5.9)$$

vemos que o efeito dessa alteração depende da largura da distribuição  $\Gamma$ . isto é.  $\Gamma$  maior implica num acoplamento mais fraco, visto que o estado  $|+0_b\rangle$  está distribuído por uma faixa mais larga do espectro de  $H_I$ .

Temos agora uma novo conjunto ortonormal de vetores relevantes dado por  $\{|+_0 -_p 0_b\rangle; |-_0 E\rangle\}$ . Assim, podemos escrever os autovetores de  $H$ , definidos como  $|X\rangle$ , em termos deste conjunto:

$$|X\rangle = b_0^{(X)} |+_0 -_p 0_b\rangle + \int_{E_0}^{\bar{E}} B^{(X)}(E) |-_0 E\rangle dE^* . \quad (5.10)$$

Esses autovalores permitem calcular a evolução temporal exata de um estado inicial qualquer, pertencente ao subespaço de estados relevantes.

A equação de autovetores para  $H$

$$H|X\rangle = X|X\rangle, \quad (5.11)$$

pode também ser tratada com o mesmo método de Fano, agora para este novo conjunto de vetores. Desse modo, vamos obter

$$|b_0^{(X)}|^2 = \frac{|a_0^{(X)}|^2}{[X - \varepsilon_J - F(X)]^2 + \pi^2 \kappa^4 |a_0^{(X)}|^4} \quad (5.12)$$

onde  $a_0^{(X)}$  é a amplitude definida na equação 5.7 com a substituição da variável  $E$  pela variável  $X$ .

No caso em que o acoplamento  $g$  for maior do que o acoplamento  $\kappa$ , sendo que  $g(E) = g$  constante, temos, tomando o limite superior para o acoplamento conforme a equação (5.10):

$$|b_0^{(X)}|^2 \approx \frac{\kappa^2}{\pi^2 g^2} \left( \frac{1}{|X - \varepsilon_d|^2 + \frac{\kappa^4}{\pi^2 g^4}} \right) = \frac{\kappa^2}{\pi \Gamma} \left( \frac{1}{|X - \varepsilon_d|^2 + \frac{\kappa^4}{\Gamma^2}} \right). \quad (5.13)$$

Como  $\pi\kappa^2/\Gamma$  é da ordem de  $10^2$  Hz, vamos obter uma linha estreita para essa distribuição, fazendo com que os tempos de evolução sejam longos. Note que ao usarmos este limite superior, estaremos abdicando dos detalhes da informação contida na distribuição dada por  $a_0^{(E)}$ .

Para analisarmos a dinâmica dos subsistemas desse sistema acoplado, podemos agora determinar a densidade dependente do tempo,

$$\rho(t) = \exp(-iHt)\rho(0)\exp(iHt) \quad (5.14)$$

para o caso da condição inicial

$$\rho(0) = |+_d -_0 0_b\rangle \langle +_d -_0 0_b|. \quad (5.15)$$

Usando a definição dada pela equação (5.10), vamos obter a transformação inversa:

$$|+_d -_0 0_b\rangle = \int_{X_0}^{\bar{X}} b_0^{(X)*} |X\rangle dX. \quad (5.16)$$

Substituindo as equações (5.15) e (5.16) na equação (5.14):

$$\rho(t) = \int_{X_0}^{\bar{X}} \int_{X_0}^{\bar{X}} \exp\{-i(X' - X'')\} b_0^{(X')} b_0^{*(X'')} |X'\rangle \langle X''| dX' dX'' \quad (5.17)$$

e calculando o traço parcial em relação aos subsistemas 0 e b (correspondentes aos osciladores) vamos encontrar:

$$\rho_d(t) = \rho_{++}(t) |+_d\rangle \langle +_d| + \rho_{--}(t) |-_d\rangle \langle -_d| \quad (5.18)$$

onde

$$\rho_{++}(t) = \int_{X_0}^{\bar{X}} \int_{X_0}^{\bar{X}} \exp\{-i(X' - X'')\} |b_0^{(X')}|^2 |b_0^{(X'')}|^2 dX' dX'' \quad (5.19)$$

$$\rho_{--}(t) = \int_{X_0}^{\bar{X}} \int_{X_0}^{\bar{X}} \int_{E_0}^{\bar{E}} \exp\{-i(X' - X'')\} b_0^{(X')} b_0^{*(X'')} B^{(X')} (E) B^{*(X'')} (E) |X'\rangle \langle X''| dX' dX'' dE \quad (5.20)$$

como o traço parcial de  $\rho_d(t)$  é igual a 1, temos que

$$\rho_{--}(t) = 1 - \rho_{++}(t). \quad (5.21)$$

Assim, a decoerência do sistema será:

$$\delta_d(t) = 1 - \text{tr}_d[\rho(t)]^2 = 2\rho_{++}(t) - 2\rho_{++}^2(t). \quad (5.22)$$

Podemos calcular analiticamente o valor de  $\rho_{+-}(t)$  definido na equação (5.19) juntamente com a equação (5.13). Para isto, basta verificarmos que os limites de integração podem ser expandidos de  $[X_0, X]$  para  $[-\infty, \infty]$  visto que a contribuição além dos limites anteriores é pequena. Com isto, podemos fazer uma integração de contorno para calcular (5.19) e vamos obter:

$$\rho_{++}(t) = 2e^{-\frac{2\kappa^2 t}{\pi g^2}} = 2e^{-\frac{2\kappa^2 t}{\Gamma}}. \quad (5.23)$$

Assim, resulta para a decoerência:

$$\delta_d(t) = 2e^{-\frac{2\kappa^2 t}{\pi g^2}} - 2e^{-\frac{4\kappa^2 t}{\pi g^2}} = 2e^{-\frac{2\kappa^2 t}{\pi g^2}} \left( 1 - e^{-\frac{2\kappa^2 t}{\pi g^2}} \right) = 2e^{-\frac{2\kappa^2 t}{\Gamma}} \left( 1 - e^{-\frac{2\kappa^2 t}{\Gamma}} \right). \quad (5.24)$$

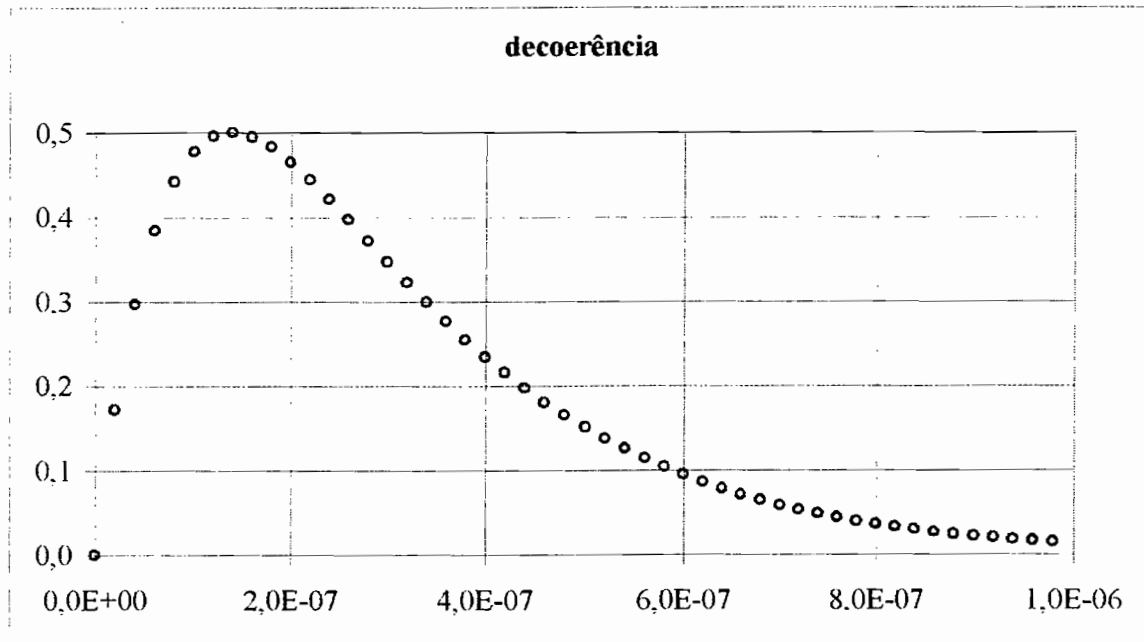


Fig. 5.1 Decoerência em função do tempo para  $\kappa = 5$  MHz e  $\Gamma = 10$  MHz. Tempo em segundos.

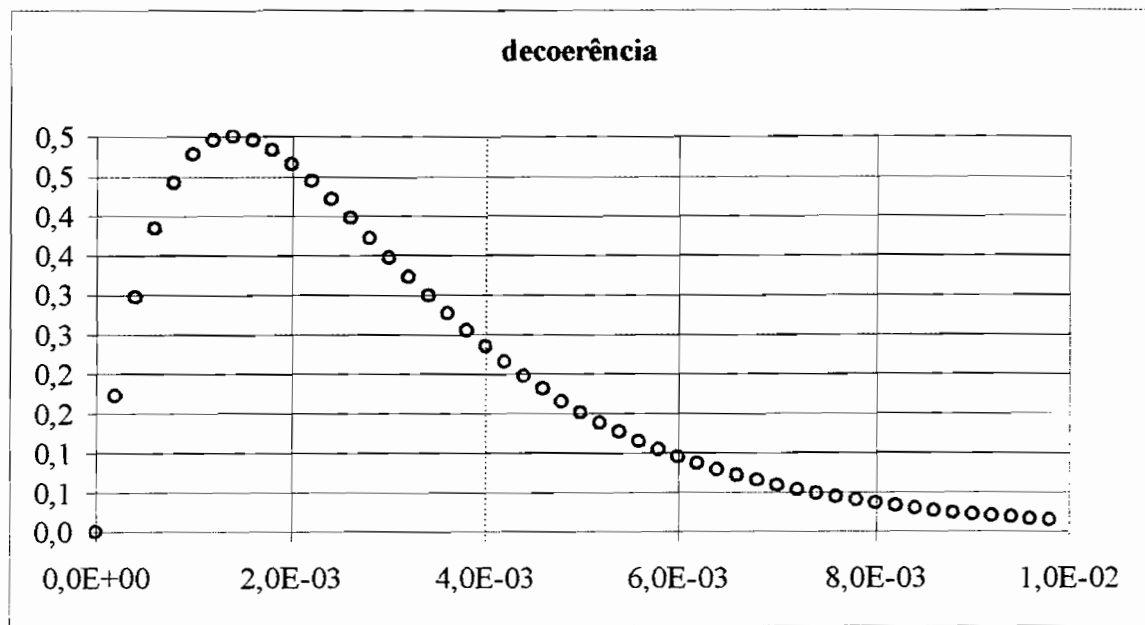


Fig. 5.2 Decoerência em função do tempo para  $\kappa = 50$  kHz e  $\Gamma = 10$  MHz. Tempo em segundos.

Vale a pena ressaltar que o valor da decoerência terá um valor máximo igual a  $\frac{1}{2}$ , sendo que este máximo ocorre num tempo que é proporcional à largura da distribuição ( $t_{\max} \propto \frac{\Gamma}{\kappa^2}$ ). Para um certo valor de  $\kappa$ ; ao aumentarmos o valor da largura  $\Gamma$  temos um crescimento mais lento da decoerência e portanto uma decoerência menor num tempo fixo, dado (no caso o tempo de trânsito do átomo na cavidade).

Podemos aproximar o resultado da equação (5.24) até a segunda ordem em relação a  $\kappa$ , isto é, expandir as exponenciais até segunda ordem em  $\kappa$ :

$$\delta_d(t) = 2 \left\{ 1 - \frac{2\kappa^2 t}{\Gamma} + O(\kappa^4) \right\} - 2 \left\{ 1 - \frac{4\kappa^2 t}{\Gamma} + O(\kappa^4) \right\} \rightarrow 4\kappa^2 \frac{t}{\Gamma}. \quad (5.25)$$

Este resultado pode ser comparado à primeira solução da equação (4.41) onde

o fator  $\lambda^2 - f_0^2$  está aqui representado por  $\kappa$ . Porém, não podemos verificar a derivada zero quando  $t = 0$ , como na segunda solução da equação (4.41), a qual mostra que existe uma dependência da decoerência com o quadrado do tempo para tempos muito curtos quando comparados com  $\Gamma^{-1}$ , isto é, a decoerência inicia sua curva de maneira não linear. Isto ocorre pois ao utilizamos apenas o limite superior para a distribuição em  $|a_0^{(E)}|^2$  na equação (5.13), isto é, usamos um valor constante para  $|a_0^{(E)}|^2$ , perdemos a informação de como a decoerência se comporta para aproximações em termos de  $\Gamma$ , ou seja, para tempos muito curtos, bem próximos ao início da curva da decoerência.

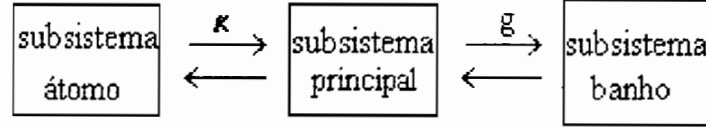
Vale a pena dizer que mesmo assim temos uma equivalência qualitativa dos dois modelos analisados até aqui, sendo que, devido às aproximações usadas, os resultados obtidos para o primeiro valem apenas para tempos curtos, enquanto os resultados obtidos para o segundo valem para tempos mais longos.

Na próxima seção iremos discutir uma versão numérica discreta para o modelo analisado nesta seção.



## 6. Modelo numérico esquemático para as cavidades $R_1$ e $R_2$

Conforme pudemos estudar até agora, os fenômenos que ocorrem nas cavidades  $R_1$  e  $R_2$  podem ser analisados em termos de três subsistemas acoplados sequencialmente:



A Hamiltoniana desse sistema pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
 H = & \hbar \varepsilon_0 \left( S_Z^{(0)} + \frac{1}{2} \right) + \hbar \varepsilon_p \left( S_Z^{(p)} + \frac{1}{2} \right) + \sum_n |n\rangle E_n \langle n| \\
 & + \hbar \kappa \left( S_-^{(0)} S_+^{(p)} + S_+^{(0)} S_-^{(p)} \right) + \hbar \sum_n g_n \left( |n+1\rangle S_-^{(p)} \langle n| + |n\rangle S_+^{(p)} \langle n+1| \right). \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

Os rótulos “0”, “p” e “b” se referem aos subsistemas átomo, principal e banho, respectivamente. A forma particular adotada para os termos de interação, envolvendo as constantes  $\kappa$  e  $g_n$ , incorpora a característica da aproximação de onda girante (RWA) que exclui as correlações no estado fundamental. Caso o banho seja constituído de uma coleção de osciladores harmônicos inicialmente no estado fundamental, este se comporta como uma coleção de sistemas de dois níveis:

$$\begin{aligned}
 H = & \hbar \varepsilon_0 \left( S_Z^{(0)} + \frac{1}{2} \right) + \hbar \varepsilon_p \left( S_Z^{(p)} + \frac{1}{2} \right) + \sum_n e_n \left( S_Z^{(n)} + \frac{1}{2} \right) \\
 & + \hbar \kappa \left( S_-^{(0)} S_+^{(p)} + S_+^{(0)} S_-^{(p)} \right) + \hbar \sum_n g_n \left( S_-^{(n)} S_+^{(p)} + S_+^{(n)} S_-^{(p)} \right). \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

A base de vetores relevante para a hamiltoniana (6.2) é dada por:

$\{|+_{0-p-b}\rangle, |-_{0+p-b}\rangle, |-_{0-p+b}\rangle\}$ . Analogamente, uma base relevante para a hamiltoniana (6.1) no setor que contém o estado fundamental do banho é  $\{|+_{0-p}0_b\rangle, |-_{0+p}0_b\rangle, |-_{0-p}1_b^{(n)}\rangle\}$ , onde  $|1_b^{(n)}\rangle$  contém o primeiro estado excitado do  $n$ -ésimo oscilador do banho, visto que apenas estes vetores estão correlacionados nos estados estacionários de  $H_B$ , os quais definem um subespaço invariante sob a ação de  $H$ .

Podemos tratar descrever o sistema descrito por (6.2) através da forma matricial da Hamiltoniana na base proposta. A dimensão da matriz será  $N = n_b - 2$ , onde  $n_b$  é o número de subsistemas de spins do banho e os outros dois são referentes aos subsistemas “principal” e “átomo”, índice  $p$  e índice  $0$ , respectivamente:

$$H = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \kappa & 0 & \dots & 0 \\ \kappa & \varepsilon_p & g_1 & \dots & g_{n_b} \\ 0 & g_1 & e_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & g_{n_b} & 0 & \dots & e_{n_b} \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Ao diagonalizarmos esta hamiltoniana, vamos obter os autovalores  $E(i)$  e os respectivos autovetores  $|E(i)\rangle$ , os quais formam uma base completa no espaço considerado de dimensão  $N = n_b - 2$ . Na mesma base usada para obter a representação matricial (6.3) eles podem ser escritos como:

$$|E(i)\rangle = \begin{bmatrix} A_1(i) \\ \dots \\ A_j(i) \\ \dots \\ A_N(i) \end{bmatrix}.$$

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3563

ex. 1

(6.4)

Podemos supor agora que o sistema esteja inicialmente no estado:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

com o que, usando os autovalores e autovetores de  $H$ , a matriz densidade completa  $R(t)$ , no tempo  $t$ , é dada por:

$$R(t) = \sum_{ij} |E_{(i)}\rangle A_i^*(i) A_i(j) \langle E_{(j)}| \exp\left(-\frac{i(E_i - E_j)t}{\hbar}\right). \quad (6.6)$$

Com isto podemos determinar a densidade reduzida  $\rho(t)$ , tomando o traço sobre  $p$  e  $b$ :

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{++}(t) & \rho_{+-}(t) \\ \rho_{-+}(t) & \rho_{--}(t) \end{pmatrix} \quad (6.7a)$$

onde

$$\rho_{--}(t) = \sum_{i'} \sum_i^{n+2} |A_i(i)|^2 |A_i(i')|^2 \exp\left[-\frac{i(E_i - E_{i'})t}{\hbar}\right] \quad (6.7b)$$

$$\rho_{-+}(t) = 1 - \rho_{++}(t) \quad (6.7c)$$

$$\rho_{+-}(t) = \rho_{+}(t) = 0 \quad (6.7d)$$

consistentemente com a condição  $\text{tr}[\rho(t)] = 1$ .

Podemos assim determinar o valor da decoerência, medida pela entropia linear (ou déficit de idempotência):

$$\delta_1(t) = 1 - (\text{tr}[\rho(t)^2]) = 1 - \{\rho_{++}^2(t) + \rho_{--}^2(t)\} = 2\rho_{++}(t) - 2\rho_{++}^2(t) = 2\rho_{++}(t)(1 - \rho_{++}(t)) \quad (6.8)$$

Resultados numéricos foram obtidos usando o programa Maple V para a diagonalização da matriz definida em (6.3). Usamos uma matriz 42 x 42, sendo 40 níveis referentes ao banho espaçados de  $\Delta e_i = 1$  MHz com o centro da distribuição localizado em 10 GHz e distribuídos numa faixa de energia de 40 MHz, sendo que estes valores são consistentes com a ordem de grandeza dos valores experimentais [8].

Para uma situação em que não há acoplamento entre os subsistemas principal e átomo, e o subsistema principal tem um parâmetro  $\pi g^2 \frac{dN}{dE} = \Gamma = 10$  MHz a

probabilidade  $p_2 = \left| \langle -_0 +_p -_b | E_i \rangle \right|^2$  fica distribuído como mostrado na figura 6.1.

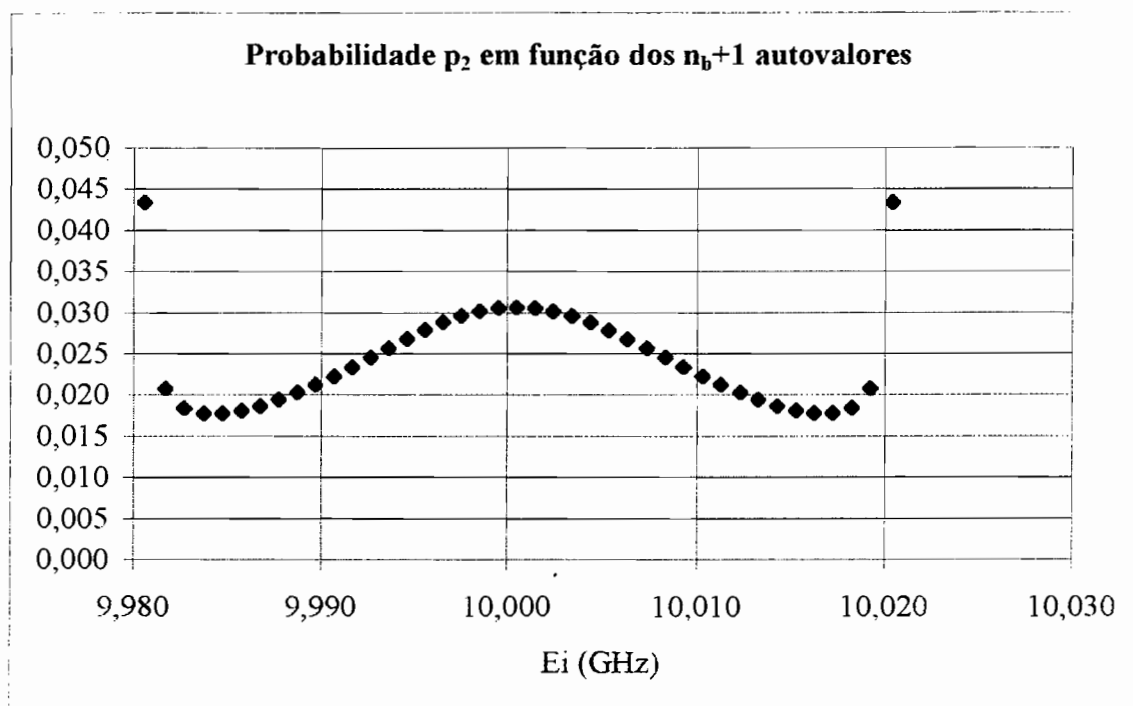


Fig. 6.1. Distribuição de probabilidades  $p_1$  em relação aos autovalores para uma situação onde  $\kappa = 0$ , isto é, não há acoplamento entre o subsistema átomo e o subsistema principal, com  $\Gamma = 10$  MHz,  $\varepsilon_p = \varepsilon_0 = 10,0005$  GHz.

Neste caso em que o valor de  $\kappa$  é nulo, a decoerência do átomo é evidentemente nula.

Quando inserimos uma constante de acoplamento  $\kappa$  da ordem de 50 kHz, isto é, com

uma fator  $\kappa/\Gamma$  da ordem de  $5 \times 10^{-3}$ , situação que corresponde a um acoplamento fraco do sistema com o banho temos, tomando  $\varepsilon_p = \varepsilon_0 = 10,0005$  GHz, uma distribuição das probabilidades  $p_1 = \left| \langle +_0 -_p -_b | E_i \rangle \right|^2$  que fica dividida basicamente entre dois autovetores:

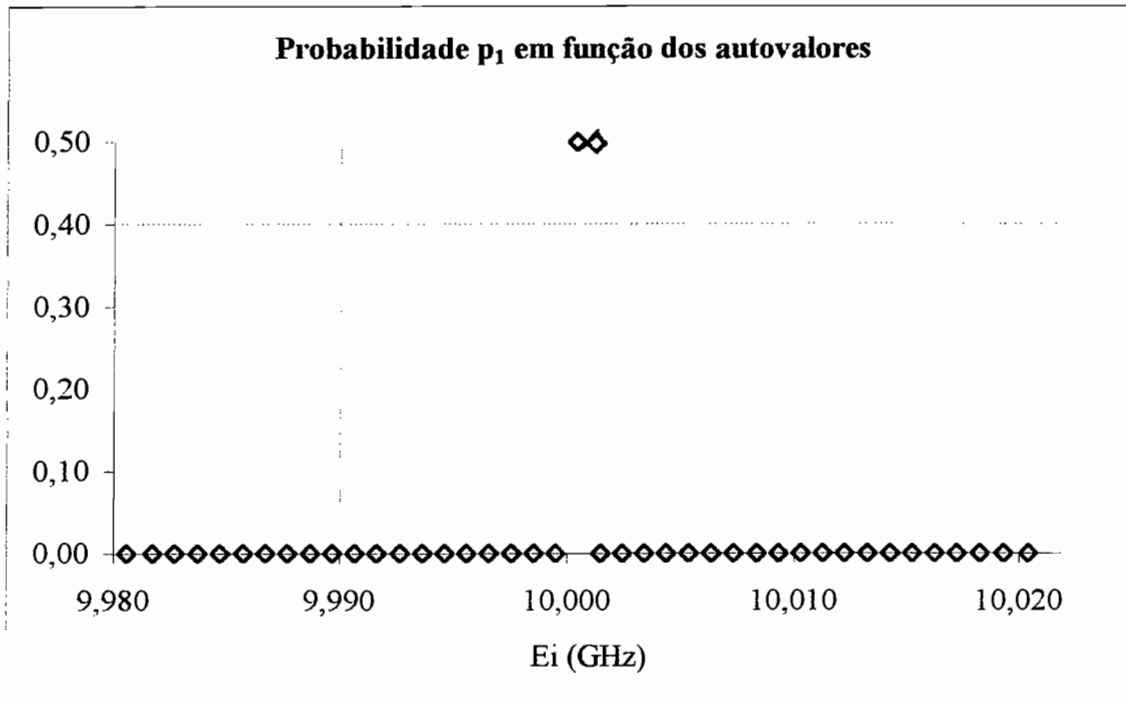


Fig. 6.2. Distribuições das probabilidades  $p_1$  em relação aos autovalores para um fator  $\kappa/\Gamma$  da ordem de 0,005, com  $\Gamma = 10$  MHz,  $\varepsilon_p = \varepsilon_0 = 10,0005$  GHz. As frequências dos autovalores estão em GHz. Note que existem duas probabilidades próximas a 0,5.

A distribuição espectral do estado  $|+_0 -_p -_b\rangle$  está essencialmente concentrada em dois autovetores, isto é, existem dois autovetores com probabilidade aproximadamente igual a  $\frac{1}{2}$  enquanto os demais ficam ortogonais a esse estado. Isto resulta evidentemente do acoplamento fraco e da degenerescência entre a energia  $\varepsilon_0$  e a energia  $\varepsilon_p$ . Nessa situação, o átomo passa a sofrer uma decoerência que atinge o valor máximo ( $\frac{1}{2}$ ),

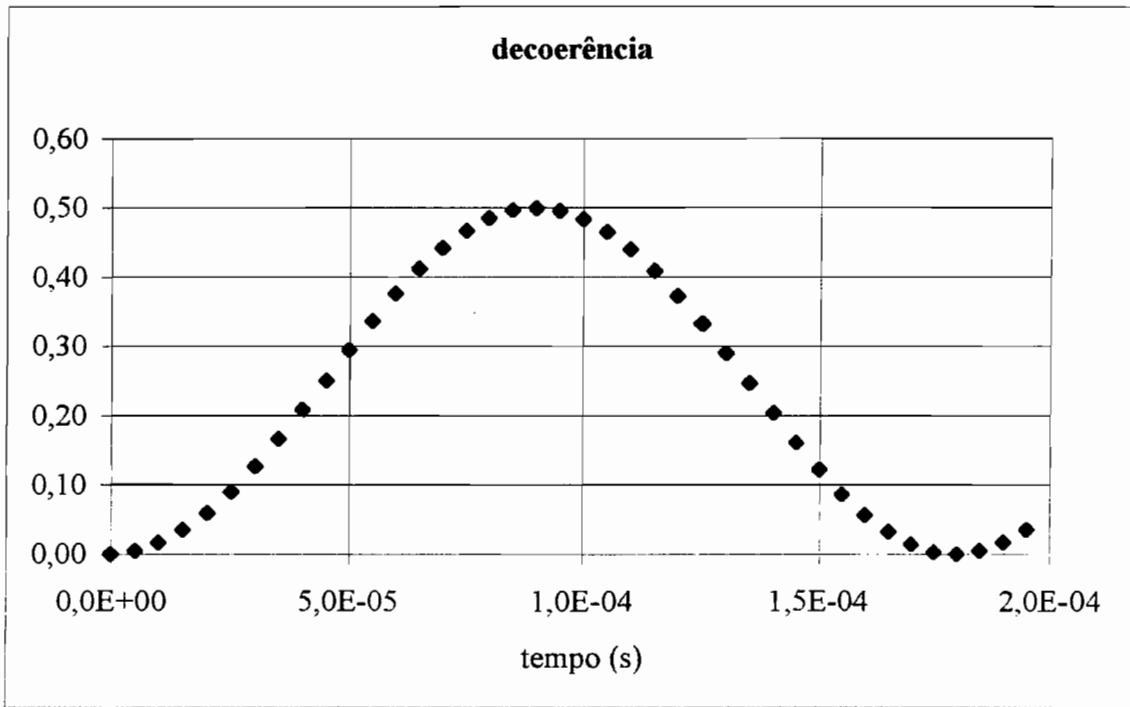


Fig. 6.3. Decoerência em função do tempo para  $\varepsilon_0 = \varepsilon_p = 10,0005 \text{ GHz}$ .

Quando a energia  $\varepsilon_0$  se afasta da energia  $\varepsilon_p$ , vamos verificar que a probabilidade  $p_1 = \left| \langle +_0 -_p -_b | E_i \rangle \right|^2$  passa a ficar concentrada em apenas um autovalor:

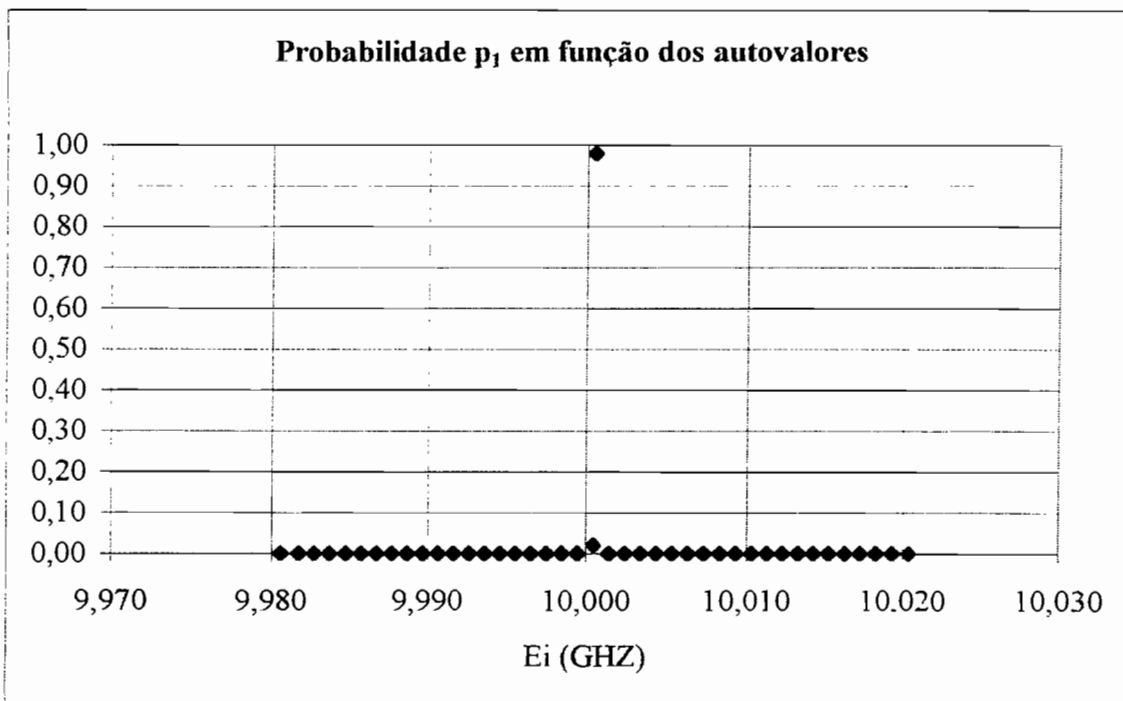


Fig. 6.4. Distribuições das probabilidades  $p_1$  em relação aos autovalores com  $\varepsilon_0 = 10,00056 \text{ GHz}$  e  $\varepsilon_p = 10,00050 \text{ GHz}$ .

O autovetor para qual a probabilidade  $p_1$  é um pouco superior à dos demais é aquele que justamente ainda possui uma certa “mistura” com o estado quase puro de  $\varepsilon_0$ . Neste caso, a decoerência já não conseguirá atingir o máximo de  $\frac{1}{2}$ :

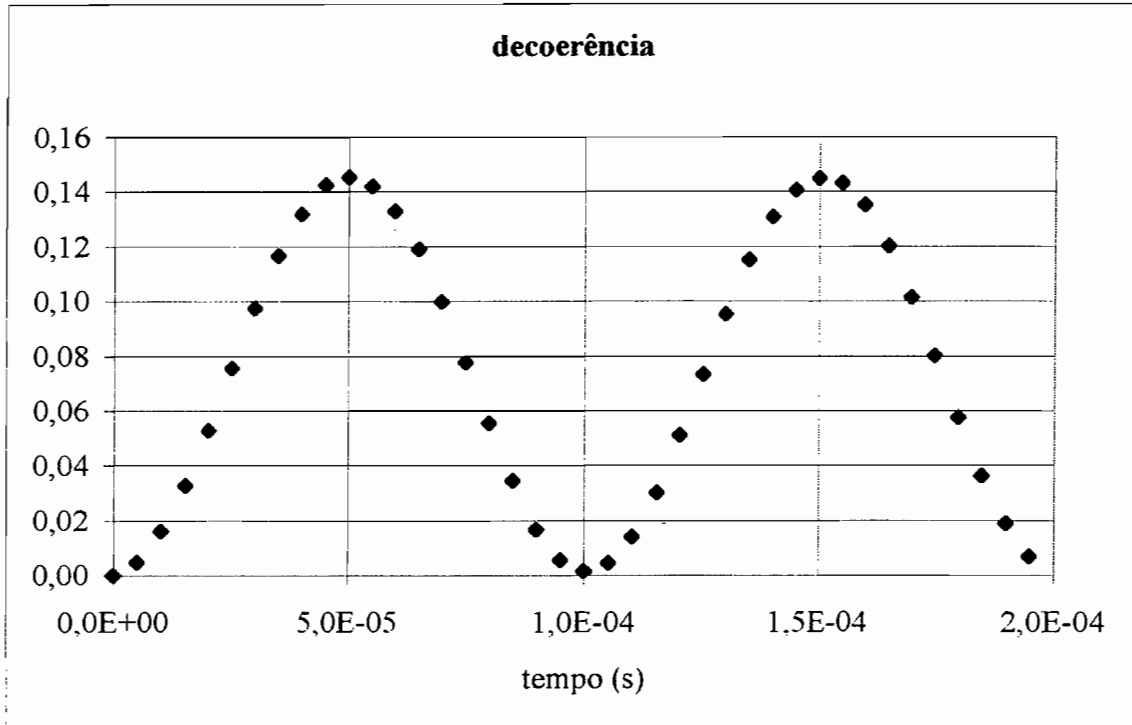


Fig. 6.5. Decoerência em função do tempo para  $\varepsilon_0 = 10,00056$  GHz e  $\varepsilon_p = 10,00050$  GHz,  $\kappa = 50$  kHz e  $\Gamma = 10$  MHz

À medida que vamos aumentando a diferença entre  $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_p$  fica mais nítida a distribuição na forma de delta das probabilidades  $p_1$  com a conseqüente diminuição do máximo da decoerência:

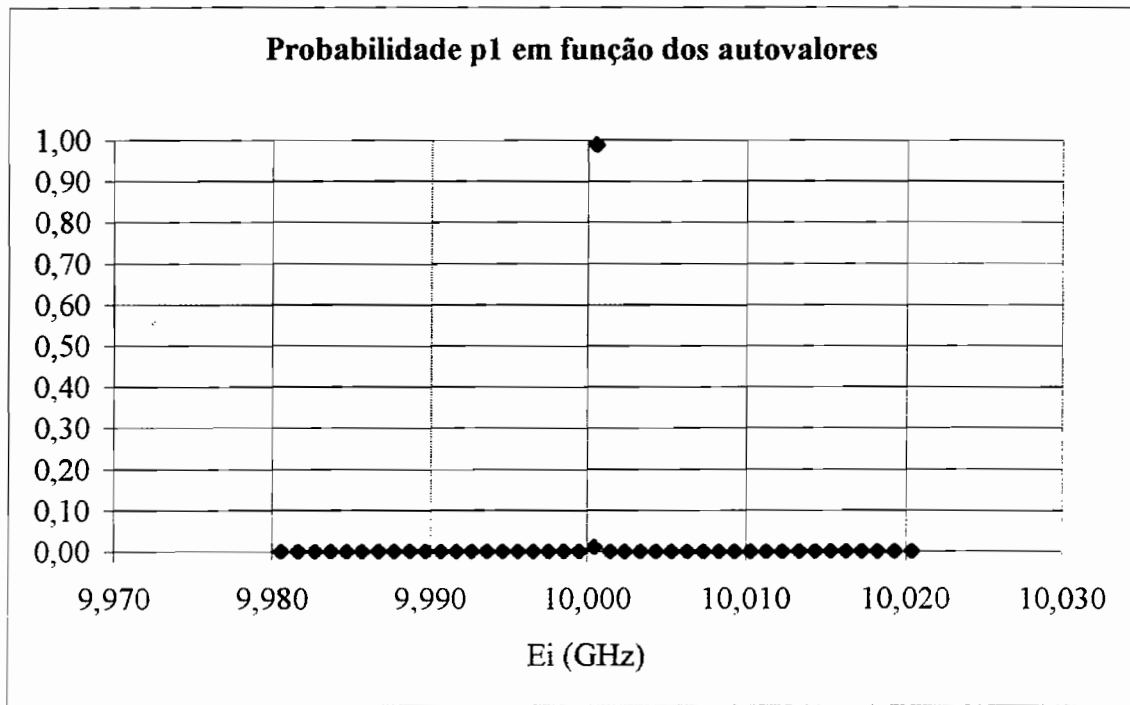


Fig. 6.6. Distribuições das probabilidades  $p_1$  em relação aos autovalores com  $\varepsilon_p = 10,00050$  GHz e  $\varepsilon_0 = 10,00058$  GHz.

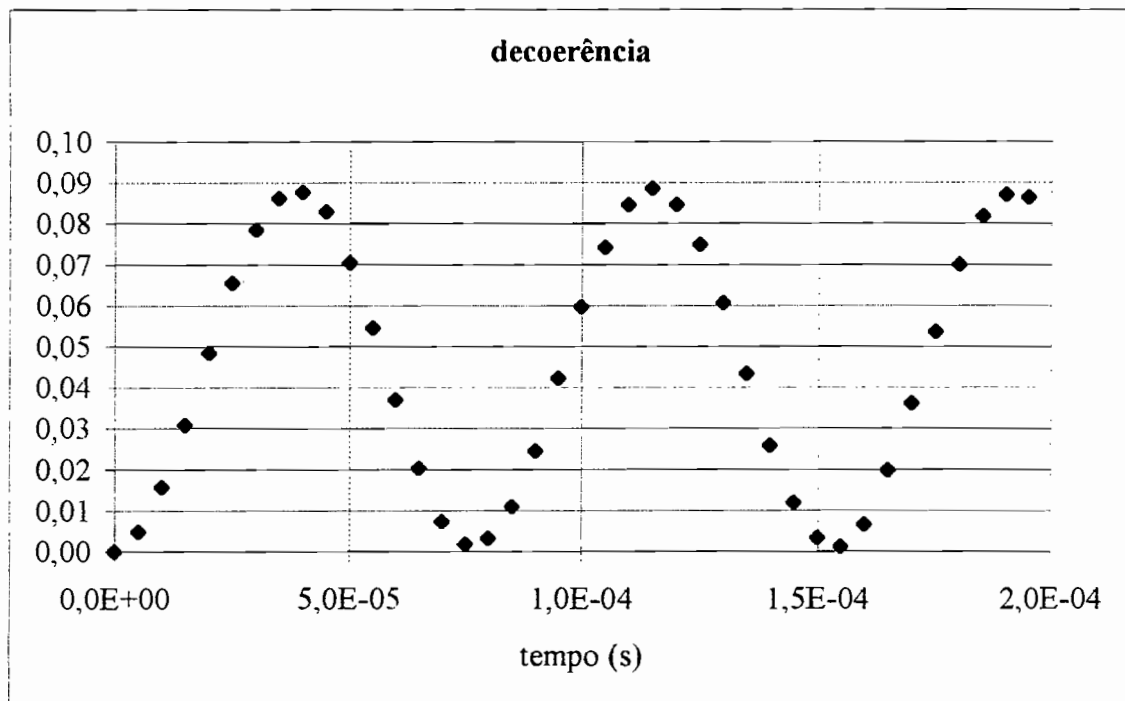


Fig. 6.7. Decoerência em função do tempo para  $\varepsilon_p = 10,00050$  GHz e  $\varepsilon_0 = 10,00058$  GHz,  $\kappa = 50$  kHz e  $\Gamma = 10$  MHz



Assim, a medida que aumenta a dessintonia entre  $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_p$ , vamos verificar uma diminuição do pico da decoerência visto que o estado  $|+_0 -_p -_b\rangle$  vai se tornando “puro”.

Este não é, entretanto, um comportamento genérico, pois para certos valores particulares de  $\varepsilon_0$  a decoerência máxima pode chegar a valores da ordem de  $\frac{1}{2}$  mesmo no caso em que  $\varepsilon_0$  e  $\varepsilon_p$  não estejam degenerados.

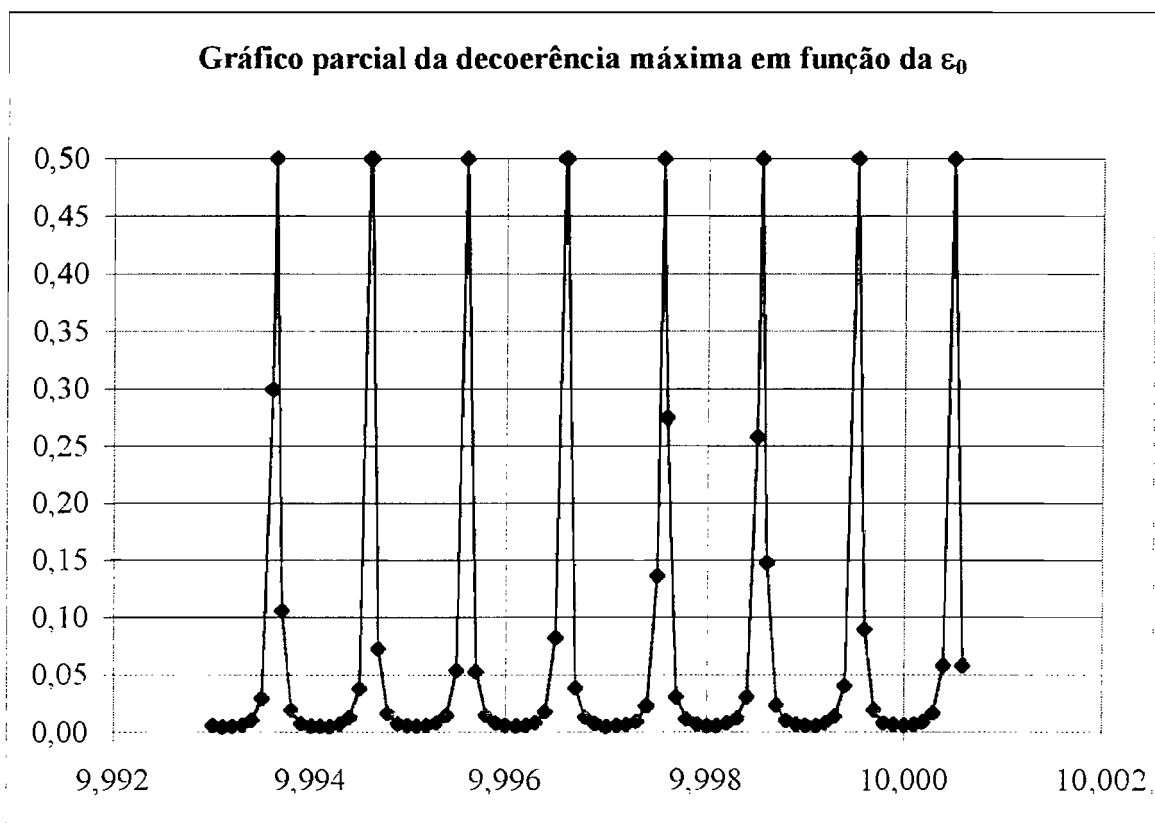


Fig. 6.8. Decoerência máxima em relação a  $\varepsilon_0$ . Temos  $\kappa/\Gamma = 0,005$  e  $\varepsilon_p = 10,00050$  GHz. As frequências dos autovalores estão em GHz.

Assim, quando a decoerência máxima tem um valor próximo de  $\frac{1}{2}$ , temos que a distribuição de probabilidades do estado  $|+_0 -_p -_b\rangle$  ficará dividida entre dois autovetores:

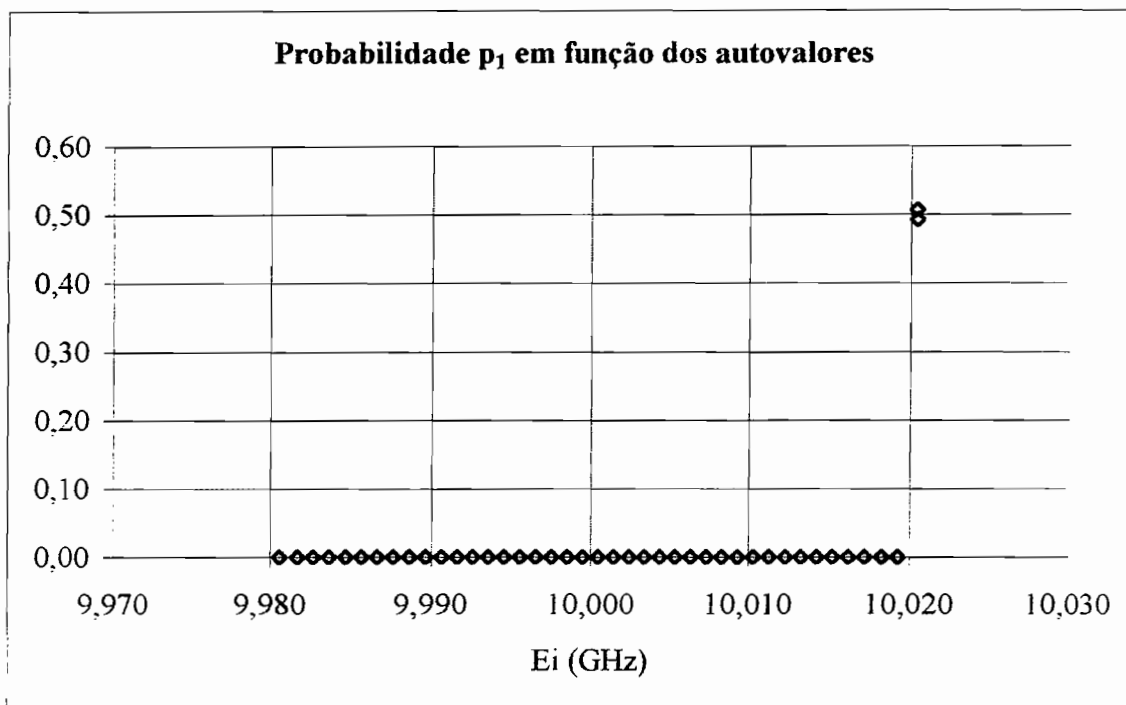


Fig. 6.9. Distribuições das probabilidades  $p_1$  em relação aos autovalores com  $\varepsilon_0 = 10,02040$  GHz e  $\varepsilon_p = 10,00050$  GHz.

Da mesma forma, a decoerência conseguirá atingir o valor máximo de 0,5:

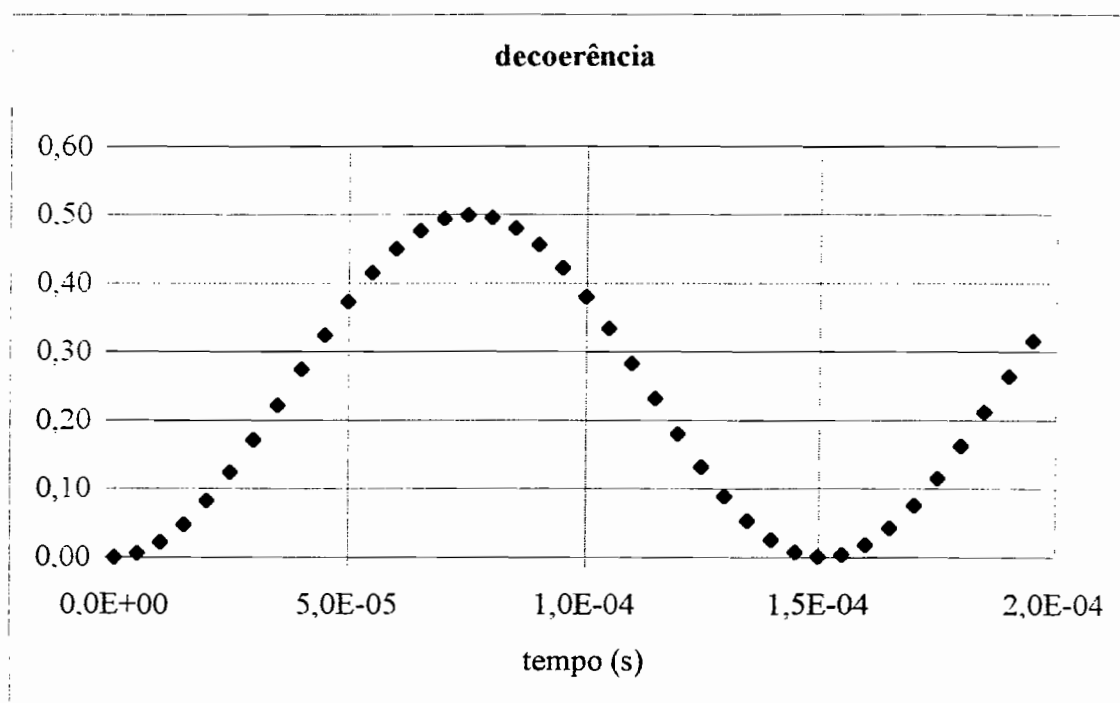


Fig. 6.10 Decoerência em função do tempo para  $\varepsilon_p = 10,00050$  GHz e  $\varepsilon_0 = 10,02040$  GHz,  $\kappa = 50$  kHz e  $\Gamma = 10$  MHz

Para entender esse comportamento, basta notar que a diagonalização da matriz (6.3) pode também ser pensada como sendo feita em duas etapas: numa primeira etapa é diagonalizada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_p & g_1 & \dots & g_n \\ g_1 & e_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_n & 0 & \dots & e_n \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$

cujos autovetores  $|\eta_j\rangle$  são estados estacionários do sistema formado pelo “subsistema principal” juntamente com o “subsistema banho”. Utilizando em seguida a nova base formada pelos vetores  $\{|+_{0-p-b}\rangle, |-_{0,\eta_j}\rangle\}$  a matriz correspondente à hamiltoniana (6.2) assume a forma

$$H = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & \kappa_1 & \dots & \kappa_j \\ \kappa_1 & \eta_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa_j & 0 & \dots & \eta_j \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

onde  $\kappa_i = \kappa p_i$  com  $p_i = \left| \langle \eta_i | +_{p-b} \rangle \right|^2$ . Como  $\sum_i p_i = 1$  e  $p_i \geq 0$  temos  $\kappa_i \leq \kappa$ .

Quando  $\varepsilon_0$  está degenerado com um dos  $\eta_j$ , vamos verificar a fragmentação de  $p_1$  em dois autovetores com probabilidades próximas a  $1/2$ . Assim, a decoerência máxima pode ser limitada pela não degenerescência de algum valor de  $\eta_j$  com  $\varepsilon_0$ , o que é um efeito típico do caráter discreto do espectro do banho, caso  $\Delta\varepsilon_i \gg \kappa$ . Porém, caso venha a ocorrer a degenerescência de algum  $\eta_j$  com  $\varepsilon_0$ , o valor máximo pode ser  $1/2$ .

É importante notar também que o tempo necessário para que a decoerência atinja o valor máximo envolve  $\kappa_i$  e o espaçamento dos estados  $\eta_j$  e, portanto, é tão mais lento quanto maior a largura da distribuição de  $\varepsilon_p$  com  $\eta_j$ .

Ao aumentarmos o valor do acoplamento entre os estados  $|+_0 -_p -_b\rangle$  e  $|-_0 +_p 0_b\rangle$ , isto é, aumentando o valor de  $\kappa$ , verificaremos que os haverá uma decoerência maior visto que o primeiro estado  $\{|+_0 -_p -_b\rangle\}$  estará mais acoplado aos demais. Isto corresponde na realidade à situação de uma cavidade com fator de qualidade alto, já que o parâmetro relevante é a razão  $\kappa/T$ .

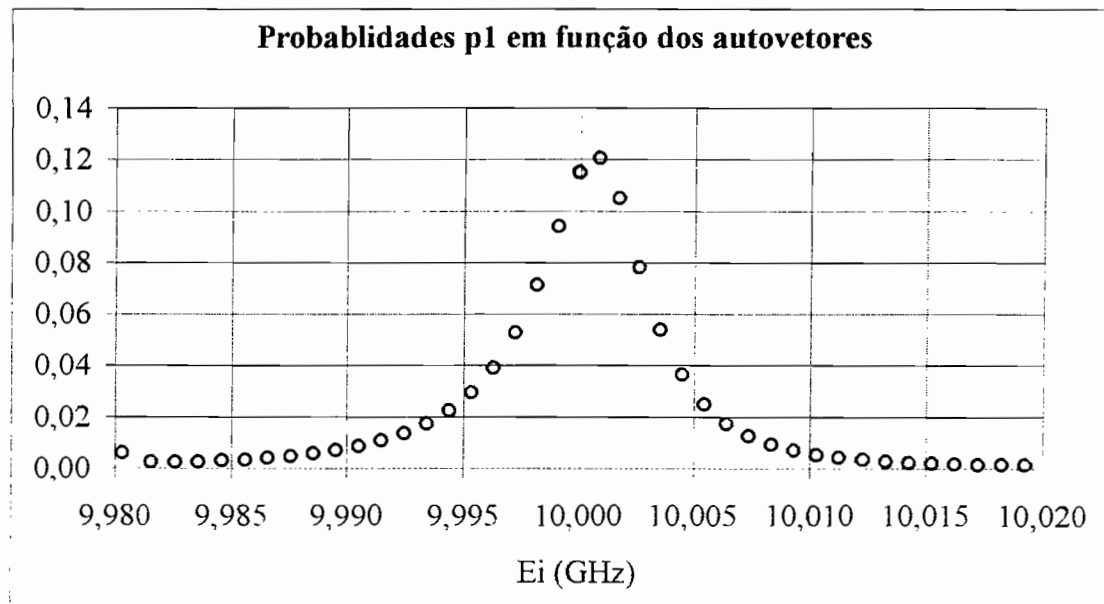


Fig. 6.11. Gráficos das distribuições do estado  $\{|+_0 -_p -_b\rangle\}$  em relação aos autovalores (dados em GHz) para um fator  $\kappa/T$  da ordem de 0,5.

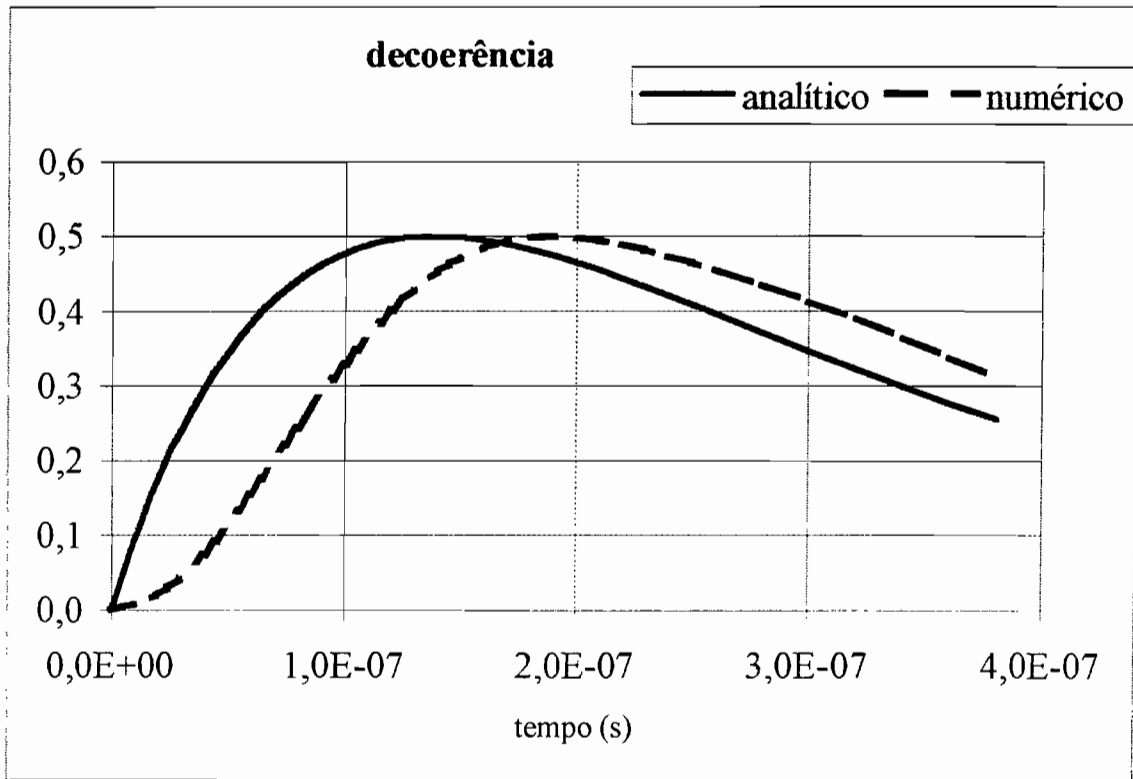


Fig. 6.12. Decoerência em função do tempo pelos modelos numérico e analítico para  $\varepsilon_0 = 9,998 \text{ GHz}$ ,  $\varepsilon_p = 10,002 \text{ GHz}$ ,  $\kappa = 5 \text{ MHz}$ ,  $\Gamma = 10 \text{ MHz}$  para  $n = 40$ .

Dessa forma, podemos verificar que o aumento do acoplamento  $\kappa$  provoca um aumento da decoerência num curto espaço de tempo, isto é, a decoerência sobe mais rapidamente (limitada a  $\frac{1}{2}$ ) para os tempos de trânsito do átomo. Neste caso, a curva do modelo numérico se aproxima do modelo analítico, tendo em vista que as frequências relevantes são maiores que o espaçamento dos níveis do banho.

Aqui podemos notar que existe uma similaridade com o cálculo do modelo contínuo da seção 5, onde temos um modelo analítico para tal sistema.

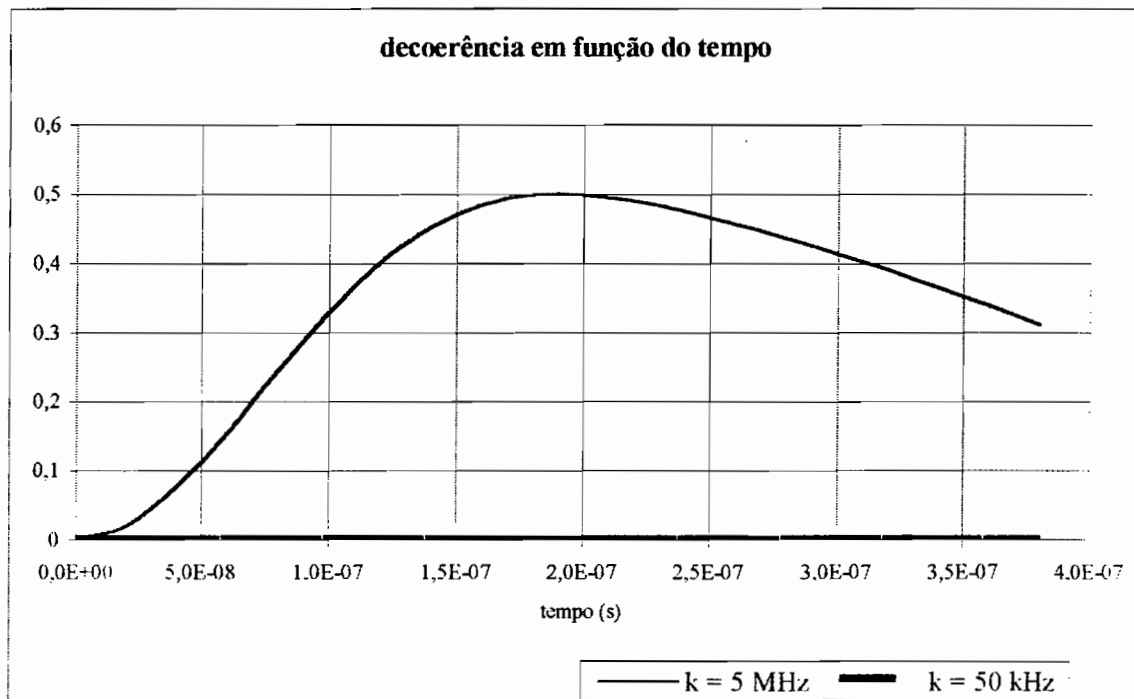


Fig. 6.13. Decoerência para os dois acoplamentos. Neste caso, a curva correspondente a  $k = 50 \text{ kHz}$  também possui um máximo em  $\frac{1}{2}$ , porém o mesmo se encontra num tempo muito maior do que a escala do gráfico (da ordem de  $10^{-4}$  segundos).

Notamos aqui que, para um mesmo intervalo de tempo, o acoplamento mais fraco praticamente não afeta a decoerência.

Assim, este modelo consegue descrever de maneira qualitativa o fenômeno da decoerência para três subsistemas acoplados linearmente, sendo que, para acoplamentos muito fracos entre o subsistema átomo e o principal, temos um resultado muito próximo do modelo discreto analisado na seção 4 enquanto que, para acoplamentos fortes a curva se aproxima do modelo contínuo (seção 5).

## 7. Discussão

Em nosso trabalho procuramos analisar três modelos que pudessem explicar os fenômenos ocorridos nas cavidades de baixo  $Q$  envolvidas na interferometria Ramsey dos átomos de Rydberg no arranjo experimental da referência [8]. No primeiro modelo considerado, o subsistema do átomo é descrito como um sistema de dois níveis, o modo relevante da cavidade é descrito por um oscilador harmônico enquanto o banho é representado por uma coleção de osciladores harmônicos. Para este sistema devemos ter que as frequências dos  $n$  osciladores correspondentes ao banho devam estar distribuídos ao redor da frequência do oscilador do modo relevante. O fato das cavidades que constituem a Zona de Ramsey ( $R_1$  e  $R_2$ ) possuírem um baixo fator de qualidade ( $Q$  da ordem de  $10^3$ ) corresponde a valores relativamente grandes da largura da linha ( $\Gamma$  da ordem de  $10^6$  Hz). O resultado disto faz com que tenhamos a decoerência do sistema dependente apenas de um fator  $\lambda^{-2} \Gamma$ , para tempos curtos comparados com  $\lambda^{-1}$  (o tempo de trânsito é da ordem de  $10^{-5}$  s enquanto que  $\lambda^{-1}$  é da ordem de  $10^{-4}$  s), conforme a equação 4.41, de forma que não iremos encontrar grandes variações de coerência para estes tempos. Através do gráfico da média de  $S_z$  na seção 4, podemos notar que o feixe atômico sofre uma transição para um estado que é a superposição dos estados  $|e\rangle$  e  $|g\rangle$ , durante o tempo de trânsito, enquanto que pelo gráfico da decoerência desta seção (fig 4.1) temos que a decoerência não sofre uma grande variação durante o mesmo intervalo de tempo, mostrando que o estado da cavidade está descorrelacionado do estado do feixe atômico. Para tempos muito curtos, isto é, para tempos menores que  $\Gamma^{-1}$  (da ordem de  $10^{-6}$  segundos), temos uma dependência da decoerência com um fator  $(\lambda t)^2$ , mostrando que a decoerência possui em  $t = 0$  derivada nula.

Ao utilizarmos o modelo onde o subsistema atômico e o modo relevante eram considerados como de dois níveis e o subsistema banho como tendo uma distribuição contínua de frequências, o acoplamento com este banho foi tomado como sendo tal que o estado excitado do subsistema de dois níveis tem uma distribuição espectral essencialmente lorentziana no subsistema acoplado. Para o caso em que esta distribuição corresponde a um baixo fator de qualidade ( $Q$  da ordem de  $10^3$ ), vamos encontrar a decoerência dependente de exponenciais decrescentes (sendo  $\kappa^2/\Gamma$  a constante de tempo), que irão gerar pouca variação nos valores da decoerência do sistema para os tempos de transição típicos do experimento, conforme podemos verificar no gráfico (fig 5.1). O fato de termos adotado em (5.9) o valor de  $|a_0^{(E)}|^2$  em seu limite máximo faz com que se perca a informação contida quanto ao comportamento da decoerência para tempos curtos comparados com  $\Gamma^{-1}$  (da ordem de  $10^{-6}$  segundos), isto é, a decoerência possui derivada não nula em  $t = 0$ . Neste intervalo de tempo a decoerência tem uma característica linear, conforme podemos observar nos gráficos das figuras 5.1 e 5.2.

Finalmente, no último modelo temos basicamente uma versão numérica, discreta e finita, do modelo anterior, isto é, temos o átomo representado por um sistema de dois níveis, assim como o modo relevante da cavidade, ambos acoplados entre si, sendo este último acoplado a um conjunto de  $n$  sistemas de dois níveis com às frequências distribuídas de modo equidistante uma das outras com a frequência central coincidindo com a frequência do modo relevante da cavidade. Ao utilizarmos um acoplamento entre o banho e o modo relevante muito maior (da ordem de 200 vezes) do que o acoplamento entre o modo relevante e o átomo podemos verificar que a decoerência também sofre pequena variação durante o intervalo de tempo típico de trânsito do átomo na cavidade, sendo que consegue atingir o valor máximo num tempo



da ordem de  $10^{-4}$  segundos. Porém, o valor máximo da decoerência neste caso é limitado pela não degenerescência entre o estado  $|+_0 -_p -_b\rangle$  e os autovetores  $|-_0, \eta_j\rangle$ , isto é, caso o estado  $|+_0 -_p -_b\rangle$  não esteja degenerado com nenhum dos estados  $|-_0, \eta_j\rangle$ , o valor máximo da decoerência não será  $\frac{1}{2}$ , mas sim um valor menor, conforme a figura 6.7. O resultado obtido consegue explicar de maneira qualitativa o efeito na decoerência, porém os valores estão distantes do modelo contínuo, visto que o número de níveis do banho deveria ser muito maior, isto é, o espaçamento entre os níveis deveria ser menor que as frequências relevantes (no caso o acoplamento átomo – modo relevante da cavidade, da ordem de kHz). Ao aumentarmos o acoplamento entre o modo relevante da cavidade e o átomo vamos notar que o comportamento do modelo numérico se aproxima do modelo contínuo, conforme o gráfico da figura 6.12. Neste caso a degenerescência do estado  $|+_0 -_p -_b\rangle$  e um dos autovetores  $|-_0, \eta_j\rangle$  não é tão relevante, visto que não haveria apenas picos de decoerência máxima como na figura 6.8, mas sim uma constante em  $\frac{1}{2}$  para o máximo da decoerência. Porém, mesmo o modelo numérico não conseguindo explicar bem quantitativamente o caso de acoplamentos fracos, podemos notar pelo gráfico da figura 6.3 que a decoerência possui derivada nula em  $t = 0$ . Dessa forma, podemos dizer que o  $\lambda^2 / \Gamma$  pode ser considerado como fator de tempo para tempos entre  $\Gamma^{-1}$  e  $\lambda^{-1}$ , enquanto que para tempos menores que  $\Gamma^{-1}$  temos que  $\lambda^2$  é o fator relevante para o tempo, onde temos uma dependência com  $t^2$ .

O que há de comum aos vários casos é que os modelos propostos com 3 subsistemas acoplados seqüencialmente, isto é,

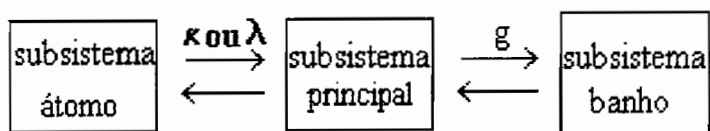


Fig. 7.1. Representação do sistema com três subsistemas acoplados sequencialmente.

consegue justificar as ocorrências na Zona de Ramsey (cavidades  $R_1$  e  $R_2$ ) nos experimentos de S. Haroche<sup>[8]</sup>, isto é, o feixe atômico, inicialmente num estado  $|e\rangle$  ou  $|g\rangle$ , sofre uma interação com o modo relevante da cavidade de forma que o feixe atômico será uma combinação linear dos dois possíveis estados atômicos, mas o modo relevante da cavidade fica descorrelacionada com o estado atômico. Vale a pena ressaltar que na cavidade principal C o estado atômico fica extremamente correlacionado com o modo relevante da cavidade. De uma maneira geral, a decoerência do átomo tende a ter um comportamento sugerido pelo modelo contínuo exposto na seção 5, onde a decoerência tem um máximo em torno de 0,5 evoluindo de uma maneira quase linear, apesar de iniciar sua variação de maneira quadrática. Cabe ressaltar que a variação até o máximo ocorre num tempo muito maior que o tempo de trânsito do átomo na cavidade, de forma que a decoerência durante este tempo é inobservável, apesar da transformação unitária do estado atômico.

A existência de um acoplamento entre o modo relevante da cavidade e um banho faz com que toda a transferência de energia para o modo relevante proveniente de uma eventual interação do átomo seja transferida para o banho onde terá forte tendência de não retornar ao átomo, de forma que este sistema possua características dissipativas mas mantendo a coerência. Isto ocorre pois o tempo de trânsito do átomo dentro da cavidade é extremamente curto para provocar uma decoerência significativa, mas

suficiente para o feixe atômico sofrer uma transição essencialmente unitária para o estado desejado.

## Referências

- [1] E. Schroedinger, *Naturwissenschaften*, **23**, 807 (1935); **23**, 823 (1935); **23**, 844 (1935).
- [2] E. Schroedinger, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **31** (1935), 555; **32** (1936) 446.
- [3] O. Kübler and H. D. Zeh, *Annals of Physics*, **76** (1973) 405.
- [4] N. F. Ramsey, *Molecular Beams*, Oxford University Press, Oxford, England (1956).
- [5] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc Inst. Elect. Eng.* **51**, 89 (1963).
- [6] D. J. Wineland and W. M. Itano, *Phys. Today* **40**(6), 34 (1987).
- [7] C. Monroe, *Science* **272**, 1132 (1996)
- [8] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J. M. Raimond and N. Zagury, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 976 (1990).
- [9] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, N. Zagury and L. Davidovich, *Phys. Rev. A* **45**(7), 5193 (1992).
- [10] R. P. Feynman, J. Vernon and R. Hallmarth, *Journal of Applied Physics* **28**, 49 (1957).
- [11] J. I. Kim, K. M. Fonseca Romero, A. M. Horiguti, L. Davidovich, M. C. Nunes and A. F. R. de Toledo Piza, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4737 (1999).
- [12] W. H. Zurek, *Physics Today*, October 36 (1991); J. S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [13] V. Buzek *et al.*, *Phys. Rev. A* **45**, 8190 (1992).
- [14] J. I. Kim, M. C. Nunes, A. F. R. de Toledo Piza and H. E. Borges, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 207 (1996).
- [15] I. I. Rabi, J. R. Zacharias, S. Millman and P. Kusch, *Phys. Rev.* **53**, 318 (1938).
- [16] C. Darwin, *Proc. Roy. Soc.* **117**, 258 (1929).
- [17] N. F. Mott and H. S. W. Massey, *Theory of Atomic Collisions*, Oxford University Press, Oxford, England (1933 and 1949)

- [18] I. I. Rabi *Phys. Rev.* **51**, 652 (1937).
- [19] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **51**, 545 (1937).
- [20] D. Meschede, H. Walther and N. Klein, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 551 (1985). G. Rempe, F. Schmidt-Kaler, and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2783 (1990). O. Benson, G. Raithel and H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3506 (1994).
- [21] M. Brune, J. M. Raimond, P. Goy, L. Davidovich, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1899 (1987)
- [22] F. Bernardot, P. Nussenzveig, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Euro. Phys. Lett.* **17**, 33 (1991).
- [23] M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt-Kaler, F. Bernardot, A. Maali, J. M. Raimond, and S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3339 (1994).
- [24] P. Nussenzveig, F. Bernardot, M. Brune, J. Hare, J. M. Raimond, S. Haroche, and W. Gawlik, *Phys. Rev. A* **48**, 3991 (1993).
- [25] U. Fano, *Physical Review* **124**, **6** (1961).