Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Emaranhamento Tripartite no Oscilador Paramétrico Ótico

Antonio Sales Oliveira Coelho

Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Mestre em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martinelli

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Stephen Patrick Walborn (UFRJ)

Prof. Dr. Antonio Fernando Ribeiro de Toledo Piza (IF-USP)

Prof. Dr. Marcelo Martinelli (IF-USP)

São Paulo
2009

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Coelho, Antonio Sales Oliveira

Emaranhamento tripartite no oscilador paramétrico ótico
- São Paulo, 2009.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Depto. de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Martinelli

Área de Concentração: Ótica Quântica

Unitermos: 1. Mecânica Quântica; 2. Informação
Quântica; 3. Ótica

USP/IF/SBI-041/2009

Resumo

Apresentamos neste trabalho a primeira verificação experimental de emaranhamento entre os feixes, sinal, complementar e bombeio refletido, produzidos pelo Oscilador Paramétrico Ótico (OPO) acima do limiar. Utilizando o critério de soma de variâncias de van Loock e Furusawa, obtivemos resultados que apontam a existência de emaranhamento tripartite em nosso sistema, evidenciado através da aplicação do critério de Positividade sob Transposição Parcial de Peres-Simon (PPT). A observação desse efeito, previsto em 2006, encontrou dificuldades relacionadas a existência de um ruído clássico espúrio, inserido pelo cristal não-linear. Apresentamos, um modelo teórico para esse ruído que leva em consideração pequenas flutuações na permissividade dielétrica do cristal, associadas às vibrações da rede. Em seguida, mostramos como conseguimos controlar e reduzir o excesso de ruído de modo a obter condições que permitiram à observação do emaranhamento tripartite.

Abstract

We present in this work the first experimental verification of entanglement between the, signal, idler and reflected pump beams, generated by an Optical Parametric Oscillator (OPO) above the threshold. Using the criterion of sum of variances, proposed by van Loock and Furusawa, we obtained results that indicate the existence of tripartite entanglement in our system. That is confirmed by applying the criterion of positivity under partial transposition by Peres-Simon (PPT). The observation of this effect, predicted in 2006, faced difficulties related to the existence of a spurious classical noise, introduced by the nonlinear crystal. We have also presented a theoretical model for this that takes into account small fluctuations in the dielectric permittivity of the crystal, associated with vibrations of its lattice. We show how to control and reduce the excess noise in order to achieve conditions for the observation of tripartite entanglement.

Agradecimentos

“As pessoas mais felizes não têm as melhores coisas. Elas sabem fazer o melhor das oportunidades que aparecem em seus caminhos. A felicidade aparece para aqueles que choram. Para aqueles que se machucam. Para aqueles que buscam e tentam sempre. E para aqueles que reconhecem a importância das pessoas que passam por suas vidas.” (Clarice Lispector)

Primeiramente, agradeço a meu orientador Marcelo Martinelli pela confiança e incentivo manifestados durante a realização deste trabalho. Sua dedicação, habilidade e motivação com a física experimental certamente foram elementos que contribuíram de forma decisiva para manter a perseverança nos trabalhos com OPO. A ele agradeço a paciência e a preocupação despendidas ao longo desse percurso.

Agradeço ao Prof. Paulo Nussenzweig pelas discussões, esclarecimentos e empolgação regada de muita ansiedade. Certamente os progressos obtidos não teriam a mesma proporção caso não existisse sua preocupação e exigência com o andamento do projeto.

Exprimo sinceros agradecimentos a Alessandro Villar, colega com “status” de co-orientador, e Katiúscia Cassemiro. Sou muito grato pelos ensinamentos e pelas conversas que me ajudaram a decidir os caminhos a serem seguidos ao longo destes dois anos de trabalho.

Aos colegas de grupo agradeço os bons momentos vividos durante o período de trabalho. Agradeço ao Jonatas César por muito insistir na minha independência no experimento e pelos resultados obtidos durante o seu mestrado. Meus agradecimentos a Felipe Barbosa por sempre motivar e exigir a busca pela compreensão teórica completa dos diversos assuntos envolvidos no sistema. Aos colegas Laércio, Paulo Valente e Rodrigo, agradeço os momentos descontraídos que amenizavam a tensões e preocupações encontradas no laboratório.

Agradeço aos membros da banca examinadora Prof. Stephen Walborn e Prof. Antonio Piza pela leitura atenciosa do trabalho, críticas e sugestões.

Agradeço às pessoas que também contribuíram de forma decisiva para o bom andamento do trabalho. Às secretárias do Departamento de Física Experimental, Edi e Ivanei, ao pessoal da Oficina Mecânica da FEP, Wilson (obrigado pelos ensinamentos e sugestões) e Zé Carlos, aos funcionários da Comissão de Pós-Graduação, Francileine e Éber, e a Celso Perego do Departamento de Física Nuclear pela indispensável ajuda na finalização da caixa de vácuo.

Expresso minha enorme gratidão à Professora Euzi Fernandes pela amizade e pelo apoio, Professora Raquel Aparecida do Departamento de Fisioterapia, Fonoaudiologia e Terapia Ocupacional (FOFITO) e Tatiane Prevides do CEPEUSP, pela ajuda e acompanhamento sempre presentes.

Agradeço aos amigos Adriana Melo, Danilo Liarte, Marcelo Alves, Paulo Takahashi, Tiago Adorno e Wanderson Bento, por fazerem de São Paulo uma cidade muito mais agradável e divertida.

Meus sinceros agradecimentos a Layany Mourão com quem pude compartilhar parte das alegrias e angústias vividas durante o período de execução deste trabalho. Certamente as dificuldades enfrentadas neste período teriam proporções bem maiores caso não houvesse comigo seu companheirismo, apesar de espacialmente distantes um do outro. À sua família meu respeito.

Família... Encontrar palavras que expressem de forma inequívoca a gratidão que tenho por meus familiares é tarefa mutíssimo complicada. Em primeiro lugar, agradeço a meu núcleo familiar, meus amados pais e irmãos que sempre me apoiaram e motivaram, estando sempre presentes apesar da longa distância. À família Coelho Cavalcante, pela hospitalidade e conforto em meus primeiros dias em terra estranha. De modo especial, agradeço a tia Cleide por muitas vezes ter assumido uma posição materna em relação a mim. Aos seus filhos, Júnior e Felipe, além de agradecer, peço desculpas, por muitas vezes

ter invadido um espaço não-físico que somente a eles pertence. À minha amiga, com “status” de prima, Juliane Cavalcante, agradeço a atenção, solicitude e inúmeras conversas tanto no âmbito profissional quanto pessoal. Agradeço a Igor Escórcio e Ivana Leal pelo apoio, atenção e amizade incondicional.

Finalmente, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

*“A piedade, só por si, é triste;
a ironia, sem mais nada, é dura;
mas as duas juntas dão um produto
brando e jovial.”*
(Machado de Assis)

*Ao meu sobrinho Guilherme José,
com seus sorrisos que atraíram tão desejados sorrisos.*

Sumário

1	Introdução	1
2	Conceitos Fundamentais	5
2.1	Princípio da Incerteza de Heisenberg	6
2.2	Estados Coerentes	8
2.3	Quadraturas do Campo	10
2.4	Deteção Homodina	13
2.4.1	Deteção Homodina e Medida do Shot-Noise	14
2.5	Cavidades Óticas e Rotação de Elipse	17
2.6	Deteção Autohomodina	19
3	Critérios de Separabilidade	25
3.1	Definição de Emaranhamento	27
3.2	Positividade sob Transposição Parcial (PPT)	28
3.3	PPT em Variáveis Contínuas	31
3.4	Soma de Variâncias	34
3.4.1	Caso Bipartite	35
3.4.2	Caso Tripartite	36
4	O Oscilador Paramétrico Ótico	39
4.1	Descrição teórica do OPO	40
4.2	Soluções Estacionárias	43
4.3	Flutuações Quânticas Linearizadas	44
4.4	Solução Matricial	50
4.5	Emaranhamento Tripartite no OPO	51
4.6	Ruído Adicional	56
5	Medidas de Emaranhamento Tripartite no OPO	63
5.1	Experimento	64
5.2	Caracterização Experimental do Excesso de Ruído	70
5.3	Dependência do Ruído com a Intensidade	73

5.4	Dependência do Ruído com a Temperatura	74
5.5	Medidas de Emaranhamento Tripartite	75
5.5.1	Critério de separabilidade de P. van Loock e A. Furusawa	76
5.6	Emaranhamento Tripartite segundo PPT	80
Conclusão e Perspectivas		85
Referências		87

Capítulo 1

Introdução

Um dos aspectos mais intrigantes e contra-intuitivos da mecânica quântica é certamente o *emaranhamento*. As primeiras investigações deste fenômeno surgem no trabalho proposto por Einstein, Podolsky e Rosen (EPR) [[Einstein 1935](#)], que tem como objetivo mostrar aspectos que fariam da mecânica quântica uma teoria incompleta. Para eles, correlações existentes entre medidas realizadas em duas partículas separadas, que interagiram anteriormente, desafiavam o senso comum, visto que não haveria mais comunicação entre elas. Porém, no mesmo ano da publicação do artigo de EPR, Bohr respondeu com um artigo contendo o mesmo título [[Bohr 1935](#)], mostrando que os estados propostos por Einstein *et. al.* estavam consistentes com a mecânica quântica e com o princípio da incerteza. Os estados propostos por EPR motivaram Schrödinger a escrever um extenso artigo tratando de algumas implicações do caráter probabilístico da mecânica quântica. Neste artigo foi estabelecido o termo emaranhamento, envolvendo estados com características similares às dos estados propostos por EPR.

Um estado é dito emaranhado quando não podemos escrever o estado total do sistema como um produto direto dos estados dos subsistemas que o compõem [[Rigolin 2005](#)], apresentando correlações mais fortes do que as previstas pela mecânica clássica [[Bell 1964](#)], mesmo que os subsistemas estejam separados por distâncias muito grandes. Devido a essas características, o emaranhamento tem sido um recurso fundamental no desenvolvimento da Informação Quântica, ciência que une teoria da informação e mecânica quântica. Os estados emaranhados podem, por exemplo, ser utilizados para realizar distribuição segura de chaves criptográficas tanto no contexto de variáveis discretas [[Bennett 1984](#), [Ekert 1991](#)] quanto contínuas [[Silberhorn 2002](#)]. Além disso, tais estados são ferramentas essenciais no desenvolvimento da computação quântica [[Nielsen e Chuang 2000](#)].

A fonte de estados emaranhados nessa dissertação é o Oscilador Paramétrico Ótico (OPO). O OPO consiste essencialmente de uma cavidade ótica e um cristal não-linear ($\chi^{(2)}$). Nele existe a conversão de um fóton do feixe de entrada (denominado bombeio) em dois outros fótons, dando origem aos feixes sinal e complementar de frequências mais

baixas (ω_1 e ω_2), devido à interação com o meio não-linear. Por conservação de energia, a soma das frequências dos feixes produzidos deve ser igual à frequência do feixe de bombeio, $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$. Isso impõe um limite para a soma das frequências, porém nada é imposto sobre a diferença entre elas, estabelecida pela cavidade ótica e pelo cristal. Portanto, podemos trabalhar com feixes com **cores distintas**, característica importante de nosso sistema.

Como os fótons dos feixes sinal e complementar são gerados aos pares, existe forte correlação de intensidade entre os campos, observada experimentalmente por Heidmann *et. al.* [Heidmann 1987], que os denominou *feixes gêmeos*. A previsão teórica do emaranhamento bipartite entre esses dois feixes veio um ano mais tarde [Reid 1988], com consequente medida abaixo do limiar [Ou 1992] e acima [Villar 2005], sendo esta última realizada em nosso grupo. Além disso, foi predita a existência de emaranhamento envolvendo os três campos produzidos pelo OPO, feixe de bombeio refletido e gêmeos [Villar 2006]. Mesmo embora tenha sido medida compressão na fase do feixe de bombeio refletido [Kasai 1997, Zhang K.S. 2001], nenhuma análise envolvendo o ruído dos três feixes tinha sido realizada até 2006.

As primeiras medidas envolvendo os três campos foram também realizadas em nosso grupo, mostrando a existência de correlações tripartites envolvendo as quadraturas amplitude e fase dos três feixes [Cassemiro 2007b], por meio da observação de compressão de ruído. No entanto, a geração de **ruído espúrio** pelo cristal não-linear¹ ocasionou a degradação das correlações, o que impediu, por muito tempo, a verificação experimental do emaranhamento tripartite. Por conta disso, fizemos grandes esforços para caracterizar este excesso de ruído [César 2008], visando compreender como poderíamos controlá-lo e reduzi-lo. Nesta dissertação, apresentaremos os primeiros resultados neste sentido, mostrando o controle e redução desse ruído espúrio, o que nos permitiu, finalmente, a primeira observação de emaranhamento entre os três campos produzidos pelo OPO.

Apresentamos no primeiro capítulo os observáveis físicos de interesse, amplitude e fase dos campos. Será discutido o caráter quântico do ruído dessas grandezas em termos fundamentais e definido o *ruído quântico padrão* ou *shot-noise*, limite que permite identificar características intrinsecamente quânticas do sistema. Feito isso, serão apresentadas as técnicas mais utilizadas para medir as quadraturas amplitude e fase, a detecção homodina [Bachor 1998] e a técnica de rotação de elipse [Villar 2008]. A abordagem desta última é feita de forma resumida, porém maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontradas em outros trabalhos do grupo [Villar 2007b, Cassemiro 2008b].

No segundo capítulo definiremos emaranhamento e apresentaremos os critérios que permitem identificar este fenômeno em nosso sistema. Serão apresentados os critérios ap-

¹Este ruído inesperado, também verificado em [Laurat 2005a], foi observado quando o grupo estava à procura do emaranhamento bipartite, obtido somente para potências de bombeio bem próximas ao limiar de oscilação [Villar 2007b].

licáveis a sistemas multipartites, Positividade sob Transposição Parcial (PPT) [Peres 1996, Simon 2000] e soma de combinações de variâncias [van Loock 2003], análogo ao critério de Duan *et. al.* [Duan 2000] para sistemas bipartites.

A descrição do OPO é feita no capítulo 3, onde serão apresentadas as principais equações que descrevem as flutuações envolvidas no sistema. Aplicaremos os critérios discutidos no capítulo 2, identificando a presença de emaranhamento bipartite [Villar 2005] e tripartite, observado pela primeira vez neste trabalho. Em seguida, será exibido o primeiro resultado original contido neste trabalho, o modelo para o excesso de ruído espúrio presente no sistema. A motivação do modelo é consequência de uma intensa investigação da origem deste ruído, que permitiu conjecturar sua existência devido à interação do campo com fônons do cristal. O modelo desenvolvido leva em consideração pequenas flutuações na permissividade do cristal, mudando o índice de refração do meio devido a flutuações locais na densidade associadas às vibrações da rede [César 2008b]. Neste ponto, surge uma análise simplificada do ruído em função da temperatura do cristal, que sugere uma forma de reduzi-lo através de um parâmetro físico controlável, a temperatura.

Os resultados obtidos estão expostos capítulo 4. Primeiramente, descrevemos o sistema utilizado e as principais modificações mecânicas realizadas ao longo do período deste trabalho. Em seguida apresentamos os primeiros resultados que mostram a caracterização do excesso de ruído em função da posição do cristal dentro da cavidade e seu controle através da redução da temperatura. É a primeira vez que obtemos o controle do ruído espúrio, criando condições mais favoráveis à medida de emaranhamento tripartite.

Por fim, aplicamos os critérios de separabilidade discutidos no capítulo 2 aos resultados do nosso sistema. Através do critério de soma de variâncias [Duan 2000, van Loock 2003] nossos resultados indicam de emaranhamento tripartite. Com o critério de PPT [Peres 1996, Simon 2000] confirmamos a primeira medida de emaranhamento envolvendo os três feixes produzidos pelo oscilador paramétrico ótico, feixes de bombeio refletido, sinal e complementar. Trata-se portanto da primeira demonstração experimental de emaranhamento tripartite entre campos gerados por uma única fonte. Além disso, os feixes envolvidos possuem comprimentos de onda distintos, caracterizando o emaranhamento obtido em nosso sistema como **multicor**. Essa característica pode ser bastante explorada no contexto de redes quânticas. O emaranhamento poderia ser usado, por exemplo, para transferir informação entre uma célula de vapor e fibras óticas, o que seria feito com a construção de outro OPO compatível com o bombeio no comprimento de onda dos átomos de Rubídio, aproveitando a existência de uma armadilha magneto-ótica para tal elemento em nosso laboratório. Isso implica em um feixe de bombeio ressonante com a amostra, estando emaranhado com os feixes gêmeos com comprimento de onda em torno de 1560 nm, podendo ser enviados por fibras óticas.

Finalmente, apresentamos conclusões e perspectivas do nosso trabalho.

Capítulo 2

Conceitos Fundamentais

Como veremos nos capítulos vindouros, estamos interessados em medir correlações quânticas entre feixes de luz. Tais correlações surgem ao observar o caráter quântico evidenciado pelo ruído existente na medida da intensidade dos feixes ou combinações dos mesmos. Entendemos por ruído as flutuações em torno do valor médio de uma grandeza medida. O ruído quântico surge essencialmente da quantização da luz.

Visando entender a origem dessas flutuações, vamos analisar um experimento simples que consiste em separar um feixe em dois com uma lâmina divisora que transmite metade e reflete a outra, verificando os resultados, no contexto clássico e quântico, da subtração das fotocorrentes geradas por cada feixe em seu respectivo fotodetector.

Classicamente, um feixe de luz pode ser descrito por uma onda eletromagnética do tipo $E(z, t) = E(t)e^{i(kz - \omega t)}$, onde $E(t)$ é uma amplitude complexa que possui toda a informação sobre as flutuações de intensidade e fase do campo. Realizando o experimento citado no parágrafo anterior, é intuitivo pensar que os feixes possuam metade da intensidade do campo incidente e flutuações iguais, se relativas às intensidades dos campos. Portanto, se usarmos dois fotodetetores teremos fotocorrentes com flutuações idênticas, de modo que a subtração dos sinais será nula e sem flutuações.

No entanto observamos um resultado diferente se analisarmos o feixe em termos de fótons. Cada fóton possui 50% de probabilidade de ser transmitido ou refletido. Dessa forma, se o feixe incidente no divisor de feixes é formado por fótons distribuídos ao acaso, os feixes gerados pela transmissão e reflexão possuirão a mesma aleatoriedade. Portanto, a subtração das fotocorrentes terá média nula e flutuações idênticas às do feixe inicial. A essas flutuações, entendidas somente no contexto da mecânica quântica, dá-se o nome *shot-noise* ou “ruído quântico padrão”.

Quanticamente, as grandezas que medimos em laboratório são representadas por operadores que podem ser incompatíveis. Isso significa que não podemos obter resultados de medidas com precisão absoluta para ambos, obedecendo ao princípio da incerteza de Heisenberg, consequente da não comutação entre eles.

2.1 Princípio da Incerteza de Heisenberg

Vamos considerar que várias medidas de um certo operador A fornecem valores que flutuam em torno de um valor médio com um desvio

$$\delta\hat{A} \equiv \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle, \quad (2.1.1)$$

e variância dada por

$$(\Delta\hat{A})^2 = \langle(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)^2\rangle = \langle\delta\hat{A}^2\rangle. \quad (2.1.2)$$

Sendo B um observável que não comuta com A , podemos encontrar um limite inferior para o produto das incertezas $\Delta A \Delta B$ dos dois operadores [Nussenzveig, 1998]. Para isso, vamos considerar a desigualdade

$$\|(\delta\hat{A} + i\lambda\delta\hat{B})|u\rangle\|^2 \geq 0, \quad (2.1.3)$$

onde $|u\rangle$ é um vetor de estado e λ é um número real qualquer.

Podemos escrever (2.1.3) de forma explícita, obtendo uma desigualdade em termos das médias individuais de cada operador e do comutador $[\delta\hat{A}, \delta\hat{B}] \equiv \delta\hat{A}\delta\hat{B} - \delta\hat{B}\delta\hat{A}$,

$$\lambda^2\langle\delta\hat{B}^2\rangle + i\lambda\langle[\delta\hat{A}, \delta\hat{B}]\rangle + \langle\delta\hat{A}^2\rangle \geq 0. \quad (2.1.4)$$

Dada a hermiticidade dos operadores $\delta\hat{A}$ e $\delta\hat{B}$, mostra-se facilmente que o comutador $[\delta\hat{A}, \delta\hat{B}]$ é anti-hermiteano, sendo reais todos os coeficientes do trinômio do 2º grau em λ (equação (2.1.4)). Dessa forma, para que a desigualdade (2.1.4) seja obedecida, o discriminante do trinômio precisa ser ≤ 0 ,

$$(i\langle[\delta\hat{A}, \delta\hat{B}]\rangle)^2 - 4\langle\delta\hat{A}^2\rangle\langle\delta\hat{B}^2\rangle \leq 0, \quad (2.1.5)$$

o que nos dá

$$\langle\delta\hat{A}^2\rangle\langle\delta\hat{B}^2\rangle \geq \frac{1}{4} \left| \langle[\delta\hat{A}, \delta\hat{B}]\rangle \right|^2 \quad (2.1.6)$$

Finalmente, substituindo (2.1.1) e (2.1.2) em (2.1.6), obtemos

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle \right|. \quad (2.1.7)$$

Essa é a forma geral da relação de incerteza de Heisenberg [Sakurai 1994, Gottfried 2004], mostrando que duas grandezas que não comutam não podem ser determinadas com precisão absoluta.

Como já havíamos mencionado, o ruído quântico é uma consequência da quantização da luz. Quanticamente, o campo eletromagnético é composto por infinitos modos de

2.1. PRINCÍPIO DA INCERTEZA DE HEISENBERG

osciladores harmônicos quânticos. Classicamente, partindo das equações de Maxwell, mostra-se que a amplitude do campo eletromagnético monomodo é dada por

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega_0 t} + E_0^* e^{i\omega_0 t}, \quad (2.1.8)$$

com $E_0 = |E_0|e^{i\varphi}$, sendo $|E_0|$ o módulo do campo e φ uma fase arbitrária. A expressão (2.1.8) pode ainda ser reescrita em função de duas grandezas que estão em quadratura,

$$E(t) = X \cos(\omega_0 t) + Y \sin(\omega_0 t), \quad (2.1.9)$$

com

$$X = |E_0| \cos(\varphi) \quad \text{e} \quad Y = |E_0| \sin(\varphi). \quad (2.1.10)$$

Após realizar a quantização do campo eletromagnético [Gottfried 2004], mostra-se que a expressão para o operador de um modo do campo elétrico quantizado em uma caixa de volume V com frequência angular ω_0 é

$$\hat{E}(t) = E_0 (\hat{a} e^{-i\omega_0 t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 t}), \quad (2.1.11)$$

onde $E_0 = 1/2(\hbar\omega_0/V)^{1/2}$. Os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$ são os operadores de criação e aniquilação de um fóton e obedecem a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

De forma análoga ao campo clássico, podemos reescrever (2.1.11) em termos de operadores de quadratura $\hat{X}$ e $\hat{Y}$,

$$\hat{E}(t) = E_0 (\hat{X} \cos \omega_0 t + \hat{Y} \sin \omega_0 t), \quad (2.1.12)$$

onde

$$\hat{X} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger \quad \text{e} \quad \hat{Y} = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (2.1.13)$$

são equivalentes aos operadores posição e momento de um oscilador harmônico quântico e obedecem a relação

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = 2i. \quad (2.1.14)$$

O princípio da incerteza de Heisenberg (2.1.7) aplicado a estes operadores nos diz que o produto das dispersões das medidas das duas quadraturas $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ obedece a desigualdade

$$\Delta\hat{X}\Delta\hat{Y} \geq 1. \quad (2.1.15)$$

O limite imposto por essa relação é o que definirá o ruído quântico padrão, mencionado anteriormente. Existem estados quânticos que satisfazem a igualdade da equação (2.1.15) e dão uma idéia intuitiva da origem das flutuações presentes no campo. Vejamos então, características bastante importantes desses estados, e qual a sua relação com o *shot-noise*.

2.2 Estados Coerentes

A hamiltoniana para um campo eletromagnético monomodo quantizado tem a forma

$$H = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.2.1)$$

O operador $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ possui autoestados $|n\rangle$, conhecidos como estados número ou estados de Fock, com autovalores inteiros n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$) correspondentes, associados ao número de fótons do campo. A partir da relação de comutação entre o operador $\hat{N}$ e os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, podemos encontrar as seguintes relações bem conhecidas,

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{e} \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (2.2.2)$$

que justificam a denominação aniquilação e criação para os operadores $\hat{a}$ e $\hat{a}^\dagger$, respectivamente.

O estado $|n\rangle$ pode ser completamente determinado a partir do estado fundamental do oscilador harmônico, $|0\rangle$. Este estado recebe o nome de estado de vácuo por possuir número de fótons nulo, tal que

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.2.3)$$

A aplicação sucessiva do operador de criação $\hat{a}^\dagger$ neste estado nos mostra que qualquer estado número pode ser obtido através da criação de fótons a partir do estado vácuo,

$$|n\rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \quad (2.2.4)$$

Apesar de amplamente usado no tratamento teórico de problemas em ótica quântica, os estados de Fock são muito difíceis de serem produzidos experimentalmente [Bachor 1998]. Além disso, o cálculo da variância de N fornece,

$$\Delta^2 \hat{N} = \langle \hat{N}^2 \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 = \underbrace{\langle n | (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 | n \rangle}_{n^2} - \underbrace{\langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle^2}_{n^2} \quad (2.2.5)$$

$$= 0. \quad (2.2.6)$$

O que mostra haver perfeita determinação do número de fótons de um estado número. Estamos interessados em medir as quadraturas fase e amplitude do campo, estando essa última diretamente relacionada à intensidade que, por sua vez, está associada ao número de fótons. Uma perfeita determinação da amplitude do campo leva a uma completa indeterminação da fase, visto que essas são variáveis conjugadas, não podendo haver violação do princípio de Heisenberg.

Os estados comumente usados são os estados coerentes [Glauber 1963], estados quânticos que mais se aproximam da descrição clássica do oscilador harmônico [Stephen 1987], definidos como autoestados do operador aniquilação,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.2.7)$$

2.2. ESTADOS COERENTES

e possuem importantes características facilmente vistas quando escritos na base de estados de Fock,

$$|\alpha\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \quad \text{com} \quad c_n = \langle n|\alpha\rangle. \quad (2.2.8)$$

Aplicando $\langle n|$ nos dois lados da equação (2.2.7) obtemos a relação

$$\sqrt{n+1} \langle n+1|\alpha\rangle = \alpha \langle n|\alpha\rangle, \quad (2.2.9)$$

que permite encontrar a expressão

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle. \quad (2.2.10)$$

Impondo a normalização do estado $|\alpha\rangle$, vemos que $\langle 0|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}$. Com isso, a equação (2.2.8) para o estado coerente $|\alpha\rangle$ na base dos estados número é explicitamente escrita como

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (2.2.11)$$

Como havíamos falado anteriormente, os estados número, por possuírem número de fótons bem definido ($\Delta^2 \hat{N} = 0$), implicam uma indeterminação completa da fase, o que não os torna práticos na descrição de feixes lasers reais. Já os estados coerentes não possuem um número bem definidos de fótons, o que permite definir de modo mais preciso a fase do campo.

Da equação (2.2.11), calcula-se a probabilidade $P(n)$ de se medir n fótons, dada por

$$P(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \quad (2.2.12)$$

que é uma distribuição de Poisson com número médio de fótons $\langle n \rangle = |\alpha|^2$. Uma propriedade bastante importante dessa distribuição é evidenciada ao realizar medidas em vários sistemas preparados no mesmo estado coerente. Ao fazer isso, mostramos que a variância do número de fótons é igual à sua média, ou seja,

$$\Delta^2 \hat{N} = \langle n \rangle = |\alpha|^2. \quad (2.2.13)$$

Isso mostra que a intensidade do campo flutua de acordo com uma distribuição de Poisson. Podemos interpretar melhor este resultado quando lembramos que um fotodetector não verá um fluxo regular de fótons e mas sim algo aleatório. No caso ideal, cada fóton que incide na superfície do detetor irá provocar a emissão de um elétron, dando origem a uma fotocorrente. A distribuição $P(n)$ é diretamente representada pela variação dessa fotocorrente. No domínio temporal, isto significa que os fótons estão chegando ao fotodetetor em tempos diferentes, de forma aleatória [Bachor 1998].

As flutuações são comumente normalizadas pela intensidade do campo,

$$\frac{\Delta^2 N}{\langle n \rangle} = 1, \quad (2.2.14)$$

o que define o nível de *shot-noise* como sendo igual à unidade.

Na prática, temos que levar em conta outros tipos de ruído existentes devido a eletrônica envolvida no sistema, esses ruídos somados dão origem ao que chamamos de ruído eletrônico, que será discutido adiante.

2.3 Quadraturas do Campo

As quadraturas $\hat{X}$ e $\hat{Y}$ (equação 2.1.13), podem ser escritas em uma forma mais geral, assumindo a arbitrariedade da fase do campo incidente e a dependência temporal dos operadores de criação e aniquilação, associada à modulações temporais de fase e amplitude do campo [Cassemiro 2008b],

$$\hat{X}_\theta(t) = \hat{a}(t)e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger(t)e^{i\theta} \quad \text{e} \quad \hat{Y}_\theta(t) = -i[\hat{a}(t)e^{-i\theta} - \hat{a}^\dagger(t)e^{i\theta}]. \quad (2.3.1)$$

Para essas quadraturas, temos a seguinte relação de comutação

$$[\hat{X}(t), \hat{Y}(t')] = 2i\delta(t - t'), \quad (2.3.2)$$

de onde segue a relação de incerteza de Heisenberg,

$$\Delta X_\theta \Delta Y_\theta \geq \frac{1}{2} |[\hat{X}_\theta, \hat{Y}_\theta]| = 1. \quad (2.3.3)$$

Vamos agora relacionar essas quadraturas às grandezas que medimos em laboratório. Os detetores utilizados no experimento medem somente intensidade dos feixes através do efeito fotoelétrico. Cada fóton que incide sobre o detetor provoca a emissão de um elétron, que dá origem a uma fotocorrente. No caso ideal, podemos modelar o detetor como sendo sensível ao operador intensidade

$$I(t) = \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t), \quad (2.3.4)$$

onde os operadores $\hat{a}(t)$ e $\hat{a}^\dagger(t)$ tem dimensão de inverso da raiz quadrada de tempo. Podemos escrever a intensidade em termos do seu valor médio mais um termo de flutuação, assumindo flutuações relativas ao operador $\hat{a}(t)$,

$$\langle I \rangle + \delta I(t) = [\alpha^* + \delta \hat{a}^\dagger(t)][\alpha + \delta \hat{a}(t)] \quad (2.3.5)$$

$$= |\alpha|^2 + \alpha^* \delta \hat{a}(t) + \alpha \delta \hat{a}^\dagger(t) + \delta \hat{a}^\dagger(t) \delta \hat{a}(t), \quad (2.3.6)$$

2.3. QUADRATURAS DO CAMPO

onde assumimos $\langle \hat{a}(t) \rangle \equiv \alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$, sendo α interpretado como uma amplitude complexa do campo. Desprezando o termo que envolve o produto das flutuações, pois $\delta I(t) \ll \langle I \rangle$, e reescrevendo os termos correspondentes à flutuação em termos do módulo de α , obtemos

$$\delta I(t) = |\alpha|[e^{-i\varphi}\delta\hat{a}(t) + e^{i\varphi}\delta\hat{a}^\dagger(t)] = |\alpha|\delta\hat{X}_\varphi(t). \quad (2.3.7)$$

$$\delta I(t) = |\alpha|\delta\hat{p}(t) \quad (2.3.8)$$

Vemos, então, que a flutuação da intensidade do campo está associada à flutuação da quadratura gereneralizada $\hat{X}_\theta$ quando $\theta = \varphi$, equação (2.3.1). Como $|\alpha|$ nos dá a amplitude média do campo, vemos que flutuações da quadratura $\hat{Y}_\varphi$, ortogonal à $\hat{X}_\varphi$, estão associadas às flutuações de fase do campo. A partir de agora, adotaremos a notação $\hat{p}(t) \equiv \hat{X}_\varphi(t)$ e $\hat{q}(t) \equiv \hat{Y}_\varphi(t)$, para as quadraturas amplitude e fase do campo respectivamente. A figura (2.1), nos dá uma interpretação geométrica da expressão (2.3.7), tornando intuitiva a obtenção das flutuações da quadratura amplitude através de medidas de flutuação da intensidade do feixe,

$$\delta\hat{p}(t) = \delta I(t)/\langle \hat{I} \rangle^{1/2}. \quad (2.3.9)$$

Mostra-se facilmente que a variância das quadraturas amplitude e fase, calculadas para um estado coerente, são iguais à unidade. Portanto, o produto das variâncias de $\hat{p}$ e $\hat{q}$ satisfaz a igualdade do princípio da incerteza de Heisenberg (equação (2.3.3)),

$$\Delta\hat{p}(t)\Delta\hat{q}(t) = 1. \quad (2.3.10)$$

Dizemos, por isso, que os estados coerentes são estados de mínima incerteza, com flutuações igualmente distribuídas entre as quadraturas amplitude e fase. Essas flutuações dão origem ao que chamamos de *ruído quântico padrão*.

Existem ainda estados para os quais a variância de uma quadratura é menor do que o limite imposto pelos estados coerentes, implicando em excesso de ruído na outra, de forma a respeitar o princípio de incerteza. Estes estados são conhecidos estados comprimidos. As características aqui mencionadas estão ilustradas de forma pictórica na representação do campo no diagrama de Fresnel (figura 2.1). Nessa figura, a grandeza que apresenta compressão (flutuação abaixo do *shot-noise*) é a quadratura amplitude. Como consequência, a quadratura fase apresenta excesso de ruído, definindo uma elipse de ruído.

Podemos ainda fazer a análise realizada anteriormente no domínio da frequência, o que permite relacionar os termos de flutuação com as bandas laterais da onda de frequência central ω_0 . Escrevemos as quadraturas do campo no domínio da frequência através da transformada de Fourier

$$\hat{a}(\Omega) \equiv \int \hat{a}(t)e^{i\Omega t}dt, \quad \hat{a}^\dagger(\Omega) \equiv [\hat{a}(\Omega)]^\dagger, \quad (2.3.11)$$

de onde segue a relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação $[\hat{a}(\Omega), \hat{a}^\dagger(-\Omega')] = \delta(\Omega - \Omega')$. Agora estamos tratando de operadores de criação e aniquilação numa frequência Ω em torno da frequência ótica ω_0 .

Figura 2.1: Representação do campo e suas flutuações no diagrama de Fresnel. O vetor partindo da origem representa o valor médio do campo e a elipse representa as flutuações do mesmo nas diferentes quadraturas. As flutuações δp e δq se relacionam com as flutuações de intensidade do campo. O círculo pontilhado representa o ruído de um estado coerente, *shot-noise*.

Realizando a transformada de Fourier dos operadores de quadratura $\hat{p}(t)$ e $\hat{q}(t)$, obtemos suas expressões no domínio da frequência,

$$\hat{p}(\Omega) = e^{-i\varphi}\hat{a}(\Omega) + e^{i\varphi}\hat{a}^\dagger(-\Omega), \quad (2.3.12)$$

$$\hat{q}(\Omega) = -i[e^{-i\varphi}\hat{a}(\Omega) + e^{i\varphi}\hat{a}^\dagger(-\Omega)], \quad (2.3.13)$$

É fácil demonstrar, dada a hermiticidade de $\hat{p}(\Omega)$ e $\hat{q}(\Omega)$, que

$$[\hat{p}(\Omega)]^\dagger = \hat{p}(-\Omega) \quad \text{e} \quad [\hat{q}(\Omega)]^\dagger = \hat{q}(-\Omega). \quad (2.3.14)$$

Além disso, a relação de comutação entre as quadraturas é facilmente obtida a partir da equação (2.3.2),

$$[\hat{p}(\Omega), \hat{q}(\Omega')] = 4i\delta(\Omega - \Omega'). \quad (2.3.15)$$

Em nosso experimento, grande parte dos fótons estão na frequência ω_0 , chamada de portadora ou banda central, enquanto as regiões em torno da portadora, com frequência $\omega_0 \pm \Omega$ são denominadas bandas laterais. Percebemos, ao escrever (2.3.7) no domínio da frequência, que os termos de flutuação são dados pelo batimento entre as bandas laterais e a banda central. Chamamos a frequência Ω de frequência de análise [Villar 2007b]

Para obter o espectro de ruído, calculamos a transformada de Fourier da função de autocorrelação temporal [Mandel e Wolf 1995]

$$C(t, t') = \langle \delta \hat{X}_\theta(t) \delta \hat{X}_\theta(t + \tau) \rangle, \quad \tau = t - t' \quad (2.3.16)$$

2.4. DETEÇÃO HOMODINA

que determina o quanto a flutuação de uma quadratura no tempo t está correlacionada com outra no instante de tempo t' . De acordo com o Teorema de Wiener-Kintchine, o espectro de ruído $S_{\hat{X}_\theta}(\Omega)$ da quadratura generalizada $\hat{X}_\theta$ é dado por

$$S_{\hat{X}_\theta}(\Omega) = \int e^{i\Omega\tau} \langle \delta\hat{X}_\theta(t) \delta\hat{X}_\theta(t+\tau) \rangle d\tau. \quad (2.3.17)$$

Em processos estacionários, $C(t, t')$ não depende do instante inicial t , mas apenas da diferença de tempo τ . Com isso, é possível mostrar que vale a identidade [Villar 2004b]

$$\langle \delta\hat{X}_\theta(\Omega) \delta\hat{X}_\theta(-\Omega') \rangle = 2\pi S_{\hat{X}_\theta} \delta(\Omega - \Omega'). \quad (2.3.18)$$

A função delta surge por causa do limite de integração infinito na equação (2.3.11). No entanto, essa divergência é contornada pelo fato de medidas serem realizadas em um tempo finito, além de serem utilizados filtros de frequência. Desse modo não medimos exatamente o espectro de ruído e sim algo proporcional a ele de tal modo que

$$\Delta^2 \hat{X}_\theta \propto S_{\hat{X}_\theta}(\Omega) \quad (2.3.19)$$

Vejamos a seguir como podemos medir as variâncias das quadraturas fase e amplitude do campo.

2.4 Detecção Homodina

A idéia geral dos métodos utilizados para medir as quadraturas de um campo é realizar a interferência do campo de interesse $\hat{a}$ com outro mais intenso $\hat{b}$, chamado *oscilador local*. A fase relativa entre eles determinará as flutuações de quadratura que serão projetadas no oscilador local.

Consideremos os campos de mesma frequência incidentes sobre um divisor de feixes representados pelos operadores de aniquilação $\hat{a}$ e $\hat{b}$. Os campos de saída $\hat{c}$ e $\hat{d}$ são enviados cada um para um fotodetector onde será gerada uma corrente. Em seguida, realizamos a medida da soma e subtração dos sinais produzidos pelos fotodetectores (figura 2.2).

Descreveremos aqui a detecção homodina balanceada, onde a transmissão do divisor de feixes é de 50%. As expressões para os campos de saída são

$$\hat{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{b}) \quad \text{e} \quad \hat{d} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{a} + \hat{b}) \quad (2.4.1)$$

Sendo as fotocorrentes dadas por $I_c = \hat{c}^\dagger \hat{c}$ e $I_d = \hat{d}^\dagger \hat{d}$, a subtração das mesmas resulta em

$$I_- = \hat{a}^\dagger \hat{b} + \hat{b}^\dagger \hat{a} \quad (2.4.2)$$

Ao assumirmos que o campo $\hat{b}$ é muito intenso, podemos trocar o operador pelo seu valor médio $\hat{b} = |\beta|e^{-i\theta}$, implicando

$$I_- = |\beta|(\hat{a}e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}) \quad (2.4.3)$$

Figura 2.2: Esquema de detecção homodina

Vemos então que a diferença de intensidades dos campos é proporcional à quadratura generalizada $\hat{X}_\theta$. Portanto, variando a fase θ do oscilador local em relação ao feixe de interesse, temos acesso às quadraturas amplitude e fase do campo. É importante observar que esta técnica é aplicável somente a campos que possuem a mesma frequência. Na próxima subseção, iremos mostrar como podemos determinar o shot-noise utilizando a técnica de detecção homodina e como a medida do mesmo varia com adição de perdas no sistema.

2.4.1 Detecção Homodina e Medida do Shot-Noise

Continuando a análise anterior, vamos supor que o campo $\hat{b}$ possui um número de fótons n_b bem determinado, de forma que a média da subtração das correntes (2.4.2) seja calculada sobre o estado $|\Phi\rangle = |n_b\rangle|\Phi_a\rangle$, sendo $|\Phi_a\rangle$ e $|n_b\rangle$ os estados dos campos $\hat{a}$ e $\hat{b}$, respectivamente. O cálculo da variância de I_- , nos dá

$$\Delta^2 I_- = \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + 2n_b \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle + n_b \quad (2.4.4)$$

Este resultado nos mostra que para obter a medida do shot-noise basta que $n_b = 0$, ou seja, basta bloquear o feixe $\hat{b}$. Como o estado de vácuo $|0\rangle$ é o estado que possui número de fótons nulo, dizemos, por essa razão, que o campo $\hat{a}$ está sendo misturado com estados de vácuo que entram pela porta vazia de um divisor de feixes. Esta é a técnica utilizada em nosso experimento para calibrar o nível do ruído quântico padrão.

Sendo a variância das quadraturas amplitude e fase iguais a um para estados coerentes, vemos que a variância de $\hat{I}(t)$ calculada a partir da equação (2.3.7) torna-se idêntica à (2.2.13), dado $I(t) = \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)$. No entanto, como mencionado anteriormente, devemos levar em consideração o ruído gerado pela eletrônica do aparato experimental. Basicamente,

2.4. DETEÇÃO HOMODINA

o ruído total medido S é

$$S = \Delta^2 I(t) + \underbrace{\Delta^2 I(t)_{dark} + \Delta^2 I(t)_{th} + \Delta^2 I(t)_{amp}}_{\Delta^2 I(t)_{ele}}, \quad (2.4.5)$$

onde o primeiro termo é o ruído intrínseco da luz e os demais são diferentes tipos de ruído eletrônico, $\Delta^2 I(t)_{ele}$. O primeiro deles, $\Delta^2 I(t)_{dark}$ [Spiegel 1980], refere-se a falsas detecções, pois mesmo na ausência de luz os fotodetetores produzem algum tipo de sinal. O segundo, $\Delta^2 I(t)_{th}$, está relacionado ao ruído térmico, conhecido também como ruído de Johnson-Nyquist [Vetterling 1980, Spiegel 1980], devido a agitação dos elétrons nos elementos que formam a eletrônica (resistores, por exemplo). Por fim, o último deles, $\Delta^2 I(t)_{amp}$, surge por causa da amplificação do sinal. Portanto, antes de qualquer medida de shot-noise, é imprescindível a medida do ruído eletrônico do sistema para que seja subtraído de todas as aquisições e o ruído resultante seja somente o de interesse [Bachor 1998]. Feito isso, temos

$$\Delta^2 I(t) = \beta I, \quad (2.4.6)$$

em que β é uma constante dependente da frequência. Assim, dado $\Delta^2 \hat{p}(t) = \Delta^2 I(t)/I$, para um estado coerente, obtemos

$$\Delta^2 \hat{p}(t) = \beta. \quad (2.4.7)$$

O que justifica a calibração do shot-noise pela constante β . Todos os nossos dados serão normalizados por esta constante, de tal forma que compressão em uma dada quadratura significa $\Delta^2 \hat{X}_\theta < 1$. A figura (2.3) mostra uma medida de calibração do shot-noise realizada em nosso laboratório. O eixo horizontal (DC) está associado com a potência do feixe incidente nos fotodetetores, traduzida como voltagem.

Experimentalmente, temos perdas envolvidas no processo de detecção por não termos detetores com eficiência quântica unitária e devido a perdas ocasionadas pela própria ótica utilizada. Na prática, os detetores tem eficiência quântica η de detecção muito alta, o que permite fazer um modelo simples envolvendo as perdas. Consideramos um detetector ideal ($\eta = 1$) e tratamos as perdas como um divisor de feixes colocado a frente do detetor, assim como ilustrado na figura (2.2).

No entanto, interessados nas perdas, vamos desconsiderar a saída que leva ao detetor D_1 , considerando uma transmitância $T = \eta$. Com isso, a equação (2.4.8), é reescrita como

$$\hat{c} = \sqrt{\eta} \hat{a} + \sqrt{1-\eta} \hat{b} \quad \text{e} \quad \hat{d} = -\sqrt{1-\eta} \hat{a} + \sqrt{\eta} \hat{b}. \quad (2.4.8)$$

Além disso, assumiremos apenas a existência de estados de vácuo por onde entra o feixe $\hat{b}$. Portanto, o estado medido permanece $|\Phi\rangle = |n_b\rangle|\Phi_a\rangle$. Calculando o número médio de fótons do feixe $\hat{d}$, obtemos

$$\langle \hat{N}_d \rangle = \langle 0_d | \langle \Phi_a | \hat{N}_d | 0_d \rangle | \Phi_a \rangle = \eta \langle \Phi_a | \hat{N}_a | \Phi_a \rangle. \quad (2.4.9)$$

Figura 2.3: Exemplo de curva de calibração de shot-noise. O ajuste linear está de pleno acordo com os dados experimentais, que possuem barra de erro desprezível. A característica completamente linear do shot-noise, passando pelo zero, torna a medida confiável.

A variância do operador número $\hat{N}$ é

$$\Delta^2 \hat{N} = \langle : \hat{N}^2 : \rangle - \langle \hat{N} \rangle^2 + \langle N \rangle, \quad (2.4.10)$$

onde o símbolo $\langle : O : \rangle$ indica que o operador é colocado em ordem normal (operadores de criação à esquerda e de aniquilação à direita). Aplicando a equação anterior ao operador $\hat{N}_d$, obtemos sua variância em função da eficiência de detecção,

$$\begin{aligned} \Delta^2 \hat{N}_d &= \eta^2 (\langle : \hat{N}_a^2 : \rangle - \langle \hat{N}_a \rangle^2) + \langle N_a \rangle \\ &= \eta^2 \langle : \Delta^2 N_a : \rangle + \eta \langle \hat{N}_a \rangle, \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

onde o primeiro termo corresponde às flutuações calculadas em ordem normal e o segundo termo está associado ao shot-noise. Portanto, caso medíssemos as flutuações do feixe em uma dada potência para vários valores de atenuação (correspondente à perdas), veríamos as flutuações variarem de forma linear com η , no caso de um feixe coerente.

Conforme apresentado, a detecção homodina permite medir de forma simples as quadraturas amplitude e fase do campo, além de fornecer uma medida direta do shot-noise através da homodinagem com o vácuo. A grande limitação desta técnica está no fato de obrigatoriamente serem usados campos com a mesma frequência. Em nosso experimento, estamos interessados em medir quadratura de campos que possuem comprimentos de onda distintos, o que torna inviável a utilização da técnica pela ausência de um oscilador local comum. A técnica utilizada em nossos experimentos faz uso de cavidades óticas para ter acesso às quadraturas amplitude e fase. Veremos a seguir uma breve discussão sobre

cavidades óticas do tipo Fabry-Perot e, feito isso, apresentaremos de forma resumida da técnica empregada em nosso laboratório.

2.5 Cavidades Óticas e Rotação de Elipse

Considere uma cavidade ótica (figura 2.4) formada pelo espelho de acoplamento com coeficiente de reflexão R_1 e espelho altamente refletor $R_2 < 1$, representando as perdas espúrias do sistema por meio do acoplamento dos campos intracavidade com os modos de vácuo. Os espelhos estão separados a uma distância $L/2$. A transmissão e reflexão dos espelhos são dadas por $r_j^2 = R_j$ e $t_j^2 = T_j$ ($j = 1, 2$). Escolhe-se a fase do campo incidente como sendo nula na posição do espelho de acoplamento. O campo transmitido

Figura 2.4: Cavidade Fabry-Perot

E_T pela cavidade é dado pela transmissão do campo intracavidade E_c através do espelho 2 e o campo refletido E_R é dado pela soma do campo transmitido E_c com o incidente E_{in} refletido pelo espelho 1. Com estas informações, após alguns cálculos [Grynberg 1997], mostra-se que as amplitudes clássicas dos campos E_T e E_R se relacionam com a amplitude do campo incidente da seguinte forma

$$E_R = r(L)E_{in} \quad \text{e} \quad E_T = t(L)E_{in}, \quad (2.5.1)$$

sendo a reflexão e transmissão da cavidade dadas, respectivamente, por

$$r(L) = -\frac{r_1 - r_2 \exp(ikL)}{1 - r_1 r_2 \exp(ikL)} \quad \text{e} \quad t(L) = \frac{t_1 t_2 \exp(ikL/2)}{1 - r_1 r_2 \exp(ikL)}. \quad (2.5.2)$$

Calculando as expressões para a transmissão T e reflexão R da cavidade, dadas pelo módulo ao quadrado de E_T/E_{in} e E_R/E_{in} , respectivamente, vê-se que a condição de ressonância é satisfeita para comprimentos da cavidades iguais a $n\lambda/2$. Nesta condição, as expressões para os coeficientes de transmissão máxima T_{max} e reflexão mínima R_{min} tem a forma

$$R_{min} = \frac{(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2})^2}{(1 - \sqrt{R_1 R_2})^2} \quad (2.5.3)$$

$$T_{max} = 1 - R_{min}. \quad (2.5.4)$$

Parâmetros importantes, que caracterizam a cavidade são: a largura de banda $\delta\nu_c$ ou *bandwidth* (BW), definida como a largura à meia altura em frequência de um pico de ressonância da cavidade, o intervalo espectral livre $\delta\nu_c$ ou *free spectral range* (FRS), dado pela distância em frequência entre dois picos de ressonância consecutivos, associado ao tempo que um fóton leva para dar uma volta na cavidade e a finesse F , que nos dá a qualidade da cavidade em termos de armazenamento de luz. A finesse é igual à razão entre o intervalo espectral livre e a largura de banda da cavidade, sendo dada pela expressão

$$F = \pi \left[2 \arcsin \left(\frac{1 - \sqrt{R_1 R_2}}{2(R_1 R_2)^{1/4}} \right) \right]^{-1} \approx \pi \frac{(R_1 R_2)^{1/4}}{1 - \sqrt{R_1 R_2}} \quad (2.5.5)$$

No limite de alta finesse ($T_1, T_2 \ll 1$), obtemos

$$F \approx \frac{2\pi}{T_1 + T_2}, \quad (2.5.6)$$

que permite visualizar a finesse como uma medida direta das perdas pelos espelhos. Podemos entender o significado físico da finesse, calculando a razão entre as intensidades do campo $|E_c/E_{in}|^2$ na ressonância, assumindo que o espelho T_2 é perfeito, $T_2 \approx 0$, e utilizando a equação (2.5.6), para obter

$$\left| \frac{E_c}{E_i} \right|^2 \approx \frac{2}{\pi} F. \quad (2.5.7)$$

de onde concluímos que uma maior finesse implica maior intensidade do campo intracavidade, justificando sua interpretação como um fator de qualidade da cavidade. Outra grandeza bastante utilizada é a dessintonia Δ entre a portadora do campo e a ressonância da cavidade relativa à largura de banda,

$$\Delta = \frac{(\nu_0 - \nu_c)}{\delta\nu_c}, \quad (2.5.8)$$

sendo ν_0 a frequência ótica do campo e ν_c é a frequência de ressonância da cavidade.

Não é difícil mostrar que a reflexão e a transmissão (equação 2.5.9) pode ser reescrita como

$$r(\Delta) = -\frac{r_1 - r_2 \exp(i2\pi\Delta/F)}{1 - r_1 r_2 \exp(i2\pi\Delta/F)} \quad \text{e} \quad t(\Delta) = \frac{t_1 t_2 \exp(i2\pi\Delta/2F)}{1 - r_1 r_2 \exp(i2\pi\Delta/F)}. \quad (2.5.9)$$

Na figura 2.5 estão representados a reflexão $R(\Delta) = |r(\Delta)|^2$ e a fase $\exp(i\theta_R) = r(\Delta)/|r(\Delta)|$ do campo refletido em função da dessintonia da cavidade. Note que à medida que a dessintonia varia passando pela ressonância, $\Delta = 0$, a fase do campo refletido varia na forma de arcotangente de 0 a 2π . Como era de se esperar, na ressonância a reflexão possui valor mínimo, implicando máxima transmissão dada a relação $|r(\Delta)|^2 + |t(\Delta)|^2 = 1$. Veremos agora como estes resultados possibilitam o acesso à quadraturas amplitude e fase do campo.

Figura 2.5: Módulo ao quadrado (curva em vermelho) e fase (curva em azul) de $r(\Delta)$ em função da dessintonia da cavidade. Foram utilizados $R_1 = 95\%$ e $R_2 = 99,7\%$, valores compatíveis com as especificações dos espelhos utilizados em nossos experimentos.

2.6 Detecção Autohomodina

A técnica que discutiremos aqui de forma breve foi primeiramente proposta por Galatola *et. al.* [Galatola 1991], que mostraram a possibilidade de projetar a flutuação da quadratura fase em flutuação de quadratura amplitude. A técnica utilizada neste caso é denominada auto-homodina, pois o oscilador local está incluído no próprio feixe, sendo bastante semelhante à detecção homodina. O acesso às quadraturas será feito por meio de cavidades óticas que provocam o giro da elipse de ruído. A técnica será descrita de forma breve nesta sessão. A descrição detalhada pode ser encontrada nas referências [Villar 2004b, Villar 2007b, Villar 2008, Cassemiro 2008b].

Iniciaremos a discussão observando a expressão para a flutuação das quadraturas amplitude e fase no domínio da frequência,

$$\delta\hat{p}(\Omega) = e^{-i\varphi}\delta\alpha(\Omega) + e^{i\varphi}\delta\alpha^*(-\Omega), \quad (2.6.1)$$

$$\delta\hat{q}(\Omega) = -i[e^{-i\varphi}\delta\alpha(\Omega) - e^{i\varphi}\delta\alpha^*(-\Omega)], \quad (2.6.2)$$

onde Ω é a frequência de análise em torno da frequência ótica ω_o e φ a fase do campo tomado como referência.

O uso da cavidade ótica como ferramenta que permite a projeção das flutuações de fase em flutuações de amplitude pode ser entendido através de um exemplo simples. Vamos supor que podemos adicionar uma fase θ controlável a cada uma das componentes de frequência $\omega_0 \pm \Omega$ e ω_0 de forma independente. Adicionando esta fase na banda lateral Ω

da equação (2.6.1), temos

$$\delta\hat{p}(\Omega) \longrightarrow e^{i\theta}e^{-i\varphi}\delta\alpha(\Omega) + e^{i\varphi}\delta\alpha^*(-\Omega), \quad (2.6.3)$$

$$= e^{i\theta/2}[e^{-i(\varphi-\theta/2)}\delta\alpha(\Omega) + e^{i(\varphi-\theta/2)}\delta\alpha^*(-\Omega)]. \quad (2.6.4)$$

$$\delta\hat{p}(\Omega) \longrightarrow e^{-i\varphi}\delta\alpha(\Omega) + e^{i\theta}e^{i\varphi}\delta\alpha^*(-\Omega), \quad (2.6.5)$$

$$= e^{i\theta/2}[e^{-i(\varphi+\theta/2)}\delta\alpha(\Omega) + e^{i(\varphi+\theta/2)}\delta\alpha^*(-\Omega)]. \quad (2.6.6)$$

Nota-se que variando o ângulo θ de 0 a 2π a quadratura varia de amplitude para fase ($\theta = -\pi$), a menos da fase global. O mesmo resultado pode ser obtido inserindo a fase θ na banda lateral de frequência $-\Omega$. Resta-nos apenas analisar o efeito desta adição de fase na portadora, fazendo $\varphi \longrightarrow \varphi + \theta$,

$$\delta\hat{p}(\Omega) \longrightarrow e^{-i(\varphi+\theta)}\delta\alpha(\Omega) + e^{i(\varphi+\theta)}\delta\alpha^*(-\Omega). \quad (2.6.7)$$

Mais uma vez, variando a fase θ obtemos a conversão de quadratura amplitude para quadratura fase ($\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$). A cavidade é o sistema que adiciona e controla esta fase por meio da variação da dessintonia (conforme visto na figura 2.5), quando em ressonância com alguma dessas frequências.

O campo refletido pela cavidade está relacionado com o campo incidente e os modos de vácuo inseridos pelo espelho de saída R_2 de acordo com a expressão

$$\alpha_R(\nu') = r(\Delta + \nu')\alpha_{in}(\nu') + t(\Delta + \nu')\alpha_v(\nu') \quad (2.6.8)$$

sendo a reflexão e transmissão dadas pela equação (2.5.9) com os devidos argumentos e $\nu' = \nu/\delta\nu_c$ a frequência de análise relativa à largura de banda da cavidade. Note que além de depender da dessintonia, a reflexão e transmissão dependem da frequência, implicando uma defasagem e atenuação também dependentes.

Aplicando a equação anterior à portadora com frequência ν_0 (escolhida como origem) e às bandas laterais, obtemos

$$\alpha_R(0) = r(\Delta)\alpha_{in}(0), \quad (2.6.9)$$

$$\delta\alpha_R(\nu') = r(\Delta + \nu')\delta\alpha_{in}(\nu') + t(\Delta + \nu')\delta\alpha_v(\nu'), \quad (2.6.10)$$

$$\delta\alpha_R^*(-\nu') = r^*(\Delta - \nu')\delta\alpha_{in}^*(-\nu') + t^*(\Delta - \nu')\delta\alpha_v^*(-\nu'). \quad (2.6.11)$$

De forma análoga à equação (2.6.1) definimos a quadratura amplitude do campo refletido,

$$\delta p_R(\nu') = \frac{\alpha_R^*}{|\alpha_R|}\delta\alpha_R(\nu') + \frac{\alpha_R}{|\alpha_R|}\delta\alpha_R^*(-\nu'). \quad (2.6.12)$$

2.6. DETEÇÃO AUTOHOMODINA

Fazendo a inversão das equações (2.6.1) e (2.6.2) e substituindo em (2.6.12), juntamente com (2.6.9)-(2.6.11), obtemos

$$\begin{aligned}\delta p_R(\nu') &= g_p(\Delta, \nu') \delta p_{in}(\nu') + i g_q(\Delta, \nu') \delta q_{in}(\nu') + g_{vp}(\Delta, \nu') \delta v_p(\nu') \\ &\quad + i g_{vq}(\Delta, \nu') \delta v_q(\nu'),\end{aligned}\tag{2.6.13}$$

em que $\delta v = e^{i\varphi}(\delta v_p + i\delta v_q)/2$ é a flutuação do vácuo, e

$$\begin{aligned}g_p(\Delta, \nu') &= \frac{1}{2} [e^{-i\theta_R(\Delta)} r(\Delta + \nu') + e^{i\theta_R(\Delta)} r^*(\Delta - \nu')] , \\ g_q(\Delta, \nu') &= \frac{1}{2} [e^{-i\theta_R(\Delta)} r(\Delta + \nu') - e^{i\theta_R(\Delta)} r^*(\Delta - \nu')] , \\ g_{vp}(\Delta, \nu') &= \frac{1}{2} [e^{-i\theta_R(\Delta)} t(\Delta + \nu') + e^{i\theta_R(\Delta)} t^*(\Delta - \nu')] , \\ g_{vq}(\Delta, \nu') &= \frac{1}{2} [e^{-i\theta_R(\Delta)} t(\Delta + \nu') - e^{i\theta_R(\Delta)} t^*(\Delta - \nu')] .\end{aligned}\tag{2.6.14}$$

Utilizando a equação (2.3.18), calculamos o espectro de ruído para a quadratura amplitude do feixe refletido

$$S_R(\Delta, \nu') = |g_p(\Delta, \nu')|^2 S_p(\nu') + |g_q(\Delta, \nu')|^2 S_q(\nu') + |g_{vp}(\Delta, \nu')|^2 + |g_{vq}(\Delta, \nu')|^2 ,\tag{2.6.15}$$

estando o mesmo relacionado com o ruído das quadraturas amplitude e fase do campo incidente $S_p(\nu')$ e $S_q(\nu')$. Os ruídos de vácuo foram considerados iguais ao *shot-noise*, $S_{vp}(\nu') = S_{vq}(\nu') = 1$. Além disso, foram consideradas correlações nulas entre as quadraturas amplitude e fase do feixe incidente, $C_{qp}(\nu) = 0$, dadas por

$$\delta(\nu' - \nu'') C_{qp} = \langle \delta p_{in}(\nu') \delta q_{in}(-\nu'') \rangle .\tag{2.6.16}$$

A correlação C_{qp} nos dá uma medida de quão dependentes são essas variáveis. Variáveis independentes satisfazem $C_{qp} = 0$. Esse caso ocorre quando os eixos menor e maior da elipse de ruído (figura 2.1) estão completamente alinhados às quadraturas p e q . Mais detalhes sobre este assunto são encontrados nas referências [Villar 2007b, Casseiro 2008b].

Na figura 2.6¹ está ilustrado como varia $S_R(\Delta, \nu')$ em função da dessintonia para $\nu' = 6$, $S_p(\nu') = 0.5$ e $S_q(\nu') = 2$ à sua volta estão quadros contendo as representações pictóricas no plano complexo do campo para cada valor de dessintonia assinalado. Para $|\Delta| > 6$, a cavidade está completamente fora de ressonância, não havendo qualquer mudança no feixe incidente. Neste caso observamos a quadratura p (quadro 1 e 17). Em $|\Delta| \sim 6$, temos a cavidade em ressonância com as bandas laterais, caso em que ocorre a primeira conversão de ruído de fase em amplitude, porém com uma pequena atenuação da elipse (quadros 3 e 15). A conversão completa de ruído de fase em amplitude ocorre para $|\Delta| \sim 0.5$ (quadros 7 e 11). Quando $\Delta = 0$, a portadora recebe uma fase π sendo equivalente ao caso fora de

¹Figura cordialmente cedida por Alessandro Villar [Villar 2007b].

ressonância. Percebemos então que a conversão total acontece quando a elipse de ruído se mantém orientada da mesma forma enquanto a portadora é girada de 90° e 270° .

Figura 2.6: Curva $S_R(\Delta, \nu')$ em função da dessintonia para $\nu' = 6$, $S_p(\nu') = 0.5$ e $S_p(\nu') = 2.0$. À sua volta está representada a posição da elipse de ruído para cada dessintonia assinalada.

Podemos agora analisar este mesmo espectro de ruído para frequências de análise diferentes, assim como ilustrado na figura 2.7. Para $\nu' = 1$, círculos verdes, não há distinção entre as bandas laterais e a portadora implicando uma conversão parcial de ruído. Quando $\nu' = 2$, linha azul, já é possível observar o efeito nas bandas laterais, porém havendo interferência entre as três frequências, pois recebem fases diferentes ao mesmo tempo. Por fim, em $\nu' = 4$, curva tracejada em vermelho existem rotações da elipse quase independentes. Isto pode ser entendido quando calculamos o valor mínimo da frequência de análise que permite girar completamente a elipse de ruído. Faz-se isso impondo a condição $\theta_R(\Delta) - \theta_R(\Delta - \nu') = \pi/2$, retirada da equação (2.6.13), de onde é possível mostrar que a condição a ser satisfeita é $\nu' > \sqrt{2}$ [Galatola 1991, Villar 2007b]. Em nosso experimento existe o interesse na medida conjunta de quadraturas de pelo menos dois feixes. A realização dessa medida se dá pela rotação síncrona das elipses de ruído dos dois campos, variando a dessintonia de cada cavidade concomitantemente.

Além disso, como veremos nos capítulos seguintes, temos o interesse em medir ruído dado pela soma ou subtração das quadraturas de pares formados pelos campos envolvidos em nosso sistema. Esses valores podem ser obtidos através das medidas dos ruídos individuais de cada quadratura dos campos, levando em conta os termos de correlação

2.6. DETEÇÃO AUTOHOMODINA

Figura 2.7: Curvas de ruído $S_R(\Delta, \nu')$ em função da dessintonia para diferentes valores de ν' . Círculos abertos verdes: $\nu' = 1$; Curva em azul: $\nu' = 2$; Tracejada: $\nu' = 4$. Foram utilizados $S_p(\nu') = 0.5$ e $S_p(\nu') = 2.0$.

simetrizados calculados a partir da expressão (2.6.13),

$$C_{\delta p_{R_1} \delta p_{R_2}} = \frac{1}{2} \langle \delta p_{R_1}(\Omega) \delta p_{R_2}(-\Omega) + \delta p_{R_1}(-\Omega) \delta p_{R_2}(\Omega) \rangle. \quad (2.6.17)$$

No caso de correlações cruzadas, entre amplitude e fase dos campos (2.6.16), as medidas realizadas em nosso experimento, mostram que as mesmas são aproximadamente nulas, justificando o fato de termos considerado $C_{pq} = 0$ para obter (2.6.15). Realizamos essas medidas mantendo a cavidade de um dos feixes longe da ressonância ($|\Delta| > 6$, figura 2.6), sendo registrados somente valores da quadratura amplitude, ao passo que variamos a dessintonia da cavidade do outro feixe, tendo acesso às duas quadraturas. Dessa forma conseguimos medir correlações dadas pela equação (2.6.16) entre as quadraturas amplitude e fase de dois feixes [Cassemiro 2008b].

Esta é a técnica que vem sendo utilizada em nosso grupo. Para maiores detalhes e uma análise minuciosa é fortemente recomendada a leitura das referências [Villar 2007b, Villar 2008]. No próximo capítulo falaremos sobre o fenômeno de interesse, o emaranhamento e os critérios que permitem identificá-lo em nosso sistema.

Capítulo 3

Critérios de Separabilidade

Um dos aspectos mais intrigantes e contra-intuitivos da mecânica quântica é certamente o *emaranhamento*. As primeiras investigações sobre este fenômeno surgem no trabalho proposto por Einstein, Podolski e Rosen (EPR) em 1935 [Einstein 1935] e têm como objetivo mostrar aspectos que fariam da mecânica quântica uma teoria incompleta, fazendo uso da definição de elemento de realidade e da impossibilidade de envio de sinais com velocidade maiores que a velocidade da luz. Em sua argumentação, eles consideram que se pudermos prever com certeza o valor de uma grandeza física, sem que o sistema seja perturbado, existe um elemento de realidade física correspondente àquela grandeza física.

Ainda neste artigo, Einstein, Podolsky e Rosen propuseram um experimento mental (*Gedankenexperiment*) consistido de duas partículas que interagem em um determinado intervalo de tempo e depois se separam de forma a não interagirem mais. Defendem também a hipótese de localidade, que afirma que o conhecimento total do sistema só é possível pelo acesso local a cada uma de suas partes, de tal modo que medidas realizadas em uma parte do sistema não interferem no que é real na outra parte remotamente distante. A motivação para as questões levantadas por EPR está no princípio da incerteza de Heisenberg. Segundo a mecânica quântica, existem grandezas que não podem ser medidas concomitantemente com precisão arbitrária, sendo denominadas conjugadas ou incompatíveis. Posição e momento são observáveis deste tipo.

No experimento proposto por EPR, as partículas permanecem com momento total $(p_1 + p_2)$ e posição relativa $(x_1 - x_2)$ bem definidos, de modo a permitir o seguinte raciocínio: se medirmos a posição da partícula 1, então a posição da partícula 2 é completamente determinada sem que haja perturbação nesta parte do sistema. No entanto se medirmos o momento da partícula 1 quem fica bem determinado é o momento da partícula 2, novamente, sem a necessidade de perturbá-la. Portanto, de alguma maneira, uma medida realizada na partícula 1 diria que grandeza associada a partícula 2 possui realidade física. A esta interpretação EPR atribuíram o nome *ação fantasmagórica à distância*, visto que não havendo interação entre as partículas nenhuma informação poderia ser trocada entre

elas. Além disso, se a separação entre as partículas fosse muito grande, como justificar o envio de informação de 1 para 2 de forma mais rápida que a luz? Estes questionamentos serviram de suporte para EPR afirmarem que a mecânica quântica seria uma teoria incompleta, faltando elementos de realidade em sua descrição.

No entanto, dentro do âmbito da mecânica quântica, nada pode ser afirmado a respeito de medidas que não foram realizadas [Peres 1978], carecendo o argumento de significado físico. Em resposta aos argumentos EPR, Bohr publicou, no mesmo ano e com o mesmo título [Bohr 1935], um artigo bastante hermético em que defende as previsões da mecânica quântica relacionadas às correlações existentes ao realizar medidas nas duas partículas.

Os argumentos utilizados por EPR ficaram por muito tempo restritos ao campo filosófico, pois não proporcionavam nenhuma previsão quantitativa. Coube a John S. Bell, no ano de 1964 [Bell 1964, Bell 1966], influenciado por David Bohm, criar um teorema que possibilitasse comparar as expectativas da mecânica quântica acerca das probabilidades conjuntas dos resultados de medições feitas por observadores separados e qualquer modelo “realista local”. Surgiram então as **desigualdades de Bell**, que ao serem violadas permitem verificar o caráter não-local da teoria quântica. Tal estudo leva em consideração variáveis ocultas sobre as quais não temos controle, ou devido à falta de técnicas experimentais ou simplesmente porque a Natureza não permite nosso acesso [Ballentine 1998].

Após a formulação das desigualdades de Bell algumas versões modificadas começaram a surgir [Clauser 1978] (desigualdade *CHSH*), adaptando as desigualdades de Bell a quantidades medidas em laboratório. Os primeiros experimentos foram realizados utilizando estados de polarização de fótons [Clauser 1978, Aspect 1982]. Outros testes dentro da ótica quântica foram realizados a fim de descartar a teoria de variáveis ocultas. O fenômeno de conversão paramétrica descendente [Ou 1988], que produz fótons aos pares, permitiu a violação das desigualdades de Bell [Aspect 1999], descartando a teoria de variáveis ocultas para descrever as correlações observadas.

Utilizando-se do mesmo processo de geração de fótons, foram feitos testes utilizando variáveis contínuas do campo eletromagnético [Reid 1989a, Ou 1992, Villar 2005], sendo fase e amplitude as grandezas analisadas. Estas quadraturas se mostram equivalentes a posição e momento de partículas, possibilitando a implementação de variáveis tipo-EPR.

Estamos interessados em medir essas correlações em sistemas descritos por variáveis contínuas, tentando demonstrar emaranhamento previsto em um sistema composto por dois feixes gerados pelo processo de conversão paramétrica descendente e um terceiro feixe que interage com estes dois [Villar 2006]. Para tanto, faz-se necessário o estudo de critérios de fácil acesso experimental e que permitam garantir, sem sombra de dúvidas, a existência dessa característica intrinsecamente quântica. Analisaremos aqui os critérios de positividade sob transposição parcial (PPT) elaborado por Peres [Peres 1996] para sistemas quânticos discretos compostos por dois subsistemas e a extensão do mesmo para variáveis contínuas realizada por Simon [Simon 2000]. Veremos também os critérios de

3.1. DEFINIÇÃO DE EMARANHAMENTO

soma de variâncias proposto por Duan *et. al.* e sua generalização obtida por van Loock e Furusawa [van Loock 2003].

3.1 Definição de Emaranhamento

Emaranhamento é um fenômeno que surge quando lidamos com sistemas compostos e, por conta disso, é comumente classificado de acordo com o número de constituintes. Por exemplo, um sistema do tipo EPR é um caso típico de emaranhamento *bipartite*, composto por duas partes. As definições formais encontradas na literatura dizem o que é emaranhamento definindo estados não-emaranhados. Formalmente, temos as seguintes definições[Rigolin 2005]¹:

Definição 1. Emaranhamento em Estados Puros

Seja um sistema quântico composto de N subsistemas tal que o espaço de Hilbert associado a ele é $H = \otimes_j^N H_j$, onde H_j é o espaço de Hilbert associado a cada subsistema. Se $|\Psi\rangle \in H$ é o estado que descreve este sistema, então ele **não** está emaranhado se, e somente se, podemos escrevê-lo como $|\Psi\rangle = \otimes_j^N |\Psi_j\rangle$, onde $|\Psi_j\rangle \in H_j$.

Exemplos:

Estados Não-Emaranhados	Estados Emaranhados
$ \Psi\rangle = 0\rangle \otimes 0\rangle$	$ \Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(00\rangle \pm 11\rangle)$
$ \Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(00\rangle \pm 01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} 0\rangle \otimes (0\rangle + 1\rangle)$	$ \Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(01\rangle \pm 10\rangle)$

Definição 2. Emaranhamento em Estados Mistos

Seja um sistema quântico composto de N subsistemas descrito por uma matriz densidade $\rho \in \otimes_j^N A_j$, onde A_j é o espaço de Hilbert formado por todos os operadores que atuam em H_j . Dizemos que ρ representa um sistema não emaranhado se, e somente se, ela pode ser escrita, para algum k , como uma soma de produtos diretos:

$$\rho = \sum_{i=0}^k p_i \rho_i^j = \sum_{i=0}^k p_i (\rho_i^1 \otimes \rho_i^2 \otimes \cdots \otimes \rho_i^{N-1} \otimes \rho_i^N)$$

onde $p_i > 0$, $\sum_{i=0}^k p_i = 1$ e $\rho_i^j \in A_j$.

¹Aqui usamos a notação $|0\rangle$ e $|1\rangle$ para um sistema de dois níveis qualquer. Podem representar, por exemplo, estados de polarização vertical e horizontal de fótons ou valores de spins $+1/2$ e $-1/2$.

Exemplos:

Estados Não-Emaranhados	Estados Emaranhados
$ \rho\rangle = \frac{1}{2} 00\rangle\langle 00 + \frac{1}{2} 11\rangle\langle 11 $	$\rho = \frac{1}{3} \Psi^-\rangle\langle \Psi^- + \frac{2}{3} \Phi^-\rangle\langle \Phi^- $
$ \rho\rangle = \frac{1}{2} 00\rangle\langle 00 + \frac{1}{2} 01\rangle\langle 01 + \frac{1}{2} 10\rangle\langle 10 + \frac{1}{2} 11\rangle\langle 11 $	

Uma maneira mais simples de visualizar a *Definição 1* é dizer que o estado puro do sistema global é fatorável se cada subsistema pode ser descrito por um estado puro. É neste sentido que surge uma idéia muito importante para o estudo do emaranhamento, *operações locais com comunicação clássica*, com a sigla em inglês LOCC³. Operações locais são operações que podem ser realizadas em cada subsistema separadamente e comunicação clássica faz referência a qualquer “canal clássico” de comunicação.

Dessa forma, podemos pensar em uma situação onde dois observadores (Alice e Bob) estejam distantes um do outro se comunicando através de algum canal clássico. Alice e Bob podem combinar uma sequência de operações a serem feitas em suas partes, afim de obter uma reconstituição do sistema global desejado. Neste sentido, não há correlações quânticas entre as partes, somente existe uma sequência de operações previamente combinadas que podem ser descritas classicamente. Dizemos então que estados emaranhados não podem ser gerados via LOCC. A Definição 2 é um caso geral desta situação, que pode ser vista como N pessoas separadas que recebem instruções de uma fonte comum. Usaremos essas definições nas sessões seguintes para estudar os critérios que permitem identificar a presença ou não de emaranhamento.

3.2 Positividade sob Transposição Parcial (PPT)

Se um estado puro viola alguma desigualdade de Bell pode-se afirmar que se trata de um estado emaranhado. No entanto, para estados mistos desigualdades de Bell podem não ser sensíveis ao emaranhamento [Horodecki M. 1995]. Portanto, é necessária a criação de novos critérios que permitam levar em conta estados não puros e que possam ser de fácil execução. Estas dificuldades motivaram Peres a criar um critério aplicável tanto em estados puros quanto em estados mistos [Peres 1996].

Como definido anteriormente, um sistema bipartite é separável se a matriz densidade que o descreve pode ser escrita na sua forma mais geral como

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B, \quad (3.2.1)$$

onde $p_i > 0$, $\sum_i p_i = 1$ e ρ_i^A e ρ_i^B são as matrizes densidades que descrevem os subsistemas A e B.

³Local Operations and Classical Communication.

3.2. POSITIVIDADE SOB TRANSPOSIÇÃO PARCIAL (PPT)

Partindo de propriedades de matrizes densidade [Cohen-Tannoudji 1977] e da definição anterior, Peres propõe um critério, baseado na transposição parcial da matriz densidade ρ , que pode ser assim enunciado:

Se a matriz ρ que descreve um sistema bipartite é separável, então o operador σ obtido pela transposição de um dos seus subsistemas (transposição parcial) é um operador positivo semidefinido (operador que possui todos os autovalores não negativos, $\sigma \geq 0$).

O ponto de partida para a demonstração desse teorema é mostrar que o operador transposição $\mathcal{T}$ é um mapa positivo [Rigolin 2005]. Isso significa que ao aplicarmos $\mathcal{T}$ em um operador positivo semidefinido $\mathcal{O}$, temos como resultado um operador $\mathcal{O}' = \mathcal{T}\mathcal{O}$ também positivo semidefinido. A operação de transposição implica em trocar os índices dos elementos de matriz, $\mathcal{T}\mathcal{O}_{ij} = \mathcal{O}_{ji}$. Para mostrarmos que $\mathcal{T}$ é um mapa positivo, vamos considerar a transformação $\mathcal{U}$ que diagonaliza $\mathcal{O}$. Como $\mathcal{O} \geq 0$ por definição, o operador diagonal $\mathcal{O}' = \mathcal{U}\mathcal{O}\mathcal{U}^\dagger$ é positivo semidefinido. Ao aplicarmos $\mathcal{T}$ em $\mathcal{O}'$ temos ainda $\mathcal{T}\mathcal{O}' \geq 0$, pois $\mathcal{O}'$ só possui elementos na diagonal principal. Isso implica em $\mathcal{T}\mathcal{O}' = \mathcal{T}(\mathcal{U}\mathcal{O}\mathcal{U}^\dagger) = \mathcal{T}(\mathcal{U}^\dagger)\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{T}(\mathcal{U})$ ². Se definirmos $\mathcal{V} = \mathcal{T}(\mathcal{U}^\dagger)$ e $\mathcal{V}^\dagger = \mathcal{T}(\mathcal{U})$, temos $\mathcal{T}\mathcal{O}' = \mathcal{V}\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{V}^\dagger \geq 0$. Mas $\mathcal{V}\mathcal{V}^\dagger = \mathcal{T}(\mathcal{U}^\dagger)\mathcal{T}(\mathcal{U}) = \mathcal{T}(\mathcal{U}\mathcal{U}^\dagger) = \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é uma matriz identidade. Então $\mathcal{V}$ é uma transformação unitária. Como transformações unitárias não mudam os autovalores de um operador e $\mathcal{V}\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{V}^\dagger \geq 0$, consequentemente $\mathcal{T}\mathcal{O} \geq 0$. Concluimos, então, que $\mathcal{T}$ é um mapa positivo.

Se fizermos uma transposição parcial no sistema A da equação (3.2.1), obtemos o operador

$$\sigma = \sum_i p_i (\rho_i^A)^T \otimes \rho_i^B. \quad (3.2.2)$$

Baseados na discussão do parágrafo anterior, sabemos que $(\rho_i^A)^T \geq 0$, pois ρ_i^A é hermitiano positivo semidefinido. Dessa forma, o operador σ pode ainda ser uma matriz densidade, mesmo que a transposição não tenha um significado físico. Portanto, a matriz σ deve fornecer *autovalores não negativos*, sendo esta a condição necessária que deve ser satisfeita para escrever ρ como uma soma de produtos diretos das matrizes ρ^A e ρ^B (equação (3.2.1)).

Outro ponto bastante importante desse critério é que os autovalores de σ são invariantes por transformações unitárias realizadas em ρ [Peres 1996]. Isso nos permite aplicar o critério PPT em qualquer representação da matriz densidade ρ , bastando checar a positividade dos autovalores de σ para verificar a existência ou não de emaranhamento.

Para darmos um dos exemplos vistos no artigo escrito por Peres, facilita ver o efeito da transposição parcial quando escrevemos explicitamente os elementos de matriz de ρ ,

$$\rho_{m\mu,n\nu} = \sum_i p_i (\rho_i^A)_{mn} \otimes (\rho_i^B)_{\mu\nu}, \quad (3.2.3)$$

²Aqui utilizamos a propriedade de transposição de produtos de matrizes, $\mathcal{T}(AB) = \mathcal{T}(B)\mathcal{T}(A)$.

sendo os índices latinos(gregos) referentes ao subsistema A(B). Temos então, de acordo com a equação (3.2.2), que os elementos da matriz σ serão

$$\sigma_{m\mu,n\nu} \equiv \rho_{n\mu,m\nu}. \quad (3.2.4)$$

Tomaremos um exemplo aplicando o critério a um sistema de partículas de spin $\frac{1}{2}$ descrito por um estado de Werner

$$\rho_W = x|\Psi\rangle^-\langle\Psi|^- + \frac{(1-x)}{4}I, \quad (3.2.5)$$

consistindo de uma fração simples x de singlete $|\Psi\rangle^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$ e $(1-x)$ de singlete misturada com proporções iguais das componentes de tripleto. Na base $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$, onde os índices 1 e 0 referem-se aos estados ortogonais *up* e *down*, respectivamente, temos

$$\rho_W = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+x}{4} & \frac{-x}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-x}{2} & \frac{1+x}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}. \quad (3.2.6)$$

Ao realizar a transposição parcial $\sigma_W = \rho_W^{T_A}$ obtemos

$$\sigma_W = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{4} & 0 & 0 & \frac{-x}{2} \\ 0 & \frac{1+x}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+x}{4} & 0 \\ \frac{-x}{2} & 0 & 0 & \frac{1-x}{4} \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

Após diagonalizar a matriz σ vemos que a mesma possui três autovalores iguais a $(1+x)/4$ e um igual a $(1-x)/3$. Portanto, para $x < 1/3$ temos todos os autovalores positivos. Se $x > 1/3 \approx 0,333$ temos um estado emaranhado. Em seu artigo, Peres argumenta que essa é uma restrição mais seletiva do que a imposta por critérios baseados nas desigualdades de Bell, $x < 1/\sqrt{2} \approx 0,707$. Portanto, devem existir estados emaranhados que não violam desigualdades de Bell.

O critério PPT proposto por Peres é muito útil na determinação de emaranhamento em estados bipartites com espaço de Hilbert discreto. A aplicação deste critério no âmbito das variáveis contínuas foi feita por Simon [Simon 2000]. Em seu artigo é demonstrado que o critério PPT continua válido para sistemas quânticos bipartites com variáveis contínuas, sendo ainda um critério necessário e suficiente quando os estados envolvidos são Gaussianos. Boas discussões a este respeito, com maior riqueza de detalhes sobre este critério e sua extensão para variáveis contínuas são apresentadas nas referências [Cassemiro 2008b, Rigolin 2005].

3.3 PPT em Variáveis Contínuas

O ponto central do trabalho de Simon foi a interpretação geométrica da transposição parcial como uma reflexão especular no espaço de fases, que permitiu obter relações de incerteza que devem ser obedecidas por todos os estados separáveis.

Seguindo a proposta de Simon e resultados apresentados nas referências [Rigolin 2005, Cassemiro 2008b], verificaremos este fato considerando um sistema bipartite cujos constituintes são descritos pelos operadores $\hat{a}_j = (\hat{q}_j + i\hat{p}_j)/\sqrt{2}$, $j = 1, 2$, onde q_j e p_j podem representar, por exemplo, operadores posição e momento³. Os operadores obedecem às regras usuais de comutação, $[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}$ e $[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$. Como estamos interessados em trabalhar no espaço de fase, é mais conveniente definir os vetores⁴

$$\hat{\xi} = (\hat{q}_1, \hat{p}_1, \hat{q}_2, \hat{p}_2), \quad \xi = (q_1, p_1, q_2, p_2), \quad (3.3.1)$$

para que as relações de comutação possam ser escritas em uma forma mais compacta:

$$[\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta] = i\Omega_{\alpha\beta} \quad , \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4; \\ \Omega = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3.2)$$

A distribuição de Wigner para um sistema biparte se relaciona com a matriz densidade da seguinte forma:

$$W(q, p) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 p' \langle p - p' | \rho | p + p' \rangle e^{2ip' \cdot q}, \quad (3.3.3)$$

onde $p = (p_1, p_2)$ e $q = (q_1, q_2)$.

Reescrevendo explicitamente a equação (3.3.3) e utilizando a forma separável (equação (3.2.1)) para a matriz densidade temos:

$$W(p, q) = \frac{1}{\pi^2} \sum_i \tilde{p}_i \int dp'_1 dp'_2 \langle p_1 - p'_1, p_2 - p'_2 | \rho_j^A \otimes \rho_j^B | p_1 + p'_1, p_2 + p'_2 \rangle \\ \times \exp[2i(q_1 p'_1 + q_2 p'_2)] \quad (3.3.4)$$

$$W(p, q) = \frac{1}{\pi^2} \sum_i \tilde{p}_i \int dp'_1 dp'_2 \langle p_1 - p'_1 | \rho_j^A | p_1 + p'_1 \rangle \langle p_2 - p'_2 | \rho_j^B | p_2 + p'_2 \rangle \\ \times \exp[2i(q_1 p'_1 + q_2 p'_2)]. \quad (3.3.5)$$

Realizando uma transposição parcial com relação ao sistema B, obtemos a seguinte função:

$$W^{T_B}(p, q) = \frac{1}{\pi^2} \sum_i \tilde{p}_i \int dp'_1 dp'_2 \langle p_1 - p'_1 | \rho_j^A | p_1 + p'_1 \rangle \langle p_2 + p'_2 | \rho_j^B | p_2 - p'_2 \rangle \\ \times \exp[2i(q_1 p'_1 + q_2 p'_2)]. \quad (3.3.6)$$

³As grandezas de interesse neste trabalho também são rotuladas por q e p , representando fase e amplitude respectivamente, conforme apresentado no capítulo anterior.

⁴A direita não utilizamos chapéus, pois estamos nos referindo às variáveis canônicas no espaço de fase.

Agora, para verificar o importante resultado obtido por Simon, basta que façamos uma mudança de variável $p'_2 \longrightarrow -p'_2$, implicando em

$$W^{TB}(p, q) = \frac{1}{\pi^2} \sum_i \tilde{p}_i \int dp'_1 dp'_2 \langle p_1 - p'_1 | \rho_j^A | p_1 + p'_1 \rangle \langle p_2 - p'_2 | \rho_j^B | p_2 + p'_2 \rangle \times \exp\{2i[q_1 p'_1 + (-q_2) p'_2]\}. \quad (3.3.7)$$

Nota-se que a equação (3.3.7) é equivalente à (3.3.5), a menos de um sinal invertido na variável q_2 . Daí concluímos que

$$W^{TB}(p_1, q_1, p_2, q_2) = W(p_1, q_1, p_2, -q_2). \quad (3.3.8)$$

Portanto, se ρ é separável, ao realizar uma transposição parcial relativa a um de seus subsistemas obtemos uma nova matriz densidade σ cuja função de Wigner é obtida da função de Wigner de ρ por uma reflexão especular da variável q_2 . Isso corresponde a

$$W(p_1, q_1, p_2, -q_2) = W(\Lambda\xi), \quad \Lambda = \text{diag}(1, 1, 1, -1). \quad (3.3.9)$$

Reescrevendo $\hat{\xi}$ como a soma do seu valor médio mais um termo de flutuação, $\hat{\xi} = \xi + \delta\hat{\xi}$, podemos calcular as correlações entre suas componentes, organizando-as numa matriz de covariância,

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \langle \{\delta\hat{\xi}_\alpha, \delta\hat{\xi}_\beta\} \rangle = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \{\delta\hat{\xi}_\alpha, \delta\hat{\xi}_\beta\} \rho \} \\ &= \int d^4\xi \delta\xi_\alpha \delta\xi_\beta W(\xi). \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Para que a matriz de covariância represente um sistema físico ela deve ser *real positiva* e *simétrica*, isso implica

$$\langle \delta\hat{\xi}_\alpha \delta\hat{\xi}_\beta \rangle = \text{tr} \left(\hat{\rho} \frac{[\delta\hat{\xi}_\alpha, \delta\hat{\xi}_\beta]}{2} + \hat{\rho} \frac{\{\delta\hat{\xi}_\alpha \delta\hat{\xi}_\beta\}}{2} \right) = V_{\alpha\beta} + i\Omega_{\alpha\beta}. \quad (3.3.11)$$

Como a matriz $\hat{\rho}$ é positiva e os elementos de $\delta\hat{\xi}$ são hermitianos, obtemos

$$V + i\Omega \geq 0, \quad (3.3.12)$$

como consequência do princípio da incerteza [César 2008]. Devemos agora saber como a transformação (3.3.8) afeta essa desigualdade, estabelecendo uma condição a ser satisfeita por todos os estados separáveis. Vamos partir da definição da matriz de covariância, porém assumindo que os valores médios $\langle \hat{\xi}_\alpha \rangle$ são nulos, uma vez que sempre é possível realizar um deslocamento do estado no espaço de fase, o que equivale a fazer uma translação no espaço de fase. Sendo $\langle \hat{\xi}_\alpha \rangle = 0$ a equação (3.3.10) pode ser reescrita como

$$V_{\alpha\beta} = \int d^4\xi \xi_\alpha \xi_\beta W(\xi). \quad (3.3.13)$$

3.3. PPT EM VÁRIÁVEIS CONTÍNUAS

Aplicando a transposição parcial obtemos

$$\tilde{V}_{\alpha\beta} = \int d^4\xi \xi_\alpha \xi_\beta W(\Lambda\xi) \quad (3.3.14)$$

$$= \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \xi_\alpha \xi_\beta W(\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\xi_4). \quad (3.3.15)$$

Para ver o efeito da transposição parcial na matriz de covariância, realizamos uma mudança de variável $\xi_4 \rightarrow -\xi_4$ e escrevemos $\xi_\alpha = \sum_\mu \Lambda_{\alpha\mu} \xi_\mu$ e $\xi_\beta = \sum_\nu \Lambda_{\beta\nu} \xi_\nu$, nos dando

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\alpha\beta} &= \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \sum_\mu \Lambda_{\alpha\mu} \xi_\mu \sum_\nu \Lambda_{\beta\nu} \xi_\nu W(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\ &= \sum_\mu \Lambda_{\alpha\mu} \int d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 \xi_\mu \xi_\nu W(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \sum_\nu \Lambda_{\beta\nu} \\ &= \sum_\mu \sum_\nu \Lambda_{\beta\nu} \Lambda_{\alpha\mu} V_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

Isso equivale a dizer que

$$\tilde{V} = \Lambda V \Lambda \quad (3.3.17)$$

e

$$V = \Lambda \tilde{V} \Lambda, \quad (3.3.18)$$

pois $\Lambda^2 = I$.

Se fizermos uma reflexão especular parcial na função de Wigner $W(\xi)$ que caracteriza um sistema ρ , o resultado pode ainda ser uma função de Wigner válida $W(\Lambda\xi)$, representando um estado σ . Portanto, para um estado separável a equação

$$\tilde{V} + i\Omega \geq 0, \quad (3.3.19)$$

também deve ser satisfeita. Caso $\tilde{V}$ viole essa desigualdade, o estado descrito por ela não possui significado físico.

Utilizando a equação (3.3.18) e sabendo que $\Lambda^2 = I$ obtemos uma condição *necessária* para a separabilidade,

$$V + i\tilde{\Omega} \geq 0, \quad \Lambda\Omega\Lambda = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix}. \quad (3.3.20)$$

Dessa forma, basta calcular os autovalores da matriz de covariância que descreve o estado ρ somada com a matriz $i\tilde{\Omega}$. Se algum autovalor for negativo, temos um estado emaranhado.

Outra desigualdade pode ser obtida quando analisamos a equação (3.3.20) realizando transformações simpléticas na matriz $\tilde{V}$ [Cassemiro 2008b]. Uma transformação simplética pode ser entendida como uma transformação, $\hat{\xi} \rightarrow \hat{\xi}' = S\hat{\xi}$, que mantém a relação de comutação $[\hat{\xi}_\alpha, \hat{\xi}_\beta] = i\Omega_{\alpha\beta}$ válida para as variáveis $\hat{\xi}'$, satisfazendo a equação

$$S\Omega S^T = \Omega. \quad (3.3.21)$$

O Teorema de Williamson [Williamson 1936] afirma que para qualquer matriz $V_{4 \times 4}$ real, simétrica e positiva existe uma transformação simplética $S_w \in S_p(4, R)$ para a qual $SVS^T = V'$, onde V' é uma matriz diagonal $V' = \text{diag}\{\nu_1, \nu_1, \nu_2, \nu_2\}$ (conhecida como forma normal de Williamson). Os autovalores ν_k são os autovalores simpléticos da matriz V calculados através da expressão

$$\nu_k = (\text{Autovalores}[\mathcal{V}])^{1/2}, \quad \mathcal{V} = [-V\Omega^2]. \quad (3.3.22)$$

Tendo em vista este teorema, vamos aplicar a transformação simplética S_w na equação (3.3.19):

$$S_w(\tilde{V} + i\Omega)S_w^T = \underbrace{S_w\tilde{V}S_w^T}_{V'} + i\Omega \geq 0 \quad (3.3.23)$$

Como $V' = \text{diag}\{\nu_1, \nu_1, \nu_2, \nu_2\}$, encontrar os autovalores λ da expressão acima é relativamente simples, visto que

$$\det[V' + i\Omega] = \det \begin{pmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_N \end{pmatrix} = \det(A_1) \det(A_2) \dots \det(A_N) = 0 \quad (3.3.24)$$

em que

$$\det(A_k) = \det \begin{pmatrix} \nu_k - \lambda & i \\ -i & \nu_k - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.3.25)$$

Como a soma de matrizes (3.3.23) requer $\lambda \geq 0$ para um estado separável, é imposta a seguinte restrição aos autovalores simpléticos,

$$\nu_k \geq 1, \quad \forall k, \quad \text{ou} \quad \nu^{\min} \geq 1. \quad (3.3.26)$$

Temos agora um critério de fácil implementação que permite identificar se uma dada matriz de covariância V descreve um estado emaranhado ou não. Além disso, o critério PPT se torna necessário e suficiente para estados gaussianos bipartites, como demonstrado por Simon [Simon 2000], também fazendo uso de transformações simpléticas. Usaremos este critério na análise dos nossos dados, visto que os feixes do nosso sistema são gaussianos, e outros critérios experimentalmente mais acessíveis que serão discutidos adiante.

3.4 Soma de Variâncias

Existem outros critérios que permitem verificar se um estado é emaranhado ou não sem que haja necessidade de medir todos os elementos da matriz de covariância, sendo de implementação experimental mais simples. Este é o caso dos critérios da soma de variâncias [Duan 2000, van Loock 2003].

3.4.1 Caso Bipartite

Primeiramente desenvolveremos o critério DGCZ [Duan 2000] como descrito no próprio artigo. Como vimos anteriormente, o estado $\hat{\rho}$ é separável somente se puder ser escrito como

$$\hat{\rho}_{sep} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^1 \otimes \hat{\rho}_i^2, \quad (3.4.1)$$

onde $p_i > 0$, $\sum_i p_i = 1$ e $\hat{\rho}_i^1$ e $\hat{\rho}_i^2$ são as matrizes densidades que descrevem os subsistemas 1 e 2. Definimos variáveis $\hat{u}$ e $\hat{v}$ como a diferença das posições e soma dos momentos, respectivamente, como proposto por Einstein *et al.* [Einstein 1935],

$$\hat{u} = \frac{\hat{x}_1 - \hat{x}_2}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \hat{v} = \frac{\hat{p}_1 + \hat{p}_2}{\sqrt{2}}. \quad (3.4.2)$$

Sabemos que estas variáveis podem possuir variância nula, visto que as posições e momentos relativos podem ser completamente determinados como argumentado por Bohr [Bohr 1935]. Portanto, espera-se um limite para a soma de variâncias no caso de um sistema completamente separável, sendo possível estabelecer um critério necessário para a identificação de um estado emaranhado.

O cálculo da variância de $\hat{u}$ para o estado descrito por (3.4.1) nos dá

$$\begin{aligned} \Delta_{sep}^2 \hat{u} &= \langle \hat{u}^2 \rangle_\rho - \langle \hat{u} \rangle_\rho^2 \\ &= \sum_i \frac{\eta_i}{2} \langle (\hat{x}_1 - \hat{x}_2)^2 \rangle_i - \langle \hat{u} \rangle_\rho^2 \\ &= \sum_i \frac{\eta_i}{2} [\langle \hat{x}_1^2 \rangle_i - 2\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_i + \langle \hat{x}_2^2 \rangle_i] - \langle \hat{u} \rangle_\rho^2, \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

onde usamos a média em $\hat{\rho}$, $\langle A \rangle_\rho = \sum_i \eta_i \langle \Psi_i | A | \Psi_i \rangle = Tr\{\hat{\rho}A\}$, sendo A um operador qualquer. A mesma expressão é obtida para $\Delta_{sep}^2 \hat{v}$ resultando na soma

$$\begin{aligned} \Delta_{sep}^2 \hat{u} + \Delta_{sep}^2 \hat{v} &= \sum_i \frac{\eta_i}{2} [\langle \hat{x}_1^2 \rangle_i + \langle \hat{x}_2^2 \rangle_i + \langle \hat{p}_1^2 \rangle_i + \langle \hat{p}_2^2 \rangle_i \\ &\quad - 2\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_i + 2\langle \hat{p}_1 \hat{p}_2 \rangle_i] - \langle \hat{u} \rangle_\rho^2 - \langle \hat{v} \rangle_\rho^2. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Até este ponto, nenhum cálculo foi feito levando em conta a separabilidade do sistema, sendo um desenvolvimento válido para qualquer matriz densidade $\hat{\rho}$. Para explorar a forma do estado (3.4.1) reescrevemos a equação anterior como

$$\begin{aligned} \Delta_{sep}^2 \hat{u} + \Delta_{sep}^2 \hat{v} &= \frac{1}{2} (\Delta_\rho^2 \hat{x}_1 + \Delta_\rho^2 \hat{x}_2 + \Delta_\rho^2 \hat{p}_1 + \Delta_\rho^2 \hat{p}_2) \\ &\quad - 2(\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_i - \langle \hat{x}_1 \rangle_i \langle \hat{x}_2 \rangle_i) + 2(\langle \hat{y}_1 \hat{y}_2 \rangle_i - \langle \hat{y}_1 \rangle_i \langle \hat{y}_2 \rangle_i) \\ &\quad + \sum_i \frac{\eta_i}{2} \langle \hat{u} \rangle_i^2 - \left[\sum_i \frac{\eta_i}{2} \langle \hat{u} \rangle_i \right]^2 + \sum_i \frac{\eta_i}{2} \langle \hat{v} \rangle_i^2 - \left[\sum_i \frac{\eta_i}{2} \langle \hat{v} \rangle_i \right]^2. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

A separabilidade implica a igualdade $\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle_i = \langle \hat{x}_1 \rangle_i \langle \hat{x}_2 \rangle_i$ e $\langle \hat{y}_1 \hat{y}_2 \rangle_i = \langle \hat{y}_1 \rangle_i \langle \hat{y}_2 \rangle_i$, pois

$$\text{Tr}\{\hat{x}_1 \hat{x}_2 \hat{\rho}_{\text{sep}}\} = \sum_i \eta_i \text{Tr}\{\hat{x}_1 \hat{x}_2 [\hat{\rho}_i^1 \otimes \hat{\rho}_i^2]\} = \sum_i \eta_i \text{Tr}\{\hat{x}_1 \hat{\rho}_i^1\} \text{Tr}\{\hat{x}_2 \hat{\rho}_i^2\}, \quad (3.4.6)$$

anulando a segunda linha da equação precedente. Além disso, o princípio da incerteza, $\Delta^2 \hat{x}_j \Delta^2 \hat{p}_j \geq \frac{1}{4} |[\hat{x}_j, \hat{p}_j]|^2$, impõe um limite inferior para a soma das variâncias de $\hat{x}$ e $\hat{p}$, $\Delta^2 \hat{x}_j + \Delta^2 \hat{p}_j \geq |[\hat{x}_j, \hat{p}_j]|$, e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, $(\sum_i \eta_i) (\sum_i \frac{\eta_i}{2} \langle \hat{u} \rangle_i^2) \geq (\sum_i \frac{\eta_i}{2} \langle \hat{u} \rangle_i)^2$, a última linha da equação (3.4.5) possui limite inferior nulo, o que permite escrever

$$\Delta_{\text{sep}}^2 \hat{u} + \Delta_{\text{sep}}^2 \hat{v} \geq 2. \quad (3.4.7)$$

Obtemos então desigualdade cuja violação é uma condição suficiente para mostrar a inseparabilidade de um sistema, pois todos os sistemas que a violam são emaranhados ainda que o contrário não seja garantido. Com a escolha de pesos apropriados $\hat{u} = |a| \hat{x}_1 - \hat{x}_2/a$ e $\hat{v} = |a| \hat{p}_1 + \hat{p}_2/a$, a real não nulo, pode-se demonstrar que para estados Gaussianos os critérios de Duan e PPT-Simon são equivalentes [Horodecki R. 2007], sendo ainda, se violados, condições *necessárias* e *sucientes* para inseparabilidade [Duan 2000]. Vejamos agora a extensão desse critério, proposta por van Loock e Furusawa [van Loock 2003] para o caso tripartite.

3.4.2 Caso Tripartite

Testes de separabilidade do sistema podem ser feitos dividindo-o em partições menores, verificando se existe emaranhamento entre as diferentes partes [Hyllus 2006]. Podemos então estender o critério acima para o caso de sistemas compostos por mais de dois subsistemas [van Loock 2003]. Discutiremos aqui o caso tripartite que terá aplicação direta em nosso sistema, discutido no capítulo seguinte. Para esta análise vamos definir as novas variáveis

$$\hat{u} = h_1 \hat{x}_1 + h_2 \hat{x}_2 + h_3 \hat{x}_3 \quad \text{e} \quad \hat{v} = g_1 \hat{p}_1 + g_2 \hat{p}_2 + g_3 \hat{p}_3, \quad (3.4.8)$$

onde h_j e g_j são constantes reais livres mas que devem ser escolhidas de acordo com o sistema físico estudado. Considerando as formas biseparáveis do sistema

$$\hat{\rho}_{\text{bisep1}} = \sum_n \eta_n \hat{\rho}_n^{(1)} \otimes \hat{\rho}_n^{(2,3)}, \quad (3.4.9)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bisep2}} = \sum_n \eta_n \hat{\rho}_n^{(2)} \otimes \hat{\rho}_n^{(1,3)}, \quad (3.4.10)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bisep3}} = \sum_n \eta_n \hat{\rho}_n^{(3)} \otimes \hat{\rho}_n^{(1,2)}, \quad (3.4.11)$$

e realizando cálculos análogos aos que nos levaram à equação (3.4.5), obtemos um conjunto de três desigualdades que devem ser satisfeitas pelos sistemas descritos pelas equações

3.4. SOMA DE VARIÂNCIAS

(3.4.9)-(3.4.11), [van Loock 2003]

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p1} \implies \Delta_{\hat{\rho}_{b1}}^2 \hat{u} + \Delta_{\hat{\rho}_{b1}}^2 \hat{v} \geq 2 (|h_1 g_1| + |h_2 g_2 + h_3 g_3|) , \quad (3.4.12)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p2} \implies \Delta_{\hat{\rho}_{b2}}^2 \hat{u} + \Delta_{\hat{\rho}_{b2}}^2 \hat{v} \geq 2 (|h_2 g_2| + |h_1 g_1 + h_3 g_3|) , \quad (3.4.13)$$

$$\hat{\rho}_{\text{bise}p3} \implies \Delta_{\hat{\rho}_{b3}}^2 \hat{u} + \Delta_{\hat{\rho}_{b3}}^2 \hat{v} \geq 2 (|h_3 g_3| + |h_1 g_1 + h_2 g_2|) . \quad (3.4.14)$$

A violação da desigualdade (3.4.12) por exemplo, nos diz que o sistema 1 está emaranhado com o restante, valendo o mesmo raciocínio para as demais. Para um sistema completamente separável

$$\hat{\rho}_{\text{sep}} = \sum_n \eta_n \hat{\rho}_n^{(1)} \otimes \hat{\rho}_n^{(2)} \otimes \hat{\rho}_n^{(3)} , \quad (3.4.15)$$

vale a desigualdade

$$\Delta_{\hat{\rho}_{\text{sep}}}^2 \hat{u} + \Delta_{\hat{\rho}_{\text{sep}}}^2 \hat{v} \geq 2 (|h_1 g_1| + |h_2 g_2| + |h_3 g_3|) . \quad (3.4.16)$$

Já um operador densidade *qualquer* obedece à condição

$$\Delta_{\hat{\rho}}^2 \hat{u} + \Delta_{\hat{\rho}}^2 \hat{v} \geq 2 (|h_1 g_1| + |h_2 g_2 + h_3 g_3|) . \quad (3.4.17)$$

As desigualdades (3.4.16) e (3.4.17) são muito importantes para determinarmos os valores das constantes h_j e g_j que otimizam (3.4.12)-(3.4.14). O raciocínio que será empregado aqui é o mesmo desenvolvido na referência [Villar 2007b]. Serão definidos valores que anulam a desigualdade (3.4.17) de modo a obtermos uma maior restrição em (3.4.16). O primeiro conjunto de valores escolhido é $h_1 = -h_2 = g_1 = g_2 = 1$ e $h_3 = 0$. Isso anula o lado direito da desigualdade (3.4.17) e para o caso de um sistema totalmente separável temos

$$\Delta_{\hat{\rho}_{\text{sep}}}^2 (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \Delta_{\hat{\rho}_{\text{sep}}}^2 (\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + g_3 \hat{p}_3) \geq 4 , \quad (3.4.18)$$

cujas violação é condição suficiente para mostrar a existência de emaranhamento no sistema.

Substituindo os valores escolhidos nas equações (3.4.12)-(3.4.14), obtemos

$$\Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p12}}^2 (\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p12}}^2 (\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + g_3 \hat{y}_3) \geq 4 , \quad (3.4.19)$$

$$\Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p13}}^2 (\hat{x}_1 + \hat{x}_3) + \Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p13}}^2 (\hat{y}_1 - \hat{y}_3 + g_2 \hat{y}_2) \geq 4 , \quad (3.4.20)$$

$$\Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p23}}^2 (\hat{x}_2 + \hat{x}_3) + \Delta_{\hat{\rho}_{\text{bise}p23}}^2 (\hat{y}_2 - \hat{y}_3 + g_1 \hat{y}_1) \geq 0 . \quad (3.4.21)$$

A última desigualdade não permite fazer nenhuma afirmação quanto a existência ou não de emaranhamento, pois trata-se de uma condição que deve ser satisfeita por qualquer estado separável. As duas primeiras, quando violadas, asseguram que o estado do sistema não pode ser representado pelas formas biseparáveis $\hat{\rho}_{\text{bise}p1}$ e $\hat{\rho}_{\text{bise}p2}$. Utilizando o mesmo raciocínio ao escolher $h_1 = h_3 = g_1 = -g_3 = 1$ e $h_2 = 0$, obtemos desigualdades similares

às (3.4.21)-(3.4.21) cuja violação elimina os estados separáveis $\hat{\rho}_{bisep1}$ e $\hat{\rho}_{bisep3}$ sem que se possa afirmar nada a respeito (3.4.10). Outra escolha é $h_2 = h_3 = g_2 = -g_3 = 1$ e $h_1 = 0$, que dessa vez só não traz informação acerca da forma $\hat{\rho}_{bisep1}$. Esse conjunto de escolhas, possibilita formar um conjunto de três desigualdades que devem ser satisfeitas por qualquer estado biseparável,

$$\Delta_{\hat{\rho}_{bisep12}}^2(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) + \Delta_{\hat{\rho}_{bisep12}}^2(\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + g_3\hat{p}_3) \geq 4, \quad (3.4.22)$$

$$\Delta_{\hat{\rho}_{bisep13}}^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_3) + \Delta_{\hat{\rho}_{bisep13}}^2(\hat{p}_1 - \hat{p}_3 + g_2\hat{p}_2) \geq 4, \quad (3.4.23)$$

$$\Delta_{\hat{\rho}_{bisep23}}^2(\hat{x}_2 + \hat{x}_3) + \Delta_{\hat{\rho}_{bisep23}}^2(\hat{p}_2 - \hat{p}_3 + g_1\hat{p}_1) \geq 4. \quad (3.4.24)$$

Essas desigualdades possibilitam a caracterização de emaranhamento tripartite através da análise de formas parcialmente separáveis. É importante notar a presença de parâmetros livres g_j que permitem minimizar o lado direito das desigualdades, tornando-as mais sensíveis a estados emaranhados. Tais parâmetros dependem do sistema físico estudado e trazem consigo correções oriundas do terceiro subsistema ao estado emaranhado bipartite dos outros dois [Villar 2007b, Cassemiro 2008b]. Estes são os critérios de separabilidade que serão utilizados em nosso sistema, descrito no próximo capítulo. Aplicaremos os critérios discutidos aqui, identificando a presença de emaranhamento bipartite [Villar 2005] e tripartite entre os campos produzidos pelo OPO, observado pela primeira vez neste trabalho.

Capítulo 4

O Oscilador Paramétrico Ótico

Um Oscilador Paramétrico Ótico (OPO) (figura 4.1) consiste essencialmente de uma cavidade ótica e um cristal de susceptibilidade não-linear ($\chi^{(2)}$). Nele existe a conversão de um feixe de entrada (denominado bombeio) em dois outros feixes (denominados sinal e complementar) de frequências mais baixas (ω_1 e ω_2) devido à interação não ressonante com o meio não-linear.

Figura 4.1: Oscilador Paramétrico Ótico

Por causa do princípio de conservação de energia, a soma das frequências dos feixes produzidos deve ser igual à frequência do feixe de bombeio,

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_0. \quad (4.0.1)$$

A cavidade ótica é responsável pela oscilação do sistema e seleção dos modos. O cristal não-linear atua como meio de ganho de amplitude para os feixes sinal e complementar com a consequente diminuição da amplitude do feixe de bombeio. Quando o ganho total supera as perdas totais a produção de feixes tem início. Sendo as perdas independentes do campo de entrada e o ganho dependente deste, a oscilação só inicia quando o feixe de bombeio atinge uma potência característica, denominada *potência de limiar*. Isso pode ser visto no tratamento clássico feito por Debuisschert *et. al.* [Debuisschert 1993] para o OPO tipo-II (sinal e complementar com polarizações ortogonais).

Uma das grandes vantagens do OPO é a liberdade de escolha da frequência dos feixes de saída, que pode ser realizada mudando o acordo de fase com o cristal não-linear ou simplesmente alterando a frequência do feixe de bombeio. Por conta disso, afirma-se que

o OPO é um sistema sintonizável. Além disso, é uma fonte de estados não clássicos da luz, que produz feixes não degenerados em frequência acima do limiar e vácuo comprimido abaixo do limiar de oscilação, apresentando correlações quânticas nos dois casos.

As correlações quânticas podem ser entendidas quando analisamos o campo em termos de fótons. Um par de fótons dos feixes sinal e complementar é produzido pela aniquilação de um fóton do feixe de bombeio. Estes fótons permanecem na cavidade, em média, durante um tempo τ_{cav} , portanto, no domínio da frequência, o ruído na diferença das intensidades dos campos deve apresentar compressão para frequências abaixo de τ_{cav}^{-1} . Foi observada experimentalmente por Heidmann *et. al* [Heidmann 1987] uma compressão na subtração das intensidades cerca de 30% abaixo do *shot-noise*, o que motivou o nome “feixes gêmeos” para sinal e complementar. Abaixo do limiar, a correlação quântica entre as quadraturas foi medida por Wu *et. al.* [Wu 1986]. Neste caso existe a produção de vácuo comprimido, onde o número de fótons é muito pequeno, por meio do processo de conversão paramétrica degenerada.

Um ano mais tarde, foi prevista a existência de correlações quânticas envolvendo as fases dos campos [Reid 1988], levando a primeira previsão de emaranhamento entre os feixes gêmeos, demonstrado experimentalmente em um OPO degenerado em frequência abaixo do limiar [Ou 1992] e acima do limiar para o caso não degenerado [Villar 2005]. Além disso, foi teoricamente previsto por nosso grupo a existência de emaranhamento entre os três campos produzidos pelo OPO, feixes sinal, complementar e bombeio refletido [Villar 2006].

Neste capítulo apresentaremos as equações que descrevem quanticamente o OPO e o estudo das flutuações quânticas dos campos em sua forma linearizada. Aplicaremos os critérios de emaranhamento estudados no capítulo anterior ao OPO ideal (dessintonia e perdas espúrias nulas), mostrando teoricamente a existência de emaranhamento bipartite e tripartite, já estudada em detalhes nas referências [Cassemiro 2008b, Villar 2007b]. Por fim, apresentaremos um modelo para o excesso de ruído baseado nas flutuações da permissividade do cristal, induzidas por vibrações na rede cristalina, que permite obter bom acordo entre a teoria e os resultados experimentais.

4.1 Descrição teórica do OPO

No OPO a fonte externa de energia, feixe de bombeio, tem seus fótons aniquilados gerando fótons aos pares, podendo acontecer o processo inverso. A Hamiltoniana que descreve a interação dos campos através da não-linearidade $\chi^{(2)}$ é dada por [Walls e Milburn 1995]

$$\hat{H}_I = 2i\hbar \frac{\chi}{\tau} (\hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1 \hat{a}_2 - \hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger), \quad (4.1.1)$$

onde τ é o tempo que um fóton leva para dar uma volta completa dentro da cavidade. O primeiro termo descreve a aniquilação do fóton do feixe de bombeio com a consequente

4.1. DESCRIÇÃO TEÓRICA DO OPO

criação do par de fótons nos modos sinal e complementar, em que a_j e $a_j^\dagger$ são os operadores de criação e aniquilação, com $j \in \{0, 1, 2\}$ referente aos modos bombeio, sinal e complementar, respectivamente.

É necessário escrever também a Hamiltoniana que representa a interação entre os campos de bombeio incidente e intracavidade. Essa é dada por

$$\hat{H}_{\text{in}} = i\hbar \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{\tau} \alpha_0^{\text{in}} (\hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger), \quad (4.1.2)$$

em que α_0^{in} é a amplitude real que representa o feixe de bombeio incidente.

Além disso, temos ainda que levar em consideração a Hamiltoniana dos três modos quantizados individualmente, escrita na representação de interação,

$$\hat{H}_j = \hbar \frac{2\gamma'_j}{\tau} \Delta_j \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j, \quad (4.1.3)$$

onde $\Delta_j = (\omega_j - \omega_{cj})/\delta\omega_{cj}$ é a dessintonia entre a frequência da cavidade (ω_{cj}) mais próxima da frequência do modo oscilante (ω_j), normalizada pela largura de banda da cavidade ($\delta\omega_{cj}$). Os coeficientes γ_j presentes nas duas Hamiltonianas anteriores representam as perdas geradas pelo espelho de acoplamento, iguais à metade das transmissões dos espelhos para cada modo, $T = 2\gamma_j$. Em nosso experimento, os feixes gêmeos possuem uma diferença de 2,5 nm entre seus comprimentos de onda, portanto, considerar $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ nos cálculos não afeta as conclusões. Definimos as perdas totais como $\gamma'_j = \gamma_j + \mu_j$, onde μ_j representa as perdas espúrias no sistema.

A evolução do sistema é dada pela equação mestra

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [(\hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_I + \hat{H}_{\text{in}}), \hat{\rho}] + \sum_j \hat{\Lambda}_j \hat{\rho}, \quad (4.1.4)$$

$$\hat{\Lambda}_j \hat{\rho} = \frac{\gamma'_j}{\tau} (2\hat{a}_j \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger - \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j), \quad (4.1.5)$$

que nos dá a evolução do operador densidade. O último termo, operador de Lindblad $\hat{\Lambda}_j$, está associado às perdas para cada modo do campo através do acoplamento do sistema com um reservatório composto por infinitos osciladores harmônicos [Gardiner 1991].

Para resolver a equação (4.1.4) trataremos a matriz densidade como uma distribuição de quase-probabilidade, reescrevendo-a na representação de Wigner. Isso nos permite substituir os operadores a e $a^\dagger$ por amplitudes complexas através das relações de corre-

spondências [Gardiner 1991, Martinelli 2002]. Feito isso, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W(\vec{\alpha}) = & \left[\sum_j \gamma_j (1 + i\Delta_j) \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_j^*} \alpha_j^* - \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \alpha_j \right) \right. \\ & + 2\chi \left(\alpha_1 \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} + \alpha_1^* \alpha_2^* \frac{\partial}{\partial \alpha_0} - \alpha_0 \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - \alpha_0^* \alpha_1^* \frac{\partial}{\partial \alpha_2^*} - \alpha_0 \alpha_2^* \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \alpha_0^* \alpha_2^* \frac{\partial}{\partial \alpha_1^*} \right) \\ & \left. - \sqrt{2\gamma_0} \alpha_{in} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_0^*} + \frac{\partial}{\partial \alpha_0} \right) + \sum_j \gamma_j' \frac{\partial^2}{\partial \alpha_j \alpha_j^*} - \frac{\chi}{2} \left(\frac{\partial^3}{\partial \alpha_0^* \alpha_1^* \alpha_2^*} + \frac{\partial^3}{\partial \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2} \right) \right] W(\vec{\alpha}). \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

Desprezando o termo de derivada terceira, obtemos uma equação de Fokker-Planck. A exclusão desse termo pode ser justificada pelo fato de estarmos lidando com estados gaussianos, que torna a influência do termo superior desprezível. Uma prova disso pode ser encontrada na referência [Villar 2007a], onde foi feita a análise completa utilizando a representação P-positiva. Os resultados se mostraram equivalentes aos aqui apresentados. Sabemos ainda que a equação de Fokker-Planck para $W(\vec{\alpha})$ é equivalente a um conjunto de equações de Langevin para as variáveis α_j . As equações obtidas são

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha_0 = -\gamma_0' (1 - i\Delta_0) \alpha_0 - 2\chi \alpha_1 \alpha_2 + \sqrt{2\gamma_0} \alpha_0^{in} + \sqrt{2\mu_0} \delta v_0, \quad (4.1.7)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha_1 = -\gamma_1' (1 - i\Delta) \alpha_1 + 2\chi \alpha_0 \alpha_2^* + \sqrt{2\gamma} \delta u_1 + \sqrt{2\mu} \delta v_1, \quad (4.1.8)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha_2 = -\gamma_2' (1 - i\Delta) \alpha_2 + 2\chi \alpha_0 \alpha_1^* + \sqrt{2\gamma} \delta u_2 + \sqrt{2\mu} \delta v_2, \quad (4.1.9)$$

em que os termos δv_j e δu_j são as flutuações do vácuo acopladas ao sistema devido às perdas espúrias e à transmissão dos espelhos, respectivamente. Para o feixe de bombeio, o termo δu_0 é substituído pela amplitude complexa α_0^{in} , que traz consigo flutuações acrescidas pelo feixe de bombeio incidente, que podem ser maiores ou iguais ao ruído padrão. Como estamos interessados em tratar as flutuações quânticas do campo, vamos fazer uma análise linearizada, que além de permitir o estudo do ruído, possibilita o estudo dos valores estacionários dos campos. Faz-se isso escrevendo as amplitudes α_j como a soma de um termo estacionário mais uma flutuação,

$$\alpha_j = \bar{\alpha} + \delta \alpha_j, \quad \alpha = \langle \bar{\alpha}_j \rangle = p_j e^{i\varphi_j}, \quad (4.1.10)$$

onde as fases φ_j são tomadas em relação à fase do feixe de bombeio incidente (φ_0^{in}), escolhida nula. Obtidas as equações de Langevin, podemos estudar o caso estacionário, que permitirá definir grandezas importantes que serão utilizadas no capítulo 5 e as flutuações quânticas dos campos produzidos pelo OPO.

4.2 Soluções Estacionárias

Ao tomar a média temporal das equações (4.1.7)-(4.1.9) obtemos as seguintes equações para os estados estacionários

$$\gamma'_0(1 - i\Delta)p_0 e^{i\varphi_0} + 2\chi p^2 e^{i\varphi_+} - \sqrt{2\gamma_0} p_0^{in} = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\gamma'(1 - i\Delta) - 2\chi p_0 e^{-i(\varphi_0 - \varphi_+)} = 0. \quad (4.2.2)$$

Como consideramos perdas iguais para o feixe sinal e complementar, assumimos que $p_1 = p_2 = p$ e definimos $\varphi_+ = \varphi_1 + \varphi_2$.

Da equação (4.2.2) obtemos a intensidade do feixe de bombeio intracavidade,

$$p_0^2 = \frac{\gamma'^2}{4\chi^2}(1 + \Delta^2), \quad (4.2.3)$$

deixando claro que a intensidade deste campo permanece constante dentro da cavidade, qualquer que seja a potência do feixe de bombeio incidente, acima do limiar de oscilação. Podemos entender este fato pensando no próprio fenômeno de conversão paramétrica, pois ao aumentar a potência do feixe de entrada mais fótons gêmeos serão criados, dando origem a um regime de compensação. Podemos ainda obter de (4.2.2) a relação entre a fase do bombeio e a soma das fases dos feixes sinal e complementar,

$$2\chi e^{i(\varphi_0 - \varphi_+)} = \frac{\gamma'}{p_0}(1 - i\Delta). \quad (4.2.4)$$

As equações 4.2.3 e 4.2.4, fornecem

$$e^{i\varphi_0} = \frac{1 - i\Delta}{\sqrt{1 + \Delta^2}} e^{i\varphi_+}, \quad (4.2.5)$$

que ao ser substituída em (4.2.2), juntamente com (4.2.3), fornece φ_+ em função de p_0^{in} e p ,

$$p^2 + \frac{\gamma'_0 \gamma'}{4\chi^2}(1 - i\Delta_0)(1 - i\Delta) = \frac{\sqrt{2\gamma_0}}{2\chi} p_0^{in} e^{-i\varphi_+}. \quad (4.2.6)$$

O módulo ao quadrado desta última equação permite encontrar a intensidade intracavidade p dos feixes sinal e complementar,

$$p^2 = \sqrt{\frac{2\gamma_0}{4\chi^2} p_0^{in^2} - \left[\frac{\gamma'_0 \gamma'}{4\chi^2} (\Delta_0 + \Delta) \right]^2} - \frac{\gamma'_0 \gamma'}{4\chi^2} (1 - \Delta_0 \Delta). \quad (4.2.7)$$

Essa equação fornece dois parâmetros bastante importantes para a análise dos resultados experimentais, a **potência de limiar** (P_{lim}) e **eficiência de conversão máxima** do OPO (η_{OPO}).

Definimos a potência de limiar como sendo a potência mínima para a qual há geração de sinal e complementar. Podemos obter sua expressão fazendo $p = 0$ e $\Delta = \Delta_0 = 0$ na equação (4.2.7), o que resulta em

$$P_{lim} = \frac{\gamma_0'^2 \gamma'^2}{8\gamma_0 \chi^2}. \quad (4.2.8)$$

Como P_{lim} é uma grandeza facilmente mensurável, podemos eliminar a constante χ das equações. Além disso, sendo P_{lim} dada pelas perdas totais envolvidas no processo de conversão paramétrica, podemos ter seu valor como uma referência para garantir que estamos mantendo as características fundamentais do OPO em condições diferentes de operação, variando a temperatura do cristal, por exemplo.

Ao substituir a expressão para P_{lim} nas equações (4.2.3) e (4.2.7), obtemos as expressões para os valores estacionários,

$$p^2 = \frac{2\gamma_0}{\gamma'_0\gamma'} P_{lim} \left[\sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2} - (1 - \Delta_0\Delta) \right], \quad (4.2.9)$$

$$p_0^2 = \frac{2\gamma_0}{\gamma'^2_0} P_{lim} (1 + \Delta^2), \quad (4.2.10)$$

sendo $\sigma = (p_0^{in})^2/P_{lim}$ a razão entre a potência do feixe de entrada e a potência de limiar. Todos os gráficos de ruído quântico e dos critérios de separabilidade serão apresentados em função dessa grandeza.

Finalmente, a potência dos campos sinal e complementar medidos pelos fotodetetores é igual à intensidade intracavidade dos mesmos multiplicada pela transmissão do espelho de saída,

$$P = 2\gamma p^2 = 4\eta_{OPO} P_{lim} \left[\sqrt{\sigma - (\Delta_0 + \Delta)^2} - (1 - \Delta_0\Delta) \right], \quad (4.2.11)$$

em que

$$\eta_{OPO} = \frac{\gamma_0\gamma}{\gamma'_0\gamma'} \quad (4.2.12)$$

é a eficiência de conversão máxima do OPO. Este parâmetro é muito importante para fazer a conversão da soma da intensidade dos feixes sinal e complementar para σ . Como estamos trabalhando com feixes intensos, os resultados obtidos para os valores médios dos campos concordam com os resultados clássicos obtidos por Debuisschert *et. al.* [Debuisschert 1993]. As flutuações quânticas serão discutidas na seção seguinte.

4.3 Flutuações Quânticas Linearizadas

Para estudar as flutuações quânticas devemos reescrever as equações (4.1.7)-(4.1.9) na forma linearizada, que consiste em substituir as amplitudes dos campos pelos seus valores médios mais os termos de flutuação (equação 4.1.10), desprezando termos de segunda ordem. Ao fazer isso obtemos as equações

$$\tau \frac{d}{dt} \delta\alpha_0 = -\gamma'_0(1-i\Delta_0)\delta\alpha_0 - 2\chi p (e^{i\varphi_2}\delta\alpha_1 + e^{i\varphi_1}\delta\alpha_2) + \sqrt{2\gamma_0}\delta\alpha_0^{in} + \sqrt{2\mu_0}\delta v_0, \quad (4.3.1)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \delta\alpha_1 = -\gamma'(1-i\Delta)\delta\alpha_1 + 2\chi(p e^{-i\varphi_2}\delta\alpha_0 + p_0 e^{i\varphi_0}\delta\alpha_2^*) + \sqrt{2\gamma}\delta u_1 + \sqrt{2\mu}\delta v_1, \quad (4.3.2)$$

$$\tau \frac{d}{dt} \delta\alpha_2 = -\gamma'(1-i\Delta)\delta\alpha_2 + 2\chi(p e^{-i\varphi_1}\delta\alpha_0 + p_0 e^{i\varphi_0}\delta\alpha_1^*) + \sqrt{2\gamma}\delta u_2 + \sqrt{2\mu}\delta v_2, \quad (4.3.3)$$

4.3. FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS LINEARIZADAS

que podem ser escritas em termos das flutuações das quadraturas dos campos através da relação

$$\delta\alpha_j = \frac{e^{i\varphi_j}}{2}(\delta p_j + i\delta q_j). \quad (4.3.4)$$

Ao fazer a substituição de (4.3.4) em (4.3.1)-(4.3.3) separando as equações em parte e parte imaginária obtemos as seguintes equações

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta p_0 = & -\gamma'_0 \delta p_0 - \Delta_0 \gamma'_0 \delta q_0 - \gamma' \beta \delta p_1 + \Delta \gamma' \beta \delta q_1 - \gamma' \beta \delta p_2 + \Delta \gamma' \beta \delta q_2 + \\ & + \sqrt{2\gamma_0} \delta p_0^{in} + \sqrt{2\mu_0} \delta v_{p_0} \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta q_0 = & \Delta_0 \gamma'_0 \delta p_0 - \gamma'_0 \delta q_0 + \Delta \gamma' \beta \delta p_1 - \gamma' \beta \delta q_1 + \Delta \gamma' \beta \delta p_2 - \gamma' \beta \delta q_2 + \\ & + \sqrt{2\gamma_0} \delta q_0^{in} + \sqrt{2\mu_0} \delta v_{q_0} \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta p_1 = & \gamma' \beta \delta p_0 + \Delta \gamma' \beta \delta q_0 - \gamma' \delta p_1 - \Delta \gamma' \delta q_1 + \gamma' \delta p_2 - \Delta \gamma' \delta q_2 + \\ & + \sqrt{2\gamma} \delta u_{p_1} + \sqrt{2\mu} \delta v_{p_1} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta q_1 = & \gamma' \beta \delta q_0 - \Delta \gamma' \beta \delta p_0 - \gamma' \delta q_1 + \Delta \gamma' \delta p_1 - \gamma' \delta q_2 - \Delta \gamma' \delta p_2 + \\ & + \sqrt{2\gamma} \delta u_{q_1} + \sqrt{2\mu} \delta v_{q_1} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta p_2 = & \gamma' \beta \delta p_0 + \Delta \gamma' \beta \delta q_0 + \gamma' \delta p_1 - \Delta \gamma' \delta q_1 - \gamma' \delta p_2 - \Delta \gamma' \delta q_2 + \\ & + \sqrt{2\gamma} \delta u_{p_1} + \sqrt{2\mu} \delta v_{p_1} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

$$\begin{aligned} \tau \frac{d}{dt} \delta q_2 = & \gamma' \beta \delta q_0 - \Delta \gamma' \beta \delta p_0 - \gamma' \delta q_1 - \Delta \gamma' \delta p_1 - \gamma' \delta q_2 + \Delta \gamma' \delta p_2 + \\ & + \sqrt{2\gamma} \delta u_{q_1} + \sqrt{2\mu} \delta v_{q_1}, \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

onde foram utilizadas as expressões $\delta u_j = \exp(i\varphi_j)(\delta u_{pj} + i\delta u_{qj})/2$ $\delta v_j = \exp(i\varphi_j)(\delta v_{pj} + i\delta v_{qj})/2$ para as quadraturas dos modos de vácuo inseridos pelos espelhos e pelas perdas, respectivamente. Definimos também $\beta = p/p_0$ e assumimos $\varphi_0 = \varphi_+ = 0$ para o feixe de bombeio incidente.

Fazendo a transformada de Fourier nas equações diferenciais acima ($d/dt \longrightarrow i\Omega$), definindo as transformações de variáveis

$$\delta p_{\pm} = (\delta p_1 \pm \delta p_2)/\sqrt{2}, \quad \text{e} \quad \delta q_{\pm} = (\delta q_1 \pm \delta q_2)/\sqrt{2}, \quad (4.3.11)$$

e escrevendo as quadraturas dos campos de saída do OPO, medidas nos fotodetetores [Yurke 1984],

$$\delta p_{\pm}^{out} = -\delta u_{p_{\pm}}(\Omega) + \sqrt{2\gamma_j} \delta p_{\pm}(\Omega) \quad (4.3.12)$$

$$\delta q_{\pm}^{out} = -\delta u_{q_{\pm}}(\Omega) + \sqrt{2\gamma_j} \delta q_{\pm}(\Omega) \quad (4.3.13)$$

obtemos o seguinte conjunto de equações algébricas no domínio da frequência para as

flutuações dos campos de saída,

$$\delta p_-^{\text{out}}(\Omega) = \left(-1 + \frac{\gamma/\gamma'}{1 + i\Omega'}\right) \delta u_{p-}(\Omega) + \frac{\sqrt{\gamma\mu}}{\gamma'(1 + i\Omega')} \delta v_{p-}(\Omega), \quad (4.3.14)$$

$$\delta q_-^{\text{out}}(\Omega) = \left(-1 - i\frac{\gamma/\gamma'}{\Omega'}\right) \delta u_{q-}(\Omega) + i\frac{\sqrt{\gamma\mu}}{\gamma'\Omega'} \delta v_{q-}(\Omega), \quad (4.3.15)$$

$$\delta p_+^{\text{out}}(\Omega) = \kappa_p \delta p_0^{\text{in}} + \sqrt{\mu_0/\gamma_0} \kappa_p \delta v_{p_0} + (2\gamma\xi_p^{-1} - 1) \delta u_{p+} + 2\sqrt{\gamma\mu} \xi_p \delta v_{p+}, \quad (4.3.16)$$

$$\delta q_+^{\text{out}}(\Omega) = \kappa_q \delta q_0^{\text{in}} + \sqrt{\mu_0/\gamma_0} \kappa_q \delta v_{q_0} + (2\gamma\xi_q^{-1} - 1) \delta u_{q+} + 2\sqrt{\gamma\mu} \xi_q \delta v_{q+}, \quad (4.3.17)$$

$$\delta p_0^{\text{out}}(\Omega) = \vartheta_p \delta p_0^{\text{in}} + \sqrt{\mu_0/\gamma_0} (\vartheta_p + 1) \delta v_{p_0} - \kappa_p \delta u_{p+} - \sqrt{\mu/\gamma} \kappa_p \delta v_{p+}, \quad (4.3.18)$$

$$\delta q_0^{\text{out}}(\Omega) = \vartheta_q \delta q_0^{\text{in}} + \sqrt{\mu_0/\gamma_0} (\vartheta_q + 1) \delta v_{q_0} - \kappa_q \delta u_{q+} - \sqrt{\mu/\gamma} \kappa_q \delta v_{q+}, \quad (4.3.19)$$

sendo

$$\xi_p = 2i\gamma'\Omega' + \frac{2\gamma'^2\beta^2}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'}, \quad (4.3.20)$$

$$\xi_q = 2\gamma' + \xi_p, \quad (4.3.21)$$

$$\kappa_{p,q} = \frac{2\sqrt{2}\gamma'\beta\sqrt{\gamma_0\gamma}}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'} (\xi_{p,q})^{-1}, \quad (4.3.22)$$

$$\vartheta_{p,q} = -1 + \frac{2\gamma_0}{\gamma'_0 + 2i\gamma'\Omega'} \left[1 - \sqrt{2\gamma_0\gamma}\gamma'\beta\kappa_{p,q}\right]. \quad (4.3.23)$$

Nas equações 4.3.12-4.3.13 foi levada em consideração a fase de π inserida nos campos refletidos pela cavidade. No restante das equações assumimos dessintonia nula ($\Delta = \Delta_0 = 0$) e definimos a frequência de análise normalizada pela largura de banda da cavidade $\Omega' = \Omega/\delta w$, onde $\delta w = 2\gamma'/\tau$. É importante verificar que por termos considerado dessintonias nulas, as equações (4.3.14) - (4.3.19) estão desacopladas, o que permite simplificar a análise para obter uma compreensão do comportamento dos espectros de ruído, calculados de acordo com a expressão $\langle \delta \hat{X}_\theta(\Omega) \delta \hat{X}_\theta(-\Omega') \rangle = 2\pi\delta(\Omega - \Omega') S_{\hat{X}_\theta}(\Omega)$.

Como podemos ver na referência [Villar 2007b] o espaço da subtração das quadraturas dos feixes gêmeos é totalmente desacoplado dos demais, mesmo para dessintonias não nulas. Os espectros de ruído obtidos para este subespaço são

$$S_{\hat{p}-} = 1 - \frac{\gamma/\gamma'}{1 + \Omega'^2}, \quad (4.3.24)$$

$$S_{\hat{q}-} = 1 + \frac{\gamma/\gamma'}{\Omega'^2}. \quad (4.3.25)$$

Os espectros de ruído em função da dessintonia estão ilustrados na figura 4.2. Vemos que a subtração das amplitudes dos feixes gêmeos possui compressão de ruído para toda faixa de valores da frequência de análise, tendendo ao shot-noise quando $\Omega' \gg 1$. Essa perda de compressão para valores muito altos de Ω' está relacionada com o tempo de voo dos fótons dentro da cavidade. Como os fótons são gerados aos pares, para que se observe correlação é necessário que os dois tenham deixado a cavidade, sendo necessário estabelecer tempos compatíveis com tempo de permanência dos mesmos dentro do OPO,

4.3. FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS LINEARIZADAS

$\Omega' \lesssim 1$. Outro fator importante é a razão γ/γ' , que diminui a compressão devido ao extravio de um dos fótons devido às perdas espúrias intracavidade. Nesta análise, consideramos $\gamma = \gamma'$ o que possibilita obter máxima compressão em Sp_- quando $\Omega' = 0$, caso ideal.

Figura 4.2: Espectro de ruído para a subtração das fases (curva contínua preta) e subtração das amplitudes (curva vermelha). Consideramos aqui o caso ideal, dessintonias e perdas espúrias intracavidade ($\mu = 0$) nulas.

Como consequência do princípio da incerteza, observamos excesso de ruído na subtração das fases dos feixes gêmeos para todos os valores de Ω' , tendendo ao shot noise quando $\Omega' \gg 1$ e divergindo quando $\Omega' \rightarrow 0$. Isso pode ser observado calculando o produto das equações (4.3.24) e (4.3.25), mostrando que o espaço da subtração possui incerteza mínima, $Sq_- \cdot Sp_- = 1$, em dessintonias nulas e $\gamma = \gamma'$.

Vamos agora analisar as expressões (4.3.16)-(4.3.19). O cálculo do espectro de ruído nos fornece as seguintes expressões,

$$S_{\hat{p}_+} = |\kappa_p|^2 S_{p_0}^{\text{in}} + |2\gamma\xi^{-1} - 1|^2 + \mu_0/\gamma_0 |\kappa_p|^2 + 4\gamma\mu |\xi|^2, \quad (4.3.26)$$

$$S_{\hat{q}_+} = |\kappa_q|^2 S_{q_0}^{\text{in}} + |2\gamma\zeta^{-1} - 1|^2 + \mu_0/\gamma_0 |\kappa_q|^2 + 4\gamma\mu |\zeta|^2, \quad (4.3.27)$$

$$S_{\hat{p}_0} = |\vartheta_p|^2 S_{p_0}^{\text{in}} + |\kappa_p|^2 + \mu_0/\gamma_0 |\vartheta_p + 1|^2 + \mu/\gamma |\kappa_p|^2, \quad (4.3.28)$$

$$S_{\hat{q}_0} = |\vartheta_q|^2 S_{q_0}^{\text{in}} + |\kappa_q|^2 + \mu_0/\gamma_0 |\vartheta_q + 1|^2 + \mu/\gamma |\kappa_q|^2. \quad (4.3.29)$$

Na figura 4.3 apresentamos os comportamentos de Sp_+ e Sq_+ em função da frequência de análise e potência de bombeio relativa ao limiar (σ). Observamos compressão de ruído em Sq_+ para qualquer valor de potência de bombeio e frequência de análise. Podemos entender essa compressão com base no princípio de conservação de energia. Sendo $\omega_o = \omega_1 + \omega_2$, pequenas flutuações de frequência podem ser entendidas como flutuações de fase, e estando a soma das fases dos feixes sinal e complementar limitadas a uma referência

fixa, é esperado alguma correlação entre elas. Em contrapartida Sp_+ apresenta excesso de ruído, devido ao princípio da incerteza de Heisenberg.

Observamos então compressão de ruído na soma das fases e na subtração das amplitudes dos feixes sinal e complementar. Essas quadraturas são equivalentes à posição e ao momento de um oscilador harmônico quântico, sendo, portanto, esperado que exista emaranhamento entre os dois feixes. As combinações de quadraturas são equivalentes às variáveis tipo-EPR, propostas no critério de Duan *et. al.* e Simon [Duan 2000, Simon 2000], $\hat{u} = \hat{p}_-$ e $\hat{v} = \hat{q}_+$, de acordo com a equação (3.4.2).

Figura 4.3: Ruído de soma das quadraturas fase ($S\hat{q}_+$) e das quadraturas amplitude ($S\hat{p}_+$) dos feixes sinal e complementar em função de σ e Ω' .

Figura 4.4: Adição dos espectros de ruído da soma das fases e subtração de amplitudes dos feixes sinal e complementar. Nota-se a existência de emaranhamento bipartite em toda região de parâmetros, com violação máxima da desigualdade de Duan *et. al.* e Simon para frequência de análise nula e potência de bombeio próxima ao limiar.

4.3. FLUTUAÇÕES QUÂNTICAS LINEARIZADAS

Verifica-se, então, o emaranhamento observando a soma dos ruídos $S\hat{p}_-$ e $S\hat{q}_+$, ilustrada na figura 4.4. A desigualdade (3.4.7) é violada para todos os valores de σ e Ω' . Obtemos violação máxima quando $\sigma = 1$ e $\Omega' = 0$.

O feixe de bombeio refletido apresenta excesso de ruído em Sp_0 para todos os valores de σ e Ω' , conforme ilustrado na figura 4.5. Já Sq_0 é igual ao *shot-noise* quando $\sigma = 1$ e apresenta compressão ao aumentarmos a potência do feixe de entrada, mostrando que ao iniciar a oscilação os feixes sinal e complementar, à medida que se tornam mais intensos, podem interagir com o feixe de bombeio intracavidade influenciando suas bandas laterais, gerando correlações tripartites. A compressão em Sq_0 foi observada experimentalmente em [Kasai 1997, Zhang K.S. 2001].

Figura 4.5: Espectro de ruído da quadratura amplitude e fase do feixe de bombeio refletido. Existe compressão de ruído para $\sigma > 1$ na quadratura fase com consequente excesso na quadratura amplitude.

Para investigar a existência de correlações envolvendo os três feixes vamos utilizar os critérios apresentados no Capítulo 3 e o tratamento dos espectros de ruído na forma matricial. Embora seja possível calcular os espectros de ruído e correlações entre os feixes de forma analítica através das equações (4.3.14)-(4.3.19), o tratamento matricial reduz o problema ao cálculo de elementos de matriz, facilitando a aplicação dos critérios de emaranhamento, como veremos a seguir.

4.4 Solução Matricial

Podemos reescrever matricialmente o conjunto de equações (4.3.5)-(4.3.10), no espaço de frequências, definindo os vetores de flutuações dos campos

$$\delta\vec{p} = (\delta p_0, \delta q_0, \delta p_1, \delta q_1, \delta p_2, \delta q_2)^T \quad (4.4.1)$$

$$\delta\vec{u} = (\delta p_{in}, \delta q_{in}, \delta u_{p_1}, \delta u_{q_1}, \delta u_{p_2}, \delta u_{q_2})^T \quad (4.4.2)$$

$$\delta\vec{v} = (\delta v_{p_0}, \delta v_{q_0}, \delta v_{p_1}, \delta v_{q_1}, \delta v_{p_2}, \delta v_{q_2})^T, \quad (4.4.3)$$

onde $\delta\vec{p}$, $\delta\vec{u}$ e $\delta\vec{v}$ estão associados às flutuações das quadraturas dos campos de entrada, perdas por transmissão dos espelhos e acoplamento com os modos do vácuo, respectivamente.

Feito isso, obtemos a equação matricial

$$\underbrace{(-\mathbf{A} + 2i\Omega'\gamma'\mathbf{I})}_{\mathbf{M}_{\mathbf{A}}(\Omega')} \delta\vec{p} = \mathbf{T}_u \delta\vec{u} + \mathbf{T}_v \delta\vec{v}, \quad (4.4.4)$$

em que $\mathbf{A}$ é a matriz de arrasto

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\gamma'_0 & 0 & -\gamma'\beta & 0 & -\gamma'\beta & 0 \\ 0 & -\gamma'_0 & 0 & -\gamma'\beta & 0 & -\gamma'\beta \\ \gamma'\beta & 0 & -\gamma' & 0 & \gamma' & 0 \\ 0 & \gamma'\beta & 0 & -\gamma' & 0 & -\gamma' \\ \gamma'\beta & 0 & \gamma' & 0 & -\gamma' & 0 \\ 0 & \gamma'\beta & 0 & -\gamma' & 0 & -\gamma' \end{pmatrix}, \quad (4.4.5)$$

e $\mathbf{T}_u$ e $\mathbf{T}_v$ as matrizes que carregam os termos responsáveis pelas perdas devido a transmissão dos espelhos e perdas espúrias,

$$\mathbf{T}_u = (\sqrt{2\gamma_0}, \sqrt{2\gamma_0}, \sqrt{2\gamma}, \sqrt{2\gamma}, \sqrt{2\gamma}, \sqrt{2\gamma}) \quad (4.4.6)$$

$$\mathbf{T}_v = (\sqrt{2\mu_0}, \sqrt{2\mu_0}, \sqrt{2\mu}, \sqrt{2\mu}, \sqrt{2\mu}, \sqrt{2\mu}). \quad (4.4.7)$$

Com o mesmo raciocínio empregado nas equações (4.3.12) e (4.3.13) escrevemos as quadraturas dos campos de saída do OPO,

$$\delta\vec{p}_{out} = -\delta\vec{u} + \mathbf{T}_u \delta\vec{p}, \quad (4.4.8)$$

de onde obtemos, com o auxílio da equação (4.4.4),

$$\delta\vec{p}_{out} = (\mathbf{T}_u \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega') \mathbf{T}_u - \mathbf{I}) \delta\vec{u} + \mathbf{T}_u \mathbf{M}_{\mathbf{A}}^{-1}(\Omega') \mathbf{T}_v \delta\vec{v}, \quad (4.4.9)$$

em que $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade.

Com esta última equação é possível calcular os espectros de ruído e correlações dos feixes de saída. Fazemos isso calculando os termos $V_{OPO}^{(i,j)}$ da matriz de covariância do OPO, definida como

$$V_{OPO} = Re \langle \delta\vec{p}_{out}(\Omega') \delta\vec{p}_{out}^T(-\Omega') \rangle, \quad (4.4.10)$$

4.5. EMARANHAMENTO TRIPARTITE NO OPO

resultando em

$$V_{OPO} = \mathbf{I} + \mathbf{V}_{\text{puro}} + \mathbf{V}_{\text{perdas}}. \quad (4.4.11)$$

O termo

$$\begin{aligned} V_{\text{puro}} = & \mathbf{T}_u \mathbf{M}_A^{-1}(\Omega') \mathbf{T}_u \mathbf{T}_u \mathbf{M}_A^{-1}(-\Omega')^T \mathbf{T}_u + \\ & - \mathbf{T}_u \mathbf{M}_A^{-1}(\Omega') \mathbf{T}_u - \mathbf{T}_u \mathbf{M}_A^{-1}(-\Omega')^T \mathbf{T}_u \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

representa os ruídos dos campos e as correlações entre os mesmos na ausência de perdas espúrias, levadas em consideração através do termo

$$V_{\text{perdas}} = \mathbf{T}_u \mathbf{M}_A^{-1}(\Omega') \mathbf{T}_v \mathbf{T}_v \mathbf{M}_A^{-1}(-\Omega')^T \mathbf{T}_u. \quad (4.4.13)$$

Como estamos analisando o caso de dessintonias nulas ($\Delta = \Delta_0 = 0$), a matriz de covariância possui o seguinte aspecto,

$$V_{OPO} = \begin{pmatrix} S_{p_0} & 0 & C_{p_0 p_1} & 0 & C_{p_0 p_2} & 0 \\ 0 & S_{q_0} & 0 & C_{q_0 q_1} & 0 & C_{q_0 q_2} \\ C_{p_0 p_1} & 0 & S_{p_1} & 0 & C_{p_1 p_2} & 0 \\ 0 & C_{q_0 q_1} & 0 & S_{q_1} & 0 & C_{q_1 q_2} \\ C_{p_0 p_2} & 0 & C_{p_1 p_2} & 0 & S_{p_2} & 0 \\ 0 & C_{q_0 q_2} & 0 & C_{q_1 q_2} & 0 & S_{q_2} \end{pmatrix}, \quad (4.4.14)$$

Os elementos da diagonal principal fornecem os ruídos das quadraturas dos feixes de saída, enquanto os termos fora dela nos dão as correlações entre pares de feixes. Por termos considerado dessintonias nulas, os elementos $C_{p_i q_j}$ ($i, j \in \{0, 1, 2\}$), correlações entre amplitude e fase dos campos, são nulos. Como as equações (4.4.12) e (5.2.5) são escritas em função de matrizes de ordem 6, é necessário fazer o cálculo dos termos da matriz de covariância com o auxílio do computador. Com este formalismo, torna-se fácil aplicar os critérios de separabilidade de van Loock *et. al.* [van Loock 2003] e PPT de Simon [Simon 2000], para verificar a existência de emaranhamento tripartite em nosso sistema.

4.5 Emaranhamento Tripartite no OPO

A demonstração teórica de emaranhamento envolvendo os três feixes gerados pelo OPO pode ser feita utilizando os critérios de separabilidade apresentados no capítulo anterior. Começamos a análise pelo critério de soma de variâncias proposto por Duan estendido para o caso de três subsistemas, desenvolvido por van Loock e Furusawa, conforme apresentado no seção 3.4.2. Reescrevendo as desigualdades (3.4.22)-(3.4.24) em termos das quadraturas

dos campos gerados no OPO, obtemos o conjunto de desigualdades

$$V_0 = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left(\frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2 - g_0 \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) \geq 2, \quad (4.5.1)$$

$$V_1 = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left(\frac{g_1 \hat{q}_1 + \hat{q}_2 - \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) \geq 2, \quad (4.5.2)$$

$$V_2 = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_1}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left(\frac{\hat{q}_1 + g_2 \hat{q}_2 - \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) \geq 2. \quad (4.5.3)$$

Como havíamos mencionado na seção 3.4.2, o parâmetro g_j permite minimizar o lado direito das desigualdades, tornando-as mais sensíveis a estados emaranhados. Isso pode ser feito reescrevendo V_j ($j = 0, 1, 2$) em termos dos elementos da matriz de covariância $V_{OPO}^{(i,j)}$ e efetuando a derivada em relação a g_j , impondo resultado nulo. Este cálculo fornece

$$g_0 = \frac{C_{\hat{q}_0 \hat{q}_1} + C_{\hat{q}_0 \hat{q}_2}}{\Delta^2 \hat{q}_0}, \quad g_1 = \frac{C_{\hat{q}_0 \hat{q}_1} - C_{\hat{q}_1 \hat{q}_2}}{\Delta^2 \hat{q}_1}, \quad g_2 = \frac{C_{\hat{q}_0 \hat{q}_2} - C_{\hat{q}_1 \hat{q}_2}}{\Delta^2 \hat{q}_2}. \quad (4.5.4)$$

Substituindo os valores obtidos para g_j nas equações (4.5.1)-(4.5.3), obtemos

$$V_0 = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left(\frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{\sqrt{2}} \right) - \beta_0 \geq 2, \quad (4.5.5)$$

$$V_1 = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left(\frac{\hat{q}_2 - \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) - \beta_1 \geq 2, \quad (4.5.6)$$

$$V_2 = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_1}{\sqrt{2}} \right) + \Delta^2 \left(\frac{\hat{q}_1 - \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) - \beta_2 \geq 2, \quad (4.5.7)$$

em que

$$\beta_0 = \frac{(C_{\hat{q}_0 \hat{q}_1} + C_{\hat{q}_0 \hat{q}_2})^2}{2 \Delta^2 \hat{q}_0}, \quad \beta_1 = \frac{(C_{\hat{q}_0 \hat{q}_1} - C_{\hat{q}_1 \hat{q}_2})^2}{2 \Delta^2 \hat{q}_1}, \quad \beta_2 = \frac{(C_{\hat{q}_0 \hat{q}_2} - C_{\hat{q}_1 \hat{q}_2})^2}{2 \Delta^2 \hat{q}_2} \quad (4.5.8)$$

são termos de correção estritamente positivos, consequentes das correlações existentes com o terceiro feixe. Nota-se ainda que as desigualdades (5.5.1)-(5.5.3) são similares às três desigualdades de Duan *et. al.* para cada par de feixes. Portanto, violar duas dessas desigualdades implica inseparabilidade entre os três feixes, pois elimina as formas parcialmente separáveis (3.4.9)-(3.4.11). Por exemplo, violar (5.5.1) implica inseparabilidade entre sinal e complementar, enquanto a violação de (5.5.3) nos diz que os feixes bombeio refletido e complementar estão emaranhados, caso as duas sejam violadas, temos emaranhados envolvendo os três campos.

Na figura (4.6) estão ilustradas as desigualdades V_0 (parte superior) e V_1 (parte inferior) com e sem o termo de correção, em função da frequência de análise normalizada pela largura de banda Ω' e da potência σ . Devido à simetria do problema, por termos assumido perdas iguais para os feixes sinal e complementar, $V_1 = V_2$. Como visto na seção anterior, os feixes sinal e complementar são emaranhados para toda região de parâmetros, obtendo violação máxima da desigualdade de Duan *et. al.* para $\sigma = 1$ e $\Omega' = 0$. Os dois primeiros

4.5. EMARANHAMENTO TRIPARTITE NO OPO

Figura 4.6: Somas de variâncias V_0 na parte superior e V_1 na parte inferior. À esquerda consideramos $V_{0(1)}$ sem levar em consideração o termo de correção $\beta_{0(1)}$. À direita mostramos $V_{0(1)}$ na sua forma completa. O emaranhamento tripartite é verificado quando $V_0 < 2$ e $V_1 < 2$.

termos da desigualdade V_0 revelam esta característica já conhecida, mostrando máxima violação mesmo sem o acréscimo das correlações com o feixe de bombeio, dadas pelo termo β_0 . No entanto, ao considerá-lo, podemos perceber um decréscimo no valor de V_0 de forma mais nítida para $\Omega' \approx 0$. Para $\sigma = 2.0$, por exemplo, temos, sem correção do bombeio, $V_0 \approx 0.5$, com valor reduzido ao considerar β_0 , $V_0 \approx 0.14$. Foi verificado experimentalmente [Cassemiro 2007a] que inserindo a informação proveniente do bombeio refletido, o ruído da soma das fases dos feixes sinal e complementar é reduzido.

A segunda desigualdade é mais sensível às correções provenientes do terceiro feixe. À esquerda mostramos a soma das variâncias envolvendo os feixes complementar e bombeio refletido sem levar em conta o termo β_1 . Percebe-se, neste caso, uma pequena violação da desigualdade com valor mínimo $V_1^{min} \approx 1.7$, em $\sigma \approx 2.0$. Ao acrescentar a correção devido às correlações existentes com o feixe sinal, obtemos uma violação mais expressiva com

$V_1^{min} \approx 0.8$. Essa redução de aproximadamente 50% se deve principalmente à presença do termo de correlação entre as fases dos feixes sinal e complementar que estão fortemente anticorrelacionadas. É válido mencionar que os termos β_j são estritamente positivos e que os valores das correlações sempre se somam, pois $C_{q_0q_1} = C_{q_0q_2} > 0$ e $C_{q_1q_2} < 0$, aumentando os valores das correções.

Agora aplicaremos o critério PPT em nosso sistema. Como foi dito na seção (3.3), realizar uma transposição parcial em um subsistema $j \in \{0, 1, 2\}$ é equivalente à troca do sinal da quadratura q_j . Analisaremos bipartições do tipo (1×2) realizando a transposição parcial com relação ao subespaço de um dos feixes. Por exemplo, fazer a transposição parcial com relação ao subespaço do feixe sinal é equivalente a trocar o sinal da quadratura q_1 , o que altera o sinal dos termos $C_{q_0q_1}$ e $C_{q_1q_2}$ da matriz de covariância V_{OPO} . A partir de agora, denotaremos por ν_j o menor autovalor simplético referente à transposição parcial do sistema j .

Apresentamos na figura 4.7 o comportamento dos autovalores simpléticos em função da potência de bombeio σ , assumindo $\Omega' = 0.5$. Observamos a presença de emaranhamento em todas as bipartições possíveis¹. O autovalor simplético $\nu_1 < 1$ atesta o emaranhamento entre o feixe sinal e o subsistema composto pelo feixe complementar e bombeio refletido. Já ν_0 mostra a existência de emaranhamento entre o feixe de bombeio refletido e o sistema composto pelos feixes gêmeos, confirmando o emaranhamento previsto pela violação da desigualdade V_1 . Uma característica interessante é evidenciada quando consideramos apenas o subespaço composto pelos feixes gêmeos e o subespaço do bombeio refletido mais sinal (ou complementar). Para o primeiro caso obtemos o autovalor simplético $\nu_{(12)}$ referente à troca de sinal de q_1 ou q_2 . Nota-se que $\nu_{(12)} > \nu_1$ para todos os valores de σ , mostrando que o emaranhamento entre os feixes gêmeos é mais robusto quando consideramos o sistema composto pelos três feixes. O autovalor $\nu_{(01)}$ também atesta o emaranhamento entre os feixes bombeio refletido e sinal, porém com valores próximos a 1. Essa análise envolvendo subespaços dos feixes tomados aos pares mostra que o emaranhamento é mais evidente quando consideramos o sistema global, formado pelos três feixes conjuntamente.

Por fim, calculamos os autovalores simpléticos da matriz de covariância na sua forma original, ou seja, sem realizar a transposição parcial em qualquer subsistema. O menor autovalor ν permanece constante e igual a 1 para qualquer potência de bombeio. De fato, este é um resultado esperado, pois o sistema gerado no OPO, na ausência de perdas espúrias ($\mu = \mu_0 = 0$), é idealmente puro. A maneira mais simples de entender este resultado talvez esteja na análise da pureza, calculada a partir da expressão [Adesso 2006,

¹Mais uma vez, devido a simetria do problema, devido a perdas iguais consideradas para o feixe sinal e complementar, $\nu_1 = \nu_2$.

4.5. EMARANHAMENTO TRIPARTITE NO OPO

Figura 4.7: Menores autovalores simpléticos ν_j obtidos pela transposição do subsistema j em função da potência de bombeio relativa ao limiar. Existe emaranhamento entre o feixe j e o subsistema composto pelos outros dois quando $\nu_j < 1$. A transposição dos feixes bombeio e sinal fornecem os autovalores ν_0 (quadrados) e ν_1 (círculos vermelhos), respectivamente. Realizando a transposição nos subespaços dos feixes gêmeos e bombeio mais sinal obtemos $\nu_{(12)}$ (círculos azuis) e $\nu_{(01)}$ (círculos laranjas). O autovalor ν é obtido sem a realização da transposição parcial. Adotamos $\Omega' = 0.5$.

[Villar 2007b](#)]

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\sqrt{|V_{OPO}|}}, \quad (4.5.9)$$

onde $|V_{OPO}|$ é o determinante da matriz de covariância. Então, o sistema ser puro implica $|V_{OPO}| = 1$. A matriz de covariância pode ser obtida através de transformações simpléticas na matriz que representa três modos do vácuo independentes (matriz identidade I de dimensão 6×6) [[Cassemiro 2008b](#)]. Como o determinante é invariante por transformações simpléticas, os autovalores resultantes ν tem que ser iguais a 1.

Aplicaremos os dois critérios discutidos aqui em nosso experimento. O primeiro, critério de P. van Loock *et. al.*, é mais fácil de ser implementado, pois não exige a medida de todos os elementos da matriz de covariância, ao contrário do critério Peres-Simon (PPT). Porém este último, além de suficiente é também um critério necessário para averiguar a existência de emaranhamento no sistema.

Apesar da comprovação teórica do emaranhamento entre os feixes produzidos pelo OPO, a verificação experimental não foi tarefa simples. Primeiramente, por se tratar de um sistema envolvendo feixes com comprimentos de onda distintos, a aplicação da técnica

usual de detecção homodina é inviável, sendo necessário o uso de técnicas auto-homodinas para acessar as flutuações de todas as quadraturas [Villar 2008]. Outro fenômeno tem dificultado a observação de emaranhamento entre os campos, a existência de excesso de ruído, não previsto pela teoria, inserido na fase dos campos ao atravessar o cristal. Este será o tema discutido na próxima seção.

4.6 Ruído Adicional

A observação do emaranhamento entre os feixes sinal e complementar aconteceu 17 anos depois da sua previsão teórica [Reid 1988, Reid 1989a]. Como mencionado anteriormente, a medida do ruído de fase dos feixes gêmeos foi o primeiro desafio enfrentado, devido a diferença entre seus comprimentos de onda, o que impossibilita a medida via detecção homodina. Porém, mesmo superada esta dificuldade a observação experimental de emaranhamento bipartite acima do limiar enfrentou grandes dificuldades relacionadas à presença inesperada de excesso de ruído na fase dos campos produzidos pelo OPO. Este ruído espúrio, observado em diferentes grupos [Laurat 2005a, Villar 2005, Jing 2006], é atualmente o principal empecilho à medida do emaranhamento tripartite no OPO.

Entre os feixes gêmeos, verificou-se empiricamente que o emaranhamento era observado somente para potências próximas ao limiar de oscilação [Villar 2007b, Villar 2005], pois à medida que a potência de bombeio aumentava, o ruído na soma das fases dos feixes sinal e complementar S_{q+} deixava de apresentar compressão. O primeiro passo dado para tentar entender a origem desse ruído foi comparar o modelo linearizado com o tratamento completo na representação P-Positiva [Villar 2007a]. Nenhuma diferença foi encontrada entre os dois modelos, descartando a hipótese de que informações estariam sendo perdidas ao trabalhar com a linearização das equações de Langevin. Feita esta análise, vários testes começaram a ser realizados visando encontrar a fonte deste excesso de ruído.

Ao medir o ruído de amplitude do feixe de bombeio, observou-se excesso de ruído [Villar 2007a] somente ao dispor o cristal dentro da cavidade, independente da polarização do feixe de entrada, levando à conclusão que este fenômeno é independente da conversão paramétrica. Mesmo sem compreender a origem física do excesso de ruído foi realizada uma modelagem *ad hoc* de forma a obter um acordo entre a teoria e resultados experimentais. A idéia consistiu em introduzir, no modelo teórico, o excesso de ruído no feixe de bombeio incidente, sendo transferido para a soma das fases dos feixes sinal e complementar através da interação com o meio não linear. Detalhes sobre este modelo e o acordo com os resultados experimentais podem ser encontrados nas referências [Villar 2007b, Cassemiro 2008b].

Recentemente, tentou-se associar o ruído espúrio ao espalhamento Brillouin de ondas acústicas guiadas [Shelby 1985], que acopla um ruído extra através da absorção do cristal, de forma que o ruído inserido na fase é proporcional à amplitude do modo [Goda 2005,

4.6. RUÍDO ADICIONAL

[Grosse 2008]. Em nosso laboratório, foi desenvolvido um modelo que leva em consideração pequenas flutuações na permissividade do cristal, mudando o índice de refração do meio devido a flutuações locais na densidade associadas às vibrações da rede. Em nosso caso, as flutuações irão espalhar a luz do modo fundamental para as bandas laterais, gerando excesso de ruído.

Começaremos o tratamento partindo das equações de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, \quad (4.6.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}. \quad (4.6.2)$$

Iremos tratar o caso de um meio homogêneo, mas com flutuações locais aleatórias na permissividade

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + \delta\varepsilon(z, t) \vec{E}, \quad (4.6.3)$$

resultando em uma equação de onda com acoplamento entre flutuação e campo propagante [Yariv 1998]

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} + \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta\varepsilon \vec{E}). \quad (4.6.4)$$

No presente caso, estamos interessados em um campo monocromático, em uma dada polarização. Neste caso, nós temos

$$\vec{E}_j(\vec{r}, t) = \text{Re}[A_j(\vec{r}, t) \exp(in_j k_j z - i\omega_j t)] = \text{Re}[A_j(r, t) e^{i\psi}] \quad (4.6.5)$$

com $k_j = \omega_j/c$, onde c é a velocidade da luz no vácuo e $n_j = \sqrt{\varepsilon_i/\varepsilon_0}$ é o índice de refração. Na amplitude $A_j(\vec{r}, t)$ está incluso o valor médio e o termo de flutuação induzido pela permissividade

$$A_j(\vec{r}, t) = \bar{A}_j(\vec{r}) + \delta A_j(\vec{r}, t) \quad (4.6.6)$$

Substituindo (4.6.6) e (4.6.5) na equação (4.6.4), desprezando termos que envolvem produtos de flutuações $\delta\varepsilon_j \delta A_j$ e separando os termos envolvendo a amplitude média do campo dos termos de flutuação, obtemos

$$\nabla^2(\delta A_j e^{i\psi}) - \mu_0 \varepsilon_j \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta A_j e^{i\psi}) - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\delta\varepsilon_j \bar{A}_j e^{i\psi}) = 0 \quad (4.6.7)$$

$$\nabla^2(\bar{A}_j e^{i\psi}) - \mu_0 \varepsilon_j \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\bar{A}_j e^{i\psi}) = 0 \quad (4.6.8)$$

Como estamos tratando com modos ressonantes na cavidade, as soluções da equação de onda podem ser limitadas à aproximação paraxial. Faz-se isso quando o feixe se propaga com difração muito pequena, separando a variação temporal da espacial e eliminando variações rápidas em z . A equação (4.6.8) já possui a parte espacial e temporal escritas separadamente, restando apenas fazer a aproximação paraxial,

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{A}_j(\vec{r}) \right| \ll \left| 2k_j \frac{\partial}{\partial z} \bar{A}_j(\vec{r}) \right|, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{A}_j(\vec{r}) \right|, \quad \left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} \bar{A}_j(\vec{r}) \right|. \quad (4.6.9)$$

Estas aproximações na equação de onda (4.6.8) resultam em

$$\nabla_t^2 \bar{A}_j(\vec{r}) + 2ik_j \frac{\partial}{\partial z} \bar{A}_j(\vec{r}) = 0, \quad (4.6.10)$$

onde $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, é chamado laplaciano transversal.

Neste caso, a amplitude média do campo que irá satisfazer a equação de onda paraxial [Yariv 1998], é dada pela expressão

$$\bar{A}_j(\vec{r}) = \alpha_j u_j^{(h)}(\vec{r}), \quad (4.6.11)$$

sendo α_j uma constante e os modos transversos (h) para o modo longitudinal j descritos na base de Hermite ou Laguerre-Gauss pela função $u_i^{(h)}(\vec{r})$, que obedece a condição de ortogonalidade $\int u_j^{(h)}(\vec{r}) u_j^{(g)*}(\vec{r}) dxdy = \delta_{hg}$ [Kogelnik 1966].

Vamos tratar agora da parte referente à flutuação do campo, considerando uma pequena depleção do mesmo. Calculando explicitamente os termos da equação (4.6.7) e considerando um envelope lentamente variável para as flutuações, $\delta A \rightarrow \delta \tilde{A} e^{i\Omega t}$ e $\delta \varepsilon \rightarrow \delta \tilde{\varepsilon} e^{i\Omega t}$, obtemos a seguinte equação no domínio da frequência:

$$(\nabla^2 - n_j^2 k_j^2) \delta \tilde{A}_j + \mu_0 \varepsilon_j (\omega - \Omega)^2 \delta \tilde{A}_j + 2in_j k_j \frac{\partial}{\partial z} \delta \tilde{A}_j + \mu_0 \bar{A}_j (\omega - \Omega)^2 \delta \tilde{\varepsilon}_j = 0. \quad (4.6.12)$$

Considerando as flutuações ao longo do eixo z mais significativas comparadas às existentes nas direções x e y ,

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \delta \tilde{A}_j(\vec{r}) \right|, \left| \frac{\partial^2}{\partial y^2} \delta \tilde{A}_j(\vec{r}) \right|, \left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} \delta \tilde{A}_j \right| \ll \left| 2n_j k_j \frac{\partial}{\partial z} \delta \tilde{A}_j \right|, \quad (4.6.13)$$

podemos desprezar o termo $\nabla^2 \delta \tilde{A}_j$. Além disso, dada a descrição da parte rápida da flutuação, temos que $-n_j^2 k_j^2 \delta \tilde{A}_j \approx \mu_0 \varepsilon_j (\omega - \Omega)^2 \delta \tilde{A}_j$. Com isso, os dois últimos termos mostram como a flutuação da permissividade do meio influencia a banda lateral do campo em uma dada posição da frente de onda, através da relação

$$\delta A_j(\vec{r}, \Omega) = i \frac{n_j k_j}{2\varepsilon_j} \alpha_j u_j^{(h)}(\vec{r}) \delta \varepsilon_j(\vec{r}, \Omega) \delta z. \quad (4.6.14)$$

Esta contribuição ocorre em quadratura com a amplitude média do campo, $\alpha_j u_j^{(h)}(\vec{r})$, pois todas as constantes envolvidas são reais.

Para considerar a contribuição total da flutuação da permissividade para um dado modo do campo, $\delta \alpha_j(z, \Omega)$, realizamos a integração transversal do termo de flutuação da equação (4.6.6) multiplicado pelo fator $u_j^{(h)*}(\vec{r})$ que acopla o campo espalhado ao modo da cavidade, resultando em

$$\delta \alpha_j(z, \Omega) = \int \delta A_j(\vec{r}, \Omega) u_j^{(h)*}(\vec{r}) dxdy. \quad (4.6.15)$$

Feito isso, resta-nos calcular a contribuição total da flutuação quando considerada toda a extensão do cristal. Fazemos, então, a integração da equação (4.6.15) sobre todo

4.6. RUÍDO ADICIONAL

o comprimento do cristal, que fornecerá a flutuação do termo em quadratura com a amplitude do campo,

$$\begin{aligned}\delta q_j^p(\Omega) &= \int -i\delta\alpha_j(z, \Omega)dz \\ &= \frac{n_j k_j}{2\varepsilon_j} \alpha_j \int |u_j^{(h)}(\vec{r})|^2 \delta\varepsilon_j(\vec{r}, \Omega) dxdydz.\end{aligned}\quad (4.6.16)$$

Esta equação permite calcular os termos da matriz de covariância $\langle \delta q_i^p(\Omega) \delta q_j^p(-\Omega) \rangle$ levando em consideração as contribuições inseridas pelas flutuações da permissividade $\delta\varepsilon_i$.

Para considerar o acoplamento da rede cristalina com as flutuações de fase do campo em sua propagação dentro do cristal devemos considerar a variação local da permissividade em cada parte do cristal. Esta variação pode ser representada por deslocamentos do campo $\vec{u}(\vec{r})$ para cada ponto da rede cristalina $\vec{r}$. Uma importante grandeza que leva em conta essas variações é o *strain*

$$S_{kl} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_k(\vec{r})}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l(\vec{r})}{\partial x_k} \right], \quad (4.6.17)$$

especificado por seis números. Por exemplo, sejam θ_1 , θ_2 e θ_3 os ângulos entre três eixos **a**, **b** e **c**, o *strain* pode ser especificado pelas variações angulares $\Delta\theta_1$, $\Delta\theta_2$ e $\Delta\theta_3$ e variações $\Delta\mathbf{a}$, $\Delta\mathbf{b}$ e $\Delta\mathbf{c}$ ao longo dos eixos. A expressão S_{kl} é uma definição mais geral, aplicável também a eixos não-ortogonais [Kittel 2004].

Essas deformações alteram a permissividade do meio, através de efeito conhecido como *fotoelástico* [Yariv 1998], que acopla o tensor **S** às flutuações do tensor dielétrico por um tensor de ordem 4,

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_i \varepsilon_j}{\varepsilon_0} \sum_{kl} p_{ijkl} S_{kl}. \quad (4.6.18)$$

Aqui nos restringiremos ao termo que é colinear com o campo elétrico, limitando o problema ao caso $i = j$ através da notação curta $\delta\varepsilon_i = \delta\varepsilon_{ii}$ na equação (4.6.14).

Substituindo a equação (4.6.18) em (4.6.16), obtemos o termo de correlação

$$\begin{aligned}\langle \delta q_i(\Omega) \delta q_j(-\Omega) \rangle &= \frac{n_i^3 n_j^3 k_i k_j}{4} \alpha_i \alpha_j \times \\ &\times \int |u_i^{(h)}(\vec{r})|^2 |u_j^{(h)}(\vec{r}')|^2 \sum_{(kl), (mn)} p_{iikl} p_{jjmn} \langle S_{kl}(\vec{r}, \Omega) S_{mn}(\vec{r}', -\Omega) \rangle d\vec{r} d\vec{r}'\end{aligned}\quad (4.6.19)$$

Para o caso em que a cintura do feixe é muito maior que o comprimento de coerência l_c das ondas acústicas de origem térmica, podemos aproximar a correlação envolvendo o *strain* por uma função delta

$$\langle S_{kl}(\vec{r}, \Omega) S_{mn}(\vec{r}', -\Omega) \rangle = S_{kl}^2(\Omega) \delta_{kl, mn} \delta(\vec{r} - \vec{r}') l_c^3. \quad (4.6.20)$$

Isto simplifica o cálculo da integral (4.6.19) para o envelope do campo $u_i(\vec{r})$ na aproximação paraxial. Considerando o modo transversal fundamental, a integração sobre todo

o volume do cristal nos dá

$$\int |u_i^{(h)}(\vec{r})|^2 |u_j^{(h)}(\vec{r})|^2 d\vec{r} = \int \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega_i^2(z) + \omega_j^2(z)} dz = \frac{\ell}{\pi \omega_{ij}^2}, \quad (4.6.21)$$

onde ℓ é o comprimento do cristal e ω_{ij}^2 é a cintura efetiva do feixe, definida como $\omega_{ij}^{(-2)} = \ell^{-1} \int 2[\omega_i^2(z) + \omega_j^2(z)]^{-1} dz$. Por fim, vamos definir uma constante de acoplamento relacionada com o efeito fotoelástico,

$$c_{ij} = \sum_{kl} [p_{iikl} S_{kl}(\Omega)] [p_{jjkl} S_{kl}(-\Omega)] \quad (4.6.22)$$

Vamos expressar a amplitude α_i de tal maneira que $|\alpha_i|^2$ nos forneça o número de fótons, ou seja, $\alpha_i = \sqrt{P_i/(h\nu_i)}$. Com esses resultados, obtemos os termos da matriz de covariância envolvendo as fases dos campos

$$\langle \delta q_i^p(\Omega) \delta q_j^p(-\Omega) \rangle = \eta_{ij} \sqrt{P_i P_j}, \quad \text{com} \quad \eta_{ij} = \frac{n_i^3 k_i n_j^3 k_j}{4hc} \left(\frac{\ell \sqrt{\lambda_i \lambda_j}}{\pi \omega_{ij}^2} \right) l_c^3 c_{ij}. \quad (4.6.23)$$

Nota-se que a constante de acoplamento η_{ij} depende da razão entre o comprimento do cristal ℓ e o comprimento de Rayleigh efetivo, parâmetro geométrico da cavidade. Com isso, os termos de correlação são inversamente proporcionais ao produto dos comprimentos de onda. Além disso, é possível perceber que o ruído irá depender também da intensidade do campo, dada a razão entre a potência e a cintura do feixe dentro da cavidade. Os resultados experimentais mostrando essa dependência e o acordo com a teoria estão expostos no capítulo seguinte.

Até agora, todo o desenvolvimento feito até aqui tem como objetivo encontrar uma teoria que possibilite descrever o excesso de ruído de fase observado nos feixes produzidos pelo OPO. No entanto, uma análise simples mostra a possibilidade de reduzir o ruído espúrio através de um parâmetro físico controlável, a temperatura do cristal. Em trabalhos anteriores, realizados em nosso grupo [Villar 2007b, Cassemiro 2008b], surgiu a hipótese de que o excesso de ruído estaria relacionado à interação dos campos com fônons da rede cristalina. Com base nesta suposição, supomos que o excesso de ruído gerado na fase de um campo deve ser proporcional ao número médio de fônons da rede cristalina $\langle n \rangle$ multiplicado pela sua intensidade,

$$S_q \propto \langle n \rangle I. \quad (4.6.24)$$

Sabe-se que a energia térmica média de um sólido pode ser escrita como $\sum_i \langle n_i \rangle \hbar \omega_i$, onde $\langle n_i \rangle = (e^{\hbar \omega_i / k_B T} - 1)^{-1}$ é o valor médio de fônons com energia E_i . Simplificaremos ainda mais a análise considerando fônons com uma única frequência ω . Se considerarmos $\hbar \omega \ll k_B T$, obtemos $\langle n \rangle \propto T$, implicando

$$S_q \propto I \times T. \quad (4.6.25)$$

4.6. RUÍDO ADICIONAL

Este resultado mostra que baixar a temperatura do cristal pode ser uma boa estratégia para a redução do excesso de ruído.

No próximo capítulo mostraremos os resultados obtidos ao realizar medidas de ruído do campo de bombeio refletido, submetendo o cristal à temperaturas que variam de 20° C a 110° C. Além disso mostraremos, de forma breve, como o modelo é aplicado ao OPO, desenvolvimento feito em detalhes na referência [César 2008]. Apresentaremos a primeira medida de emaranhamento triparte, obtida pelo controle do excesso de ruído desenvolvido a partir das idéias aqui apresentadas.

Capítulo 5

Medidas de Emaranhamento Tripartite no OPO

Sendo os fótons que formam os feixes gêmeos - sinal e complementar - emitidos pelo OPO criados a partir da aniquilação dos fótons do feixe de bombeio, é possível verificar que existe correlação quântica de intensidade entre os mesmos (consequência da conservação de energia), bem como observar uma anti-correlação entre as fases. O caráter quântico dessas grandezas está no fato de que suas flutuações são menores que o limite imposto por um campo clássico (*shot-noise*), sendo o mesmo a nossa unidade padrão de ruído. Estamos interessados em medir as variâncias das flutuações de amplitude (diretamente proporcionais às flutuações de intensidade) e fase dos campos produzido pelo OPO.

Pode-se mostrar que existe emaranhamento entre dois sistemas de variáveis contínuas (no nosso caso, entre os feixes sinal e complementar) quando violamos a desigualdade de Duan *et. al* [Duan 2000], que envolve a soma das variâncias de operadores tipo-EPR, ou através da positividade sob transposição parcial(PPT) [Peres 1996, Simon 2000]. Este último critério é ainda usado para investigar a existência de emaranhamento tripartite entre os feixes produzidos pelo OPO (sinal, complementar e bombeio refletido), além da generalização do critério de Duan desenvolvido por P. van Loock e Braunstein [van Loock 2003].

A primeira dificuldade enfrentada na obtenção do emaranhamento bipartite foi a medida das flutuações de fase dos feixes utilizando a técnica mais comum, a detecção homodina [Bachor 1998], que necessita interferir os feixes com outro campo, com relação de fase bem definida e sintonizável. Os feixes gêmeos possuem comprimentos de onda distintos, o que impossibilita homodinagem sem forçar a degenerescência do OPO. Para contornar este problema, foi utilizada uma técnica auto-homodina, que usa cavidades óticas para transformar o próprio feixe em oscilador local, permitindo ter acesso aos ruídos quânticos [Villar 2008].

O excesso de ruído clássico impediu por muito tempo a verificação experimental do emaranhamento bipartite, pois impedia a observação do caráter quântico das flu-

tuações da soma das fases dos feixes gêmeos na região de parâmetros prevista pela teoria [Villar 2004a]. O grupo de C. Fabre, no laboratório Kastler-Brossel, na França, também buscava este mesmo resultado forçando a degenerescência dos feixes gêmeos, porém foram limitados pelo excesso de ruído clássico na soma das fases dos feixes sinal e complementar. Após ter sido feita uma investigação experimental criteriosa, descobriu-se que próximo ao limiar de oscilação é que haveriam mais chances de evidenciar o fenômeno, como realmente aconteceu [Villar 2005]. No entanto, a origem deste ruído ainda permaneceu desconhecida por muito tempo na literatura.

Recentemente, este mesmo excesso de ruído presente nas fases dos feixes gerados pelo OPO (sinal, complementar e feixe de bombeio refletido) estava impossibilitando a medida do emaranhamento tripartite previsto teoricamente [Villar 2006]. Neste capítulo serão mostrados os resultados que levaram ao controle do ruído espúrio inserido pelo cristal e os primeiros resultados de emaranhamento tripartite no OPO acima do limiar.

5.1 Experimento

O aparato experimental está ilustrado na figura 5.1, o mesmo utilizado nas referências [Cassemiro 2008b, César 2008], a menos de algumas modificações realizadas na montagem do OPO. As mudanças ocorridas serão discutidas ao longo do texto.

Utilizamos um OPO bombeado pelo segundo harmônico (comprimento de onda igual $532nm$) de um laser Nd:YAG (Innolight Diabolo), da empresa alemã Innolight GmbH. O feixe de bombeio, que possui $900mW$ de potência de largura de linha especificada de $1KHz$, passa por uma cavidade de filtro antes de chegar ao OPO, para garantir que os ruídos de fase e amplitude sejam coerentes acima de $21Mhz$. A cavidade de filtro [Willke 1998] é construída em uma base rígida com intuito de obter maior estabilidade mecânica. Sua montagem foi feita em geometria de anel, possui perímetro $L = 1,15m$ e largura de banda $\delta\nu = 2,3(2)Mhz$. É constituída de um espelho esférico côncavo altamente refletor com raio de curvatura $r = 1m$ e polarizadores para altas energias da *Newport Corporation* (modelo 11B00HP.6) que fazem o papel dos espelhos de entrada, $R = 98,8(3)\%$, e saída, $R = 95,7(3)\%$. A polarização do feixe é ajustada de modo que a transmissão da cavidade de filtro seja maximizada. A cavidade atual possui finesse $F = 110$, perdas espúrias iguais a $0,4(2)\%$ e transmissão máxima $T_{max} = 55\%$.

Para manter a cavidade de filtro em ressonância com o feixe de bombeio usamos uma técnica de “lock-in” conhecida como “The dither error signal”. Esta técnica é usada para estabilizar a frequência de um laser [White 1972]. O comprimento da cavidade é modulado (*dithered*) para produzir uma modulação na dessintonia da mesma e o sinal de transmissão é detectado. Este sinal, após ser misturado com o sinal de modulação, fornece um sinal de erro que realimenta o PZT, responsável pelo controle do tamanho da cavidade.

5.1. EXPERIMENTO

Figura 5.1: Esquema do aparato experimental usado para medir o emaranhamento entre os feixes, sinal, complementar e bombeio refletido. Cada feixe é enviado para sua cavidade de análise onde o ruído de fase é convertido em ruído de amplitude sendo registrado por fotodetetores. Após passarem por uma etapa de demodulação os ruídos são enviados para o computador.

O OPO atual possui espelho de entrada com refletibilidade de 70% para o feixe de bombeio ($532nm$) e espelho de saída com refletibilidade de 96% para o infra-vermelho. Ambos os espelhos possuem raio de curvatura $r = 50mm$. O intervalo espectral livre é igual para os três modos $\nu_c = 5.1(1)GHz$ e o comprimento da cavidade sem cristal é $L = 27,7mm$. As finesses da cavidade são $F_0 = 18$ para o campo de bombeio, $F_1 = 135$ para o feixe sinal e $F_2 = 115$ para o feixe complementar, sendo a polarização deste último igual à polarização do feixe de bombeio. Utilizamos um cristal de KTP (potássio-titanil-fosfato, $KTiOPO_4$) da empresa israelense *Raicol Crystals Ltd* com comprimento $\ell = 12mm$, índice de refração médio igual a $1,81(1)$ e coating antirrefletor para ambos os comprimentos de onda. O cristal é mantido à temperatura constante fazendo uso de elementos Peltier¹, que permitem variar a temperatura do cristal entre $-20^\circ C$ e $110^\circ C$ com

¹Um elemento peltier, também conhecido como TEC (Thermoelectrical Cooler) no mercado, é formado por uma série de semicondutores tipo-p e tipo-n soldada entre duas placas de cerâmica colocadas eletricamente em série e termicamente em paralelo. Ao aplicar uma corrente contínua pelo semicondutor ocorre a produção de um gradiente de temperatura resultando em resfriamento do sistema em contato com a face fria e consequente dissipação de calor no reservatório em contato com a face quente. A capacidade de resfriamento (ou aquecimento, dependendo do sentido da corrente aplicada) do peltier depende das especificações do fabricante (máxima corrente e tensão suportadas e máximo gradiente de temperatura,

uma precisão de algumas dezenas de mK . O controle é feito por um circuito eletrônico desenvolvido pelo grupo de Paris (LKB).

Várias mudanças na montagem mecânica do sistema foram necessárias para que fosse possível atingir temperaturas negativas. Ao atingir temperaturas um pouco abaixo de $10^{\circ}C$ observamos condensação de vapor d'água na superfície do cristal, provocando perdas e consequente diminuição no valor da finesse. Para contornar este problema foi necessário trocar a caixa que fazia o isolamento acústico, objetivando fazer vácuo na região da cavidade do OPO. Construímos uma caixa de alumínio-7075 com paredes de espessura $\epsilon \sim 3,2$ cm ligadas por parafusos e cola araldite-epóxi, específica para este tipo de material. Na parte superior da caixa fixamos um *o-ring*² para fazer a vedação com a tampa. O vácuo, estabilizado em $7,6 \cdot 10^{-3}$ mbar, suficiente para os nossos propósitos, é produzido por uma bomba mecânica (modelo SD-40) da empresa Varian. Para a entrada do feixe de bombeio usamos uma janela com coating antirrefletor da Newport (modelo 10BW20-30AR.14) e para a saída dos feixes sinal e complementar utilizamos uma janela com coating antirrefletor da VLOC (modelo WI25.4-6.35FS-2000-1064-0). A montagem está ilustrada na figura 5.2.

Figura 5.2: Fotografia da caixa de alumínio responsável pelo vácuo na região da cavidade do OPO. É possível ver o tubo de alumínio onde é conectada a bomba mecânica, a janela de saída dos feixe em 1064 nm e os fios de cobre responsáveis pela alimentação elétrica.

Após a confecção da caixa, vários testes visando baixar a temperatura do cristal foram iniciados. A peça que sustenta o cristal é feita de cobre e possui tamanho de algumas poucas vezes o tamanho do mesmo, sendo mantida à temperatura constante por um elemento

por exemplo). Para maiores informações ver <http://www.heatsink-guide.com/peltier.htm>

²Anel de borracha, com diâmetro e espessura específicos, desenhado para ser assentado em um sulco e comprimido por duas faces entre as quais se deseja fazer vedação.

5.1. EXPERIMENTO

Peltier (modelo DV-15-07 da empresa Danvic) que dissipa o calor em outra peça inteiriça de cobre (reservatório). O reservatório é fixo em um translador XYZ da Newport e possui mobilidade para que seja ajustado o ângulo de incidência do feixe sobre o cristal. Dessa forma temos liberdade para deslocar o cristal nas direções vertical, horizontal e longitudinal, selecionando as regiões em que o efeito de *gray tracking* [Boulanger 1994] ainda não ocorreu, além de permitir o ajuste do ângulo entre este e a cavidade do OPO.

Nas primeiras tentativas que fizemos, observamos que o reservatório esquentava rapidamente, impossibilitando baixar a temperatura do cristal, devido ao ΔT (diferença de temperatura entre a face quente e a face fria) de funcionamento do peltier. Colocamos dois peltier's em série entre o reservatório e a peça do cristal para aumentar o ΔT de operação e adicionamos fios de cobre, ligando o reservatório à placas de mesmo material que estavam em contato com dois peltier's (modelo CP1.4-71-045L-1) fixados na base da caixa para melhorar a dissipação do calor. Com essa configuração, conseguimos atingir a temperatura de $T = -10^\circ\text{C}$ ³ e fazer as medidas de emaranhamento tripartite que serão discutidas na seção seguinte. Embora tenhamos conseguido realizar medidas com essa nova configuração, alguns problemas relacionados à estabilidade do controle de temperatura surgiram. O circuito eletrônico mantém a temperatura constante somente na peça que sustenta o cristal, deixando o reservatório sofrer variações. Por conta disso, foi necessário trazer, manualmente, a temperatura para o valor desejado, usando o ajuste fino do circuito eletrônico.

Com o intuito de baixar ainda mais a temperatura do cristal e dar maior estabilidade térmica para o reservatório, uma nova montagem foi desenvolvida. A peça onde fica preso o cristal foi mantida, e uma nova configuração de peltiers está sendo usada. Somente um peltier faz o controle de temperatura do cristal (modelo DV-15-07 da empresa Danvic) dissipando calor em uma peça de cobre intermediária que por sua vez é resfriada por outro peltier (modelo UT4-7-30-F1 da empresa Melcor). Este último possui $\Delta T_{max} = 79^\circ\text{C}$. Fixamos no reservatório tubos de cobre por onde fazemos circular água resfriada ($T = 7^\circ$) por uma geladeira. Com esta nova configuração, ilustrada na figura 5.3 é possível manter as temperaturas do reservatório, peça intermediária e cristal, constantes e iguais a 17°C , -16°C e -20°C , respectivamente. O restante do aparato experimental se manteve o mesmo.

Os feixes sinal e complementar, separados por polarização, são enviados às suas respectivas cavidades de análise onde o ruído de fase é convertido em ruído de amplitude. Essas cavidades tem espelho de acoplamento esférico com raio de curvatura $r = 10\text{cm}$ e reflexão $R = 95\%$ (Innnolight GmbH) e espelhos planos altamente refletivos $R > 99,8\%$ (modelo 10QM20HM.15 da Newport). Dessa forma, temos uma finesse $F = 130$ e uma

³As medidas de temperaturas são realizadas com o uso de termopares. O princípio de funcionamento desses dispositivos é baseado no *efeito Seebeck* que, grosso modo, pode ser enunciado como a conversão de diferença de temperatura em eletricidade. O oposto do *efeito Peltier*.

Figura 5.3: Estrutura de cobre responsável pela sustentação e resfriamento do cristal. À esquerda o perfil da estrutura que nos permite visualizar o peltier que controla a temperatura do cristal (peça branca à esquerda), os tubos de cobre por onde passa água à 7°C e o peltier responsável pelo resfriamento bruto do sistema. À direita mostramos essa estrutura fixada dentro da caixa de vácuo (figura 5.2) com as mangueiras vindas da geladeira instaladas.

largura de banda $\delta\nu_{1,2} = 14(1)\text{MHz}$, fornecendo uma completa rotação da elipse de ruído para frequência de análise mínima de 21MHz . O feixe de bombeio refletido é separado do feixe incidente utilizando um isolador ótico (rotator de Faraday) e um cubo divisor de feixes (PBS) e enviado para sua cavidade de análise. Para este feixe temos uma cavidade de análise com espelho de acoplamento com raio de curvatura $r = 10\text{cm}$ e reflexão $R = 96\%$ e demais espelhos, planos, com reflexão $R > 99,8\%$. Isso nos dá uma finesse $F = 110$, largura de banda $\delta\nu_0 = 12(1)\text{MHz}$ e perdas espúrias de 2% . A fração da intensidade do feixe refletido é $R_{\min} = 0,77(1)$ para os feixes gêmeos e $R_{\min} = 0,58(2)$ para o bombeio refletido. As cavidades também são construídas em peças rígidas de alumínio para evitar ressonâncias mecânicas, mantidas à temperatura próximas à ambiente com precisão de $0,1^\circ$ e feitas com características similares para garantir que o giro da elipse de ruído seja feito de forma síncrona.

As medidas de ruído dos três feixes são provenientes de fotodetetores que medem somente intensidade dos campos através de efeito fotoelétrico. Para o infravermelho são usados fotodiodos da marca Epitaxx ETX300 com eficiência de $95(2)\%$ e para o feixe de 532nm usamos o modelo Hamamatsu S5973-02 com eficiência de $94(2)\%$. As fotocorrentes produzidas pelos fotodiodos são convertidas em voltagem por meio de um circuito de amplificação e separadas em duas componentes de frequência: componente DC, baixa frequência, e componente HF, alta frequência. Os sinais DC são as intensidades médias dos feixes e denotados nos programas de análise por DC_0 , DC_1 , DC_2 . A eficiência total do sistema, levando em consideração a passagem pela ótica envolvida, é de 87% para os feixes gêmeos e 65% para o bombeio.

5.1. EXPERIMENTO

Os sinais HF, onde estão as flutuações quânticas de intensidade, são enviados a um demodulador onde é realizado o batimento com uma onda senoidal, sinal de referência, que determina a frequência de análise $\Omega = 21$ MHz. As componentes de baixa frequência resultantes do batimento (menor que 300 kHz) são denotadas HF_0 , HF_1 , HF_2 . Utilizamos na entrada do demodulador um filtro ativo com largura de banda igual a 200kHz e uma atenuação de 40dB para filtrar a componente de frequência em 12 MHz usada pela eletrônica do Diabolo para travar a geração do segundo harmônico em 532 nm. Essa componente é tão intensa que se faz necessário filtrar também seu segundo harmônico, em 24 MHz a fim de evitar a saturação da eletrônica.

Figura 5.4: Foto da montagem na sua configuração atual. Na parte inferior vemos a cavidade de filtro dentro de uma grande caixa de acrílico e à direita o laser Diabolo. A cavidade do OPO encontra-se dentro da caixa preta com bolas brancas e as cavidades de análise dentro das pequenas caixas de acrílico.

Os dados são adquiridos pelo computador, por meio de um programa em *LabView*, através da placa de aquisição da National Instruments, NI-DAQ modelo PCI6110 conectada a uma placa conversora analógico-digital (A/D) da mesma empresa (modelo PCI-2110). O programa *LabView* divide a série temporal completa de cada varredura em conjuntos de N pontos e calcula para cada conjunto os valores de $\langle DC_i \rangle_N$ e $\Delta_N^2 HF_i$ ($i=0,1,2$), onde as médias são tomadas em N pontos. Os sinais são lidos a uma taxa de 600kHz , determinada pela largura de banda do demodulador, e o número de pontos por aquisição é $N = 450.000$, o que faz termos o compromisso de adotar um tempo de varredura igual a 750 ms. Para os feixes gêmeos, medimos primeiramente um fator de ganho g que compensa a diferença de resposta eletrônica para os canais HF_1 e HF_2 . Medimos também os ruídos eletrônicos $\Delta_N^2 HF_i^{elet}$ para os três canais na ausência de luz. Feito isso, o programa calcula os ruídos de soma, subtração e correlação (e estes mesmos ruídos normalizados pelo DC) entre os três feixes, subtraindo o ruído eletrônico medido.

Mostramos a foto do aparato experimental na figura 5.4.

Todas as medidas são normalizadas pelo *shot-noise*. Para os feixes sinal e complementar usamos o feixe de 1064 nm do Diabolo ilustrado na figura 5.1. A medida é realizada com a técnica de detecção balanceada descrita na seção 2.4. Para o feixe de bombeio o *shot-noise* é obtido medindo o ruído de amplitude em função da intensidade, pois já temos a garantia que o mesmo é um feixe coerente⁴. São adquiridos 600 mil pontos para cada valor de intensidade calculando a variância em grupos de 10 mil pontos. Como esperado, as variâncias como função da intensidade fornecem uma reta cujo coeficiente angular é o valor do *shot-noise*.

Nas próximas seções apresentamos os resultados obtidos no experimento. Primeiramente, iremos mostrar como o modelo teórico se ajusta aos dados experimentais. Em seguida veremos como o excesso ruído de fase do feixe de bombeio refletido se comporta ao mudarmos a intensidade do feixe dentro do cristal. Apresentamos também um importante resultado que indica como podemos amenizar este excesso de ruído através de um parâmetro físico controlável, a temperatura. Por fim, exibimos os resultados que atestam a presença de emaranhamento tripartite em nosso sistema, consequência de grandes esforços despendidos para compreender a origem do ruído espúrio [Cassemiro 2008b, César 2008].

5.2 Caracterização Experimental do Excesso de Ruído

A caracterização do excesso de ruído existente em nosso sistema foi o tema principal de uma das dissertações do grupo [César 2008]. No referido trabalho, o sistema utilizado é o mesmo descrito na seção anterior, a menos da mecânica responsável pelo vácuo e refrigeração do cristal.

Primeiramente, realizamos medidas do excesso de ruído em cada modo envolvido no OPO separadamente. Para os feixes sinal e complementar, utilizamos o feixe de 1064 nm do Diabolo, ilustrado na figura 5.1, ajustando sua polarização. Mantemos o feixe de bombeio sempre abaixo do limiar de oscilação, evitando a conversão paramétrica, sempre garantindo a ressonância com apenas um dos modos. Os termos $\Delta^2 q(\Omega)_k$ ($k=0,1,2$), dados pela equação (4.6.23), e sua dependência com a potência intracavidade foram obtidos através da medida do excesso de ruído do feixe refletido (532 nm) e do feixe transmitido (1064).

Apresentamos na figura 5.5 os resultados das medidas de quadratura amplitude e fase dos feixes bombeio refletido (à esquerda), sinal e complementar (à direita). Para os três campos, observamos que o ruído de amplitude permanece constante e igual ao *shot-noise*. Já o ruído de fase apresenta varia linearmente com a potência dos feixes, em pleno acordo o modelo proposto. É importante mencionar que ao medir o ruído dos feixes com

⁴Essa verificação foi feita de modo independente realizando homodinagem com o vácuo.

5.2. CARACTERIZAÇÃO EXPERIMENTAL DO EXCESSO DE RUÍDO

a cavidade vazia (sem cristal) o ruído das quadraturas se reduz ao ruído quântico padrão, deixando claro que o cristal atua como fonte de ruído espúrio.

Figura 5.5: Ruído de fase e amplitude dos feixes bombeio refletido (à esquerda), sinal e complementar (à direita) como função da potência de saída. Para os três feixes, o ruído de amplitude sempre se mantém constante e igual ao *shot-noise*, enquanto o ruído de fase aumenta linearmente com a potência, conforme o esperado pelo modelo.

Após fazer o ajuste linear das curvas e o cálculo da potência dos feixes intracavidade, obtemos os coeficientes η_{ij} da equação (4.6.23),

$$\eta_{00} = 0,53/W, \quad \eta_{11} = 0,15/W \quad \text{e} \quad \eta_{22} = 0,14/W. \quad (5.2.1)$$

Foi observada uma alteração nestes valores de acordo com o ponto de incidência do feixe no cristal, de modo que a diferentes posições do mesmo acarretavam mudanças da ordem de 20% no valor dos coeficientes.

Também foram realizadas medidas de correlação entre os ruídos de fase campos, equação (4.6.23) para $i \neq j$ ($i, j = 0, 1, 2$). Através do controle de temperatura, mantivemos apenas dois modos ressonantes com a cavidade. Apresentamos na figura 5.6 os gráficos das medidas de correlação entre o feixes sinal e bombeio refletido. À esquerda temos a situação em que o potência do feixe sinal foi mantida fixa, com a variação somente da potência do bombeio refletido. A situação contrária é ilustrada à direita. Como resultado, as curvas mostram a dependência da correlação com a raiz quadrada da potência de cada feixe. O comportamento envolvendo os pares bombeio refletido e complementar, e feixes gêmeos é similar ao apresentado. Do ajuste, podemos calcular os seguintes termos de acoplamento

$$\eta_{01} = 0,14/W, \quad \eta_{02} = 0,15/W \quad \text{e} \quad \eta_{12} = 0,087/W. \quad (5.2.2)$$

Com estes parâmetros é possível calcular o efeito do excesso de ruído no OPO em

regime de oscilação. Faz-se isso adicionando o vetor

$$\delta\vec{q} = [0, \delta q_0, 0, \delta q_1, 0, \delta q_2]^T \quad (5.2.3)$$

no lado direito da equação (4.4.4). Esse termo adicional contém os termos de flutuação, dados pela equação (4.6.16), referentes ao excesso de ruído na fase dos feixes. Repetindo o procedimento descrito na seção 4.4, calculamos a matriz de covariância do OPO (V_{OPO}),

$$V_{OPO} = \mathbf{I} + \mathbf{V}_{\text{puro}} + \mathbf{V}_{\text{perdas}} + \mathbf{V}_{\text{ruído}}, \quad (5.2.4)$$

que difere da equação (4.4.11) apenas pelo acréscimo do termo $\mathbf{V}_{\text{ruído}}$, dado pela expressão

$$\mathbf{V}_{\text{ruído}} = \mathbf{T}_u \mathbf{M}_A^{-1}(\Omega') \mathbf{V}_Q \mathbf{M}_A^{-1}(-\Omega')^T \mathbf{T}_u. \quad (5.2.5)$$

Figura 5.6: Medidas das correlações de fase entre os feixes bombeio refletido e sinal como função, da potência do bombeio refletido (à esquerda) e do feixe sinal transmitido (à direita). Nos dois casos a dependência com a raiz quadrada das potências, prevista pelo modelo, está de bom acordo com os resultados experimentais. O mesmo comportamento foi obtido ao analisar ao considerar os pares bombeio refletido-complementar e complementar-sinal.

Este termo se refere ao ruído interno, adicionado pelo cristal, dependente da matriz de covariância $\mathbf{V}_Q(\Omega) = \vec{Q}(\Omega)\vec{Q}(-\Omega)^T$, afetada pela interação com a cavidade e pelo acoplamento dado pela matriz de arrasto $\mathbf{M}_A$ (equação (4.4.4)). Os termos da matriz $\mathbf{V}_Q$ são dados pela expressão (4.6.23), sendo os coeficientes η_{ij} dados em (5.2.1) e (5.2.2). Os detalhes dessa análise e os ajustes obtidos envolvendo os três campos do OPO são encontrados na referência [César 2008].

Os resultados apresentados nas figuras 5.5 e 5.6 nos mostram que o modelo apresentado está em pleno acordo com o comportamento do excesso de ruído de fase inserido pelo cristal

em cada campo. Além disso, este mesmo modelo sugere alternativas para o possível controle e redução desse ruído espúrio. Este será o tema discutido nas duas próximas seções.

5.3 Dependência do Ruído com a Intensidade

O modelo apresentado na seção 4.6 mostra que o ruído de fase do feixe refletido, além de depender linearmente da potência, depende da área efetiva do feixe dentro do cristal devido ao acoplamento da luz espalhada com o modo da cavidade. Para analisar o efeito da intensidade foi construída uma cavidade (figura 5.7) quase concêntrica feita com espelhos de curvatura $R = 25cm$, separados por $62.5mm$, com cintura do feixe $\omega_0 = 27.8\mu m$. Dentro do cristal o comprimento de Rayleigh é $z'_0 = n\pi\omega_0^2 = 8.13(10)mm$.

Figura 5.7: Cavidade ótica construída para estudar a dependência do ruído com a intensidade do feixe intracavidade. Conforme ilustrado na figura, o cristal está na posição 0 mm. O deslocamento ocorreu aproximando-o do espelho de entrada(à direita).

As medidas foram feitas deslocando o cristal na mesma linha do feixe, aproximando-o de um dos espelhos. Dessa forma, tínhamos uma cintura do feixe correspondente a cada posição, variando assim a intensidade. Para cada localização escolhemos cinco pontos de incidência diferentes, pois percebemos de modo empírico que o ruído de fase do feixe de bombeio refletido sofria pequenas alterações quando mudávamos a posição transversal do cristal dentro da cavidade. Ao fazer $\omega_i(z) = \omega_j(z)$ na equação (4.6.21), tomando os limites de integração $[z - \ell/2, z + \ell/2]$, obtemos o valor do coeficiente de acoplamento η_{00} para diferentes posições z do cristal, através da expressão

$$\frac{\ell\lambda}{\pi w_{eff}^2(z)} = n \left\{ \arctg \left(\frac{2z + \ell}{2z'_0} \right) - \arctg \left(\frac{2z - \ell}{2z'_0} \right) \right\}. \quad (5.3.1)$$

Vemos que este termo depende somente de parâmetros geométricos da cavidade. Na figura 5.8, estão ilustrados os resultados das medidas do coeficiente de acoplamento η_{00} e o ajuste do modelo teórico, observando bom acordo entre a teoria e os dados experimentais.

Figura 5.8: Dependência da constante de acoplamento η_{00} (equação (4.6.23)) em função do deslocamento do cristal dentro da cavidade.

Percebemos que a redução da cintura do feixe dentro da cavidade provoca o aumento do ruído espúrio produzido. A diminuição da área efetiva do feixe dentro do cristal provocaria um aumento da constante de acoplamento do campo e consequentemente redução da potência de limiar. Isso sugere que mudanças na geometria da cavidade não provocariam moderação relevante do excesso de ruído, pois o efeito de baixar a potência de limiar seria compensado pelo aumento da intensidade do campo. Portanto, a investigação de outros parâmetros controláveis a fim de obter redução e controle do excesso de ruído se faz necessária.

5.4 Dependência do Ruído com a Temperatura

Para analisar o ruído em função da temperatura utilizamos a montagem original do OPO. Como a configuração inicial não nos permitia ir abaixo de 10°C realizamos medidas a valores positivos de temperatura, partindo de 20°C e chegando em 110°C. Em todos os valores de temperatura sempre tivemos o compromisso de manter o mesmo valor para a finesse e potência de limiar do OPO. Os resultados, apresentados na figura 5.9, podem ser ajustados por $\eta_0 = [5,42(30) \cdot 10^{-3} \times T/C + 0.37(01)]W$.

Este aumento do ruído com a temperatura está qualitativamente de acordo com o modelo, mesmo o ajuste fornecendo ruído nulo para $T = -68^\circ \text{C}$. Não podemos afirmar que o comportamento linear irá se manter para temperaturas ainda mais baixas visto que não foi possível medir o excesso de ruído mantendo o sistema idêntico em todos os valores de temperatura, havendo a possibilidade de existir um comportamento mais complexo

Figura 5.9: Dependência da constante de acoplamento η (equação (4.6.23)) em função da temperatura do cristal.

neste regime. No entanto, é provável que exista uma diminuição de 30% do ruído de fase ao baixar temperatura do cristal de $T = 22^\circ\text{C}$ para $T = -10^\circ\text{C}$, motivando ainda mais a busca pelo emaranhamento tripartite.

5.5 Medidas de Emaranhamento Tripartite

Propriedades quânticas no feixe de bombeio refletido foram pela primeira vez demonstradas por Kasai *et al* [Kasai 1997]. No trabalho referido, foi observado que em um OPO triplamente ressonante o feixe refletido pela cavidade possui significativo grau de *squeezing*. A compressão na quadratura fase foi observada [Zhang K.S. 2001], no entanto, nenhuma análise envolvendo os ruídos dos três feixes foi realizada.

A existência de correlações quânticas entre os três feixes e consequente emaranhamento foram demonstradas teoricamente por Villar *et al* [Villar 2006]. No processo de conversão paramétrica, existe um acoplamento entre as intensidades dos feixes gerado pelo efeito depleção do bombeio (um fóton do feixe de bombeio é aniquilado gerando os fótons dos feixes sinal e complementar) e uma relação de fase bem definida entre os três campos. Estas são consequências da conservação de energia ($\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$), que gera uma correlação de intensidades e anti-correlação nas fases dos campos, dando origem ao emaranhamento

tripartite.

Os primeiros resultados envolvendo os três campos mostram que ao incluir as flutuações de amplitude do feixe de bombeio⁵ é possível obter *squeezing* na soma das fases dos feixes sinal e complementar melhorando a violação da desigualdade 5.5.1 [Cassemiro 2007a]. Alguns meses depois foram realizadas medidas buscando o emaranhamento tripartite [Cassemiro 2007b]. No entanto, devido ao excesso de ruído espúrio inserido pelo cristal dentro da cavidade, não foi possível obter a violação das desigualdades 5.5.2 e 5.5.3, mesmo observando compressão na soma das amplitudes dos feixes bombeio e sinal.

Para demonstrar o emaranhamento tripartite entre os feixes sinal, complementar e bombeio utilizaremos os critérios de separabilidade tripartite de P. van Loock e A. Furusawa [van Loock 2003] (o mesmo utilizado nos trabalhos citados no parágrafo anterior) e positividade sob transposição parcial (PPT) [Peres 1996, Simon 2000]. Como exposto no capítulo 3, estes critérios mostram que se forem violados nenhum dos três modos pode ser descrito separadamente dos outros dois.

5.5.1 Critério de separabilidade de P. van Loock e A. Furusawa

Segundo este critério, o emaranhamento tripartite é demonstrado quando violadas pelo menos duas das seguintes desigualdades:

$$V_0 = \Delta^2 \hat{p}_{12}^- + \Delta^2 (\hat{q}_{12}^+)' \geq 2, \quad (5.5.1)$$

$$V_1 = \Delta^2 \hat{p}_{01}^+ + \Delta^2 (\hat{q}_{01}^-)' \geq 2, \quad (5.5.2)$$

$$V_2 = \Delta^2 \hat{p}_{02}^+ + \Delta^2 (\hat{q}_{02}^-)' \geq 2, \quad (5.5.3)$$

onde simplificamos a notação definindo,

$$\Delta^2 \hat{p}_{12}^- = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{2}} \right), \Delta^2 (\hat{q}_{12}^+)' = \Delta^2 \left(\frac{\hat{q}_1 + \hat{q}_2}{\sqrt{2}} \right) - \beta_0, \quad (5.5.4)$$

$$\Delta^2 \hat{p}_{0j}^+ = \Delta^2 \left(\frac{\hat{p}_0 + \hat{p}_j}{\sqrt{2}} \right), \Delta^2 (\hat{q}_{j0}^-)' = \Delta^2 \left(\frac{\hat{q}_j - \hat{q}_0}{\sqrt{2}} \right) - \beta_j, \quad (5.5.5)$$

onde β_j ($j = 0, 1, 2$), dados pelas expressões (4.5.8), fornecem as correções advindas do terceiro feixe, consequência das correlações existentes com o mesmo.

É possível escrever os termos acima em função dos elementos da matriz de covariância (4.4.14),

$$2\Delta^2 \hat{p}_{ij}^\pm = \langle \delta \hat{p}_i^2 \rangle + \langle \delta \hat{p}_j^2 \rangle \pm 2\langle \delta \hat{p}_i \delta \hat{p}_j \rangle, \quad (5.5.6)$$

$$2\Delta^2 \hat{q}_{ij}^\pm = \langle \delta \hat{q}_i^2 \rangle + \langle \delta \hat{q}_j^2 \rangle \pm 2\langle \delta \hat{q}_i \delta \hat{q}_j \rangle, \quad (5.5.7)$$

sendo $i \in \{0, 1, 2\}$, $i \neq j$.

⁵Neste trabalho o grupo ainda não fazia uso da cavidade de análise para 532 nm, sendo necessário usar a dessintonia na cavidade do OPO para converter o ruído de fase em ruído de amplitude.

5.5. MEDIDAS DE EMARANHAMENTO TRIPARTITE

Para testar essas desigualdades é necessário medir diferentes combinações ruídos dos três feixes, medidas de ruído da soma e subtração das quadraturas de dois feixes, também fornecidos pelas medidas dos termos da matriz de covariância (equações (5.5.6) e (5.5.7)). A primeira desigualdade (5.5.1) já sabemos ser claramente violada, pois refere-se ao emaranhamento entre os feixes gêmeos [Villar 2005, Cassemiro 2007a]. As demais desigualdades envolvem combinações entre um dos gêmeos e o feixe bombeio refletido. Para ter acesso às variâncias e às correlações, fazemos medidas com as dessintonias das cavidades variando de forma síncrona de modo a obter a mesma quadratura de cada feixe em um dado instante. A quadratura amplitude é obtida para grandes dessintonias⁶ ($|\Delta| \gtrsim 3$) e para dessintonia nula ($|\Delta| = 0$), enquanto a quadratura fase é registrada quando $|\Delta| \approx \pm 0,5$. As correlações são obtidas de forma análoga. Para dessintonias nulas obtemos a correlação entre as amplitudes dos feixes, o mesmo ocorrendo para $|\Delta| \gtrsim 3$. Em $|\Delta| \approx \pm 0,5$ obtemos as correlações entre as fases.

O cristal foi mantido à temperatura constante $T = -10^\circ\text{C}$ com uma precisão de algumas dezenas de mK , implicando em uma diferença de 2,5 nm entre o comprimento de onda dos feixes gêmeos. O limiar de oscilação era aproximadamente 66 mW. Um fato curioso foi a diminuição do limiar de oscilação com o decréscimo da temperatura. Para temperatura ambiente a potência de limiar ficava em torno de 70 mW. Observamos que tal fenômeno só acontecia em regiões específicas do cristal, sendo um trabalho penoso⁷ encontrar o ponto de incidência do laser que nos fornecia menor potência de limiar, devido ao processo de absorção do cristal. As medidas foram realizadas com frequência de análise $\Omega = 21$ MHz.

Na figura 5.10 está ilustrada a melhor medida de emaranhamento tripartite (segundo este critério), obtida com uma potência bombeio $\sigma = 1,24$, onde podemos ver os valores de soma (em vermelho) e subtração (em preto) das quadraturas de cada par de feixes. A terceira curva (em azul) nos mostra a correção oriunda das correlações envolvendo o terceiro feixe. Na figura 5.10(a) o termo de correção é subtraído da curva soma, enquanto que nas figuras 5.10(b) e 5.10(c) o termo foi descontado da curva subtração.

Na figura 5.10(a) temos as correlações entre os feixes gêmeos e mais a curva de correção referente a correlações dos mesmos com o feixe de bombeio. Observamos o já esperado compressão em $\hat{p}_-$ com ruído igual a $\Delta^2 \hat{p}_{12}^- = 0,51(1)$. Para a soma das fases obtemos $\Delta^2 \hat{q}_{12}^+ = 1,14(4)$. Com estes valores é possível violar a desigualdade de Duan, $\Delta^2 \hat{p}_{12}^- +$

⁶Nesse caso, a cavidade funciona como um espelho, não havendo giro na elipse de ruído.

⁷Na atual montagem, deixar o OPO preparado para realizar boas medidas requer alinhamento à temperatura ambiente com a caixa de vácuo aberta. Temos que minimizar a potência de limiar nessas condições, visto que após feito o vácuo não há possibilidade de mexer na posição do cristal. Isto feito, resta-nos torcer para que a posição escolhida no início do processo nos dê uma baixa potência de limiar à baixas temperaturas. Caso não haja sucesso é necessário elevar a temperatura, quebrar o vácuo e reiniciar o alinhamento. O tempo despendido no processo (alinhamento, vácuo e resfriamento) é de aproximadamente uma hora.

Figura 5.10: Medidas das combinações de ruído de quadraturas dos feixes sinal, complementar e bombeio refletido, tomados aos pares: soma (em vermelho), subtração (em preto) e termo de correção (em azul). Em (a) obtemos os valores das combinações de quadratura que permitem averiguar a desigualdade V_0 , (b) V_1 e (c) V_2 . Em todos os gráficos, para $(|\Delta| \gtrsim 3)$ obtemos os valores das combinações da quadratura amplitude de dois campos e para $|\Delta| \approx \pm 0,5$ obtemos as combinações de fase. O resultado é $V_0 = 1,21(7) < 2$, $V_1 = 1,91(6) < 2$ e $V_2 = 1,92(7) < 2$.

$\Delta^2 \hat{q}_{12}^+ = 1.65(5) < 2$ [Duan 2000], evidenciando o emaranhamento entre os feixes sinal e complementar. Além disso, com a soma corrigida, obtemos $\Delta^2(\hat{q}_{12}^+)' = 0,70(7)$. Isso nos dá $V_0 = \Delta^2 \hat{p}_{12}^- + \Delta^2(\hat{q}_{12}^+)' = 1,21(7) < 2$. É válido notar que neste caso temos compressão em $\Delta^2(\hat{q}_{12}^+)'$, algo não observado antes de levar em consideração as correlações com o feixe de bombeio.

Nas figuras 5.10(b) e 5.10(c) apresentamos os resultados referentes a correlações envolvendo um feixe gêmeo e o bombeio refletido com a correção da curva de subtração fornecida pelo feixe restante. Os dois gráficos apresentam características similares. O primeiro termo da inequação (5.5.2) é o ruído da soma das amplitudes dos feixes bombeio refletido e sinal. O valor medido é $\Delta^2 \hat{p}_{01}^+ = 1,02(1)$. Para subtração das fases

5.5. MEDIDAS DE EMARANHAMENTO TRIPARTITE

Figura 5.11: Curvas de correlação e ruído de quadratura dos feixes sinal e complementar. As linhas contínuas são ajustes feitos usando apenas parâmetros do sistema. Para dessintonias muito grandes ($|\Delta| \gtrsim 3$) e dessintonias nulas ($|\Delta| = 0$) obtemos as correlações de amplitude dos campos assim como obtemos os ruídos individuais dos mesmos (à direita). Medidas relacionadas à quadratura fase ocorrem em $|\Delta| \approx \pm 0,5$.

obtemos $\Delta^2 \hat{q}_{01}^- = 1,53(4)$. Se considerarmos o termo de correção o ruído passa a ser $\Delta^2 (\hat{q}_{01}^-)' = 0,89(6)$. Diferente do observado na referência [Cassemiro 2007b] a inequação (5.5.2) é violada, $V_1 = \Delta^2 \hat{p}_{01}^+ + \Delta^2 (\hat{q}_{01}^-)' = 1,91(6) < 2$, indicando a existência de emaranhamento entre um feixe em 1064 nm e o bombeio refletido. O mesmo raciocínio é empregado na análise da figura (c), onde obtemos $\Delta^2 \hat{p}_{02}^+ = 1,01(1)$ e $\Delta^2 (\hat{q}_{02}^-)' = 0,91(7)$, resultando em $V_2 = \Delta^2 \hat{p}_{02}^+ + \Delta^2 (\hat{q}_{02}^-)' = 1,92(7) < 2$. Conseguimos, então, violar as três desigualdades do critério de P. van Loock e A. Furusawa (embora V_1 e V_2 marginalmente), fato que aponta a existência de emaranhamento tripartite.

Os resultados obtidos, também são consequência da medida dos elementos da matriz de covariância (figura 5.11),

$$V_{OPO} = \begin{pmatrix} 1,27(1) & 0 & -0,52(1) & 0 & -0,54(1) & 0 \\ 0 & 1,79(4) & 0 & 0,43(4) & 0 & 0,63(3) \\ -0,52(1) & 0 & 1,81(1) & 0 & 1,31(3) & 0 \\ 0 & 0,43(4) & 0 & 2,14(1) & 0 & -1,14(4) \\ -0,54(1) & 0 & 1,31(3) & 0 & 1,83(3) & 0 \\ 0 & 0,63(3) & 0 & -1,14(4) & 0 & 2,43(3) \end{pmatrix}, \quad (5.5.8)$$

que contém toda a informação acerca dos estados analisados, também usada para calcular 5.5.4 e 5.5.5, por meio de 5.5.6 e 5.5.7. Todas as curvas foram obtidas de uma única medida onde os ruídos de cada feixe foram registrados no mesmo instante.

Analisamos também o valor das desigualdades para diferentes potências de bombeio (figura 5.12) obtendo o intervalo, $1,18 < \sigma < 1,35$, em que onde podemos observar a presença de emaranhamento entre os três feixes.

Sabemos que o critério analisado nesta seção é apenas *suficiente*, no sentido de que existem estados emaranhados que não violam as desigualdades (5.5.1) - (5.5.3). Este pode ser o caso dos feixes sinal, complementar e bombeio. Temos então que analisar outro critério mais restritivo que permita identificar qualquer emaranhamento presente em nosso sistema, sendo assim *necessário e suficiente*. Apresentamos na próxima seção a aplicação do critério PPT que se mostra *necessário e suficiente* para qualquer partição $1 \times (N - 1)$ [Simon 2000], em que N é o numero de subsistemas.

Figura 5.12: Valores de V_0 , V_1 , e V_2 para diferentes potências de bombeio σ . Observamos que $1.18 < \sigma < 1.35$ é uma boa faixa de valores de potência onde temos a indicação de emaranhamento tripartite.

5.6 Emaranhamento Tripartite segundo PPT

Como foi visto na seção 4.5 o critério PPT elaborado por Peres é muito útil para identificar emaranhamento em sistemas quânticos bipartites descritos por variáveis discretas, sendo um critério mais restritivo quando comparado com a violação das desigualdades de Bell [Peres 1996]. Para sistemas descritos por variáveis contínuas, foi demonstrado por Simon [Simon 2000] que o critério PPT também é de grande utilidade, tornando-se uma condição *necessária e suficiente* quando os estados envolvidos são Gaussianos. Como discutido em [Cassemiro 2008b], os estados gerados pelo OPO são Gaussianos, sendo lícita a aplicação do critério de Positividade sob Transposição Parcial (PPT).

Tudo o que precisamos agora é obter a matriz de covariância do sistema e fazer a transposição parcial em relação ao sistema que desejamos analisar. Vimos que fazer esta operação é equivalente a fazer uma reflexão especular na quadratura $\hat{q}$ do sistema.

5.6. EMARANHAMENTO TRIPARTITE SEGUNDO PPT

Para obter os autovalores simpléticos ν_0 , ν_1 e ν_2 seguimos o procedimento descrito na seção (3.2). Multiplicamos a matriz resultante da transposição parcial referente ao sistema j ($j = 0, 1, 2$) por Ω (equação 3.3.2) e calculamos a matriz $\vartheta = -(V\Omega)^2$ (equação 3.3.22). Em seguida, calculamos a raiz quadrada dos autovalores de ϑ e selecionamos o menor autovalor ν_j .

Consideraremos a matriz de covariância obtida com $\sigma = 1,34$,

$$V_{OPO} = \begin{pmatrix} 1,52(1) & 0 & -0,73(1) & 0 & -0,76(3) & 0 \\ 0 & 1,50(3) & 0 & 0,46(4) & 0 & 0,59(3) \\ -0,73(1) & 0 & 1,75(1) & 0 & 1,27(1) & 0 \\ 0 & 0,46(4) & 0 & 2,35(2) & 0 & -0,83(4) \\ -0,76(3) & 0 & 1,27(1) & 0 & 1,80(5) & 0 \\ 0 & 0,59(3) & 0 & -0,83(4) & 0 & 2,67(1) \end{pmatrix}. \quad (5.6.1)$$

Para a matriz de covariância (5.6.1) obtemos $\nu_0 = 0,92(1)$, $\nu_1 = 0,75(1)$ e $\nu_2 = 0,75(1)$. Estes dois últimos referem-se ao emaranhamento existente entre o feixe sinal (complementar) e o sistema composto pelos feixes bombeio refletido mais o complementar (sinal). O valor encontrado para ν_0 nos diz que o tão procurado emaranhamento entre o bombeio refletido mais o sistema composto pelos feixes gêmeos agora foi identificado. Temos, enfim, emaranhamento tripartite.

Apresentamos na figura 5.13 valores de ν_0 , ν_1 e ν_2 obtidos para diferentes potências de bombeio σ . A região $1.15 < \sigma < 1.53$ atesta a existência de emaranhamento tripartite pois temos $\nu_0 < 1$ para toda esta faixa de valores. Já ν_1 e ν_2 são menores que um para quase todas as potências estudadas, fato que reflete o emaranhamento entre os feixes sinal e complementar.

Neste mesmo gráfico estão os valores de ν definidos como sendo autovalores simpléticos adquiridos sem realizar transposição parcial em nenhum dos subsistemas. Como esperado, $\nu > 1$ para toda faixa de potências, indicando que temos uma matriz com significado físico (como argumentado em [Peres 1996]). Note ainda que $\nu > 1$ por causa das perdas espúrias não nulas para todos os feixes e pelo excesso de ruído adicionado. Caso não fosse este o caso, o gráfico apresentado estaria mais próximo do esboçado na figura (4.7).

Para finalizar, apresentamos os critérios de van Loock *et al.* e PPT em um mesmo gráfico (figura 5.14) com a finalidade de perceber o quanto o segundo é mais robusto que o primeiro. É notória a maior sensibilidade do critério PPT para identificar emaranhamento no sistema. Comparando as variáveis ν_1 e V_1 , constatamos um aumento da região onde o emaranhamento entre o feixe de bombeio e os feixes gêmeos é observado, além de uma violação mais expressiva ao usar PPT. O mesmo comportamento é observado ao comparar os valores de ν_0 e V_0 .

Nota-se que o critério PPT é muito menos sensível ao ruído espúrio inserido pelo cristal, possibilitando verificar o emaranhamento entre os feixes gêmeos em uma potência bem superior ao limite visto em van Loock *et al.*

Figura 5.13: Valores dos autovalores simpléticos ν_0 , ν_1 , e ν_2 para diferentes potências de bombeio σ . Também estão expostos os os valores de ν , autovalores simpléticos obtidos sem a realização da transposição parcial.

Figura 5.14: Comparação entre os critérios de van Loock *et al.* e PPT. Esta análise deixa clara a maior robustez do critério PPT, pois, além de possibilitar uma violação mais expressiva, estende a faixa de potência onde é medido o emaranhamento tripartite.

Ao comparar os dois critérios vemos que existem estados emaranhados que não são identificados pelo critério da soma de variâncias e que se tornam evidentes pelo critério PPT. Isto pode ser justificado por ser o critério de van Loock *et al.* somente suficiente, existindo estados emaranhados que não violam as desigualdades (5.5.1) - (5.5.3). Sendo o PPT suficiente e *necessário* (para estados gaussianos, como é o caso dos feixes aqui tratados) estes mesmos estados são identificados. Obtivemos, então, após importantes evidências [Casseiro 2007a, Casseiro 2007b], a primeira comprovação experimental

5.6. *EMARANHAMENTO TRIPARTITE SEGUNDO PPT*

de emaranhamento envolvendo os três campos do OPO acima do limiar. Os resultados obtidos são a primeira verificação de emaranhamento envolvendo todos os campos produzidos pelo OPO acima do limiar.

Conclusão e Perspectivas

Neste trabalho foi apresentada a primeira verificação experimental de emaranhamento tripartite entre os feixes sinal, complementar e bombeio refletido, produzidos pelo Oscilador Paramétrico Ótico (OPO) acima do limiar. A análise foi realizada através da aplicação do critério de soma de variâncias de van Loock e Furusawa [van Loock 2003], e positividade sob transposição parcial (PPT) [Peres 1996] de Peres-Simon [Simon 2000]. Com o critério de van Loock e Furusawa obtivemos a indicação de emaranhamento tripartite em nosso sistema, confirmado por meio do critério PPT.

A observação deste fenômeno só foi possível após intensa investigação do ruído espúrio inserido pelo cristal não-linear, caracterizado de forma detalhada em outros trabalhos do grupo [Cassemiro 2008b, César 2008]. Ainda neste trabalho, foi apresentado um modelo teórico para esse ruído, levando em consideração pequenas variações na permissividade dielétrica do cristal, devido a flutuações locais na densidade associadas às vibrações da rede. Um bom acordo entre teoria e experimento foi observado.

A associação desse excesso ruído à existência de interações do campo com fônons da rede cristalina, motivou a análise do comportamento do mesmo com a temperatura do cristal. Percebemos a variação linear do ruído espúrio entre 20° C e 110° C. Essa característica incentivou mudanças mecânicas no aparato experimental, como, por exemplo, a confecção de uma caixa de alumínio hermeticamente fechada a fim de fazer vácuo na região do OPO, visando o resfriamento do cristal com o uso de elementos Peltier. Conseguimos uma redução do excesso de ruído em torno de 30%, mantendo o cristal a -10° C, o que permitiu a medida de emaranhamento tripartite.

Dando sequência aos resultados obtidos nesta dissertação, novos ajustes no sistema serão realizados, de modo a obter valores ainda mais baixos para a temperatura do cristal, objetivando uma maior violação dos critérios de separabilidade apresentados. Com isso poderemos ainda estudar a dinâmica do emaranhamento em função da temperatura.

Como os feixes envolvidos possuem comprimentos de onda distintos, o emaranhamento obtido em nosso sistema é denominado **multicor**. Essa característica pode ser bastante explorada no contexto de redes quânticas. O emaranhamento poderá ser usado, por exemplo, para transferir informação entre uma célula de vapor e fibras óticas, o que será feito com a montagem de outro OPO compatível com o bombeio no comprimento de onda dos átomos de Rubídio (780 nm), aproveitando a existência de uma armadilha magneto-

ótica para tal elemento em nosso laboratório. Isso implica em um feixe de bombeio ressonante com a amostra, estando emaranhado com os feixes gêmeos com comprimento de onda em torno de 1560 nm, podendo ser enviados por fibras óticas.

Após amplo estudo do oscilador paramétrico ótico seguido da construção do mesmo em nosso grupo [Martinelli 2002], vários resultados importantes foram obtidos a partir da análise desse sistema. Dentre eles merecem destaque a obtenção do emaranhamento bipartite envolvendo os feixes gêmeos [Villar 2005], a previsão teórica do emaranhamento tripartite [Villar 2006] e as primeiras medidas que mostraram a presença de correlações quânticas entre os três feixes [Cassemiro 2007a, Cassemiro 2007b]. Nos referidos trabalhos o excesso de ruído já era um fenômeno observado, sendo objeto de estudo nas dissertações e teses do grupo [Villar 2004b, Villar 2007b, Cassemiro 2008b, César 2008]. Portanto, a caracterização, controle e redução do ruído espúrio foram bastante importantes para a obtenção do tão procurado emaranhamento tripartite, resultado que dá início a uma nova série de investigações fazendo uso de um parâmetro físico controlável, a temperatura.

Neste sentido, os resultados apresentados nessa dissertação completam uma série de previsões e investigações feitas por nosso grupo sobre o OPO acima do limiar de oscilação, abrindo novos questionamentos e possibilidades de aplicação do sistema.

Referências Bibliográficas

- [Adesso 2006] G. Adesso, “Entanglement of Gaussian State”, Tese de Doutorado, Università degli Studi di Salerno, 2006.
- [Aspect 1982] A. Aspect, P. Grangier e G. Roger, “Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A New Violation of Bell’s Inequalities”, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1804 (1982).
- [Aspect 1999] A. Aspect, “Bell inequality test: more ideal than ever”, *Nature* **398**, 189(1999)
- [Bachor 1998] H. A. Bachor, *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (Wiley-VCH, 1998).
- [Ballentine 1998] L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics - A Modern Development*, World Scientific (1998)
- [Bell 1964] J. S. Bell, “On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox”, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [Bell 1966] J. S. Bell, “On the Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics”, *Rev. Mod. Phys.* **38**, 447 (1966).
- [Bennett 1984] C. H. Bennett e G. Brassard, *Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, (IEEE, Los Alamitos, California), p. 175 (1984).
- [Bohr 1935] N. Bohr, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **48**, 696 (1935).
- [Boulanger 1994] B. Boulanger, M. M. Fejer, R. Blachman e P. F. Bordui, “Study of KTiOPO₄ gray-tracking at 1064, 532, and 355 nm”, *Appl. Phys. Lett.* **65**, 2401 (1994).
- [Boyd 1992] Robert W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, Inc. San Diego (1977).
- [Cassemiro 2007a] K. N. Cassemiro, A. S. Villar, P. Valente, M. Martinelli e P. Nussenzveig, “Experimental observation of three-color optical quantum correlations”, *Opt. Lett.* **32**, 695 (2007).

- [Cassemiro 2007b] K. N. Cassemiro, A. S. Villar, M. Martinelli e P. Nussenzveig, “The quest for three-color entanglement: experimental investigation of new multipartite quantum correlations”, *Opt. Express* **15**, 18236 (2007).
- [Cassemiro 2008b] K. N. Cassemiro, “Correlações Quânticas Multicolor no Oscilador Paramétrico Ótico”, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2008. [Disponível em: <http://axpfep1.if.usp.br/nadyne/>]
- [César 2008] J. E. S. César, “Excesso de Ruído no Oscilador Paramétrico Ótico”, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2008. [Disponível em: ADICIONAR ENDEREÇO]
- [César 2008b] J. S. César, A. S. Coelho, A. S. Villar, K. N. Cassemiro, P. Nussenzveig, M. Martinelli, “Extra phase noise from thermal fluctuations in nonlinear optical crystals”, *em preparação*.
- [Clauser 1978] J. F. Clauser, Michael A. Horne e A. Shimony, “Proposed Experiment to test local hidden-variables theories.”, *Phys. Rev. Letters* **23**, 15 (1969).
- [Clauser 1978] J. F. Clauser e A. Shimony, “Bell’s theorem: experimental tests and implications”, *Rep. Prog. Phys.* **41**, 1881 (1978).
- [Cohen-Tannoudji 1977] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Volume 1 (Wiley Interscience, 1977).
- [Debuisschert 1993] T. Debuisschert, A. Sizmann, E. Giacobino, and C. Fabre, “Type-II continuous-wave optical parametric oscillators: oscillation and frequency-tuning characteristics,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. B **10**, pp. 1668-1680(1993).
- [Duan 2000] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac e P. Zoller, “Inseparability criterion for continuous variable systems”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2722 (2000); arXiv:quant-ph/9908056.
- [Einstein 1935] A. Einstein, B. Podolsky e N. Rosen, “Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?”, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [Ekert 1991] A. K. Ekert, “Quantum cryptography based on Bell’s theorem”, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 661 (1991).
- [Galatola 1991] Galatola, L. A. Lugiato, M. G. Porreca, P. Tombesi e G. Leuchs, “System control by variation of the squeezing phase”, *Opt. Commun.* **85**, 95 (1991).
- [Gardiner 1991] C. W. Gardiner, *Quantum Noise* (Springer Verlag, 1991).

- [Glauber 1963] Roy J. Glauber, “Coherent and incoherent states of the radiation field”, Phys. Rev. **131**(6), p. 2766-2788, (1963).
- [Goda 2005] K. Goda, K. McKenzie, E. E. Mikhailov, P. K. Lam, D. E. McClelland and N. Mavalvala “Photothermal fluctuations as a fundamental limit to low-frequency squeezing in a degenerate optical parametric oscillator”, Phys. Rev. A **72**, 043819 (2005).
- [Gottfried 2004] Kurt Gottfried and Tung-Mow Yan *Quantum Mechanics: Fundamentals*, (Springer Verlag, 2004).
- [Grosse 2008] N. B. Grosse, S. Assad, M. Mehmet, R. Schabel, T. Symul e P. K. Lam, “Observation of entanglement between two light beams spanning an octave in optical frequency”, Phys. Rev. Lett. **100**, 243601, 2008.
- [Grynberg 1997] G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre, *Introduction aux lasers et à l’optique quantique*, (Ellipses Marketing, 1997).
- [Heidmann 1987] A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre e G. Camy, “Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams”, Phys. Rev. Lett. **59**, 2555 (1987).
- [Horodecki M. 1995] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki, “Violating Bell inequality by mixed spin- $\frac{1}{2}$ image states: necessary and sufficient condition?”, Phys. Lett. A **200**, 340 (1995).
- [Horodecki M. 1996] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki, “Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions”, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [Horodecki R. 2007] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki e K. Horodecki, “Quantum entanglement”, arXiv:quant-ph/0702225.
- [Hyllus 2006] P. Hyllus e J. Eisert, “Optimal entanglement witnesses for continuous-variable systems”, New J. Phys. **8**, 51 (2006).
- [Jing 2006] J. Jing, S. Feng, R. Bloomer e O. Pfister, “Experimental continuous-variable entanglement from a phase-difference-locked optical parametric oscillator”, Phys. Rev. A **74**, 041804(R) (2006).
- [Kasai 1997] K. Kasai, J. R. Gao e C. Fabre, “Observation of squeezing using cascaded nonlinearity”, Europhys. Lett. **40**, 25 (1997).
- [Kittel 2004] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*. John Wiley, eighth edition, 2004.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Kogelnik 1966] H. Kogelnik and T. Li, “Lasers Beams and Resonators”, *Applied Optics* **5**, 10 (1966).
- [Laurat 2005a] J. Laurat, L. Longchambon, C. Fabre e T. Coudreau, “Experimental investigation of amplitude and phase quantum correlations in a type II optical parametric oscillator above threshold: from nondegenerate to degenerate operation”, *Opt. Lett.* **30**, 1177 (2005).
- [Mandel e Wolf 1995] L. Mandel e E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1995).
- [Martinelli 2002] M. Martinelli, “Compressão de Ruído Quântico e Efeitos Transversos em Osciladores Paramétricos Óticos”, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2002. [Disponível em: <http://axpfep1.if.usp.br/~lmcal>]
- [Morizur 1980] Jean-François Morizur, Massimiliano Colla and Hans-A. Bachor, *Quantum noise detection: A portable and educational system*, *Am. J. Phys.* **76**(11) (2008).
- [Nielsen e Chuang 2000] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000).
- [Nussenzveig, 1998] H. M. Nussenzveig, *Um curso de física básica*, vol. 4 (Edgard Blücher, 1998).
- [Ou 1988] Z. Y. Ou e L. Mandel, “Violation of Bell’s Inequality and Classical Probability in a Two-Photon Correlation Experiment”, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 50(1988).
- [Ou 1992] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble e K. C. Peng, “Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables”, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3663 (1992).
- [Peres 1978] A. Peres, “Unperformed experiments have no results”, *Am. J. Phys.* **46**, 745 (1978).
- [Peres 1996] A. Peres, “Separability Criterion for Density Matrices”, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 1413 (1996).
- [Reid 1988] M. D. Reid e P. D. Drummond, “Quantum correlations of phase in nondegenerate parametric oscillation”, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2731 (1988).
- [Reid 1989a] M. D. Reid and P. D. Drummond, “Correlations in nondegenerate parametric oscillation-squeezing in the presence of phase diffusion”, *Phys. Rev. A* **40**, 4493(1989).
- [Rigolin 2005] G. G. Rigolin, “Estados Quânticos Emaranhados”, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2005. [Disponível em: <http://libdigi.unicamp.br/document/?code=vtls000360979>]

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Sakurai 1994] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, (Addison Wesley, 1994).
- [Shelby 1985] P. W. Shor, “Guided Acoustic Wave Brillouin Light Scattering”, *Phys. Rev. B* **31**, 5244 (1985).
- [Silberhorn 2002] Ch. Silberhorn, N. Korolkova e G. Leuchs, “Quantum Key Distribution with Bright Entangled Beams”, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 167902 (2002).
- [Simon 2000] R. Simon, “Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systems”, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 2726 (2000); arXiv:quant-ph/9909044.
- [Spiegel 1980] D. R. Spiegel and R. J. Helmer, *Shot-noise measurements of the electron charge: An undergraduate experiment.*, *Am. J. Phys.* **63**(6) (1995).
- [Stephen 1987] Stephen Howard and Sanat K. Roy, *Coherent States of a harmonic oscillator*, *Am. J. Phys.* **55**(12) (1987).
- [van Loock 2003] P. van Loock e A. Furusawa, “Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement”, *Phys. Rev. A* **67**, 052315 (2003).
- [Vetterling 1980] William T. Vetterling, *Demonstrating Poisson Statistics*, *Am. J. Phys.* **48**(5) (1980).
- [Villar 2004a] A. S. Villar, M. Martinelli e P. Nussenzveig, “Testing the entanglement of intense beams produced by a non-degenerate Optical Parametric Oscillator”, *Opt. Commun.* **242**, 551 (2004).
- [Villar 2004b] A. S. Villar, “Estudo de Emaranhamento no Oscilador Paramétrico Ótico Não-degenerado Acima do Limiar”, Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2004. [Disponível em: <http://axpfep1.if.usp.br/~lmcal>]
- [Villar 2005] A. S. Villar, L. S. Cruz, K. N. Cassemiro, M. Martinelli e P. Nussenzveig, “Generation of Bright Two-Color Continuous Variable Entanglement”, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 243603 (2005).
- [Villar 2006] A. S. Villar, M. Martinelli, C. Fabre e P. Nussenzveig, “Direct Production of Tripartite Pump-Signal-Idler Entanglement in the Above-Threshold Optical Parametric Oscillator”, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 140504 (2006).
- [Villar 2007a] A. S. Villar, K. N. Cassemiro, K. Dechoum, A. Z. Khoury, M. Martinelli e P. Nussenzveig, “Entanglement in the above-threshold optical parametric oscillator”, *J. Opt. Soc. Am. B* **24**, 249 (2007).
- [Villar 2007b] A. S. Villar, “Emaranhamento Multicolor entre Feixes Intensos de Luz”, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 2007. [Disponível em: <http://axpfep1.if.usp.br/~villar/>]

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Villar 2008] A. S. Villar, *The conversion of phase to amplitude fluctuations of a light beam by an optical cavity*, Am. J. Phys. **76** 922 (2008).
- [Walls e Milburn 1995] D.F. Walls e G.J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer Study Edition, 1995)
- [White 1972] A. D. White, “Frequency stabilization of gas lasers”, J. Phys. E, Vol **5**, p.926, 1972
- [Willke 1998] B. Willke, N. Uehara, E. K. Gustafson, R. L. Byer, P. J. King, S. U. Seel e R. L. Savage, “Spatial and temporal filtering of a 10-W Nd:YAG laser with a Fabry-Perot ring-cavity premode cleaner”, Opt. Lett. **23**, 1704 (1998).
- [Williamson 1936] J. Williamson, “On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems”, Am. J. Math. **58**, 141 (1936).
- [Wu 1986] L.A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall e Huifa Wu, “Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion”, Phys. Rev. Lett. **57**, 2520 (1986).
- [Yariv 1998] A. Yariv, *Quantum Electronics*. John Wiley & Sons, third edition ed., 1988.
- [Yurke 1984] B.Yurke, “Use of cavities in squeezed-state generation,” Phys. Rev. A, **29** 410 (1984).
- [Zhang K.S. 2001] K. S. Zhang, T. Coudreau, M. Martinelli, A. Maître e C. Fabre, “Generation of bright squeezed light at 1.06 μm using cascaded nonlinearities in a triply resonant cw periodically-poled lithium niobate optical parametric oscillator”, Phys. Rev. A **64**, 033815 (2001).