

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

O Campo Magnético e a Massa dos Mésons

Camila Sampaio Machado

Orientador: Prof. Dr. Fernando Silveira
Navarra

Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção do tí-
tulo de Mestre em Ciências

Comissão examinadora:

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (IFUSP)
Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Guitman - (IFUSP)
Prof. Dr. Ricardo D'Elia Matheus - (IFT-UNESP)

São Paulo
2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Machado, Camila Sampaio

O campo magnético e a massa dos mésons.
São Paulo, 2013.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra
Área de Concentração: Física Hadrônica

Unitermos: 1. Campo magnético; 2. Massa; 3. Partículas
elementares; 4. Colisões; 5. Cromodinâmica quântica.

USP/IF/SBI-021/2013

Agradecimentos

Ao meu orientador Fernando, pela paciência, confiança e apoio ao longo destes anos.

Aos professores Jorge e Ricardo, e ao Stefano, sem os quais parte deste trabalho não seria possível.

Aos amigos e professores do GRHAFITE pelo clima amigável, cafés diários, discussões de física frequentes e eventuais comemorações.

Aos amigos do outro lado do corredor, por me aguentarem diariamente: Cláudio, Elisa, Leo, Nayara e Yuber.

Também às amigas do handebol do IF-IAG, que ajudaram a manter minha sanidade mental nestes anos.

Aos amigos queridos que a física colocou em minha vida: Bianca, César e Hugo. Não importa os diferentes caminhos que percorremos, sempre nos encontramos no final.

A minha Elite, pela amizade de longa data: Ana Carol, Ana Clara, Carol, Diogo, Felipe, Flávia, Keh, Lari, Leandro, Mei Li, Pedro, Thaís e, em especial, ao Rafa. Nenhuma palavra será suficiente para descrever tudo que vocês significam para mim.

Aos amigos que vejo menos do que gostaria, mas não são menos importantes: Lucas e Gil.

A minha família mais do que querida e, em especial, as minhas avós Cida e Elisa, por todo carinho.

E mais importante, ao meu pai Enio, a minha mãe Eliane e a minha irmã Beatriz, pelo amor incondicional, apoio em minhas decisões, suporte e compreensão.

Este trabalho teve suporte de uma bolsa do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (1º de fevereiro de 2011 a 31 de julho de 2011) e da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (1º de agosto de 2012 a 31 de janeiro de 2013).

Resumo

Neste trabalho buscamos explorar os efeitos do campo magnético, criado em colisões de íons pesados não-centrais, em estados ligados. Motivados pelo caso do átomo de hidrogênio, onde a presença do campo magnético deixa o estado mais ligado, estudamos o caso dos mésons B e D.

Inicialmente trabalhamos com a equação de Schrödinger e utilizamos o modelo de potencial de Cornell que faz uma boa descrição da espectroscopia de mésons pesados. Em seguida, utilizando as regras de soma da QCD, procuramos introduzir o efeito do campo magnético no cálculo da massa de mésons. O ponto de partida foi substituir o propagador livre dos quarks pelo propagador de Schwinger, que corresponde ao propagador de um férmion na presença de um campo magnético externo e constante. Tratamos do limite de campo fraco, onde $eB \ll m^2 \ll M^2$ e o de campo muito forte, onde $eB \gg M^2$, sendo m a massa do quark leve e M a massa do quark pesado.

Em todos os casos observamos uma tendência da queda na massa do méson devido ao campo magnético. Esta mudança poderia ter diversas implicações fenomenológicas, como por exemplo na taxa de produção do quarkonium, que ilustramos utilizando o modelo de evaporação de cor.

Abstract

At the present work, we explore the effects of the magnetic field on bound states. Such field is generated by non-central heavy ion collisions. Since the presence of magnetic field results in more deeply bounded states for the hydrogen, we will analyze the cases of mesons B and D.

Initially we investigate the Cornell potential in the Schrödinger equation, which is usually a good description of the spectroscopy of heavy mesons. Next, as we examine the model using QCD sum rules, we tried to introduce the magnetic field and its consequences in the meson mass calculation. The starting point was to substitute the free propagator of quarks by the Schwinger propagator, which corresponds to the propagator of a fermion in the presence of an external constant magnetic field. We explored the weak field limit, where $eB \ll m^2 \ll M^2$ and of very strong fields, where $eB \gg M^2$, for m being the mass of the light quark and M the mass of the heavy quark.

In all cases we observed a trend of decreased meson mass due to the magnetic field. These variations could have many phenomenological implications; for instance, the production rates of quarkonium, illustrated by the method of color evaporation.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O Campo Magnético	1
1.2	Um Modelo Semi-Clássico	4
2	Movimento em um Campo Magnético Externo	13
2.1	A Equação de Schrödinger e o Campo Magnético	13
2.1.1	Solução para o elétron livre	15
2.1.2	Solução para o elétron em um potencial harmônico bidi- mensional	18
3	O Átomo de Hidrogênio	21
3.1	O Átomo de Hidrogênio em um Campo Magnético	21
3.1.1	Aproximação de Landau	23
3.1.2	Aproximação de Karnakov-Popov	24
3.1.3	Cálculo numérico	26
3.2	Comparação dos métodos	27
4	Os Mésons B e D	31
4.1	Os Mésons B e D em um Campo Magnético	31
4.1.1	Variação da massa com o campo magnético	32
5	Regras de Soma da QCD com Campo Magnético	37
5.1	Regras de Soma da QCD (RSQCD)	37
5.1.1	Função de Correlação	38
5.1.2	Lado da OPE	39
5.1.3	Lado Fenomenológico	41
5.1.4	A Dualidade Quark-Hádron e a Validade das RSQCD	43
5.2	RSQCD e o Campo Magnético	45
5.2.1	Contribuição Perturbativa com Campo Magnético Fraco	46
5.2.2	Contribuição Perturbativa com Campo Magnético Forte	52
5.2.3	Condensados	54

5.2.4	Lado Fenomenológico com Campo Magnético	57
5.3	Resultados	58
5.3.1	Cálculo para Campo Magnético Nulo	58
5.3.2	Limite de Campo Magnético Fraco	59
5.3.3	Limite de Campo Magnético Forte	61
6	O Efeito do Campo Magnético na Produção de J/ψ	69
6.1	Color Evaporation Model (CEM)	69
6.2	Resultados	73
7	Conclusão	79
A	O Potencial de Liénard-Wiechert	81
B	Equação de Whittaker	85
C	Método espectral	87
C.1	Caso unidimensional	87
C.2	Caso bidimensional	89
D	O Potencial de Cornell	91
D.1	A Cromodinâmica Quântica	91
D.2	Construção de um Potencial Efetivo	92
E	O Propagador de Schwinger	97
F	Cálculo das Integrais nos Momentos	101

Lista de Figuras

1.1	Plano transversal de uma colisão de íons pesados não-central. O parâmetro de impacto é dado por b e o campo é gerado na direção y . Retirado de [4].	2
1.2	Evolução do campo magnético no tempo para a energia do RHIC em uma colisão Au-Au onde foram consideradas cargas esféricas e carregadas com $R = 7 \text{ fm}$. A linha tracejada foi obtida modelando os íons de ouro como duas esferas uniformemente carregadas e contraídas por Lorentz. Retirado de [4].	3
1.3	Dependência do campo magnético em $x = 0$ com a coordenada y para a energia do RHIC em uma colisão Au-Au com parâmetro de impacto $b = 4 \text{ fm}$. Retirado de [4].	4
1.4	Dependência do campo magnético com a coordenada o parâmetro de impacto b para a energia do RHIC em uma colisão Au-Au. Retirado de [4].	5
1.5	Dependência temporal da distribuição do campo magnético para colisões Au-Au e $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ e $b = 10 \text{ fm}$. A localização dos prótons da colisão pode ser vista nos pontos do plano $(x - z)$. Retirado de [8].	6
1.6	Massa dos estados $(c - \bar{u})$ e $(b - \bar{d})$ interagindo através do potencial de Cornell na configuração de spin de menor energia, em função do campo magnético calculada com o método semiclássico.	10
1.7	Massa dos estados $(c - \bar{u})$ e $(b - \bar{d})$ interagindo através do potencial de Cornell na configuração de spin de maior energia, em função do campo magnético calculada com o método semiclássico.	11
1.8	Massa dos estados $(c - \bar{u})$ e $(b - \bar{d})$ interagindo através do potencial tipo coulombiano na configuração de spin de menor energia, em função do campo magnético calculada com o método semiclássico.	11

1.9	Massa dos estados $(c - \bar{u})$ e $(b - \bar{d})$ interagindo através do potencial tipo coulombiano na configuração de spin de maior energia, em função do campo magnético calculada com o método semi-clássico.	12
2.1	Degenerescência dos níveis de Landau devido à adição do termo de acoplamento do spin com o campo magnético.	17
2.2	Variação da energia com o campo magnético para o potencial de um oscilador harmônico com $m = 1$ e $\omega_0 = 1$	19
3.1	Energia de ligação do átomo de hidrogênio variando o campo magnético variando os parâmetros b e L da solução numérica e a comparação com o resultado obtido com o método de Karnakov-Popov.	27
3.2	Energia de ligação do átomo de hidrogênio variando o campo magnético para a solução numérica unidimensional, bidimensional e o resultado obtido com o método de Karnakov-Popov.	28
3.3	Comparação entre os métodos para a energia de ligação do átomo de hidrogênio variando o campo magnético.	29
4.1	Massa dos estados $(c - \bar{u})$ em função do campo magnético normalizada pela massa em $eB = 0$. Curvas para o potencial de Cornell e para o potencial do tipo coulombiano com o cálculo numérico e a aproximação analítica de Karnakov-Popov.	33
4.2	Massa dos estados $(b - \bar{d})$ em função do campo magnético normalizada pela massa em $eB = 0$. Curvas para o potencial de Cornell e para o potencial do tipo coulombiano com o cálculo numérico e a aproximação analítica de Karnakov-Popov.	34
4.3	Massa dos estados $(c - \bar{u})$ em função do campo magnético normalizada pela massa em $eB = 0$. Curvas para diferentes valores de κ do potencial de Cornell.	35
4.4	Massa dos estados $(c - \bar{u})$ em função do campo magnético normalizada pela massa em $eB = 0$. Curvas para diferentes valores de σ do potencial de Cornell.	35
4.5	Massa dos estados $(c - \bar{u})$ em função do campo magnético normalizada pela massa em $eB = 0$. Curvas para diferentes valores da massa reduzida μ utilizando o potencial de Cornell.	36
5.1	Representação esquemática do correlator de dois pontos.	38
5.2	Representação do propagador de Schwinger no limite de campo magnético fraco na forma de diagramas.	48

5.3	Diagramas obtidos com o correlator utilizando o propagador de Schwinger até a ordem de $(eB)^2$	49
5.4	Cálculo na rede da variação do condensado de quarks com o campo magnético. Retirado de [33].	54
5.5	Comparação com o cálculo na rede com as previsões dos modelos χ PT e (P)NJL. Retirado de [33].	55
5.6	Cálculo da polarização μ_f como função do campo magnético para $T = 0$ e $T = 0.82T_c$. Retirado de [41].	57
5.7	Estudo da convergência da OPE com a massa de Borel.	58
5.8	Dominância do pólo sobre o contínuo para a fixação do limite inferior da massa de Borel.	59
5.9	Massa do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel.	60
5.10	Acoplamento do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel.	61
5.11	Estudo da convergência da OPE com a massa de Borel para o méson B , $eB = 2 \cdot 10^{-6} m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$. A curva vermelha corresponde ao condensado de quarks, a preta ao termo perturbativo e a azul a contribuição de $(eB)^2$	62
5.12	Dominância do pólo sobre o contínuo para a fixação do limite inferior da massa de Borel para o méson B , $eB = 2 \cdot 10^{-6} m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$	63
5.13	Massa do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel, $eB = 2 \cdot 10^{-6} m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$	63
5.14	Acoplamento do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel, $eB = 2 \cdot 10^{-6} m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$	64
5.15	Variação da massa do méson B com o momento perpendicular ao campo magnético gerado na colisão.	64
5.16	Variação da massa do méson B com o campo magnético para $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$	65
5.17	Estudo da convergência da OPE com a massa de Borel para o méson B , $eB = 75 m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$. A curva vermelha corresponde ao condensado de quarks e a preta ao termo perturbativo.	65
5.18	Dominância do pólo sobre o contínuo para a fixação do limite inferior da massa de Borel para o méson B , $eB = 75 m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$	66
5.19	Massa do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel, $eB = 75 m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$	66
5.20	Acoplamento do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel, $eB = 75 m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$	67

5.21	Varição da massa do méson B com o campo magnético para $q_{\perp}^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$	67
5.22	Varição da massa do méson B com o momento perpendicular ao campo magnético gerado na colisão.	68
6.1	Diagrama de Feynman correspondente à criação de pares através de um glúon virtual.	70
6.2	Diagrama de Feynman correspondente à fusão de glúons através dos canais s , t e u , respectivamente.	71
6.3	Seção de choque diferencial do J/ψ por x_F para $\sqrt{s} = 4.5 \text{ TeV}$ calculada com diversos valores para a massa do méson D	74
6.4	Razão da seção de choque diferencial do J/ψ calculada com diversos valores da massa do méson D pela seção de choque calculada com a massa em $eB = 0$ para $\sqrt{s} = 4.5 \text{ TeV}$	75
6.5	Seção de choque total com dependência da energia do centro de massa para diversos valores para a massa do méson D	75
6.6	Seção de choque diferencial do Υ por x_F para $\sqrt{s} = 4.5 \text{ TeV}$ calculada com diversos valores para a massa do méson B	76
6.7	Razão da seção de choque diferencial do Υ calculada com diversos valores da massa do méson B pela seção de choque calculada com a massa em $eB = 0$ para $\sqrt{s} = 4.5 \text{ TeV}$	76
6.8	Seção de choque total com dependência da energia do centro de massa para diversos valores para a massa do méson B	77
C.1	Solução em termos das funções seno para $L = 1$	88
D.1	Varição da constante de acoplamento do QCD em função da escala de energia. Retirado de [63].	92
D.2	Diagramas em primeira ordem. O da esquerda corresponde a troca de um glúon e o da direita a aniquilação de pares.	93
D.3	Potencial de Cornell.	95

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, vamos discutir a existência de campos magnéticos intensos em colisões de íons pesados e através de um modelo semi-clássico e vamos mostrar que estes campos podem ter uma influência significativa na massa de mésons. Focaremos nosso estudo nos mésons B e D pois, por serem formados por um quark leve e um pesado, se assemelham ao sistema do átomo de hidrogênio, o que simplifica os cálculos.

1.1 O Campo Magnético

Campos magnéticos ¹ fortes aparecem em pelo menos três situações físicas de interesse para a física hadrônica. Primeiro, em modelos cosmológicos acreditamos que campos da ordem de $eB \sim 2 \text{ GeV}^2$ possam ter sido produzidos durante a transição eletrofraca no início do universo [1], o que pode ter tido impacto nos processos subsequentes de interações forte. Segundo, no interior de estrelas de nêutrons densas (magnetares) acreditamos que exista um campo da ordem de $eB \sim 1 \text{ MeV}^2$ [2].

Por último, em uma colisão não-central de íons pesados relativísticos um campo magnético muito intenso é produzido na direção perpendicular ao plano de colisão, como pode ser visto na Figura 1.1. A intensidade máxima do campo magnético é estimada como sendo $eB \sim m_\pi^2 \sim 0.02 \text{ GeV}^2$ no RHIC e $eB \sim 15m_\pi^2 \sim 0.3 \text{ GeV}^2$ no LHC [3, 4]. Várias implicações foram recentemente estudadas, como a dissociação do charmonium via ionização [5, 6] e a transformação do η_c em J/ψ [7].

Na Ref.[4] foi usado um modelo de transporte microscópico, chamado *Ultra-relativistic Quantum Molecular Dynamics*, que descreve a evolução da colisão de

¹Vamos usar unidades naturais em que $\hbar = c = 1$ e o fator de conversão para o campo magnético é dado por $\frac{1 \text{ GeV}^2}{(\hbar c)^{3/2}} = 1.44 \times 10^{19} \text{ Gauss}$

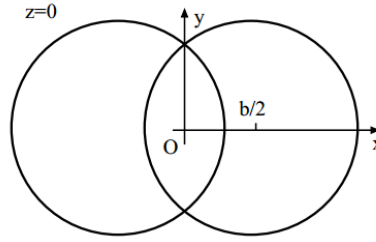


Figura 1.1: Plano transversal de uma colisão de íons pesados não-central. O parâmetro de impacto é dado por b e o campo é gerado na direção y . Retirado de [4].

íons pesados. Com isso, foi possível estudar o campo magnético criado devido aos núcleos em movimento. A inclusão do campo magnético na equação de evolução vem do potencial retardado de Liénard-Wiechert de uma carga pontual em movimento, dado por:

$$eB(\mathbf{r}, t) = \frac{\alpha}{4\pi} \sum_n Z_n \frac{\mathbf{v}_n \times \mathbf{R}_n}{R_n^3} \frac{(1 - v_n^2)}{[1 - v_n^2 \sin^2 \phi_{Rv_n}]^{3/2}}, \quad (1.1)$$

onde $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ é a posição da partícula, \mathbf{v} sua velocidade e ϕ o ângulo entre \mathbf{R} e \mathbf{v} (Apêndice A). Dessa expressão, podemos tirar as seguintes conclusões para o campo magnético gerado na origem (Figura 1.1):

- Por questões de simetria, podemos observar que para colisões centrais, isto é, com o parâmetro de impacto pequeno, o campo magnético criado é desprezível.
- Também devido à simetria, temos que apenas a componente do campo na direção perpendicular ao plano de colisão é não nula.
- Para energia baixas, o campo também é desprezível pois, sua intensidade é proporcional à velocidade das partículas.
- A dependência do campo magnético com a carga do núcleo pode ser aproximada por $eB \sim Z/R^2$, onde R é a escala que caracteriza o raio do núcleo e Z o número atômico. Podemos usar a aproximação $R \sim A^{1/3} \sim Z^{1/3}$ e obtemos que $eB \sim Z^{1/3}$.

O resultado obtido para a evolução no tempo do campo magnético, sua dependência com a coordenada y e com o parâmetro de impacto pode ser visto nas Figuras 1.2, 1.3 e 1.4.

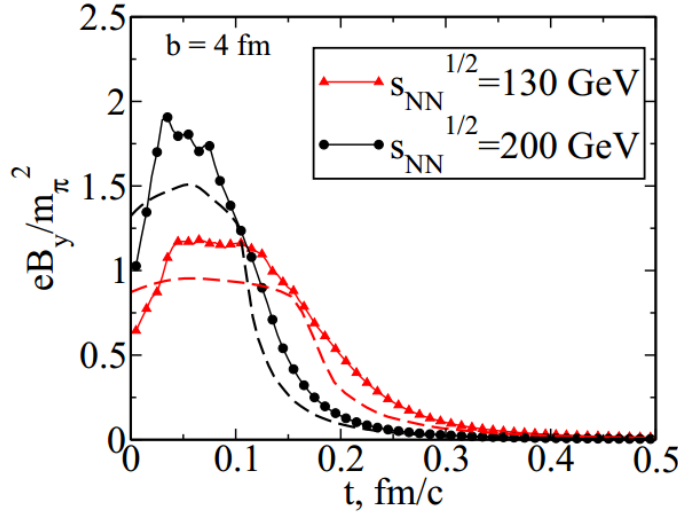


Figura 1.2: Evolução do campo magnético no tempo para a energia do RHIC em uma colisão Au-Au onde foram consideradas cargas esféricas e carregadas com $R = 7 \text{ fm}$. A linha tracejada foi obtida modelando os íons de ouro como duas esferas uniformemente carregadas e contraídas por Lorentz. Retirado de [4].

Podemos notar que o máximo do campo criado no RHIC é da ordem de $eB \sim m_\pi^2 \sim 0.02 \text{ GeV}^2$. Para o LHC, os autores consideram $\sqrt{s_{NN}} = 4.5 \text{ TeV}$, $b = 4 \text{ fm}$, uma colisão de Pb-Pb e obtêm um campo máximo da ordem de $eB \sim 15m_\pi^2 \sim 0.3 \text{ GeV}^2$. Estas serão as duas escalas em que estaremos interessados neste trabalho.

A evolução do campo magnético também foi estudada com o *Hadron String Dynamics Model* (HSD) em [8] e foram obtidos resultados semelhantes, como pode ser visto na Figura 1.5.

Queremos entender como este campo pode alterar a massa de estados ligados e as implicações fenomenológicas desta alteração. Para termos uma ideia da influência, iniciamos uma discussão baseada na mecânica quântica não-relativística, seguindo o tratamento dado para o átomo de hidrogênio no livro-texto [9] e refinado em [10]. Usamos o mesmo formalismo no caso de estados ligados de quarks pesados (mésons pesados), dito *Modelo de Potencial*. Também iniciamos um estudo da inclusão do campo magnético nas *Regras de Soma da QCD*, o que resulta no tratamento relativístico do fenômeno.

Estamos supondo que o tempo de duração do campo magnético ($t \sim 0.2 \text{ fm}$) é suficiente para causar alterações em estados de quarks pesados, uma vez que estes são formados em um tempo da ordem de $t \sim 1/m_c \sim 0.1 \text{ fm}$ para o charmonium e $t \sim 1/m_b \sim 0.05 \text{ fm}$ para o bottomonium.

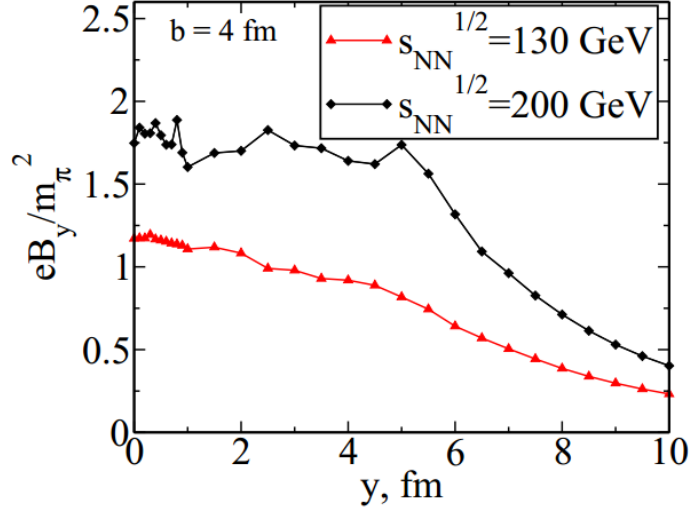


Figura 1.3: Dependência do campo magnético em $x = 0$ com a coordenada y para a energia do RHIC em uma colisão Au-Au com parâmetro de impacto $b = 4$ fm. Retirado de [4].

1.2 Um Modelo Semi-Clássico

Inicialmente, procedemos com um cálculo simplificado para entender a física do problema e para estimar a ordem de grandeza dos efeitos que estamos interessados.

O estudo clássico das equações de movimento de uma partícula de massa m e carga q sob a influência de um campo eletromagnético externo é feito através do potencial vetor $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ o do potencial escalar $\Phi(\mathbf{r}, t)$. O campo elétrico e magnético podem ser escritos como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (1.3)$$

A Lagrangiana é dada por,

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) - q\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.4)$$

Assim, podemos usar as equações de Euler-Lagrange e obter o momento canonicamente conjugado,

$$\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

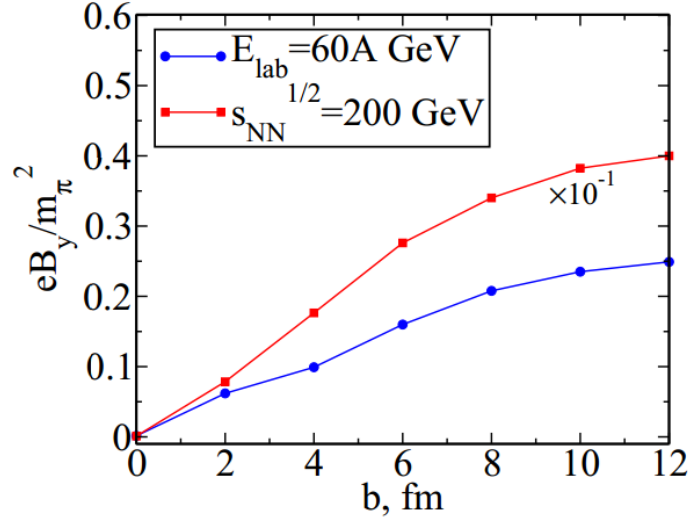


Figura 1.4: Dependência do campo magnético com a coordenada o parâmetro de impacto b para a energia do RHIC em uma colisão Au-Au. Retirado de [4].

e a Hamiltoniana correspondente vai ser dada por,

$$H \equiv \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t))^2 + q\Phi(\mathbf{r}, t). \quad (1.6)$$

Em seguida, é feita a quantização canônica dos operadores \mathbf{p} e \mathbf{r} . Vale notar que, como estamos tratando de potenciais eletromagnéticos é necessário fazer uma escolha de gauge. Dessa forma, podemos escrever que:

$$H = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} - q\hat{\mathbf{A}})^2 + q\Phi - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.7)$$

O último termo corresponde à interação de spin e é acrescentado explicitamente, descrevendo o acoplamento do spin com o campo magnético externo. Podemos reescrevê-lo como,

$$-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -g \left(\frac{q}{2m} \right) \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}, \quad (1.8)$$

onde g é o momento giromagnético da partícula. No contexto atômico, estas interações estão ligadas ao fato do spin do elétron e o spin do próton estarem associados a um momento de dipolo magnético (μ_e e μ_p). Devido à carga, eles têm o sinal trocado: negativo para o elétron e positivo para o próton. Já os fatores giromagnéticos são medidos experimentalmente e correspondem à $g_e \simeq 2$ e $g_p \simeq 5.58$.

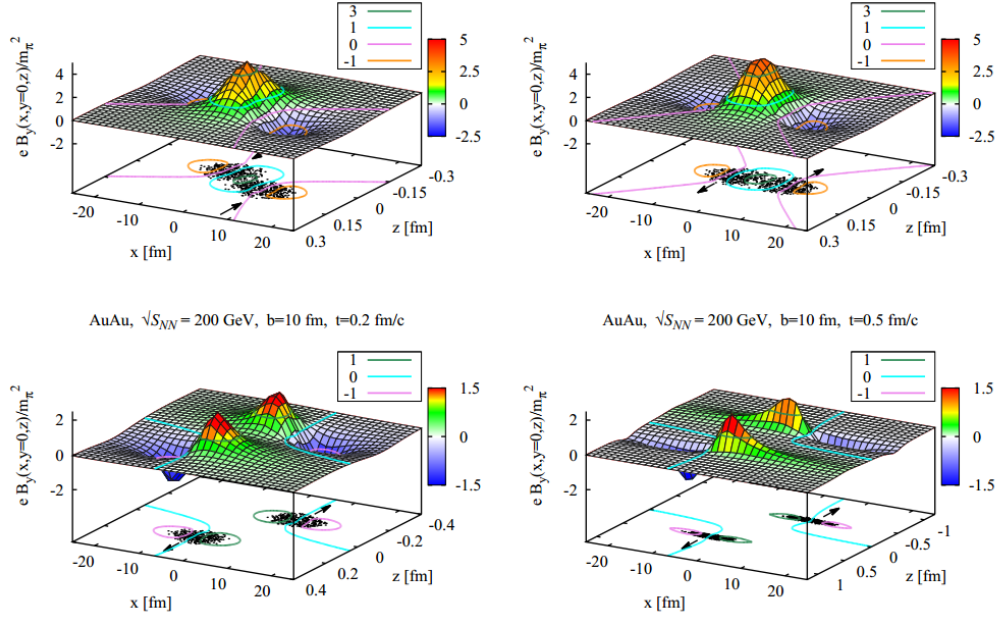


Figura 1.5: Dependência temporal da distribuição do campo magnético para colisões Au-Au e $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ e $b = 10 \text{ fm}$. A localização dos prótons da colisão pode ser vista nos pontos do plano $(x - z)$. Retirado de [8].

Sabemos que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} = -i(\nabla \cdot \mathbf{A})$. Então, \mathbf{p} e \mathbf{A} comutam se $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Um gauge particular onde isto acontece é:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \times \mathbf{r}. \quad (1.9)$$

Assim, obtemos:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{q}{m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \frac{q^2}{2m} \mathbf{A}^2 + q\Phi - g \left(\frac{q}{2m} \right) \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}. \quad (1.10)$$

Para quarks $g \simeq 2$ e $\mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = \sigma_z B/2$, com $\sigma_z = \pm 1$. Vamos supor que o potencial escalar seja nulo, isto é, $\Phi = 0$. Em coordenadas cartesianas o potencial vetor pode ser escrito como $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$, com o campo magnético alinhado ao eixo z positivo e $B = |\mathbf{B}|$. Assim, temos $A^2 = B^2 \rho^2/4$, onde $\rho^2 = x^2 + y^2$. Escolhendo $\mathbf{p} = p\hat{z}$, temos $\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} = 0$ e finalmente:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{(qB)^2 \rho^2}{8m} - \frac{qB\sigma_z}{2m}. \quad (1.11)$$

Para um sistema de duas partículas a Hamiltoniana acima se transforma em:

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{(q_1 B)^2 \rho_1^2}{8m_1} + \frac{(q_2 B)^2 \rho_2^2}{8m_2} - \frac{q_1 B \sigma_z^{(1)}}{2m_1} - \frac{q_2 B \sigma_z^{(2)}}{2m_2} + \lambda \frac{\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2}{m_1 m_2} + V(\rho), \quad (1.12)$$

onde $V(\rho)$ é o potencial quark - antiquark. No regime de fortes campos magnéticos considerados neste trabalho a interação spin-spin pode ser desprezada. Estudaremos os mésons pesados D , D^* , B e B^* , nos quais há uma partícula pesada (1) e uma leve (2). Para sistemas “hidrogenóides” como estes, podemos fazer a aproximação $m_1 \gg m_2$, $p_1 \ll m_1$ e $\rho_2 \gg \rho_1 \simeq 0$. Assim, $\rho_2 = \rho$ (distância do centro de massa), $p_2 = p$ e a massa reduzida do sistema é aproximadamente $\mu \simeq m_2$.

Para obtermos um entendimento qualitativo do problema e estimarmos a ordem de magnitude do efeito do campo magnético em estados ligados de quarks pesados, utilizaremos a aproximação semiclássica [11]. Esta aproximação consiste em usar o princípio de incerteza e escrever que $p \sim 1/\rho$. Em seguida, minimizamos a energia com respeito a ρ e obtemos a energia do estado fundamental calculando $E(\rho_0)$. A expressão para energia do sistema quark anti-quark que queremos minimizar é dada por:

$$E(\rho) = \frac{1}{2\mu\rho^2} + \frac{(qB)^2 \rho^2}{8\mu} + H_s + V(\rho), \quad (1.13)$$

com

$$H_s = -\frac{q_1 B \sigma_z^{(1)}}{2m_1} - \frac{q_2 B \sigma_z^{(2)}}{2m_2}. \quad (1.14)$$

A interação entre os quarks é representada pelo *Potencial de Cornell* (Apêndice D):

$$V(\rho) = -\frac{\kappa}{\rho} + \sigma\rho, \quad (1.15)$$

onde κ e σ são respectivamente o acoplamento efetivo e a tensão na corda, parâmetros que podem ser extraídos de cálculos de *QCD na rede* e de análises fenomenológicas da espectroscopia de mésons pesados. Para o méson D^0 , $m_1 = m_c$ com $q_1 = 2e/3$ e $m_2 = m_{\bar{u}}$ com $q_2 = -2e/3$. Para o méson B^0 , $m_1 = m_b$ com $q_1 = -e/3$ e $m_2 = m_{\bar{d}}$ com $q_2 = e/3$.

Antes de incluir o potencial de Cornell no cálculo, vamos obter uma estimativa analítica estudando o caso de um potencial quadrático. Substituindo $V(\rho) = k\rho^2$ em (1.13) e desconsiderando o termo de acoplamento do spin com o campo magnético (H_s), temos:

$$E(\rho) = \frac{1}{2\mu\rho^2} + \frac{(qB)^2 \rho^2}{8\mu} + k\rho^2. \quad (1.16)$$

Minimizando com respeito à ρ :

$$\rho_0 = \left[\frac{4}{(qB)^2 + 8k\mu} \right]^{1/4}. \quad (1.17)$$

Classicamente, podemos interpretar ρ_0 como o raio médio da órbita descrita pelo quark mais leve em torno do mais pesado, em analogia ao raio de Bohr no átomo de hidrogênio. Desta forma, vemos que o raio diminui com o aumento do campo magnético. Substituindo (1.17) em (1.16), obtemos:

$$E(\rho_0) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{(qB)^2 + 8k\mu}. \quad (1.18)$$

Observamos que $E(eB \rightarrow \infty) \sim eB$ e a energia cresce com o campo magnético. Isto é esperado como um efeito do aumento da energia cinética da partícula na presença do campo. No entanto, a inclusão de H_s no cálculo é muito importante e pode levar a uma diminuição da energia com o aumento do campo magnético.

Para completar o tratamento semiclassico, além de incluir o potencial de Cornell precisamos estimar a energia de interação entre o spin e o campo magnético externo, ou seja, do valor esperado do Hamiltoniano de interação spin-campo magnético entre estados do méson M considerado:

$$E_s = \langle M | H_s | M \rangle. \quad (1.19)$$

Vamos considerar aqui o caso do méson D^0 (para o méson B^0 valem considerações análogas).

Esse méson é um estado singleto de spin e portanto sua função de onda de spin é antissimétrica:

$$|D^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \quad (1.20)$$

Precisamos calcular $\langle D^0 | H_s | D^0 \rangle$. Entretanto, ao aplicar o operador H_s no estado de spin antissimétrico, obtemos que:

$$H_s |D^0\rangle = -\frac{|q|B}{2\mu} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) = -\frac{|q|B}{2\mu} \frac{1}{\sqrt{2}} |D^{*0}\rangle, \quad (1.21)$$

onde $|q| = |q_1| = |q_2|$.

Ou seja, o campo magnético induz a conversão do méson pseudoescalar no méson vetorial e vice-versa. Vemos que os estados $|D^0\rangle_s$ e $|D^{*0}\rangle_s$ não são auto-estados de H_s e esta não é uma base adequada para tratarmos o problema. A base dos auto-estados de H_s é dada por $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$ e $|\downarrow\uparrow\rangle$. Nesses estados podemos calcular o valor esperado de H_s e encontramos:

$$E_{\downarrow\uparrow} = \langle \downarrow\uparrow | H_s | \downarrow\uparrow \rangle = \frac{|q|B}{2\mu} \quad (1.22)$$

$$E_{\uparrow\uparrow} = \langle \uparrow\uparrow | H_s | \uparrow\uparrow \rangle \simeq \frac{|q|B}{2\mu} \quad (1.23)$$

$$E_{\uparrow\downarrow} = \langle \uparrow\downarrow | H_s | \uparrow\downarrow \rangle = -\frac{|q|B}{2\mu}, \quad (1.24)$$

$$E_{\downarrow\downarrow} = \langle \downarrow\downarrow | H_s | \downarrow\downarrow \rangle \simeq -\frac{|q|B}{2\mu}. \quad (1.25)$$

O estado tripleto de spin para o méson D^{*0} é dado por:

$$|D^{*0}\rangle = \begin{cases} |\uparrow\uparrow\rangle; m = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle); m = 0 \\ |\downarrow\downarrow\rangle; m = -1 \end{cases} \quad (1.26)$$

onde m é o momento angular do sistema. Portanto, na base dos auto-estados de H_s , temos:

$$|\uparrow\uparrow\rangle = |D^{*0}; m = 1\rangle, \quad (1.27)$$

$$|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|D^{*0}; m = 0\rangle + |D^0; m = 1\rangle),$$

$$|\downarrow\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|D^{*0}; m = 0\rangle - |D^0; m = 1\rangle),$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle = |D^{*0}; m = -1\rangle.$$

Voltando à expressão (1.13) e substituindo H_s pelos valores de E_s encontrados nas expressões (1.23), (1.24), (1.22) e (1.25), podemos verificar que os estados $|\uparrow\downarrow\rangle$ e $|\downarrow\downarrow\rangle$ tem a menor energia e que os estados $|\downarrow\uparrow\rangle$ e $|\uparrow\uparrow\rangle$ tem a maior energia. Assim, através da interação com o spin, o campo magnético altera a massa desses estados. Como foi dito acima, minimizando $E(\rho)$ com respeito a ρ obtemos o “raio” médio (ρ_0) do estado fundamental. Portanto, $E(\rho_0)$ é a energia do estado ligado de mais baixa energia que depende do campo magnético externo e que somada às massas dos quarks nos dá a massa do méson:

$$M_0 = m_1 + m_2 + E(\rho_0). \quad (1.28)$$

Quando o estado $(c - \bar{u})$, $q_2 = -2e/3$ e (1.24) é produzido observamos uma redução na energia (1.13), enquanto (1.22) vai aumentá-la. Essa diferença se torna mais evidente para campos magnéticos intensos. As expressões (1.24) (ou (1.22))

e também (1.15) são usadas em (1.13), que finalmente é utilizada em (1.28) para obtermos a massa dos estados como função do campo magnético.

O resultados podem ser vistos na Figura 1.6 (configuração de menor energia) e na Figura 1.7 (configuração de maior energia), onde a massa (1.28) é normalizada pela massa do méson D^0 no vácuo. Considerações análogas seguem para os estados $(b - \bar{d})$, e a massa como função do campo magnético também é mostrada nas Figuras 1.6 e 1.7. Como pode ser visto, a interação do spin com o campo magnético pode alterar a massa desses estados. Qualitativamente, os resultados estão em concordância com o cálculo relativístico para mésons leves como pode ser visto em [12].

Nas figuras, podemos observar uma significativa alteração da massa na região do campo estimado para o LHC ($eB \sim 15m_\pi^2 \sim 0.3 \text{ GeV}^2$). Para campos magnéticos fortes ($eB \gg \mu^2$) os estados com massa maior são menos prováveis de serem produzidos. Comparando (1.20) e (1.26), concluímos que os mésons D^0 e D^{*0} tornam-se degenerados. No que segue, vamos estudar os estados de menor energia, isto é, $|\downarrow\downarrow\rangle$ e $|\uparrow\downarrow\rangle$ no caso do sistema $(c - \bar{u})$.

Nas Figuras 1.6 e 1.7 mostramos os resultados para os sistemas $(c - \bar{u})$ e $(b - \bar{d})$ com o potencial de Cornell e nas Figuras 1.8 e 1.9, com o potencial tipo coulombiano, ($V(\rho) = -\kappa/\rho$), que corresponde ao sistema no *Plasma de Quarks e Glúons*.

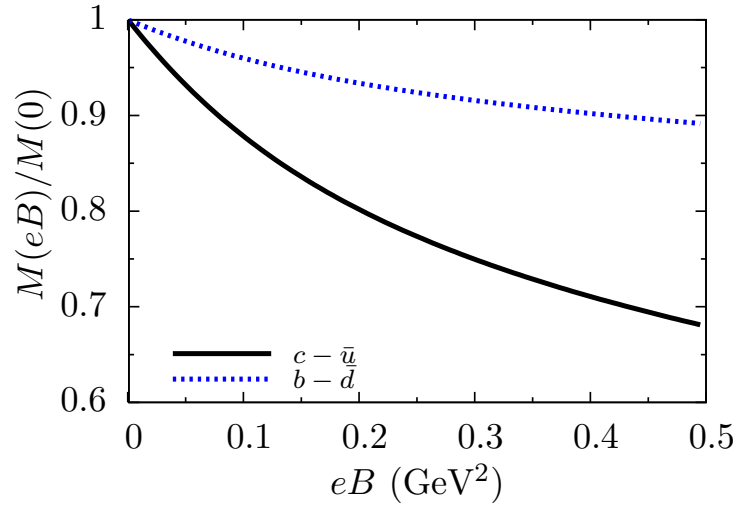


Figura 1.6: Massa dos estados $(c - \bar{u})$ e $(b - \bar{d})$ interagindo através do potencial de Cornell na configuração de spin de menor energia, em função do campo magnético calculada com o método semi-clássico.

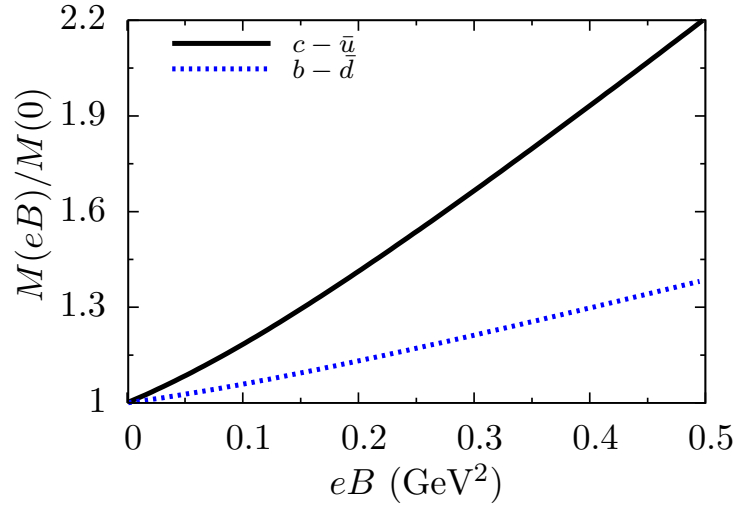


Figura 1.7: Massa dos estados $(c - \bar{u})$ e $(b - \bar{d})$ interagindo através do potencial de Cornell na configuração de spin de maior energia, em função do campo magnético calculada com o método semiclassico.

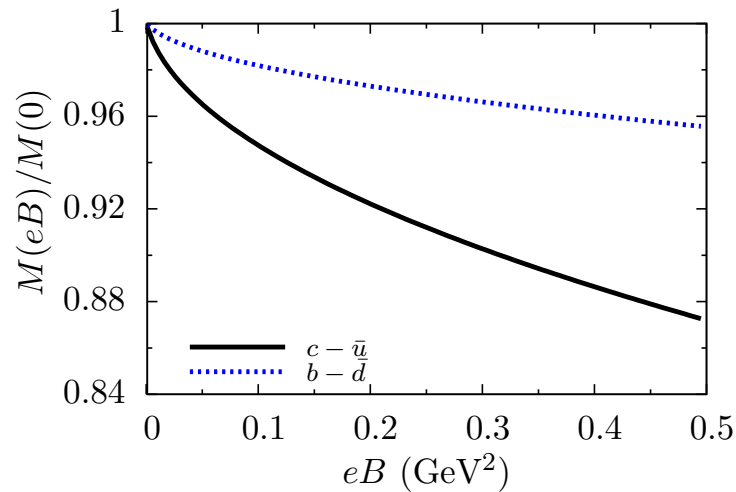


Figura 1.8: Massa dos estados $(c - \bar{u})$ e $(b - \bar{d})$ interagindo através do potencial tipo coulombiano na configuração de spin de menor energia, em função do campo magnético calculada com o método semiclassico.

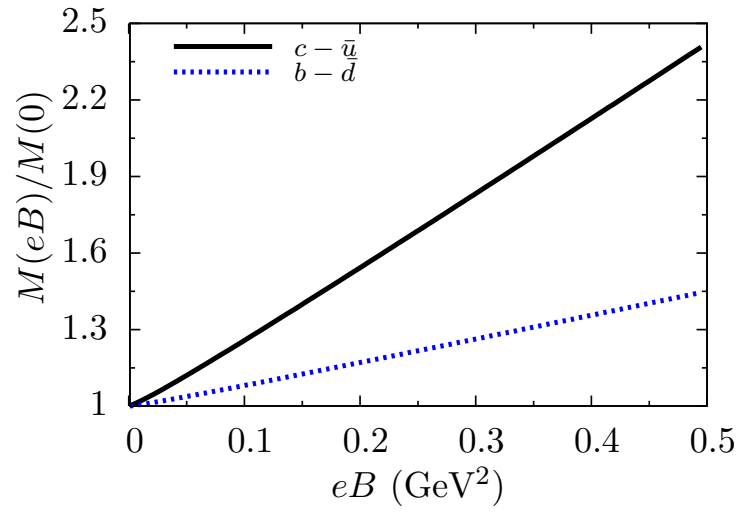


Figura 1.9: Massa dos estados $(c - \bar{u})$ e $(b - \bar{d})$ interagindo através do potencial tipo coulombiano na configuração de spin de maior energia, em função do campo magnético calculada com o método semiclassico.

Capítulo 2

Movimento em um Campo Magnético Externo

A introdução do campo magnético na equação de Schrödinger¹ resulta em um termo extra da mesma forma do potencial de um oscilador harmônico, o que leva a quantização dos níveis de energia no plano perpendicular à direção do campo magnético, chamados de *níveis de Landau*. Neste capítulo, obtemos a solução do elétron livre e do elétron em um potencial quadrático sob efeito de um campo magnético externo.

2.1 A Equação de Schrödinger e o Campo Magnético

Vamos agora voltar à equação (1.7) e escolher de maneira conveniente $\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ e $\Phi = 0$, de tal forma que o campo magnético resultante esteja na direção do eixo z . Assim, obtemos a seguinte expressão:

$$H = \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p}_x + qBy)^2 + \mathbf{p}_y^2 + \mathbf{p}_z^2 \right] - \left(\frac{q}{2m} \right) \sigma_z B, \quad (2.1)$$

onde usamos (1.8) com $g = 2$ e $\sigma_z = \pm 1$ é a projeção do spin no eixo z . Portanto,

$$\left[-\frac{1}{2m} \nabla^2 + \frac{iqBy}{m} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{q^2 B^2}{2m} y^2 - \left(\frac{q}{2m} \right) \sigma_z B \right] \psi = E \psi. \quad (2.2)$$

Como os operadores \mathbf{p}_x e \mathbf{p}_z comutam com a hamiltoniana, temos que essas componentes do momento generalizado são conservadas. Assim, a solução pode

¹A formulação da equação de Schrödinger que leva em conta o termo de interação do spin com o campo magnético é conhecida como *equação de Pauli* ou *equação de Schrödinger-Pauli*.

ser dada por:

$$\Psi(x, y, z) = e^{i(p_x x + p_z z)} \chi(y). \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) na equação (2.2), obtemos:

$$\chi''(y) + 2m \left[\left(E + g \left(\frac{q}{2m} \right) \sigma_z B - \frac{p_z^2}{2m} \right) - \frac{1}{2} m \omega_H (y - y_0)^2 \right] \chi(y) = 0, \quad (2.4)$$

onde definimos,

$$\omega_H \equiv \frac{|qB|}{m} \quad y_0 \equiv -\frac{c p_x}{|qB|}. \quad (2.5)$$

Podemos observar que a equação é análoga à do oscilador quântico que é dada por:

$$\Psi''(x) + 2m \left(E - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) \Psi(x) = 0. \quad (2.6)$$

A energia e a função de onda são:

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (2.7)$$

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi} \right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2} H_n(\sqrt{m\omega} x), \quad (2.8)$$

onde H_n são os polinômios de Hermite. Utilizando esse resultado, podemos escrever a energia e a função de onda no caso da partícula sob influência do campo magnético externo. Dessa forma, temos:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega_H + \frac{p_z^2}{2m} - \left(\frac{q}{2m} \right) \sigma_z B, \quad (2.9)$$

$$\chi_n(y) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{a_H 2^n n!}} e^{-(y-y_0)^2/(2a_H^2)} H_n \left(\frac{y-y_0}{a_H} \right), \quad (2.10)$$

onde

$$a_H = \sqrt{\frac{m}{\omega_H}} = \frac{1}{\sqrt{|qB|}} \quad (2.11)$$

caracteriza o efeito do campo magnético. Como a partícula tem uma certa velocidade, ao ligar o campo externo ela começa a circular dando origem a um movimento limitado e conseqüentemente à quantização dos níveis de energia. O primeiro termo de (2.22) resulta em valores discretos, referentes ao movimento perpendicular ao campo e são chamados de *níveis de Landau*.

2.1.1 Solução para o elétron livre

Analisando a expressão para os níveis de energia obtida anteriormente, podemos observar que o campo magnético externo quebra a simetria do problema. No plano transversal ao campo temos o movimento quantizado da partícula como no oscilador harmônico, isto é, os *níveis de Landau*. Já na direção paralela ao campo a partícula se movimenta como uma partícula livre. Tendo isso em vista, podemos resolver o problema de um elétron sob influência do campo magnético uniforme utilizando coordenadas cilíndricas. Associamos o número quântico m_ϕ à coordenada angular e n_ρ à coordenada radial. Vamos utilizar $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$ e $\Phi = 0$, isto é, $A_\phi = B\rho/2$, $A_\rho = A_z = \Phi = 0$. A hamiltoniana é então escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2m}\nabla^2 + \frac{q^2}{2m}\left(\frac{B\rho}{2}\right)^2 - \frac{qB}{4mi}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{qB\sigma_z}{2m}. \quad (2.12)$$

A equação de Schrödinger é dada por:

$$-\frac{1}{2m}\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{2}i\omega_H\frac{\partial\psi}{\partial\phi} + \frac{1}{8}m\omega_H^2\rho^2\psi - \frac{qB}{2m}\sigma_z\psi = (E - V)\psi, \quad (2.13)$$

onde m é a massa do elétron. Como foi feito anteriormente, vamos supor uma solução da forma:

$$\psi = R(\rho)e^{im_\phi\phi}e^{ip_z z}\varphi_\sigma(\sigma_z). \quad (2.14)$$

Com isso, obtemos uma nova equação para $R(\rho)$:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2m}\left(R'' + \frac{R'}{\rho} - \frac{m_\phi^2 R}{\rho^2}\right) + \frac{1}{8}m\omega_H^2\rho^2 R \\ &= \left(E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{1}{2}\omega_H m_\phi - \frac{1}{2}\omega_H\sigma_z\right)R. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Fazemos a seguinte mudança de variável,

$$\xi \equiv \frac{m_\phi\omega_H\rho^2}{2}, \quad (2.16)$$

$$\beta \equiv \frac{1}{\omega_H}\left(E - \frac{p_z^2}{2m}\right) - \frac{m_\phi}{2} - \frac{\sigma_z}{2}. \quad (2.17)$$

Reescrevendo a equação (2.15), temos:

$$R'' + \frac{R'}{\xi} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\beta}{\xi} - \frac{m_\phi^2}{4\xi^2} \right) R = 0. \quad (2.18)$$

Obtemos assim a equação diferencial de Whittaker (Apêndice B). As soluções podem ser dadas em termos das *Funções Hipergeométricas Confluentes*. Isto pode ser visto através do comportamento assintótico da solução:

- $\xi \rightarrow \infty \Rightarrow R'' \sim R/4$, logo, $R \sim e^{\xi/2}$.
- $\xi \rightarrow 0 \Rightarrow R'' \sim m^2 R/(4\xi)$, logo, $R \sim \xi^{|m|/2}$.

Desta forma, temos uma solução do tipo $R(\xi) = e^{\xi/2} \xi^{|m|/2} \omega(\xi)$. Substituindo essa solução em (2.18), obtemos a equação da forma:

$$\alpha \omega'' + (\eta - z) \omega' - \alpha \omega = 0. \quad (2.19)$$

A solução dessa equação é dada pela *Função Hipergeométrica Confluyente*:

$$F\{\alpha, \eta, z\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k z^k}{(\eta)_k k!}, \quad (2.20)$$

onde $(x)_k = x(x+1)\dots(x+k)$. A função $F\{\alpha, \eta, z\}$ apresenta as seguintes propriedades:

- a série converge apenas para valores finitos de z ;
- η não pode ser zero, nem um valor inteiro negativo;
- α é arbitrário;
- F é um polinômio quando α é um inteiro negativo.

No caso da equação (2.18), obtemos que:

$$\omega = F\left\{ -\left(\beta - \frac{|m_\phi|}{2} - \frac{1}{2} \right), |m_\phi| + 1, \xi \right\}. \quad (2.21)$$

Das propriedades dessas funções, concluímos que $(\beta - |m_\phi|/2 - 1/2)$ deve ser um inteiro não-negativo n_p para a função de onda ser sempre finita. Assim, utilizando a expressão de β dada em (2.17), concluímos que a energia é dada por,

$$E_{n_p m_\phi \sigma_z} = \left(n_p + \frac{|m_\phi| + m_\phi + 1 + \sigma_z}{2} \right) \omega_H + \frac{p_z^2}{2m}, \quad (2.22)$$

e a função de onda radial,

$$R_{n_\rho m_\phi}(\rho) = \frac{1}{a_H^{1+|m_\phi|} |m_\phi|!} \sqrt{\frac{(|m_\phi| + n_\rho)!}{2^{|m_\phi|} n_\rho!}} e^{-\rho^2/4a_H^2} \rho^{|m_\phi|} F\left(-n_\rho, |m_\phi| + 1, \frac{\rho^2}{2a_H^2}\right), \quad (2.23)$$

onde $a_H = (|eB|)^{-1/2}$ e $m_\phi = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. A normalização para a função de onda é obtida através de:

$$\int_0^\infty R^2(\rho) d^2\rho = 1. \quad (2.24)$$

Observamos em (2.22) que sem o termo de acoplamento do spin com o campo magnético, temos uma torre de estados não-degenerados como ocorre para o oscilador harmônico. Porém, quando acrescentamos o termo de spin temos que o estado fundamental ($n_\rho = 0$ e $m_\phi = 0$), denominado *Lowest Landau Level* (LLL), é o único estado não-degenerado (apenas com uma projeção de spin possível, isto é $\sigma_z = -1$). A função de onda radial desse estado é dada por:

$$R_{00}(\rho) = \frac{e^{-\rho^2/4a_H^2}}{a_H}. \quad (2.25)$$

Os demais estados serão duplamente degenerados, como pode ser visto na Figura 2.1.

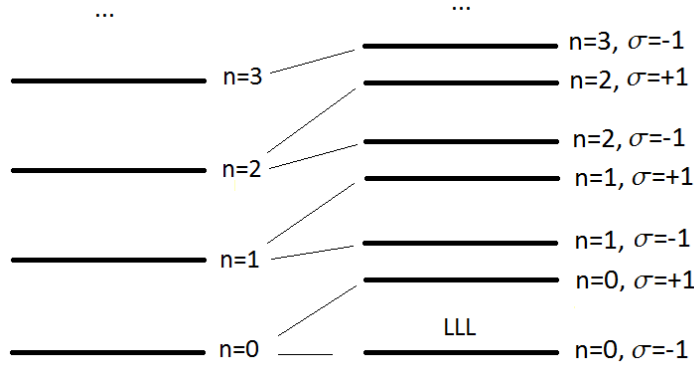


Figura 2.1: Degenerescência dos níveis de Landau devido à adição do termo de acoplamento do spin com o campo magnético.

É fácil notar que quanto maior o campo magnético, maior será a separação entre o LLL dos outros níveis, visto que $E_1 - E_0 = |eB|/m$. Assim, para $|eB| \gg m^2$ é justificável usarmos apenas o LLL.

Isto mostra um efeito associado ao campo magnético chamado de “*Redução Dimensional*” (discutido em detalhes em [13]). A equação de Dirac com o campo

magnético externo (na direção z) resulta no seguinte espectro de energia fermiônico em (3+1) dimensões:

$$E_n = \pm \sqrt{m^2 + 2|eB|n + p_z^2}. \quad (2.26)$$

Quando tratamos o limite $|eB| \gg m^2$, podemos tratar apenas o LLL. Neste caso, o espectro é dado por $E_n = \pm \sqrt{m^2 + p_z^2}$, que corresponde ao espectro de uma teoria quântica de campos em (1+1) dimensões. Do ponto de vista físico, essa redução dimensional é consequência da restrição do movimento das partículas no plano perpendicular ao campo magnético.

2.1.2 Solução para o elétron em um potencial harmônico bidimensional

Estamos interessados em estudar o caso de estados ligados em um campo magnético. Porém, o cálculo para o potencial de Cornell só pode ser feito numericamente. Para entendermos melhor os efeitos do campo, estudaremos o elétron em um potencial harmônico bidimensional na presença de um campo magnético externo que possui uma solução analítica e será útil para compararmos com a solução numérica. Vamos utilizar o potencial $V(\mathbf{r}) = m\omega_0^2(x^2 + y^2)/2 = m\omega_0^2\rho^2/2$, onde $m\omega_0^2$ é definido como a constante elástica. Incluindo o potencial na equação (2.15), temos que:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m} \left(R'' + \frac{R'}{\rho} - \frac{m_\phi^2 R}{\rho^2} \right) + \frac{m}{2} \left(\omega_0^2 + \frac{\omega_H^2}{4} \right) \rho^2 R \\ = \left(E - \frac{p_z^2}{2m} - \frac{1}{2}\omega_H m_\phi - \frac{1}{2}\omega_H \sigma_z \right) R, \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $R = R(\rho)$. Podemos observar que temos a mesma equação obtida anteriormente com a substituição:

$$\omega_H \rightarrow \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_H^2}{4}}. \quad (2.28)$$

Assim, a energia é dada por:

$$E_{n_\rho m_\phi \sigma_z} = \left(n_\rho + \frac{|m_\phi| + m_\phi + 1 + \sigma_z}{2} \right) \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_H^2}{4}} + \frac{p_z^2}{2m}, \quad (2.29)$$

onde $\omega_H = |eB|/m$ e usamos o momento giromagnético $g_e = 2$.

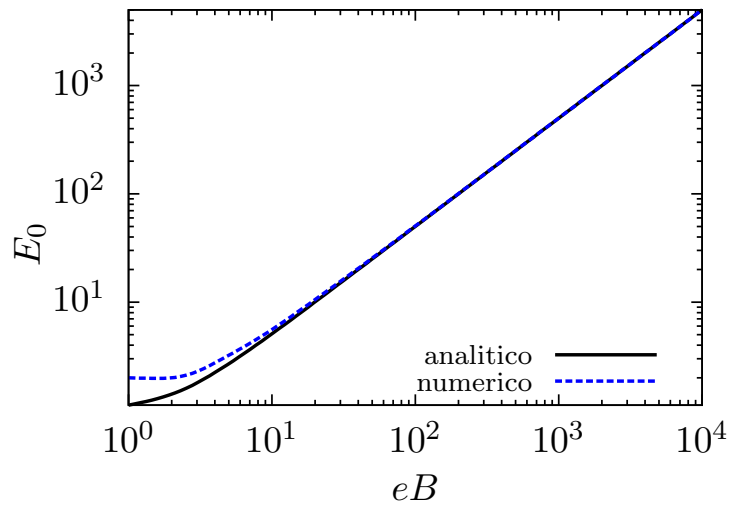


Figura 2.2: Variação da energia com o campo magnético para o potencial de um oscilador harmônico com $m = 1$ e $\omega_0 = 1$.

Observamos na Figura 2.2 que o resultado numérico obtido com o método espectral unidimensional (Apêndice C) concorda com o resultado analítico para campo magnético forte ($eB \gg m^2$) como era esperado, uma vez que usamos a função de onda radial do LLL (2.25) para resolver a equação numericamente. Discutiremos essa questão com mais detalhes no próximo capítulo.

Capítulo 3

O Átomo de Hidrogênio

Vamos tratar o átomo de hidrogênio em um campo magnético forte usando três métodos diferentes. O primeiro consiste na aproximação feita por Landau [9] e como veremos adiante, esse método possui limitações. Outra solução analítica aproximada foi proposta por Karnakov e Popov [14] e resolve os problemas da aproximação de Landau. Por último, resolvemos a equação numericamente usando o método espectral (Apêndice C) e comparamos os resultados com as aproximações citadas. Encontramos uma boa concordância entre o método numérico e o método de Karnakov-Popov.

3.1 O Átomo de Hidrogênio em um Campo Magnético

Como foi observado quando resolvemos a equação de Schrödinger em um campo magnético, o campo quebra a simetria esférica do problema introduzindo uma direção privilegiada no espaço. No plano transversal ao campo temos uma solução como a do oscilador harmônico, onde aparecem os níveis de Landau. No plano paralelo ao campo a partícula se movimenta livremente e não temos quantização dos níveis de energia.

Como descrevemos no capítulo anterior, ao resolver a equação de Schrödinger com o campo magnético escrevemos a função de onda como $\Psi \sim \chi(\rho, z)e^{im_\phi\phi}$.

Nesse caso, podemos substituir a função de onda na equação (2.13) e obtemos a seguinte equação bidimensional (para $m_\phi = 0$):

$$-\frac{1}{2m} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \chi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{8} m \omega_H^2 \rho^2 \chi - \frac{|qB|}{2m} \sigma_z \chi = (E - V(\rho, z)) \chi. \quad (3.1)$$

Porém, do ponto de vista numérico essa equação é mais complicada de ser resolvida. Uma alternativa é trabalhar no regime de campo magnético forte, onde

podemos aproximar a função de onda radial pelo LLL, como já foi discutido anteriormente. A vantagem é reduzir o problema inicialmente bidimensional para um problema unidimensional que é mais fácil de ser resolvido numericamente.

Em vista disto, ao incluir o potencial coulombiano vamos utilizar a aproximação adiabática $a_H \ll a_B$ [15] (onde a_H é dado por (2.11) e $a_B = 1/(me^2)$ é o raio de Bohr), restringindo o movimento na direção do campo, o que garante que podemos tratar o nível mais baixo de Landau (LLL). Assim, a função de onda deve ter a seguinte forma:

$$\Psi(\rho, z) = R_{00}(\rho)\chi(z). \quad (3.2)$$

onde $\chi(z)$ é a solução da equação de Schrödinger para o elétron na direção do campo magnético. Substituindo (3.2) na equação diferencial (2.13), obtemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m} \left(R_{00}''\chi(z) + \frac{R_{00}'}{\rho}\chi(z) + R_{00}\chi(z)'' \right) + \frac{1}{8}m\omega_H^2\rho^2 R_{00}\chi(z) \\ = \left(E - \frac{1}{2}\omega_H\sigma_z - V(\rho, z) \right) R_{00}\chi(z). \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde as derivadas são com respeito a ρ . Multiplicando a equação por $R_{00}(\rho)\rho$, integrando de 0 à ∞ e utilizando a relação de normalização para R_{00} (2.24), temos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2m} \left\{ \left[\int_0^\infty (R_{00}''R_{00}\rho + R_{00}R_{00}') d\rho \right] \chi(z) + \chi(z)'' \right\} + \\ \frac{1}{8}m\omega^2 \left(\int_0^\infty R_{00}^2\rho^3 d\rho \right) \chi(z) = \left(E - \frac{1}{2}\omega_H\sigma_z - V_{eff}(z) \right) \chi(z), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde definimos um potencial efetivo como sendo,

$$V_{eff}(z) = \int_0^\infty R_{00}^2(\rho)V(\sqrt{z^2 + \rho^2})\rho d\rho. \quad (3.5)$$

Substituindo explicitamente R_{00} , dado pela equação (2.25), e realizando as integrais, obtemos:

$$-\frac{1}{2m} \left(\chi(z)'' - \frac{1}{2a_H^2}\chi(z) \right) + \frac{1}{4}m\omega^2 a_H^2 \chi(z) = \left(E - \frac{1}{2}\omega_H\sigma_z - V_{eff}(z) \right) \chi(z). \quad (3.6)$$

Podemos utilizar a_H definido em (2.11) e $\sigma_z = -1$, assim:

$$-\frac{1}{2m}\chi(z)'' + V_{eff}(z)\chi(z) = E\chi(z) \quad (3.7)$$

onde m é a massa reduzida ¹. Como queremos obter a energia do estado fundamental precisamos resolver esta equação. Vamos discutir três métodos de resolução e comparar os resultados.

¹A massa reduzida do sistema, $\mu = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e}$, vai ser dada por $\mu = m_e$, pois $m_p \gg m_e$. Vamos usar $m_e \equiv m$ e também $e = |e|$ para simplificar a notação.

3.1.1 Aproximação de Landau

Nessa aproximação vamos tratar o potencial como uma perturbação na presença do campo magnético forte. Então, podemos usar que:

$$V_{eff}\chi \gg E\chi \approx 0, \quad (3.8)$$

$$V_{eff}\chi = V_{eff}. \quad (3.9)$$

Assim, a equação (3.7) pode ser escrita como:

$$\frac{d^2\chi}{dz^2} = 2mV_{eff}(z). \quad (3.10)$$

Integrando a equação acima obtemos:

$$\chi'(a) = 2m \int_0^a V_{eff}\chi(z)dz \quad (3.11)$$

onde assumimos que $V_{eff}(z) = V_{eff}(-z)$ e a é o alcance do potencial (no caso $|V_{eff}| \ll 1/(ma^2)$). Além disso, vamos supor que o alcance do potencial é finito ($U(z) \neq 0$ para $-a < z < a$) e que a função de onda χ é aproximadamente constante dentro do poço. Visto que fora do poço podemos considerar a solução $\chi(z) \sim e^{\sqrt{2m|E|}z}$, temos:

$$|E| = \frac{m}{2} \left[\int_0^\infty V_{eff}(z)dz \right]^2. \quad (3.12)$$

Sabemos de (2.25) que R_{00} cai exponencialmente com ρ , então para $\rho \sim a_H \Rightarrow R_{00} \sim \text{constante}$. Se o campo é muito forte vale que $a_H \ll a$, a integral em ρ vai ser dominada por $\rho \lesssim a_H$ e podemos usar que $V(\sqrt{z^2 + \rho^2}) \sim V(z)$.

Então, para o potencial coulombiano temos $V(z) = -e^2/|z|$ para $z \gg a_H$. A princípio o alcance do potencial não é finito e a integral deveria ser realizada no intervalo $0 < z < \infty$. Porém, isso introduz divergências nos dois extremos. Em [9], esse problema é resolvido introduzindo cortes nos limites de integração. Como a função de onda $\chi(z)$ não varia muito até $|z| \sim a_B$ (onde assumimos que $a = a_B = 1/(me^2)$ sendo este o raio de Bohr), pois é a região de alcance do potencial, o limite superior da integral é fixado em a_B . Por outro lado, a_H é inversamente proporcional ao campo e estamos no limite de campo forte, ou seja a_H é a escolha natural para o limite inferior da integral. Dessa forma,

$$|E| = \frac{m}{2} \left[\int_{a_H}^{a_B} \frac{-e^2}{|z|} dz \right]^2. \quad (3.13)$$

Assim, obtemos que:

$$E = -2me^4 \ln^2 \left(\frac{a_B}{a_H} \right) = -\frac{me^4}{2} \ln^2 \left(\frac{eB}{m^2 e^4} \right). \quad (3.14)$$

Vale notar que para chegar até esse ponto assumimos a aproximação de poço raso ($|E| \ll |V_{eff}|$) e que a variação de χ no poço é pequena ($\Delta\chi/\chi \sim m|V|a^2 \ll 1$). Contudo, para o potencial de Coulomb unidimensional essa condição só é satisfeita para $a \ll 1/(me^2) = a_B$, como discutido em [16]. Por outro lado, a condição de campo forte impõe $a_H \ll a_B$. Logo, o alcance do potencial deve obedecer $a_H \ll a \ll a_B$ para o problema poder ser tratado perturbativamente, o que está em desacordo com o corte feito na integral. Desta forma, podemos ver que o corte em a_B na integral não tem sentido físico o que explica a falta de precisão nos resultados obtidos que serão mostrados adiante.

3.1.2 Aproximação de Karnakov-Popov

Uma alternativa para resolver o problema de forma analítica, sem ter o problema do corte que aparece na solução de Landau, é a equação de Karnakov-Popov. A principal diferença é que a integral é feita até z onde $a_H \ll z \ll a_B$, isto é, não fixamos o limite superior em um valor. Temos que:

$$\begin{aligned} \chi'(z) &= -2me^2 \int_0^z dx \int_0^\infty \frac{|R_{0m_\phi}(\rho)|^2}{\sqrt{x^2 + \rho^2}} d^2\rho \\ &= -2m \int_0^\infty \ln \left(\frac{z}{\rho} + \sqrt{\frac{z^2}{\rho^2} + 1} \right) |R_{0m_\phi}(\rho)|^2 d^2\rho. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Para $\rho > a_H$, R_{0m_ϕ} decresce exponencialmente e como $z \gg a_H$ então ρ/z é pequeno, podemos expandir o logaritmo e negligenciar termos de ordem superior. Portanto,

$$\chi'(z) = -2me^2 \int_0^\infty \left[\ln \left(\frac{2a_H}{\rho} \right) |R_{0m_\phi}(\rho)|^2 + \ln \left(\frac{z}{a_H} \right) \right] d^2\rho. \quad (3.16)$$

O primeiro termo que depende de R_{0m_ϕ} pode ser calculado explicitamente usando a expressão (2.23). Vamos definir $A_{0|m_\phi|}$ como:

$$\chi'(z) = A_{0|m_\phi|} - 2me^2 \ln \left(\frac{z}{a_H} \right). \quad (3.17)$$

Fazendo a mudança de variável $x = \rho^2/(2a_H^2)$, obtemos

$$\begin{aligned} A_{0|m_\phi|} &= -me^2 \left[\ln 2 - \int_0^\infty dx x^{|m_\phi|} \ln x \frac{e^{-x}}{|m_\phi|!} \right] \\ &= -me^2 [\ln 2 - \psi(1 + |m_\phi|)], \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde ψ é a derivada logarítmica da função Γ .

Para obter a energia vamos usar o fato de que para $z \rightarrow \infty$, a função de onda pode ser aproximada pela solução da equação de Schrödinger com o potencial coulombiano. A equação para a parte radial que queremos resolver é dada por:

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \chi + 2m \left(E + \frac{e^2}{r} \right) \chi = 0 \quad (3.19)$$

onde usamos que $V(r) = -e^2/r$ e vai ser útil as seguintes mudanças de variável: $\nu = -1/\sqrt{-2E}$ e $\lambda = \sqrt{-2E}$.

A solução desta equação é dada pelo função de Whittaker (Apêndice B), isto é, $\chi(z) \sim W_{\nu, 1/2}(2z\nu)$, onde $\nu = 1/\lambda$ e

$$E = -\frac{me^4\lambda^2}{2}. \quad (3.20)$$

Da condição $\chi' = W'/W$ e da forma da função de Whittaker para $z \ll a_B$, temos que [14]:

$$\frac{W'}{W} = -me^2 \left[2\ln\left(\frac{z}{a_B}\right) + \lambda + 2\psi\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + 4\psi(1) + 2\ln 2 \right]. \quad (3.21)$$

Escrevendo todos os termos obtemos a seguinte equação implícita para a energia:

$$\begin{aligned} 2\ln\left(\frac{z}{a_B}\right) + \lambda + 2\ln\lambda + 2\psi\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) + 4\psi(1) + 2\ln 2 \\ = 2\ln\left(\frac{z}{a_H}\right) + \ln 2 - \psi(1 + |m_\phi|). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Para o estado fundamental $m_\phi = 0$ (LLL), a seguinte aproximação é válida no limite de campo forte (expansão para $\lambda \rightarrow \infty$):

$$\psi\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \psi(1) - \frac{\pi^2}{6\lambda} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \quad (3.23)$$

Assim, em termos de (eB) e $\alpha = e^2 = 1/137$, temos que:

$$\ln(eB) = \lambda + 2 \ln \lambda + \psi(1) - \frac{\pi^2}{3\lambda} + \ln 2 + \ln(\alpha^2 m^2), \quad (3.24)$$

onde $E = -me^4 \lambda^2 / 2$. Desta forma, encontramos uma equação implícita para os níveis de energia do átomo de hidrogênio em função do campo magnético externo.

3.1.3 Cálculo numérico

Para compararmos com os métodos analíticos resolvemos o problema do átomo de hidrogênio em um campo magnético numericamente usando o método espectral (Apêndice C). O método consiste em aproximar a solução de uma equação diferencial como uma combinação de funções contínuas e periódicas. No caso, queremos que as condições de contorno sejam $\chi(-L) = \chi(L) = 0$, o que corresponde à função de onda indo a zero no infinito. Assim, uma base adequada é dada por:

$$\chi(z) = \sum_{n=1}^b A_n \sin \left[\frac{n\pi}{2L} (z+L) \right], \quad (3.25)$$

sendo a solução válida de $-L < z < L$. Dois parâmetros importantes para o cálculo numérico são o número de bases de seno (b) e a região em que estamos buscando a solução (L).

Como primeira aproximação tomamos o limite de campo forte e resolvemos a equação de Schrödinger unidimensional, supondo que no plano transversal ao campo a solução é dada pela função de onda da partícula livre no campo (R_{00}), já na direção paralela ao campo, temos um potencial efetivo que vem do efeito do campo magnético e do potencial coulombiano. Assim, queremos resolver a equação (3.7) com o potencial efetivo definido em (3.5).

Resolvendo numericamente com o método espectral, precisamos determinar os parâmetros b e L adequados para a solução. Para isso, comparamos a solução numérica com a obtida com o método de Karnakov-Popov e observamos a variação com b e L .

Aumentando o intervalo em que buscamos a solução (L , dado em múltiplos do raio de Bohr a_B), também temos que aumentar o número de bases (b) para obter um bom resultado para campos magnéticos fortes. No caso, vemos na Figura (3.1) que as soluções começam a diferir a partir de $eB \sim 10^{-5} \text{ GeV}^2$, que já é um campo muito forte quando comparado com a escala do problema, dada pela massa do elétron ($eB/m^2 \sim 10^2$).

Por outro lado, para campos magnéticos fracos a aproximação unidimensional deixa de valer. Essa aproximação supõe que o potencial pode ser tratado como

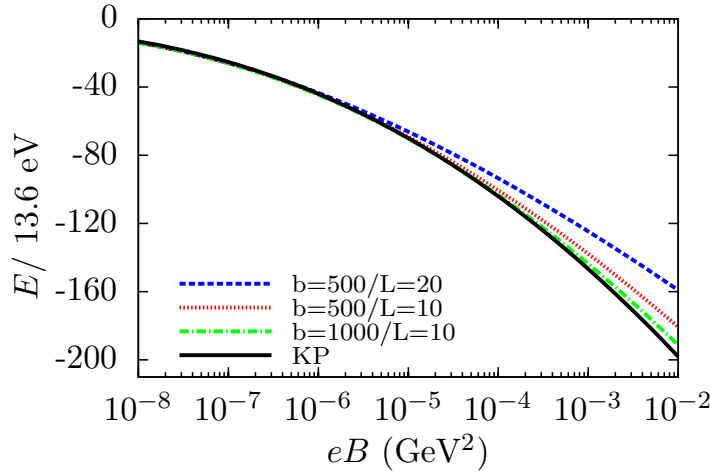


Figura 3.1: Energia de ligação do átomo de hidrogênio variando o campo magnético variando os parâmetros b e L da solução numérica e a comparação com o resultado obtido com o método de Karnakov-Popov.

uma perturbação, pois o campo magnético é muito intenso, o que implica em $a_H \ll a_B$. No caso limite $a_H = a_B$ obtemos $eB \sim 1.4 \cdot 10^{-11} \text{ GeV}^2$, ou seja, o programa unidimensional só deve funcionar no limite $eB \gg 10^{-11} \text{ GeV}^2$. Para obter resultados para campos magnéticos menores resolvemos a equação bidimensional, onde não precisamos usar a aproximação do LLL para a parte radial da função de onda. Nesse caso, resolvemos a equação (3.1) numericamente com o potencial de Coulomb.

A descrição do método espectral no caso da equação bidimensional pode ser vista em detalhes no (Apêndice C).

Observamos que para campos menores o resultado passa a diferir do obtido com a aproximação unidimensional. Porém, para campos magnéticos fortes as duas soluções devem coincidir.

A desvantagem de resolver a equação bidimensional é o tempo computacional, que passa a ser muito maior. Vamos utilizar uma solução com 80 bases na direção z e 40 bases na direção r , que já será suficiente para obtermos resultados satisfatórios na região de interesse, como pode ser visto na Figura 3.2.

3.2 Comparação dos métodos

Na Figura 3.3 podemos observar o comportamento da energia de ligação do átomo do hidrogênio com o campo magnético. Como foi discutido anteriormente, vemos que a aproximação de Landau não possui boa precisão devido aos cortes feitos nos limites da integral.

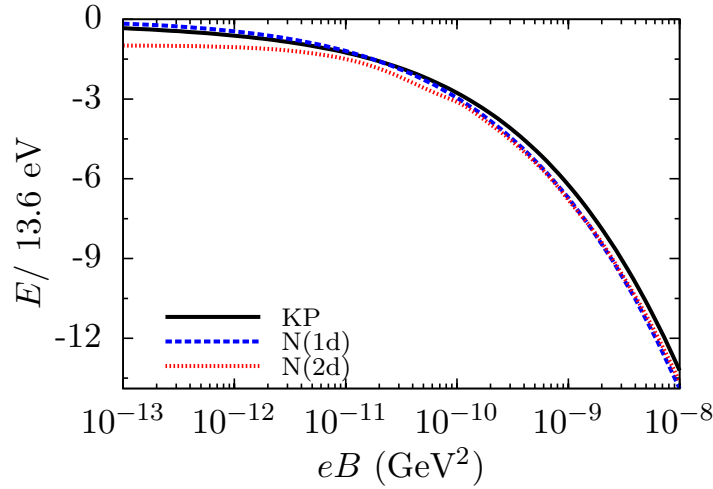


Figura 3.2: Energia de ligação do átomo de hidrogênio variando o campo magnético para a solução numérica unidimensional, bidimensional e o resultado obtido com o método de Karnakov-Popov.

Os resultados apresentados para o programa unidimensional correspondem a $b = 1000$ bases e $L = 20$.

Quando o campo magnético é ligado os elétrons que possuem uma certa velocidade começam a circular dando origem a um movimento limitado que possui níveis discretos de energia, isto é, os níveis de Landau. Isso é visto na equação obtida, que é análoga à do oscilador harmônico. Uma consequência é que o problema inicialmente tridimensional pode ser visto como um problema bidimensional. No plano transversal ao campo magnético a função de onda do elétron fica concentrada e a escala relevante passa a ser $a_H = 1/\sqrt{eB}$. Já na direção paralela ao campo magnético temos a solução usual do átomo de hidrogênio e a escala relevante é $a_B = 1/(me^2)$. Como resultado da função de onda mais localizada, temos um estado mais ligado isto é, ele “afunda” no poço de potencial e a energia de ligação fica mais negativa.

É importante notar que os cálculos foram feitos para o caso em que $\sigma_z = -1$ (também estudado em [16]).

No estudo dos mésons com um quark pesado optamos por fazer a solução numérica da equação bidimensional, uma vez que os campos magnéticos de interesse são da mesma ordem de grandeza da massa reduzida do sistema ($eB \sim 0.3 \text{ GeV}^2$ e $\mu \sim m_{d,u} \sim 0.2 \text{ GeV}^2$).

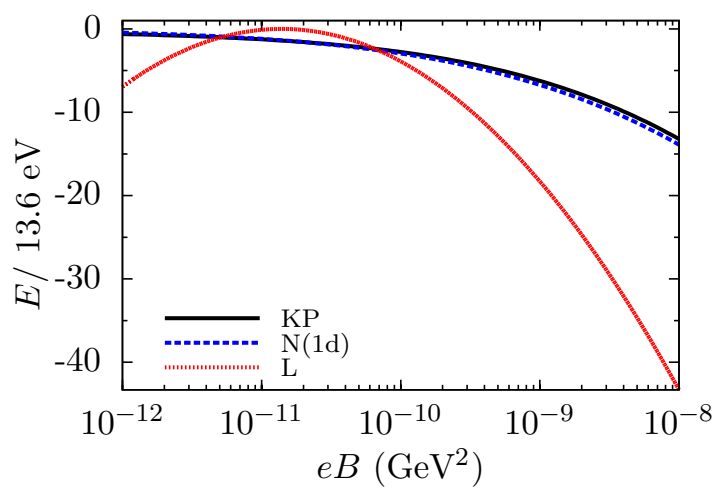


Figura 3.3: Comparação entre os métodos para a energia de ligação do átomo de hidrogênio variando o campo magnético.

Capítulo 4

Os Mésons B e D

O estudo da espectroscopia dos mésons deve ser feito com métodos não-perturbativos. O modelo de potencial propõe uma estrutura simples para a interação entre os quarks e parametriza os efeitos não-perturbativos. No caso do *quarkonium* pesado resultados satisfatórios são obtidos para as massas e constantes de decaimento usando o modelo de potencial e uma abordagem não-relativística. Vamos usar esse formalismo para os mésons B e D, que contêm um quark pesado e um quark leve.

Modificamos a equação de Schrödinger com a introdução do campo magnético externo e a resolvemos com um potencial que descreve bem o espectro de massa dos mésons, chamado *Potencial de Cornell*. O efeito de redução na massa desses estados é observado, confirmando o efeito que discutimos na introdução com o modelo semi-clássico.

4.1 Os Mésons B e D em um Campo Magnético

O modelo de potencial pode ser usado para descrever o espectro de massas de mésons pesados com uma boa concordância com os dados experimentais. O *Potencial de Cornell* (Apêndice D) parametriza a interação entre quark e antiquark como uma combinação de um potencial tipo coulombiano ($\sim 1/r$) proveniente da troca de um glúon e de uma parte linear ($\sim r$) que corresponde ao termo de confinamento, que é observado em simulações de *QCD na rede*. Temos então:

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r} + \sigma r + C. \quad (4.1)$$

Em uma das primeiras aplicações do potencial de Cornell [17],[18] foi obtida uma boa concordância com os dados experimentais com os parâmetros $\kappa = 0.52$, $\sigma = 0.183 \text{ GeV}^2$ e $m_c = 1.84 \text{ GeV}$ para descrever a espectroscopia do *charmonium* ($c\bar{c}$).

Estamos interessados em estudar os mésons B e D que, por terem um quark leve e um pesado, são sistemas análogos ao átomo de hidrogênio e podemos usar o mesmo formalismo utilizado anteriormente. Além disso, por terem um quark pesado ainda podemos usar a aproximação não-relativística para descrevê-los.

Para analisarmos a mudança nas massas dos estados $(c - \bar{u})$ e $(b - \bar{d})$ usamos os parâmetros: $m_c = 1.37 \text{ GeV}$, $m_b = 4.79 \text{ GeV}$, $m_{u,d} = 0.20 \text{ GeV}$, $\kappa = 0.506$ e $\sigma = 0.1695 \text{ GeV}^2$ [19]. Ajustamos a constante C (aproximadamente 0.5 GeV) do potencial de modo a obtermos o valor experimental para a massa no caso em que $eB = 0$.

Também estudamos o caso em que $\sigma = 0$, que corresponde ao méson no *Plasma de Quarks e Glúons*¹. A escala de tempo da termalização do plasma e do campo magnético é a mesma, por isso é esperado que se ocorrer a formação do plasma, os quarks livres tenderão a formar mais estados ligados coulombianos devido ao efeito do campo magnético. Isso poderia ter efeito na taxa de produção dessas partículas, efeito que investigaremos adiante.

Os valores experimentais das massas são dados por: $m_{B^0} = 5279.50 \pm 0.30 \text{ MeV}$ e $m_{D^0} = 1864.80 \pm 0.14 \text{ MeV}$. Os mésons carregados B^* e D^* possuem massas próximas das massas dos mésons B^0 e D^0 , sendo a diferença da ordem de m_π . Como o campo magnético que estamos estudando é da mesma ordem ($eB \sim m_\pi^2$), a transição entre os estados B^0 e B^{0*} (D^0 e D^{0*}) é favorecida introduzindo uma degenerescência nesses estados. Estamos sempre nos referindo à combinação que resulta na menor energia para o sistema.

4.1.1 Variação da massa com o campo magnético

No caso do potencial de Cornell, resolvemos a equação de Schrödinger bidimensional (equação 3.1) usando o mesmo método já mostrado para o átomo de hidrogênio. No caso do potencial do tipo coulombiano, além da solução numérica, modificamos a solução analítica de Karnakov-Popov trocando a constante do potencial de e^2 para κ e mudando a massa reduzida do sistema. Com isso, conseguimos testar o programa nesse caso, uma vez que quando acrescentamos o termo linear só é possível obter a solução numericamente. Vale notar que o pequeno desvio entre a solução numérica e a de Karnakov-Popov vem basicamente da expansão da função ψ (derivada logarítmica da função Γ) mostrada em (3.23).

Estamos usando $\sigma_z = -1$ para o spin, que corresponde à configuração de menor energia. Os resultados para os estados $(c - \bar{u})$ são apresentados na Figura 4.1 e para os estados $(b - \bar{d})$ na Figura 4.2.

Observamos que na escala de interesse ($\sim 0.3 \text{ GeV}^2$ para o LHC), temos para

¹A discussão sobre os efeitos do campo magnético no Plasma de Quarks e Glúons pode ser encontrada em [20].

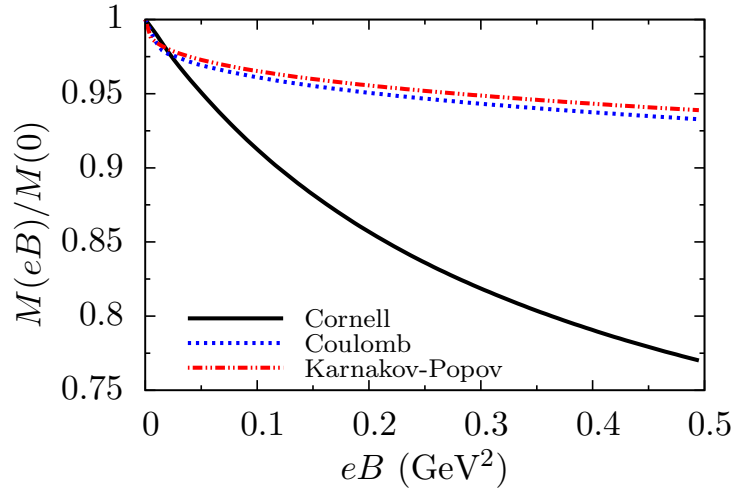


Figura 4.1: Massa dos estados $(c - \bar{u})$ em função do campo magnético normalizada pela massa em $eB = 0$. Curvas para o potencial de Cornell e para o potencial do tipo coulombiano com o cálculo numérico e a aproximação analítica de Karnakov-Popov.

os estados $(c - \bar{u})$ uma redução na massa de 5% quando consideramos o plasma e de 17% quando incluímos o termo de confinamento. Para os estados $(b - \bar{d})$ o efeito é menor, uma vez que sua massa é maior. Temos uma redução de 2% no plasma e de 6% com a inclusão do termo de confinamento.

Apesar das limitações do modelo, como estamos fazendo um tratamento não-relativístico e estamos fixando os parâmetros apenas utilizando a massa dos mésons sem o campo magnético, vemos que o efeito é significativo e que seria interessante desenvolver um estudo mais detalhado do fenômeno.

A principal fonte de erros do cálculo vem dos parâmetros escolhidos. Variamos um parâmetro em um valor máximo e um valor mínimo mantendo os demais fixos. O resultado para a variação de κ é mostrado na Figura 4.3, para a variação de σ na Figura 4.4 e para a variação da massa reduzida μ na Figura 4.5. Os gráficos foram feitos para os estados $(c - \bar{u})$ e o potencial de Cornell. O estudo para os estados $(b - \bar{d})$ e para o potencial coulombiano apresenta resultados análogos e omitiremos aqui.

Desta forma, obtemos uma estimativa grosseira para o erro. Vemos que apesar da ambiguidade na fixação dos parâmetros, o efeito de redução das massas ainda permanece sendo ele consequência do termo de acoplamento do spin com o campo magnético, discutido na introdução.

Observamos que o campo magnético intenso criado em colisões de íons pesados, pode ser responsável por uma alteração na massa dos mésons com um quark pesado. Esses são produzidos em um tempo ($t \sim 1/m_{c,b}$), que é da mesma ordem

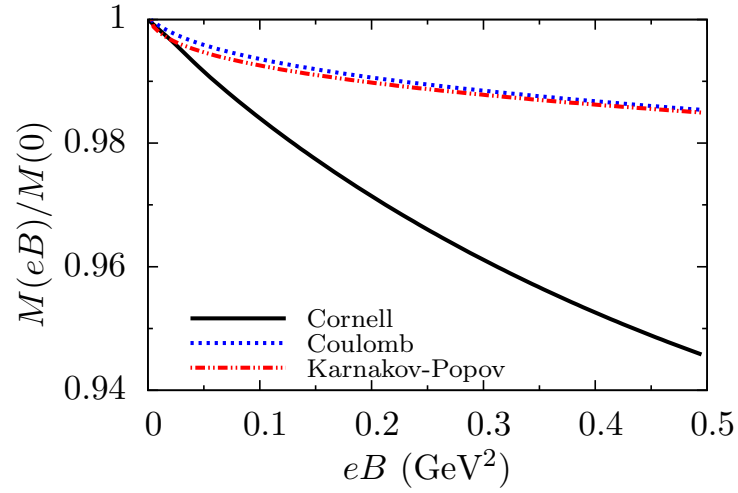


Figura 4.2: Massa dos estados $(b - \bar{d})$ em função do campo magnético normalizada pela massa em $eB = 0$. Curvas para o potencial de Cornell e para o potencial do tipo coulombiano com o cálculo numérico e a aproximação analítica de Karnakov-Popov.

do tempo de existência do campo ($t \sim 0.2 \text{ fm}$), justificando a influência na dinâmica de produção das partículas. Vale notar que o efeito é mais acentuado quando analisamos o potencial com o termo de confinamento. Se o méson for produzido no plasma, o efeito de redução da massa é menor. Devido às limitações do modelo, não podemos fazer uma previsão numérica acurada, mas o efeito qualitativo e sua ordem de grandeza foram mostrados.

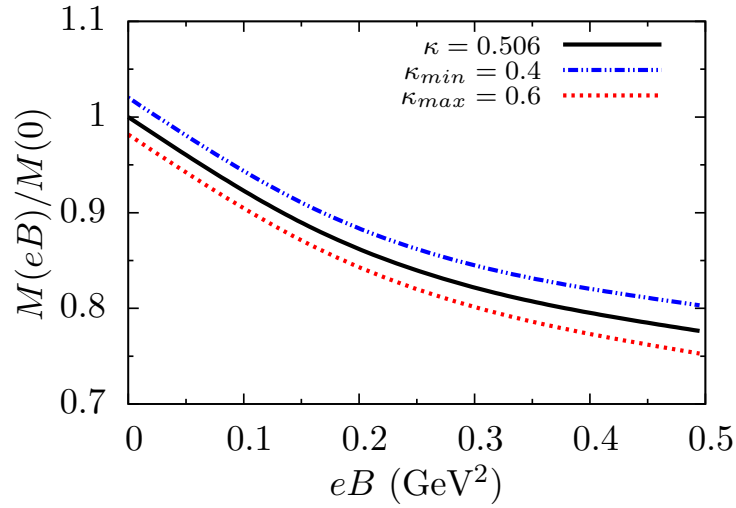


Figura 4.3: Massa dos estados $(c - \bar{u})$ em função do campo magnético normalizada pela massa em $eB = 0$. Curvas para diferentes valores de κ do potencial de Cornell.

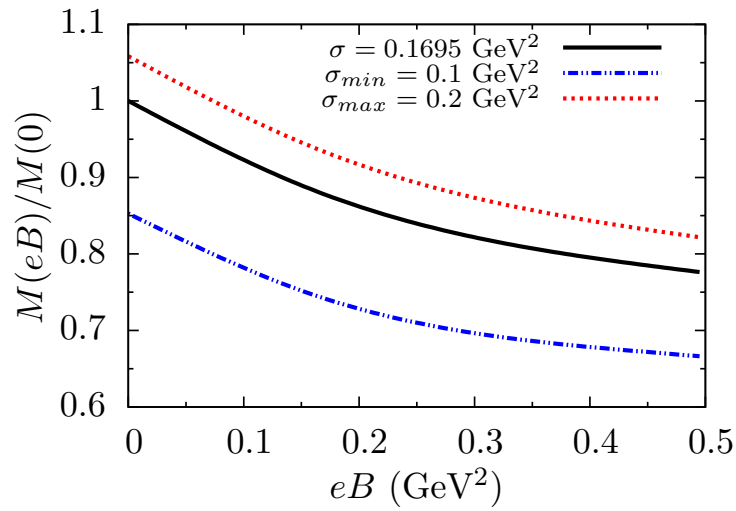


Figura 4.4: Massa dos estados $(c - \bar{u})$ em função do campo magnético normalizada pela massa em $eB = 0$. Curvas para diferentes valores de σ do potencial de Cornell.

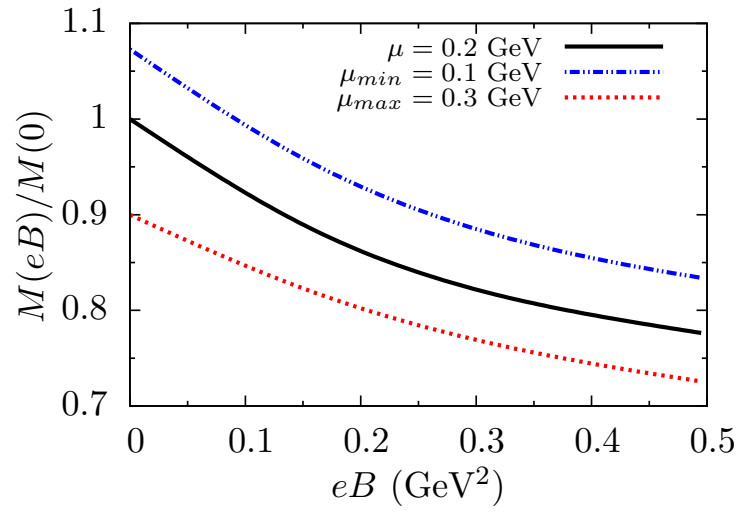


Figura 4.5: Massa dos estados $(c - \bar{u})$ em função do campo magnético normalizada pela massa em $eB = 0$. Curvas para diferentes valores da massa reduzida μ utilizando o potencial de Cornell.

Capítulo 5

Regras de Soma da QCD com Campo Magnético

As regras de soma da QCD (RSQCD) consistem em uma técnica que permite um tratamento aproximado de efeitos não-perturbativos da QCD. O método desenvolvido há mais de trinta anos [21] tem diversas aplicações, entre elas o cálculo da massa de mésons e bárions.

Tendo em vista o sucesso das RSQCD em estimar o espectro hadrônico, modificamos o método com a introdução de um campo magnético externo. Utilizando o método do tempo próprio para obter o propagador fermiônico na presença de um campo magnético externo, conhecido como *Propagador de Schwinger* [22] (Apêndice E), estudamos a influência deste campo na massa de estados ligados.

Como estudo preliminar, fizemos o cálculo no caso do limite de campo fraco ($eB \ll m^2$) e forte ($eB \gg M^2$), onde m é a massa do quark leve e M a massa do quark pesado. Esses limites não são os de maior interesse, mas com eles buscamos entender melhor o problema.

5.1 Regras de Soma da QCD (RSQCD)

Para altas energias, muito acima das massas dos hádrons, a liberdade assintótica da QCD é válida, a constante de acoplamento efetiva da QCD é pequena e a expansão perturbativa é uma boa aproximação. Por outro lado, na escala hadrônica, estamos no regime do confinamento, a constante de acoplamento é de ordem 1, a expansão perturbativa não é uma boa opção e deve-se procurar uma técnica não-perturbativa.

As Regras de Soma da QCD consistem em um tratamento aproximado dos efeitos não-perturbativos da QCD, que é baseado na descrição dos hádrons e suas interações sob duas formas que quando comparadas nos permitem obter propri-

idades dessas partículas. Isso é feito por meio da construção de uma função de correlação que vai ser calculada a nível hadrônico e a nível de quarks. O *princípio da dualidade quark-hádron* nos diz que as duas descrições são aproximadamente equivalentes em um certo intervalo de energia e este é justamente o princípio fundamental das RSQCD.

Vamos descrever nas próximas seções a técnica, as aproximações e as limitações deste método.

5.1.1 Função de Correlação

A *função de correlação* (ou *correlator* ou *função de dois pontos*) é o objeto central das RSQCD e construímos uma *corrente interpolante* com os mesmos números quânticos do hádron que queremos estudar.

O correlator é definido como (onde estamos trabalhando sempre com correntes pseudoescalares):

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ j(x) j^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (5.1)$$

onde $j(x)$ é a corrente interpolante e q é o momento total. Esquemáticamente, este correlator representa a amplitudes de diagramas como o que pode ser visto na Figura 5.1.

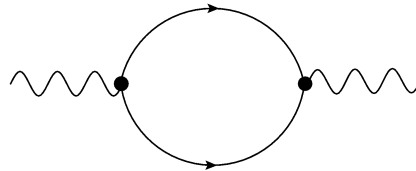


Figura 5.1: Representação esquemática do correlator de dois pontos.

O correlator de dois pontos é útil para obtermos a massa dos hádrons. Para o estudo do correlator com os graus de liberdade da QCD, usamos a expansão em produtos de operadores de Wilson (OPE - *Operator Product Expansion*) [23], que nos permite separar as contribuições perturbativas (curto alcance) das contribuições não-perturbativas (longo alcance). A função de correlação calculada desta forma vai ser denominada de *lado da OPE* (Π^{OPE}). Para o estudo com os graus de liberdade hadrônicos, separamos o estado fundamental dos estados excitados, utilizando uma descrição que explicaremos com mais detalhes a diante. Denominaremos este cálculo de *lado fenomenológico* (Π^{fen}).

As correntes interpolantes são da forma $j_\Gamma = \bar{q}_i \Gamma q_j$, onde i e j são índices de sabor dos campos de quarks e Γ é a estrutura tensorial que vai mudar com as características do hádron a ser estudado. Estaremos interessados na corrente

pseudoescalar com os números quânticos $J^{PC} = 0^{-+}$, dada por $j_p = i\bar{q}_i\gamma_5 q_j$ e que descreve os mésons B e D.

Por fim, após escolher a corrente interpolante adequada e estudar os lados da OPE e fenomenológico, usamos a dualidade quark-hádron, dizendo que a nível de correladores as duas descrições são aproximadamente equivalentes, isto é, $\Pi^{\text{OPE}}(q) \approx \Pi^{\text{fen}}(q)$. Vamos analisar cada uma dessas etapas a fim de obtermos a massa do hádron de interesse.

5.1.2 Lado da OPE

A expansão em produtos de operadores tem como objetivo separar a parte perturbativa da parte não-perturbativa da QCD. Ao expandir o correlator (5.1) em termos de um conjunto completo de operadores locais, temos:

$$i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ j(x) j^\dagger(0) \} | 0 \rangle = \sum_d C_d(q) \hat{O}_d, \quad (5.2)$$

onde C_d são os coeficientes de Wilson que descrevem a física de curto alcance (perturbativa) e \hat{O}_d são os operadores locais compostos a partir de campos de quarks e glúons que descrevem a física de longo alcance (não-perturbativa). A OPE é exata no contexto perturbativo ($Q^2 \rightarrow \infty$) e uma das aproximações das RSQCD é dizer que na escala hadrônica ($Q^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$) ainda é razoável utilizar a expansão (5.2). Isto é razoável, pois $\alpha_s(1 \text{ GeV}^2)/(4\pi) \sim 0.1 - 0.7$, o que justifica o estudo no regime perturbativo.

Os operadores \hat{O}_d são classificados através da dimensão d do operador local. Até dimensão 5, temos:

$$\hat{O}_0 = \hat{1}, \quad (5.3)$$

$$\hat{O}_3 = \bar{q}q, \quad (5.4)$$

$$\hat{O}_4 = G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (5.5)$$

$$\hat{O}_5 = \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \frac{\lambda^a}{2} G_a^{\mu\nu} q, \quad (5.6)$$

onde $G_{\mu\nu}^a$ representa o campo dos glúons, γ^μ são as matrizes de Gell-Mann e $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

O coeficiente do operador \hat{O}_0 resulta na parte perturbativa, enquanto que o valor esperado dos demais operadores no vácuo da QCD resulta nos condensados. Uma maneira de obtermos os coeficientes da expansão é através do *Teorema de Wick*. Para vermos de maneira mais clara como isso funciona, vamos aplicá-lo no valor esperado do vácuo do produto temporalmente ordenado de dois campos

fermiônicos. Assim,

$$\begin{aligned}\langle 0|T[q_a(x)\bar{q}_b(0)]|0\rangle &= \langle 0_p|T[q_a(x)\bar{q}_b(0)]|0_p\rangle + \langle 0|[q_a(x)\bar{q}_b(0)]:|0\rangle \\ &= S_{ab}^p(x) + \langle 0|[q_a(x)\bar{q}_b(0)]:|0\rangle,\end{aligned}\quad (5.7)$$

onde $|0_p\rangle$ corresponde ao vácuo perturbativo, $|0\rangle$ ao vácuo da teoria interagente, T ao ordenamento temporal e $:\hat{O}:$ ao ordenamento normal (corresponde a posicionar os operadores de aniquilação à direita dos operadores de criação). Desta forma, o valor esperado no vácuo perturbativo de um operador (que não seja $\hat{1}$) vai ser nulo. Por outro lado, como estamos considerando uma teoria interagente, esse valor esperado não será nulo e dele obtém-se os termos que chamamos de condensados e que contêm a parte não-perturbativa do cálculo.

Com isso em mente, vamos analisar o caso da corrente escalar $j(x) = \bar{q}_a(x)q(x)$, onde a é um índice de cor. Utilizando o Teorema de Wick obtemos (α e β são índices de Dirac),

$$\begin{aligned}\langle 0|T[j(x)j^\dagger(0)]|0\rangle &= \langle 0|T[q_{a,\alpha}(x)\bar{q}_{a,\alpha}(0)q_{b,\beta}(x)\bar{q}_{b,\beta}(0)]|0\rangle \\ &= S_{ab,\alpha\beta}^p(x)S_{ba,\beta\alpha}^p(-x) + \dots \\ &= \text{Tr}[S_{ab}^p(x)S_{ba}^p(-x)] + \dots\end{aligned}\quad (5.8)$$

Os termos da expansão indicados por (...) são não-nulos devido ao vácuo interagente. Podemos absorver os produtos normais da expansão no propagador perturbativo (S_{ab}^p), que é explicado em detalhes na Ref.[24]. Dessa forma, ficamos com a função de dois pontos escrita em termos do propagador não-perturbativo (S_{ab}):

$$\langle 0|T[j(x)j^\dagger(0)]|0\rangle = \text{Tr}[S_{ab}(x)S_{ba}(-x)].\quad (5.9)$$

Assim, o correlator pode ser escrito em termos do propagador não-perturbativo que contém a parte perturbativa e também das contribuições de longo alcance, que vêm do valor esperado no vácuo do produto normal de operadores (diferente de zero devido ao vácuo não-trivial da QCD). Esses termos vão dar origem aos condensados (de quarks, de glúons, misto, etc), sendo o primeiro da série, conhecido como *condensado de quarks*, dado por:

$$\langle 0|[q_{a,\alpha}(0)\bar{q}_{b,\beta}]:|0\rangle \equiv -\frac{1}{12}\langle \bar{q}q\rangle\delta_{ab}\hat{1}_{\alpha\beta}.\quad (5.10)$$

O cálculo em detalhes pode ser visto em [25]. O valor do condensado $\langle \bar{q}q\rangle$ é um parâmetro não-perturbativo e não pode ser calculado analiticamente. Porém,

seu valor numérico pode ser estimado por meio da hipótese PCAC (Corrente Axial Parcialmente Conservada) [26]. Para $q=u,d$, usaremos [27]:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -(0.23 \pm 0.03)^3 \text{ GeV}^3. \quad (5.11)$$

Para os operadores de dimensão superior também é possível obter seus valores numéricos de maneira semelhante.

5.1.3 Lado Fenomenológico

No lado fenomenológico tratamos o correlator usando os graus de liberdade da descrição de baixas energias, isto é, os hádrons. É útil escrevermos a relação espectral para a função de dois pontos. Para isto, vamos escrever o correlator usando explicitamente a definição de produto temporalmente ordenado e introduzindo uma base completa de estados hadrônicos, isto é:

$$\hat{1} = \sum_H \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} |H(k)\rangle \langle H(k)|. \quad (5.12)$$

Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi(x) = i \sum_H \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} & \left[\theta(x_0) \langle 0|j(x)|H(k)\rangle \langle H(k)|j^\dagger(0)|0\rangle \right. \\ & \left. + \theta(-x_0) \langle 0|j^\dagger(0)|H(k)\rangle \langle H(k)|j(x)|0\rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Usando o operador de translação $j(x) = e^{ip \cdot x} j(0) e^{-ip \cdot x}$, temos que:

$$\Pi(x) = i \sum_H \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \left[\theta(x_0) e^{-ik \cdot x} + \theta(-x_0) e^{+ik \cdot x} \right] |\langle 0|j(0)|H(k)\rangle|^2. \quad (5.14)$$

Podemos utilizar o propagador de Feynman na equação (5.14), ou seja,

$$\begin{aligned} \Delta_F(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} \left[\theta(x_0) e^{-ik \cdot x} + \theta(-x_0) e^{+ik \cdot x} \right] \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - E_H^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot x}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde usamos que E_H é a auto-energia de $H(k)$. Dessa forma, obtemos que:

$$4\Pi(x) = - \sum_k \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - E_H^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot x} |\langle 0|j(0)|H(k)\rangle|^2. \quad (5.16)$$

Vamos utilizar a identidade:

$$\int_0^\infty dq^2 \delta(q^2 - E_H^2) = 1, \quad (5.17)$$

e definir

$$\rho(q^2) \equiv (2\pi)^4 \sum_H |\langle 0|j(0)|H(k)\rangle|^2 \delta(q^2 - E_H^2). \quad (5.18)$$

Assim, podemos resolver a integral em x e obtemos a seguinte equação:

$$\Pi(k) = \int_0^\infty ds \frac{1}{s - k^2 - i\epsilon} \rho(s), \quad (5.19)$$

onde definimos $q^2 = s$ e $\rho(s)$ é a densidade espectral. Vale ressaltar que a densidade espectral apresenta uma estrutura típica que consiste em um pico (que representa o estado fundamental) e um contínuo (que representa uma série de estados excitados). Uma forma útil de escrevê-la é:

$$\rho^{\text{fen}}(s) = \lambda^2 \delta(s - m_H^2) + \theta(s - s_0) \rho^{\text{cont}}(s), \quad (5.20)$$

onde $\lambda \equiv \langle 0|j|H\rangle$ é uma constante que indica o acoplamento da corrente com o estado fundamental e s_0 é o limiar do contínuo, que separa o pólo do estado fundamental das demais ressonâncias.

Desta forma, podemos utilizar o princípio da dualidade quark-hádron, usar a aproximação $\rho^{\text{cont}} = \rho^{\text{OPE}}$ e reescrever (5.19) como:

$$\Pi^{\text{fen}}(k) = \frac{\lambda^2}{m^2 - k^2} + \int_{s_0}^\infty ds \frac{\rho^{\text{OPE}}(s)}{s - k^2}, \quad (5.21)$$

que é a equação a ser comparada com o lado da OPE para obtermos as informações do hádron de interesse. Para isso, vamos escrever o lado da OPE também como uma densidade espectral:

$$\Pi^{\text{OPE}}(q) = \int_{s_{\text{min}}}^\infty ds \frac{\rho^{\text{OPE}}(s)}{s - q^2}, \quad (5.22)$$

onde s_{min} é o limite cinemático da integral.

Será útil escrevermos a densidade espectral através de uma relação de dispersão, isto é,

$$\Pi^{\text{OPE}}(q) = \frac{1}{\pi} \int_{s_{\text{min}}}^\infty ds \frac{\text{Im}[\Pi(s)]}{s - q^2}, \quad (5.23)$$

onde a função densidade espectral é definida como $\rho(s) \equiv \frac{1}{\pi} \text{Im}[\Pi(s)]$.

5.1.4 A Dualidade Quark-Hádron e a Validade das RSQCD

Nas seções anteriores, descrevemos o correlator através da OPE, válido para $Q^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$, isto é, no regime perturbativo. Por outro lado, também o descrevemos do ponto de vista não-perturbativo, ou seja na escala $Q^2 \lesssim 1 \text{ GeV}^2$. O princípio da dualidade quark-hádron nos permite assumir que ambas as descrições são válidas em um certo intervalo $Q^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$. Contudo, as aproximações que fizemos dos dois lados introduzem limitações ao cálculo. Os problemas aparecem basicamente de duas fontes:

- No lado da OPE, precisamos truncar a série em algum ponto;
- No lado fenomenológico, assumimos que a densidade espectral pode ser separada em um pólo mais um contínuo de estados excitados.

Uma maneira de suprimir os termos de dimensão mais alta na OPE e também os estados excitados no lado fenomenológico é através da *Transformada de Borel*.

A Transformada de Borel

A transformada de Borel é definida da seguinte maneira:

$$\beta [\Pi(Q^2)] = \Pi(\bar{M}^2) = \lim_{Q^2, n \rightarrow \infty} \frac{(Q^2)^{n+1}}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial Q^2} \right)^n \Pi(Q^2), \quad (5.24)$$

onde $Q^2 = -q^2$ é o momento no espaço euclidiano e \bar{M} é um parâmetro conhecido como *massa de Borel*. Será útil nos cálculos a seguinte transformada de Borel:

$$\beta \left[\frac{1}{s + Q^2} \right] = e^{-s/\bar{M}^2}. \quad (5.25)$$

Aplicando a transformada de Borel no lado fenomenológico (5.21) e usando (5.25), obtemos:

$$\beta [\Pi^{\text{fen}}(Q^2)] = \lambda^2 e^{-m_H^2/\bar{M}^2} + \int_{s_0}^{\infty} ds e^{-s/\bar{M}^2} \rho^{\text{OPE}}(s). \quad (5.26)$$

Vale notar que o termo que se refere ao contínuo agora é suprimido por uma exponencial que decresce com s . No lado da OPE, sendo d a dimensão de Π , d_{C_n} a dimensão do coeficiente e $d_{\hat{O}_n}$ a dimensão do operador, vale que $d = d_{C_n} + d_{\hat{O}_n}$. Assim, operadores de dimensão mais alta correspondem a coeficientes de dimensão menor até estes ficarem negativos, tendo a forma $1/(Q^2)^n$ onde n é a dimensão do operador. Fazendo a transformada de Borel obtemos $1/[(n-1)!(\bar{M}^2)^n]$, ou seja, as contribuições de condensados de ordem superior recebem uma supressão fatorial, melhorando a convergência da OPE.

Determinação dos Parâmetros Hadrônicos

Fazendo a transformada de Borel e impondo $\Pi^{\text{OPE}}(\bar{M}^2) = \Pi^{\text{fen}}(\bar{M}^2)$, obtemos a seguinte regra de soma:

$$\int_{s_{\min}}^{\infty} ds e^{-s/\bar{M}^2} \rho^{\text{OPE}}(s) = \lambda^2 e^{-m_H^2/\bar{M}^2} + \int_{s_0}^{\infty} ds e^{-s/\bar{M}^2} \rho^{\text{OPE}}(s), \quad (5.27)$$

que podemos reescrever como,

$$\lambda^2 e^{-m_H^2/\bar{M}^2} = \int_{s_{\min}}^{s_0} ds \rho^{\text{OPE}}(s) e^{-s/\bar{M}^2}. \quad (5.28)$$

Derivando (5.28) com respeito à $\tau \equiv 1/\bar{M}^2$ e dividindo o resultado por (5.28) obtemos uma expressão para a massa do hádron,

$$m_H^2 = \frac{\int_{s_{\min}}^{s_0} ds \rho^{\text{OPE}}(s) s e^{-s/\bar{M}^2}}{\int_{s_{\min}}^{s_0} ds \rho^{\text{OPE}}(s) e^{-s/\bar{M}^2}}. \quad (5.29)$$

Uma maneira não tão usual mas equivalente consiste em derivar a equação (5.28) com relação a τ e obter uma nova equação. Esta e (5.28) formam um sistema de equações acopladas que pode ser resolvido para obtermos os parâmetros m_H e λ . Ao introduzirmos o campo magnético nas regras de soma esta maneira de extrair os parâmetros hadrônicos será particularmente útil.

A Validade das RSQCD

Nas seções anteriores foram introduzidos dois parâmetros às regras de soma: o limiar do contínuo s_0 e a massa de Borel \bar{M}^2 . Como são parâmetros livres da teoria precisamos de certas condições para restringir seus valores.

Para fixar o parâmetro s_0 utilizamos os dados experimentais. Basicamente, escrevemos o limiar do contínuo como $s_0 = (m + \Delta_s)^2$ e analisamos o espectro de algumas partículas para obter a separação entre o estado fundamental e os estados excitados. Por exemplo, para o J/ψ temos $\Delta_s = 589 \text{ MeV}$ e para o D^0 temos $\Delta_s = 555 \text{ MeV}$. Desta forma, fixamos $\Delta_s \sim 500 \text{ MeV}$ e variamos em torno deste valor médio.

Como a massa de Borel (\bar{M}^2) é um parâmetro livre, buscamos uma região em que as RSQCD sejam independentes desse parâmetro, ou seja, que exista uma estabilidade de \bar{M}^2 . Para fixar esse intervalo, chamado de *Janela de Borel*, fazemos duas análises. A primeira é a chamada *dominância do pólo sobre o contínuo* que consiste em analisar as contribuições relativas ao pólo (P) e ao contínuo (C), definidos como,

$$P = \int_{s_0}^{s_{\min}} ds e^{-s/\bar{M}^2} \rho^{\text{OPE}}(s), \quad (5.30)$$

$$C = \int_{s_0}^{\infty} ds e^{-s/\bar{M}^2} \rho^{\text{OPE}}(s). \quad (5.31)$$

A medida que a massa de Borel cresce, P diminui e C aumenta. O ponto em que $P = C$ é usado como critério para determinar o valor máximo da massa de Borel.

O segundo critério é chamado de *convergência da OPE* e fixa o valor mínimo de \bar{M}^2 . Como o lado da OPE após a transformada de Borel vai com $1/\bar{M}^2$, como discutido anteriormente, é de se esperar que a convergência da série seja melhor para valores altos de \bar{M}^2 . Comparando as contribuições de cada termo da expansão e exigindo a convergência, podemos obter um valor mínimo de \bar{M}^2 a partir do qual a série é válida. Vale notar que a OPE é uma série assintótica, mas fornece uma boa aproximação para a função de correlação com os primeiros termos.

Dessa maneira, fixamos o valor máximo e mínimo de \bar{M}^2 , isto é, a Janela de Borel e é nesta região em que devemos realizar as regras de soma.

5.2 RSQCD e o Campo Magnético

Nesta seção, vamos introduzir os efeitos do campo magnéticos nas RSQCD. Para isso, vamos estudar o caso de um méson pseudoescalar e calcular a mudança de sua massa com a dependência do campo.

A função de correlação que precisamos calcular é dada por:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T(j(x) j^\dagger(x)) | 0 \rangle. \quad (5.32)$$

Para os mésons B e D , podemos usar uma corrente interpolante que descreve os seus números quânticos ($J^{PC} = 0^{-+}$), dada por:

$$j(x) = \bar{u}_a(x) i\gamma_5 b_a(x), \quad (5.33)$$

$$j^\dagger(x) = \bar{b}_a(x) i\gamma_5 u_a(x). \quad (5.34)$$

onde a é índice de cor.

Substituindo essa corrente em $\Pi(q)$ e aplicando o teorema de Wick, obtemos:

$$\Pi(q) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4k \text{Tr}[S_{ab}^q(k) \gamma_5 S_{ba}^Q(k+q) \gamma_5]. \quad (5.35)$$

Para os propagadores dos quarks vamos utilizar o propagador de Schwinger [22] (Apêndice E), que descreve um férmion de spin 1/2 em um campo magnético externo e uniforme. Considerando o campo no eixo z , o propagador tem a seguinte

forma ¹ no espaço dos momentos:

$$S_{ab}(k) = \delta_{ab} \int_0^\infty ds \exp \left[is(k_0^2 - k_3^2 - k_\perp^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs} - m^2) \right] \\ \times [(k^0 \gamma^0 - k^3 \gamma^3 + m)(1 + \gamma^1 \gamma^2 \tan(eBs)) - k_\perp \cdot \gamma_\perp (1 + \tan^2(eBs))], \quad (5.36)$$

onde $k_\perp = (k_1, k_2)$ e $\gamma_\perp = (\gamma_1, \gamma_2)$.

5.2.1 Contribuição Perturbativa com Campo Magnético Fraco

O propagador de Schwinger, apesar de levar em conta todos os efeitos do campo externo (mas ser livre com relação aos efeitos da QCD), não possui uma forma simples para ser implementado no cálculo da regra de soma. Uma das principais dificuldades em fazer o cálculo é obter a parte imaginária do correlator para escrever a densidade espectral no lado da OPE. Por isso, para entendermos melhor o problema e obtermos um resultado qualitativo, optamos por estudar o limite de campo magnético fraco. Nesse limite, $(eB)/m^2 \ll 1$ e podemos expandir o propagador de Schwinger em potências de (eB) , simplificando os cálculos.

Para estudarmos o limite $eB \ll m^2$, vamos definir $x \equiv sm^2$ e fazer a seguinte expansão:

$$\tan(eBs) = \tan\left(\frac{eBx}{m^2}\right) \approx \frac{eBx}{m^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{eBx}{m^2}\right)^3. \quad (5.37)$$

Assim, o propagador de uma partícula de massa m e carga e sob influência de um campo magnético externo pode ser calculado até segunda ordem no campo $(eB)^2$. Substituindo (5.37) em (5.36), temos:

$$S_{ab}(k) = \delta_{ab} \int_0^\infty \frac{dx}{m^2} e^{ix\alpha/m^2} \left[(\not{k} + m) + (k^0 \gamma^0 - k^3 \gamma^3 + m) \gamma^1 \gamma^2 \left(\frac{eBx}{m^2}\right) \right. \\ \left. - k_\perp \cdot \gamma_\perp \left(\frac{eBx}{m^2}\right)^2 \right], \quad (5.38)$$

onde

$$\alpha \equiv k^2 - m^2 - \frac{3k_\perp^2}{3} \left(\frac{eBx}{m^2}\right)^2. \quad (5.39)$$

¹Estamos seguindo a convenção para os quadri-vetores tal que $v \equiv (v_0, v_1, v_2, v_3)$ é dividido em $v_\parallel \equiv (v_0, v_3)$ e $v_\perp \equiv (v_1, v_2)$ onde estamos usando a assinatura da métrica de Minkowski $(+, -, -, -)$. O produto interno vai ser escrito como $u \cdot v = u_\parallel \cdot v_\parallel - u_\perp \cdot v_\perp$, onde $u_\parallel \cdot v_\parallel \equiv u_0 v_0 - u_3 v_3$ e $u_\perp \cdot v_\perp \equiv u_1 v_1 + u_2 v_2$. Assim, $u_\parallel^2 = u_0^2 - u_3^2$ e $u_\perp^2 = u_1^2 + u_2^2$.

Vamos definir as seguintes integrais:

$$I_1 = \delta_{ab} \int_0^\infty \frac{dx}{m^2} e^{ix\alpha/m^2} (\not{k} + m) \quad (5.40)$$

$$I_2 = \delta_{ab} \int_0^\infty \frac{dx}{m^2} e^{ix\alpha/m^2} (k^0 \gamma^0 - k^3 \gamma^3 + m) \gamma^1 \gamma^2 \left(\frac{eBx}{m^2} \right) \quad (5.41)$$

$$I_3 = -\delta_{ab} \int_0^\infty \frac{dx}{m^2} e^{ix\alpha/m^2} k_\perp \cdot \gamma_\perp \left(\frac{eBx}{m^2} \right)^2 \quad (5.42)$$

Para resolvê-las, utilizaremos a expansão da exponencial até ordem de $(eB/m^2)^2$, isto é,

$$e^{ix\alpha/m^2} \simeq e^{i(k^2 - m^2)x/m^2} \left[1 - \frac{i}{m^2} \frac{k_\perp^2}{3} \left(\frac{eB}{m^2} \right)^2 x^3 \right]. \quad (5.43)$$

As integrais possuem a mesma forma e será útil utilizarmos a seguinte igualdade:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{m^2} \left(\frac{x}{m^2} \right)^n e^{ix\alpha/m^2} = \frac{i^{n+1} \Gamma(n+1)}{\alpha^{n+1}}. \quad (5.44)$$

Desta maneira, após um pouco de álgebra, obtemos até ordem $(eB/m^2)^2$:

$$I_1 = (-\not{k} + m) \left[\frac{i}{k^2 - m^2} - (eB)^2 \frac{ik_\perp^2 \Gamma(4)}{3(k^2 - m^2)^4} \right], \quad (5.45)$$

$$I_2 = (k^0 \gamma^0 - k^3 \gamma^3 + m) \gamma^1 \gamma^2 (eB) \left[-\frac{\Gamma(2)}{(k^2 - m^2)^2} \right], \quad (5.46)$$

$$I_3 = -k_\perp \cdot \gamma_\perp (eB)^2 \left[-\frac{i\Gamma(3)}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \quad (5.47)$$

Somando as integrais, obtemos o propagador de Schwinger no limite de campo fraco até ordem de $(eB/m^2)^2$, dado por:

$$S(k) = S^{(eB)^0}(k) + S^{(eB)^1}(k) + S^{(eB)^2}(k), \quad (5.48)$$

onde,

$$S^{(eB)^0}(k) = i \frac{-\not{k} + m}{k^2 - m^2}, \quad (5.49)$$

$$S^{(eB)^1}(k) = \left(\frac{eB}{m^2} \right) \left[-(k^0 \gamma^0 - k^3 \gamma^3 + m) \gamma^1 \gamma^2 \frac{m^2}{(k^2 - m^2)^2} \right], \quad (5.50)$$

$$S^{(eB)^2}(k) = \left(\frac{eB}{m^2} \right)^2 \left[-2ik_{\perp}^2 \frac{m^4}{(k^2 - m^2)^4} + 2ik_{\perp} \cdot \gamma_{\perp} \frac{m^4}{(k^2 - m^2)^3} \right]. \quad (5.51)$$

Com essa forma do propagador podemos calcular o correlator para a corrente interpolante do méson B e D no limite de campo fraco.

Uma maneira que será útil de representar este propagador pode ser vista na Figura 5.2.

$$S(q) = \longrightarrow + \longrightarrow \boxed{(eB)^1} \longrightarrow + \longrightarrow \boxed{(eB)^2} \longrightarrow + \dots$$

Figura 5.2: Representação do propagador de Schwinger no limite de campo magnético fraco na forma de diagramas.

Substituindo a expansão do propagador (5.48) em (5.35), obtemos os diagramas da Figura (5.3).

Utilizaremos massa m e carga c para o quark leve e massa M e carga C para o quark pesado. Os diagramas que são de ordem superior a $(eB)^2$ serão desconsiderados. O diagramas de ordem $(eB)^1$ não irão contribuir pois resultam em estruturas em que o traço é nulo. Já os diagramas (2) e (3) são iguais pela troca do quark leve pelo quark pesado. Calculando as contribuições relevantes obtemos os traços correspondentes aos diagramas da Figura (5.3).

$$\text{Traço (1)} = \frac{-4(mM - k \cdot (k + q))}{((k + q)^2 - m^2)(k^2 - M^2)}, \quad (5.52)$$

$$\text{Traço (2)} = (CB)^2 \left\{ \frac{24 [m(k_1^2 + k_2^2) + mM]}{((k + q)^2 - m^2)(k^2 - M^2)^4} - \frac{8 [k_1 \cdot (k_1 + q_1) + k_2 \cdot (k_2 + q_2)]}{((k + q)^2 - m^2)(k^2 - M^2)^3} \right\}, \quad (5.53)$$

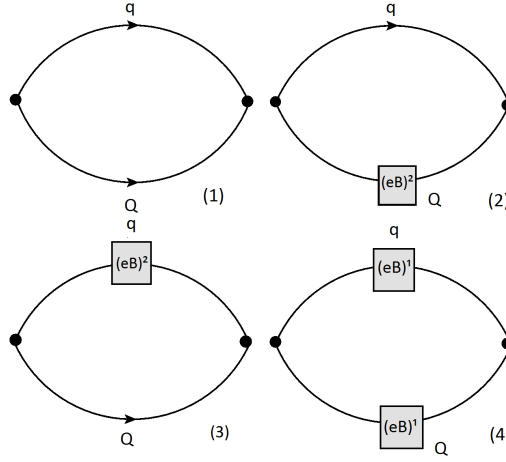


Figura 5.3: Diagramas obtidos com o correlator utilizando o propagador de Schwinger até a ordem de $(eB)^2$.

$$\text{Traço (3)} = (cB)^2 \left\{ \frac{24 [M((q_1 + k_1)^2 + (q_2 + k_2)^2) + mM]}{(k^2 - M^2)((k + q)^2 - m^2)^4} - \frac{8 [k_1 \cdot (k_1 + q_1) + k_2 \cdot (k_2 + q_2)]}{(k^2 - M^2)((k + q)^2 - m^2)^3} \right\}, \quad (5.54)$$

$$\text{Traço (4)} = (CB)(cB) \frac{4 [k_0 \cdot (k_0 + q_0) - k_3 \cdot (k_3 + q_3) + mM]}{((k + q)^2 - m^2)^2 (k^2 - M^2)^2}. \quad (5.55)$$

Calcularemos a integral no momento para cada um destes diagramas, para obtermos o correlator. Vamos definir,

$$\Pi(q) \equiv \Pi_{(1)}(q) + \Pi_{(2)}(q) + \Pi_{(3)}(q) + \Pi_{(4)}(q), \quad (5.56)$$

onde seguimos a numeração dos diagramas da Figura (5.3).

Cálculo das integrais nos momentos

O diagrama (1) corresponde à seguinte integral:

$$\begin{aligned} \Pi_{(1)} &= 3 \cdot 4i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 + k \cdot q - mM}{(k^2 - M^2)((k + q)^2 - m^2)} \\ &= 3 \cdot 4i \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{k^2}{(k^2 - \Delta)^2} + \frac{(-xq^2(1-x) - mM)}{(k^2 - \Delta)^2} \right], \end{aligned} \quad (5.57)$$

onde $\Delta \equiv -x(1-x)q^2 + xM^2 + (1-x)m^2$, fizemos uma redefinição da variável de integração ($(k + (1-x)q)^2 \rightarrow k$) e utilizamos a parametrização de Feynman (F.2). As integrais são dadas em (F.3), e podemos usar a expansão em torno de $d = 4$ ($\varepsilon = 4 - d$),

$$\frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{2-d/2} \approx \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\varepsilon} - \log \Delta - \gamma + \log(4\pi) + O(\varepsilon) \right]. \quad (5.58)$$

Com isso, podemos escrever o resultado da integral (já subtraindo as divergências e constantes usando o esquema \overline{MS}):

$$\Pi_{(1)} = 3 \cdot 4 \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \log \Delta (2\Delta - xq^2(1-x) - mM). \quad (5.59)$$

O cálculo dos demais diagramas é análogo e pode ser visto em detalhes no Apêndice F. Por fim, somamos as contribuições dos diagramas (1), (2), (3) e (4) e reescrevemos organizando os termos de acordo com a potência do campo magnético. Assim,

$$\Pi(q) = \Pi^{(eB)^0} + \Pi_1^{(eB)^2} + \Pi_2^{(eB)^2}, \quad (5.60)$$

onde,

$$\Pi^{(eB)^0} = \frac{3 \cdot 2^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx [2\Delta - x(1-x)q^2 - mM] \log \Delta, \quad (5.61)$$

$$\Pi_1^{(eB)^2} = \frac{3}{(2\pi)^2} (cC)(eB)^2 \int_0^1 dx (1-x)x \left[\frac{1}{\Delta} - \frac{(x^2-x)q_{\parallel}^2 + mM}{2\Delta^2} \right], \quad (5.62)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2^{(eB)^2} = \frac{3 \cdot 2^3}{(4\pi)^2} (c^2 + C^2)(eB)^2 \int_0^1 dx \left\{ \frac{x^3}{3} \left[\frac{3}{2\Delta} + \frac{mM + q_{\perp}^2(3-7x+4x^2)}{2\Delta^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{(x^2-x)q^2}{2\Delta^2} + (1-x)^2 q_{\perp}^2 \frac{mM - (x^2-x)q^2}{\Delta^3} \right] + x^2 \left[\frac{1}{\Delta} + \frac{(x^2-x)q_{\perp}^2}{\Delta^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

e definimos,

$$\Delta \equiv (x^2-x)q^2 + xm^2 + (1-x)M^2. \quad (5.64)$$

Vale ressaltar que aqui não é feita nenhuma expansão com relação à massa dos quarks. Apenas assumimos $eB \ll m^2$ e $eB \ll M^2$. Usamos c e C para as cargas, em

unidades da carga do elétron e , dos quarks leve e pesado, respectivamente. Nessa expressão sobram apenas as contribuições quadráticas no campo pois os termos lineares são nulos devido ao traço.

Uma vez que temos o correlator no limite de campo fraco, vai ser útil escrevermos como uma relação de dispersão (usual das RSQCD):

$$\Pi(q) = \frac{1}{\pi} \int_{s_{min}}^{\infty} ds \frac{\text{Im}[\Pi(s)]}{s - q^2}. \quad (5.65)$$

Por isso, precisamos resolver a integral na variável introduzida pela parametrização de Feynman e obter a parte imaginária.

Cálculo das integrais no parâmetro de Feynman

No cálculo das integrais em x é útil tomarmos o limite $m \rightarrow 0$. Porém, formalmente essa aproximação não é tão rigorosa, uma vez que estamos interessados no limite $eB \ll m^2 \ll M^2$. Porém, é possível reescrever as equações em termos de parâmetros de expansão adimensionais corretos, isto é, m/M e eB/M^2 , e mostrarmos que a única contribuição desses termos vai ser na parte real do correlator. Como estamos interessados na parte imaginária, podemos fazer o limite $m \rightarrow 0$ e obtermos o resultado correto.

A primeira integral (5.62) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Pi^{(eB)0} = \frac{3 \cdot 2^2}{(4\pi)^2} M^2 \int_0^1 dx \left[(x^2 - x) \frac{q^2}{M^2} + x \frac{m^2}{M^2} + (1 - x) + (1 - x)^2 \frac{q^2}{M^2} - \frac{m}{M} \right] \\ \times \log \left\{ M^2 \left[(x^2 - x) \frac{q^2}{M^2} + x \frac{m^2}{M^2} + (1 - x) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Como $m^2/M^2 \rightarrow 0$, vamos desprezar os termos quadráticos. Dessa forma, obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi^{(eB)0} = \frac{3 \cdot 2^2}{(4\pi)^2} M^2 \int_0^1 dx \left[(x^2 - x) \frac{q^2}{M^2} + x \frac{m^2}{M^2} + (1 - x) + (1 - x)^2 \frac{q^2}{M^2} - \frac{m}{M} \right] \log M^2 \\ + \int_0^1 \left[(x^2 - x) \frac{q^2}{M^2} + x \frac{m^2}{M^2} + (1 - x) + (1 - x)^2 \frac{q^2}{M^2} - \frac{m}{M} \right] \log \left[(1 - x) \left(1 - \frac{q^2}{M^2} x \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.67)$$

A primeira integral vai dar uma contribuição real. Já a segunda, só vai contribuir para a parte imaginária quando o argumento do logaritmo ficar menor do que zero pois, o branch-cut está em $\log(-|x|)$. Assim,

$$\log \left(1 - \frac{q^2}{M^2} \right) = -i\pi + \log \left| 1 - \frac{q^2}{M^2} \right|, \quad (5.68)$$

para $1 < x < M^2/q^2$, o que nos fornece a condição cinemática. Assim, podemos calcular a integral apenas nessa região e obter a parte imaginária:

$$\text{Im} \left[\Pi^{(eB)^0} \right] = \frac{3}{4\pi} \left[3 \frac{(M^2 - q^2)^2}{8\pi q^2} - Mm \left(\frac{M^2}{q^2} - 1 \right) \right]. \quad (5.69)$$

O procedimento para o cálculo da parte imaginária de $\Pi^{(eB)^1}$ e $\Pi^{(eB)^2}$ é análogo. Com isso, no termo de ordem $(eB)^0$ consideramos apenas os termos de ordem $(m/M)^0$ e $(m/M)^1$. No termo de ordem $(eB)^2/M^4$, tomamos $m/M \rightarrow 0$. Nessa aproximação, as integrais são simplificadas e o branch-cut está em $q^2 > M^2$, como esperado. A extração da densidade espectral se torna rotineira, a menos de um detalhe: tomar $m = 0$ leva a uma divergência infravermelha (pois a massa do quark leve efetivamente regulariza algumas das integrais) - contudo, essa divergência é real e não contribui para a densidade espectral.

A restrição cinemática na integral em $s = q^2$ é $q^2 > M^2$. Da relação $q^2 = q_{\parallel}^2 - q_{\perp}^2$, podemos escolher dois entre os três momentos q^2 , q_{\perp}^2 e q_{\parallel}^2 como momentos independentes. Como os denominadores de todos os termos dependem apenas de q^2 e dada a restrição cinemática é conveniente um dos momentos ser q^2 . Para o outro momento escolhemos q_{\perp}^2 . Ao final, a densidade espectral pode ser escrita como:

$$\rho^{\text{OPE}}(q) = \rho^{(eB)^0} + \rho_1^{(eB)^2} + \rho_2^{(eB)^2}, \quad (5.70)$$

onde,

$$\rho^{(eB)^0} = \frac{3}{8\pi^2} \left[\frac{(q^2 - M^2)^2}{q^2} + 2 \frac{Mm}{q^2} (q^2 - M^2) \right], \quad (5.71)$$

$$\rho_1^{(eB)^2} = -\frac{3}{4\pi^2} (cC)(eB)^2 \frac{M^2}{q^6} (q_{\perp}^2), \quad (5.72)$$

$$\rho_2^{(eB)^2} = -\frac{(c^2 + C^2)(eB)^2 M^4}{4\pi^2 (M^2 - q^2)^2 (q^2)^3} [6M^4 - M^2(q^2 - 14q_{\perp}^2) - 3q^2(2q^2 + 7q_{\perp}^2)]. \quad (5.73)$$

Com a densidade espectral temos parte do lado do OPE pronto para calcularmos a massa dos mésons.

5.2.2 Contribuição Perturbativa com Campo Magnético Forte

No limite de campo magnético forte podemos considerar $m^2 \ll eB \ll M^2$, onde m é a massa do quark leve e M é a massa do quark pesado. Nesse caso, o quark pesado sente pouco o campo e em primeira aproximação podemos considerar o propagador livre.

Para o quark leve precisamos levar em conta o efeito do campo magnético no propagador. Será útil utilizarmos o propagador de Schwinger (Apêndice E) na forma de uma soma sobre os pólos de Landau como mostrada em [28], isto é:

$$S_{ab}(k) = i\delta_{ab}e^{-k_{\perp}^2/(eB)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{D_n(eB, k)}{k_{\parallel}^2 - m^2 - 2eBn + i\epsilon}, \quad (5.74)$$

onde,

$$D_n(eB, k)_{ab} = \delta_{ab}(k_{\parallel}^2 + m) \left[(1 - \gamma^1 \gamma^2 \text{sgn}(eB)) L_n \left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) + \right. \\ \left. - (1 + i\gamma_1 \gamma_2 \text{sgn}(eB)) L_n \left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right) \right] + 4k_{\perp} \cdot \gamma_{\perp} L_{n-1}^1 \left(\frac{2k_{\perp}^2}{eB} \right). \quad (5.75)$$

Na expressão acima, L_n^a são os polinômios associados de Laguerre e $L_n \equiv L_n^0$ são os polinômios de Laguerre usuais. Quando $n < 0$ vamos definir $L_n = L_{n-1}^1 = 0$.

Como estamos interessados no limite de campo magnético forte ($eB \gg m^2$), podemos considerar apenas o termo correspondente a $n = 0$, isto é, o LLL:

$$S_{ab}^{(0)}(k) = i\delta_{ab}e^{-k_{\perp}^2/(eB)} \left(\frac{k_{\parallel} \cdot \gamma_{\parallel} + m}{k_{\parallel}^2 - m^2} \right) (1 - i\gamma^1 \gamma^2). \quad (5.76)$$

Vamos substituir o propagador dado por (5.76) para o quark leve (massa $m \sim 0$ e carga c) e o propagador livre para o quark pesado (massa M e carga C) na expressão do correlator dada por (5.1). Dessa forma, obtemos:

$$\Pi(q) = -\frac{3i}{(2\pi)^4} \int d^4k \text{Tr} [\gamma_5 (\not{k} + \not{q} + M) \gamma_5 (k_{\parallel} \cdot \gamma_{\parallel}) (1 - i\gamma^1 \gamma^2)] \frac{e^{-\frac{k_{\perp}^2}{ceB}}}{((k+q)^2 - M^2)k_{\parallel}^2} \\ = 3 \cdot 4i \int \frac{d^2k_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{-\frac{k_{\perp}^2}{ceB}} \int \frac{d^2k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{k_{\parallel}^2 + k_{\parallel} \cdot q_{\parallel}}{((k+q)^2 - M^2)k_{\parallel}^2}. \quad (5.77)$$

A integral em k_{\parallel} pode ser efetuada através da parametrização de Feynman (F.2). A integração na variável introduzida pela parametrização de Feynman resulta em um logaritmo no momento externo, que é o único termo a contribuir para a parte imaginária e que introduz uma condição cinemática dada por $q^2 > M^2$. Assim,

$$\text{Im}[\Pi(q)] = 3e^{-q_{\perp}^2/(ceB)} \int \frac{d^2k_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{-k_{\perp}^2/(ceB) + 2k_{\perp} \cdot q_{\perp}} \\ = \frac{3}{2\pi} e^{-q_{\perp}^2/(ceB)} \int dk_{\parallel} k_{\parallel} e^{-k_{\perp}^2/(ceB)} I_0 \left(\frac{2k_{\parallel} q_{\parallel}}{ceB} \right), \quad (5.78)$$

onde I_0 é a função de Bessel modificada e estamos integrando sob a condição cinemática $q^2 > M^2$. A densidade espectral é dada então por $\rho^{\text{OPE}} = \text{Im}[\Pi(q)]/\pi$, isto é:

$$\rho^{\text{OPE}}(q) = \frac{3}{2\pi} e^{-q_{\perp}^2/(ceB)} \int_0^{\sqrt{q_{\parallel}^2 - M^2}} dk_{\parallel} k_{\parallel} e^{-\frac{k_{\perp}^2}{ceB}} I_0\left(\frac{2k_{\parallel}q_{\parallel}}{ceB}\right). \quad (5.79)$$

Essa expressão será utilizada nas RSQCD a diante.

5.2.3 Condensados

Condensados de Quarks

O comportamento dos condensados de quarks (ou *quiral*) na presença de um campo magnético externo é calculado com a teoria de perturbação quiral (χ PT) [29–31] com o modelo de (Polyakov)-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL) [32, 28] e na rede [33–38]. Em todos os cálculos é observado o crescimento do condensado quiral com o campo magnético, como pode ser visto nas Figuras 5.4 e 5.5. Podemos entender isso fazendo um paralelo com o estudo da supercondutividade.

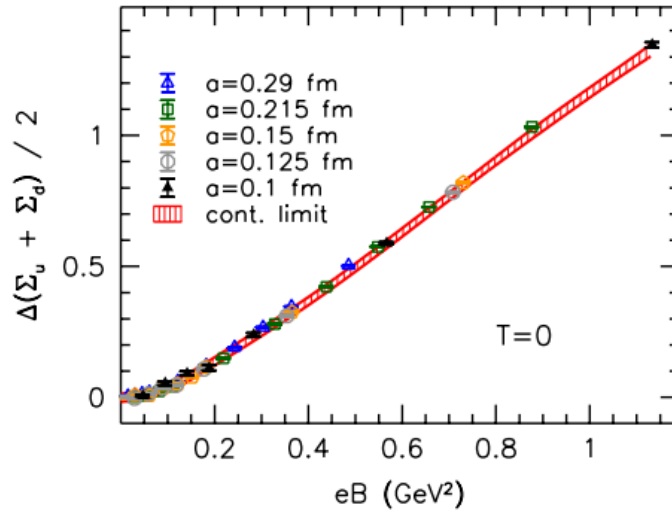


Figura 5.4: Cálculo na rede da variação do condensado de quarks com o campo magnético. Retirado de [33].

A quebra espontânea de simetria é utilizada para explicar dinamicamente a origem das massas das partículas elementares. No contexto da QCD, o modelo de Nambu Jona-Lasinio [39, 40] utiliza-se de uma simetria aproximada a baixas energias que é a simetria quiral. A quebra dessa simetria na presença de um

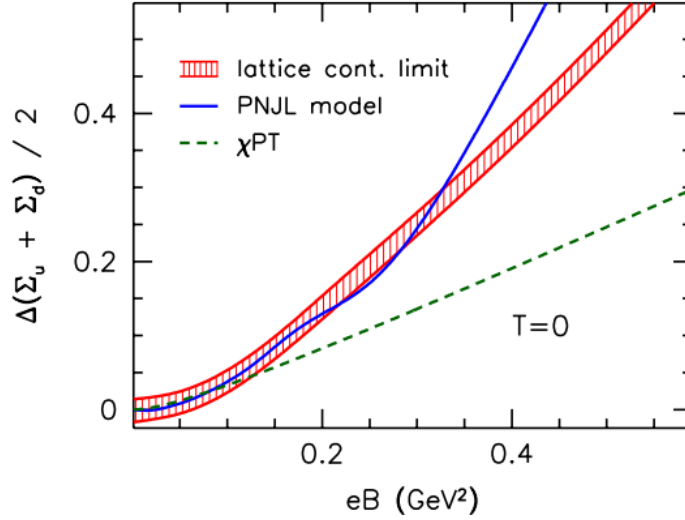


Figura 5.5: Comparação com o cálculo na rede com as previsões dos modelos χ PT e (P)NJL. Retirado de [33].

campo magnético externo resulta no fenômeno conhecido como “*Catálise Magnética*” [13]. O que acontece é que mesmo na teoria livre o campo magnético tem a tendência de elevar o valor do condensado de férmion-antiférmion, que está associado com a quebra de simetrias globais e gera uma massa dinâmica para as partículas. Isto pode ser visto explicitamente utilizando o propagador de Schwinger dado por (5.36). Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle &= - \lim_{x \rightarrow y} \text{Tr} S(x, y) \\
 &= - \lim_{x \rightarrow y} \int d^4 k e^{ik(x-y)} S(k) \\
 &= - \frac{4m}{(2\pi)^4} \int d^4 k \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds \exp \left[-s \left(m^2 + k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs} \right) \right] \\
 &= - \frac{4m}{4\pi^2} |eB| \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-sm^2} \coth(eBs) \xrightarrow{m \rightarrow 0} -|eB| \left(\ln \frac{\Lambda^2}{m^2} + O(m^0) \right),
 \end{aligned} \tag{5.80}$$

onde o traço vem da seguinte estrutura de Dirac:

$$\text{Tr} [1 + \gamma^1 \gamma^2 \tanh(eBs)] = 4. \tag{5.81}$$

Fizemos uma rotação de Wick para realizar a integral nos momentos e Λ é o cutoff ultravioleta da teoria.

É importante notar que o papel do campo magnético neste contexto é oposto do que ocorre em supercondutividade com os pares de Cooper. Uma das razões para isso é que não ocorrerá o Efeito Meissner, que consiste na expulsão do campo magnético do supercondutor durante a transição para o estado de supercondutividade.

A principal diferença vem do fato do condensado de quarks ser formado por um par férmion-antiférmion neutro e não por um par de Cooper carregado. No caso do par de Cooper os elétrons tem spins e momentos magnéticos opostos e na presença de um campo magnético externo, apenas um dos momentos magnéticos pode minimizar a energia orientando-se na direção do campo. Isso produz uma tensão energética e tende a quebrar o par de Cooper. No caso do condensado quirial o momento magnético dos férmions aponta na mesma direção, permitindo ambos se alinharem com o campo externo minimizando a energia sem criar nenhuma tensão.

Isso explica qualitativamente a diferença entre os dois sistemas e como a princípio, a geração da massa em ambos os casos pode ser drasticamente diferente na presença de um campo externo. Outro fenômeno essencial na explicação da quebra de simetria na presença do campo é a “*Redução Dimensional*”, que já discutimos no Capítulo 2.

No caso de campo magnético fraco, utilizaremos o valor do condensado calculado em $eB = 0$, uma vez que as correções serão mínimas. Já no caso de campo magnético forte, precisamos levar em conta o efeito do campo.

Condensado de Momento Magnético Anômalo

Na presença do campo magnético externo foi notada a existência de outros condensados. O de menor dimensão, e que estamos interessados em estudar a inclusão nas RSQCD, é conhecido como *condensado de momento magnético anômalo*. Ele é dado por $\langle \bar{\Psi} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Psi \rangle$, onde $\sigma_{\mu\nu} = i/2 [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ e $F^{\mu\nu} = [\partial^\mu, A^\nu]$.

Podemos utilizar o propagador de Schwinger (considerando o campo magnético no eixo z) e calcular explicitamente o valor do condensado, como no caso do condensado quirial (equação 5.80). A mudança no cálculo aparece no traço que agora passa a ser:

$$\text{Tr} [\sigma_{\mu\nu} (1 + \gamma^1 \gamma^2 \tanh(eBs))] = 4 \tanh(eBs). \quad (5.82)$$

As demais etapas do cálculo são análogas e obtemos:

$$\langle 0 | \bar{\Psi} i \gamma_1 \gamma_2 \Psi | 0 \rangle = -\frac{4m}{4\pi^2} |eB| \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{s} e^{-sm^2}. \quad (5.83)$$

É útil definirmos a polarização μ_f como:

$$\mu_f = \left| \frac{\langle 0 | \bar{\psi} i \gamma_1 \gamma_2 \psi | 0 \rangle}{\langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle} \right|, \quad (5.84)$$

que foi calculada na rede em [41, 42]. No limite de campo fraco, segundo [43], temos que:

$$\langle 0 | \bar{\psi} i \gamma_1 \gamma_2 \psi | 0 \rangle = \chi \langle 0 | \bar{\psi} \psi | 0 \rangle |qB|, \quad (5.85)$$

onde χ é a susceptibilidade magnética e q é a carga do férmion. Assim, para campos fracos temos $\mu_f = \chi |qB|$. Já para campos fortes, os efeitos não-lineares são dominantes e é observado uma saturação de $\mu_\infty = 1$, como é discutido em [44] com o *Modelo Quark-Meson* e o *Modelo de Nambu Jona-Lasinio*.

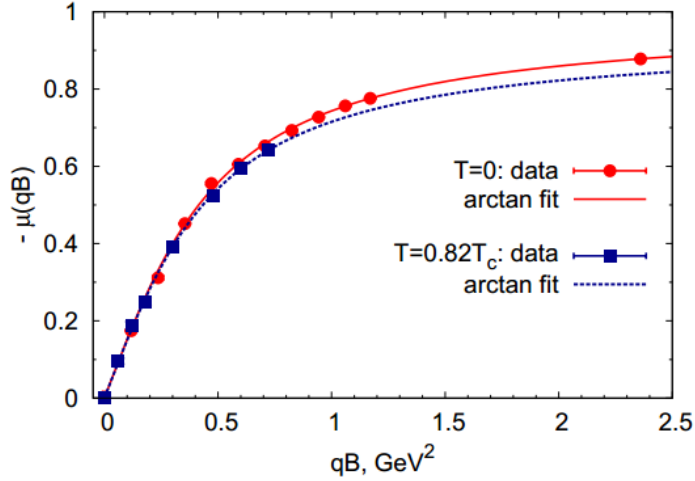


Figura 5.6: Cálculo da polarização μ_f como função do campo magnético para $T = 0$ e $T = 0.82T_c$. Retirado de [41].

Este condensado deve aparecer na OPE uma vez que o campo magnético quebra a simetria de Lorentz, alterando a estrutura da OPE. Assim, ao realizarmos as RSQCD devemos incluir esse condensado. Porém, nosso estudo ainda é preliminar e desprezamos este condensado nos cálculos. Futuramente, incluiremos esse novo condensado e calcularemos seu coeficiente proveniente da OPE.

5.2.4 Lado Fenomenológico com Campo Magnético

No caso do lado fenomenológico usamos a descrição do méson em termos hadrônicos. Dessa forma, tratamos os mésons B^\pm e D^\pm como partículas escalares. Como queremos saber o efeito do campo magnético externo uniforme vamos

utilizar o propagador de Schwinger de uma partícula escalar (Apêndice E):

$$G(p) = -i \int_0^\infty \frac{ds}{\cos eBs} \exp \left[-is \left(-m^2 - p_{\parallel}^2 + \frac{\tan(eBs)}{eBs} p_{\perp}^2 \right) \right]. \quad (5.86)$$

Estamos interessados nos mésons carregados pois assim, podemos usar essa descrição. Já no caso de um méson neutro, a influência do campo deve vir de efeitos de ordem superior. Expandindo o propagador em eB/m^2 , como foi feito no lado da OPE na aproximação de campo magnético fraco, obtemos:

$$G(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} - (eB)^2 \left[\frac{1}{(p^2 - m^2)^3} + \frac{2p_{\perp}^2}{(p^2 - m^2)^4} \right]. \quad (5.87)$$

5.3 Resultados

5.3.1 Cálculo para Campo Magnético Nulo

Antes de incluirmos o campo magnético nos cálculos fizemos o limite de $eB = 0$ para o méson B, a fim de conferirmos a parte numérica.

Como discutido anteriormente, precisamos garantir que a OPE truncada apresenta boa convergência para realizarmos as regras de soma. Esse critério fixa o limite inferior da janela de Borel e sugere a validade dos cálculos perturbativos. Na Figura 5.7 observamos que o termo perturbativo domina o termo do condensado de quarks, o que garante um truncamento razoável da OPE.

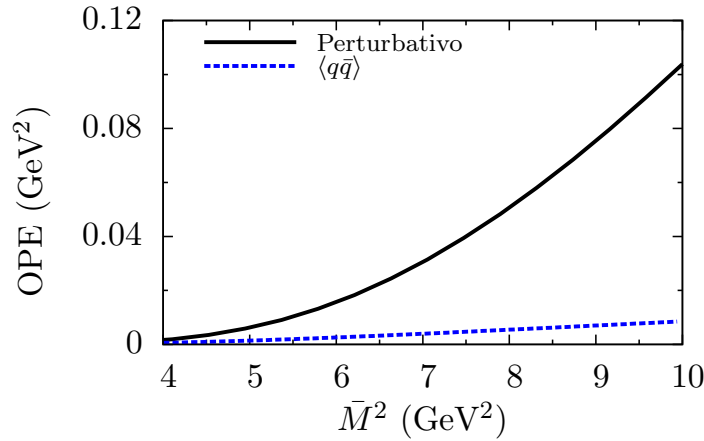


Figura 5.7: Estudo da convergência da OPE com a massa de Borel.

Para fixar o limite superior da janela de Borel utilizamos o critério da dominância do pólo sobre o contínuo. Para uma massa de Borel (\bar{M}) grande, a contribuição do contínuo torna-se relevante e a validade das regras de soma é reduzida.

Nesse caso, obtemos o limite superior de $\bar{M} \sim 8 \text{ GeV}^2$ para o limiar do contínuo $\sqrt{s_0} = 5.9 \text{ GeV}$, como pode ser visto na Figura 5.8.

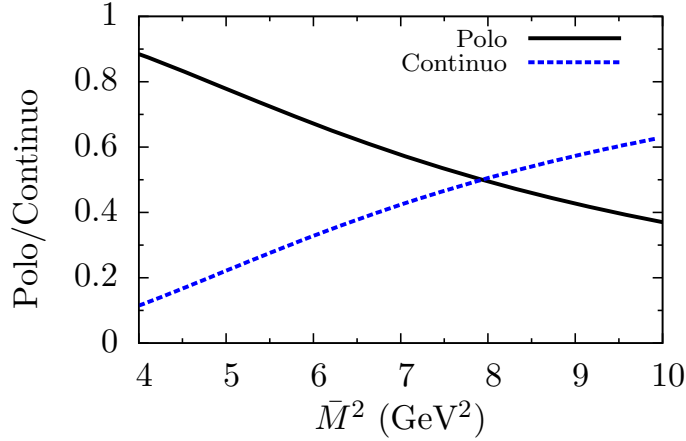


Figura 5.8: Dominância do pólo sobre o contínuo para a fixação do limite inferior da massa de Borel.

Por fim, com a janela de Borel fixada podemos obter os parâmetros hadrônicos, isto é, a massa do méson B e o seu acoplamento. Para obter o valor final dos parâmetros fazemos a média dentro da janela de Borel (Figura 5.9 e 5.10). Nesse caso, obtemos $m_B = 5.2 \text{ GeV}$ e $\lambda = 1.6 \text{ GeV}^4$. O erro nos parâmetros é proveniente do truncamento da OPE, do limiar do contínuo (s_0) e dos parâmetros utilizados (massa dos quarks e condensados). Neste trabalho, não faremos a estimativa dos erros, uma vez que estamos interessados nas razões entre massas e em observar os efeitos qualitativos da introdução do campo magnético nas RSQCD.

5.3.2 Limite de Campo Magnético Fraco

Fazendo a transformada de Borel no lado fenomenológico, obtemos:

$$\beta[\Pi^{\text{fen}}(Q^2)] = \Pi^{\text{fen}}(\bar{M}) = \lambda e^{-m_{B/D}^2/\bar{M}} \left[1 - (eB)^2 \left(\frac{1}{2\bar{M}^4} + \frac{q_\perp^2}{3\bar{M}^6} \right) \right] \quad (5.88)$$

Escreveremos as expressões em termos de $\tau = 1/\bar{M}^2$. Então, a regra de soma ($\Pi^{\text{OPE}} = \Pi^{\text{fen}}$) é dada por:

$$\Pi^{\langle \bar{q}q \rangle}(\tau) + \int_{s_m}^{s_0} ds e^{-s\tau} \left[\rho_0^{\text{OPE}}(s) + (eB)^2 \rho_2^{\text{OPE}}(s, q_\perp^2) \right] = \Pi^{\text{fen}}(\tau, q_\perp^2, \lambda, m_{B/D}), \quad (5.89)$$

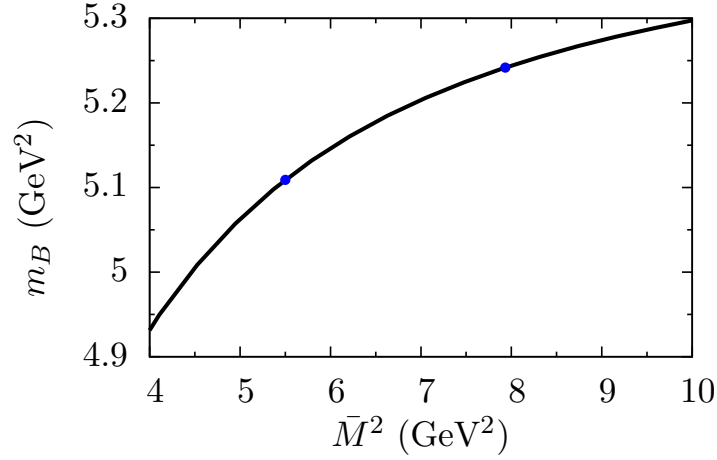


Figura 5.9: Massa do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel.

onde,

$$\Pi^{\text{fen}}(\tau, q_{\perp}^2, \lambda, m_{B/D}) = \lambda e^{-m_{B/D}^2 \tau} \left[1 - (eB)^2 \left(\frac{1}{2} \tau^2 + \frac{q_{\perp}^2}{3} \tau^3 \right) \right], \quad (5.90)$$

$$\Pi^{(\bar{q}q)}(\tau) = -M \langle \bar{q}q \rangle e^{-M^2 \tau} + 3 \cdot 2^3 m \langle \bar{q}q \rangle e^{-M^2 \tau} (1 + M^2 \tau). \quad (5.91)$$

Inicialmente fixamos um valor do campo magnético e de q_{\perp}^2 para realizar as regras de soma. Escolhemos $q_{\perp}^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$ pois esse valor é da mesma ordem de grandeza dos momentos envolvidos no problema.

O ponto básico é que para campos muito maiores que $\sim 2 \cdot 10^{-6} m_{\pi}^2 \sim 4 \cdot 10^{-8} \text{ GeV}^2$ a contribuição do termo perturbativo de ordem $(eB)^2$ compete em ordem de grandeza com o termo perturbativo de ordem $(eB)^0$, o que indica que a aproximação de campo fraco se torna inválida.

Isso pode ser visto no gráfico de convergência da OPE para $eB = 2 \cdot 10^{-6} m_{\pi}^2$ e $q_{\perp}^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$ na Figura 5.11 e até campos desta ordem, temos dominância do pólo sobre o contínuo (Figura 5.12). Os resultados das RSQCD podem ser vistos nas Figuras 5.13 e 5.14.

Também fizemos as regras de soma para q_{\perp}^2 fixo, eB variável e para eB fixo, q_{\perp}^2 variável. Escolhemos q_{\perp}^2 fixo na ordem de 1 GeV^2 (da ordem da escala de momentos do problema), e eB fixo em $\sim 2 \cdot 10^{-6} m_{\pi}^2$ (que leva ao efeito máximo em q_{\perp}^2). Os resultados podem ser vistos nas Figuras 5.15 e 5.16.

Podemos observar um efeito sistemático da massa diminuindo com o campo. Ao chegarmos próximo do campo máximo esse efeito é intenso (da ordem 5%),

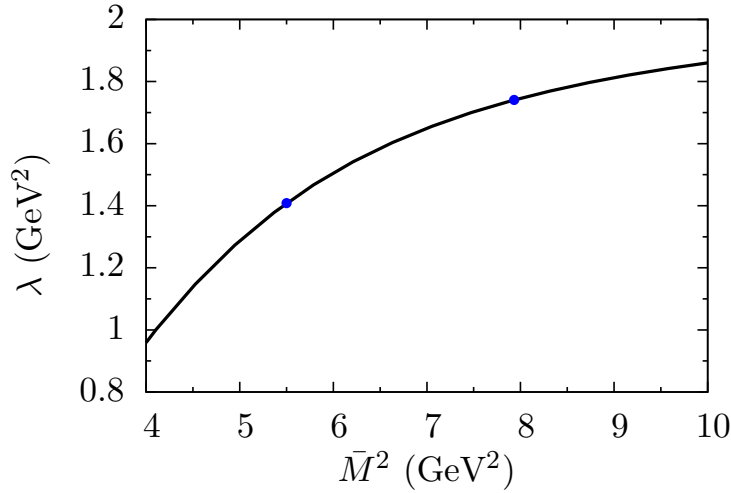


Figura 5.10: Acoplamento do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel.

porém nessa região já estamos no limite da aproximação. Contudo, a dependência com q_{\perp}^2 é da mesma ordem. Isto faz com que não possamos confiar no resultado numérico obtido. Nessa escala, o efeito do campo magnético ainda é muito pequeno e os erros da regra de soma e a dependência com o q_{\perp}^2 dominam o resultado. Porém, a tendência de diminuição da massa que obtemos com esse cálculo está de acordo com o que foi obtido com o estudo da equação de Schrödinger com campo magnético e com o potencial de Cornell.

5.3.3 Limite de Campo Magnético Forte

No caso do campo magnético forte o procedimento é análogo. Usamos a transformada de Borel do lado fenomenológico dado pela equação (5.90), a transformada de Borel do condensado de quarks dada por (5.91) e usamos o lado da OPE dado pela equação (5.79).

A condição para usarmos apenas o primeiro termo da expansão do propagador de Schwinger em termos dos níveis de Landau é dada por $m^2 \ll eB \ll M^2$. A massa do quark leve (u,d) é da ordem da massa do pión, isto é, $m^2 \sim m_{\pi}^2$. Por outro lado, a massa do quark pesado (b) é da ordem de $M_b^2 \sim 10^3 m_{\pi}^2$. Isso limita a região em que podemos realizar as regras de soma. Para termos dominância da OPE e janela de Borel, não podemos ir abaixo de $\sim 50m_{\pi}^2$ e nem acima de $\sim 250m_{\pi}^2$.

No limite do campo forte, só iremos analisar o caso do méson B , pois, o méson D possui um quark charm e o limite imposto por $m^2 \ll eB \ll M^2$ seria mais restrito, uma vez que $M_c \sim 10^2 m_{\pi}^2$. Nas Figuras 5.17-5.20 mostramos o estudo das

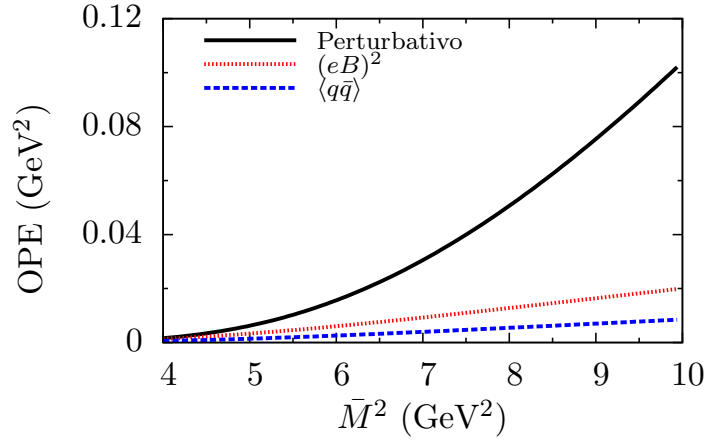


Figura 5.11: Estudo da convergência da OPE com a massa de Borel para o méson B , $eB = 2 \cdot 10^{-6} m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$. A curva vermelha corresponde ao condensado de quarks, a preta ao termo perturbativo e a azul a contribuição de $(eB)^2$.

RSQCD para $eB = 75m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$. Podemos observar que nesta região temos a convergência da OPE e a dominância do pólo sobre o contínuo. Com isso, é possível fixar a janela de Borel e obter um valor médio dos parâmetros hadrônicos.

O estudo da variação da massa com o momento perpendicular q_\perp^2 (Figura 5.22) mostra uma estabilidade para momentos até 1 GeV^2 , o que determina os valores médios do momento que usamos nas regras de soma. Da mesma forma que no caso do campo magnético fraco, vemos uma tendência de diminuição da massa com o campo magnético (Figura 5.21).

O cálculo ainda é qualitativo, uma vez que falta incluir o condensado do momento magnético anômalo e que os campos estão muito acima do estimado para o RHIC e o LHC, porém, corrobora os resultados obtidos com o modelo de potencial e nos motiva a continuar um estudo mais detalhado do problema.

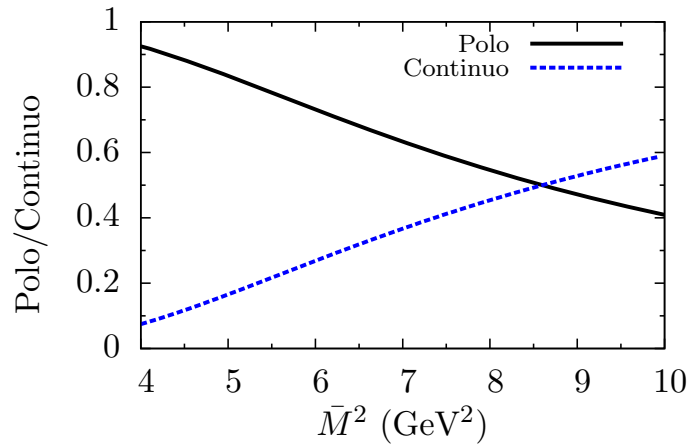


Figura 5.12: Dominância do pólo sobre o contínuo para a fixação do limite inferior da massa de Borel para o méson B , $eB = 2 \cdot 10^{-6} m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$.

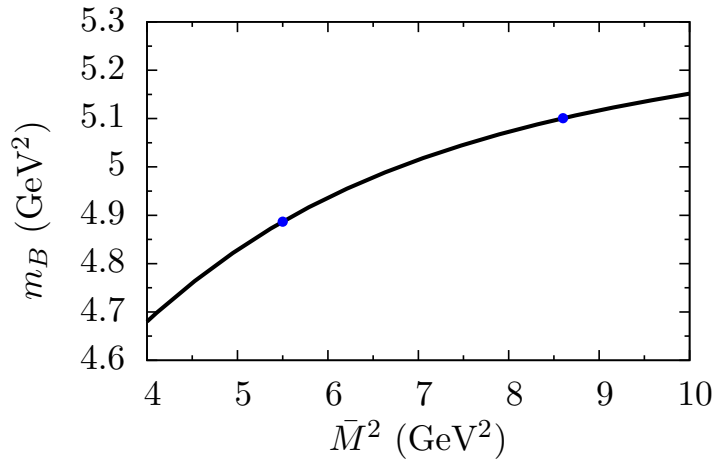


Figura 5.13: Massa do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel, $eB = 2 \cdot 10^{-6} m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$.

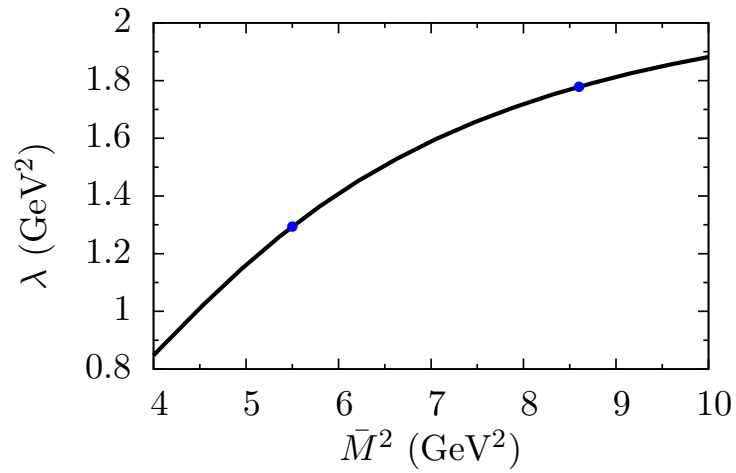


Figura 5.14: Acoplamento do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel, $eB = 2 \cdot 10^{-6} m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$.

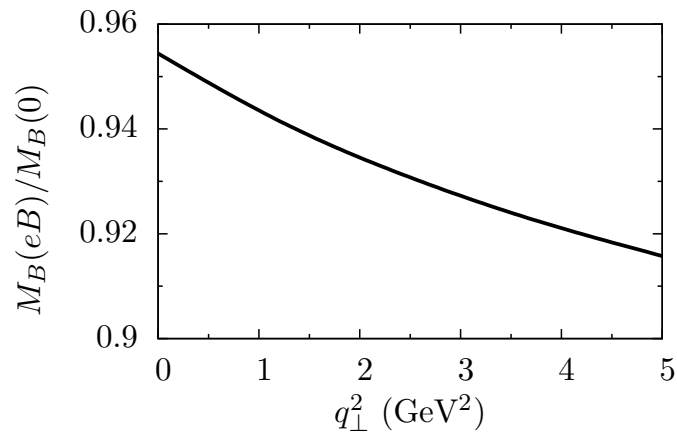


Figura 5.15: Variação da massa do méson B com o momento perpendicular ao campo magnético gerado na colisão.

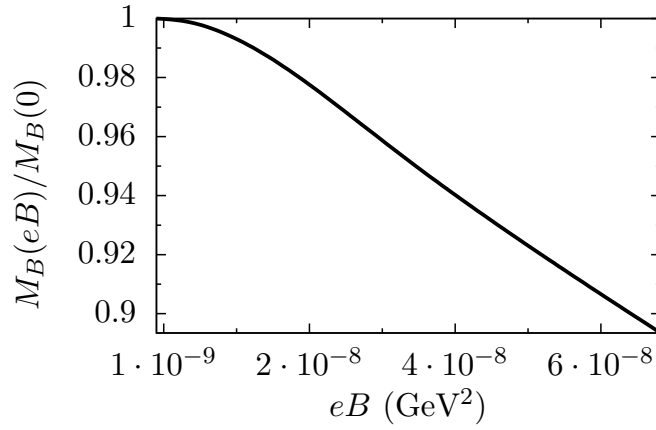


Figura 5.16: Variação da massa do méson B com o campo magnético para $q_{\perp}^2 = 1 \text{ GeV}^2$.

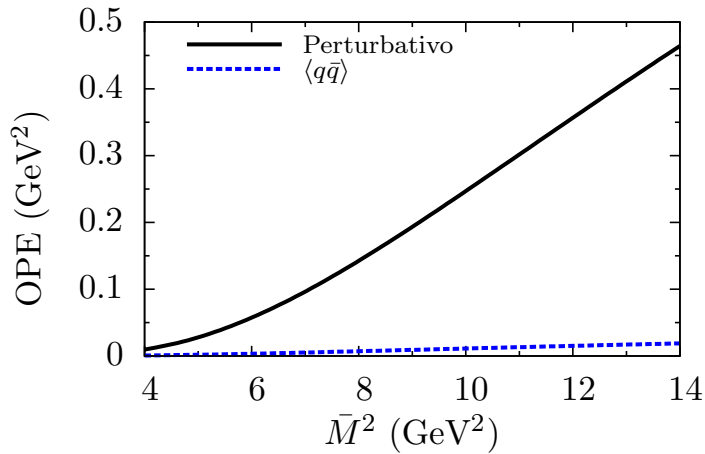


Figura 5.17: Estudo da convergência da OPE com a massa de Borel para o méson B , $eB = 75m_{\pi}^2$ e $q_{\perp}^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$. A curva vermelha corresponde ao condensado de quarks e a preta ao termo perturbativo.

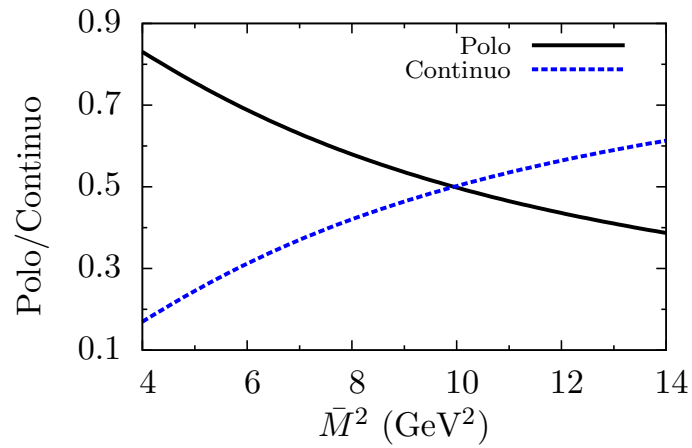


Figura 5.18: Dominância do pólo sobre o contínuo para a fixação do limite inferior da massa de Borel para o méson B , $eB = 75m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$.

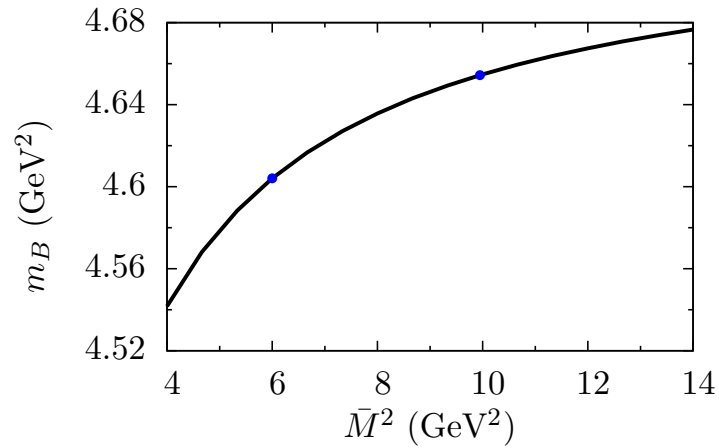


Figura 5.19: Massa do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel, $eB = 75m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$.

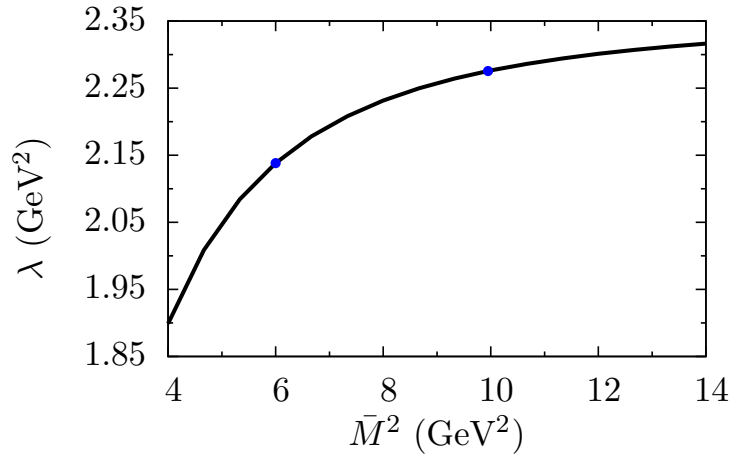


Figura 5.20: Acoplamento do méson B com a dependência na massa de Borel, onde os pontos fixam a janela de Borel, $eB = 75m_\pi^2$ e $q_\perp^2 = 1 \text{ GeV}^2$.

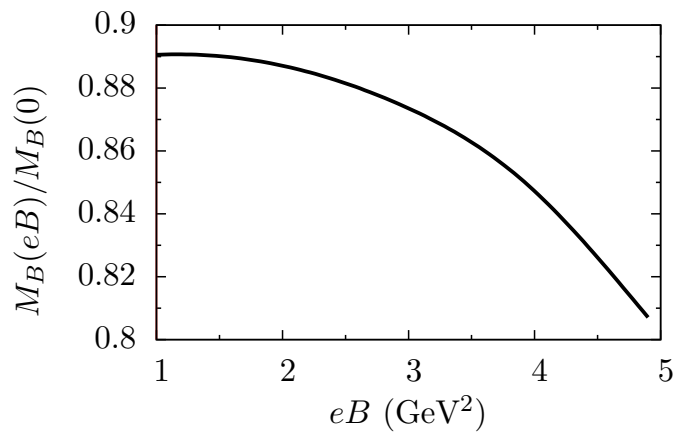


Figura 5.21: Variação da massa do méson B com o campo magnético para $q_\perp^2 = 0.5 \text{ GeV}^2$.

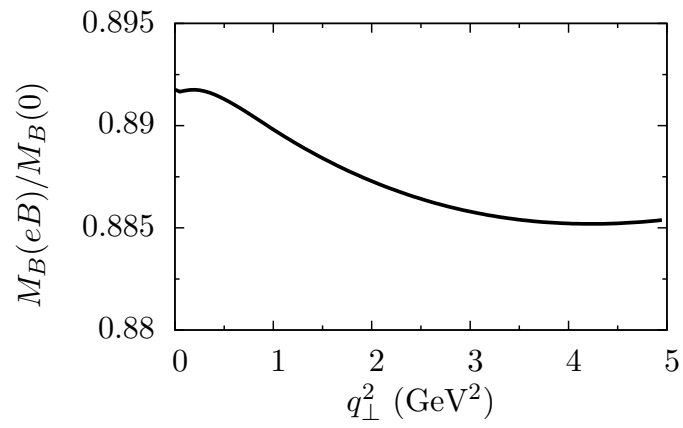


Figura 5.22: Variação da massa do méson B com o momento perpendicular ao campo magnético gerado na colisão.

Capítulo 6

O Efeito do Campo Magnético na Produção de J/ψ

O primeiro estado de *quarkonium* (estados ligados de um par quark-antiquark pesado) a ser observado foi o J/ψ (formado por um par $\bar{c}c$). Ele foi medido independentemente por dois experimentos: no Stanford Linear Accelerator (no processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$) e no Brookhaven National Laboratory (no processo $pBe \rightarrow e^+e^-$). Com isso, iniciaram-se diversos estudos tanto na espectroscopia como na dinâmica de produção destes estados.

A produção foi estudada através de diversos modelos ao longo dos anos, como o *Color Singlet Model* (CSM) [45], o *Non-relativistic QCD* (NRQCD) [46] e o *Color Evaporation Model* (CEM) [47]. A dificuldade deste estudo vem da existência de duas escalas no problema. A criação do par de quarks pesados resulta da escala de curtas distâncias, isto é, da ordem de $1/m_Q$ e pode ser calculada perturbativamente. Por outro lado, a transição do par $Q\bar{Q}$ para o estado de quarkonium é não perturbativa e vem de processos de longas distâncias, isto é, da ordem do tamanho do estado ligado.

Vamos focar nosso estudo no *Color Evaporation Model* (CEM) e nas consequências do campo magnético na produção de J/ψ .

6.1 Color Evaporation Model (CEM)

No CEM a produção de quarkonium é tratada como a produção de um par de quarks pesados com exceção de que a massa invariante do méson é restrita entre duas vezes a massa do quark pesado e duas vezes a massa do méson mais leve que pode ser formado com um quark pesado. Vamos discutir a evolução do modelo [48], as suas limitações e os resultados obtidos para a produção do *charmonium* (o caso do *bottonium* é análogo a descrição que faremos, com a troca da massa

do quark c pela massa do quark b).

Após a confirmação experimental do J/ψ , os primeiros estudos sobre a dinâmica de produção começaram. Em 1975, Einhorn e Ellis [49] discutiram duas propostas sobre a produção do charmonium. A primeira era que o processo de fusão de glúons seria dominante na produção do charmonium. A segunda proposta era que a dinâmica de produção do J/ψ seria essencialmente a mesma da produção de pares. O passo posterior para o desenvolvimento do modelo veio em 1977, simultaneamente de Fritsch [50] e Halzen [51, 52], com um tratamento quantitativo para a produção.

Diferente de Einhorn e Ellis, eles consideraram que o processo mais importante na produção de pares é o de aniquilação em um glúon virtual (Figura 6.1). A conservação da carga de cor implica que o par de $c\bar{c}$ esteja na configuração octeto de cor. Contudo, o hádron observado deve estar na configuração singleto de cor. O mecanismo que explica este cenário vem da interação do par com o campo de cor induzido pela colisão. Basicamente, o par neutraliza sua cor através da emissão de um soft glúon (“color evaporation”).

Como este processo é análogo ao da *Eletrodinâmica Quântica* (QED), onde um par de múons é produzido através da aniquilação de um par em um fóton virtual, podemos escrever a seção de choque de produção do par $c\bar{c}$ em termos da seção de choque de produção do múon. O fator de escala entre as duas vem devido ao acoplamento, a carga elétrica (diferentes nos dois processos) e a carga de cor (existente apenas nas interações fortes).

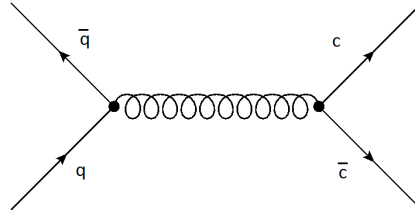


Figura 6.1: Diagrama de Feynman correspondente à criação de pares através de um glúon virtual.

$$\sigma_{c\bar{c}} \equiv \sigma_{q\bar{q}}(AB \rightarrow c\bar{c}X) = \frac{2}{3} \frac{\alpha_s^2}{\alpha^2 \langle q^2 \rangle} \sigma_\gamma(AB \rightarrow \mu^+ \mu^- X), \quad (6.1)$$

onde A e B podem ser qualquer hádron ou núcleo, o índice $q\bar{q}$ indica que o processo corresponde ao de aniquilação de pares, o índice γ indica que o processo da aniquilação de pares e troca de um fóton virtual e $\langle q^2 \rangle$ é a média da carga elétrica dos quarks participantes da reação.

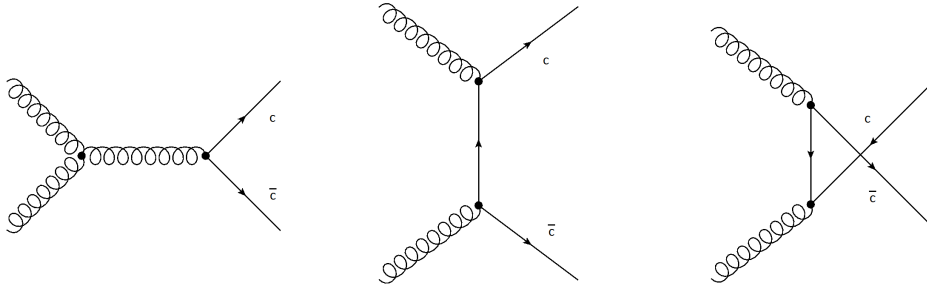


Figura 6.2: Diagrama de Feynman correspondente à fusão de glúons através dos canais s, t e u, respectivamente.

Outra hipótese do modelo é que integrando a equação (6.1) no intervalo de duas vezes a massa do quark c até duas vezes a massa do méson D^0 (méson mais leve que contém um quark c), obtemos a produção de um estado de charmonium qualquer. Podemos notar que essa hipótese corresponde à de Einhorn e Ellis em supor que a dinâmica de produção do quarkonium é a mesma da produção de pares. Com isso, temos que:

$$\sigma_{[c\bar{c}]} = \int_{2m_c}^{2m_{D^0}} dm \frac{d\sigma_{c\bar{c}}}{dm}, \quad (6.2)$$

onde m é a massa invariante do estado ligado e $[c\bar{c}]$ denota que estamos nos referindo a um estado geral de charmonium. Essa equação contém a parte perturbativa, isto é, a parte de curtas distâncias.

Por último, Fritzsche e Halzen prevêem uma produção com igual probabilidade para todos os estados de charmonium. Desta forma,

$$\sigma_C = \frac{1}{N_{[c\bar{c}]}} \sigma_{[c\bar{c}]}, \quad (6.3)$$

onde σ_C é a seção de choque de produção de um estado específico (por exemplo, o J/ψ) e $N_{[c\bar{c}]}$ corresponde ao número de diferentes estados de charmonium.

Com esse modelo foi possível descrever diversos fenômenos, porém ainda era um modelo muito simplificado. Em 1978, Gluck, Owens e Reya e Babcock [53], Sivers e Wolfram [54] melhoraram significamente os resultados incluindo o processo de fusão de glúons (Figura 6.2) no cálculo. A inclusão destes diagramas invalida a possibilidade de utilizar o artifício de reescalar a QED mostrado na equação (6.1) e faz com que seja necessário o cálculo perturbativo da QCD. Isso é feito fazendo a convolução das seções de choque à nível partônico de cada processo, utilizando as funções de distribuição apropriadas. Desta forma, temos

que:

$$\sigma_{c\bar{c}} \equiv \int dx_1 dx_2 H_{AB}(x_1, x_2; \mu^2), \quad (6.4)$$

onde,

$$H_{AB}(x_1, x_2; \mu^2) = \sum_{q=u,d,s} \left[f_q^A(x_1, \mu^2) f_{\bar{q}}^B(x_2, \mu^2) + f_{\bar{q}}^A(x_1, \mu^2) f_q^B(x_2, \mu^2) \right] \sigma_{q\bar{q}}(\mu^2) + f_g^A(x_1, \mu^2) f_g^B(x_2, \mu^2) \sigma_{gg}(\mu^2). \quad (6.5)$$

Na expressão acima, f_i^A é a densidade partônica no núcleo ou hádron. Apesar de apresentar melhores resultados nas formas das distribuições, com o avanço das medidas experimentais desvios significativos começaram a aparecer da normalização $1/N$ em que se considerava igual probabilidade de produção para todos os estados de charmonium. Com isto, o CEM foi de certo modo esquecido e novos modelos surgiram. Porém, em 1994, o CEM reapareceu após a proposta de Gavaï, Kharzeev, Satz, Schuler, Sridhar e Vogt [55]. A principal mudança foi considerar três cenários para a produção dos pares: *i*) a produção do singlete de cor através da emissão de um “soft glúon”(como anteriormente), *ii*) nem todos os pares $Q\bar{Q}$ criados vão formar estados de quarkonium (alguns podem se ligar com quarks leves) e *iii*) pares com massa invariante próximas da massa do D^0 podem ganhar energia através da interação com soft gluons produzindo hádrons com um quark leve.

Como consequência, dependendo dos números quânticos do par criado e do quarkonium do estado final, temos diferentes elementos da matriz não-perturbativa necessária para o cálculo da produção. A média desses elementos de matriz é combinada no fator universal F_C que depende da massa do quark e da escala de α_s . Com F_C fixo para um dado estado, o modelo prediz as distribuições dos demais estados, como é explicado em [56]. Assim, em primeira ordem de perturbação, temos que [57]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{c\bar{c}}}{dx_F dm^2} &= \int_0^1 dx_1 dx_2 \delta(x_1 x_2 s - m^2) \delta(x_F - x_1 + x_2) H_{AB}(x_1, x_2; m^2) \\ &= \frac{1}{s \sqrt{x_F^2 + 4m^2/s}} H_{AB}(x_{01}, x_{02}; m^2), \end{aligned} \quad (6.6)$$

com,

$$x_{01;02} = \frac{1}{2} \left(\pm x_F + \sqrt{x_F^2 + 4m^2/s} \right), \quad (6.7)$$

onde \sqrt{s} é a energia do centro de massa, x_F é a fração do momento carregada pelo par produzido e x_1 e x_2 são as frações de momento dos pártons. A função H_{AB} é dada por (6.5) e é calculada na escala $m^2 = x_1 x_2 s$.

As seções de choque partônicas em primeira ordem são dadas por [59]:

$$\sigma_{gg}(m^2) = \frac{\pi\alpha_s(m^2)}{3m^2} \left\{ \left(1 + \frac{4m_c^2}{m^2} + \frac{m_c^4}{m^4} \ln \left[\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right] \right) - \frac{1}{4} \left(7 + \frac{31m_c^2}{m^2} \right) \lambda \right\}, \quad (6.8)$$

$$\sigma_{q\bar{q}}(m^2) = \frac{8\pi\alpha_s^2(m^2)}{27m^2} \left(1 + \frac{2m_c^2}{m^2} \right) \lambda, \quad (6.9)$$

onde $\lambda = \sqrt{1 - 4m_c^2/m^2}$ e m_c é a massa do quark c . A constante de acoplamento em primeira ordem é dada por:

$$\alpha_s(\mu^2) = \frac{12\pi}{(33 - n_f) \ln(\mu^2/\Lambda^2)}, \quad (6.10)$$

sendo n_f é o número de sabores e Λ é a escala usada nas densidades partônicas. A seção de choque de produção do charmonium é obtida integrando (6.6) sobre a massa invariante m de $2m_c$ até $2m_{D^0}$, como foi discutido anteriormente. Obtemos que a seção de choque diferencial de produção de J/ψ é dada por:

$$\frac{d\sigma_{J/\psi}}{dx_F} = F_{J/\psi} \int_{4m_c^2}^{4m_{D^0}^2} dm^2 \frac{d\sigma_{c\bar{c}}}{dx_F dm^2}. \quad (6.11)$$

O resultado é análogo para o Υ ($b\bar{b}$), com a troca de m_c por m_b e m_D^0 por m_B^0 .

6.2 Resultados

Como investigamos nos capítulos anteriores, o campo magnético pode ter uma influência na massa dos mésons B e D. Como o valor da massa aparece no limite superior da integral podemos incluir esta mudança e ver como a produção do J/ψ e do Υ podem ser afetadas. Utilizamos a distribuição de pártons CTEQ6L [58] e a dependência da seção de choque com \sqrt{s} e com x_F foi calculada para diversas variações da massa dos mésons B e D. Os parâmetros usados foram: $m_c = 1.3 \text{ GeV}$, $m_b = 1.8 \text{ GeV}$, $F_{J/\psi} = 2.54\%$ e $F_\Upsilon = 4.60\%$.

Apesar do CEM ser um modelo aproximado para a produção de J/ψ e Υ podemos constatar que este pode ser um observável sensível aos efeitos do campo magnético. Nas Figuras 6.3 e 6.6 mostramos a variação da seção de choque diferencial quando mudamos o valor da massa dos mésons D e B, respectivamente. A

razão das seções de choque de produção é mostrada nas Figuras 6.4 e 6.7. Também avaliamos a mudança da seção de choque total com a energia do cm, contudo usamos a mesma variação da massa dos mésons para todas as energias, o que não reproduz o efeito do campo magnético aumentando com a energia do cm. De qualquer forma, podemos observar nas Figuras 6.5 e 6.8 que para energias altas este parâmetro também pode ser sensível a variações de massa devido ao campo magnético, principalmente para o J/ψ .

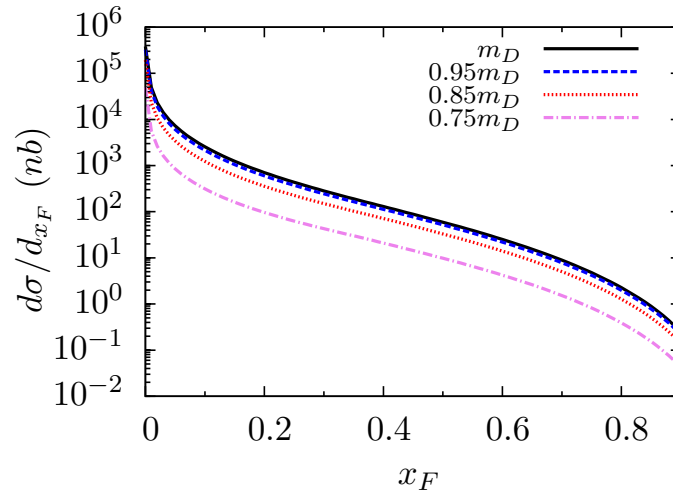


Figura 6.3: Seção de choque diferencial do J/ψ por x_F para $\sqrt{s} = 4.5 \text{ TeV}$ calculada com diversos valores para a massa do méson D .

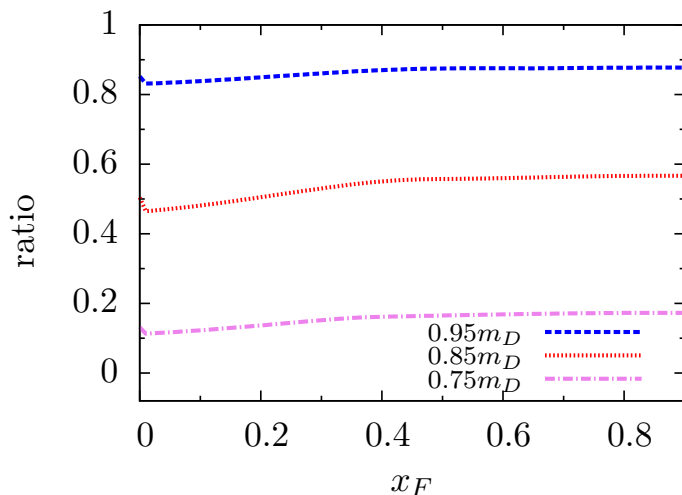


Figura 6.4: Razão da seção de choque diferencial do J/ψ calculada com diversos valores da massa do méson D pela seção de choque calculada com a massa em $eB = 0$ para $\sqrt{s} = 4.5 \text{ TeV}$.

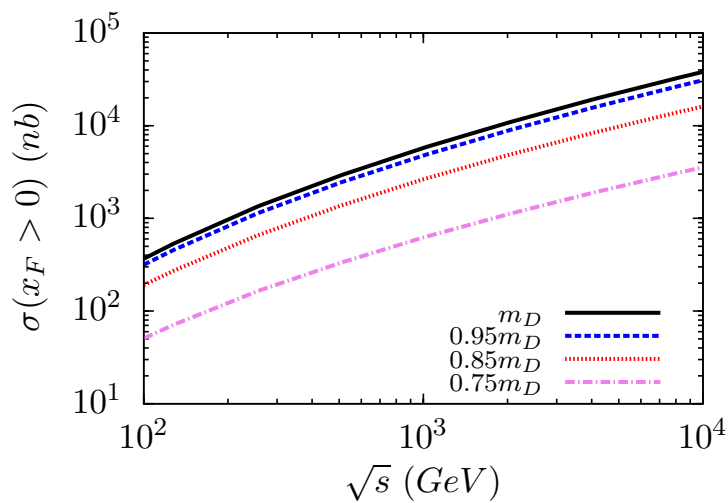


Figura 6.5: Seção de choque total com dependência da energia do centro de massa para diversos valores para a massa do méson D .

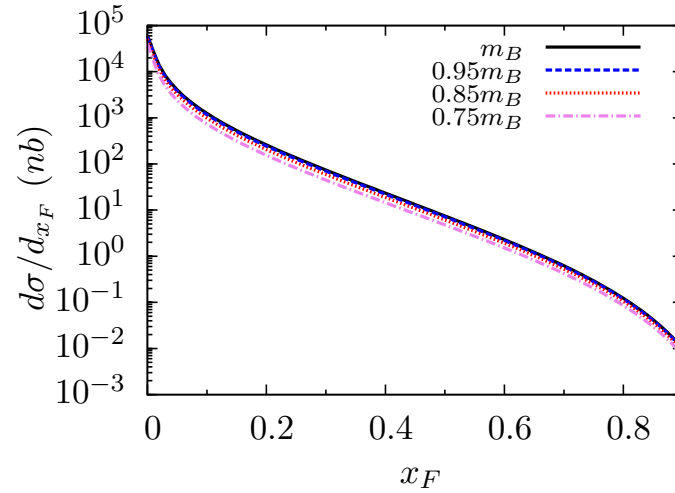


Figura 6.6: Seção de choque diferencial do Υ por x_F para $\sqrt{s} = 4.5 \text{ TeV}$ calculada com diversos valores para a massa do méson B .

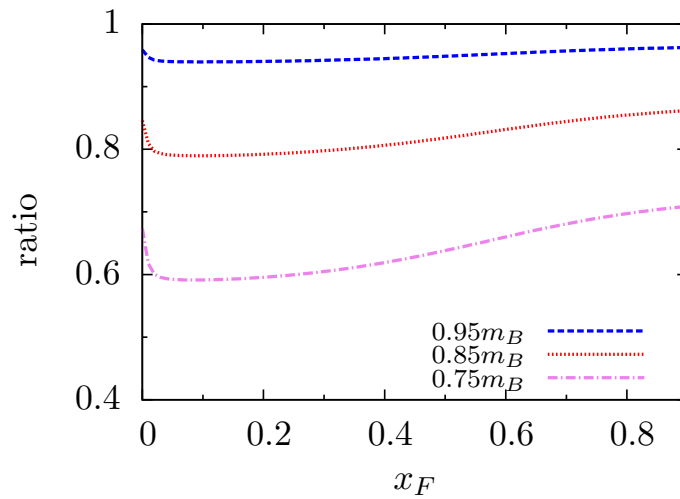


Figura 6.7: Razão da seção de choque diferencial do Υ calculada com diversos valores da massa do méson B pela seção de choque calculada com a massa em $eB = 0$ para $\sqrt{s} = 4.5 \text{ TeV}$.

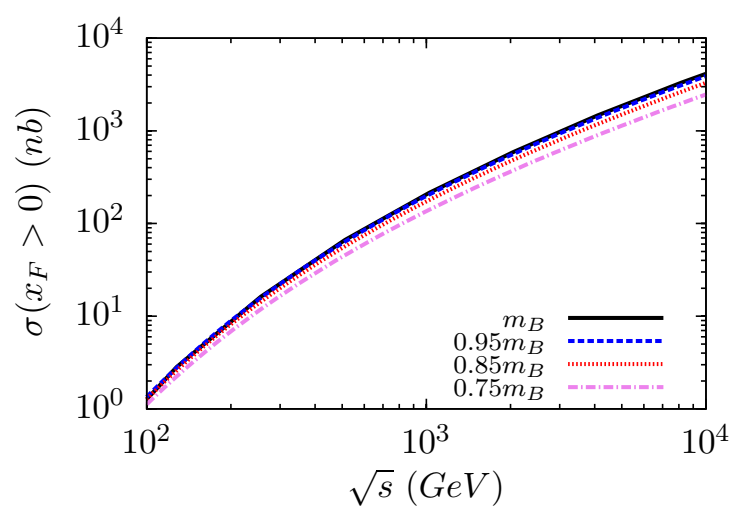


Figura 6.8: Seção de choque total com dependência da energia do centro de massa para diversos valores para a massa do méson B .

Capítulo 7

Conclusão

O objetivo deste trabalho foi explorar os efeitos do campo magnético, criado em colisões de íons pesados, na fenomenologia de mésons. Através do modelo semi-clássico constatamos que o campo pode alterar a massa de estados ligados, o que ocorre principalmente devido ao termo de acoplamento do spin com o campo externo.

Para melhorar essa análise, exploramos o formalismo da equação de Schrödinger e testamos o cálculo numérico em casos conhecidos, como o do oscilador harmônico e o do átomo de hidrogênio. Vale notar que no caso do átomo de hidrogênio reproduzimos cálculos analíticos para os níveis de energia na presença do campo magnético. O primeiro cálculo, desenvolvido em [9] possui pouca acurácia, por isso exploramos o cálculo refinado em [14] e assim, conseguimos comparar com o cálculo numérico desenvolvido com o método espectral.

O próximo passo consistiu na análise de estados semelhantes ao do átomo de hidrogênio, isto é, mésons com um quark leve e um pesado. Utilizando o potencial de Cornell, que descreve a interação da troca de um glúon e a parte confinamento, resolvemos a equação de Schrödinger numericamente e obtemos o comportamento de redução da massa dos mésons B e D, já esperado pela análise preliminar do método semi-clássico.

Apesar do tratamento ser não-relativístico e das dificuldades na fixação dos parâmetros, notamos que a redução da massa é significativa motivando explorarmos o efeito com um cálculo mais preciso.

Assim, utilizando o propagador de Schwinger modificamos as regras de soma da QCD, a fim de obtermos o espectro mesônico na presença do campo magnético em uma abordagem relativística.

Usamos duas aproximações: a de campo magnético fraco e forte, o que introduz certas simplificações no cálculo. Apesar de não serem os limites mais interessantes fisicamente, obtemos resultados que corroboram o obtido com o tratamento não-relativístico, ou seja, a redução da massa. Futuramente, pretendemos

desenvolver o cálculo sem nenhuma aproximação no campo magnético e com a introdução de outros condensados.

Por fim, utilizando o modelo de evaporação de cor calculamos as seções de choque de produção do J/ψ e do Υ com o efeito da diminuição da massa dos mésons B e D . Mostramos que uma mudança nessas massas altera a seção de choque.

Em resumo, concluímos que as massas diminuem com o campo magnético tanto na abordagem não-relativística, o que vemos ser um efeito da interação do spin com o campo, como também em alguns limites na abordagem relativística das regras de soma da QCD. Isso pode ter consequências fenomenológicas, como a alteração da seção de choque de produção de algumas partículas.

Apêndice A

O Potencial de Liénard-Wiechert

O potencial de uma carga pontual q em movimento é descrito pelo potencial retardado conhecido como potencial de Liénard-Wiechert [60]:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(r'c - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}, \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\mathbf{v}}{(r'c - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})}. \quad (\text{A.2})$$

Para obter estas equações utilizamos que a posição da carga em um tempo t é dada por $\mathbf{w}(t)$ (posição retardada) e o tempo retardado é dado por,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r). \quad (\text{A.3})$$

Além disso, o vetor que vai da posição retardada até um ponto \mathbf{r} do campo é dado por,

$$\mathbf{r}' = -\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r). \quad (\text{A.4})$$

Utilizando o potencial de Liénard-Wiechert e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, podemos calcular o campo magnético gerado por uma carga em movimento. Das equações (A.1) e (A.2), obtemos:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \nabla \times (\mathbf{v}V(\mathbf{r}, t)) \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{c^2} [V(\nabla \times \mathbf{v}) - \mathbf{v} \times (\nabla V)]. \quad (\text{A.6})$$

Vamos calcular ∇V , dado por:

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-1)}{(r'c - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^2} \nabla(r'c - \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}). \quad (\text{A.7})$$

Aplicando o operador ∇ , temos que:

$$r = c(t - t_r) \Rightarrow \nabla r' = -c\nabla t_r, \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{r}' \cdot \nabla)\mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r}' + \mathbf{r}' \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{r}'). \quad (\text{A.9})$$

Vamos reescrever cada termo da equação (A.9) acima de maneira mais conveniente:

- $(\mathbf{r}' \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{r}'(\mathbf{r}' \cdot \nabla t_r)$ onde usamos que $\frac{\partial v(t_r)}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial t_r} \frac{\partial t_r}{\partial x_i}$.
- $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r}' = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{r}' - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla t_r)$.
- $\mathbf{r}' \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\mathbf{r}' \times (\mathbf{a} \times \nabla t_r)$
- $\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{r}') = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{r} - \nabla \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \nabla t_r)$

Somando os termos e reagrupando, obtemos:

$$\nabla(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a} - v^2)\nabla t_r. \quad (\text{A.10})$$

Para completar o cálculo precisamos obter ∇t_r :

$$\begin{aligned} -c\nabla t_r &= \nabla \mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'}} \nabla(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') \\ &= \frac{1}{r'} [(\mathbf{r}' \cdot \nabla)\mathbf{r}' + \mathbf{r}' \times (\nabla \times \mathbf{r}')] \\ &= \frac{1}{r'} [\mathbf{r}' - \mathbf{v}(\mathbf{r}' \cdot \nabla t_r) + \mathbf{v} \times \nabla t_r]. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Desta forma, obtemos que:

$$\nabla t_r = -\frac{\mathbf{r}'}{r'c - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}}. \quad (\text{A.12})$$

Substituindo a equação (A.12) na (A.10) e reescrevendo (A.7), temos:

$$\nabla V = \frac{qc}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r'c - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{v})^3} [(r'c - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{v})\mathbf{v} - (c^2 - v^2 + \mathbf{r}' \cdot \mathbf{a})\mathbf{r}]. \quad (\text{A.13})$$

Desta forma, podemos obter $\nabla \times \mathbf{A}$ da equação (A.5):

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{-1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}')^3} \mathbf{r} \times [(c^2 - v^2)\mathbf{v} + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{a})\mathbf{v} + (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u})\mathbf{a}]. \quad (\text{A.14})$$

onde $\mathbf{u} \equiv c\hat{\mathbf{r}}' - \mathbf{v}$.

Para uma carga se movendo com velocidade constante, isto é, $\mathbf{a} = 0$ e $\mathbf{w} = \mathbf{v}t$, temos que:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{-1}{c} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}')^3} \mathbf{r} \times [(c^2 - v^2)\mathbf{v}]. \quad (\text{A.15})$$

Vamos reescrever a equação acima de maneira mais conveniente. Para isso, vamos simplificar $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}' &= r'c - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{v} \\ &= \sqrt{(c^2t - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)(r'^2 - c^2t^2)} \\ &= \sqrt{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v})^2 + (c^2 - v^2)r'^2 + c^2(vt)^2 - 2c^2(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}t)} \\ &= \sqrt{(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v})^2 - r'^2v^2 + c^2R^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

onde $\mathbf{R} = \mathbf{r}' - \mathbf{v}t$. Podemos definir o ângulo ϕ entre \mathbf{v} e \mathbf{R} . Assim,

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v})^2 - r'^2v^2 &= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{v})^2 - R^2v^2 \\ &= R^2v^2 \cos^2 \phi - R^2v^2 \\ &= -R^2v^2 \sin^2 \phi. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Reescrevendo B em função do ângulo ϕ :

$$B(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{R}}{R^3} \frac{(1 - v^2/c^2)}{[1 - (v/c)^2 \sin^2 \phi]^{3/2}}. \quad (\text{A.18})$$

Apêndice B

Equação de Whittaker

A parte radial da equação de Schrödinger com o potencial coulombiano em coordenadas esféricas ¹, pode ser escrita como,

$$\frac{d^2\chi}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\chi}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \chi + 2 \left(E + \frac{\alpha}{r} \right) \chi = 0 \quad (\text{B.1})$$

onde usamos que $V(r) = -1/r$. Fazendo a mudança de variável $\nu = -1/\sqrt{-2E}$, $\lambda = \sqrt{-2E}$ e $x = 2r/n$, obtemos

$$\chi'' + \frac{2}{\rho} \chi' + \left[-\frac{1}{4} + \frac{\nu}{\rho} - \frac{l(l+1)}{x^2} \right] \chi = 0 \quad (\text{B.2})$$

Esta equação é conhecida como *equação de Whittaker* e as soluções linearmente independentes são dadas por:

$$\begin{aligned} \chi_l(r) &= W_{\nu, l+1/2}(x) \\ &= e^{x/2} x^{\nu} \left[1 + \frac{(l+\nu)(l+1-\nu)}{x} + O(x^{-2}) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

conhecida como *função de Whittaker* que é definida através das funções confluentes hipergeométrica de Kummer. Os detalhes podem ser encontrados em [9], [14], [61] e [62].

Em geral, a função de Whittaker possui uma singularidade no zero. A expansão em $x \rightarrow 0$ para os estados de onda s , ou seja, $l = 0$ é dada por:

$$W_{\nu, 1/2}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \left[1 - c_1 x \ln x - c_2 x + c_3 x^2 \ln x + O(x^2) \right] \quad (\text{B.4})$$

¹Por simplicidade, estamos usando unidades atômicas de Hartree onde $\hbar = m_e = e = 1$ e $c = 1/\alpha = 137$.

onde $c_1 = \nu$, $c_2 = 1/2 + \nu[\psi(1 - \nu) - 1 + 2\gamma]$, $c_3 = \nu^2/2$, ψ é a derivada logarítmica da função Γ e $\gamma = \psi(1) \approx 0.577216$ é a constante de Euler-Mascheroni. Escrevendo em termos de r , temos:

$$\frac{d}{dr} W_{\nu, 1/2}(2\lambda r) = - \{ \lambda + 2[\ln(\lambda r) + \psi(1 - \lambda^{-1}) + 2\gamma + \ln 2] \} \quad (\text{B.5})$$

Apêndice C

Método espectral

C.1 Caso unidimensional

O método espectral aproxima a solução de uma equação diferencial parcial por um combinação linear de funções contínuas e periódicas. Queremos resolver uma equação do tipo:

$$-\frac{d^2}{dx^2}f(x) + x^2f(x) = Ef(x). \quad (\text{C.1})$$

Assim, queremos as soluções em termos das funções seno:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \left[\frac{i\pi}{2L}(x+L) \right]. \quad (\text{C.2})$$

A solução só é válida no intervalo $-L < x < L$. Temos que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \left(\frac{i\pi}{2L} \right)^2 \sin \left[\frac{i\pi}{2L}(x+L) \right] + x^2 \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \left[\frac{i\pi}{2L}(x+L) \right] = E \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin \left[\frac{i\pi}{2L}(x+L) \right]. \quad (\text{C.3})$$

Integrando com uma única base de senos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i \left(\frac{i\pi}{2L} \right)^2 \int_{-L}^L dx \sin \left[\frac{j\pi}{2L}(x+L) \right] \sin \left[\frac{i\pi}{2L}(x+L) \right] \quad (\text{C.4})$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_{-L}^L dx \sin \left[\frac{j\pi}{2L}(x+L) \right] x^2 \sin \left[\frac{i\pi}{2L}(x+L) \right] \quad (\text{C.5})$$

$$= E \sum_{i=1}^{\infty} A_i \int_{-L}^L dx \sin \left[\frac{j\pi}{2L}(x+L) \right] \sin \left[\frac{i\pi}{2L}(x+L) \right]. \quad (\text{C.6})$$

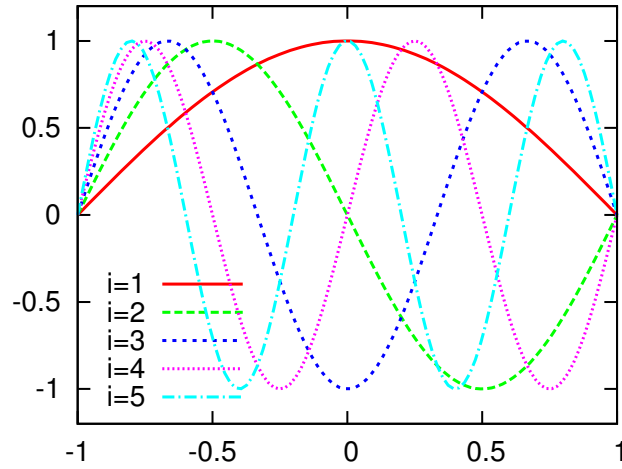


Figura C.1: Solução em termos das funções seno para $L = 1$.

Podemos usar a ortogonalidade das funções seno e reescrever a equação (C.3):

$$\int_{-L}^L dx \sin \left[\frac{i\pi}{2L}(x+L) \right] \sin \left[\frac{j\pi}{2L}(x+L) \right] = \delta_{ij}L. \quad (\text{C.7})$$

Assim, obtemos:

$$A_j \left(\frac{j\pi}{2L} \right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i C_{ij} = EA_j, \quad (\text{C.8})$$

onde o coeficiente C_{ij} é dado por,

$$C_{ij} = \frac{1}{L} \int_{-L}^L dx \sin \left[\frac{j\pi}{2L}(x+L) \right] x^2 \sin \left[\frac{i\pi}{2L}(x+L) \right]. \quad (\text{C.9})$$

Para uma melhor eficiência computacional, reescrevemos a equação usando a soma de cossenos:

$$C_{ij} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx x^2 \left\{ \cos \left[\frac{(j-i)\pi}{2L}(x+L) \right] - \cos \left[\frac{(i+j)\pi}{2L}(x+L) \right] \right\}. \quad (\text{C.10})$$

Logo, precisamos resolver numericamente a seguinte equação de autovalores para obter a energia:

$$A_j \left(\frac{j\pi}{2L} \right)^2 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx x^2 \left\{ \cos \left[\frac{(j-i)\pi}{2L}(x+L) \right] - \cos \left[\frac{(i+j)\pi}{2L}(x+L) \right] \right\} = EA_j. \quad (\text{C.11})$$

C.2 Caso bidimensional

Para resolver a equação bidimensional (ρ e z) vamos fazer a seguinte redefinição $\tilde{\Psi} = \rho\psi$. Reescrevendo a equação (3.1), temos:

$$-\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tilde{\Psi} + V_{eff}(\rho, z) \tilde{\Psi} = E \tilde{\Psi}, \quad (C.12)$$

onde $\omega_H = |qB|/m$ e definimos,

$$V_{eff}(\rho, z) = V(\rho, z) + \frac{1}{8} m \omega_H^2 \rho^2 + \frac{1}{2} \omega_H \sigma_z. \quad (C.13)$$

Vamos utilizar a base de senos para escrever a solução, isto é,

$$\psi(z, \rho) = \sum_{i=1, j=1}^{\infty} A_{ij} \sin \left[\frac{i\pi}{2L_z} (z + L_z) \right] \sin \left[\frac{j\pi}{L} (\rho + L) \right]. \quad (C.14)$$

A solução é válida no intervalo $-L < z < L$ e $0 < \rho < L$. Portanto,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m} \left\{ \sum_{i=1, j=1}^{\infty} A_{ij} \left[-\left(\frac{j\pi}{L} \right)^2 - \left(\frac{i\pi}{2L_z} \right)^2 \right] \sin \left[\frac{i\pi}{2L_z} (z + L_z) \right] \sin \left[\frac{j\pi}{L} (\rho + L) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=1, j=1}^{\infty} A_{ij} \sin \left[\frac{i\pi}{2L_z} (z + L_z) \right] \sin \left[\frac{j\pi}{L} (\rho + L) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\rho} \sum_{i=1, j=1}^{\infty} A_{ij} \left(\frac{j\pi}{L} \right) \sin \left[\frac{i\pi}{2L_z} (z + L_z) \right] \cos \left[\frac{j\pi}{L} (\rho + L) \right] \right\} \\ & \quad + V_{eff}(\rho, z) \sum_{i=1, j=1}^{\infty} A_{ij} \sin \left[\frac{i\pi}{2L_z} (z + L_z) \right] \sin \left[\frac{j\pi}{L} (\rho + L) \right] \\ & \quad = E \sum_{i=1, j=1}^{\infty} A_{ij} \sin \left[\frac{i\pi}{2L_z} (z + L_z) \right] \sin \left[\frac{j\pi}{L} (\rho + L) \right]. \end{aligned} \quad (C.15)$$

Podemos multiplicar a equação por $\sin \left[\frac{m\pi}{2L_z} (z + L_z) \right]$ e integrar no intervalo de $-L_z$ a L_z . Então, podemos usar a ortogonalidade da função seno para simplificar a expressão. Em ρ , podemos multiplicar a equação por $\sin \left[\frac{n\pi}{L} (\rho + L) \right]$ e integrar

de 0 a L . Em termos de eficiência numérica é conveniente usarmos que:

$$\begin{aligned} & \sin \left[\frac{j\pi}{L}(\rho + L) \right] \sin \left[\frac{m\pi}{L}(\rho + L) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left[\frac{(j-m)\pi}{L}(\rho + L) \right] - \cos \left[\frac{(j+m)\pi}{L}(\rho + L) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

$$\begin{aligned} & \cos \left[\frac{j\pi}{L}(\rho + L) \right] \sin \left[\frac{m\pi}{L}(\rho + L) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sin \left[\frac{(j+m)\pi}{L}(\rho + L) \right] - \sin \left[\frac{(j-m)\pi}{L}(\rho + L) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

As seguintes integrais serão úteis:

$$\begin{aligned} & \int_0^L d\rho \frac{1}{2\rho^2} \left\{ \cos \left[\frac{(j-m)\pi}{L}\rho \right] - \cos \left[\frac{(j+m)\pi}{L}\rho \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2L} \left\{ -\pi(j-m)Si[(j-m)\pi] + \pi(j+m)Si[(j+m)\pi] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L d\rho \frac{1}{2\rho} \left\{ \sin \left[\frac{(j+m)\pi}{L}\rho \right] - \sin \left[\frac{(j-m)\pi}{L}\rho \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ Si[(j+m)\pi] - Si[(j-m)\pi] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

onde Si é a integral de seno.

No final, a equação que precisamos resolver numericamente é (omitimos $\sum_{i,j} A_{ij}$ apenas para simplificar a notação):

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2m} \left\{ \left[-\left(\frac{j\pi}{L} \right)^2 - \left(\frac{i\pi}{2L_z} \right)^2 \right] + \frac{1}{L^2} \left\{ -\pi(j-m)Si[(j-m)\pi] + \pi(j+m)Si[(j+m)\pi] \right\} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{L} \left(\frac{j\pi}{L} \right) \left\{ Si[(j+m)\pi] - Si[(j-m)\pi] \right\} \right\} \\ & + \frac{2}{LL_z} \int_{-L_z}^{L_z} dz \int_0^L d\rho V(z, \rho) \frac{1}{4} \left[\cos \left[\frac{(i-n)\pi}{L}(\rho + L) \right] - \cos \left[\frac{(i+n)\pi}{L}(\rho + L) \right] \right] \\ & \quad \times \left[\cos \left[\frac{(j-m)\pi}{L}(\rho + L) \right] - \cos \left[\frac{(j+m)\pi}{L}(\rho + L) \right] \right] \\ & + \frac{1}{8} m \omega_H^2 \frac{2}{L} \int_0^L d\rho \frac{\rho^2}{2} \left[\cos \left[\frac{(j-m)\pi}{L}(\rho + L) \right] - \cos \left[\frac{(j+m)\pi}{L}(\rho + L) \right] \right] \\ & = E - \frac{1}{2} \omega_H \sigma_z. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Apêndice D

O Potencial de Cornell

O caráter não-perturbativo da *Cromodinâmica Quântica* (QCD) a baixas energias nos leva a buscar modelos efetivos para a descrição do espectro hadrônico. Alguns métodos com as Regras de Soma da QCD, cálculos na rede ou modelos quirais são utilizados nesse caso. Porém, muitas vezes não fica clara a interpretação física dos fenômenos estudados. Os modelos de potenciais tem a vantagem de serem simples, fornecerem uma boa descrição do espectro de massa dos estados ligados de quarks e serem claros na interpretação física da interação.

D.1 A Cromodinâmica Quântica

As partículas fundamentais e suas interações são derivadas a partir de simetrias de gauge descritas pelo Modelo Padrão. A simetria que define o Modelo Padrão é dada por $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ que descreve as interações forte, eletromagnética e fraca. O subgrupo $SU(3)_c$ corresponde à descrição da QCD que é a teoria das interações fortes. Essa é uma teoria de gauge não-abeliana e está associada com uma carga de cor.

O número quântico associado à cor foi proposto após a descoberta da partícula bariônica Δ^{++} que é composta de três quarks idênticos (uuu) e é simétrico em um estado de espaço \times spin \times sabor. Neste caso, ela violaria o *princípio de exclusão de Pauli* o que motivou à proposta do número quântico de cor. Os bósons de gauge da teoria são os glúons (bósons vetoriais sem massa) representados pelo campo G_V^a , onde a é o índice de cor associado aos 8 geradores do grupo ($\lambda^a/2$, onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann). Porém, o modelo de quarks ainda não respondia o porquê os hádrons são singletos de cor. A resposta surgiu com a descoberta de uma propriedade comum entre teorias não-abelianas: a liberdade assintótica. No regime de altas energias, a constante de acoplamento da QCD é pequena e o tratamento perturbativo usual é válido. Contudo, a baixas energias a

constante de acoplamento aumenta e a descrição perturbativa deixa de ser válida (D.1). Foi mostrado que para acoplamentos fortes, a QCD exibe o confinamento de cor, isto é, os únicos estados assintoticamente livres da teoria são os singletos do grupo $SU(3)$, que identificamos como o grupo de cor. A descrição do espectro hadrônico vêm então da descrição a baixas energias e é consequência do caráter não-abeliano da teoria.

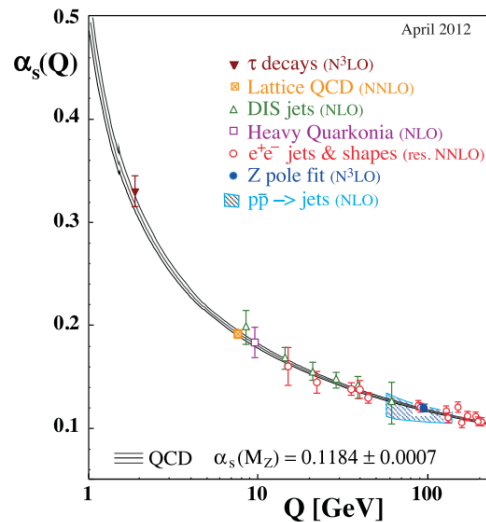


Figura D.1: Variação da constante de acoplamento do QCD em função da escala de energia. Retirado de [63].

Diante do aspecto não-perturbativo da QCD a baixas energias e a necessidade da descrição do espectro hadrônico, diversas técnicas foram desenvolvidas. A que exploraremos a seguir consiste na construção de um potencial que descreve a interação entre os quarks. Esse conceito surgiu em 1975 [64] e foi aperfeiçoado ao longo dos anos.

D.2 Construção de um Potencial Efetivo

Alguns aspectos importantes a serem notados na construção de um potencial são os seguintes:

- Os hádrons são singletos de cor;
- A longas distâncias o confinamento domina as interações;
- A curtas distâncias os quarks estão ligados por uma interação de longo alcance independente do sabor;

- Para estados ligados formados com quarks pesados podemos utilizar a aproximação não-relativística.

Inicialmente, podemos descrever a parte perturbativa da interação através do potencial obtido do espalhamento quark-antiquark. Essa situação descreve a interação no interior de um méson no limite de curtas distâncias, onde a constante de acoplamento é pequena.

A Lagrangiana de interação entre quarks e glúon é dada por:

$$\mathcal{L}_1^{\text{QCD}} = g_s \bar{q}_i \gamma_\mu \frac{\lambda_{ij}^a}{2} q_j G_a^\mu, \quad (\text{D.1})$$

onde g_s é o acoplamento, G_a^μ o campo de glúons, q_i o de quarks e Λ_a , $a = 1, 2, \dots, 8$, são as matrizes de Gell-Mann. Uma descrição detalhada desta seção pode ser encontrada em [65]. Os diagramas de Feynmann que contribuem em primeira ordem no espalhamento quark-antiquark e que vamos considerar, podem ser vistos na Figura D.2.

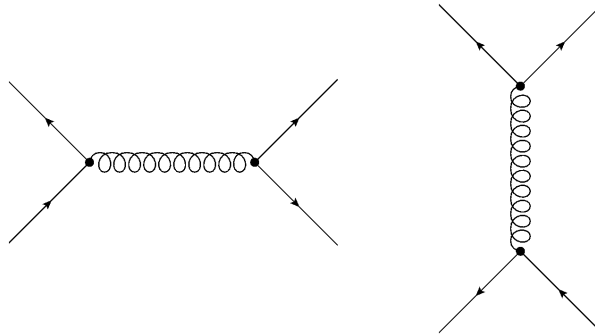


Figura D.2: Diagramas em primeira ordem. O da esquerda corresponde a troca de um glúon e o da direita a aniquilação de pares.

Para obter a parte perturbativa do potencial escrevemos a amplitude de espalhamento T_{fi} como:

$$S_{fi} = \langle f|i \rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) T_{fi}, \quad (\text{D.2})$$

onde S_{if} são os elementos da matriz \mathbf{S} . O potencial de interação vai então ser dado pela transformada de Fourier dos elementos T_{if} , isto é:

$$V(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} T_{fi}(\mathbf{k}). \quad (\text{D.3})$$

Para calcular o espalhamento quark-antiquark, vamos usar que:

$$q_1(p_1, s_1) + \bar{q}_2(p_2, s_2) \rightarrow q_3(p_3, s_3) + \bar{q}_4(p_4, s_4). \quad (\text{D.4})$$

Como o méson é um singlete de cor associamos o fator $\delta_{ij}/\sqrt{3}$ à função de onda de cada quark. Assim, a amplitude de espalhamento correspondente aos diagramas D.2, resulta em:

$$\begin{aligned} T_{fi} = & -g_s^2 \frac{m^2}{(2\pi)^6 \sqrt{E_1 E_2 E_3 E_4}} \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{3}} \frac{\delta_{kl}}{\sqrt{3}} \\ & \times \left[\frac{1}{(p_1 - p_2)^2} \frac{\lambda_{ki}^a \lambda_{jl}^a}{2} \bar{u}(3) \gamma_\mu u(1) \bar{v}(2) \gamma^\nu v(4) \right. \\ & \left. - \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} \frac{\lambda_{ji}^a \lambda_{kl}^a}{2} \bar{u}(3) \gamma_\mu v(4) \bar{v}(2) \gamma^\mu u(1) \right]. \quad (\text{D.5}) \end{aligned}$$

Após um pouco de álgebra, obtemos os chamados fatores de cor correspondente a cada diagrama:

$$\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{3}} \frac{\delta_{kl}}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_{ki}^a \lambda_{jl}^a}{2} = \frac{4}{3}, \quad (\text{D.6})$$

$$\frac{\delta_{ij}}{\sqrt{3}} \frac{\delta_{kl}}{\sqrt{3}} \frac{\lambda_{ij}^a \lambda_{kl}^a}{2} = 0. \quad (\text{D.7})$$

O que nos mostra que apenas o diagrama de troca de um glúon contribui para a amplitude de espalhamento. Portanto,

$$T_{fi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^6} \frac{4}{3} \frac{g_s^2}{\mathbf{k}^2}, \quad (\text{D.8})$$

o que, de (D.3), implica em:

$$V_{\text{pert}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}. \quad (\text{D.9})$$

chamada de parte coulombiana do potencial (perturbativa), onde $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$ e usualmente definimos $\kappa = 4\alpha_s/3$.

A contribuição correspondente a longas distâncias não pode ser calculada perturbativamente. Para descrevermos o confinamento, utilizamos então uma descrição fenomenológica, dada por:

$$V_{\text{conf}}(r) = \sigma r. \quad (\text{D.10})$$

O potencial de Cornell, a ser usado na descrição do espectro hadrônico, é então dado pela soma de (D.9) e (D.10):

$$V_{\text{corn}}(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + \sigma r. \quad (\text{D.11})$$

Seu comportamento pode ser visto na Figura D.3. Um exemplo de sua aplicação é a obtenção do espectro do charmonium, feita inicialmente por [17], [18].

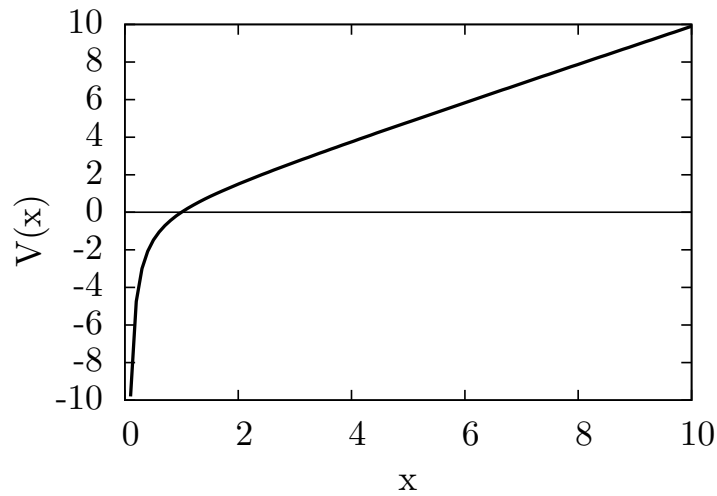


Figura D.3: Potencial de Cornell.

Apêndice E

O Propagador de Schwinger

O propagador de uma partícula na presença de um campo magnético externo pode ser obtido através do método de *proper-time* proposto por Schwinger [22] e que descreveremos a seguir.

O propagador de um férmion de spin 1/2 interagindo com um campo de calibre A_μ é solução da equação:

$$(i\cancel{\partial} + e\cancel{A} - m)G(x, x') = \delta(x - x'), \quad (\text{E.1})$$

onde $G(x, x')$ é a função de Green do campo de Dirac. Será útil considerar $G(x, x')$ o elemento de matriz de um operador G na base de coordenadas:

$$G(x, x') = \langle x' | G | x \rangle. \quad (\text{E.2})$$

Assim, podemos reescrever (E.1) como:

$$(\cancel{\mathbb{M}} - m)G = 1, \quad (\text{E.3})$$

onde $\Pi_\mu = p_\mu + eA_\mu$ é o momento canonicamente conjugado. A solução formal é dada por:

$$G = \frac{1}{\cancel{\mathbb{M}} - m} = -i \int_0^\infty ds (\cancel{\mathbb{M}} + m) e^{-i(m^2 - \cancel{\mathbb{M}}^2)s}. \quad (\text{E.4})$$

Como usual, temos as seguintes relações de comutação:

$$[\Pi_\mu, x_\nu] = ig_{\mu\nu}, \quad (\text{E.5})$$

$$[\Pi_\mu, \Pi_\nu] = ieF_{\mu\nu}, \quad (\text{E.6})$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ sendo o tensor de energia-momento. Com isso, podemos escrever:

$$\cancel{\mathbb{M}}^2 = \Pi^2 + \frac{1}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (\text{E.7})$$

onde $\sigma_{\mu\nu} = i/2[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Definindo, $H = -\not{M}^2$ e $U(s) = e^{-iHs}$, podemos reescrever (E.4) como:

$$G(x, x') = -i \int_0^\infty ds e^{-im^2s} \langle x' | (\not{M} + m) U(s) | x \rangle. \quad (\text{E.8})$$

Com essa notação, podemos interpretar H como uma “hamiltoniana” em um tempo próprio s (proper-time). Assim, sob a ação de $U(s)$, temos:

$$U(s)^\dagger A(0) U(s) = A(s), \quad (\text{E.9})$$

na representação de Heisenberg e,

$$U(s) | x(0) \rangle = | x(s) \rangle, \quad (\text{E.10})$$

na representação de Schrödinger. O elemento de matriz da função de Green, pode então ser escrito como:

$$G(x, x') = -i \int_0^\infty ds e^{-im^2s} [\gamma^\mu \langle x'(0) | \Pi_\mu(s) | x(s) \rangle + m \langle x'(0) | x(s) \rangle]. \quad (\text{E.11})$$

e podemos obter de (E.9) as equações de movimento:

$$\frac{dx_\mu}{ds} = 2\Pi_\mu, \quad (\text{E.12})$$

$$\frac{d\Pi_\mu}{ds} = -2eF_{\mu\nu}\Pi^\nu, \quad (\text{E.13})$$

onde assumimos a hipótese que $F_{\mu\nu}$ é constante. A condição de contorno a ser imposta é que $|x'\rangle$ e $|x\rangle$ formem uma base ortonormal em tempos próprios iguais.

$$\langle x'(0) | x(s) \rangle \rightarrow \delta^4(x - x'), \text{ para } s \rightarrow 0. \quad (\text{E.14})$$

A solução das equações de movimento é então dada por:

$$\Pi(s) = e^{-2eFs} \Pi(0), \quad (\text{E.15})$$

$$x(s) - x(0) = (1 - e^{-2eFs})(eF)^{-1} \Pi(0), \quad (\text{E.16})$$

em notação matricial. Olhando para (E.10), precisamos resolver as equações:

$$i\partial_s \langle x'(0) | x(s) \rangle = \langle x'(0) | H | x(s) \rangle, \quad (\text{E.17})$$

e também, temos que:

$$\langle x'(0) | \Pi_\mu(s) | x(s) \rangle = (i\partial_\mu + eA_\mu(x)) \langle x'(0) | x(s) \rangle, \quad (\text{E.18})$$

$$\langle x'(0) | \Pi_\mu(0) | x(s) \rangle = (-i\partial'_\mu + eA_\mu(x')) \langle x'(0) | x(s) \rangle. \quad (\text{E.19})$$

Com (E.7), (E.16) e um pouco de álgebra (os detalhes podem ser vistos em [22], [66]), podemos escrever a solução de (E.17):

$$\langle x'(0)|x(s)\rangle = \frac{C(x,x')}{s^2} \exp \left\{ -i \frac{\sigma F s}{2} - \frac{i}{4} (x-x') e F \coth(e F s) (x-x') - \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln ((e F s)^{-1} \sinh(e F s))] \right\}, \quad (\text{E.20})$$

onde $C(x,x')$ é um fator de fase que carrega a dependência de gauge e pode ser determinado de (E.18) e da condição de contorno (E.14), dado por:

$$C(x,x') = -\frac{i}{(4\pi)^2} \exp \left[i e \int_{x''}^{x'} dx A(x) \right]. \quad (\text{E.21})$$

Assim, podemos voltar em (E.11) e obter o propagador:

$$G(x,x') = -C(x,x') \int_0^\infty \frac{i}{s^2} \exp \left\{ -im^2 s + \frac{i}{4} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} s - \frac{i}{4} (x-x') e F \coth(e F s) (x-x') - \frac{1}{2} \text{Tr} [\ln ((e F s)^{-1} \sinh(e F s))] \right\} \left\{ \gamma \cdot \left[\frac{e F}{2} (\coth(e F s) - 1) (x-x') \right] + m \right\}. \quad (\text{E.22})$$

Estamos interessados no caso de campo magnético homogêneo. Se o campo estiver na direção x_3 , então a única componente não nula é $F_{12} = -F_{21} = B$. No gauge de Landau, onde $\mathbf{A} = (-Bx_2/2, Bx_1/2, 0)$, $A_\mu x^\mu = 0$ e com isso, temos que o fator de fase resulta em $C(x,x') = -i/(4\pi)^2$. Dessa forma, o propagador ganha uma forma simplificada:

$$S_f(k) = \int_0^\infty ds \exp \left[i s (k_0^2 - k_3^2 - k_\perp^2 \frac{\tan(eBs)}{eBs} - m^2) \right] \times [(k^0 \gamma^0 - k^3 \gamma^3 + m)(1 + \gamma^1 \gamma^2 \tan(eBs)) - k_\perp \cdot \gamma_\perp (1 + \tan^2(eBs))], \quad (\text{E.23})$$

onde $k_\perp = (k_1, k_2)$, $\gamma_\perp = (\gamma_1, \gamma_2)$ ¹ e já escrevemos o propagador no espaço dos momentos.

No caso do propagador escalar livre, precisamos resolver:

$$(\square^2 + m^2)G(x,x') = -\delta^4(x-x'), \quad (\text{E.24})$$

e de forma análoga a realizada anteriormente, na presença de um campo externo temos que resolver:

$$G = \frac{1}{\Pi^2 - m^2} = -i \int_0^\infty ds e^{-i(m^2 - \Pi^2)s} \quad (\text{E.25})$$

¹Estamos usando a assinatura da métrica de Minkowski (+, -, -, -)

O procedimento é semelhante ao que foi descrito no caso do férmion de spin 1/2 e já simplificando para um campo homogêneo na direção x_3 e no gauge de Landau, obtemos:

$$S_e(k) = -i \int_0^\infty \frac{ds}{\cos eBs} \exp \left[-is \left(-m^2 - k_{\parallel}^2 + \frac{\tan(eBs)}{eBs} k_{\perp}^2 \right) \right]. \quad (\text{E.26})$$

Apêndice F

Cálculo das Integrais nos Momentos

Para realizar as integrais será útil a parametrização de Feynman, dada por:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 \frac{dx}{[xA + (1-x)B]^2}, \quad (\text{F.1})$$

e a generalização,

$$\frac{1}{A_1^{\alpha_1} \dots A_n^{\alpha_n}} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \frac{\delta(\sum_{k=1}^n x_k - 1) x_1^{\alpha_1-1} \dots x_n^{\alpha_n-1}}{[x_1 A_1 + \dots x_n A_n]^{\sum_{k=1}^n \alpha_k}}. \quad (\text{F.2})$$

Com isso, as seguintes integrais aparecerão nos cálculos:

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - d/2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2}, \quad (\text{F.3})$$

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^n} = \frac{d}{2} \frac{(-1)^{n-1} i \Gamma(n - d/2 - 1)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2-1}, \quad (\text{F.4})$$

sendo estas realizadas no espaço de Minkowski [67].

O diagrama (4) da figura 5.3 corresponde à seguinte integral:

$$\Pi_{(4)} = 3 \cdot 4i(cB)(CB) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_0(k_0 + q_0) - k_3(k_3 + q_3) + mM}{((k + q)^2 - m^2)^2 (k^2 - M^2)} = \quad (\text{F.5})$$

$$= 3 \cdot 4i(cB)(CB) \int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{k_{\parallel}^2 + k_{\parallel} \cdot q_{\parallel} + mM}{((k_{\parallel} + q_{\parallel})^2 + (k_{\perp} + q_{\perp})^2 - m^2)^2 (k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2 - M^2)^2}, \quad (\text{F.6})$$

onde definimos $k_{\parallel} = (k_0, k_3)$, $k_{\perp} = (k_1, k_2)$.

Podemos usar a parametrização de Feynman (F.2) para $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 2$ e $n = 2$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi_{(4)} &= 3 \cdot 4i(cB)(CB)6 \int_0^1 dx x(1-x) \\ &\times \int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left[\frac{k_{\parallel}^2}{(k_{\parallel}^2 - \Delta_{\parallel})^4} + (-xq_{\parallel}^2 + x^2q_{\parallel}^2 - mM) \frac{1}{(k_{\parallel}^2 - \Delta_{\parallel})^4} \right], \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

onde $\Delta_{\parallel} = k_{\perp} - x(1-x)q_{\parallel}^2 - x(1-x)q_{\perp}^2 - x(-m^2 + M^2) + M^2$ e redefinimos $k_{\perp} + xq_{\perp} \rightarrow k_{\perp}$ e $k_{\parallel} + xq_{\parallel} \rightarrow k_{\parallel}$. Podemos resolver as integrais de acordo com (F.3), assim:

$$\begin{aligned} \Pi_{(4)} &= 3 \cdot 4i(cB)(CB)6 \int_0^1 dx x(1-x) \\ &\times \int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} \left[\frac{-i}{6(4\pi)} \frac{1}{\Delta_{\parallel}^2} + (-xq_{\parallel}^2 + x^2q_{\parallel}^2 - mM) \frac{i}{3(4\pi)} \frac{1}{\Delta_{\parallel}^3} \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

Para calcular a integral na componente perpendicular, vamos usar o mesmo procedimento, para isso escrevemos $\Delta_{\parallel} = k_{\perp}^2 + \Delta_{\perp}$. Lembrando que $k_{\perp} + xq_{\perp} \rightarrow k_{\perp}$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \Pi_{(4)} &= 3 \cdot 4(cB)(CB) \frac{1}{(4\pi)} \int_0^1 dx x(1-x) \\ &\times \int \frac{d^2 k_{\perp}}{(2\pi)^2} \left[\frac{1}{(k_{\perp}^2 + \Delta_{\perp})^2} - 2(q_{\parallel}^2(x^2 - x) - mM) \frac{1}{(k_{\perp}^2 + \Delta_{\perp})^3} \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Vale notar que como a integral em k_{\perp} está no espaço euclidiano, precisamos fazer a rotação de Wick nas integrais dadas em (F.3). O resultado da integração é:

$$\Pi_{(4)} = 3 \cdot 4(cB)(CB) \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx x(1-x) \left[\frac{1}{\Delta_{\perp}} - \frac{(q_{\parallel}^2(x^2 - x) - mM)}{2\Delta_{\perp}^2} \right], \quad (\text{F.10})$$

onde $\Delta_{\perp} = (x^2 - x)q^2 + xm^2 + (1-x)M^2$.

O diagrama (3) da figura 5.3 corresponde à seguinte integral:

$$\Pi_{(3)} = 3 \cdot 4i(CB)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \left[2 \frac{(k_1^2 + k_2^2)(mM - k \cdot (k + q))}{((k + q)^2 - m^2)(k^2 - M^2)^4} \right] \quad (\text{F.11})$$

$$- 2 \frac{(k_1 \cdot (k_1 + q_1) + k_2 \cdot (k_2 + q_2))}{((k + q)^2 - m^2)(k^2 - M^2)^3} \right] \quad (\text{F.12})$$

$$\equiv 3 \cdot 4i(CB)^2 (I_A + I_B). \quad (\text{F.13})$$

Em termos das componentes perpendicular e paralela, temos:

$$I_A = 2 \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{k_\parallel^2 (mM - (k_\parallel - k_\perp) - (k_\parallel \cdot q_\parallel - k_\perp \cdot q_\perp))}{((k+q)^2 - m^2)(k^2 - M^2)^4}, \quad (\text{F.14})$$

$$I_B = -2 \int \frac{d^2 k_\perp}{(2\pi)^2} \int \frac{d^2 k_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{k_\perp^2 + k_\perp \cdot q_\perp}{((k+q)^2 - m^2)(k^2 - M^2)^4}, \quad (\text{F.15})$$

onde $k^2 = k_\parallel^2 - k_\perp^2$, $k_\parallel = (k_0, k_3)$ e $k_\perp = (k_1, k_2)$.

Com o procedimento análogo ao que foi descrito para o diagrama (4), isto é, usando a parametrização de Feynman, definindo uma função $\Delta_{(\perp, \parallel)}$ e realizando as integrais nos momentos que são da forma de (F.3), obtemos que:

$$\begin{aligned} \Pi_{(3)} = & \frac{3 \cdot 4}{(4\pi)^2} (CB)^2 \int_0^1 dx (1-x)^3 \left[\frac{1}{\Delta_\perp} + \frac{q^2(x-x^2) - q_\perp^2(x-4x^2) + mM}{3\Delta_\perp^2} \right. \\ & \left. + \frac{2x^2 q_\perp^2 (q^2(x-x^2) + mM)}{3\Delta_\perp^3} \right] - \frac{3 \cdot 4}{(4\pi)^2} (QB)^2 \int_0^1 (1-x)^2 \left[\frac{1}{\Delta_\perp} + \frac{q_\perp^2(x^2-x)}{\Delta_\perp^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{F.16})$$

onde $\Delta_\perp = (x^2 - x)q^2 + xm^2 + (1-x)M^2$. Para obter a integral correspondente ao diagrama (8) da figura 5.3, basta fazermos as trocas $C \leftrightarrow c$, $m \leftrightarrow M$ e $(q+k) \leftrightarrow k$.

Referências Bibliográficas

- [1] T. Vachaspati Phys. Lett. B265 (1991) 258, 261.
- [2] R. C. Duncan and C. Thompson Astrophys. J. 392 (1992) L9.
- [3] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran and H. J. Warringa, Nucl. Phys. A **803**, 227 (2008).
- [4] V. Skokov, A. Y. Illarionov and V. Toneev, Int. J. Mod. Phys. A 24, 5925 (2009).
- [5] K. Marasinghe and K. Tuchin, Phys. Rev. C **84**, 044908 (2011).
- [6] K. Tuchin, Phys. Lett. B **705**, 482 (2011).
- [7] D. -L. Yang and B. Muller, J. Phys. G G **39**, 015007 (2012).
- [8] V. Voronyuk, V. D. Toneev, W. Cassing, E. L. Bratkovskaya, V. P. Konchakovski and S. A. Voloshin, Phys. Rev. C **83**, 054911 (2011) [arXiv:1103.4239 [nucl-th]].
- [9] Landau L.D. and Lifshitz E.M., Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory (Pergamon, New York) 1991, 3rd ed.
- [10] M. I. Vysotsky, arXiv:1112.0275 [physics.atom-ph].
- [11] F. Karsch, M. T. Mehr and H. Satz, Z. Phys. C **37**, 617 (1988).
- [12] Y. .A. Simonov, B. O. Kerbikov and M. A. Andreichikov, arXiv:1210.0227 [hep-ph].
- [13] I. A. Shovkovy, arXiv:1207.5081 [hep-ph].
- [14] B.M. Karnakov and V.S. Popov, ZhETF **124** (2003) 996 [J. Exp. Theor. Physics **97**, 890 (2003)]
- [15] L. I. Shiff, and H. Snyder, Phys. Rev. **55**, 59 (1939).

- [16] M. I. Vysotsky, arXiv:1209.3242 [hep-ph].
- [17] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane and T. -M. Yan, Phys. Rev. D **17**, 11 (1978).
- [18] E. Eichten, K. Gottfried, T. Kinoshita, K. D. Lane and T. -M. Yan, Phys. Rev. D **21**, 203 (1980).
- [19] C. Quigg and J. L. Rosner, Phys. Rept. **56**, 167 (1979).
- [20] K. Tuchin, arXiv:1301.0099 [hep-ph].
- [21] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B147, (1979) 385, Nucl.Phys. B147, (1979) 519.
- [22] J. Schwinger, Phys. Rev. 82, 664-679 (1951).
- [23] K. G. Wilson, Phys. Rev. 179 (1969), 1499.
- [24] P. Pascual and R. Tarrach, QCD: Renormalization for the Practitioner (Springer) 1984, Cap.VI.
- [25] S. I. Finazzo, *Estrutura dos Estados Exóticos do Charmônio Utilizando as Regras de Soma da QCD*. Tese de Mestrado, Instituto de Física da Universidade de São Paulo (2012).
- [26] W. Greiner, S. Schramm e E. Stein, Quantum Chromodynamics. Springer Verlag, Berlin. 2nd Edition, 2004.
- [27] S. Narison, QCD as a theory of hadrons: from partons to confinement. Cambridge University Press, 2004.
- [28] V. P. Gusynin, V. A. Miransky and I. A. Shovkovy, Nucl. Phys. B **462**, 249 (1996) [hep-ph/9509320].
- [29] I. Shushpanov and A. V. Smilga, Phys. Lett. B **402**, 351 (1997).
- [30] N. O. Agasian and I. Shushpanov, Phys. Lett. B **472**, 143 (2000); N. O. Agasian, Phys. Atom. Nucl. **64**, 554 (2001).
- [31] T. D. Cohen, D. A. Mc Gady, and E. S. Werbos, Phys. Rev. C **76**, 055201 (2007); J. O. Andersen, arXiv:1202.2051; 1205.6978.
- [32] R. Gatto and M. Ruggieri, Phys. Rev. D **83**, 034016 (2011).
- [33] G. S. Bali, F. Bruckmann, G. Endrodi, Z. Fodor, S. D. Katz and A. Schafer, Phys. Rev. D **86**, 071502 (2012); arXiv:1206.4205 [hep-lat].

- [34] P.Buividovich, M.Chernodub, E.Luschevskaya and M.Polikarpov, Phys.Lett. B 682, 484 (2010); arXiv:0812.1740.
- [35] V.Braguta, P.Buividovich, T.Kalaydzhyan, S.Kusnetsov and M.Polikarpov, PoS Lattice 2010, 190 (2010); arXiv:1011.3795.
- [36] M.D'Elia, S.Mukherjee and F.Sanlippo, Phys. Rev. D 82, 051501 (2010); arXiv:1005.5365.
- [37] M.D'Elia and F.Negro, Phys. Rev. D 83, 114028 (2011); arXiv:1103.2080; M.D'Elia, arXiv:1209.0374.
- [38] E.-M.Ilgenfritz et al., arXiv:1203.3360.
- [39] Y. Nambu, G.I. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 122, 345 (1961).
- [40] Y. Nambu, G.I. Jona-Lasinio, Phys. Rev. 124, 246 (1961).
- [41] P. V. Buividovich, M. N. Chernodub, E. V. Luschevskaya and M. I. Polikarpov, Nucl. Phys. B 826, 313 (2010).
- [42] G. S. Bali, F. Bruckmann, M. Constantinou, M. Costa, G. Endrodi, S. D. Katz, H. Panagopoulos and A. Schafer, Phys. Rev. D **86**, 094512 (2012) [arXiv:1209.6015 [hep-lat]].
- [43] B. L. Ioffe and A. V. Smilga, Nucl. Phys. B 232, 109 (1984).
- [44] M. Frasca and M. Ruggieri, Phys. Rev. D **83**, 094024 (2011) [arXiv:1103.1194 [hep-ph]].
- [45] R. Baier and R. Rückl, Z. Phys. C19 (1983) 251.
- [46] G. T. Bodwin, E. Braaten, and G. P. Lepage, Phys. Rev. D 51 (1995) 1125; 55 (1997) 5853(E) [arXiv:hep-ph/9407339].
- [47] M. B. Einhorn and S. D. Ellis, Phys. Rev. D 12 (1975) 2007; H. Fritzsch, Phys. Lett. B 67 (1977); M. Glück, J. F. Owens and E. Reya, Phys. Rev. D 17 (1978) 2324; J. Babcock, D. Sivers and S. Wolfram, Phys. Rev. D 18 (1978) 162.
- [48] C. P. Smith, *Heavy Quarkonium Hadroproduction in the Color Evaporation Model*. Tese de Mestrado, University of Wisconsin-Madison (2000).
- [49] M. B. Einhorn and S. D. Ellis, Phys. Rev. D 12, 2007 (1975)
- [50] H. Fritzsch, Phys. Lett. 67B, 217 (1977)

- [51] F. Halzen, Phys. Lett. 69B, 105 (1977)
- [52] F. Halzen and S. Matsuda, Phys. Rev. D 17,1344 (1978)
- [53] M. Gluck, J. F. Owens and E. Reya, Phys. Rev. D 17, 2324 (1978).
- [54] J. Babcock, D. Sivers and S. Wolfram, Phys. Rev. D 18, 162 (1978)
- [55] R. Gavai, D. Kharzeev, H. Satz, G. A. Schüler, K. Sridhar and R. Vogt, Int. J. Mod. Phys. A10, 3043 (1995)
- [56] R. Vogt, Ultrarelativistic Heavy Ion-Collision Elsevier 2007, 1rd ed.
- [57] F. O. Duraes, F. S. Navarra and M. Nielsen, Phys. Rev. C **68**, 044904 (2003) [nucl-th/0210043].
- [58] M. R. Whalley, D. Bourilkov and R. C. Group, hep-ph/0508110.
- [59] V. Barger, W. Y. Keung, and R. N. Phillips, Phys. Lett. B 91 (1980) 253; Z. Phys. C 6 (1980) 169.
- [60] Griffiths J.D., Introduction to Electrodynamics (Prentice Hall) 1999 3rd ed.
- [61] Abramowitz and Stegun, Handbook of Mathematical Functions (Dover Publications) 1972, p.538
- [62] Arfken and Weber, Mathematical Methods for Physicists (Elsevier) 2005, p.863
- [63] J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D86, 010001 (2012).
- [64] A. De Rújula, H. Georgi and S. Glashow, Phys. Rev. Lett. 37, 785 (1975).
- [65] W. Lucha and F. F. Schoberl, hep-ph/9601263.
- [66] Dittrich W. and Reuter M., Effective Lagrangians in Quantum Electrodynamics (Springer) 1985.
- [67] Peskin E.M. and Schroeder V.D., An Introduction To Quantum Field Theory (Frontiers in Physics).