UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Física

Propriedades dinâmicas da matéria escura

Leandro J. Beraldo e Silva

Orientador: Prof. Dr. Laerte Sodré Jr.

Co-orientador: Prof. Dr. Marcos Lima

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física
para a obtenção do título de Doutor em Ciências

Banca examinadora:

Prof. Dr. Laerte Sodré Jr. (orientador) – IAG/IF-USP

Prof. Dr. Edivaldo M. Santos – IF-USP

Prof. Dr. Eduardo S. Cypriano – IAG-USP

Prof. Dr. Gastão B. Lima Neto – IAG-USP

Prof. Dr. J. Ademir S. Lima – IAG/IF-USP

São Paulo

Fevereiro de 2015

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, Leandro José Beraldo e

Propriedades dinâmicas da matéria escura.
São Paulo, 2015.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Laerte Sodré Junior
Co-orientador: Marcos Lima

Área de Concentração: Astrofísica

Unitermos: 1. Aglomerados de galáxias; 2. Dinâmica das galáxias; 3. Matéria escura; 4. Mecânica estatística clássica; 5. Teoria cinética.

USP/IF/SBI-011/2015

*Atrás do arranha-céu tem o céu,
e depois tem outro céu, sem estrelas.
Em cima do guarda-chuva tem a chuva,
que tem gotas tão lindas que até dá vontade de comê-las.*

*No meio da couve-flor tem a flor,
que além de ser uma flor, tem sabor.
Dentro do porta-luva tem a luva,
que alguém de unhas negras e tão afiadas se esqueceu de pôr.*

*No fundo do pára-raio tem o raio,
que caiu da nuvem negra do temporal.
Todo quadro-negro é todo negro,
e eu escrevo seu nome nele só pra demonstrar o meu apego.*

*O bico do beija-flor beija a flor,
e toda a fauna aflora, grita de amor.
Quem segura o porta-estandarte tem arte,
e aqui passa com raça, eletrônico, maracatu atômico.*

Jorge Mautner e Nelson Jacobina

There is no question that for the calculation of natural processes the mere equations, without their foundation, are sufficient; likewise, empirically confirmed equations have a higher degree of certainty than the hypotheses used in deriving them. But on the other hand, it appears to me that the mechanical basis is necessary to illustrate the abstract equations, in the same way that geometrical constructions illuminate algebraic relations. Just as the latter are not made superfluous by mere algebra, so I believe that one cannot completely dispense with the intuitive representation of the laws valid for the action of macroscopic masses provided by molecular dynamics, even if he doubts the possibility of knowledge of the latter, or indeed the existence of molecules. A clear understanding is just as important for knowledge as the establishment of results by laws and formulas.

Ludwig Boltzmann

Resumo

Propriedades dinâmicas da matéria escura

Leandro J. BERALDO E SILVA

Esta tese tem como objetivo o estudo de aspectos dinâmicos e estatísticos da matéria escura em distribuições esféricas de massa. O fato de suas partículas constituintes interagirem gravitacionalmente mas não eletromagneticamente, e portanto sua evolução ser regida por interações de longo alcance, traz algumas complicações teóricas na descrição de suas propriedades nos termos da mecânica estatística, dificuldades compartilhadas com sistemas auto-gravitantes em geral. Para melhor compreender essas propriedades, estudamos as distribuições de matéria escura em três abordagens diferentes.

Na primeira, utilizamos dados observacionais, utilizando lentes gravitacionais, em aglomerados de galáxias para comparar a performance de alguns modelos propostos para o perfil de densidade da matéria escura. Dividimos estes modelos em fenomenológicos ou teóricos. Dos primeiros, todos são capazes de descrever os dados observacionais com performance comparável. Entre os modelos teóricos estudados, o modelo chamado DARKexp descreve os dados tão bem quanto os primeiros.

Numa segunda abordagem, utilizamos dados de simulações numéricas para testar uma função proposta para a distribuição de velocidades das partículas. Esta função inclui a anisotropia no campo de velocidades na chamada distribuição q-gaussiana. Comparamos a performance desta função com a da função gaussiana e concluímos que a primeira representa uma melhor descrição dos dados, mesmo levando em conta a introdução de um parâmetro extra, apesar de ainda apresentar algumas discrepâncias, especialmente nas regiões internas dos halos.

Por fim, discutimos a possível relevância do conceito de indistinguibilidade na determinação dos estados de equilíbrio de sistemas auto-gravitantes em geral, propondo uma associação deste conceito com o nível de mistura do sistema. Implementamos esta associação numa análise combinatória e estudamos as consequências para a determinação da função distribuição e do perfil de densidades. Esta associação também levanta algumas dúvidas sobre a validade da equação de Vlasov durante o processo de relaxação violenta.

Abstract

Dynamical properties of dark matter

Leandro J. Beraldo e Silva

This thesis aims to study the dynamic and statistical aspects of dark matter in spherical distributions. The fact that their constituent particles interact gravitationally but not electromagnetically, and therefore its evolution is governed by long-range interactions, brings some theoretical complications in their description in terms of the statistical mechanics, difficulties shared with self-gravitating systems in general. To better understand these properties, we studied the distributions of dark matter in three different approaches.

First, we used observational data, using gravitational lensing in galaxy clusters to compare the performance of some proposed models for the dark matter density profile. We divide these models in phenomenological or theoretical. All of the formers are able to describe the observational data with comparable performance. Among the theoretical models studied, the model called DARKexp describes the data as well as the formers.

In a second approach, we use numerical simulation data to test a proposed function for the velocity distribution. This function includes the velocity anisotropy into the so called q-Gaussian distribution. We compared the performance of this function with the Gaussian function and concluded that the first is a better description of the data, even taking into account the introduction of an extra parameter, although still presenting some discrepancies, especially in the inner regions of the halo.

Finally, we discuss the relevance of the concept of indistinguishability in determining the states of equilibrium of self-gravitating systems in general, suggesting an association of this concept with the mixing level of the system. We implement this association in a combinatorial analysis and study the consequences for the determination of the distribution function and the density profile. This association also raises some questions about the validity of the Vlasov equation in the process of violent relaxation.

Agradecimentos

À prof^ª. Ivone Albuquerque, graças a quem entrei em contato com algumas das questões que motivaram o desenvolvimento desta tese, e pelo excelente conselho de explorar um assunto que despertasse meus interesses pessoais.

Aos meus orientadores, profs. Laerte Sodré Jr. e Marcos Lima, pela confiança e coragem para dar vazão às questões colocadas desde o início e às que surgiram ao longo do projeto, pela disposição para enfrentá-las e pelos ensinamentos nas aulas e discussões que tivemos neste período. Uma página não daria para lembrar e agradecer por tudo que aprendi.

À Liliya Williams pela ajuda na reprodução do modelo DARKexp e ao Keiichi Umetsu por fornecer os dados que foram utilizados na primeira parte deste projeto.

Ao meu orientador durante o doutorado sanduíche, prof. Gary Mamon, por toda a dedicação durante o período em que estive no *Institute d'Astrophysique de Paris* e por viabilizar minha visita ao *DARK Cosmology Center* em Copenhague e minha participação no trimestre temático *GRAVASCO - N body gravitational dynamical systems From N=2 to infinity...* no *Institute Henri Poincaré* (IHP).

Ao Jérôme Perez, que tive o prazer de conhecer no IHP, pelo apoio e incentivo fundamentais para a conclusão da parte final desta tese.

Ao Departamento de Física Matemática pela infra-estrutura concedida e à FAPESP (processo n. 2011/13237-3), CNPq e CAPES pelo suporte financeiro.

Ao Viktor Jahnke e ao Henrique Xavier pelas muitas conversas sobre assuntos relacionados ou não a esta tese. E pela companhia nos cafés, claro.

À minha família e aos amigos, pelo apoio permanente e incondicional.

À Carol, que compartilhou comigo a dor e a delícia de escrever esta tese.

Sumário

“Separei em pedaços para me admitirem nos círculos mais chegados às intimidades da vida. Ciência é isso, chegou ali, parou: facas foram precisas.” - Paulo Leminski

Resumo	iv
Abstract	v
Agradecimentos	vi
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xiii
1 Introdução	1
1.1 Histórico e evidências observacionais da existência de matéria escura . . .	1
1.2 Do Big-Bang à formação das galáxias	5
1.3 Experiências de detecção de matéria escura	7
1.4 Motivação e plano geral da tese	10
2 Dinâmica / Mecânica estatística de Sistemas Gravitacionais	13
2.1 Relaxação colisional	15
2.2 Relaxação violenta e distribuição de Lynden-Bell	18
3 Perfis de densidade: modelos teóricos versus modelos fenomenológicos	23
3.1 Dados observacionais	24
3.2 Modelos fenomenológicos	25
3.2.1 NFW	25
3.2.2 BMO	26
3.2.3 Perfil de Sérsic	27
3.2.4 Perfil de Einasto	27
3.2.5 Perfil de Stadel	27
3.2.6 Perfil de Hernquist	28
3.3 Modelos teóricos	28
3.3.1 Esfera Isotérmica (não-Singular)	29
3.3.2 Modelos de Kang & He	30
3.3.3 DARKexp	31
3.4 Modelo do Halo	33
3.5 Resultados	35

3.6	Desprezando o termo 2-halo	37
3.7	Discussão	39
4	Distribuição de velocidades q-gaussiana anisotrópica	41
4.1	Distribuição de Maxwell	43
4.2	Distribuição q-gaussiana	44
4.3	Distribuição q-gaussiana anisotrópica	45
4.3.1	Distribuição do módulo da velocidade	46
4.4	Simulações	46
4.5	Resultados	47
4.5.1	Perfis radiais do parâmetro q	47
4.5.2	Qualidade do ajuste	49
4.5.3	Comparação entre a q-gaussiana e a gaussiana	53
4.5.4	Dependência na massa	54
4.6	Conclusões e discussões	56
5	Mistura como critério para indistinguibilidade	59
5.1	Distinguibilidade versus indistinguibilidade	62
5.2	Função distribuição de sistemas parcialmente misturados	63
5.3	Correção para pequenos números	68
5.4	Da equação de Liouville à equação de Vlasov	71
5.5	Discussão	74
6	Considerações finais	77
A	Espalhamento gravitacional entre duas partículas	81
B	Hierarquia BBGKY	85
C	Paradoxo de Gibbs	87
D	Função distribuição associada ao perfil de Einasto	91
	Referências Bibliográficas	93

Lista de Figuras

1.1	Curva de rotação da galáxia espiral do Triângulo (M33). Mostra as velocidades medidas, assim como as contribuições do disco estelar (tracejado pequeno), do gás (tracejado longo) e do halo de ME (ponto-tracejado). Nas regiões externas, as contribuições do disco estelar e do gás variam aproximadamente como $\propto r^{-1/2}$, enquanto as velocidades observadas continuam aumentando. Figura extraída de Corbelli & Salucci (2000).	3
1.2	Bullet cluster: A imagem da esquerda (ótico) mostra as galáxias dos dois aglomerados, e a da direita mostra a emissão em raios-X do gás entre eles. Os contornos em verde indicam a concentração de massa, medida com o efeito de lentes gravitacionais. Os picos de massa, ao invés de seguirem a grande quantidade de gás, seguem o movimento das galáxias, o que indica a presença de ME, não colisional, acompanhando-as. Imagem extraída de Clowe, Bradač, Gonzalez et al. (2006).	4
1.3	Espectro angular de potências obtido pelo satélite Planck. O terceiro pico é sensível à abundância de ME no universo, e as alturas relativas dos picos são sensíveis à abundância de bárions. Estes resultados indicam que cerca de 25% do conteúdo energético do universo está na forma de matéria não-bariônica. Extraído de Planck collaboration, Ade, Aghanim et al. (2013).	5
1.4	Modulação anual da taxa de eventos medida pelo experimento DAMA em duas etapas diferentes. Extraído de Freese, Lisanti & Savage (2012).	9
1.5	Curvas de exclusão de algumas experiências de detecção direta de ME. As regiões acima das respectivas curvas são consideradas excluídas. Ao mesmo tempo, os contornos mostram que as regiões de parâmetros favorecidas por algumas destas análises estão dentro da região excluída por outras experiências. As regiões cinzas no canto inferior direito mostram a região de parâmetros propostas por alguns modelos de supersimetria. Figura extraída de Aprile, Alfonsi, Arisaka et al. (2012).	9
2.1	Esquema do espalhamento de duas estrelas no referencial do centro de massa, em que uma estrela de massa reduzida μ e velocidade inicial V_0 é espalhada por um potencial fixo - ver Apêndice A. Figura extraída de Binney & Tremaine (2008).	15
2.2	Divisão do espaço de fases em J macro-células (neste caso $J = 10$). Cada macro-célula i é dividida em ν_i micro-células (neste caso $\nu_i = 20$), das quais n_i estão ocupadas (quadrados cinzas). Fig. extraída de Efthymiopoulos, Voglis & Kalapotharakos (2007).	19

3.1	Contribuições do perfil NFW (linha verde pontilhada) e do termo 2-halo (linha laranja tracejada) e a soma dos dois termos (contínua preta), assim como os dados fornecidos por Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. (2011b). Na região interna o termo 2-halo é desprezível, mas contribui significativamente para o perfil de densidade projetado nas regiões externas.	35
3.2	Curvas ajustadas e os respectivos valores de χ^2_ν para os perfis fenomenológicos, assim como os dados fornecidos por Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. (2011b). Todos os modelos fenomenológicos testados são capazes de descrever os dados, com pequenas variações nas regiões externas.	36
3.3	Curvas ajustadas e os respectivos valores de χ^2_ν para os perfis teóricos, assim como os dados fornecidos por Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. (2011b). O modelo DARKexp descreve bem os dados em toda a região observada, diferente dos outros modelos, que apresentam discrepâncias significativas, especialmente nas regiões externas.	37
3.4	Perfis fenomenológicos: curvas ajustadas e os respectivos valores do χ^2_ν obtidos quando desprezamos o termo 2-halo. Também são mostrados os dados observacionais fornecidos por Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. (2011b). Neste caso, todos os modelos ficam abaixo dos dados nas regiões externas, o que evidencia a necessidade do termo 2-halo.	38
3.5	Perfis teóricos: curvas ajustadas e os respectivos valores do χ^2_ν obtidos quando desprezamos o termo 2-halo. Também são mostrados os dados observacionais fornecidos por Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. (2011b).	39
4.1	Estimativas de q obtidas com o método da máxima verossimilhança nos ajustes da Eq. (4.7) à distribuição do módulo da velocidades adimensional u , como função da distância ao centro do halo para os $N = 90$ halos individuais. A linha laranja representa a mediana entre os valores de q obtidos com os ajustes individuais. A linha horizontal representa a distribuição gaussiana.	48
4.2	O mesmo da Fig. 4.1 para a mediana (<i>marrom</i> , como naquela figura), para a média (<i>preta</i>) e para o halo empilhado (<i>vermelho</i>). As incertezas de q foram calculadas pelo método <i>bootstraps</i> e são ≈ 0.005	48
4.3	Distribuição do módulo da velocidade, $G(u)$, em diferentes posições relativas ao centro do aglomerado. A região magenta mostra os dados obtidos com as simulações (halo empilhado). A curva preta representa a distribuição q-gaussiana e a verde a distribuição gaussiana.	50
4.4	Diferença absoluta máxima entre a distribuição cumulativa de u [ver Eq. (4.7)] do halo empilhado e aquelas da função gaussiana (linha tracejada verde) e q-gaussiana (linha vermelha contínua).	51
4.5	O mesmo da Fig. 4.4, agora para a média dos ajustes individuais.	52
4.6	Contornos da distribuição de velocidades como função das componentes radial e tangencial da velocidade do halo empilhado, para os mesmos 6 bins radiais da Fig. 4.3. As cores são definidas da mesma maneira como na Fig. 4.3.	53

4.7	Fator de Bayes [Eq. (4.11)], obtido com o ajuste do parâmetro q ao halo empilhado (linha vermelha) e com a média dos halos (linha preta). No caso do halo empilhado, há forte evidência de que a q-gaussiana representa melhor os dados que a gaussiana em todos os raios, exceto ao redor de $r = 0.1$ e $1.5 r_{vir}$. Para o caso das médias dos ajustes, a evidência em favor da q-gaussiana é forte em todos os raios, pois a média, dada a definição dos bins, “apaga” os valores negativos ao redor de $r \approx 0.1 r_{100}$, onde $q \simeq 1$.	54
4.8	Estimativas do parâmetro q para os halos empilhados dos 3 subconjuntos de massa (púrpura, marrom e azul em ordem crescente de massa). Os valores de $M_{14} = \langle M \rangle_{bin}/10^{14} M_{\odot}$ também são mostrados.	55
4.9	O mesmo da Fig. 4.8, mas agora para a média.	55
5.1	Energia média em diferentes bins como função do tempo obtida por Kandrup, Mahon & Smith (1993) em simulações numéricas do processo de relaxação violenta. As diferentes curvas evoluem de modo paralelo, o que indica que não há mistura entre partículas de diferentes energias. Figura extraída de Kandrup, Mahon & Smith (1993).	64
5.2	Função distribuição proposta por nós para sistemas parcialmente misturados, Eq. (5.5) (curvas azuis). Curvas verdes: distribuição de Maxwell-Boltzmann. A função proposta tende à distribuição de Maxwell-Boltzmann para $\varepsilon > \mu$, mas desvia para outra Maxwell-Boltzmann com o dobro da “temperatura” para $\varepsilon \lesssim \mu$. Ambas curvas com $\mu = 0.5$. Linhas contínuas para $\beta = 15$ e tracejadas para $\beta = 10$.	66
5.3	Perfis de densidade gerados pelo nosso modelo (curvas azuis), em comparação com a Esfera Isotérmica gerada pela distribuição de Maxwell-Boltzmann (curvas verdes). Os valores dos parâmetros são os mesmos que na Fig. 5.2.	67
5.4	Inclinação do perfil de densidade do modelos proposto por nós (curvas azuis) em comparação com aquele gerado pela distribuição de Maxwell-Boltzmann (curvas verdes). A inclinação tende a 2 nas regiões externas, o que gera um sistema de massa infinita. Os parâmetros são definidos como na Fig. 5.2.	67
5.5	Correção de pequenos números proposta por Hjorth & Williams (2010). Percebemos que a aproximação de Stirling (equivalente a $\zeta = 0$) é muito ruim para pequenos valores de n , enquanto a correção proposta é quase idêntica ao valor exato.	69
5.6	Função distribuição corrigida para pequenos números de ocupação, Eq. (5.8) (curvas azuis), em comparação com a distribuição de Maxwell-Boltzmann (também corrigida, equivalente ao modelo de King) (curvas verdes). Funções distribuição associadas a perfis do tipo <i>cuspy</i> (como o Einasto, mostrado para dois valores do parâmetro n), têm um formato de “S” que nosso modelo, apesar de não ser capaz de reproduzir, propõe uma correção na direção correta, i.e. aumentando a inclinação de $F(\varepsilon)$ para altos valores de ε . Todas as curvas são para $\mu = 0.4$ e $\varepsilon_0 = 0.03$. Curvas contínuas com $\beta = 15$ e tracejadas para $\beta = 10$.	70
5.7	Perfil de densidade gerado pelo nosso modelo aplicando-se a correção de pequenos números (curvas azuis), em comparação com aquele gerado pela distribuição de Maxwell-Boltzmann também corrigida (modelo de King) (curvas verdes) e com o perfil de Einasto para dois valores de n . Os valores dos parâmetros são os mesmos da Fig. 5.6.	71

5.8	Inclinação do perfil de densidade gerado pelo modelo corrigido para pequenos números de ocupação (curvas azuis), em comparação com aquele gerado pela distribuição de Maxwell-Boltzmann corrigida (modelo de King) (curvas verdes) e com o perfil de Einasto para dois valores de n . A correção para pequenos números aumenta a inclinação nas regiões externas, gerando um sistema de massa finita. Os valores dos parâmetros são os mesmos da Fig. 5.6.	72
-----	--	----

Lista de Tabelas

3.1	Propriedades dos aglomerados de galáxias utilizados: nome, redshift, raio virial e massa virial. Estes aglomerados têm propriedades similares, o que legitima seu “empilhamento” (<i>stacking</i>). Dados extraídos das Tabelas (1) e (7) de Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. (2011a).	25
3.2	Resultados dos ajustes dos modelos fenomenológicos. A coluna N_p mostra o número total de parâmetros, χ^2_ν mostra o χ^2 reduzido e a última coluna mostra a melhor estimativa para o parâmetro de forma do modelo.	36
3.3	Resultados dos ajustes dos modelos teóricos. As colunas são definidas como na Tabela 3.2.	37
3.4	Perfis fenomenológicos: resultados dos ajustes quando desprezamos o termo 2-halo. As colunas são definidas como na Tabela 3.2.	38
3.5	Perfis teóricos: resultados dos ajustes quando desprezamos o termo 2-halo. As colunas são definidas como na Tabela 3.2.	38
4.1	Parâmetros do ajuste da função $q(r)$ parametrizada como nas eqs. (4.8) e (4.9) aos dados dos 90 halos simulados.	49
4.2	Parâmetros para o ajuste da função $q(r)$, equações (4.8) e (4.9) para os três sub-conjuntos empilhados separadamente.	56
4.3	Parâmetros da média das estimativas de $q(r)$ para os dados dos halos individuais.	56

Capítulo 1

Introdução

1.1 Histórico e evidências observacionais da existência de matéria escura

Em 1933, Zwicky apresentava um artigo estimando a massa total do aglomerado de Coma a partir das velocidades observadas de suas galáxias, utilizando o teorema do virial (ver [Zwicky, 1933, 1937](#)). Esta estimativa pode ser feita calculando-se a energia potencial total do aglomerado como (ver [Binney & Tremaine, 2008](#))

$$W = -4\pi G \int_0^\infty dr r \rho(r) M(r),$$

onde G é a constante gravitacional, $\rho(r)$ é o perfil de densidade e $M(r)$ é a massa total interna ao raio r , dada por

$$M(r) = \int_0^r dr' 4\pi r'^2 \rho(r').$$

De maneira bastante simplificada, supondo ρ constante ao longo do aglomerado, obtemos

$$W = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

onde M é a massa total do aglomerado e R seu raio. Segundo o teorema do virial, num sistema em equilíbrio as energias potencial e cinética médias se relacionam como

$$\bar{W} = -2\bar{T}, \tag{1.1}$$

de onde obtemos que

$$M = \frac{5}{3} \frac{R \langle v^2 \rangle}{G},$$

onde $\langle v^2 \rangle \approx 3\langle v_r^2 \rangle$ é a velocidade quadrática média das galáxias no aglomerado obtida a partir das velocidades radiais v_r medidas (supondo-se isotropia no campo de velocidades). Os valores medidos por Zwicky são $R \approx 10^{22}$ m e $\langle v_r^2 \rangle \approx 5 \times 10^{11}$ m²/s², e portanto $M \approx 10^{44}$ kg.

Tendo observado cerca de mil galáxias neste aglomerado, Zwicky conclui que a massa média de cada galáxia é $\langle m \rangle \approx 10^{11} M_\odot$, lembrando que a massa do Sol é $M_\odot \approx 10^{30}$ kg. Além disso, a luminosidade média de cada galáxia é $\approx 10^8 L_\odot$ e com isso a razão massa-luminosidade obtida por Zwicky no aglomerado de Coma é da ordem de $\gamma \approx 1000 M_\odot/L_\odot$. Por outro lado, para uma população de estrelas próximas, a razão massa-luminosidade é de apenas $\gamma' \approx 3 M_\odot/L_\odot$. Apesar de todas as simplificações, e alguns erros observacionais, parece difícil compatibilizar números tão diferentes.

O trabalho de Zwicky representa uma das primeiras menções à incompatibilidade entre a massa obtida a partir de efeitos gravitacionais e aquela esperada dada a luminosidade do sistema¹. Zwicky concluiu daí que deveria haver neste aglomerado uma grande quantidade de massa na forma de algum gás frio que não emitisse radiação mensurável, algum tipo de *matéria escura* (ver Zwicky, 1933, 1937). O mesmo foi constatado alguns anos depois por Smith (1936) no aglomerado de Virgo.

Nessa mesma época, eram feitas as primeiras medidas da velocidade de rotação de nuvens de hidrogênio neutro nas regiões externas de galáxias espirais. Mais tarde (ver Freeman, 1970; Rubin, Thonnard & Ford, 1978; Bosma & van der Kruit, 1979), essas observações indicariam que as curvas de rotação (velocidade de rotação v como função da distância ao centro da galáxia r) permanecem aproximadamente constantes (ou até crescentes) nas regiões externas, como a mostrada na Fig. 1.1. Entretanto, um cálculo simples nos mostra que o comportamento esperado é $v \propto r^{-1/2}$. De fato, aproximando o potencial gerado pelo disco galáctico a um potencial esfericamente simétrico e igualando a resultante centrípeta à força gravitacional, obtemos

$$v(r) = \sqrt{\frac{GM(r)}{r}},$$

onde $M(r)$ é a massa total interna ao raio r . Assim, nas regiões mais externas, onde $M(r)$ é aproximadamente constante, deveríamos ter $v \propto r^{-1/2}$. Essa discrepância indica a presença de grande quantidade de massa não observada nestas regiões. É claro que cálculos mais detalhados, como os envolvidos na obtenção da Fig. 1.1, levam em conta o fato das estrelas e do gás não estarem distribuídos de maneira esfericamente simétrica e sim num disco, mas o comportamento nas regiões externas é muito parecido em qualquer caso (ver Fig. 2.17 de Binney & Tremaine, 2008).

¹No ano anterior, Jan Oort já havia mencionado uma incompatibilidade do mesmo tipo analisando o movimento de estrelas na direção perpendicular ao plano da Galáxia - ver Oort (1932).

FIGURA 1.1: Curva de rotação da galáxia espiral do Triângulo (M33). Mostra as velocidades medidas, assim como as contribuições do disco estelar (tracejado pequeno), do gás (tracejado longo) e do halo de ME (ponto-tracejado). Nas regiões externas, as contribuições do disco estelar e do gás variam aproximadamente como $\propto r^{-1/2}$, enquanto as velocidades observadas continuam aumentando. Figura extraída de [Corbelli & Salucci \(2000\)](#).

Assim estes dois problemas foram relacionados supondo-se que a matéria escura (ME) que se manifesta em aglomerados de galáxias é a mesma que deve estar presente nos halos galácticos para explicar a constância das curvas de rotação (ver [Freeman, 1970](#); [Rubin, Thonnard & Ford, 1978](#); [Bosma & van der Kruit, 1979](#); [Rubin, Ford & Thonnard, 1980](#)). Desde então, as evidências para a existência de algum tipo de matéria não-bariônica que não interage eletromagneticamente, ou seja, que não absorve, espalha ou emite luz, só aumentaram, indo até escalas cosmológicas.

Neste contexto, as medidas obtidas através do efeito de lentes gravitacionais produzido por galáxias e aglomerados de galáxias são particularmente importantes. Isso porque elas indicam a necessidade das mesmas quantidades de ME nestes objetos mas envolvem técnicas de medida completamente independentes daquelas citadas anteriormente. Além disso, medidas de lentes gravitacionais prescindem da hipótese de equilíbrio hidrostático, necessário em métodos dinâmicos.

Um exemplo significativo de aplicação de lentes gravitacionais que evidencia a existência de ME é o chamado *Bullet Cluster* – ver [Clowe, Bradač, Gonzalez et al. \(2006\)](#). Este sistema é constituído de dois aglomerados de galáxias se separando a alta velocidade ($\approx 4000 \text{ km/s}$) depois de terem se chocado (ver Fig. 1.2). A partir de medidas de raios-X, sabemos que a maior parte (80–90%) da massa bariônica de aglomerados de galáxias está na forma de um gás quente. Num encontro entre dois aglomerados, suas galáxias constituintes, bem como os halos de ME, se comportam como partículas não colisionais,

FIGURA 1.2: Bullet cluster: A imagem da esquerda (óptico) mostra as galáxias dos dois aglomerados, e a da direita mostra a emissão em raios-X do gás entre eles. Os contornos em verde indicam a concentração de massa, medida com o efeito de lentes gravitacionais. Os picos de massa, ao invés de seguirem a grande quantidade de gás, seguem o movimento das galáxias, o que indica a presença de ME, não colisional, acompanhando-as. Imagem extraída de [Clowe, Bradač, Gonzalez et al. \(2006\)](#).

acompanhando o movimento inicial dos aglomerados. Por outro lado, o gás quente é colisional e por isso sofre um freamento, se separando do seu aglomerado original e se posicionando na região central entre os aglomerados. Como a maior parte da massa das galáxias está na forma de ME e esta não interage eletromagneticamente, espera-se que ela também seja não colisional e que acompanhe o movimento de suas galáxias. De fato, medidas de lentes gravitacionais permitem identificar a posição dos picos de massa total da distribuição (curvas de nível na Fig. 1.2), e estes coincidem com a posição dominante das galáxias, apesar destas representarem apenas $\approx 15\%$ da massa bariônica total dos aglomerados. Observações conjuntas em raios-X permitem mapear a distribuição do gás quente e de fato conclui-se que ele se concentra na região central entre os aglomerados.

O *Bullet Cluster* é importante também por reforçar a necessidade da existência de ME frente aos modelos que propõem, como alternativa, uma modificação da gravitação newtoniana para explicar as discrepâncias observadas. Entre estes modelos, o mais conhecido é o MOND (*MOdified Newtonian Dynamics*) (ver [Milgrom, 1983](#)) e sua versão relativística TeVeS (*Tensor–vector–scalar gravity*) (ver [Bekenstein, 2004](#)).

Por fim também existem evidências observacionais da existência de ME em escalas cosmológicas. A principal delas é obtida com o espectro angular de potências da radiação cósmica de fundo, que permite estimar com precisão alguns parâmetros cosmológicos. A Fig. 1.3 mostra as medidas atuais obtidas pelo satélite Planck ([Planck Collaboration, Ade, Aghanim et al., 2013](#)). O terceiro pico permite estimar a abundância de ME no universo (ver p. ex. [Hu & Dodelson, 2002](#)), enquanto as alturas relativas dos picos são sensíveis à abundância de bárions. Estas medidas, confirmando os resultados anteriores obtidos com o satélite WMAP ([Hinshaw, Larson, Komatsu et al., 2013](#)), indicam que

FIGURA 1.3: Espectro angular de potências obtido pelo satélite Planck. O terceiro pico é sensível à abundância de ME no universo, e as alturas relativas dos picos são sensíveis à abundância de bárions. Estes resultados indicam que cerca de 25% do conteúdo energético do universo está na forma de matéria não-bariônica. Extraído de [Planck collaboration, Ade, Aghanim et al. \(2013\)](#).

aproximadamente 25% do conteúdo energético do universo deve ser constituído de ME e 5% de bárions.

1.2 Do Big-Bang à formação das galáxias

Estas evidências observacionais deixam pouca dúvida da existência de matéria sem interação eletromagnética envolvendo galáxias (inclusive a Via Láctea) e aglomerados de galáxias, mas dizem muito pouco sobre a composição da ME, ou seja, de que tipo de partícula ela é constituída, sua massa e como (e se) ela interage com as partículas do modelo padrão. Um modelo completo sobre a constituição da ME deve ser capaz de descrever toda a evolução desta componente desde sua criação no início do universo, seu papel na formação das primeiras galáxias e na distribuição de matéria em larga escala, os resultados das atuais experiências de detecção de ME etc.

De acordo com o modelo cosmológico padrão, fortemente ancorado nas medidas da radiação cósmica de fundo, o universo primordial era dominado por radiação a altíssimas temperaturas. Partículas com interação eletromagnética, como elétrons, pósitrons e prótons, tinham suas temperaturas automaticamente determinadas pelas interações com os fótons, formando um plasma ionizado. Partículas sem interação eletromagnética não podiam compartilhar da evolução térmica deste plasma, a menos que pudessem

se aniquilar gerando partículas acopladas ao plasma, e sendo produzidas por elas na reação inversa. Este é o caso dos neutrinos, que interagem fracamente e permanecem acoplados ao plasma através da produção de elétrons e pósitrons: enquanto a taxa de aniquilação Γ é maior que a taxa de expansão do universo $H = \dot{a}/a$, onde a é o fator de escala, as interações são capazes de manter o equilíbrio com o plasma. Entretanto, a temperatura do plasma vai sendo diminuída pela expansão cósmica ($T \propto 1/a$), e quando atinge um valor crítico T_f , as aniquilações não são mais capazes de manter o equilíbrio com o plasma. Depois disso, os neutrinos se desacoplam, e sua temperatura passa a evoluir independentemente da temperatura do plasma (ver p. ex. [Dodelson, 2003](#)).

Por algum tempo, os neutrinos foram considerados bons candidatos à ME. A partir das medidas das oscilações entre seus diferentes sabores (p. ex. [Fukuda, Hayakawa, Ichihara et al., 1998](#)), sabemos que sua massa é não-nula e através de medidas do decaimento β do Trítio ([Weinheimer, Degenddag, Bleile et al., 1999](#)), sabemos que $m_\nu \lesssim 1 \text{ eV}$. Como as interações fracas deixam de ser efetivas para $T \lesssim \text{MeV}$, percebe-se que os neutrinos se desacoplaram do plasma quando ainda eram altamente relativísticos, passando a velocidades não-relativísticas apenas muito “recentemente”. Portanto, se a ME fosse composta exclusivamente de neutrinos, suas altas velocidades tenderiam a diluir os contrastes de densidade em pequenas escalas (da ordem de galáxias), fazendo com que o colapso gravitacional das estruturas ocorresse primeiro em grandes escalas (aglomerados e super-aglomerados de galáxias). Este cenário, chamado de *top-down*, onde os halos de ME da ordem de galáxias se formam a partir da fragmentação das grandes estruturas, não é compatível com as observações, que favorecem o cenário hierárquico, em que as grandes estruturas são formadas posteriormente, pela fusão de halos menores (ver [Blumenthal, Faber, Primack & Rees, 1984](#)).

Como as observações favorecem o cenário hierárquico, as partículas de ME devem ser não-relativísticas no universo primordial, o que pode ocorrer ao menos de duas formas diferentes. Uma possibilidade é que estas partículas tenham sido produzidas fora do equilíbrio térmico com o plasma. Este é o caso dos axions, partículas propostas para solucionar o problema da violação CP em interações fortes, que poderiam ser produzidas quando o plasma primordial atingisse a temperatura de de-confinamento dos quarks ($T \approx 100 \text{ MeV}$) - ver [Ipser & Sikivie \(1983\)](#). Abaixo desta temperatura os axions teriam movimentos não-relativísticos e para que sejam consistentes com a abundância observada de ME, sua massa deve ser $m_a \approx 10^{-5} \text{ eV}$ (ver [Blumenthal, Faber, Primack & Rees, 1984](#)).

Outra possibilidade é de que as partículas de ME tenham compartilhado do equilíbrio térmico com o plasma primordial através de reações de aniquilação/produção mediadas pela interação fraca (analogamente aos neutrinos) mas tenham se desacoplado quando já

eram não-relativísticas. Para este cenário ser compatível com a abundância observada de ME, estas partículas devem ser massivas, $m_\chi \gtrsim GeV$, e as partículas candidatas nesse caso são chamadas de WIMPs (*Weakly Interacting Massive Particles*). Um dado importante é que alguns modelos de extensão do modelo padrão de partículas, por exemplo a supersimetria, prevêm naturalmente a existência de partículas fracamente interagentes e com massas ($m_\chi \gtrsim GeV$) (ver [Jungman, Kamionkowski & Griest, 1996](#)), o que nos últimos anos tem gerado grande entusiasmo para a construção de experimentos para sua detecção, embora os cenários supersimétricos mais simples já tenham sido excluídos por algumas destas experiências, como veremos na próxima seção.

Voltando ao modelo cosmológico padrão, sabemos então que a ME deve ser não-relativística no universo primordial e assim, mesmo durante a era da radiação as pequenas perturbações no campo de densidades vão se amplificando devido à atração gravitacional. Quando estas perturbações se separam da expansão de Hubble, ou seja, quando a atração gravitacional interna às perturbações “vence” a expansão do universo, tem início o processo de colapso dos halos de ME, caracterizado por grandes contrastes de densidade, que já não podem ser tratados perturbativamente. Estes halos então, começando de um estado longe do equilíbrio, passam por processos irreversíveis que os “relaxam”, levando a um estado estacionário. O estudo deste processo de relaxação e a caracterização deste estado estacionário são os principais interesses desta tese, como veremos nos próximos capítulos. Apenas quando o plasma primordial atinge temperaturas da ordem da energia de ligação do átomo de Hidrogênio ($\approx 10eV$) é que a radiação é liberada, o que constituirá a radiação cósmica de fundo, permitindo que a matéria bariônica colapse sobre os poços de potencial da ME e forme as galáxias que observamos.

1.3 Experiências de detecção de matéria escura

Para responder às questões sobre a constituição da ME, ou seja, a massa e seção de choque de interação de suas partículas constituintes, muitas experiências vêm sendo construídas. Estas experiências se dividem em experiências de detecção direta e experiências de detecção indireta.

Nas experiências de detecção direta (ver p. ex. [Xenon100 Collaboration, Aprile, Arisaka et al., 2012](#); [Aprile, Alfonsi, Arisaka et al., 2012](#); [Agnese, Anderson, Asai et al., 2014](#)), espera-se medir a transferência de energia das partículas de ME para as partículas do detector. Para diminuir ao máximo possível o ruído produzido por outras partículas, como raios cósmicos, normalmente estas experiências são montadas em laboratórios subterrâneos e os detectores envoltos em escudos protetores. A taxa teórica de eventos

depositando energia numa faixa dE no detector é da forma

$$\frac{dR}{dE} \approx \frac{n_\chi}{m_N} \frac{d\sigma}{dE} \langle v \rangle,$$

onde $n_\chi = \rho_0/m_\chi$, ρ_0 é a densidade local de ME, m_χ a massa de sua partícula constituinte, σ a seção de choque de interação com o núcleo no detector e $\langle v \rangle$ a velocidade média das partículas de ME (ver [Jungman, Kamionkowski & Griest, 1996](#)). Como a energia depositada deve ser $\propto v^2$, em geral $d\sigma/dE \propto \sigma_0/v^2$, onde σ_0 encapsula as informações do modelo de partícula que está sendo estudado. Assim, a taxa teórica é calculada como

$$\frac{dR}{dE} \propto \frac{\sigma_0 \rho_0}{m_\chi m_N} \int \frac{f(v)}{v} d^3\vec{v}.$$

Como vemos, a taxa de eventos prevista depende de modelos de física de partículas, de física nuclear e, particularmente importante para nós, de astrofísica, como a densidade local de ME, sua distribuição de velocidades no halo, a velocidade de escape da Galáxia (que define o limite de integração nas velocidades), a velocidade do movimento do Sol em torno do centro galáctico e da Terra em torno do Sol.

Espera-se que, vista do centro galáctico, a distribuição de velocidades das partículas de ME seja aproximadamente isotrópica na posição do Sol. Entretanto, quando considerada do referencial do Sol, a distribuição de velocidades tem uma direção privilegiada, associada ao seu movimento em torno do centro galáctico. Este movimento, combinado com o movimento da Terra em torno do Sol, deve gerar uma oscilação na taxa de eventos, que deve ser máxima quando o movimento da Terra é paralelo ao do Sol e mínima quando é anti-paralelo (ver [Freese, Lisanti & Savage, 2012](#)). Esta modulação da taxa de eventos é de fato observada há quase 20 anos pelo experimento DAMA [Bernabei, Belli, Cappella et al. \(2010\)](#) – ver Fig. 1.4 – e mais recentemente pelo experimento CoGeNT [Aalseth, Barbeau, Colaresi et al. \(2011\)](#).

A observação desta modulação serve como mais uma evidência da existência de ME no halo galáctico, mas não fornece, a princípio, informações sobre sua constituição. Para isso, é necessária a realização de análises dependentes dos modelos de partículas. A comparação dos sinais medidos, que normalmente são compatíveis com o fundo previsto, à taxa de eventos prevista teoricamente por classes específicas de modelos permite restringir a área de parâmetros possíveis para estas partículas, em particular sua seção de choque de interação com bárions e sua massa (ver Fig. 1.5).

É interessante notar que, apesar da modulação observada pelo DAMA ter um alto nível de confiança (9σ), suas análises dependentes de modelos para a constituição da ME (ver [Bernabei, Belli, Cappella et al., 2008](#)), indicam uma combinação de parâmetros numa região já excluída por outros experimentos e o mesmo ocorre com os dados do CoGeNT

FIGURA 1.4: Modulação anual da taxa de eventos medida pelo experimento DAMA em duas etapas diferentes. Extraído de Freese, Lisanti & Savage (2012).

FIGURA 1.5: Curvas de exclusão de algumas experiências de detecção direta de ME. As regiões acima das respectivas curvas são consideradas excluídas. Ao mesmo tempo, os contornos mostram que as regiões de parâmetros favorecidas por algumas destas análises estão dentro da região excluída por outras experiências. As regiões cinzas no canto inferior direito mostram a região de parâmetros propostas por alguns modelos de supersimetria. Figura extraída de Aprile, Alfonsi, Arisaka et al. (2012).

(ver Aalseth, Barbeau, Bowden et al., 2011) – ver Fig. 1.5. Essa contradição tem gerado um intenso debate e um grande esforço tem sido feito na tentativa de compatibilizar estes resultados (ver p. ex. Savage, Gelmini, Gondolo & Freese, 2009; Savage, Gelmini, Gondolo & Freese, 2011). Para análises do impacto da distribuição de velocidades nos resultados destas experiências, ver Lisanti, Strigari, Wacker & Wechsler (2011); Pato, Strigari, Trotta & Bertone (2013).

Numa estratégia diferente, as experiências de detecção indireta tentam atribuir à aniquilação ou decaimento das partículas de ME os sinais deixados por partículas conhecidas. Como aqueles eventos são mais prováveis em regiões onde a densidade de ME é maior, estas experiências geralmente envolvem observações do centro galáctico, de galáxias-satélite da Via Láctea ou até mesmo do Sol ou do centro da Terra que, esperase, podem capturar as partículas de ME, acumulando-as em seus núcleos. Novamente, a taxa observada de eventos, normalmente compatível com o fundo conhecido, é comparada àquela prevista teoricamente a fim de restringir o espaço de parâmetros possíveis e os modelos e parâmetros astrofísicos assumidos são fundamentais nestas análises. Como exemplo, citamos o *IceCube* (Aartsen, Abbasi, Abdou et al., 2013), um imenso detector de neutrinos localizado no Pólo Sul e o *Fermi Large Area Telescope* (Fermi LAT) (Ackermann, Ajello, Allafort et al., 2012), um telescópio espacial de raios gama que mede o espectro de elétrons e pósitrons que chegam à Terra.

1.4 Motivação e plano geral da tese

Nesta tese, estamos interessados em analisar, não os diferentes modelos para suas partículas constituintes ou sua evolução no universo primordial, mas o processo de colapso dos halos de ME e as propriedades do estado estacionário gerado por ele, determinadas pelo fato de suas partículas constituintes não interagirem eletromagnética, mas apenas (ou principalmente) gravitacionalmente. Como veremos no próximo capítulo, este fato introduz as mesmas dificuldades teóricas compartilhadas com todos os sistemas com interação de longo alcance, como plasmas e sistemas gravitacionais em geral. Além de uma melhor compreensão dos processos físicos envolvidos nestes sistemas, sobre os quais ainda há muitas perguntas a serem respondidas (o que por si só já justifica nosso interesse), fornecemos elementos para um uso mais bem fundamentado de modelos de distribuição de ME em experiências de detecção e em outras aplicações.

No capítulo 2 introduzimos estas dificuldades, dando uma introdução geral ao problema da determinação do estado de equilíbrio atingido por sistemas gravitacionais como galáxias e aglomerados de galáxias, apresentando as escalas de tempo envolvidas em processos de relaxação colisionais e não-colisionais. O estado de equilíbrio deve ser caracterizado basicamente por duas funções: o perfil de densidades e a distribuição de velocidades resultantes do processo de relaxação, e que podem ser determinados uma vez obtida a função distribuição. Reproduzimos então as deduções de Lynden-Bell para a obtenção desta função.

No capítulo 3, baseado no trabalho publicado (Beraldo e Silva, Lima & Sodré, 2013), apresentamos os resultados obtidos com testes de perfis de densidade utilizando dados

observacionais de aglomerados de galáxias. Nesta análise, comparamos o desempenho de diferentes modelos, divididos entre perfis de densidade fenomenológicos e perfis teóricos.

No capítulo 4, apresentamos um resumo de um trabalho a ser submetido em breve, em que analisamos a distribuição de velocidades obtidas em simulações cosmológicas para testar a chamada distribuição q-gaussiana numa versão que prevê anisotropias no campo de velocidades.

Por fim, discutimos um modelo proposto, publicado recentemente (Beraldo e Silva, Lima, Sodré & Perez, 2014), para descrever sistemas gravitacionais, associando o grau de mistura do sistema à indistinguibilidade de seus constituintes. Este modelo e as consequências para a descrição de sistemas gravitacionais, são discutidos no capítulo 5.

No capítulo 6 apresentamos um pequeno resumo dos assuntos discutidos na tese e as considerações finais.

Capítulo 2

Dinâmica / Mecânica estatística de Sistemas Gravitacionais

Neste capítulo vamos introduzir a descrição de sistemas gravitacionais nos moldes da mecânica estatística clássica. O objetivo é descrever o processo de relaxação destes sistemas rumo ao estado de equilíbrio. Começamos imaginando um gás molecular, cujas moléculas interagem entre si através de interações de curto alcance, se movimentando em trajetórias suaves nos intervalos entre colisões. O sistema pode ser descrito pela função densidade de probabilidade de uma molécula $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ (ver [Lifshitz & Pitaevskii, 1980](#)). Se desprezarmos as colisões, cada molécula pode ser considerada como um sistema isolado e, como consequência do teorema de Liouville, temos

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = 0,$$

onde $\partial f / \partial \vec{r} = \nabla f$ e analogamente para $\partial f / \partial \vec{p}$. Quando consideramos as colisões, temos $df/dt = C(f)$, onde $C(f)$ é o chamado termo colisional, que deve ser calculado com base em considerações sobre o tipo de interação entre as partículas e a existência de possíveis correlações entre elas, por exemplo. Portanto no caso geral de haver um campo externo $\phi(\vec{r})$, tal que $d\vec{p}/dt = -m\nabla\phi$, e considerando as colisões entre as moléculas, ficamos com

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f - m\nabla\phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = C(f),$$

onde usamos $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Qualquer função do tipo $f = f(E)$, sendo $E = |\vec{p}|^2/2m + m\phi(\vec{r})$ a energia da molécula, anula o lado esquerdo desta equação. De fato, para verificar basta escrever

$$\nabla f = \frac{df}{dE} \nabla E = \frac{df}{dE} m \nabla \phi$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \frac{df}{dE} \cdot \frac{\partial E}{\partial \vec{p}} = \frac{df}{dE} \vec{v}.$$

No caso do gás molecular, com interações de curto alcance, são as colisões entre as moléculas que levam o gás de uma configuração inicial qualquer em direção à distribuição de equilíbrio, ou seja, à função distribuição que anula o lado direito da equação de transporte. Para o gás molecular, $C(f)$ envolve a integral de um termo do tipo $(f'_1 f'_2 - f_1 f_2)$, onde os índices 1 e 2 se referem a duas partículas colidindo e $f(f')$ à função distribuição antes (depois) da colisão. Portanto, para anular $C(f)$ basta fazer $f'_1 f'_2 = f_1 f_2$, e como a energia total se conserva em cada colisão, percebemos que uma função do tipo Maxwell-Boltzmann – $f \propto e^{-E/k_B T}$, onde k_B é a constante de Boltzmann e T a temperatura – representa a solução de equilíbrio (ver [Lifshitz & Pitaevskii, 1980](#)).

Vamos agora imaginar um sistema gravitacional como um gás cujas “moléculas” são suas estrelas ou partículas de ME. Neste caso, as interações são de longo alcance, com cada partícula interagindo com todas as outras em cada instante. Assim, mesmo desprezando as “colisões”, ou seja, mudanças bruscas de trajetórias, rigorosamente as partículas não podem ser consideradas sistemas isolados. Com isso, a equação de Liouville deve ser escrita em termos da função distribuição de N corpos, $f^{(N)}$, que representa o sistema como um todo, ou seja, $df^{(N)}/dt = 0$.

Entretanto, sendo desprezível a contribuição individual de cada partícula ao campo gravitacional total, e sendo desprezíveis as interações dois-a-dois, é comum utilizar-se uma aproximação de campo médio, em que se supõe que as partículas não interagem entre si, mas apenas com o campo $\phi(\vec{r}, t)$ coletivamente produzido. Isso permite descrever a evolução da função distribuição de uma partícula, f , através da chamada equação de Vlasov, ou equação de Boltzmann não-colisional:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0, \quad (2.1)$$

onde $\phi(\vec{r}, t)$ é determinado pela equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \int f d^3 \vec{v},$$

o que configura um sistema auto-consistente: para determinar $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é preciso conhecer $\phi(\vec{r}, t)$, mas para isso precisamos conhecer $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$.

Na verdade, a passagem da equação de Liouville (descrevendo o sistema como um todo) para a equação de Vlasov (distribuição de uma partícula), exige que se assumam hipóteses delicadas na construção da chamada hierarquia BBGKY (ver [Lifshitz & Pitaevskii, 1980](#); [Binney & Tremaine, 2008](#); [Saslaw, 1987](#)). O papel destas hipóteses e

FIGURA 2.1: Esquema do espalhamento de duas estrelas no referencial do centro de massa, em que uma estrela de massa reduzida μ e velocidade inicial V_0 é espalhada por um potencial fixo - ver Apêndice A. Figura extraída de [Binney & Tremaine \(2008\)](#).

a possível inaplicabilidade da equação de Vlasov em situações longe do equilíbrio, serão discutidas no capítulo 5 (e Apêndice B).

Resta saber em que circunstâncias, ou em quais sistemas gravitacionais, é razoável desprezar as interações das partículas entre si (“colisões”), o que discutiremos a seguir.

2.1 Relaxação colisional

Quando falamos em colisões, a imagem imediata é a de duas bolas de sinuca se aproximando, se chocando e depois se afastando. De fato num gás clássico, com interações de curto alcance, essa imagem é bem representativa do processo de colisão. Entretanto, não é esta interação de contato a característica mais importante para o que discutimos aqui. Para nós o ponto mais importante é o processo de difusão decorrente dessas colisões, ou seja, como as moléculas, ao interagirem entre si, vão obtendo diferentes posições e velocidades, ou seja, ocupando o volume do espaço de fases, durante a evolução do sistema.

No caso dos sistemas gravitacionais, regidos por interações de longo alcance, podemos estimar a importância de interações dois-a-dois no processo de difusão das velocidades da seguinte forma (ver [Binney & Tremaine, 2008](#)): imagine duas estrelas de massa m se aproximando com velocidade relativa $\vec{v}$ e parâmetro de impacto b e sendo “espalhadas” de um ângulo θ - ver Fig. 2.1. No Apêndice A, mostramos que a variação da velocidade dessas estrelas é dada por

$$|\delta \vec{v}_\perp| = v \frac{b/b_{90}}{1 + b^2/b_{90}^2},$$

$$|\delta \vec{v}_\parallel| = v \frac{1}{1 + b^2/b_{90}^2},$$

onde

$$b_{90} = \frac{2Gm}{v^2}$$

é o parâmetro de impacto associado a um ângulo de deflexão $\theta = 90^\circ$. Com isso,

$$\delta v^2 = |\delta \vec{v}_\perp|^2 + |\delta \vec{v}_\parallel|^2 = \frac{v^2}{1 + b^2/b_{90}^2}.$$

Sendo N o número total de estrelas e R o tamanho típico do sistema, a densidade superficial numérica de estrelas é $N/\pi R^2$. Portanto, quando uma estrela atravessa o sistema uma vez, o número de encontros com outras estrelas, com parâmetro de impacto entre b e $b + db$ é dado por

$$dn = \frac{N}{\pi R^2} 2\pi b db.$$

Assim, sua variação total de velocidade depois de cruzar o sistema será

$$\delta v^2 dn = \frac{v^2}{1 + b^2/b_{90}^2} \frac{2N}{R^2} b db,$$

e integrando sobre o parâmetro de impacto (de 0 a R), ficamos com

$$\Delta v^2 = N v^2 \left(\frac{R}{b_{90}} \right)^2 \ln \left[1 + \left(\frac{R}{b_{90}} \right)^2 \right].$$

Podemos estimar a velocidade típica como a velocidade circular de uma estrela na borda do sistema: $v^2 \approx NGm/R$. E como $N \gg 1$, obtemos finalmente

$$\frac{\Delta v^2}{v^2} \approx 8 \frac{\ln N}{N}.$$

Essa expressão representa a mudança relativa da velocidade de uma estrela devido às “colisões”, ou seja, às interações duas-a-duas com estrelas próximas, quando a estrela cruza o sistema uma vez. Tipicamente, esse cruzamento leva um tempo $t_{cr} \approx R/v$ para ocorrer. De maneira simples, podemos dizer que o sistema relaxou, ou atingiu o estado de equilíbrio, quando as estrelas tiverem “esquecido” suas velocidades iniciais, ou seja, quando suas velocidades já não tenham relação direta com os valores iniciais. Isto deve ocorrer numa escala de tempo tal que $\Delta v^2/v^2 \approx 1$. Para isso, uma estrela típica precisa cruzar o sistema $n_{eq} \approx N/8 \ln N$ vezes. Portanto, a escala de tempo para que este processo difusivo leve o sistema ao equilíbrio é da ordem de

$$t_{eq} \approx 0.1 \frac{N}{\ln N} t_{cr}. \quad (2.2)$$

Aglomerados globulares tipicamente têm $N \approx 10^5$ estrelas com velocidades típicas $v \approx 1 \text{ km/s}$ num raio $R \approx 10 \text{ pc}$. Com isso, o tempo que uma estrela leva para cruzá-lo é

$t_{cr} \approx 10^6$ anos. Substituindo na Eq. (2.2), percebemos que o processo difusivo discutido acima relaxa os aglomerados globulares numa escala de tempo $t_{eq} \approx 10^9$ anos, que é menor que sua idade conhecida, $\approx 10^{10}$ anos (da ordem da idade do universo). Portanto este processo parece suficiente para explicar as regularidades observadas destes objetos (que representam indícios de que o equilíbrio foi atingido).

Assim, apesar dos aglomerados globulares serem caracterizados por interações de longo alcance, o fato das interações dois-a-dois (“colisões”) serem efetivas no processo de relaxação sugere que estes objetos tenham algumas propriedades similares ao de um gás molecular. De fato, sabemos há muito tempo que aglomerados globulares podem ser razoavelmente bem descritos com um tipo modificado de esfera isotérmica. A esfera isotérmica, como veremos nos próximos capítulos, é caracterizada pela distribuição de Maxwell-Boltzmann com temperatura constante ao longo do aglomerado e que dá origem a um perfil de densidades “plano” na origem e variando como $\propto r^{-2}$ nas regiões externas (ver [Binney & Tremaine, 2008](#)). A modificação a que nos referimos está ligada a um truncamento na função distribuição, justificada pela existência de uma velocidade máxima permitida em cada ponto, a velocidade de escape do objeto. Este último modelo, proposto por [King \(1966\)](#) de forma puramente fenomenológica, foi deduzido recentemente a partir de considerações teóricas, como veremos na seção 5.3. Apesar dos modelos de King descreverem muito bem os dados observacionais de aglomerados globulares disponíveis à época em que foi proposto, análises recentes indicam a necessidade de modelos mais sofisticados, associados a processos não colisionais (ver [Williams, Barnes & Hjorth, 2012](#); [Bellazzini, Mucciarelli, Sollima et al., 2014](#)).

Voltando à estimativa do tempo de relaxação – Eq. (2.2) – galáxias tipicamente têm $N \approx 10^{11}$ estrelas com velocidades típicas $v \approx 100 \text{ km/s}$ num raio $R \approx 10 \text{ kpc}$, o que dá $t_{cr} \approx 10^8$ anos. Assim o tempo necessário para atingir o equilíbrio fica $t_{eq} \approx 10^{17}$ anos. Portanto, comparando com a idade do universo, poderíamos concluir que estes sistemas ainda não tiveram tempo de relaxar. Entretanto, esta conclusão não está de acordo com as regularidades percebidas através de observação direta (constatação feita desde os anos 1950), ou através de simulações numéricas de galáxias, principalmente no que se refere aos perfis de densidade. Essa discussão se aplica exatamente da mesma maneira se substituirmos estrelas por partículas de matéria escura.

Assim concluímos que as “colisões” são completamente desprezíveis na evolução das galáxias rumo ao aparente estado de equilíbrio atingido, o que normalmente se usa como justificativa para a validade da equação de Vlasov com a aproximação de campo médio. Dizemos então que estes sistemas são não-colisionais. Além disso, deve haver algum outro mecanismo que leve as galáxias ao equilíbrio e o processo proposto muitos

anos atrás é a chamada relaxação violenta (“violent relaxation”), que discutimos na próxima seção.

2.2 Relaxação violenta e distribuição de Lynden-Bell

Se, durante a evolução dos sistemas gravitacionais, desde sua formação primordial até atingir o aparente equilíbrio observado, o campo gravitacional médio permanecesse constante no tempo, a energia total de cada partícula (energia cinética mais energia potencial associada ao campo médio) também o faria, não oferecendo chance para a redistribuição da energia total entre elas. Entretanto, essa redistribuição pode ocorrer no caso (mais realista) do campo gravitacional médio variar no tempo. De fato, se a energia (por unidade de massa) de uma partícula é dada por $E = v^2/2 + \phi(\vec{r}, t) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{v} \cdot \nabla \phi + \vec{v} \cdot \nabla \phi \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial t}. \end{aligned}$$

É justamente essa interação das partículas com o campo gravitacional médio variando no tempo que configura o processo chamado de relaxação violenta. A importância deste processo na evolução das galáxias rumo ao equilíbrio foi primeiramente discutida por [Hénon \(1964\)](#) e [King \(1966\)](#) e posteriormente a relaxação violenta foi estudada em detalhe por [Lynden-Bell \(1967\)](#). Em seu artigo, Lynden-Bell argumenta que a escala de tempo envolvida na relaxação através deste processo deve ser da ordem da escala de tempo dinâmico $\tau_{din} = 1/\sqrt{G\rho} \approx t_{cr}$, várias ordens de grandeza menor que a expressão (2.2) para a relaxação colisional, resultado que é de fato observado em simulações numéricas (p. ex. [Aarseth & Binney, 1978](#); [van Albada, 1982](#); [Aguilar & Merritt, 1990](#)). Exce-lentes artigos de revisão sobre o processo de relaxação violenta podem ser encontrados em [Efthymiopoulos, Voglis & Kalapotharakos \(2007\)](#); [Bindoni & Secco \(2008\)](#); [Levin, Pakter, Rizzato et al. \(2014\)](#).

Se a evolução da distribuição de uma partícula é regida pela equação de Vlasov, Eq. (2.1), então sua densidade no espaço de fases é constante. Na tentativa de determinar qual deve ser a distribuição de equilíbrio ao fim da relaxação violenta, [Lynden-Bell \(1967\)](#) faz uma análise combinatória traduzindo este fato num princípio de exclusão (a despeito das partículas serem consideradas distinguíveis), segundo o qual cada elemento de fase só pode ser ocupado por no máximo uma partícula. Vamos deduzir a distribuição de

FIGURA 2.2: Divisão do espaço de fases em J macro-células (neste caso $J = 10$). Cada macro-célula i é dividida em ν_i micro-células (neste caso $\nu_i = 20$), das quais n_i estão ocupadas (quadrados cinzas). Fig. extraída de [Efthymiopoulos, Voglis & Kalapotharakos \(2007\)](#).

Lynden-Bell explicitando o papel da hipótese de distinguibilidade entre as estrelas em cada etapa, com vistas à discussão que faremos sobre este assunto no capítulo 5.

Seguindo os passos de [Lynden-Bell \(1967\)](#); [Shu \(1978\)](#), começamos dividindo o espaço de fases em J macro-células - Fig. 2.2. Cada macro-célula i é em seguida dividida em ν_i micro-células, das quais n_i estão ocupadas por uma partícula de massa m e as outras $\nu_i - n_i$ células estão vazias. Por simplicidade, vamos considerar que todas as partículas têm a mesma massa. No caso dos modelos mais simples para a matéria escura, isso é exatamente o que é esperado, mas no caso de estrelas em aglomerados globulares ou em galáxias, uma distribuição nas massas poderia gerar algumas diferenças - ver [Lynden-Bell \(1967\)](#); [Shu \(1978\)](#). Deste modo, a massa total é $M = \sum_{i=1}^J n_i m = Nm$, onde N é o número total de partículas. O objetivo do cálculo a seguir é determinar a função distribuição F , que representa o número médio de partículas por estado ($F \propto n_i/\nu_i$), maximizando o número de complexions, isto é, o número de microestados $W(\{n_i\})$ compatíveis com os vínculos de conservação da massa e energia totais. A energia total é dada por

$$H = \sum_{i=1}^J n_i m \left(\frac{1}{2} |v_i|^2 + \frac{1}{2} \phi_i \right),$$

onde

$$\phi_i = - \sum_{j=1, j \neq i}^J \frac{G m n_j}{|x_i - x_j|}$$

é o potencial associado à macro-célula i , que tem posição e velocidade médias x_i e v_i , respectivamente. O volume do espaço de fases é obtido calculando-se o número de

possíveis configurações dentro de uma macro-célula e multiplicando-se pelo número de trocas possíveis entre macro-células.

Dentro da macro-célula i , o número de maneiras de organizar n_i partículas *distinguíveis* em ν_i micro-células disponíveis, mas sem co-habitação, ou seja, com no máximo uma partícula por micro-célula, é

$$\frac{\nu_i!}{(\nu_i - n_i)!}. \quad (2.3)$$

O mesmo acontece para todas as macro-células $i = 1, 2, \dots, J$ e portanto o número de possibilidades para trocas dentro de macro-células é

$$\frac{\nu_1!}{(\nu_1 - n_1)!} \cdot \frac{\nu_2!}{(\nu_2 - n_2)!} \cdots \frac{\nu_J!}{(\nu_J - n_J)!}.$$

Se permitíssemos co-habitações nas micro-células, ainda considerando as partículas *distinguíveis*, a expressão acima seria substituída para

$$\nu_1^{n_1} \cdot \nu_2^{n_2} \cdots \nu_J^{n_J}, \quad (2.4)$$

o que daria origem à distribuição de Maxwell-Boltzmann.

Para trocas entre diferentes macro-células, o número de maneiras de organizar N partículas *distinguíveis* nas J macro-células sem co-habitação, mantendo fixo o número n_i de partículas em cada macro-célula, é

$$\frac{N!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_J!}. \quad (2.5)$$

Com isso, o volume do espaço de fases fica

$$W(\{n_i\}) = \left[\frac{N!}{n_1! \cdots n_J!} \right] \left[\frac{\nu_1!}{(\nu_1 - n_1)!} \cdots \frac{\nu_J!}{(\nu_J - n_J)!} \right]. \quad (2.6)$$

A configuração de equilíbrio, isto é, aquela associada ao maior volume do espaço de fases, é obtida maximizando a expressão

$$\ln W - \lambda \sum_{i=1}^J m n_i - \eta \sum_{i=1}^J m n_i \left(\frac{1}{2} |v_i|^2 + \frac{1}{2} \phi_i \right)$$

com relação ao número de ocupação n_i , sendo λ e η multiplicadores de Lagrange. Agora usamos a aproximação de Stirling,

$$\ln n! \approx n (\ln n - 1), \quad (2.7)$$

que é válida para $n \gg 1$. Note, entretanto, que nas regiões externas de sistemas auto-gravitantes, onde a densidade vai a zero, esta aproximação não deve valer, como concluído por [Hjorth & Williams \(2010\)](#). Desprezando por enquanto este fato e usando a aproximação acima, ficamos com

$$\ln \left(\frac{\nu_i - n_i}{n_i} \right) = \lambda m + \eta m E_i, \quad (2.8)$$

onde

$$E_i = |v_i|^2/2 + \phi_i < 0 \quad (2.9)$$

é a energia por unidade de massa da macro-célula i . Assim, finalmente obtemos a distribuição de Lynden-Bell:

$$\frac{n_i}{\nu_i} \propto \frac{f(\varepsilon_i)}{f_0} = F(\varepsilon_i) = \frac{1}{1 + e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)}}, \quad (2.10)$$

onde f_0 representa a densidade do espaço de fases no instante inicial. Na expressão acima, definimos energias positivas e adimensionais como

$$\varepsilon = -\frac{E}{|\phi_0|} = \varphi - \frac{1}{2} \frac{v^2}{|\phi_0|}, \quad (2.11)$$

onde $\varphi = -\phi/|\phi_0|$ é o potencial gravitacional positivo e adimensional, $\phi_0 = \phi(0)$ é o potencial central e β e μ são parâmetros adimensionais relacionados aos multiplicadores de Lagrange originais λ e η . O parâmetro μ determina a posição de transição entre os dois regimes, de baixa e alta ocupação (regime degenerado). O parâmetro β determina quão abrupta é essa transição. Essa distribuição é idêntica à distribuição de Fermi-Dirac, apesar da suposição de partículas distinguíveis.

Uma das primeiras críticas ao uso da distribuição de Lynden-Bell em sistemas gravitacionais, já apontada em seu artigo de 1967, é a de que o princípio de exclusão proposto só deve valer se o número de ocupação for pequeno (para que não haja co-habitação de micro-células), ou seja, $n_i/\nu_i \ll 1$. Mas isso reduz a distribuição à distribuição de Maxwell-Boltzmann, que é exatamente o que teria sido obtido se não tivéssemos usado o princípio de exclusão. Além deste problema conceitual, sabemos que a distribuição de Maxwell-Boltzmann dá origem a um sistema de massa infinita, o que contradiz a hipótese de massa fixa. Outra crítica à abordagem de Lynden-Bell é que ele assume equiprobabilidade dos micro-estados, isto é, que o sistema tem oportunidade de “visitar” todas as regiões do espaço de fases antes de evoluir para o de maior probabilidade, mas o processo de relaxação violenta acaba antes que isso aconteça (ver [Madsen, 1987](#)). Finalmente, muitas análises indicam que a previsão dada pela distribuição de Lynden-Bell não descreve satisfatoriamente os dados de simulações numéricas (ver [Cuperman,](#)

Goldstein & Lecar, 1969; Aguilar & Merritt, 1990; Levin, Pakter, Rizzato et al., 2014; Benetti, Ribeiro-Teixeira, Pakter & Levin, 2014).

Capítulo 3

Perfis de densidade: modelos teóricos versus modelos fenomenológicos

As discussões no capítulo anterior ilustram a complexidade do tratamento analítico de sistemas de muitos corpos com interações de longo-alcance. Para evitar essas dificuldades, uma possibilidade é realizar simulações numéricas de N corpos em que as posições e velocidades das partículas são acompanhadas durante a evolução do sistema, calculando-se por “força bruta” as interações entre elas. Para evitar a complexidade dos fenômenos associados à matéria bariônica, em geral estas simulações incluem apenas a ME, ou seja apenas partículas interagindo gravitacionalmente (embora simulações mais recentes venham introduzindo efeitos bariônicos - ver [Vogelsberger, Genel, Springel et al. \(2014\)](#)). Podemos então extrair destas simulações informações completas sobre a distribuição de velocidades e os perfis de densidade dos halos formados, isto é, das estruturas formadas como consequência da atração gravitacional. Isso é importante primeiramente porque tudo o que podemos de fato observar são velocidades radiais e distâncias projetadas no plano do céu, informação incompleta portanto. Por outro lado, estas simulações nos ajudam a verificar se as hipóteses assumidas, por exemplo ausência de interações de curto alcance entre partículas de ME, geram resultados compatíveis com dados observacionais. E de fato, a maior parte dos resultados obtidos com estas simulações são confirmadas pelas observações.

Um destes resultados é o surgimento de perfis de densidade “universais”, em que a densidade ρ varia com a distância r ao centro do halo como $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$, com $1 \lesssim \alpha \lesssim 1.5$ nas regiões internas e $3 \lesssim \alpha \lesssim 4$ nas regiões externas. A parametrização mais conhecida para esta função é o chamado perfil Navarro-Frenk-White (NFW [Navarro, Frenk &](#)

[White, 1996](#)):

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}, \quad (3.1)$$

onde ρ_s e r_s são parâmetros de escala. Observações de aglomerados de galáxias ([Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al., 2011b](#)), por exemplo, são consistentes com estes perfis.

Assim, se poderia argumentar que se os resultados obtidos com simulações estão de acordo com as observações, isso significa que nossas hipóteses estão corretas e que portanto o problema está resolvido. Entretanto, uma descrição clara, partindo de primeiros princípios, destes resultados é fundamental para a compreensão dos fenômenos observados. De fato, ignorar essa abordagem seria equivalente a, por exemplo, restringir o estudo de gases clássicos à realização de simulações numéricas e ao cálculo de variáveis como pressão e temperatura a partir destes resultados, ignorando todo o trabalho desenvolvido por Maxwell, Boltzmann, Gibbs e outros.

As discussões deste capítulo se baseiam no artigo publicado recentemente ([Beraldo e Silva, Lima & Sodré, 2013](#)), em que utilizamos dados observacionais de aglomerados de galáxias, obtidos a partir do efeito de lentes gravitacionais, para testar diferentes modelos de perfis de densidade. Os modelos são testados calculando-se a densidade superficial $\Sigma(R)$ prevista por cada um deles e fitando-a aos dados observacionais. A densidade superficial $\Sigma(R)$ é obtida integrando-se o perfil de densidade tridimensional $\rho(\vec{r})$ ao longo da linha de visada:

$$\Sigma(R) = \int dx_{\parallel} \rho(x_{\parallel}, R), \quad (3.2)$$

onde $\vec{r} = (x_{\parallel}, R)$ e R é a distância projetada no plano do céu.

Aglomerados de galáxias são sistemas interessantes para se estudar as propriedades da ME, dado que nestes sistemas a contribuição dos bárions para o perfil de densidade total é pequena. Com isso, podemos supor que o perfil de densidade do halo de ME é bem aproximado pelo perfil de densidade total, medido através do efeito de lentes gravitacionais. Além disso, a análise com lentes gravitacionais, diferente de outros métodos, tem a vantagem de prescindir da hipótese de equilíbrio hidrostático.

Vamos apresentar os dados utilizados, depois resumir os modelos testados, dividindo-os entre modelos fenomenológicos e modelos teóricos, e discutir os resultados obtidos.

3.1 Dados observacionais

Nesta análise, utilizamos dados fornecidos por [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#), em que são combinadas medidas de lentes gravitacionais fortes e fracas de 4 aglomerados

Cluster	Redshift	r_{vir} ($Mpc\ h^{-1}$)	M_{vir} ($10^{15} M_{\odot}\ h^{-1}$)
A1689	0.183	2.011 ± 0.113	1.300 ± 0.205
A1703	0.281	1.915 ± 0.148	1.325 ± 0.221
A370	0.375	2.215 ± 0.079	2.399 ± 0.249
C10024+17	0.395	1.799 ± 0.105	1.329 ± 0.224

TABELA 3.1: Propriedades dos aglomerados de galáxias utilizados: nome, redshift, raio virial e massa virial. Estes aglomerados têm propriedades similares, o que legitima seu “empilhamento” (*stacking*). Dados extraídos das Tabelas (1) e (7) de [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011a\)](#).

de galáxias altamente massivos ($M \gtrsim 10^{15} M_{\odot}$): A1689, A1703, A370 e C10024+17, todos com redshifts $z \approx 0.3$. As medidas de lentes gravitacionais fortes foram obtidas com observações do Telescópio Espacial Hubble das partes internas ($R \lesssim 150\text{ kpc}/h$) destes aglomerados, e combinadas com medidas independentes de lentes fracas ([Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al., 2011a](#)) indo até as regiões externas ($R \lesssim 3.5\text{ Mpc}/h$). A Tabela (3.1) mostra um resumo das propriedades individuais destes aglomerados.

A fim de obter um aglomerado médio representativo do conjunto da amostra, assim como reduzir o ruído cósmico e suavizar os efeitos de não-esfericidade ou a presença de sub-estruturas, [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#) construíram um perfil de densidade superficial “empilhado” (*stacked*), escalando os perfis individuais por seus raios viriais. Este procedimento justifica-se dada a pequena dispersão ao redor da massa e redshift médios dos aglomerados [ver Tabela (3.1)].

3.2 Modelos fenomenológicos

Chamamos de modelos fenomenológicos aqueles perfis de densidade propostos sem nenhuma motivação teórica, mas apenas com o objetivo de ajustar os dados obtidos em simulações ou observações. A seguir faremos uma breve descrição destes modelos.

3.2.1 NFW

Este perfil, Eq. (3.1), foi proposto por [Navarro, Frenk & White \(1996\)](#); [Navarro, Frenk & White \(1997\)](#) para ajustar os dados de simulações de N-corpos de ME fria, depois de “empilhar” muitos halos. Ele normalmente representa o melhor ajuste aos dados observacionais de aglomerados de galáxias ([Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al., 2011b](#)). Para este modelo, é possível calcular analiticamente o perfil de densidade superficial,

Eq. (3.2), e o resultado é (Bartelmann, 1996):

$$\Sigma(R) = 2\rho_s r_s F(R/r_s) ,$$

onde

$$F(X) = \begin{cases} \frac{1}{X^2 - 1} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{1 - X^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1 - X}{1 + X}} \right) , & (X < 1) \\ \frac{1}{3} , & (X = 1) \\ \frac{1}{X^2 - 1} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{X^2 - 1}} \operatorname{arctan} \sqrt{\frac{X - 1}{X + 1}} \right) . & (X > 1) \end{cases}$$

O perfil NFW tem uma divergência não-física na origem, já que varia como r^{-1} nas regiões internas. Nas regiões externas, varia como r^{-3} , o que implica em outra propriedade não-realista: massa total infinita. Este último problema pode ser evitado se o perfil for truncado em algum ponto, por exemplo no raio virial.

Uma generalização comum do perfil NFW (Zhao, 1996; Jing & Suto, 2000) é obtida deixando-se a inclinação interna α como parâmetro livre (para o NFW, $\alpha = 1$):

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)^\alpha (1 + r/r_s)^{3-\alpha}} , \quad (3.3)$$

e chamaremos este perfil de gNFW.

3.2.2 BMO

Outra modificação interessante do perfil NFW é o proposto por Baltz, Marshall & Oguri (2009), incorporando um truncamento polinomial nas regiões externas, o que origina um perfil mais profundo que o NFW nesta região. Dessa maneira, o problema da massa infinita é evitado e a influência do termo 2-halo pode ser mais apropriadamente levada em conta, como discutido na seção 3.4. A função proposta tem a seguinte forma:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2} \left(\frac{r_t^2}{r^2 + r_t^2} \right)^n , \quad (3.4)$$

sendo n e r_t parâmetros livres.

3.2.3 Perfil de Sérsic

O perfil Sérsic (ver [Sérsic, 1963](#)) foi proposto a fim de ajustar a distribuição de luz de galáxias esferoidais e também tem sido usado para ajustar dados simulados ([Merritt, Graham, Moore et al., 2006](#)). É definido como um perfil de densidade superficial projetada com a seguinte forma:

$$\Sigma(R) = \Sigma_e \exp \left\{ -b_n \left[(R/R_e)^{1/n} - 1 \right] \right\}, \quad (3.5)$$

onde Σ_e é o brilho superficial no raio efetivo R_e e b_n é uma função de n obtida impondo-se que a luminosidade dentro do raio efetivo é metade da luminosidade total. A relação entre b_n e n é bem aproximada por $b_n \approx 2n - 0.324$ ([Ciotti, 1991](#)).

3.2.4 Perfil de Einasto

O perfil de Einasto é uma versão tridimensional do perfil de Sérsic (ver [Einasto, 1965](#)). Este modelo foi proposto para descrever o brilho superficial de galáxias elípticas. Recentemente, também tem sido usado para ajustar dados de simulações de N-corpos de ME fria, dando resultados comparáveis aos do perfil NFW em alguns casos ([Navarro, Hayashi, Power et al., 2004](#); [Merritt, Navarro, Ludlow & Jenkins, 2005](#); [Merritt, Graham, Moore et al., 2006](#); [Gao, Navarro, Cole et al., 2008](#); [Navarro, Ludlow, Springel et al., 2010](#)). A expressão deste perfil é

$$\rho(r) = \rho_s \exp \left\{ -2n \left[(r/r_{-2})^{1/n} - 1 \right] \right\},$$

onde ρ_s e r_{-2} são parâmetros de escala. Podemos ver que ele prevê uma densidade finita na origem. Em [Lapi & Cavaliere \(2011\)](#) há uma discussão sobre um possível processo dinâmico que poderia gerar um perfil para o qual o perfil de Einasto é uma boa aproximação. Não há expressão analítica para a densidade superficial gerada por este modelo, mas em seu Apêndice A, [Mamon, Biviano & Murante \(2010\)](#) apresentam uma aproximação polinomial com erro menor que 0.8%.

3.2.5 Perfil de Stadel

Este perfil foi proposto para ajustar dados simulados de halos de ME galácticos (veja [Stadel, Potter, Moore et al., 2009](#)). Sua expressão é

$$\rho(r) = \rho_0 \exp \left\{ -\lambda [\ln(1 + r/r_s)]^2 \right\}, \quad (3.6)$$

que lembra o perfil de Einasto e também prevê uma densidade ρ_0 finita na origem. Este perfil também pode ser escrito como

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(1 + r/r_s)^{\lambda \ln(1+r/r_s)}},$$

e desta maneira lembra uma lei de potências.

3.2.6 Perfil de Hernquist

O perfil de [Hernquist \(1990\)](#) tem a forma

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^3},$$

e difere do perfil NFW apenas nas regiões externas, variando com r^{-4} . Ele foi proposto, não para ajustar dados simulados, mas porque produz expressões analíticas para várias quantidades dinâmicas importantes, como o potencial gravitacional, a distribuição de energia, a densidade de estados, assim como a densidade superficial, que é dada por

$$\Sigma(R) = 2\rho_s r_s G(R/r_s),$$

onde

$$G(X) = \frac{[(2 + X^2)H(X) - 3]}{2(1 - X^2)^2}, \quad (3.7)$$

e

$$H(X) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 - X^2}} \operatorname{sech}^{-1} X, & (X < 1) \\ 1, & (X = 1) \\ \frac{1}{\sqrt{X^2 - 1}} \operatorname{sec}^{-1} X, & (X > 1) \end{cases}$$

o que implica que $\lim_{X \rightarrow 1} G(X) = 2/15$.

A Fig. 3.2 mostra os perfis fenomenológicos discutidos acima, depois da adição do termo 2-halo, explicado na seção 3.4, assim como os dados fornecidos por [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#) para o perfil “empilhado” dos aglomerados de galáxias.

3.3 Modelos teóricos

Na tentativa de obter um quadro mais claro para a compreensão dos resultados obtidos com simulações e observações, alguns modelos teóricos têm sido propostos, em particular para explicar os perfis de densidade. Nesta seção explicaremos os modelos testados por

nós. Alguns desses modelos se baseiam na hipótese de equilíbrio hidrostático entre a atração gravitacional e a pressão $P(r)$ devida à dispersão de velocidades em uma distribuição isotrópica:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r) \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (3.8)$$

onde $\rho(r)$ é o perfil de densidade e $M(r)$ é a massa total interna ao raio r :

$$M(r) = \int_0^r dr' 4\pi r'^2 \rho(r'). \quad (3.9)$$

Combinando as Eqs. (3.8) e (3.9), ficamos com

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right] = -4\pi G r^2 \rho(r). \quad (3.10)$$

Assim, a escolha da equação de estado $P(\rho)$ determina o modelo, e a Eq. (3.10) pode ser resolvida numericamente para a determinação do perfil de densidade $\rho(r)$ de sistemas isotrópicos.

A Eq. (3.8) representa um caso particular da equação de Jeans. Esta última é obtida a partir da equação de Vlasov (ou equação de Boltzmann não-colisional), Eq. (2.1), supondo-se que o sistema já tenha atingido um estado de equilíbrio ($\partial f / \partial t = 0$) e que a configuração resultante seja esfericamente simétrica. Isso resulta na equação de Jeans:

$$\frac{dp_r}{dr} + 2\beta \frac{p_r}{r} = -\rho \frac{GM(r)}{r^2}, \quad (3.11)$$

onde

$$\beta = 1 - (\sigma_\theta^2 + \sigma_\phi^2) / (2\sigma_r^2) \quad (3.12)$$

é o parâmetro de anisotropia nas velocidades, escrito em termos das dispersões de velocidades em coordenadas esféricas, e $p_r = \rho(r) \sigma_r^2$.

3.3.1 Esfera Isotérmica (não-Singular)

A Esfera Isotérmica (não-Singular), é baseada na equação de estado do gás ideal $P = nk_B T$, que localmente fica

$$P(r) = \frac{k_B T}{m} \rho(r), \quad (3.13)$$

onde m é a massa da partícula constituinte do gás. Usando a Eq. (3.13) na Eq. (3.10), obtemos

$$r\rho \frac{d^2\rho}{dr^2} - r \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2 + 2\rho \frac{d\rho}{dr} + 4\pi G \lambda r \rho^3 = 0, \quad (3.14)$$

onde $\lambda = m/k_B T$. Essa equação representa um caso particular da chamada equação de Lane-Emden, que é obtida supondo-se que o sistema é descrito pela equação de estado de um polítropo, em que pressão e densidade se relacionam como $P \propto \rho^{1+1/n}$, onde n é um parâmetro livre (ver [Binney & Tremaine, 2008](#)). Percebe-se que a Esfera Isotérmica corresponde ao caso em que $n \rightarrow \infty$. A Esfera Isotérmica não-Singular tem inclinação nula na origem e oscila ao redor da Esfera Isotérmica Singular ($\rho \propto r^{-2}$) para grandes distâncias do centro ([Binney & Tremaine, 2008](#)). Assim, resolvemos a Eq. (3.14) numericamente, impondo as condições de contorno $d\rho/dr(0) = 0$ e $\rho(0) = \rho_0$, onde ρ_0 é um parâmetro livre.

3.3.2 Modelos de Kang & He

A entropia por unidade de massa s_r de uma gás ideal, escrita como função da pressão p_r e do perfil de densidade $\rho(r)$ é dada por

$$s_r = \ln \left(p_r^{3/2} \rho^{-5/2} \right) .$$

Tendo em vista a equação de Jeans, Eq. (3.11), [Kang & He \(2011\)](#) definem uma pressão generalizada P como

$$\frac{dP}{dr} = \frac{dp_r}{dr} + 2\beta \frac{p_r}{r}$$

e uma entropia fenomenológica como

$$s = \ln \left(P^{3/2} \rho^{-5/2} \right) , \quad (3.15)$$

de tal modo que o sistema de equações resultante é independente de β . Isso, na prática, reduz a Eq. (3.11) à Eq. (3.8). Usando o princípio variacional, a entropia por unidade de massa, Eq. (3.15), é então usada para maximizar a entropia total

$$S = \int_0^\infty 4\pi r^2 \rho s \, dr = \int_0^\infty 4\pi r^2 \rho \ln \left(P^{3/2} \rho^{-5/2} \right) dr ,$$

com os vínculos de conservação de energia total e o teorema do virial. Esse procedimento resulta na seguinte equação de estado:

$$\rho = \lambda P + \mu P^\gamma , \quad (3.16)$$

onde $\gamma = 3/5$. Vamos chamar este modelo de “Kang & He”. A constante λ é um multiplicador de Lagrange e μ é uma constante de integração, ambas relacionadas à massa e energia totais. Essa equação de estado se reduz à equação do gás ideal Eq. (3.13) para $\mu = 0$ e $\lambda = m/k_B T$. Com uma abordagem diferente, mas similar, [Kang & He](#)

(2011) obtêm a mesma equação de estado, mas agora com $\gamma = 4/5$. Chamaremos este último modelo de “Kang & He 2”.

A fim de usar a equação de estado Eq. (3.16) na Eq. (3.10), ainda precisaríamos isolar $P(\rho)$ na Eq. (3.16), para depois transformar a Eq. (3.10) em uma equação para $\rho(r)$. Entretanto, isso não é possível para um valor qualquer de γ , então depois de derivar a Eq. (3.16), Kang & He (2011) propõem a aproximação $P \approx \rho/\lambda$, com isso obtendo

$$\frac{dP}{dr} = \frac{1}{\lambda + \gamma\mu(\lambda/\rho)^{1-\gamma}} \frac{d\rho}{dr}.$$

Substituindo essa expressão na Eq. (3.10), obtém-se uma equação diferencial de segunda ordem para $\rho(r)$, que é numericamente resolvida impondo-se novamente $d\rho/dr(0) = 0$ e $\rho(0) = \rho_0$. É possível utilizar uma abordagem diferente, substituindo $\rho(r)$ da Eq. (3.16) na Eq. (3.10), assim obtendo uma equação diferencial para $P(r)$. Obtida uma solução numérica para esta equação, $\rho(r)$ pode ser obtida da Eq. (3.16). Essa abordagem dá resultados ligeiramente melhores (embora similares aos do approach original de Kang & He) no ajuste, e por isso foi a abordagem utilizada por nós.

3.3.3 DARKexp

O modelo DARKexp (Hjorth & Williams, 2010; Williams & Hjorth, 2010) é significativamente diferente dos modelos discutidos anteriormente, pois não leva em conta uma possível equação de estado para ser usada na equação de equilíbrio hidrostático, Eq. (3.10). Ao invés disso, este modelo usa argumentos de mecânica estatística para deduzir a função distribuição e com isso determinar o perfil de densidade.

Para o que segue, vamos definir uma densidade $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$ e distância $x = r/a$ a-dimensionais, onde ρ_0 e a são parâmetros de escala. A energia da partícula por unidade de massa $E = \Phi + v^2/2$ pode ser escrita como

$$\varepsilon = \varphi - \frac{1}{2} \frac{v^2}{v_g^2}, \quad (3.17)$$

onde $v_g = \sqrt{a^2 \rho_0 G}$ e definimos as quantidades positivas e a-dimensionais $\varepsilon = -E/v_g^2$ e $\varphi = -\Phi/v_g^2$.

Este modelo é baseado em duas hipóteses principais: primeiramente, sendo o sistema não-colisional, depois de atingido o equilíbrio cada partícula mantém sua energia total constante, e assim os autores, inspirados em Binney (1982), argumentam que uma função do tipo Maxwell-Boltzmann deve ser usada, não na função distribuição $f(\varepsilon)$ (número

médio de partículas por estado), mas no número de partículas por unidade de energia $N(\varepsilon) \propto f(\varepsilon)g(\varepsilon)$, onde $g(\varepsilon)$ é a densidade de estados (número de estados por unidade de energia - ver [Binney, 1982](#)). A outra característica importante deste modelo é a introdução de um corte nas energias similar àquele usado nos modelos de King ([King, 1966](#)), mas que é justificado pelo tratamento adequado do número de ocupação, que é pequeno em certas regiões do espaço de fases de sistemas gravitacionais ([Madsen, 1996](#)) - ver seção 5.3. Juntas, essas duas características implicam que o número de partículas por unidade de energia ε deve ser dado por

$$N(\varepsilon) = e^{\varphi_0 - \varepsilon} - 1, \quad (3.18)$$

onde φ_0 é um parâmetro livre representando o potencial central.

Nos modelos que prevêm qual deve ser a função distribuição $f(\varepsilon)$, o perfil de densidades pode ser obtido integrando-a sobre todas as possíveis velocidades ([Binney & Tremaine, 2008](#)):

$$\rho(x) = 4\pi \int dv v^2 \frac{\rho_0}{v_g^3} f(\varepsilon), \quad (3.19)$$

onde $f(\varepsilon)$ é considerado adimensional. Esta expressão também assume que as velocidades são isotrópicas, contrariamente ao que é obtido em simulações ([Lemze, Wagner, Rephaeli et al., 2012](#)) e em análises observacionais ([Biviano & Katgert, 2004](#)). Usando a Eq. (3.17), ficamos com

$$\tilde{\rho}(\varphi) = 4\pi \int_0^{\varphi(x)} d\varepsilon f(\varepsilon) \sqrt{2[\varphi(x) - \varepsilon]}. \quad (3.20)$$

O perfil de densidades é então obtido resolvendo-se a equação de Poisson para o potencial φ :

$$\nabla^2 \varphi(x) = -4\pi \tilde{\rho}(\varphi), \quad (3.21)$$

e conhecendo $\varphi(x)$ determinamos $\rho(x)$.

Entretanto, se o modelo prevê $N(\varepsilon)$ ao invés de $f(\varepsilon)$, como é o caso do DARKexp, é necessário utilizar um procedimento iterativo. Seguindo os passos de [Binney \(1982\)](#), começamos supondo uma função inicial para o perfil de densidade $\tilde{\rho}(x)$ e calculamos o potencial resultante como

$$\varphi(x) = 4\pi \left[\frac{1}{x} \int_0^x dx' x'^2 \tilde{\rho}(x') + \int_x^\infty dx' x' \tilde{\rho}(x') \right]. \quad (3.22)$$

A densidade de estados é calculada como

$$g(E) = (4\pi)^2 \int dr r^2 \int dv v^2 \delta\left(\frac{1}{2}v^2 + \Phi - E\right)$$

que, em termos das quantidades adimensionais, fica

$$g(\varepsilon) = 16\pi^2 a^3 v_g \int_0^{x_{max}(\varepsilon)} dx x^2 \sqrt{2[\varphi(x) - \varepsilon]},$$

onde x_{max} é tal que $\varphi(x_{max}) = \varepsilon$. Depois utilizamos a expressão de $N(\varepsilon)$ definida pelo modelo, Eq. (3.18), para calcular a função distribuição adimensional

$$f(\varepsilon) = a^3 v_g \frac{N(\varepsilon)}{g(\varepsilon)}.$$

Finalmente obtemos um novo perfil de densidades com a Eq. (3.20) e iteramos o processo. Depois de cerca de 20 iterações o processo converge para um perfil de densidade independente do chute inicial.

A Fig. (3.3) mostra os perfis teóricos descritos acima, depois de somado o termo 2-halo explicado na seção 3.4, assim como os dados fornecidos por [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#).

3.4 Modelo do Halo

Os dados utilizados nesta análise envolvem medidas a grandes distâncias aos centros dos aglomerados, se estendendo até $R \lesssim 3.0 \text{ Mpc}/h$. A essas distâncias, as contribuições da distribuição de matéria em grande escala começam a ser importantes. Particularmente importante é o chamado termo 2-halo, que contabiliza a contribuição de partículas que não pertencem aos halos em questão, mas estão correlacionadas com eles devido à atração gravitacional por eles exercida.

A função de correlação halo-massa, definida como $\xi_{hm}(r) = \langle \delta_h(\mathbf{x}) \delta_m(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$, representa o excesso de densidade a uma distância $r = |\mathbf{r}|$ do centro do halo, isto é, é uma medida do perfil de densidade médio observado $\langle \rho_{\text{obs}}(r) \rangle$:

$$1 + \xi_{hm}(r) = \frac{\langle \rho_{\text{obs}}(r) \rangle}{\bar{\rho}_m}. \quad (3.23)$$

O chamado Modelo do Halo (ver [Cooray & Sheth, 2002](#)) nos permite estimar correlações cosmológicas a partir das propriedades dos halos de ME. Neste contexto, a função de correlação halo-massa é escrita como a soma das contribuições do perfil de densidade do halo em questão $\rho_{1h}(r)$ com o termo 2-halo ([Hayashi & White, 2008](#); [Schmidt, Lima, Oyaizu & Hu, 2009](#)):

$$\xi_{hm}(r) = \frac{\rho_{1h}(r)}{\bar{\rho}_m} + b_h^L(M, z) \xi_m^L(r), \quad (3.24)$$

onde $b_h^L(M, z)$ é o chamado *linear halo bias*, dependente da massa M e do redshift z do halo, e $\xi_m^L(r)$ é a função de correlação massa-massa linear.

As medidas feitas com lentes gravitacionais, como as que geraram os dados utilizados por nós, são sensíveis às sobre-densidades $\delta\rho_{\text{obs}}(r) = \langle\rho_{\text{obs}}(r)\rangle - \bar{\rho}_m$. Assim, combinando as Eqs. (3.23) e (3.24), temos que

$$\delta\rho_{\text{obs}}(r) = \rho_{1h}(r) + \rho_{2h}(r),$$

e o termo 2-halo é dado por

$$\rho_{2h}(r) = \bar{\rho}_m b_h^L(M) \xi_m^L(r). \quad (3.25)$$

Finalmente a densidade superficial é calculada com a Eq. (3.2):

$$\Sigma_{\text{obs}}(R) = \int dx_{\parallel} \delta\rho_{\text{obs}}(x_{\parallel}, R) = \Sigma_{1h}(R) + \Sigma_{2h}(R).$$

Para calcular o termo 2-halo, utilizamos o *linear halo bias* ajustado por [Tinker, Robertson, Kravtsov et al. \(2010\)](#) da seguinte maneira: o redshift médio dos aglomerados utilizados é $z = 0.32$ (ver 3.1). Para este redshift, e fixado o modelo cosmológico (assumimos $\Omega_m = 0.275$ e $\Omega_\Lambda = 0.725$), a sobre-densidade virial relativa à densidade média de matéria é $\Delta \approx 263$ ([Bryan & Norman, 1998](#)). Ajustando-se o perfil NFW aos dados dos aglomerados, obtemos $M_{\text{vir}} = 1.56 \times 10^{15} M_\odot / h$ como primeira estimativa para a massa. Com essa massa e redshift, a fórmula de Tinker para o bias dá $b_L(M_{263}, z) = 10.98$. A função de correlação massa-massa $\xi_m^L(r)$ é calculada como a transformada de Fourier do espectro de potências obtido com o CAMB ([Lewis, Challinor & Lasenby, 2000](#)),

$$\xi_m^L(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int dk k^2 P_m^L(k) \frac{\sin(kr)}{kr}.$$

A Fig. 3.1 mostra separadamente as contribuições do termo 2-halo (linha tracejada laranja) e do perfil NFW (linha verde pontilhada), assim como a soma dos dois e os dados fornecidos por [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#).

Podemos perceber que o perfil NFW subestima o perfil observado para distâncias $R \gtrsim 1\text{Mpc}/h$, onde o termo 2-halo passa a ser importante. Na próxima seção mostraremos os resultados obtidos com os ajustes dos modelos discutidos anteriormente somados ao termo 2-halo. Como este termo é determinado pelo modelo cosmológico fixado, isso não introduz nenhum parâmetro extra nos ajustes.

FIGURA 3.1: Contribuições do perfil NFW (linha verde pontilhada) e do termo 2-halo (linha laranja tracejada) e a soma dos dois termos (contínua preta), assim como os dados fornecidos por [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#). Na região interna o termo 2-halo é desprezível, mas contribui significativamente para o perfil de densidade projetado nas regiões externas.

3.5 Resultados

Para testar os diferentes modelos discutidos nas seções 3.2 e 3.3, calculamos, numérica ou analiticamente, a densidade superficial $\Sigma(R)$ através da Eq. (3.2) e a ajustamos aos dados fornecidos por [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#), o que inclui a matriz de covariâncias V_{ij} . Para isso, utilizamos o pacote de minimização *Minuit* ([James & Roos, 1975](#)) a fim de minimizar o χ^2 , isto é, obter o menor valor de Q , dado por

$$Q = \Delta_i V_{ij}^{-1} \Delta_j,$$

onde

$$\Delta_i = \Sigma_T(R_i) - \Sigma_D(R_i),$$

$\Sigma_T(R_i)$ é a densidade superficial teórica e $\Sigma_D(R_i)$ é a densidade superficial medida por [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#). Comparamos a performance dos diferentes modelos calculando o χ^2 reduzido, definido como $\chi_\nu^2 = \chi^2/\nu$, onde $\nu = 15 - N_p$ é o número de graus de liberdade dados 15 pontos e N_p parâmetros.

A Fig. 3.2 mostra os dados observacionais e os ajustes para os perfis fenomenológicos discutidos na seção 3.2, depois de somado o termo 2-halo representado pela linha laranja na Fig. 3.1. A Tabela 3.2 mostra os resultados numéricos obtidos com estes ajustes.

FIGURA 3.2: Curvas ajustadas e os respectivos valores de χ^2_ν para os perfis fenomenológicos, assim como os dados fornecidos por [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#). Todos os modelos fenomenológicos testados são capazes de descrever os dados, com pequenas variações nas regiões externas.

Modelo	N_p	χ^2_ν	Parâmetro
BMO	3	0.458	$\tau = 17 \pm 15$
Stadel	3	0.465	$\lambda = 0.25 \pm 0.04$
gNFW	3	0.471	$\alpha = 0.74 \pm 0.44$
Einasto	3	0.475	$n = 3.80 \pm 0.61$
Hernquist	2	0.482	-
NFW	2	0.484	-
Sérsic	3	0.504	$n = 2.42 \pm 0.34$

TABELA 3.2: Resultados dos ajustes dos modelos fenomenológicos. A coluna N_p mostra o número total de parâmetros, χ^2_ν mostra o χ^2 reduzido e a última coluna mostra a melhor estimativa para o parâmetro de forma do modelo.

Os ajustes dos modelos teóricos discutidos na seção 3.3 são mostrados na Fig. 3.3. O melhor ajuste, muito superior ao dos outros modelos teóricos, foi obtido com o modelo DARKexp. A Tabela 3.3 mostra os resultados numéricos obtidos com estes ajustes. Percebemos também que a qualidade do ajuste deste modelo (medida pelo χ^2_ν) é praticamente idêntica à dos melhores perfis fenomenológicos. A importância deste resultado é discutida na seção (3.7).

FIGURA 3.3: Curvas ajustadas e os respectivos valores de χ^2_v para os perfis teóricos, assim como os dados fornecidos por [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#). O modelo DARKexp descreve bem os dados em toda a região observada, diferente dos outros modelos, que apresentam discrepâncias significativas, especialmente nas regiões externas.

Modelo	N_p	χ^2_v	Parâmetro
DARKexp	3	0.468	$\varphi_0 = 3.00 \pm 0.48$
KH	4	2.350	$\tilde{\lambda} = (5.44 \pm 0.10) \times 10^4$ $\tilde{\mu} = 13.85 \pm 0.03$
Isoth. Sph.	3	2.603	$\tilde{\lambda} = (5.76 \pm 0.16) \times 10^4$
KH2	4	2.670	$\tilde{\lambda} = (5.29 \pm 0.38) \times 10^4$ $\tilde{\mu} = 346 \pm 268$

TABELA 3.3: Resultados dos ajustes dos modelos teóricos. As colunas são definidas como na Tabela 3.2.

3.6 Desprezando o termo 2-halo

Em nossa análise também avaliamos o ajuste dos modelos discutidos acima no caso de não incluirmos o termo 2-halo. Esses ajustes são mostrados nas Figs. 3.4 e 3.5, com os respectivos resultados numéricos sendo mostrados nas Tabelas 3.4 e 3.5.

É possível notar que, quando não adicionamos o termo 2-halo, quase todos os perfis ajustados ficam abaixo dos dados observacionais nas regiões externas. Isso evidencia a necessidade de considerarmos este termo na análise.

FIGURA 3.4: Perfis fenomenológicos: curvas ajustadas e os respectivos valores do χ^2_ν obtidos quando desprezamos o termo 2-halo. Também são mostrados os dados observacionais fornecidos por [Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. \(2011b\)](#). Neste caso, todos os modelos ficam abaixo dos dados nas regiões externas, o que evidencia a necessidade do termo 2-halo.

Modelo	N_p	χ^2_ν	Parâmetro
NFW	2	0.449	-
gNFW	3	0.474	$\alpha = 0.89 \pm 0.37$
BMO	3	0.486	$\tau = (3 \pm 124) \times 10^3$
Stadel	3	0.522	$\lambda = 0.223 \pm 0.04$
Einasto	3	0.602	$n = 4.31 \pm 0.75$
Sérsic	3	0.663	$n = 2.69 \pm 0.41$
Hernquist	2	0.706	-

TABELA 3.4: Perfis fenomenológicos: resultados dos ajustes quando desprezamos o termo 2-halo. As colunas são definidas como na Tabela 3.2.

Modelo	N_p	χ^2_ν	Parâmetro
DARKexp	3	0.598	$\varphi_0 = 3.24 \pm 0.48$
Isoth. Sph.	3	2.195	$\tilde{\lambda} = (5.62 \pm 0.15) \times 10^4$
KH	4	2.265	$\tilde{\lambda} = (5.477 \pm 0.003) \times 10^4$ $\tilde{\mu} = 6.1 \pm 0.6$
KH2	4	2.385	$\tilde{\lambda} = (5.52 \pm 0.36) \times 10^4$ $\tilde{\mu} = 75 \pm 237$

TABELA 3.5: Perfis teóricos: resultados dos ajustes quando desprezamos o termo 2-halo. As colunas são definidas como na Tabela 3.2.

FIGURA 3.5: Perfis teóricos: curvas ajustadas e os respectivos valores do χ^2_ν obtidos quando desprezamos o termo 2-halo. Também são mostrados os dados observacionais fornecidos por Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. (2011b).

3.7 Discussão

No trabalho discutido neste capítulo (Beraldo e Silva, Lima & Sodré, 2013), utilizamos os perfis de densidade superficial medidos por Umetsu, Broadhurst, Zitrin et al. (2011b). Estes dados se referem a 4 aglomerados de galáxias massivos e com redshifts $z \approx 0.3$. Assumindo que os dados “empilhados” são uma boa representação do perfil de densidade médio dos halos de ME, incluímos efeitos da estrutura em grande escala e avaliamos a performance de diferentes modelos na descrição das propriedades médias desses aglomerados.

Dos perfis fenomenológicos, o modelo BMO (NFW com truncamento polinomial) é o que melhor se ajusta aos dados, seguido do perfil de Stadel, gNFW e Einasto. Entretanto, devemos notar que todos estes perfis dão resultados estatisticamente indistinguíveis, isto é, dadas as incertezas, é impossível eliminar qualquer um deles, como é normalmente o caso em simulações numéricas (Gao, Navarro, Cole et al., 2008; Merritt, Navarro, Ludlow & Jenkins, 2005; Navarro, Ludlow, Springel et al., 2010).

No caso dos perfis com motivação teórica, tanto a Esfera Isotérmica e os modelos de Kang & He produzem ajustes insatisfatórios comparados aos dos perfis fenomenológicos. Isso pode ser atribuído em parte porque aqueles modelos produzem perfis do tipo *core*, ou seja, com derivada nula na região interna, enquanto as simulações e os dados usados

aqui favorecem perfis do tipo *cuspy*, ou seja, com derivada não-nula na origem. Além disso, as regiões externas tampouco são bem descritas por aqueles modelos, que variam como r^{-2} nestas regiões, enquanto os dados favorecem um comportamento do tipo r^{-3} .

O melhor ajuste entre os modelos teóricos é obtido com o modelo DARKexp, que produz resultados excelentes mesmo se comparados aos dos perfis fenomenológicos. O interessante aqui é que este modelo tem uma justificativa teórica razoável.

É interessante notar que o perfil de Einasto com parâmetro $n \approx 6$ produz ajustes aos dados de simulações Λ CDM melhores que os do NFW, como mostrado por [Navarro, Hayashi, Power et al. \(2004\)](#). Além disso, [Mamon, Biviano & Murante \(2010\)](#) obtiveram $n \approx 5$ para halos de ME de simulações hidrodinâmicas, enquanto em nosso trabalho obtivemos $n \approx 3.8$. Finalmente, ajustando curvas de rotação em galáxias espirais, [Chemin, de Blok & Mamon \(2011\)](#) obtiveram ajustes do perfil de Einasto com $n \approx 1$. Esta sequência pode sugerir uma correlação entre o parâmetro n e a importância da componente gasosa na dinâmica do sistema.

Para finalizar, concluímos que embora estritamente falando os dados aqui utilizados sejam mais bem descritos pelos perfis fenomenológicos testados, o modelo DARKexp produz resultados equivalentes. Também mostramos neste trabalho que a inclusão do termo 2-halo neste tipo de análise é importante. Persistindo este acordo com os dados observados para aglomerados em diferentes redshifts, modelos tais como o DARKexp podem fornecer as bases dinâmicas da descrição destes sistemas.

Capítulo 4

Distribuição de velocidades q-gaussiana anisotrópica

Já citamos no capítulo 1 a importância da distribuição de velocidades para a previsão da taxa de eventos em experiências de detecção de partículas de ME. O conhecimento da distribuição de velocidades também é fundamental para a determinação do perfil de densidade e de anisotropia a partir da distribuição de seus componentes no espaço de fases projetado (velocidade na linha de visada e distância ao centro projetada no plano de observação). Recentemente, [Mamon, Biviano & Moué \(2013\)](#) desenvolveram um algoritmo chamado MAMPOSSt (*Modelling Anisotropy and Mass Profiles of Observed Spherical Systems*), em que a distribuição no espaço de fases projetado, que pode ser diretamente comparada com os dados observacionais, é calculada partindo-se de expressões parametrizadas para o perfil de densidades $\rho(r)$ e para o perfil de anisotropia $\beta(r)$, assim como assumindo-se uma distribuição de velocidades tridimensional. A solução mais simples é supor uma distribuição de velocidades gaussiana (ou distribuição de Maxwell). Entretanto, resultados obtidos com simulações numéricas (ver [Wojtak, Lokas, Gottlöber & Mamon, 2005](#); [Hansen, Moore, Zemp & Stadel, 2006](#)) indicam desvios significativos desta função.

Uma generalização da distribuição de Maxwell foi proposta por [Tsallis \(1988\)](#). Essa distribuição, normalmente chamada de q-gaussiana, tem sido aplicada a estudos de fenômenos em muitas áreas da física, em particular em sistemas gravitacionais. Por exemplo, [Plastino & Plastino \(1993\)](#) demonstraram que os sistemas descritos por esta distribuição são equivalentes ao modelo do gás politrópico, do qual a esfera isotérmica é um caso particular - ver seção 3.3.1.

Aparentemente, todas as análises feitas até o momento utilizando esta distribuição assumem ou isotropia no campo de velocidades ([Vogelsberger, Helmi, Springel et al., 2009](#);

Lisanti, Strigari, Wacker & Wechsler, 2011; Mao, Strigari, Wechsler et al., 2013) ou que a distribuição de velocidades seja separável nas componentes radial e tangencial (Hansen, Moore, Zemp & Stadel, 2006; Fairbairn & Schwetz, 2009; Kuhlen, Weiner, Diemand et al., 2010). De fato, as componentes radial e tangencial obtidas com simulações de N -corpos parecem ser bem ajustadas, separadamente, por q -gaussianas (Hansen, Moore, Zemp & Stadel, 2006).

Por outro lado, dados simulados (Lemze, Wagner, Rephaeli et al., 2012; Wojtak, Gottlöber & Klypin, 2013) e observacionais (Biviano & Katgert, 2004; Wojtak & Mamon, 2013) sugerem que a distribuição de velocidades em galáxias elípticas e aglomerados de galáxias é anisotrópica no campo de velocidades, isto é, $\beta(r) \neq 0$. Além disso, a função distribuição (escrita em termos da energia e momento angular) obtida por Wojtak, Lokas, Mamon et al. (2008) dá origem a uma distribuição de velocidades não-separável nas diferentes componentes. Assim, parece preferível considerar uma distribuição de velocidades não-separável e que leve em conta a anisotropia.

Uma generalização da função q -gaussiana com os aspectos acima citados foi estudada num trabalho (Beraldo e Silva, Mamon, Duarte et al., 2013), a ser submetido em breve. Esta função é tratada, não como tendo um significado físico fundamental, mas como uma parametrização fenomenológica poderosa. Nós a utilizamos para ajustar dados de simulações de N -corpos e verificar se ela é capaz de descrever estes dados melhor que a distribuição gaussiana.

Graças ao interesse em experiências de detecção de ME, a maioria das análises sobre a distribuição de velocidades se restringem a uma posição equivalente a 3% do raio do virial, r_{vir} , ou seja, à posição do Sistema Solar no halo da Via Láctea. Por outro lado, os métodos de modelagem dos perfis de massa e anisotropia, como o MAMPOSSt, envolvem integrais ao longo da linha de visada, correspondendo a distâncias do centro que se estendem, a princípio, indefinidamente. Na prática, o fluxo de Hubble “estica” a relação entre velocidade e a distância ao centro do halo, de modo que além de $r_{max} \approx 13r_{vir}$ as velocidades na linha de visada ultrapassam o limite de 3σ da velocidade média (ver Mamon, Biviano & Murante, 2010). Assim, a determinação da distribuição de velocidades é necessária em todos os raios do centro do halo até $\approx 13r_{vir}$.

Na seção 4.1, revemos a dedução de Maxwell para a distribuição de equilíbrio, explicitando as hipóteses envolvidas. Na seção 4.2 reproduzimos a dedução da distribuição q -gaussiana feita por Silva, Plastino & Lima (1998) e na seção 4.3 apresentamos a função proposta para incluir a anisotropia no campo de velocidades. Finalmente, na seção 4.4 explicamos os dados simulados que utilizamos para testar esta função e na seção 4.5 discutimos nossos resultados.

4.1 Distribuição de Maxwell

A distribuição de velocidades de um gás ideal em equilíbrio foi pela primeira vez deduzida por Maxwell, assumindo-se duas hipóteses (ver [Diu, Guthmann, Lederer & Roulet, 1989](#); [Sommerfeld, 1993](#); [Silva, Plastino & Lima, 1998](#)):

1. A distribuição de velocidades $F(\vec{v})$ é isotrópica nas velocidades. Isso implica que $F(\vec{v}) = F(\sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}) = F(v)$.
2. As três direções são estatisticamente independentes. Isso, usando coordenadas cartesianas, implica que $F(\vec{v}) = f_1(v_x) f_2(v_y) f_3(v_z)$, onde f_1 , f_2 e f_3 podem ser diferentes em geral.

Juntas, estas hipóteses implicam que

$$F(v) = f(v_x) f(v_y) f(v_z). \quad (4.1)$$

Seguindo a dedução padrão, calculamos o $\ln$ da equação acima,

$$\ln F(v) = \ln f(v_x) + \ln f(v_y) + \ln f(v_z)$$

e derivamos os dois lados relativamente a v_x , obtendo

$$\frac{d \ln F}{dv} \frac{1}{v} = \frac{1}{v_x} \frac{d \ln f}{dv_x}.$$

Como essa igualdade vale para quaisquer valores de v e de v_x , os termos acima devem ser iguais a uma constante $-k$, o que implica

$$f(v_x) \propto e^{-\frac{k}{2}v_x^2}.$$

O mesmo vale para v_y e v_z , e assim a distribuição de velocidades conjunta fica

$$F(\vec{v}) = F(v) = A e^{-\frac{k}{2}v^2},$$

onde $A = \left(\frac{k}{2\pi}\right)^{3/2}$ é determinada pela condição de normalização

$$\int F(\vec{v}) d^3\vec{v} = 1. \quad (4.2)$$

Em 1872, Boltzmann mostrou que essa distribuição de velocidades não é alterada pelas colisões moleculares e obteve a expressão da entropia que, maximizada, dá origem à distribuição previamente deduzida por Maxwell.

4.2 Distribuição q -gaussiana

Historicamente falando, a distribuição q -gaussiana foi deduzida na ordem inversa. Primeiramente, uma versão generalizada da entropia de Boltzmann foi proposta (ver [Tsallis, 1988](#)), e então [Plastino & Plastino \(1993\)](#) determinaram qual distribuição de velocidades é obtida maximizando aquela entropia, mostrando também que o sistema por ela descrito equivale a um politropo. Finalmente, a mesma distribuição foi obtida por ([Silva, Plastino & Lima, 1998](#)) seguindo argumentos de simetria similares aos de Maxwell.

De fato, assumindo a hipótese (i) acima (que nos permite escrever $F(\vec{v}) = F(v)$), mas abandonando a hipótese (ii), [Silva, Plastino & Lima \(1998\)](#) propõem, como generalização da distribuição conjunta de Maxwell, Eq. (4.1), a expressão

$$F(v) = e_q \left[\sum_{i=x}^z f^{q-1}(v_i) \ln_q f(v_i) \right],$$

onde as funções q -exp e q -log são definidas como

$$e_q(f) = [1 + (1 - q)f]^{1/(1-q)}$$

e

$$\ln_q(f) = \frac{f^{1-q} - 1}{1 - q},$$

e vemos que quando $q \rightarrow 1$, essas funções tendem às expressões familiares e a distribuição conjunta tende à distribuição de Maxwell. Seguindo os mesmos passos deste último caso, obtemos

$$F(\vec{v}) = F(v) = B_q \left[1 - (1 - q) \frac{k}{2} v^2 \right]^{1/(1-q)}, \quad (4.3)$$

onde a constante de normalização B_q é dada por (ver [Silva & Alcaniz, 2003](#))

$$B_q = \left(\frac{k}{2\pi} \right)^{3/2} \times \begin{cases} (1 - q)^{1/2} \left(\frac{5-3q}{2} \right) \left(\frac{3-q}{2} \right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1-q}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{1-q}\right)}, & \text{if } q \leq 1 \\ (q - 1)^{3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{q-1} - \frac{3}{2}\right)}, & \text{if } 1 \leq q \leq 5/3. \end{cases}$$

Propondo uma possível generalização (envolvendo o parâmetro q) da hipótese do caos molecular adotada por Boltzmann, [Lima, Silva & Plastino \(2001\)](#) concluem que a generalização proposta satisfaz um teorema-H para $q > 0$, ou seja, para $q > 0$ a Segunda Lei da Termodinâmica (aumento da entropia) é satisfeita.

4.3 Distribuição q-gaussiana anisotrópica

A distribuição de velocidades dada pela Eq. 4.3 depende apenas do módulo da velocidade, portanto é isotrópica, como esperado por construção. Como os sistemas astrofísicos apresentam anisotropia nas velocidades, estendemos a distribuição de velocidades q-gaussiana para este caso.

Uma abordagem possível para realizar esta extensão seria maximizar a entropia de Tsallis, como feito por [Plastino & Plastino \(1993\)](#), mas impondo vínculos adicionais (ver [Stiavelli & Bertin, 1987](#)). Ao invés disso, inspirado na Eq. 4.3, e tendo em mente sistemas gravitacionais esfericamente simétricos, propomos uma versão anisotrópica da distribuição de velocidades q-gaussiana como

$$F(\vec{v}) = C_q \left[1 - (1-q) \frac{1}{2} D_q \left(\frac{v_r^2}{\sigma_r^2} + \frac{v_\theta^2}{\sigma_\theta^2} + \frac{v_\phi^2}{\sigma_\phi^2} \right) \right]^{1/(1-q)}, \quad (4.4)$$

onde σ_i são as dispersões de velocidades nas respectivas direções e as constantes C_q e D_q são determinadas impondo a condição de normalização Eq. (4.2) e que a dispersão de velocidades na direção radial de fato deve ser igual a σ_r :

$$\int F(\vec{v}) v_r^2 dv_r dv_\theta dv_\phi = \sigma_r^2. \quad (4.5)$$

Utilizando as condições (4.2) e (4.5), obtemos:

$$F(\vec{v}) = (2-q) D_q E_q \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sigma_r \sigma_\theta \sigma_\phi} \times \left[1 - (1-q) \frac{1}{2} D_q \left(\frac{v_r^2}{\sigma_r^2} + \frac{v_\theta^2}{\sigma_\theta^2} + \frac{v_\phi^2}{\sigma_\phi^2} \right) \right]^{1/(1-q)}, \quad (4.6)$$

com

$$D_q = \frac{2}{7-5q}$$

e

$$E_q = \sqrt{D_q} \times \begin{cases} \sqrt{1-q} \frac{\Gamma[1/(1-q)+5/2]}{\Gamma[1/(1-q)+2]}, & q \leq 1 \\ \sqrt{q-1} \frac{\Gamma[1/(q-1)-1]}{\Gamma[1/(q-1)-3/2]}, & 1 \leq q \leq 7/5. \end{cases}$$

Também podemos expressar a distribuição de velocidades em termos do parâmetro de anisotropia, definido na Eq. (3.12). Em sistemas esfericamente simétricos, temos $\sigma_\theta = \sigma_\phi$, e portanto $\sigma_\theta(r) = \sigma_\phi(r) = \sqrt{1-\beta(r)} \sigma_r(r)$. A distribuição de velocidades fica então

$$F(\vec{v}) = (2-q) D_q E_q \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (1-\beta) \sigma_r^3} \times \left[1 - (1-q) \frac{1}{2} D_q \left(\frac{(1-\beta) v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2}{(1-\beta) \sigma_r^2} \right) \right]^{1/(1-q)},$$

e podemos perceber que ela não pode ser escrita como o produto de distribuições para cada componente, isto é, não é separável.

4.3.1 Distribuição do módulo da velocidade

Assim como é feito normalmente para a distribuição de Maxwell, é interessante definir a distribuição do módulo da velocidade. Tendo em vista a Eq. (4.6), definimos $u_i = \frac{v_i}{\sigma_i}$ para cada componente da velocidade e o módulo da velocidade (adimensional) é dado por $u^2 = u_r^2 + u_\theta^2 + u_\phi^2$. A distribuição do módulo fica

$$G(u) = (2-q) D_q E_q \sqrt{\frac{2}{\pi}} \times u^2 \left[1 - (1-q) \frac{1}{2} D_q u^2 \right]^{1/(1-q)}. \quad (4.7)$$

4.4 Simulações

Para testar a performance da distribuição de velocidades dada pela equação (4.4), analisamos uma simulação cosmológica de N -corpos (matéria escura apenas), realizada com o Gadget-2 (Springel, 2005). Esta simulação continha 512^3 partículas numa caixa de tamanho $100h^{-1}\text{Mpc}$ com condições periódicas de contorno, utilizando os parâmetros cosmológicos do WMAP7: $\Omega_m = 0.272, \Omega_\Lambda = 0.728, h = 0.704, \sigma_8 = 0.807$. Os halos foram identificados com a técnica *friends-of-friends* através do software *HaloMaker* - (ver Tweed, Devriendt, Blaizot et al., 2009). A técnica *friends-of-friends* identifica um conjunto de partículas como pertencentes a um mesmo halo se estas partículas têm ao menos uma partícula vizinha a uma distância menor que um comprimento característico.

Selecionamos 90 halos no redshift $z = 0$, dividindo-os em 3 sub-grupos de massa comparável (massa interna ao raio dentro do qual a densidade média é 100 vezes maior que a densidade média do universo, M_{100}): o primeiro sub-grupo contém os 30 halos mais massivos, enquanto os outros dois sub-grupos contêm halos de massa com média geométrica diferente de 0,5 e de 1,0 dex da média do primeiro subgrupo. A massa média em cada sub-grupo é $\langle M \rangle = 2.44 \times 10^{14} M_\odot$, $6.15 \times 10^{13} M_\odot$ e $1.92 \times 10^{13} M_\odot$ respectivamente.

Os halos foram analisados da seguinte maneira: primeiramente, definimos o centro de cada halo usando a identificação dos halos “pais” fornecida pelo *HaloMaker*. Depois disso, redeterminamos a “paternidade” das partículas atribuindo-as ao halo com centro mais próximo. Isso foi feito para que obtivéssemos halos esféricos. Recalculamos então o raio do virial, determinando o raio r_{100} dentro do qual a densidade média é 100 vezes maior que a densidade média do Universo.

Utilizando o método da máxima verossimilhança, ajustamos a função (4.4) para determinar a melhor estimativa do parâmetro q (no intervalo $0 < q < 7/5$, com prior constante) em cada camada esférica ao redor do centro dos halos. Isso foi feito de duas maneiras: construindo um halo “empilhado” (*stacked*), normalizado por r_{100} , com todas as partículas de todos os 90 halos, e por outro lado realizando o ajuste em cada halo individualmente e depois calculando a média e a mediana (em cada camada) das estimativas de q . Para ajustar o halo empilhado, definimos as camadas esféricas de modo que tivéssemos 3×10^5 partículas em cada camada. Para os halos individuais, requeremos 5×10^3 partículas em cada camada. Esse requerimento implica que as definições dos bins radiais é diferente para cada halo individual. Ao calcular a média de q , precisamos definir novos bins radiais (agora 15 bins igualmente espaçados em log) e em cada bin levar em consideração apenas aqueles halos que tenham um valor tabelado de q naquele bin. No caso da mediana, realizamos interpolações e extrapolações de $q(r)$ de modo a considerar obrigatoriamente um valor de q para cada halo.

Todo o procedimento descrito acima foi realizado para raios entre $0.03r_{100}$ (dentro do qual a imprecisão na identificação do centro poderia afetar os resultados) e $13r_{100}$.

4.5 Resultados

4.5.1 Perfis radiais do parâmetro q

A Fig. 4.1 mostra a melhor estimativa do parâmetro q como função da distância ao centro, obtida ajustando-se cada halo individualmente. Percebemos que nenhum halo apresenta um comportamento gaussiano (ou maxwelliano), que equivale a $q = 1$, em todos os raios. Perto da origem, o parâmetro q fica acima de 1, é aproximadamente 1 em $r_{100}/10$, continua decrescendo até $q \approx 0.85$ em $r \approx r_{100}$ e depois sobe para $q \simeq 0.94$ em $2 - 2.5 r_{100}$, onde atinge um platô.

A Fig. 4.2 mostra as estimativas de q obtidas com o halo empilhado, assim como as obtidas calculando-se a média e mediana dos ajustes de halos individuais. Podemos ver como q varia em relação ao caso gaussiano ($q = 1$) indicado com a linha horizontal pontilhada. Podemos perceber que nas regiões internas, $q(r) \propto -\log(r/r_{100})$, e depois cresce como uma lei de potências em (r/r_{100}) para grandes distâncias ao centro, até atingir um platô. Este comportamento de $q(r)$ pode ser descrito com a seguinte função (que depende de 5 parâmetros):

FIGURA 4.1: Estimativas de q obtidas com o método da máxima verossimilhança nos ajustes da Eq. (4.7) à distribuição do módulo da velocidades adimensional u , como função da distância ao centro do halo para os $N = 90$ halos individuais. A linha laranja representa a mediana entre os valores de q obtidos com os ajustes individuais. A linha horizontal representa a distribuição gaussiana.

FIGURA 4.2: O mesmo da Fig. 4.1 para a mediana (*marrom*, como naquela figura), para a média (*preta*) e para o halo empilhado (*vermelho*). As incertezas de q foram calculadas pelo método *bootstraps* e são ≈ 0.005 .

TABELA 4.1: Parâmetros do ajuste da função $q(r)$ parametrizada como nas eqs. (4.8) e (4.9) aos dados dos 90 halos simulados.

Método	a	b	x_{low}	q_{low}	x_{flat}
Stack	0.247	1.031	0.552	0.924	3.010
Média	0.347	0.970	0.791	0.816	2.347
Mediana	0.221	1.631	1.028	0.835	2.512

$$q(r) = q_{\text{low}} - a \left(\frac{1 - y^b}{b \ln 10} + \log y \right), \quad (4.8)$$

$$y = \frac{\text{Min}(r/r_{100}, x_{\text{flat}})}{x_{\text{low}}}. \quad (4.9)$$

Na Eq. (4.8), a é o limite de $dq/d \log r/r_{100}$ quando $r \rightarrow 0$, b é aproximadamente o expoente de r/r_{100} no trecho crescente de $q(r)$. Na Eq. (4.9) $x_{\text{low}} = r_{\text{low}}/r_{100}$ é a posição onde $q(r)$ atinge seu valor mínimo $q(r_{\text{low}}) = q_{\text{low}}$, e $x_{\text{flat}} = r_{\text{flat}}/r_{100}$ é tal que $q(r)$ atinge o platô em r_{flat} .

As linhas contínuas na Fig. 4.2 mostram o resultado do ajuste desta função e a Tabela 4.1 mostra os valores obtidos para os parâmetros.

Na Fig. 4.2, é interessante notar que a função $q(r)$ obtida com os halos empilhados (*stack*) tem um comportamento bem diferente daquelas obtidas com a média e mediana dos valores obtidos com os ajustes individuais. A média e a mediana foram calculadas com métodos bem diferentes e ainda assim resultam em perfis bastante similares, o que serve de teste de consistência. Assim, a diferença nos valores de q na região do platô obtidos com o perfil empilhado em comparação com os outros dois casos não parece ser um artefato numérico, mas realmente uma característica obtida no ajuste.

4.5.2 Qualidade do ajuste

Podemos agora nos perguntar se a função q-gaussiana proposta representa adequadamente os dados simulados.

A Fig. 4.3 mostra a distribuição do módulo da velocidade $G(u)$ obtida a partir dos dados simulados, assim como a previsão gaussiana e o melhor ajuste da função q-gaussiana anisotrópica, Eq. (4.7). Assim como obtido por Hansen, Moore, Zemp & Stadel (2006), o pico da distribuição dos dados simulados cai numa velocidade menor que a prevista para pequenos raios (painel superior esquerdo) e numa velocidade maior que a prevista ao redor do raio virial (painel central direito). Podemos perceber que para $r \lesssim 2 r_{100}$

FIGURA 4.3: Distribuição do módulo da velocidade, $G(u)$, em diferentes posições relativas ao centro do aglomerado. A região magenta mostra os dados obtidos com as simulações (halo emilhado). A curva preta representa a distribuição q -gaussiana e a verde a distribuição gaussiana.

FIGURA 4.4: Diferença absoluta máxima entre a distribuição cumulativa de u [ver Eq. (4.7)] do halo empilhado e aquelas da função gaussiana (linha tracejada verde) e *q*-gaussiana (linha vermelha contínua).

(painéis centrais e superiores), a função *q*-gaussiana não é capaz de descrever bem os dados, assim como a gaussiana (que é um caso particular). Por exemplo para $r = 0.03 r_{100}$ a função prevista tem um pico muito acentuado e um excesso em altas velocidades, o que notamos também nos outros painéis com $r \lesssim 2 r_{100}$. Por outro lado, para $r \gtrsim 2 r_{100}$ os dados simulados são qualitativamente bem descritos pela função *q*-gaussiana.

Uma avaliação quantitativa da qualidade do ajuste pode ser feita utilizando-se o chamado teste de Kolmogorov-Smirnov (KS), que considera a máxima diferença entre as distribuições cumulativas prevista e simulada. Dado o grande número de pontos em cada bin, o teste KS se torna bastante restritivo e a probabilidade de que a *q*-gaussiana seja uma representação adequada dos dados é rejeitada com 95% de chance em todos os raios. Entretanto, como temos o mesmo número de dados em cada bin, é possível ilustrar o resultado do teste KS observando a diferença absoluta máxima das distribuições cumulativas.

As Figs. 4.4 e 4.5 mostram essa diferença absoluta máxima para o halo empilhado e para a média, respectivamente. Percebemos que em ambos os casos a diferença máxima é menor que 5% e é menor que a diferença associada à distribuição gaussiana, exceto em raios específicos. Para o halo empilhado, a Fig. 4.4 mostra que, para $r/r_{100} \gtrsim 2$ a

FIGURA 4.5: O mesmo da Fig. 4.4, agora para a média dos ajustes individuais.

máxima diferença associada à *q*-gaussiana é ≈ 10 vezes menor que aquela associada à gaussiana.

Outra maneira de avaliar visualmente a qualidade do ajuste é examinando os contornos da distribuição bi-dimensional definida pelas componentes radial e tangencial (Fig 4.6), dado que em sistemas esféricos as componentes u_θ e u_ϕ são equivalentes. Apesar do formato dos contornos previstos equivalerem aproximadamente àqueles obtidos na simulação, há algumas diferenças significativas, principalmente na extensão dos contornos. Ao redor de $r = 0.03 r_{100}$, os contornos previstos pelo ajuste da *q*-gaussiana se estendem até combinações de u_r e u_t bem maiores que as simuladas, isto é para maiores módulos de velocidade. Isso é o mesmo que já havíamos concluído ao observar a Fig. 4.3. A estimativa $q = 1.17$ para esta posição é devida aos pontos de baixa velocidade, que a *q*-gaussiana “se esforça” para ajustar (ver painel superior esquerdo da Fig. 4.3).

Ao redor de $r = 0.1 r_{100}$, o valor obtido para o parâmetro é $q = 1$, então os contornos previstos pela gaussiana e pela *q*-gaussiana são superpostos e similares aos contornos simulados. Ao redor de $r = 0.32$ e $1 r_{100}$ os contornos previstos pela *q*-gaussiana são mais contraídos que os dados, que exibem um excesso em altas velocidades. Finalmente, ao redor de $r = 3.2$ e $10 r_{100}$, apesar dos contornos previstos pela *q*-gaussiana descreverem qualitativamente bem os dados, representam um excesso para velocidades muito altas.

FIGURA 4.6: Contornos da distribuição de velocidades como função das componentes radial e tangencial da velocidade do halo empilhado, para os mesmos 6 bins radiais da Fig. 4.3. As cores são definidas da mesma maneira como na Fig. 4.3.

4.5.3 Comparação entre a q -gaussiana e a gaussiana

Nós agora nos perguntamos se a distribuição q -gaussiana proposta é capaz de descrever os dados significativamente melhor que a gaussiana, mesmo se levarmos em conta que aquela envolve um parâmetro a mais que esta. Para isso, calculamos o chamado fator de Bayes entre os dois modelos, definido como a razão entre as evidências que, por sua vez, são definidas como a integral da função verossimilhança $\mathcal{L}$, ponderada pelo prior, sobre o espaço de parâmetros. Em símbolos, o fator de Bayes entre os modelos q e G é

$$B_{qG} = \frac{\int \pi(q) \mathcal{L}_q dq}{\mathcal{L}_G}, \quad (4.10)$$

onde $\pi(q)$ é o prior associado ao parâmetro q . Como a gaussiana não envolve nenhum parâmetro livre, a evidência é igual à função verossimilhança, como se seu prior fosse uma delta de Dirac.

FIGURA 4.7: Fator de Bayes [Eq. (4.11)], obtido com o ajuste do parâmetro q ao halo empilhado (linha vermelha) e com a média dos halos (linha preta). No caso do halo empilhado, há forte evidência de que a q -gaussiana representa melhor os dados que a gaussiana em todos os raios, exceto ao redor de $r = 0.1$ e $1.5 r_{vir}$. Para o caso das médias dos ajustes, a evidência em favor da q -gaussiana é forte em todos os raios, pois a média, dada a definição dos bins, “apaga” os valores negativos ao redor de $r \approx 0.1 r_{100}$, onde $q \simeq 1$.

Segundo [Trotta \(2008\)](#), valores de $\ln B_{12}$ menores que 1.0 representam ausência de conclusividade sobre a preferência do modelo 2 relativo ao modelo 1. Se $\ln B_{12} \approx 1.0$, isso representa uma evidência fraca em favor do modelo 2. Para $\ln B_{12} \approx 2.5$, temos evidência moderada, e para $\ln B_{12} \geq 5.0$ temos evidência forte em favor do modelo 2.

Com esses valores em mente, mostramos na Fig. 4.7 o fator de Bayes para o ajuste em cada bin radial, calculado com a aproximação (proposta por [Kass & Raftery, 1995](#))

$$\ln B_{12} \approx \ln \mathcal{L}_2 - \ln \mathcal{L}_1 - \frac{1}{2}(d_1 - d_2) \ln N, \quad (4.11)$$

onde d_i é o número de parâmetros do modelo i e N é o número de dados.

A Fig. 4.7 indica que há forte evidência em favor da q -gaussiana em todos os raios, exceto ao redor dos pontos onde $q \approx 1$, onde a adição do parâmetro q não é necessária.

4.5.4 Dependência na massa

Investigamos agora a possibilidade de que o parâmetro q dependa da massa dos halos. Para isso, dividimos nosso conjunto de 90 halos nos três grupos já definidos.

FIGURA 4.8: Estimativas do parâmetro q para os halos empilhados dos 3 subconjuntos de massa (púrpura, marrom e azul em ordem crescente de massa). Os valores de $M_{14} = \langle M \rangle_{\text{bin}}/10^{14}M_{\odot}$ também são mostrados.

FIGURA 4.9: O mesmo da Fig. 4.8, mas agora para a média.

TABELA 4.2: Parâmetros para o ajuste da função $q(r)$, equações (4.8) e (4.9) para os três sub-conjuntos empilhados separadamente.

$\langle M \rangle / M_\odot$	a	b	x_{low}	q_{low}	x_{flat}
2.44×10^{14}	0.348	1.115	0.642	0.839	2.709
6.15×10^{13}	0.078	2.519	0.831	0.983	2.712
1.92×10^{13}	12.356	0.027	0.394	0.903	2.681

TABELA 4.3: Parâmetros da média das estimativas de $q(r)$ para os dados dos halos individuais.

$\langle M \rangle / M_\odot$	a	b	x_{low}	q_{low}	x_{flat}
2.44×10^{14}	0.370	0.946	0.757	0.811	2.284
6.15×10^{13}	0.253	1.479	0.968	0.820	2.417
1.92×10^{13}	0.160	2.253	1.138	0.853	2.559

Para cada um dos 3 sub-conjuntos, realizamos os ajustes como anteriormente, para os casos do halo empilhado e da média dos halos individuais. A Fig. 4.8 mostra que o perfil de $q(r)$ dos três halos empilhados exibem diferenças razoáveis em raios intermediários, mas não percebemos nenhuma dependência trivial na massa. No caso das médias, Fig. 4.9, os três subconjuntos produzem perfis de $q(r)$ bastante similares.

4.6 Conclusões e discussões

No trabalho descrito neste capítulo, a ser submetido em breve, propusemos uma versão anisotrópica da distribuição de velocidades *q*-gaussiana, dada pela Eq. (4.6), ou sua equivalente, Eq. (4.7). Dado que a distribuição de velocidades obtida em simulações numéricas aparentemente é não-separável nas componentes do campo de velocidades, essa parametrização nos parece preferível àquela proposta por outros autores em que a distribuição de velocidades é separável.

Testamos a função proposta ajustando o parâmetro q em diferentes camadas esféricas ao redor do centro dos halos obtidos com simulações numéricas. Isso foi feito de duas maneiras: construindo um halo empilhado com todas as partículas de todos os 90 halos selecionados, ou realizando os ajustes em cada halo individualmente e depois calculando a média de q em cada raio. Embora a função proposta descreva bem os dados nas regiões externas dos halos ($r \gtrsim 2 r_{100}$), a descrição não é tão boa na regiões internas ($r \lesssim 2 r_{100}$). Entretanto, a função *q*-gaussiana é altamente preferível à gaussiana, mesmo se levarmos em conta a introdução de um parâmetro extra (ver Fig 4.7).

Propomos também expressões para a descrição do comportamento do parâmetro q como função da distância ao centro dos halos. Estas expressões podem ser usadas tanto para modelar halos individuais quanto para o caso de halos empilhados.

Lembramos que o perfil $q(r)$ para grandes distâncias ao centro assume valores bem maiores no caso do halo empilhado, em comparação aos ajustes individuais. Embora a origem destas diferenças não esteja clara, pode ser devida a algum efeito geométrico no processo de empilhamento, dado que os halos têm estruturas triaxiais e os empilhamos sem preocupação em alinhá-los de acordo com seus eixos, justamente para obter estruturas esféricas.

Voltando nossa atenção à possível aplicação a análises de experiências de detecção de ME, concluímos que a função proposta não parece descrever satisfatoriamente bem a distribuição de velocidades na região de interesse destas experiências ($r = 0.03 r_{100}$), especialmente para altas velocidades, onde a função apresenta um excesso em relação aos dados.

Por fim, nossa análise mostra que uso da distribuição gaussiana em métodos de modelagem de massa e anisotropia, como o MAMPOSSt (Mamon, Biviano & Moué, 2013) não é adequado, e que a inclusão da função proposta por nós pode melhorar o desempenho destes métodos.

Capítulo 5

Mistura como critério para indistinguibilidade

Vamos voltar às discussões sobre a relaxação violenta iniciadas no capítulo 2. Este processo deve ser responsável por levar uma distribuição inicial de massa fora do equilíbrio ao estado estacionário atingido pelos halos de ME e galáxias elípticas, através da redistribuição de energias produzida pelo potencial variando no tempo. Isso ocorre numa escala de tempo da ordem da escala de tempo dinâmico $\tau_{din} = 1/\sqrt{G\bar{\rho}}$, ou seja, após algumas oscilações do sistema colapsante. Para sistemas não-colisionais, normalmente se assume que a evolução da função distribuição de uma partícula $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$, mesmo durante a relaxação violenta, é governada pela equação de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0,$$

onde $\phi(\vec{r}, t)$ é o potencial auto-consistente gerado pela distribuição. Em seu estudo do processo de relaxação violenta, [Lynden-Bell \(1967\)](#) maximiza o número de micro-configurações através de uma análise combinatória em que traduz o vínculo produzido por esta equação num princípio de exclusão. Como já foi dito, há sérias críticas à análise de Lynden-Bell, algumas já apontadas em seu artigo. Por exemplo, para garantir o princípio de exclusão impõe-se a restrição $F(\varepsilon) \ll 1$, mas isso leva à função distribuição de Maxwell-Boltzmann que seria obtida sem o princípio de exclusão. Além disso, simulações numéricas indicam que a distribuição de Lynden-Bell não fornece uma descrição razoável dos dados (ver [Cuperman, Goldstein & Lecar, 1969](#); [Aguilar & Merritt, 1990](#); [Levin, Pakter, Rizzato et al., 2014](#); [Benetti, Ribeiro-Teixeira, Pakter & Levin, 2014](#)). Mas para nós o ponto mais importante, que exploramos aqui, é a hipótese de equiprobabilidade dos micro-estados.

No processo de maximização, se assume que o sistema é completamente *misturado*, i.e. que cada partícula tem igual probabilidade de estar em qualquer região do espaço de fases. Esta hipótese, sabemos, é apropriada no estudo do gás ideal, pois cada molécula é capaz de assumir qualquer posição e velocidade, devido ao movimento aleatório produzido pelas colisões com outras moléculas. Para dar uma idéia, para um gás em condições normais de temperatura e pressão, cada molécula sofre da ordem de 10^6 colisões por segundo¹. De certo modo, poderíamos dizer que cada molécula aproximadamente ocupa todo o espaço de fases em uma escala de tempo relativamente pequena. Esta é a razão pela qual assumimos que as partículas têm igual probabilidade a priori de estar em qualquer região do espaço de fases, o que permite a equivalência entre médias temporais e no espaço de fases, a chamada Hipótese Ergódica (ver [Lichtenberg & Lieberman, 1992](#)). Entretanto, há muitos sistemas, particularmente sistemas gravitacionais, em que não se espera que a mistura seja completa (ver [Chavanis, 2006](#), e suas referências), o que indica a necessidade de um modelo que lide com níveis intermediários de mistura (ver também [Madsen, 1987](#)).

No modelo discutido neste capítulo, baseado no trabalho publicado recentemente ([Beraldo e Silva, Lima, Sodré & Perez, 2014](#)), propomos uma associação entre o nível de mistura e o conceito de indistinguibilidade, e apresentamos as possíveis conseqüências para o estado estacionário gerado pelo processo de relaxação violenta. Por “mistura”, não nos referimos à “mistura de fases” (*phase mixing*), que é um processo associado a órbitas determinísticas em um potencial integrável. Ao invés disso, nos referimos à “mistura caótica”, i.e. aquela associada à divergência exponencial de trajetórias estocásticas, que permite que cada partícula ocupe diferentes regiões do espaço de fases e conseqüentemente que diferentes partículas visitem as mesmas regiões do espaço de fases. Ver [Merritt \(2005\)](#) para um panorama sobre essa distinção e para importantes referências no assunto. Embora não façamos esta análise quantitativa, seria possível estimar o nível de mistura em simulações numéricas comparando médias temporais e no espaço de fases em diferentes regiões do espaço de fases, por exemplo. Como veremos a seguir, utilizamos um critério bastante simplificado para diferenciar regiões bem misturadas ou pouco misturadas.

Antes de apresentar o modelo proposto, vamos retornar à análise combinatória de Lynden-Bell – reproduzida na seção 2.2 – mas agora tratando as partículas como indistinguíveis (ver [Kull, Treumann & Boehringer, 1996](#)). Para trocas dentro da i -ésima macro-célula, o número de maneiras de organizar n_i partículas *indistinguíveis* em v_i

¹Para chegar a este número, basta imaginar um cilindro definido pelo movimento de uma molécula com velocidade característica v e seção de choque $\sigma \approx a^2$, onde $a \approx 10^{-10}m$ é um raio atômico típico. O número de colisões desta molécula por intervalo de tempo é dado pelo volume deste cilindro (σv) multiplicado pela densidade numérica de moléculas $N/V = p/(k_B T)$. Em condições normais de temperatura e pressão, temos $p \approx 100 N/m^2$, $T \approx 100 K$. Lembrando que $k_B \approx 10^{-23} J/K$, obtemos o número acima.

micro-células, ao invés da expressão (2.3), é dado por

$$\frac{\nu_i!}{n_i! (\nu_i - n_i)!}. \quad (5.1)$$

Agora com partículas *indistinguíveis*, as trocas entre diferentes macro-células, mantendo fixo o número n_i de partículas por macro-célula, não produzem novos microestados, e o número total de microconfigurações fica

$$W(\{n_i\}) = \left[\frac{\nu_1!}{n_1! (\nu_1 - n_1)!} \cdots \frac{\nu_J!}{n_J! (\nu_J - n_J)!} \right].$$

Mas como a única diferença entre esta expressão e a equação (2.6) é o fator $N!$ e no processo de maximização apenas os números n_i são importantes, a função distribuição resultante é a mesma que aquela obtida anteriormente supondo-se partículas distinguíveis, Eq. (2.10).

Seria possível argumentar então que isso mostra que a distinguibilidade não tem importância na dedução da função distribuição. Entretanto, no modelo proposto aqui, a indistinguibilidade deve estar associada ao grau de mistura do sistema, e é este modelo que discutiremos neste capítulo. Segundo este critério, o esquema realizado por [Kull, Treumann & Boehringer \(1996\)](#) é consistente, pois assume partículas indistinguíveis ao mesmo tempo em que supõe mistura completa (eqüiprobabilidade de todos os estados). Por outro lado, o esquema de [Lynden-Bell \(1967\)](#) parece inconsistente segundo este critério, pois assume partículas distinguíveis e também eqüiprobabilidade dos estados.

Na seção 5.1 discutimos o conceito de distinguibilidade e propomos um critério para determinar quando as partículas devem ser consideradas distinguíveis ou indistinguíveis. Na seção 5.2 mostramos como este critério pode ser introduzido em uma análise combinatória similar à de Lynden-Bell, apresentamos a função distribuição resultante e determinamos o perfil de densidade gerado por esta distribuição, comparando-o com a Esfera Isotérmica gerada pela distribuição de Maxwell-Boltzmann. Como veremos, o perfil de densidade obtido varia como $\rho \propto r^{-2}$ nas regiões externas, o que gera uma massa infinita. Para solucionar este problema, na seção 5.3 utilizamos uma correção à aproximação de Stirling proposta por [Hjorth & Williams \(2010\)](#) e determinamos a função distribuição e o perfil de densidade corrigidos. Finalmente, na seção 5.4 mostramos como o critério proposto para indistinguibilidade pode dar um significado físico claro à hipótese de simetria na função distribuição de N partículas, utilizada na dedução da equação de Vlasov, o que levanta dúvidas sobre a validade desta equação durante a relaxação violenta.

5.1 Distinguibilidade versus indistinguibilidade

Na interpretação estatística da entropia formulada por Boltzmann, os estados termodinâmicos (macro-estados) mais prováveis são aqueles associados ao maior número de microestados compatíveis com os vínculos do problema, isto é, com o maior número W de configurações. Ao contar estes estados, a distinguibilidade é conceitualmente importante pois é preciso saber se a permutação entre duas partículas caracteriza ou não um novo micro-estado. As partículas são consideradas distinguíveis quando esta permutação cria um novo micro-estado e indistinguíveis quando não cria.

De acordo com o cenário padrão, como encontrado em livros-texto (p. ex. [Tolman, 1979](#); [Huang, 1987](#)), partículas idênticas devem ser tratadas como indistinguíveis no contexto da mecânica quântica (devido à superposição das funções de onda), e como distinguíveis no contexto da mecânica clássica. Assim, o gás ideal foi originalmente tratado como sendo constituído de partículas distinguíveis. Posteriormente, percebeu-se que essa hipótese leva a consequências indesejáveis, como resumidas no Paradoxo de Gibbs (ver Apêndice C), o que requeria uma solução *ad hoc* equivalente a tratar as partículas como indistinguíveis. Com o advento da mecânica quântica, esta solução foi considerada definitiva pois, enfim, as moléculas devem ter comportamento quântico e assim serem indistinguíveis (ver [Tolman, 1979](#)). Por outro lado, no modelo do cristal ideal, as partículas são tratadas como distinguíveis (ver [Tolman, 1979](#); [Landau & Lifshitz, 1980](#)). A justificativa comum é que cada partícula fica confinada a uma região bem-definida do espaço de fases, oscilando ao redor de um ponto de equilíbrio sem superposição com a função de onda de partículas vizinhas.

Assim, é comumente aceito que a indistinguibilidade só é justificada na presença de efeitos quânticos e que, na ausência de tais efeitos, as partículas devem ser tratadas como distinguíveis. Entretanto, já foi mostrado há bastante tempo que é perfeitamente possível formular uma mecânica estatística de partículas indistinguíveis no contexto da mecânica clássica (ver [Schönberg, 1952, 1953](#))². É intrigante também que no estudo de colóides (sistemas compostos de partículas de tamanho intermediário entre grandes moléculas e pequenos grãos em suspensão, i.e. partículas macroscópicas), o uso de expressões padrão para a entropia com a hipótese de partículas distinguíveis leva às mesmas contradições conceituais do gás ideal de partículas distinguíveis – ver [Swendsen \(2006\)](#) e Apêndice C.

Assim, um critério universal para definir (in)distinguibilidade não parece ser uma questão trivial (ver [de Muynck & van Liempd, 1986](#)). Antes de apresentar o critério proposto

²Agradeço ao professor S. Salinas por ter me apresentado estes trabalhos.

por nós, vamos lembrar que no estudo de sistemas dinâmicos de N -corpos, é comum observar a presença de regiões separadas (“ilhas”) no espaço de fases, dentro das quais as partículas estão misturadas, i.e. preenchendo continuamente o espaço de fases com trajetórias estocásticas, mas não misturadas com outras ilhas (Lichtenberg & Lieberman, 1992).

Com esta imagem em mente, propomos que as partículas em uma região misturada do espaço de fases devem ser tratados como indistinguíveis entre si, mas como distinguíveis de partículas de outra ilha. Este critério tem alguma semelhança com a discussão proposta por Versteegh & Dieks (2011), segundo a qual o tipo de permutações que são importantes para a distinguibilidade não são meras trocas de índices, mas aquelas que realmente (fisicamente) podem ser feitas. Neste sentido, a permutação entre duas partículas numa região do espaço de fases acessível a ambas as partículas não cria um novo micro-estado, e as partículas são indistinguíveis. Entretanto, se as partículas estão cada uma em uma região diferente do espaço de fases, não acessível à outra, a permutação representa um novo micro-estado e as partículas devem ser tratadas como distinguíveis.

Contrariamente ao cenário padrão, o critério proposto aqui permite tratar sistemas (sob certas circunstâncias), como compostos de partículas indistinguíveis mesmo se estes componentes são objetos macroscópicos como partículas coloidais ou estrelas. É interessante notar que Saslaw (1969), 45 anos atrás, já havia proposto uma parametrização para escolher entre distinguibilidade e indistinguibilidade em sistemas gravitacionais, mas com uma abordagem diferente da nossa. A relação entre o critério proposto e a incompleteza da relaxação violenta é discutida na próxima seção, onde determinamos a função distribuição decorrente. Na seção 5.4, aplicamos este critério para argumentar que a equação de Vlasov pode não ser válida durante a relaxação violenta.

5.2 Função distribuição de sistemas parcialmente misturados

Existem evidências de que sistemas gravitacionais não são capazes de realizar uma mistura completa de seus elementos de fase (ver Chavanis, 2006; Bindoni & Secco, 2008; Teles, Levin, Pakter & Rizzato, 2010; Teles, Levin & Pakter, 2011), i.e. que as partículas não têm oportunidade de acessar todos os micro-estados possíveis antes de atingir o estado estacionário. Assim, seguindo a associação que propomos na seção 5.1, realizamos uma análise combinatória similar ao esquema de Lynden-Bell (seção 2.2), mas tratando as partículas como indistinguíveis para trocas em regiões bem misturadas, mas distinguíveis para trocas entre regiões desconectadas, i.e. não misturadas entre si.

FIGURA 5.1: Energia média em diferentes bins como função do tempo obtida por [Kandrup, Mahon & Smith \(1993\)](#) em simulações numéricas do processo de relaxação violenta. As diferentes curvas evoluem de modo paralelo, o que indica que não há mistura entre partículas de diferentes energias. Figura extraída de [Kandrup, Mahon & Smith \(1993\)](#).

Usando simulações numéricas, [Kandrup, Mahon & Smith \(1993\)](#) concluíram que durante a relaxação violenta, apesar das partículas “esquecerem” suas posições e velocidades iniciais, a ordem nas energias das partículas é aproximadamente conservada durante a evolução do sistema. Isso pode ser visto na Fig. 5.1, que mostra a energia média em diferentes bins como função do tempo. O fato das diferentes curvas evoluírem paralelamente umas às outras evidencia o fato que acabamos de citar. Em certo sentido, isso é equivalente a partículas com energias similares estarem misturadas entre si, mas não misturadas com partículas de energias diferentes. Como a energia é definida para cada macro-célula, Eq. (2.9), usamos o critério aqui proposto para tratar as partículas como indistinguíveis para trocas dentro de uma macro-célula mas distinguíveis para trocas entre diferentes macro-células. Uma classificação mais precisa poderia ser feita definindo algum índice medindo quão aleatória é a ordem das energias com relação a seus valores iniciais. Este índice poderia ser monitorado em simulações de N -corpos, mas isto está além do escopo desta tese.

Em nossa análise, não utilizamos a equação de Vlasov como um vínculo traduzido em um princípio de exclusão, como feito por Lynden-Bell. A primeira razão é o problema teórico já discutido na seção 2.2: a exigência de que $F(\varepsilon_i) \ll 1$ – para garantir o princípio de exclusão – leva à distribuição de Maxwell-Boltzmann, que é exatamente o que seria obtido sem o princípio de exclusão. A segunda razão é a possível inaplicabilidade da equação de Vlasov durante a relaxação violenta, como discutido na seção 5.4.

A função distribuição é calculada da seguinte forma: o número de maneiras de organizar n_i partículas *indistinguíveis* em ν_i micro-células dentro de uma macro-célula, permitindo co-habitações em micro-células é dado por

$$\frac{(n_i + \nu_i - 1)!}{n_i! (\nu_i - 1)!}, \quad (5.2)$$

que é o mesmo fator envolvido na dedução da distribuição de Bose-Einstein. Utilizando a expressão (2.5) para trocas de partículas *distinguíveis* entre macro-células, e desprezando termos da ordem da unidade, o número total de microconfigurações fica

$$W(\{n_i\}) = \left[\frac{N!}{(n_1!)^2 \dots (n_M!)^2} \right] \left[\frac{(n_1 + \nu_1)!}{(\nu_1)!} \dots \frac{(n_M + \nu_M)!}{(\nu_M)!} \right]. \quad (5.3)$$

Seguindo os mesmos passos da seção 2.2 e maximizando $\ln W$ com os vínculos de conservação de massa e energia, ao invés da Eq. (2.8), obtemos

$$\ln \left(\frac{\nu_i + n_i}{n_i^2} \right) = \lambda m + \eta m E_i, \quad (5.4)$$

de onde finalmente temos:

$$F(\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon)}{f_0} = \frac{1}{2} e^{\beta(\varepsilon - \mu) - k} \left(\sqrt{1 + 4e^{-\beta(\varepsilon - \mu) + k}} + 1 \right), \quad (5.5)$$

onde $k = \ln \nu_i$. Note que, diferente das distribuições de Lynden-Bell ou Maxwell-Boltzmann, esta função depende do número ν_i de micro-células acessíveis dentro de cada macro-célula. Em princípio, poderíamos supor que este número tem alguma dependência na energia, mas por simplicidade vamos tratá-lo como uma constante³.

Essa função distribuição é representada pelas linhas grossas azuis na Fig. 5.2 para $\beta = (10, 15)$ e $\mu = 0.5$. Percebemos que ela tende à distribuição de Maxwell-Boltzmann na região $\varepsilon > \mu$ que, fixado o potencial, representa baixas velocidades [ver Eq. (3.17)]. Por outro lado, para $\varepsilon \lesssim \mu$ (altas velocidades), temos $f(\varepsilon) \propto \exp \left[\frac{1}{2} \beta(\varepsilon - \mu) \right]$, o que representa outra Maxwell-Boltzmann, mas com uma “temperatura” que é o dobro da primeira.

Tendo determinado a função distribuição $f(\varepsilon)$, podemos agora calcular o perfil de densidade de halos esfericamente simétricos e isotrópicos gerados por nosso modelo. Para isso, vamos definir uma distância ao centro adimensional $x = r/a$, um perfil de densidade adimensional $\tilde{\rho} = \rho/(f_0|\phi_0|^{3/2})$ e a constante $A = 4\pi G \sqrt{|\phi_0|} a^2 f_0$, onde a é um parâmetro de escala e G é a constante gravitacional. Nestas unidades, o perfil de densidade, como função do potencial é calculado com a equação (3.20). Com essa relação, ainda precisamos resolver a equação de Poisson ($\nabla^2 \varphi = -A\tilde{\rho}$) para determinar $\varphi(x)$ e

³Daqui em diante, omitimos os índices nas variáveis e parâmetros da função distribuição.

FIGURA 5.2: Função distribuição proposta por nós para sistemas parcialmente misturados, Eq. (5.5) (curvas azuis). Curvas verdes: distribuição de Maxwell-Boltzmann. A função proposta tende à distribuição de Maxwell-Boltzmann para $\varepsilon > \mu$, mas desvia para outra Maxwell-Boltzmann com o dobro da “temperatura” para $\varepsilon \lesssim \mu$. Ambas curvas com $\mu = 0.5$. Linhas contínuas para $\beta = 15$ e tracejadas para $\beta = 10$.

conseqüentemente $\tilde{\rho}(x)$. Supondo simetria esférica, esta última fica

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d\varphi}{dx} = -A\tilde{\rho}(\varphi).$$

Resolvemos esta equação numericamente com um algoritmo de Runge-Kutta de ordem 4, impondo as condições de contorno $\varphi(0) = 1$ e $d\varphi(0)/dx = 0$ e fixando $A = 10$. O resultado é mostrado na Fig. 5.3, com as densidades normalizadas por seu valor em $x = 0.1$, que pode ser comparado com o perfil de densidade da Esfera Isotérmica (não-singular), gerado pela distribuição de Maxwell-Boltzmann.

Percebemos que nosso modelo gera um perfil de densidade similar àquele da Esfera Isotérmica, gerado pela distribuição de Maxwell-Boltzmann: tem um *core* (densidade finita na origem) e oscila ao redor de $\propto x^{-2}$ nas regiões externas. Isso pode ser visto mais claramente na Fig. 5.4, que mostra a inclinação do perfil de densidade $\gamma(x) = -d\ln(\rho)/d\ln(x)$. Como é bem sabido, um perfil de densidade variando como $\propto x^{-2}$ nas regiões externas gera uma distribuição com massa infinita, o que é contraditório com o vínculo de massa finita suposto inicialmente, e nosso modelo não é capaz, *per se*, de resolver esse problema. Para isso, precisamos levar em conta o fato de que os números de ocupação nas regiões externas vão a zero, aplicando uma correção de pequenos números que apresentamos na próxima seção.

Apesar de não utilizado no que segue, também consideramos a possibilidade de impor um princípio de exclusão, o que pode ser testado em outras possíveis aplicações. O número de

FIGURA 5.3: Perfis de densidade gerados pelo nosso modelo (curvas azuis), em comparação com a Esfera Isotérmica gerada pela distribuição de Maxwell-Boltzmann (curvas verdes). Os valores dos parâmetros são os mesmos que na Fig. 5.2.

FIGURA 5.4: Inclinação do perfil de densidade do modelos proposto por nós (curvas azuis) em comparação com aquele gerado pela distribuição de Maxwell-Boltzmann (curvas verdes). A inclinação tende a 2 nas regiões externas, o que gera um sistema de massa infinita. Os parâmetros são definidos como na Fig. 5.2.

maneiras de organizar partículas *indistinguíveis* dentro de uma macro-célula, proibindo co-habitações em micro-células, é dado pela expressão (5.1). Novamente, utilizando a expressão (2.5) para o número de maneiras de trocar partículas *distinguíveis* entre macro-células, resulta em

$$W(\{n_i\}) = \left[\frac{N!}{(n_1!)^2 \dots (n_M!)^2} \right] \left[\frac{\nu_1!}{(\nu_1 - n_1)!} \dots \frac{\nu_M!}{(\nu_M - n_M)!} \right] \quad (5.6)$$

e com os mesmos procedimentos dos casos anteriores, obtemos

$$\ln \left(\frac{\nu_i - n_i}{n_i^2} \right) = \lambda m + \eta m E_i,$$

que resulta finalmente:

$$F(\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon)}{f_0} = \frac{1}{2} e^{\beta(\varepsilon - \mu) - k} \left(\sqrt{1 + 4e^{-\beta(\varepsilon - \mu) + k}} - 1 \right). \quad (5.7)$$

É interessante notar que, como entre as distribuições de Fermi-Dirac e Bose-Einstein, a única diferença entre as equações (5.5) e (5.7) é um sinal $\pm$.

5.3 Correção para pequenos números

Nas regiões externas, onde os perfis de densidade tendem a zero, os números de ocupação assumem valores pequenos, o que invalida a aproximação de Stirling, Eq. (2.7), usada na dedução da função distribuição. Com isso em mente, [Hjorth & Williams \(2010\)](#) propuseram uma correção que, aplicada ao caso da distribuição de Maxwell-Boltzmann, dá origem à função distribuição dos chamados modelos de King (ver [King, 1966](#)), que vai a zero de forma suave quando ε se aproxima do valor de um parâmetro livre ε_0 .

O procedimento de maximização feito na seção 2.2 pode ser representado identificando-se $n! = \Gamma(n + 1)$ e lembrando a definição da função digamma $\psi(n) = d \ln \Gamma / dn$. A aproximação de Stirling, Eq. (2.7), corresponde a fazer $\psi(n + 1) \approx \ln n$ e a correção proposta por [Hjorth & Williams \(2010\)](#) é dada por

$$\psi(n + 1) \approx \ln(n + e^{-\gamma}),$$

onde $\gamma = -\psi(1) \approx 0.57721566$ é a constante de Euler. Verifica-se que essa aproximação é excelente, mesmo para números de ocupação muito pequenos (ver Fig. 5.5, extraída de [Hjorth & Williams \(2010\)](#)).

De fato, aplicando esta correção à distribuição de Maxwell-Boltzmann, como feito por [Hjorth & Williams \(2010\)](#), obtemos

$$\ln \left(\frac{\nu_i}{n_i + e^{-\gamma}} \right) = \lambda m + \eta m E_i,$$

o que implica que

$$F(\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon)}{f_0} = \left[e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - e^{-k - \gamma} \right],$$

FIGURA 5.5: Correção de pequenos números proposta por [Hjorth & Williams \(2010\)](#). Percebemos que a aproximação de Stirling (equivalente a $\zeta = 0$) é muito ruim para pequenos valores de n , enquanto a correção proposta é quase idêntica ao valor exato.

que necessariamente vai a zero para algum valor de energia, e vemos que a correção de pequenos números já introduz uma dependência em $\nu_i = e^k$, mesmo para a distribuição de Maxwell-Boltzmann. Se agora impusermos que a função distribuição vai a zero para $\varepsilon = \varepsilon_0$, ficamos com

$$F(\varepsilon) = e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} \left[e^{\beta(\varepsilon - \varepsilon_0)} - 1 \right],$$

que corresponde ao modelo de [King \(1966\)](#).

Aplicando esta correção ao modelo proposto por nós, ao invés da Eq. (5.4), obtemos

$$\ln \left(\frac{\nu_i + n_i - 1 + e^{-\gamma}}{(n_i + e^{-\gamma})^2} \right) = \lambda m + \eta m E_i,$$

que implica

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{e^{k+\gamma}} \times \left\{ \frac{1}{2} e^{\beta(\varepsilon - \mu) + \gamma} \left(\sqrt{1 + 4(e^k - 1)e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}} + 1 \right) - 1 \right\}, \quad (5.8)$$

e mais uma vez fazendo $f(\varepsilon_0) = 0$, obtemos

$$e^k = e^{-\gamma} \left(e^{-\beta(\varepsilon_0 - \mu) - \gamma} - 1 \right) + 1.$$

Na Fig. 5.6, as curvas azuis mostram esta função distribuição para $\beta = (10, 15)$, $\mu = 0.4$ e com $\varepsilon_0 = 0.03$. Novamente vemos que para valores de energia decrescentes, a função distribuição muda de uma Maxwell-Boltzmann para outra Maxwell-Boltzmann, mas agora para $\varepsilon \approx \varepsilon_0$ ela vai a zero. As curvas verdes representam o modelo de King,

obtido com a distribuição de Maxwell-Boltzmann corrigida para pequenos números de ocupação.

FIGURA 5.6: Função distribuição corrigida para pequenos números de ocupação, Eq. (5.8) (curvas azuis), em comparação com a distribuição de Maxwell-Boltzmann (também corrigida, equivalente ao modelo de King) (curvas verdes). Funções distribuição associadas a perfis do tipo *cuspy* (como o Einasto, mostrado para dois valores do parâmetro n), têm um formato de “S” que nosso modelo, apesar de não ser capaz de reproduzir, propõe uma correção na direção correta, i.e. aumentando a inclinação de $F(\varepsilon)$ para altos valores de ε . Todas as curvas são para $\mu = 0.4$ e $\varepsilon_0 = 0.03$. Curvas contínuas com $\beta = 15$ e tracejadas para $\beta = 10$.

Para uma comparação qualitativa, também mostramos a função distribuição associada ao perfil de Einasto que, até onde sabemos, ainda não havia sido determinada. As duas curvas são para $n = 2.5$ e $n = 5.0$, representando valores típicos para escalas de galáxias e aglomerados de galáxias respectivamente. Os detalhes do cálculo da distribuição $F(\varepsilon)$ a partir de $\tilde{\rho}(x)$ são descritos no Apêndice D. Note que a função distribuição associada do perfil de Einasto, assim como perfis *cuspy* em geral (ver [Widrow, 2000](#)), tem um formato de “S”, com $F(\varepsilon)$ indo a zero para pequenos valores de ε e ficando com inclinação crescente para grandes valores de ε . É interessante que o modelo proposto por nós, embora não apresentando exatamente o mesmo formato, dá uma correção na mesma direção, aumentando a inclinação de $F(\varepsilon)$ para valores grandes de ε .

Como anteriormente, calculamos o perfil de densidade (normalizado pelo valor em $x = 0.1$) gerado por esta função distribuição (Fig. 5.7). Vemos que agora o perfil de densidade é mais profundo que $\propto r^{-2}$ nas regiões externas, e de fato o problema da massa infinita é resolvido. Também são mostrados os perfis de densidade associados à distribuição de Maxwell-Boltzmann corrigida (modelo de King) e o perfil de Einasto. Por completeza, também mostramos na Fig. 5.8 a inclinação $\gamma(x)$ do perfil de densidade, depois da correção de pequenos números.

FIGURA 5.7: Perfil de densidade gerado pelo nosso modelo aplicando-se a correção de pequenos números (curvas azuis), em comparação com aquele gerado pela distribuição de Maxwell-Boltzmann também corrigida (modelo de King) (curvas verdes) e com o perfil de Einasto para dois valores de n . Os valores dos parâmetros são os mesmos da Fig. 5.6.

5.4 Da equação de Liouville à equação de Vlasov

Vamos voltar à discussão do processo de relaxação violenta para ver como a associação proposta aqui (entre o nível de mistura e o conceito de indistinguibilidade) pode dar um significado claro para uma hipótese importante assumida na dedução da equação de Vlasov.

Intuitivamente podemos esperar que durante o processo de relaxação violenta, um processo que se inicia muito distante do equilíbrio, o campo total varie caoticamente, transferindo esta caoticidade ao movimento da partícula teste num processo irreversível que levaria o sistema ao equilíbrio. De fato, como mostrado por [Merritt & Valluri \(1996\)](#), a rápida obtenção de um estado estacionário, combinada com a detecção de movimentos caóticos, em simulações numéricas parece indicar este efeito. Entretanto, a equação de Vlasov é temporalmente reversível, o que é incompatível com um processo que leve o sistema a um estado de equilíbrio caracterizado por uma entropia máxima. De fato, [Tremaine, Henon & Lynden-Bell \(1986\)](#) demonstraram que, se o sistema é descrito pela equação de Vlasov, não há limite superior para a entropia associada a qualquer função convexa $C[f]$, em particular para a entropia de Boltzmann, representada por $C[f] = f \ln f$. O argumento mais comum para resolver este problema é que a evolução para um estado de equilíbrio é dada num sentido *coarse-grained* (“grosseira”, fazendo

FIGURA 5.8: Inclinação do perfil de densidade gerado pelo modelo corrigido para pequenos números de ocupação (curvas azuis), em comparação com aquele gerado pela distribuição de Maxwell-Boltzmann corrigida (modelo de King) (curvas verdes) e com o perfil de Einasto para dois valores de n . A correção para pequenos números aumenta a inclinação nas regiões externas, gerando um sistema de massa finita. Os valores dos parâmetros são os mesmos da Fig. 5.6.

médias em regiões do espaço de fases), enquanto a equação de Vlasov diz respeito à distribuição no sentido *fine-grained* (“fino”, sem a realização de médias em regiões finitas)⁴.

A equação que governa a evolução da função distribuição de uma partícula, f , é normalmente deduzida partindo-se do teorema de Liouville, segundo o qual um sistema *isolado* composto de N partículas coletivamente representado pela função distribuição $f^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_N, \mathbf{t})$ necessariamente respeita (ver Liboff, 2003)

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = 0.$$

Esta equação pode ser interpretada estatisticamente como a evolução do sistema como um todo sendo suave, livre de mudanças bruscas, o que é adequado já que ela descreve um

⁴Na verdade, esta discussão sobre a reversibilidade é central e está presente desde o início do desenvolvimento da mecânica estatística e da teoria cinética dos gases. A principal característica da equação de Boltzmann é que ela descreve a evolução de um gás rumo ao equilíbrio, ou seja, numa direção determinada do tempo. Em outras palavras, a equação de Boltzmann introduz uma “seta do tempo”. Entretanto, o teorema da recorrência de Poincaré afirma que um sistema conservativo e isolado irá retornar ao seu estado inicial após um tempo suficientemente longo, o que contradiz frontalmente a idéia de uma “seta do tempo” (paradoxo de Zermelo). O contra argumento de Boltzmann é que sua equação tem um sentido estatístico e, nestes termos, é pouquíssimo provável que o sistema retorne ao seu estado inicial, sendo o tempo de recorrência de Poincaré (o tempo que sistema leva para voltar ao estado inicial) tão grande que inviabiliza qualquer expectativa de observação deste fenômeno. Vemos assim que a obtenção de uma equação não-reversível no tempo está na base da descrição cinética, ou seja, na descrição do sistema rumo ao equilíbrio.

sistema isolado (por definição livre de influências externas), cujas partículas se movem de acordo com as equações de Hamilton.

O próximo passo para obter a equação para f , a distribuição de uma partícula, é a construção da chamada hierarquia BBGKY (ver [Lifshitz & Pitaevskii, 1980](#); [Binney & Tremaine, 2008](#); [Saslaw, 1987](#)), o que envolve hipóteses importantes. A primeira delas é a simetria de $f^{(N)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_N, \mathbf{t})$ relativa a trocas de coordenadas e momentos das partículas. Isso faz com que as médias no espaço de fases da contribuição de cada partícula para a força total exercida na partícula teste seja a mesma, implicando na Eq. (B.3) - ver Apêndice B. A segunda hipótese é a chamada hipótese do caos molecular, isto é, que a distribuição de duas partículas pode ser escrita como o produto de duas distribuições de uma partícula, as correlações sendo desprezíveis, o que é expresso na Eq. (B.4). Somente com estas duas hipóteses obtemos a equação de Vlasov (ver Apêndice B)

$$\frac{df}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0,$$

onde $\phi(\vec{r}, t)$ é o campo produzido pelo sistema como um todo.

Longe de ser apenas uma estratégia de cálculo, estas hipóteses guardam um significado estatístico profundo, e sem elas não é possível obter a equação de Vlasov. A simetria de $f^{(N)}$ é comumente tratada como uma consequência direta da hipótese de partículas *idênticas* (ver [Binney & Tremaine, 2008](#); [Saslaw, 1987](#)). Entretanto, não há nenhum princípio mecânico que garanta essa simetria: ela representa uma hipótese extra, com um conteúdo estatístico importante. Do nosso ponto de vista, ela é equivalente a tratar as partículas não apenas como *idênticas*, mas como *indistinguíveis* e, de acordo com o critério proposto na seção 5.1, se refere à possibilidade de todas as partículas visitarem as mesmas regiões do espaço de fases. Como já apontado por [Saslaw \(1987\)](#), a hierarquia BBGKY foi desenvolvida para descrever moléculas em fluidos e ions em plasmas próximos do equilíbrio. Estes sistemas são muito diferentes de um sistema auto-gravitante durante a relaxação violenta, um fenômeno que se inicia longe do equilíbrio e envolve dimensões e escalas de tempo bastante diferentes daquelas envolvidas em gases e plasmas em laboratório. Além disso, como discutido na seção 5.2, sistemas auto-gravitantes não são capazes de preencher completamente o espaço de fases, ou pelo menos se espera que sejam muito menos efetivos que plasmas ou fluidos em laboratório.

Desta discussão, nos parece não haver razão para supor que a simetria de $f^{(N)}$ seja uma hipótese válida durante a relaxação violenta e assim a equação de Vlasov não parece ser válida durante este processo. Embora ainda não estejamos aptos a propor uma equação alternativa, esperamos que, durante este processo, a função distribuição f deva evoluir

de acordo com uma equação de transporte completa,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = L[f], \quad (5.9)$$

onde $L[f]$ é um termo estocástico (ver [Kandrup, 1980](#)) relacionado a mudanças caóticas do potencial.

É importante enfatizar que esperamos que esta equação seja válida mesmo se pudermos desprezar as interações de dois corpos. A idéia do termo “colisional” na equação de Boltzmann é associada, não a colisões exatamente, mas a qualquer processo estocástico que mude repentinamente o fluxo de probabilidade associado ao movimento da partícula teste (ver [Lifshitz & Pitaevskii, 1980](#)). Em um gás ideal, este processo é representado pelas colisões, mas em sistemas com interações de longo alcance, pode ser um campo médio variando caoticamente. Além disso, devemos lembrar que a função distribuição f carrega informação do sistema como um todo, o que é especialmente importante aqui pois as interações de longo alcance transmitem as pequenas perturbações de todas as partículas à partícula teste.

A discussão acima é importante para o que fizemos neste capítulo por dois motivos: primeiro, ela reforça nossa expectativa de que sistemas auto-gravitantes podem assumir estados estacionários, como consequência de haver passado por processos irreversíveis, sem a necessidade de uma interpretação do tipo *coarse grain* para essa evolução. Em outras palavras, uma “seta do tempo” real é introduzida se a equação de Vlasov não é válida durante a relaxação violenta e o estado estacionário pode ser previsto pela antiga estratégia de maximização dos micro-estados, como fizemos. Segundo, se já questionável se a equação de Vlasov deve implicar um princípio de exclusão (como discutido na seção 2.2), no caso desta equação não ser válida há ainda menos razão para impor este princípio. Esta é a razão pela qual não impusemos em nossa análise o princípio de exclusão proposto por Lynden-Bell 45 anos atrás.

5.5 Discussão

No modelo apresentado neste capítulo, propomos um novo critério para escolher entre distinguibilidade e indistinguibilidade: o nível de mistura no espaço de fases. De acordo com este critério, em sistemas que não têm tempo suficiente para misturar completamente o espaço de fases, partículas em regiões bem misturadas devem ser tratadas como indistinguíveis e partículas em regiões pouco misturadas devem ser tratadas como distinguíveis. Este critério é consistente com a classificação padrão de gases ideais como constituídos de partículas indistinguíveis e de cristais como constituídos de partículas

distinguíveis. Entretanto, este critério abre novas perspectivas para a classificação de sistemas de constituintes macroscópicos como colóides e sistemas auto-gravitantes. Ele também oferece uma solução ao paradoxo de Gibbs sem a necessidade de argumentos relacionados à natureza quântica das partículas (ver Apêndice C).

Sabemos que a relaxação violenta é incompleta, no sentido de que as partículas (ou estrelas) não podem explorar todas as regiões do espaço de fases antes do estabelecimento de um estado estacionário. Assim, o modelo proposto aqui pode representar uma solução a este problema, traduzindo explicitamente essa incompleteza na análise combinatória. De acordo com [Kandrup, Mahon & Smith \(1993\)](#), durante a relaxação violenta as partículas “esquecem” suas posições e velocidades iniciais mas mantêm a ordem de suas energias. Expressamos este fato tratando as partículas como indistinguíveis para trocas dentro de uma macro-célula (que define um valor de energia) mas como distinguíveis para trocas entre macro-células.

O resultado é uma nova função distribuição que tende à distribuição de Maxwell-Boltzmann para altas energias, mas se desvia para outra distribuição Maxwell-Boltzmann com o dobro da “temperatura” original para baixas energias.

O perfil de densidades gerado por esta distribuição lembra aquele previsto pela distribuição de Maxwell-Boltzmann, a Esfera Isotérmica. Assim, varia como $\propto x^{-2}$ nas regiões externas, levando a um sistema de massa infinita. Entretanto, nas regiões externas os números de ocupação são pequenos, invalidando o uso da aproximação de Stirling. Usando a correção proposta por [Hjorth & Williams \(2010\)](#), obtemos uma função distribuição que vai a zero para um valor de energia fixado pelo parâmetro ε_0 . O perfil de densidade gerado por esta distribuição corrigida é mais inclinado nas regiões externas, resolvendo efetivamente o problema da massa infinita.

É interessante que a função distribuição corrigida lembra o formato de “S” da distribuição associada ao perfil de Einasto, ou ao menos produz uma correção na direção correta. O intervalo de altas energias desta função determina o comportamento do perfil de densidade nas regiões internas do sistema (ver [Widrow, 2000](#)), e nosso modelo vai na direção correta para gerar altas densidades que poderiam imitar um perfil do tipo *cuspy*.

A função distribuição obtida pode ser testada e usada em diferentes aplicações astrofísicas. Por exemplo, o perfil de densidade gerado por ela pode ser ajustado a dados de lentes gravitacionais em aglomerados de galáxias, como fizemos para outros modelos em [Beraldo e Silva, Lima & Sodr \(2013\)](#). Outro teste direto pode ser feito com

dados de curvas de rotação de galáxias espirais. Em escalas menores, análises do perfil de densidade também podem ser feitas usando dados observacionais de aglomerados globulares.

A distribuição de velocidades associada a este modelo também pode ser ajustada aos dados de simulações numéricas, como fizemos na segunda parte citada acima. Em análises de experiências de detecção direta de matéria escura, como os projetos XENON [Xenon100 Collaboration, Aprile, Arisaka et al. \(2012\)](#) e CDMS [Agnese, Anderson, Asai et al. \(2014\)](#), a distribuição de velocidades é um ingrediente importante para a taxa de eventos prevista associada a diferentes modelos de partículas para a ME (ver seção 1.3), e o modelo proposto aqui pode ser de alguma utilidade neste contexto. Outra possível aplicação é em métodos de modelagem de massa como o MAMPOSSt (ver [Mamon, Biviano & Moué, 2013](#)), em que a distribuição de componentes traçadoras (*tracers*) no espaço de fases projetado (distâncias no plano do céu e velocidades radiais) é usada para a determinação do perfil de densidade e de anisotropia, partindo de alguma distribuição de velocidades assumida.

Também consideramos a possibilidade de usar um princípio de exclusão na análise combinatória, mantendo o mesmo critério para indistinguibilidade, obtendo outra função distribuição, diferindo da primeira apenas por um sinal $\pm$. Ambas as funções podem ser de alguma utilidade para o estudo de outros fenômenos longe do equilíbrio.

Finalmente, mostramos como a associação entre indistinguibilidade e nível de mistura dá um significado físico claro para a hipótese de simetria da função distribuição de N partículas $f^{(N)}$. Esta hipótese é equivalente a tratar as partículas como *indistinguíveis*, o que é uma hipótese mais forte que assumi-las *idênticas* e, de acordo com o critério proposto, é equivalente a assumir que todas as partículas têm acesso às mesmas regiões do espaço de fases, i.e. que o sistema é completamente misturado. Como sabemos que tal mistura não é completa em sistemas auto-gravitantes durante a relaxação violenta, isso sugere que a hipótese de simetria não é adequada e assim que a equação de Vlasov não é necessariamente válida durante este processo.

Capítulo 6

Considerações finais

Há muito tempo a observação de regularidades nos formatos e distribuições de velocidade de sistemas auto-gravitantes tais como galáxias elípticas e halos de matéria escura sugere que estes sistemas passaram por um processo irreversível, saindo de um estado longe do equilíbrio até um estado estacionário. A caracterização deste processo e deste estado estacionário nos moldes da mecânica estatística é dificultada pelo fato das interações gravitacionais serem de longo alcance, enquanto os modelos clássicos da mecânica estatística se baseiam em geral no fato das interações entre moléculas serem de curto alcance.

O cenário mais simples é aquele em que “colisões”, ou seja, as interações dois-a-dois são determinantes no processo de relaxação, e onde se espera que o sistema seja descrito por uma função distribuição similar à de Maxwell-Boltzmann. Este é o caso dos aglomerados globulares, descritos geralmente pelo modelo de [King \(1966\)](#), representado por uma distribuição de Maxwell-Boltzmann truncada para velocidades maiores que a velocidade de escape em cada ponto.

Nos sistemas não-colisionais, ou seja, em que as interações dois-a-dois são desprezíveis, tais como galáxias e aglomerados de galáxias, o processo proposto há cerca de 50 anos para explicar o estado estacionário é a relaxação violenta, caracterizado pela redistribuição de energias entre as partículas através de mudanças bruscas no potencial gravitacional variável no tempo, processo descrito em detalhe por [Lynden-Bell \(1967\)](#). Apesar da grande quantidade de estudos sobre este fenômeno, e das críticas à análise de Lynden-Bell, ainda não há uma explicação definitiva para este processo.

Daí o número crescente de estudos envolvendo simulações numéricas de N -corpos, em que o estado final pode ser caracterizado por funções propostas fenomenologicamente, ou seja, com o intuito de ajustar os dados, mas sem qualquer fundamento teórico. É o caso

dos perfis de densidade NFW e de Einasto, entre outros, que testamos em comparação a algumas propostas teóricas, utilizando dados de lentes gravitacionais em aglomerados de galáxias, como discutido no capítulo 3 e cujos resultados foram publicados em [Beraldo e Silva, Lima & Sodré \(2013\)](#). Uma das conclusões mais importantes deste trabalho é que o modelo teórico DARKexp, que ainda não havia sido testado com dados observacionais, descreve os dados utilizados tão bem quanto os modelos fenomenológicos. O outro ponto importante é a introdução de correções em grande escala, o chamado termo 2-halo, na análise dos dados de lentes gravitacionais em aglomerados de galáxias, correção pouco explorada na literatura até aqui. Nossos resultados mostram que, dada a sensibilidade destas observações e das futuras, a introdução desta correção é significativa para a determinação do perfil de densidade nas regiões externas destas estruturas.

Em uma abordagem diferente, agora utilizando dados de simulações numéricas e nos concentrando na distribuição de velocidades, testamos uma função proposta de maneira fenomenológica que introduz a anisotropia do campo de velocidades na função q-gaussiana, que por sua vez representa uma parametrização que generaliza a função gaussiana. Em nossas análises, concluímos que a função proposta descreve melhor os dados simulados em comparação com a função gaussiana, mesmo levando-se em conta a introdução de um parâmetro extra. Entretanto, esta função ainda não é capaz de descrever satisfatoriamente os dados, especialmente nas regiões centrais dos halos.

Em outro trabalho, publicado recentemente ([Beraldo e Silva, Lima, Sodré & Perez, 2014](#)), propomos uma associação entre o nível de mistura de um sistema e a indistinguidibilidade de seus constituintes. Esta associação, depois de uma correção para pequenos números de ocupação, resulta em uma função distribuição comparável à função distribuição obtida a partir do perfil de Einasto. A nova função distribuição obtida pode ser testada e usada em diferentes aplicações astrofísicas, o que pretendemos realizar no futuro. Uma possibilidade interessante, suscitada pelo modelo, é a de que a equação de Vlasov não seja válida durante a relaxação violenta, o que planejamos testar com o uso de simulações numéricas.

Por fim, com esta tese, esperamos ter contribuído para uma compreensão mais profunda sobre o problema da relaxação de halos de matéria escura em particular e de sistemas auto-gravitantes em geral. Em um nível ainda mais geral, com esta tese esperamos ter contribuído para o estudo de sistemas de N-corpos, em particular de um antigo problema da física, o da transição entre uma descrição microscópica, com partículas interagindo segundo leis mecânicas deterministas e temporalmente reversíveis, para uma descrição macroscópica, em que o sistema como um todo evolui numa direção privilegiada do tempo, rumo ao estado de equilíbrio.

No futuro, pretendemos aprofundar e estender as análises discutidas nesta tese em diferentes direções. Em particular, iniciaremos em breve o uso de simulações numéricas para testar a validade da equação de Vlasov durante a relaxação violenta. Estas mesmas simulações podem ser aproveitadas para o estudo das distribuições de velocidades geradas, onde testaremos a distribuição de velocidades associada ao modelo proposto em [Beraldo e Silva, Lima, Sodré & Perez \(2014\)](#). Também pretendemos testar diferentes perfis de densidades, em particular aquele associado a este modelo e o DARKexp, utilizando um novo conjunto de dados produzido recentemente por [Umetsu, Medezinski, Nonino et al. \(2014\)](#).

Apêndice A

Espalhamento gravitacional entre duas partículas

Vamos considerar o movimento relativo de duas estrelas de massas m e M , com posição e velocidade relativas $\vec{r} = \vec{x}_m - \vec{x}_M$ e $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$. É possível reduzir as equações de movimento ao de uma partícula de massa $\mu = Mm/(M + m)$ em torno de um centro fixo de massa $M + m$, na posição do centro de massa:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{G(M + m)\mu}{r^2} \hat{e}_r,$$

onde G é a constante gravitacional e $\hat{e}_r$ é o versor na direção radial. Vamos definir as variações de velocidade de cada partícula como $\Delta \vec{v}_m$ e $\Delta \vec{v}_M$, de modo que

$$\Delta \vec{v}_M - \Delta \vec{v}_m = \Delta \vec{V}.$$

Além disso, a lei de conservação do momento dá

$$M \Delta \vec{v}_M + m \Delta \vec{v}_m = 0.$$

Eliminando $\Delta \vec{v}_m$ ficamos com

$$\Delta \vec{v}_M = \frac{m}{M + m} \Delta \vec{V}, \tag{A.1}$$

e o objetivo agora é obter uma expressão para $\Delta \vec{V}$. A Fig. (2.1) esquematiza o espalhamento da partícula de massa μ e velocidade inicial $\vec{V}_0$. Por se tratar de um potencial central, o momento angular (por unidade de massa) é conservado e dado por

$$L = bV_0,$$

onde b é o parâmetro de impacto. Como mostra a Fig.(2.1), sendo ψ o ângulo azimutal, a Lagrangiana (por unidade de massa) é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\dot{r}^2 - \left(r\dot{\psi} \right)^2 \right] - \phi(r),$$

e as equações de Euler-Lagrange resultam

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\psi}^2 + \frac{d\phi}{dr} = 0 \\ \frac{d}{dt} (r^2\dot{\psi}) = 0 \end{cases}$$

A segunda equação expressa a conservação do momento angular $L = r^2\dot{\psi}$, e portanto

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{r^2}.$$

Substituindo na primeira equação e definindo $u = 1/r$, ficamos com

$$\frac{d^2u}{d\psi^2} + u = \frac{1}{L^2u^2} \frac{d\phi}{dr} \left(\frac{1}{u} \right). \quad (\text{A.2})$$

No nosso caso, temos

$$\phi(r) = -\frac{G(M+m)}{r} \Rightarrow \frac{d\phi}{dr} = \frac{G(M+m)}{r^2} = G(M+m)u^2,$$

e substituindo na Eq. (A.2), obtemos

$$\frac{d^2u}{d\psi^2} + u = \frac{G(M+m)}{L^2},$$

cuja solução geral é

$$\frac{1}{r} = C \cos(\psi - \psi_0) + \frac{G(M+m)}{L^2}, \quad (\text{A.3})$$

onde ψ_0 representa a posição de maior aproximação. Como a trajetória da partícula é simétrica em relação a este ponto – ver Fig.(2.1) –, percebemos que o ângulo de deflexão é dado por

$$\theta_{defl} = 2\psi_0 - \pi.$$

Derivando a Eq.(A.3) com relação ao tempo, avaliando-as no limite $t \rightarrow -\infty$ e escolhendo $\psi(t \rightarrow -\infty) = 0$, concluímos que

$$\text{tg } \psi_0 = -\frac{bV_0^2}{G(M+m)}.$$

É conveniente definir o parâmetro de impacto b_{90} para o qual $\theta_{defl} = 90^\circ$, e a equação acima nos dá

$$b_{90} = \frac{G(M+m)}{V_0^2},$$

e portanto

$$\operatorname{tg} \psi_0 = -\frac{b}{b_{90}}.$$

Com estas expressões, podemos voltar ao cálculo de $\vec{V}$. Pelo princípio de conservação de energia, sabemos que o módulo da velocidade é o mesmo antes e depois do espalhamento. Assim $|\Delta \vec{V}_\perp| = V_0 \sin \theta_{defl} = -V_0 \sin(2\psi_0)$. Usando a substituição da tangente do arco-metade, segundo a qual

$$t = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \text{ e } \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

obtemos finalmente

$$|\Delta \vec{V}_\perp| = 2V_0 \frac{b/b_{90}}{1+(b/b_{90})^2}.$$

Por outro lado, $|\Delta \vec{V}_\parallel| = V_0(1 - \cos \theta_{defl}) = V_0(1 + \cos 2\psi_0)$, e portanto

$$|\Delta \vec{V}_\parallel| = 2V_0 \frac{1}{1+(b/b_{90})^2}.$$

Assim, voltando à Eq.(A.1) e considerando o caso em que $M = m$, obtemos finalmente

$$\begin{cases} |\Delta \vec{v}_\perp| = V_0 \frac{b/b_{90}}{1+(b/b_{90})^2} \\ |\Delta \vec{v}_\parallel| = V_0 \frac{1}{1+(b/b_{90})^2}. \end{cases}$$

Apêndice B

Hierarquia BBGKY

Considere um sistema de N partículas descrito pela Hamiltoniana

$$H = \sum_{a=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_a^2}{2m} + \sum_{b=a+1}^N U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|) \right],$$

onde $U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)$ é a energia potencial. A evolução da função distribuição de N partículas, $f^{(N)}$, é governada pela equação de Liouville:

$$\frac{df^{(N)}}{dt} = \frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{\partial \mathbf{r}_a}{\partial t} + \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_a} \frac{\partial \mathbf{p}_a}{\partial t} \right) = 0,$$

que, com a ajuda das equações de Hamilton, fica:

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{r}_a} \frac{\mathbf{p}_a}{m} - \frac{\partial f^{(N)}}{\partial \mathbf{p}_a} \sum_{b=a+1}^N \frac{\partial U_{ab}}{\partial \mathbf{r}_a} \right) = 0, \quad (\text{B.1})$$

onde $U_{ab} = U(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)$.

Queremos deduzir a equação para a distribuição f de uma partícula. Essa função não deve ser interpretada como descrevendo a evolução de alguma partícula específica, mas a de uma partícula teste escolhida ao acaso. Nesse sentido, esta função contém informação estatística sobre o sistema como um todo, embora se referindo às coordenadas de uma única partícula. Vamos normalizar a função distribuição de uma partícula f levando em conta todas as possíveis permutações entre as $(N - 1)$ partículas restantes (ver [Liboff, 2003](#)):

$$f = \frac{N!}{(N-1)!} \int f^{(N)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_N) d\Gamma_2 \dots d\Gamma_N, \quad (\text{B.2})$$

onde $d\Gamma_i = d\mathbf{r}_i d\mathbf{p}_i$. Seguindo o procedimento padrão, integramos a eq. (B.1) em $d\Gamma_2 \dots d\Gamma_N$, obtendo

$$\frac{(N-1)!}{N!} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\mathbf{p}_1}{m} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} \sum_{b=2}^N \int f^{(N)} \frac{\partial U_{1b}}{\partial \mathbf{r}_1} d\Gamma_2 \dots d\Gamma_N.$$

A integral no lado direito representa a força média no espaço de fases exercida sobre a partícula teste por cada uma das outras partículas. Aqui vem a primeira hipótese importante: se supusermos que a função distribuição de N partículas $f^{(N)}$ é simétrica nas coordenadas $\Gamma_1 \dots \Gamma_N$ de todas as partículas, a contribuição média para a força total exercida sobre a partícula teste é igual para cada uma, e obtemos

$$\sum_{b=2}^N \int f^{(N)} \frac{\partial U_{1b}}{\partial \mathbf{r}_1} d\Gamma_2 \dots d\Gamma_N = (N-1) \int f^{(N)} \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} d\Gamma_2 \dots d\Gamma_N \quad (\text{B.3})$$

Prosseguindo, definimos a função distribuição de duas partículas como

$$f^{(2)} = \frac{N!}{(N-2)!} \int f^{(N)}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_N) d\Gamma_3 \dots d\Gamma_N,$$

assim obtendo

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\mathbf{p}_1}{m} = \int \frac{\partial U_{12}}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial f^{(2)}(t, \Gamma_1, \Gamma_2)}{\partial \mathbf{p}_1} d\Gamma_2.$$

Aqui vem a segunda hipótese importante, a chamada hipótese do caos molecular, segundo a qual

$$f^{(2)}(t, \Gamma_1, \Gamma_2) = f(t, \Gamma_1) f(t, \Gamma_2), \quad (\text{B.4})$$

e com isso finalmente obtemos a equação de Vlasov:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \nabla \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

onde usamos $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ e o potencial médio $\phi(\mathbf{r})$ é dado por

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{m} \int U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) f(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) d\mathbf{r}' d\mathbf{p}'.$$

Apêndice C

Paradoxo de Gibbs

Desde o início do desenvolvimento da mecânica estatística até os dias de hoje este paradoxo deu origem a muitas discussões e tentativas de solução, definitivas para uns e insatisfatória para outros. Ele pode ser descrito de várias formas, em particular como segue (ver [Jaynes, 1992](#)): um volume fechado V é dividido por uma partição em dois volumes V_1 e V_2 preenchidos com N_1 e N_2 moléculas de massa m do mesmo gás, sujeitos às mesmas condições de pressão e temperatura. Assumindo que as partículas sejam distinguíveis, o número inicial de microestados compatíveis com o macroestado 1 (o mesmo vale para 2) é:

$$W_I^1 = \int d^3\vec{r}_1 \dots \int d^3\vec{r}_{N_1} \int d^3\vec{p}_1 \dots \int d^3\vec{p}_{N_1} \Rightarrow$$
$$W_I^1 = V_1^{N_1} \cdot \frac{(2\pi m)^{\frac{3N_1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N_1}{2}\right)} E_1^{\frac{3N_1}{2}}$$

Calculamos a entropia como $S_I^1 = \ln W_I^1$ (o mesmo para 2) e a entropia total é $S_I = S_I^1 + S_I^2$. Definindo $f = N_1/N = V_1/V = E_1/E$, e aplicando o limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$), a entropia por partícula é

$$\frac{S_I}{N} = s_I = f \ln f + (1-f) \ln (1-f) + \ln V + \frac{3}{2} \ln u + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi}{3} m \right) + \frac{3}{2},$$

onde $u = E/N$ é a energia por partícula e usamos a aproximação de Stirling, $\ln N! \approx N \ln N - N$.

Após removermos a divisão entre as duas partes, o número total de microconfigurações fica

$$W_F = V^N \cdot \frac{(2\pi m)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} E^{\frac{3N}{2}},$$

o que implica que

$$s_F = \ln V + \frac{3}{2} \ln u + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi}{3} m \right) + \frac{3}{2}. \quad (\text{C.1})$$

Assim a entropia antes e depois da retirada da divisão diferem por

$$\Delta s = -[f \ln f + (1 - f) \ln (1 - f)].$$

No caso particular de volumes iguais ($f = 1/2$), temos

$$\Delta s = \ln 2.$$

Portanto, se consideramos que as partículas são distinguíveis, como classicamente assumido, concluímos que houve aumento da entropia, o que não parece estar correto, pois não há mudanças macroscópicas no sistema. Daí o paradoxo.

Por outro lado, se assumimos que as partículas são indistinguíveis, temos que dividir o volume do espaço de fases obtido anteriormente pelo número de permutações entre as N_1 , N_2 ou N partículas. Assim,

$$W_I^1 = \frac{1}{N_1!} \int d^3 r_1 \dots \int d^3 r_{N_1} \int d^3 p_1 \dots \int d^3 p_{N_1},$$

o mesmo valendo para o volume 2. Seguindo os mesmos passos do caso anterior, obtemos

$$s_I = \ln v + \frac{3}{2} \ln u + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi}{3} m \right) + \frac{5}{2},$$

onde $v = V/N$. Novamente, após remover a separação entre os dois volumes, o volume do espaço de fases e a entropia ficam

$$W_F = \frac{1}{N!} \int d^3 r_1 \dots \int d^3 r_N \int d^3 p_1 \dots \int d^3 p_N$$

e

$$s_F = \ln v + \frac{3}{2} \ln u + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{4\pi}{3} m \right) + \frac{5}{2} \Rightarrow \quad (\text{C.2})$$

$$\Delta s = 0.$$

Assim, se consideramos que as partículas são indistinguíveis, a retirada da separação não produz aumento da entropia, o que está de acordo com nossa expectativa, pois não há mudança macroscópica no sistema.

Outra maneira de formular o problema é simplesmente notando que a entropia (C.1) obtida com partículas distinguíveis é não-extensiva, enquanto a (C.2), obtida com partículas indistinguíveis é extensiva. Como extensividade é uma propriedade geralmente desejável

e necessária neste caso particular, precisamos de fato supor partículas indistinguíveis, a justificativa sendo tradicionalmente associada ao comportamento quântico das moléculas do gás.

Entretanto, o apelo à mecânica quântica para resolver o paradoxo de Gibbs é considerado insatisfatório para alguns autores (ver [Versteegh & Dieks, 2011](#)), porque não deveria ser necessário usar argumentos associados à mecânica quântica para resolver um problema conceitual essencialmente clássico. Em outras palavras, não se trata de uma evidência experimental da necessidade da mecânica quântica, mas uma inconsistência conceitual interna à física clássica, que deveria ser resolvida em termos clássicos.

Apêndice D

Função distribuição associada ao perfil de Einasto

O perfil de Einasto, como visto no capítulo 3, é dado por

$$\tilde{\rho}(x) = \exp \left\{ -2n(x^{1/n} - 1) \right\}. \quad (\text{D.1})$$

Usando a Eq. (3.22), Retana-Montenegro, van Hese, Gentile et al. (2012) obtêm a seguinte expressão para o potencial gravitacional associado a esse perfil de densidades:

$$\varphi(x) = -\frac{\phi(x)}{|\phi(0)|} = \frac{\Gamma(3n)}{\Gamma(2n)} \frac{1}{(2n)^n x} \left[1 - \frac{\Gamma(3n, 2nx^{1/n})}{\Gamma(3n)} + (2n)^n x \frac{\Gamma(2n, 2nx^{1/n})}{\Gamma(3n)} \right], \quad (\text{D.2})$$

onde $\Gamma(a, x)$ é a função gamma incompleta (superior). A função distribuição $F(\varepsilon)$ pode se calculada através de uma transformada de Abell da Eq. (3.20), o que resulta (ver Binney & Tremaine, 2008):

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \left[\int_0^\varepsilon \frac{d^2 \tilde{\rho}}{d\varphi^2} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varepsilon - \varphi}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\frac{d\tilde{\rho}}{d\varphi} \right)_{\varphi=0} \right],$$

onde o segundo termo no colchete é zero para o perfil de Einasto.

Com isso, o cálculo de $F(\varepsilon)$ é simples para os modelos em que é possível expressar $\tilde{\rho}(\varphi)$ analiticamente, o que não é o caso para o perfil de Einasto. Entretanto, conhecendo as expressões para $\tilde{\rho}(x)$ e $\varphi(x)$, é possível realizar este procedimento numericamente. Deste modo, seguindo os passos de Widrow (2000), usamos as Eqs. (D.1) e (D.2) e resolvemos a integral acima numericamente. A função distribuição associada ao perfil de Einasto, até onde sabemos, ainda não havia sido determinada por outros autores.

O resultado é mostrado na Fig. 5.6 para dois valores do parâmetro n , onde vemos o formato de “S” característico de perfis do tipo *cuspy*, como o NFW por exemplo. Nestas curvas, o trecho com $\varepsilon \approx 0$ determina o perfil de densidade nas regiões externas e a região $\varepsilon \approx 1$ determina o perfil de densidades nas regiões centrais. A inclinação crescente de $F(\varepsilon)$ nestas regiões é que produz o *cusp*, ou seja, altas densidades no centro. Entretanto, como o perfil de Einasto, diferente do NFW, não é divergente na origem, $F(\varepsilon)$ não tende a uma reta vertical para $\varepsilon \rightarrow 1$, o que ocorre no perfil de NFW (ver Fig. 1 de [Widrow, 2000](#)).

Referências Bibliográficas

- Aalseth, C. E., Barbeau, P. S., Bowden, N. S. et al. *Results from a Search for Light-Mass Dark Matter with a p-Type Point Contact Germanium Detector*. Phys. Rev. Lett. **106**:131301. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.131301> (2011).
- Aalseth, C. E., Barbeau, P. S., Colaresi, J. et al. *Search for an Annual Modulation in a p-Type Point Contact Germanium Dark Matter Detector*. Phys. Rev. Lett. **107**:141301. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.107.141301> (2011).
- Aarseth, S. J. & Binney, J. *On the relaxation of galaxies and clusters from aspherical initial conditions*. MNRAS **185**:227 (1978).
- Aartsen, M. G., Abbasi, R., Abdou, Y. et al. *Search for Dark Matter Annihilations in the Sun with the 79-String IceCube Detector*. Phys. Rev. Lett. **110**:131302. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.131302> (2013).
- Ackermann, M., Ajello, M., Allafort, A. et al. *Measurement of Separate Cosmic-Ray Electron and Positron Spectra with the Fermi Large Area Telescope*. Phys. Rev. Lett. **108**:011103. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.011103> (2012).
- Agnese, R., Anderson, A. J., Asai, M. et al. *Search for Low-Mass Weakly Interacting Massive Particles with SuperCDMS*. Physical Review Letters **112**, 24:241302. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.241302> (2014).
- Aguilar, L. A. & Merritt, D. *The structure and dynamics of galaxies formed by cold dissipationless collapse*. ApJ **354**:33. URL <http://dx.doi.org/10.1086/168665> (1990).
- Aprile, E., Alfonsi, M., Arisaka, K. et al. *Dark Matter Results from 225 Live Days of XENON100 Data*. Phys. Rev. Lett. **109**:181301. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.109.181301> (2012).
- Baltz, E. A., Marshall, P. & Oguri, M. *Analytic models of plausible gravitational lens potentials*. JCAP **1**:015. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/01/015> (2009).

- Bartelmann, M. *Arcs from a universal dark-matter halo profile*. A&A **313**:697 (1996).
- Bekenstein, J. D. *Relativistic gravitation theory for the modified Newtonian dynamics paradigm*. PRD **70**, 8:083509. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.70.083509> (2004).
- Bellazzini, M., Mucciarelli, A., Sollima, A. et al. *Kinematics of a globular cluster with an extended profile: NGC5694*. ArXiv e-prints (2014).
- Benetti, F. P. C., Ribeiro-Teixeira, A. C., Pakter, R. & Levin, Y. *Nonequilibrium Stationary States of 3D Self-Gravitating Systems*. Physical Review Letters **113**, 10:100602. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.100602> (2014).
- Beraldo e Silva, L., Lima, M. & Sodré, L. *Testing phenomenological and theoretical models of dark matter density profiles with galaxy clusters*. MNRAS **436**:2616. URL <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stt1761> (2013).
- Beraldo e Silva, L., Lima, M., Sodré, L. & Perez, J. *Statistical mechanics of self-gravitating systems: Mixing as a criterion for indistinguishability*. Phys. Rev. D **90**:123004. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.123004> (2014).
- Beraldo e Silva, L., Mamon, G. A., Duarte, M., Peirani, S. et al. *Anisotropic q-Gaussian velocity distributions in LambdaCDM halos*. ArXiv e-prints (2013).
- Bernabei, R., Belli, P., Cappella, F., Cerulli, R. et al. *New results from DAMA/LIBRA*. European Physical Journal C **67**:39. URL <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1303-9> (2010).
- Bernabei, R., Belli, P., Cappella, F. et al. *First results from DAMA/LIBRA and the combined results with DAMA/NaI*. European Physical Journal C **56**:333. URL <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-008-0662-y> (2008).
- Bindoni, D. & Secco, L. *Violent relaxation in phase-space*. New Astronomy Reviews **52**:1. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.newar.2007.11.001> (2008).
- Binney, J. *The phase space structure of R to the $1/4$ th galaxies - Are these galaxies isothermal after all*. MNRAS **200**:951. [1982MNRAS.200..951B](http://dx.doi.org/10.1093/mnras/200.951B) (1982).
- Binney, J. & Tremaine, S. *Galactic Dynamics - Second Edition*. Princeton University Press (2008).
- Biviano, A. & Katgert, P. *The ESO Nearby Abell Cluster Survey. XIII. The orbits of the different types of galaxies in rich clusters*. AAp **424**:779. URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361:20041306> (2004).

- Blumenthal, G. R., Faber, S. M., Primack, J. R. & Rees, M. J. *Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter*. Nature **311**:517. URL <http://dx.doi.org/10.1038/311517a0> (1984).
- Bosma, A. & van der Kruit, P. C. *The local mass-to-light ratio in spiral galaxies*. A&A **79**:281 (1979).
- Bryan, G. L. & Norman, M. L. *Statistical Properties of X-Ray Clusters: Analytic and Numerical Comparisons*. ApJ **495**:80 (1998).
- Chavanis, P.-H. *Quasi-stationary states and incomplete violent relaxation in systems with long-range interactions*. Physica A **365**:102 (2006).
- Chemin, L., de Blok, W. J. G. & Mamon, G. A. *Improved Modeling of the Mass Distribution of Disk Galaxies by the Einasto Halo Model*. AJ **142**:109. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0004-6256/142/4/109> (2011).
- Ciotti, L. *Stellar systems following the $R \propto 1/m$ luminosity law*. A&A **249**:99 (1991).
- Clowe, D., Bradač, M., Gonzalez, A. H. et al. *A Direct Empirical Proof of the Existence of Dark Matter*. ApJ **648**:L109 (2006).
- Cooray, A. & Sheth, R. *Halo models of large scale structure*. Physics Reports **372**, 1:1 (2002).
- Corbelli, E. & Salucci, P. *The extended rotation curve and the dark matter halo of M33*. MNRAS **311**:441. URL <http://dx.doi.org/10.1046/j.1365-8711.2000.03075.x> (2000).
- Cuperman, S., Goldstein, S. & Lecar, M. *Numerical experimental check of Lynden-Bell statistics-II. The core-halo structure and the role of the violent relaxation*. MNRAS **146**:161 (1969).
- de Muynck, W. M. & van Liempd, G. P. *On the relation between indistinguishability and (anti)symmetry of the wave function in quantum mechanics*. Synthese **67**:477 (1986).
- Diu, B., Guthmann, C., Lederer, D. & Roulet, B. *Physique Statistique*. Hermann Éditeurs des Sciences et des Arts (1989).
- Dodelson, S. *Modern cosmology* (2003).
- Eftymiopoulos, C., Voglis, N. & Kalapotharakos, C. *Special Features of Galactic Dynamics*. In Benest, D., Froeschle, C. & Lega, E. (eds.), *Topics in Gravitational Dynamics*, vol. 729 of *Lecture Notes in Physics*, pp. 297–389. Springer Berlin Heidelberg. URL http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-72984-6_11 (2007).

- Einasto, J. *On the Construction of a Composite Model for the Galaxy and on the Determination of the System of Galactic Parameters*. Trudy Astrofizicheskogo Instituta Alma-Ata **5**:87 (1965).
- Fairbairn, M. & Schwetz, T. *Spin-independent elastic WIMP scattering and the DAMA annual modulation signal*. JCAP **1**:037. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/01/037> (2009).
- Freeman, K. C. *On the Disks of Spiral and so Galaxies*. ApJ **160**:811. URL <http://dx.doi.org/10.1086/150474> (1970).
- Freese, K., Lisanti, M. & Savage, C. *Annual Modulation of Dark Matter: A Review*. ArXiv e-prints (2012).
- Fukuda, Y., Hayakawa, T., Ichihara, E. et al. *Evidence for Oscillation of Atmospheric Neutrinos*. Phys. Rev. Lett. **81**:1562. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.1562> (1998).
- Gao, L., Navarro, J. F., Cole, S. et al. *The redshift dependence of the structure of massive Λ cold dark matter haloes*. MNRAS **387**:536. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13277.x> (2008).
- Hansen, S. H., Moore, B., Zemp, M. & Stadel, J. *A universal velocity distribution of relaxed collisionless structures*. JCAP **1**:014. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2006/01/014> (2006).
- Hayashi, E. & White, S. D. M. *Understanding the halo-mass and galaxy-mass cross-correlation functions*. MNRAS **388**:2 (2008).
- Hénon, M. *L'évolution initiale d'un amas sphérique*. Annales d'Astrophysique **27**:83 (1964).
- Hernquist, L. *An analytical model for spherical galaxies and bulges*. ApJ **356**:359 (1990).
- Hinshaw, G., Larson, D., Komatsu, E. et al. *Nine-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Parameter Results*. ApJS **208**:19. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/19> (2013).
- Hjorth, J. & Williams, L. R. *STATISTICAL MECHANICS OF COLLISIONLESS ORBITS. I. ORIGIN OF CENTRAL CUSPS IN DARK-MATTER HALOS*. ApJ **722**:851 (2010).
- Hu, W. & Dodelson, S. *Cosmic Microwave Background Anisotropies*. ARAA **40**:171. URL <http://dx.doi.org/10.1146/annurev.astro.40.060401.093926> (2002).
- Huang, K. *Statistical Mechanics, 2nd Edition* (1987).

- Ipsier, J. & Sikivie, P. *Can Galactic Halos Be Made of Axions?* Phys. Rev. Lett. **50**:925. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.925> (1983).
- James, F. & Roos, M. *Minuit - a system for function minimization and analysis of the parameter errors and correlations.* Computer Physics Communications **10**:343. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0010-4655\(75\)90039-9](http://dx.doi.org/10.1016/0010-4655(75)90039-9) (1975).
- Jaynes, E. T. *The Gibbs Paradox.* In *Maximum-Entropy and Bayesian Methods*, pp. 1–22. Kluwer Academic: Dordrecht (1992).
- Jing, Y. P. & Suto, Y. *The Density Profiles of the Dark Matter Halo Are Not Universal.* ApJL **529**:L69. URL <http://dx.doi.org/10.1086/312463> (2000).
- Jungman, G., Kamionkowski, M. & Griest, K. *Supersymmetric dark matter.* Phys. Rep. **267**:195. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(95\)00058-5](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(95)00058-5) (1996).
- Kandrup, H. E. *Stochastic gravitational fluctuations in a self-consistent mean field theory.* Physics Reports **63**:1. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573\(80\)90015-0](http://dx.doi.org/10.1016/0370-1573(80)90015-0) (1980).
- Kandrup, H. E., Mahon, M. E. & Smith, H., Jr. *Energy and phase space mixing for self-gravitating systems of stars.* Astronomy and Astrophysics **271**:440 (1993).
- Kang, D.-B. & He, P. *A statistical-mechanical explanation of dark matter halo properties.* AAP **526**:A147. URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201015057> (2011).
- Kang, D.-B. & He, P. *Fluid-like entropy and equilibrium statistical mechanics of self-gravitating systems.* MNRAS **416**:32 (2011).
- Kass, R. E. & Raftery, A. E. *Bayes Factors.* Journal of the American Statistical Association **90**:773 (1995).
- King, I. R. *The structure of star clusters. III. Some simple dynamical models.* The Astronomical Journal **71**:64 (1966).
- Kuhlen, M., Weiner, N., Diemand et al. *Dark matter direct detection with non-Maxwellian velocity structure.* JCAP **2**:030. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2010/02/030> (2010).
- Kull, A., Treumann, R. A. & Boehringer, H. *Violent Relaxation of Indistinguishable Objects and Neutrino Hot Dark Matter in Clusters of Galaxies.* Astrophysical Journal Letters **466**:L1 (1996).
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M. *Statistical Physics, Part 1.* Butterworth–Heinemann (1980).

- Lapi, A. & Cavaliere, A. *Dark Matter Halos: The Dynamical Basis of Effective Empirical Models*. *Advances in Astronomy* **2011**:903429. URL <http://dx.doi.org/10.1155/2011/903429> (2011).
- Lemze, D., Wagner, R., Rephaeli, Y. et al. *Profiles of Dark Matter Velocity Anisotropy in Simulated Clusters*. *ApJ* **752**:141. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/752/2/141> (2012).
- Levin, Y., Pakter, R., Rizzato, F. B., Teles, T. N. et al. *Nonequilibrium statistical mechanics of systems with long-range interactions*. *Physics Reports* **535**:1. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2013.10.001> (2014).
- Lewis, A., Challinor, A. & Lasenby, A. *Efficient Computation of Cosmic Microwave Background Anisotropies in Closed Friedmann-Robertson-Walker Models*. *ApJ* **538**:473 (2000).
- Liboff, R. L. *Kinetic theory : classical, quantum, and relativistic descriptions* (2003).
- Lichtenberg, A. J. & Lieberman, M. A. *Regular and Chaotic Dynamics*. No. 38 in *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, NY, 2nd ed. (1992).
- Lifshitz, E. M. & Pitaevskii, L. P. *Physical Kinetics*. Butterworth–Heinemann (1980).
- Lima, J. A., Silva, R. & Plastino, A. R. *Nonextensive Thermostatistics and the H Theorem*. *Physical Review Letters* **86**:2938. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.2938> (2001).
- Lisanti, M., Strigari, L. E., Wacker, J. G. & Wechsler, R. H. *Dark matter at the end of the Galaxy*. *PRD* **83**, 2:023519. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.83.023519> (2011).
- Lynden-Bell, D. *Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems*. *MNRAS* **136**:101 (1967).
- Madsen, J. *On the applicability of the statistical mechanical theories of violent relaxation*. *ApJ* **316**:497 (1987).
- Madsen, J. *Finite-mass isothermal spheres and the structure of globular clusters*. *MNRAS* **280**:1089 (1996).
- Mamon, G. A., Biviano, A. & Moué, G. *MAMPOSSt: Modelling Anisotropy and Mass Profiles of Observed Spherical Systems. I. Gaussian 3D velocities*. *MNRAS* **429**:3079 (2013).

- Mamon, G. A., Biviano, A. & Murante, G. *The universal distribution of halo interlopers in projected phase space. Bias in galaxy cluster concentration and velocity anisotropy?* AAP **520**:A30. URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200913948> (2010).
- Mao, Y.-Y., Strigari, L. E., Wechsler, R. H. et al. *Halo-to-halo Similarity and Scatter in the Velocity Distribution of Dark Matter.* ApJ **764**:35. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/764/1/35> (2013).
- Merritt, D. *Henry Kandrup's Ideas About Relaxation of Stellar Systems.* Annals NY Acad. of Sciences **1045**:3. URL <http://dx.doi.org/10.1196/annals.1350.002> (2005).
- Merritt, D., Graham, A. W., Moore, B. et al. *Empirical Models for Dark Matter Halos. I. Nonparametric Construction of Density Profiles and Comparison with Parametric Models.* AJ **132**:2685 (2006).
- Merritt, D., Navarro, J. F., Ludlow, A. & Jenkins, A. *A UNIVERSAL DENSITY PROFILE FOR DARK AND LUMINOUS MATTER?* ApJ **624**:L85–L88 (2005).
- Merritt, D. & Valluri, M. *Chaos and Mixing in Triaxial Stellar Systems.* ApJ **471**:82. URL <http://dx.doi.org/10.1086/177955> (1996).
- Milgrom, M. *A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis.* ApJ **270**:365. URL <http://dx.doi.org/10.1086/161130> (1983).
- Navarro, J. F., Frenk, C. S. & White, S. D. M. *The Structure of Cold Dark Matter Halos.* ApJ **462**:563. doi:10.1086/177173 (1996).
- Navarro, J. F., Frenk, C. S. & White, S. D. M. *A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering.* ApJ **490**:493 (1997).
- Navarro, J. F., Hayashi, E., Power, C. et al. *The inner structure of Λ CDM haloes - III. Universality and asymptotic slopes.* MNRAS **349**:1039 (2004).
- Navarro, J. F., Ludlow, A., Springel, V. et al. *The diversity and similarity of simulated cold dark matter haloes.* MNRAS **402**:21–34 (2010).
- Oort, J. H. *The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems.* BAIN **6**:249 (1932).
- Pato, M., Strigari, L. E., Trotta, R. & Bertone, G. *Taming astrophysical bias in direct dark matter searches.* JCAP **2013(02)** (2013).
- Planck collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., Armitage-Caplan, C. et al. *Planck 2013 results. XV. CMB power spectra and likelihood.* ArXiv e-prints (2013).

- Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., Armitage-Caplan, C. et al. *Planck 2013 results. XVI. Cosmological parameters*. ArXiv e-prints (2013).
- Plastino, A. R. & Plastino, A. *Stellar polytropes and Tsallis' entropy*. Physics Letters A **174**:384 (1993).
- Retana-Montenegro, E., van Hese, E., Gentile, G., Baes, M. et al. *Analytical properties of Einasto dark matter haloes*. A&A **540**:A70. URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201118543> (2012).
- Rubin, V. C., Ford, W. K. J. & Thonnard, N. *Rotational properties of 21 SC galaxies with a large range of luminosities and radii, from NGC 4605 / $R = 4\text{kpc}$ / to UGC 2885 / $R = 122\text{kpc}$ /*. ApJ **238**:471 (1980).
- Rubin, V. C., Thonnard, N. & Ford, W. K. J. *Extended rotation curves of high-luminosity spiral galaxies. IV - Systematic dynamical properties, SA through SC*. ApJ **225**:L107 (1978).
- Saslaw, W. C. *Gravithermodynamics-II. Generalized statistical mechanics of violent agitation*. MNRAS **143**:437 (1969).
- Saslaw, W. C. *Gravitational Physics of Stellar and Galactic Systems* (1987).
- Savage, C., Gelmini, G., Gondolo, P. & Freese, K. *Compatibility of DAMA/LIBRA dark matter detection with other searches*. JCAP **4**:010. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2009/04/010> (2009).
- Savage, C., Gelmini, G., Gondolo, P. & Freese, K. *XENON10/100 dark matter constraints in comparison with CoGeNT and DAMA: Examining the $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ dependence*. Phys. Rev. D **83**:055002. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.83.055002> (2011).
- Schmidt, F., Lima, M., Oyaizu, H. & Hu, W. *Nonlinear evolution of $f(R)$ cosmologies. III. Halo statistics*. PRD **79**, 8:083518. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.79.083518> (2009).
- Schönberg, M. *Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics*. Il Nuovo Cimento **9**, 12:1139. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02782925> (1952).
- Schönberg, M. *Application of second quantization methods to the classical statistical mechanics (II)*. Il Nuovo Cimento **10**, 4:419. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02781980> (1953).

- Sérsic, J. L. *Influence of the atmospheric and instrumental dispersion on the brightness distribution in a galaxy*. Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina **6**:41. [1963BAAA....6...41S](#) (1963).
- Shu, F. H. *On the statistical mechanics of violent relaxation*. ApJ **225**:83 (1978).
- Silva, R. & Alcaniz, J. *Negative heat capacity and non-extensive kinetic theory*. Physics Letters A **313**:393 (2003).
- Silva, R., Jr., Plastino, A. R. & Lima, J. A. S. *A Maxwellian path to the q -nonextensive velocity distribution function*. Physics Letters A **249**:401. URL [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(98\)00710-5](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(98)00710-5) (1998).
- Smith, S. *The Mass of the Virgo Cluster*. ApJ **83**:23. URL <http://dx.doi.org/10.1086/143697> (1936).
- Sommerfeld, A. *Thermodynamics and Statistical Mechanics, Lectures On Theoretical Physics, vol. V* (1993).
- Springel, V. *The cosmological simulation code GADGET-2*. MNRAS **364**:1105. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09655.x> (2005).
- Stadel, J., Potter, D., Moore, B. et al. *Quantifying the heart of darkness with GALLO - a multibillion particle simulation of a galactic halo*. MNRAS **398**:L21 (2009).
- Stiavelli, M. & Bertin, G. *Statistical mechanics and equilibrium sequences of ellipticals*. MNRAS **229**:61 (1987).
- Swendsen, R. H. *Statistical mechanics of colloids and Boltzmann's definition of the entropy*. Am. J. Phys. **74** (2006).
- Teles, T. N., Levin, Y. & Pakter, R. *Statistical mechanics of 1D self-gravitating systems: the core-halo distribution*. MNRAS **417**:L21–L25 (2011).
- Teles, T. N., Levin, Y., Pakter, R. & Rizzato, F. B. *Statistical mechanics of unbound two-dimensional self-gravitating systems*. J. Stat. Mech. **05**:P05007 (2010).
- Tinker, J. L., Robertson, B. E., Kravtsov, A. V. et al. *The Large-scale Bias of Dark Matter Halos: Numerical Calibration and Model Tests*. ApJ **724**:878 (2010).
- Tolman, R. C. *The principles of statistical mechanics*. Dover (1979).
- Tremaine, S., Henon, M. & Lynden-Bell, D. *H-functions and mixing in violent relaxation*. MNRAS **219**:285 (1986).
- Trotta, R. *Bayes in the sky: Bayesian inference and model selection in cosmology*. Contemporary Physics **49**, 2:71 (2008).

- Tsallis, C. *Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics*. Journal of Statistical Physics **52** (1988).
- Tweed, D., Devriendt, J., Blaizot, J., Colombi, S. et al. *Building merger trees from cosmological N-body simulations. Towards improving galaxy formation models using subhaloes*. A & A **506**:647. URL <http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/200911787> (2009).
- Umetsu, K., Broadhurst, T., Zitrin, A., Medezinski, E. et al. *Cluster Mass Profiles from a Bayesian Analysis of Weak-lensing Distortion and Magnification Measurements: Applications to Subaru Data*. ApJ **729**:127 (2011a).
- Umetsu, K., Broadhurst, T., Zitrin, A., Medezinski, E. et al. *A Precise Cluster Mass Profile Averaged from the Highest-quality Lensing Data*. ApJ **738**:41 (2011b).
- Umetsu, K., Medezinski, E., Nonino, M., Merten, J. et al. *CLASH: Weak-lensing Shear-and-magnification Analysis of 20 Galaxy Clusters*. ApJ **795**:163. URL <http://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/795/2/163> (2014).
- van Albada, T. S. *Dissipationless galaxy formation and the R to the 1/4-power law*. MNRAS **201**:939 (1982).
- Versteegh, M. A. M. & Dieks, D. *The Gibbs paradox and the distinguishability of identical particles*. Am. J. Phys. **79**(7):741 (2011).
- Vogelsberger, M., Genel, S., Springel, V. et al. *Properties of galaxies reproduced by a hydrodynamic simulation*. Nature **509**:177. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature13316> (2014).
- Vogelsberger, M., Helmi, A., Springel, V. et al. *Phase-space structure in the local dark matter distribution and its signature in direct detection experiments*. MNRAS **395**:797 (2009).
- Weinheimer, C., Degenddag, B., Bleile, A. et al. *High precision measurement of the tritium β spectrum near its endpoint and upper limit on the neutrino mass*. Physics Letters B **460**, 1–2:219 . URL [http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(99\)00780-7](http://dx.doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(99)00780-7) (1999).
- Widrow, L. M. *Distribution Functions for Cuspy Dark Matter Density Profiles*. ApJS **131**:39. URL <http://dx.doi.org/10.1086/317367> (2000).
- Williams, L. L. R., Barnes, E. I. & Hjorth, J. *Collisionless dynamics in globular clusters*. MNRAS **423**:3589. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21158.x> (2012).

- Williams, L. R. & Hjorth, J. *STATISTICAL MECHANICS OF COLLISIONLESS ORBITS. II. STRUCTURE OF HALOS*. ApJ **722**:856 (2010).
- Wojtak, R., Gottlöber, S. & Klypin, A. *Orbital anisotropy in cosmological haloes revisited*. MNRAS **434**:1576. URL <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/stt1113> (2013).
- Wojtak, R., Łokas, E. L., Gottlöber, S. & Mamon, G. A. *Radial velocity moments of dark matter haloes*. MNRAS **361**:L1. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1745-3933.2005.00054.x> (2005).
- Wojtak, R., Łokas, E. L., Mamon, G. A., Gottlöber, S. et al. *The distribution function of dark matter in massive haloes*. MNRAS **388**:815. URL <http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13441.x> (2008).
- Wojtak, R. & Mamon, G. A. *Physical properties underlying observed kinematics of satellite galaxies*. MNRAS **428**:2407. URL <http://dx.doi.org/10.1093/mnras/sts203> (2013).
- Xenon100 Collaboration, Aprile, E., Arisaka, K., Arneodo, F. et al. *The XENON100 dark matter experiment*. Astroparticle Physics **35**:573. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.astropartphys.2012.01.003> (2012).
- Zhao, H. *Analytical models for galactic nuclei*. MNRAS **278**:488 (1996).
- Zwicky, F. *Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln*. Helv. Phys. Acta **6**:110 (1933).
- Zwicky, F. *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*. ApJ **86**:217. URL <http://dx.doi.org/10.1086/143864> (1937).