Universidade de São Paulo

Instituto de Física

RESSONÂNCIAS ESCALARES: UM MODELO PARA O KAPPA

Patrícia Camargo Magalhães

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

Dissertação apresentada ao Instituto de
Física da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em
Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta (IFUSP) - Orientador

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT)

Prof. Dra. Carla Gobel Burlamaqui de Mello (PUC-RIO)

São Paulo, 2008

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Magalhães, Patrícia Camargo

Ressonâncias escalares: Um modelo para o Kapa
– São Paulo – 2008

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Depto. de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

Área de Concentração: Física de Partículas

Unitermos: 1. Teoria Quântica Relativística; 2. Física;
3. Física Teórica.

USP/IF/SBI-086/2008

“Há muito tempo nossos estudos nos haviam ensinado que devemos prestar criteriosa atenção a qualquer simplificação inesperada que surja durante uma pesquisa, pois nesses casos é possível que tenhamos chegado a um ponto de onde possamos vislumbrar conexões mais amplas.”

W. Heisenberg, A Parte e o Todo

Agradecimentos

Chega ao fim um processo de 3 anos de pesquisa. Nesse meio tempo muitos acontecimentos mudaram o curso deste trabalho e agora fazem parte da história dele. Agradeço a todos que participaram desta história e peço desculpas pelas omissões, elas serão inevitáveis.

- Ao Mané pelos últimos 5 anos, desde a Iniciação Científica, período em que contribuiu muito à minha jornada para entender o mundo da física. Sua orientação muitas vezes foi dura, mas sempre amiga e incondicional nos momentos difíceis.
- A todos do GRHAFITE por tornarem tudo sempre tão alegre, em especial aqueles que, sempre prontos e bem dispostos, ajudaram-me a solucionar muitas dúvidas. Ao Davi, Ricardo, Diogo, Gabriel, Simone, Dani, Paulo e Sérgio (da secretaria), aos professores Marina Nielsen e Fernando Navarra.
- À Suely Fidalgo, mais do que minha professora, uma amiga sempre pronta a me socorrer, durante esta empreitada.
- A meus colegas da Física e de vida universitária que torceram e vibraram durante todo este processo. Aos Varzeanos, às meninas do Bafefi, aos companheiros e companheiras do movimento estudantil e da APG. Em especial à Pri, Jairo, Mari e Bruno, Sabrina, Boris, Gabi, Bel, Maria, Rica, Henrique e Pedro.
- Às minhas companheiras de vida Laura, Erica, Lia, Maria, Mari, Paula e Lígias.
- A meu assessor de assuntos gráficos, Maurício Guerreiro, um agradecimento especial, pela infinita paciência e amor dos últimos anos.
- À minha família, que sempre está na torcida em todos os meus projetos. Bia, irmã tão querida, meu pai Marcos, minha mãe Ciça, eterna professora que me ajudou a corrigir essa dissertação e Dona Cleuza, minha vovó querida.
- A George Rupp e Eef van Beveren, pela hospitalidade e os ensinamentos que tive em Portugal.
- À FAPESP (Fundação de Amparo a Pesquisa no Estado de São Paulo) pelo apoio financeiro.

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é estudar a ressonância κ , um méson escalar ainda hoje bastante controverso na comunidade científica. Estudamos o espalhamento elástico $K\pi$, pois é neste subsistema que o κ se manifesta como um estado intermediário. A partir de uma lagrangiana efetiva quiral $SU(3) \times SU(3)$, envolvendo termos de contato e ressonâncias, calculamos a amplitude $K\pi$ projetada no canal de isospin $1/2$ e em seguida a unitarizamos por meio de *loops* mesônicos. Investigamos os pólos físicos da amplitude, dados pelos zeros do seu denominador que se encontram na segunda superfície de Riemann. Esses zeros podem ser obtidos numericamente, mas a análise estrita desta solução não fornece informações a respeito da dinâmica que produz os pólos. Como alternativa, uma descrição qualitativa dos pólos foi obtida considerando o limite de $SU(2) \Leftrightarrow M_\pi = 0$ e a aproximação da matriz K , que corresponde a unitarizar a amplitude com *loops* de $K\pi$ na camada de massa. Essas simplificações reduzem o denominador da amplitude a um polinômio de segundo grau, que dá origem a dois pólos físicos, posteriormente identificados como sendo o $K_0^*(1430)$ e o κ .

Este modelo simplificado permite uma boa interpretação da origem dinâmica dos pólos. O κ mostrou-se estável na variação dos acoplamentos da ressonância explícita, o que indica que ele é produzido pelo diagrama de contato. Já a ressonância identificada como o $K_0^*(1430)$ varia de um estado ligado a um pólo não físico, dependendo dos valores atribuídos aos parâmetros da ressonância, o que sugere fortemente que a natureza destes pólos é distinta. Esses diferentes comportamentos dinâmicos também foram observados no programa numérico, indicando que a essência dos pólos foi mantida no modelo simplificado. Com o programa numérico obtivemos a posição do pólo do κ em $(0.7505 \pm 0.0010) - i(0.2363 \pm 0.0023)$ GeV, o que está em pleno acordo com diversos modelos quirais muito mais complicados.

Abstract

This work aims mostly at studying the κ resonance, which is still a controversial scalar meson nowadays within the scientific community. We studied the $K\pi$ elastic scattering, because the κ appears as an intermediate state in this subsystem. From an effective chiral lagrangian $SU(3) \times SU(3)$, involving contact terms and resonances, we calculated the $K\pi$ amplitude projected on the $1/2$ isospin channel and then unitarized by means of mesonic *loops*. The physical poles of the amplitude were investigated, given by the zeros of its denominator which are encountered on the Riemann's surface. Although these zeros can be numerically obtained, the strict analysis of this solution does not supply information about the poles producing dynamics. Alternatively, a qualitative description of the poles was obtained considering the $SU(2) \Leftrightarrow M_\pi = 0$ limit and the K matrix approximation, which corresponds to the unitarizing of the amplitude with *loops* of $K\pi$ on shell. These simplifications reduce the amplitude denominator to a second grade polynomial that originates two physical poles, later identified as being $K_0^*(1430)$ and κ . This simplified model allows for a good interpretation of the poles dynamic origin. The κ has been stable on the explicit resonance coupling, showing that it is produced by the contact diagram. The $K_0^*(1430)$ identified resonance, on the other hand, varies from a bounded state to a non-physical pole, depending on the resonance parameters attributed values, which strongly suggest that the nature of this poles is distinct. These different dynamic behaviors have also been observed in the numerical programs, indicating that the essence of the poles was maintained in the simplified model. With the numerical programs we obtained the position of pole κ in $(0.7505 \pm 0.0010) - i(0.2363 \pm 0.0023)$ GeV, which is in accordance with various more complex chiral models.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
1 Introdução	1
2 Um Modelo Efetivo Quiral	7
2.1 QCD	7
2.2 Termo de Massa	10
2.3 SU(3)	11
2.4 Simetria Quiral	14
2.5 Lagrangianas efetivas quirais	16
2.5.1 Sumário	20
3 Espalhamento $K\pi$	21
3.1 Dinâmica	21
3.2 Interação de contato	22
3.3 Trocas de ressonâncias	24
3.4 Estados de Isospin	28
3.5 Amplitudes de isospin	29
3.6 Projeção na onda S	30
3.7 Kernel	31
3.8 Valores numérico da amplitude em árvore	33
3.9 Unitarização	36
3.9.1 Unitarização por matriz K	39
3.10 Valores numéricos da amplitude unitarizada	40
3.11 Sumário	42

4	Pólos da amplitude $K\pi$	45
4.1	A ressonância kappa	45
4.1.1	Morgan	47
4.1.2	Jaffe e colaboradores	47
4.1.3	Estabrooks et al.	48
4.1.4	Scadron	48
4.1.5	Törnqvist	49
4.1.6	van Beveren, Rupp e colaboradores	50
4.1.7	Aston e colaboradores	53
4.1.8	Ishida e colaboradores	53
4.1.9	Grupo de Syracuse	54
4.1.10	Oller e colaboradores	56
4.1.11	Pennington e colaboradores	57
4.1.12	Bugg	58
4.1.13	Peláez	59
4.1.14	Moussallam e colaboradores	59
4.1.15	Zhou e Zheng	60
4.1.16	Resultados obtidos da Produção	61
4.1.17	Resumo dos valores	61
4.2	Pólos	63
4.3	Determinação dos pólos	66
4.4	Polinômios	67
4.5	Pólos analíticos	71
4.6	Resultados do modelo	75
5	Resultados e Conclusões	79
5.1	Da qualidade dos pólos	79
5.2	Das quantidades	82
5.3	Conclusões	83
A	Cinemática	85
B	Projeção em canal de Isospin	87
C	Integral de <i>Loop</i>	93
D	Método de Newton	99
E	Artigos e preprints	103

Lista de Figuras

1.1	(a) $K^-p \rightarrow K^- \pi^+ n$; (b) decaimento charmoso $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$	2
1.2	Seção de choque experimental do espalhamento $K^- \pi^+$, com dados de Aston et al[1] (ponto) e Estabrooks et al.[2, 3](círculo com ponto no meio).	3
1.3	Diagrama de Dalitz para o processo $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ (a) experimental[4], (b) teórico[5]	4
1.4	Diagramas utilizados no cálculo do decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$; T representa a amplitude de espalhamento $K\pi$ e Π representa a amplitude de produção $K\pi \rightarrow \kappa$	5
2.1	Octeto dos mésons pseudoescalar em função da carga de isospin(t_3) e da hipercarga(y).	11
3.1	Amplitude de espalhamento $K\pi$ em nível árvore, com termo de contato e ressonâncias escalares nos canais s , t e u	21
3.2	Interações possíveis de $K^- \pi^+ \rightarrow K^- \pi^+$	28
3.3	Kernel das amplitude $I = 1/2$ e $I = 3/2$	31
3.4	Comparação entre as contribuições não ressonantes da cada canal.	34
3.5	$I=1/2$: (a) Segmentos que compõem $\mathcal{K}_{1/2}$: termo de contato K^C , termo ressonante K^P e fundo não ressonante K^B . (b) Comparação entre K^C e $\mathcal{K}_{1/2}$	35
3.6	$I= 3/2$: (a) Segmentos que compõem $\mathcal{K}_{3/2}$: o termo de contato K^C e o o fundo K^B . (b) Comparação entre K^C e $\mathcal{K}_{3/2}$	36
3.7	Equação de Bethe-Salpeter.	37
3.8	Série perturbativa da equação de Bethe-Salpeter.	38
3.9	O <i>loop</i> cortado simbolizando que a partícula está na camada de massa.	39
3.10	[Amplitude $I=1/2$: $\mathcal{K}_{1/2}$ (preto), $T_{1/2}$ (azul), $T_{K1/2}$ (vermelho)] (a) $\mathcal{K}_{1/2}$ e $T_{1/2}$; (b) as partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejadas) das amplitudes unitarizadas.	40
3.11	[Amplitude $I=1/2$: $T_{1/2}$ (azul), $T_{K1/2}$ (vermelho)] (a) Módulo quadrado das amplitudes; (b) fase das amplitudes unitarizadas.	41

3.12	[Amplitude $I=3/2$: $\mathcal{K}_{3/2}$ (preto), $T_{3/2}$ (azul), $T_{K3/2}$ (vermelho)] (a) comparação entre partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) com $\mathcal{K}_{3/2}$; (b) fase das amplitudes.	42
4.1	Dados do espalhamento analisados por Törqvist[6].	50
4.2	A barra vertical representa o limiar. Quando o acoplamento é desligado, os pólos que tendem ao eixo real são chamados pólos confinantes (azul). Já os pólos que desaparecem (vermelho), são chamados contínuos.	52
4.3	Comparando os valores da tabela 4.1 graficamente.	63
4.4	$ T_{1/2} $: equação (4.6) (verde), L representa os termos em C na equação (4.8) (azul), c_d e c_m são os respectivos termos em R da equação (4.8) (vermelho). . .	65
4.5	As quatro raízes do polinômio (4.17). Apenas x_2 e x_3 são pólos físicos.	69
4.6	Partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) das soluções quadrática (P_2 - 4.19) e quártica (P_4 - 4.13) em função de c_d . (a) $\sqrt{s_-} = E_-$ (b) $\sqrt{s_+} = E_+$. . .	70
4.7	Partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) de todas a funções aproximadas de $\sqrt{s_-} = E_-$ em função de c_d	73
4.8	Partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) dos pólos raízes de aproximadas de $\sqrt{s_+} = E_+$ em função de c_d	74
4.9	Partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) da aproximação de matriz-K (verde) e aproximação quadrática (vermelho) função: (a) $E_- = \sqrt{s_-}$, (b) $E_+ = \sqrt{s_+}$	76
4.10	Partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) da eq(4.6) (azul) e aproximação de matriz-K (verde) : (a) $E_- = \sqrt{s_-}$, (b) $E_+ = \sqrt{s_+}$	77
4.11	Variação da posição dos pólos em função da massa nominal m_R	77
5.1	. Extensão de c_d para partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) da função $E_+ = \sqrt{s_+}$: eq(4.6) (verde), K e q representam as aproximação de matriz-K e quadrática (vermelho).	81
5.2	Extensão de c_d para partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) da função $E_- = \sqrt{s_-}$: eq(4.6) (verde), K e q representam as aproximação de matriz-K (azul) e quadrática (vermelho).	82
5.3	Comparando os valores da tabela 4.1 graficamente.	83
A.1	Espalhamento elástico $K(k)\pi(q) \longrightarrow K(k')\pi(q')$	85
B.1	Amplitude de espalhamento $K\pi$ em nível árvore, com termo de contato e ressonâncias escalares nos canais s , t e u	87
C.1	Integral de <i>loop</i> da interação $K\pi$	93
D.1	As três primeiras iterações do método de Newton.	100

Lista de Tabelas

2.1	Constantes de estrutura antisimétricas.	12
2.2	Constantes de estrutura simétricas. As demais combinações de índices podem ser obtidas sabendo que d_{ijk} é simétrico pela troca de dois índices vizinhos. . .	13
3.1	Valores de H_m	25
4.1	Posições do pólo do κ , em GeV.	62
4.2	Pólo $\sqrt{s}$ quártico e quádrático, em GeV, para $m_R = 1.2 \text{ GeV}$ e $c_m = 0.042 \text{ GeV}$	71
4.3	Pólo $\sqrt{s}$ quádrático e analítico, em GeV, para $m_R = 1.2 \text{ GeV}$ e $c_m = 0.042 \text{ GeV}$	75

Capítulo 1

Introdução

O debate sobre as ressonâncias escalares é presente na comunidade científica desde o modelo sigma linear mas apenas recentemente, as ressonâncias σ e κ tiveram suas existências estabelecidas. As dificuldades de obter informações precisas sobre esses escalares advêm do fato de eles serem muito leves e terem larguras muito grandes. Após décadas de incertezas, o cenário das ressonâncias escalares sofreu uma importante transformação com os resultados das análises de decaimentos charmosos. Em 2001, a colaboração E791[7] produziu fortes evidências da presença do σ como um estado intermediário do decaimento $D^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$. No ano seguinte, a mesma colaboração obteve o κ no decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ [8]. Esses trabalhos foram seguidos por muitos outros, experimentais e teóricos, que reacenderam o debate em torno das ressonâncias escalares leves e as posições de seus pólos. No início de 2008, a posição do pólo do σ foi obtida com grande precisão por Leutwyler[9], a partir de uma análise dos dados do espalhamento $\pi\pi$, usando a equação de Roy. Foi nesse mesmo contexto que iniciamos o estudo sobre os decaimentos charmosos usando modelos efetivos quirais, que culminaram nesta dissertação, cujo eixo é a análise dos pólos da amplitude de espalhamento $K^- \pi^+$, um dos quais representa a ressonância κ .

O sistema $K^- \pi^+$ carrega um quark s ($S = -1$) e tem componentes de isospin $1/2$ e $3/2$. A ressonância κ observada experimentalmente tem os números quânticos $J^{PC} = 0^{++}$, estranheza $S = -1$ e isospin $1/2$. Assim, o que chamamos κ , por simplicidade é, na realidade, um $\bar{\kappa}$. Além de ocorrer no sistema $K^- \pi^+$, esta ressonância é, também, um possível estado intermediário no espalhamento $\bar{K}^0 \pi^0$. Entretanto, este canal é difícil de

ser observado, por ser composto por partículas neutras.

Existem duas formas de extrair informação da natureza acerca do espalhamento $K^-\pi^+$. Uma delas é a partir do espalhamento indireto $K^-p \rightarrow K^-\pi^+n$ e a outra, a partir de decaimentos charmosos, tais como $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$. Os dois tipos de processos são mostrados em diagramas de Feynman na figura 1.1.

Figura 1.1: (a) $K^-p \rightarrow K^-\pi^+n$; (b) decaimento charmoso $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$.

A primeira análise experimental do espalhamento $K\pi$, baseada no processo representado na figura 1.1a, foi realizada no laboratório SLAC, com o espectrômetro LASS. Ela foi publicada por Estabrooks et al.[2], em 1978, embora versões preliminares existam desde 1973[10]. Nessa primeira análise, há poucos dados na região de baixa energia. Dez anos depois, em 1988, com o mesmo espectrômetro, o espalhamento $K\pi$ foi estudado com base em uma quantidade maior e melhor de dados na região acima de 825 MeV, por Aston et al.[1]. Como a única fonte de informação sobre o espalhamento $K\pi$, esses dois conjuntos de dados foram reanalisados e criticados por muitos autores, em trabalhos sobre o setor escalar da teoria.

A figura 1.2¹, mostra os dados experimentais da seção de choque para o espalhamento $K\pi$, obtidos por [2] e [1]. A ressonância κ não foi encontrada na análise feita pelos próprios grupos experimentais. No entanto, em diversas reanálises posteriores dos mesmos dados, baseadas em parametrizações oriundas de teorias efetivas ou modelos, o κ foi encontrado. Cercado de divergências sobre sua estrutura, a estabilidade conceitual do kappa a partir de dados de espalhamento ainda não é consenso na comunidade.

¹A figura 1.2 foi publicada na referência [11] e modificada por nós.

Figura 1.2: Seção de choque experimental do espalhamento $K^-\pi^+$, com dados de Aston et al[1] (ponto) e Estabrooks et al.[2, 3](círculo com ponto no meio).

A mudança nesse cenário ocorreu com os resultados obtidos a partir de decaimentos charmosos, que recolocam o κ e as ressonâncias escalares leves em uma posição de destaque, gerando profundo interesse na física de partículas. Dois tipos de decaimentos charmosos evidenciaram essa ressonância. O primeiro deles foi o processo $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$, observado pela colaboração E791 em 2002[8] e em 2006[12] e, mais recentemente, pela FOCUS[13]. O outro foi o decaimento $J/\Psi \rightarrow KK\pi\pi$, observado em 2006 pela colaboração BES[14].

O instrumento utilizado para analisar decaimentos em três corpos, tal como $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$, é o diagrama de Dalitz. Desenvolvido por Richard Henry Dalitz (1925 – 2006) em 1953[15], a idéia do diagrama é expressar a seção de choque de decaimentos em figuras bidimensionais, cujos eixos são funções de escalares de Lorentz construídos a partir das variáveis cinemáticas do problema. Como o espaço de fase é conhecido, qualquer estrutura no diagrama tem significado dinâmico. Por isso, ele se tornou um instrumento importante na interpretação de dados experimentais, envolvendo ressonâncias. Diagramas de Dalitz para o processo $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$, estão representados na figura 1.3.

Figura 1.3: Diagrama de Dalitz para o processo $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ (a) experimental[4], (b) teórico[5]

Usando funções de Breit-Wigner para representar as amplitudes do decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$, na referência [8] foram obtidos os parâmetros da ressonância κ : $m_\kappa = 797 \pm 19 \pm 43$ MeV e $\Gamma_\kappa = 410 \pm 43 \pm 87$ MeV.

Em diálogo com esses resultados experimentais, o decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ foi investigado pelo nosso grupo[5]. O processo esquemático da figura 1.1b foi representado pelos diagramas de Feynman mostrados na figura 1.4, que envolvem um vértice primário, o espalhamento $K\pi$ e um vértice de produção. As interações de estado final envolvem apenas um píon e o káon, sendo o outro píon tratado como um espectador. Não consideramos a interação $\pi^+ \pi^+$, pois ela é fortemente suprimida pela carga do subsistema². As ressonâncias escalares κ e $K_0^*(1430)$ estão incluídas na amplitude T e serão discutidas em detalhes neste trabalho.

²Para mais detalhes do trabalho desenvolvido, o artigo[5] pode ser visto no Apêndice E.

Figura 1.4: Diagramas utilizados no cálculo do decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$; T representa a amplitude de espalhamento $K\pi$ e Π representa a amplitude de produção $K\pi \rightarrow \kappa$.

Da organização da Dissertação

Esta dissertação é composta por 5 capítulos e 5 apêndices. No capítulo 2, após uma introdução sobre a QCD e a necessidade de modelos efetivos que descrevam sistemas no regime de baixas energias, apresentamos o arcabouço teórico-técnico para a construção de lagrangianas efetivas quirais $SU(3) \times SU(3)$.

No capítulo 3 desenvolvemos todo o cálculo da amplitude de espalhamento elástica $K\pi$, partindo da lagrangiana desenvolvida no capítulo 2. Inicialmente, a calculamos em nível árvore, considerando uma interação de contato e trocas de ressonâncias escalares nos canais s , t , u e a projetamos no canal de isospin $1/2$ e $J = 0$, definindo o kernel da amplitude $\mathcal{K}_{1/2}$. Em seguida, a unitarizamos por meio da interação de *loops* de $K\pi$. Essa amplitude unitarizada é comparada com a aproximação de matriz K que é um caso particular da primeira.

A primeira metade do capítulo 4 é dedicada a uma revisão das diferentes abordagens teóricas e experimentais já desenvolvidas sobre o κ . A seguir, analisamos os pólos da amplitude $K\pi$, obtida no capítulo 3 e mostramos que uma abordagem puramente numérica não traz informações qualitativas da dinâmica desses pólos. Por isso, desenvolvemos um

modelo simplificado, que incorpora os elementos essenciais do problema. Os principais resultados e conclusões são apresentados no capítulo 5.

Os apêndices são destinados a detalhes das contas que extrapolam o âmbito dos capítulos. São eles: a cinemática do sistema $K\pi$ (Apêndice A), a projeção da amplitude de espalhamento em canais de isospin (Apêndice B), a integral de *loop* usada na unitarização da amplitude no capítulo 3 (Apêndice C), a descrição do método de Newton, usado para obter os pólos numéricos da amplitude $K\pi$ no capítulo 4 (Apêndice D) e nossos artigos e preprints acerca desse problema (Apêndice E).

Capítulo 2

Um Modelo Efetivo Quiral

Neste Capítulo, introduzimos o arcabouço teórico e técnico das teorias físicas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 QCD

Em 1964, Gell-Mann[16] e Zweig[17] propuseram, independentemente, um modelo que explicava o espectro de partículas existentes na época. Nesse modelo, elas seriam constituídas por objetos com número bariônico e cargas elétricas fracionárias, os quarks, que poderiam ter três sabores distintos: u (*up*), d (*down*) e s (*strange*). Os mésons seriam compostos por um par quark-antiquark, enquanto os bárions e os antibárions conteriam três quarks ou três antiquarks. O modelo de quarks teve sucesso ao explicar o espectro de partículas conhecidas, as transições eletromagnéticas e as interações fracas de diferentes hádrons. Preservando simetrias fundamentais, solucionou uma série de problemas e, ao mesmo tempo, abriu as portas para uma infinidade de outras questões a serem entendidas. Nascia, então, um novo paradigma na física de partículas que, décadas depois, foi sistematizado na QCD.

A QCD ou *Quantum Chromodynamics* é, hoje, a teoria fundamental das interações fortes, simétrica pelo grupo de Lie não abeliano $SU(3)$ de cor. Os campos de matéria desta teoria são os quarks e as interações são mediadas por bósons de calibre, os glúons. A carga de cor é uma qualidade inalterável sendo cada quark um tripleto de cor (RGB) enquanto que os glúons têm cor e anticor. A simetria de cor foi proposta como uma

simetria oculta para satisfazer o princípio de Pauli para os bárions¹ e, na natureza, todos os estados seriam singletos de cor. Os quarks possuem também 6 sabores. Em ordem crescente de massa são eles: u (*up*), d (*down*), s (*strange*), c (*charm*), b (*bottom*) e t (*top*).

A QED e a QCD são teorias quânticas irmãs, embora possuam características e objetos distintos. Ambas são teorias de calibre mas enquanto a primeira é abeliana, a QCD não o é. Por isso, a intensidade da interação na QED, dada pelo troca de fótons e descrita pela lei de Coulomb, diminui com a distância entre duas partículas. Na QCD, por outro lado, ocorrem bolhas de glúons virtuais, que provocam um efeito de antiblindagem de cor. Esse efeito diminui com a distância, o que faz com que a força seja fraca a pequenas distâncias e grande a longas distâncias. Dada a relação entre distância e energia, para distâncias pequenas ou energias altas, o acoplamento é fraco e podemos descrever a QCD perturbativamente, sendo quarks e glúons os graus de liberdade. Esse fenômeno é conhecido como liberdade assintótica, uma característica intrínseca a teorias de calibre não-abelianas.

Em energias baixas, o forte acoplamento entre os quarks não possibilita tratamentos perturbativos. Ou seja, a QCD não permite um entendimento direto da fenomenologia em baixas energia. Existem duas alternativas para efetuar cálculos precisos nesse regime. A primeira delas são as teorias efetivas, que utilizam lagrangianas com graus de liberdade hadrônicos. A segunda é a QCD na rede, que busca reproduzir as estruturas e interações da QCD usando simulações computacionais. A forma mais estabelecida para descrever sistemas que envolvem mésons pseudoescalares e escalares com massa abaixo de 1 GeV são as teorias efetivas, com simetria quiral. Para gerar observáveis coerentes com a QCD, é necessário que essas teorias efetivas partilhem das mesmas simetrias que a teoria fundamental. Essa é uma característica essencial dos modelos efetivos.

A lagrangiana da QCD pode ser escrita como [18]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{2}\langle G_{\mu\nu}G^{\mu\nu} \rangle + \bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu)q_f - m_f\bar{q}_fq_f, \quad (2.1)$$

¹Se não fosse introduzida a simetria de cor, o Δ^{++} , composto por uuu , tem todos os spins paralelos o que violaria o princípio de Pauli.

em que $\langle \rangle = \text{Traço}$, e

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

O campo do glúon é dado por uma matriz (3×3) no espaço de cor

$$A_\mu = \frac{A_\mu^a \lambda^a}{2}, \quad (2.4)$$

sendo A_μ^a os campos de glúon. Os quarks q_f são vetores de três componentes nesse espaço e as suas interações com os glúons são determinadas pela derivada covariante D_μ , dada por

$$D_\mu q_f = (\partial_\mu - igA_\mu)q_f. \quad (2.5)$$

As simetrias exercem um papel fundamental nas teorias físicas. Segundo o teorema de Noether, em teoria de campos, simetrias estão associadas a correntes conservadas que, por sua vez, levam a grandezas físicas conservadas. Na mecânica quântica, a invariância temporal está associada à conservação de energia; a invariância por translação temporal, à conservação do momento linear; e a invariância por rotação, à conservação de momento angular.

Na teoria quântica de campos, simetrias são definidas como as transformações que deixam invariante a ação

$$\delta A = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)) = 0. \quad (2.6)$$

De maneira genérica, qualquer simetria que satisfaça essa equação implica na existência de uma corrente conservada

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0. \quad (2.7)$$

Definindo a carga associada a essa corrente como

$$Q(t) = \int d^3x J^0(x), \quad (2.8)$$

ela será uma constante de movimento quando for válida a relação (2.7)

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int d^3x J^0(x) = \int d^3x \partial_\mu J^\mu(x) = 0. \quad (2.9)$$

A lagrangiana da QCD (2.1) possui simetria de Poincaré, é invariante por conjugação de carga, paridade e inversão temporal. Além disso, é exatamente simétrica por $U(1)_V$, o que está associado à conservação do número bariônico. A quantização da teoria introduz a anomalia quiral[19] e a corrente associada a $U(1)_A$ não se conserva.

2.2 Termo de Massa

O termo de massa da lagrangiana da QCD é dado por:

$$-m_f \bar{q}_f q_f , \quad (2.10)$$

sendo as massas dos quarks[20]: $m_u = 1.5 - 3$ MeV, $m_d = 3.5 - 6.0$ MeV, $m_s = 104^{+26}_{-34}$ MeV, $m_c = 1.27^{+0.07}_{-0.11}$ GeV, $m_b = 4.20^{+0.17}_{-0.07}$ GeV e $m_t \simeq 171.2 \pm 2.1$ GeV. Nessa hierarquia de valores, as massas dos quarks u e d são muito pequenas e próximas uma da outra. Se adotarmos a aproximação $m_u = m_d$, a lagrangiana da QCD passa a ser invariante pelo grupo $SU(2)$. Com a inclusão do quark s , que possui uma massa maior que as anteriores, a aproximação $m_u = m_d = m_s$ é quebrada mais fortemente. Entretanto, ainda assim, pode-se considerar $SU(3)$ uma boa simetria. Já a massa do quark c é três ordens de grandeza maior do que m_u e a aproximação $m_u = m_d = m_s = m_c$ é muito forçada e $SU(4)$ é tida como uma simetria ruim. Para os demais quarks, não existem mais simetrias. Desta forma, as simetrias baseadas em massas são aproximadas.

Na QCD, as massas dos mésons pseudoescalares são diretamente proporcionais às dos quarks. Os valores observados são dados por[21]: $M_{\pi^+} = M_{\pi^-} = 139.57$ MeV, $M_{\pi^0} = 134.98$ MeV, $M_{K^+} = M_{K^-} = 493.68$ MeV, $M_{K^0} = M_{\bar{K}^0} = 497.67$ MeV e $M_\eta = 547.30$ MeV. Podemos ver que os valores das massas não são muito diferentes entre si, o que justifica agrupar esses mésons num o octeto, representado graficamente como

Figura 2.1: Octeto dos mésons pseudoescalar em função da carga de isospin(t_3) e da hipercarga(y).

Descrever esse agrupamento considerando todas as massas iguais é uma boa aproximação, o que significa que, aproximadamente, ele é simétrico por transformações vetoriais do grupo $SU(3)$. Esse grupo é um ingrediente fundamental para conseguirmos construir uma lagrangiana efetiva quiral que possa descrever a interação entre os píons e káons. O desenvolvimento da álgebra deste grupo será feito em seguida².

2.3 $SU(3)$

O grupo de Lie $SU(3)$ tem esse nome porque suas representações matriciais de ordem mais baixa são unitárias (U), têm determinante 1 (*Special* em inglês) e três elementos. A álgebra do grupo é dada pelos geradores F_k , que satisfazem as relações de comutação

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k . \quad (2.11)$$

As grandezas f_{ijk} , dadas na tabela 2.1, são as constantes de estrutura que definem o grupo e são antissimétricas pela troca de quaisquer dois índices.

²A seção $SU(3)$ foi baseado em [18, 22–24]

Tabela 2.1: Constantes de estrutura antisimétricas.

ijk	f_{ijk}	ijk	f_{ijk}	ijk	f_{ijk}
123	1	246	1/2	367	-1/2
147	1/2	257	1/2	458	$\sqrt{3}/2$
156	-1/2	345	1/2	678	$\sqrt{3}/2$

Gell-Mann em 1962 mostrou que a representação de ordem mais baixa de $SU(3)$ é realizada por matrizes unitarias (3×3) , com determinante 1, que obedecem as relações

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k, \quad (2.12)$$

e dadas por

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \quad (2.13)$$

Elas são conhecidas como as matrizes de Gell-Mann que agem sobre o vetor de quarks $q = (u, d, s)$. Além de (2.12), elas obedecem as relações de anticomutação

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} + 2 d_{ijk} \lambda_k, \quad (2.14)$$

em que d_{ijk} são as constantes de estrutura totalmente simétricas dadas na tabela 2.2

Tabela 2.2: Constantes de estrutura simétricas. As demais combinações de índices podem ser obtidas sabendo que d_{ijk} é simétrico pela troca de dois índices vizinhos.

ijk	d_{ijk}	ijk	d_{ijk}	ijk	d_{ijk}	ijk	d_{ijk}
118	$1/\sqrt{3}$	228	$1/\sqrt{3}$	338	$1/\sqrt{3}$		
146	$1/2$	247	$-1/2$	344	$1/2$	448	$-1/2\sqrt{3}$
157	$1/2$	256	$1/2$	355	$1/2$	558	$-1/2\sqrt{3}$
				366	$-1/2$	668	$-1/2\sqrt{3}$
				377	$-1/2$	778	$-1/2\sqrt{3}$
						888	$-1/\sqrt{3}$

Os traços das matrizes λ , que serão importantes em cálculos futuros, são dadas em função das relações (2.12) e (2.14) como:

$$\bullet \quad \langle \lambda_i \lambda_j \rangle = 2\delta_{ij} , \quad (2.15)$$

$$\bullet \quad \langle [\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k \rangle = 4i f_{ijk} , \quad (2.16)$$

$$\bullet \quad \langle \{\lambda_i, \lambda_j\} \lambda_k \rangle = 4 d_{ijk} , \quad (2.17)$$

$$\bullet \quad \langle \lambda_i \lambda_j \lambda_k \rangle = \frac{1}{2} \langle [\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k + \{\lambda_i, \lambda_j\} \lambda_k \rangle = 2i f_{ijk} + 2 d_{ijk} , \quad (2.18)$$

$$\bullet \quad \langle [\lambda_i, \lambda_j] [\lambda_k, \lambda_l] \rangle = -8 f_{ijs} f_{kls} , \quad (2.19)$$

$$\bullet \quad \langle \{\lambda_i, \lambda_j\} \{\lambda_k, \lambda_l\} \rangle = \frac{16}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + 8 d_{ijs} d_{kls} . \quad (2.20)$$

Analisando as matrizes de Gell-Mann, vemos que as primeiras três são as matrizes de Pauli com uma linha e uma coluna a mais, dadas pela dimensão do espaço. Portanto, a simetria de isospin de $SU(2)$ permanece neste grupo. A matriz λ_8 comuta com $\mathbf{F}^2 = \frac{\lambda_i \lambda_i}{2}$ e com λ_3 e, portanto, podem ser diagonalizados simultaneamente. Enquanto λ_3 está associada ao isospin, λ_8 está associada à estranheza e define o operador hipercarga : $Y = \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_8$.

O multiplete dos mésons pseudoescalares são vetores deste grupo, descritos pelos

campos $\phi_i \equiv \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_8$, cuja lei de transformação é dada por

$$[F_i, \phi_j] = if_{ijk} \phi_k . \quad (2.21)$$

O estado da partícula é obtido pela ação destes campos no vácuo

$$|\alpha\rangle \equiv \phi_\alpha^\dagger |0\rangle . \quad (2.22)$$

Assim, os mésons pseudoescalares são escritos como

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) |0\rangle , & |K^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_4 - i\phi_5) |0\rangle , \\ |\pi^0\rangle &= \phi_3 |0\rangle , & |K^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_4 + i\phi_5) |0\rangle , \\ |\pi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) |0\rangle , & |K^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_6 - i\phi_7) |0\rangle , \\ |\eta\rangle &= \phi_8 |0\rangle , & |\bar{K}^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_6 + i\phi_7) |0\rangle . \end{aligned} \quad (2.23)$$

2.4 Simetria Quiral

No limite em que as massas dos três quarks mais leves são desprezadas, a lagrangiana da QCD passa a ser invariante por transformações axiais, além das vetoriais, e o grupo de simetria é o $SU(3) \times SU(3)$. A estrutura deste grupo envolve as combinações das cargas vetoriais e axiais

$$\begin{aligned} Q^L &= \frac{1}{2}(Q^V - Q^A), \\ Q^R &= \frac{1}{2}(Q^V + Q^A). \end{aligned} \quad (2.24)$$

As cargas quirais de mão esquerda L e de mão direita R obedecem as relações de comutação

$$\begin{aligned} [Q_i^L, Q_j^L] &= if_{ijk} Q_k^L, \\ [Q_i^R, Q_j^R] &= if_{ijk} Q_k^R, \\ [Q_i^L, Q_j^R] &= 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

o que define a álgebra do grupo $SU(3)_L \times SU(3)_R$, pois as simetrias direita (R) e esquerda (L) estão desacopladas.

A origem da palavra *quiral* é grega e significa “relativo a mão”. A imagem da mão direita, quando vista no espelho, é a mão esquerda, e vice-versa. A imagem que vemos no espelho não pode ser reproduzida por meio de rotações ou translações. Na geometria, os objetos quirais são aqueles que se relacionam com sua imagem da mesma forma que as mãos no espelho. Na QCD, os campos de quarks são descritos por suas componentes de mão direita e esquerda como

$$\begin{aligned} q_L &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) q, \\ q_R &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) q, \end{aligned} \tag{2.26}$$

em que podemos identificar os elementos 1 e γ_5 , que respectivamente mantêm e alteram a paridade, misturados nas duas componentes, da mesma forma que nos geradores Q^L e Q^R . Para trocar a paridade de um dos campos de quarks é preciso executar três transformações simultâneas:

$$q_R(x) = \gamma_0 q_L(-x),$$

o que os caracteriza como objetos quirais.

O termo cinético da lagrangiana da QCD (2.1), com $m_f = 0$, é invariante sob o grupo quiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Segundo o teorema de Noether, a simetria quiral conserva o isospin, uma simetria fundamental nos decaimentos fortes, gerada por transformações vetoriais. Essa simetria se realiza no modo de Wigner-Weyl, que corresponde à existência do octeto de mésons $SU(3)_V$, com massas muito próximas. A invariância por transformações axiais, por outro lado, está relacionada ao fato desses mésons pseudoescalares serem leves, e a simetria é realizada no modo de Nambu-Goldstone. No limite quiral, a invariância por $SU(3) \times SU(3)$ corresponde à chamada simetria oculta, que se manifesta pela existência de um vácuo não invariante e o surgimento de partículas sem massa, os bósons de Goldstone. Esses efeitos representam a quebra espontânea de simetria quiral e os estados mesônicos podem ser interpretados, nesse limite, como perturbações num condensado de quark e antiquarks.

Na natureza, ocorre a quebra explícita da simetria quiral, pois os quarks têm massas. Assim, um indício da simetria quiral é dado pelos mésons pseudoescalares, que possuem massas bem leves e próximas. Ao identificar esses mésons como os bósons de Goldstone

temos uma simetria quiral aproximada. Por isso, descrevemos os objetos de interesse deste trabalho, a saber os pseudoescalares e escalares, por meio de uma teoria efetiva que contém graus de liberdade mesônicos e simetria quiral aproximada.

2.5 Lagrangianas efetivas quirais

Para construir a lagrangiana efetiva dos mésons pseudoescalares, definimos o campo

$$U = e^{i\Phi/F} , \quad (2.27)$$

sendo F a constante de decaimento dos mésons no vácuo e Φ o campo matricial, dado por

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_i \phi_i = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} \pi^0 + \sqrt{\frac{1}{6}} \eta & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\sqrt{\frac{1}{2}} \pi^0 + \sqrt{\frac{1}{6}} \eta & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \eta \end{pmatrix} . \quad (2.28)$$

Proposta inicialmente por Gasser e Leutwyler[25], a lagrangiana efetiva quiral de ordem mais baixa, invariante de Lorentz e por transformações de CP, é dada em termos do campo U por

$$\mathcal{L}_M^{(2)} = \frac{F^2}{4} \left\langle (\nabla_\mu U)^\dagger (\nabla^\mu U) + \chi^\dagger U + \chi U^\dagger \right\rangle . \quad (2.29)$$

O termo cinético da lagrangiana, desconsiderando contribuições de campos axiais e vetoriais externos, é

$$(\nabla_\mu U)^\dagger (\nabla^\mu U) = \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U. \quad (2.30)$$

O termo de massa envolve um campo escalar externo s , responsável pela interação que dá origem às massas dos mésons e incorporado na função

$$\chi = 2 B s , \quad s = \lambda_a s_a . \quad (2.31)$$

O valor esperado dos campos escalares externos no vácuo, é não nulo para três componentes: $\langle s_0 \rangle = \sigma_0$, $\langle s_8 \rangle = \sigma_8$ e $\langle s_3 \rangle = \sigma_3$. Esses valores dão origem às massas

dos quarks através da relação

$$\sigma = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix} . \quad (2.32)$$

Definindo

$$\hat{m} = (m_u + m_d)/2 , \quad \delta m = m_u - m_d , \quad (2.33)$$

podemos escrever os campos escalares externos em termos das matrizes de Gell-Mann,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2\hat{m} + m_s}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\delta m}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hat{m} - m_s}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= (2\hat{m} + m_s)/3 \, I + \delta m/2 \, \lambda_3 + (\hat{m} - m_s)/\sqrt{3} \, \lambda_8 \\ &= \sigma_0 \, I + \sigma_3 \, \lambda_3 + \sigma_8 \, \lambda_8 , \end{aligned} \quad (2.34)$$

o que determina σ_0 , σ_3 e σ_8 . A partir de agora trabalhamos no limite de isospin exato, que corresponde a tomar $\sigma_3 = 0$.

Juntando as contribuições dos termos cinético (2.30) e de massa (2.31) na lagrangiana (2.29), temos

$$\mathcal{L}_M^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U + 2B (\sigma U + \sigma U^\dagger) \rangle . \quad (2.35)$$

As várias interações são determinadas expandindo o campo U em série na lagrangiana. Neste trabalho, é necessária a expansão até Φ^4 , pois estamos interessados no vértice de quatro pontos. Assim,

$$U = 1 + i\Theta - \Theta^2/2! - i\Theta^3/3! + \Theta^4/4! , \quad (2.36)$$

em que $\Theta = \Phi/F$ e os termos da lagrangiana (2.35) são escritos em função de Θ como

$$\partial_\mu U = i\partial_\mu \Theta - \partial_\mu \Theta^2/2! - i\partial_\mu \Theta^3/3! + \partial_\mu \Theta^4/4! , \quad (2.37)$$

$$\partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U = \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta - \frac{1}{6} \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta \Theta^2 + \frac{1}{6} \Theta \partial_\mu \Theta \Theta \partial^\mu \Theta , \quad (2.38)$$

$$= 4B\sigma (1 - \Theta^2/2 + \Theta^4/24) . \quad (2.39)$$

Esse procedimento resulta em

$$\mathcal{L}_M^{(2)} = \frac{F^2}{4} \left\langle \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta + \frac{1}{12} [\Theta, \partial_\mu \Theta] [\Theta, \partial^\mu \Theta] + 4 B \sigma \left(1 - \frac{1}{2} \Theta^2 + \frac{1}{24} \Theta^4 \right) \right\rangle. \quad (2.40)$$

Sendo $\Theta \equiv \Theta_i \lambda_i$ e σ dado pela relação (2.34), a lagrangiana (2.40) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M^{(2)} = & \frac{F^2}{4} \left\langle \partial_\mu \Theta_i \partial^\mu \Theta_j \lambda_i \lambda_j + \frac{1}{12} \Theta_i \partial_\mu \Theta_j \Theta_k \partial^\mu \Theta_l [\lambda_i, \lambda_j] [\lambda_k, \lambda_l] \right. \\ & \left. + 4B(\sigma_0 I + \sigma_8 \lambda_8) \left(1 - \frac{1}{2} \Theta_i \Theta_j \lambda_i \lambda_j + \frac{1}{96} \Theta_i \Theta_j \Theta_k \Theta_l \{ \lambda_i, \lambda_j \} \{ \lambda_k, \lambda_l \} \right) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Usando as relações dos traços das matrizes de Gell-Mann, equações (2.15-2.20), obtemos, finalmente, a lagrangiana que descreve a interação dos pseudoescalares

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M^{(2)} = & 3 F^2 B \sigma_0 \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - B (\sigma_0 \delta_{ij} + \sigma_8 d_{8ij}) \phi_i \phi_j \\ & - \frac{1}{6 F^2} f_{ijs} f_{kls} \phi_i \partial_\mu \phi_j \phi_k \partial^\mu \phi_l + \frac{B}{24 F^2} \left[\sigma_0 \left(\frac{4}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 d_{ijs} d_{kls} \right) \right. \\ & \left. + \sigma_8 \left(\frac{4}{3} \delta_{ij} d_{kls} + \frac{4}{3} d_{ijs} \delta_{kl} + 2 d_{ijm} d_{kln} d_{8mn} \right) \right] \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l. \end{aligned} \quad (2.42)$$

A primeira linha corresponde ao vácuo, a segunda à lagrangiana livre e as demais a auto interações. Neste trabalho, as auto interações serão utilizadas para descrever o termo de contato no espalhamento $K\pi \rightarrow K\pi$.

Para construir uma lagrangiana que leve em consideração a interação dos mésons pseudoescalares com mésons escalares, importantes neste trabalho, usamos a formulação desenvolvida por Ecker, Gasser, Pich e De Rafael[26]. As ressonâncias escalares são graus de liberdade explícitos, e a lagrangiana é escrita como

$$\mathcal{L}_S^{(2)} = \tilde{c}_d S_0 \langle u_\mu u^\mu \rangle + \tilde{c}_m S_0 \langle \chi_+ \rangle + c_d \langle S u_\mu u^\mu \rangle + c_m \langle S \chi_+ \rangle, \quad (2.43)$$

$$S = \lambda_i S_i, \quad (2.44)$$

com

$$u = e^{i\Phi/2F} \rightarrow u^2 = U, \quad (2.45)$$

$$u_\mu = i u^\dagger \nabla_\mu U u^\dagger = u_\mu^\dagger, \quad (2.46)$$

$$\chi_+ = u^\dagger \chi u^\dagger + u \chi^\dagger u. \quad (2.47)$$

Os campos S_i estão associados às ressonâncias escalares, de maneira análoga aos pseudoescalares com ϕ_i .

Podemos reescrever a lagrangiana (2.43) em termos das definições (2.45-2.47) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^{(2)} = & \tilde{c}_d S_0 \langle \nabla_\mu U (\nabla^\mu U)^\dagger \rangle + \tilde{c}_m S_0 \langle \chi^\dagger U + \chi U^\dagger \rangle \\ & + c_d \langle u S u^\dagger \nabla_\mu U (\nabla^\mu U)^\dagger \rangle + c_m \langle u^\dagger S u^\dagger \chi + u S u \chi^\dagger \rangle, \end{aligned} \quad (2.48)$$

Usando a expansão do campo U em Θ (2.36), considerando apenas termos lineares em S e quadráticos em ϕ , temos

$$\nabla_\mu U (\nabla^\mu U)^\dagger = \partial_\mu \Theta \partial^\mu \Theta \quad (2.49)$$

$$u S u^\dagger = S - \frac{i}{2} [S, \Theta] - \frac{1}{8} [[S, \Theta], \Theta], \quad (2.50)$$

$$u^\dagger S u^\dagger = S - \frac{i}{2} \{S, \Theta\} - \frac{1}{8} \{\{S, \Theta\}, \Theta\}, \quad (2.51)$$

$$(\chi^\dagger U + \chi U^\dagger) = 4B \{ \sigma (1 - \Theta^2/2) \}. \quad (2.52)$$

Usando as relações dos traços das matrizes de Gell-Mann, definidas em (2.15-2.20), podemos escrever a lagrangiana (2.48) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^{(2)} = & \frac{2\tilde{c}_d}{F^2} S_0 \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{4\tilde{c}_m}{F^2} B S_0 (\sigma_0 \delta_{ij} + \sigma_8 d_{8ij}) \phi_i \phi_j \\ & + \frac{2c_d}{F^2} d_{eij} S_e \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{c_m}{F^2} B [\sigma_0 \langle I \rangle d_{eij} + \sigma_8 (2\delta_{ei} \delta_{j8} + 4d_{eis} d_{sj8})] S_e \phi_i \phi_j. \end{aligned} \quad (2.53)$$

sendo $\langle I \rangle = 3$. Essa lagrangiana $\mathcal{L}_S^{(2)}$ descreve as interações de um campo escalar com dois campos pseudoescalares.

2.5.1 Sumário

Neste trabalho descrevemos o espalhamento elástico $K\pi$ e precisamos da interação de contato entre os campos pseudoescalares ϕ_i e, como estados intermediários, a interação com os campos escalares S_e . As lagrangianas que descrevem estas interações são denominadas, respectivamente, contato e ressonante e dadas por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_C^{(2)} = & -\frac{1}{6F^2} f_{ijs} f_{kls} \phi_i \partial_\mu \phi_j \phi_k \partial^\mu \phi_l + \frac{B}{24F^2} \left[\sigma_0 \left(\frac{4}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 d_{ijs} d_{kls} \right) \right. \\ & \left. + \sigma_8 \left(\frac{4}{3} \delta_{ij} d_{kl8} + \frac{4}{3} d_{ij8} \delta_{kl} + 2 d_{ijm} d_{kln} d_{8mn} \right) \right] \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l. \end{aligned} \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R^{(2)} = & +\frac{2\tilde{c}_d}{F^2} S_0 \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{4\tilde{c}_m}{F^2} B S_0 (\sigma_0 \delta_{ij} + \sigma_8 d_{8ij}) \phi_i \phi_j \\ & + \frac{2c_d}{F^2} d_{eij} S_e \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{c_m}{F^2} B [\sigma_0 3 d_{eij} + \sigma_8 (2 \delta_{ei} \delta_{j8} + 4 d_{eis} d_{sj8})] S_e \phi_i \phi_j. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Capítulo 3

Espalhamento $K\pi$

Neste capítulo, discutimos detalhadamente o processo do espalhamento $K\pi$ e obtemos a amplitude unitarizada, decomposta em canais de isospin.

3.1 Dinâmica

A descrição do espalhamento $K\pi$ é feita em aproximação de árvore e dada pelos diagramas de Feynman mostrados na fig.3.1, envolvendo um termo de contato e trocas de ressonâncias escalares nos canais s , t e u . A amplitude tem duas possíveis projeções de isospin, $1/2$ e $3/2$, consequência direta da combinação dos isospins do pión ($I = 1$) e do káon ($I = 1/2$). As ressonâncias escalares descobertas recentemente estão presentes no canal $I = 1/2$, onde a física é muito mais interessante do que no canal $I = 3/2$, como mostraremos adiante.

Figura 3.1: Amplitude de espalhamento $K\pi$ em nível árvore, com termo de contato e ressonâncias escalares nos canais s , t e u .

O tratamento da amplitude é baseado em simetria quiral, o que garante uma boa representação a baixas energias. A teoria de perturbação quiral utiliza uma escala q , da ordem das massas dos pseudoescalares. Na figura 3.1, o primeiro diagrama, correspondente ao termo de contato, ele é o elemento de ordem mais baixa nessa escala, $\propto q^2$. Os demais

diagramas, do tipo ressonante, são de ordem q^4 e representam correções. Desse modo, o termo de contato é mais importante na região próxima ao limiar do espalhamento, enquanto os termos ressonantes contribuem significativamente na região próxima às massas das ressonâncias. Esquemáticamente, temos

Do ponto de vista cinemático, a amplitude $\pi(q)\bar{K}(k) \rightarrow \pi(q')\bar{K}(k')$ é descrita em termos de invariantes relativísticos, construídos a partir dos momentos iniciais e finais. As variáveis de Mandelstam, invariantes de Lorentz, são definidas em termos desses momentos como: $s = (q + k)^2 = (q' + k')^2$; $t = (q - q')^2 = (k - k')^2$; $u = (q - k')^2 = (k - q')^2$, com $s + t + u = 2M_\pi^2 + 2M_K^2$. O limiar do espalhamento, ou seja, a quantidade de energia necessária para que esse fenômeno possa ocorrer, é dado por $s = (M_\pi + M_K)^2 \text{GeV}^2$. Maiores detalhes sobre a cinemática deste espalhamento podem ser vistos no Apêndice A.

Os parâmetros envolvidos na descrição desse espalhamento são a constante de decaimento F , as massas M_π e M_K dos mésons pseudoescalares, as massas dos mésons escalares trocados nos canais s , t e u e as respectivas constantes de acoplamento.

Todos os diagramas da figura 3.1 contribuem para os dois canais de isospin da amplitude de espalhamento. As ressonâncias escalares têm isospin bem definido e, portanto, separar esses componentes é fundamental para podermos comparar nossos resultados com observáveis físicos. Para isso, é preciso projetar os estados mesônicos em termos dos estados de isospin, usando as relações de Clebsch-Gordan[27]

$$|\pi^+ K^- \rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, 1/2 \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, 1/2 \rangle, \quad (3.1)$$

$$|\pi^0 \bar{K}^0 \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, 1/2 \rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, 1/2 \rangle. \quad (3.2)$$

Em seguida, calculamos as amplitudes de contato e as amplitudes devido às trocas de ressonâncias.

3.2 Interação de contato

A interação méson-méson de contato é descrita pela lagrangiana efetiva quiral $SU(3) \times SU(3)$, proposta por Gasser e Leutwyler[25] e apresentada na seção 2.5.1. Os termos que

contribuem para o caso do espalhamento $K\pi$ são dados por

$$\mathcal{L}_C^{(2)} = A_{ijkl} \phi_i \partial_\mu \phi_j \phi_k \partial^\mu \phi_l + B_{ijkl} \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l , \quad (3.3)$$

$$A_{ijkl} = -\frac{1}{6 F^2} f_{ijs} f_{kls} , \quad (3.4)$$

$$B_{ijkl} = \frac{B}{24 F^2} \left[\sigma_0 \left(\frac{4}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 d_{ijs} d_{kls} \right) + \sigma_8 \left(\frac{4}{3} \delta_{ij} d_{kls} + \frac{4}{3} d_{ijs} \delta_{kl} + 2 d_{ijm} d_{kln} d_{8mn} \right) \right] , \quad (3.5)$$

sendo f_{ijs} e d_{ijs} , respectivamente, as constantes de estrutura antisimétrica e simétrica do grupo de $SU(3)$ ¹. Os escalares externos σ_0 e σ_8 , em conjunto com o parâmetro B , dão origem às massas dos pseudoescalares, segundo as relações

$$\begin{aligned} M_\pi^2 &= 2B \left[\sigma_0 + \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}} \right] , \\ M_K^2 &= 2B \left[\sigma_0 - \frac{\sigma_8}{2\sqrt{3}} \right] , \\ M_\eta^2 &= 2B \left[\sigma_0 - \frac{\sigma_8}{\sqrt{3}} \right] . \end{aligned} \quad (3.6)$$

A lagrangiana (3.3) é escrita em função dos campos cartesianos ϕ_i . Esses campos são operadores que atuam no vácuo e geram os estados físicos, ou seja, especificam as características dos pseudoescalares. O octeto de mésons pseudoescalares, em função dos campos cartesianos, é dado por:

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) |0\rangle , & |K^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_4 - i\phi_5) |0\rangle , \\ |\pi^0\rangle &= \phi_3 |0\rangle , & |K^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_4 + i\phi_5) |0\rangle , \\ |\pi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) |0\rangle , & |K^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_6 - i\phi_7) |0\rangle , \\ |\eta\rangle &= \phi_8 |0\rangle , & |\bar{K}^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_6 + i\phi_7) |0\rangle . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aplicando a derivada funcional em $\mathcal{L}_C^{(2)}$, obtemos o vértice do processo genérico $P_a(k) P_b(q) \rightarrow P_c(k') P_d(q')$ dado por

¹As constantes de estrutura foram definidas no capítulo 2 e são dadas nas tabelas 2.1 e 2.2.

$$i 2 [A_{abcd} (u - t) - A_{acbd} (s - u) - A_{adbc} (s - t)] \\ + i 8 [B_{abcd} + B_{acbd} + B_{adbc}] . \quad (3.8)$$

3.3 Trocas de ressonâncias

A lagrangiana que rege a interação entre os mésons pseudoescalares e ressonâncias escalares foi proposta por Ecker, Gasser, Pich e De Rafael[26], como apresentamos na seção 2.5.1. Considerando apenas os termos relevantes, a lagrangiana ressonante é escrita como

$$\mathcal{L}_R^{(2)} = \frac{2\tilde{c}_d}{F^2} S_0 \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{4\tilde{c}_m}{F^2} B_0 S_0 (\sigma_0 \delta_{ij} + \sigma_8 d_{8ij}) \phi_i \phi_j \\ + \frac{2c_d}{F^2} d_{eij} S_e \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{c_m}{F^2} B_0 [\sigma_0 3d_{8ij} + \sigma_8 (2\delta_{ei} \delta_{j8} + 4d_{eis} d_{sj8})] S_e \phi_i \phi_j , \quad (3.9)$$

em que S_e representa um octeto de ressonâncias escalares e S_0 o escalar singleto, de acordo com as convenções mostradas na equação (3.11). Como veremos adiante, esse octeto é referente aos escalares de massa acima de 1 GeV. Essas ressonâncias são representadas por R , com índices associados aos seus análogos escalares leves.

singleto:

$$|R_\sigma\rangle = S_0 |0\rangle , \quad (3.10)$$

octeto:

$$\begin{aligned} |R_{a_0}^0\rangle &= S_3 |0\rangle , & |R_\kappa^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S_4 + iS_5) |0\rangle , \\ |R_{a_0}^+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 - iS_2) |0\rangle , & |R_\kappa^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S_4 - iS_5) |0\rangle , \\ |R_{a_0}^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S_1 + iS_2) |0\rangle , & |R_\kappa^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S_6 - iS_7) |0\rangle , \\ |R_{f_0}\rangle &= S_8 |0\rangle , & |\bar{R}_\kappa^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(S_6 + iS_7) |0\rangle . \end{aligned} \quad (3.11)$$

As constantes de acoplamento, $\tilde{c}_d$, c_d , $\tilde{c}_m$ e c_m na lagrangiana (3.9) podem, em princípio, ser extraídas de observáveis.

Aplicando a derivada funcional em (3.9), obtemos as regras de Feynman para os vértices genéricos $S_e \rightarrow PP$ e $S_0 \rightarrow PP$,

- $S_0 \rightarrow P_c(k') P_d(q')$

$$i\bar{T}_{s0} = i \left\{ -\frac{4\tilde{c}_d}{F^2} (k' \cdot q') \delta_{cd} - \frac{8\tilde{c}_m}{F^2} B (\sigma_0 \delta_{cd} + \sigma_8 d_{cd8}) \right\}. \quad (3.12)$$

- $S_e \rightarrow P_c(k') P_d(q')$

$$i\bar{T}_{se} = i \left\{ -\frac{4c_d}{F^2} (k' \cdot q') d_{ecd} - \frac{2c_m}{F^2} B [\sigma_0 3d_{ecd} + \sigma_8 (\delta_{ec} \delta_{d8} + \delta_{ed} \delta_{c8} + 2d_{ecs} d_{sd8} + 2d_{eds} d_{sc8})] \right\}. \quad (3.13)$$

Os diagramas ressonantes da figura 3.1 não envolvem o η como estado inicial ou final. Sendo o η definido pelo índice $i = 8$, os termos δ_{8i} podem ser eliminados das regras de Feynman. A partir da tabela 2.2, para os valores de d_{ijk} , é possível notar que a matriz $D_8 = d_8(ij)$ é diagonal e, por isso, podemos reescrevê-la como uma função δ_{ij} e um peso relativo H_m , que muda de acordo com o méson envolvido:

$$d_{8ij} = \delta_{ij} H_m. \quad (3.14)$$

e os seus valores são dados pela tabela 3.1 .

	i	H_m
π	1, 2, 3	$1/\sqrt{3}$
K	4, 5, 6, 7	$-1/2\sqrt{3}$
η	8	$-1/\sqrt{3}$

Tabela 3.1: Valores de H_m

Dessa forma, podemos reescrever as regras de Feynman (3.12) e (3.13) como

$$i\bar{T}_{s0} = i \delta_{cd} \left\{ -\frac{4\tilde{c}_d}{F^2} (k' \cdot q') - \frac{4\tilde{c}_m}{F^2} M_c^2 \right\}; \quad (3.15)$$

$$i\bar{T}_{se} = -i d_{ecd} \left\{ \frac{4c_d}{F^2} (k' \cdot q') + \frac{2c_m}{F^2} B [3\sigma_0 + 2\sigma_8 (H_c + H_d)] \right\}, \quad (3.16)$$

sendo M_c a massa do méson associada ao índice c . A partir desses resultados, podemos calcular todos os diagramas ressonantes dos canais s , t e u .

Começamos pelo canal s , o mais importante do espalhamento, que contém somente isospin $I = 1/2$. A partir da figura 3.1, vemos que os vértices possíveis neste canal são do tipo $R_e^0 \rightarrow \pi_a(q') K_b(k')$, definidos pela regra de Feynman (3.16) como

$$i\bar{T}_{R_e K_b \pi_a} = -i d_{eab} \left\{ \frac{4c_d}{F^2} (k' \cdot q') + \frac{c_m}{F^2} \frac{(4M_K^2 + 5M_\pi^2)}{3} \right\}; \quad (3.17)$$

O estado intermediário nesse canal é uma ressonância do tipo R_κ^0 e a amplitude do canal s é dada por

$$\bar{T}_{abcd}^s = d_{eab} d_{ecd} \bar{T}_{R_\kappa}^s, \quad (3.18)$$

com

$$\bar{T}_{R_\kappa}^s = -\frac{4}{F^4} \frac{1}{s - m_{R_\kappa}^2} \left[c_d(s - M_K^2 - M_\pi^2) + c_m \frac{(4M_K^2 + 5M_\pi^2)}{6} \right]^2. \quad (3.19)$$

Analisando o canal t , notamos que os diagramas contribuem aos dois canais de isospin. Para calcular a amplitude, precisamos dos vértices $R_{e,0} \rightarrow \pi_b(q) \pi_d(q')$, $R_{e,0} \rightarrow K_a(k) K_c(k')$. Com base nas regras de Feynman (3.15) e (3.16), temos

$$i\bar{T}_{R_\sigma \pi_b \pi_d} = -i \frac{1}{F^2} 2\delta_{bd} [\tilde{c}_d(t - 2M_\pi^2) + 2\tilde{c}_m M_\pi^2]. \quad (3.20)$$

$$i\bar{T}_{R_\sigma K_a K_c} = -i \frac{1}{F^2} 2\delta_{ac} [\tilde{c}_d(t - 2M_K^2) + 2\tilde{c}_m M_K^2]. \quad (3.21)$$

$$i\bar{T}_{R_e\pi_b\pi_d} = \frac{-i}{F^2} d_{ebd} \left[2c_d(t - 2M_\pi^2) + \frac{c_m}{3} (11M_\pi^2 - 2M_K^2) \right]. \quad (3.22)$$

$$i\bar{T}_{R_eK_aK_c} = \frac{-i}{F^2} d_{eac} \left[2c_d(t - 2M_K^2) + \frac{c_m}{3} (10M_K^2 - M_\pi^2) \right]. \quad (3.23)$$

As partículas no estado inicial e final são idênticas entre si e, portanto, as ressonâncias escalares nesse canal terão índices 0 e 8, o que corresponde às ressonâncias R_σ e R_{f_0} . A amplitude cartesiana no canal t é dada por

$$\bar{T}_{acbd}^t = d_{eac}d_{ebd} \bar{T}_{R_{f_0}}^t + \delta_{ac}\delta_{bd} \bar{T}_{R_\sigma}^t, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{R_{f_0}}^t &= - \frac{4}{F^4} \frac{1}{t - M_8^2} \left[c_d(t - 2M_K^2) + \frac{c_m}{6} (10M_K^2 - M_\pi^2) \right] \times \\ &\quad \times \left[c_d(t - 2M_\pi^2) + \frac{c_m}{6} (11M_\pi^2 - 2M_K^2) \right], \\ \bar{T}_{R_\sigma}^t &= - \frac{4}{F^4} \frac{1}{t - M_0^2} \left[\tilde{c}_d(t - 2M_K^2) + 2\tilde{c}_m M_K^2 \right] \left[\tilde{c}_d(t - 2M_\pi^2) + 2\tilde{c}_m M_\pi^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

No canal u , o único vértice que contribui é o $R_\kappa^0 \rightarrow \bar{K}^0(k')\pi^0(q)$. Usando a regra de Feynman (3.16), obtemos

$$\bar{T}_{adbc}^u = d_{ead}d_{ebc} \bar{T}_{R_\kappa}^u, \quad (3.26)$$

$$\bar{T}_{R_\kappa}^u = - \frac{4}{F^4} \frac{1}{u - m_{R_\kappa}^2} \left[c_d(u - M_K^2 - M_\pi^2) + c_m \frac{(4M_K^2 + 5M_\pi^2)}{6} \right]^2. \quad (3.27)$$

3.4 Estados de Isospin

Neste trabalho queremos calcular, especificamente, o espalhamento $K^-\pi^+ \rightarrow K^-\pi^+$, com o objetivo de estudar a ressonância escalar κ . No processo $K^-\pi^+ \rightarrow K^-\pi^+$, exemplificado na figura 3.2, interações com o estado $\bar{K}^0\pi^0$ intermediários são possíveis.

Figura 3.2: Interações possíveis de $K^-\pi^+ \rightarrow K^-\pi^+$.

Além disso, para calcular as projeções das amplitudes ressonantes nos canais de isospin, usamos as relações (3.1) e (3.2), e obtemos seus valores esperados nos estados de $I = 1/2$ e $I = 3/2$ através das relações

$$\begin{aligned} \langle \pi^+ K^- | \bar{T}_{abcd}^i | \pi^+ K^- \rangle &= \frac{1}{3} \langle 3/2 | \bar{T}_{abcd}^i | 3/2 \rangle + \frac{2}{3} \langle 1/2 | \bar{T}_{abcd}^i | 1/2 \rangle , \\ &= \frac{1}{3} \bar{T}_{3/2}^i + \frac{2}{3} \bar{T}_{1/2}^i ; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \langle \pi^0 \bar{K}^0 | \bar{T}_{abcd}^i | \pi^0 \bar{K}^0 \rangle &= \frac{2}{3} \langle 3/2 | \bar{T}_{abcd}^i | 3/2 \rangle + \frac{1}{3} \langle 1/2 | \bar{T}_{abcd}^i | 1/2 \rangle , \\ &= \frac{2}{3} \bar{T}_{3/2}^i + \frac{1}{3} \bar{T}_{1/2}^i ; \end{aligned} \quad (3.29)$$

em que i é o índice do canal. Por isso, para calcular a amplitude do espalhamento $\bar{K}\pi$, precisamos dos produtos dos estados físicos em termos dos campos ϕ_i , dados por

$$|\bar{K}^0\rangle \otimes |\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_6 + i\phi_7)\phi_3 |0\rangle , \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} |K^-\rangle \otimes |\pi^+\rangle &= \frac{1}{2}(\phi_4 - i\phi_5)(-\phi_1 - i\phi_2) |0\rangle , \\ &= \frac{-1}{2}[\phi_4\phi_1 + \phi_5\phi_2 + i(\phi_4\phi_2 - \phi_5\phi_1)] |0\rangle . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dessa forma, reduzimos todas as regras de Feynman para os casos em que os índices a e c são associados aos estados π^+ e π^0 e os índices b e d associados aos estados $\bar{K}^0$ e K^- . Assim, $a, c = 1, 2, 3$; $b, d = 4, 5, 6, 7$, e os estados relevantes correspondem às combinações mostradas nas equações (3.30) e (3.31). As constantes de estrutura d_{ijs} e f_{ijs} definem quais combinações de índices sobrevivem e quais os pesos correspondentes, respeitando a simetria de isospin.

3.5 Amplitudes de isospin

A contribuição do termo de contato à amplitude do espalhamento é obtida calculando a regra de Feynman (3.8) nos casos de interesse, produtos (3.30) e (3.31). Após ser projetada em componentes de isospin $1/2$ e $3/2$ as amplitudes de contato são dadas por

$$\bar{T}_{1/2}^C = \frac{1}{4f^2} [2(s - u) + t] = \frac{1}{4f^2} [4s + 3t - 4(M_\pi^2 + M_K^2)] , \quad (3.32)$$

$$\bar{T}_{3/2}^C = -\frac{1}{4f^2} [s - u - t] = -\frac{1}{2f^2} [s - (M_\pi^2 + M_K^2)] . \quad (3.33)$$

As contribuições dos termos ressonantes são calculadas em detalhes no Apêndice B. Aqui mostramos apenas os resultados obtidos para cada canal. Para o canal s , as equações (3.28) e (3.29) fornecem

$$\langle \pi^+ K^- | \bar{T}_{abcd}^s | \pi^+ K^- \rangle = \frac{1}{2} \bar{T}_{R_\kappa}^s = \frac{1}{3} \bar{T}_{3/2}^s + \frac{2}{3} \bar{T}_{1/2}^s, \quad (3.34)$$

$$\langle \pi^0 \bar{K}^0 | \bar{T}_{abcd}^s | \pi^0 \bar{K}^0 \rangle = \frac{1}{4} \bar{T}_{R_\kappa}^s = \frac{2}{3} \bar{T}_{3/2}^s + \frac{1}{3} \bar{T}_{1/2}^s. \quad (3.35)$$

Esse sistema, de simples resolução, resulta em

$$\begin{aligned} \bar{T}_{3/2}^s &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \bar{T}_{R_\kappa}^s - \frac{1}{4} \bar{T}_{R_\kappa}^s \right) = 0, \\ \bar{T}_{1/2}^s &= \frac{3}{4} \bar{T}_{R_\kappa}^s. \end{aligned} \quad (3.36)$$

O resultado demonstra que o canal s não contribui ao caso $I = 3/2$, o que era esperado, uma vez que as ressonâncias observadas experimentalmente nesse canal têm isospin $I = 1/2$.

Analogamente, obtemos as contribuições dos canais t e u , que são dadas por

$$\bar{T}_{1/2}^t = \bar{T}_{3/2}^t = -\frac{1}{6} \bar{T}_{R_{f_0}}^t + \bar{T}_{R_\sigma}^t; \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{1/2}^u &= -\frac{1}{4} \bar{T}_{R_\kappa}^u; \\ \bar{T}_{3/2}^u &= \frac{1}{2} \bar{T}_{R_\kappa}^u. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Juntando a contribuição dos diagramas de contato, às contribuições dos canais s , t e u , obtemos,

$$\bar{T}_{1/2} = \frac{1}{4f^2} [4s + 3t - 4(M_\pi^2 + M_K^2)] + \frac{3}{4} \bar{T}_{R_\kappa}^s - \frac{1}{6} \bar{T}_{R_{f_0}}^t + \bar{T}_{R_\sigma}^t - \frac{1}{4} \bar{T}_{R_\kappa}^u; \quad (3.39)$$

$$\bar{T}_{3/2} = -\frac{1}{2f^2} [s - (M_\pi^2 + M_K^2)] - \frac{1}{6} \bar{T}_{R_{f_0}}^t + \bar{T}_{R_\sigma}^t + \frac{1}{2} \bar{T}_{R_\kappa}^u. \quad (3.40)$$

Para tornar a notação mais compacta, é conveniente definir uma amplitude $\bar{T}_x^y$, com uma ressonância x no canal y como:

$$\bar{T}_x^y = - \frac{4}{F^4} \left\{ \frac{1}{y - m_x^2} (c_d^x m_x^2 + C_\pi^x) (c_d^x m_x^2 + C_K^x) + c_d^{x2} y + c_d^{x2} m_x^2 + c_d^x (C_\pi^x + C_K^x) \right\}; \quad (3.41)$$

sendo

$$\begin{aligned} c_d^{R_\sigma} &= \tilde{c}_d; \quad c_d^{R_\kappa} = c_d^{R_{f_0}} = c_d; \\ C_\pi^{R_\kappa} &= C_K^{R_\kappa} = -c_d(M_K^2 + M_\pi^2) + \frac{c_m}{6}(4M_K^2 + 5M_\pi^2); \\ C_\pi^{R_\sigma} &= -2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)M_\pi^2, \quad C_K^{R_\sigma} = -2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)M_K^2; \\ C_\pi^{R_{f_0}} &= -2c_d M_\pi^2 - \frac{c_m}{6}(2M_K^2 - 11M_\pi^2), \\ C_K^{R_{f_0}} &= -2c_d M_K^2 + \frac{c_m}{6}(10M_K^2 - M_\pi^2). \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.6 Projeção na onda S

Até agora, calculamos a amplitude do espalhamento elastico $\bar{K}\pi$ nos dois canais de isospin. Como estamos interessados nas ressonâncias escalares, que têm momento angular nulo, é preciso projetar a amplitude na onda S , o que é feito por meio da equação[19]

$$\bar{T}_0^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx P^0(x) \bar{T}_0(s, x), \quad (3.43)$$

sendo $x = \cos \theta$ e θ , o ângulo do espalhamento. $\bar{T}_0$ é a amplitude a ser projetada e P^0 é o polinômio de Legendre de ordem zero.

Ao projetar a amplitude para um dado valor do momento angular, o sistema perde o caráter invariante de Lorentz. No presente problema, adotamos o sistema de centro de massa, no qual $\mathbf{q} + \mathbf{k} = 0 = \mathbf{q}' + \mathbf{k}'$, e os momentos finais fazem um ângulo θ com os iniciais. Para escrever as variáveis de Mandelstam u e t nesse referencial, introduzimos $\mathbf{p}$ que corresponde ao trimomento dos mésons incidentes $\mathbf{p} = \mathbf{q} = -\mathbf{k}$. O módulo de $\mathbf{p}$ foi calculado em detalhes no Apêndice A e é expresso pela equação (A.4) como

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^2 &= \frac{s}{4} \rho^2(s), \\ \rho^2(s) &= \left(1 - \frac{(M_K - M_\pi)^2}{s} \right) \left(1 - \frac{(M_K + M_\pi)^2}{s} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Assim,

$$t = -2(1 - \cos \theta) \mathbf{p}^2, \quad (3.45)$$

$$u = 2s(1 - \cos \theta) \mathbf{p}^2 - s + 2M_\pi^2 + 2M_K^2. \quad (3.46)$$

Ao projetar as amplitudes (3.39) e (3.40) na onda S , usando a relação (3.43), temos dois tipos de integrais a resolver. Uma delas é linear em θ e a segunda, originada dos propagadores, possui θ no denominador. As integrais lineares em t e u não contribuem devido à propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Legendre,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx = 0. \quad (3.47)$$

As integrais nos propagadores dos canais u e t tornam-se funções de s e contribuem para um fundo não ressonante B_I . A projeção (3.43) do propagador de t é dada por

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{t - m^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{2x\mathbf{p}^2 - m^2 - 2\mathbf{p}^2} = -\frac{1}{s\rho^2(s)} \log \left(\frac{s\rho^2(s)}{m^2} + 1 \right) \quad (3.48)$$

Analogamente, para u temos

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{u - m^2} = \frac{1}{s\rho^2(s)} \log \left(1 - \frac{s\rho^2(s)}{s - 2(M_\pi^2 + M_K^2) + m^2} \right). \quad (3.49)$$

3.7 Kernel

Após a projeção na onda s , a amplitude $\bar{T}$ passa a ser definida como o kernel $\mathcal{K}_I$ do espalhamento $K^- \pi^+$. Esse kernel, representado na figura 3.3, contém toda a informação dinâmica do sistema em aproximação de árvore, por isso o chamamos de kernel, o núcleo do espalhamento. Existem três estruturas dinâmicas que contribuem para o kernel, o termo de contato (K^C), o termo com pólo explícito (K^P) e o fundo (K^B).

Figura 3.3: Kernel das amplitude $I = 1/2$ e $I = 3/2$.

- $I = 1/2$

$$\mathcal{K}_{1/2} = K_{1/2}^C + K_{1/2}^P + K_{1/2}^B, \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} K_{1/2}^C &= \frac{1}{4F^2} [(4 - 3\rho^2/2)s - 4(M_\pi^2 + M_K^2)], \\ K_{1/2}^P &= -\frac{3}{F^4} \frac{1}{s - m_{R_\kappa}^2} [c_d(m_{R_\kappa}^2 - M_\pi^2 - M_K^2) + c_m(5M_\pi^2 + 4M_K^2/6)]^2, \\ K_{1/2}^B &= B_{R_\kappa}^s + B_{R_\sigma}^t - \frac{1}{6}B_{R_{f_0}}^t - \frac{1}{4}B_{R_\kappa}^u. \end{aligned}$$

- $I = 3/2$

$$\mathcal{K}_{3/2} = K_{3/2}^C + K_{3/2}^B; \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} K_{3/2}^C &= -\frac{1}{2F^2} [s - (M_\pi^2 + M_K^2)]; \\ K_{3/2}^B &= B_{3/2} = B_{R_\sigma}^t - \frac{1}{6}B_{R_{f_0}}^t + \frac{1}{2}B_{R_\kappa}^u. \end{aligned}$$

Nestas expressões as contribuições de fundo são dadas por

$$\begin{aligned} B_{R_\kappa}^s &= -\frac{3}{F^4} \left\{ c_d^2 s + c_d^2 m_{R_\kappa}^2 + 2c_d[-c_d(M_K^2 + M_\pi^2) + \frac{c_m}{6}(4M_K^2 + 5M_\pi^2)] \right\}, \\ B_{R_\sigma}^t &= -\frac{4}{F^4} \left[-\frac{1}{s\rho^2(s)} \log\left(\frac{s\rho^2(s)}{m_{R_\sigma}^2} + 1\right) (\tilde{c}_d m_{R_\sigma}^2 + C_\pi^{R_\sigma})(\tilde{c}_d m_{R_\sigma}^2 + C_K^{R_\sigma}) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{c}_d^2 m_{R_\sigma}^2 + \tilde{c}_d(C_\pi^{R_\sigma} + C_K^{R_\sigma}) \right], \\ B_{R_{f_0}}^t &= -\frac{4}{F^4} \left[-\frac{1}{s\rho^2(s)} \log\left(\frac{s\rho^2(s)}{m_{R_{f_0}}^2} + 1\right) (c_d m_{R_{f_0}}^2 + C_\pi^{R_{f_0}})(c_d m_{R_{f_0}}^2 + C_K^{R_{f_0}}) \right. \\ &\quad \left. + c_d^2 m_{R_{f_0}}^2 + c_d(C_\pi^{R_{f_0}} + C_K^{R_{f_0}}) \right], \\ B_{R_\kappa}^u &= -\frac{4}{F^4} \left[\frac{1}{s\rho^2(s)} \log\left(1 - \frac{s\rho^2(s)}{s - 2(M_\pi^2 + M_K^2) + m_{R_\kappa}^2}\right) (c_d m_{R_\kappa}^2 + C_\pi^{R_\kappa})^2 \right. \\ &\quad \left. + c_d^2 m_{R_\kappa}^2 + c_d(C_\pi^{R_\kappa} + C_K^{R_\kappa}) \right]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Na figura 3.3, há apenas um diagrama com pólo explícito, correspondente a uma ressonância escalar R_κ , com números quânticos definidos. Por isso, de agora em diante, ela será representada apenas como R , uma vez que as demais ressonâncias foram incorporadas em B_I . Com o objetivo de deixar evidente a contribuição do termo ressonante na

amplitude de isospin $1/2$, reescrevemos $\mathcal{K}_{1/2}$ introduzindo uma nova função $\gamma^2(s)$,

$$\mathcal{K}_{1/2} = \frac{\gamma^2(s)}{s - m_R^2}; \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \gamma^2(s) = & \left\{ (1/F^2) \left[(1 - 3\rho^2(s)/8) s - (M_\pi^2 + M_K^2) \right] (m_R^2 - s) \right\}_C \\ & + \left\{ (3/F^4) [c_d (s - M_\pi^2 - M_K^2) + c_m (4M_K^2 + 5M_\pi^2)/6]^2 \right\}_R \\ & - (s - m_R^2) B_{1/2}; \end{aligned} \quad (3.54)$$

Da forma como foi definida, $\gamma^2(s)$ contém toda a dinâmica quiral e os índices C e R representam os termos oriundos do termo de contato e da ressonância.

A amplitude para $I = 3/2$ é escrita da mesma forma que a equação (3.51),

$$\mathcal{K}_{3/2} = -\frac{1}{2F^2} [s - (M_\pi^2 + M_K^2)] + B_{3/2}. \quad (3.55)$$

3.8 Valores numérico da amplitude em árvore

Com o kernel do espalhamento calculado, o próximo passo é unitarizar a amplitude. Antes disso, porém, é interessante analisar o comportamento numérico desse kernel e seus constituintes, para quantificar as escalas relevantes. A variável do problema é s , composta pela soma dos quadrimomentos iniciais o que, no referencial do centro de massa, equivale ao quadrado da energia do sistema. O intervalo de variação considerado para s começa no limiar do espalhamento, vai até um pouco acima da massa nominal da ressonância, e corresponde a $0.4001 \leq s \leq 1.5 \text{ GeV}^2$. Lembrando que se trata de um formalismo efetivo quiral e portanto, restrito a baixas energias.

Para obter resultados numéricos das amplitudes, é preciso atribuir valores para as constantes de acoplamento e massas. Adotamos, como primeira aproximação para a constante de decaimento dos mésons, $F = F_\pi = 0.093 \text{ GeV}$. As massas dos pseudoescalares foram tiradas do PDG[21] e são dadas por: $M_K = 0.49367 \text{ GeV}$ e $M_\pi = 0.13957 \text{ GeV}$. Os valores utilizados para as massas das ressonâncias trocadas no canal t foram arbitrários $m_{R_\sigma} = m_{R_{f_0}} = 0.8 \text{ GeV}$, dentro de um intervalo experimental dado pelas massas do σ e $f_0(980)$. Os valores das constantes c_d e c_m , foram retirados de [26] e são dados por:

$$|c_d| = 0.032 \text{ GeV}; \quad |c_m| = 0.042 \text{ GeV}, \quad |\tilde{c}_d| = \frac{c_d}{\sqrt{3}}; \quad |\tilde{c}_m| = \frac{c_m}{\sqrt{3}}.$$

com $c_d c_m > 0$.

A escolha da massa da ressonância R é um pouco mais delicada. Definida como a massa nominal, m_R^2 é o valor em que a fase da amplitude passa por $\pi/2$. No trabalho feito por Jamin, Oller e Pich[28] essa massa nominal está em torno de 1.3 GeV , mas esse resultado é baseado em uma extrapolação dos dados experimentais. Assim, na falta de uma determinação mais precisa, escolhemos $m_R = 1.2 \text{ GeV}$. No capítulo seguinte estudamos a variação de m_R e então podemos justificar essa escolha.

Com todas as constantes e os parâmetros definidos, podemos analisar os resultados. Começamos pelo fundo não ressonante, pois sua contribuição se dá nos dois canais de isospin. No gráfico 3.4, comparamos os resultados dos três canais, equação (3.52), sendo que a contribuição de B^t é soma de $B_{R_\sigma}^t$ e $B_{R_{f_0}}^t$ com os devidos pesos. Podemos ver que B^t é praticamente nulo e B^u passa a ser relevante apenas em torno de $s \simeq 1.2 \text{ GeV}^2$. Além disso, ele é duas ordens de grandeza menor do que a contribuição de B^s , claramente dominante. É interessante apontar que, sendo B^t desprezível, a escolha arbitrária das massas das ressonâncias R_σ e R_{f_0} , não tem relevância numérica.

Figura 3.4: Comparação entre as contribuições não ressonantes da cada canal.

Analizamos agora o kernel de isospin $1/2$, no gráfico 3.5a, onde estão presentes todos os elementos que compõem $\mathcal{K}_{1/2}$. As contribuições do fundo e do pólo parecem ser muito superiores ao contado. No entanto, há um cancelamento entre o fundo e o termo de pólo

tal que, na região próxima ao limiar o kernel tende à amplitude de contato, como mostra o gráfico 3.5b. Essa relação obedece o teorema da hierarquia quiral apresentado no início deste capítulo. Quando s se aproxima de m_R^2 a amplitude $\mathcal{K}_{1/2}$ diverge regida pelo termo de pólo.

Figura 3.5: $I=1/2$: (a) Segmentos que compõem $\mathcal{K}_{1/2}$: termo de contato K^C , termo ressonante K^P e fundo não ressonante K^B . (b) Comparação entre K^C e $\mathcal{K}_{1/2}$.

O kernel de isospin $3/2$, (3.55), não tem contribuição com pólos e é devido apenas ao contato e ao fundo, composto pelos canais t e u . O gráfico 3.6a mostra que a contribuição do fundo passa a ser minimamente perceptível em torno de m_R^2 , o que já poderia ser previsto a partir do gráfico 3.4. Assim, o kernel é determinado, em quase todo o intervalo, pela amplitude de contato, como podemos ver no gráfico 3.6b. Esse comportamento está

em pleno acordo com o teorema quiral.

Figura 3.6: $I=3/2$: (a) Segmentos que compõem $\mathcal{K}_{3/2}$: o termo de contato K^C e o fundo K^B . (b) Comparação entre K^C e $\mathcal{K}_{3/2}$.

Comparando os gráficos 3.5b e 3.6b, vemos que, enquanto o kernel de isospin $1/2$ é uma função positiva e crescente, o de isospin $3/2$ é negativo e decrescente. Essas características correspondem, respectivamente, a um comportamento atrativo e repulsivo. Em decorrência deste fato, podemos entender porque encontramos somente ressonâncias escalares com isospin $1/2$ neste espalhamento.

3.9 Unitarização

O kernel descreve a amplitude no limite de baixas energias, em coerência com a teoria quiral. Entretanto, à medida que s se aproxima de m_R^2 a amplitude, no canal $I=1/2$, apresenta um comportamento divergente. Para fazer com que ela tenha um bom comportamento além do limiar e expandir o limite de validade da teoria, é fundamental unitarizá-la.

A amplitude unitarizada T_I que queremos determinar é, formalmente, obtida a partir da equação integral de Bethe-Salpeter[29]

$$T_I = \mathcal{K}_I + i \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \mathcal{K}_I(Q) \Delta_{\pi K}(Q) T_I(Q), \quad (3.56)$$

em que $\Delta_{\pi K}$ é o propagador dos dois mésons e Q uma variável de integração. Traduzida

em termos de diagramas de Feynman, a equação de Bethe-Salpeter corresponde à figura 3.7.

Figura 3.7: Equação de Bethe-Salpeter.

Em um trabalho de 1997, Oller e Oset[30] mostraram que, no caso de interação a baixas energias, o tratamento da equação (3.56) pode ser simplificado. O kernel depende apenas de acoplamentos efetivos e de s , o propagador $\Delta_{\pi K}$ depende apenas de s , e a equação (3.56) pode ser escrita como

$$T_I = K_I + K_I(-\Omega)T_I, \quad (3.57)$$

em que Ω é a função de Green, dada por

$$\Omega = i \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{[P/2+Q]^2 - M_\pi^2} \frac{1}{[P/2-Q]^2 - M_K^2}, \quad (3.58)$$

sendo $P = q+k$ o momento que flui no *loop*. Essa integral é logaritmicamente divergente e precisa ser regularizada. Isto é feito pelo método da regularização dimensional, desenvolvido em detalhes no Apêndice C.

Após a regularização, a função de Green é escrita como $\bar{\Omega}_I$ e dada em função da parte finita da integral de *loop*, $L(s)$, equação (C.18),

$$\bar{\Omega}_I = -\frac{1}{16\pi^2} \{ \Re [L(s) - c_I] + i \Im L(s) \} \quad (3.59)$$

sendo c_I uma contante introduzida na renormalização, que precisa ser determinada para cada componente de isospin. A função $L(s)$ possui uma estrutura complicada e é dividida em três regiões de validade. A única de interesse neste problema é aquela acima do limiar do espalhamento $s > (M_K + M_\pi)^2$, e dada por

$$L(s) = \rho(s) \log \left[\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right] - \eta + i\pi\rho, \quad (3.60)$$

$$\sigma = \sqrt{|s - (M_K + M_\pi)^2| / |s - (M_K - M_\pi)^2|}, \quad (3.61)$$

$$\eta = 2 - [(M_K^2 - M_\pi^2)/s] \log(M_K/M_\pi). \quad (3.62)$$

Reescrevemos o propagador (3.59) em termos de $\bar{R}_I(s)$ e $I(s)$ que representam as partes real e imaginária da função $L(s)$,

$$\bar{\Omega}_I = \bar{R}_I(s) + i \theta[s - (M_K + M_\pi)^2] I(s) , \quad (3.63)$$

em que a parte imaginária é regida por uma função de Heaviside, que é não nula acima do limiar de produção.

Com o propagador regularizado, a equação de Bethe-Salpeter (3.57) corresponde à série perturbativa,

$$T_I = \mathcal{K}_I + \mathcal{K}_I(-\bar{\Omega})\mathcal{K}_I + \mathcal{K}_I(-\bar{\Omega})\mathcal{K}_I(-\bar{\Omega})\mathcal{K}_I + \dots \quad (3.64)$$

Figura 3.8: Série perturbativa da equação de Bethe-Salpeter.

A amplitude $K\pi$ unitarizada considera todas as ordens de iteração, como mostra a figura 3.8. Os diagramas da solução perturbativa correspondem a uma série geométrica, série de Dyson, cuja razão é uma função da integral de *loop*, $(-\bar{\Omega})$. A sua soma é dada por

$$T_I = \frac{\mathcal{K}_I}{1 + \bar{\Omega}_I \mathcal{K}_I} . \quad (3.65)$$

Para a componente de isospin $1/2$, a constante de renormalização foi definida de tal forma a fazer a parte real de $\bar{\Omega}_{1/2}$ ser nula quando $s = m_R^2$. Essa condição corresponde a $c_{1/2} = L(m_R^2)$. Substituindo o kernel $\mathcal{K}_{1/2}$ (3.53) e o propagador $\bar{\Omega}_{1/2}$ em (3.65), podemos escrever a amplitude como

$$T_{1/2}(s) = \frac{16\pi}{\rho(s)} \frac{m_R \Gamma(s)}{\mathcal{M}^2(s) - s - i m_R \Gamma(s)} , \quad (3.66)$$

em que introduzimos a massa variável $\mathcal{M}$ e a largura Γ , escritas em termos de s e $\gamma^2(s)$ (3.54) como,

$$\mathcal{M}^2(s) \equiv m_R^2 + \gamma^2(s) \bar{R}_{1/2}(s) , \quad (3.67)$$

$$m_R \Gamma(s) \equiv \gamma^2(s) \rho(s) / (16\pi) . \quad (3.68)$$

A fase do espalhamento pode ser obtida diretamente da amplitude (3.66),

$$\delta(s) = \arctan \left(\frac{m_R \Gamma(s)}{\mathcal{M}^2(s) - s} \right). \quad (3.69)$$

Como consequência direta da forma como definimos o propagador, o denominador de (3.69) é zero em $s = m_R^2$. Isso significa que a fase neste ponto é $\pi/2$, em consistência com a definição da massa nominal da ressonância.

A forma da amplitude (3.66) se assemelha a uma Breit-Wigner, mas $\mathcal{M}$ e Γ são funções complicadas de s . Apenas no limite em que $\mathcal{M}^2 = m_R^2$ e $m_R \Gamma$ for constante, a amplitude (3.66) recai sobre uma estrutura do tipo Breit-Wigner.

No caso da amplitude de isospin $3/2$, denominada $T_{3/2}$, a unitarização foi desenvolvida da mesma forma que para o canal $I = 1/2$. No entanto, como não existe ressonância nesse canal a escolha do ponto de subtração foi feita em um ajuste os dados experimentais da fase[31]. O melhor resultado foi obtido para $c_{3/2} = 140 \text{ GeV}^2$.

3.9.1 Unitarização por matriz K

A unitarização por matriz K é uma aproximação do processo descrito acima. Ela é a forma de unitarização mais conhecida na literatura[12, 32, 33] e muito utilizada entre os experimentais. Na aproximação da matriz K , a parte real do *loop* é desconsiderada, eliminando o problema da renormalização e, conseqüentemente, a necessidade do ponto de subtração. Segundo as regras de Cutkosky[27], nessa aproximação, as partículas dentro do *loop* estão sempre na camada de massa, como mostra a figura 3.9.

Figura 3.9: O *loop* cortado simbolizando que a partícula está na camada de massa.

A aproximação de matriz K é um caso particular do procedimento apresentado acima, pois ela pode ser obtida fazendo $\bar{R}_{1/2}(s) \rightarrow 0$. Com o objetivo de estabelecer uma análise comparativa entre as duas formas de unitarização, calculamos também a amplitude unitarizada por matriz K , representada por $T_K(s)$.

3.10 Valores numéricos da amplitude unitarizada

As constantes utilizadas para as massas e acoplamentos são as mesmas usadas na seção 3.8.

O gráfico 3.10a compara o kernel do espalhamento para $I = 1/2$, com as partes real e imaginária da amplitude unitarizada (3.66). A parte real tem um comportamento muito próximo e paralelo ao kernel no limiar, o que é coerente com o teorema quiral, no qual elas deveriam ser próximas nesse regime, a diferença é devida à parte real do loop. A parte imaginária é nula no limiar. O efeito da unitarização é visível a partir de $s \sim 0.55 \text{ GeV}$, quando as curvas não são mais paralelas. O kernel começa a apresentar um comportamento divergente, que explode em $s = m_R^2$, enquanto a parte real da amplitude $\Re[T_{1/2}]$ decresce e se anula para $s = m_R^2$, como esperado.

Figura 3.10: [Amplitude $I=1/2$: $\mathcal{K}_{1/2}$ (preto), $T_{1/2}$ (azul), $T_{K1/2}$ (vermelho)] (a) $\mathcal{K}_{1/2}$ e $T_{1/2}$; (b) as partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejadas) das amplitudes unitarizadas.

No gráfico 3.10b, as partes reais e imaginárias em ambos os métodos de unitarização mostram diferenças, tanto no formato quanto na amplitude das curvas. As curvas imaginárias possuem o mesmo valor no limiar e em $s = m_R^2$, mas entre estes pontos a distância entre as curvas é grande. No caso das curvas reais, ambas são nulas em $s = m_R^2$ e são próximas na origem, mas também são distintas no intervalo entre estes

pontos.

Figura 3.11: [Amplitude $I=1/2$: $T_{1/2}$ (azul), $T_{K1/2}$ (vermelho)] (a) Módulo quadrado das amplitudes; (b) fase das amplitudes unitarizadas.

No módulo quadrado das amplitudes unitarizadas $|T_{1/2}|^2$ e $|T_{K1/2}|^2$, gráfico 3.11a, essa diferença fica mais evidente e quantifica a importância da parte real do *loop*. Portanto, sendo a contribuição da parte real do *loop* não desprezível, a unitarização por matriz K não é uma boa aproximação.

No gráfico 3.11b, que mostra as fases de $T_{1/2}$ e $T_{K1/2}$, podemos observar que ambas passam, por construção, por 90° na massa nominal da ressonância $s = m_R^2$. As diferenças na estrutura das curvas revelam também a importância da contribuição da parte real do *loop*.

Para a amplitude com isospin $3/2$, as curvas teóricas para as fases são comparadas no gráfico 3.12a, em que a constante de subtração é $c_{3/2} = 140$ GeV. Nesse gráfico as fases partem do mesmo ponto mas, depois, se descolam completamente.

Figura 3.12: [Amplitude $I=3/2$: $\mathcal{K}_{3/2}$ (preto), $T_{3/2}$ (azul), $T_{K3/2}$ (vermelho)] (a) comparação entre partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) com $\mathcal{K}_{3/2}$; (b) fase das amplitudes.

Ao analisar as amplitudes no gráfico 3.12a, podemos perceber que, enquanto a parte real da matriz K é equivalente à amplitude em árvore no limiar há, na mesma região, um comportamento desconexo entre a amplitude em árvore e $\Re[T_{3/2}]$. Esse comportamento da amplitude $T_{3/2}$ viola o teorema quiral de baixas energias. A parte imaginária de $T_{3/2}$ é praticamente irrelevante e o resultado é uma fase quase constante como mostra o gráfico 3.12b. A fase da matriz K tem uma variação maior, mas não descreve os dados experimentais. Se, por um lado, esta amplitude unitarizada possui inconsistências teóricas que precisam ser contornadas, por outro, ela garante um seu bom comportamento fenomenológico na região de 0.8 a 1.6 GeV^2 .

Todos os gráficos mostram que a matriz K é uma caso particular do método de unitarização e portanto é mais restrito e descreve menos dinâmica.

3.11 Sumário

Neste capítulo calculamos, inicialmente, a amplitude do espalhamento $\bar{K}\pi$ em nível árvore. Em seguida, ela foi unitarizada, dando origem, no caso $I = 1/2$, à expressão:

$$T_{1/2}(s) = \frac{16\pi}{\rho(s)} \frac{m_R \Gamma(s)}{\mathcal{M}^2(s) - s - i m_R \Gamma(s)}. \quad (3.70)$$

As funções $\mathcal{M}$ e Γ incorporam toda a dinâmica desse espalhamento, e são escritas em termos de $\gamma^2(s)$ (3.54) como,

$$\mathcal{M}^2(s) \equiv m_R^2 + \gamma^2(s) \bar{R}_{1/2}(s) , \quad (3.71)$$

$$m_R \Gamma(s) \equiv \gamma^2(s) \rho(s)/(16\pi) . \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \gamma^2(s) = & \left\{ (1/F^2) \left[(1 - 3\rho^2(s)/8) s - (M_\pi^2 + M_K^2) \right] (m_R^2 - s) \right\}_C \\ & + \left\{ (3/F^4) [c_d (s - M_\pi^2 - M_K^2) + c_m (4 M_K^2 + 5 M_\pi^2) / 6]^2 \right\}_R \\ & - (s - m_R^2) B_{1/2} ; \end{aligned} \quad (3.73)$$

Essa amplitude de espalhamento unitarizada para o canal de isospin 1/2, será utilizada no estudo dos pólos, no capítulo seguinte. A amplitude para $I = 3/2$, é monotônica e não é objeto de interesse daqui em diante.

Capítulo 4

Pólos da amplitude $K\pi$

Neste capítulo vamos estudar os pólos da amplitude de espalhamento $\bar{K}\pi$. Antes disso, porém, problematizamos a busca da ressonância κ e na seqüência fazemos uma revisão das diferentes abordagens teóricas desenvolvidas sobre ela até então.

4.1 A ressonância kappa

A história da ressonância κ é marcada por um longo debate em torno da existência de estados escalares leves. Sendo a ressonância escalar estranha mais leve no espectro, o kappa ainda é controverso. Assim, mesmo reconhecido por muitos autores, ele ainda não consta da compilação de partículas feitas pelo *Particle Data Group* (PDG)[20]. O estudo das ressonâncias escalares e as incertezas sobre elas caminham juntas.

Os escalares são caracterizados por terem larguras grandes, o que corresponde a tempos de vida muito pequenos, e a possuírem $J^{PC} = 0^{++}$. São essas as características que os tornam difíceis de serem detectados experimentalmente. Compreender os escalares significa, também, compreender melhor o misterioso vácuo da QCD.

Depois de um longo período sem novidades importantes, as ressonâncias escalares voltaram a ser foco de interesse na física de partículas, em 2001, quando a colaboração E791[7] produziu fortes evidências para o σ no decaimento charmoso $D^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$. Em seguida, o mesmo grupo encontrou o κ no decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ [8]. Essas descobertas abriram um precedente importante para outras colaborações estudarem reações charmosas como importantes fontes de informação sobre as ressonâncias escalares.

Nesse contexto, a colaboração CLEO[34] estudou o decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$, a colaboração BES[14] encontrou o κ no decaimento $J/\psi \rightarrow \bar{K}^* K^+ \pi^-$, em 2006, e a colaboração FOCUS[13] em 2007, estudando o decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ com alta estatística. Esses resultados foram fundamentais para estimular os teóricos a proporem modelos que explicassem a origem dos escalares. O σ , escalar mais leve, no canal $\pi\pi$ e o κ que aparece no canal $K\pi$, são os escalares mais controversos. No caso do σ , um avanço importante na direção de sua definição veio do trabalho de Leutwyler e colaboradores[9, 35], que obtiveram seu pólo a partir de um ajuste de dados experimentais, usando as equações de Roy.

Até os experimentos de produção, os únicos dois conjuntos de dados experimentais disponíveis para estudo do κ eram os oriundos do espalhamento $K\pi$, a partir das reações $K^- p \rightarrow K^- \pi^+ n$ e $K^- n \rightarrow K^- \pi^0 n$. Ambos foram produzidos no laboratório SLAC, usando o espectrômetro LASS, primeiramente, por Estabrooks et al. em 1978[2] e, 10 anos depois, por Aston et al.[1]. Na primeira análise experimental do espalhamento $K\pi$, desenvolvida por Estabrooks et al.[2], em 1978, quatro reações foram consideradas: $K^- p \rightarrow K^- \pi^+ n$; $K^+ p \rightarrow K^+ \pi^+ n$; $K^+ p \rightarrow K^+ \pi^- \Delta^{++}$; $K^- p \rightarrow K^- \pi^+ \Delta^{++}$. Todas elas indicaram a existência de uma ressonância escalar em torno de $1425 MeV$, com uma largura de $\pm 250 MeV$. A melhor descrição do espalhamento foi obtida na análise conjunta de todas as reações. Nesse artigo, a possível existência κ ainda não é mencionada.

É possível distinguir dois grupos na comunidade dos estudiosos do κ , os que tentam provar sua existência e os que tentam compreender sua constituição. Vários autores, no primeiro grupo, partem dos dados experimentais do espalhamento $K\pi$ para ajustar valores da ressonância κ . No outro grupo, são utilizados modelos motivados pela QCD, que prevêm a existência do noneto $q\bar{q}$. Do ponto de vista empírico, há mais mésons escalares do que aqueles que podem ser classificados em apenas um noneto. Essas questões motivaram a predição de estados de multiquarks, *glueballs*, etc.

Neste trabalho, tratamos apenas da análise do κ e de sua existência como um pólo da amplitude de espalhamento $K\pi$. Antes disso, entretanto, apresentamos uma breve revisão de abordagens já desenvolvidas sobre ele, na ordem aproximada em que os vários grupos contribuíram pela primeira vez. Em seguida, resumimos todas as previsões já feitas sobre o κ em uma tabela.

4.1.1 Morgan

Motivado pelos primeiros resultados do espalhamento $K\pi$ divulgados por Estabrooks em uma conferência em 1973[36], Morgan publicou, em 1974, um trabalho intitulado “Is the 0^+ nonet respectable?”[10]. Nesse trabalho, ele se propõe a reexaminar o estatus fenomenológico do noneto 0^+ . Em sua análise, a amplitude de todos os canais em $SU(3)$ é suposta ser do tipo Breit-Wigner (BW). Ele adota valores iniciais para as massas das ressonâncias escalares, sendo, no caso do canal $K\pi$, $m_\kappa = 1.2$ GeV; no canal $\pi\bar{\pi}$, $m_\delta = 0.97$ GeV, e para os canais acoplados $K\bar{K} + \eta\bar{\eta}$, $m_\varepsilon = 1.3$ GeV. Os valores de m_δ e m_ε foram baseados em trabalhos anteriores, enquanto m_κ foi escolhido a partir de uma análise visual do gráfico da fase pra $(I, J) = (1/2, 0)$ do espalhamento $K\pi$ ¹. A partir das massas das ressonâncias, Morgan conseguiu ajustar os dados definindo valores para as constantes de acoplamento e para o ângulo de mistura, $\cos\theta_s \approx 0.13$ e concluiu que é razoável considerá-las como componentes do noneto 0^+ .

4.1.2 Jaffe e colaboradores

Jaffe[37–41] publicou, em 1977, o primeiro artigo propondo as ressonâncias escalares leves como multiquarks e foi um dos responsáveis por ressuscitar o σ , quando este jazia no limbo da não identificação experimental. Usando o modelo de sacola[37] semiclássico do MIT, ele e colaboradores construíram um modelo para os multiquarks, levando em consideração todos os diagramas do tipo $qq\bar{q}\bar{q}$ que são superpermitidos pela regra de OZI². Todo o espectro desses estados foi descrito e o κ e demais escalares leves foram alocados, compondo o que chamaram *Criptoexotic nonet*. Jaffe e colaboradores definiram um segundo noneto $J^P = 0^+$, composto pelos escalares de massa mais alta, que seriam estados do tipo $q\bar{q}$. Como consequência desse modelo, eles propuseram que o κ seria um estado do tipo $u\bar{s}d\bar{d}$, na borda do canal $K\pi$, com uma massa em torno de 900MeV .

¹Os dados foram retirados de um estudo feito por T.G. Trippe em 1971.

²Regra de Okuno-Zweig-Iizuka - inibição associada a criação/aniquilação de linhas de quarks.

4.1.3 Estabrooks et al.

Em 1979, Estabrooks publicou um artigo[3], no qual buscava obter as massas e a estruturas dos mésons escalares. A motivação veio em resposta ao trabalho de Morgan[10], que propôs a existência de um noneto $SU(3)$ de mésons escalares com baixa massa, fato esse que não fora observado na análise publicada em 1978. Estabrooks reconheceu que naquela análise poderiam existir pontos fracos, tais como a parametrização de um fundo não ressonante muito grande e o não acoplamento de canais inelásticos. Dessa forma, com o objetivo de investigar o noneto 0^+ de $SU(3)$, estudou a possibilidade de variação da massa e largura das ressonância no espalhamento $K\pi$ no canal de onda S e isospin $1/2$. Considerando apenas o acoplamento ao canal inelástico $K\eta'$, os gráficos da magnitude e da fase em função da massa invariante foram utilizados para obter o número de ressonâncias, suas massas e acoplamentos ao sistema $K\pi$. Estabrooks estudou a variação desses resultados para diferentes parametrizações da dependência da massa das ressonâncias na amplitude $K\pi$. Todos os métodos empregados produzem um pólo perto do limiar de $K\eta'$ com massa variando no intervalo $1.48 - 1.51$ GeV. Mesmo procurando, Estabrooks não encontrou um segundo pólo, o que o levou a concluir que, de fato, existe apenas uma ressonância escalar na amplitude $K\pi$ abaixo de 1.9 GeV, o $K(1510)$.

4.1.4 Scadron

Em oposição ao trabalho de Jaffe[37–41] descrito acima, Scadron[42, 43], em 1982, prevê a existência do noneto $q\bar{q}$ $J^P = 0^{++}$, composto por $\sigma(750MeV)$, $\kappa(800MeV)$, $f_0(980)^3$ e $a_0(980)^4$. Ele parte de uma analogia com os pseudoscalares, em que a estrutura de multipletos de $q\bar{q}$ advém da quebra espontânea da simetria quiral. Usando o modelo σ linear ($M\sigma L$), calculou a quebra espontânea de simetria para os escalares leves e obteve as massas e larguras das ressonâncias. Para o κ , os valores obtidos por Scadron foram $m_\kappa \approx 800$ MeV e $\Gamma_\kappa \approx 80$ MeV. Essa largura do κ é muito menor do que a obtida para os demais mésons escalares, com o mesmo modelo. Todas as características dos escalares leves determinadas por Scadron, a partir do $M\sigma L$, exceto as do κ , constavam na tabela do

³Na época $S^*(980MeV)$.

⁴Na época conhecido como $\delta(980MeV)$.

PDG[44] da época. Scadron, argumentou que seria possível notar alguma atividade, nos dados experimentais de Estabrooks[2] nessa região, com uma fase entorno de 60° . Para ele, uma possível fonte de incertezas seria a não consideração de canais acoplados na sua análise. Ainda assim, defendeu a existência fenomenológica do κ no noneto de mésons escalares leves, e apresentou-o como uma assinatura da natureza, em coerência com o que ocorre para os pseudoescalares.

4.1.5 Törnqvist

No mesmo ano em que Scadron deu sua primeira contribuição ao estudo dos escalares, 1982, Törnqvist publicou um artigo[6] intitulado “*Scalar Mesons in the Unitarized Quark Model*”. Motivado pelos trabalhos de Jaffe[37–41] e Morgan[10], Törnqvist desenvolveu um modelo “não convencional”, como ele mesmo define, para analisar a estrutura de quarks no noneto de escalares composto por $a_0(980)$, $f_0(980)$, $f_0(1300)$ e $K_0^*(1430)$. Como o título anuncia, o modelo utilizado por Törnqvist é baseado na interação via *loops* de todos os mésons pseudoescalares, considerando todos os canais acoplados. Usando como *input* um espectro de “massas nuas” para as ressonâncias, Törnqvist ajustou seu modelo aos dados experimentais de Estabrooks et al.[36] e Aston et al.[1], tendo como resultado as constantes de acoplamento, a posição dos pólos e o ângulo de mistura dos mésons. A figura 4.1, retirada do artigo[6], ilustra essa análise no caso $K\pi$ acoplado aos canais $K\eta$ e $K\eta'$, sendo a curva cheia o resultado do seu modelo.

Nessa primeira abordagem, Törnqvist define apenas a posição para o pólo do $K_0^*(1430)$, o $k(1350)$ na figura 4.1. Já em uma segunda análise [45] em 1995, incluiu o Adler zero e a simetria de cor ao seu primeiro modelo. Nesse segundo trabalho, Törnqvist fez uma análise detalhada da influência dos acoplamentos e dos limiares de produção dos diferentes canais na definição dos parâmetros massa e largura das ressonâncias escalares. No entanto, o κ ainda não é incluído nesta análise, por uma opção do autor.

Figura 4.1: Dados do espalhamento analisados por Törqvist[6].

4.1.6 van Beveren, Rupp e colaboradores

O modelo descrito por van Beveren *et al.*[46] diferencia-se bastante das outras abordagens teóricas utilizadas para descrever ressonâncias escalares. Ele é baseado no oscilador harmônico não relativístico, com um potencial de transição, responsável por descrever o confinamento $q\bar{q}$ e a interação entre mésons. O modelo é unitarizado e foi, inicialmente, desenvolvido para descrever hádrons pesados. Na sua primeira aplicação ao setor leve da teoria, em 1985, mostrou-se coerente com os resultados tabelados no PDG[44] da época e com os apresentados por Scadron[42]. Nesse tratamento, o espalhamento méson-méson é acoplado ao sistema $q\bar{q}$ ou a outros mésons, por meio da criação e aniquilação de pares $q\bar{q}$ do vácuo. Os canais virtuais também são considerados mas, por razões de simplicidade, as interações de estado final (FSI) nos canais de espalhamento $K\pi$ são desprezadas. Com essa aproximação, o modelo descreve bem os dados do experimento realizado por Aston *et al.*[1] até $\pm 1\text{GeV}$.

O hamiltoniano do oscilador é composto por H_c , que descreve a dinâmica de confinamento na região de interação, por H_f , que representa a dinâmica do espalhamento a longas distâncias, e por V_t , que é o potencial de transição responsável por descrever a dinâmica entre os dois setores. V_t é local e definido como

$$V_t = \frac{\lambda}{2\mu_c a} \delta(r - a) , \quad (4.1)$$

em que μ_c é a massa reduzida no canal de confinamento, a é a distância do confinamento e λ é um parâmetro que varia entre 0 e 1, regulando a intensidade do acoplamento. A forma do potencial de transição é muito simples, o que facilita a solução da equação de Schrödinger e demais manipulações matemáticas que decorrem de aplicações da mecânica quântica tradicional. O resultado da solução da equação de Schrödinger são as matrizes de espalhamento méson-méson, ressonâncias e estados ligados. A decomposição espectral, em função das energias dos estados ligados E_n , é dada por

$$\sum_n \frac{|F_a|^2}{E - E_n} , \quad (4.2)$$

sendo F_a a solução radial da função de onda.

Uma grande vantagem desse modelo é ele ser independente de sabor e poder ser reduzido, por exemplo, ao caso $\pi\pi$. A partir da matriz de espalhamento unitarizada, foram obtidas as posições dos pólos para as ressonâncias escalares leves: $f_0(980)(994 - i20MeV)$, $a_0(980)(968 - i28MeV)$, $\sigma(470 - 208i)$ e $\kappa(727 - i263MeV)$.

Nessa primeira análise, mostrou-se que a posição dos pólos σ e κ são sensíveis à escolha do potencial de transição. No entanto, ainda assim, é possível interpretá-los como sendo estados do tipo $q\bar{q}$, não havendo razões fenomenológicas para incluir os canais $qq\bar{q}\bar{q}$, como sugere Jaffe[37].

Mais de 20 anos após a publicação original, van Beveren e Rupp apresentam uma reanálise dos mésons escalares leves[47, 48]. A base do modelo utilizado é a mesma, com correções relativísticas, mas esse trabalho está focado nos diversos pólos que o modelo é capaz de prever para o espalhamento $K\pi$. Também são acrescentados os canais $K\eta$ e $K\eta'$, desconsiderados na primeira análise. Em analogia aos espectros de $b\bar{b}$ e $c\bar{c}$, eles propõem que deve existir um número infinito de pólos no espalhamento mesón-mesón, definidos

pela matriz unitária que descreve o espalhamento:

$$S(E) = \frac{1 + \lambda^2 \left(\sum_n \frac{G(E)^*}{E - E_n} \right)}{1 + \lambda^2 \left(\sum_n \frac{G(E)}{E - E_n} \right)}, \quad (4.3)$$

sendo G uma função complexa na energia.

Cinco pólos são encontrados em $S(E)$ no caso do espalhamento $K\pi$, para E até 2.2 GeV. O primeiro deles é o kappa, em $0.772 - i0.281$ GeV e o segundo em $1.52 - 0.097i$ GeV, que corresponde ao já estabelecido $K_0^*(1430)$. A cada um dos 5 pólos definidos pelo modelo, segundo Rupp, está associado um noneto de mésons escalares.

Os pólos são classificados em dois tipos: contínuos e confinados. A diferença entre os dois é definida pelo modo de variação da intensidade com o acoplamento λ . Quando o acoplamento vai a zero, os pólos do tipo contínuo têm sua largura arrastada ao infinito e deixam de existir, dado que a largura é inversamente proporcional ao tempo de vida médio das partículas. Este comportamento é contrário ao dos pólos confinados, que têm suas larguras reduzidas a zero junto com o acoplamento, ficando grudados no eixo real. Podem, ainda, existir estados que se deslocam para trás do limiar, mas estes são estados ligados e não podem ter largura. Esse movimento é reproduzido de forma pictórica na figura 4.2. A classificação dos pólos feita por van Beveren e Rupp está associada à origem dinâmica das ressonâncias. Enquanto o tipo confinante seria claramente $q\bar{q}$, o contínuo depende da interação méson-méson.

Figura 4.2: A barra vertical representa o limiar. Quando o acoplamento é desligado, os pólos que tendem ao eixo real são chamados pólos confinantes (azul). Já os pólos que desaparecem (vermelho), são chamados contínuos.

4.1.7 Aston e colaboradores

Aston et al.[1] são os responsáveis pelos últimos dados experimentais produzidos no LASS, na reação $K^-p \rightarrow K^-\pi^+n$, em 1987. Obtidos dez anos após a experiência realizada por Estabrooks no mesmo laboratório, os dados analisados por Aston et al. são referência até hoje, não tanto pela qualidade, em todos os trabalhos que tratam do espalhamento $K\pi$.

Nessa análise, parâmetros das ressonâncias foram extraídos do experimento por meio de expressões do tipo Breit-Wigner relativística canônicas. Na região de 0.825 GeV a 1.3 GeV, a magnitude e a fase da onda S têm um comportamento suave, sendo compatíveis com a unitariedade, corroborando análises anteriores, que não obtiveram nenhuma ressonância escalar nessa região.

A partir dos diagrama de Argand⁵, Aston et al. definiu duas regiões que possuem estruturas ressonantes, em torno de 1.4 e 1.9 GeV. Quanto a não identificação do kappa, Aston et al. argumentaram que determinar parâmetros de uma ressonância de baixa massa seria difícil, devido a fase ser grande na região e a sua proximidade ao limiar do canal inelástico $K\eta'$.

A extração dos parâmetros das ressonâncias encontradas foi feita utilizando dois modelos distintos. No primeiro, a massa é definida como o ponto em que a fase passa por $\pi/2$, sendo a largura determinada pela velocidade da fase. O segundo modelo é o mesmo definido por Estabrooks em [3], que considera o acoplamento com o canal inelástico $K\eta'$. Neles, a amplitude da onda S é parametrizada por uma soma de Breit-Wigners ressonantes e um fundo não ressonante, devido ao canal inelástico. Os resultados dos dois modelos foram respectivamente: $m_K = 1340$ MeV , $\Gamma_K = 350$ MeV e $m_K = 1429 \pm 4 \pm 5$ MeV, $\Gamma_K = 287 \pm 10 \pm 21$ MeV.

4.1.8 Ishida e colaboradores

Em 1997, um grupo japonês desenvolveu estudos sobre o kappa[49, 50], usando uma parametrização dos dados do LASS, por meio de uma BW convencional acrescida de um fundo repulsivo. Esse fundo repulsivo é o ponto crucial do modelo, o elemento essencial

⁵Mostra a trajetória da amplitude de onda parcial evoluída na energia. Quando a trajetória deixa o círculo unitário, passa a corresponder a um comportamento inelástico.

para ajustar os dados experimentais. Os valores de massa e largura encontrados foram: $m_\kappa = 905^{+65}_{-30}$ MeV, $\Gamma_\kappa = 545^{+235}_{-110}$ MeV.

Os valores experimentais obtidos por Ishida et al. foram considerados compatíveis com os obtidos usando o $M\sigma L$ em $SU(3)$: $m_\kappa = 989$ MeV, $\Gamma_\kappa = 505$ MeV. Quanto à sua estrutura interna, propuseram que o sigma e o kappa devem compor um noneto escalar de baixa massa, similar ao $q\bar{q}$ convencional, mas com propriedades diferentes a serem definidas.

4.1.9 Grupo de Syracuse

O grupo de Syracuse também procura o κ em ajuste aos dados experimentais. O modelo fenomenológico utilizado por Black et al.[32, 51–53] assemelha-se ao descrito no capítulo 2, e é baseado em uma lagrangiana efetiva quiral canônica, contendo apenas mésons pseudoescalares. A amplitude envolve termos de contato, construídos a partir da álgebra de correntes, e termos ressonantes. O canal inelástico $K\eta'$ é desconsiderado e vários diagramas levam em consideração contribuições dos mésons vetoriais e escalares com massa inferior a 1 GeV. Exceção é feita ao $K_0^*(1430)$, por ser considerado um pólo direto no canal s. O κ , assim como as ressonâncias σ , $f_0(980)$, no caso das escalares e ρ , $K^*(980)$ no caso das vetoriais, são consideradas explicitamente.

Black et al. não unitarizam a amplitude. Eles mostram que apenas a contribuição dos canais vetoriais e a inclusão de uma segunda ressonância no canal s (o próprio $K_0^*(1430)$) fazem com que a amplitude, regularizada pelo método convencional, tenha um bom comportamento na região até 1.6 GeV.

A estrutura da amplitude é a mesma da nossa (3.70):

$$T = \frac{m_\kappa \Gamma_\kappa}{m_\kappa^2 - s - im_\kappa \Gamma'_\kappa}, \quad (4.4)$$

mas Γ_κ e a largura Γ'_κ são consideradas constantes. No limite de $\frac{\Gamma_\kappa}{\Gamma'_\kappa} = 1$, a amplitude recai em uma Breit-Wigner. Black et al. parametrizam simultaneamente o κ e o $K_0^*(1430)$, ajustando-os aos dados do LASS[1], sendo os parâmetros as constantes de acoplamento escalar-pseudoescalar. A posição do pólo do κ ocorre em $0.911 - i0.158$ GeV. O $K_0^*(1430)$ é obtido com uma massa de 1385 MeV e uma largura de 266 MeV. O próprio grupo demonstra a coerência dos seus resultados com os obtidos por Ishida et al.[49].

Em um segundo trabalho, três anos mais tarde (2001), o grupo de Syracuse apresenta uma análise do espalhamento $K\pi$ usando o $M\sigma L$ com 3 sabores⁶, unitarizado por meio da aproximação de matriz K . O modelo é tratado por Black et al. como sendo um *Toy Model*, com a finalidade de compreender o comportamento dos escalares leves nos canais de espalhamento $\pi\pi$, $K\pi$, $\pi\eta$.

No cálculo da amplitude $K\pi$, foram considerados os diagramas em nível de árvore do termo de contato e a troca de uma ressonância escalar nos canais s , t e u . A massa nua da ressonância, trocada nos canais s , e u , é o único parâmetro, em princípio livre, do modelo. Os demais são as massa dos pseudoescalares e constantes de acoplamento do PDG[21]. A única exceção foi F_K , que ainda teria incertezas experimentais.

A unitarização foi feita usando o método da matriz K na amplitude não renormalizada e o resultado foi comparado aos dados experimentais do LASS[1], para valores de m_R em 0.9, 1.1 e 1.3 GeV. Black et al. observaram uma boa descrição experimental dos dados na região de baixa energia (0.83 – 0.92 GeV). Observaram também que a variação de m_R não influenciou muito a parte real do pólo do kappa, sempre em torno de 800 MeV, no entanto, fez a largura oscilar entre 257 a 614 MeV.

Ao discutir seu *Toy Model*, o grupo de Syracuse ressaltou, como grave deficiência, o fato de ele não explicar os dados na região do $K^*(1430)$, por ser limitado à região de baixa energia. Para contornar o problema, sugeriram uma unitarização que levasse em conta a dinâmica, descartada no método da matriz K . Como vantagem, demonstraram que a expressão matemática da sua amplitude poderia ser aproximada por um termo de pólo, somado a uma constante.

Os resultados obtido a partir de $SU(3)$, mostraram-se, segundo Black et al., qualitativamente similares aos obtidos no trabalho anterior usando $M\sigma L$ em $SU(2)$. Todos os escalares obtidos : σ , f_0 , a_0 e o κ têm massas inferiores a 1 GeV, que o grupo de Syracuse sugere como sendo componentes do mesmo noneto.

Sobre a subestrutura de quarks nos escalares, o grupo desenvolveu um outro *Toy Model*. O modelo tenta descrever a dependência das estrutura dos quarks na lagrangiana efetiva quiral, com o objetivo de identificar a origem dos nonetos $q\bar{q}$, $qq\bar{q}\bar{q}$ ou a possibilidade de misture entre eles. Os resultados são inconclusivos, mas, para o grupo, apontaram um

⁶O $M\sigma L$ com simetria $SU(3)$ foi desenvolvido didaticamente por Gasiorowicz em [19].

futuro no qual os estados misturados, possivelmente com *glueballs* e condensados, podem estar correlacionados entre si e com os dados experimentais de espalhamentos do mésons pseudoescalares leves.

4.1.10 Oller e colaboradores

Em 2000, Jamin, Oller e Pich (JOP)[28] utilizam a ChPT em ordem (p^4) até um loop, desenvolvida anteriormente por Meißner[54], para calcular a amplitude de espalhamento $K\pi$. Nos diagramas considerados, incluem a contribuição das ressonâncias escalares e vetoriais nos canais s , t e u .

A lagrangiana efetiva quiral utilizada é a mesma que a empregada nesta tese e a expressão da amplitude obtida contém mais termos que o kernel dado pela equação (3.50). A unitarização é feita considerando a soma de loops no canal s e os autores mostraram que o resultado obtido equivale ao de modelo (N/D) ⁷. A partir de 1.3 GeV, foi incorporado o acoplamento dos canais inelásticos $K\eta$ e $K\eta'$ a amplitude I=1/2. A amplitude foi ajustada aos dados experimentais do LASS, obtidos por Aston[1] e Estabrooks[2]. Os parâmetros de ajuste foram: M_{K^*} , c_d , c_m , $c_{K\pi}^I$, sendo c_d e c_m , as constantes de acoplamento dos escalares aos pseudoescalares e $c_{K\pi}^I$ uma constante arbitrária, que surge na renormalização e necessariamente deve ser real para manter a unitariedade. Os ajustes foram efetuados através do programa MINUIT do CERN. Os parâmetros se mostraram fortemente acoplados e várias de suas combinações reproduziram bons ajustes. Esse comportamento levou os autores a estudar uma série de combinações de parâmetros determinados por argumentos físicos. Todos eles apresentaram comportamentos compatíveis com os dados.

Os autores detectaram um grave problema ao tentar ajustar a fase da amplitude com isospin 3/2. O ajuste deles é melhor aos dados de Estabrooks que, por sua vez, discordam bastante com os dados de Aston neste canal. O melhor ajuste foi obtido parametrizando a fase 3/2 com um fundo não ressonante unitarizado. O melhor ajuste no canal de isospin 1/2 mostrou-se muito superior ao produzido pela amplitude unitarizada por matriz K, a que os autores ressaltaram a importância da parte real do unitarização. Jamin et al. foram duros na crítica aos dados experimentais, e concluíram serem necessários melhores

⁷Detalhes do modelo podem ser encontrados em[55].

dados experimentais para responder as contradições e incertezas presentes atualmente.

Os diversos ajustes obtidos por JOP foram utilizados para obter pólos na matriz-S. Os valores para o κ mudaram muito pouco com o ajuste, sendo localizado em torno de $708 - i305$ MeV. Já o $K_0^*(1430)$ apresentou uma oscilação, dependendo do ajuste, mas com quase todos os valores compatíveis com o PDG[21], estando seu pólo em $1450 - i142$ MeV. O $K_0^*(1950)$, também pôde ser previsto, mas, devido à instabilidade dos dados na região nenhuma conclusão foi produzida.

4.1.11 Pennington e colaboradores

Cherry e Pennington, motivados pelo conturbado debate em torno do κ , desenvolveram um trabalho em 2001[56], intitulado “There is no $\kappa(900)$ ”. Nele, os autores usaram um método, desenvolvido por Nogová et al.[57], que combina análise estatística e propriedades analíticas da amplitude de espalhamento, a fim de determinar a posição de seus pólos. Apresentado por Pennington e Cherry como quase independente de modelo, esse método produziu o número e a posição dos pólos para $(J,I)=(0,1/2)$ no espalhamento $K\pi$, usando os dados do LASS[1] e [2].

A técnica consiste em estender analiticamente a amplitude para valores de energia abaixo de 825 MeV, onde começam os dados do Aston. Uma vantagem dessa abordagem é não ter nenhum compromisso com os formatos da amplitude, tais como Breit-Wigner ou fundos não ressonantes. A única ressonância encontrada no intervalo de 825 – 1800 MeV foi o $K_0^*(1430)$ com massa e largura em torno de 1400 MeV e 300 MeV.

Cherry e Pennington forçaram seu modelo a encontrar duas ressonâncias e observaram que, enquanto os parâmetros do $K_0^*(1430)$ variaram muito pouco, as oscilações dos parâmetros da ressonância leve eram da ordem de centenas de MeV. Argumentaram que isso ocorria por ser uma ressonância não física forçada a estar presente e, com isso, reforçaram a conclusão da não existência do $\kappa(900)$. Entretanto, eles foram cautelosos e deixaram uma brecha para a sua existência abaixo de 825 MeV, devido à falta de dados.

Em relação à previsão da existência do kappa por muitos autores, Cherry e Pennington afirmaram que isto apenas foi possível devido à utilização de Breit-Wigners, fundos não ressonantes arbitrários. Esses autores têm clareza que seus resultados se chocam com os

modelos de quarks que postulam os nonetos escalares leves baseados em $q\bar{q}$. Quanto a isso, comentaram que as estruturas internas nos escalares devem ser diferentes das canônicas $q\bar{q}$ e ser do tipo quatro quarks.

4.1.12 Bugg

Bugg[58, 59] faz parte do grupo de cientistas que se propõem a mostrar a existência do kappa a partir dos dados experimentais. Motiva seu trabalho, de meados de 2002, com uma pergunta pertinente, que ocupou a comunidade científica recentemente: Por que as ressonâncias escalares σ e κ aparecem no decaimento de mésons charmosos e não aparecem com a mesma clareza no espalhamento? Segundo ele, a resposta a essa questão está relacionada ao tratamento experimental dado ao espalhamento, as funções utilizadas nos ajustes e, ainda, à qualidade do próprio dado experimental, motivo de muitas reanálises. Bugg manifestou sua insatisfação com as fórmulas simplificadas de que os físicos experimentais se utilizam para ajustar o κ e o σ .

Como alternativa, Bugg propos uma expressão matemática consistente com as características da ChPT, em que a largura e a massa do κ são obtidas de um ajuste aos dados do LASS[1]. A amplitude utilizada tem a forma

$$\frac{N(s)}{D(s)} = \frac{M\Gamma_{K\pi}(s)}{M^2 - s - iM\Gamma_{total}(s)}, \quad (4.5)$$

sendo $N(s)$ e $D(s)$ originados do corte do lado esquerdo. O denominador é suposto ser o mesmo para o espalhamento e para a produção. A largura inclui o zero de Adler, posto à mão, e possui três parâmetros livres a serem definidos pelo ajuste. Um deles, M , corresponde a massa nominal (m_R) da ressonância. O melhor ajuste para o kappa tem $M = 3.3 \text{ GeV}$, mas, bons ajustes podem ser obtidos com M entre 2.1 e 4 GeV. Nesse cenário, Bugg obtem a posição do pólo do κ em $722 - i386 \text{ MeV}$.

Em um trabalho seguinte, de 2006, Bugg demonstrou que seu modelo para o kappa era compatível, sem ajuste, com os dados experimentais obtidos nos experimentos da E791, com $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ [12] e BES II, com $J/\psi \rightarrow K^+K^-\pi^+\pi^-$ [60]. Em um ajuste combinado de todos esse dados experimentais, incluindo os do LASS[1], obteve um pólo para o κ em $750_{55}^{30} - i(342 \pm 60) \text{ MeV}$. Bugg também obteve o pólo do $K^*(1430)$, mas usando uma função para a largura diferente da do kappa. A largura de $K^*(1430)$ foi obtida

usando os dados experimentais do BES[61] e a posição do pólo ocorre em $1412 - i158 \text{ MeV}$. Em todos os seus trabalhos, Bugg ressaltou o papel crucial da parametrização da função largura, colocando um zero de Adler à mão.

4.1.13 Peláez

Em um trabalho de revisão[62, 63], Peláez discutiu a abordagem canônica da ChPT no tratamento de espalhamentos méson-méson e a capacidade da teoria de prever e encontrar pólos no plano complexo. No entanto, mais do que demonstrar a existência do kappa, a qual já supõe ser comprovada por diversos trabalhos anteriores usando ChPT, propõe-se a entender a estrutura interna dos escalares leves. Com esse objetivo, Peláez unitarizou a amplitude de espalhamento da ChPT até um loop, com canais acoplados, usando o método da amplitude inversa (IAM)⁸.

Diversos ajustes foram feitos para diferentes constantes de acoplamento, F_π , F_K e F_η e combinações delas, dependendo dos canais acoplados. No caso do espalhamento $K\pi$, o melhor ajuste corresponde a um pólo para o κ em $750 - i226 \text{ MeV}$.

Na análise dos pólos, Peláez identificou a presença de dois tipos de mecanismos, já identificados anteriormente por Oller e Oset[55]. No primeiro deles, a origem dos escalares leves é devida aos termos de ordem mais baixa na lagrangiana, enquanto que, no segundo, é necessário incluir os parâmetros quirais L1, L2, L3. A expansão para grande número de cores foi feita mudando a escala da ChPT. Peláez observou que, no limite de $N_c \rightarrow \infty$, a largura do kappa cresce, ao contrário dos estados ligados $q\bar{q}$, que tendem ao eixo real. Essa diferença de comportamento, similar à descrita por van Beveren e Rupp[46] em 1986 foi, para Peláez, a comprovação de que essas ressonâncias escalares leves não são formadas por pares $q\bar{q}$. Com isso, Peláez concluiu que os escalares leves devem ser do tipo $qq\bar{q}\bar{q}$ ou méson-méson e, quando possível, uma mistura de *glueballs*.

4.1.14 Moussallam e colaboradores

Moussallam e Descotes-Genon[31] utilizaram uma representação dispersiva das equações de Roy-Steiner (RS), desenvolvidas em um trabalho anterior em conjunto com

⁸Para saber mais detalhes deste método ver [64].

Büttiker[65], para obter o κ . Eles consideraram sua abordagem teórica como similar à utilizada por Leutwyler e colaboradores[35] no artigo em que o pólo do σ foi obtido com precisão.

O experimento do LASS[1], não permitiu conclusões diretas sobre o κ , pois não há dados na região próxima do limiar, a região de interesse, segundo os autores. A solução encontrada foi combinar dados experimentais e considerações teóricas sobre a estrutura analítica da amplitude, unitariedade ao longo do eixo real e simetria por cruzamento. Uma característica muito importante dessa combinação de teoria com experimento foi o fato de que as ressonâncias, além de serem pólos na segunda superfície de Riemann, são zeros na primeira superfície. Essa propriedade foi crucial na definição da posição do pólo do κ em $658 \pm 13 - i(278 \pm 12)$ MeV. A incerteza foi introduzida devido ao truncamento da série de ondas parciais da representação RS.

A massa obtida foi menor do que a do trabalho anterior desse grupo. Os autores atribuíram isso a um tratamento mais completo do corte esquerdo na representação de Roy. Uma vantagem do método é ter controle do limite de validade da variação da energia. Uma outra observação interessante é que a matriz-S não parece fazer distinção entre o $K^*(980)$ e o κ , pois ambos foram estabelecidos do mesmo modo. Comprovada a existência do κ , os autores concluíram que deve existir um noneto formado por σ , κ , isosinglete $f_0(980)$ e isotripleto $a_0(980)$, diferente do usual $q\bar{q}$, análogo ao proposto por Jaffe[37]. Ainda, chamam a atenção para os resultados que a QCD na rede está produzindo e que, futuramente, poderiam ajudar a responder algumas questões a respeito dos escalares.

4.1.15 Zhou e Zheng

Em 2006, Zhou e Zheng[66], usando uma amplitude de espalhamento baseada na ChPT, que respeita a unitariedade e a analiticidade, utilizam os cortes dos lados esquerdo e direito para parametrizar os dados do LASS[1] e obter a posição do pólo do κ . Em um trabalho anterior, em 2004[67], a mesma análise havia sido feita com um parâmetro a mais, o comprimento de espalhamento. Em uma parametrização até 1.43 GeV, o valor da massa e largura para o κ foram obtidos em $m_\kappa = 694 \pm 53$ MeV e $\Gamma_\kappa = 606 \pm 56$ MeV. Para o $K^*(1430)$, o melhor ajuste foi obtido, em uma segunda parametrização, até 2.1 GeV.

Nesse ajuste foi incluído o acoplamento do canal inelástico $K\eta'$, que tem seu limiar em 1.4 GeV, resultando em $m_{K^*(1430)} = 1435 \pm 6$ MeV e $\Gamma_{K^*(1430)} = 288 \pm 22$ MeV. Zhou e Zheng concluíram que, mesmo obtendo um pólo compatível com a literatura, a situação do kappa ainda não é clara. Atribuem a isso, a falta de dados precisos. Para os autores, serão necessários mais esforços da comunidade científica para compreender e definir com precisão a localização do pólo do κ .

4.1.16 Resultados obtidos da Produção

A partir da análise experimental de decaimentos charmosos os parâmetros do κ foram obtidos por diferentes colaborações. Nesses casos, a estrutura matemática utilizada para descrever os decaimentos é diferente das descritas acima. No caso da colaboração E791, em 2002 [8] a descrição de $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ foi feita com parametrizações de funções BW, tendo sido obtidos os seguintes parâmetros para o κ : $m_\kappa = 0.721 \pm 19 \pm 44$, $\Gamma_\kappa = 0,584 \pm 21 \pm 44$. Em 2007 a colaboração FOCUS [13] desenvolveu uma análise semelhante com mais estatística. Já a colaboração BES, em 2006[14], obteve o κ na análise do decaimento $J/\Psi \rightarrow \bar{K}^*(892)K^+\pi^-$ com os parâmetros $m_\kappa = 0.841 \pm 23^{+64}_{-55}$ e $\Gamma_\kappa = 0.612 \pm 26^{+27}_{-44}$.

4.1.17 Resumo dos valores

Todos os valores para o pólo do κ encontrados até então na literatura constam na tabela abaixo.

Tabela 4.1: Posições do pólo do κ , em GeV.

year	ref.	κ
1986	[46]	$0.727 - i 0.263$
1997	[49]	$0.905_{30}^{65} - i 0.222_{55}^{115}$
1998	[32]	$0.911 - i 0.158$
1999	[55]	$0.779 - i 0.330$
2000	[28]	$0.708 - i 0.305$
2002	[8]	$0.721 \pm 19 \pm 44 - i 0.292 \pm 21 \pm 44$
2003	[58]	$0.750_{55}^{30} - i 0.342 \pm 60$
2004	[62]	$0.750 \pm 18 - i 0.226 \pm 11$
2006	[67]	$0.694 \pm 53 - i 0.303 \pm 30$
2006	[31]	$0.658 \pm 13 - i 0.279 \pm 12$
2006	[14]	$0.841 \pm 23_{55}^{64} - i 0.306 \pm 26_{44}^{27}$
2008	[47]	$0.772 - i 0.281$

Figura 4.3: Comparando os valores da tabela 4.1 graficamente.

4.2 Pólos

O cálculo da amplitude de espalhamento $K\pi$ foi detalhado no capítulo anterior. O modelo utilizado é similar aos apresentados por Jamin, Oller e Pich[28] e Peláez[62], precursores deste tipo de desenvolvimento teórico, que utiliza uma descrição hadrônica efetiva, pautada em lagrangianas quirais.

As ressonância escalares, como discutimos anteriormente, são encontradas apenas no canal de isospin $1/2$. Assim, nesta seção, discutimos a obtenção dos pólos do espalhamento $K\pi$, partindo da amplitude unitarizada nesse canal, eq.(3.70). O intuito deste trabalho é conciliar a busca dos zeros presentes no denominador da amplitude com um modelo simples, no qual seja possível compreender a essência da física que dá origem aos pólos. Para isso, são necessárias simplificações, que reduzam a complexidade das estruturas matemáticas presentes na amplitude.

Mostramos, no cálculo do espalhamento, que as contribuições das ressonâncias trocadas nos canais t e u são muito pequenas⁹, o que nos permite desprezá-las. A

⁹Veja o gráfico 3.4

amplitude de espalhamento passa, então, a ser escrita como

$$\begin{aligned} T_{1/2}(s) &= \gamma^2(s)/D(s) , \\ D(s) &= [m_R^2 - s + \gamma^2(s) \bar{R}_{1/2}(s)] - i \left[\gamma^2(s) \frac{\rho(s)}{16\pi} \right] , \end{aligned} \quad (4.6)$$

sendo

$$\rho^2(s) = 1 - 2 \frac{(M_K^2 + M_\pi^2)}{s} + \frac{(M_K^2 - M_\pi^2)^2}{s^2} \quad (4.7)$$

e γ^2 , a função que contém a dinâmica da simetria quiral, definida na equação (3.73). Agora, sem fundo, ela é dada por

$$\begin{aligned} \gamma^2(s) &= \left\{ (1/F^2) \left[(1 - 3\rho^2(s)/8) s - (M_\pi^2 + M_K^2) \right] (m_R^2 - s) \right\}_C \\ &+ \left\{ (3/F^4) [c_d (s - M_\pi^2 - M_K^2) + c_m (4 M_K^2 + 5 M_\pi^2)/6]^2 \right\}_R , \end{aligned} \quad (4.8)$$

em que os índices C e R indicam, respectivamente, os termos de contato e ressonante. Como vimos na seção 3.11, o parâmetro m_R é a massa nominal da ressonância produzida no canal s , enquanto que c_d e c_m são constantes de acoplamento que vêm da lagrangiana dada por Ecker, Gasser, Pich e De Rafael[26]. Os valores sugeridos por eles e utilizados no capítulo anterior, foram obtidos usando como base o decaimento $a_0 \rightarrow \eta\pi$ e correspondem a $c_d = 0.032$ GeV e $c_m = 0.042$ GeV. A constante de decaimento, fixada no capítulo anterior como sendo $F = F_\pi$, agora passa a ser[28] $F = \sqrt{F_\pi F_K} = 0.103$ GeV.

A massa nominal é definida como sendo o valor no qual a fase da amplitude passa por $\pi/2$. Por isso, se houvesse dados experimentais confiáveis para o espalhamento $K\pi$, poderíamos usá-los para fixar a massa nominal nas equações (4.6) e (4.8). No entanto, como isso não é possível, essa massa nominal passa a ser um parâmetro do modelo. A função $\bar{R}_{1/2}(s)$ é a parte real da contribuição do *loop* de dois mésons, que descreve efeitos fora da camada de massa. Das funções matemáticas presentes na amplitude (4.6), $\bar{R}_{1/2}(s)$ é a mais complicada, pois é composta por estruturas logarítmicas que dependem de s

$$\begin{aligned} \bar{R}_{1/2}(s) &= -\Re [L(s) - L(m_R^2)] / 16\pi^2 , \\ \Re L(s) &= \rho(s) \log [(1 - \sigma)/(1 + \sigma)] - 2 + [(M_K^2 - M_\pi^2)/s] \log (M_K/M_\pi) , \\ \sigma &= \sqrt{|s - (M_K + M_\pi)^2| / |s - (M_K - M_\pi)^2|} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Essas estruturas se tornam complicadas quando supomos s complexo.

Com o objetivo de entender melhor o comportamento dos vários efeitos dinâmicos e o papel das constantes de acoplamento c_d e c_m , graficamos cada componente da amplitude na figura 4.4.

Figura 4.4: $|T_{1/2}|$: equação (4.6) (verde), L representa os termos em C na equação (4.8) (azul), c_d e c_m são os respectivos termos em R da equação (4.8) (vermelho).

A curva cheia representa a amplitude total, expressa pela equação (4.6), enquanto as demais são as contribuições proporcionais a c_d e c_m . Podemos ver que a curva c_m é do tipo Breit-Wigner usual, enquanto a devida a c_d é bem larga. Essas duas curvas, associadas à ressonância, respeitam o teorema quiral de baixa energia e tendem a zero nesse limite, que é claramente dominado pelo termo de contato. Todas as curvas se encontram no valor da massa nominal, o que é esperado pois, na renormalização, definimos a amplitude de modo que ela seja puramente imaginária em $s = m_R^2$. Os valores das massas e das constantes de acoplamentos influenciam a definição da amplitude. No entanto, c_m é importante apenas na região em torno da massa nominal, demonstrando que esse é o parâmetro que influencia menos a amplitude. A partir desta análise, elegemos c_d como principal parâmetro livre do modelo e deixamos c_m fixo.

4.3 Determinação dos pólos

Os pólos físicos da amplitude de espalhamento $K\pi$ correspondem aos zeros da função $D(s)$ (4.6) que estão na segunda superfície de Riemann, ou seja, que possuem a parte imaginária negativa. Neste tipo de problema, as funções matemáticas envolvidas são complicadas, o que torna árduo o caminho e camufla as estruturas físicas que determinam os pólos. Neste trabalho, a busca aos pólos do sistema $K\pi$ foi feita numérica e analiticamente, em um processo de diálogo entre as duas ferramentas. A primeira delas favorece a precisão matemática e a segunda, a compreensão conceitual.

Na nossa primeira tentativa de encontrar soluções numéricas, um algoritmo em linguagem C foi desenvolvido, usando coordenadas polares para representar as diversas funções complexas presentes em $D(s)$. Quando s passa a ser complexo, $D = \Re D + i \Im D$ e os pólos foram obtidos pela minimização simultânea de ambas as partes de $D(s)$. Uma dificuldade prática, encontrada nesse processo, foi o grande número de funções auxiliares criadas para manipular os logaritmos e polinômios complexos presentes na amplitude. Por isso, dos resultados apresentado pelo programa, era difícil extrair o comportamento dos pólos e, também, saber se o número de pólos encontrados era confiável.

Diante deste cenário, buscando compreender a estrutura matemática do problema, desenvolvemos uma solução analítica usando duas simplificações em (4.6). A primeira foi desconsiderar a contribuição da parte real do *loop*, $\bar{R}_{1/2}(s)$, o que significa fazer a aproximação de matriz K . No capítulo anterior¹⁰ mostramos que, embora essa aproximação seja mais restrita do que a amplitude completa, ela não muda sua estrutura básica e, portanto, descreve razoavelmente bem a física neste contexto. A segunda aproximação foi considerar o limite $SU(2)$ exato, fazendo $M_\pi = 0$, o que é justificado porque $M_K^2 \gg M_\pi^2$. A motivação é simplificar a raiz presente na função $\rho(s)$ que, neste limite, se torna um polinômio em s . As duas simplificações, como mostraremos no decorrer do trabalho, levam a um polinômio de quarto grau em s que pode ser simplificado novamente, produzindo um polinômio quadrático. Paralelamente, aprimoramos o programa numérico de encontrar pólos usando o método de Newton. Nesse programa, as soluções do polinômio quártico foram usadas como valores inicial

¹⁰Ver gráfico (3.11)

para encontrar numericamente os zeros da função $D(s)$.

4.4 Polinômios

Iniciando a busca de expressões analíticas, desprezamos $\bar{R}_{1/2}(s)$ e fazemos $M_\pi = 0$ na função $\rho(s)$, que pode ser escrita como

$$\rho(s) = \sqrt{1 - \frac{2M_K^2}{s} + \frac{M_K^4}{s^2}} = \frac{s - M_K^2}{s}. \quad (4.10)$$

O denominador $D(s)$ passa, então, a ser

$$\begin{aligned} D(s) &= m_R^2 - s - i \frac{\gamma^2 \rho}{16\pi}, \\ &= m_R^2 - s - i \frac{(s - M_K^2)}{16\pi s} \gamma^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Para tornar os resultados mais compactos, utilizamos a notação $e_d = \frac{c_d}{F}$ e $e_m = \frac{c_m}{F}$, e a função γ^2 simplificada é expressa como um polinômio em s ,

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= \frac{1}{F^2} \left\{ \left[s - 3 \frac{(s - M_K^2)^2}{8s} - M_K^2 \right] (m_R^2 - s) + 3 \left[e_d (s - M_K^2) + e_m \frac{2}{3} M_K^2 \right]^2 \right\}, \\ &= -\frac{1}{s F^2} \left[\left(\frac{5}{8} - 3e_d^2 \right) s^3 + \left(-\frac{5}{8} m_R^2 - \frac{1}{4} M_K^2 + 2M_K^2 e_d (3e_d - 2e_m) \right) s^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{3}{8} M_K^2 + \frac{1}{4} m_R^2 - \frac{M_K^2}{3} (3e_d - 2e_m)^2 \right) M_K^2 s + \frac{3}{8} M_K^4 m_R^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Voltando à função D (4.11) e substituindo os valores de γ^2 (4.12) e ρ (4.10), temos

$$\begin{aligned} D &= \frac{i}{16\pi F^2 s^2} \left\{ \left[\frac{5}{8} - 3e_d^2 \right] s^4 \right. \\ &\quad + \left[-\frac{5}{8} m_R^2 - \frac{7}{8} M_K^2 + M_K^2 e_d (9e_d - 4e_m) + i 16\pi F^2 \right] s^3 \\ &\quad + \left[+\frac{7}{8} m_R^2 M_K^2 - M_K^4 \left(\frac{1}{8} + 9e_d^2 - \frac{16}{3} e_d e_m + \frac{4}{3} e_m^2 \right) - i 16\pi F^2 m_R^2 \right] s^2 \\ &\quad + M_K^4 \left[\frac{1}{8} + m_R^2 \frac{3}{8} M_K^2 + \frac{M_K^2}{3} (3e_d - 2e_m)^2 \right] s \\ &\quad \left. - \frac{3}{8} m_R^2 M_K^6 \right\}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

e o problema de encontrar os pólos da amplitude equivale a obter as raízes do polinômio quártico

$$s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4 = 0 \quad (4.14)$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{A} \left[-\frac{5}{8} m_R^2 - M_K^2 \frac{7}{8} + M_K^2 e_d (9e_d - 4e_m) + i 16\pi F^2 \right], \\ a_2 &= \frac{1}{A} \left[+\frac{7}{8} m_R^2 M_K^2 - M_K^4 \left(\frac{1}{8} + 9e_d^2 - \frac{16}{3} e_d e_m + \frac{4}{3} e_m^2 \right) - i 16\pi F^2 m_R^2 \right], \\ a_3 &= \frac{1}{A} M_K^4 \left[\frac{3}{8} M_K^2 + \frac{1}{8} m_R^2 + \frac{M_K^2}{3} (3e_d - 2e_m)^2 \right], \\ a_4 &= -\frac{1}{A} \left[\frac{3}{8} M_K^6 m_R^2 \right], \end{aligned}$$

em que definimos

$$A = \frac{5}{8} - 3e_d^2. \quad (4.15)$$

As raízes numéricas deste polinômio de quarto grau podem ser obtidas em manuais matemáticos¹¹. O algoritmo padrão usa a solução da equação cúbica

$$y^3 - a_2 y^2 + (a_1 a_3 - 4a_4) y + (4a_2 a_4 - a_3^2 - a_1^2 a_4) = 0, \quad (4.16)$$

para determinar as quatro raízes através da solução de uma equação quadrática

$$s^2 + \frac{1}{2} \left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y} \right) s + \frac{1}{2} \left(y \pm \sqrt{y^2 - 4a_4} \right) = 0, \quad (4.17)$$

em que y pode ser qualquer uma das três raízes cúbicas.

Um programa em C foi desenvolvido para implementar esse algoritmo, com o objetivo de obter as quatro raízes em função dos parâmetros c_d e m_R^2 . Uma dificuldade no desenvolvimento analítico foi trabalhar com raízes complexas. A saída encontrada foi usar coordenadas polares ($|z|e^{i\phi}$) ao efetuar as operações com raízes e logaritmos e, então, foi preciso estar atento à superfície de Riemann correta de cada operação. No programa numérico essa dificuldade foi superada usando o pacote *complex.h*, que reconhece os números complexos e suas respectivas operações matemáticas.

¹¹Worlfram Math[68] e Coleção Schaum[69]

Os parâmetros utilizados no programa foram os mesmos já definidos no início do capítulo. Além disso, adotamos $m_R = 1.2$ GeV e $c_d = e_d F$ é o parâmetro livre considerado no intervalo $[0.01 - 0.04]$ GeV, sendo o limite do intervalo mais alto do que o valor teórico[28]: $c_d = 0.032$ GeV. As quatro raízes obtidas pelo programa estão dispostas no gráfico da figura 4.5 em função de e_d , para $x_i = \sqrt{s_i}$. Analisando as quatro soluções, podemos ver que apenas duas delas têm parte real (linha contínua) positiva acima do limiar e imaginária (linha tracejada) negativa, condições que determinam um pólo físico. Assim, a partir da solução do polinômio quártico, obtemos dois pólos possíveis, a saber x_2 (vermelho) e x_3 (azul), como pode ser visto diretamente na figura 4.5. A partir de agora, os dois pólos encontrados serão denominados $\sqrt{s_-}$ e $\sqrt{s_+}$ em razão das suas massas.

Figura 4.5: As quatro raízes do polinômio (4.17). Apenas x_2 e x_3 são pólos físicos.

Passamos, agora, a mostrar que a equação (4.13) também pode ser simplificada para uma equação quadrática. Para tanto, notamos que em torno do pólo físico, $s \sim 1$ GeV, a razão $M_K^2/|s|^2$ é pequena e, portanto, podemos desprezar em (4.13) os termos de ordem

M_K^4 . Isso reduz D (4.13) a um polinômio de segundo grau,

$$A s^2 + B s + C = 0, \quad (4.18)$$

com

$$\begin{aligned} A &= \frac{5}{8} - 3e_d^2; \\ B &= -\frac{5}{8}m_R^2 - \frac{7}{8}M_K^2 + M_K^2 e_d(9e_d - 4e_m) + i16\pi F^2 \\ C &= \frac{7}{8}m_R^2 M_K^2 - i16\pi F^2 m_R^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Para testar essa aproximação mostramos, nas figuras 4.6a e 4.6b, que os pólos obtidos através da equação quadrática (4.19) são muito próximos das duas raízes físicas obtidas na solução quártica. Para o pólo de massa mais baixa, $\sqrt{s_-}$, a diferença entre as curvas mostradas no gráfico 4.6a são perceptíveis, ao contrário do que ocorre com $\sqrt{s_+}$. As escalas dos gráficos são diferentes, devido a características do comportamento dos pólos: $\sqrt{s_+}$ apresenta uma variação em torno de 0.75 GeV ao longo do intervalo de c_d considerado, enquanto $\sqrt{s_-}$ varia somente 0.1 GeV.

Figura 4.6: Partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) das soluções quadrática ($P2$ - 4.19) e quártica ($P4$ - 4.13) em função de c_d . (a) $\sqrt{s_-} = E_-$ (b) $\sqrt{s_+} = E_+$.

Tabela 4.2: Pólo $\sqrt{s}$ quártico e quadrático, em GeV, para $m_R = 1.2 \text{ GeV}$ e $c_m = 0.042 \text{ GeV}$.

c_d/F	$\sqrt{s_-}$ quártica eq.(4.13)	$\sqrt{s_-}$ quadrática eq.(4.19)	$\sqrt{s_+}$ quártica eq.(4.13)	$\sqrt{s_+}$ quadrática eq.(4.19)
0	$0.7908 - i 0.5294$	$0.7908 - i 0.5294$	1.2000	1.2000
0.1	$0.8064 - i 0.5109$	$0.8014 - i 0.5173$	$1.2351 - i 0.0269$	$1.2357 - i 0.0272$
0.2	$0.8458 - i 0.4819$	$0.8390 - i 0.4879$	$1.3135 - i 0.0898$	$1.3155 - i 0.0918$
0.3	$0.8904 - i 0.4085$	$0.8908 - i 0.4126$	$1.5346 - i 0.2501$	$1.5346 - i 0.2500$
0.4	$0.8756 - i 0.3228$	$0.8837 - i 0.3165$	$2.4694 - i 0.6287$	$2.4644 - i 0.6327$
0.5	$0.8440 - i 0.2736$	$0.8576 - i 0.2575$	$0.8660 + i 2.7361$	$0.8586 + i 2.7414$

Na tabela 4.2 comparamos os valores numéricos dos pólos quadráticos e quárticos. Na primeira linha, os valores são exatamente iguais, pois $c_d = 0$ corresponde ao limite em que as equações (4.19) e (4.13) são equivalentes. Para todos o intervalo de c_d considerado, a diferença entre os valores obtidos para o pólo $\sqrt{s_-}$, pode chegar até a segunda casa depois da vírgula, mas ainda assim, é pequena. Já os resultados para o pólo $\sqrt{s_+}$ oscilam apenas entre a terceira e a quarta casa. É interessante notar que, para $c_d/F = 0.5$, o sinal da parte imaginária é trocado em $\sqrt{s_+}$, o que indica uma mudança na qualidade deste pólo, o que será discutido em detalhes mais adiante. A concordância dos comportamentos descritos acima revela que as características essenciais para obter o pólo permaneceram na transição do polinômio quártico para o quadrático.

4.5 Pólos analíticos

A solução da equação de segundo grau (4.19), aparentemente trivial usando a fórmula de Báscara, não pode ser obtida analiticamente, devido à presença de raízes quadradas de números complexos. Buscando entender as características essenciais que definem os pólos, notamos que o coeficiente $A = (5/8 - 3e_d^2)$ exerce um papel fundamental neste problema. Ele é o coeficiente do termo de ordem mais alta dos polinômios de quarto e

segundo grau, sendo composto por elementos provenientes dos termos de contato ($5/8$) e ressonante ($3c_d/F^2$). Para o valor do parâmetro $c_d = F\sqrt{5/24}$, o coeficiente A se anula e temos, em cada um dos casos, uma raiz a menos.

No caso quadrático, quando $c_d = 0$ e, portanto, $A = 5/8$ os pólos obtidos são

$$s_+(A = 5/8) = m_R^2, \quad (4.20)$$

$$s_-(A = 5/8) = [7M_K^2/5 - i 128\pi F^2/5]. \quad (4.21)$$

O pólo s_+ não tem parte imaginária, indicando que a ressonância R é um estado ligado no eixo real e não está acoplado ao sistema $K\pi$.

O ponto em que $A = 0 \Leftrightarrow c_d = 0.04701$ GeV, também é importante. Nesse caso o sistema físico tem apenas um pólo, dado por

$$s_-(A = 0) = \frac{[7M_K^2/5 - i 128\pi F^2/5]}{1 + \left[\frac{7M_K^2}{5} - \frac{8}{5}e_d(9e_d - 4e_m)M_K^2 - i 128\pi \frac{F^2}{5} \right] / m_R^2}. \quad (4.22)$$

Esse pólo equivale à equação (4.21) no limite em que m_R^2 é muito grande, indicando que $s_-(A = 0) \sim s_-(A = 5/8)$.

Assim, temos duas soluções exatas para os pólos, em $A = 0$ e $A = 5/8$. Um outro ponto de interesse é encontrado na solução geral da equação de segundo grau¹² (4.19), dada por

$$\begin{aligned} s_{\pm} &= [-B \pm \sqrt{\Delta}]/2A, \\ \Delta &= B^2 - 4AC. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Podemos escolhemos o coeficiente A de tal forma que a parte imaginária da delta seja nula:

$$\begin{aligned} \Im \Delta &= \Im[B^2 - 4AC] \\ &= 2i 16\pi F^2 \left(-\frac{5}{8}m_R^2 - \frac{7}{8}M_K^2 + M_K^2 e_d(9e_d - 4e_m) + 2Am_R^2 \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

No limite em que m_R^2 grande, a equação (4.24) se restringe aos termos proporcionais a m_R^2 , o que determina o valor $A \sim 5/16$.

Dessa maneira, a função Δ assume valores conhecidos nos três pontos considerados: $A = 0$, $A = 5/8$ e $A = 5/16$. Interpolando-a nesses pontos por meio de uma parábola,

¹²Aplicando a fórmula de Báscara.

obtemos uma solução analítica aproximada para os pólos da amplitude $K\pi$, na forma de uma expansão em $1/m_R^2$:

$$s_+ = \frac{1}{A} \left\{ \left[\frac{5}{8} m_R^2 - e_d \left(\frac{24e_d}{5} - 4e_m \right) M_K^2 - \frac{3e_d^2}{m_R^2} \left(1 - \frac{24e_d^2}{5} \right) \left(\frac{128\pi F^2}{5} \right)^2 \right] - i e_d \left[3e_d - \left(\frac{3e_d}{5} - 4e_m \right) \frac{M_K^2}{m_R^2} - 3e_d \left(1 - \frac{24e_d^2}{5} \right) \left(\frac{128\pi F^2}{5m_R^2} \right)^2 \right] \frac{128\pi F^2}{5} \right\}, \quad (4.25)$$

$$s_- = \left\{ \left[\frac{7}{5} M_K^2 + \frac{24m_R^2 e_d^2}{5} \left(\frac{128\pi F^2}{5m_R^2} \right)^2 \right] - i \left[1 - \frac{24e_d^2}{5} \left(\frac{128\pi F^2}{5m_R^2} \right)^2 \right] \frac{128\pi F^2}{5} \right\}. \quad (4.26)$$

Esta solução evidencia a dependência dos pólos na massa da ressonância e nas demais constantes de acoplamento. Nos gráficos 4.7 e 4.8, são comparadas as soluções da equação quadrática (4.19) com as analíticas (4.25, 4.26) para c_d no intervalo $[0.01 - 0.04]$ GeV.

Figura 4.7: Partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) de todas a funções aproximadas de $\sqrt{s_-} = E_-$ em função de c_d .

Em ambos os gráficos, as diferenças entre as curvas dos pólos é maior do que a

apresentada nos gráficos 4.6 da seção anterior. Para o pólo $\sqrt{s_-}$, essa diferença aumenta com c_d e podemos notar uma diferença estrutural nas curvas em torno de $c_d = 0.035$. Esse comportamento também pode ser identificado na tabela 4.3, em que a diferença entre os valores aumenta com e_d e, a partir de $e_d = 0.4$ passa a ocorrer na primeira casa depois da vírgula.

No pólo $\sqrt{s_+}$, embora as curvas tenham a mesma estrutura, como mostram o gráfico 4.8 e a tabela 4.3, a oscilação entre os valores aumenta com e_d e ocorre na segunda e terceira casa depois da vírgula. Mesmo assim, a mudança de qualidade na última linha permanece na solução analítica. Para $e_d = 0.5$ ambos os pólos apresentam uma discrepância muito grande, o que limita a validade da solução analítica.

Figura 4.8: Partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) dos pólos raízes de aproximadas de $\sqrt{s_+} = E_+$ em função de c_d .

Tabela 4.3: Pólo $\sqrt{s}$ quadrático e analítico, em GeV, para $m_R = 1.2 \text{ GeV}$ e $c_m = 0.042 \text{ GeV}$.

c_d/F	$\sqrt{s_-}$ quadrática eq.(4.19)	$\sqrt{s_-}$ analítica eq.(4.26)	$\sqrt{s_+}$ quadrática eq.(4.19)	$\sqrt{s_+}$ analítica eq.(4.25)
0	$0.7908 - i 0.5294$	$0.7908 - i 0.5294$	1.2000	1.2000
0.1	$0.8014 - i 0.5173$	$0.8001 - i 0.5242$	$1.2357 - i 0.0272$	$1.2394 - i 0.0269$
0.2	$0.8390 - i 0.4879$	$0.8206 - i 0.4848$	$1.3155 - i 0.0918$	$1.3257 - i 0.0874$
0.3	$0.8908 - i 0.4126$	$0.8586 - i 0.4215$	$1.5346 - i 0.2500$	$1.5513 - i 0.2245$
0.4	$0.8837 - i 0.3165$	$0.9189 - i 0.3391$	$2.4644 - i 0.6327$	$2.4566 - i 0.6408$
0.5	$0.8576 - i 0.2575$	$1.0041 - i 0.2459$	$0.8586 + i 2.7414$	$1.0882 + i 2.8707$

A equação quadrática analítica tem um papel muito importante na descrição qualitativa dos comportamentos dos pólos da amplitude, que será feita no próximo capítulo. Para concluir este capítulo, comparamos as nossas várias soluções aproximadas com os pólos obtidos resolvendo a equação $D(s) = 0$ numericamente.

4.6 Resultados do modelo

A solução numérica para os pólos da amplitude $K\pi$ foi obtida através de um programa em C, cujo algoritmo foi baseado no trabalho de doutoramento de George Rupp[70] e desenvolvido em um encontro de colaboração, em Portugal. Esse algoritmo consiste em usar as soluções do polinômio de quarto grau como valores iniciais no método de Newton para obter os zeros da função $D(s)$. Detalhes do método constam do Apêndice D. Esta abordagem para encontrar pólos, embora eficiente, tem problemas quando a derivada $D'(s)$ não é definida, pois o programa não consegue emitir resultados.

Comparamos, agora, os pólos da amplitude obtidos diretamente da equação (4.6) com os obtidos por meio das soluções analíticas aproximadas. Para essa comparação, escolhemos a equação quadrática (4.19), pois ela é o meio termo entre as descrições

quantitativa e qualitativa. A solução numérica na aproximação da matriz K também é considerada, pois ela quantifica a aproximação $\bar{R}_{1/2} = 0$.

Nos gráficos 4.9, comparamos os pólos obtidos numericamente com a aproximação de matriz K e a solução quadrática, e é possível notar que, em ambos, os valores são muito próximos. No caso $\sqrt{s_+}$, as curvas são praticamente indistinguíveis. Essa compatibilidade demonstra que a aproximação $M_\pi = 0$ é muito boa, interferindo muito pouco nos resultados numéricos finais. No gráfico 4.9a, o comportamento de E_- é monotônico durante toda a variação de e_d e as escalas verticais variam de apenas 0.2 GeV, tanto na parte na parte real como na imaginária. Já no gráfico 4.9b, a massa e a largura de E_+ aumentam continuamente e tendem a uma divergência para valores de $c_d > 0.04$ GeV. Esse comportamento já foi anunciado quando comparamos as soluções aproximadas, e será discutido a fundo no próximo capítulo.

Figura 4.9: Partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) da aproximação de matriz-K (verde) e aproximação quadrática (vermelho) função: (a) $E_- = \sqrt{s_-}$, (b) $E_+ = \sqrt{s_+}$.

Nos gráficos 4.10, comparamos os pólos obtidos numericamente, com e sem a aproximação de matriz K. Podemos notar, principalmente no caso de E_- , que a diferença entre as curvas numéricas é grande. Isso ocorre devido à contribuição da parte real do *loop*, claramente não desprezível, que é responsável por abaixar os valores das massas e das larguras de ambos os pólos.

Figura 4.10: Partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) da eq(4.6) (azul) e aproximação de matriz-K (verde) : (a) $E_- = \sqrt{s_-}$, (b) $E_+ = \sqrt{s_+}$.

Uma importante conclusão que podemos tirar dos gráficos 4.9 e 4.10, é que a estrutura das soluções aproximadas é a mesma das numéricas. Isso valoriza a solução quadrática como uma boa forma de descrever os pólos da amplitude.

Os parâmetros envolvidos nas posições destes pólos são as constantes de acoplamento c_d e c_m e, também, a massa nominal da ressonância m_R^2 . Na análise das soluções aproximadas, apenas c_d foi considerado como parâmetro livre. Para concluir este capítulo, estudamos o comportamento dos demais parâmetros, para averiguar o grau de influência deles na posição dos pólos.

Figura 4.11: Variação da posição dos pólos em função da massa nominal m_R .

Começando pela massa nominal m_R , fixamos $e_d = 0.35$, $c_m = 0.41$ e atribuímos quatro valores diferentes para m_R na figura 4.11. Ela mostra que o pólo E_- tem parte real estável, enquanto a parte imaginária depende bastante da massa nominal. Já o pólo E_+ exibe grande alteração nos dois eixos, sendo a parte real sempre maior que a massa nominal. Isso é consequência do fato de $\sqrt{s_+}$ (4.25) ser regido pelo fator A no denominador, o que impõe $\Re E_+ > m_R$ e, portanto, que a posição deste pólo no plano complexo está sempre à direita do ponto em que a fase da amplitude passa por $\pi/2$.

Os acoplamentos da ressonância R são dado por c_d e c_m . No início deste capítulo, supusemos que a contribuição de c_m deveria ser menos importante. Para checar a influência desta escolha, fixamos $m_R = 1.2$ GeV, $e_d = 0.3$ e fizemos $c_m = 0$ na equação quadrática (4.19), que fornece os valores dos pólos em $E_+ = 1.3631 - i 0.1973$ GeV e $E_- = 0.9971 - i 0.4835$ GeV. Comparando com os resultados da tabela 4.3 para o mesmo valor de e_d , vemos que a mudança é pequena, $\sim 12\%$, o que significa que variações em torno do valor fixado $c_m = 0.042$ GeV influenciam pouco a posição dos pólos.

Capítulo 5

Resultados e Conclusões

Neste trabalho, a descrição da amplitude do espalhamento elástico $K\pi$ foi feita com base em lagrangianas efetivas quirais, que contêm um termo de contato $\mathcal{L}_C^{(2)}$ e interações com ressonâncias escalares $\mathcal{L}_R^{(2)}$. Essa descrição incorpora uma simetria quiral aproximada e é regida por ela no limite de baixas energias.

Após apresentar o ferramental teórico adaptado à interação $K\pi$, calculamos as amplitudes de espalhamento para as projeções de isospin em nível árvore que, em seguida, foram unitarizadas. Os principais resultados estão dispostos na seção 3.11. A amplitude de interesse neste trabalho é a que possui projeção de isospin $1/2$, pois é nela que se encontram as ressonâncias escalares. Em seguida, estudamos os zeros do denominador da amplitude e obtivemos dois pólos físicos. Isso evidencia um fenômeno muito interessante, pois a amplitude $K\pi$ teórica contém apenas um pólo explícito, associado à troca de uma ressonância R , de massa nominal m_R^2 , no canal s . O outro pólo, implícito, é devido ao fenômeno chamado de geração dinâmica de ressonâncias.

5.1 Da qualidade dos pólos

Os pólos da amplitude $K\pi$ são os zeros do denominador $D(s)$, (4.6), localizados na segunda superfície de Riemann. Devido a estruturas matemáticas complicadas presentes nesta função, em especial a parte real da contribuição do *loop* $\bar{R}_{1/2}$, o estudo puramente numérico dos seus zeros não é capaz de fornecer informação a respeito da dinâmica responsável pelos pólos. Mostramos que, tomando o limite de $SU(2) \Leftrightarrow M_\pi = 0$ e fazendo a aproximação

de matriz K , que corresponde a $\bar{R}_{1/2} = 0$, $D(s)$ passa a ter uma estrutura polinomial. Assim, o problema de determinar os pólos se restringe a obter as raízes desses polinômios, inicialmente de quarto grau (4.13) e, após mais uma expansão em torno da massa da ressonância R , de segundo grau (4.19). Como mostramos nos gráficos 4.6, os dois casos são numericamente equivalentes. Nessas equações, o coeficiente A

$$A = \frac{5}{8} - 3e_d^2, \quad (5.1)$$

desempenha um papel importante. Ao multiplicar o termo de ordem mais alta de ambos os polinômios, ele regula o comportamento dos pólos. Uma solução analítica aproximada foi obtida para os zeros do polinômio quadrático, que corresponde a

$$\begin{aligned} s_+ &= \frac{1}{A} \left\{ \left[\frac{5}{8} m_R^2 - e_d \left(\frac{24e_d}{5} - 4e_m \right) M_K^2 - \frac{3e_d^2}{m_R^2} \left(1 - \frac{24e_d^2}{5} \right) \left(\frac{128\pi F^2}{5} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - i e_d \left[3e_d - \left(\frac{3e_d}{5} - 4e_m \right) \frac{M_K^2}{m_R^2} - 3e_d \left(1 - \frac{24e_d^2}{5} \right) \left(\frac{128\pi F^2}{5m_R^2} \right)^2 \right] \frac{128\pi F^2}{5} \right\}, \\ s_- &= \left\{ \left[\frac{7}{5} M_K^2 + \frac{24m_R^2 e_d^2}{5} \left(\frac{128\pi F^2}{5m_R^2} \right)^2 \right] - i \left[1 - \frac{24e_d^2}{5} \left(\frac{128\pi F^2}{5m_R^2} \right)^2 \right] \frac{128\pi F^2}{5} \right\}. \end{aligned}$$

Nos gráficos 4.7 e 4.8, os pólos obtidos pela solução analítica foram comparados com os oriundos da solução quadrática e, embora as curvas não coincidam, a estrutura geral é a mesma. Isso garante que a essência dos pólos foi mantida nesta transição e que as soluções analíticas mostradas acima os descrevem bem.

Para chegar à essência qualitativa do comportamento dos pólos, consideramos o limite em que m_R^2 é grande, e os resultados para s_- e s_+ podem ser ainda mais simplificados, levando a

$$s_+ = \frac{1}{A} \left\{ \frac{5}{8} m_R^2 - i e_d^2 \frac{384\pi F^2}{5} \right\}, \quad (5.2)$$

$$s_- = 7M_K^2/5 - i 128\pi F^2/5. \quad (5.3)$$

Estas expressões mostram que os conteúdos dinâmicos dos dois pólos são muito diferentes. Em particular, o coeficiente A aparece no denominador do pólo s_+ e, por isso, ele diverge quando $A = 0$, deixando de ser físico. Para explorar essa situação, é conveniente expandir

o intervalo de c_d considerado até 0.06 GeV. Nos gráficos 5.1 e 5.2, comparamos os pólos das soluções quadráticas (4.19) com os obtidos numericamente (4.6) com e sem a aproximação de matriz K.

No gráfico 5.1, em $e_d = 0$, o pólo E_+ “nasce” como um estado ligado, contendo apenas parte real. À medida que e_d aumenta, as partes real e imaginária crescem até o ponto em que ambas divergem. A partir daí, o pólo E_+ deixa de ser fisicamente possível, pois passa a ter uma parte imaginária positiva. Esse comportamento é justificado pela equação (5.2), e o ponto da divergência, mostrada no gráfico 5.1, é o valor no qual A se anula, $e_d = 0.4564$. O coeficiente A é explícito no desenvolvimento das soluções aproximadas, mas a solução numérica apresenta o mesmo comportamento para E_+ , com a divergência no mesmo ponto. Isso mostra que a qualidade é a mesma, e a essência dos pólos foi mantida em todas as simplificações.

Figura 5.1: . Extensão de c_d para partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) da função $E_+ = \sqrt{s_+}$: eq(4.6) (verde), K e q representam as aproximação de matriz-K e quadrática (vermelho).

Figura 5.2: Extensão de c_d para partes reais (contínuo) e imaginárias (tracejado) da função $E_- = \sqrt{s_-}$: eq(4.6) (verde), K e q representam as aproximação de matriz-K (azul) e quadrática (vermelho).

O gráfico 5.2 mostra o comportamento de E_- , que é monotônico durante toda a variação de e_d . Isto é esperado, uma vez que na equação (5.3) o pólo s_- não depende de e_d . A diferença entre as curvas numéricas com aproximação de matriz K e quadrática é muito pequena, demonstrando que $M_\pi = 0$ é uma boa aproximação. Por outro lado, a diferença entre as curvas numéricas é grande, mostrando que a contribuição da parte real do *loop* é importante e a aproximação $\bar{R}_{1/2} = 0$, embora seja crucial para obter uma visão qualitativa dos pólos, não é precisa.

5.2 Das quantidades

Para atribuir valores às posições dos pólos, usamos o programa numérico. A partir das partes reais dos pólos E_- e E_+ , que correspondem às massas das ressonâncias escalares, identificamos o primeiro ao κ e o segundo, ao $K_0^*(1430)$. Assim, fixando $c_m = 0.042$ GeV e escolhendo os parâmetros c_d e m_R de modo a obter o valor experimental do pólo do $K_0^*(1430)$, $\sqrt{s_+} = 1.414 \pm 0.006 - i(0.145 \pm 0.010)$ GeV[21], encontramos os seguintes

parâmetros

$$e_d = 0.2705 \pm 0.0078 \text{ GeV} , \quad (5.4)$$

$$m_R = 1.1865 \pm 0.079 \text{ GeV}. \quad (5.5)$$

Isso permite fazer uma predição para a posição do pólo do κ :

$$\sqrt{s_\kappa} = (0.7505 \pm 0.0010) - i(0.2363 \pm 0.0023) \text{ GeV}. \quad (5.6)$$

O valor encontrado coincide com os obtidos por Bugg[58] e Peláez[62], como mostra a tabela 4.1. As incertezas foram estimadas a partir das incertezas de $K_0^*(1430)$. Retomando a figura 5.3, agora também com o nosso valor (em vermelho) para o κ , vemos que ele está “embolado” com as demais predições. Isso demonstra que de fato conseguimos captar a essência do que define o κ .

Figura 5.3: Comparando os valores da tabela 4.1 graficamente.

5.3 Conclusões

Na literatura, o debate sobre a natureza das ressonância escalares, bem como seus conteúdos de quarks, é muito intenso e amplo. Uma parte da comunidade acredita que o

$K_0^*(1430)$ poderia ser um estado do tipo $q\bar{q}$, enquanto o κ seria um estado do tipo $qq\bar{q}\bar{q}$ ou ainda um estado molecular mésonméson.

Neste trabalho, estudamos o comportamento dos pólos da amplitude $K\pi$ e mostramos que um modelo simplificado é capaz de contribuir para o entendimento das suas origens dinâmicas. Um dos nossos principais resultados é que o κ é estável quando o acoplamento c_d é variado, o que demonstra que a origem desse pólo está no diagrama de contato. Já a ressonância identificada como o $K_0^*(1430)$ oscila de um estado ligado em $c_d = 0$ até não ser mais um pólo físico para $c_d \geq 0.047$ GeV. Esses diferentes comportamentos dinâmicos sugerem fortemente que a natureza destes pólos é distinta.

Apêndice A

Cinemática

Figura A.1: Espalhamento elástico $K(k)\pi(q) \longrightarrow K(k')\pi(q')$

Para descrever a cinemática do espalhamento elástico $K\pi$, usamos as variáveis de Mandelstam. Invariantes de Lorentz, as variáveis de Mandelstam são definidas em termos dos momentos iniciais e finais como

$$\begin{aligned} s &= (q + k)^2 = (q' + k')^2; \\ t &= (q - q')^2 = (k - k')^2; \\ u &= (q - k')^2 = (k - q')^2. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Elas são relacionadas entre si por $s + t + u = \sum M_m^2 = 2M_\pi^2 + 2M_K^2$.

No presente problema, adotamos o referencial de centro de massa, no qual $\mathbf{q} + \mathbf{k} = 0 = \mathbf{q}' + \mathbf{k}'$ e s é a energia do centro de massa. Introduzimos o trimomento $\mathbf{p}$ de uma das partículas incidentes, que é conservado tal que $\mathbf{p} = \mathbf{q} = -\mathbf{k}$. Os momentos finais são

dados em função de $\mathbf{p}$ e do ângulo de espalhamento θ . E as variáveis u e t são redefinidas nesse referencial como

$$t = -2(1 - \cos \theta) \mathbf{p}^2, \quad (\text{A.2})$$

$$u = 2s(1 - \cos \theta) \mathbf{p}^2 - s + 2M_\pi^2 + 2M_K^2. \quad (\text{A.3})$$

Para $\mathbf{p}$ definido em função de s , das massas e das energias das partículas espalhadas, como:

$$\begin{aligned} s &= (E_\pi + E_K)^2; \\ \mathbf{p}^2 &= E_\pi^2 - M_\pi^2 = E_K^2 - M_K^2; \\ &\implies M_K^2 - M_\pi^2 = E_K^2 - E_\pi^2 = (E_K - E_\pi)(E_\pi + E_K) = (E_K - E_\pi)\sqrt{s}, \\ E_K - (\sqrt{s} - E_K) &= \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{\sqrt{s}}, \\ E_K &= \frac{\sqrt{s}}{2} \left(1 + \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{s} \right); \\ \mathbf{p}^2 &= \frac{s}{4} \left(1 + \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{s} \right)^2 - M_K^2 \\ &= \frac{s}{4} + \frac{(M_K - M_\pi)^2 (M_K + M_\pi)^2}{4s} + \frac{1}{2} (M_K^2 - M_\pi^2) - M_K^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{(M_K - M_\pi)^2}{2\sqrt{s}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{s}}{2} - \frac{(M_K + M_\pi)^2}{2\sqrt{s}} \right) \\ &= \frac{s}{4} \left(1 - \frac{(M_K - M_\pi)^2}{s} \right) \cdot \left(1 - \frac{(M_K + M_\pi)^2}{s} \right) \\ &= \frac{s}{4} \rho^2(s). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

A função $\rho(s)$, introduzida na última passagem, exerce um papel muito importante na definição do comportamento da amplitude. O fato de ser uma função não trivial em s será agravado quando este assumir valores complexos.

Podemos ver que s também define o limiar de produção deste espalhamento. A quantidade de energia necessária para que o fenômeno do espalhamento $K\pi$ possa ocorrer é dado por $s = (M_\pi + M_K)^2 = 0.633 \text{ GeV}$.

Apêndice B

Projeção em canal de Isospin

Figura B.1: Amplitude de espalhamento $K\pi$ em nível árvore, com termo de contato e ressonâncias escalares nos canais s , t e u .

Como discutimos no capítulo 3, os diagramas da figura B.1 contribuem para as duas componentes de isospin, $1/2$ e $3/2$, da amplitude de espalhamento $K\pi$. A amplitude de contato foi projetada nessas componentes nas equações (3.32) e (3.33). Agora, vamos calcular em detalhes as projeções das amplitude de cada canal ressonante em canais de isospin cuja a resposta foi usada na seção 3.5.

Os estados físicos em termos dos estados de isospin são dados pelas relações de Clebsch-Gordan[27] como

$$|\pi^+ K^- \rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, 1/2 \rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, 1/2 \rangle , \quad (\text{B.1})$$

$$|\pi^0 \bar{K}^0 \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, 1/2 \rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, 1/2 \rangle . \quad (\text{B.2})$$

A projeção das amplitudes de cada canal nos estados de isospin é obtida calculando

seus valores esperados nos estados físicos usando as relações (B.1) (B.2),

$$\begin{aligned}
\langle \pi^+ K^- | \bar{T}_{abcd}^i | \pi^+ K^- \rangle &= \frac{1}{3} \langle 3/2 | \bar{T}_{abcd}^i | 3/2 \rangle + \frac{2}{3} \langle 1/2 | \bar{T}_{abcd}^i | 1/2 \rangle \\
&= \frac{1}{3} \bar{T}_{3/2}^i + \frac{2}{3} \bar{T}_{1/2}^i; \\
\langle \pi^0 \bar{K}^0 | \bar{T}_{abcd}^i | \pi^0 \bar{K}^0 \rangle &= \frac{2}{3} \langle 3/2 | \bar{T}_{abcd}^i | 3/2 \rangle + \frac{1}{3} \langle 1/2 | \bar{T}_{abcd}^i | 1/2 \rangle \\
&= \frac{2}{3} \bar{T}_{3/2}^i + \frac{1}{3} \bar{T}_{1/2}^i;
\end{aligned} \tag{B.3}$$

em que i é o índice do canal. E os estados físicos são dados em função dos campos ϕ_a nas relações (3.7).

Para $i = s$, a projeção no estado $K^- \pi^+$ é

$$\begin{aligned}
\langle K^- \pi^+ | \bar{T}_{abcd}^s | K^- \pi^+ \rangle &= \frac{1}{4} \langle \phi_4 \phi_1 - i \phi_4 \phi_2 + i \phi_5 \phi_1 + \phi_5 \phi_2 | \\
&\quad \otimes d_{ecd} d_{eab} \bar{T}^s | \phi_4 \phi_1 + i \phi_4 \phi_2 - i \phi_5 \phi_1 + \phi_5 \phi_2 \rangle.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

A tabela das constantes de estrutura d_{ijk} 2.2 informa quais são os estados intermediários possíveis para cada combinação de campos. Usando esta informação, podemos separar (B.4) em dois grupos:

$$\begin{aligned}
\langle K^- \pi^+ | \bar{T}_{abcd}^s | K^- \pi^+ \rangle &= \frac{1}{4} \left[\langle \phi_4 \phi_1 + \phi_5 \phi_2 | d_{ecd} d_{eab} \bar{T}^s | \phi_4 \phi_1 + \phi_5 \phi_2 \rangle \right. \\
&\quad \left. + \langle -i \phi_4 \phi_2 + i \phi_5 \phi_1 | d_{ecd} d_{eab} \bar{T}^s | i \phi_4 \phi_2 - i \phi_5 \phi_1 \rangle \right].
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Na primeira linha $e = 6$, na segunda $e = 7$, ambos correspondem a um escalar estranho do tipo R_K . Ainda, nas duas linhas, temos para essas combinação de índices que $d_{eab} d_{ecd} = 2$, o que resulta em

$$\langle K^- \pi^+ | \bar{T}_{abcd}^s | K^- \pi^+ \rangle = \frac{1}{2} \bar{T}^s. \tag{B.6}$$

Desenvolvendo o mesmo raciocínio para o estado $\bar{K}^0 \pi^0$,

$$\langle \bar{K}^0 \pi^0 | \bar{T}_{abcd}^s | \bar{K}^0 \pi^0 \rangle = \frac{1}{2} \langle \phi_6 \phi_3 - i \phi_7 \phi_3 | d_{ecd} d_{eab} \bar{T}^s | \phi_6 \phi_3 + i \phi_7 \phi_3 \rangle, \tag{B.7}$$

as únicas possibilidades de agrupamento são

$$\begin{aligned}
\langle \bar{K}^0 \pi^0 | \bar{T}_{abcd}^s | \bar{K}^0 \pi^0 \rangle &= \frac{1}{2} \langle \phi_6 \phi_3 | d_{636} d_{636} \bar{T}^s | \phi_6 \phi_3 \rangle \\
&\quad + \frac{1}{2} \langle \phi_7 \phi_3 | d_{737} d_{737} \bar{T}^s | \phi_7 \phi_3 \rangle
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Os índices escalares possíveis também são $e = 6$ e $e = 7$. Nese caso, a soma de todos os produtos de $d_{eab}d_{ecd}$ é $1/2$ e temos

$$\langle K^0 \pi^0 | \bar{T}_{abcd}^s | K^0 \pi^0 \rangle = \frac{1}{4} \bar{T}^s. \quad (\text{B.9})$$

Substituindo (B.6) e (B.9) na expressão (B.3), podemos calcular a contribuição do canal s às amplitudes $\bar{T}^{1/2}, \bar{T}^{3/2}$

$$\frac{1}{2} \bar{T}^s = \frac{1}{3} \bar{T}_{3/2}^s + \frac{2}{3} \bar{T}_{1/2}^s, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{1}{4} \bar{T}^s = \frac{2}{3} \bar{T}_{3/2}^s + \frac{1}{3} \bar{T}_{1/2}^s. \quad (\text{B.11})$$

Este sistema é de simples resolução,

$$\bar{T}_{1/2}^s = \frac{3}{4} \bar{T}^s - \frac{1}{2} \bar{T}_{3/2}^s \Rightarrow \bar{T}_{3/2}^s = 6/5 \left(\frac{1}{4} \bar{T}^s - \frac{1}{4} \bar{T}^s \right) = 0, \quad (\text{B.12})$$

a solução demonstra que, de fato, o canal s não tem amplitude projetada em $I = 3/2$, e

$$\bar{T}_{1/2}^s = \frac{3}{4} \bar{T}^s. \quad (\text{B.13})$$

Para calcular a contribuição do canal t , efetuamos um procedimento análogo. A projeção no estado $K^- \pi^+$ é dada por

$$\begin{aligned} \langle \pi_c^+ K_d^- | \bar{T}^{abcd} | \pi_a^+ K_b^- \rangle &= \frac{1}{4} \langle \phi_4 \phi_1 - i \phi_4 \phi_2 + i \phi_5 \phi_1 + \phi_5 \phi_2 | (d_{eac} d_{ebd} \bar{T}^t \\ &+ \delta_{ac} \delta_{bd} \bar{T}^\sigma) | \phi_4 \phi_1 + i \phi_4 \phi_2 - i \phi_5 \phi_1 + \phi_5 \phi_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Analizando a tabela 2.2, as únicas combinações de índices não nulos são aquelas em que os campos iniciais e finais são idênticos, e

$$\langle \pi_c^+ K_d^- | \bar{T}^{abcd} | \pi_a^+ K_b^- \rangle = \frac{1}{4} ((d_{e44} d_{e11} + d_{e44} d_{e22} + d_{e55} d_{e11} + d_{e55} d_{e22}) \bar{T}^t + 4 \bar{T}^\sigma). \quad (\text{B.15})$$

Os estados intermediários são $e = 8$ e $e = 0$. Somando todos os produtos de $d_{eii} d_{ejj}$, temos

$$\langle K^- \pi^+ | \bar{T}^{abcd} | K^- \pi^+ \rangle = -\frac{1}{6} \bar{T}^t + \bar{T}^\sigma. \quad (\text{B.16})$$

Para o estado físico $\bar{K}^0 \pi^0$,

$$\langle \bar{K}^0_c \pi_d^0 | \bar{T}^{abcd} | \bar{K}^0_a \pi_b^0 \rangle = \frac{1}{2} \langle \phi_6 \phi_3 - i \phi_7 \phi_3 | d_{eac} d_{ebd} \bar{T}^t + \delta_{ac} \delta_{bd} \bar{T}^\sigma | \phi_6 \phi_3 + i \phi_7 \phi_3 \rangle. \quad (\text{B.17})$$

As possibilidades não nulas seguem a mesma lógica que em (B.15) e os índices possíveis são os mesmos,

$$\langle \bar{K}^0 \pi^0 | \bar{T}^{abcd} | \bar{K}^0 \pi^0 \rangle = \frac{1}{2} ((d_{866} d_{833} + d_{877} d_{833}) \bar{T}^t + 2 \bar{T}^\sigma). \quad (\text{B.18})$$

A soma de todos os produtos de $d_{8ii} d_{8jj}$ é $-\frac{1}{3}$, e

$$\langle \bar{K}^0 \pi^0 | \bar{T}^{abcd} | \bar{K}^0 \pi^0 \rangle = -\frac{1}{6} \bar{T}^t + \bar{T}^\sigma, \quad (\text{B.19})$$

a contribuição é exatamente a mesma que a já calculada no estado $K^- \pi^+$ carregado.

Substituindo (B.16) e (B.19) em (B.3) temos

$$-\frac{1}{6} \bar{T}^t + \bar{T}^\sigma = \frac{1}{3} \bar{T}^{3/2} + \frac{2}{3} \bar{T}^{1/2}, \quad (\text{B.20})$$

$$-\frac{1}{6} \bar{T}^t + \bar{T}^\sigma = \frac{2}{3} \bar{T}^{3/2} + \frac{1}{3} \bar{T}^{1/2}. \quad (\text{B.21})$$

Resolvendo o sistema obtemos a contribuição do canal t para a amplitude em $I = 1/2$ e $I = 3/2$

$$\bar{T}^{1/2} = \bar{T}^{3/2} = -\frac{1}{6} \bar{T}^t + \bar{T}^\sigma, \quad (\text{B.22})$$

O cálculo da contribuição para $i = u$ se assemelha bastante ao já calculado para $i = s$,

$$\begin{aligned} \langle \pi_c^+ K_d^- | \bar{T}_{adbc}^u | \pi_a^+ K_b^- \rangle &= \frac{1}{4} \langle \phi_4 \phi_1 - i \phi_4 \phi_2 + i \phi_5 \phi_1 + \phi_5 \phi_2 | \\ &\quad \otimes d_{ead} d_{ebc} \bar{T}^u | \phi_4 \phi_1 + i \phi_4 \phi_2 - i \phi_5 \phi_1 + \phi_5 \phi_2 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

A partir da tabela de d_{ijk} , os estados possíveis são:

$$\begin{aligned} \langle K^- \pi^+ | \bar{T}_{adbc}^u | K^- \pi^+ \rangle &= \frac{1}{4} \langle \phi_4 \phi_1 + \phi_5 \phi_2 | d_{ead} d_{ebc} \bar{T}^u | \phi_4 \phi_1 + \phi_5 \phi_2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4} \langle -i \phi_4 \phi_2 + i \phi_5 \phi_1 | d_{ead} d_{ebc} \bar{T}^u | i \phi_4 \phi_2 - i \phi_5 \phi_1 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

mas, a soma dos produtos de $d_{eab} d_{ecd}$ é nula. O que mostra que o estado $K^- \pi^+$ não é um estado possível no canal u

$$d_{641} d_{641} + d_{742} d_{751} + d_{652} d_{652} + d_{751} d_{742} = 0,$$

$$d_{742} d_{742} - 2 d_{641} d_{652} + d_{751} d_{751} = 0.$$

Calculando a projeção do estado $\bar{K}^0\pi^0$,

$$\langle \bar{K}^0_c \pi^0_d | \bar{T}_{adb}^u | \bar{K}^0_a \pi^0_b \rangle = \frac{1}{2} \langle \phi_6 \phi_3 - i \phi_7 \phi_3 | d_{ead} d_{ebc} \bar{T}^u | \phi_6 \phi_3 + i \phi_7 \phi_3 \rangle, \quad (\text{B.25})$$

os termos não nulos são

$$\langle \bar{K}^0 \pi^0 | \bar{T}_{adb}^u | \bar{K}^0 \pi^0 \rangle = \frac{1}{2} (d_{663} d_{636} + d_{737} d_{773}) \bar{T}^u. \quad (\text{B.26})$$

Assim, definimos a amplitude do estado $\bar{K}^0\pi^0$ no canal u ,

$$\langle \bar{K}^0_c \pi^0_d | \bar{T}_{adb}^u | \bar{K}^0_a \pi^0_b \rangle = \frac{1}{4} \bar{T}^u. \quad (\text{B.27})$$

substituindo (B.27) em (B.3) temos

$$0 = \frac{1}{3} \bar{T}_{3/2}^u + \frac{2}{3} \bar{T}_{1/2}^u, \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{1}{4} \bar{T}^u = \frac{2}{3} \bar{T}_{3/2}^u + \frac{1}{3} \bar{T}_{1/2}^u. \quad (\text{B.29})$$

Resolvendo o sistema, obtemos a projeção do canal u em canais de isospin,

$$\begin{aligned} \bar{T}_{1/2}^u &= -\frac{1}{4} \bar{T}^u; \\ \bar{T}_{3/2}^u &= \frac{1}{2} \bar{T}^u. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Juntando a contribuição dos diagramas de contato (3.32) e (3.33) com as contribuições dos canais s (B.13), t (B.22) e u (B.30), a amplitude $K\pi$ em canais de isospin é dada pelas expressões

$$\bar{T}^{1/2} = \frac{1}{4f^2} [4s + 3t - 4(M_\pi^2 + M_K^2)] + \frac{3}{4} \bar{T}_R^s - \frac{1}{6} \bar{T}_8^t + \bar{T}_0^t - \frac{1}{4} \bar{T}_R^u; \quad (\text{B.31})$$

$$\bar{T}^{3/2} = -\frac{1}{2f^2} [s - (M_\pi^2 + M_K^2)] - \frac{1}{6} \bar{T}_8^t + \bar{T}_0^t + \frac{1}{2} \bar{T}_R^u. \quad (\text{B.32})$$

Esse resultado equivale aos apresentados nas equações (3.39) e (3.40) na seção 3.5.

Apêndice C

Integral de *Loop*

O cálculo da integral de *loop* $K\pi$ é fundamental para o desenvolvimento do cálculo do espalhamento expresso em detalhes no capítulo 3. É a partir da iteração da bolha que a amplitude é unitarizada. Para calcular o diagrama representado na figura C, precisamos fazer a integral sobre a bolha, amputando as linhas dos propagadores, no quadrimomento que flui no do *loop*, ou seja, Q_μ ¹.

Figura C.1: Integral de *loop* da interação $K\pi$.

Faremos a conta de forma genérica e ao final vamos reduzir ao caso que nos interessa, a interação $K\pi$. Assim, definimos a linha verde como uma partícula de massa m_a e a vermelha uma partícula de massa m_b . O quadrimomento do diagrama é P_μ , definido como a soma dos quadrimomentos dos mésons a e b : $P = q + k$. Desta forma, a integral a ser

¹O desenvolvimento desta conta foi baseado em um relatório interno[23] e [27]

resolvida é:

$$I = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P/2 + Q)^2 - m_a^2} \frac{1}{(P/2 - Q)^2 - m_b^2}; \quad (\text{C.1})$$

Para resolver essa integral introduzimos o parâmetro de Feynman [27]

$$\frac{1}{AB} = \Gamma(2) \int_0^1 dx \frac{1}{[(1-x)A + xB]^2} = \Gamma(2) \int_0^1 dx \frac{1}{\mathcal{D}^2}. \quad (\text{C.2})$$

No caso específico da integral C.1, definimos $\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (1-x)[P^2/4 + Q^2 + P \cdot Q - m_a^2] + x[P^2/4 + Q^2 - P \cdot Q - m_b^2], \\ &= Q^2 + (1-2x)P \cdot Q - (1-x)m_a^2 - xm_b^2, \\ &= Q^2 + 2Q \cdot \eta - \Sigma^2; \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

em que, para simplificar, introduzimos

$$\begin{aligned} \eta &= (1-2x)P/2, \\ \Sigma^2 &= (1-x)m_a^2 + xm_b^2 - P^2/4. \end{aligned}$$

O grande truque para o desenvolvimento da conta é completar quadrados, o que elimina a dependência em Q_μ . Para tal, aplicamos as seguintes mudanças de variáveis:

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (Q + \eta)^2 - \eta^2 - \Sigma^2; \\ l &= Q + \eta \implies \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} = \frac{d^4 l}{(2\pi)^4}; \\ \Delta &= \eta^2 + \Sigma^2. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

O que simplifica o denominador da integral C.1

$$\mathcal{D} = l^2 - \Delta, \quad (\text{C.5})$$

e respectivamente a própria integral,

$$I = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2}. \quad (\text{C.6})$$

Para resolver essa integral, precisamos fazer uma translação do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano, que é métrica onde sabemos resolver integrais. A relação entre as métricas estabelece:

$$l^0 \equiv il_E^0 \quad l^i \equiv l_E^i,$$

e, portanto,

$$l^2 = l_0^2 - \mathbf{l}^2 = -l_{0E}^2 - \mathbf{l}^2 = (-1)(l_{0E} + \mathbf{l}^2) = -l_E^2 \Rightarrow d^4 l \equiv i d^4 l_E.$$

Assim, temos uma integral no espaço Euclidiano, que diverge logaritmicamente, mas ainda assim, sabemos calculá-la

$$I = \frac{i}{(-1)^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2}. \quad (\text{C.7})$$

Para eliminar a divergência ultravioleta desta integral, fazemos regularização dimensional, o que significa calcular a integral em D dimensões e depois tomar o limite de $D \rightarrow 4$.

$$I_D = \frac{i}{(-1)^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{i}{(-1)^2} \int_0^1 dx \mathcal{I}, \quad (\text{C.8})$$

com

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2}. \quad (\text{C.9})$$

definindo o elemento de volume em D dimensões

$$\frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} = \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} l_E^{(D-1)} dl_E.$$

Existe uma identidade entre integral do ângulo sólido e a área da hipersfera de raio unitário[27],

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}.$$

A parte radial de (C.9), R , pode ser escrita usando a identidade:

$$R = \int dl \frac{l^{D-1}}{(l^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int d(l^2) \frac{(l^2)^{(D/2-1)}}{(l^2 + \Delta)^2},$$

dada a mudança de variável

$$\xi = \Delta(l^2 + \Delta)^{-1}, \quad d\xi = -\Delta(l^2 + \Delta)^{-2} dl^2,$$

temos,

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{(2-D/2)} \int_0^1 d\xi \xi^{(1-D/2)} (1-\xi)^{(D/2-1)}.$$

Usando a definição de Abramowitz & Stegun, temos

$$R = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{(2-D/2)} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)}.$$

E finalmente podemos calcular a integral em D dimensões:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I} &= \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} R, \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{(2-D/2)} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)}, \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{(2-D/2)}. \tag{C.10}
\end{aligned}$$

Para fazer o limite de $D \rightarrow 4$, usamos um estágio intermediário, $D/2 = 2 - \epsilon/2$, e depois fazemos $\epsilon \rightarrow 0$. Expandindo as componentes de C.10 em ϵ

$$\begin{aligned}
\Gamma(\epsilon/2) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma, \\
\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\epsilon/2} &= 1 - \frac{\epsilon}{2} \log(\Delta/\Lambda), \\
(4\pi)^{\epsilon/2} &= 1 + \frac{\epsilon}{2} \log(4\pi),
\end{aligned}$$

E então, calculamos a integral (C.10) até a $\mathcal{O}(\epsilon)$,

$$\mathcal{I} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \log(\Delta/\Lambda) + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]. \tag{C.11}$$

Subtraindo o pólo e as constantes de (C.11), podemos voltar à equação (C.8) e agora calcular a integral no parâmetro de Feynman com a integral já regularizada

$$I^{reg} = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{\Lambda}{(1-x)m_a^2 + xm_b^2 - x(1-x)P^2} \right), \tag{C.12}$$

sendo Λ uma escala arbitrária introduzida para manter o argumento do logaritmo adimensional.

Ao efetuar o cálculo no parâmetro de Feynman, precisamos tomar cuidado para saber em qual regime da função logarítmica estamos. O denominador do logaritmo da integral (C.12), já definido acima como a função Δ , é uma função que depende de P^2 , momento transferido ao *loop*, e de x , variável de integração. Estudar as raízes de Δ é importante para saber se essa função pode assumir valores negativos dentro do intervalo de integração $[0;1]$, o que significa que o logaritmo será imaginário. As raízes de Δ são dadas por

$$x_1 = \frac{1}{2P^2} \left[(P^2 + m_a^2 + m_b^2) + \sqrt{\lambda(P^2, m_a^2, m_b^2)} \right], \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{2P^2} \left[(P^2 + m_a^2 + m_b^2) - \sqrt{\lambda(P^2, m_a^2, m_b^2)} \right], \tag{C.14} \\
\lambda(P^2, m_a^2, m_b^2) &= (P^2 + m_a^2 - m_b^2)^2 - 4P^2 m_a^2.
\end{aligned}$$

Analisando as expressões (C.13) e (C.14), vemos que o comportamento das raízes é definido por P^2 . A função Δ será sempre positiva para $P^2 \leq (m_a + m_b)^2$ e consequentemente negativa para $P^2 > (m_a + m_b)^2$, que é exatamente o limiar de produção de um par de partículas com massas m_a e m_b . Desta forma, o resultado da integral de (C.12) necessariamente terá uma componente imaginária na região de interesse.

A solução da integral (C.12) dá origem a função de *loop*, $L(s)$, agora em função de s , energia do centro de massa, e não mais P^2

$$I^{reg} = \frac{i}{(4\pi^2)} L(s). \quad (C.15)$$

Voltando para o caso específico que nos interessa, a interação $K\pi$, reconhecemos $m_a = M_\pi$ e $m_b = M_K$, e a solução da integral de *loop* é dividida em três regimes dependentes de s e das massas M_K e M_π ,

- para $s < (M_K - M_\pi)^2$:

$$L(s) = -\rho \log \left[\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \right] - \eta, \quad (C.16)$$

- para $(M_K - M_\pi)^2 < s < (M_K + M_\pi)^2$:

$$L(s) = \rho [\tan^{-1} \sigma - \pi/2] - \eta, \quad (C.17)$$

- par $s > (M_K + M_\pi)^2$:

$$L(s) = \rho(s) \log \left[\frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right] - \eta + i\pi\rho, \quad (C.18)$$

$$\sigma = \sqrt{|s - (M_K + M_\pi)^2| / |s - (M_K - M_\pi)^2|}, \quad (C.19)$$

$$\eta = 2 - [(M_K^2 - M_\pi^2)/s] \log(M_K/M_\pi). \quad (C.20)$$

Com esse resultado, podemos definir o propagador da interação de *loops*

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_I &= -\frac{1}{16\pi^2} \{ \Re [L(s) - c_I] + i \Im L(s) \} \\ &\equiv \bar{R}_I(s) + i \theta [s - (M_K + M_\pi)^2] I(s). \end{aligned} \quad (C.21)$$

para $I(s) = -\rho/(16\pi)$.

Este resultado é fundamental para a unitarização do kernel da amplitude de espalhamento $K\pi$ e é usado na seção 3.9.

Apêndice D

Método de Newton

Para encontrar os zeros dos polinômios quártico e quadrático usamos fórmulas prontas [68]. Mas, no caso da solução sem simplificações, a função $D(s)$ (4.6), para a qual queremos encontrar os zeros, é muito complicada e, portanto, é preciso empregar um método numérico para encontrar seus pólos.

O método, proposto por Newton e aprimorado por Raphson, é usado para encontrar numericamente as soluções das equações do tipo $f(x) = 0$, em que $f(x)$ deve ser uma função analítica em intervalos definidos e necessariamente derivável. O método de Newton é capaz de encontrar a n -ésima raiz (ou zero) desta função $f(x)$.

A descrição geométrica do método consiste em traçar a reta tangente da função em um ponto inicial $(x_0, f(x_0))$ e encontrar o cruzamento dessa reta tangente com a abscissa. Então, a partir deste novo ponto, x_1 , traça-se uma nova reta tangente em $f(x_1)$ e encontra-se o novo ponto de cruzamento com a abscissa. Essa estrutura se repete sucessivamente até encontrar a raiz. Esse procedimento pode ser visualizado na figura D.1, em que x_2 já está muito próximo da raiz.

Figura D.1: As três primeiras iterações do método de Newton.

É evidente que não podemos ter soluções gráficas para encontrar todos os zeros de funções, precisamos traduzir essa idéia em estruturas numéricas.

A partir da definição da reta tangente, temos

$$f'(z_i) = \frac{f(z_i) - f(z_{i+1})}{z_i - z_{i+1}}, \quad (\text{D.1})$$

quando z_{i+1} for a raiz, a função neste ponto é nula e encontramos a relação de recorrência do método de Newton

$$f'(z_i) = \frac{f(z_i) - 0}{z_i - z_{i+1}} \Rightarrow z_{i+1} = z_i - \frac{f(z_i)}{f'(z_i)}. \quad (\text{D.2})$$

A relação de recorrência define a raiz da função z_{i+1} , mas a precisão numérica desta raiz dependerá do passo (h) e da condição de parada do programa.

É preciso ter cautela ao definir a derivada da função. Tradicionalmente ela é dada por

$$f'(z) \simeq \frac{f(z+h) - f(z)}{h}; \quad (\text{D.3})$$

em que h é o passo infinitesimal, $h \ll z$. No entanto, como h é muito pequeno, o programa numérico pode ter dificuldades para calcular a derivada. Para evitar esse problema, utilizamos uma estrutura equivalente

$$f'(z) \simeq \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h}. \quad (\text{D.4})$$

O método de Newton não define o número de zeros existentes na função, apenas encontra um ponto, tão preciso quanto for definido pelo programa numérico, a partir de uma condição inicial z_0 . A convergência do método exige que o ponto inicial seja próximo à raiz.

Desenvolvemos um programa em linguagem C que coloca em prática o algoritmo discutido acima. Como pontos iniciais escolhemos as raízes do polinômio quártico, $x(m_R, ed)$. Em muitos casos, mesmo com condições iniciais distintas o programa converge para a mesma raiz. Mas, os pólos físicos sempre são encontrados.

Para $G(zi, m_R, ed)$, a função que queremos obter os pólos; $Dg(zi, h, m_R, ed)$, a derivada da função G definida segundo (D.4); h o passo do programa e a condição de parada definida como $|z_{pi} - z_i| > |h|$, reproduzimos o algoritmo usado para obter o primeiro pólo a partir da relação de recorrência (D.2).

```

//PRIMEIRO POLO

complex double h    = 0.00001 + 0.00001i;
double m_R          = 1.2;

z01 = x1(m_R, ed);
zi   = z01;
Zpi  = zi - G(zi, m_R, ed)/Dg(zi, h, m_R, ed);
modi = sqrt(creal(Zpi - zi) * creal(Zpi - zi) + cimag(Zpi - zi) * cimag(Zpi - zi));
mod0 = sqrt(creal(h) * creal(h) + cimag(h) * cimag(h));

while(modi > mod0){
    zi = Zpi;
    Zpi = zi - G(zi, m_R, ed)/Dg(zi, h, m_R, ed);
    modi = sqrt(creal(Zpi - zi) * creal(Zpi - zi) + cimag(Zpi - zi) * cimag(Zpi - zi));
}

```

(D.5)

A convergência do programa é muito rápida, algumas frações de segundo, e os resultados podem ser vistos nos gráficos da seção 4.6. O único problema que o programa apresenta ocorre em torno da região em que uma das raízes diverge devido à condição imposta pelo parâmetro A^1 . Nesse ponto, a derivada da função $D(s)$ não pode ser definida e o programa pára de emitir resultados. O problema foi solucionado contornando o ponto da divergência.

¹Ver mais detalhes no capítulo 4

Apêndice E

Artigos e preprints

- **Elastic $K\pi$ amplitude: a simple model Scalar resonances**

autores: P. C. Magalhães e M. R. Robilotta.

preprint: arXiv:0808.3594 [hep-ph]

- **Decay $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$: chiral symmetry and scalar resonances**

autores: D. R. Boito, P. C. Magalhães, M. R. Robilotta, G. R. S. Zarnauskas

preprint: arXiv:0805.4803 [hep-ph]

- **The $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ process in 3H and 3He photodisintegration**

autores: D. R. Boito, P. C. Magalhães, M. R. Robilotta, G. R. S. Zarnauskas.

publicação: Int. Jour. Mod. Phys. **E16**, 2902 (2007);

Proceeding da X Hadron Physics.

- **Unitarized amplitude for two coupled scalar resonances**

autores: P. C. Magalhães, M. R. Robilotta.

publicação: AIP conference Proceedings **1030**, 416 (2008);

Proceeding da SACADRON70 -Workshop of Scalars mesons and related topics.

Referências Bibliográficas

- [1] D. Aston et al., Nucl. Phys. **B296**, 493 (1988).
- [2] P. Estabrooks et al., Nucl. Phys. **B133**, 490 (1978).
- [3] P. Estabrooks, Phys. Rev. **D19**, 2678 (1979).
- [4] A. A. B. Machado, *Estudo da Amplitude $K\pi$ em onda-S usando o decaimento $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$* (Dissertação de Mestrado CBPF - não publicado, 2007).
- [5] D. R. Boito, P. C. Magalhaes, M. R. Robilotta, and G. R. S. Zarnauskas (2008), [hep-ph/0805.4803](#).
- [6] N. A. Tornqvist, Phys. Rev. Lett. **49**, 624 (1982).
- [7] E. M. Aitala et al. (E791), Phys. Rev. Lett. **86**, 770 (2001), [hep-ex/0007028](#).
- [8] E. M. Aitala et al. (E791), Phys. Rev. Lett. **89**, 121801 (2002), [hep-ex/0204018](#).
- [9] H. Leutwyler, AIP Conf. Proc. **1030**, 46 (2008), [hep-ph/0804.3182](#).
- [10] D. Morgan, Phys. Lett. **B51**, 71 (1974).
- [11] E. van Beveren, F. Kleefeld, and G. Rupp, AIP Conf. Proc. **814**, 143 (2006), [hep-ph/0510120](#).
- [12] E. M. Aitala et al. (E791), Phys. Rev. **D73**, 059901 (2006).
- [13] J. M. Link et al. (FOCUS), Phys. Lett. **B653**, 1 (2007), [hep-ex/0705.2248](#).
- [14] M. Ablikim et al. (BES), Phys. Lett. **B633**, 681 (2006), [hep-ex/0506055](#).
- [15] R. H. Dalitz, Phil. Mag. **44**, 1068 (1953).
- [16] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [17] G. Zweig (1964), cERN-TH-401.

- [18] S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **B622**, 207 (2005), [hep-ph/0504116](#).
- [19] S. Gasiorowicz and D. A. Geffen, Rev. Mod. Phys. **41**, 531 (1969).
- [20] C. Amsler (Particle Data Group), Physics Letters **B667**, 1 (2008).
- [21] W. M. Yao et al. (Particle Data Group), J. Phys. **G33**, 1 (2006).
- [22] T. Cheng and L. Li, *Gauge theory of elementary particle physics* (Oxford, 1994).
- [23] M. R. Robilotta, *Notas de aula do curso Física de Hádrons* (Não publicado, 1990).
- [24] G. Zarnauskas, *Termos σ do núcleon e da Δ* (Dissertação de Mestrado IFUSP - não publicado, 2006).
- [25] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B250**, 517 (1985).
- [26] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, and E. de Rafael, Nucl. Phys. **B321**, 311 (1989).
- [27] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Westview Press, 1995).
- [28] M. Jamin, J. A. Oller, and A. Pich, Nucl. Phys. **B587**, 331 (2000), [hep-ph/0006045](#).
- [29] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
- [30] J. A. Oller and E. Oset, Nucl. Phys. **A620**, 438 (1997), [hep-ph/9702314](#).
- [31] S. Descotes-Genon and B. Moussallam, Eur. Phys. J. **C48**, 553 (2006), [hep-ph/0607133](#).
- [32] D. Black, A. H. Fariborz, S. Moussa, S. Nasri, and J. Schechter, Phys. Rev. **D64**, 014031 (2001), [hep-ph/0012278](#).
- [33] N. N. Achasov and G. N. Shestakov, Phy. Rev. **D49**, 5779 (1994).
- [34] G. Bonvicini et al. (CLEO) (2008), [0802.4214](#).
- [35] I. Caprini, G. Colangelo, and H. Leutwyler, Phys. Rev. Lett. **96**, 132001 (2006), [hep-ph/0512364](#).
- [36] P. Estabrooks et al., AIP Conf. Proc. **13**, 37 (1973).
- [37] R. L. Jaffe, Phys. Rev. **D15**, 281 (1977).
- [38] R. L. Jaffe and F. E. Low, Phys. Rev. **D19**, 2105 (1979).
- [39] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, Phys. Rev. **D10**, 2599 (1974).

- [40] T. A. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, and J. E. Kiskis, Phys. Rev. **D12**, 2060 (1975).
- [41] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf, Phys. Rev. **D9**, 3471 (1974).
- [42] M. D. Scadron, Phys. Rev. **D26**, 239 (1982).
- [43] R. Delbourgo and M. D. Scadron, Int. J. Mod. Phys. **A13**, 657 (1998), hep-ph/9807504.
- [44] P. D. Group, Rev. Mod. Phys. **52**, S1 (1980).
- [45] N. A. Tornqvist, Z. Phys. **C68**, 647 (1995), hep-ph/9504372.
- [46] E. van Beveren et al., Z. Phys. **C30**, 615 (1986), 0710.4067.
- [47] E. van Beveren, G. Rupp, N. Petropoulos, and F. Kleefeld, AIP Conf. Proc. **660**, 353 (2003), hep-ph/0211411.
- [48] E. van Beveren, D. V. Bugg, F. Kleefeld, and G. Rupp, Phys. Lett. **B641**, 265 (2006), hep-ph/0606022.
- [49] K. Yamada, S. Ishida, R. Oda, M. Sekiguchi, and H. Wada (1997), prepared for 7th International Conference on Hadron Spectroscopy (Hadron 97), Upton, NY, 25-30 Aug 1997.
- [50] S. Ishida, T. Ishida, M. Ishida, K. Takamatsu, and T. Tsuru, Prog. Theor. Phys. **98**, 1005 (1997).
- [51] D. Black, A. H. Fariborz, F. Sannino, and J. Schechter, Phys. Rev. **D59**, 074026 (1999), hep-ph/9808415.
- [52] D. Black, A. H. Fariborz, F. Sannino, and J. Schechter, Phys. Rev. **D58**, 054012 (1998), hep-ph/9804273.
- [53] D. Black, A. H. Fariborz, and J. Schechter, Phys. Rev. **D61**, 074030 (2000), hep-ph/9910351.
- [54] U.-G. Meissner and J. A. Oller, Nucl. Phys. **B 357**, 129 (1991).
- [55] J. A. Oller and E. Oset, Phys. Rev. **D60**, 074023 (1999), hep-ph/9809337.
- [56] S. N. Cherry and M. R. Pennington, Nucl. Phys. **A688**, 823 (2001).
- [57] A. Nogova, J. Pisut, and P. Presnajder, Nucl. Phys. **B61**, 438 (1973).

- [58] D. V. Bugg, Phys. Lett. **B572**, 1 (2003).
- [59] D. V. Bugg, AIP Conf. Proc. **814**, 78 (2006), [hep-ex/0510021](#).
- [60] D. V. Bugg, Eur. Phys. J. **A25**, 107 (2005), [hep-ex/0510026](#).
- [61] N. Wu (2003), prepared for KEK Workshop on Hadron Spectroscopy and Chiral Particle Search in J/ψ Decay Data at BES, Tsukuba, Japan, 28 Feb - 1 Mar 2003.
- [62] J. R. Pelaez, Phys. Rev. Lett. **92**, 102001 (2004), [hep-ph/0309292](#).
- [63] J. R. Pelaez, Mod. Phys. Lett. **A19**, 2879 (2004), [hep-ph/0411107](#).
- [64] A. G. Nicola and J. R. Pelaez, Phys.Rev. **D 65**, 054009 (2002), .
- [65] P. Buettiker, S. Descotes-Genon, and B. Moussallam, Eur. Phys. J. **C33**, 409 (2004), [hep-ph/0310283](#).
- [66] Z. Y. Zhou and H. Q. Zheng, Nucl. Phys. **A775**, 212 (2006), [hep-ph/0603062](#).
- [67] H. Q. Zheng et al., Nucl. Phys. **A733**, 235 (2004), [hep-ph/0310293](#).
- [68] W. MathWorld, *site de algoritmos matemáticos*. (<http://mathworld.wolfram.com>, 2008).
- [69] M. R. Spiegel, *Algoritmos matemáticos* (Coleção Schãum, 1980).
- [70] G. Rupp, *Spectra and decay properties of pseudo-scalar and vector mesons in a multichannels quark model*. (Dissertação de Doutorado - não publicado, 1983).