UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
**Instituto de Física**

# Aspectos da Correspondência AdS/CFT



**Pablo Sebastián Minces**

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Ciências.

*Orientador*:
**Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles**

**Comissão Examinadora:**
Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles (orientador)
Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IFUSP)
Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IFUSP)
Prof. Dr. Abraham Hirsz Zimerman (IFT/UNESP)
Prof. Dr. João Barcelos Neto (UFRJ)

**São Paulo**
**2001**

**FICHA CATALOGRÁFICA**
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Minces, Pablo Sebastian

Aspectos da Correspondência ADS/CFT.
São Paulo, 2001.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares

Unitermos: 1. Correspondência ADS/CFT;
2. Teoria de Cordas;
3. Teorias Conformes.

USP/IF/SBI-048/2001

# RESUMO

Fazemos uma análise das teorias de campos escalar e vetorial na correspondência AdS/CFT. Começamos apresentando as propriedades básicas das teorias conformes e dos espaços AdS. Então, estudamos em detalhe os problemas da estabilidade e quantização do campo escalar acoplado com espaços assintóticamente AdS, seguindo o trabalho de Breitenlohner e Freedman [1]. Mostramos que existem dois tipos de modos normalizáveis: os "regulares" e os "irregulares". No caso dos modos "'regulares", a energia é positiva e finita para qualquer valor do coeficiente de acoplamento do campo com o fundo e para massa do campo satisfazendo o vínculo $m^2 > -d^2/4$, onde $d+1$ é a dimensão do espaço-tempo. No caso dos modos "irregulares", a energia é positiva e finita para $-d^2/4 < m^2 < 1 - d^2/4$ e para valores particulares do coeficiente de acoplamento do campo com o fundo. A seguir estudamos o problema de reproduzir esses resultados na correspondência AdS/CFT. Trabalhamos com ações estacionárias perante condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas, onde as últimas fixam na borda do espaço AdS o valor de combinações lineares do campo e sua derivada normal. Mostramos que os resultados são consistentes com a condição de unitariedade do campo escalar, que o formalismo fixa a normalização das ações na borda, e que são reproduzidas as teorias conformes correspondentes às condições "regulares" e "irregulares". Finalmente, consideramos teorias de campo vetorial em três dimensões e contendo um termo de Chern-Simons. Encontramos as funções de dois pontos na borda correspondentes às teorias de Proca-Chern-Simons e Maxwell-Chern-Simons. No caso do modelo Auto-Dual, adicionamos um termo de superfície que faz com que a ação seja estacionária, e que fornece funções de dois pontos na borda que são consistentes com a equivalência do modelo Auto-Dual com a teoria de Maxwell-Chern-Simons.

# ABSTRACT

We consider scalar and vector field theories in the AdS/CFT correspondence. We begin by describing conformal field theories and AdS spaces. Then, we follow the work by Breitenlohner and Freedman [1] and study in detail the problems of stability and quantization of a scalar field coupled to an asymptotically AdS space. We show that there exist two different kinds of normalizable modes, namely the 'regular' and the 'irregular' ones. In the case of the 'regular' modes the energy is positive and finite for any value of the coupling coefficient between the field and the background and for $m^2 > -d^2/4$ where $m$ is the mass of the scalar field and $d+1$ is the dimension of the space-time. In the case of the 'irregular' modes the energy is positive and finite for $-d^2/4 < m^2 < 1-d^2/4$ and for particular values of the coupling coefficient between the field and the background. Then, we consider the problem of reproduzing these results in the AdS/CFT correspondence context. We analize actions which are stationary under Dirichlet, Neumann and mixed boundary conditions on the field where the mixed boundary conditions are a combination of the Dirichlet and Neumann ones. We show that our results are consistent with the unitarity bound for the scalar field, that the formalism fixes the normalization of the actions at the boundary and that we reproduce the conformal field theories corresponding to the 'regular' and 'irregular' conditions. Finally, we consider vector field theories in three dimensional AdS spaces and including a Chern-Simons term. We find the boundary two-point functions corresponding to the Proca-Chern-Simons and Maxwell-Chern-Simons theories. In the case of the Self-Dual model we add a surface term which makes the action stationary and which gives rise to boundary two-point functions which are consistent with the equivalence between the Self-Dual model and the Maxwell-Chern-Simons theory.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuiram para a realização deste trabalho. Em especial

- Ao Prof. Rivelles, pela minha aceitação no programa de doutoramento, pela proposta deste trabalho, e pela orientação, participação e presença na sugestão e esclarecimento de aspectos teóricos da minha pesquisa.

- A Cedric Rocha Leão, Luciano Barosi de Lemos, Takeshi Osada, João Carlos Frederico, Wilson Pereira do Sacramento e Sérgio Soares Da Silva Paima, pela ajuda prestada em diversas circunstâncias, envolvendo correção de erros de português, utilização dos computadores, e leitura de partes deste trabalho.

- Ao Prof. Nathan Berkovits, os participantes do Journal Club em Cordas e os colegas do IFT, por discusões.

- A Carmen Núñez, pela ajuda para vir para o Brasil.

- Ao Brasil, pela oportunidade de continuar meus estudos.

- Ao meu pai.

- A CAPES, pelo apoio financeiro.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

No início dos anos '80 existia na comunidade científica a esperança de que as teorias de supergravidade solucionassem o antigo problema da unificação da matéria e gravidade. Os espaços de Anti-de Sitter (AdS) foram considerados o fundo natural para elas, e foi nesse contexto que estudaram-se os problemas da estabilidade de teorias de campo em espaços AdS e a quantização das mesmas [1][2][3][4][5]. Os espaços AdS tem simetria máxima e curvatura negativa, e neles a simetria de Poincaré do espaço plano é substituida pela simetria $\mathbf{SO}(2,d)$, onde $d+1$ é a dimensão do espaço. Eles tem algumas características importantes. Uma delas é a existência de uma borda no infinito espacial. Uma outra é que um raio de luz que sai da origem atinge o infinito espacial num tempo finito, o que em princípio faz com que a informação possa entrar e sair do espaço pela borda, e que o problema de Cauchy não esteja bem definido. Na busca de uma quantização consistente dos campos de matéria em AdS, mostrou-se em [1][3][4] que a falta de uma hipersuperfície de Cauchy pôde ser solucionada perante a imposição de condições de contorno apropriadas, isto é, a entrada e saída de informação pela borda de AdS é evitada impondo condições de contorno que anulam o fluxo das correntes conservadas da teoria.

No caso do campo escalar em AdS mostrou-se que para teorias que satisfazem a condição de Breitenlohner-Freedman,

$$m^2 > -\frac{d^2}{4}, \tag{1.1}$$

onde $m$ é a massa do campo escalar e o raio de AdS é igual a um, a energia é positiva, e então a teoria é estável [1]. Note que na verdade a massa $m$ é uma massa efetiva, pois nos espaços curvos o acoplamento do campo com a métrica introduz uma mudança no termo massivo da Lagrangiana. O resultado Eq.(1.1) mostra que nos espaços AdS uma teoria com o quadrado da massa negativo pode mesmo assim ser estável, sempre que o valor absoluto da massa não seja grande demais. Breitenlohner e Freedman mostraram também a existência de dois tipos de modos nas flutuações do campo escalar: os "regulares" e os "irregulares", os quais diferem no comportamento assintótico. Eles também mostraram que enquanto que os modos "regulares" estão presentes para qualquer valor da massa satisfazendo a condição Eq.(1.1), os modos "irregulares" aparecem só nos casos nos quais a massa também cumpre

$$m^2 < 1 - \frac{d^2}{4} , \tag{1.2}$$

e o coeficiente do acoplamento do campo escalar com o fundo tem certos valores particulares (vide também [5]).

O interesse pelos espaços AdS caiu após a confirmação da não renormalizabilidade das teorias de supergravidade, mas nunca ficou completamente extinto. É sabido que as teorias com invariancia conforme, isto é, invariantes perante transformações que mudam a métrica por um fator de escala, tem um tensor de energia-momento clássico de traço nulo (vide por exemplo [6]). A quantização dá origem a uma anomalia de traço, que no caso particular do espaço curvo em duas dimensões é da forma

$$< T^\mu_\mu >= \frac{c}{24\pi} R , \tag{1.3}$$

onde $R$ é o escalar de Ricci e $c$ é chamada de carga central. As cargas centrais também aparecem nas teorias conformes formuladas em espaços planos (vide por exemplo [7]). Em 1986, Brown e Henneaux mostraram que no caso de espaços assintoticamente AdS, em três dimensões, a simetria assintótica é o grupo conforme em duas dimensões [8]. Eles também mostraram que esta simetria é realizada pela álgebra dos colchetes de Poisson dos geradores, com a extensão central

$$c = \frac{3l}{2G} , \tag{1.4}$$

onde $l$ esta relacionada com a constante cosmológica $\Lambda$ por $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$ , e $G$ é a constante de Newton.

Uma outra descoberta importante está relacionada com a entropia de Bekenstein-Hawking do buraco negro [9][10][11][12]

$$S_{BH} = \frac{A}{4G\hbar} , \tag{1.5}$$

onde $A$ é a área do horizonte de eventos do buraco negro, e com o buraco negro BTZ [13][14], que é uma solução de buraco negro para as equações de Einstein-Maxwell num espaço em três dimensões e com constante cosmológica negativa, e que é utilizado para construir modelos realistas das propriedades físicas de buracos negros em espaços em quatro ou mais dimensões. Dez anos depois do trabalho de Brown e Henneaux, Strominger [15] valeu-se da fórmula de Cardy, pela qual numa teoria conforme é possível calcular a densidade de estados a partir da carga central [16], para fazer uma importante descoberta ao estabelecer a igualdade da entropia de $S_{BH}$ do buraco negro BTZ com a entropia obtida a partir da carga central Eq.(1.4).

Mas o auge do estudo das teorias formuladas em espaços AdS sobreveio a partir do trabalho de Maldacena [17], o qual conjetura a existência de uma dualidade entre teorias de supercordas ou de supergravidade em espaços $AdS_{d+1}$, e teorias de gauge conformes morando na borda em $d$ dimensões. A teoria de supercordas é a única teoria sem divergências capaz de unificar gravidade e matéria. Nela, as oscilações das cordas dão origem às partículas fundamentais (para um estudo da teoria de supercordas, vide por exemplo [18][19]). As cordas podem ser abertas ou fechadas. Existem várias teorias de supercordas: a do tipo I contém cordas abertas e fechadas, as dos tipos IIA e IIB contém cordas fechadas, e também abertas a través das D-branas (que são as superfícies nas quais se deslocam os extremos das cordas abertas). Existem também as chamadas cordas heteróticas. Todas essas teorias são relacionadas umas com as outras perante dualidades. A descoberta dessas dualidades originou a conjetura de que todas as teorias de cordas provém de uma única teoria mais fundamental, chamada de teoria M.

Maldacena baseou-se nos fatos da métrica de uma D3-brana tornar-se a de $AdS_5 \times S^5$ no limite de horizonte próximo, e da teoria de cordas do tipo IIB compactificada em $AdS_5 \times S^5$ ter as mesmas simetrias do que a teoria de super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$ (para detalhes vide por exemplo [20]), para fazer a conjetura de que uma teoria de super Yang–Mills $\mathcal{N} = 4$ em quatro dimensões com grupo de gauge $\mathbf{SU}(N)$ e constante de acoplamento $g_{YM}$ é equivalente a uma teoria de supercordas do tipo IIB num espaço $AdS_5 \times S^5$ com constante de acoplamento proporcional a $g_{YM}^2$ e raio de curvatura $(g_{YM}^2 N)^{1/4}$. De forma mais geral, a conjetura de Maldacena, usualmente chamada de conjetura AdS/CFT, sugere que uma teoria de gauge conforme com grupo $\mathbf{SU}(N)$ em $d$ dimensões, no limite em que $N$ é muito grande, é governada por uma teoria de supercordas ou pela teoria M num fundo $AdS_{d+1} \times M_{D-d-1}$, onde $M_{D-d-1}$ é um espaço compacto de dimensão $D - d - 1$. Na conjetura AdS/CFT, o espaço no qual mora a teoria de gauge conforme é entendido como a borda de $AdS_{d+1}$ . Levando em conta que a teoria em $AdS_{d+1}$ é uma teoria de supergravidade, a conjetura de Maldacena pode ser entendida como uma realização do princípio holográfico [21][22], segundo o qual uma região macroscópica do espaço (e tudo que nela mora) pode ser representada por uma teoria na borda dessa região. Ela é também a primeira evidência forte de que uma teoria de supergravidade emerge de uma teoria de gauge.

A prescrição da forma precisa na qual uma teoria deve ser mapeada na outra foi dada em [23][24]. Ela estabelece que o limite assintótico da função de partição formada a partir da ação efetiva da teoria no bulk é o funcional gerador para as funções de correlação da teoria conforme na borda. Então

$$Z_{AdS}[\phi_0] = \int_{\phi_0} \mathcal{D}\phi \, \exp\left(-I[\phi]\right) \equiv Z_{CFT}[\phi_0] = \left\langle \exp\left(\int_{\partial\Omega} d^d x \mathcal{O}\phi_0\right)\right\rangle , \tag{1.6}$$

onde $\phi_0$ é o valor assintótico do campo no bulk o qual acopla com o operador conforme na borda $\mathcal{O}$. Então, em ordem mais baixa, a função de $n$ pontos na teoria conforme $d-$dimensional é obtida a partir do valor assintótico da ação da teoria no bulk através de

$$< \mathcal{O}_1 \cdots \mathcal{O}_n > \sim \frac{\delta}{\delta\phi_1} \cdots \frac{\delta}{\delta\phi_n} I[\phi_1, \cdots, \phi_n] , \tag{1.7}$$

onde o campo $\phi_i$ no bulk corresponde ao operador $\mathcal{O}_i$ na borda. Fazendo uso desta prescrição, a correspondência AdS/CFT foi estudada para os campos escalar [23][25][26][27], espinorial [28][29][30][31], vetorial [23][25][29][32][33] e de Rarita-Schwinger [34][35][36], e também para o gráviton [37][38], o tensor simétrico massivo [39] e a $p$-forma anti-simétrica [40][41].

O vínculo entre a conjetura AdS/CFT e o antigo trabalho de Breitenlohner e Freedman [1][4] foi estabelecido na proposta de [42], que distingue dois tipos de flutuações do campo escalar em AdS: as flutuações normalizáveis, que descrevem o espaço de Hilbert dos estados físicos e são os modos estudados em [1][4], e as flutuações não normalizáveis, as quais acoplam-se aos operadores da teoria conforme na borda perante a prescrição Eq.(1.6). Mais tarde, Klebanov e Witten [43] chamaram a atenção para o fato da prescrição Eq.(1.6) não conseguir reproduzir a teoria conforme na borda correspondente às condições "irregulares" de [1][4]. Fizeram, então, a proposta de que o funcional gerador para essa teoria conforme podia ser obtido a partir do funcional gerador correspondente às condições "regulares" perante uma transformação de Legendre.

Numa teoria covariante, não faz sentido atribuir uma densidade de energia-momento local ao campo gravitacional. Alternativamente, Brown e York propuseram utilizar o "tensor de energia-momento quase-local", que é definido na borda de uma determinada região do espaço [44]. O problema com esta definição é que o tensor quase-local diverge quando a borda é levada até infinito. No entanto, no caso dos espaços assintóticamente AdS, Balasubramanian e Kraus [45] fizeram a proposta de que o tensor quase-local de Brown e York fornece, no limite assintótico, o valor esperado do tensor de energia-momento da teoria conforme na borda de AdS. Nesse formalismo, as divergências que aparecem quando a borda é levada até infinito são entendidas como as divergências ultravioletas usuais de uma teoria de campos quântica, e podem ser removidas perante a adição de termos de superfície à ação, os quais são chamados de contratermos. Nesta construção, também é utilizado o termo de superfície de Gibbons-Hawking [46], que faz com que a ação de Hilbert seja estacionária perante transformações na métrica que a deixam fixa na borda. Fazendo uso deste formalismo, Balasubramanian e Kraus conseguiram reproduzir a carga central de Brown e Henneaux Eq.(1.4). Eles também encontraram uma energia do estado fundamental não nula a qual iguala a energia de Casimir da teoria de super Yang-Mills dual na borda. Outros trabalhos que aprofundaram nesta linha de pesquisa são [47][48][49]. Na presença de matéria, os termos de superfície que fazem com que a ação seja estacionária perante transformações no campo foram mostrados nos casos do campo espinorial [30] e do modelo Auto-Dual [32] como sendo os que fornecem, na borda, o funcional gerador utilizado na prescrição Eq.(1.6).

Uma das motivações do presente trabalho é a existência de algumas objeções que podem ser feitas ao formalismo da transformação de Legendre desenvolvido em [43]. Uma delas é que a mencionada transformação pode ser feita para quaisquer valores da massa do campo escalar, e assim não seria possível reproduzir, na correspondência AdS/CFT, o vínculo Eq.(1.2). No entanto, se a teoria conforme na borda é dual à teoria no bulk então deveria conter toda a informação sobre ela, e, em particular, no caso do campo escalar devemos exigir que a prescrição que mapeia uma teoria na outra deve reproduzir, no caso das condições "irregulares", os valores particulares da massa que correspondem a modos normalizáveis. Uma outra objeção, é que a transformação de Legendre não fornece o resultado correto no caso particular de $m^2 = -\frac{d^2}{4}$. Finalmente, mencionamos que a transformação de Legendre não fixa a normalizacão da ação que gera a teoria conforme correspondente às condições "irregulares". Levando tudo isto em conta, nesta tese sugerimos que a prescrição Eq.(1.6) deve ser estendida para incluir como fontes da teoria na borda não só o valor do campo escalar na borda, mas também os valores na borda da sua derivada normal e de combinações lineares arbitrárias do campo e da sua derivada normal. Isto corresponde a condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas respectivamente. Neste trabalho encontraremos os termos de superfície que perante transformações infinitesimais no campo escalar fazem com que a ação seja estacionária para cada uma das condições de contorno. Fazendo uso das extensões da prescrição Eq.(1.6) às diversas condições de contorno, mostraremos que todos os resultados são consistentes com a condição de unitariedade do campo escalar, que o formalismo fixa as normalizações das ações na borda, e que são reproduzidas naturalmente as teorias conformes na borda correspondentes tanto às condições "regulares" quanto às "irregulares". Também mostraremos que no caso das condições "irregulares" o formalismo implica o vínculo Eq.(1.2).

No caso do campo vetorial iremos estudar teorias em três dimensões e incluindo um termo de Chern-Simons. Tomando os limites apropriados encontraremos as funções de dois pontos na borda correspondentes às teorias de Proca-Chern-Simons (na qual a ação contém o termo cinético, o termo massivo e o termo de Chern-Simons) e Maxwell-Chern-Simons [50] (onde a ação não contém o termo massivo). No caso do modelo Auto-Dual [51] a ação contém só os termos massivo e de Chern-Simons, é de primeira ordem e anula-se na camada de massa. Como acontece com o campo espinorial [30] o principio variacional exige adicionar um termo de superfície à ação que faz com que ela seja estacionária. Mostraremos que esse termo de superfície fornece o funcional gerador para a teoria conforme na borda, e que os nossos ressultados são consistentes com a equivalência do modelo Auto-Dual com a teoria de Maxwell-Chern-Simons [52] (equivalência que clássicamente pode ser mostrada, por exemplo, verificando que as duas ações implicam as mesmas equações de movimento).

A tese é organizada como segue. O Capítulo 2 desenvolve o formalismo básico necessário para se estudar a correspondência AdS/CFT, e que compreende as teorias conformes e os espaços AdS. No Capítulo 3, estudamos a estabilidade e quantização das flutuações do campo escalar em AdS em quatro ou mais dimensões, seguindo o formalismo de Breitenlohner-Freedman [1][4] para quatro dimensões, e a extensão para quatro ou mais dimensões de Mezincescu e Townsend [5]. Esclarecemos algums pontos obscuros e mostramos algums resultados originais. No Capítulo 4 estudamos a correspondência AdS/CFT para os campos escalar e vetorial. A maior parte desse capítulo baseia-se nas referências [27][32]. No Capítulo 5 apresentamos as nossas Conclusões. No Apêndice A fazemos um resumo das funções de dois pontos obtidas para o caso do campo escalar, e no Apêndice B apresentamos algumas fórmulas úteis. No Apêndice C estudamos a estabilidade e quantização do campo escalar em espaços AdS em duas e três dimensões. O caso em duas dimensões baseia-se principalmente em [53], mas também mostramos algums resultados originais.

# Capítulo 2

# O Formalismo Básico

## 2.1 Teorias Conformes em Dimensão Arbitrária

Esta seção baseia-se em [7], e nela iremos estudar as propriedades mais importantes das teorias conformes em dimensão arbitrária, tendo como objetivo situar o contexto no qual se desenvolve a conjetura AdS/CFT. O resultado mais importante desta seção será estabelecer a forma exigida pela invariancia conforme para as funções de dois pontos, pois esse resultado será utilizado no Capítulo 4 para testar a prescrição Eq.(1.6).

Consideramos o espaço plano em $d$ dimensões com métrica de Minkowski de signatura

$$g_{\mu\nu} = diag(-1, 1, \cdots, 1). \tag{2.1}$$

Então definimos o grupo conforme como o subgrupo de transformações de coordenadas que deixam a métrica invariante a menos de uma mudança de escala

$$g_{\mu\nu}(x) \to g'_{\mu\nu}(x') = e^{\omega(x)} g_{\mu\nu}(x). \tag{2.2}$$

É fácil mostrar que estas transformações preservam o ângulo entre vetores. Em particular o grupo de isometrias do espaço plano, o grupo de Poincaré, é um subgrupo do grupo conforme.

Tendo como objetivo obter os geradores infinitesimais do grupo conforme consideramos uma transformação de coordenadas infinitesimal

$$x^\mu \to x^\mu + \epsilon^\mu, \tag{2.3}$$

perante a qual a métrica muda

$$g^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} , \tag{2.4}$$

onde

$$\delta g^{\mu\nu} = \partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu. \tag{2.5}$$

A condição da transformação Eq.(2.3) ser uma transformação conforme escreve-se

$$\omega g^{\mu\nu} = -\partial^\mu \epsilon^\nu - \partial^\nu \epsilon^\mu. \tag{2.6}$$

Contraindo com $g_{\mu\nu}$ obtemos

$$\omega = -\frac{2}{d}\, \partial_\mu \epsilon^\mu. \tag{2.7}$$

Das Eqs.(2.6,2.7) encontramos o seguinte resultado

$$\frac{2}{d}\, g^{\mu\nu} \partial_\alpha \epsilon^\alpha = \partial^\mu \epsilon^\nu + \partial^\nu \epsilon^\mu\ . \tag{2.8}$$

Após algumas contas finalmente obtemos

$$\left[g_{\mu\nu} \partial_\alpha \partial^\alpha + (d-2)\partial_\mu \partial_\nu\right] \partial_\beta \epsilon^\beta = 0. \tag{2.9}$$

Partindo das Eqs.(2.8,2.9) é possivel provar que para $d > 2$ temos

$$\partial_\alpha \partial_\beta \partial_\nu \epsilon^\mu = 0. \tag{2.10}$$

Então no caso de $d > 2$ temos que $\epsilon$ é no máximo de ordem dois em $x$. As possibilidades são

**i) Translações**

- Forma Infinitesimal

$$\epsilon^\mu = a^\mu = cte. \tag{2.11}$$

- Forma Finita

$$x' = x + a\ ; \quad a = cte. \tag{2.12}$$

**ii) Rotações**

- Forma Infinitesimal

$$\epsilon^\mu = w^\mu_{\ \nu} x^\nu\ ; \quad w_{\nu\mu} = -w_{\mu\nu}. \tag{2.13}$$

- Forma Finita

$$x' = \Lambda x \; ; \quad \Lambda^{\mu}_{\ \nu} \in \mathbf{SO}(1, d-1). \tag{2.14}$$

**iii) Transformações de Escala**

- Forma Infinitesimal

$$\epsilon^{\mu} = \lambda x^{\mu} \; ; \quad \lambda = cte. \tag{2.15}$$

- Forma Finita

$$x' = \lambda x \; ; \quad \lambda = cte. \tag{2.16}$$

**iv) Transformações Conformes Especiais**

- Forma Infinitesimal

$$\epsilon^{\mu} = b^{\mu} x^2 - 2x^{\mu} b_{\nu} x^{\nu} \; ; \quad b^{\mu} = cte. \tag{2.17}$$

- Forma Finita

$$x' = \frac{x + bx^2}{1 + 2b_{\mu}x^{\mu} + b^2 x^2} \; ; \quad b^{\mu} = cte. \tag{2.18}$$

Em particular as translações e rotações formam o grupo de Poincaré. É simples verificar que o número de geradores do grupo conforme é $\frac{1}{2}\, d(d+1)$. Temos $d$ geradores das translações, $d$ geradores das transformações conformes especiais, um gerador das transformações de escala, e $\frac{1}{2}\, d(d-1)$ geradores das rotações (número de componentes independentes de uma matriz antisimétrica de $d \times d$).

Perante a transformação $x \to x'$ a métrica transforma-se como

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \, g'_{\alpha\beta}(x'). \tag{2.19}$$

Então a mudança da métrica perante as transformações conformes é dada por

**i) Translações**

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x). \tag{2.20}$$

**ii) Rotações**

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x). \tag{2.21}$$

**iii) Transformações de Escala**

$$g'_{\mu\nu}(x') = \lambda^{-2} g_{\mu\nu}(x). \tag{2.22}$$

**iv) Transformações Conformes Especiais**

$$g'_{\mu\nu}(x') = (1 + 2b_\alpha x^\alpha + b^2 x^2)^2 \; g_{\mu\nu}(x), \tag{2.23}$$

e podemos conferir que todas estas transformações são da forma Eq.(2.2).

No caso de $d = 2$ a Eq.(2.8) equivale às condições de Cauchy-Riemann

$$\partial_1 \epsilon_1 = \partial_2 \epsilon_2 \qquad \partial_1 \epsilon_2 = -\partial_2 \epsilon_1, \tag{2.24}$$

e fazendo a transformação para coordenadas complexas independentes $z$ e $\bar{z}$ (holomorfa e antiholomorfa respectivamente)

$$(z, \bar{z}) = (x^1 + ix^2, x^1 - ix^2), \tag{2.25}$$

obtemos as funções analíticas

$$\epsilon(z) = \epsilon^1 + i\epsilon^2 \qquad \bar{\epsilon}(\bar{z}) = \epsilon^1 - i\epsilon^2, \tag{2.26}$$

e as transformações conformes igualam-se às transformações analíticas de coordenadas

$$z \rightarrow h(z) \qquad \bar{z} \rightarrow \bar{h}(\bar{z}), \tag{2.27}$$

onde $h$ e $\bar{h}$ são funções analíticas arbitrárias. Então qualquer função analítica gera uma transformação conforme e o grupo de simetria tem dimensão infinita.

Voltando ao caso de dimensão arbitrária, um campo $\phi(x)$ chama-se quase-primário se perante uma transformação conforme $x \rightarrow x'$ transforma-se como

$$\phi(x) \rightarrow J\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{\Delta}{d}} \phi(x'), \tag{2.28}$$

onde $J\left(\frac{x'}{x}\right)$ é o Jacobiano da transformação $x \rightarrow x'$ e $\Delta$ é a dimensão conforme do campo $\phi$. Perante as identidades de Ward todos os campos da teoria podem ser escritos em termos dos campos quase-conformes e suas derivadas. Numa teoria invariante conforme as funções de correlação transformam-se covariantemente como

$$< \phi_1(x_1) \cdots \phi_N(x_N) >= J\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{\Delta_1}{d}}_{x=x_1} \cdots \; J\left(\frac{x'}{x}\right)^{\frac{\Delta_N}{d}}_{x=x_N} < \phi_1(x'_1) \cdots \phi_N(x'_N) > . \tag{2.29}$$

Esta condição irá impor restrições à forma das funções de dois e três pontos. O Jacobiano das transformações conformes é dado por

i) **Translações**

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = 1. \tag{2.30}$$

ii) **Rotações**

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = 1. \tag{2.31}$$

iii) **Transformações de Escala**

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = \lambda^d\,. \tag{2.32}$$

iv) **Transformações Conformes Especiais**

$$J\left(\frac{x'}{x}\right) = (1 + 2b_\mu x^\mu + b^2 x^2)^{-d}\,. \tag{2.33}$$

Fazendo uso das Eqs.(2.29-2.33) estudaremos a seguir a forma das funções de dois e três pontos nas teorias conformes. Para isto irá sermos útil definir

$$x_{ij} = x_i - x_j \qquad (i,j = 1,\cdots,N;\ i \neq j)\,. \tag{2.34}$$

Perante uma translação devemos ter

$$< \phi_1(x_1)\cdots\phi_N(x_N) >=< \phi_1(x'_1)\cdots\phi_N(x'_N) >\,. \tag{2.35}$$

Então fazendo uso da Eq.(2.12) obtemos a condição

$$< \phi_1(x_1)\cdots\phi_N(x_N) >= f(x_{ij}). \tag{2.36}$$

Vamos analizar agora o caso das rotações. Para isto consideramos que os campos da teoria são escalares. Perante uma rotação devemos ter novamente a relação Eq.(2.35). Fazendo uso das Eqs.(2.14,2.36) obtemos a condição

$$< \phi_1(x_1)\cdots\phi_N(x_N) >= f(r_{ij}), \tag{2.37}$$

onde

$$r_{ij} =\mid x_{ij} \mid\,. \tag{2.38}$$

Adicionamos agora a condição de se ter invariancia perante as transformações de escala Eq.(2.16). Vamos considerar o caso das funções de dois pontos ($N = 2$) no qual a Eq.(2.37) fica

$$< \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) >= f(r_{12}). \tag{2.39}$$

Fazendo uso das Eqs.(2.16,2.29,2.32) para $N = 2$ obtemos

$$< \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) >= \lambda^{\Delta_1+\Delta_2} < \phi_1(\lambda x_1)\phi_2(\lambda x_2) > . \tag{2.40}$$

As Eqs.(2.39,2.40) implicam a condição

$$f(r_{12}) = \lambda^{\Delta_1+\Delta_2}\, f(\lambda r_{12}). \tag{2.41}$$

É facil verificar que a relação acima é satisfeita por

$$f(r_{12}) = \frac{C_{12}}{r_{12}^{\Delta_1+\Delta_2}}\,, \tag{2.42}$$

onde $C_{12}$ é um coeficiente arbitrário. Então fica

$$< \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) >= \frac{C_{12}}{r_{12}^{\Delta_1+\Delta_2}}\,. \tag{2.43}$$

Finalmente consideramos as transformações conformes especiais. Fazendo uso da Eq.(2.18) obtemos

$$r'^2_{12} = \frac{r^2_{12}}{(1 + 2b_\mu x_1^\mu + b^2 x_1^2)(1 + 2b_\nu x_2^\nu + b^2 x_2^2)}\,. \tag{2.44}$$

Fazendo uso das Eqs.(2.29,2.33,2.43,2.44) obtemos a condição

$$C_{12} r_{12}^{-(\Delta_1+\Delta_2)} = (1 + 2b_\mu x_1^\mu + b^2 x_1^2)^{\frac{1}{2}(\Delta_2-\Delta_1)}(1 + 2b_\nu x_2^\nu + b^2 x_2^2)^{\frac{1}{2}(\Delta_1-\Delta_2)} C_{12} r_{12}^{-(\Delta_1+\Delta_2)}\,. \tag{2.45}$$

No caso de $\Delta_1 = \Delta_2$ esta relação é satisfeita automáticamente. No caso de $\Delta_1 \neq \Delta_2$ só pode ser satisfeita se $C_{12} = 0$. Então a funcão de dois pontos finalmente fica

$$< \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) >= \frac{C_{12}}{r_{12}^{2\Delta}} \qquad (\Delta_1 = \Delta_2 \equiv \Delta), \tag{2.46}$$

$$< \phi_1(x_1)\phi_2(x_2) >= 0 \qquad (\Delta_1 \neq \Delta_2). \tag{2.47}$$

Assim a invariancia conforme fixa a forma da função de dois pontos a menos de um coeficiente que depende da normalização dos campos. A expresão Eq.(2.46) será de grande importância quando estudarmos a correspondência AdS/CFT.

Considerações análogas às utilizadas no caso da função de dois pontos implicam a seguinte forma para a função de três pontos

$$< \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3) >= \frac{C_{123}}{r_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3} r_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1} r_{13}^{\Delta_1+\Delta_3-\Delta_2}} \, . \tag{2.48}$$

Nos casos de $N > 3$ a forma das funções de $N$ pontos já não é completamente determinada pela invariancia conforme.

No caso de uma corrente conservada $J_i$ temos no lugar das Eqs.(2.46,2.47) a expressão

$$< J_i(\vec{x})J_j(\vec{y}) >= C \left[ \delta_{ij} - 2\, \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{\mid \vec{x}-\vec{y} \mid^2} \right] \mid \vec{x}-\vec{y} \mid^{-2\Delta} \, . \tag{2.49}$$

As Eqs.(2.46,2.49) irão ser muito utilizadas no Capítulo 4 sobre correspondência AdS/CFT.

## 2.2 Os Espaços de Anti-de Sitter

Nesta seção iremos estudar as características mais importantes dos espaços AdS sob um ponto de vista geométrico, deixando o estudo das teorias de campos em espaços AdS para os próximos capítulos.

Consideramos um espaço-tempo plano com dois tempos em $d+2$ dimensões descrito por uma métrica da forma

$$\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, \cdots, 1, -1). \tag{2.50}$$

O espaço $AdS_{d+1}$ em $d+1$ dimensões e de raio $\frac{1}{a}$ (com $a$ um coeficiente real positivo) é definido como o hiperbolóide

$$\eta_{\mu\nu} z^\mu z^\nu = -\frac{1}{a^2} \qquad (z^\mu \in \mathbf{R},\ \mu = 1, \cdots, d+2). \tag{2.51}$$

Por construção os espaços $AdS_{d+1}$ são invariantes por transformações de $\mathbf{SO}(2,\mathrm{d})$. Então eles são espaços de simetria máxima, isto é, eles tem o maior número possível de vetores de Killing (ou seja, $\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$ vetores independentes), os quais estão associados às isometrias do espaço.

Um conjunto possível de coordenadas descrevendo $AdS_{d+1}$ é o das coordenadas globais definidas por

$$az^0 = \frac{sen\ \tau}{cos\ \rho}\,, \qquad az^{d+1} = \frac{cos\ \tau}{cos\ \rho}\,, \qquad az^i = \Omega^i\ tg\ \rho \quad (1 \le i \le d)\,, \tag{2.52}$$

onde

$$-\pi \leq \tau < \pi \ , \tag{2.53}$$

$$0 \leq \rho < \frac{\pi}{2} \quad (d \geq 2) \ , \tag{2.54}$$

e

$$\sum_{i=1}^{d} \left(\Omega^i\right)^2 = 1 \ . \tag{2.55}$$

Uma conta simples mostra que as coordenadas assim definidas satisfazem a condição Eq.(2.51). No caso de $d \geq 2$ o infinito espacial esta em $\rho \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

Fazendo

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu \ , \tag{2.56}$$

e utilizando a Eq.(2.52) obtemos a métrica de $AdS_{d+1}$ em coordenadas globais

$$ds^2 = \frac{1}{a^2 cos^2\rho} \left(-d\tau^2 + d\rho^2 + sen^2\rho \, d\Omega_d^2\right) \quad (d \geq 2) \ . \tag{2.57}$$

Para $\rho \approx 0$ a equação acima fica da forma

$$ds^2 = \frac{1}{a^2} \left(-d\tau^2 + d\rho^2 + \rho^2 \, d\Omega_d^2\right) \quad (d \geq 2) \ , \tag{2.58}$$

e o espaço $AdS_{d+1}$ é topologicamente $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}^d$, onde $\mathbf{S}^1$ representa curvas temporais fechadas. Tendo por objetivo evitar problemas de causalidade "abrimos" $\mathbf{S}^1$ sustituindo a Eq.(2.53) por

$$-\infty < \tau < \infty. \tag{2.59}$$

Este novo espaço, com o qual iremos trabalhar de agora em diante, é chamado de "cobertura" de AdS (CAdS). A partir de agora quando falarmos em AdS estaremos na verdade nos referindo a CAdS.

Para descrevermos a "esfera" em $d$ dimensões $\Omega_d$ utilizaremos as seguintes coordenadas (para $d \geq 3$)

$$\begin{aligned}
\Omega^1 &= cos \ \theta_1 \ , \\
\Omega^2 &= sen \ \theta_1 \ cos \ \theta_2 \ , \\
\Omega^3 &= sen \ \theta_1 \ sen \ \theta_2 \ cos \ \theta_3 \ , \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
\Omega^{d-1} &= sen \ \theta_1 \ sen \ \theta_2 \ \cdots \ sen \ \theta_{d-2} \ cos \ \varphi \ , \\
\Omega^d &= sen \ \theta_1 \ sen \ \theta_2 \ \cdots \ sen \ \theta_{d-2} \ sen \ \varphi \ ,
\end{aligned} \tag{2.60}$$

onde

$$0 \leq \varphi < 2\pi \,, \qquad 0 \leq \theta_i < \pi \quad (1 \leq i \leq d-2) \,. \tag{2.61}$$

Vamos agora considerar uma propiedade importante dos espaços AdS. Para um raio de luz em AdS vemos na Eq.(2.57) que uma possível geodésica nula é a geodésica radial

$$d\tau = d\rho \qquad d\Omega_d = 0 \,. \tag{2.62}$$

Então um raio de luz que sai da origem em $\rho = 0$ atinge o infinito espacial em $\rho = \frac{\pi}{2}$ num tempo finito $\tau = \frac{\pi}{2}$ . Da mesma maneira, informação entrando no espaço AdS a través do infinito espacial pode atingir a origem num tempo finito. Este fato será de grande importância no próximo capítulo, onde iremos quantizar o campo escalar em AdS.

Um outro conjunto possível de coordenadas é o das coordenadas de Poincaré, as quais são definidas da forma (para $d \geq 2$)

$$\begin{aligned} z^0 &= \frac{t}{au} \,, \\ 2z^{d+1} &= u + \frac{1}{u}\left(\frac{1}{a^2} - t^2 + \sum_{i=1}^{d-1}(y^i)^2\right) \,, \\ 2z^1 &= u - \frac{1}{u}\left(\frac{1}{a^2} + t^2 - \sum_{i=1}^{d-1}(y^i)^2\right) \,, \\ z^i &= \frac{y^{i-1}}{au} \quad (2 \leq i \leq d) \,. \end{aligned} \tag{2.63}$$

onde

$$-\infty < t < \infty \,, \quad 0 < u \,, \quad (y^1, \cdots, y^{d-1}) \in \mathbf{R}^{d-1} \,, \tag{2.64}$$

e o infinito espacial esta em $u \to 0$. É facil verificar que a Eq.(2.63) é consistente com a Eq.(2.51). No entanto, a diferença do que acontece no caso das coordenadas globais, que cobrem o hiperbolóide completo, as coordenadas de Poincaré cobrem só metade do hiperbolóide. Nas coordenadas de Poincaré a métrica fica (para $d \geq 2$)

$$ds^2 = \frac{1}{au^2}\left(-dt^2 + du^2 + \sum_{i=1}^{d-1} dy^i dy^i\right) \,. \tag{2.65}$$

É importante fazer notar que enquanto o vetor de Killing associado com as translações no tempo global $\tau$ é do tipo-tempo em todo o espaço, o vetor de Killing correspondente às translações no tempo de Poincaré $t$ torna-se nulo no horizonte de Killing $u \to \infty$.

Nos próximos capítulos iremos utilizar a versão euclideana das coordenadas de Poincaré. Fazendo a rotação de Wick

$$u \to x^0 , \qquad t \to -ix^d , \qquad y^i \to x^i \quad (1 \leq i \leq d-1) , \tag{2.66}$$

a métrica em coordenadas de Poincaré euclideanas fica para $d \geq 1$

$$ds^2 = \frac{1}{a(x^0)^2} \sum_{\mu=0}^{d} dx^\mu dx^\mu . \tag{2.67}$$

A seguir estudaremos a borda de AdS. Para isto é util considerarmos as coordenadas de "cone de luz"

$$u = z^0 + iz^{d+1} , \qquad v = z^0 - iz^{d+1} . \tag{2.68}$$

Então da Eq.(2.51) obtemos

$$uv = (z^0)^2 + (z^{d+1})^2 = \frac{1}{a^2} + \sum_{i=1}^{d} (z^i)^2 . \tag{2.69}$$

Definimos novas variáveis

$$z^i = R\tilde{z}^i \quad (i = 1, \cdots, d) , \qquad u = R\tilde{u} , \qquad v = R\tilde{v} , \tag{2.70}$$

onde $R$ é um coeficiente real. Então da Eq.(2.69) obtemos

$$\tilde{u}\tilde{v} - \sum_{i=1}^{d} (\tilde{z}^i)^2 = \frac{1}{a^2 R^2} . \tag{2.71}$$

Na Eq.(2.70) vemos que a borda é alcançada no limite de $R \to \infty$. Nesse limite a Eq.(2.71) fica

$$\tilde{u}\tilde{v} - \sum_{i=1}^{d} (\tilde{z}^i)^2 = 0 . \tag{2.72}$$

No entanto este vínculo não descreve completamente a borda. Se definirmos variáveis

$$\tilde{\tilde{z}}^i = \xi \tilde{z}^i \quad (i = 1, \cdots, d) , \qquad \tilde{\tilde{u}} = \xi \tilde{u} , \qquad \tilde{\tilde{v}} = \xi \tilde{v} , \tag{2.73}$$

onde $\xi$ é um coeficiente arbitrário, então elas também satisfazem o vínculo Eq.(2.72), isto é

$$\tilde{\tilde{u}}\tilde{\tilde{v}} - \sum_{i=1}^{d} (\tilde{\tilde{z}}^i)^2 = 0 . \tag{2.74}$$

Então temos uma classe de equivalência

$$(u, v, z^1, \cdots, z^d) \sim \xi(u, v, z^1, \cdots, z^d), \tag{2.75}$$

e a borda é descrita completamente pela condição acima mais o vínculo

$$uv - \sum_{i=1}^{d}(z^i)^2 = 0\ , \tag{2.76}$$

e assim obtemos uma borda $d$-dimensional. Introduzindo a primeira igualdade da Eq.(2.69) na equação acima temos

$$(z^0)^2 + (z^{d+1})^2 = \sum_{i=1}^{d}(z^i)^2\ , \tag{2.77}$$

e utilizando o vínculo Eq.(2.75) obtemos finalmente a seguinte expressão para a borda

$$(z^0)^2 + (z^{d+1})^2 = 1 = \sum_{i=1}^{d}(z^i)^2\ . \tag{2.78}$$

Então a borda tem a topologia $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^{d-1}$. Mas se descompatificarmos as duas esferas obtemos a métrica de Minkowski. Então a borda de $AdS_{d+1}$ é o espaço de Minkowski compatificado em $d$ dimensões. De fato mostraremos a seguir que o grupo $\mathbf{SO}$(2,d) de isometrias de $AdS_{d+1}$ atua na borda como o grupo conforme atuando no espaço de Minkowski (vide por exemplo [54]). Note que já é sugestivo o fato de o grupo conforme em $d$ dimensões ter o mesmo número de geradores do que o grupo de isometrias de $AdS_{d+1}$.

Perante uma isometria o ponto $(u, v, z^1, \cdots, z^d)$ em $AdS_{d+1}$ de norma

$$uv - \sum_{i=1}^{d}(z^i)^2 = \frac{1}{a^2}\ , \tag{2.79}$$

transforma-se como

$$\Xi \begin{pmatrix} u \\ v \\ z^1 \\ . \\ . \\ . \\ z^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u' \\ v' \\ z'^1 \\ . \\ . \\ . \\ z'^d \end{pmatrix}\ , \tag{2.80}$$

onde $\Xi \in \mathbf{SO}(2,d)$. A transformação preserva a norma

$$u'v' - \sum_{i=1}^{d}(z'^i)^2 = \frac{1}{a^2} \, . \tag{2.81}$$

Em particular um ponto na borda satisfazendo Eq.(2.76) transforma-se para um outro ponto na borda

$$u'v' - \sum_{i=1}^{d}(z'^i)^2 = 0 \, , \tag{2.82}$$

que também satisfaz o vínculo Eq.(2.75)

$$(u', v', z'^1, \cdots, z'^d) \sim \xi(u', v', z'^1, \cdots, z'^d). \tag{2.83}$$

Para $\Xi$ infinitesimal podemos escrever

$$\Xi = \mathbf{I}_{d+2} + \Theta \, , \tag{2.84}$$

onde

$$\Theta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2\vec{a}^t \\ 0 & -\lambda & 2\vec{b}^t \\ \vec{b} & \vec{a} & \omega_d \end{pmatrix} \, , \tag{2.85}$$

$\lambda$ é un coeficiente, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são d-vetores e $\omega_d$ é uma matriz antisimétrica de $d \times d$. Uma conta simples mostra que a matriz $\Xi$ assim definida preserva a norma

$$u'v' - \sum_{i=1}^{d}(z'^i)^2 = uv - \sum_{i=1}^{d}(z^i)^2 = 0 \, . \tag{2.86}$$

Vamos considerar um ponto de partida na borda com $v \neq 0$. Fazendo uso do vínculo Eq.(2.75) podemos partir, sem perda de generalidade, do ponto na borda

$$(u, v, z^1, \cdots, z^d) = \left(\sum_{i=1}^{d}(z^i)^2, 1, z^1, \cdots, z^d\right) \, . \tag{2.87}$$

O ponto transformado $(u', v', z'^1, \cdots, z'^d)$ não esta na mesma classe de equivalência que o ponto de partida, isto é, $v' \neq 1$, mas ele é equivalente a um outro ponto que esta sim na mesma classe de equivalência do ponto de partida e que é $(\frac{u'}{v'}, 1, \frac{z'^1}{v'}, \cdots, \frac{z'^d}{v'})$. Definindo

$$\vec{z} = (z^1, \cdots, z^d) \, , \tag{2.88}$$

conferimos que o mapeamento do ponto $(u, v, z^1, \cdots, z^d)$ na classe de equivalência de $v = 1$ é da forma

$$\vec{z} \to \vec{z}' \sim \frac{\vec{z}'}{v'} \approx (\lambda + 1 - 2\vec{b} \cdot \vec{z})\vec{z} + \vec{z}^2\vec{b} + \vec{a} + \omega_d \vec{z}\,, \tag{2.89}$$

e agora fica simples conferir que as isometrias atuam na borda como as transformações conformes. Fazendo $\lambda = 0$, $\vec{b} = 0$, $\omega_d = 0$ e $\vec{a} \neq 0$ obtemos

$$\vec{z}' - \vec{z} = \vec{a}\,, \tag{2.90}$$

que corresponde às translações Eq.(2.11).

No caso de $\lambda = 0$, $\vec{a} = \vec{b} = 0$ e $\omega_d \neq 0$ temos

$$\vec{z}' - \vec{z} = \omega_d \vec{z}\,, \tag{2.91}$$

que concorda com as rotações Eq.(2.13).

Fazendo $\vec{a} = \vec{b} = 0$, $\omega_d = 0$ e $\lambda \neq 0$ obtemos

$$\vec{z}' - \vec{z} = \lambda \vec{z}\,, \tag{2.92}$$

que corresponde às transformações de escala Eq.(2.15).

Finalmente, no caso de $\lambda = 0$, $\vec{a} = 0$, $\omega_d = 0$ e $\vec{b} \neq 0$ obtemos

$$\vec{z}' - \vec{z} = \vec{z}^2\vec{b} - 2(\vec{b} \cdot \vec{z})\vec{z}\,, \tag{2.93}$$

que concorda com as transformações conformes especiais Eq.(2.17).

Verificamos, então, que o grupo de isometrias de AdS torna-se na borda o grupo conforme. A conclusão é que se uma teoria em AdS é dual a uma outra teoria na borda, então esta última teoria terá de ser necessariamente conforme. Este fato será de grande importância nos capítulos posteriores.

Um outro ponto importante é o estudo do tensor de curvatura em AdS. Como o espaço AdS é um espaço de simetria máxima ele terá de ter um tensor de curvatura da forma (vide por exemplo [55])

$$R_{\mu\alpha\nu\beta} = \frac{R}{d(d+1)}(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})\,, \tag{2.94}$$

onde

$$R_{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}R_{\mu\alpha\nu\beta}\,, \tag{2.95}$$

é o tensor de Ricci e

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}\,. \tag{2.96}$$

Então
$$R_{\alpha\beta} = \frac{R}{d+1} g_{\alpha\beta} \,. \tag{2.97}$$
Introduzindo esta expressão na identidade de Bianchi contraida
$$\nabla_\mu \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g^{\mu\nu} \right) = 0 \,, \tag{2.98}$$
onde $\nabla_\mu$ é a derivada covariante no espaço-tempo, obtemos
$$\left( \frac{1}{d+1} - \frac{1}{2} \right) \partial^\mu R = 0 \,. \tag{2.99}$$
Então nos espaços $AdS_{d+1}$ com $d \geq 2$ o escalar $R$ é uma constante. De fato na convenção para o tensor de curvatura $R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} = \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} + \cdots$ pode-se mostrar que
$$R = -a^2 d(d+1). \tag{2.100}$$

No caso de $d = 1$ os tensores de curvatura são sempre da forma Eq.(2.94) e por causa disto aquela equação não fornece informação nenhuma. No entanto, é possível mostrar que neste caso $R$ é também da forma Eq.(2.100), e assim os espaços AdS existem como espaços de simetria máxima também para $d = 1$.

Fazendo uso da Eq.(2.100) pode-se mostrar que os espaços $AdS_{d+1}$ são solução da equação de Einstein no vácuo
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \, R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \,, \tag{2.101}$$
com constante cosmológica
$$\Lambda = -\frac{1}{2} \, a^2 d(d-1) \,. \tag{2.102}$$
No caso de $d = 1$ o lado esquerdo da Eq.(2.101) anula-se trivialmente e a métrica não tem dinâmica.

# Capítulo 3

# Estabilidade e Quantização do Campo Escalar em AdS

Neste capítulo estudaremos o problema da estabilidade das teorias de campos formuladas em espaços AdS, nos concentrando no caso particular da teoria de campo escalar. O material deste capítulo baseia-se principalmente nos resultados das referências [1][2][4][5][42], que tiveram como motivação principal (com a exceção da última referência) analizar a estabilidade de teorias de supergravidade em AdS. Mesmo quando essa motivação inicial ficou enfraquecida pelo fato das teorias de supergravidade terem perdido relevância como possiveis teorias unificadoras da matéria e gravidade, os resultados deste capítulo irão ter grande importância no desenvolvimento do próximo capítulo, onde estudaremos a correspondência AdS/CFT. Pretendemos, também, preencher algumas lacunas e esclarecer algums pontos obscuros da literatura prévia. Em particular, estamos interessados em estudar a existência e forma assintótica das flutuações estáveis do campo escalar massivo em AdS, tendo por objetivo utilizar esses resultados para testar a correspondência AdS/CFT no Capítulo 4. Por simplicidade, iremos nos concentrar no caso de espaços AdS em quatro ou mais dimensões, deixando o estudo da quantização do campo escalar em duas e três dimensões para o Apêndice C.

Nosso ponto de partida é a ação para um campo escalar massivo real $\Phi$ acoplado com um espaço-tempo curvo em $d+1$ dimensões de métrica $g_{\mu\nu}$ e constante cosmológica $\Lambda$

$$\int d^{d+1}x \, \sqrt{g} \left[ \frac{1}{16\pi G} \, (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} \, g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} \, (m^2 + \varrho R) \Phi^2 \right] , \qquad (3.1)$$

onde $G$ é a constante gravitacional e os coeficientes $m^2$ e $\varrho$ são arbitrários. A métrica tem signatura "principalmente positiva". O principio variacional fornece a seguinte equação de movimento para a métrica

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}(\Phi)\ , \tag{3.2}$$

onde $T_{\mu\nu}(\Phi)$ é o tensor de energia-momento usual para o campo escalar

$$T_{\mu\nu}(\Phi) \equiv \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu} \left[g^{\alpha\beta}\partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi + M^2\Phi^2\right] + \varrho\, (g_{\mu\nu}\nabla^2 - \nabla_\mu \nabla_\nu + R_{\mu\nu})\Phi^2\ , \tag{3.3}$$

$\nabla_\mu$ é a derivada covariante no espaço-tempo, $\nabla^2 \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ , e

$$M^2 = m^2 + \varrho R\ . \tag{3.4}$$

A equação de movimento para o campo escalar fica

$$\nabla^2\Phi = M^2\Phi\ . \tag{3.5}$$

O campo escalar e a métrica estão formados por um fundo mais flutuações cuja estabilidade desejamos estudar. Vamos começar estudando o fundo fixando

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x)\ , \qquad \Phi(x) = \phi_0(x)\ , \tag{3.6}$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$ e $\phi_0(x)$ são a métrica e o campo escalar de fundo respetivamente. Então as Eqs.(3.2,3.5) ficam

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, \bar{R}\, \bar{g}_{\mu\nu} + \Lambda \bar{g}_{\mu\nu} = 8\pi G \bar{T}_{\mu\nu}(\phi_0)\ , \tag{3.7}$$

e

$$\bar{\nabla}^2\phi_0 = \bar{M}^2\phi_0\ , \tag{3.8}$$

onde as quantidades $\bar{R}_{\mu\nu}$, $\bar{R}$, $\bar{T}_{\mu\nu}$, $\bar{\nabla}_\mu$ e $\bar{M}^2$ são construidas com a métrica de fundo $\bar{g}_{\mu\nu}$.

Procuramos soluções das Eqs.(3.7,3.8) tais que o campo escalar de fundo seja uma constante. A solução da Eq.(3.8) com $\phi_0$ constante é

$$\phi_0(x) = 0. \tag{3.9}$$

Das Eqs.(3.3,3.9) temos

$$\bar{T}_{\mu\nu}(\phi_0) = 0\ . \tag{3.10}$$

Introduzindo este ressultado na Eq.(3.7) sai

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, \bar{g}_{\mu\nu}\bar{R} + \Lambda \bar{g}_{\mu\nu} = 0\ . \tag{3.11}$$

Contraindo a equação acima com $\bar{g}^{\mu\nu}$ obtemos

$$\Lambda = \frac{d-1}{2(d+1)}\bar{R}. \tag{3.12}$$

Introduzindo na Eq.(3.11) fica

$$\bar{R}_{\mu\nu} = \frac{\bar{R}}{d+1}\,\bar{g}_{\mu\nu}\,, \tag{3.13}$$

e o espaço de fundo tem simetria máxima. No caso de $d = 1$ o escalar $\bar{R}$ fica indeterminado. No caso de $d \geq 2$ vemos na Eq.(3.12) que o espaço de fundo é plano para $\Lambda = 0$, AdS para $\Lambda < 0$ e de Sitter para $\Lambda > 0$. A partir de agora iremos considerar que o espaço de fundo é AdS. Então das Eqs.(2.100,3.4) obtemos

$$\bar{R} = -a^2 d(d+1)\,, \tag{3.14}$$

$$\bar{M}^2 = m^2 - \varrho a^2 d(d+1)\,. \tag{3.15}$$

Tendo estudado a geometria do fundo, o passo seguinte é considerar flutuações se propagando nesse fundo e analisar as condições para as quais essas flutuações são estáveis. No lugar da Eq.(3.6) agora teremos

$$g_{\mu\nu}(x) = \bar{g}_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x)\,, \qquad \Phi(x) = \phi(x)\,, \tag{3.16}$$

onde $\bar{g}_{\mu\nu}$ é a métrica do fundo que temos estudado acima e $h_{\mu\nu}$ e $\phi(x)$ são flutuações da métrica e do campo, respectivamente. Aqui temos utilizado a Eq.(3.9) que fixa o campo escalar de fundo em zero. As flutuações não são necessariamente pequenas mas vamos pedir que elas se anulem assintoticamente. Então dizemos que a métrica $\bar{g}_{\mu\nu}$ corresponde a um espaço assintoticamente AdS.

O primeiro passo nos cálculos é expandir os objetos da teoria em ordens sucessivas nas flutuações da métrica

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R^{(1)}_{\mu\nu} + R^{(2)}_{\mu\nu} + \cdots\,, \qquad R = \bar{R} + R^{(1)} + R^{(2)} + \cdots\,, \tag{3.17}$$

e assim por diante. Utilizando as Eqs.(3.7,3.10,3.12,3.16,3.17) obtemos

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} &= \left[R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{g}_{\mu\nu}R^{(1)} - \frac{1}{d+1}\,\bar{R}h_{\mu\nu}\right] \\ &+ \sum_{i\geq 2}\left[R^{(i)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\left(\bar{g}_{\mu\nu}R^{(i)} + h_{\mu\nu}R^{(i-1)}\right)\right]\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Então a Eq.(3.2) pode ser escrita de maneira exata como

$$R^{(1)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{g}_{\mu\nu}R^{(1)} - \frac{1}{d+1}\,\bar{R}h_{\mu\nu} = 8\pi G\left[T_{\mu\nu}(\phi) + t_{\mu\nu}\right] , \tag{3.19}$$

onde $t_{\mu\nu}$ é o pseudo-tensor de energia-momento da métrica

$$t_{\mu\nu} = -\frac{1}{8\pi G}\sum_{i\geq 2}\left[R^{(i)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\bar{g}_{\mu\nu}R^{(i)} + h_{\mu\nu}R^{(i-1)}\right)\right] . \tag{3.20}$$

Neste ponto vamos supor que as flutuações sejam pequenas e manter termos até segunda ordem. Então, na equação acima utilizaremos

$$T_{\mu\nu}(\phi) \approx \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}\,\bar{g}_{\mu\nu}\left[\bar{g}^{\alpha\beta}\partial_\alpha\phi\partial_\beta\phi + \bar{M}^2\phi^2\right] + \varrho\,(\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\nabla}^2 - \bar{\nabla}_\mu\bar{\nabla}_\nu + \bar{R}_{\mu\nu})\phi^2 , \tag{3.21}$$

$$t_{\mu\nu} \approx -\frac{1}{8\pi G}\left[R^{(2)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(\bar{g}_{\mu\nu}R^{(2)} + h_{\mu\nu}R^{(1)}\right)\right] . \tag{3.22}$$

Fazendo uso da identidade de Bianchi linearizada

$$\bar{g}^{\mu\alpha}\bar{\nabla}_\mu\left[R^{(1)}_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{g}_{\alpha\nu}R^{(1)} - \frac{1}{d+1}\,\bar{R}h_{\alpha\nu}\right] = 0 , \tag{3.23}$$

obtemos

$$\bar{g}^{\mu\alpha}\bar{\nabla}_\mu\left[T_{\alpha\nu}(\phi) + t_{\alpha\nu}\right] = 0 . \tag{3.24}$$

Seja $\bar{\xi}_\mu$ um vetor de Killing da métrica de fundo, isto é

$$\bar{\nabla}^\mu\bar{\xi}^\nu + \bar{\nabla}^\nu\bar{\xi}^\mu = 0. \tag{3.25}$$

Fazendo uso das Eqs.(3.24,3.25) obtemos

$$\bar{\nabla}_\mu\bar{J}^\mu_{(\xi)} = 0, \tag{3.26}$$

onde a corrente conservada $\bar{J}^\mu_{(\xi)}$ é dada por

$$\bar{J}^\mu_{(\xi)} = \bar{g}^{\mu\alpha}\left[T_{\alpha\nu}(\phi) + t_{\alpha\nu}\right]\bar{\xi}^\nu . \tag{3.27}$$

A partir de agora vamos considerar o espaço AdS como descrito pelas coordenadas globais Eq.(2.57). Da Eq.(3.26) obtemos

$$0 = \bar{Q}_\xi(\tau_2) - \bar{Q}_\xi(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d^dx\;\partial_i\left(\sqrt{\bar{g}}\bar{J}^i_{(\xi)}\right) , \tag{3.28}$$

onde

$$\bar{Q}_\xi(\tau) \equiv \int d^d x \sqrt{\bar{g}}\, \bar{J}^0_{(\xi)} \left(\tau, \rho, \Omega^1, \cdots, \Omega^d\right) , \tag{3.29}$$

$\tau_1$ e $\tau_2$ são valores arbitrários do tempo global $\tau$, os índices latinos percorrem as coordenadas espacias, e as integrais são efetuadas nas superfícies de tempo constante.

A Eq.(3.28) pode ser reescrita como

$$0 = \bar{Q}_\xi(\tau_2) - \bar{Q}_\xi(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \int d^{d-1}x \sqrt{\bar{\sigma}}\, \bar{N}_i \bar{J}^i_{(\xi)} , \tag{3.30}$$

onde $\bar{\sigma}_{\mu\nu}$ é a métrica induzida nas superfícies de $\tau$ constante e $\bar{N}_\mu$ é a normal unitária externa às superfícies de $\rho$ constante

$$\bar{N}_\mu = \frac{1}{a \; cos \; \rho}\, \delta^{(\rho)}_\mu . \tag{3.31}$$

A integração é feita nas superfícies de $\tau$ e $\rho$ constantes tais que $\rho$ esta muito perto do infinito espacial

$$cos \; \rho \equiv \tilde{\epsilon} << 1 , \tag{3.32}$$

e faremos o limite de $\tilde{\epsilon} \to 0$ só no final das contas. Note que a integral espacial no último termo da Eq.(3.30) representa o fluxo da corrente $\bar{J}^\mu_{(\xi)}$a traves da borda no infinito espacial, e quando ela é nula

$$\int d^{d-1}x \sqrt{\bar{\sigma}}\, \bar{N}_i \bar{J}^i_{(\xi)} = 0 , \tag{3.33}$$

vemos na Eq.(3.30) que a carga $\bar{Q}_\xi(\tau)$ é conservada

$$\frac{d\bar{Q}_\xi(\tau)}{d\tau} = 0. \tag{3.34}$$

A relevância desta análise ficará clara daqui a pouco.

Já tendo estudado a equação de movimento para a métrica Eq.(3.2), agora estudaremos a equação de movimento para o campo escalar Eq.(3.5). Fazendo a aproximação de flutuações pequenas na ordem mais baixa, a equação de movimento fica

$$\bar{\nabla}^2 \phi = \bar{M}^2 \phi , \tag{3.35}$$

e com isto já temos o formalismo necesário para estudar a estabilidade e quantização das flutuações do campo escalar se propagando no espaço assintóticamente AdS. Para isto, começamos definindo a energia do sistema como a carga formada a partir do vetor de Killing associado às translações no tempo global $\tau$ [2]

$$\bar{\xi}_\mu = -\delta^{(0)}_\mu , \tag{3.36}$$

onde incluimos o sinal negativo por causa da signatura "principalmente positiva" da métrica. Das Eqs.(3.27,3.29,3.36) a energia fica

$$E = -\int d^d x \, \sqrt{\bar{g}} \, \bar{g}^{0\mu} \left[ T_{\mu 0}(\phi) + t_{0\mu} \right] . \tag{3.37}$$

Separamos a energia numa contribuição que vem do campo gravitacional e numa outra contribuição que vem do campo escalar

$$E = E_M + E_G \, , \tag{3.38}$$

onde

$$E_M = -\int d^d x \, \sqrt{\bar{g}} \, \bar{g}^{0\mu} T_{\mu 0}(\phi) \, , \qquad E_G = -\int d^d x \, \sqrt{\bar{g}} \, \bar{g}^{\mu 0} t_{0\mu} \, . \tag{3.39}$$

A energia gravitacional $E_G$ foi estudada em [2] onde mostrou-se que ela é positiva (e as flutuações estáveis). A partir de agora vamos nos concentrar na energia das flutuações do campo escalar $E_M$. Vimos no capítulo anterior que a informação pode viajar da origem até o infinito espacial e voltar num tempo finito. A entrada e saida de radiação pela borda faz com que o problema de Cauchy não esteja bem definido. Então, para fazermos uma quantização consistente é necessário fixarmos, na borda, condições de contorno que fazam com que o fluxo das correntes "conservadas" da teoria seja nulo [3]. No caso da energia isto significa pedir que

$$\int d^{d-1} x \, \sqrt{\bar{\sigma}} \, \bar{N}_i \, \bar{g}^{i\alpha} T_{\alpha 0}(\phi) = 0 \, , \tag{3.40}$$

e quando esta condição é satisfeita a energia é de fato conservada. Um outro problema que deveremos considerar é o da positividade da energia, pois ela é requerida para se terem flutuações estáveis. A seguir estudaremos ambos os problemas e veremos que de fato eles estão intimamente relacionados. Iremos nos concentrar no caso de $d \geq 3$, deixando o estudo dos casos de $d = 1$ e $d = 2$ para o Apêndice C.

Começamos resolvendo a equação de movimento para o campo escalar Eq.(3.35). Fazendo uso das Eqs.(2.57,2.60) obtemos

$$\frac{1}{a^2} \, \bar{\nabla}^2 \phi = -cos^2 \rho \, \partial_\tau^2 \phi + (tg \, \rho)^{-(d-1)} cos^2 \rho \, \partial_\rho \left[ (tg \, \rho)^{(d-1)} \partial_\rho \phi \right] + \frac{1}{tg^2 \rho} \, O_d \, \phi \qquad (d \geq 3) \, , \tag{3.41}$$

onde o operador angular $O_d$ é o laplaciano correspondente a $\mathbf{S}^{d-1}$ dado por

$$O_d \equiv \frac{1}{\mathcal{J}_d} \left[ \partial_{\theta_1} \left( \mathcal{J}_d \, \partial_{\theta_1} \right) + \sum_{n=1}^{d-3} \frac{1}{\prod_{l=1}^{n} sen^2 \theta_l} \, \partial_{\theta_{n+1}} \left( \mathcal{J}_d \, \partial_{\theta_{n+1}} \right) \right] + \frac{1}{\prod_{l=1}^{d-2} sen^2 \theta_l} \, \partial_\varphi^2 \quad (d \geq 4) \, , \tag{3.42}$$

$$O_3 \equiv \frac{1}{sen\ \theta}\ \partial_\theta\,(sen\ \theta\ \partial_\theta) + \frac{1}{sen^2\theta}\ \partial^2_\varphi\ , \tag{3.43}$$

$$\mathcal{J}_d(\theta_1, \cdots, \theta_{d-1}) = \prod_{i=1}^{d-2} (sen\ \theta_i)^{d-i-1} \qquad (d \geq 3)\ . \tag{3.44}$$

A equação é resolvida pelo método de separação de variáveis. A solução é

$$\phi = \sum_{\omega l\{m\}} \left[a_{\omega l\{m\}}\phi_{\omega l\{m\}} + a^*_{\omega l\{m\}}\phi^*_{\omega l\{m\}}\right] \qquad (d \geq 3)\ , \tag{3.45}$$

onde os modos $\phi_{\omega l\{m\}}$ são da forma

$$\phi_{\omega l\{m\}} = N_{\omega l}\ e^{-i\omega\tau} Y_{l\{m\}}(\Omega_d)\ (sen\ \rho)^l (cos\ \rho)^\Delta F_{\omega l}(\rho) \qquad (d \geq 3)\ , \tag{3.46}$$

$N_{\omega l}$ é um coeficiente de normalização (note que por enquanto não temos definido o produto escalar no espaço de Hilbert), $\Delta$ é um parâmetro real, os valores de $\omega$ são por enquanto arbitrários e $Y_{l\{m\}}$ são os harmônicos esféricos em $\mathbf{S}^{d-1}$ para os quais

$$O_d Y_{l\{m\}} = -l(l+d-2) Y_{l\{m\}} \qquad (l \geq 0)\ . \tag{3.47}$$

A equação para a função radial $F_{\omega l}(\rho)$ fica

$$\begin{aligned} \partial_\rho \left[(tg\ \rho)^{d-1} \partial_\rho \left((sen\ \rho)^l (cos\ \rho)^\Delta F_{\omega l}(\rho)\right)\right] &= \left[\frac{\bar{M}^2}{a^2}\ \frac{1}{cos^2\rho} - \omega^2 + l(l+d-2)\frac{1}{sen^2\rho}\right] \\ &\times\ (tg\ \rho)^{d-1} (sen\ \rho)^l (cos\ \rho)^\Delta F_{\omega l}(\rho)\ . \end{aligned} \tag{3.48}$$

Sem perda de geralidade escolhemos

$$\Delta(\Delta - d) = \frac{\bar{M}^2}{a^2}\ , \tag{3.49}$$

isto é

$$\Delta_\pm = \frac{d}{2} \pm \nu\ , \tag{3.50}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{\bar{M}^2}{a^2}}\ , \tag{3.51}$$

e obtemos

$$0 = x(1-x)\ \frac{d^2 F^\pm_{\omega l}}{dx^2} + [c - (a_\pm + b_\pm + 1)\ x]\ \frac{dF^\pm_{\omega l}}{dx} - a_\pm\ b_\pm F^\pm_{\omega l}\ , \tag{3.52}$$

onde

$$x = sen^2\rho \, , \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned} a_\pm &= \frac{1}{2}\left(l+\Delta_\pm-\omega\right) , \\ b_\pm &= \frac{1}{2}\left(l+\Delta_\pm+\omega\right) , \\ c &= l+\frac{d}{2} \, . \end{aligned} \tag{3.54}$$

A Eq.(3.52) é de segunda ordem e portanto tem duas soluções, mas ficamos só com aquela que é regular na origem, e que é a função hipergeométrica

$$F^\pm_{\omega l}(\rho) = {}_2F_1(a_\pm, b_\pm; c\, ; sen^2\rho) \, , \tag{3.55}$$

enquanto que a solução descartada diverge na origem (vide por exemplo [5]).

As Eqs.(3.50,3.54) implicam

$$a_+ - a_- = b_+ - b_- = \nu \, . \tag{3.56}$$

Fazendo uso das equações do Apêndice B.1 e das Eqs.(3.55,3.56) obtemos

$$(sen\ \rho)^l (cos\ \rho)^{\Delta_+} F^+_{\omega l}(\rho) = (sen\ \rho)^l (cos\ \rho)^{\Delta_-} F^-_{\omega l}(\rho) \equiv G_{\omega l}(\rho) \, , \tag{3.57}$$

onde

- **Para** $\nu \notin \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} G_{\omega l}(\rho) &= (sen\ \rho)^l\, (cos\ \rho)^{\Delta_-} \frac{\Gamma(l+\frac{d}{2})\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)\Gamma(a_-)\Gamma(b_-)} \\ &\times \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\,(cos\ \rho)^{2n} \left[ \frac{\Gamma(n+a_-)\Gamma(n+b_-)}{\Gamma(n+1-\nu)} - \frac{\Gamma(n+a_+)\Gamma(n+b_+)}{\Gamma(n+1+\nu)}\,(cos\ \rho)^{2\nu} \right] . \end{aligned} \tag{3.58}$$

- **Para** $\nu = 0$

$$\begin{aligned} G_{\omega l}(\rho) &= -(sen\ \rho)^l\, (cos\ \rho)^{\Delta_-} \frac{\Gamma(l+\frac{d}{2})}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)\Gamma(a_-)\Gamma(b_-)} \\ &\times \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n!)^2}\,\Gamma(n+a_+)\Gamma(n+b_+)\left[2\ ln\ cos\ \rho + u_n(a_-, b_-, 0)\right](cos\ \rho)^{2n} \, , \end{aligned} \tag{3.59}$$

onde $u_n(a,b,m)$ é dado pela Eq.(B.4).

**- Para** $\nu \in \mathbf{Z}$, $\nu > 0$

$$\begin{aligned} G_{\omega l}(\rho) &= (sen\ \rho)^l\ (cos\ \rho)^{\Delta_-} \frac{\Gamma(l+\frac{d}{2})}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)\Gamma(a_-)\Gamma(b_-)} \\ &\times \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^n}{n!}\ \Gamma(\nu-n)\Gamma(n+a_-)\Gamma(n+b_-)(cos\ \rho)^{2n} \\ &- (-1)^\nu (sen\ \rho)^l\ (cos\ \rho)^{\Delta_+} \frac{\Gamma(l+\frac{d}{2})}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)\Gamma(a_-)\Gamma(b_-)} \\ &\times \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+a_+)\Gamma(n+b_+)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)}\ [2\ ln\ cos\ \rho + u_n(a_-,b_-,\nu)]\ (cos\ \rho)^{2n}\ , \end{aligned} \tag{3.60}$$

e os modos $\phi_{\omega l\{m\}}$ da Eq.(3.46) ficam

$$\phi_{\omega l\{m\}} = N_{\omega l}\ e^{-i\omega\tau} Y_{l\{m\}}(\Omega_d)\ G_{\omega l}(\rho) \qquad (d \geq 3)\ . \tag{3.61}$$

Note que a igualdade implícita na Eq.(3.57)

$$(cos\ \rho)^{\Delta_+} F^+_{\omega l}(\rho) = (cos\ \rho)^{\Delta_-} F^-_{\omega l}(\rho)\ , \tag{3.62}$$

nunca havia sido escrita explicitamente na literatura, sendo que, em geral, se trabalha com as duas soluções separadamente (vide por exemplo [5]), ou então se faz uma escolha arbitrária de uma delas "sem perda de geralidade" (vide por exemplo [42]).

Tendo resolvido a equação de movimento Eq.(3.35), o passo seguinte é definir o produto escalar no espaço de Hilbert e as condições para que a norma seja conservada. Fazendo uso da Eq.(3.35) notamos que a corrente

$$H^\mu = i\bar{g}^{\mu\nu} \left[\phi_{\omega l\{m\}} \partial_\nu \phi^*_{\omega' l'\{m'\}} - \partial_\nu \phi_{\omega l\{m\}} \phi^*_{\omega' l'\{m'\}}\right]\ , \tag{3.63}$$

é conservada

$$\bar{\nabla}_\mu H^\mu = 0. \tag{3.64}$$

Então, definimos o produto escalar entre os modos $\phi_{\omega l\{m\}}$ e $\phi_{\omega' l'\{m'\}}$ como a carga associada com a corrente $H^\mu$, isto é (vide Eqs.(3.29,3.63))

$$\left(\phi_{\omega l\{m\}}, \phi_{\omega' l'\{m'\}}\right) = i \int d^d x \sqrt{\bar{g}}\ \bar{g}^{0\nu} \left[\phi_{\omega l\{m\}} \partial_\nu \phi^*_{\omega' l'\{m'\}} - \partial_\nu \phi_{\omega l\{m\}} \phi^*_{\omega' l'\{m'\}}\right]\ , \tag{3.65}$$

e a condição para que o produto escalar seja de fato conservado é que a corrente $H^\mu$ não tenha fluxo a través da borda, isto é (vide Eqs.(3.33,3.63))

$$\int d^{d-1}x\ \sqrt{\bar{\sigma}}\ \bar{N}_i\ \bar{g}^{i\nu}\left[\phi_{\omega l\{m\}}\partial_\nu\phi^*_{\omega' l'\{m'\}} - \partial_\nu\phi_{\omega l\{m\}}\phi^*_{\omega' l'\{m'\}}\right] = 0\ . \tag{3.66}$$

Fazendo uso das Eqs.(2.57,3.31,3.32,3.61) e da condição de ortogonalidade dos harmônicos esféricos $Y_{l\{m\}}$, a equação Eq.(3.66) fica da forma

$$lim_{\tilde{\epsilon}\to 0}\ \tilde{\epsilon}^{-(d-1)}\left(G_{\omega l}\ \partial_{\tilde{\epsilon}}G_{\omega' l} - G_{\omega' l}\ \partial_{\tilde{\epsilon}}G_{\omega l}\right) = 0\ . \tag{3.67}$$

Introduzindo as Eqs.(3.58,3.59,3.60) na equação acima e utilizando a Eq.(3.32) obtemos as condições para que o produto escalar Eq.(3.65) seja de fato conservado

$$\begin{aligned} \nu > 1 \longrightarrow a_+ = -n, &\quad ou \quad b_+ = -n. \\ 0 \le \nu < 1 \longrightarrow a_+ = -n, &\quad ou \quad b_+ = -n, \\ ou \quad a_- = -n, &\quad ou \quad b_- = -n, \end{aligned} \tag{3.68}$$

onde $n = 0, 1, 2, \cdots$ . Fazendo uso da Eq.(3.54), a equação acima equivale às seguintes condições para $\omega$

$$\begin{aligned} \nu > 1 \longrightarrow &\mid \omega_n^+ \mid = l + \Delta_+ + 2n. \\ 0 \le \nu < 1 \longrightarrow &\mid \omega_n^+ \mid = l + \Delta_+ + 2n, \\ ou \quad &\mid \omega_n^- \mid = l + \Delta_- + 2n. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Então, para $\nu > 1$ existe só uma solução, que chamamos de $G^+_{nl}$, enquanto que para $0 \le \nu < 1$ existem duas soluções, que chamamos de $G^+_{nl}$ e $G^-_{nl}$. Note que o novo índice $n$ é o que aparece na Eq.(3.69). Das Eqs.(3.32,3.58,3.59,3.60,3.68) obtemos as formas assintóticas das funções radiais $G^\pm_{nl}$

$$G^\pm_{nl} \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_\pm}\ . \tag{3.70}$$

Fazendo uso da identidade para a função hipergeométrica em termos do polinomio de Jacobi

$${}_2F_1(-n, \alpha+\beta+n+1\ ;\ \alpha+1\ ;\ x) = n!\ \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\ P_n^{(\alpha,\beta)}(1-2x)\ , \tag{3.71}$$

e das Eqs.(3.55,3.57,3.68), obtemos as seguintes expresões para as funções radiais $G^+_{nl}$ e $G^-_{nl}$

$$G^\pm_{nl}(\rho) = (sen\ \rho)^l(cos\ \rho)^{\Delta_\pm}\ n!\ \frac{\Gamma\left(l+\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(l+\frac{d}{2}+n\right)}\ P_n^{(l+\frac{d}{2}-1,\pm\nu)}(cos\ 2\rho)\ , \tag{3.72}$$

e na Eq.(3.61) temos na verdade dois tipos possíveis de modos

$$\phi^{\pm}_{nl\{m\}} = N^{\pm}_{nl}\, e^{-i\omega^{\pm}_n \tau} Y_{l\{m\}}(\Omega_d)\, G^{\pm}_{nl}(\rho)\ , \tag{3.73}$$

onde os modos $\phi^{+}_{nl\{m\}}$ aparecem para $\nu \geq 0$, enquanto que os modos $\phi^{-}_{nl\{m\}}$ aparecem só para $0 \leq \nu < 1$. Note que no caso de $0 \leq \nu < 1$ temos duas soluções possíveis, e qualquer uma delas pode ser escolhida para descrever a teoria. Na literatura prévia, os modos $\phi^{+}_{nl\{m\}}$ e $\phi^{-}_{nl\{m\}}$ são usualmente chamados de "regulares" e "irregulares" respectivamente, e no próximo capítulo estudaremos sua importância na correspondência AdS/CFT.

Só falta agora calcular os coeficientes de normalização $N^{\pm}_{nl}$. Note que os conjuntos $\{\phi^{+}_{nl\{m\}}\}$ e $\{\phi^{-}_{nl\{m\}}\}$ são dois conjuntos de soluções independentes e que são ortogonalizados separadamente.

A condição de ortogonalidade dos polinomios de Jacobi é

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} dx\ (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\ P^{(\alpha,\beta)}_r(x)\ P^{(\alpha,\beta)}_s(x) &= \delta_{rs}\ \frac{1}{r!}\ \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{\alpha+\beta+2r+1} \\ &\times\ \frac{\Gamma(\alpha+r+1)\Gamma(\beta+r+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+r+1)}\ .\end{aligned} \tag{3.74}$$

Fazendo uso das Eqs.(2.57,3.65,3.72,3.73,3.74) e da condição de ortogonalidade dos harmônicos esféricos obtemos

$$\left(\phi^{\pm}_{nl\{m\}}, \phi^{\pm}_{n'l'\{m'\}}\right) = \delta_{nn'}\ \delta_{ll'}\ \delta_{\{m\}\{m'\}}\ \mid N^{\pm}_{nl} \mid^2 a^{-(d-1)}\ n!\ \frac{\left[\Gamma(l+\frac{d}{2})\right]^2 \Gamma(n+1\pm\nu)}{\Gamma\left(l+\frac{d}{2}+n\right)\Gamma\left(l+\Delta_{\pm}+n\right)}\ . \tag{3.75}$$

Fixando

$$N^{\pm}_{nl} = \frac{a^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma\left(l+\frac{d}{2}\right)}\ \left[\frac{\Gamma\left(l+\frac{d}{2}+n\right)\Gamma\left(l+\Delta_{\pm}+n\right)}{n!\ \Gamma(n+1\pm\nu)}\right]^{\frac{1}{2}}\ , \tag{3.76}$$

obtemos dois conjuntos ortogonais de soluções normalizadas

$$\left(\phi^{\pm}_{nl\{m\}}, \phi^{\pm}_{n'l'\{m'\}}\right) = \delta_{nn'}\ \delta_{ll'}\ \delta_{\{m\}\{m'\}}\ . \tag{3.77}$$

Tendo encontrado as flutuações normalizáveis da teoria, o último passo é verificar que elas correspondem a energias conservadas, positivas e finitas. Como fizemos no caso do produto escalar, primeiro procuramos as condições que fazem com que o fluxo de energia na borda seja nulo. Fazendo uso das Eqs.(2.57,3.21,3.32,3.61) a condição Eq.(3.40) aplicada a uma superposição de modos implica

$$lim_{\tilde{\epsilon}\to 0}\, \tilde{\epsilon}^{-(d-1)} \Big[(1-2\varrho)G_{\omega l}\, \partial_{\tilde{\epsilon}} G_{\omega' l} - 2\varrho\, G_{\omega' l}\, \partial_{\tilde{\epsilon}} G_{\omega l} - 2\varrho\, \tilde{\epsilon}^{-1} G_{\omega l} G_{\omega' l}\Big] = 0\ . \tag{3.78}$$

Note que a condição acima é para a energia o que a Eq.(3.67) é para o produto escalar.

É conveniente definir

$$\varrho_0 = \frac{1}{2}\, \frac{\Delta_-}{1+2\Delta_-}\ . \tag{3.79}$$

Introduzindo as Eqs.(3.58,3.59,3.60) na Eq.(3.78) e utilizando a Eq.(3.32) obtemos as condições para que a energia seja conservada

- **Para** $\varrho \neq \varrho_0$

$$a_+ = -n, \quad ou \quad b_+ = -n. \tag{3.80}$$

- **Para** $\varrho = \varrho_0$

$$\begin{aligned} \nu > 1 &\longrightarrow a_+ = -n, \quad ou \quad b_+ = -n. \\ 0 \leq \nu < 1 &\longrightarrow a_+ = -n, \quad ou \quad b_+ = -n, \\ &\quad\ \ ou \quad a_- = -n, \quad ou \quad b_- = -n, \end{aligned} \tag{3.81}$$

onde $n = 0, 1, 2, \cdots$ . Comparando com a Eq.(3.68) verificamos que as condições para que o produto escalar e a energia sejam simultaneamente conservadas são as das Eqs.(3.80,3.81). Fazendo uso da Eq.(3.54), as Eqs.(3.80,3.81) equivalem às seguintes condições para $\omega$

- **Para** $\varrho \neq \varrho_0$

$$\mid \omega_n^+ \mid = l + \Delta_+ + 2n. \tag{3.82}$$

- **Para** $\varrho = \varrho_0$

$$\begin{aligned} \nu > 1 &\longrightarrow \mid \omega_n^+ \mid = l + \Delta_+ + 2n. \\ 0 \leq \nu < 1 &\longrightarrow \mid \omega_n^+ \mid = l + \Delta_+ + 2n, \\ ou &\quad\ \mid \omega_n^- \mid = l + \Delta_- + 2n. \end{aligned} \tag{3.83}$$

Então as soluções radiais para as quais o produto escalar e a energia são simultaneamente conservados são

- **Para** $\varrho \neq \varrho_0$

$$G^{+}_{nl} \,. \tag{3.84}$$

- **Para** $\varrho = \varrho_0$

$$\begin{aligned} \nu > 1 &\longrightarrow G^{+}_{nl} \,. \\ 0 \leq \nu < 1 &\longrightarrow G^{+}_{nl} \,,\ G^{-}_{nl} \,. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Finalmente, vamos verificar que as condições que fazem com que a energia seja conservada são exatamente as mesmas que fazem com que seja positiva e finita. É conveniente definir o campo $\phi'^{\pm}$ por

$$\phi^{\pm} = (cos\ \rho)^{\Delta_\pm}\ \phi'^{\pm} \,. \tag{3.86}$$

Fazendo uso das Eqs.(2.57,2.60,3.13,3.14,3.21,3.39,3.49,3.86), integrando por partes e após álgebra pesada obtemos a seguinte expressão para a energia

$$E^{\pm} = E^{\pm}_{V} + E^{\pm}_{S} \,, \tag{3.87}$$

onde as contribuições de volume e superfície são da forma

$$\begin{aligned} E^{\pm}_{V} &= \frac{1}{2}\, a^{-(d-1)} \int d\Omega_d \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\rho\ (cos\ \rho)^{2(\Delta_\pm - 1)} (tg\ \rho)^{d-1} \\ &\times \ \Big[\ cos^2\rho \left( (\partial_\tau \phi'^{\pm})^2 + (\partial_\rho \phi'^{\pm})^2 + \Delta_\pm \left(\phi'^{\pm}\right)^2 \right) \\ &+ \ \frac{1}{tg^2\rho} \left( (\partial_{\theta_1}\phi'^{\pm})^2 + \sum_{i=2}^{d-2} \frac{1}{\prod_{j=1}^{i-1} sen^2\theta_j}\ (\partial_{\theta_i}\phi'^{\pm})^2 + \frac{1}{\prod_{j=1}^{d-2} sen^2\theta_j}\ (\partial_\varphi \phi'^{\pm})^2 \right) \Big] \,, \end{aligned} \tag{3.88}$$

onde o termo $\sum_{i=2}^{d-2} \frac{1}{\prod_{j=1}^{i-1} sen^2\theta_j}\ (\partial_{\theta_i}\phi'^{\pm})^2$ não está presente para $d = 3$, e

$$\begin{aligned} E^{\pm}_{S} &= a^{-(d-1)} \int d\Omega_d\ (cos\ \rho)^{2(\Delta_\pm - 1)} (tg\ \rho)^{d-1} \\ &\times \ \left[ \left( \varrho\ (2\Delta_\pm + 1) - \frac{\Delta_\pm}{2} \right) cos\ \rho\ sen\ \rho\ (\phi'^{\pm})^2 - \varrho\ cos^2\rho\ \partial_\rho (\phi'^{\pm})^2 \right] \Big|_{\rho=0}^{\rho=\frac{\pi}{2}} \,. \end{aligned} \tag{3.89}$$

Analisaremos primeiro a convergência da energia. Consideramos soluções assintóticas da forma Eq.(3.70), e da Eq.(3.86) vemos que assintoticamente os campos $\phi'^{\pm}$ não dependem de $\rho$. Então uma conta simples mostra que $E^{+}_{V}$ é sempre convergente (levando em conta que $\nu \geq 0$), enquanto que $E^{-}_{V}$ converge só para $\nu < 1$. Note que esses vínculos são consistentes com as Eqs.(3.84,3.85). Os termos de superfície $E_S^{\pm}$ tem o comportamento assintótico

$$E_S^{\pm} \sim \left[\varrho\,(2\Delta_{\pm}+1) - \frac{\Delta_{\pm}}{2}\right] \; lim_{\rho\to\frac{\pi}{2}}\; (cos\;\rho)^{2\Delta_{\pm}-d}\,. \tag{3.90}$$

Então, $E_S^{+}$ é sempre convergente, mas a Eq.(3.50) mostra que $E_S^{-}$ diverge, e é preciso anular o coeficiente multiplicativo na equação acima. Isto fixa

$$\varrho = \varrho_0\,. \tag{3.91}$$

Como já fixamos $\nu < 1$, os termos seguintes na expansão de $E_S^{-}$ em potências de $cos\;\rho$ convergem. Então, do estudo dos termos de volume $E_V^{\pm}$ e superfície $E_S^{\pm}$, obtemos que $E^{+}$ é sempre convergente, enquanto que $E^{-}$ é convergente só para $\varrho = \varrho_0$ e $\nu < 1$. Aliás, note na Eq.(3.88) que os termos de volume $E_V^{\pm}$ são manifestamente positivos, e pelas condições acima a energia é positiva. O resultado final é que as soluções Eqs.(3.84,3.85) que fazem com que a energia seja conservada são também as que fazem com que ela seja finita e positiva.

É interessante fazermos notar, a partir da Eq.(3.51), que o fato de ter teorias estáveis para $\nu \geq 0$ implica que existe estabilidade para

$$\bar{M}^2 \geq -\frac{1}{4}\;a^2 d^2\,. \tag{3.92}$$

Então, como antecipamos na Introdução, em espaços AdS uma teoria com o quadrado da massa negativo pode mesmo assim ser estável, sempre que o valor absoluto da massa não seja grande demais, isto é, que não esteja fora dos limites impostos pela Eq.(3.92).

Da Eq.(3.45) e a existência de modos "regulares" e "irregulares" (vide Eq.(3.73)), obtemos a forma final das soluções normalizáveis da equação de movimento Eq.(3.35)

$$\phi^{\pm} = \sum_{nl\{m\}} \left[a^{\pm}_{nl\{m\}}\phi^{\pm}_{nl\{m\}} + a^{\pm *}_{nl\{m\}}\phi^{\pm *}_{nl\{m\}}\right]\,. \tag{3.93}$$

Tendo resolvido o problema de Cauchy, a quantização pode ser levada a termo da maneira usual, entendendo os coeficientes $a^{\pm}_{nl\{m\}}$ e $a^{\pm *}_{nl\{m\}}$ como operadores que satisfazem as regras de commutação

$$[a^{\pm}_{nl\{m\}}, a^{\pm}_{n'l'\{m'\}}] = [a^{\pm *}_{nl\{m\}}, a^{\pm *}_{n'l'\{m'\}}] = 0\,, \tag{3.94}$$

$$[a^{\pm}_{nl\{m\}}, a^{\pm *}_{n'l'\{m'\}}] = \delta_{nn'}\;\delta_{ll'}\;\delta_{\{m\}\{m'\}}\,. \tag{3.95}$$

A seguir, analisaremos como as propriedades da teoria no bulk estudadas neste capítulo são mapeadas pela correspondência AdS/CFT.

# Capítulo 4

# A Conjetura AdS/CFT

Este capítulo tem por objetivo verificar que a prescrição Eq.(1.6) para a correspondência AdS/CFT fornece, nos casos de teorias de campos escalar e vetorial, funções de dois pontos na borda da forma exigida pela invariância conforme (vide Eqs.(2.46,2.49)). Um outro teste que também pretendemos fazer na prescrição Eq.(1.6), é o de verificar que ela mapeia corretamente na borda a informação sobre a teoria no bulk. No caso do campo escalar, isto quer dizer que a correspondência AdS/CFT deve ser consistente com os resultados obtidos no capítulo anterior. No caso do campo vetorial, esperamos, a partir da equivalência dos modelos Auto-Dual e de Maxwell-Chern-Simons [52], que os operadores conformes correspondentes a esses modelos no bulk tenham a mesma dimensão conforme.

## 4.1 O Campo Escalar

Esta seção baseia-se nos resultados obtidos em [27], onde a relevância das condições de contorno na correspondência AdS/CFT foi estudada no caso particular do campo escalar massivo.

### 4.1.1 Flutuações "Regulares" e "Irregulares" na Correspondência AdS/CFT

Se a conjetura de Maldacena estiver certa, esperamos que a teoria conforme na borda seja equivalente à teoria no bulk. No caso particular do campo escalar em AdS, exigimos que a correspondência AdS/CFT mapeie corretamente as propriedades estudadas no Capítulo 3. A partir disto, Balasubramanian, Kraus e Lawrence [42] estabeleceram o papel das flutuações "regulares" e "irregulares", estudadas no capítulo anterior, na correspondência AdS/CFT. Vimos que, no caso de $\nu > 1$, só as flutuações "regulares", que assintoticamente apresentam o comportamento

$$\phi_Q \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_+} , \tag{4.1}$$

são normalizáveis e então quantizáveis. No entanto, para $0 \leq \nu < 1$, tanto as flutuações "regulares" quanto as "irregulares" são normalizáveis e quantizáveis, e é preciso escolher quais delas irão descrever a teoria

$$\phi_Q \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_+} \quad ou \quad \phi_Q \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_-} . \tag{4.2}$$

A proposta de Balasubramanian, Kraus e Lawrence tem por objetivo esclarecer o papel das flutuações "regulares" e "irregulares" na quantização do campo escalar em AdS e na correspondência AdS/CFT para o campo escalar, e sugere que, quando as flutuações quânticas $\phi_Q$ são as "regulares", então as flutuações "irregulares" são os modos clássicos $\phi_C$ que se acoplam com o operador conforme na borda perante a prescrição Eq.(1.6), e inversamente, quando as flutuações "irregulares" são escolhidos para quantizar a teoria, então as flutuações "regulares" tem de ser os modos clássicos $\phi_C$ que aparecem na prescrição Eq.(1.6). Temos então, que para $\nu > 1$, quando só as flutuações "regulares" são quantizáveis, os únicos modos que aparecem na prescrição Eq.(1.6) são os "irregulares", enquanto que para $0 \leq \nu < 1$ isto depende de quais flutuações são escolhidas para descrever o sistema quântico. Então, os modos quânticos e clássicos tem a seguinte forma assintótica

- **Para** $\nu > 1$

$$\phi_Q \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_+} \quad e \quad \phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_-} . \tag{4.3}$$

- **Para** $0 \leq \nu < 1$

$$\begin{aligned} &\phi_Q \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_+} \quad e \quad \phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_-} , \\ ou \quad &\phi_Q \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_-} \quad e \quad \phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_+} . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Então, no caso de $\nu > 1$ temos só um tipo de modos clássicos, os de forma assintótica $\phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_-}$, que são as fontes para o operador conforme na borda, enquanto que para $0 \leq \nu < 1$ temos dois tipos de modos clássicos, os de formas assintóticas $\phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_-}$ e $\phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_+}$, que contem a informação sobre as teorias conformes na borda. Isto quer dizer que, na correspondência AdS/CFT, esperamos ter, para $\nu > 1$, só um tipo de teoria conforme na borda, aquela que se acopla com os modos de forma assintótica $\phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_-}$, enquanto que, para $0 \leq \nu < 1$, esperamos ter dois tipos distintos de teorias conformes na borda, isto é, aquela que corresponde aos modos de forma assintótica

$\phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_-}$, e aquela que se acopla con os modos que assintoticamente tem o comportamento $\phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_+}$. Obtemos assim um teste que deve ser aplicado a qualquer prescrição que seja utilizada para mapear explícitamente a teoria no bulk na teoria na borda, isto é, ela deve ser capaz de reproduzir corretamente as duas teorias conformes esperadas para $0 \leq \nu < 1$, e a única que é esperada no caso de $\nu > 1$. Assim, o primeiro passo óbvio é testar se a prescrição Eq.(1.6) satisfaz corretamente a exigência acima. Essa prescrição foi utilizada no caso do campo escalar nas Refs.[23][25][26]. Os resultados foram muito bons, isto é, as funções de dois pontos obtidas na borda tinham a forma exigida pela invariância conforme Eq.(2.46). No entanto, os trabalhos [23][25][26] conseguiram reproduzir na borda só um dos dois tipos de operadores conformes esperados, isto é, aquele que se acopla com os modos de forma assintótica $\phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_-}$, ou seja, o que deve aparecer quando os modos "regulares" são os quantizados. Tendo por objetivo fazer aparecer o outro operador conforme esperado, Klebanov e Witten [43] fizeram a proposta de que o funcional gerador do novo operador conforme podia ser obtido a partir do funcional gerador correspondente ao antigo, isto é, aquele da Eq.(1.6), perante uma transformação de Legendre. E de fato esta nova prescrição consegue reproduzir o novo operador conforme esperado, mas no entanto não fornece o vínculo $0 \leq \nu < 1$, pois a transformação de Legendre pode ser aplicada para qualquer valor de $\nu$, e aliás, não pode ser utilizada no caso de $\nu = 0$, e não fixa a normalização do novo gerador na borda. Levando estas objeções em conta, neste capítulo iremos propor uma nova prescrição para a correspondência AdS/CFT. Note que na prescrição usual Eq.(1.6) o operador conforme na borda se acopla com o valor assintótico do campo escalar. Isto corresponde a resolver a equação de movimento para o campo escalar com condições de contorno de Dirichlet. Nossa proposta é para estender a prescrição Eq.(1.6) e considerar, não só condições de contorno de Dirichlet, mas também condições de contorno de Neumann e mistas, que fixam na borda combinações lineares do campo e sua derivada normal. Vamos mostrar que esta nova prescrição fornece resultados consistentes com a condição de unitariedade do campo escalar, que o formalismo fixa as normalizações das ações na borda, e que em particular existem condições de contorno para as quais o operador conforme que se acopla com campos de forma assintótica $\phi_C \sim \tilde{\epsilon}^{\Delta_+}$ é obtido, junto com o vínculo $0 \leq \nu < 1$, que aparece de forma natural, como esperado.

### 4.1.2 As Ações Estacionárias

A partir de agora vamos trabalhar na representação Euclideana do $AdS_{d+1}$ em coordenadas de Poincaré, isto é, faremos uso da métrica Eq.(2.67). Por simplicidade fixamos o radio de $AdS_{d+1}$ igual a um ($a = 1$ na Eq.(2.67)). O primeiro passo para trabalharmos com as condições de contorno de Dirichlet, Neumann e mistas é calcularmos as ações estacionárias correspondentes a cada uma delas. Por simplicidade trabalhamos com o campo escalar minimalmente acoplado com a métrica, isto é, não incluimos na lagrangiana o termo de acoplamento do campo com o fundo. Então, no espaço Euclideano temos a seguinte ação de partida para o campo escalar massivo

$$I_0 = \frac{1}{2}\int d^{d+1}x\,\sqrt{g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi\;+\;m^2\phi^2\right), \tag{4.5}$$

e a equação de movimento correspondente é

$$\left(\nabla^2 - m^2\right)\phi = 0. \tag{4.6}$$

A solução regular no limite $x_0 \to \infty$ é dada por [25]

$$\phi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, x_0^{\frac{d}{2}}\, a(\vec{k})\, K_\nu(kx_0), \tag{4.7}$$

onde $\vec{x} = (x^1, ..., x^d)$, $k = \mid \vec{k} \mid$, $K_\nu$ é a função de Bessel modificada, e $\nu$ é dado pela Eq.(3.51) com $a = 1$ e $\bar{M}^2 = m^2$, ou seja

$$\nu = \sqrt{\frac{d^2}{4} + m^2}\,. \tag{4.8}$$

Da Eq.(4.7) também obtemos

$$\partial_0\phi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, x_0^{\frac{d}{2}-1}\, a(\vec{k})\, \left[\left(\frac{d}{2} + \nu\right) K_\nu(kx_0) - kx_0 K_{\nu+1}(kx_0)\right]. \tag{4.9}$$

Tendo por objetivo obter uma ação estacionária adicionamos à ação $I_0$ um termo de superfície $I_S$ o qual cancela sua variação. Então a ação apropriada fica

$$I = I_0 + I_S. \tag{4.10}$$

Seguindo a prescrição usual [25], consideramos inicialmente um problema de condições de contorno na superfície de $x_0 = \epsilon > 0$, e só faremos o limite de $\epsilon \to 0$ no último estágio das contas. Note que do mesmo jeito que o $\tilde{\epsilon}$ da Eq.(3.32), o $\epsilon = x_0$ é uma medida da distância à borda, mas, no entanto, $\epsilon$ e $\tilde{\epsilon}$ não são exatamente iguais.

A aplicação do princípio variacional à ação $I$ resulta em

$$\delta I = -\int d^d x\; \epsilon^{-d+1}\; \partial_0\phi_\epsilon\; \delta\phi_\epsilon + \delta I_S = 0, \tag{4.11}$$

onde $\phi_\epsilon$ e $\partial_0\phi_\epsilon$ são os valores do campo e sua derivada em $x_0 = \epsilon$ respectivamente. Esta equação vai nos permitir encontrar o termo de superfície $I_S$ apropriado para cada tipo de condição de contorno.

No caso de condição de contorno do tipo Dirichlet, a variação do campo na borda é nula, e o primeiro termo na Eq.(4.11) também o é, razão pela qual a ação usual $I_0$ ja é estacionária. Fazendo uso da equação de movimento, a ação $I$ fica

$$I_D = \frac{1}{2}\int d^{d+1}x\ \partial_\mu\left(\sqrt{g}\ \phi\ \partial^\mu\phi\right) = -\frac{1}{2}\int d^dx\ \epsilon^{-d+1}\ \phi_\epsilon\ \partial_0\phi_\epsilon\,. \tag{4.12}$$

Neste caso, $\partial_0\phi_\epsilon$ na Eq.(4.12) tem de ser escrito em termos do valor Dirichlet $\phi_\epsilon$.

No caso de condição de contorno do tipo Neumann, consideramos um vetor unitário $n^\mu(x_0) = (x_0, \mathbf{0})$, o qual é a normal interna à superfície de $x_0 = \epsilon$. A condição de Neumann fixa o valor de $n^\mu(\epsilon)\partial_\mu\phi_\epsilon \equiv \partial_n\phi_\epsilon$. Então, temos que adicionar à ação usual o seguinte termo de superfície

$$I_S = -\int d^{d+1}x\ \partial_\mu\left(\sqrt{g}\ g^{\mu\nu}\ \phi\ \partial_\nu\phi\right) = \int d^dx\ \epsilon^{-d+1}\ \phi_\epsilon\ \partial_0\phi_\epsilon\,, \tag{4.13}$$

e a ação na borda fica

$$I_N = \frac{1}{2}\int d^dx\ \epsilon^{-d}\ \phi_\epsilon\ \partial_n\phi_\epsilon\,. \tag{4.14}$$

Neste caso, $\phi_\epsilon$ é escrito em termos do valor Neumann $\partial_n\phi_\epsilon$.

Finalmente, consideramos uma condição de contorno que fixa o valor na borda de uma combinação linear do campo e sua derivada normal.

$$\phi(x) + \alpha n^\mu\partial_\mu\phi(x) \equiv \psi^\alpha(x)\,, \tag{4.15}$$

onde $\alpha$ é um coeficiente não nulo arbitrario. Vamos chamar esta condição de contorno de condição mista. Neste caso, adicionamos à ação o seguinte termo de superfície

$$I_S^\alpha = \frac{\alpha}{2}\int d^{d+1}x\ \partial_\mu\left(\sqrt{g}\ g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\ n^\rho\partial_\rho\phi\right) = -\frac{\alpha}{2}\int d^dx\ \epsilon^{-d+2}\ \partial_0\phi_\epsilon\ \partial_0\phi_\epsilon\,, \tag{4.16}$$

e a ação na borda fica

$$I_M^\alpha = -\frac{1}{2}\int d^dx\ \epsilon^{-d+1}\ \psi_\epsilon^\alpha\ \partial_0\phi_\epsilon\,. \tag{4.17}$$

O campo $\partial_0\phi_\epsilon$ tem de ser escrito em termos do valor misto $\psi_\epsilon^\alpha$. Temos então uma família de um parâmetro de termos de superfície, sendo que o princípio variacional não impõe condição nenhuma no $\alpha$, e a ação Eq.(4.17) depende também de $\alpha$.

Nas seguintes seções vamos considerar separadamente cada condição de contorno.

### 4.1.3 Caso Dirichlet

Começamos escrevendo os resultados da literatura prévia para o caso de Dirichlet [25][26]. Seja $\phi_\epsilon(\vec{k})$ a transformada de Fourier do valor Dirichlet do campo $\phi(x)$ na borda. Da Eq.(4.7) obtemos

$$a(\vec{k}) = \frac{\epsilon^{-\frac{d}{2}}\ \phi_\epsilon(\vec{k})}{K_\nu(k\epsilon)}\ , \tag{4.18}$$

e inserindo este resultado na Eq.(4.9) podemos escrever

$$\partial_0\phi_\epsilon(\vec{x}) = \int d^dy\ \phi_\epsilon(\vec{y}) \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\ \epsilon^{-1} \left[\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon\ \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}\right]. \tag{4.19}$$

Obtemos então a seguinte expressão para a ação Eq.(4.12)

$$I_D = -\frac{1}{2}\int d^dx\ d^dy\ \phi_\epsilon(\vec{x})\ \phi_\epsilon(\vec{y})\ \epsilon^{-d} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\ \left[\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon\ \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}\right]. \tag{4.20}$$

O seguinte passo é identificar os termos relevantes na expansão das funcões de Bessel em potências de $k\epsilon$ e integrar em $\vec{k}$. Vamos considerar primeiramente o caso de $\nu \neq 0$, ou seja de $m^2 \neq -\frac{d^2}{4}$. As expansões das funcões de Bessel modificadas relevantes acham-se no Apêndice B. Para $\nu$ não inteiro, fazendo uso da Eq.(B.10) obtemos

$$I_D^{\nu\neq 0} = \frac{\nu}{2^{2\nu}}\ \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \int d^dx\ d^dy\ \phi_\epsilon(\vec{x})\ \phi_\epsilon(\vec{y})\ \epsilon^{2\nu-d} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\ k^{2\nu} + \cdots, \tag{4.21}$$

onde as reticências representam termos de contacto na ação ou termos de ordem superior em $\epsilon$. A integração é levada a cabo fazendo uso da Eq.(B.13). O resultado é

$$I_D^{\nu\neq 0} = -\frac{\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}}\ \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\nu)}{\Gamma(\nu)} \int d^dx\ d^dy\ \phi_\epsilon(\vec{x})\ \phi_\epsilon(\vec{y})\ \frac{\epsilon^{2(\nu-\frac{d}{2})}}{|\ \vec{x}-\vec{y}\ |^{2(\frac{d}{2}+\nu)}}\ + \cdots. \tag{4.22}$$

No caso de $\nu$ inteiro mas não nulo a expansão em potencias de $k\epsilon$ é obtida fazendo uso da Eq.(B.11). Temos então

$$I_D^{\nu\neq 0} = (-1)^\nu\ \frac{2^{1-2\nu}}{\Gamma(\nu)^2} \int d^dx\ d^dy\ \phi_\epsilon(\vec{x})\ \phi_\epsilon(\vec{y})\ \epsilon^{2\nu-d} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\ k^{2\nu}\ ln\ k\ + \cdots. \tag{4.23}$$

Por meio da integração Eq.(B.15) obtemos novamente a Eq.(4.22).

Fazendo o limite [25]

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{\nu-\frac{d}{2}}\phi_\epsilon(\vec{x}) = \phi_0(\vec{x}), \tag{4.24}$$

na Eq.(4.22) e empregando a equivalência AdS/CFT sob a forma

$$\exp\left(-I_{AdS}\right) \equiv \left\langle \exp\left(\int d^d x \; \mathcal{O}(\vec{x}) \; \phi_0(\vec{x})\right)\right\rangle , \tag{4.25}$$

achamos na borda a seguinte função de dois pontos

$$\left\langle \mathcal{O}_D^{\nu\neq 0}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu\neq 0}(\vec{y})\right\rangle = \frac{2\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2(\frac{d}{2}+\nu)}} . \tag{4.26}$$

Então o operador conforme $\mathcal{O}_D^{\nu\neq 0}$ na borda tem dimensão conforme $\frac{d}{2}+\nu$. Da Eq.(4.24), inferimos que perto da borda $\phi$ tem o comportamento $x_0^{d/2-\nu}\phi_0(\vec{x})$, e das Eqs.(4.3,4.4) isto corresponde a escolher as flutuações "regulares" como os modos quânticos. Assim, temos estendido os resultados de [25][26] ao caso de $\nu$ inteiro mas não nulo, e verificamos que a prescrição usual, isto é, a de Dirichlet, reproduz somente a teoria conforme na borda correspondente à teoria quantizada no bulk com os modos "regulares". Nas próximas seções mostraremos como a teoria na borda correspondente aos modos "irregulares" pode ser obtida impondo condições de contorno de Neumann e mistas.

Visando futura referência, notamos que no caso particular de $m = 0$, ou seja de $\nu = \frac{d}{2}$ , a Eq.(4.26) fica

$$\left\langle \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{y})\right\rangle = \frac{d}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2d}} , \tag{4.27}$$

de onde inferimos que o operador $\mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}$ tem dimensão conforme $d$.

Vamos considerar finalmente o caso de $\nu = 0$, ou seja de $m^2 = -\frac{d^2}{4}$ . Devido ao fato da função de dois pontos Eq.(4.26) ter um zero duplo para $\nu = 0$, argumentou-se [43] que o resultado certo é obtido introduzindo uma normalização no operador na borda. No lugar disso, nós vamos fazer uso da expansão da função de Bessel $K_0$ e mostrar que não é preciso introduzir normalização nenhuma. Empregando as Eqs.(B.11,B.12) obtemos

$$\begin{aligned} k\epsilon \, \frac{K_1(k\epsilon)}{K_0(k\epsilon)} &= -\frac{1}{ln\ \epsilon}\left[1 + \frac{(k\epsilon)^2}{2}\ ln\ \epsilon + O\left(\epsilon^2\right)\right]\left[1 - \frac{ln\ k\ -\ ln\ 2\ +\ \gamma}{ln\ \epsilon} + O\left(\epsilon^2\right)\right] \\ &= \frac{ln\ k}{ln^2\epsilon} + \cdots , \end{aligned} \tag{4.28}$$

onde as reticências representam termos de contacto ou termos de ordem superior. Substituindo na Eq.(4.20) encontramos

$$I_D^{\nu=0} = \frac{1}{2}\int d^d x \; d^d y \; \phi_\epsilon(\vec{x}) \; \phi_\epsilon(\vec{y}) \; \frac{\epsilon^{-d}}{ln^2\epsilon} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \; e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \; ln\ k \; + \; \cdots . \tag{4.29}$$

Fazendo uso da Eq.(B.15) integramos em $\vec{k}$ e obtemos

$$I_D^{\nu=0} = -\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int d^dx\, d^dy\, \phi_\epsilon(\vec{x})\, \phi_\epsilon(\vec{y})\, \frac{\epsilon^{-d}}{ln^2\epsilon}\, \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^d} + \cdots. \tag{4.30}$$

Fazendo o limite

$$\lim_{\epsilon\to 0} (\epsilon^{\frac{d}{2}}\, ln\, \epsilon)^{-1}\, \phi_\epsilon(\vec{x}) = \phi_0(\vec{x}), \tag{4.31}$$

e empregando a equivalência AdS/CFT achamos a seguinte função de dois pontos na borda

$$\left\langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu=0}(\vec{y})\right\rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\, \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^d}\,. \tag{4.32}$$

Então o operador conforme $\mathcal{O}_D^{\nu=0}$ tem dimensão conforme $\frac{d}{2}$ como esperado. Como foi antecipado em [25], o campo escalar comporta-se perto da borda como $x_0^{d/2}\ln x_0\, \phi_0(\vec{x})$, devido ao logaritmo presente na expansão da função $K_0$.

### 4.1.4 Caso Neumann

Fazendo uso da condição de Neumann a Eq.(4.9) fornece

$$a(\vec{k}) = \frac{\epsilon^{-\frac{d}{2}}\, \partial_n\phi_\epsilon(\vec{k})}{(\frac{d}{2}+\nu)K_\nu(k\epsilon) - k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)}\,, \tag{4.33}$$

e substituindo na Eq.(4.7) obtemos

$$\phi_\epsilon(\vec{x}) = \int d^dy\, \partial_n\phi_\epsilon(\vec{y}) \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\, \frac{1}{\frac{d}{2}+\nu-k\epsilon\,\frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}\,. \tag{4.34}$$

Então a ação Eq.(4.14) fica

$$I_N = \frac{1}{2}\int d^dx\, d^dy\, \partial_n\phi_\epsilon(\vec{x})\, \partial_n\phi_\epsilon(\vec{y})\, \epsilon^{-d} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\, \frac{1}{\frac{d}{2}+\nu-k\epsilon\,\frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}\,. \tag{4.35}$$

Tendo por objetivo ficar com os termos relevantes das expansões das funções de Bessel, precisamos considerar os casos massivo e não massivo separadamente.

No caso não massivo temos $\nu = \frac{d}{2}$. Para $d$ impar fazemos uso da Eq.(B.10), entretanto para $d$ par empregamos a Eq.(B.11). Nos dois casos obtemos, para $d > 2$, o seguinte resultado

$$\frac{1}{\frac{d}{2}+\nu-k\epsilon\,\frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} = -(d-2)(k\epsilon)^{-2} + \cdots, \tag{4.36}$$

a menos de termos de contacto ou termos de ordem superior em $\epsilon$. Substituindo na Eq.(4.35) obtemos

$$I_N^{\nu=\frac{d}{2}} = -\frac{d-2}{2}\int d^dx\, d^dy\; \partial_n\phi_\epsilon(\vec{x})\; \partial_n\phi_\epsilon(\vec{y})\; \epsilon^{-d-2}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\, k^{-2} + \cdots, \qquad (4.37)$$

e a integração em $\vec{k}$ fornece

$$I_N^{\nu=\frac{d}{2}} = -\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{4\pi^{\frac{d}{2}}}\int d^dx\, d^dy\; \partial_n\phi_\epsilon(\vec{x})\; \partial_n\phi_\epsilon(\vec{y})\; \frac{\epsilon^{-d-2}}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2\frac{d-2}{2}}} + \cdots . \qquad (4.38)$$

Fazendo o limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\epsilon^{-\frac{d}{2}-1}\; \partial_n\phi_\epsilon(\vec{x}) = \partial_n\phi_0(\vec{x}), \qquad (4.39)$$

e empregando a equivalência AdS/CFT da forma

$$\exp\left(-I_{AdS}\right) \equiv \left\langle \exp\left(\int d^dx\; \mathcal{O}(\vec{x})\; \partial_n\phi_0(\vec{x})\right)\right\rangle, \qquad (4.40)$$

encontramos a seguinte função de dois pontos na borda

$$\left\langle \mathcal{O}_N^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{x})\mathcal{O}_N^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{y})\right\rangle = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\; \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2\frac{d-2}{2}}} . \qquad (4.41)$$

Então para $d > 2$, par ou impar, a dimensão conforme do operador $\mathcal{O}_N^{\nu=\frac{d}{2}}$ na borda é precisamente a cota de unitariedade $\frac{d-2}{2}$. A Eq.(4.39) mostra que perto da borda o campo escalar tem o comportamento $x_0^{d/2+1}\partial_n\phi_0(\vec{x})$, e vemos na Eq.(4.4) que este é um caso particular, o de $\Delta_+ = \frac{d}{2}+1$ e $\Delta_- = \frac{d-2}{2}$, das formas assintóticas que devem aparecer quando as flutuações "irregulares" são escolhidas para quantizar o sistema. No entanto, note que este caso corresponde ao valor de $\nu = 1$, que é um valor singular, pois fica no limite dos dois intervalos $\nu > 1$ e $0 \leq \nu < 1$, e com respeito ao qual não conseguimos obter nenhuma informação no capítulo anterior, no qual trabalhamos em coordenadas globais. É também curioso o fato de ter obtido os resultados acima no caso não massivo.

Comparando as Eqs.(4.27,4.41), vemos que as dimensões conformes dos operadores na borda para os casos de Dirichlet e Neumann não massivos são diferentes, e que no último caso a cota de unitariedade é alcançada.

No caso do campo escalar massivo (ou seja de $\nu \neq \frac{d}{2}$), vamos considerar primeiro o caso de $\nu \neq 0$, quer dizer de $m^2 \neq -\frac{d^2}{4}$. Temos novamente que estudar separadamente os casos de $\nu$ não inteiro e de $\nu$ inteiro mas não nulo. Em ambos os casos encontramos

$$I_N^{\nu\neq 0,\frac{d}{2}} = -\frac{\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\left(\frac{d}{2}-\nu\right)^2} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\nu)}{\Gamma(\nu)} \int d^dx\, d^dy\, \partial_n\phi_\epsilon(\vec{x})\, \partial_n\phi_\epsilon(\vec{y}) \frac{\epsilon^{2(\nu-\frac{d}{2})}}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2(\frac{d}{2}+\nu)}} + \cdots . \tag{4.42}$$

Fazendo o limite

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{\nu-\frac{d}{2}}\, \partial_n\phi_\epsilon(\vec{x}) = \partial_n\phi_0(\vec{x}), \tag{4.43}$$

e empregando a equivalência AdS/CFT Eq.(4.40), obtemos a seguinte função de dois pontos na borda

$$\left\langle \mathcal{O}_N^{\nu\neq 0,\frac{d}{2}}(\vec{x})\mathcal{O}_N^{\nu\neq 0,\frac{d}{2}}(\vec{y}) \right\rangle = \frac{2\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\left(\frac{d}{2}-\nu\right)^2} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2(\frac{d}{2}+\nu)}} . \tag{4.44}$$

Então o operador $\mathcal{O}_N^{\nu\neq 0,\frac{d}{2}}$ tem dimensão conforme $\frac{d}{2}+\nu$ e o campo $\phi$ comporta-se perto da borda como $x_0^{d/2-\nu}\partial_n\phi_0(\vec{x})$, isto é, obtimos novamente uma teoria conforme que corresponde a escolher as flutuações "regulares" como os modos quânticos do sistema. A comparação das Eqs.(4.26,4.44) mostra que as normalizações das funções de dois pontos na borda dos casos Dirichlet e Neumann massivos com $\nu \neq 0$ em geral são diferentes.

Vamos considerar agora o caso de $\nu = 0$ , ou seja de $m^2 = -\frac{d^2}{4}$. Seguindo os passos ja usuais obtemos

$$I_N^{\nu=0} = -\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{d^2\pi^{\frac{d}{2}}} \int d^dx\, d^dy\, \partial_n\phi_\epsilon(\vec{x})\, \partial_n\phi_\epsilon(\vec{y}) \frac{\epsilon^{-d}}{ln^2\epsilon} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^d} + \cdots . \tag{4.45}$$

Fazendo o limite

$$\lim_{\epsilon\to 0} (\epsilon^{\frac{d}{2}}\, ln\, \epsilon)^{-1}\, \partial_n\phi_\epsilon(\vec{x}) = \partial_n\phi_0(\vec{x}), \tag{4.46}$$

e empregando a equivalência AdS/CFT Eq.(4.40), obtemos a seguinte função de dois pontos

$$\left\langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(\vec{x})\mathcal{O}_N^{\nu=0}(\vec{y}) \right\rangle = \frac{2\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{d^2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^d} . \tag{4.47}$$

Então o operador conforme $\mathcal{O}_N^{\nu=0}$ na borda tem dimensão conforme $\frac{d}{2}$ . Perto da borda o campo escalar tem um comportamento logarítmico $x_0^{d/2}\ln x_0\ \partial_n\phi_0(\vec{x})$. Novamente encontramos que as normalizações das funções de dois pontos correspondentes aos casos de Dirichlet e Neumann com $\nu = 0$ em geral são diferentes.

### 4.1.5 Caso Misto

Fazendo uso da condição de contorno mista Eq.(4.15) e das Eqs.(4.7,4.9) obtemos

$$a(\vec{k}) = \frac{\epsilon^{-\frac{d}{2}}\ \psi_\epsilon(\vec{k})}{[\beta\,(\alpha,\nu) + 2\alpha\nu]K_\nu(k\epsilon) - \alpha k\epsilon K_{\nu+1}(k\epsilon)}\,, \tag{4.48}$$

onde $\beta(\alpha,\nu)$ é definido como

$$\beta\,(\alpha,\nu) = 1 + \alpha\left(\frac{d}{2} - \nu\right). \tag{4.49}$$

Substituindo a Eq.(4.48) na Eq.(4.9) obtemos

$$\partial_0\phi_\epsilon(\vec{x}) = \int d^dy\ \psi_\epsilon(\vec{y}) \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\ \epsilon^{-1}\ \frac{\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon\ \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}{\beta\,(\alpha,\nu) + 2\alpha\nu - \alpha k\epsilon\ \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}\,. \tag{4.50}$$

Fazendo uso desta equação, podemos escrever a ação Eq.(4.17) na forma

$$I_M = -\frac{1}{2}\int d^dx\ d^dy\ \psi_\epsilon(\vec{x})\ \psi_\epsilon(\vec{y})\ \epsilon^{-d}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\ e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\ \frac{\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon\ \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}{\beta\,(\alpha,\nu) + 2\alpha\nu - \alpha k\epsilon\ \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}}\,. \tag{4.51}$$

Tendo por objetivo encontrar os termos relevantes nas expansões das funções de Bessel, vamos considerar separadamente os casos de $\beta = 0$ e de $\beta \neq 0$.

Vamos começar pelo caso de $\beta = 0$, no qual temos $\alpha = -1/(\frac{d}{2} - \nu)$ e $m \neq 0$. Consideramos primeiro o caso massivo com $\nu \neq 0, \frac{d}{2}$ . De novo, é necessário estudar separadamente os casos de $\nu$ não inteiro e $\nu$ inteiro mas não nulo. Estudamos primeiro o caso de $\nu$ não inteiro. Fazendo uso da Eq.(B.10) com $\beta = 0$ obtemos

$$\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon\ \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} = \frac{d}{2} - \nu\ +\ \cdots, \tag{4.52}$$

e

$$\frac{1}{\beta\,(\alpha,\nu) + 2\alpha\nu - \alpha k\epsilon\ \frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} = -\frac{\frac{d}{2} - \nu}{\frac{1}{2(1-\nu)}(k\epsilon)^2 - 2^{1-2\nu}\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu)}(k\epsilon)^{2\nu}\ +\ \cdots}\,. \tag{4.53}$$

Note que quando $0 < \nu < 1$ o termo dominante no denominador do lado direito da Eq.(4.53) é $(k\epsilon)^{2\nu}$. Substituindo na Eq.(4.51) obtemos

$$I_M^{\beta=0,0<\nu<1} \;=\; -2^{2\nu-2}\left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1-\nu)}$$

$$\times \quad \int d^d x \, d^d y \, \psi_\epsilon(\vec{x}) \, \psi_\epsilon(\vec{y}) \, \epsilon^{-2\nu-d} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \, k^{-2\nu} + \cdots . \tag{4.54}$$

A integração em $\vec{k}$ fornece

$$I_M^{\beta=0,0<\nu<1} = -\frac{1}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \frac{\Gamma(\frac{d}{2} - \nu)}{\Gamma(1-\nu)} \int d^d x \, d^d y \, \psi_\epsilon(\vec{x}) \, \psi_\epsilon(\vec{y}) \, \frac{\epsilon^{-2(\nu+\frac{d}{2})}}{\mid \vec{x} - \vec{y} \mid^{2(\frac{d}{2}-\nu)}} + \cdots . \tag{4.55}$$

Para $\nu > 1$, o termo dominante no denominador do lado direito da Eq.(4.53) é $(k\epsilon)^2$ e a Eq.(4.51) fornece

$$\begin{aligned} I_M^{\beta=0,\nu>1} &= -(\nu - 1) \left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \\ &\times \int d^d x \, d^d y \, \psi_\epsilon(\vec{x}) \, \psi_\epsilon(\vec{y}) \, \epsilon^{-d-2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \, e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \, k^{-2} + \cdots . \end{aligned} \tag{4.56}$$

Integrando em $\vec{k}$ para $d > 2$ obtemos

$$I_M^{\beta=0,\nu>1} = -(\nu - 1) \left(\frac{d}{2} - \nu\right)^2 \frac{\Gamma(\frac{d-2}{2})}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int d^d x \, d^d y \, \psi_\epsilon(\vec{x}) \, \psi_\epsilon(\vec{y}) \, \frac{\epsilon^{-d-2}}{\mid \vec{x} - \vec{y} \mid^{2\frac{d-2}{2}}} + \cdots . \tag{4.57}$$

No caso de $\nu$ inteiro e não nulo fazemos uso da Eq.(B.11). Os termos logarítmicos anulam-se no limite de $\epsilon \to 0$ e vemos que o mesmo resultado Eq.(4.57) é válido para $\nu$ inteiro e $\nu$ não inteiro.

Agora, na ação Eq.(4.55) fazemos o limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-\nu-\frac{d}{2}} \psi_\epsilon(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}) \ , \tag{4.58}$$

enquanto que na ação Eq.(4.57) o limite que devemos fazer é

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{-\frac{d}{2}-1} \psi_\epsilon(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}). \tag{4.59}$$

Fazendo uso da equivalência AdS/CFT

$$\exp\left(-I_{AdS}\right) \equiv \left\langle \exp\left(\int d^d x \; \mathcal{O}(\vec{x}) \; \psi_0(\vec{x})\right) \right\rangle \ , \tag{4.60}$$

obtemos a seguinte função de dois pontos na borda

$$\left\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0,0<\nu<1}(\vec{x})\mathcal{O}_M^{\beta=0,0<\nu<1}(\vec{y})\right\rangle = \frac{1}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\left(\frac{d}{2}-\nu\right)^2 \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2(\frac{d}{2}-\nu)}}, \quad (4.61)$$

$$\left\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu>1}(\vec{x})\mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu>1}(\vec{y})\right\rangle = (\nu-1)\left(\frac{d}{2}-\nu\right)^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2\frac{d-2}{2}}}. \quad (4.62)$$

Então, os operadores $\mathcal{O}_M^{\beta=0,0<\nu<1}$ e $\mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu>1}$ tem dimensões conformes $\frac{d}{2}-\nu$ e $\frac{d-2}{2}$ respectivamente. Quando $0<\nu<1$ o campo $\phi$ tem comportamento $x_0^{d/2+\nu}\psi_0(\vec{x})$ perto da borda. A derivação deste comportamento assintótico é um fato bastante surpreendente. Note na Eq.(4.4) que conseguimos obter a teoria conforme correspondente à teoria no bulk na qual as flutuações "irregulares" são quantizadas, e mais ainda, o vínculo de $0 \leq \nu < 1$ surge naturalmente, e não precisa ser adicionado por fora do formalismo, como acontece com a prescrição da transformada de Legendre [43]. É importante notar que o vínculo de $\nu < 1$ na Eq.(4.61) é consistente com a cota de unitariedade.

No caso de $\nu > 1$, obtemos para o operador na borda a dimensão conforme $\frac{d-2}{2}$, quer dizer a cota de unitariedade. Esta dimensão conforme já tinha sido encontrada no caso de Neumann não massivo Eq.(4.41), mas agora achamos uma normalização diferente da função de dois pontos. Também podemos ver que o comportamento do campo escalar perto da borda é como esperávamos que fosse. Como no caso de Neumann não massivo, salientamos que este é um caso particular, o de $\Delta_+ = \frac{d}{2}+1$ e $\Delta_- = \frac{d-2}{2}$, das teorias conformes que devem aparecer quando as flutuações "irregulares" são escolhidas para quantizar o sistema, e que este caso corresponde ao valor singular de $\nu = 1$, que fica no limite dos dois intervalos de $\nu > 1$ e $0 \leq \nu < 1$. A diferença do que acontece no caso de Neumann, onde a cota de unitariedade aparece para o caso não massivo, neste caso a cota de unitariedade aparece para $m^2 > 1 - \frac{d^2}{4}$ .

Agora consideramos o caso de $\nu = 0$, quer dizer de $m^2 = -\frac{d^2}{4}$ , mantendo ainda $\alpha = -\frac{2}{d}$. Obtemos o seguinte resultado

$$I_M^{\beta=0,\nu=0} = -\frac{d^2\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{16\pi^{\frac{d}{2}}} \int d^dx\, d^dy\, \psi_\epsilon(\vec{x})\, \psi_\epsilon(\vec{y}) \frac{\epsilon^{-d}}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^d} + \cdots. \quad (4.63)$$

Fazendo o limite

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{-\frac{d}{2}}\psi_\epsilon(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}), \quad (4.64)$$

e empregando a equivalência AdS/CFT Eq.(4.60), obtemos a seguinte função de dois pontos na borda

$$\left\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu=0}(\vec{x})\mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu=0}(\vec{y})\right\rangle = \frac{d^2\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{8\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^d}. \quad (4.65)$$

Então, o operador conforme na borda $\mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu=0}$ tem dimensão conforme $\frac{d}{2}$ . Neste caso, o comportamento do campo na borda é $x_0^{d/2}\psi_0(\vec{x})$ e não aparece termo logarítmico nenhum. Mais uma vez, encontramos que a normalização da função de dois pontos é diferente daquelas dos casos Dirichlet e Neumann correspondentes.

Vamos agora considerar o caso de $\beta \neq 0$, começando pelo caso de $\nu \neq 0$. Novamente os casos de $\nu$ não inteiro e $\nu$ inteiro mas não zero devem ser estudados separadamente. Começamos pelo caso de $\nu$ não inteiro. Escrevendo reticências para os termos de contacto ou de ordem superior em $\epsilon$ temos que

$$\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon\,\frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} = \left(\frac{d}{2} - \nu\right)\left[1 - \frac{2^{1-2\nu}}{\frac{d}{2} - \nu}\,\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu)}\,(k\epsilon)^{2\nu} + \cdots\right], \tag{4.66}$$

e

$$\frac{1}{\beta\,(\alpha,\nu) + 2\alpha\nu - \alpha k\epsilon\,\frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} = \frac{1}{\beta(\alpha,\nu)}\left[1 + \frac{2^{1-2\nu}\alpha}{\beta(\alpha,\nu)}\,\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu)}\,(k\epsilon)^{2\nu} + \cdots\right]. \tag{4.67}$$

Substituindo na Eq.(4.51) obtemos

$$\begin{aligned} I_M^{\beta\neq 0,\nu\neq 0,\frac{d}{2}} &= \frac{1}{2^{2\nu}}\,\frac{1}{\beta^2(\alpha,\nu)}\,\frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu)} \\ &\times \int d^dx\,d^dy\,\psi_\epsilon(\vec{x})\,\psi_\epsilon(\vec{y})\,\epsilon^{2\nu-d}\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\,k^{2\nu} + \cdots. \end{aligned} \tag{4.68}$$

A integração em $\vec{k}$ resulta em

$$I_M^{\beta\neq 0,\nu\neq 0,\frac{d}{2}} = -\frac{\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}}\,\frac{1}{\beta^2(\alpha,\nu)}\,\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\nu)}{\Gamma(\nu)}\int d^dx\,d^dy\,\psi_\epsilon(\vec{x})\,\psi_\epsilon(\vec{y})\,\frac{\epsilon^{2(\nu-\frac{d}{2})}}{\mid\vec{x}-\vec{y}\mid^{2(\frac{d}{2}+\nu)}} + \cdots. \tag{4.69}$$

Vamos considerar agora o caso de $\nu$ inteiro mas não zero. Temos

$$\frac{d}{2} + \nu - k\epsilon\,\frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)} = \left(\frac{d}{2} - \nu\right)\left[1 - (-1)^\nu\,\frac{2^{2-2\nu}}{\frac{d}{2} - \nu}\,\frac{1}{\Gamma^2(\nu)}\,(k\epsilon)^{2\nu}\,ln\;k + \cdots\right], \tag{4.70}$$

e

$$\frac{1}{\beta\,(\alpha,\nu) + 2\alpha\nu - \alpha k\epsilon\,\frac{K_{\nu+1}(k\epsilon)}{K_\nu(k\epsilon)}} = \frac{1}{\beta(\alpha,\nu)}\left[1 + (-1)^\nu\,\frac{2^{2-2\nu}\alpha}{\beta(\alpha,\nu)}\,\frac{1}{\Gamma^2(\nu)}\,(k\epsilon)^{2\nu}\,ln\;k + \cdots\right]. \tag{4.71}$$

Sustituindo na Eq.(4.51) obtemos

$$
\begin{aligned}
I_M^{\beta\neq 0,\nu\neq 0,\frac{d}{2}} &= (-1)^\nu \, 2^{1-2\nu} \frac{1}{\beta^2(\alpha,\nu)} \frac{1}{\Gamma^2(\nu)} \\
&\times \int d^dx \, d^dy \, \psi_\epsilon(\vec{x}) \, \psi_\epsilon(\vec{y}) \, \epsilon^{2\nu-d} \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \, k^{2\nu} \, ln \, k + \cdots .
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

Fazendo uso da Eq.(B.15) obtemos a Eq.(4.69) de novo. Então, ambos os casos de $\nu$ inteiro e $\nu$ não inteiro fornecem o mesmo resultado.

Fazendo agora o limite

$$
\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{\nu-\frac{d}{2}} \psi_\epsilon(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}), \tag{4.73}
$$

e empregando a equivalência AdS/CFT Eq.(4.60), encontramos a seguinte função de dois pontos na borda

$$
\left\langle \mathcal{O}_M^{\beta\neq 0,\nu\neq 0,\frac{d}{2}}(\vec{x}) \mathcal{O}_M^{\beta\neq 0,\nu\neq 0,\frac{d}{2}}(\vec{y}) \right\rangle = \frac{2\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\beta^2(\alpha,\nu)} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\nu)}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y} \mid^{2(\frac{d}{2}+\nu)}} , \tag{4.74}
$$

do qual concluimos que o operador $\mathcal{O}_M^{\beta\neq 0,\nu\neq 0,\frac{d}{2}}$ tem dimensão conforme $\frac{d}{2}+\nu$. Vemos na Eq.(4.73) que o comportamento de $\phi$ na região de $x_0$ pequeno é como esperado para o caso no qual as flutuações "regulares" são quantizadas. A comparação das Eqs.(4.26,4.44,4.74) permite concluir que as normalizações das funções de dois pontos na borda correspondentes aos casos massivos de Dirichlet, Neumann e misto de $\beta \neq 0$, todos com $\nu \neq 0$, são differentes.

Vamos considerar agora o caso de $\nu = 0$, quer dizer de $m^2 = -\frac{d^2}{4}$. Temos

$$
I_M^{\beta\neq 0,\nu=0} = -\frac{1}{\beta^2(\alpha,0)} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{4\pi^{\frac{d}{2}}} \int d^dx \, d^dy \, \psi_\epsilon(\vec{x}) \, \psi_\epsilon(\vec{y}) \, \frac{\epsilon^{-d}}{ln^2\epsilon} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y} \mid^d} + \cdots . \tag{4.75}
$$

Fazendo o limite

$$
\lim_{\epsilon\to 0} (\epsilon^{\frac{d}{2}} \, ln \, \epsilon)^{-1} \, \psi_\epsilon(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}), \tag{4.76}
$$

e empregando a correspondência AdS/CFT Eq.(4.60), obtemos a seguinte função de dois pontos na borda

$$
\left\langle \mathcal{O}_M^{\beta\neq 0,\nu=0}(\vec{x}) \mathcal{O}_M^{\beta\neq 0,\nu=0}(\vec{y}) \right\rangle = \frac{1}{\beta^2(\alpha,0)} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y} \mid^d} , \tag{4.77}
$$

pelo que o operador $\mathcal{O}_M^{\beta\neq 0,\nu=0}$ tem dimensão conforme $\frac{d}{2}$ . Para $x_0$ pequeno temos um comportamento logarítmico $x_0^{d/2}\ln x_0\ \psi_0(\vec{x})$. De novo, a normalização da função de dois pontos na borda é diferente das correspondentes dos casos de Dirichlet, Neumann e misto de $\beta = 0$.

No caso não massivo temos $\nu = \frac{d}{2}$ . Para $d$ impar fazemos uso das Eqs.(B.10,B.13), enquanto que para $d$ par empregamos as Eqs.(B.11,B.15). Em ambos os casos obtemos

$$I_M^{\nu=\frac{d}{2}} = -\frac{d}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(\frac{d}{2})}\int d^dx\ d^dy\ \psi_\epsilon(\vec{x})\ \psi_\epsilon(\vec{y})\ \frac{1}{\mid\vec{x}-\vec{y}\mid^{2d}} + \cdots. \tag{4.78}$$

Fazendo o limite

$$\lim_{\epsilon\to 0}\ \psi_\epsilon(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}), \tag{4.79}$$

e empregando a correspondência AdS/CFT Eq.(4.60), obtemos a seguinte função de dois pontos na borda

$$\left\langle \mathcal{O}_M^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{x})\mathcal{O}_M^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{y})\right\rangle = \frac{d}{\pi^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(\frac{d}{2})}\frac{1}{\mid\vec{x}-\vec{y}\mid^{2d}}\ . \tag{4.80}$$

Então o operador $\mathcal{O}_M^{\nu=\frac{d}{2}}$ tem dimensão conforme $d$. O campo escalar aproxima-se da borda do jeito esperado $\psi_0(\vec{x})$. Da comparação das Eqs.(4.27,4.80), concluimos que as CFT's correspondentes aos casos não massivos de Dirichlet e mista são iguais.

## 4.2 O Campo Vetorial

Esta seção baseia-se nos resultados obtidos em [32], onde as teorias vetoriais em três dimensões formuladas em espaços AdS e contendo termos de Chern-Simons foram estudadas no contexto da correspondência AdS/CFT.

### 4.2.1 A Teoria de Proca

Nesta seção descrevemos os resultados obtidos em [29] para o campo vetorial massivo. Eles irão sermos úteis na hora de estudar as teorias de Chern-Simons nas seções seguintes. A ação para a Teoria de Proca é dada por

$$I_P = \int d^{d+1}x\,\sqrt{g}\left(\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\,\tilde{m}^2 A_\mu A^\mu\right), \tag{4.81}$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Vamos estudar o caso de condição de contorno de Dirichlet no campo potencial $A_\mu$ . Nesse caso, é facil verificar que a ação Eq.(4.81) é estacionária.

Da Eq.(4.81) obtemos as seguintes equações de movimento

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} - \tilde{m}^2 A^\nu = 0, \tag{4.82}$$

de onde para $\tilde{m} \neq 0$ temos

$$\nabla_\mu A^\mu = 0. \tag{4.83}$$

As soluções regulares no limite de $x_0 \to \infty$ são da forma

$$A_0(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, x_0^{\frac{d}{2}}\, a_0(\vec{k})\, K_{\tilde{\nu}}(kx_0), \tag{4.84}$$

$$A_i(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, x_0^{\frac{d}{2}-1} \left( a_i(\vec{k})\, K_{\tilde{\nu}}(kx_0) + i a_0(\vec{k})\, \frac{k_i}{k}\, x_0\, K_{\tilde{\nu}+1}(kx_0) \right), \tag{4.85}$$

onde

$$\tilde{\nu} = \left[ \frac{(d-2)^2}{4} + \tilde{m}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.86}$$

Inserindo as Eqs.(4.84,4.85) na Eq.(4.83) obtemos

$$i k_i a_i(\vec{k}) = \left( \tilde{\nu} - \frac{d}{2} + 1 \right) a_0(\vec{k}). \tag{4.87}$$

Fazendo uso das Eqs.(4.84,4.85,4.87) podemos escrever os coeficientes $a_\mu(\vec{k})$ em termos da transformada de Fourier do campo potencial na borda em $x_0 = \epsilon$, como já fizeramos no caso do campo escalar com condição de Dirichlet. Obtemos

$$a_0(\vec{k}) = \frac{1}{K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)}\, \frac{i\epsilon^{-\frac{d}{2}+1} k_i A_{\epsilon,i}(\vec{k})}{\tilde{\nu} - \frac{d}{2} + 1 - k\epsilon \frac{K_{\tilde{\nu}+1}(k\epsilon)}{K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)}}, \tag{4.88}$$

$$a_i(\vec{k}) = \frac{\epsilon^{-\frac{d}{2}+1} A_{\epsilon,j}(\vec{k})}{K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)} \left[ \delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{k^2}\, \frac{1}{\tilde{\nu} - \frac{d}{2} + 1 - k\epsilon \frac{K_{\tilde{\nu}+1}(k\epsilon)}{K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)}}\, k\epsilon \frac{K_{\tilde{\nu}+1}(k\epsilon)}{K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)} \right]. \tag{4.89}$$

Fazendo uso das equações de movimento escrevemos a ação Eq.(4.81) como um termo de superfície

$$I_P = \frac{1}{2} \int d^{d+1}x\, \partial_\mu (\sqrt{g} F^{\mu\nu} A_\nu) \;=\; -\frac{1}{2} \int d^d x\, \epsilon^{-d+3} A_{\epsilon,i} F_{\epsilon,0i}\,. \tag{4.90}$$

Aliás, das Eqs.(4.84,4.85) obtemos

$$
\begin{aligned}
F_{\epsilon,0i}(\vec{x}) &= \left(\frac{d}{2}-\tilde{\nu}-1\right)\frac{1}{\epsilon}A_{\epsilon,i}(\vec{x}) \\
&+ \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}a_i(\vec{k})\,\epsilon^{\frac{d}{2}-2}\,K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)\left[2\tilde{\nu}-k\epsilon\frac{K_{\tilde{\nu}+1}(k\epsilon)}{K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)}\right]. \qquad (4.91)
\end{aligned}
$$

Fazendo uso das Eqs.(4.89,4.90,4.91) chegamos ao seguinte resultado para a ação

$$
\begin{aligned}
I_P &= -\frac{1}{2}\int d^dx\, d^dy A_{\epsilon,i}(\vec{x})A_{\epsilon,j}(\vec{y})\epsilon^{-d+2} \\
&\times \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\,[\left(\tilde{\nu}+\frac{d-2}{2}-k\epsilon\frac{K_{\tilde{\nu}+1}(k\epsilon)}{K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)}\right)\delta_{ij} \\
&+ \frac{k_ik_j}{k^2}\,\frac{2\tilde{\nu}-k\epsilon\frac{K_{\tilde{\nu}+1}(k\epsilon)}{K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)}}{\tilde{\nu}-\frac{d-2}{2}-k\epsilon\frac{K_{\tilde{\nu}+1}(k\epsilon)}{K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)}}\,k\epsilon\frac{K_{\tilde{\nu}+1}(k\epsilon)}{K_{\tilde{\nu}}(k\epsilon)}\,]\,. \qquad (4.92)
\end{aligned}
$$

Como no caso do campo escalar, o paso seguinte é identificar os termos relevantes na expansão das funções de Bessel. Vamos considerar o caso de $\tilde{\nu}$ não inteiro. Fazendo uso da Eq.(B.10) obtemos

$$
\begin{aligned}
I_P &= \frac{2^{-2\tilde{\nu}}}{\tilde{\nu}+\frac{d-2}{2}}\,\frac{\Gamma(1-\tilde{\nu})}{\Gamma(\tilde{\nu})}\int d^dx\, d^dy\, A_{\epsilon,i}(\vec{x})A_{\epsilon,j}(\vec{y})\epsilon^{2\tilde{\nu}-d+2} \\
&\times \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,e^{-i\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}\,\left[\left(\tilde{\nu}+\frac{d-2}{2}\right)\delta_{ij}-2\tilde{\nu}\,\frac{k_ik_j}{k^2}\right]k^{2\tilde{\nu}}+\cdots, \qquad (4.93)
\end{aligned}
$$

onde as reticências representam termos de contacto ou termos de ordem superior. Finalmente a integração no momento Eqs.(B.13,B.14) fornece o seguinte resultado

$$
\begin{aligned}
I_P &= -\,c_P\Delta_P\int d^dxd^dy\,A_{\epsilon,i}(\vec{x})\,A_{\epsilon,j}(\vec{y})\,\frac{\epsilon^{2\tilde{\nu}-d+2}}{\mid\vec{x}-\vec{y}\mid^{2\Delta_P}}\left(\delta_{ij}-2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{\mid\vec{x}-\vec{y}\mid^2}\right) \\
&+\ ..., \qquad (4.94)
\end{aligned}
$$

onde

$$\Delta_P=\tilde{\nu}+\frac{d}{2}\,, \qquad (4.95)$$

e

$$c_P=\frac{\tilde{\nu}}{\pi^{\frac{d}{2}}}\,\frac{\Gamma\left(\tilde{\nu}+\frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma(\tilde{\nu})}\,. \qquad (4.96)$$

Fazendo o limite [25]

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{\tilde{\nu}-\frac{d}{2}+1} A_{\epsilon,\mu}(\vec{x}) = A_{0,\mu}(\vec{x}), \tag{4.97}$$

e empregando a correspondência AdS/CFT da forma

$$\exp\left(-I_{AdS}\right) \equiv \left\langle \exp\left(\left(\int d^2x\; J_i(\vec{x})\; A_{0,i}(\vec{x})\right)\right) \right\rangle, \tag{4.98}$$

obtemos a seguinte função de dois pontos na borda

$$\left\langle J_i^P(\vec{x})\; J_j^P(\vec{y}) \right\rangle = 2c_P\Delta_P \left(\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^2}\right) \mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{-2\Delta_P}. \tag{4.99}$$

Então o campo $J_i^P$ tem dimensão conforme $\Delta_P$.

### 4.2.2 A Teoria de Proca-Chern-Simons

Esta secção baseia-se nos resultados obtidos em [32], onde as teorias de Chern-Simons foram estudadas no contexto da correspondência AdS/CFT. No caso do $AdS_3$ Euclideano a ação de Proca-Chern-Simons é dada por

$$I_{PCS} = \int d^3x \sqrt{g} \left( \frac{1}{8}\; F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\; \tilde{m}^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{\sqrt{g}}\; \frac{i\mu}{8}\; \epsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} A_\alpha \; + \; c.c. \right), \tag{4.100}$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\alpha}$ é a densidade tensorial de Levi–Civita na convenção $\epsilon^{012} = 1$, e $\mu$ é um parâmetro real. Vamos estudar novamente o caso de Dirichlet, no qual a ação Eq.(4.100) é estacionária. Pelo procedimento usual obtemos as seguintes equações de movimento

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} - \tilde{m}^2 A^\nu - i\mu\; \frac{1}{\sqrt{g}}\; \epsilon^{\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta = 0, \tag{4.101}$$

de onde

$$\nabla_\mu A^\mu = 0. \tag{4.102}$$

Devido à presença da densidade tensorial de Levi–Civita, fica difícil resolver as Eqs.(4.101,4.102). No entanto, vamos mostrar como a densidade tensorial pode ser eliminada. Fazendo uso da Eq.(4.102), a Eq.(4.101) pode ser escrita como

$$\left(\nabla^2 - \tilde{m}^2 - \frac{R}{3}\right) A^\mu - i\mu {}^*F^\mu = 0, \tag{4.103}$$

onde ${}^*F^\mu = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{g}}\,\epsilon^{\mu\nu\alpha}F_{\nu\alpha}$ e $R$ é o escalar de Ricci em $AdS_3$. Agora multiplicando a Eq.(4.101) pela densidade de Levi–Civita e fazendo novo uso da Eq.(4.102) obtemos

$$\left(\nabla^2 - \tilde{m}^2 - \mu^2 - \frac{R}{3}\right){}^*F^\mu + i\mu\tilde{m}^2 A^\mu = 0. \tag{4.104}$$

Finalmente eliminando ${}^*F^\mu$ das Eqs.(4.103,4.104) temos que

$$\left(\nabla^2 - m_+^2 - \frac{R}{3}\right)\left(\nabla^2 - m_-^2 - \frac{R}{3}\right)A^\mu = 0, \tag{4.105}$$

onde

$$m_\pm^2(\tilde{m},\mu) = \left[\left(\tilde{m}^2 + \frac{\mu^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \pm \frac{\mu}{2}\right]^2. \tag{4.106}$$

No limite de espaço plano, isto indica que a teoria de Proca-Chern-Simons descreve duas excitações de massas $m_\pm$ [56]. Note que as soluções da Eq.(4.105) devem satisfazer

$$\left(\nabla^2 - m_+^2 - \frac{R}{3}\right)A^\mu = 0, \tag{4.107}$$

ou

$$\left(\nabla^2 - m_-^2 - \frac{R}{3}\right)A^\mu = 0. \tag{4.108}$$

Então a solução da Eq.(4.105) é uma superposição de soluções da teoria de Proca de massas $m_+$ e $m_-$. Como foi estudado na secção anterior, as soluções regulares no limite de $x_0 \to \infty$ podem ser escritas como

$$A_\mu = \frac{1}{2}\left(A_\mu^+ + A_\mu^-\right), \tag{4.109}$$

onde

$$A_0^\pm(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, x_0\, a_0^\pm(\vec{k})\, K_{m_\pm}(kx_0), \tag{4.110}$$

$$A_i^\pm(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(a_i^\pm(\vec{k})\, K_{m_\pm}(kx_0) + i a_0^\pm(\vec{k})\, \frac{k_i}{k}\, x_0\, K_{m_\pm+1}(kx_0)\right), \tag{4.111}$$

$\vec{x} = (x^1, x^2)$, $k = |\,\vec{k}\,|$, e a partir de agora $m_\pm$ deve ser entendido como $|\, m_\pm \,|$. A normalização na Eq.(4.109) foi escolhida para reproduzir os resultados da secção anterior no caso particular de $\mu = 0$ (no qual $A^+ = A^-$). Inserindo as Eqs.(4.110,4.111) nas equações de movimento Eq.(4.101), obtemos os seguintes vínculos para os coeficientes $a^\pm$

$$\mu m_\pm a_i^\pm(\vec{k}) = \mp i\mu m_\pm \epsilon^{0ij} a_j^\pm(\vec{k}), \tag{4.112}$$

$$\mu m_\pm a_0^\pm(\vec{k})\left(\mp\epsilon^{0ij}k_j - ik_i\right) = \mp i\mu k^2\epsilon^{0ij}a_j^\pm(\vec{k}). \tag{4.113}$$

Da Eq.(4.102) temos também que

$$ik_i a_i^\pm(\vec{k}) = m_\pm a_0^\pm(\vec{k}), \tag{4.114}$$

o que é consistente com a Eq.(4.113). Vamos considerar inicialmente o caso de $\mu \neq 0$, $\tilde{m} \neq 0$, no qual as Eqs.(4.112,4.113) podem ser escritas como

$$a_i^\pm(\vec{k}) = \mp i\epsilon^{0ij}a_j^\pm(\vec{k}), \tag{4.115}$$

$$m_\pm a_0^\pm(\vec{k})\left(\pm ik_i + \epsilon^{0ij}k_j\right) = \mp\, k^2\ a_i^\pm(\vec{k}). \tag{4.116}$$

Vamos chamar o potencial perto da borda de $A_{\epsilon,\mu}$. Das Eqs.(4.110,4.111,4.115,4.116) obtemos os coeficientes $a^\pm$ em termos das transformadas de Fourier dos campos $A_{\epsilon,i}$

$$a_0^\pm(\vec{k}) = \pm\epsilon\frac{\epsilon^{0ij}\ \omega_i^\mp(\vec{k})\ A_{\epsilon,j}(\vec{k})}{\epsilon^{0ij}\ \omega_i^-(\vec{k})\ \omega_j^+(\vec{k})}\ , \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned} a_i^\pm(\vec{k}) &= \frac{A_{\epsilon,i}(\vec{k}) \mp i\epsilon^{0ij}A_{\epsilon,j}(\vec{k})}{K_{m_\pm}(k\epsilon)} + \\ &+ \frac{k_i \mp i\epsilon^{0ij}k_j}{k}\ \frac{i\epsilon^2}{2K_{m_\pm}(k\epsilon)}\ \frac{\epsilon^{0kl}A_{\epsilon,l}(\vec{k})}{\epsilon^{0rs}\ \omega_r^-(\vec{k})\ \omega_s^+(\vec{k})} \times \\ &\times \left[\omega_k^+(\vec{k})K_{m_-+1}(k\epsilon) - \omega_k^-(\vec{k})K_{m_++1}(k\epsilon)\right], \end{aligned} \tag{4.118}$$

onde

$$\omega_i^\pm(\vec{k}) = \frac{i\epsilon}{2k^2}\left[m_\pm\left(k_i \pm i\epsilon^{0ij}k_j\right)K_{m_\pm}(k\epsilon) + k_i k\epsilon K_{m_\pm-1}(k\epsilon)\right]. \tag{4.119}$$

Das Eqs.(4.110,4.111) obtemos

$$F_{\epsilon,0i}^\pm(\vec{x}) = -m_\pm\ \frac{1}{\epsilon}\ A_{\epsilon,i}^\pm(\vec{x})\ +\ \int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\ e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}a_i^\pm(\vec{k})\ \frac{1}{\epsilon}\ K_{m_\pm}(k\epsilon)\left[2m_\pm - k\epsilon\frac{K_{m_\pm+1}(k\epsilon)}{K_{m_\pm}(k\epsilon)}\right]. \tag{4.120}$$

Fazendo uso desta última equação podemos finalmente calcular o valor da ação perto da borda utilizando a Eq.(4.100). Servindo-nos das equações de movimento concluimos que a única contribuição é um termo de superfície

$$I_{PCS} = \frac{1}{4}\int d^3x\ \partial_\mu(\sqrt{g}F^{\mu\nu}A_\nu)\ +\ c.c.\ = -\frac{1}{4}\int d^2x\ \epsilon A_{\epsilon,i}F_{\epsilon,0i}\ +\ c.c. \tag{4.121}$$

Vamos considerar o caso de $m_\pm$ não inteiro. Utilizando as Eqs.(4.115,4.118,4.120,4.121), identificando os termos relevantes na expansão das funções de Bessel e integrando no momento obtemos

$$I_{PCS} = I^+ + I^- + \cdots, \tag{4.122}$$

onde as reticências representam termos de contato ou termos de ordem superior, e

$$\begin{aligned} I^\pm &= -\frac{1}{4}\, c_\pm(\tilde{m},\mu)\Delta_\pm(\tilde{m},\mu) \int d^2x\, d^2y\, \left[A_{\epsilon,i}(\vec{x})\, A_{\epsilon,i}(\vec{y}) \;+\; c.c.\,\right] \frac{\epsilon^{2m_\pm(\tilde{m},\mu)}}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2\Delta_\pm(\tilde{m},\mu)}} \\ &+ \quad c_\pm(\tilde{m},\mu)\Delta_\pm(\tilde{m},\mu) \int d^2x\, d^2y\, \Big[A^R_{\epsilon,i}(\vec{x})A^R_{\epsilon,j}(\vec{y}) \;-\; A^I_{\epsilon,i}(\vec{x})A^I_{\epsilon,j}(\vec{y}) \\ &\mp \epsilon^{0il}\, \left(A^R_{\epsilon,l}(\vec{x})A^I_{\epsilon,j}(\vec{y}) \;+\; A^I_{\epsilon,l}(\vec{x})A^R_{\epsilon,j}(\vec{y})\right)\Big] \frac{\epsilon^{2m_\pm(\tilde{m},\mu)}}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2\Delta_\pm(\tilde{m},\mu)}} \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^2}, \end{aligned} \tag{4.123}$$

$$\Delta_\pm(\tilde{m},\mu) = m_\pm(\tilde{m},\mu) + 1, \tag{4.124}$$

$$c_\pm(\tilde{m},\mu) = \frac{m_\pm(\tilde{m},\mu)}{\pi}. \tag{4.125}$$

O símbolo $A^R_{\epsilon,i}$ $\left(A^I_{\epsilon,i}\right)$ indica a parte real (imaginaria) de $A_{\epsilon,i}$. Tomando o limite

$$\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon^{m_-(\tilde{m},\,|\mu|)} A_{\epsilon,\mu}(\vec{x}) = A_{0,\mu}(\vec{x}), \tag{4.126}$$

e empregando a correspondência AdS/CFT da forma Eq.(4.98), iremos obter a função de dois pontos na borda. Note que para $\mu < 0$ temos $m_-(\tilde{m},\ \mid \mu \mid) - 1 = m_+(\tilde{m},\mu) - 1$, a parte relevante de $I^-$ anula-se e só é $I^+$ que contribui. No entanto, para $\mu > 0$ temos $m_-(\tilde{m},\ \mid \mu \mid) - 1 = m_-(\tilde{m},\mu) - 1$, e neste caso é só $I^-$ que contribui. Em ambos os casos obtemos

$$\left\langle J_i^{PCS}(\vec{x})\; J_j^{PCS}(\vec{y})\right\rangle = c_{PCS}\Delta_{PCS}\left(\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^2}\right) \mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{-2\Delta_{PCS}}, \tag{4.127}$$

onde

$$\Delta_{PCS} = \Delta_-(\tilde{m},\ \mid \mu \mid), \tag{4.128}$$

e

$$c_{PCS} = c_-(\tilde{m},\ \mid \mu \mid), \tag{4.129}$$

de onde concluimos que $J_i^{PCS}$ tem dimensão conforme $\Delta_{PCS}$.

Vamos agora considerar os casos particulares de $\tilde{m} = 0$ e $\mu = 0$. Tendo por objetivo obter a CFT associada com a teoria de Maxwell-Chern-Simons, fazemos $\tilde{m} = 0$ na Eq.(4.106) e obtemos

$$m_{\pm}(0, \mu) = \frac{1}{2} (\mid \mu \mid \pm \mu) . \tag{4.130}$$

Para $\mu > 0$ a Eq.(4.113) implica $a_1^-(\vec{k}) = a_2^-(\vec{k}) = 0$, e a única contribuição na ação vem de $I^+$, enquanto para $\mu < 0$ a Eq.(4.113) fixa $a_1^+(\vec{k}) = a_2^+(\vec{k}) = 0$, e a única contribuição vem de $I^-$. Então, as ações correspondentes aos casos de $\mu > 0$ e $\mu < 0$ são da forma

$$\begin{aligned} I_{MCS}^{|\mu|=\pm\mu} &= -\frac{1}{4} c_{MCS}\Delta_{MCS} \int d^2x \, d^2y \, \left[A_{\epsilon,i}(\vec{x}) \, A_{\epsilon,i}(\vec{y}) \, + \, c.c.\right] \frac{\epsilon^{2|\mu|}}{\mid \vec{x} - \vec{y} \mid^{2\Delta_{MCS}}} \\ &+ \; c_{MCS}\Delta_{MCS} \int d^2x \, d^2y \, \Big[A^R_{\epsilon,i}(\vec{x}) A^R_{\epsilon,j}(\vec{y}) \; - \; A^I_{\epsilon,i}(\vec{x}) A^I_{\epsilon,j}(\vec{y}) \\ &\mp \epsilon^{0il} \left(A^R_{\epsilon,l}(\vec{x}) A^I_{\epsilon,j}(\vec{y}) \; + \; A^I_{\epsilon,l}(\vec{x}) A^R_{\epsilon,j}(\vec{y})\right)\Big] \frac{\epsilon^{2|\mu|}}{\mid \vec{x} - \vec{y} \mid^{2\Delta_{MCS}}} \frac{(x-y)_i(x-y)_j}{\mid \vec{x} - \vec{y} \mid^2} \\ &+ \; \cdots, \end{aligned} \tag{4.131}$$

onde

$$\Delta_{MCS} = \mid \mu \mid +1, \tag{4.132}$$

e

$$c_{MCS} = \frac{\mid \mu \mid}{\pi} . \tag{4.133}$$

Fazendo o limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{|\mu|} A_{\epsilon,\mu}(\vec{x}) = A_{0,\mu}(\vec{x}), \tag{4.134}$$

e empregando novamente a correspondência AdS/CFT Eq.(4.98), obtemos em ambos os casos de $\mu > 0$ e $\mu < 0$ a seguinte função de dois pontos na borda

$$\left\langle J_i^{MCS}(\vec{x}) \; J_j^{MCS}(\vec{y}) \right\rangle = c_{MCS}\Delta_{MCS} \left( \delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{\mid \vec{x} - \vec{y} \mid^2} \right) \mid \vec{x} - \vec{y} \mid^{-2\Delta_{MCS}}, \tag{4.135}$$

o que indica que $J_i^{MCS}$ tem dimensão conforme $\Delta_{MCS}$. É sabido que a teoria de Maxwell-Chern-Simons descreve uma partícula de massa $\mu$ [50], e esse fato é refletido na dimensão conforme Eq.(4.132). Aliás. o nosso resultado é consistente com o principio holográfico, pois a massa $m_-(0, \mid \mu \mid) = 0$ não é física no bulk [50] e não tem contribuição na teoria na borda.

Vamos conferir agora que, no caso particular de $\mu = 0$, reproduzimos corretamente os resultados para a teoria de Proca obtidos na seção anterior. Fazendo $\mu = 0$ na

Eq.(4.106) obtemos $m_{\pm}(\tilde{m}, 0) = \tilde{m}$, então $A^+_\mu = A^-_\mu = A_\mu$. As Eqs.(4.112,4.113) anulam-se identicamente, e o campo $A_\mu$ torna-se real. A ação Eq.(4.122) fica então igual à ação de Proca Eq.(4.94) no caso particular de $d = 2$.

### 4.2.3 O Modelo Auto-Dual

Começamos pela ação

$$I^0_{AD} = \int d^3x \, \sqrt{g} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{i\kappa}{8} \, \epsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} A_\alpha + \frac{1}{4} \, \mathcal{M}^2 A_\mu A^\mu \, + \, c.c. \right), \tag{4.136}$$

do modelo Auto-Dual [51]. O principio variacional gera o termo de superfície

$$-\frac{\kappa}{2} \int d^2x \; \epsilon^{0ij} \, \left[ A^R_i(\vec{x}) \delta A^I_j(\vec{x}) \, + \, A^I_i(\vec{x}) \delta A^R_j(\vec{x}) \right], \tag{4.137}$$

que é escrito em termos das componentes real e imaginaria do potencial vetorial. As equações de movimento da ação Eq.(4.136) são da primeira ordem, e por causa disso não podemos escolher condições de contorno que fixem simultaneamente as componentes reais e imaginarias do $A_\mu$. Escolhemos então fixar condições de contorno para as componentes reais $A^R_\mu$, e deixar um termo de superfície não nulo proporcional a $\delta A^I_i$ na Eq.(4.137). A ação

$$I_{AD} = I^0_{AD} + I^{surface}_{AD}, \tag{4.138}$$

onde

$$I^{surface}_{AD} = \frac{\kappa}{2} \int d^2x \; \epsilon^{0ij} \; A^R_i(\vec{x}) A^I_j(\vec{x}), \tag{4.139}$$

é então estacionária.

As equações de movimento correspondentes à ação Eq.(4.138) são da forma

$$i\kappa \, \frac{1}{\sqrt{g}} \, \epsilon^{\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta + \mathcal{M}^2 A^\nu = 0, \tag{4.140}$$

das quais obtemos novamente a condição

$$\nabla_\mu A^\mu = 0. \tag{4.141}$$

As equações de movimento implicam

$$A^{I,\nu} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \, \frac{\kappa}{2\mathcal{M}^2} \, \epsilon^{\nu\alpha\beta} F^R_{\alpha\beta} \; , \tag{4.142}$$

então $I_{AD}^{surface}$ pode ser escrito como

$$I_{AD}^{surface} = -\frac{\kappa^2}{2\mathcal{M}^2}\int d^3x\ \partial_\mu(\sqrt{g}F^{R,\,\mu\nu}A_\nu^R) = -\frac{\kappa^2}{2\mathcal{M}^2}\int d^2x\ \epsilon A_{\epsilon,i}^R F_{\epsilon,0i}^R\,, \tag{4.143}$$

que depende só de $A_{\epsilon,i}^R$.

Como no caso de Proca-Chern-Simons, a densidade tensorial de Levi–Civita é eliminada aumentando a ordem das equações de movimento. Obtemos

$$\left(\nabla^2 - \frac{\mathcal{M}^4}{\kappa^2} - \frac{R}{3}\right)A^\mu = 0, \tag{4.144}$$

que tem solução

$$A_0(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\ x_0\ b_0(\vec{k})\ K_{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}}(kx_0), \tag{4.145}$$

$$A_i(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}\left(b_i(\vec{k})\ K_{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}}(kx_0) + ib_0(\vec{k})\frac{k_i}{k}x_0\ K_{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}+1}(kx_0)\right). \tag{4.146}$$

Da Eq.(4.141) temos

$$ik_ib_i(\vec{k}) = \frac{\mathcal{M}^2}{|\,\kappa\,|}\ b_0(\vec{k}). \tag{4.147}$$

Note que $I_{AD}^0$ anula-se na camada de massa, e a única contribuição à CFT na borda vem do termo de superfície Eq.(4.143), que depende só das componentes reais do $A_{\epsilon,\mu}$. Aliás, a Eq.(4.144) é aplicada separadamente às componentes reais e imaginarias. As componentes relevantes dos coeficientes $b$ são aquelas que contém as componentes reais do $A_{\epsilon,\mu}$, e para elas temos

$$b_0(\vec{k}) = \frac{-iA_{\epsilon,i}^R(\vec{k})k_i}{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}K_{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}}(k\epsilon) + k\epsilon K_{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}-1}(k\epsilon)}, \tag{4.148}$$

$$b_i(\vec{k}) = \frac{A_{\epsilon,i}^R(\vec{k})}{K_{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}}(k\epsilon)} - \frac{k_ik_j}{k}\ \epsilon\ \frac{A_{\epsilon,j}^R(\vec{k})K_{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}+1}(k\epsilon)}{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}K^2_{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}}(k\epsilon) + k\epsilon K_{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}}(k\epsilon)K_{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}-1}(k\epsilon)}. \tag{4.149}$$

Fazendo como nos casos anteriores obtemos

$$\begin{aligned} I_{AD} \;=\; & -\, c_{AD}\Delta_{AD}\int d^2xd^2y\ A_{\epsilon,i}^R(\vec{x})\ A_{\epsilon,j}^R(\vec{y})\ \frac{\epsilon^{2\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}}}{|\,\vec{x}-\vec{y}\,|^{2\Delta_{AD}}}\left(\delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{|\,\vec{x}-\vec{y}\,|^2}\right) \\ & +\ \ldots, \end{aligned} \tag{4.150}$$

onde

$$\Delta_{AD} = \frac{\mathcal{M}^2}{\mid \kappa \mid} + 1, \tag{4.151}$$

e

$$c_{AD} = \frac{\mid \kappa \mid}{\pi} \,. \tag{4.152}$$

Tomando o limite

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon^{\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|}} A^R_{\epsilon,i}(\vec{x}) = A_{0,i}(\vec{x}), \tag{4.153}$$

e empregando a correspondência AdS/CFT Eq.(4.98), obtemos a seguinte função de dois pontos na borda

$$\left\langle J_i^{AD}(\vec{x}) \; J_j^{AD}(\vec{y}) \right\rangle = 2c_{AD}\Delta_{AD} \left( \delta_{ij} - 2\frac{(x-y)_i(x-y)_j}{\mid \vec{x} - \vec{y} \mid^2} \right) \mid \vec{x} - \vec{y} \mid^{-2\Delta_{AD}} . \tag{4.154}$$

Então o campo $J_i^{AD}$ tem dimensão conforme $\Delta_{AD}$.

Da comparação das Eqs.(4.151,4.132), concluimos que as dimensões conformes dos campos conformes que correspondem à teoria de Maxwell-Chern-Simons e ao modelo Auto-Dual são iguais para $\frac{\mathcal{M}^2}{|\kappa|} = \mid \mu \mid$, o que é consistente com a equivalência entre ambos [52].

# Capítulo 5

# Conclusões

Neste trabalho estudamos algums aspectos da correspondência AdS/CFT.

No caso das teorias de Chern-Simons, verificamos que as funções de dois pontos obtidas perante a prescricão Eq.(1.6) tem a forma exigida pela invariância conforme. No limite não massivo da teoria de Proca-Chern-Simons um ressultado importante foi o de se ter refletido na Eq.(4.135) o fato de existir só uma excitação massiva de massa $\mid \mu \mid$, sendo que o outro modo torna-se não físico. Esse ressultado é consistente com a previsão fundamental da correspondência AdS/CFT de que a teoria na borda contém toda a informação sobre a teoria no bulk.

No caso do modelo Auto-Dual, mostramos como o funcional gerador na borda é obtido a partir do principio variacional. Um resultado bem conhecido é o da equivalência desse modelo com a teoria de Maxwell-Chern-Simons [52], e o fato de ter obtido a mesma dimensão conforme para os operadores na borda correspondentes àquelas duas teorias sustenta a validade do principio holográfico.

No caso do campo escalar em AdS, destacamos que a prescrição Eq.(1.6) não contém toda a informação sobre os ressultados obtidos em [1][4][5] para a quantização do campo escalar em AdS. Nossa proposta foi, então, para estender a prescrição Eq.(1.6) e incluir condições de contorno de Neumann e mistas. No caso do campo escalar minimalmente acoplado com o fundo, mostramos que a nova prescrição fornece resultados consistentes com a condição de unitariedade do campo escalar e com os ressultados em [1][4][5].

No caso de Neumann, o limite de unitariedade é atingido para $m = 0$, enquanto no caso misto é atingido para $\beta = 0$ e $m^2 > 1 - d^2/4$. A dimensão conforme $\Delta_-$ é obtida no caso de condição de contorno mista com $\beta = 0$ e $-d^2/4 < m^2 < 1 - d^2/4$. Note que este vínculo não pode ser reproduzido com o formalismo da transformação de Legendre [43].

No entanto, algums resultados ainda precisam ser melhor entendidos. Seria interessante saber qual o significado do valor particular de $\beta = 0$. Chama muito a atenção a analogia existente entre este resultado e aquele obtido por Breitenlohner e Freedman [1][4] (vide também [5]) que, no caso de acoplamento arbitrário do campo com o fundo, mostra que os modos "irregulares" aparecem para um valor particular do coeficiente do acoplamento (vide Eq.(3.85)). Um outro resultado que precisa ser explicado é o motivo da aparição do limite de unitariedade nos casos de Neumann com $m = 0$ e misto com $\beta = 0$ e $m^2 > 1 - d^2/4$.

Tendo por objetivo responder essas questões, duas linhas de pesquisa podem ser seguidas. Uma delas é estender nosso formalismo ao caso de se ter um acoplamento do campo com o fundo. Para isto será preciso levar em conta variações da ação não somente com respeito ao campo escalar mas também com respeito à métrica. Nesse caso, os termos de superfície que devem ser adicionados à ação envolvem não somente o campo escalar mas também a curvatura extrínseca da métrica [46]. Em particular, este formalismo deveria reproduzir a Eq.(3.85) no contexto da correspondência AdS/CFT.

A segunda linha de pesquisa envolve fazer uma nova quantização do campo escalar em AdS a partir da energia formada não com o tensor de energia-momento métrico, mas com a corrente de Noether associada à invariância perante translações no tempo global $\tau$ (vide Eq.(2.52)). Seria interessante comparar os resultados de ambas quantizações entre eles e com os resultados da correspondência AdS/CFT obtidos no nosso formalismo.

Uma outra possibilidade é estender o trabalho de Balasubramanian e Kraus [45] à situação de se ter matéria (no caso, um campo escalar) acoplada com a métrica. Isto é, calcular a contribuição ao valor esperado do tensor de energia-momento da teoria conforme na borda que corresponde aos campos de matéria, e que iria ficar diretamente relacionada com as teorias conformes na borda calculadas previamente. Seria interessante estudar o que acontece com os modos "regulares" e os "irregulares", para os quais esperamos obter resultados diferentes.

# Apêndice A

# Funções de Dois Pontos para o Campo Escalar

Os coeficientes $\nu$, $\alpha$ e $\beta(\alpha,\nu)$ são definidos pelas Eqs.(4.8,4.15,4.49) respectivamente. Vamos definir também

$$\sigma(\nu) = \frac{d}{2} - \nu \, . \tag{A.1}$$

## A.1 Condição de Dirichlet

$$\left\langle \mathcal{O}_D^{\nu\neq 0}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu\neq 0}(\vec{y})\right\rangle = \frac{2\nu}{\pi^{\frac{d}{2}}}\,\frac{\Gamma(\frac{d}{2}+\nu)}{\Gamma(\nu)}\,\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2(\frac{d}{2}+\nu)}} \tag{A.2}$$

$$\left\langle \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{y})\right\rangle = \frac{d}{\pi^{\frac{d}{2}}}\,\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(\frac{d}{2})}\,\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2d}} \tag{A.3}$$

$$\left\langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu=0}(\vec{y})\right\rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\,\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{d}} \tag{A.4}$$

## A.2 Condição de Neumann

$$\left\langle \mathcal{O}_N^{\nu\neq 0,\frac{d}{2}}(\vec{x})\mathcal{O}_N^{\nu\neq 0,\frac{d}{2}}(\vec{y})\right\rangle = \frac{1}{\sigma^2(\nu)}\,\left\langle \mathcal{O}_D^{\nu\neq 0}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu\neq 0}(\vec{y})\right\rangle \tag{A.5}$$

$$\left\langle \mathcal{O}_N^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{x})\mathcal{O}_N^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{y})\right\rangle = \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{\frac{d}{2}}}\,\frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2\frac{d-2}{2}}} \tag{A.6}$$

$$\left\langle \mathcal{O}_N^{\nu=0}(\vec{x})\mathcal{O}_N^{\nu=0}(\vec{y})\right\rangle = \frac{1}{\sigma^2(0)} \left\langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu=0}(\vec{y})\right\rangle \tag{A.7}$$

## A.3 Condição Mista

$$\left\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0,0<\nu<1}(\vec{x})\mathcal{O}_M^{\beta=0,0<\nu<1}(\vec{y})\right\rangle = \sigma^2(\nu)\frac{1}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-\nu)}{\Gamma(1-\nu)} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2(\frac{d}{2}-\nu)}} \tag{A.8}$$

$$\left\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu>1}(\vec{x})\mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu>1}(\vec{y})\right\rangle = \sigma^2(\nu)\ (\nu-1)\ \frac{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}{2\pi^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{\mid \vec{x}-\vec{y}\mid^{2\frac{d-2}{2}}} \tag{A.9}$$

$$\left\langle \mathcal{O}_M^{\beta\neq0,\nu\neq0,\frac{d}{2}}(\vec{x})\mathcal{O}_M^{\beta\neq0,\nu\neq0,\frac{d}{2}}(\vec{y})\right\rangle = \frac{1}{\beta^2(\alpha,\nu)} \left\langle \mathcal{O}_D^{\nu\neq0}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu\neq0}(\vec{y})\right\rangle \tag{A.10}$$

$$\left\langle \mathcal{O}_M^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{x})\mathcal{O}_M^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{y})\right\rangle = \left\langle \mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu=\frac{d}{2}}(\vec{y})\right\rangle \tag{A.11}$$

$$\left\langle \mathcal{O}_M^{\beta\neq0,\nu=0}(\vec{x})\mathcal{O}_M^{\beta\neq0,\nu=0}(\vec{y})\right\rangle = \frac{1}{\beta^2(\alpha,0)} \left\langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu=0}(\vec{y})\right\rangle \tag{A.12}$$

$$\left\langle \mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu=0}(\vec{x})\mathcal{O}_M^{\beta=0,\nu=0}(\vec{y})\right\rangle = \sigma^2(0)\ \left\langle \mathcal{O}_D^{\nu=0}(\vec{x})\mathcal{O}_D^{\nu=0}(\vec{y})\right\rangle \tag{A.13}$$

# Apêndice B

# Fórmulas Úteis

## B.1 Expansões em Série e Propriedades de Transformação para as Funções Hipergeométricas $_2F_1$

$$ {}_2F_1(a,b\,;c\,;x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{x^n}{n!} \,. \tag{B.1} $$

Para $c-a-b \notin \mathbf{Z}$

$$ \begin{aligned} {}_2F_1(a,b\,;c\,;x) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\, {}_2F_1(a,b\,;a+b-c+1\,;1-x) \\ &+ (1-x)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \\ &\times {}_2F_1(c-a,c-b\,;c-a-b+1\,;1-x)\,. \end{aligned} \tag{B.2} $$

Para $c-a-b=0$

$$ \begin{aligned} {}_2F_1(a,b\,;c\,;x) &= -\frac{\Gamma(a+b)}{[\Gamma(a)]^2[\Gamma(b)]^2} \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{[\Gamma(n+1)]^2} \\ &\times [ln(1-x)+u_n(a,b,0)]\,(1-x)^n\,, \end{aligned} \tag{B.3} $$

onde

$$ u_n(a,b,m) = \lambda(n+a+m) + \lambda(n+b+m) - \lambda(n+1) - \lambda(n+1+m)\,, \tag{B.4} $$

$$ \lambda(z) = \frac{d}{dz}\, ln\,\Gamma(z)\,, \tag{B.5} $$

$$\lambda(1) = -\gamma \qquad \lambda(n) = -\gamma + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \qquad (n = 2, 3, \cdots), \tag{B.6}$$

e $\gamma$ é a constante de Euler.

Para $c - a - b = m \quad (m = 1, 2, \cdots)$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b\,; c\,; x) &= \frac{\Gamma(m)\Gamma(a+b+m)\Gamma(1-m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-m)} (1-x)^n \\ &- (-1)^m \frac{\Gamma(a+b+m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a+m)\Gamma(b+m)} \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+a+m)\Gamma(n+b+m)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+m)} \\ &\times [ln(1-x) + u_n(a, b, m)]\,(1-x)^{n+m}\,. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Para $c - a - b = -m \quad (m = 1, 2, \cdots)$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b\,; c\,; x) &= \frac{\Gamma(m)\Gamma(a+b-m)\Gamma(1-m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a-m)\Gamma(b-m)} \\ &\times \sum_{n=0}^{m-1} \frac{\Gamma(n+a-m)\Gamma(n+b-m)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1-m)} (1-x)^{n-m} \\ &- (-1)^m \frac{\Gamma(a+b-m)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a-m)\Gamma(b-m)} \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+a)\Gamma(n+b)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+m)} \\ &\times [ln(1-x) + v_n(a, b, m)]\,(1-x)^n\,, \end{aligned} \tag{B.8}$$

onde

$$v_n(a, b, m) = \lambda(n+a) + \lambda(n+b) - \lambda(n+1) - \lambda(n+1+m)\,. \tag{B.9}$$

## B.2 Expansões em Série para as Funções de Bessel $K_\nu$

Para $\nu$ não inteiro

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2}\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(1-\nu) \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \left[ \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+1-\nu)} - \left(\frac{x}{2}\right)^{2\nu} \sum_{n\geq 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+1+\nu)} \right]. \tag{B.10}$$

Para $\nu$ inteiro e não nulo

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{n=0}^{\nu-1} (-1)^n \frac{\Gamma(\nu-n)}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$- \quad (-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n\geq 0} \left[ ln\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\lambda(n+1)+\lambda(\nu+n+1)}{2} \right] \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+1+\nu)} \, . \tag{B.11}$$

Para $\nu = 0$

$$K_0(x) = -\sum_{n\geq 0} \left[ ln\left(\frac{x}{2}\right) - \lambda(n+1) \right] \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+1)} \, . \tag{B.12}$$

## B.3 Integração no Momento

Para $\rho \neq -d, -d-2, \ldots$, temos

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, k^\rho = C_\rho \, \frac{1}{|\vec{x}|^{d+\rho}} \, , \tag{B.13}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, k_i \, k_j \, k^{\rho-2} = -\frac{1}{\rho} \, C_\rho \left[ \delta_{ij} - (\rho+d) \, \frac{x_i x_j}{|\vec{x}|^2} \right] \frac{1}{|\vec{x}|^{d+\rho}} \, , \tag{B.14}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \, k^\rho \, ln \, k = \frac{dC_\rho}{d\rho} \, \frac{1}{|\vec{x}|^{d+\rho}} + C_\rho \, \frac{ln|\vec{x}|}{|\vec{x}|^{d+\rho}} \, , \tag{B.15}$$

onde

$$C_\rho = \frac{2^\rho}{\pi^{\frac{d}{2}}} \, \frac{\Gamma(\frac{d+\rho}{2})}{\Gamma(-\frac{\rho}{2})} \, . \tag{B.16}$$

# Apêndice C

# Campo Escalar em AdS em Duas e Três Dimensões

Neste Apêndice, apresentamos os passos mais importantes no estudo do problema da estabilidade e quantização do campo escalar em espaços AdS em duas e três dimensões. Mesmo quando o procedimento é análogo ao empregado no Capítulo 3, no caso de quatro ou mais dimensões, os casos em duas e três dimensões apresentam algumas particularidades que lhes são próprias, e que vamos analisar em seguida. Aqui faremos forte uso da notação e resultados obtidos nos Capítulos 2 e 3.

Começamos estudando o caso de $AdS_2$ . A maior parte do material apresentado aqui baseia-se na referência [53], mas também introduzimos algums resultados originais.

O espaço $AdS_2$ de raio $\frac{1}{a}$ é definido como o hiperbolóide (vide Eq.(2.51))

$$-(z^0)^2 - (z^2)^2 + (z^1)^2 = -\frac{1}{a^2}\,, \tag{C.1}$$

e as coordenadas globais $(\tau, \rho)$ em $AdS_2$ são da forma

$$az^0 = \frac{sen\ \tau}{cos\ \rho}\,, \qquad az^2 = \frac{cos\ \tau}{cos\ \rho}\,, \qquad az^1 = tg\ \rho\,, \tag{C.2}$$

onde, para a "cobertura" de AdS, temos

$$-\infty < \tau < \infty\,, \tag{C.3}$$

$$-\frac{\pi}{2} < \rho < \frac{\pi}{2}\,. \tag{C.4}$$

Note na Eq.(2.54) que o intervalo da coordenada radial $\rho$ no caso de AdS em duas dimensões é diferente do que nos casos em dimensão superior. A métrica nas coordenadas

Eq.(C.2) é da forma

$$ds^2 = \frac{1}{a^2cos^2\rho}\left(-d\tau^2 + d\rho^2\right) . \tag{C.5}$$

Temos (vide Capítulo 3 para notação)

$$\frac{1}{a^2}\,\bar{\nabla}^2\phi = -cos^2\rho\,\left(\partial_\tau^2\phi - \partial_\rho^2\phi\right) , \tag{C.6}$$

e como nos casos em dimensão superior, a equação de movimento Eq.(3.35) é resolvida pelo método de separação de variáveis. A solução é

$$\phi = \sum_\omega \left[a_\omega\phi_\omega + a_\omega^*\phi_\omega^*\right] , \tag{C.7}$$

onde os modos são da forma

$$\phi_\omega = N_\omega\; e^{-i\omega\tau}(cos\;\rho)^\Delta F_\omega(\rho) , \tag{C.8}$$

e $N_\omega$ é o coeficiente de normalização. A equação radial é resolvida de maneira análoga ao caso em dimensão superior. Escolhemos, sem perda de geralidade

$$\Delta(\Delta-1) = \frac{\bar{M}^2}{a^2} , \tag{C.9}$$

isto é

$$\Delta_\pm = \frac{1}{2} \pm \nu , \tag{C.10}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\bar{M}^2}{a^2}} , \tag{C.11}$$

onde (vide Eq.(3.15))

$$\bar{M}^2 = m^2 - 2\varrho a^2 . \tag{C.12}$$

Então, a equação radial fica da forma

$$0 = x(1-x)\,\frac{d^2F_\omega^\pm}{dx^2} + \left[\frac{1}{2} - (a_\pm + b_\pm + 1)\;x\right]\,\frac{dF_\omega^\pm}{dx} - a_\pm\;b_\pm F_\omega^\pm , \tag{C.13}$$

onde

$$x = sen^2\rho , \tag{C.14}$$

$$\begin{aligned} a_\pm &= \frac{1}{2}\left(\Delta_\pm - \omega\right) , \\ b_\pm &= \frac{1}{2}\left(\Delta_\pm + \omega\right) . \end{aligned} \tag{C.15}$$

Vimos que no caso de dimensão superior existe só uma solução regular na origem. No entanto, neste caso as duas soluções independentes da Eq.(C.13) são regulares na origem, e então é preciso utilizar ambas. A solução que já tinhamos estudado no caso de dimensão superior é a função hipergeométrica

$$F^{\pm}_{1,\omega}(\rho) = {}_2F_1(a_\pm, b_\pm; \frac{1}{2}\ ; sen^2\rho)\ , \tag{C.16}$$

e a outra solução, que descartamos no caso de dimensão superior, mas que deve ser levada em conta no caso em duas dimensões, é da forma

$$F^{\pm}_{2,\omega}(\rho) = sen\ \rho\ \ {}_2F_1(a_\pm + \frac{1}{2}\ , b_\pm + \frac{1}{2}\ ; \frac{3}{2}\ ; sen^2\rho)\ . \tag{C.17}$$

Como no caso em dimensão superior, temos (vide Eq.(3.56))

$$a_+ - a_- = b_+ - b_- = \nu\ , \tag{C.18}$$

e então

$$(cos\ \rho)^{\Delta_+} F^{+}_{j,\omega}(\rho) = (cos\ \rho)^{\Delta_-} F^{-}_{j,\omega}(\rho) \equiv G_{j,\omega}(\rho) \qquad (j = 1, 2)\ , \tag{C.19}$$

onde

- **Para** $\nu \notin \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} G_{1,\omega}(\rho) &= (cos\ \rho)^{\Delta_-} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)\Gamma(a_-)\Gamma(b_-)} \\ &\times \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\ (cos\ \rho)^{2n} \left[ \frac{\Gamma(n+a_-)\Gamma(n+b_-)}{\Gamma(n+1-\nu)} - \frac{\Gamma(n+a_+)\Gamma(n+b_+)}{\Gamma(n+1+\nu)}\ (cos\ \rho)^{2\nu} \right]\ , \end{aligned} \tag{C.20}$$

$$\begin{aligned} G_{2,\omega}(\rho) &= sen\ \rho\ (cos\ \rho)^{\Delta_-} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)}{\Gamma\left(a_+ + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b_+ + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a_- + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b_- + \frac{1}{2}\right)} \\ &\times \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}\ (cos\ \rho)^{2n}\ [\ \frac{\Gamma\left(n + a_- + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + b_- + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1-\nu)} \\ &- \frac{\Gamma\left(n + a_+ + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + b_+ + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1+\nu)}\ (cos\ \rho)^{2\nu}\ ]\ . \end{aligned} \tag{C.21}$$

**- Para** $\nu = 0$

$$G_{1,\omega}(\rho) = -(cos\ \rho)^{\Delta_-} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)\Gamma(a_-)\Gamma(b_-)} \times \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n!)^2}\, \Gamma(n+a_+)\Gamma(n+b_+)\, [2\ ln\ cos\ \rho + u_n(a_-, b_-, 0)]\, (cos\ \rho)^{2n}\ , \tag{C.22}$$

$$\begin{aligned} G_{2,\omega}(\rho) &= -sen\ \rho\ (cos\ \rho)^{\Delta_-} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma\left(a_+ + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b_+ + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a_- + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b_- + \frac{1}{2}\right)} \\ &\times \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n!)^2}\, \Gamma\left(n + a_+ + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n + b_+ + \frac{1}{2}\right) \\ &\times \left[2\ ln\ cos\ \rho + u_n\left(a_- + \frac{1}{2}\ , b_- + \frac{1}{2}\ , 0\right)\right] (cos\ \rho)^{2n}\ , \end{aligned} \tag{C.23}$$

onde $u_n(a, b, m)$ é dado pela Eq.(B.4).

**- Para** $\nu \in \mathbf{Z},\ \nu > 0$

$$\begin{aligned} G_{1,\omega}(\rho) &= (cos\ \rho)^{\Delta_-} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)\Gamma(a_-)\Gamma(b_-)} \\ &\times \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^n}{n!}\, \Gamma(\nu - n)\Gamma(n+a_-)\Gamma(n+b_-)(cos\ \rho)^{2n} \\ &- (-1)^{\nu}(cos\ \rho)^{\Delta_+} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(a_+)\Gamma(b_+)\Gamma(a_-)\Gamma(b_-)} \\ &\times \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma(n+a_+)\Gamma(n+b_+)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)}\, [2\ ln\ cos\ \rho + u_n(a_-, b_-, \nu)]\, (cos\ \rho)^{2n}\ , \end{aligned} \tag{C.24}$$

$$G_{2,\omega}(\rho) = sen\ \rho\ (cos\ \rho)^{\Delta_-} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma\left(a_+ + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b_+ + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a_- + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b_- + \frac{1}{2}\right)}$$

$$
\begin{aligned}
\times & \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(\nu-n)\Gamma\left(n+a_-+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+b_-+\frac{1}{2}\right)(cos\ \rho)^{2n} \\
- & (-1)^\nu sen\ \rho\, (cos\ \rho)^{\Delta_+} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma\left(a_++\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b_++\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a_-+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b_-+\frac{1}{2}\right)} \\
\times & \sum_{n\geq 0} \frac{\Gamma\left(n+a_++\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+b_++\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+\nu)} \\
\times & \left[2\ ln\ cos\ \rho + u_n\left(a_-+\frac{1}{2}\,, b_-+\frac{1}{2}\,, \nu\right)\right](cos\ \rho)^{2n}\,,
\end{aligned}
\tag{C.25}
$$

e os modos $\phi_\omega$ da Eq.(C.8) ficam

$$
\phi_{j,\omega} = N_{j,\omega}\, e^{-i\omega\tau} G_{j,\omega}(\rho) \qquad (j=1,2). \tag{C.26}
$$

Note que a função $G_{1,\omega}(\rho)$ pode ser obtida das Eqs.(3.58,3.59,3.60) fazendo $d=1$ e $l=0$, enquanto que a função $G_{2,\omega}(\rho)$ pode ser obtida das Eqs.(3.58,3.59,3.60) fazendo $d=1$ e $l=1$.

Das Eqs.(C.16,C.17,C.19) temos as seguintes identidades importantes

$$
G_{j,\omega}(-\rho) = -(-1)^j G_{j,\omega}(\rho) \qquad (j=1,2)\,. \tag{C.27}
$$

Note que a equação acima, assim como a primeira igualdade da Eq.(C.19), nunca haviam sido escritas explícitamente na literatura. A importância da Eq.(C.27) ficará clara daqui a pouco.

Definimos o produto escalar entre dois modos $\phi_\omega$ e $\phi_{\omega'}$ através de

$$
(\phi_\omega, \phi_{\omega'}) = i\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho\, \sqrt{\bar{g}}\, \bar{g}^{0\nu}\left[\phi_\omega \partial_\nu \phi^*_{\omega'} - \partial_\nu \phi_\omega \phi^*_{\omega'}\right]\,, \tag{C.28}
$$

e a condição para que o produto escalar seja conservado é da forma (para $j=(1,2)$)

$$
lim_{\rho\to\frac{\pi}{2}}\ (G_{j,\omega}\,\partial_\rho G_{j,\omega'} - G_{j,\omega'}\,\partial_\rho G_{j,\omega}) = lim_{\rho\to-\frac{\pi}{2}}\ (G_{j,\omega}\,\partial_\rho G_{j,\omega'} - G_{j,\omega'}\,\partial_\rho G_{j,\omega})\,. \tag{C.29}
$$

Devido a isto, os autores de [53] afirmam que a condição que deve ser imposta é que a diferença dos fluxos nas bordas em $\rho=\frac{\pi}{2}$ e $\rho=-\frac{\pi}{2}$ deve ser nula, e que no entanto eles trabalham com a condição "mais forte" de anular os fluxos nas bordas em $\rho=\frac{\pi}{2}$ e $\rho=-\frac{\pi}{2}$ separadamente. Mas note que isto não é assim. Fazendo uso da Eq.(C.27), obtemos (para $j=(1,2)$)

$$
lim_{\rho\to\frac{\pi}{2}}\ (G_{j,\omega}\,\partial_\rho G_{j,\omega'} - G_{j,\omega'}\,\partial_\rho G_{j,\omega}) = -lim_{\rho\to-\frac{\pi}{2}}\ (G_{j,\omega}\,\partial_\rho G_{j,\omega'} - G_{j,\omega'}\,\partial_\rho G_{j,\omega})\,, \tag{C.30}
$$

e a única maneira de satisfazer simultaneamente as Eqs.(C.29,C.30) é exigir (para $j = (1,2)$)

$$lim_{\rho \to \frac{\pi}{2}} \ (G_{j,\omega} \, \partial_\rho G_{j,\omega'} - G_{j,\omega'} \, \partial_\rho G_{j,\omega}) = lim_{\rho \to -\frac{\pi}{2}} \ (G_{j,\omega} \, \partial_\rho G_{j,\omega'} - G_{j,\omega'} \, \partial_\rho G_{j,\omega}) = 0 \ , \tag{C.31}$$

isto é, que se anulem os fluxos nas bordas em $\rho = \frac{\pi}{2}$ e $\rho = -\frac{\pi}{2}$ separadamente. Então, a condição utilizada em [53] não é "mais forte" do que o necessário, mas é a única possível. Aliás, das Eqs.(C.30,C.31)) vemos que para não ter fluxo na borda é necessário e suficiente exigir

$$lim_{\rho \to \frac{\pi}{2}} \ (G_{j,\omega} \, \partial_\rho G_{j,\omega'} - G_{j,\omega'} \, \partial_\rho G_{j,\omega}) = 0 \qquad (j = 1, 2) \ . \tag{C.32}$$

Então esta é a condição com a qual iremos trabalhar. Introduzindo as Eqs.(C.20–C.25) na equação acima obtemos as seguintes condições

**Para a solução $G_{1,\omega}$**

$$\begin{aligned} \nu > 1 \longrightarrow a_+ &= -n, \quad ou \quad b_+ = -n. \\ 0 \leq \nu < 1 \longrightarrow a_+ &= -n, \quad ou \quad b_+ = -n, \\ ou \quad a_- &= -n, \quad ou \quad b_- = -n, \end{aligned} \tag{C.33}$$

onde $n = 0, 1, 2, \cdots$ .

**Para a solução $G_{2,\omega}$**

$$\begin{aligned} \nu > 1 \longrightarrow a_+ &= -n - \frac{1}{2} \, , \quad ou \quad b_+ = -n - \frac{1}{2} \, . \\ 0 \leq \nu < 1 \longrightarrow a_+ &= -n - \frac{1}{2} \, , \quad ou \quad b_+ = -n - \frac{1}{2} \, , \\ ou \quad a_- &= -n - \frac{1}{2} \, , \quad ou \quad b_- = -n - \frac{1}{2} \, . \end{aligned} \tag{C.34}$$

Fazendo uso da Eq.(C.15), as equações acima equivalem às seguintes condições para $\omega$

**Para a solução $G_{1,\omega}$**

$$\begin{aligned} \nu > 1 \longrightarrow &| \, \omega_{1,n}^{+} \, | = \Delta_+ + 2n. \\ 0 \leq \nu < 1 \longrightarrow &| \, \omega_{1,n}^{+} \, | = \Delta_+ + 2n, \\ ou \quad &| \, \omega_{1,n}^{-} \, | = \Delta_- + 2n. \end{aligned} \tag{C.35}$$

**Para a solução $G_{2,\omega}$**

$$
\begin{aligned}
\nu > 1 \longrightarrow & | \, \omega^{+}_{2,n} \, | = \Delta_{+} + 2n + 1 . \\
0 \leq \nu < 1 \longrightarrow & | \, \omega^{+}_{2,n} \, | = \Delta_{+} + 2n + 1 , \\
ou \quad & | \, \omega^{-}_{2,n} \, | = \Delta_{-} + 2n + 1 .
\end{aligned} \tag{C.36}
$$

Então, para $\nu > 1$ existem só duas soluções, que chamamos de $G^{+}_{j,n}$ $(j = 1, 2)$, enquanto que para $0 \leq \nu < 1$ existem quatro soluções, que chamamos de $G^{+}_{j,n}$ e $G^{-}_{j,n}$ $(j = 1, 2)$. Assim, na Eq.(C.26) temos, na verdade, quatro tipos possíveis de modos

$$
\phi^{+}_{j,n} = N^{+}_{j,n} \, e^{-i\omega^{+}_{j,n}\tau} G^{+}_{j,n}(\rho) \qquad \phi^{-}_{j,n} = N^{-}_{j,n} \, e^{-i\omega^{-}_{j,n}\tau} G^{-}_{j,n}(\rho) \qquad (j = 1, 2) \, . \tag{C.37}
$$

Como no caso em dimensão superior, as funções radiais podem ser escritas em termos de polinomios de Jacobi, e assim as constantes de normalização $N^{+}_{j,n}$ e $N^{-}_{j,n}$ (com $(j = 1, 2)$) podem ser obtidas. Ao fazer as contas, é importante não esquecer de que o intervalo de integração de $\rho$ vai de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$ . Os resultados são

$$
G^{\pm}_{1,n}(\rho) = (cos \ \rho)^{\Delta_{\pm}} \ n! \ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)} \ P_n^{(-\frac{1}{2}, \pm\nu)}(cos \ 2\rho) \, , \tag{C.38}
$$

$$
G^{\pm}_{2,n}(\rho) = sen \ \rho \ (cos \ \rho)^{\Delta_{\pm}} \ n! \ \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + n\right)} \ P_n^{(-\frac{1}{2}, \pm\nu)}(cos \ 2\rho) \, , \tag{C.39}
$$

$$
N^{\pm}_{1,n} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \left[ \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\Delta_{\pm} + n\right)}{2n! \, \Gamma(n + 1 \pm \nu)} \right]^{\frac{1}{2}} , \tag{C.40}
$$

$$
N^{\pm}_{2,n} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \left[ \frac{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\Delta_{\pm} + n + 1\right)}{2n! \, \Gamma(n + 1 \pm \nu)} \right]^{\frac{1}{2}} , \tag{C.41}
$$

e as condições de ortogonalidade ficam

$$
\left( \phi^{\pm}_{1,n}, \phi^{\pm}_{1,n'} \right) = \delta_{nn'} \, , \qquad \left( \phi^{\pm}_{2,n}, \phi^{\pm}_{2,n'} \right) = \delta_{nn'} \, . \tag{C.42}
$$

Finalmente, analisamos a conservação, positividade e convergência da energia. Como no caso em dimensão superior, é conveniente definir

$$
\varrho_0 = \frac{1}{2} \, \frac{\Delta_{-}}{1 + 2\Delta_{-}} \, . \tag{C.43}
$$

Procedendo como no Capítulo 3, e fazendo uso da Eq.(C.27), obtemos a condição necessária e suficiente para anular o fluxo de energia através da borda

$$lim_{\rho\rightarrow\frac{\pi}{2}}\ ((2\varrho-1)G_{j,\omega}\,\partial_\rho G_{j,\omega'}+2\varrho\,G_{j,\omega'}\,\partial_\rho G_{j,\omega}-2\varrho\,tg\,\rho\,G_{j,\omega}G_{j,\omega'})=0 \qquad (j=1,2)\,. \tag{C.44}$$

Introduzindo as Eqs.(C.20–C.25) na equação acima obtemos

**i) Caso da solução $\mathbf{G_{1,\omega}}$**

- Para $\varrho\neq\varrho_0$

$$a_+=-n,\quad ou\quad b_+=-n. \tag{C.45}$$

- Para $\varrho=\varrho_0$

$$\begin{aligned}\nu>1\longrightarrow a_+&=-n,\quad ou\quad b_+=-n.\\ 0\leq\nu<1\longrightarrow a_+&=-n,\quad ou\quad b_+=-n,\\ ou\quad a_-&=-n,\quad ou\quad b_-=-n.\end{aligned} \tag{C.46}$$

**ii) Caso da solução $\mathbf{G_{2,\omega}}$**

- Para $\varrho\neq\varrho_0$

$$a_+=-n-\frac{1}{2}\,,\quad ou\quad b_+=-n-\frac{1}{2}\,. \tag{C.47}$$

- Para $\varrho=\varrho_0$

$$\begin{aligned}\nu>1\longrightarrow a_+&=-n-\frac{1}{2}\,,\quad ou\quad b_+=-n-\frac{1}{2}\,.\\ 0\leq\nu<1\longrightarrow a_+&=-n-\frac{1}{2}\,,\quad ou\quad b_+=-n-\frac{1}{2}\,,\\ ou\quad a_-&=-n-\frac{1}{2}\,,\quad ou\quad b_-=-n-\frac{1}{2}\,,\end{aligned} \tag{C.48}$$

onde $n=0,1,2,\cdots$ . Fazendo uso da Eq.(C.15), as equações acima equivalem às seguintes condições para $\omega$

**i) Caso da solução $\mathbf{G_{1,\omega}}$**

- Para $\varrho \neq \varrho_0$

$$| \omega^+_{1,n} |= \Delta_+ + 2n. \tag{C.49}$$

- Para $\varrho = \varrho_0$

$$\begin{aligned} \nu > 1 \longrightarrow & | \omega^+_{1,n} |= \Delta_+ + 2n. \\ 0 \leq \nu < 1 \longrightarrow & | \omega^+_{1,n} |= \Delta_+ + 2n, \\ ou \quad & | \omega^-_{1,n} |= \Delta_- + 2n. \end{aligned} \tag{C.50}$$

### ii) Caso da solução $\mathbf{G}_{\mathbf{2},\omega}$

- Para $\varrho \neq \varrho_0$

$$| \omega^+_{2,n} |= \Delta_+ + 2n + 1. \tag{C.51}$$

- Para $\varrho = \varrho_0$

$$\begin{aligned} \nu > 1 \longrightarrow & | \omega^+_{2,n} |= \Delta_+ + 2n + 1. \\ 0 \leq \nu < 1 \longrightarrow & | \omega^+_{2,n} |= \Delta_+ + 2n + 1, \\ ou \quad & | \omega^-_{2,n} |= \Delta_- + 2n + 1. \end{aligned} \tag{C.52}$$

A positividade e convergência se estuda como no caso em dimensão superior, e lembrando que desta vez $\rho$ deve ser integrado entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ . Procedendo como no Capítulo 3, é possível verificar que as soluções que fazem com que o fluxo de energia através da borda seja nulo são também as que fazem com que a energia seja positiva e finita.

Finalmente, fazemos algums comentários com respeito ao caso de $AdS_3$ (Anti-de Sitter em três dimensões). Básicamente, este caso é análogo ao de quatro ou mais dimensões, mas no lugar dos harmônicos esféricos $Y_{l\{m\}}(\Omega_d)$ (vide Eq.(3.46)), a parte angular da equação de movimento Eq.(3.35) tem solução da forma $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-il\varphi}$, onde a variável angular $\varphi$ vai de 0 a $2\pi$, e $l \in \mathbf{Z}$ (pois a função deve ser univaluada). Introduzimos o fator de normalização $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ para ter uma situação análoga ao caso em dimensão superior, onde são utilizados os harmônicos esféricos $Y_{l\{m\}}(\Omega_d)$, que também são normalizados. Um outro fator novo que aparece é que o número angular $l$ pode ser negativo, enquanto que no caso dos harmônicos esféricos $Y_{l\{m\}}(\Omega_d)$ o $l$ só podia ser zero ou positivo. Note na Eq.(3.46) que se $l$ fosse negativo, então teriamos soluções divergentes na origem. Então, no caso de $AdS_3$ é precisso trabalhar com o módulo $\mid l \mid$ e não com $l$. E com isto já fixamos as regras para trabalhar no caso de $AdS_3$ , no qual os resultados são os que se obtem a partir dos do Capítulo 3 trocando os harmônicos esféricos $Y_{l\{m\}}(\Omega_d)$ pela função normalizada $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-il\varphi}$, $l$ por $\mid l \mid$, eliminando os números angulares $\{m\}$ e fixando $d = 2$.

# Referências Bibliográficas


[1] P. Breitenlohner e D. Freedman, "Stability in Gauged Extended Supergravity", Ann. Phys. **144** (1982) 249.

[2] L. Abbott e S. Deser, "Stability of Gravity with a Cosmological Constant", Nucl. Phys. **B195** (1982) 76.

[3] S. Avis, C. Isham e D. Storey, "Quantum Field Theory in Anti-de Sitter Space-Time", Phys. Rev. **D18** (1978) 3565.

[4] P. Breitenlohner e D. Freedman, "Positive Energy in Anti-de Sitter Backgrounds and Gauged Extended Supergravity", Phys. Lett. **B115** (1982) 197.

[5] L. Mezincescu e P. Townsend, "Stability at a Local Maximum in Higher Dimensional Anti-de Sitter Space and Applications to Supergravity", Ann. Phys. **160** (1985) 406.

[6] N. Birrell e P. Davies, "Quantum Fields in Curved Space" (1982) Cambridge Press.

[7] P. Ginsparg, "Applied Conformal Field Theory", Les Houches Lectures (1988).

[8] J. Brown e M. Henneaux, "Central Charges in the Canonical Realization of Asymptotic Symmetries: An Example from Three Dimensional Gravity", Comm. Math. Phys. **104** (1986) 207.

[9] J. Bekenstein, "Black Holes and Entropy", Phys. Rev. **D7** (1973) 2333.

[10] J. Bekenstein, "Generalized Second Law of Thermodinamics in Black-Hole Physics", Phys. Rev **D9** (1974) 3292.

[11] S. Hawking, "Particle Creation by Black Holes", Comm. Math. Phys. **43** (1975) 199.

[12] S. Hawking, "Black Holes and Thermodynamics", Phys. Rev **D13** (1976) 191.

[13] M. Bañados, C. Teitelboim e J. Zanelli, "The Black Hole in Three-Dimensional Space-Time", hep-th/9204099, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 1849.

[14] M. Bañados, M. Henneaux, C. Teitelboim e J. Zanelli, "Geometry of the (2+1) Black Hole", gr-qc/9302012, Phys. Rev. **D48** (1993) 1506.

[15] A. Strominger, "Black Hole Entropy from Near-Horizon Microstates", hep-th/9712251, JHEP **9802** (1998) 009.

[16] J. Cardy, "Operator Content of Two-Dimensional Conformally Invariant Theories", Nucl. Phys. **B270** (1986) 186.

[17] J. Maldacena, "The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity", hep-th/9711200, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.

[18] M. Green, J. Schwarz e E. Witten, "Superstring Theory" (1987) Cambridge Press (dois volumes).

[19] J. Polchinski, "String Theory" (1998) Cambridge Press (dois volumes).

[20] P. Di Vecchia, "Large N Gauge Theories and AdS/CFT Correspondence", hep-th/9908148.

[21] G. 't Hooft, "Dimensional Reduction in Quantum Gravity", gr-qc/9310026.

[22] L. Susskind, "The World as a Hologram", hep-th/9409089, J. Math. Phys. **36** (1995) 6377.

[23] E. Witten, "Anti-de Sitter Space and Holography", hep-th/9802150, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253.

[24] S. Gubser, I. Klebanov e A. Polyakov, "Gauge Theory Correlators from Non-Critical String Theory", hep-th/9802109, Phys. Lett. **B428** (1998) 105.

[25] D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis e L. Rastelli, "Correlation Functions in the $CFT_d/AdS_{d+1}$ Correspondence", hep-th/9804058, Nucl.Phys. **B546** (1999) 96.

[26] W. Mück e K. S. Viswanathan, "Conformal Field Theory Correlators from Classical Scalar Field Theory on $AdS_{d+1}$", hep-th/9804035, Phys. Rev. **D58** (1998) 041901.

[27] P. Minces e V. O. Rivelles, "Scalar Field Theory in the AdS/CFT Correspondence Revisited", hep-th/9907079, Nucl.Phys. **B572** (2000) 651.

[28] M. Henningson e K. Sfetsos, "Spinors and the AdS/CFT correspondence", hep-th/9803251, Phys. Lett. **B431** (1998) 63.

[29] W. Mück e K. S. Viswanathan, "Conformal Field Theory Correlators from Classical Field Theory on Anti-de Sitter Space II. Vector and Spinor Fields", hep-th/9805145, Phys. Rev. **D58** (1998) 106006.

[30] M. Henneaux, "Boundary Terms in the AdS/CFT Correspondence for Spinor Fields", hep-th/9902137, a ser publicado em Proceedings of the International Workshop ISMP (Tbilissi, September 1998).

[31] A. Ghezelbash, K. Kaviani, S. Parvizi e A. Fatollahi, "Interacting Spinors-Scalars and AdS/CFT Correspondence", hep-th/9805162, Phys. Lett. **B435** (1998) 291.

[32] P. Minces e V. O. Rivelles, "Chern-Simons Theories in the AdS/CFT Correspondence", hep-th/9902123, Phys. Lett. **B455** (1999) 147.

[33] H. O. Girotti e V. O. Rivelles, "Gauge Dependence in the AdS/CFT Correspondence", hep-th/9910017, Int. Jour. Mod. Phys. **A15** (2000) 4379.

[34] A. Volovich, "Rarita-Schwinger Field in the AdS/CFT Correspondence", hep-th/9809009, J. High En. Phys. **9809** (1998) 22.

[35] A. Koshelev e O. Rytchkov, "Note on the Massive Rarita-Schwinger Field in the AdS/CFT correspondence", hep-th/9812238, Phys. Lett. **B450** (1999) 368.

[36] P. Matlock e K. S. Viswanathan, "The AdS/CFT Correspondence for the Massive Rarita-Schwinger Field", hep-th/9906077, Phys. Rev. **D61** (2000) 026002.

[37] H. Liu e A. Tseytlin, "D=4 Super Yang Mills, D=5 gauged supergravity and D=4 conformal supergravity", hep-th/9804083, Nucl. Phys. **B533** (1998) 88.

[38] W. Mück e K. S. Viswanathan, "The Graviton in the AdS-CFT correspondence: Solution via the Dirichlet Boundary value problem", hep-th/9810151.

[39] A. Polishchuk, "Massive symmetric tensor field on AdS", hep-th/9905048, JHEP **9907** (1999) 007.

[40] G. Arutyunov e S. Frolov, "Antisymmetric tensor field on $AdS_5$", hep-th/9807046, Phys. Lett. **B441** (1998) 173.

[41] W. l'Yi, "Correlators of currents corresponding to the massive $p$-form fields in AdS/CFT correspondence", hep-th/9809132, Phys. Lett. **B448** (1999) 218.

[42] V. Balasubramanian, P. Kraus e A. Lawrence, "Bulk vs. Boundary Dynamics in Anti-de Sitter Spacetime", hep-th/9805171, Phys. Rev. **D59** (1999) 046003.

[43] I. Klebanov e E. Witten, "AdS/CFT Correspondence and Symmetry Breaking", hep-th/9905104, Nucl. Phys. **B556** (1999) 89.

[44] J. Brown e J. York, "Quasilocal Energy and Conserved Charges derived from the Gravitational Action", Phys. Rev. **D47** (1993) 1407.

[45] V. Balasubramanian e P. Kraus, "A Stress Tensor for Anti-de Sitter Gravity", hep-th/9902121, Comm. Math.Phys. **208** (1999) 413.

[46] G. Gibbons e S. Hawking, "Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity", Phys. Rev. **D15** (1977) 2752.

[47] M. Henningson e K. Skenderis, "The Holographic Weyl Anomaly", hep-th/9806087, JHEP **9807** (1998) 023.

[48] R. Emparan, C. Johnson e R. Myers, "Surface Terms as Counterterms in the AdS/CFT Correspondence", hep-th/9903238, Phys. Rev. **D60** (1999) 104001.

[49] G. Arutyunov e S. Frolov, "On the Origin of Supergravity Boundary Terms in the AdS/CFT Correspondence", hep-th/9806216, Nucl. Phys. **B544** (1999) 576.

[50] S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, "Topologically Massive Gauge Theories", Ann. Phys. **140** (1982) 372.

[51] P. K. Townsend, K. Plich e P. van Nieuwenhuizen, "Self-Duality in Odd Dimensions", Phys. Lett. **B136** (1984) 38.

[52] S. Deser e R. Jackiw, "Self-Duality of Topologically Massive Gauge Theories", Phys. Lett. **B139** (1984) 371.

[53] N. Sakai e Y. Tanii, "Supersymmetry in Two-Dimensional Anti-de Sitter Space", Nucl. Phys. **B258** (1985) 661.

[54] J. Petersen, "Introduction to the Maldacena Conjecture on AdS/CFT", hep-th/9902131

[55] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity", (1972), Ed. John Wiley and Sons.

[56] S. Paul e A. Khare, "Self-Dual Factorization of the Proca Equation with Chern-Simons Term in $4K-1$ Dimensions", Phys. Lett. **B171** (1986) 244.