UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO INSTITUTO DE FÍSICA

Matrizes Aleatórias no Ensemble β

Gabriel Marinello de Souza Santos

Orientador: Prof. Dr. Mauricio Porto Pato

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de mestre em ciências.

Comissão Examinadora: Prof. Dr. Mauricio Porto Pato (IFUSP) Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti (IFUSP) Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (UNESP)

São Paulo, 2014

FICHA CATALOGRÁFICA Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Santos, Gabriel Marinello de Souza

Matrizes aleatórias no Ensemble β. São Paulo, 2014.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Porto Pato

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1.Mecânica quântica; 2. Termodinâmica; 3. Mecânica estatística quântica; 4. Teoria de matrizes aleatórias; 5. Estatística de níveis.

USP/IF/SBI-071/2014

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais e à minha esposa pelo apoio e paciência durante o desenvolvimento deste trabalho. Agradeço e dedico esta dissertação à meus avós, Helena e Persio, que me incentivaram e apoiaram. Gostaria também de agradecer:

- O professor Mauricio Porto Pato, pelo aprendizado e trabalho durante este mestrado.
- O CNPq, pelo apoio financeiro (Processo 131105/2013-2).
- Aos meus colegas e professores do IFUSP, com os quais aprendi muito.

Resumo

O estudo de matrizes aleatórias na física tradicionalmente ocorre no contexto dos modelos de Wigner e na estatística por modelos de Wishart, que se conectam através do threefold way de Dyson para matrizes aleatórias reais, complexas e de quatérnios indexadas respectivamente pelo índice $\beta = 1, 2, 4$ de Dyson. Estudos recentes mostraram o caminho para que estes modelos fossem generalizados para valores reais de β , permitindo o estudo de ensembles com índice arbitrário. Neste trabalho, estudamos as propriedades estatísticas destes sistemas e exploramos a física subjacente nos modelos de Wigner e Wishart e investigamos, através de cálculos numéricos, os efeitos de localização nos modelos de β geral. Também introduzimos quebras na simetria desta nova forma e estudamos numericamente os resultados da estatística dos sistemas perturbados.

Abstract

The study of random matrices in physics has traditionally occurred in the context of Wigner models and in statistics by Wishart models, which are connected through Dyson's threefold way for real, complex and quaternion random matrices index by the Dyson $\beta = 1, 2, 4$ index, respectively. Recent studies have shown the way by which these models are generalized for real values of β , allowing for the study the ensembles with arbitrary index. In this work, we study the statistical properties of these systems and explore the underlying physics in Wigner's and Wishart's models through and investigate through numerical calculations the effects of localization in general β models. We also introduce symmetry breaks in this new form and study numerically the results of the statistics of the disturbed systems.

Conteúdo

1 Introdução						
2	Ensemble Gaussiano 2.1 Introdução 2.2 Densidade de Probabilidade de Elementos 2.3 Densidade de Probabilidade de Autovalores 2.4 Densidade de Níveis e Limites Assintóticos	5 5 6 9 11				
3	Ensemble de Wishart 3.1 Introdução 3.2 Densidade de Probabilidade de Elementos 3.3 Densidade de Probabilidade de Autovalores	13 13 13 15				
4	Ensembles β -Hermite e β -Laguerre4.1Introdução4.2Resultados Adicionais de Matrizes4.3Autovalores no Ensemble β -Hermite4.4Desdobramento dos Autovalores no Ensemble β -Hermite4.5Autovalores no Ensemble β -Laguerre4.6Matrizes dos Ensembles β Pseudo-Hermitianos	 17 17 19 22 25 26 29 				
5	Estudos Numéricos nos Ensembles β -Hermite e β -Laguerre5.1Cálculo Numérico de Autovalores no Ensemble β -Hermite5.2Cálculo Numérico de Autovalores no Ensemble β -Laguerre5.3Estatística de Autovetores no Ensemble β -Hermite5.4Estatística de Autovetores no Ensemble β -Laguerre5.5Figuras	31 33 33 34 36				
6	Conclusões e Considerações Finais	61				
Α	Teoria de Matrizes A.1 Matrizes Ortogonais	 63 63 64 65 65 67 68 				

\mathbf{B}	Probabilidades e Distribuições									
	B.1	Proba	pilidades	71						
	B.2	Teoria	de Distribuições	71						
		B.2.1	Transformação de Distribuições	73						
		B.2.2	Distribuição Normal	74						
		B.2.3	Distribuição χ_{γ}	74						

Capítulo 1

Introdução

O estudo de matrizes aleatórias, historicamente, foi iniciado por Wishart [1] no contexto do estudo de sistemas multivariados em estatística. Foi Wigner, na década de 50 [6] quem iniciou o estudo de sistemas físicos com o uso das ferramentas da teoria de matrizes aleatórias, ao estudar o comportamento dos espectros de núcleos pesados. Desde então, diversos pesquisadores contribuiram com o estudo destes modelos [2, 11, 21, 26, 28, 31, 33, 39, 40].

Dyson foi o primeiro a estudar a forma geral dos ensembles inicialmente propostos por Wigner, descrevendo o comportamento de matrizes cujas variáveis eram entradas gaussianas em três diferentes conjuntos - dos números reais, dos números complexos e dos quatérnios - conectando-os com o que ficou conhecido como o threefold way de Dyson. Esta conexão permitia que se considerasse os sistemas como função do número de variáveis gaussianas independentes que o caracterizavam. Isto significava uma variável para o sistema real, duas para o sistema complexo e quatro para o sistema de quatérnios, o que deu origem ao índice $\beta = \{1, 2, 4\}$ de Dyson.

Segundo a mecânica quântica, os níveis de energia de um sistema são descritos pelos autovalores da Hamiltoniana, um operador Hermitiano H [32, 36]. Para alguns modelos de sistemas quânticos, podemos obter espectros discretos, como no caso do oscilador harmônico quântico. No entato, no caso mais geral o espectro apresenta uma região contínua e um certo número de níveis discretos. Por este motivo, a Hamiltoniana deve ter uma estrutura de autovalores igual e assim deve ser um operador em um espaço de Hilbert de dimensão infinita [33].

Para evitar o problema de se trabalhar com um espaço de Hilbert de dimensão infinita, tratase o sistema aproximado, de dimensão N grande – porém finito – e que represente a parte importante do problema.

Isto corresponde a aproximações que truncam o sistema de modo a preservar no modelo matemático apenas a parte do sistema que é relevante para o problema físico. Desse modo, se solucionamos a equação de autovalores e autovetores no espaço de Hilbert:

$H\psi_i = E_i\psi_i$

determina-se todas as informações do sistema físico representado a partir dos autovalores e autovetores, mediante o conhecimento dos operadores referentes à grandeza neste espaço. Estudam-se, então, as propriedades do sistema modelando a matriz Hamiltoniana e construindo hipóteses estatísticas a respeito de seus elementos matriciais na representação de uma base particular. Para uma dimensão suficientemente grande, estes elementos são variáveis aleatórias cujas distribuições são determinadas pelas propriedades de simetria impostas sobre a Hamiltoniana.

Nas décadas posteriores, o estudo de matrizes aleatórias foi retomado no contexto do estudo de sistemas quânticos caóticos [29, 38]. Durante as décadas de 1960 e 1970, o estudo de caos

Ensemble	β	Conjunto	Invariância	Propriedade
Hermite				
$V_{\text{Hermite}}(\lambda) = e^{-\lambda^2/2}$		R	$A \to Q^T A Q$	Simétrica
	2	\mathbb{C}	$A \to U^H A U$	Hermitiana
	4	H	$A \to S^D A S$	Auto-Dual
Laguerre				
$V_{\text{Laguerre}}(\lambda) = \lambda^a e^{-\lambda/2}$	1	R	$A \to Q^T A Q$	
$a = \frac{\beta}{2}(n-m+1) - 1$	2	\mathbb{C}	$A \to U^H A U$	Positiva Semi-Definida
	4	H	$A \to S^D A S$	

Tabela 1.1: Tabela dos ensembles pertencentes ao "threefold way" de Dyson. Adaptado de Dimitriou [28].

em sistemas físicos clássicos se disseminou. Isto levou ao estudo do comportamento de sistemas quânticos cujo limite clássico é completamente caótico. Bohigas, Gianonni e Schmit [16] utilizaram resultados do bilhar de Sinai de modo a conjecturar que as medidas de flutuações no espectro de sistemas classicamente caóticos coincidem com aquelas de um ensemble de matrizes aleatórias canônico obedecendo às mesmas propriedades de simetria. Esta conjectura foi comprovada também pelo estudo de outros sistemas caóticos.

Posteriormente, motivados pelo trabalho de Forrester [21], Dimitriu e Edelman [28, 31] generalizaram o trabalho de Dyson ao propor um modelo geral que descreve sistemas com um β contínuo. Nesta dissertação, tem-se como objetivo explorar as propriedades estatísticas destes sistemas generalizados, explorando algebricamente as distribuições probabilísticas de seus elementos e a termodinâmica dos ensembles. Serão estudados os ensembles de β -Hermite e β -Laguerre, correspondentes às generalizações dos ensembles Gaussiano de Wigner e ao ensemble de Wishart, respectivamente.

Estes sistemas podem ser descritos em termos de matrizes tridiagonais, com densidades de elementos e autovalores definidas para cada ensemble. O ensemble de Hermite é definido em matrizes aleatórias quadradas de ordem n e o ensemble de Laguerre é definido em matrizes aleatórias quadradas de ordem n obtidas a partir do produto de matrizes aleatórias retangulares $n \times m$. Para dimensão n, é possível demonstrar os autovalores $\{\lambda_i\}_{i=1,2,...,n}$ para cada β obedecem uma distribuição conjunta geral que pode ser descrita como:

$$f_{\beta,E}(\lambda) = c_{\beta,E} \left[\prod_{i < j} \phi \left(|\lambda_i - \lambda_j|^{\beta} \right) \right] \prod_i V_E(\lambda_i)$$

onde ϕ é uma função específica do ensemble estudado. Em particular, temos para uma matriz de ordem n os ensembles de Hermite e Laguerre:

Hermite
$$f_{\beta,Hermite}(\lambda) = c_{\beta,E} \left[\prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^{\beta} \right] \prod_i e^{-\lambda_i^2/2}$$

Laguerre
$$f_{\beta,Laguerre}(\lambda) = c_{\beta,E,a} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j|^{\beta} \prod_i \lambda_i^{a-p} e^{-\lambda_i/2}$$

onde E denota o ensemble estudado e $a = \beta n/2$, $p = 1 + (\beta/2)(m-1)$. O parâmetro m adicional no ensemble de Laguerre diz respeito a dimensão da matriz retangular

Serão apresentados neste trabalho resultados da estatística dos autovalores destas matrizes, obtidos do cálculo numérico dos autovalores de matrizes pertencentes aos ensembles generalizados. Também serão apresentados resultados referentes ao comportamento da entropia média dos autovetores, calculados a partir da interpretação probabilística dos coeficientes dos autovetores normalizados. A entropia do k-ésimo autovetor, nesta interpretação (c.f. Apêndice B), é dada por:

$$S^{(k)} = -\sum_{j=1}^{n} |v_j^{(k)}|^2 \ln |v_j^{(k)}|^2$$

onde $v_j^{(k)}$ denota a *j*-ésima componente do *k*-ésimo autovetor. Este método é introduzido para o estudo de efeitos de localização e delocalização dos autovetores nos ensembles β .

Além disso, serão estudados numericamente sistemas pertencentes a estes ensembles gerais, nas quais também serão introduzidas quebras de simetria em relação à forma tridiagonal geral. Estas quebras de simetria serão introduzidas de modo a garantir que as matrizes obedeçam à propriedade de pseudo-hermiticidade [30]. Estes operadores se conectam a seus adjuntos atraves de uma tranformação de similaridade

$$A^{\dagger} = \eta A \eta^{-1} \tag{1.0.1}$$

e, para o caso dos ensembles tridiagonais gerais, possuem autovalores reais [40].

A organização do trabalho é apresentada como se segue.

- Primeiramente, apresenta-se uma revisão dos ensembles de Hermite no capítulo 2, também chamado de ensemble Gaussiano, e de Laguerre no capítulo 3, também chamado de ensemble de Wishart. Apresentam-se resultados estabelecidos na literatura, bem como propriedades estatísticas de elementos e autovalores de interesse para o estudo dos ensembles.
- No capítulo 4 parte-se de algumas propriedades termodinâmicas que podem ser obtidas para os ensembles de Hermite e Laguerre como motivação conceitual para a extensão do índice β para o contínuo. Apresenta-se uma revisão do modelo generalizado de Dumitriu e Edelman
 [28] com a introdução de quebras de simetria nos ensembles generalizados.
- No capítulo 5 apresenta-se resultados numéricos originais para os ensembles β generalizados e pseudo-hermitianos. São discutidas as distribuições de autovalores para ambos os Ensembles β Hermite e Laguerre, bem como cálculos de Entropia de autovetores para ambos os casos, abordagem a qual introduzimos para
- No capítulo 6 dicute-se os resultados obtidos e considerações adicionais a respeito da continuidade do trabalho.

Os resultados originais obtidos permitem afirmar que as observações numéricas dos ensembles β corroboram o modelo generalizado fortemente. Além disso, indicam que estas quebra de simetria em direção à pseudo-hermiticidade tem pouco efeito na distribuição dos autovalores, sendo a variação do parâmetro β o fator dominante em todos os casos. No entanto, no decorrer do estudo destes sistemas, foi observado que os sistemas tridiagonais são fortemente localizados. Está questão será o foco de estudos futuros nas propriedades de quebras de simetrias em sistemas pseudo-hermitianos.

Capítulo 2

Ensemble Gaussiano

Neste capítulo, é apresentada uma revisão da estatística das matrizes do chamado ensemble Gaussiano, ou de Hermite. São apresentadas as estatísticas de elementos e autovalores, seguindo o tratamento de M. L. Mehta [33].

2.1 Introdução

Uma das mais importantes distribuições de uma variável real que se encontra no contexto da física é a distribuição Gaussiana, ou normal. Esta distribuição é descrita por:

$$N[\mu, \sigma^2](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}$$
(2.1.1)

onde $N[\mu, \sigma^2]$ denota a distribuição de uma variável X gaussiana de média μ e variância σ^2 . Esta distribuição é usualmente definida para números reais, mas pode ser extendida para números complexos (\mathbb{C}) e quatérnios ¹ (\mathbb{H}).

É possível representar os números complexos e os quatérnios em termos matriciais. Se $a = x + iy \in \mathbb{C}$ e $h = x + iy + iz + iw \in \mathbb{H}$, podemos escrevê-los como:

$$a = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv x \mathbf{1}_2 + y \mathbf{I}_2$$
$$h = \begin{pmatrix} x & y & z & w \\ -y & x & -w & z \\ -z & w & x & -y \\ -w & -z & y & x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_2 & \mathbf{1}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

onde as matrizes 2×2 definidas como $\mathbf{1}_2 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{J}_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ são fixas.

Assim, sejam X, Y, Z e W variáveis aleatórias gaussianas independentes e identicamente distribuidas – i.i.d. – com distribuição $N[\mu, \sigma^2]$. Pode-se descrever a extensão para números complexos, denotada por $N^2[\mu, \sigma^2]$, como:

 $N^2[\mu,\sigma^2] = X + iY,$

¹Quatérnios são uma extensão dos números complexos, e formam uma álgebra associativa de dimensão 4, cuja multiplicação é não comutativa. O conjunto dos quatérnios possui a divisão, mas devido a não comutatividade ela possui duas formas. Se $z, w \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$, então $z^{-1}w \neq wz^{-1}$. Maiores detalhes e propriedades podem ser encontrados na literatura [25].

e para os quatérnios, denotada por $N^4[\mu, \sigma^2]$, como:

$$N^4[\mu, \sigma^2] = X + iY + jZ + kW$$

onde i, j e k são unidades imaginárias tais que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. E, em notação matricial,

$$N^2[\mu, \sigma^2] = X\mathbf{1}_2 + Y\mathbf{I}_2,$$

e para os quatérnios, denotada por $N^4[\mu, \sigma^2]$, como:

$$N^{4}[\mu,\sigma^{2}] = X\left(-\frac{\mathbf{1}_{2}}{0} - \frac{\mathbf{0}_{1}}{1_{2}} - \right) + Y\left(-\frac{\mathbf{I}_{2}}{0} - \frac{\mathbf{0}_{1}}{1_{2}} - \right) + Z\left(-\frac{\mathbf{0}_{1}}{-1_{2}} - \frac{\mathbf{1}_{2}}{0} - \frac{\mathbf{1}_{2}}{0} - \right) + W\left(-\frac{\mathbf{0}_{1}}{1_{2}} - \frac{\mathbf{I}_{2}}{1_{2}} - \frac{\mathbf{0}_{1}}{0} - \frac{\mathbf{1}_{2}}{1_{2}} - \frac{\mathbf{0}_{1}}{1_{2}} - \frac{\mathbf{1}_{2}}{1_{2}} - \frac{\mathbf{0}_{1}}{1_{2}} - \frac{\mathbf{1}_{2}}{1_{2}} -$$

Denota-se de maneira abreviada por $N^{\beta}[\mu, \sigma^2]$ uma variável aleatória gaussiana no conjunto dos reais ($\beta = 1$), complexos ($\beta = 2$) ou quatérnios ($\beta = 4$). Além disso, seja A uma matriz seja $A_{j,k}$ o elemento da *j*-ésima linha e *k*-ésima coluna. Se cada elemento $A_{j,k}$ for complexo, denota-se as componentes real e imaginária como $A_{j,k}^{(0)}$ e $A_{j,k}^{(1)}$, respectivamente. De maneira análoga, para os quatérnios, $A_{j,k}^{(0)}$ denota a parte real e $A_{j,k}^{(l)}$ denota a *l*-ésima parte imaginária, onde $1 \le l \le 3$. Dessa forma, é possível definir uma matriz cujos elementos são variáveis aleatórias gaussianas

Dessa forma, é possível definir uma matriz cujos elementos são variáveis aleatórias gaussianas i.i.d. nos reais, complexos ou quatérnios. Para uma matriz retangular $m \times n$, denotamos o conjuntos de tais matrizes como $G^{\beta}(m, n)$, onde β denota o índice de Dyson referente ao conjunto. Em particular, quando m = n, obtem-se o subconjunto de matrizes quadradas denotado por $G^{\beta}(n)$.

Desde Wigner [6], o interesse da Física nas matrizes aleatórias se dá principalmente através deste tipo de matriz, cujos elementos são variáveis aleatórias Gaussianas. Em particular, interessa principalmente o cálculo dos autovalores destas matrizes, que descrevem hamiltonianas de sistemas quânticos. Estes autovalores possuem propriedades peculiares à simetria da matriz em questão. Por este motivo, geralmente se dividem as matrizes de origem gaussiana em três ensembles:

Ensemble Ortogonal Gaussiano (GOE): corresponde a matrizes reais simétricas, cuja diagonal são variáveis aleatórias i.i.d. de distribuição N(0, 1) e cujos elementos fora da diagonal são variáveis aleatórias i.i.d. de distribuição $N(0, \frac{1}{2})$. São obtidas a partir de uma matriz $A \in G^1(n)$ pela operação $(A + A^T)/2$.

Ensemble Unitário Gaussiano (GUE): corresponde a matrizes complexas hermitianas, cuja diagonal são variáveis aleatórias i.i.d. de distribuição N(0, 1) e cujos elementos fora da diagonal são variáveis aleatórias i.i.d. de distribuição $N^2(0, \frac{1}{2})$. São obtidas a partir de uma matriz $A \in G^2(n)$ pela operação $(A + A^{\dagger})/2$.

Ensemble Simplético Gaussiano (GSE): corresponde a matrizes de quatérnios auto-duais, cuja diagonal são variáveis aleatórias i.i.d. de distribuição N(0, 1) e cujos elementos fora da diagonal são variáveis aleatórias i.i.d. de distribuição $N^4(0, \frac{1}{2})$. São obtidas a partir de uma matriz $A \in G^4(n)$ pela operação $(A + A^{\dagger})/2$.

2.2 Densidade de Probabilidade de Elementos

A definição matemática mais precisa dos ensembles Gaussianos [33] pode ser realizada a partir das propriedades estatísticas dos seus elementos. Denotando H_{jk} como o elemento da *j*-ésima linha e k-ésima coluna e dH_{jk} como seu elemento diferencial, define-se:

Definição 2.2.1. O ensemble Gaussiano Ortogonal E_{1G} é definido no espaço de matrizes simétricas reais por:

(1) A probabilidade P(H)dH de uma matriz de E_{1G} pertencer ao elemento de volume $dH = \prod_{k < i} dH_{kj}$ é invariante sobre transformações reais ortogonais:

$$P(H')dH' = P(H)dH \tag{2.2.1}$$

onde

$$H' = W^T H W \quad e \quad W^T W = W W^T = 1.$$
 (2.2.2)

(2) Esta densidade de probabilidade P(H) é um produto de funções, cada uma das quais depende de apenas uma única variável:

$$P(H) = \prod_{k \le j} f_{kj}(H_{kj})$$
(2.2.3)

Definição 2.2.2. O ensemble Gaussiano Unitário E_{2G} é definido no espaço de matrizes hermitianas complexas por:

(1) Sejam $H_{kj}^{(0)}$ e $H_{kj}^{(1)}$ as partes real e imaginária de H_{kj} , respectivamente. A probabilidade P(H)dH de uma matriz de E_{2G} pertencer ao elemento de volume $dH = \prod_{k \leq j} dH_{kj}^{(0)} \prod_{k < j} dH_{kj}^{(1)}$ é invariante sobre transformações unitárias:

$$P(H')dH' = P(H)dH \tag{2.2.4}$$

onde

$$H' = U^{\dagger} H U \qquad e \qquad U^{\dagger} U = U U^{\dagger} = 1.$$
 (2.2.5)

(2) Esta densidade de probabilidade P(H) é um produto de funções, cada uma das quais depende de apenas uma única variável:

$$P(H) = \prod_{k \le j} f_{kj}^{(0)}(H_{kj}^{(0)}) \prod_{k < j} f_{kj}^{(1)}(H_{kj}^{(1)})$$
(2.2.6)

Definição 2.2.3. O ensemble Gaussiano Simplético E_{4G} é definido no espaço de matrizes de quatérnios auto-duais, $A^{\dagger} = A$, por:

(1) Sejam $H_{kj}^{(\lambda)}$ as componentes do quatérnio H_{kj} . A probabilidade P(H)dH de uma matriz de E_{4G} pertencer ao elemento de volume $dH = \prod_{k \leq j} dH_{kj}^{(0)} \prod_{\lambda=1}^{3} \prod_{k < j} dH_{kj}^{(\lambda)}$ é invariante sobre transformações unitárias:

$$P(H')dH' = P(H)dH \tag{2.2.7}$$

onde

$$H' = W^R H W$$
 e $W^R W = 1$ ou $W^R Z W = Z.$ (2.2.8)

onde Z é a forma canônica padrão [33], na qual \dotplus denota a soma direta:

(2) Esta densidade de probabilidade P(H) é um produto de funções, cada uma das quais depende de apenas uma única variável:

$$P(H) = \prod_{k \le j} f_{kj}^{(0)}(H_{kj}^{(0)}) \prod_{\lambda=1}^{3} \prod_{k < j} f_{kj}^{(\lambda)}(H_{kj}^{(\lambda)})$$
(2.2.9)

A partir destas definições, é possível escrever a distribuição de probabilidades conjunta dos elementos da matriz. Considera-se uma matriz de ordem N e as condições de invariância impostas pelas definições dos ensembles. Nestas condições, pode-se usar um lema [4] que garante que P(H) dependerá apenas de um número finito de traços de potências de H.

Lema 2.2.1. Todos os invariantes de uma matriz $H(N \times N)$ sob transformações de similaridade não singulares A,

$$H \to H' = AHA^{-1},$$

podem ser expressas em termos de traços das primeiras N potências de H.

O traço pode ser escrito em temos dos autovalores $\{\lambda_k\}_{k=1,\dots,N}$ de H, de modo que a diagonalização de H nos permite escrever que

$$\operatorname{tr} H^k = \sum_{l=0}^N \lambda_l^k \equiv q_k. \tag{2.2.10}$$

Utilizando também o teorema

Teorema 2.2.1. Para os três ensembles gaussianos, a forma da densidade de probabilidade conjunta dos elementos é dada por

$$P(H) = \exp\left(-a\operatorname{Tr} H^2 + b\operatorname{Tr} H + c\right)$$
(2.2.11)

onde a é real e positivo e b e c são reais.

podemos escrever a densidade de elementos como

$$P(H) = \exp\left(-a\sum_{l=1}^{N}\lambda_l^2 + b\sum_{l=1}^{N}\lambda_l + c\right) = \exp\left(-aq_2 + bq_1 + c\right).$$
(2.2.12)

2.3 Densidade de Probabilidade de Autovalores

O conhecimento da densidade dos elementos indica que é possível conhecer propriedades dos autovalores da matriz. A equação (2.2.12) permite obter uma forma geral da distribuição dos três ensembles gaussianos.

Parte-se inicialmente do caso ortogonal (GOE). Neste caso, a matriz H é simétrica de ordem N. Isto implica que há $\frac{1}{2}N(N+1)$ elementos independentes na matriz. Ou seja, os N autovalores, $\{\theta_k\}$, e os $\frac{1}{2}N(N-1) \equiv \zeta$ termos adicionais, $\{p_\mu\}$, necessários descrevem completamente os elementos $H_{kl}, k \leq l$ da matriz. Por simplicidade, introduz-se a notação:

$$\begin{cases} \theta \equiv \{\theta_k\}_{k=1,\dots,N} \\ p \equiv \{p_\mu\}_{\mu=1,\dots,\zeta} \end{cases}, \qquad \Omega = \theta \cup p \end{cases}$$

Tendo em vista o fato de que o traço de potências de uma matriz podem ser escritos segundo (2.2.10) pode-se utilizar (2.2.12) para obter a probabilidade conjunta em termos das componentes independentes da matriz H. Para obter a densidade de probabilidade de autovalores, é necessário então realizar uma transformação de variáveis na distribuição de probabilidade de modo a reescrevêla em termos de um conjunto de novas variáveis, das quais N são os autovalores da matriz. Esta transformação Φ é, então, descrita por

$$\mathbb{R}^{N+\zeta} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^{N+\zeta} : \{H\} = \Phi(\theta, p)$$
(2.3.1)

cujo Jacobiano é dado por

$$J_{\Phi}(\theta, p) = \left| \frac{\partial \Phi(\theta, p)}{\partial(\Omega)} \right| = \left| \frac{\partial (H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})}{\partial(\theta_1, \dots, \theta_N, p_1, \dots, p_{\zeta})} \right|.$$
(2.3.2)

onde o lado direto denota o determinante da matriz Jacobiana da transformação, de elementos

$$\frac{\partial H_{j,k}}{\partial \theta_l}$$
 e $\frac{\partial H_{j,k}}{\partial p_m}$

onde l = 1, 2, ..., N e $m = 1, 2, ..., \zeta$ e $1 \le j \le k \le N$. Isto implica na forma:

$$P(\Omega) = P(H(\Omega))J_{\Phi}(\Omega) \to P(\theta, p) = \exp\left(-a\sum_{k=1}^{N}\theta_k^2 + b\sum_{k=1}^{N}\theta_k + c\right)J_{\Phi}(\theta, p).$$
(2.3.3)

Desta equação segue que a distribuição dos autovalores pode ser obtida calculando-se a distribuição marginal às variáveis p, *i.e.* integrando a distribuição multivariada em todas as variáveis exceto $\{\theta_k\}, k = 1, \ldots, n$. Para tanto, encontra-se uma transformação ortogonal que permita separar a distribuição conjunta de modo que $P(\theta, p) = f(\theta)g(p)$.

O sistema deve ser invariante em respeito a transformações ortogonais. Em particular, a transformação ortogonal que diagonaliza o sistema

$$H = U\Theta U^{-1} = U\Theta U^T$$

onde Θ é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores de $H \in U$ é a matriz dos autovetores de H. Partindo desta restrição de simetria e considerando-se que apenas U é função dos ζ elementos p_{μ} , o cálculo direto do Jacobiano [33] permite que se escreva:

$$J(\theta, p) = \prod_{\alpha < \beta} |\theta_{\beta} - \theta_{\alpha}| f(p).$$
(2.3.4)

Introduzindo esta relação à equação (2.3.3) e integrando em todas as variáveis p, obtém-se:

$$P(\theta) = \int \cdots \int \exp\left(-a\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 + b\sum_{k=1}^{N} \theta_k + c\right) J_{\Phi}(\theta, p) dp$$

$$= \exp\left(-a\sum_{k=1}^{N} \theta_k^2 + b\sum_{k=1}^{N} \theta_k + c\right) \prod_{\alpha < \beta} |\theta_\beta - \theta_\alpha|$$
(2.3.5)

onde a integração em p conduz a uma constante multiplicativa que é incorporada à constante c,da qual temos que

$$\exp \tilde{c} \equiv = \exp c \times \int \cdots \int f(p) d^{\zeta} p$$

A introdução da mudança de variáveis

$$\theta_k = \frac{1}{\sqrt{2a}}x_k + \frac{b}{2a}$$

permite que se escreva

$$P_{N,1}(x_1, x_2, \dots, x_N) = C_{N,1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N x_k^2\right) \prod_{k< l} |x_k - x_l|, \qquad (2.3.6)$$

onde a constante $C_{N,1}$ pode ser determinada pela normalização, e inclui a constante da exponencial. Isto fornece a distribuição conjunta dos autovalores de H para o caso ortogonal.

A invariâncias dos dois outros ensembles sob as transformações correspondentes permite que o argumento siga de maneira explicitamente similar [33]. As diferenças dos casos unitário e simplético são observadas no número de parâmetros livres que o sistema deve possuir devido ao fato de matrizes de complexos em termos de seus componentes reais possuirem dois componentes independentes de mesmo autovalor e quatérnios, por sua vez, possuirem quatro componentes reais independentes. Em particular, o tratamento a ser abordado posteriormente no capítulo 4 para a construção do ensemble β , devido a Dumitriu e Edelman [28, 31], utiliza uma escala distinta, na qual será trabalhada a generalização dos ensembles Hermite e Laguerre. Isto altera também a expressão da constante de normalização, em relação ao tratamento de Mehta [33].

Desse modo, o ensemble unitário possui duas vezes mais elementos independentes que o ensemble ortogonal, e o ensemble simplético quatro vezes mais que o ortogonal. Se denotamos este número por ζ_{β} , teremos que:

$$\zeta_{\beta} = \frac{1}{2}\beta N(N-1) \tag{2.3.7}$$

onde o subescrito β denota o níndice de Dyson do conjunto.

Adicionalmente, a matriz possui N autovalores em termos do conjunto indexado por β e a restrição de simetria implica que estes autovalores são reais. Assim, há N autovalores no conjunto sobre a qual a matriz é construida e no entanto, estes autovalores tem multiplicidade β sobre os reais, implicando um expoente no módulo. A demonstração detalhada para a obtenção deste resultado pode ser encontrada em Mehta [33]. É possível, então, com uma escolha adequada das unidades de energia enunciar em forma de teorema o seguinte resultado:

Teorema 2.3.1. A função de densidade de probabilidade conjunta para os autovalores de matrizes dos ensembles Gaussiano ortogonal, unitário ou simplético é dada por

$$P_{N,\beta}(x_1, x_2, \dots, x_N) = C_{N,\beta} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta \sum_{k=1}^N x_k^2\right) \prod_{k< l} |x_k - x_l|^{\beta}.$$
(2.3.8)

onde $\beta = 1, 2, 4$ representam respectivamente os ensembles ortogonal, unitário e simplético. A constante $C_{N,\beta}$ é escolhida de forma a normalizar a distribuição, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P_{N,\beta}(x_1, x_2, \dots, x_N) dx_1 dx_2 \dots dx_N = 1$$

A partir deste resultado é possível determinar as constantes $C_{N,\beta}$ utilizando uma forma das integrais de Selberg [3] extendidas por [18]. Isto nos permite escrever que:

$$C_{N,\beta} = \left[(2\pi)^{N/2} \beta^{-N/2 - \beta N(N-1)/4} \{ \Gamma(1+\beta/2) \}^{-N} \prod_{j=1}^{N} \Gamma(1+\beta j/2) \right]^{-1}.$$
 (2.3.9)

2.4 Densidade de Níveis e Limites Assintóticos

Para se obter a densidade de estados $\rho_{N,\beta}(x)$, parte-se da densidade de probabilidade conjunta (2.3.8). Devido ao fato das energias $\{x_k\}$ pertencerem ao espectro completo e serem independentes, podemos obter $\rho_{N,\beta}$ fazendo:

$$\rho_{N,\beta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} P_{N,\beta}(x, x_2, \dots, x_N) dx_2 dx_3 \dots dx_N$$
(2.4.1)

Nos interessa, no entanto, o cálculo para o limite assintótico em que N se torna muito grande. Neste limite, a Isto faz com que seja apropriado aproximar a distribuição discreta de estados $\{x_k\}$ pelo limite contínuo de densidade (x). Ou seja:

$$W[\rho_{N,\beta}] = \frac{1}{2} \int_{-infty}^{+\infty} dx \rho_{N,\beta}(x) x^2 - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{N,\beta}(x) \rho_{N,\beta}(y) \ln|x - y| dx dy.$$
(2.4.2)

A desidade $\rho_{N,\beta}$ deverá minimizar (2.4.2) verificando os vínculos:

$$\int \rho_{N,\beta}(x)dx = 1 \tag{2.4.3}$$

$$\rho_{N,\beta}(x) \ge 0 \tag{2.4.4}$$

Deste modo, obtemos uma equação funcional para $\rho \equiv \rho_{N,\beta}$ que pode ser resolvida considerandose:

$$\frac{\delta}{\delta\rho} \left[W - C\left(\int \rho(x)dx - N\right) \right] = -\frac{1}{2}x^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(y)\ln|x - y| - C = 0$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(y)\ln|x - y| = C$$
(2.4.5)

cuja solução é conhecida $[5,\,33]$ e nos fornece:

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi N\beta} \sqrt{2N\beta - x^2}, & |x| < \sqrt{2N\beta} \\ 0, & |x| > \sqrt{2N\beta} \end{cases}.$$
(2.4.6)

Esta forma assintótica é de grande utilidade para o cálculo do desdobramento dos autovalores no ensemble de Hermite a ser discutido no capítulo 5.

Capítulo 3

Ensemble de Wishart

Neste capítulo, é apresentada uma revisão da estatística das matrizes do chamado ensemble de Wishart, ou de Laguerre. São apresentadas as estatísticas de elementos e autovalores, seguindo o tratamento de R. J. Muirhead e as extensões apresentadas por I. Dumitriu e A. Edelman e M. T. Loots [15, 28, 39].

3.1 Introdução

Historicamente, dentre os primeiros estudos aprofundados sobre matrizes aleatórias está o de Wishart [1]. O ensemble de Wishart parte dos mesmos conceitos introduzidos no início do capítulo 2. Seja $G^{\beta}(m,n)$ o conjunto de todas as matrizes $m \times n$ cujas entradas são variáveis aleatórias sorteadas de uma distribuição gaussiana real ($\beta = 1$), complexa ($\beta = 2$) ou de quartérnios ($\beta = 4$).

As matrizes de Wishart são construidas a partir destas matrizes de maneira similar ao que é feito para o caso Gaussiano. As distribuições dos elementos independentes e identicamente distribuidos são definidos como apresentado no início do capítulo 2. Sendo assim, descreve-se os Ensembles de Wishart como:

Ensemble Wishart Real: corresponde a matrizes simétricas, geradas a partir de um produto AA^{T} , onde $A \in G^{1}(n, m)$.

Ensemble Wishart Complexo: corresponde a matrizes hermitianas, geradas a partir de um produto AA^{\dagger} , onde $A \in G^2(n, m)$.

Ensemble Wishart Quatérnio: corresponde a matrizes auto-duais, geradas a partir de um produto AA^{\dagger} , onde $A \in G^4(n, m)$.

O estudo clássico de Wishart diz respeito às matrizes nas quais $n \le m$. No entanto, estudaremos numericamente também o caso em que n > m.

3.2 Densidade de Probabilidade de Elementos

Seja uma matriz $A \in G^{\beta}(n,m)$ uma matriz cujas colunas sejam variáveis gaussianas padrão independentemente distribuidas com elementos no conjunto dos reais ($\beta = 1$), complexos ($\beta = 2$) ou quatérnios ($\beta = 4$). O modelo real, introduzido por Wishart [1] foi expandido desde então, e abrange os três casos [28, 15, 14, 39]. Assim, definimos os ensembles clássicos de Wishart. **Definição 3.2.1.** O ensemble Wishart Real, E_{1W} , é definido no espaço de matrizes $n \times m$ reais por:

(1) A probabilidade P(H)dH de um sistema de E_{1W} pertencer ao elemento de volume $dH = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m \\ k \leq j}} dH_{kj}$ é invariante, ou seja,

$$P(H')dH' = P(H)dH (3.2.1)$$

sobre o grupo de transformações

$$H' = LHT \qquad L \in G1(m) \qquad T \in O(n) \tag{3.2.2}$$

onde G1(m) é o grupo de todas as matrizes não singulares $m \times m \in O(n)$ é o grupo de todas as matrizes ortogonais $n \times n$.¹

(2) Esta densidade de probabilidade P(H) é um produto de funções, cada uma das quais depende de apenas uma única variável:

$$P(H) = \prod_{\substack{1 \le k \le n \\ 1 \le j \le m \\ k \le j}} f_{kj}(H_{kj})$$
(3.2.3)

Definição 3.2.2. O ensemble Wishart Complexo E_{2W} é definido no espaço de matrizes $n \times m$ s complexas por:

(1) Sejam $H_{kj}^{(0)}$ e $H_{kj}^{(1)}$ as partes real e imaginária de H_{kj} , respectivamente. A probabilidade P(H)dH de um sistema de E_{2W} pertencer ao elemento de volume ² $dH = \prod_{k \leq j} dH_{kj}^{(0)} \prod_{k < j} dH_{kj}^{(1)}$ é invariante, ou seja,

$$P(H')dH' = P(H)dH \tag{3.2.4}$$

sobre o grupo de transformações

$$H' = LHV \qquad L \in G1(m, \mathbb{C}) \qquad V \in U(n) \tag{3.2.5}$$

onde $G1(m, \mathbb{C})$ é o grupo de todas as matrizes não singulares sobre o plano complexo $m \times m$ e U(n) é o grupo de todas as matrizes unitárias $n \times n$.

(2) Esta densidade de probabilidade P(H) é um produto de funções, cada uma das quais depende de apenas uma única variável:

$$P(H) = \prod_{k \le j} f_{kj}^{(0)}(H_{kj}^{(0)}) \prod_{k < j} f_{kj}^{(1)}(H_{kj}^{(1)})$$
(3.2.6)

Definição 3.2.3. O ensemble Wishart de Quatérnios E_{4W} é definido no espaço de matrizes $n \times m$ de quatérnios:

¹Este é um caso especial da definição apresentada na seção 3 de James [14], correspondendo à $\Sigma = \mathbb{I} \in M = \mathbf{0}$ na notação de tal autor.

²A restrição de simetria impede que os elementos diagonais tenham parte imaginária. Portanto $k \neq j$ no segundo produtório.

(1) Sejam $H_{kj}^{(\lambda)}$ as componentes do quatérnio H_{kj} . A probabilidade P(H)dH de um sistema de E_{4G} pertencer ao elemento de volume³ $dH = \prod_{k \leq j} dH_{kj}^{(0)} \prod_{l=1}^{3} \prod_{k < j} dH_{kj}^{(l)}$ é invariante, ou seja,

$$P(H')dH' = P(H)dH \tag{3.2.7}$$

sobre o grupo de transformações

$$H' = LHW \qquad L \in G1(m, \mathbb{H}) \qquad W \in Sp(n, \mathbb{H})$$
(3.2.8)

onde $G1(m, \mathbb{H})$ é o grupo de todas as matrizes não singulares sobre os quatérnios $m \times m$ e Sp(n) é o grupo de todas as matrizes $n \times n$ do grupo simplético sobre os quatérnios,

$$H' = W^R H W \qquad e \qquad W^R W = 1 \quad ou \quad W^R Z W = Z \tag{3.2.9}$$

onde Z é novamente a forma canônica padrão apresentada no capítulo 2.

(2) Esta densidade de probabilidade P(H) é um produto de funções, cada uma das quais depende de apenas uma única variável:

$$P(H) = \prod_{k \le j} f_{kj}^{(0)}(H_{kj}^{(0)}) \prod_{\lambda=1}^{3} \prod_{k < j} f_{kj}^{(\lambda)}(H_{kj}^{(\lambda)})$$
(3.2.10)

Estas propriedades nos permitem determinar as propriedades da distribuição de Wishart, que corresponde à distribuição dos elementos da matriz

$$W_{\beta} = A_{\beta} A_{\beta}^{\{\text{Op}\}}$$

onde A_{β} é uma matriz de um dos ensembles $E_{\beta W}$ e {Op} é a operação de simetria relevante ao ensemble em questão. É possivel obter, para os casos real e complexo, que a distribuição de uma matriz H de Wishart de variância unitária e média nula é dada por [14, 15]:

$$f_L^{\beta}(H) = c_{m,n}^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} H\right) (\det H)^{\beta(n-m+1)/2-1}$$
(3.2.11)

cuja extensão para os simpléticos é conhecida na literatura [28, 39].

3.3 Densidade de Probabilidade de Autovalores

A partir destas definições, é possível determinar a distribuição dos autovalores das matrizes do ensemble de Wishart [15]. Seja a matriz $H = AA^T$ uma matriz $n \times n$ do ensemble Wishart real obtida a partir de uma matriz A real $n \times m$. Seja W a matriz ortogonal que diagonaliza H, ou seja, $H = W\Lambda W^T$, onde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. A *i*-ésima coluna de W é o autovetor normalizado correspondente ao autovalor λ_i .

A distribuição destes autovalores é conhecida na literatura [15] e é dada por:

$$f(\Lambda) = \frac{\pi^{n^2/2} 2^{-mn/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}m) \Gamma(\frac{1}{2}n)} \prod_{i=1}^n \lambda_i^{(n-m-1)/2} \prod_{i(3.3.1)$$

³A restrição de simetria impede que os elementos diagonais tenham parte imaginária. Portanto $k \neq j$ no segundo produtório, para toda parte imaginária $1 \leq l \leq 3$

O caso complexo e de quatérnios é análogo. No entanto, há de se notar que nestes dois casos a simetria é alterada, de forma que a transformação de diagonalização se torna $H = W\Lambda W^{\dagger}$, onde † denota a conjugação transposta de complexos e quatérnios, conforme o caso. O resultado desta extensão é conhecido na literatura [28, 39] e pode ser expresso como

$$f(\Lambda) = c_{n,m}^{\beta} \prod_{i < j}^{n} \lambda_i^{\beta(n-m+1)/2-1} (\lambda_i - \lambda_j)^{\beta} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$
(3.3.2)

onde

$$c_{n,m}^{\beta} = 2^{-\beta m n/2} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2}j\right) \Gamma\left(\frac{\beta n}{2} - \frac{\beta}{2}(m-j)\right)}.$$
(3.3.3)

Capítulo 4

Ensembles β -Hermite e β -Laguerre

Nos capítulos precedentes¹, foram apresentadas as propriedades das distribuições dos autovalores de matrizes pertencentes aos ensembles de Hermite e Laguerre. Neste capítulo, parte-se da interpretação estatística dos coeficientes de normalização para motivar a generalização para os ensembles de índice β de Dyson geral. Tendo esta motivação sido estabelecida, será exposta a construção de Dumitriu e Edelman [28] para tais ensembles, bem como a construção de ensembles pseudo-hermitianos de autovalores reais deles derivados.

4.1 Introdução

A extensão para os ensembles com β geral tem como motivação um interesse histórico na interpretação estatística dos sistemas de Hermite e Laguerre [21]. Primeiramente, observa-se que a função de partição de um sistema clássimo em mecânica estatística [24] pode ser escrita como

$$Z(\beta,N) = \int \cdots \int \exp\left[-\beta H(\vec{q}_1,\ldots,\vec{q}_n,\vec{p}_1,\ldots,\vec{p}_n)\right] d^3\vec{q}_1\ldots d^3\vec{q}_N d^3\vec{p}_1\ldots d^3\vec{p}_N$$

onde $\beta = \frac{1}{kT}$ e k é a constante de Boltzmann e T é a temperatura. A partir desta equação, a probabilidade de um dado microestado $\{\vec{q_1}, \ldots, \vec{q_n}, \vec{p_1}, \ldots, \vec{p_n}\}$ é dada por:

$$P(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n) = \frac{\exp(-\beta H(\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n)}{Z(\beta, N)}$$
(4.1.1)

Observando as densidades de probabilidade dadas pelas equações (2.3.8) e (3.3.2), é possível identificar a função de partição ao inverso das constantes de normalização (2.3.9) e (3.3.3).

Dessa forma, alterando a notação para corresponder a notação anterior para os ensembles de Hermite e Laguerre, a função de partição pode ser obtida diretamente desta analogia. Para o ensemble de Hermite:

$$Z_{N,\beta} = C_{N,\beta}^{-1} = (2\pi)^{N/2} \beta^{-N/2 - \beta N(N-1)/4} \{ \Gamma(1+\beta/2) \}^{-N} \prod_{j=1}^{N} \Gamma(1+\beta j/2)$$
(4.1.2)

Se, então, relaxa-se a condição de β ser um dos índices de Dyson, ou seja, permite-se que $\beta \in [0, \infty)$, para se calcular certas propriedades termodinâmicas adicionais do Ensemble. Partindo da função de partição, podemos obter:

 $^{^{1}}$ Capítulos 2 e 3.

Energia Livre:

$$F_N(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{N,\beta}$$

= $-\frac{N}{2\beta} \ln 2\pi + \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta(N-1)}{4}\right) \frac{N \ln \beta}{\beta}$
+ $\frac{N}{\beta} \ln \Gamma(1+\beta/2) + \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^N \ln \Gamma(1+\beta j/2)$ (4.1.3)

Energia Interna:

$$U_{N}(\beta) = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_{N,\beta}$$

= $\frac{N(N-1)}{4} \ln\beta + \left(\frac{1}{2} + \frac{\beta(N-1)}{4}\right) \frac{N}{\beta}$
+ $\frac{N}{2} \frac{\psi^{(0)}(1+\beta/2)}{\Gamma(1+\beta/2)} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{j\psi^{(0)}(1+\beta j/2)}{\Gamma(1+\beta j/2)}$ (4.1.4)

Entropia:

$$S_{N}(\beta) = \frac{N}{2} \ln 2\pi + \beta^{2} \frac{\partial F_{N}(\beta)}{\partial \beta} =$$

$$= \frac{1}{4} N(N-1)\beta \ln \beta + \left[\frac{1}{2} + \frac{\beta(N-1)}{4}\right] N(1-\ln\beta) - N \ln \Gamma(1+\beta/2)$$

$$+ \frac{N\beta}{2} \frac{\psi^{(0)}(1+\beta/2)}{\Gamma(1+\beta/2)}) - \sum_{j=1}^{N} \ln \Gamma(1+\beta j/2) + \frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{j\psi^{(0)}(1+\beta j/2)}{\Gamma(1+\beta j/2)}$$
(4.1.5)

onde

$$\psi^{(m)}(z) \equiv (-1)^{m+1} \int_0^\infty \frac{t^m e^{-zt}}{1 - e^{-t}} dt$$
(4.1.6)

é a função poligama [13].

Analogamente, para o ensemble de Laguerre

$$Z_{n,m,\beta} = C_{n,m,\beta}^{-1} = 2^{-\beta m n/2} \prod_{j=1}^{n} \frac{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}j\right)\Gamma\left(\frac{\beta n}{2}-\frac{\beta}{2}(m-j)\right)}$$
(4.1.7)

onde $C_{N,\beta}$ é como definido em (2.3.9). Isto nos permite calcular certas propriedades termodinâmicas do Ensemble. Partindo da função de partição, podemos obter:

Energia Livre:

$$F_{n,m}(\beta) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{n,\beta}$$
$$= \frac{nm}{2} + \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{n} \left[\ln \Gamma \left(1 + \frac{\beta}{2}j \right) + \ln \Gamma \left(\frac{\beta m}{2} - \frac{\beta}{2}(n-j) \right) - \ln \Gamma \left(1 + \frac{\beta}{2} \right) \right]$$
(4.1.8)

Energia Interna:

$$U_{n,m}(\beta) = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_{n,\beta} = \frac{nm}{2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{j\psi^{(0)}(1+\beta j/2)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}j\right)} + \frac{(m-n+j)\psi^{(0)}(\frac{\beta m}{2}-\frac{\beta}{2}(n-j))}{\Gamma\left(\frac{\beta m}{2}-\frac{\beta}{2}(n-j)\right)} - \frac{\psi^{(0)}(1+\beta/2)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right)} \right]$$
(4.1.9)

Entropia:

$$S_{n,m}(\beta) = \beta^2 \frac{\partial F_n(\beta)}{\partial \beta} = \beta (U_{n,m}(\beta) - F_{n,m}(\beta))$$

= $\frac{\beta}{2} \sum_{j=1}^n \left[\frac{j\psi^{(0)}(1+\beta j/2)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}j\right)} + \frac{(m-n+j)\psi^{(0)}(\frac{\beta m}{2} - \frac{\beta}{2}(n-j))}{\Gamma\left(\frac{\beta m}{2} - \frac{\beta}{2}(n-j)\right)} - \frac{\psi^{(0)}(1+\beta/2)}{\Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right)} \right]$ (4.1.10)
- $\sum_{j=1}^n \left[\ln \Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}j\right) + \ln \Gamma\left(\frac{\beta m}{2} - \frac{\beta}{2}(n-j)\right) - \ln \Gamma\left(1+\frac{\beta}{2}\right) \right]$

Este comportamento de caráter termodinâmico dos ensembles, com uma dependência vinculada a um análogo de temperatura, motiva a construção de um ensemble de matrizes aleatórias descritos em termos do parâmetro β e do tamanho da matriz, n para o ensemble de Hermite e $n \times m$ para o de Laguerre. Para tanto, partimos da forma completa das matrizes dos ensembles de Hermite e Laguerre e deduzimos as formas gerais derivadas por Dimitriu e Edelman [28, 31], denotadas por β -Hermite e β -Laguerre. Nesta construção são necessários alguns resultados que auxiliam no cálculo de seus autovalores, que são apresentados a seguir.

4.2 Resultados Adicionais de Matrizes

Seja uma matriz tridiagonal simétrica T definida pela diagonal $a = (a_n, \ldots, a_1)$ e a subdiagonal $b = (b_{n-1}, \ldots, b_1)$ onde a_j tem distribuição gaussiana de média nula e variância unitária, b_k tem distribuição de uma χ_{i-1} de média nula e variância 1/2. Suponhamos, também, que $b_1, \ldots, b_{n-1} > 0$. Seja $T = Q\Lambda Q^T$ a decomposição espectral de T e seja q a primeira linha normalizada de Q com elementos todos positivos e $\lambda = \text{diag}(\Lambda)$ o vetor cujos elementos são os autovalores ordenados de T. Apresentamos aqui as propriedades de interesse para o estudo dos ensembles β -Hermite e β -Laguerre.

Lema 4.2.1. Sob as condições acima, partindo de q e λ , é possível reconstruir unicamente Q e T.

Demonstração. Trata-se de um caso particular do teorema (7.2.1) de Parlett [22], tomando o caso do autovetor q_1 .

Deste modo, exceto por um conjunto de medida nula, o mapa $\Phi : T \to (q, \lambda)$ relaciona dois espaços vetoriais de mesma dimensão. Portanto, Φ é uma bijeção do conjunto de matrizes tridiagonais de tamanho n com subdiagonal positiva ao conjunto de pares (q, λ) , com q um vetor n-dimensional de norma unitária e entradas reais e positivas e λ uma sequência ordenada de nnúmeros reais, conforme definido acima. Seja o Jacobiano da bijeção denotado por

$$J = \left\{ \frac{\partial(a,b)}{\partial(q,\lambda)} \right\}$$
(4.2.1)

O próximo lema² é, também, necessário no cálculo dos autovalores da matriz T:

Lema 4.2.2. O determinante de Vandermonde dos autovalores ordenados de uma matriz simétrica tridiagonal de ordem n com subdiagonal positiva é dado por:

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^i}{\prod_{i=1}^n q_i}$$

$$(4.2.2)$$

onde q e b são como definidos acima.

Finalmente, demonstra-se um lema que relaciona a diagonalização e tridiagonalização da matrizes do GOE. Devido ao fato do Jacobiano depender apenas da estrutura da matriz, como será demonstrado, é suficiente demonstrar este caso para que a extensão para os demais β de Dyson seja possível, observando apenas a existência de β termos independentes nos demais ensembles.

Lema 4.2.3. O Jacobiano (4.2.1) pode ser escrito como

$$J = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^i}{\prod_{i=1}^{n} q_i}$$
(4.2.3)

Demonstração. Seja A uma matriz do GOE. As transformações de Householder ³ ortogonais de tridiagonalização que levam A a T mantém os autovalores invariantes ⁴ e permitem que se diga que a distribuição de autovalores de T é a de uma matriz A do GOE. A distribuição conjunta dos elementos de T é

$$\mu(a,b) = c_{n;a,b} \prod_{j=1}^{n} f(a_j) \prod_{k=1}^{n-1} g(b_k)$$

$$= c_{n;a,b} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \prod_{i=2}^{n} b_i^{i-1} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} b_i^2\right) = c_{n;a,b} \prod_{i=2}^{n} b_i^{i-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr} T^2\right).$$
(4.2.4)

uma vez que

diag
$$(T^2) = (a_n^2, a_{n-1}^2 + 2b_{n-1}^2, a_{n-2}^2 + 2b_{n-2}^2, \dots, a_1^2 + 2b_1^2).$$

A constante de normalização $c_{n:a,b}$ é dada por

$$c_{n;a,b} = \frac{2^{n-1}}{(2\pi)^{n/2} \prod_{i=1}^{n-1} \Gamma(i/2)},$$
(4.2.5)

a partir da normalização das distribuições independentes. Sejam, agora, os elementos de volume

$$da = \bigwedge_{i=1}^{n} da_i \quad , \quad db = \bigwedge_{i=1}^{n-1} db_i \quad , \quad d\lambda = \bigwedge_{i=1}^{n} d\lambda_i \tag{4.2.6}$$

e seja dq o elemento de superfície da esfera *n*-dimensional. Se expressamos $\mu(a, b)$ nas novas variáveis (q, λ) , ou seja $\mu(a(q, \lambda), b(q, \lambda))$, teremos que:

$$\mu(a,b)dadb = J\mu(a(q,\lambda), b(q,\lambda))dqd\lambda = \nu(q,\lambda)dqd\lambda$$
(4.2.7)

²A demonstração pode ser vista no apêndice A.

 $^{^{3}\}mathrm{A}$ descrição destas transformações é apresentada no apêndice A em maior detalhe.

⁴Uma vez que $||QAQ^T - \lambda I|| = ||Q(A - \lambda I)Q^T|| = ||Q|| ||Q^T|| ||A - \lambda I||$, se Q é ortogonal, $Q^{-1} = Q^T$ e, portanto, $||QAQ^T - \lambda I|| = ||A - \lambda I||$.

onde $\nu(q,\lambda) \equiv J\mu(a(q,\lambda), b(q,\lambda))$. Deste modo, usamos o fato de que a densidade conjunta de autovalores do GOE é dada por [33]

$$f(\lambda) = c_H^1 |\Delta(\lambda)| e^{-\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i^2}$$

e que a primeira linha da matriz de autovetores está distribuida uniformemente na hiper-esfera unitária, sem dependência nos autovalores [28]. Isto permite que escrevamos a densidade de probabilidade conjunta $\nu(q, \lambda)$ dos autovetores e primeira linha da matriz de autovetores de GOE. Considerando que a ordenação dos autovalores implica que $\lambda_i - \lambda_j \ge 0$ sempre que i > j, o que permite retirar o módulo do determinante $|\Delta(\lambda)|$, e a distribuição deve ser uniforme na região totalmente positiva da esfera n-dimensional devido à condição $q_i \ge 0$. Observa-se também o fato de que $c_H^1 = (2\pi)^{-n/2} \prod_{j=1}^n \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(1+j/2)} = \frac{2^{n/2}}{n!} \prod_{j=1}^n \frac{1}{\Gamma(j/2)}$, que permite que se escreva a densidade como:

$$\nu(q,\lambda)dqd\lambda = n!c_H^1 \frac{2^{n-1}\Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}} \Delta(\lambda)e^{-\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i^2} dqd\lambda$$
(4.2.8)

e, considerando que o traço da matriz é um invariante por transformações ortogonais, podemos utilizar as equações (4.2.7) e (4.2.8) de modo a obter, com o cancelamento das constantes e uso do lema 4.2.2:

$$J = \frac{\nu(q,\lambda)}{\mu(a,b)} = \frac{n! c_H^1 \frac{2^{n-1} \Gamma(\frac{n}{2})}{\pi^{\frac{n}{2}}} \Delta(\lambda)}{\frac{2^{n-1}}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{i=1}^{n-1} \Gamma(i/2)} \prod_{i=1}^n b_i^{i-1}} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i}{\prod_{i=1}^n q_i}}{\prod_{i=1}^n b_i^{i-1}} = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i}{\prod_{i=1}^n q_i}$$
(4.2.9)

que prova o resultado.

Estes resultados são suficientes para a construção da distribuição de autovalores do ensemble β -Hermite. No entanto, para a construção da distribuição de probabilidades do ensembe de β -Laguerre é necessário um lema adicional.

Lema 4.2.4. Seja B uma matriz bidiagonal com diagonal positiva $x = (x_n, \ldots, x_1)$ e subdiagonal positiva $y = (y_{n-1}, \ldots, y_1)$. Seja $T = BB^T$ e denote-se $a = (a_n, \ldots, a_1)$ e $b = (b_{n-1}, \ldots, b_1)$ a diagonal e subdiagonal respectivamente, de T. T é uma matriz positiva definida sobre os reais, pois $w^T T w = (Bw)^T (Bw) = ||Bw|| \ge 0, \forall w, então a transformação B \to T$ é uma bijeção do conjunto das matrizes bidiagonais com entradas positivas ao conjunto de matrizes tridiagonais positivas definidas. Nessas condições, o Jacobiano J da transformação que leva $B \to T$ pode ser escrito como

$$J_{B \to T} = \left(2^n x_1 \prod_{i=2}^n x_i^2\right)^{-1}.$$
(4.2.10)

Demonstração. Este Jacobiano pode ser obtido diretamente da relação:

$$dxdy = J_{B \to T} dadb \tag{4.2.11}$$

onde

$$da = \bigwedge_{i=1}^{n} da_i \quad , \quad db = \bigwedge_{i=1}^{n-1} db_i \quad , \quad dx = \bigwedge_{i=1}^{n} dx, \quad dy = \bigwedge_{i=1}^{n-1} dy.$$
(4.2.12)

O produto das matrizes BB^T pode ser escrito como:

$$T = BB^{T} = \begin{pmatrix} x_{n} & & & \\ y_{n-1} & x_{n-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & y_{1} & x_{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n} & y_{n-1} & & \\ & x_{n-1} & y_{n-2} & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & x_{1} \end{pmatrix}$$
(4.2.13)

de modo que temos as equações:

$$a_n = x_n^2 \tag{4.2.14}$$

$$a_i = y_i^2 + x_i^2 \tag{4.2.15}$$

$$b_i = y_i x_{i+1} (4.2.16)$$

para todo $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$. Assim,

$$da_n = 2x_n dx_n \tag{4.2.17}$$

$$da_i = 2y_i dy_i + 2x_i dx_i \tag{4.2.18}$$

$$b_i = x_{i+1}dy_i + y_i dx_{i+1}. ag{4.2.19}$$

A matriz jacobiana tem a forma em bloco dada por:

$$J_{T \to B} = \begin{pmatrix} 2x_n & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2x_{n-1} & \dots & 0 & 2y_{n-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{0}{y_{n-1}} & 0 & -\frac{2x_1}{0} & \frac{0}{0} & \frac{1}{2x_n} & \frac{0}{0} & \frac{1}{2y_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 2y_2 & 0 & 0 & \dots & x_3 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2y_1 & 0 & \dots & 0 & x_2 \end{pmatrix}$$
(4.2.20)

cujo determinante tem a forma: $\prod_{i=1}^{n} (2x_i) \times \prod_{j=2}^{n} x_j = 2^n x_1 \prod_{i=2}^{n} x_i^2$ e, portanto,

$$J_{B \to T} = \frac{1}{J_{T \to B}} = \left(2^n x_1 \prod_{i=2}^n x_i^2\right)^{-1}$$
(4.2.21)

o que prova o resultado.

4.3 Autovalores no Ensemble β -Hermite

É possível generalizar os resultados da distribuição de autovalores dos ensembles Gaussianos para β geral [31]. Partimos da forma geral da matriz de um ensemble gaussiano com $\beta \in \{1, 2, 4\}$ pela matriz simétrica $n \times n$

$$H_{\beta} = \begin{pmatrix} N^{\beta}(0,1) & N^{\beta}(0,\frac{1}{2}) & \dots & N^{\beta}(0,\frac{1}{2}) \\ N^{\beta}(0,\frac{1}{2}) & N^{\beta}(0,1) & \dots & N^{\beta}(0,\frac{1}{2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N^{\beta}(0,\frac{1}{2}) & N^{\beta}(0,\frac{1}{2}) & \dots & N^{\beta}(0,1) \end{pmatrix}.$$
(4.3.1)

Busca-se, então, reduzir esta matriz a uma forma tridiagonal comum aos três β clássicos. Apresenta-se então o seguinte teorema:

Teorema 4.3.1. Seja H_{β} uma matriz $n \times n$ de um dos ensembles Gaussianos. Então a forma tridiagonal desta matriz é dada por⁵:

$$A_{\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} N(0,2) & \chi_{(n-1)\beta} & & \\ \chi_{(n-1)\beta} & N(0,2) & \chi_{(n-2)\beta} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \chi_{2\beta} & N(0,2) & \chi_{\beta} \\ & & & \chi_{\beta} & N(0,2) \end{pmatrix}$$
(4.3.2)

onde $N^{\beta}(\mu, \sigma)$ denota uma entrada matricial aleatória gaussiana conforme a notação introduzida no capítulo 2 e χ_{ν} representa uma entrada matricial aleatória de distribuição χ_{ν} , derivada da distribuição χ^2 apresentada no apêndice B a partir de uma mudança de variável da forma $X[\chi^2_{\nu}] =$ $Y^2 \to Y \equiv Y[\chi_{\nu}].$

Demonstração. Para obtermos a forma tridiagonal da matriz H_{β} , é necessário que realizamos transformações de Householder (cf. Apêndice A) que zeram todos os elementos abaixo da diagonal. Assim, buscamos $Q_k \in M(\mathbb{K})_{n-k,n-k}$ tal que

$$H_{\beta}^{k} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-k} & 0\\ 0 & Q_{k} \end{pmatrix} H_{\beta}^{(k-1)} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{n-k} & 0\\ 0 & Q_{k}^{T} \end{pmatrix}$$
(4.3.3)

Se escrevemos a matriz $H_{\beta} \equiv H_{\beta}^{(0)}$ como

$$H_{\beta}^{(0)} = \begin{pmatrix} a_1 & \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_1 & J_1 \end{pmatrix}$$
(4.3.4)

teremos que a aplicação de Householder leva \mathbf{x}_1 ao vetor ($\|\mathbf{x}_1\|, 0, \ldots, 0$). No entanto, $\|\mathbf{x}_1\|$ é o comprimento de uma gaussiana multivariada de média 0 e variância $\frac{1}{2}$. Isto implica (cf. apêndice B) que trata-se de uma variável aleatória de distribuição $\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{\beta(n-1)}$. Devido à simetria ortogonal das transformações de Householder nos quatro conjuntos do threefold way⁶, a simetria da matriz é garantida.

$$H_{\beta}^{(0)} = \begin{pmatrix} a_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{\beta(n-1)} & 0 & \dots & 0\\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\chi_{\beta(n-1)} & & & \\ 0 & H_{\beta}^{(1)} & & \\ \vdots & H_{\beta}^{(1)} & & \\ 0 & 0 & H_{\beta}^{($$

Para os demais passos, o bloco inferior da matriz no k-ésimo passo se torna, prosseguindo em analogia a (4.3.4):

$$H_{\beta}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & \mathbf{x}_k \\ \mathbf{x}_k & J_{k+1} \end{pmatrix}$$
(4.3.6)

⁵A mudança na distribuição da diagonal se deve ao fato de que é necessário adicionar um fator $\sqrt{2}$ para compensar o $1/\sqrt{2}$ que é colocado em evidência. Convém notar que, para uma variável aleatória X gaussiana de distribuição $N(\mu, \sigma^2)$, a multiplicação por uma constante leva a uma nova variável gaussiana de média $c\mu$ e variância $c^2\mu^2$.

⁶Ortogonal, Unitária e Simplética para $\beta = 1, 2, 4$, respectivamente.

a partir do qual a reflexão de Householder levará a uma forma similar a 4.3.5, dada por:

$$H_{\beta}^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{\beta(n-k-1)} & 0 & \dots & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\chi_{\beta(n-k-1)} & & & & \\ 0 & & & & H_{\beta}^{(k+1)} \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & & \end{pmatrix}.$$
(4.3.7)

Prosseguindo até k = n - 2, obtém-se o resultado desejado.

A ortogonalidade das transformações de Householder nos permitem ainda dizer que a densidade de autovalores mantém a forma (2.3.8). No entanto, estes cálculos apenas garantem a validade da forma tridiagonal para os casos $\beta = \{1, 2, 4\}$. É necessário, ainda, estudar como se comporta a distribuição dos autovalores para β quaisquer. Para tanto, são necessárias considerações a respeito de matrizes tridiagonais apresentadas anteriormente neste capítulo. Delas, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 4.3.2. Seja $H_{\beta} = Q\Lambda Q^T$ a decomposição espectral de H_{β} . Fixando os sinais da primeira linha de Q tais que eles sejam não-negativos e ordenando-se os autovalores em ordem crescente na diagonal, então λ e q, a primeira linha de Q, são independentes. Além disso, a densidade conjunta de autovalores é:

$$f_{\beta}(\lambda) = C_{H}^{\beta} \prod_{i < j} |\lambda_{i} - \lambda_{j}|^{\beta} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^{N} \lambda_{i}^{2}\right).$$

Demonstração. Utilizando a notação anterior, $a = (a_N, \ldots, a_1)$ é a diagonal da matriz H_β e $b = (b_{N-1}, \ldots, b_1)$ é sua subdiagonal. Assim, para um β qualquer, observando a equação (4.2.4) teremos:

$$(dH_{\beta}) \equiv \mu(a,b) dadb = c_{a,b} \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{k\beta-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k - \frac{1}{2} 2 \sum_{k=1}^{n-1} b_k^2\right) dadb$$

= $c_{a,b} J \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{k\beta-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(H_{\beta}^2)\right) dqd\lambda$ (4.3.8)

onde

$$c_{n;a,b}(\beta) = \frac{2^{n-1}}{(2\pi)^{n/2} \prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(\frac{\beta}{2}k\right)}$$
(4.3.9)

é a constante de normalização, dependente apenas de $n \in \beta^7$. Assim, utilizamos os lemas 4.2.2 e 4.2.20 para reescrever esta identidade como:

$$(dH_{\beta}) = c_{n;a,b}(\beta) \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_k}{\prod_{k=1}^n q_k} \prod_{k=1}^{n-1} b_k^{k\beta-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{Tr}(H_{\beta}^2)\right) dqd\lambda$$
$$= c_{n;a,b}(\beta) \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_k^{k\beta}}{\prod_{k=1}^N q_k^{\beta}} \prod_{k=1}^n q_k^{\beta-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_k \lambda_k^2\right) dqd\lambda$$
$$= \left(c_q^{\beta} \prod_{k=1}^n q_k^{\beta-1} dq\right) \left(n! C_H^{\beta} \Delta(\lambda)^{\beta} exp\left(-\frac{1}{2} \sum_k \lambda_k^2\right) d\lambda\right)$$
(4.3.10)

⁷Os índices $\{a, b\}$ denotam as coordenadas de origem.

que é separável em $q \in \lambda$, o que garante a independência mútua. A constante de normalização c_q^{β} pode ser determinada a partir das demais constantes do problema [28]. Além disso, se retiramos a ordenação dos autovalores previamente imposta, teremos que a densidade conjunta de autovalores de H_{β} é $c_H^{\beta} |\Delta(\lambda)|^{\beta} \exp(-\frac{1}{2}\sum_k \lambda_k^2)$.

Demonstrado este teorema, fica provada a generalização do ensemble β -Hermite.

4.4 Desdobramento dos Autovalores no Ensemble β -Hermite

Além disso, é de interesse físico estudar o espaçamento entre níveis consecutivos de energia no limite assintótico em que a dimensão da matriz se torna muito grande. Neste limite, a distribuição dos autovalores deve tender ao limite assintótico dado pela equação (2.4.6). Para a análise do comportamento do espaçamento de maneira padronizada é realizado uma transformação na distribuição de probabilidades. Isto permite que a distância entre consecutivos autovalores da distribuição teórica se torne uniforme, e denomina-se este processo de *unfolding*.

Desse modo, normaliza-se a densidade para um a partir de uma mudança de variáveis a uma variável de distribuição uniforme. No entanto, para realizar esta transformação, é necessário que conheçamos - e possamos inverter - a forma da distribuição dos autovalores. Isto nem sempre é possível com a forma geral da densidade de níveis (2.4.1), pois nem sempre há uma expressão analítica para a transformação quer leva os autovalores a uma distribuição uniforme. De fato, ao integrarmos em todos os autovalores, exceto por um único deles, descrito pela variável x, e incorporando este resultado à constante multiplicativa, obtemos

$$\rho_{N,\beta}(x) = C_{N,\beta}\tilde{C}_{N-1,\beta}(x) \exp\left(-\frac{\beta}{2}x^2\right)$$
(4.4.1)

onde $C_{N-1,\beta}$ é uma função de x cuja forma exata é função do número de variáveis sobre as quais integramos. Podemos, para fins de exemplo, calcular o valor de $\tilde{C}_{N-1,\beta}$ para o caso N = 2. Neste caso, a partir de (2.3.8) e (2.3.9):

$$C_{2,\beta} = \frac{\beta^{1+\beta/2}}{2\pi} \frac{\Gamma(1+\beta/2)^2}{\Gamma(1+\beta/2)\Gamma(1+\beta)} = \frac{\beta^{1+\beta/2}}{2\pi} \frac{\Gamma(1+\beta/2)}{\Gamma(1+\beta)}$$
(4.4.2)

$$\rho_{2,\beta}(x) = \frac{\beta^{1+\beta/2}}{2\pi} \frac{\Gamma(1+\beta/2)}{\Gamma(1+\beta)} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^{\beta} \exp\left(-\frac{\beta}{2}y^2\right) dy \right] \exp\left(-\frac{\beta}{2}x^2\right)$$
(4.4.3)

Esta integral é um caso particular de uma integral de Selberg, e pode ser calculada para um β geral fazendo:

$$\begin{split} &\int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^{\beta} \exp\left(-\frac{\beta}{2}y^{2}\right) dy \\ &= \int_{x}^{+\infty} (y-x)^{\beta} \exp\left(-\frac{\beta}{2}y^{2}\right) dy + (-1)^{\beta} \int_{-\infty}^{x} (x-y)^{\beta} \exp\left(-\frac{\beta}{2}y^{2}\right) dy \\ &= \int_{0}^{+\infty} \phi \phi^{\beta-1} \exp\left(-\frac{\beta}{2}(\phi-x)^{2}\right) d\phi + (-1)^{\beta} \int_{-\infty}^{0} \zeta \zeta^{\beta-1} \exp\left(-\frac{\beta}{2}(x-\zeta)^{2}\right) d\zeta \\ &= 2 \int_{0}^{+\infty} \phi \left[\phi^{\beta-1} \exp\left(-\frac{\beta}{2}(\phi-x)^{2}\right)\right] d\phi \equiv \hat{\mu} \end{split}$$
(4.4.4)

onde $\phi = y - x$ e $\zeta = x - y^8$. Esta é a a média de uma distribuição χ^2 com β graus de liberdade derivada de variáveis de média x. Portanto, conforme a penúltima seção do apêndice B

$$\hat{\mu} = x + \sqrt{2\beta^{\beta/2}} \frac{\Gamma(\frac{1+\beta}{2})}{\Gamma(\frac{\beta}{2})} \equiv x + x_0(\beta).$$

$$(4.4.5)$$

Desse modo, para fazermos uma mudança de variável $x \to w$ tal que a distribuição da variável x, f(x), se torne g(w) = 1 na nova variável w:

$$f(x)dx = g(w)dw = 1dw \rightarrow \frac{dw}{dx} = f(x) = c_{2,\beta}(x + x_0(\beta))\exp\left(-\frac{\beta}{2}x^2\right)$$

$$(4.4.6)$$

cuja primitiva não tem forma analítica. No entanto, no limite assintótico de N, a expressão de $\rho_{N,\beta}(x) \rightarrow \rho(\lambda)$ tem uma forma, dada por (2.4.6):

$$f(\lambda)d\lambda = g(\eta)d\eta = 1d\eta \to \frac{d\eta}{d\lambda} = f(\lambda) \stackrel{N \ge 1}{=} c_{N,\beta}\sqrt{2N\beta - \lambda^2}$$
(4.4.7)

que pode ser integrada, de modo que

$$\eta(\lambda) = A_{N,\beta} \left(\sin^{-1} \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2n\beta}} \right) + \frac{\lambda}{\sqrt{2n\beta}} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\sqrt{2n\beta}} \right)^2} \right)$$
(4.4.8)

onde $A_{n,\beta}$ é uma constante de proporcionalidade dependente de $\alpha_{N,\beta}$. Esta transformação é monotônicamente crescente no intervalo em que os autovalores se encontram, $[-\sqrt{2N\beta}, +\sqrt{2N\beta}]$ pois:

$$\eta'(\lambda) = f(\lambda) \ge 0, \forall \lambda \in [-\sqrt{2N\beta}, +\sqrt{2N\beta}].$$
(4.4.9)

A igualdade se verifica apenas nas extremidades $\pm \sqrt{2N\beta}$. Isto nos permite calcular o espaçamento entre os autovalores transformados sem ambiguidade.

4.5 Autovalores no Ensemble β -Laguerre

Do mesmo modo que para o ensemble β -Hermite, partimos da forma geral da matriz de um ensemble de Wishart com $\beta \in \{1, 2, 4\}$ pela matriz $n \times m$

$$W_{\beta} = \begin{pmatrix} N^{\beta}(0,1) & N^{\beta}(0,1) & \dots & N^{\beta}(0,1) \\ N^{\beta}(0,1) & N^{\beta}(0,1) & \dots & N^{\beta}(0,1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ N^{\beta}(0,1) & N^{\beta}(0,1) & \dots & N^{\beta}(0,1) \end{pmatrix}.$$
(4.5.1)

Busca-se, então, reduzir esta matriz a uma forma cujos elementos não-nulos se localizam apenas na diagonal e na subdiagonal inferior. Apresenta-se então o seguinte teorema:

Teorema 4.5.1. Seja W_{β} uma matriz $n \times m$ de um dos ensembles de Wishart. Então a forma bidiagonal desta matriz é dada por:

$$B_{\beta} = \begin{pmatrix} \chi_{2a} & & \\ \chi_{\beta(m-1)} & \chi_{2a-\beta} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \chi_{\beta} & \chi_{2a-\beta(m-1)} \end{pmatrix}$$
(4.5.2)

com parâmetro $a = n\beta/2$.

⁸O que implica que $\zeta^{\beta} = (-1)^{\beta} \phi^{\beta}$.

Demonstração. Para obtermos a forma bidiagonal da matriz W_{β} , é necessário que realizemos transformações de reflexão similares às de Householder utilizadas para tridiagonalizar o ensemble de Hermite no capítulo 2. Por simplicidade, escreve-se W_{β} da forma conveniente:

$$W_{\beta}^{(k)} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}^k)^T \\ J^{(k+1)} \end{pmatrix}$$
(4.5.3)

onde $J^{(k)} \in G^{\beta}(n-k \times m-k+1)$ é uma matriz cujas entradas são gaussianas padrão e \mathbf{x}^k é um vetor de m-k+1 variáveis gaussianas padrão. Convém notar que, quando k = 0, teremos a matriz W_{β} original. Buscamos um refletor à direita

$$\hat{R}^{k} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k \times k-1} & 0\\ 0 & R^{k} \end{pmatrix}$$
(4.5.4)

que leve a zero todos os elementos da primeira linha de $W_{\beta}^{(k)}$, ou seja,

$$(R^k)^T \mathbf{x}^k = \|\mathbf{x}^k\| (1, 0, \dots, 0).$$
(4.5.5)

Pelas propriedades dos refletores (c.f. apêndice 2), este refletor é independente de $J^{(k+1)}$. Por ser o comprimento de uma gaussiana multivariada com $\beta(n-k+1)$ elementos independentes, ela tem distribuição $\chi_{\beta(n-k+1)}$. A matriz resultante tem a forma:

$$W_{\beta}^{(k)}\hat{R}^{k} = \begin{pmatrix} \chi_{\beta(n-k+1)} & 0\\ \mathbf{y}^{k} & J^{(k+1)}R^{k} \end{pmatrix}$$

$$(4.5.6)$$

Prosseguimos, agora, aplicando um refletor L^k que tenha o mesmo efeito com a primeira coluna de $W_{\beta}^{(k)}$. Ou seja:

$$\hat{L}^{k} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{k \times k-1} & 0\\ 0 & L^{k} \end{pmatrix}$$
(4.5.7)

tal que

$$L^{k}\mathbf{y}^{k} = \|\mathbf{y}^{k}\|(1, 0, \dots, 0)^{T}.$$
(4.5.8)

Observamos, novamente, que a norma de \mathbf{y}^k é a norma de uma gaussiana multivariada com $\beta(n-k)$ variáveis independentes. Portanto, sua distribuição é $\chi_{\beta(n-k)}$ e aplicando este refletor, obtemos:

$$\hat{L}^{k}W_{\beta}^{(k)}\hat{R}^{k} = \begin{pmatrix} \chi_{\beta(\underline{n}-\underline{k}+\underline{1})} & 0 & \cdots & 0\\ \overline{\chi_{\beta(n-k)}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & L^{k}J^{(k+1)}R^{k} \\ \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{\beta(\underline{n}-\underline{k}+\underline{1})} & 0 & \cdots & 0\\ \overline{\chi_{\beta(n-k)}} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(4.5.9)

Desse modo, prosseguindo até k = n - 1, obtém-se o resultado desejado.

A partir da forma bidiagonal B_{β} e o produto $L_{\beta} = B_{\beta}B_{\beta}^{T}$ tridiagonal, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema 4.5.2. Seja $L_{\beta} = Q\Lambda Q^T$ a decomposição espectral de L_{β} . Fixando os sinais da primeira linha de Q tais que eles sejam não-negativos e ordenando-se os autovalores em ordem crescente na diagonal, então λ e q são independentes. Além disso, a densidade conjunta de autovalores é:

$$g_{\beta}(\lambda) = c_L^{\beta,n} |\Delta(\lambda)|^{\beta} \prod_{k=1}^n \lambda_k^{(\beta n - \beta m + (\beta - 2))/2} \exp\left(-\sum_{k=1}^n \lambda_k/2\right).$$

$$(4.5.10)$$

Demonstração. Utilizando os resultados apresentados nos lemas 4.2.2 a 4.2.4, escrevemos primeiramente a densidade conjunta dos elementos de B_{β} obtida a partir das distribuições independentes das variáveis da diagonal e da subdiagonal, utilizando a notação utilizada no lema 4.2.4:

$$(dB_{\beta}) \equiv \mu(x,y)dxdy = c_{n,m;x,y} \prod_{i=0}^{n-1} x_{n-1}^{\beta n/2 - \beta i - 1} \exp(-x_i^2/2) \prod_{j=1}^{n-1} y_j^{\beta i - 1} \exp(-y_j^2/2)dxdy \quad (4.5.11)$$

de modo que, para a matriz tridiagonal:

$$(dL_{\beta}) \equiv J_{B \to T}^{-1} \mu(x, y) dx dy$$

= $2^{-n} c_{n,m;x,y} x_1^{\beta n - \beta(m-1) - 2} \exp(-x_1^2/2) \prod_{k=0}^{n-2} x_{n-k}^{\beta n/2 - \beta k - 3} \exp(-x_k^2/2)$
 $\times \prod_{k=1}^{n-1} y_k^{\beta k - 1} \exp(-y_k^2) dx dy$ (4.5.12)

onde

$$c_{n,m;x,y} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \Gamma\left(k\frac{\beta}{2}\right) \prod_{k=1}^{n} \Gamma\left(\frac{\beta n}{2} - \frac{\beta}{2}(k-1)\right)}{2^{2m-1}}.$$
(4.5.13)

é a constante de normalização⁹. Realizando a mudança de variáveis, teremos que:

$$\begin{aligned} (dL_{\beta}) &= 2^{-m} c_{n,m;x,y} \exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} x_{n-k}^2/2\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n-1} y_k^2/2\right) \prod_{k=1}^{n-1} (x_{k+1}y_k) x_1^{\beta m-\beta(n-1)-2} \\ &\times \prod_{k=0}^{N-2} x_{N-k}^{\beta n-\beta(m-1)-3} \prod_{k=1}^{n-1} y_k^{\beta k-1} dq d\lambda \\ &= 2^{-n} c_{n,m;x,y} \exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} x_{n-k}^2/2\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} y_k^2/2\right) \\ &\times \frac{\prod_{k=0}^{n-1} x_{n-k}^{\beta n-\beta(m-1)-2} \prod_{k=1}^{n-1} y_k^{\beta k}}{\prod_{k=1}^{N-1} q_k} dq d\lambda \end{aligned}$$
(4.5.14)

Utilizando os lemas anteriores, a expressão do determinante da transformação pode ser combinada com a forma dos elementos b_k de modo que

$$\Delta(\lambda) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_k^k}{\prod_{k=1}^n q_k} \quad \to \quad \Delta(\lambda) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} y_k)^k}{\prod_{k=1}^n q_k}$$

⁹Os índices $\{x, y\}$ denotam as coordenadas de origem.

que pode ser incorporado à equação (4.5.14), separando-se os termos convenientemente:

$$(dL_{\beta}) = 2^{-m} c_{x,y} \exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} x_{n-k}^{2}/2\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} y_{k}^{2}/2\right) \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (x_{k+1}y_{k})^{k}}{\prod_{k=1}^{n} q_{k}} \\ \times \prod_{k=1}^{n-1} q_{k}^{\beta-1} \prod_{k=0}^{n-1} x_{n-k}^{\beta n-\beta (m-1)-2} dq d\lambda \\ = 2^{-n} c_{n,m;x,y} \exp\left(-\sum_{k=0}^{n-1} x_{n-k}^{2}/2\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} y_{k}^{2}/2\right) \Delta(\lambda)^{\beta} \\ \times \prod_{k=1}^{n-1} q_{k}^{\beta-1} \prod_{k=0}^{n-1} x_{n-k}^{\beta n-\beta (m-1)-2} dq d\lambda.$$

$$(4.5.15)$$

O traço e o determinante de uma matriz são invariantes sobre transformações de similaridade ortogonais, de modo que $\text{Tr}(L_{\beta}) = \text{Tr}(\Lambda)$ e $\det(L_{\beta}) = \det(\Lambda)$. Ou seja, observando as equações (4.2.14) a (4.2.16) e a forma da matriz tridiagonal, obtemos que:

$$\sum_{k=0}^{N-1} x_{N-1}^2 + \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 = \sum_{k=1}^N \lambda_k$$
$$\prod_{k=0}^{N-1} x_{N-k}^2 = \prod_{k=1}^N \lambda_k$$

de modo que

$$(dL_{\beta}) = \left(c_q^{\beta} \prod_{k=1}^{N-1} q_k^{\beta-1} dq\right) \left(N! c_L^{\beta,m} e^{-\sum_{k=1}^N \lambda_i/2} \Delta(\lambda)^{\beta} \prod_{k=1}^N \lambda_k^{\beta(m-N+1)/2-1} d\lambda\right)$$
(4.5.16)

que, novamente, é separável em $q \in \lambda$, garantindo a independência mútua. A constante c_q^{β} é a mesma do ensemble β -Hermite, em (4.3.10).

Este teorema, portanto, generaliza o resultado do ensemble de Wihsart para o caso de um β geral.

4.6 Matrizes dos Ensembles β Pseudo-Hermitianos

Há ainda um outro ensemble de autovalores reais derivado do ensemble β -Hermite geral. Trata-se do ensemble β -Hermite Pseudo-Hermitiano. Este ensemble baseia-se na existência de sistemas nãohermitianos de autovalores reais [40], um exemplo do qual é o ensemble obtido a partir da quebra de simetria da forma β do ensemble de Hermite.

A obtenção deste ensemble parte da forma tridiagonal do ensemble β -Hermite. No formalismo previamente exposto [28], a matriz tridiagonal é simétrica, tendo os elementos de ambas as subdiagonais iguais. Sendo assim, introduz-se a quebra de simetria tal que

$$A_{\beta} = \begin{pmatrix} a_{1} & b_{1} & & & \\ c_{1} & a_{2} & b_{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & c_{n-1} & a_{n} \end{pmatrix}$$
(4.6.1)
onde a_k é uma variável gaussiana padrão, b_k e c_k são variáveis independentes sorteadas de uma distribuição $\chi_{\beta(n-k)}$. Devido à quebra de simetria, não é garantida a forma (2.4.6) para o limite assintótico. Visto que o desdobramento desta quebra seria o aumento do número de graus de liberdade, os argumentos utilizados para a dedução das formas assintóticas não seriam mais válidos.

Partindo-se, e.g., do caso ortogonal (GOE), vê-se que a matriz H não é mais simétrica. Isto implica que há N^2 elementos independentes da matriz. Ou seja, os N autovalores, $\{\theta_k\}$, e os $N(N-1) \equiv \zeta$ termos adicionais, $\{p_{\mu}\}$, necessários descrevem completamente os elementos H_{kl} da matriz. Por simplicidade, reintroduz-se a notação utilizada anteriormente:

$$\begin{cases} \theta \equiv \{\theta_k\}_{k=1,\dots,N} \\ p \equiv \{p_\mu\}_{\mu=1,\dots,\zeta} \end{cases}, \qquad \Omega = \theta \cup p.$$

É necessário, novamente, realizar uma transformação de variáveis na distribuição de probabilidade descrita por

$$\mathbb{R}^{N+\zeta} \xrightarrow{\Phi} \mathbb{R}^{N+\zeta} : \{H\} = \Phi(\theta, p) \tag{4.6.2}$$

cujo Jacobiano é dado por

$$J_{\Phi}(\theta, p) = \left| \frac{\partial \Phi(\theta, p)}{\partial(\Omega)} \right| = \left| \frac{\partial (H_{11}, H_{12}, \dots, H_{NN})}{\partial(\theta_1, \dots, \theta_N, p_1, \dots, p_{\zeta})} \right|.$$
(4.6.3)

No entanto, esta matriz não é mais ortogonal. Portanto, não há uma forma simples de decompor $J_{\Phi}(\theta, p)$, como no *GOE*. Por este motivo, não é garantido em primeira análise que a forma do ensemble pseudo-Hermitiano será similar à do ensemble GOE. Os resultados apresentados no apêndice A nos permitem dizer que os autovalores desta matriz tridiagonal são reais.

De maneira análoga, é possível generalizar o ensemble de Wishart para o ensemble β -Laguerre Pseudo-Hermitiano. A obtenção deste ensemble parte da forma bidiagonal do ensemble β -Laguerre. No formalismo previamente exposto [28], as matrizes bidiagonais utilizadas para produzir a matriz são idêntica, de modo que geram uma matriz tridiagonal simétrica. Para a quebra de simetria são geradas duas matrizes, cujas diagonais são iguais mas cujas subdiagonais são distintas. Ou seja, criam-se duas matrizes

$$A_{\beta} = \begin{pmatrix} a_{1} & & & \\ b_{1} & a_{2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & b_{m-1} & a_{m} \end{pmatrix} , \quad B_{\beta} = \begin{pmatrix} a_{1} & & & & \\ c_{1} & a_{2} & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & c_{m-1} & a_{m} \end{pmatrix}$$
(4.6.4)

onde a_k são variáveis independentes sorteadas de uma distribuição $\chi_{2a-\beta(k-1)}$, b_k e c_k são variáveis independentes sorteadas de uma distribuição $\chi_{\beta(m-k)}$. Os resultados apresentados no apêndice A nos permitem, novamente, dizer que os autovalores da matriz tridiagonal resultante do produto AB^T são reais.

No capítulo 5 serão apresentados estudos numéricos que exploram estas propriedades dos sistemas pseudo-hermitianos juntamente aos hermitianos dos ensembles β .

Capítulo 5

Estudos Numéricos nos Ensembles β -Hermite e β -Laguerre

Realizaram-se cálculos das propriedades estatísticas dos ensembles β -Hermite e β -Laguerre com o uso de ferramentas computacionais. Estudou-se as distribuições de autovalores e as estatísticas dos autovetores de ambos os sistemas. Apresentam-se aqui os resultados obtidos.

5.1 Cálculo Numérico de Autovalores no Ensemble β -Hermite

O estudo teórico das distribuições dos autovalores de matrizes aleatórias pertencentes ao ensemble β -Gaussiano produz diversas formas analíticas para as distribuições de autovalores e espaçamento, conforme o apresentado no capítulo 2. No entanto, a visualização de tais propriedades não é direta para a maior parte das matrizes, visto que as formas das distribuições, e.g. (2.3.9) e (2.4.1), são pouco palatáveis.

Por este motivo, para que se obtenha uma abordagem fenomenológica do problema são necessários cálculos numéricos para o estudo de propriedades longe dos limites assintóticos que podem ser calculados. Para isto, utilizamos cálculos computacionais de autovalores por duas ferramentas distintas. A estatística de autovalores foi calculada utilizando a biblioteca CULA [35], enquanto o cálculo de entropias de autovetores foi realizado utilizando a plataforma GNU Octave [34]. Ambos os cálculos se baseiam no uso da decomposição QR [20] da matriz aleatória M, pertencente a um dos ensembles estudados.

Neste método, parte-se da equação de autovalores¹

 $M\psi = \lambda\psi \iff (M - \lambda I)\psi = 0$

que leva à equação característica da matriz M, dada por $p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = 0$. A decomposição QR consiste em escrever a matriz M como um produto entre uma matriz ortogonal Q e uma matriz triangular superior R, ou seja:

$$M = QR$$
 , $Q^T Q = I$, $\{R\}_{i,j} = 0$ se $i > j$

Esta decomposição é garantida [37] para matrizes quadradas, o que pode ser demonstrado por indução em rotores de Givens [8]. Portanto, será utilizado o algoritmo de Francis [9, 10, 12] para o cálculo dos autovalores, também chamado de algoritmo QR implicitamente deslocado. Este algoritmo consiste em primeiramente utilizar uma sequência de transformações unitárias que transforma

¹Utiliza-se aqui a notação $A^{(k)}$ para denotar a k-ésima interação da matriz A.

a matriz $M^{(0)}$ em uma matriz de Hessenberg superior, o que significa uma matriz tal que $\{M\}_{i,j} = 0$ se i > j + 1. Ou seja, tranforma-se a matriz $M^{(0)}$ a uma forma:

obtida por uma sequência de transformações de similaridade $\{\eta_i\}_{i=1,\dots,n} \to \eta = \prod_{i=1}^n \eta_i$ de modo que:

$$M^{(0)} = \eta^{-1} M \eta = \left(\prod_{i=1}^{n} \eta_i\right)^{-1} M \left(\prod_{i=1}^{n} \eta_i\right) \quad , \quad \eta_i^{\dagger} = \eta_i^{-1} \quad \forall i$$

Nestas condições, o algoritmo de Francis converge a sequência de matrizes $\{M^{(k)}\}_{k=0,1,\ldots}$ a uma matriz triangular superior. Para tanto, no passo k, toma-se um deslocamento ρ na matriz a, ou seja ${}^{(k)}M - \rho I$ e observa-se a primeira coluna desta matriz, em outras palavras:

$$p^{(k)} = \begin{bmatrix} m_{11}^{(k)} - \rho \\ m_{21}^{(k)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Encontra-se então o rotor 1-2 [37] $Q_0^{(k-1)}$ que elimina o elemento da segunda linha de $p^{(k)}$. A transformação $(Q_0^{(k-1)})^{\dagger}M^k \rightarrow (Q_0^{(k-1)})^{\dagger}M^k Q_0^{(k-1)}$ combina as primeiras duas colunas de M^k , fazendo com que surja um elemento não nulo perturbando a forma de Hessenberg superior. O resto da iteração consiste em retornar a matriz à forma de Hessenberg, utilizando rotores (i,i+1) para eliminar sucessivamente os elementos que perturbam a forma de Hessenberg, de modo que a interação completa se torna:

$$M^{k+1} = (Q_{n-2}^{(k-1)})^{\dagger} \dots (Q_{1}^{(k-1)})^{\dagger} (Q_{0}^{(k-1)})^{\dagger} M^{k} Q_{0}^{(k-1)} Q_{1}^{(k-1)} \dots Q_{n-2}^{(k-1)}$$

A interação é mantida até M^k convergir a uma forma triangular superior. Neste ponto, os autovalores são os elementos da diagonal e o procedimento pode ser interrompido. Este processo é conhecido também como interação de Francis de primeiro grau.

Algumas propriedades de M podem facilitar o procedimento. Matrizes simétricas, por exemplo, se tornam tridiagonais [37] e possuem escolhas convenientes de shift para acelerar a convergência. É também possível introduzir interações de graus superiores, mas estas se tornam muito custosas rapidamente.

A comparação da distribuição dos autovalores no limite assintótico teórico requer o cálculo da estatística de autovalores para matrizes de odem grande. Para tanto, foram geradas 2500 matrizes independentes de tamanho 256 e seus autovalores foram acumulados para se obter uma medida de frequência estatística dos autovalores. Foi também introduzida uma quebra da hermiticidade conforme [40], de modo a estudar os efeitos da pseudo-hermiticidade no espectro. Os resultados podem ser vistos nas figuras 5.1 a 5.5 para $\beta \in \{0.5, 1.0, 2.0, 5.0\}$ e são comparados com a distribuição do semi-círculo de Wigner [6].

O comportamento dos limites da distribuição observado com o aumento do parâmetro β está de acordo com o esperado para o limite assimptótico tanto do caso hermitiano quanto do caso pseudo-hermitiano [40, 33]. A amplitude na qual os autovalores se espalham se estende por um raio de $\sqrt{2n\beta}$, como no semi-círculo de Wigner. De fato, a curva do semi-círculo de Wigner normalizada descreve bem a distribuição observada nos autovalores.

Calculou-se também o comportamento das distâncias entre os níveis, a partir do espaçamento entre autovalores consecutivos em uma mesma matriz. Para tanto, foram realizados cálculos com matrizes do ensemble de Hermite com valores distintos de β . Os cálculos foram realizados utilizando o espaçamento padronizado a partir da transformação (4.4.8) Os resultados são apresentados nas figuras 5.6 a 5.9, e mostram a média do espaçamento aumentando com o aumento do β , bem como a dispersão em torno da média diminuindo. É também possível observar o surgimento de uma separação, com o aumento de β , entre as matrizes pseudo-hermitianas e a hermitianas.

5.2 Cálculo Numérico de Autovalores no Ensemble β -Laguerre

Foram geradas 4000 matrizes independentes de tamanho 512 e seus autovalores foram acumulados para se obter uma medida de frequência estatística dos autovalores. A convergência das matrizes no ensemble de Laguerre se mostrou consideravelmente mais lenta do que no ensemble de Hermite, exigindo o aumento do tamanho das matrizes bem como o número de matrizes utilizadas. Os resultados podem ser vistos nas figuras 5.10 a 5.12 para $\beta \in \{0.5, 1.0, 2.0, 5.0\}$. Fixando-se o β , o tamanho m da matriz tridiagonal triangular superior utilizada para gerar a matriz do ensemble de β -Laguerre foi variado em cada caso, e são apresentadas e seguir.

Posteriormente, procedimento análogo foi realizado para estudar o comportamento de diversos β para um mesmo tamanho secundário da matriz tridiagonal triangular superior. Estes resultados são apresentados nas figuras 5.13 a 5.18. O estudo das propriedades deste ensemble se mostrou consideravelmente mais custoso para m < n, em especial se comparado ao ensemble β -Hermite. As operações de multiplicação, mesmo quando feitas de maneira esparsa, requerem $\mathcal{O}(n^2)$, são relativamente custosas. Além disso, a subdeterminação dos sistemas m < n fazem com que a estatística completa do sistema exiga um número muito maior de casos estudados para se oter uma curva aproximada da distribuição. Isto pode ser visto, em especial, se comparados os casos de m > n com m < n, que - com o mesmo número de interações - possuem uma forma bem melhor determinada para m > n.

Um resultado evidente é a simetria observada entre as estatísticas para $m < n \in m > n$, com a indicação da existência de um comportamento crítico para m = n. Além disso, observa-se que o limite de ocorrência de autovalores se desloca com a variação de m. Ambas as propriedades parecem ser menos acentuadas com um aumento após m = n do que com um decréscimo antes de m = n. Ou seja, a taxa de aumento do ponto limite é maior após a criticalidade do que antes da criticalidade. O deslocamento do pico também se comporta da mesma forma.

5.3 Estatística de Autovetores no Ensemble β -Hermite

O estudo do comportamento da entropia dos autovetores foi realizado partindo da interpretação probabilística da ocupação dos autovetores. Partindo da normalização na norma euclidiana usual do μ -ésimo autovetor de uma matriz A_{β} de ordem N,

$$\sum_{k=1}^{n} \left| u_k^{(\mu)} \right|^2 = 1$$

interpretamos os $\left\{ \left| u_k^{(\mu)} \right|^2 \right\}_{k=1,\dots,N}$ como probabilidades de ocupação dos n estados da base. Desse modo, calcula-se a entropia de um dado estado **u**, em unidades convenientes, como:

$$S^{(\mu)} = -\sum_{k=1}^{n} \left| u_k^{(\mu)} \right|^2 \ln \left| u_k^{(\mu)} \right|^2.$$
(5.3.1)

Estudamos esta estatística do sistema, gerando matrizes aleatórias independentes para diversos valores de β . Consideramos então a interpretação do valor médio de S no conjunto dos autovetores,

$$S = \sum_{\mu=1}^{n} S^{(\mu)}/n$$

como o logaritmo dos estados ocupados do sistema. A entropia nos permite o cálculo do número de estados ocupados Ω de um sistema, a partir da relação:

$$S = k_B \ln \Omega \to \Omega = \exp\left(\frac{S}{k_B}\right) = \exp(S_u) \tag{5.3.2}$$

onde S_u denota a entropia em um sistema de unidades onde $k_B = 1$.

Comparamos os resultados com um conjunto de matrizes independentes pertencentes ao GOE usual, sem realizar nenhuma transformação de tridiagonalização. Os resultados são apresentados nas figuras 5.19 e 5.20

O estudo das tendências do gráfico mostra que enquanto o GOE tende, no limite $N \to \infty$, a se estabilizar para uma ocupação média de n/2 estados, o ensemble β -Hermite tende a, lentamente, cair para 0. A primeira afirmação fica clara ao observarmos a figura 5.19, onde vê-se que a razão exp(S) tem um comportamento assintoticamente estável para n crescente, na qual o número de estados ocupados parece tender a uma reta constante. Já na figura 5.20 vemos uma tendência de queda a zero. Ajustes da forma

$$\exp(S) = AN^{\gamma}$$

realizados na parte final, cujo comportamento se mostra mais regular que a região de pequenos n, produzem resultados que corroboram esta conclusão visual. Na tabela 5.1 apresentamos os resultados dos ajustes, com a incerteza numérica associada. Observa-se que enquanto o GOE tradicional de Wigner tende a uma ocupação limítrofe compatível com $\exp(S) = \frac{1}{2}n^1$, as matrizes do β -ensemble tem sua ocupação continuamente decrescente para $\exp(S) \approx A_{\beta}N^{\gamma(\beta)}$ onde devemos ter que $0 < \gamma(\beta) < 1$. Isto indica que as transformações de base durante a tridiagonalização nos permitem escrever os ensembles gaussianos em uma base mais localizada, cuja ocupação média se torna nula para matrizes grandes. Isto sugere que haja apenas um conjunto finito de estados na qual a ocupação seja não-desprezível.

5.4 Estatística de Autovetores no Ensemble β -Laguerre

De forma análoga ao realizado para o ensemble de Hermite, estudamos a entropia de sistemas do ensemble β -Laguerre geral, gerando matrizes aleatórias independentes para diversos valores de β e com dimensões secundárias variadas. Novamente consideramos a interpretação de S como o logaritmo dos estados ocupados do sistema, de modo que a razão $\exp(S)/N$ fornece, neste contexto, o número de estados ocupados. Comparamos os resultados com um conjunto de matrizes independentes pertencentes ao ensemble de Wishart real, sem realizar nenhuma transformação de tridiagonalização.

β	А	γ
$1.5^{-7} = 0.0585$	0.0818(18)	0.8141(31)
$1.5^{-6} = 0.0877$	0.1029(23)	0.8265(31)
$1.5^{-5} = 0.1316$	0.1275(28)	0.8421(31)
$1.5^{-4} = 0.1975$	0.1426(31)	0.8708(31)
$1.5^{-3} = 0.2963$	0.1923(42)	0.8738(31)
$1.5^{-2} = 0.4444$	0.229(05)	0.8903(31)
$1.5^{-1} = 0.6666$	0.270(06)	0.9057(31)
$1.5^0 = 1$	0.312(07)	0.9168(31)
$1.5^{+1} = 1.5$	0.375(08)	0.9238(31)
$1.5^{+2} = 2.25$	0.406(09)	0.9368(31)
$1.5^{+3} = 3.375$	0.444(10)	0.9424(31)
$1.5^{+4} = 5.0625$	0.484(11)	0.9445(31)
$1.5^{+5} = 7.5937$	0.502(11)	0.9494(31)
$1.5^{+6} = 11.3906$	0.523(11)	0.9508(31)
$1.5^{+7} = 17.0859$	0.524(11)	0.9554(31)
GOE	0.491(11)	0.9975(31)

Tabela 5.1: Valores ajustados para os coeficientes assintóticos da entropia no ensemble β -Hermite.

Os resultados são apresentados nas figuras 5.20 e 5.23.

Neste caso, observamos que o comportamento assintótico dos autoestados é de se localizar completamente para os ensemble β -Laguerre, visto que a fração de estados ocupados rapidamente vai a zero. Também vê-se que este comportamento independe do valor de β e parece estar ligado à própria estrutura da matriz deste ensemble, uma vez que os resultados para distintos valores de beta se sobrepõe resultando em uma curva única. O ensemble de Wishart real, possui um limite assintótico similar ao limite do ensemble Gaussiano, mas cuja convergência é substancialmente mais lenta.

5.5 Figuras

Apresenta-se aqui as figuras referentes aos cálculos realizados. A tabela 5.2 reune as propriedades de cada figura.

Conteúdo	Ref.
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta \in \{0.5, 1.0, 2.0, 5.0\}$	5.1
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta = 0.5$	5.2
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta = 1.0$	5.3
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta = 2.0$	5.4
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta = 5.0$	5.5
Estatística da frequência de ocorrência do espaçamento de autovalores para $\beta = 0.5$	5.6
Estatística da frequência de ocorrência do espaçamento de autovalores para $\beta = 1.0$	5.7
Estatística da frequência de ocorrência do espaçamento de autovalores para $\beta = 2.0$	5.8
Estatística da frequência de ocorrência do espaçamento de autovalores para $\beta = 5.0$	5.9
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta = 0.5$ no ensemble β -Laguerre.	5.10
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta = 1.0$ no ensemble β -Laguerre.	5.11
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta = 2.0$ no ensemble β -Laguerre.	5.12
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $m = 0.25 \cdot n$ no ensemble β -Laguerre.	5.13
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $m = 0.50 \cdot n$ no ensemble β -Laguerre.	5.14
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $m = 0.75 \cdot n$ no ensemble β -Laguerre.	5.15
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $m = 1.00 \cdot n$ no ensemble β -Laguerre.	5.16
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $m = 1.25 \cdot n$ no ensemble β -Laguerre.	5.17
Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $m = 1.50 \cdot n$ no ensemble β -Laguerre.	5.18
Razão da exponencial da entropia por número total de autoestados dos auto estados para o ensemble de β -Hermite,	
em escalas linear, a esquerda, e logarítmica, a direita. A barra lateral indica o valor da temperatura $1/\beta$.	5.19
Razão da exponencial da entropia por número total de autoestados dos auto estados para o ensemble de β -Laguerre,	
com dimensão secundária $m = 10$, em escala logarítmica. A barra lateral indica o valor da temperatura $1/\beta$.	5.20
Razão da exponencial da entropia por número total de autoestados dos auto estados para o ensemble de β -Laguerre,	
com dimensão secundária $m = 30$, em escala logarítmica. A barra lateral indica o valor da temperatura $1/\beta$.	5.21
Razão da exponencial da entropia por número total de autoestados dos auto estados para o ensemble de β -Laguerre,	
com dimensão secundária $m = 60$, em escala logarítmica. A barra lateral indica o valor da temperatura $1/\beta$.	5.22
Razão da exponencial da entropia por número total de autoestados dos auto estados para o ensemble de β -Laguerre,	
com dimensão secundária $m = 75$, em escala logarítmica. A barra lateral indica o valor da temperatura $1/\beta$.	5.23

Tabela 5.2: Tabela de referência das figuras apresentadas.



f(λ)

Figura 5.1: Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta \in \{0.5, 1.0, 2.0, 5.0\}$.





f(λ)



Figura 5.3: Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta=1.0$



Figura 5.4: Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta=2.0$



Figura 5.5: Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta=5.0$







Figura 5.7: Estatística da frequência de ocorrência do espaçamento de autovalores para $\beta=1.0$

 $f(\Delta\lambda)$









 $f(\Delta\lambda)$



Figura 5.10: Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta = 0.5$ no ensemble β -Laguerre.

 $f(\lambda)$



Figura 5.11: Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta = 1.0$ no ensemble β -Laguerre.

 $f(\lambda)$



Figura 5.12: Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $\beta = 2.0$ no ensemble β -Laguerre.

 $f(\lambda)$







 $f(\lambda)$









Figura 5.16: Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $m = 1.00 \cdot n$ no ensemble β -Laguerre.

 $f(\lambda)$



Figura 5.17: Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $m = 1.25 \cdot n$ no ensemble β -Laguerre.



Figura 5.18: Estatística da frequência de ocorrência dos autovalores para $m = 1.50 \cdot n$ no ensemble β -Laguerre.

 $f(\lambda)$



escalas linear, a esquerda, e logarítmica, a direita. A barra lateral indica o valor da temperatura $1/\beta$. Figura 5.19: Razão da exponencial da entropia por número total de autoestados dos auto estados para o ensemble de β -Hermite, em



dimensão secundária m = 10, em escalas linear, à esquerda, e logarítmica, à direita. A barra lateral indica o valor da temperatura $1/\beta$. Figura 5.20: Razão da exponencial da entropia por número total de autoestados dos auto estados para o ensemble de β -Laguerre, com



dimensão secundária m = 30, em escalas linear, à esquerda, e logarítmica, à direita. A barra lateral indica o valor da temperatura $1/\beta$. Figura 5.21: Razão da exponencial da entropia por número total de autoestados dos auto estados para o ensemble de β -Laguerre, com



dimensão secundária m = 60, em escalas linear, à esquerda, e logarítmica, à direita. A barra lateral indica o valor da temperatura $1/\beta$. Figura 5.22: Razão da exponencial da entropia por número total de autoestados dos auto estados para o ensemble de β -Laguerre, com



dimensão secundária m = 75, em escalas linear, à esquerda, e logarítmica, à direita. A barra lateral indica o valor da temperatura $1/\beta$. Figura 5.23: Razão da exponencial da entropia por número total de autoestados dos auto estados para o ensemble de β -Laguerre, com

60 CAPÍTULO 5. ESTUDOS NUMÉRICOS NOS ENSEMBLES β -HERMITE E β -LAGUERRE

Capítulo 6

Conclusões e Considerações Finais

Neste trabalho, buscou-se apresentar de forma abrangente os aspectos físicos dos ensembles β , com experimentos computacionais que permitissem uma melhor visualização das propriedades estatísticas dos sistemas correspondentes. A profundidade da abordagem foi a maior possível, mas observou-se também a necessidade de evitar demonstrações que pouco contribuíssem com a metodologia envolvida. Neste sentido, o texto deve ser capaz de guiar a construção do tratamento original dos ensembles β Hermite e Laguerre e garantir as bases para estudos mais aprofundados da localização dos autoestados deste sistema.

Foram estudados os ensembles de matrizes aleatórias generalizados desenvolvidos por Dimitriu e Edelman [28]. Estes modelos, introduzidos como uma forma geral do *threefold way* de Dyson [11], permitem a interpretação do parâmetro β como a temperatura de um ensemble estatístico.

No capitulo 2 se construiu o ensemble Gaussiano a partir das propriedades estatísticas dos elementos das matrizes deste ensemble. Foi derivada por meio de ferramentas matemáticas estabelecidas na literatura [33] a distribuição conjunta para $\beta = 1, 2, 4$ dos autovalores deste tipo de sistema. Estes resultados foram cruciais para o desenvolvimento, no capítulo 4 das propriedades estatísticas dos ensembles β generalizados.

No capítulo 3 se construiu o ensemble de Wishart de maneira análoga ao que foi realizado no capítulo anterior. Neste caso, foi utilizada uma abordagem mais próxima à estatística multivariada. Isto se deu em parte devido ao fato da literatura mais rica neste ensemble ser advinda diretamente do trabalho na área de estatística [14, 15]. Os resultados obtidos a respeito da distribuição dos autovalores para $\beta = 1, 2, 4$ foram posteriormente utilizados na generalização similar à do ensemble Gaussiano, para a forma β geral deste ensemble.

As formas gerais destes ensembles foram demonstradas por teoremas no capítulo 4. Os ensembles de β -Hermite e β -Laguerre, como definidos nestas demonstrações, possuem propriedades de grande interesse físico, em particular a similaridade com o que se observa em distribuições de Maxwell-Boltzmann. Estes aspectos foram abordados a partir da entropia dos autoestados de amostras das matrizes dos ensembles. Isto permitiu que se observassem os comportamentos para grandes matrizes e com diversos valores de β , aqui interpretado como o inverso da temperatura.

Foi explorada esta conexão a partir de considerações algébricas e cálculos numéricos. O comportamento assintótico para o limite de grandes matrizes foi estudado, com resultados que são compatíveis com o limite assintótico teórico calculado por Wigner [7] para as matrizes do ensemble β -Hermite. O espaçamento, por sua vez, demonstrou um comportamento contínuo cujo máximo se desloca com o aumento de β , indicando maior concentração das energias acessíveis a estes sistemas para temperaturas menores.

A partir de resultados recentes, também foram introduzidas quebras de simetria que preservam os autovalores dentro da reta real. Estas perturbações, que impedem o uso dos mesmos métodos utilizados na extração das formas analíticas dos ensembles β , tiveram seu efeito estudado na distribuição dos autovalores das matrizes perturbadas. Os resultados, também neste caso, foram compatíveis com o limite assintótico de Wigner para o ensemble β -Hermite pseudo-Hermitiano.

Para o ensemble β -Laguerre, os resultados do ensemble pseudo-hermitiano mostraram resultados consistentes com o ensemble β usual. O comportamento do máximo da distribuição conforme $m \to n^+$ e $m \to n^-$ se mostrou similiar. Esta simetria em torno de m = n indica a possibilidade de um comportamento crítico na região.

Os comportamentos das entropias, em ambos os casos, mostraram que as formas tridiagonais dos ensembles β determinam a localização dos autovetores do sistema. Isto é ainda mais evidente no caso do ensemble β -Laguerre, no qual os diferentes β se tornam indistinguíveis. A comparação com o ensemble real - GOE ou Wishart Real - mostra que enquanto estes demonstram uma estabilização do número de estados ocupados, com um limite assintótico claro, os ensemble β tem sua entropia rapidamente se tornando menor que o tamanho da matriz. Isto indica um fenômeno de forte localização nestes sistemas.

A construção realizada ao longo deste trabalho não apenas oferece uma releitura da abordagem original de Dimitriu e Edelman [28], mas fornece uma análise fenomenológica da física envolvida e sugere novos caminhos a serem seguidos. Em particular, dentre estes caminhos destacam-se o estudo analítico dos limites assintóticos das grandezas termodinâmicas calculadas e sua comparação aos resultados obtidos para a localização. Tais estudos apresentam potencial de esclarecer o comportamento de localização observado nos β -Ensembles. Destaca-se, também, o estudo da influências das tranformações de tridiagonalização nesta localização. O estudo destes dois fatores pode clarificar o desvio do comportamento da matriz completa.

É também de interesse investigar os efeitos de perturbações mais intensas neste sistema, como quebras sistemáticas da simetria do sistema, que criem regiões não-físicas no espectro, *i.e.* regiões com autovalores fora da reta real. Estudos anteriores [23] mostram que perturbações em modelos físicos não-hermitianos podem promover situações de interesse, que se conectam com perturbações introduzidas em um modelo de β ensemble geral. O estudo destes aspectos será o foco de trabalhos futuros, cuja base está sedimentada no trabalho aqui descrito.

Apêndice A

Teoria de Matrizes

Neste apêndice, apresentam-se resultados de matrizes que são utilizados no decorrer da dissertação.

A.1 Matrizes Ortogonais

Matrizes ortogonais são definidas do seguinte modo [27, 37]:

Definição A.1.1. É dito que uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ é ortogonal se $A^{-1} = A^T$. Em outras palavras, A é uma matriz ortogonal se, e somente se:

$$AA^T = A^T A = I.$$

Segue imediatamente da definição o seguinte resultado.

Corolário A.1.1. Seja $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ uma matriz ortogonal. A soma dos quadrados dos elementos de uma linha ou coluna de $A \notin 1$, enquanto a soma dos produtos dos elementos de duas colunas distintas é zero. Ou seja:

$$\{AA^T\}_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}A_{k,j}^T = \sum_{k=1}^n A_{i,k}A_{j,k} = \delta_{i,j}$$

e ainda:

$$\{A^T A\}_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}^T A_{k,j} = \sum_{k=1}^n A_{k,i} A_{k,j} = \delta_{i,j}$$

Há também duas propriedades de matrizes ortogonais que devem ser evidenciadas.

Propriedade A.1.1. Se $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ é ortogonal, então $|\det A| = 1$.

Demonstração. Uma vez que A é uma matriz quadrada ortogonal, a propriedade segue imediatamente do fato de que det $A^T = \det A$ e que det $AB = \det BA$:

 $\det AA^T = \det I \to \det A \det A^T = 1 \to (\det A)^2 = 1$

Propriedade A.1.2. Sejam $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ ortogonal *e* dois vetores $u, v \in \mathbb{K}^n$ tais que

v = Au.

Então:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k^2 = \sum_{k=1}^{n} u_k^2$$

Demonstração. Utilizando a ortogonalidade, obtemos:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k^2 = v^T v = (Au)^T A u = u^T A^T A u = u^T u = \sum_{k=1}^{n} u_k^2$$

A.2 Matrizes Unitárias

Matrizes unitárias são definidas como [36, 37]

Definição A.2.1. É dito que uma matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ é unitária se $A^{-1} = A^{\dagger}$. Em outras palavras, A é uma matriz unitária se, e somente se:

$$AA^{\dagger} = A^{\dagger}A = I.$$

Seguem da definição alguns resultados relevantes.

Propriedade A.2.1. A matriz diagonal que representa uma matriz unitária é da forma

$$D = diag(\exp(i\theta_1), \exp(i\theta_2), \dots)$$

onde $\{\theta_1, \theta_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$.

Demonstração. Considerando A unitária, teremos que:

 $A^\dagger = U^\dagger D^\dagger U = A^{-1} = U^\dagger D^{-1} U$

Portanto $D^{\dagger} = D^{-1}$ e como D é diagonal, temos que para todo $z_l \in \text{diag}(D)$, $|z_l|^2 = 1$.

Propriedade A.2.2. Toda matriz unitária A pode ser escrita da forma $A = \exp(iH)$ onde H é hermitiana.

Demonstração. Se A é unitária, então $A = U^{\dagger} \exp(i\theta)U$ onde U é unitária e θ é diagonal e real. Desse modo, tomando $H = U^{\dagger}\theta U$ temos $A = \exp(iH)$.

Propriedade A.2.3. Qualquer matriz A unitária e simétrica possui uma decomposição da forma $A = UU^T$ onde U é unitária.

Demonstração. Se A é unitária, pela propriedade anterior, $A = \exp(iH) = \exp(iH/2)RR^T \exp(iH/2)$ onde R é uma matriz real ortogonal qualquer. Em particular, pode-se tomar R = 1 a matriz identidade.

A.3 Resultados de Autovalores e Autovetores

A equação de autovalores de uma dada matriz quadrada de odem $n, A \in M(\mathbb{C})$ é definida por

$$Au^{(k)} = \lambda_k u^{(k)}$$

cujas soluções $\{(\lambda_k\}_{k=1,2,\dots,n}$ são os autovalores e $\{u^{(k)}\}_{k=1,2,\dots,n}$ são autovetores da matriz A. São conhecidos resultados da teoria de autovalores [17, 19] que:

Proposição A.3.1. Seja T uma tranformação unitária, ou seja, tal que $T^{-1} = T^{\dagger}$. Então os autovalores da matriz TAT^{-1} são os mesmos da matriz A e os autovetores se transformam segundo $Tu^{(k)}, \forall k$.

Corolário A.3.1. A transformação unitária T da matriz TAT^{-1} preserva a norma dos autovetores.

Enuncia-se também o teorema devido a Paige e disponível como o teorema 7.9.2 de Parlett [22] a ser utilizado para o determinante de Vandermonde.

Teorema A.3.1. Seja $T = W\Lambda W^{\dagger}$ a decomposição espectral da matriz quadrada tridiagonal de ordem n T descrita por

$$T_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i &, \quad i = j \\ \beta_{\min(i,j)} &, \quad |i - j| = 1 \end{cases}$$

 $W = \vec{s_1}, \ldots, \vec{s_n}$ é ortogonal e $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Então, para $l \leq m$ e todo j, os elementos $s_{lj} (\equiv \vec{e_l}^{\dagger} s_j)$ dos autovetores normalizados de T obedecem

$$\chi'_{1:n}(\lambda_j)s_{lj}s_{mj} = \chi_{1:l-1}(\lambda_j)\beta_l\dots\beta_{m-1}\chi'_{m+1:n}(\lambda_j)$$

onde f' denota a derivada de f,

$$\chi_{m:p}(\tau) = \begin{cases} \det[\tau - T_{m:n}], & m \le p \\ 1, & m > p \end{cases}$$

e $T_{m:p}$ é o bloco diagonal de T de primeira linha m e última linha p. Em particular, se λ_j é um autovalor simples, i.e. tem multiplicidade algébrica $\mu = 1$:

$$s_{lj} = \chi_{1:l-1}(\lambda_j)\chi_{l+1:m}(\lambda_j)/\chi'_{1:n}(\lambda_j)$$

A.4 Vandermonde

Apresenta-se aqui um lema referente aos determinantes de Vandermonde:

Lema A.4.1. O determinante de Vandermonde dos autovalores ordenados de uma matriz simétrica tridiagonal de ordem n com subdiagonal positiva é dado por:

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} b_i^i}{\prod_{i=1}^n q_i}$$
(A.4.1)

onde q e b são como definidos acima.
Demonstração. Sejam $\lambda_i^{(k)}$, i = 1, ..., k os autovalores da submatriz $T^{(k)}$, $k \times k$, do canto inferior direito de T. Então o polinômio característico $P_k(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i^{(k)})$ é o polinômio característico associado a esta submatriz. Observando a forma da matriz tridiagonal:

$$T = \begin{pmatrix} a_n & b_{n-1} & 0 & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{n-1} & a_{n-1} & b_{n-2} & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 0 & | & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & & T^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & | & & & \end{pmatrix}$$

Para k = 1, ..., n temos a recorrência:

$$P_k(x) = (x - a_k)P_{k-1}(x) - b_{k-1}^2 P_{k-2}(x).$$
(A.4.2)

Se calculamos $P_k(\lambda_j^{(k-1)}) \in P_{k-1}(\lambda_j^{(k)})$, observamos que o produto dos módulos dos polinômios, para todos os $k-1 \in k$ autovalores, respectivamente, tem o mesmo resultado. A dizer

$$\prod_{1 \le i \le k, 1 \le j \le k-1} |\lambda_i^{(k)} - \lambda_j^{(k-1)}| = \prod_{i=1}^k |P_{k-1}(\lambda_i^{(k)})| = \prod_{j=1}^{k-1} |P_k(\lambda_j^{(k-1)})|.$$
(A.4.3)

Assim, aplicando (A.4.2)

$$P_k(\lambda_i^{(k-1)}) = (\lambda_i^{(k-1)} - a_k)P_{k-1}(\lambda_i^{(k-1)}) - b_{k-1}^2P_{k-2}(\lambda_i^{(k-1)}) = -b_{k-1}^2P_{k-2}(\lambda_i^{(k-1)})$$
(A.4.4)

que nos permite escrever que

$$\left|\prod_{i=1}^{k-1} P_k(\lambda_i^{(k-1)})\right| = \left|\prod_{i=1}^{k-1} b_{k-1}^2 P_{k-2}(\lambda_i^{(k-1)})\right| = b_{k-1}^{2(k-1)} \left|\prod_{i=1}^{k-1} P_{k-2}(\lambda_j^{(k-1)})\right|.$$
(A.4.5)

Aplicando este procedimento repetidas vezes, para k = n, e aplicando (A.4.3) obtemos:

$$\begin{split} \prod_{i=1}^{n-1} \left| P_n(\lambda_i^{(n-1)}) \right| = & b_{n-1}^{2(n-1)} \prod_{i=1}^{n-2} \left| P_{n-1}(\lambda_i^{(n-2)}) \right| \\ = & b_{n-1}^{2(n-1)} b_{n-2}^{2(n-2)} \prod_{i=1}^{n-2} \left| P_{n-3}(\lambda_i^{(n-2)}) \right| \\ = \cdots = & \prod_{i=1}^{n-1} b_i^{2i} \end{split}$$
(A.4.6)

e aqui aplica-se o teorema A.3.1 no caso especial do primeiro vetor-coluna de Q:

$$q_i^2 = \left| \frac{P_{n-1}(\lambda_i)}{P'_n(\lambda_i)} \right| = \left| \frac{P_{n-1}(\lambda_i^{(n)})}{P'_n(\lambda_i^{(n)})} \right|.$$
 (A.4.7)

Isto nos permite escrever que

$$\prod_{i=1}^{n} q_i^2 = \frac{\prod_{i=1}^{n} \left| P_{n-1}(\lambda_i^{(n)}) \right|}{\Delta(\lambda)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_i^{2i}}{\Delta(\lambda)^2}$$

$$\rightarrow \Delta(\lambda) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} b_i^i}{\prod_{i=1}^{n} q_i}$$
(A.4.8)

que prova o resultado.

A.5 Reflexões de Householder

As reflexões de Householder sobre o conjunto¹K são um tipo específico de transformações lineares. Para um dado vetor $u \in \mathbb{K}^n$ de norma euclidiana ||u|| = 1, a reflexão de Householder deste vetor é descrita como:

$$Q = \mathbb{I} - 2uu^{\dagger} \tag{A.5.1}$$

onde I denota a matriz identidade. Elas possuem algumas propriedades [37] de interesse.

Teorema A.5.1. Seja $u \in \mathbb{K}^n$ com ||u|| = 1, $e Q = \mathbb{I} - 2uu^{\dagger}$. Então

- (a) Qu = -u
- (b) $Qv = v \ se \ u \cdot v = 0$
- (c) $Q = Q^{\dagger}$
- (d) $Q^{\dagger} = Q^{-1}$
- (e) $Q^{-1} = Q$

Demonstração. O item (c) é imediato da transposição de Q. O item (e) é consequência imediata da propriedade transitiva aplicada às propriedades (c) e (d). Portanto:

(a) $Qu = (\mathbb{I} - 2uu^{\dagger})u = u - 2u(u^{\dagger}u) = u - 2u||u||^2 = -u$

(b)
$$Qv = (\mathbb{I} - 2uu^{\dagger})v = v - 2u(u^{\dagger}v) = u - 2v(u \cdot v)$$
. Mas $u \cdot v = 0$, portanto $Qv = v$.

(d)
$$Q^T Q = (\mathbb{I} - 2uu^T)^T (\mathbb{I} - 2uu^\dagger) = \mathbb{I} - 4uu^\dagger + 4(uu^\dagger)(uu^\dagger) = \mathbb{I} - 4uu^\dagger + 4u(u \cdot u)u^\dagger = \mathbb{I}$$

Este resultado pode ser estendido para o caso em que u não é unitário. Assim, estabelece-se a seguinte proposição:

Proposição A.5.1. Seja $u \in \mathbb{K}$ um vetor não-nulo e seja $\gamma = 2/||u||^2$. O refletor $Q = 1\mathbb{I} - \gamma uu^{\dagger}$ satisfaz:

- (a) Qu = -u
- (b) $Qv = v \ se \ u \cdot v = 0.$

¹Onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} .

cuja demonstração é imediata a partir das demonstrações do teorema original.

Deste modo, é possível enunciar um outro teorema:

Teorema A.5.2. Sejam $v, w \in \mathbb{K}^n$ vetores não-nulos com $v \neq w$ mas ||v|| = ||w||. Então, existe um refletor Q tal que

$$Qv = w. (A.5.2)$$

Em particular, existe um refletor que transforma $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$ de modo que

$$Qv = [\xi, 0, \dots, 0]^T$$
(A.5.3)

onde $\xi \in \mathbb{K}$.

Demonstração. O objetivo é determinar u tal que $(\mathbb{I} - \gamma u u^T)v = w$. Observando que para $u = \alpha(v - w)$ temos que

$$Q = \mathbb{I} - \frac{2}{\|v - w\|^2} \alpha^2 (vv^T - vw^T - wv^T + ww^T)$$
(A.5.4)

de modo que

$$Qv = v - \frac{2}{\|v - w\|^2} \alpha^2 (vv^T v - vw^T v - wv^T v + ww^T v)$$

= $v - \frac{2\alpha^2}{\|v - w\|^2} \left[\|v\|^2 (v - w) - (v \cdot w)(v - w) \right] = v - \frac{2\alpha^2 (\|v\|^2 - v \cdot w)}{\|v - w\|^2} (v - w)$ (A.5.5)

de modo que basta escolher α tal que

$$\frac{2\alpha^2(\|v\|^2 - v \cdot w)}{\|v - w\|^2} = 1 \to \alpha = \pm \frac{\|v - w\|}{\sqrt{2(\|v\|^2 - v \cdot w)}}$$
(A.5.6)

de modo que

$$Qv = v - (v - w) = w$$
 (A.5.7)

Este método nos permite zerar todos os elementos, a exceção do primeiro, de um vetor ou coluna de matriz devido às propriedades de simetria e ortogonalidade do refletor. A extensão para o caso em que $Q^{-1} = Q^{\dagger}$ é elementar a partir da troca da operação de tranposição pelo transposto conjugado e pelo uso do produto escalar adequado ao conjunto \mathbb{C} ou \mathbb{H} .

A.6 Matrizes Pseudo-Hermitianas

Os operadores que se conectam a seus adjuntos atraves de uma tranformação de similaridade

$$A^{\dagger} = \eta A \eta^{-1} \tag{A.6.1}$$

são conhecidos como operadores pseudo-hermitianos [30]. Estes operadores compartilham seus autovalores com seu adjunto. Em particular, é conhecido que [40] matrizes reais tridiagonais de ordem n da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$
(A.6.2)

podem ser relacionadas com seu adjunto a partir de uma transformação que verifica a equação (A.6.1). Esta tranformação é dada pela matriz diagonal η

$$\eta = \operatorname{diag}\left(1, \frac{b_1}{c_1}, \frac{b_1 b_2}{c_1 c_2}, \dots, \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{c_1 c_2 \dots c_{n-1}}\right)$$
(A.6.3)

cuja inversa é $\eta^{-1}={\rm diag}\left(\eta_k^{-1}\right)_{k=1,\dots,n}.$ Desse modo, podemos escrever:

$$\eta_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 1\\ \\ \prod_{l=1}^{k-1} \frac{b_l}{c_l} & \text{se } k > 1 \end{cases}$$
(A.6.4)

de modo que:

$$\left\{ \eta A \eta^{-1} \right\}_{p,q} = \begin{cases} 1 & \text{se } p = q = 1 \\ 1 \times b_1 \times \frac{c_1}{b_1} = c_1 & \text{se } p = 1, q = 2 \\ \frac{b_1}{c_1} \times c_1 \times 1 = b_1 & \text{se } p = 2, q = 1 \\ \prod_{l=1}^{p-1} \frac{b_l}{c_l} \times a_p \times \prod_{l=1}^{p-1} \frac{c_l}{b_l} = a_p & \text{se } p = q > 1 \\ \prod_{l=1}^{q} \frac{b_l}{c_l} \times c_q \times \prod_{l=1}^{q-1} \frac{c_l}{b_l} = b_q & \text{se } p = q + 1 > 2 \\ \prod_{l=1}^{p-1} \frac{b_l}{c_l} \times b_q \times \prod_{l=1}^{p} \frac{c_l}{b_l} = c_p & \text{se } q = p + 1 > 2 \end{cases}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix} = A^{\dagger}.$$

$$(A.6.5)$$

Esta matriz é de particular interesse, pois no caso em que os produtos $b_k c_k$ são reais, os autovalores de A são reais. Isto pode ser visto uma vez que neste caso é possível definir uma matriz $\eta^{\frac{1}{2}}$ definida como a matriz diagonal cujos elementos são as raízes quadradas dos elementos da matriz η tal que

$$K = \eta^{\frac{1}{2}} A \eta^{-\frac{1}{2}} = \eta^{\frac{1}{2}} \left(\eta^{-1} A^{\dagger} \eta \right) \eta^{-\frac{1}{2}} = \eta^{-\frac{1}{2}} A^{\dagger} \eta^{\frac{1}{2}} = K^{\dagger}$$
(A.6.6)

que é uma matriz hermitiana. Portanto, os autovalores da matriz Asão iguais aos da matriz Kque, pela Hermiticidade, são reais.

Apêndice B

Probabilidades e Distribuições

B.1 Probabilidades

Uma variável aleatória [27] pode ser definida em um espaço amostral S da seguinte maneira:

Definição B.1.1. Seja S um conjunto. Uma função $X : S \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória se $\forall s \in S$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que x = X(s).

Em um dado espaço amostral S, podemos definir a probabilidade Pr(A) de um subconjunto $A \subset S$ a partir de três axiomas:

Axioma B.1.1. Para todo subconjunto $A \subset S$, $Pr(A) \ge 0$.

Axioma B.1.2. Pr(S) = 1

Axioma B.1.3. Para toda sequência de eventos $\{A_1, A_2, ...\} \subset S$ tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$,

$$Pr\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}Pr(A_i)$$

B.2 Teoria de Distribuições

Uma probabilidade, ou distribuição de probabilidade, em um espaço amostral é uma especificação de números Pr(A) que verificam os axiomas B.1.1 a B.1.3.

Definição B.2.1. Seja $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto do eixo real e $Pr(X \in A)$ a probabilidade de que a variável X pertença ao subconjunto A. Então $Pr(X \in A)$ é igual à probabilidade de que um número aleatório s seja tal que $X(s) \in A$. Ou seja:

$$Pr(X \in A) = Pr\{s : X(s) \in A\}.$$

Se o subconjunto A for um subconjunto finito de \mathbb{R} , a distribuição é dita discreta. Variáveis que podem assumir todo valor dentro de um intervalo, limitado ou não, possuem distribuições contínuas. Quando uma distribuição de probabilidades foi definida para um espaço amostral real, podemos determinar a distribuição de probabilidades dos possiveis valores de cada variável aleatória X: **Definição B.2.2.** Denota-se uma variável aleatória X como variável aleatória contínua se existe uma função f não-negativa, definida no eixo real, tal que para todo subconjunto A da reta real, a probabilidade que X tome um valor em A é a integral de f no conjunto A. Esta função f é chamada de função de densidade de probabilidade.

Em particular, para subconjuntos dados por intervalos, a probabilidade de encontrar um variável aleatória contínua no intervalo (a, b] é:

$$\Pr(a < X \le b; f) = \int_{a}^{b} f(x) dx. \tag{B.2.1}$$

O conhecimento da função de densidade de probabilidades nos permite calcular grandezas conhecidas como momentos de ordem n, μ_n . Estes são definidos como sendo:

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx \tag{B.2.2}$$

O primeiro momento é também chamado de valor esperado ou média de x. De uma forma geral, o valor esperado de uma função g(x) é determinado por:

$$\langle g \rangle_f = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$
 (B.2.3)

o que significa que podemos também escrever os momentos como $\mu_n = \langle x^n \rangle_f$.

Seguindo estas definições, podemos estender estas definições para mais de uma variável. Resulta, então que para um dado vetor de n variáveis aleatórias no corpo \mathbb{K} , $\{x_1, x_2, ..., x_n\}^T$, a função de distribuição de probabilidade conjunta será:

$$Pr(\Omega \subset \mathbb{K}^{n}; f) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d^{n} \mathbf{x}$$
(B.2.4)

da qual identifica-se imediatamente a função de densidade de probabilidade multivariada $f(\mathbf{x})$, que imediatamente conduz à definição de densidade de probabilidade marginal de uma variável aleatória $x_l \in \mathbb{K}$:

$$f_{l}(x_{l}) = \int_{D_{1} \subset \mathbb{K}} \int_{D_{2} \subset \mathbb{K}} \dots \int_{D_{l-1} \subset \mathbb{K}} \int_{D_{l+1} \subset \mathbb{K}} \dots \int_{D_{n} \subset \mathbb{K}} f(x_{1}, x_{2}, \dots, x_{n}) dx_{1} dx_{2} \dots dx_{l-1} dx_{l+1} \dots dx_{n}$$
(B.2.5)

que corresponde à integração da distribuição conjunta de probabilidades em todas as variáveis exceto na variável x_l . A partir desta definição, a extensão para mais de uma variável é direta. E, tendo em consideração estas definições é possível definirmos a independência de duas variáveis aleatórias a partir de suas distribuições:

Definição B.2.3. Sejam $x, y \in \mathbb{K}$ duas variáveis aleatórias de distribuição de probabilidades conjunta

$$f: D \subset \mathbb{K}^2 \mapsto S \subset R$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

x e y são ditas independentes se as distribuições marginais

$$f_1(x) = \int_{D_y} f(x, y) dy \qquad f_2(y) = \int_{D_x} f(x, y) dx$$

são tais que para todo $(x, y) \in D$:

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Desse modo, n variáveis aleatórias são chamadas de independentes se elas são duas a duas independentes.

B.2.1 Transformação de Distribuições

Seja um vetor \mathbf{x} de variáveis aleatórias com densidade de probabilidade $f(\mathbf{x})$. Seja também um conjunto de transformações bijetoras e diferenciáveis da forma:

$$y_i = \phi_i(\mathbf{x}) \quad , \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$$
 (B.2.6)

que mapeiam $S \subset \mathbb{K}^n \mapsto T \subset \mathbb{K}^n$. Desse modo, a relação biunívoca entre **x** e **y** permite inverter as transformaçõe. Ou seja,

$$\exists \psi_i \mid x_i = \psi_i(\mathbf{y}) \quad , \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$
(B.2.7)

e a transformação pode ser relacionada pelo determinante Jacobiano

$$\mathbf{J} = \det\left[\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}\right\}_{i,j}\right].\tag{B.2.8}$$

Nessas condições, denotando $\Psi(\mathbf{y}) \equiv \{\psi_1(\mathbf{y}), \psi_2(\mathbf{y}), ..., \psi_n(\mathbf{y})\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a biunicidade nos permite obter a probabilidade através de

$$Pr(S \subset \mathbb{K}^{n}; f) = \int_{S} f(\mathbf{x}) d^{n} \mathbf{x} = \int_{T} f(\Psi(\mathbf{y})) |\mathbf{J}(\mathbf{y})| d^{n} \mathbf{y} = \int_{T} g(\mathbf{y}) d^{n} \mathbf{y} = Pr(T \subset \mathbb{K}^{n}; g).$$
(B.2.9)

Portanto, a densidade de probabilidade de y pode ser escrita como:

$$g(\mathbf{y}) \equiv f(\Psi(\mathbf{y})) |\mathbf{J}(\mathbf{y})|. \tag{B.2.10}$$

Para a teoria de matrizes aleatória, é de interesse estudar o efeito de transformações lineares bijetora em vetores de variáveis aleatórias. Neste caso, a transformação pode ser escrita na forma matricial como $\mathbf{y} = \mathbf{A}_{\mathcal{L}} \mathbf{x}$, onde $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ é a matriz que representa a transformação linear $\mathcal{L} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$. Sendo assim, o determinante Jacobiano será dado por:

$$\mathbf{J} = \det\left[\left\{\frac{\partial\psi_i}{\partial y_j}\right\}_{i,j}\right] = \det A_{\mathcal{L}}^{-1}.$$
(B.2.11)

cuja existência esta garantida pelo fato da transformação ser bijetora [17].

B.2.2 Distribuição Normal

Uma das mais importantes distribuições de uma variável real que se encontra no contexto da física é a distribuição Gaussiana, ou normal. Esta distribuição é descrita por:

$$N_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$
(B.2.12)

onde a notação N_{μ,σ^2} determina a distribuição através dos valores da média $\mu_1 = \mu$ e variância $\mu_2 - \mu_1^2 = \sigma^2$. A distribuição N[0, 1] é recorrente e recebe o nome de distribuição normal padrão. Para uma amostra de *n* variáveis aleatórias independentes retiradas de uma distribuição normal de média μ e variância σ^2 , a distribuição conjunta da amostra $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ é:

$$f_n(\mathbf{x}) = \prod_{k=1}^n N_{\mu,\sigma^2}(x_k) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n (x_k - \mu)^2\right\}.$$
 (B.2.13)

Seja um vetor aleatório \mathbf{x} de variáveis independentes com distribuição $N_{0,\sigma^2}(x_k), \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$. Seja, também, vetor \mathbf{y} , relacionado com \mathbf{x} por uma transformação ortogonal \mathbf{A} de modo que $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$. A equação (B.2.11) e a propriedade A.1.2 permitem que se determine a densidade de probabilidade de uma tal transformação:

$$g(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|} f(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n x_k(\mathbf{y})^2\right\} = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^n y_k^2\right\}.$$
(B.2.14)

Em outras palavras, se \mathbf{x} é um conjunto de variáveis aleatórias é independentes e identicamente distribuidas com uma distribuição N_{0,σ^2} , então uma transformação ortogonal deste conjunto $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ também é um conjunto de variáveis aleatórias é independentes e identicamente distribuidas com distribuição N_{0,σ^2} .

B.2.3 Distribuição χ_{γ}

Seja uma dada amostra aleatória \mathbf{x} de variáveis independentes e identicamente distribuídas com distribuição N_{0,σ^2} . É de interesse ao estudo das matrizes aleatórias no ensemble β [28] descrever a distribuição da estatística

$$z = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_i}{\sigma}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_i^2}{\sigma^2}}.$$
(B.2.15)

A densidade de probabilidades desta estatística pode ser obtida observando que a probabilidade de um ponto do \mathbb{K}^n -espaço possuir a estatística χ_n é:

$$\Pr(\Omega \subset \mathbb{K}; f) = f \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d^{n} \mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{1}{(2\pi\sigma^{2})^{n/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^{2}} \sum_{k=1}^{n} x_{k}^{2}\right\} dx_{1} dx_{2} ... dx_{n}$$
$$= \int_{\Omega} \frac{1}{(2\pi\sigma^{2})^{n/2}} \exp\left\{-\frac{z^{2}}{2}\right\} dx_{1} dx_{2} ... dx_{n} = \frac{1}{(2\pi\sigma^{2})^{n/2}} \exp\left\{-\frac{z^{2}}{2}\right\} \int_{\Omega} dx_{1} dx_{2} ... dx_{n}. \quad (B.2.16)$$

onde $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n \mid \mathbf{x}\mathbf{x}^T = z^2\}$. O integrando reduz-se, então, à superfície de uma hiperesfera de raio z [24] vezes a espessura infinitesimal da casca esférica. Portanto, a probabilidade de se encontrar z em um infinitésimo dz é dada por:

$$\chi(z)dz = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{z_n^2}{2}\right\} \frac{nz_n^{n-1}\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}dz = \frac{z_n^{n-1}e^{-z_n^2/2}}{2^{n/2-1}(\sigma^2)^{n/2}\Gamma(n/2)}dz$$
(B.2.17)

De modo que obtemos a distribuição $\chi,$ já generalizada para γ graus de liberdade:

$$\chi_{\gamma,\sigma^2}(z) = \begin{cases} \frac{z^{\gamma-1}e^{-z^2/2}}{2^{\gamma/2-1}(\sigma^2)^{\gamma/2}\Gamma(\gamma/2)} &, z \in [0, +\infty) \\ 0 &, \text{ caso contrário} \end{cases}$$
(B.2.18)

Os momentos desta distribuição são dados por:

Propriedade B.2.1. O k-ésimo momento de uma variável aleatória com distribuição χ_{γ,σ^2} é

$$\mu_k = \frac{2^{k/2}}{(\sigma^2)^{\gamma/2}} \frac{\Gamma(\frac{\gamma+k}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})}$$

Demonstração. O k-ésimo momento é dado por:

$$\mu_{k} = \int_{0}^{\infty} z^{k} \chi_{\gamma,\sigma^{2}}(z) dz = \int_{0}^{\infty} \frac{z^{\gamma+k-1} e^{-z^{2}/2}}{2^{\gamma/2-1} (\sigma^{2})^{\gamma/2} \Gamma(\gamma/2)} dz = \int_{0}^{\infty} \frac{2^{\gamma/2+k/2-1/2} w^{\gamma/2+k/2-1/2} e^{-w}}{2^{\gamma/2-1} (\sigma^{2})^{\gamma/2} \Gamma(\gamma/2)} \frac{1}{\sqrt{2w}} dw$$
$$= \frac{2^{k/2}}{(\sigma^{2})^{\gamma/2} \Gamma(\gamma/2)} \int_{0}^{\infty} w^{\frac{\gamma+k}{2}-1} e^{-w} dw = \frac{2^{k/2}}{(\sigma^{2})^{\gamma/2}} \frac{\Gamma(\frac{\gamma+k}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})}$$

Bibliografia

- J. Wishart. "Generalized product moment distribution in samples". Em: Biometrika 20A.1-2 (1928), pp. 32–52.
- [2] P. L. Hsu. "On the distribution of roots of certain determinantal equations". Em: Ann. Eugenics 9 (1939), pp. 250–258.
- [3] A. Selberg. "Remarks on a multiple integral". Em: Norsk Matematisk Tidsskrift 26 (1944), pp. 71–78.
- [4] H. Weyl. *Classical Groups*. Academic Press, 1946.
- [5] N. I. Mushkhelishvili. Singular Integral Equations. Groningen, 1953.
- [6] E. P. Wigner. "Characteristic Vectors of Bordered Matrices With Infinite Dimensions". Em: The Annals of Mathematics, 2nd Ser. 62.3 (1955).
- [7] E. P. Wigner. "Results and theory of resonance absorption". Em: Gatlinberg Conf. on Neutron Phys. by Time of Flight (1957), pp. 59–70.
- [8] W. Givens. "Computation of plane unitary rotations transforming a general matrix to triangular form". Em: J. Soc. Indust. Appl. Math. 6.1 (1958), pp. 26–50.
- [9] J.G.F. Francis. "The QR Transformation, I". Em: The Computer Journal 4.3 (1961), pp. 265– 271.
- [10] J.G.F. Francis. "The QR Transformation, II". Em: The Computer Journal 4.4 (1962), pp. 332– 345.
- [11] F. Dyson. "The threefold way. Algebraic structures of symmetry groups and ensambles in quantum mechanics". Em: Journal of Mathematical Physics 3 (1963), pp. 1199–1215.
- [12] V. N. Kublanovskaya. "On some algorithms for the solution of the complete eigenvalue problem". Em: USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 1.3 (1963), pp. 637– 657.
- [13] M. Abramowitz e I. A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions. Dover, 1964.
- [14] A. T. James. "Distributions of Matrix Variates and Latent Roots Derived from Normal Samples". Em: Ann. of Math. Stat. (1964), pp. 475–482.
- [15] R. J. Muirhead. Aspects of Multivariate Statistical Theory. Wiley e Sons, 1982.
- [16] O. Bohigas, M.-J. Giannoni e C. Schmit. "Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws". Em: Phys. Rev. Lett. 52.1 (1984), pp. 1–4.
- [17] S. Lang. *Linear Algebra*. Springer, 1987.
- [18] K. Aomoto. "On the complex Selberg integral". Em: Proceedings of the Symposium of Pure Mathematics 49 (1989), pp. 279–281.

- [19] V. I. Smirnov. *Linear Algebra and Group Theory*. Dover, 1989.
- [20] W. H. Press et al. Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, 1992.
- [21] T. Baker e P. Forrester. "The Calegoro-Sutherland model and generalized classical polynomials". Em: Comm. Math. Phys. 18 (1997), pp. 175–216.
- [22] B. Parlett. The Symmetric Eigenvalue Problem. SIAM Classics in Applied Mathematics, 1998.
- [23] J. Feinberg e A. Zee. "Non-Hermitean localization and de-localization". Em: Phys. Rev. E 59 (1999), pp. 6433–6443.
- [24] S. R. A. Salinas. Introdução à Física Estatística. EDUSP, 1999.
- [25] Md. S. Alam. "Comparative Study of Quaternions and Mixed Numbers". Em: Journal of Theoretics 3(6) (2000).
- [26] D. A. Ivanov. "Random-matrix ensembles in p-wave vortices". Em: e-print cond-mat/0103089 (2001).
- [27] M.H. DeGroot e M. J. Schervish. Probability and Statistics. Addison-Wesley, 2002.
- [28] I. Dumitriou e A. Edelman. "Matrix Models for Beta Ensembles". Em: Journal of Mathematical Physics 43 (2002).
- [29] M. S Hussein e S. R. A Salinas. 100 anos de física quântica. Editora Livraria da Física, 2002.
- [30] A. Mostafazadeh. "Pseudo-Hermiticity versus PT-Symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian". Em: J. Math. Phys. 43 (2002), pp. 205–214.
- [31] I. Dumitriu. "Eigenvalue Statistics for Beta-Ensembles". Tese de doutoramento. Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- [32] D. J. Griffiths. Introduction to Quantum Mechanics. Prentice Hall, 2004.
- [33] L. M. Mehta. Random Matrices. Academic Press, 2004.
- [34] John W. Eaton, David Bateman e Soren Hauberg. GNU Octave version 3.0.1 manual: a high-level interactive language for numerical computations. ISBN 1441413006. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2009. URL: http://www.gnu.org/software/octave/doc/ interpreter.
- [35] J. R. Humphrey et al. "CULA: Hybrid GPU Accelerated Linear Algebra Routines". Em: SPIE Defense and Security Symposium (DSS) (2010).
- [36] J. J. Sakurai e J. J. Napolitano. Modern Quantum Mechanics. Addison-Wesley, 2010.
- [37] D. S. Watkins. Fundamentals of Matrix Computations. Wiley e Sons, 2010.
- [38] G. Akemann, J. Baik e P. Di Francesco. The Oxford Handbook of Random Matrix Theory. Oxford University Press, 2011.
- [39] M. T. Loots et al. "The role of the real representation- in quaternion distribution theory". Em: Proc. 58th World Statistical Congress (2011), pp. 4001–4008.
- [40] O. Bohigas e M. P. Pato. "Non-Hermitian β-ensemble with real eigenvalues". Em: AIP Advances 3 (2013), p. 032130.