UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

SBI-IFUSP

Géons Topológicos em uma
Teoria de Gauge Discreta

Ivan Pontual Costa e Silva

Tese apresentada ao Instituto de
Física da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
doutor em Ciências.

Orientador:
Paulo Teotônio Sobrinho

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 354922-1

Banca Examinadora:

George Emanuel Avraam Matsas (IFT - UNESP)

Paolo Piccione (IME - USP)

Alberto Vazquez Saa (DFMA - IFUSP/IME - UNICAMP)

Élcio Abdalla (DFMA - IFUSP)

São Paulo
2001

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

250.145
55869
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, Ivan Pontual Costa e

Géons Topológicos em uma Teoria de
Gauge Discreta. São Paulo, 2001.

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho
Área de Concentração: Teoria Geral de Partículas e Campos

Unitermos: 1. Géons Topológicos;
2. Teorias de Gauge Discretas;
3. Álgebras de Transformação.

USP/IF/SBI-040/2001

Abstract

Topological geons can be viewed as a sort of localized excitations in spatial topology. In this dissertation, we study a simple physical model, given by a Yang-Mills-Higgs theory with a gauge symmetry described by a compact Lie group G , spontaneously broken down to a *finite* subgroup $H \subset G$. We shall consider this theory to be defined on a $(2+1)d$ spacetime with topology of the form $\Sigma \times \mathbb{R}$, where Σ describes a plane with a single geon. More specifically, we investigate the low energy sector of this theory, obtain its classical configuration space and quantize it. Quantization is accomplished by identifying a certain algebra, which mathematically describes the system, analyzing its structure in detail and obtaining its irreducible representations. Each such representation is then interpreted as an specific geonic sector of the theory. In other words, each one of the irreducible representations describes a distinct geon type. Moreover, we show how the above description can be extended to any number N of geons. The theory developed here may be viewed as a toy model for studying the consequences of non-trivial spatial topology, and in particular the study of the physical properties of geons.

Resumo

Géons topológicos podem ser vistos como um tipo de excitação localizada na topologia espacial. Nesta dissertação, estudamos um modelo físico simples, dado por uma teoria de Yang-Mills-Higgs com simetria de gauge descrita por um grupo de Lie compacto G , e com quebra espontânea de simetria para um subgrupo *finito* $H \subset G$. Esta teoria é definida em um espaço-tempo de $(2+1)d$ com topologia da forma $\Sigma \times \mathbb{R}$, onde Σ descreve o plano com um único géon. Estudamos mais especificamente o setor de baixas energias dessa teoria, deduzindo o espaço de configuração clássico e quantizando-o. A quantização é feita identificando uma certa álgebra que descreve matematicamente o sistema, analisando com detalhes sua estrutura e buscando suas representações irredutíveis. Cada representação é então interpretada como um determinado setor de um géon da teoria. Em outras palavras, cada uma destas representações irredutíveis descreve um tipo de géon diferente. Em seguida, mostramos como estender essa descrição para um número N qualquer de géons. A teoria aqui desenvolvida pode ser vista como um “toy model” para o estudo das consequências de se ter uma topologia espacial não-trivial, e em particular, o estudo das propriedades físicas de géons.

“Incriado Eu sou, de Essência imutável! Contudo, tornando-me o Senhor de toda a criação, residindo em Minha própria Natureza Cósmica (Prakriti), Eu Me incorporo pela ilusão (Maya) emanada de Meu Ser.

Aparentemente eclipsado por Minha própria Yoga-Maya, Eu sou invisível aos homens. O mundo assim iludido não Me conhece, o Incriado, o Imortal.”

-Bhagavad Gita IV:6,VII:25

“Se eu tivesse somente que aprender como uma maçã cai ao solo, ou como uma corrente elétrica faz vibrar meu nervos, eu cometeria suicídio. Eu desejo compreender o âmago das coisas, seu próprio cerne. Teu estudo é a manifestação da vida, o meu é a própria vida (...). Eu preciso conhecer o âmago desta vida, sua própria essência, o que ela é, e não apenas como funciona ou quais são suas manifestações. Eu quero o *porquê* de tudo, e deixo o *como* para as crianças.”

-Swami Vivekananda.

“Me interessa vitalmente conhecer os pensamentos de Deus. O resto são apenas detalhes.”

-Albert Einstein.

Dedico esta tese a meus amados pais, Adonis e Luíza, manifestações maravilhosas do amor de Sri Thakur por mim.

Agradecimentos

A meus pais, Adonis e Luíza, com amor e gratidão infinitos, pela dedicação à tão árdua tarefa de ajudar a transformar um menino num homem; e a meus irmãos Marcos e Ana, seus parceiros nesta jornada.

A minha amadíssima esposa Marta, Amante e Amiga, minha companheira nos caminhos e descaminhos da vida e dona do meu coração. Still? Always!

A minha sogra e segunda mãe, Semira Adler, porque seu coração me dá tantos e lindos vislumbres da Maternidade Divina.

Ao meu orientador, Paulo Teotônio Sobrinho, jovem mestre que com sua dedicação, firmeza e paciência, ajudou com segurança a transformar minhas idéias difusas nesta tese de doutoramento.

A meus amigos e colaboradores, Profs. Aiyalam Balachandran e Eliezer Batista, pelo prazer e honra que me deram de fazermos física juntos.

Ao grande amigo, irmão, compadre, vizinho e companheiro de *sadhana* Agostinho Serrano, pelas inumeráveis formas em que sempre me ajudou para que este e tantos outros trabalhos pudessem ser realizados; e à sua esposa e minha amiga Herenice, dona da melhor e mais concorrida pousada para nordestinos da cidade de São Paulo, agora transladada para Canoas, RG.

A minha avó querida Lourdes, e minhas amadas tia Niça e tia Teca, por tanto amor e carinho ao longo dos anos, com um beijo amoroso do “seu cientista”; a minha querida avó Luíza, *in memoriam*.

Às minhas amadas tias do Rio: Cristina, Fátima, Nininha, Suzana, Vera e Terezinha; e a meu tio Pedro e a meus falecidos tios Evaldo e Júnior, com todo meu carinho.

Aos meus amigos eternos: André Braz de Macêdo e sua esposa Ângela, Bruno Campello de Souza e sua esposa Mônica, Bruno Geraldo Carneiro da Cunha, João Armando Costa Menezes, sua esposa Andréia e seus pais Dr. Alcy e Dna. Alípia, José Barreto Campelo Carvalheira e *last but no least*, Nestor Cortez Saavedra. A existência desses amigos é a prova cabal de que Deus me ama.

À tia Edissa e aos queridos primos Gilson e Laura, Mário, Nelson e Elaine, André e Rose, Marquinhos e Daniela, por nos darem sempre o apoio e o carinho de uma família em nosso “exílio” aqui em São Paulo.

Ao amigo Arnaldo Gomes de Oliveira, companheiro de corridas e incontáveis “agoli-vações filosóficas”.

Ao amigo e companheiro de sala Alessandro Martim Marques, pela paciência, prestabilidade e sumo domínio desta arcana (para mim!) arte da computação.

A todos os amigos e colegas do IFUSP, e em especial a Ji Il Kim, João Assirati, Marcelo

Pires, Marcelo Leite, Marcilei Guazelli e Zulmara: sua gentileza e amizade transformaram meu ambiente de trabalho numa segunda casa para mim.

A todos os funcionários do Departamento de Física-Matemática, e em especial ao trio Amélia, Eloísa e João, por sua competência, simpatia e ajuda em vários pequenos e grandes favores que sempre e desinteressadamente me prestaram.

A todos os professores do Departamento de Física-Matemática, e em particular aos professores Élcio Abdalla e João Carlos Alves Barata, pela inestimável ajuda em minha formação.

À CAPES, pelo auxílio financeiro ao longo de todo o programa de doutoramento.

Enfim, a todos os que, direta ou indiretamente, tornaram possível esta tese, e aos quais a falta de espaço e memória não fazem justiça.

Aviso ao Leitor

Esta dissertação é baseada em uma parte das idéias elaboradas nos seguintes artigos:

- A.P. Balachandran, E. Batista, I.P. Costa e Silva e P. Teotonio-Sobrinho, Int. J. Mod. Phys., **A15** (2000) 1629, hep-th/9905136;
- A.P. Balachandran, E. Batista, I.P. Costa e Silva e P. Teotonio-Sobrinho, Nucl. Phys. **B566** (2000) 441, hep-th/9906174;
- A.P. Balachandran, E. Batista, I.P. Costa e Silva e P. Teotonio-Sobrinho, "A Novel Spin-Statistics Theorem in $(2+1)d$ Gravity" (Submetido ao Mod. Phys. Lett. A);
- A.P. Balachandran, E. Batista, I.P. Costa e Silva e P. Teotonio-Sobrinho, "On a Generalized Spin-Statistics Relation for Quantum Geons" (em preparação).

Tentamos, na medida de nossas forças, tornar esta tese auto-contida. Está claro, contudo, que isto não é inteiramente possível: assumimos que o leitor tem um conhecimento básico de geometria diferencial, topologia geral e álgebra abstrata ao nível de compêndios de matemática para físicos (como, por exemplo, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 11]), e um conhecimento moderado de Relatividade Geral, que se adquire pelo estudo de qualquer uma das Refs. [7, 8, 9, 10].

Utilizamos ferramentas matemáticas bastante variadas nesta tese. Contudo, a fim de manter esta dissertação num tamanho razoável, por vezes o rigor matemático foi posto em segundo plano em relação à clareza. Nestes casos, procuramos remeter o leitor às referências apropriadas para a devida complementação.

Ao longo desta tese usamos o termo "topologia" no sentido intuitivo de "forma" (como quando dizemos, por exemplo, que uma rosquinha tem a "topologia" do toro), e não no seu sentido matemático formal de uma coleção de subconjuntos com certas propriedades. Este ligeiro abuso de linguagem é comum, e bastante útil em descrições intuitivas.

A menos de menção em contrário, trabalhamos nesta dissertação com unidades nas quais $c = \hbar = G = 1$, e com espaços-tempo tridimensionais com métricas Lorentzianas de assinatura $(+ - -)$. Usamos letras gregas μ, ν , etc. para índices espaço-temporais, letras latinas no meio do alfabeto i, j, k , etc. para índices espaciais e letras latinas no começo do alfabeto a, b, c , etc. para índices internos. A convenção de somatória de Einstein é também assumida a menos de menção em contrário.

Sumário

Introdução	1
1 Uma Introdução aos Géons Topológicos	7
1.1 O Porquê de Considerar Géons Topológicos	7
1.2 O Que São Géons Topológicos?	16
2 Caminhos para a Quantização	21
2.1 Uma Visão Geral do Processo de Quantização	22
2.2 O Espaço de Estados Clássicos dos Géons na Gravitação em $(2 + 1)d$. . .	25
2.3 A Quantização de Mackey	33
3 Teorias de Gauge Discretas para Géons	41
3.1 Lagrangeana e Espaço de Configurações	45
4 A Álgebra Quântica para Géons	53
4.1 Obtendo a Álgebra dos Campos	53
4.2 Quantizando a Álgebra dos Campos	68
5 O Teorema de Spin-Estatística e Outros Resultados	75
5.1 O Géon como Partícula	75
5.2 Topologia Clássica e Teoria Quântica	79
5.3 Um Teorema de Spin-Estatística para Géons em $(2 + 1)d$	82
5.3.1 O papel de H : O Princípio de Superseleção	86
Conclusão e Perspectivas	89
A Algumas Definições Básicas em Teoria da Medida	93
B O Teorema de Classificação	97
Referências Bibliográficas	103

Lista de Figuras

1.1	A soma conexa de dois toros T^2 . Primeiro, remove-se um disco de cada toro. Em seguida, eles são colados ao longo de seus recém-criados bordos.	16
1.2	Um plano com um número finito de géons (alças) é um exemplo de uma variedade com uma única região assintótica. Note-se que toda a complexidade topológica pode ser localizada numa circunferência S , e os géons podem ser isolados um do outro. Fora de S , tem-se apenas o plano $\mathbb{R}^2$	18
1.3	Um géon “solitário” pode ser visto como uma excitação localizada, ou “sóliton”, da topologia. À distância, o mesmo parecerá com uma partícula pontual.	19
4.1	A figura mostra as curvas fechadas γ_i ($1 \leq i \leq 3$). As classes de homotopia $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$ geram o grupo fundamental do plano com uma única alça (géon). A classe $[\gamma_3]$ não é independente de $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$	57
4.2	Torções de Dehn correspondendo a difeomorfismos do GCI. As faixas contêm curvas fechadas, omitidas na figura. Rotações são todas tomadas no sentido anti-horário por convenção.	60
4.3	A torção de Dehn B e sua ação em γ_1	61
4.4	As classes de homotopia $[\gamma_i]$ ($1 \leq i \leq 4$) relativas às curvas fechadas mostradas na figura geram o grupo fundamental do plano com dois géons.	64
4.5	A permutação de géons.	65
4.6	A translação de alças é interpretada geometricamente como uma monodromia completa de duas “pernas” de alças distintas seguida por uma rotação de 2π de cada “perna”. A figura mostra representações equivalentes da translação de alças: Em (a), o géon é visto como uma caixa retangular no plano. Em (b), identificamos dois lados opostos do retângulo correspondendo ao géon, de forma que agora o mesmo fica representado por dois círculos no plano, cada um correspondendo a uma “perna”.	66
4.7	A figura (a) mostra a curva fechada γ_1 definida na figura Fig. 3.4. A curva transformada $\tilde{\gamma}_1$ está indicada em (b). As figuras (c) e (d) representam dois passos na deformação de $\tilde{\gamma}_1$	67

Introdução

Com o advento da Mecânica Quântica e da Teoria Quântica de Campos, percebeu-se que a descrição clássica de diversas grandezas físicas, como posição e momento linear de partículas e valores de campos eletromagnéticos, era inadequada. Estas grandezas sofriam flutuações quânticas. A gravitação, contudo, e mais especificamente a Relatividade Geral, tem permanecido incólume ante as inúmeras tentativas que têm sido feitas nos últimos 50 anos de reconciliá-la com a Teoria Quântica, ou por outras palavras, de obter uma teoria quântica da gravitação.

A dificuldade fundamental, é claro, está no fato de que a gravidade é a mais fraca entre as interações fundamentais. Em escalas microscópicas, onde os efeitos quânticos se tornam relevantes, as massas são muito pequenas para que o acoplamento com a gravitação tenha suas características quânticas detectadas com os meios de observação à nossa disposição hoje. De fato, só se esperam que flutuações quânticas na gravitação sejam importantes em dimensões comparáveis ao chamado comprimento de Planck, cerca de 10^{-33} cm [8]. Está claro que essas escalas são completamente inacessíveis num futuro próximo.

A despeito desta dificuldade, a idéia de que a gravitação possa existir divorciada da Mecânica Quântica tem soado absurda à maior parte dos físicos; tornou-se natural a tentativa de promover alguma espécie de fusão entre as duas, num esforço teórico praticamente sem *input* experimental. Há, sem dúvida, um sério risco em conduzir esforços sob estas condições. Sendo a Física uma ciência experimental, a ausência de sugestões advindas de observações empíricas para a elaboração de uma teoria pode facilmente fazê-la degenerar numa “Filosofia Escolástica Contemporânea”.

Um consolo parcial advém da idéia de que levar os princípios da Relatividade Geral e da Mecânica Quântica a seus limites pode ser uma fonte de várias lições valiosas. Em outras palavras, apesar das dificuldades de elaborar uma teoria quântica completa da gravitação, esse estudo pode nos fazer descobrir ao menos alguns dos elementos que tal teoria deverá possuir. Um exemplo desse fenômeno é a Radiação de Hawking [12], ou emissão de radiação por um buraco negro. Desde que foi descoberto por Hawking, este resultado tem sido obtido de inúmeras formas diferentes e independentes [13, 14], inclusive pelos métodos fisicamente mais conservadores (e portanto em princípio mais confiáveis) da Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos [15]. Acredita-se que este seja um genuíno efeito de gravitação quântica, ao ponto das duas principais candidatas modernas a teoria de gravitação quântica, a Teoria das Cordas e a Geometria Quântica (ou “Loop Quantum Gravity”) de Ashtekar e seus associados, terem reobtido esse resultado com suas respectivas técnicas como testes de consistência (ver, por exemplo, [14] e as referências ali citadas).

Na ausência de uma teoria completa de gravitação quântica, tornou-se prática comum o estudo de modelos simplificados que retivessem alguns aspectos desta, sendo contudo mais tratáveis do ponto de vista formal. Vamos agora fazer uma série de considerações heurísticas gerais para tentar entender intuitivamente o que está envolvido nestas simplificações.

A Relatividade Geral nos traduz a gravitação como a própria geometria do espaço-tempo. Mais precisamente, uma solução das equações de campo de Einstein pode ser vista como uma dupla $(M, g_{\mu\nu})$, onde M é uma variedade diferenciável que descreve o *continuum* espaço-temporal, e $g_{\mu\nu}$ denota uma métrica com assinatura Lorentziana em M [8, 9, 10]. Quantizar a gravitação seria, num certo sentido, quantizar a própria geometria do espaço-tempo.¹

Podemos então imaginar uma “Superteoria”, que tivesse parâmetros $(M, g_{\mu\nu}, \Phi)$ clássicos, onde Φ designa uma variável coletiva descrevendo os vários possíveis campos físicos, além da métrica, definidos em M . Estes parâmetros são todos, em princípio, sujeitos a flutuações quânticas². Esta “Superteoria” seria uma idealização onde todos os graus de liberdade imagináveis seriam dinâmicos. Mas qualquer noção dinâmica nesse caso tem um conteúdo relacional: a variação de certos graus de liberdade só pode ser tomada com respeito aos demais. É então necessário e natural que “congelemos” parte da liberdade da teoria; os graus de liberdade assim “congelados” servem de referência para a dinâmica dos demais.

A escolha dos graus de liberdade topológicos para serem aqueles a serem “congelados” é natural na maioria dos casos, e deve-se principalmente à dificuldade em se incorporar variações da topologia em Física, onde praticamente todas as teorias dependem de um background fixo. Mesmo a Relatividade Geral, onde a métrica é uma variável dinâmica, assume uma variedade com dimensão, topologia e estrutura diferenciável fixas como pano de fundo. Mais ainda, a topologia do espaço-tempo é quase sempre implicitamente tomada como uma entidade clássica, mesmo quando outros graus de liberdade são quantizados. Nesse sentido, quase todas as teorias físicas conhecidas podem ser vistas como “aproximações semiclássicas” da “Superteoria” acima, onde as flutuações quânticas da topologia são suprimidas, e os demais parâmetros quantizados. Por exemplo, se considermos M como uma variedade “clássica” fixa, e permitimos que a métrica $g_{\mu\nu}$ e os campos Φ sejam quânticos, temos gravitação quântica com matéria quântica. Se $g_{\mu\nu}$ também é visto como clássica, e somente os campos Φ são quantizados, temos a Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos, da qual a Teoria de Campos usual no espaço de Minkowski é um caso particular onde escolhemos $M = \mathbb{R}^4$ e $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(+ - - -)$. É possível entretanto considerar a topologia do espaço-tempo como uma entidade quântica até certo ponto através do formalismo de integrais funcionais [17, 18], realizando uma soma sobre

¹Não se descarta, inclusive, que possam ocorrer flutuações quânticas na *topologia* de M na escala de Planck. De fato, existem inúmeros resultados sugerindo que este de fato é o caso (veja, por exemplo, as Refs. [13, 16] e as referências ali citadas).

²Note-se que cada tripla $(M, g_{\mu\nu}, \Phi)$ tem uma conotação clássica. Mais precisamente, consideramos o conjunto $\mathcal{C}$ destas triplas (obedecendo talvez a condições adequadas de diferenciabilidade, conexidade, etc.), e o que queremos dizer por “flutuações quânticas” é que a quantização deve nos fornecer uma certa “probabilidade de ocorrência” para cada tripla.

topologias [13].

Mesmo considerando a topologia do espaço-tempo como uma entidade fixa e clássica, podemos analisar mudanças na topologia *espacial*. Se a variedade espaço-temporal M tem uma topologia da forma $\Sigma \times \mathbb{R}$, onde Σ denota o “espaço”, e $\mathbb{R}$ o “tempo”, então M descreve uma situação onde a topologia espacial permanece sempre a mesma. Se M contudo não possui esta estrutura, dizemos que ocorre mudança na topologia espacial.

Classicamente, é possível mostrar que mudança de topologia espacial é proibida, exceto a um preço bastante alto. Um teorema demonstrado por Geroch [19] implica que se um espaço-tempo apresenta uma mudança na topologia espacial, então, ou a métrica deve ser degenerada em alguma parte, ou existe alguma região com curvas tipo tempo fechadas, representando violações de causalidade. Por outro lado, em Física se espera que, conhecendo algum sistema no presente, sejamos capazes de prever seu desenvolvimento no futuro, se conhecemos as equações dinâmicas que o descrevem. Isso só é possível se o espaço-tempo tem a propriedade de *hiperbolicidade global* (veja [9, 20]) para uma definição). Mas o teorema 8.3.14 de [9] estabelece que um espaço-tempo globalmente hiperbólico tem sempre topologia da forma $\Sigma \times \mathbb{R}$. Esses teoremas mostram que mudanças na topologia espacial são classicamente proibidas para espaços-tempo fisicamente razoáveis.

No caso quântico, se permitimos violações locais de causalidade de dimensões da ordem da escala de Planck, podemos ainda considerar a possibilidade de mudanças de topologia espacial [13, 16]. Ainda que sejam possíveis, espera-se que tais mudanças tenham uma probabilidade bastante atenuada. Alguns modelos simples (veja, por exemplo, [21, 22]) avaliam amplitudes de probabilidade para que ocorram espaços-tempo apresentando mudanças de topologia na “soma sobre topologia” mencionada acima, e se verificam serem de fato pequenas.

Uma vez que a topologia espacial esteja fixada, podemos mudar para uma abordagem “*a lá* Schrödinger” da teoria quântica, onde consideramos que estados quânticos são “funcionais de onda” $\Psi : Q_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$, onde Q_Σ é o espaço de configuração clássico da teoria que estejamos considerando (veja o Capítulo 2 desta tese e as referências ali citadas)³. Vamos supor que exista um produto interno sob o qual estes estados formam um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_\Sigma$. Fixemos nossa atenção agora na variedade Σ descrevendo uma “fatia espacial”. Acontece que a topologia de Σ é descrita adequadamente em termos de “excitações topológicas” chamadas *géons* [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]. Estes podem ser entendidos como “partículas de topologia não-trivial”, num sentido que tornaremos preciso no Capítulo 1. Nesta dissertação, apenas consideraremos o caso em que Σ tem dimensão dois, é conexa e orientável. Neste caso, sua topologia é essencialmente descrita pelo seu número de “alças”, e cada alça corresponde a um géon neste caso. Por simplicidade, doravante consideramos apenas esta situação.

Existem diversos setores topológicos inequivalentes da teoria quântica acima, correspondendo aos vários números de géons que podemos ter. Suponha que Σ tem N alças (géons). Denotamos aqui o espaço de Hilbert da teoria quântica neste caso por $\mathcal{H}_N$ e por Q_N o espaço de estados clássicos correspondente. O espaço de Hilbert $\mathcal{H}_N$ descreve o setor de N géons da teoria. Um aspecto importante é que, mesmo fixando N , de mo-

³Mais geralmente, podemos considerar estados como seções de um fibrado vetorial hermiteano sobre Q_Σ .

do geral existem várias possíveis escolhas unitariamente inequivalentes para o espaço de Hilbert na teoria quântica [28, 30, 32, 34]. Ou seja podemos quantizar a mesma teoria clássica de mais de uma forma. Podemos então acrescentar um índice abstrato k (não necessariamente um número) e denotar os possíveis espaços de Hilbert por $\mathcal{H}_N^k$.

É bem conhecido que géons, quando vistos como partículas, são dotados de propriedades como spin e estatística, mas violam em geral o teorema de spin-estatística [28, 29, 30]. Isto ocorre da seguinte forma. Seja Σ uma variedade com N géons, ou seja, topologicamente assumimos que Σ é um plano $\mathbb{R}^2$ com N alças. Denotemos por $\mathcal{R}$ um difeomorfismo de Σ que troca duas dessas alças de lugar e por $C_{2\pi}$ o difeomorfismo de Σ que gira uma das alças sobre si mesma de 2π . Essas operações são promovidas na teoria quântica a operadores $\hat{\mathcal{R}}^k$ e $\hat{C}_{2\pi}^k$ agindo em cada um dos espaços de Hilbert $\mathcal{H}_N^k$ descrevendo os vários setores quânticos. O teorema de spin-estatística neste caso seria a proposição de que

$$\hat{\mathcal{R}}^k \Psi^k = \hat{C}_{2\pi}^k \Psi^k,$$

para todo $\Psi^k \in \mathcal{H}_N^k$ e para todo k .

Este teorema é um das relações mais fundamentais em teorias descrevendo as partículas da natureza. Experimentalmente, nunca foram encontradas partículas que o violassem. Para se entender a importância de ser ter ou não uma conexão entre spin e estatística para géons temos que recordar que nas teorias quânticas de campo usuais no espaço de Minkowski, as partículas (quanta de campo) que surgem quando fazemos, por exemplo, segunda quantização, apresentam essa conexão naturalmente. Podemos então voltar nossa atenção para a “Superteoria” descrita acima, e chegaremos facilmente à conclusão que se a topologia fosse vista também como um “campo quântico”, géons poderiam ser considerados como suas excitações ou “quanta”. É por isso que parece natural perguntar se de fato eles têm, em comum com outros quanta de campo, a correlação entre spin e estatística, ou se esta é apenas uma lei válida apenas dentro de um contexto mais restrito. Existem fortes indicações [28, 33, 39] de que esta relação pode ser restabelecida para géons se se permitir mudanças na topologia espacial, ou mais especificamente, criação e aniquilação de pares de géons.

Nesta dissertação, estudamos um modelo físico simples, dado por uma teoria de Yang-Mills-Higgs, com simetria de gauge descrita por um grupo de Lie compacto G , e com quebra espontânea de simetria para um subgrupo *finito* $H \subset G$. Esta teoria é definida em um espaço-tempo de $(2+1)d$ com topologia da forma $\Sigma \times \mathbb{R}$, onde Σ descreve o plano com um único géon. Estudamos mais especificamente o setor de baixas energias dessa teoria, deduzindo o espaço de configuração clássico e quantizando-o. A quantização é feita identificando uma certa álgebra que descreve matematicamente o sistema, descrevendo com detalhes sua estrutura e buscando suas representações irredutíveis r em espaços de Hilbert $\mathcal{H}_r$. Cada representação $(r, \mathcal{H}_r)$ é então interpretada como um determinado setor de um géon da teoria. Em outras palavras, cada uma destas representações irredutíveis descreve um tipo de géon diferente. Em seguida, mostramos como estender essa descrição para um número N qualquer de géons. A teoria aqui desenvolvida pode ser vista como um “toy model” para o estudo das consequências de se ter uma topologia espacial não-trivial, e em particular, o estudo das propriedades físicas de géons.

A partir da teoria quântica dos géons assim construída, é possível deduzir várias propriedades interessantes que géons terão neste contexto. Em particular, um resultado técnico importante desta tese é a dedução de uma versão mais fraca do teorema de spin-estatística para géons (Capítulo 5): mostramos que cada setor $(r, \mathcal{H}_r)$ possui uma relação específica entre spin e estatística, desde que uma certa condição sobre um dos números quânticos caracterizando o setor seja verificada.

O resto desta dissertação está dividido como segue.

O Capítulo 1 introduz os géons; é mostrada uma retrospectiva de como estes surgiram na Física e em particular como eles dão origem a estados de spin não-inteiro em gravitação quântica, mesmo na ausência de matéria espinorial. Também definimos rigorosamente o que se entende por géons.

No Capítulo 2, fazemos uma breve análise do que significa quantizar uma teoria física a partir de sua versão clássica; introduzimos também neste Capítulo o espaço de estados clássicos de géons em gravitação quântica em $(2 + 1)d$; analisaremos uma forma de quantização que será finalmente utilizada para quantizar os géons do nosso modelo.

O Capítulo 3 introduz a teoria de gauge com simetria espontaneamente quebrada que utilizamos para estudar os géons nesta dissertação. Seu limite de baixas energias é discutido em detalhes, e com isto obtemos uma descrição explícita do espaço de configurações clássico para géons neste modelo. Ficará claro que a estrutura geral deste é bastante semelhante ao que surge na gravitação quântica em $(2 + 1)d$ discutido no Capítulo 2. Mas aquele é de fato uma versão simplificada deste, e a simplificação técnica torna a quantização bastante mais simples.

No Capítulo 4 desenvolvemos em detalhes a álgebra geônica. Analisamos cuidadosamente sua estrutura, e identificamos sua forma geral. A partir daí, nos dedicamos a descrever suas representações irredutíveis.

O Capítulo 5 utiliza as representações irredutíveis da álgebra geônica desenvolvidas no Capítulo anterior para estudar alguns efeitos de interesse: mostramos como géons podem de fato ser vistos como partículas se vistos “de longe”, e discutimos como géons podem ser instáveis se analisados por observadores incapazes de discernir sua estrutura interna; mostramos também um teorema de spin-estatística generalizado para géons, já discutido. Para mostrar este teorema, assumimos que um dos números quânticos do géon, o chamado *fluxo*, é uma grandeza *superseleccionada*. Discutimos detalhadamente porque tal hipótese é fisicamente bastante razoável.

Finalmente, nos Apêndices A e B, discutimos respectivamente alguns elementos de teoria da medida utilizados nesta tese e a demonstração do teorema de classificação das representações irredutíveis da álgebra de géons, enunciado no Capítulo 4.

Terminamos com algumas conclusões gerais e discussão de perspectivas futuras.

Capítulo 1

Uma Introdução aos Géons Topológicos

O termo *géon* foi usado pela primeira vez por J.A. Wheeler [25] para designar um pacote de energia eletromagnética mantido coeso pelo seu próprio campo gravitacional, formando uma região espacial de curvatura não-nula, tipicamente muito pequena. Aqui, contudo, este termo terá um significado completamente diferente. Estaremos nos referindo a géons *topológicos*, um tipo de “excitação solitônica” na topologia do espaço ¹ discutido pela primeira vez por Friedman e Sorkin [26], e cujas propriedades foram bastante elaboradas na literatura [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39]. Neste primeiro Capítulo, faremos uma revisão das propriedades desses objetos e de algumas consequências físicas de sua presenças.

1.1 O Porquê de Considerar Géons Topológicos

Ao longo desta Seção, discutiremos como a topologia dá origem a um notável efeito, a saber o surgimento de spin semi-inteiro numa teoria sem matéria espinorial. Nosso interesse é principalmente mostrar como géons entram na Física, e portanto não apresentaremos todos os detalhes formais. Referimos à literatura apropriada para preencher as lacunas deixadas. Na próxima Seção deste Capítulo, passaremos a definir de forma rigorosa o que são géons topológicos.

Géons surgem na gravitação quântica em conexão com estados de spin fracionário [40]. Em teorias físicas no espaço de Minkowski de $(3+1)d$, isto é, onde a gravitação não é levada em consideração, partículas de spin não-inteiro aparecem como excitações de campos espinoriais. Recordemos a razão desse fato. O spin corresponde a uma caracterização de como um estado quântico de um sistema físico responde a uma rotação do mesmo. Os geradores infinitesimais das rotações são, ao nível quântico, os operadores de momento angular $\hat{J}_i$, $i = 1, 2, 3$, que obedecem às relações de comutação

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k.$$

¹Ao longo desta tese, a palavra “topologia” significará, a menos de menção explícita em contrário, topologia espacial, e não a espaço-temporal.

Em outras palavras, esses operadores fornecem uma representação da álgebra de Lie do grupo de rotação $SO(3)$ [42, 43, 44, 45]. As representações irredutíveis dessa álgebra de Lie são classificadas por um número s , inteiro ou semi-inteiro, que corresponde matematicamente ao spin. O que entendemos por “rotação” de um ângulo θ em torno de um eixo dado por um vetor $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ é a ação do operador $e^{i\theta \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{J}}}$, onde $\hat{\mathbf{J}}$ é o “vetor” cujas componentes são os operadores $\hat{J}_i$ [1, 42, 45]. Em particular, se ψ denota um elemento de um espaço vetorial carregando uma representação de spin s , uma rotação de 2π em torno do eixo z nos dará

$$e^{2\pi i \hat{J}_3} \psi = e^{2\pi i s} \psi.$$

Os espinores correspondem precisamente a representações de spin semi-inteiro [1, 9, 11]. Em particular, vemos dessa última equação que espinores devem portanto mudar de sinal sob uma rotação de 2π .

Uma análise ingênua da gravitação pura nos levaria a concluir que estados em gravitação quântica jamais poderiam ter valores semi-inteiros para o spin. Vejamos como se chega a essa conclusão.

Na gravitação pura (no resto dessa Seção vamos assumir, a menos de menção em contrário, o caso de $(3+1)d$), as equações de Einstein para o espaço-tempo $(M, g_{\mu\nu})$ podem ser obtidas de um princípio variacional utilizando-se a ação de Einstein-Hilbert [8, 9, 10]

$$S = \int_M R \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.1)$$

onde R é o escalar de curvatura e g é o determinante, do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ sobre M . Podemos tentar quantizar essa teoria, por exemplo, pelo formalismo de integrais de trajetória. A idéia é considerar $M = \mathbb{R}^4$ e escrever o tensor métrico na forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica plana, de forma que $(\mathbb{R}^4, \eta_{\mu\nu})$ é o espaço de Minkowski, e $\gamma_{\mu\nu}$ é o campo a ser quantizado. Se consideramos $\gamma_{\mu\nu}$ como “pequeno” num sentido apropriado, pode-se mostrar [9] que as equações de Einstein em primeira ordem em $\gamma_{\mu\nu}$ são equações para um campo livre, sem massa, e de spin 2. Ao substituir (1.2) em (1.1), podemos considerar as equações de Einstein completas (não necessariamente com $\gamma_{\mu\nu}$ “pequeno”) como equações de um campo sem massa, de spin 2 e com uma auto-interação complicada, no espaço de Minkowski [7, 9]. Apesar das arbitrariedades de gauge que existem nessa teoria, sabe-se como obter uma série perturbativa para a teoria quântica de campo resultante [46]. A partícula quântica correspondente é o chamado *gráviton*. Na Seção 2.2 discutiremos um pouco acerca da renormalizabilidade (de fato, a ausência dela) dessa teoria de campo. Aqui apenas observamos que a teoria de perturbação prevê somente a existência de um campo de spin inteiro.

Houve portanto considerável surpresa quando Friedman e Sorkin [26] descobriram, baseados em argumentos bastante gerais, que uma teoria de gravitação quântica deve admitir estados de spin semi-inteiro, mesmo na ausência de campos espinoriais explícitos. Vamos revisar aqui as idéias que levam a essa conclusão (ver [26] para maiores detalhes). Enfatizamos que as idéias discutidas aqui nada têm a ver, ao menos *a priori*, com supersimetria.

Na verdade, Friedman e Sorkin não foram os primeiros a descobrir a presença de estados de spin semi-inteiro em teorias quânticas de campos com spin inteiro. Jackiw e Rebbi [47] e, independentemente, Hasenfratz e 't Hooft [48] foram os primeiros a fazê-lo, construindo sólitons de spin semi-inteiro a partir do acoplamento de campos de Yang-Mills-Higgs e isoespiniores. Como sólitons são objetos que não aparecem a partir de uma perturbação em torno de uma configuração de vácuo, esse resultado é essencialmente não-perturbativo. O mesmo se pode dizer do resultado de Friedman e Sorkin: veremos mais adiante que a construção de estados de spin semi-inteiro depende de uma topologia não trivial, que não pode ser obtida perturbando o espaço-tempo de Minkowski. Uma diferença básica no resultado de Friedman e Sorkin quando comparado aos desses outros autores é que os primeiros não usam fontes de campo e nem cargas para obter spin semi-inteiro.

A idéia intuitiva básica por trás dessas construções é que quando graus de liberdade de gauge estão presentes, o espaço de configuração clássico Q é maior do que o espaço de estados fisicamente distintos da teoria: o espaço de configuração físico é na verdade o espaço $\hat{Q}$ das *classes de equivalência* por transformações de gauge. A imagem de um campo sob uma rotação de 2π só precisa ser um outro campo relacionado por uma transformação de gauge, e o efeito no espaço de configuração Q será uma transformação de gauge $R(2\pi)$. Na teoria quântica correspondente, se consideramos os estados quânticos como descritos por funcionais $\Psi : Q \rightarrow \mathbb{C}$, existe uma ação induzida dada por [26, 47, 48, 49]

$$(\hat{R}(2\pi)\Psi)(q) = \Psi(R(2\pi)q).$$

O ponto aqui é que não precisa ser necessariamente verdadeiro que $\hat{R}(2\pi)\Psi = \Psi$: uma vez que Ψ ou $e^{i\alpha}\Psi$ com $\alpha \in \mathbb{C}$ representam o mesmo estado, a ação da rotação pode resultar apenas numa fase multiplicativa.

Vamos agora aplicar essas considerações gerais à gravitação. Vamos adotar aqui, para facilitar nossa explicação, o formalismo de “segunda ordem” da gravitação, onde o campo gravitacional é representado por um tensor métrico, em contraste com o formalismo de “primeira ordem”, onde a geometria é descrita por conexões e tétrades [10, 8, 9, 50]. No Capítulo 2, utilizaremos o formalismo de primeira ordem para discutir géons na gravitação em $(2+1)d$.

Começamos por assumir um espaço-tempo M difeomorfo a $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$, os números reais na reta real $\mathbb{R}$ correspondendo a “instantes de tempo”, e $\mathcal{S}$ representando o “espaço”. Essa *variedade espacial*, como chamaremos com frequência qualquer variedade que represente o papel do espaço físico, é aqui tomada como uma variedade diferenciável de dimensão 3. Assumimos que existe uma região compacta $K \in \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{S} \setminus K$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}^3$, onde $\bar{B}^3$ é uma bola fechada de raio 1 e com centro na origem. Intuitivamente, o significado dessa hipótese é que $\mathcal{S}$ “parece” com $\mathbb{R}^3$ fora de uma certa região.

Na representação de Schrödinger da gravitação quântica, ou quantização canônica [46, 51, 52], estados quânticos são funcionais no espaço de configuração da teoria clássica. Para obter o espaço de configuração para a gravitação, temos inicialmente que considerar o espaço de fase obtido utilizando o formalismo canônico, ou Hamiltoniano, da Relatividade Geral desenvolvido por Arnowitt, Deser e Misner (ADM) [8, 9, 53, 54] (para um

desenvolvimento matemático mais rigoroso, ver, por exemplo, [55]). Recordamos aqui rapidamente esse formalismo. Fixemos um difeomorfismo $\phi : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow M$. Assumiremos que as aplicações $\phi_t : \mathcal{S} \rightarrow M$ obtidas fixando $t \in \mathbb{R}$ formam uma família a um parâmetro de mergulhos (*embeddings*) diferenciáveis de $\mathcal{S}$ em M . Em particular, ϕ define uma *folheação* de M por cópias de $\mathcal{S}$ (veja por exemplo [56, 57] para definições rigorosas de folheação e mergulho). Considere agora o mergulho ϕ_0 dessa família: a imagem $\phi_0(\mathcal{S})$ representa fisicamente o “espaço no instante $t = 0$ ”². Foi mostrado por ADM que uma solução das equações de Einstein em M pode ser obtida univocamente a partir de *dados iniciais* em $\mathcal{S}$, e o espaço de fase é precisamente o conjunto desses dados iniciais. Um dado inicial na acepção de ADM [53] é uma dupla (h_{ij}, π^{ij}) , onde h_{ij} é uma métrica de classe C^∞ , positiva definida e assintoticamente plana em $\mathcal{S}$ ³, que é vista como a variável de configuração, e π^{ij} é uma densidade tensorial em $\mathcal{S}$, definida por

$$\pi^{ij} := (-K^{ij} + h^{ij}K)\sqrt{h}.$$

K^{ij} é o tensor de curvatura extrínseca de $\mathcal{S}$ em M associado ao mergulho ϕ_0 (veja, por exemplo, [6] para uma definição do conceito de curvatura extrínseca), e h é o determinante de h_{ij} . Aqui, índices são baixados ou levantados usando h_{ij} .

Nem todas as duplas (h_{ij}, π^{ij}) servem como dados iniciais, porém. A teoria possui vínculos. Estes são dados por

$$hR + \frac{1}{2}(\pi_k^k)^2 - \pi^{ij}\pi_{ij} = 0 \quad (1.3)$$

e

$$D_i \pi^{ij} = 0, \quad (1.4)$$

onde D_i denota a derivada covariante em $\mathcal{S}$ com respeito à métrica h_{ij} . Um dado inicial é de fato definido como uma dupla (h_{ij}, π^{ij}) obedecendo às eqs. (1.3) e (1.4). Existe uma relação biunívoca entre dados iniciais e métricas C^∞ em M que são soluções das equações de Einstein, para um dado difeomorfismo ϕ como acima (para uma demonstração, veja [53, 55, 20], o capítulo 10 de [9], e suas referências). Dada uma solução $g_{\mu\nu}$ das equações de Einstein, h_{ij} corresponde à sua “parte espacial”, ou mais precisamente ao seu pullback para $\mathcal{S}$ pelo mergulho ϕ_0 . Pode-se mostrar que π^{ij} é o momento conjugado a h_{ij} através da ação (1.1).

Dessa discussão, inferimos que o espaço de configuração é o espaço $\mathcal{M}_\mathcal{S}$ de todas as métricas de classe C^∞ , positivas definidas e assintoticamente planas em $\mathcal{S}$. Estados quânticos correspondem portanto a funcionais $\Psi : \mathcal{M}_\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$. Nesse formalismo, o momento é promovido a um operador agindo formalmente nos estados como [52, 58, 59, 60]

$$\hat{\pi}^{ij}\Psi := -i\delta\Psi/\delta h_{ij}. \quad (1.5)$$

²No que segue, não faremos distinção entre $\mathcal{S}$ e sua imagem $\phi_0(\mathcal{S})$ em M , e pensaremos em $\mathcal{S}$ como estando embebida em M por esse mergulho.

³Por “assintoticamente plana” entenderemos que $q_{ij} := h_{ij} - \delta_{ij}$ é $O(1/r)$ e $\partial_k h_{ij}$ é $O(1/r^2)$, para uma coordenada radial adequada r .

O “subespaço físico” é o espaço $\mathcal{H}$ dos funcionais Ψ satisfazendo a versão em operador do vínculo de momento, como é conhecida a equação (1.4) ⁴:

$$D_j \hat{\pi}^{ij} \Psi = 0. \quad (1.6)$$

Devido à definição (1.5), a equação (1.6) deve ser entendida num sentido “distribucional”: dado um campo vetorial liso ξ^i cujo valor e de suas derivadas vão a zero no infinito espacial de forma suficientemente rápida, temos

$$\int_S d^3x D_i \xi_j \frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)} \Psi = 0. \quad (1.7)$$

Pode-se mostrar [26] que

$$0 = \int_S d^3x D_i \xi_j \frac{\delta}{\delta h_{ij}(x)} \Psi(g) = \frac{d}{d\lambda} \Psi(F_\lambda^* g) |_{\lambda=0}, \quad (1.8)$$

para toda $g \in \mathcal{M}_S$. Nessa equação, $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ é a família a um parâmetro de difeomorfismos de S gerada pelo campo vetorial ξ^i , e $F_\lambda^* g$ denota o pullback da métrica g pelo difeomorfismo F_λ (para as definições desses conceitos de geometria diferencial, ver, por exemplo, [2, 5, 56]). Em particular, $F_0 = Id_S$. Note-se que uma vez que ξ^i vai a zero no infinito espacial, todos os difeomorfismos dessa família são triviais no infinito. Seja $Diff^\infty(S)$ o grupo dos difeomorfismos de S que são triviais no infinito, e denotemos por $Diff_0^\infty(S)$ sua componente conexa à identidade. Por definição de componente conexa à identidade, dado $T \in Diff_0^\infty(S)$, existe uma curva $\lambda \mapsto T_\lambda$ em $Diff^\infty(S)$ (que assumimos ser diferenciável) com $\lambda \in [0, 1]$ tal que $T_0 = Id_S$, e $T_1 = T$. Essa curva define um campo vetorial X em S , que vai a zero no infinito espacial, dado por $X(x) := dT_\lambda(x)/d\lambda |_{\lambda=0}$. Usando esse campo vetorial como “função teste” em (1.8), concluímos que $\Psi(T_\lambda^* g)$ é constante ao longo da curva, e em particular $\Psi(T^* g) = \Psi(g)$, para todo $\Psi \in \mathcal{H}$.

Definimos agora uma ação de $Diff^\infty(S)$ nos funcionais de estado dada por [26, 49]

$$(\hat{T}\Psi)(g) := \Psi(T^* g), \quad (1.9)$$

para cada $T \in Diff^\infty(S)$. O raciocínio no último parágrafo mostra que *os estados físicos, isto é, aqueles que satisfazem o vínculo (1.6), são invariantes por $Diff_0^\infty(S)$* . Essa afirmação também pode ser reinterpretada como significando que cada estado físico Ψ é constante nas classes de equivalência em $\mathcal{M}_S$ sob a ação natural de $Diff_0^\infty(S)$ por pullback. Em outras palavras, os estados físicos (elementos de $\mathcal{H}$) podem ser vistos como funcionais em $\hat{\mathcal{M}}_S := \mathcal{M}_S / Diff_0^\infty(S)$, às vezes chamado de *superespaço* na literatura. A eq. (1.3), chamada de vínculo Hamiltoniano, contém informação sobre a dinâmica na gravitação quântica (veja, por exemplo, as Refs. [6, 53] para uma discussão sobre este ponto), e é ignorada nesta discussão cinemática, devido à dificuldade de interpretá-la como uma equação operatorial. Como discutido em [26], contudo, as conclusões acerca da

⁴Note-se que a maneira como se definem os estados e os operadores nessa teoria é inteiramente formal. É um problema matemático inteiramente aberto como tornar essas definições rigorosas, e o uso desse formalismo se deve ao grande *insight* físico que ele proporciona.

existência de estados de spin semi-inteiro parecem não ser afetadas pela eventual inclusão desse vínculo na análise.

Difeomorfismos que não são triviais no infinito podem agir em $\mathcal{H}$ não-trivialmente, bem como os difeomorfismos em $Dif f^\infty(\mathcal{S})$ que não pertencem a $Dif f_0^\infty(\mathcal{S})$.

Tendo discutido os vínculos, e descrito o espaço de estados quânticos, vamos passar a discutir spin de um estado. Para isso, precisamos introduzir operadores de momento angular. Primeiro definimos uma versão clássica de momento angular do espaço-tempo, e o promovemos a um operador em $\mathcal{H}$.

A fim de sermos capazes de definir momento angular, temos que assumir a existência de três campos vetoriais lisos φ_a , $a = 1, 2, 3$ em $\mathcal{S}$ que são geradores de *isometrias assintóticas* (veja por exemplo, o capítulo 11 de [9]): para toda métrica em $h_{ij} \in \mathcal{M}_\mathcal{S}$, as derivadas de Lie $\mathcal{L}_{\varphi_a} h_{ij}$ vão a zero no infinito espacial como $1/r^2$, onde r é a mesma coordenada radial usada para avaliar como h_{ij} decresce no infinito espacial. Isso quer dizer que esses campos vetoriais “tendem a vetores de Killing (geradores de isometrias)” no infinito espacial.

A idéia que se usa para obter o momento angular é intuitivamente simples, embora envolva cálculos bastante trabalhosos que não nos interessarão aqui. O espaço-tempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta_{\mu\nu})$ tem um grupo de dez parâmetros de isometrias, o grupo de Poincaré. Em geral, num espaço-tempo curvo genérico, não se espera que nenhuma isometria exata esteja presente. Porém, em um espaço-tempo assintoticamente plano, uma vez que a métrica se torna plana quando nos aproximamos do infinito, esperamos ser capazes de definir uma noção de simetria assintótica. Ocorre que uma definição natural de simetrias assintóticas de fato existe para espaços-tempo assintoticamente planos, mas esse grupo *não é* o grupo de Poincaré, e sim um subgrupo de dimensão infinita do grupo dos difeomorfismos (Cap. 11 de [9] e referências lá citadas). Esse grupo age sobre o espaço de fase da gravitação canônica, e essa ação é *simplética*, ou seja, as transformações induzidas são transformações canônicas. Isso significa que preservam a Hamiltoniana da teoria [56] e portanto existem “grandezas conservadas”. Estas serão funcionais reais no espaço de fase (espaço dos dados iniciais). Os geradores correspondentes às “rotações no infinito” são justamente os campos vetoriais como os φ_a , e a “grandeza conservada” será precisamente o momento angular. Vários tipos de campos vetoriais darão o mesmo resultado, uma vez que só seu efeito no infinito é relevante. Veja [61, 62, 63] para um modo sistemático de calcular várias grandezas de interesse como energia, momento angular e momento linear associados a um dado inicial.

Para que nosso campos vetoriais de fato correspondam a geradores infinitesimais de “rotações no infinito”, assumimos que existe um compacto K tal

$$[\varphi_a, \varphi_b]_{\text{Lie}} = -\epsilon_{abc}\varphi_c \quad (1.10)$$

na região $\mathcal{S} \setminus K$. Podemos, sem perda de generalidade adicional, escolher um K que tem uma fronteira ∂K em $\mathcal{S}$ difeomorfa a uma esfera S^2 , e para o qual $\mathcal{S} \setminus K$ é difeomorfo a $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}^3$. Em (1.10), $[\cdot, \cdot]_{\text{Lie}}$ denota o colchete de Lie para campos vetoriais. Em outras palavras, os φ_a geram uma “álgebra de Lie assintótica de $SO(3)$ ”⁵.

⁵Lembramos para futura referência que nesse caso, pelo teorema de Frobenius [1, 56, 57], as curvas integrais dos φ_a se unem e compõem uma folheação de $\mathcal{S} \setminus K$ por esferas concêntricas. Parametrizamos

Nesse caso, o momento angular clássico (de ADM) correspondendo ao dado inicial (h_{ij}, π^{ij}) tem componentes [53]

$$\begin{aligned} J_a &= - \int_S d^3x L_{\varphi_a}(h_{ij}) \pi^{ij} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} (-2 \int \varphi_{ai} \pi^{ij} d\sigma_j), \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde a última integral é sobre uma esfera de raio r tendendo a infinito. Está claro da última igualdade que a definição de J_a independe de como os campos vetoriais φ_a se comportam “dentro” de K . $L_{\varphi_a}(h_{ij})$ é uma função de $h_{ij}(x)$ cuja expressão explícita não nos interessará aqui (veja, por exemplo [61]).

Os operadores quânticos correspondentes $\hat{J}_a$ serão definidos por

$$\begin{aligned} \hat{J}_a \Psi(g) &= - \int_S d^3x L_{\varphi_a}(h_{ij}) \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \Psi(g) \\ &= \frac{1}{i} \frac{d}{d\theta} \Psi(R_a(\theta)^* g) |_{\theta=0}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde $R_a(\theta)$ é o grupo a um parâmetro de difeomorfismos gerado por φ_a . Uma vez que qualquer $\Psi \in \mathcal{H}$ é invariante por difeomorfismos $T \in \text{Diff}_0^\infty(S)$,

$$\Psi \circ (R_a \circ T)^* = \Psi \circ R_a^*.$$

Conseqüentemente, $\hat{J}_a$ está bem definido como um operador em $\mathcal{H}$. É possível mostrar [26] que

$$[\hat{J}_a, \hat{J}_b] = i\epsilon_{abc} \hat{J}_c.$$

Um estado $\Psi \in \mathcal{H}$ tem momento angular semi-inteiro se, e somente se (pondo $J \equiv J_a$ e $R \equiv R_a$ para uma escolha qualquer de a), o estado “rotacionado”

$$e^{2\pi i J} \Psi = \Psi \circ R(2\pi)^* \quad (1.13)$$

é igual a $-\Psi$. Ora, se $R(2\pi) \in \text{Diff}_0^\infty(S)$, teremos, como é óbvio de (1.13), que $e^{2\pi i J} \Psi = \Psi$ para todo $\Psi \in \mathcal{H}$. Se por outro lado $R(2\pi)$ não está em $\text{Diff}_0^\infty(S)$, então em princípio pode haver estados para os quais $\Psi' = \Psi \circ R(2\pi)^* \neq \Psi$. Uma vez que, em $\mathcal{H}$, $e^{4\pi i J} = 1^6$, a diferença $\Psi' - \Psi$ é um autoestado de $e^{2\pi i J}$ com autovalor -1.

Mostramos portanto que *podem existir estados de spin semi-inteiro na gravitação quântica somente se a rotação de $R(2\pi)$ não estiver em $\text{Diff}_0^\infty(S)$, isto é, somente se não for isotópica à identidade no grupo $\text{Diff}^\infty(S)$ dos difeomorfismos assintoticamente triviais*. O aparecimento dos géons começa com a observação de que, se S é topologicamente $\mathbb{R}^3$, podemos escolher φ_a tais que (1.10) seja satisfeita em toda parte. Nesse caso, os campos vetoriais φ_a geram $SO(3)$, e portanto $R(2\pi) = 1$. Vemos então que *uma condição*

essa família de esferas por uma coordenada radial r . Escolhemos K tal que ∂K coincida com uma dessas esferas.

⁶Porque em três dimensões, $R(4\pi)$ sempre está em $\text{Diff}_0^\infty(S)$. Veja [9].

necessária para que $R(2\pi)$ não pertença a $Diff_0^\infty(\mathcal{S})$, e portanto que possa haver estados com spin semi-inteiro, é que $\mathcal{S}$ tenha uma topologia não-trivial.

No caso geral, usamos nossa liberdade de alterar os φ_a dentro de um subconjunto compacto. Podemos tomar um compacto maior K' , também com fronteira esférica coincidindo com as esferas geradas pelas curvas integrais dos φ_a , tal que K esteja totalmente contido no interior de K' . Em seguida, substituímos φ_a por

$$\tilde{\varphi}_a = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in K, \\ f(r)\varphi_a, & \text{se } x \in \mathcal{S} \setminus K, \end{cases} \quad (1.14)$$

onde r é a coordenada radial parametrizando as esferas geradas pelas curvas integrais dos φ_a . $f(r)$ é uma função lisa que vai de 0 em ∂K até 1 em $\partial K'$. Novamente, podemos escolher um destes $\tilde{\varphi}_a$, e o difeomorfismo $\tilde{R}(2\pi)$ correspondente é a identidade em $\mathcal{S} \setminus K'$ e dentro de K , e rotaciona as esferas concêntricas que folheiam a região entre ∂K e $\partial K'$ de um ângulo que varia continuamente de 0, para a esfera mais interna dessa região, até 2π para a mais externa. É fácil ver que $\tilde{R}(2\pi)$ é então a identidade dentro de K e fora de K' . Em particular, está claro que $\tilde{R}(2\pi) \in Diff^\infty(\mathcal{S})$,

O difeomorfismo $\tilde{R}(2\pi)$ é chamado de *rotação de Hendriks* [64]. Seu significado físico é simples: um espaço-tempo assintoticamente plano representa em Relatividade Geral um sistema gravitacional isolado [9], e as rotações de Hendriks representam rotações de 2π desse sistema com respeito a seu ambiente. O problema básico é saber para quais variedades a rotação de Hendriks está em $Diff_0^\infty(\mathcal{S})$. Só as variedades para as quais isto não ocorre podem dar origem a estados da gravitação quântica com spin semi-inteiro. Este é um problema difícil, resolvido pelo próprio Hendriks [64].

A discussão acima pode ser adaptada para $(2+1)d$, com várias modificações. Tomemos agora o espaço-tempo como topologicamente $\Sigma \times \mathbb{R}$, onde Σ é uma variedade diferenciável de dimensão dois. Novamente assumimos que existe uma região compacta K para a qual $\Sigma \setminus K$ é difeomorfa a $\mathbb{R}^2 \times \bar{B}^2$. A estrutura assintótica porém difere da de $(3+1)d$ [62]: a métrica não precisa se tornar Minkowskiana no infinito, mas apenas “cônica”. Métricas cônicas são localmente planas, mas têm uma estrutura global que pode ser inferida do elemento de linha em coordenadas polares usuais t, r, ϕ , dado por

$$ds^2 = (dt - \zeta d\phi)^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\phi^2. \quad (1.15)$$

Esse elemento de linha pode ser obtido [65] indentificando pontos no espaço de Minkowski. Essas métricas são parametrizadas por α e ζ , e descrevem sistemas com energia total $2\pi(1 - \alpha)$ e momento angular $2\pi\alpha\zeta$ [62, 65]. Métricas cônicas são estacionárias e axisimétricas, mas não admitem nenhum outro vetor de Killing global. Na verdade, ao contrário do caso anterior em $(3+1)d$, o grupo de simetrias assintóticas aqui tem dimensão finita, e é $\mathbb{R} \times SO(2)$. Portanto só existirão duas “grandezas conservadas”, a energia e o momento angular total do sistema [66].

Podemos fazer uma folheação do espaço-tempo por cópias de Σ , de forma análoga ao que fizemos antes em quatro dimensões, e olhar para o espaço dos dados iniciais (h_{ij}, π^{ij}) ,

sujeitos aos vínculos (1.4) e (1.3). Agora, h_{ij} é uma métrica de classe C^∞ , positiva definida e *assintoticamente cônica*⁷. O espaço de configuração é então o espaço $\mathcal{C}_\Sigma$ dessa métricas.

O resto da análise é virtualmente idêntica. O vínculo de momento nos diz que os estados físicos são funcionais $\Psi : \mathcal{C}_\Sigma / \text{Diff}_0^\infty(\Sigma) \rightarrow \mathbb{C}$. Para obter o momento angular nem sequer precisamos da tríade de campos vetoriais φ_a , mas somente de um único campo vetorial φ que seja igual a $\partial/\partial\phi$ fora de um compacto K .

Construímos o operador momento angular $\hat{J}$ também de forma inteiramente análoga ao caso de três dimensões espaciais, mas agora temos um novo resultado: se $R(2\pi) \notin \text{Diff}_0^\infty(\Sigma)$, então $R(2n\pi) \notin \text{Diff}_0^\infty(\Sigma)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e não-nulo. Lembramos que em três dimensões espaciais, $R(4\pi) = 1$. Isto tem a seguinte consequência. Seja Ψ um estado sobre o qual $\hat{R}(2\pi) = e^{2\pi i \hat{J}}$ age não trivialmente. Definimos o funcional [31]

$$\Psi_\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi n\theta} \hat{R}(2\pi)^n \Psi. \quad (1.16)$$

Esse funcional define um estado de spin θ , que satisfaz

$$\hat{R}(2\pi)\Psi_\theta = e^{i2\pi\theta}\Psi_\theta. \quad (1.17)$$

Uma vez que $\hat{R}(2\pi)^m \neq 1$, para todo m inteiro não-nulo, chegamos à conclusão que θ pode ter qualquer valor real [30, 31]. Em outras palavras, em $(2+1)d$ não só podemos ter estados com spin semi-inteiro mas spin fracionário.

Na verdade essa construção não mostra que existe um estado não-trivial Ψ para a construção de (1.16). Porém, se ao invés do formalismo métrico usamos o de primeira ordem, não só é possível mostrar que um tal estado de fato existe [31], mas podemos incorporar facilmente o vínculo Hamiltoniano em nossa análise. Veja [31, 67, 68] e a Seção 2.2 do Capítulo 2.

Finalmente, o análogo das rotações de Hendriks no caso de duas dimensões espaciais é a chamada *torção de Dehn* (*Dehn twist*) [69, 70, 71]. Se Σ é uma variedade orientável e conexa, sua topologia é dada pelo seu número de “alças” (veja abaixo). Qualquer torção de Dehn de uma alça ou conjunto de alças está em $\text{Diff}^\infty(\Sigma)$, mas não em $\text{Diff}_0^\infty(\Sigma)$ [70]. De fato, veremos no Capítulo 3 que podem-se definir torções de Dehn ao longo de curvas fechadas em Σ . Estes são os difeomorfismos que geram o grupo $\text{Diff}^\infty(\Sigma)/\text{Diff}_0^\infty(\Sigma)$ das *classes de isotopia* (GCI) de difeomorfismos triviais no infinito [70, 71]. Como podemos inferir da discussão acima, esse grupo tem uma ação não-trivial nos estados e funciona como um grupo de simetria para a gravitação quântica. Voltaremos a ele em mais detalhe no Capítulo 3.

⁷Seguindo [31], definimos conicidade assintótica da seguinte forma: h_{ij} é assintoticamente cônica se é igual à parte espacial de (1.15) em alguma região $\mathcal{N} = \Sigma \setminus K_{\mathcal{N}}$, onde $K_{\mathcal{N}}$ é uma região compacta contida em Σ .

Figura 1.1: A soma conexa de dois toros T^2 . Primeiro, remove-se um disco de cada toro. Em seguida, eles são colados ao longo de seus recém-criados bordos.

1.2 O Que São Géons Topológicos?

Na Seção anterior, ficou clara que topologia não-trivial⁸ tem uma importância fundamental no espectro de teorias físicas. Em particular, vimos como a topologia não-trivial pode alterar dramaticamente o caráter físico de estados em gravitação.

Afirmamos que existe uma conexão direta entre topologia não-trivial e géons, num sentido que tornaremos mais preciso em seguida. De fato, esses objetos são essencialmente regiões pequenas do espaço onde a topologia é não-trivial. Essas regiões se comportam em muitos casos como uma espécie de partícula, à semelhanças de sólitons em teorias de campo. Daí nos referirmos aos géons por vezes como “sólitons na topologia”. Voltaremos a discutir essa designação com um pouco mais de detalhe adiante.

Começemos com algumas definições preliminares básicas [72]. Sejam M_1, M_2 variedades topológicas n -dimensionais conexas, possivelmente com fronteira. Definimos sua *soma conexa*, e denotamos por $M_1 \# M_2$, da seguinte maneira: tomamos bolas de dimensão n , B_i^n , no interior de M_i ($i = 1, 2$) e removemos seus interiores. Acrescentamos assim esferas S^{n-1} às fronteiras de M_1 e M_2 . Depois identificamos os pontos destas esferas via um homeomorfismo. A variedade resultante, que é definida a menos de homeomorfismos, é $M_1 \# M_2$. Se M_1 e M_2 são orientadas, requeremos ainda que o homeomorfismo conectando as esferas reverta a orientação de tal forma que $M_1 \# M_2$ também é orientada. Segue trivialmente da definição que $M \# S^n$ é homeomorfo à própria M . Como exemplo, a soma conexa de dois toros é mostrada na Fig. 1.1.

Como mencionamos, ao longo desta dissertação estaremos interessados em entender géons como excitações topológicas no espaço-tempo, num sentido a ser tornado mais preciso mais adiante. Precisamos inicialmente de uma caracterização matemática do espaço-

⁸Seguindo uma terminologia comum na literatura, nos referimos à topologia usual de $\mathbb{R}^n$ (ou a de S^n quando considerarmos variedades compactas e sem fronteira) como *trivial*, e *não-trivial* em outros casos.

tempo adequada aos nossos propósitos, uma vez que até aqui usamos esse termo de forma relativamente vaga.

Denominamos de *espaço-tempo* uma dupla $(\mathcal{M}, g)$, onde $\mathcal{M}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $(n + 1)$ (consideramos $n = 2$ ao longo da tese), Hausdorff e para-compacta⁹, e g uma métrica Lorentziana em $\mathcal{M}$. Com certo abuso de terminologia, freqüentemente usaremos o termo espaço-tempo para nos referir à variedade $\mathcal{M}$, quando estiver claro, ou não for importante, qual é a métrica subjacente.

Os resultados desta parte da dissertação não dependerão da métrica escolhida, e apenas a topologia de $\mathcal{M}$ desempenhará um papel relevante em nossa discussão. Conseqüentemente, assumiremos, a menos de menção em contrário, que temos uma métrica g arbitrária mas fixa. Consideraremos ainda que $\mathcal{M}$ é topologicamente da forma $\mathbb{R} \times \Sigma$, onde Σ é uma variedade de dimensão 2. Fixamos então uma folheação do espaço-tempo por hipersuperfícies do tipo espaço (variedades espaciais). Em particular, essa folheação determina uma “função-tempo” global, isto é, a cada folha corresponde um número real t , o “instante de tempo”.

Em Relatividade Geral são consideradas usualmente métricas espaço-temporais que induzam uma métrica Riemanniana assintoticamente plana em cada hipersuperfície (ou assintoticamente cônica, no caso $(2 + 1)$ -dimensional [31, 62, 65]). Uma tal métrica modela matematicamente um objeto isolado em Relatividade Geral. É conveniente, portanto, que num certo instante de tempo t fixo a hipersuperfície S_t seja, topologicamente, uma variedade com uma *região assintótica*, ou seja, existe uma região compacta $R_t \subset S_t$ cujo complemento em S_t é homeomorfo a $\mathbb{R}^n \setminus B^n$, onde $(n + 1)$ é a dimensão do espaço-tempo e B^n é a bola de dimensão n em $\mathbb{R}^n$. Intuitivamente, isto quer dizer que a topologia é trivial fora de uma região compacta, ou em outras palavras, toda “não-trivialidade” na topologia está restrita a uma tal região. Na Fig. 1.2 podem-se observar géons orientáveis $(2 + 1)d$ (que são nada mais do que alças no plano, veja abaixo) numa fatia espacial bidimensional, que ilustra essa noção de “topologia localizada”.

Isto motiva a seguinte definição: dizemos que uma n -variedade $\mathcal{M}$ tem uma região assintótica se podemos decompô-la na forma $\mathcal{M} = R^n \# M$, onde M é uma n -variedade fechada (ou seja, compacta e sem fronteiras) e conexa. Casos típicos de interesse são variedades de dimensão 2 e 3 com uma região assintótica, as quais devem ser pensadas como fatias espaciais de espaços tempo de $(2 + 1)$ e $(3 + 1)$ dimensões, respectivamente.

Nosso modelo de uma seção espacial do espaço-tempo será uma variedade com uma região assintótica, e portanto o resultado de uma soma conexa de uma n -variedade fechada com $\mathbb{R}^n$. Temos ainda uma vasta gama de possibilidades para a topologia de tais variedades, mas existe um importante teorema em geometria topológica que diz ser possível decompor quaisquer variedades fechadas na soma conexa de variedades mais “simples”. Mais precisamente, em 2 e 3 dimensões, sabe-se [69, 72] que existe uma classe de variedades conexas e fechadas $\mathcal{P}_i$ chamadas variedades *primas*, utilizadas na classificação topológica parcial da topologia de variedades. Uma n -variedade fechada M é denominada prima se o fato de termos $M = M_1 \# M_2$ implicar que ou M_1 ou M_2 é uma n -esfera. Em outras palavras, uma variedade prima não pode ser decomposta numa soma conexa

⁹Essas atribuições técnicas não serão diretamente relevantes para nós, e as apresentamos por completeza. Para sua justificativa em Relatividade Geral, ver, por exemplo, [20].

Figura 1.2: Um plano com um número finito de géons (alças) é um exemplo de uma variedade com uma única região assintótica. Note-se que toda a complexidade topológica pode ser localizada numa circunferência S , e os géons podem ser isolados um do outro. Fora de S , tem-se apenas o plano $\mathbb{R}^2$.

de duas variedades com topologia não-trivial. O chamado *teorema da decomposição em variedades primas* afirma que, dada qualquer n -variedade ($n = 2, 3$) fechada M , existe uma única decomposição

$$M = \mathcal{P}_1 \# \dots \# \mathcal{P}_N, \quad (1.18)$$

onde $\mathcal{P}_i \neq S^n$. Unicidade significa (a menos de alguns detalhes técnicos - veja Ref. [72]) que dada uma outra decomposição $\mathcal{P}'_1 \# \dots \# \mathcal{P}'_{N'}$, teremos que $N = N'$ e (após um possível reordenamento) que $\mathcal{P}_i$ é homeomorfo a $\mathcal{P}'_i$.

As variedades primas são parcialmente classificadas em 3 [73] dimensões, e totalmente classificadas em dimensão 2, mas em dimensões superiores se está longe de qualquer classificação. De fato, em 2 dimensões, as únicas variedades primas são S^2 e o toro T^2 , que são orientáveis, e o plano projetivo $\mathbb{R}P^2$, que é não orientável [69]. Em 3 dimensões, por outro lado, existem infinitos tipos de variedades primas; todas podem, porém, ser obtidas a partir de um poliedro sólido identificando certas faces. Como exemplos podemos citar o 3-toro T^3 e a "alças" tridimensional $S^2 \times S^1$.

Com essas definições somos capazes de obter uma caracterização matemática completa dos géons em 2 e 3 dimensões espaciais ¹⁰. Uma vez que nossa variedade espacial Σ de dimensão $n = 2, 3$ possui uma região assintótica, pode ser vista como uma soma conexa de $\mathbb{R}^n$ com uma variedade fechada. Da decomposição em variedades primas que mencionamos, podemos ver que uma n -variedade M ($n = 2, 3$) com uma região assintótica pode ser decomposta na forma

$$M = \mathbb{R}^n \# \mathcal{P}_1 \# \dots \# \mathcal{P}_N. \quad (1.19)$$

Um géon (topológico) é então descrito como uma componente prima nessa decomposição (Fig. 1.3).

Nesta tese consideraremos somente géons orientáveis, e portanto lidamos somente com o toro T^2 (somadas conexas com S^2 são obviamente inócuas). Em outras palavras, podemos

¹⁰Géons foram inicialmente estudados em $(3+1)d$ [26], e depois em $(2+1)d$. Até onde sabemos, nunca foram estudados géons em dimensões maiores.

Figura 1.3: Um géon “solitário” pode ser visto como uma excitação localizada, ou “sóliton”, da topologia. À distância, o mesmo parecerá com uma partícula pontual.

visualizar nossa variedade espacial Σ como sendo simplesmente um plano, com pequenas “alças” ligadas a ele.

Tendo dado uma caracterização geométrica mais precisa do que são géons, consideremos em que sentido géons podem em muitos casos ser vistos como “pequenos”.

Consideremos uma variedade da forma $\mathbb{R}^n \# \mathcal{P}_i$, onde $\mathcal{P}_i$ é uma variedade prima. Podemos sempre obter uma $(n-1)$ -esfera em $\mathbb{R}^n \# \mathcal{P}_i$ cujo interior contém $\mathcal{P}_i$. Por uma escolha judiciosa da métrica esta região pode ser imaginada tão pequena quanto desejado, isto é, toda a complexidade topológica pode ser localizada (para maiores detalhes veja a Ref. [30]). Em 2 dimensões espaciais, onde $\mathcal{P}_i = T^2$, isto significa que podemos visualizar a alça como dentro de um círculo com raio muito pequeno. Tem-se assim a figura de uma alça infinitesimal cercada por um plano infinito. É nesse sentido intuitivo que entendemos ser o géon um “sóliton”, como mencionamos no começo desta seção: da mesma forma que um sóliton corresponde a uma excitação localizada de algum campo físico, em volta da qual tem-se o estado de vácuo desse campo, o géon pode ser pensado como um sóliton na própria topologia, o “vácuo” nesse caso sendo o plano $\mathbb{R}^2$ (veja a Fig. 1.3). Em geral, uma vez que $\mathcal{P}_i$ é prima, dizemos que a mesma representa uma excitação topológica *elementar*. Declaramos então que $\mathbb{R}^n \# \mathcal{P}_i$ é um espaço com um géon. A variedade $\mathbb{R}^n \# \mathcal{P}_1 \# \dots \# \mathcal{P}_N$ é portanto vista como o espaço com N géons. Essas variedades primas podem ser isoladas umas das outras da mesma forma que isolamos um único géon. Para muitos fins, pode-se pensar nos géons como partículas. Em particular, em duas dimensões espaciais podem-se ter muitas alças isoladas.

A importância dos géons para nós está no fato de que, como vimos, a presença destes pode alterar resultados físicos importantes, como exemplificamos com respeito ao spin. Além disso, assumindo que o espaço é conexo e que possui só uma região assintótica, *mudanças de topologia se traduz em criação e aniquilação de géons*. De agora em diante, nos restringiremos ao caso de uma variedade espacial bidimensional, conexa e orientada, com uma única região assintótica. Essas premissas implicam, como já mencionamos, que géons de interesse para nós estarão associados a cópias de T^2 , ou seja, consideraremos

alças como sinônimo de géons nesta tese.

Capítulo 2

Caminhos para a Quantização

Como mencionamos na Introdução, a única abordagem conhecida para uma teoria quântica é partir de uma teoria clássica e quantizá-la. Este processo está longe de ser único, e por vezes sequer está bem definido. Existem um sem-número de procedimentos para quantizar uma dada teoria clássica: quantização canônica [58], por integrais de Feynmann [17, 18], geométrica [74], por deformação [75, 76], só para citar alguns. Quando aplicados tais procedimentos, nem sempre obtém-se a mesma teoria quântica. Às vezes um mesmo algoritmo de quantização possui ambigüidades inerentes, e ao final obtêm-se várias teorias quânticas com o mesmo limite clássico. Esses vários métodos são abstraídos, como é natural, da maneira como se quantizam partículas em mecânica quântica elementar, seja via quantização canônica (*a là* Schrödinger ou *a là* Heisenberg), ou via integrais de trajetória. Mesmo teorias de campos usuais como QED ou QCD são, do ponto de vista formal, quantizadas de maneira análoga à que ocorre na mecânica quântica.

Não é nosso objetivo aqui discutir em detalhe essas abordagens e os seus méritos e deméritos. Porém, ao contrário da mecânica quântica ou da Teoria Quântica de Campos, que são extraordinariamente bem-sucedidas como teorias físicas, o status experimental dos géons é infelizmente um assunto para o futuro. Atualmente, eles são apenas uma possibilidade teórica natural, e nessas condições é absolutamente imprescindível que tenhamos claro que tipos de escolhas são feitas ao longo do caminho. Isso coloca sob perspectiva as fragilidades e forças de nossa abordagem, e permite reaccessos altamente instrutivos do modelo. Assim, nos será útil avaliar brevemente o que se quer dizer, de um ponto de vista formal, por “quantizar uma teoria clássica” e como pretendemos fazê-lo no caso dos géons.

Tendo isso em vista, ao longo de parte deste Capítulo, vamos discutir as várias formas de, tendo em mãos uma teoria clássica, obter a teoria quântica correspondente. A Seção 2.1 é algo divorciada da corrente principal de idéias desta tese, e deveria ser vista como uma digressão, onde avaliamos métodos de quantização, e assim de certa forma justificamos o método finalmente adotado por nós para quantizar géons.

Em seguida, na Seção 2.2, nos debruçamos sobre qual o espaço de estados clássicos para géons em gravitação. Ficará claro que, embora não utilizemos diretamente essa particular teoria clássica, a teoria que introduziremos no próximo Capítulo, e que será de fato o nosso objeto de estudo nesta dissertação, nos fornece um modelo simplificado que nos

fornece várias preciosas sugestões sobre o formalismo para atacar o caso gravitacional aqui delineado. Embora não o façamos na tese, de fato utilizamos o formalismo análogo em outros trabalhos [37, 38].

Finalmente, discutiremos um formalismo desenvolvido por G. Mackey [77, 78], que fornece uma generalização poderosa das relações de comutação na mecânica quântica usual, que será usada por nós nesta tese. Em particular, o chamado *teorema de imprimitividade* de Mackey é crucial para obter os vários setores quânticos descrevendo géons nesta tese. De fato, a partir desse teorema, é possível demonstrar (ver [80, 81] e o Apêndice B desta tese) o teorema de classificação das representações irredutíveis para a álgebra usada para descrever géons, introduzida no Capítulo 4.

2.1 Uma Visão Geral do Processo de Quantização

Essa Seção tem como objetivo fazer uma incursão sobre o que significa quantizar. A idéia é apenas motivar nossa própria abordagem à quantização de géons, e portanto não daremos aqui todos os detalhes técnicos, mas apenas as idéias principais, remetendo o leitor às referências pertinentes. Pode-se omitir a leitura desta Seção sem prejuízo para a compreensão do restante da dissertação.

De um modo geral, todo sistema físico, clássico ou quântico, é descrito por seus *estados* e as grandezas físicas que se podem associar a esse sistema em seus vários estados, os chamados *observáveis*. Começemos com o caso clássico. Para benefício do leitor não familiarizado com a formulação matemática formal da mecânica clássica, revisamos brevemente os conceitos mais relevantes. Veja [74] e a pag. 425 de [56] para detalhes.

No caso clássico, os estados de um dado sistema físico S são especificados, *grosso modo*, fornecendo-se um conjunto de coordenadas $q_1, q_2, \dots$, que descrevem as configurações do sistema, e respectivos momentos $p_1, p_2, \dots$, que descrevem a “taxa instantânea de mudanças” dessas configurações. Esses estados são representados matematicamente por pontos no espaço de fase ¹. Este é usualmente descrito como uma *variedade simplética*, isto é, uma variedade diferenciável $\mathcal{P}_S$ dotada de uma forma diferencial de grau dois ω , fechada e não-degenerada (veja [56, 74] para detalhes). Para fixar idéias, suponhamos que $\mathcal{P}_S$ tem dimensão finita (no caso de uma variedade simplética, a dimensão, quando finita, é sempre par [56]) $2N$. Então, sempre é possível introduzir coordenadas locais (q^i, p^i) ($i = 1, \dots, N$), chamadas coordenadas canônicas (Teorema de Darboux, veja [56]), que correspondem às coordenadas generalizadas e seus momentos conjugados, respectivamente. Nessas coordenadas, ω pode ser localmente escrita na forma

$$\omega = \sum_i^N dq_i \wedge dp_i, \quad (2.1)$$

onde “ d ” representa a derivação exterior e “ $\wedge$ ” o produto exterior de formas diferenciais. Um observável $\mathcal{O}$ tem seu valor numérico conhecido se nos é dado o estado (ponto de $\mathcal{P}_S$)

¹A menos de menção em contrário, toda vez que nos referirmos a estados, queremos dizer estados *puros*.

no qual S está. Portanto, o descrevemos matematicamente como uma função a valores reais $f_O : \mathcal{P}_S \rightarrow \mathbb{R}$, que freqüentemente assumimos ser lisa (isto é, de classe C^∞), embora esta premissa possa ser relaxada em muitos casos. Usando a forma simplética, pode-se definir o colchete de Poisson $\{.,.\}$ entre observáveis descritos por funções diferenciáveis, e nas coordenadas canônicas esse se reduz à forma usual [56].

Na teoria quântica, por outro lado, os estados são usualmente descritos por vetores (mais precisamente *raios*, isto é subespaços de dimensão 1) num espaço de Hilbert separável $\mathcal{H}$, geralmente de dimensão infinita. Os observáveis correspondem nesse caso a operadores auto-adjuntos em $\mathcal{H}$, e representam grandezas físicas passíveis de medição. O conteúdo físico da teoria é obtido através do teorema espectral de Hilbert e von Neumann (veja, por exemplo, [82]). Vamos necessitar mais adiante de alguns conceitos desse teorema, que passamos a apresentar.

O primeiro desses conceitos é o de medidas a valores em projetores. Lembre que um *projetor* P sobre um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é um operador limitado e auto-adjunto tal que $P^2 = P$. Veja [82, 83] para as definições técnicas e maiores detalhes, e o Apêndice A e referências ali citadas para os conceitos básicos de Teoria da Medida usados aqui.

Definição 1 *Seja X um espaço topológico, e seja $\mathcal{B}(X)$ a σ -álgebra dos conjuntos borelianos de X . Ademais, seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, e denote por $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ o conjunto dos projetores sobre $\mathcal{H}$. Uma medida a valores em projetores (MVP) sobre X é uma associação*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X) &\rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{H}) \\ E &\mapsto P_E \end{aligned} \quad (2.2)$$

obedecendo às seguintes propriedades:

1. $P_\emptyset = 0$ e $P_X = I$;
2. Se $E = \bigcup_{n=0}^\infty E_n$, com $E_n \cap E_m = \emptyset$ se $n \neq m$, então $P_E = \sum_{n=0}^\infty P_{E_n}$ (convergência na topologia forte de $\mathcal{H}$);

O teorema espectral [82] nos diz que dado um operador auto-adjunto A em $\mathcal{H}$, existe associada a A uma MVP P^A sobre a reta real, univocamente determinada, e que toda MVP sobre a reta real advém de um operador auto-adjunto. Os membros da família $\{P_E^A\}_{E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ são os chamados *projetores espectrais* de A . Dado um vetor unitário $\psi \in \mathcal{H}$, a associação $E \mapsto \langle \psi, P_E^A \psi \rangle$ define uma medida de probabilidade sobre a reta real, e

$$p(A, \psi; E) := \langle \psi, P_E^A \psi \rangle$$

nos dá a probabilidade de que uma medida do observável A resulte num valor contido no conjunto E , quando o sistema se encontra no estado descrito por ψ .

Se torna claro então que o processo de quantização envolve uma prescrição de como partir de uma variedade simplética $\mathcal{P}$ dada, obter a partir desta um espaço de Hilbert e construir os respectivos operadores auto-adjuntos descrevendo os observáveis quânticos. Dirac [58, 59] foi provavelmente o primeiro a considerar a quantização como um processo abstrato, a fim de aplicá-lo à quantização do eletromagnetismo. A interpretação dos

observáveis quânticos requer, em geral, que tenhamos ao menos uma referência clássica para os mesmos, ainda que não um correspondente clássico direto, como no caso do spin de uma partícula em mecânica quântica elementar. Por exemplo, os observáveis posição e momento linear na mecânica quântica têm essa designação em analogia com os respectivos observáveis clássicos, e sua interpretação física deriva destes últimos.

Portanto, no sentido de Dirac [58] (veja também a pag. 434 da Ref. [56] e o capítulo 8 da Ref. [74]), uma quantização deveria, em princípio, possuir os seguintes elementos: seja $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores auto-adjuntos no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Fixemos o espaço de fase como sendo $\mathbb{R}^{2n}$, por simplicidade. Uma quantização seria uma associação

$$\begin{aligned} C^\infty(X, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{H}) \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned} \quad (2.3)$$

sujeita às seguintes restrições:

1. $\widehat{f+g} = \hat{f} + \hat{g}$;
2. $\widehat{\lambda f} = \lambda \hat{f}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$;
3. $\hat{1} = I$;
4. $\widehat{\{f, g\}} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}]$;
5. p_i 's e q_i 's agem irreduzivelmente em $\mathcal{H}$, isto é, não existe um subespaço próprio *fechado* de $\mathcal{H}$ que seja invariante por esses operadores ².

De acordo com um bem conhecido resultado [84], *não existe* uma quantização no sentido acima em $\mathbb{R}^{2n}$. Mais especificamente, as duas últimas condições são contraditórias. Essas condições são de fato excessivamente restritivas. Afinal, não há razão *a priori* para esperar que *todo* observável clássico tenha um correspondente quântico. Mais ainda, um dado observável clássico pode ter mais de um observável quântico associado, como ocorre com polinômios em p 's e q 's devido a problemas de ordenamento. Finalmente, há observáveis quânticos que não vêm de um correspondente clássico de forma tão simples, como é o caso do operador de spin em mecânica quântica elementar. Os vários esquemas de quantização lidam com essas limitações de forma distinta. Em quantização geométrica [74], em geral se omite a última dessas condições (irreducibilidade). A quantização por deformação [75, 76], por outro lado, omite a penúltima, definindo ao invés disso um novo produto $*_{\hbar}$ em $C^\infty(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$, não comutativo e associativo. Esse produto depende “continuamente” de um parâmetro $\hbar$, a ser identificado com a constante de Planck, que “deforma” o produto ponto a ponto de funções “no sentido do colchete de Poisson”³, isto é, no limite $\hbar \rightarrow 0$:

$$f *_{\hbar} g = fg + i\hbar\{f, g\} + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Esse produto define uma álgebra, cujas representações irreduzíveis definem várias possíveis quantizações do mesmo sistema clássico. A falha do esquema de quantização dado acima

²Podem, é claro, existir domínios invariantes, mas estes terão que ser densos em $\mathcal{H}$ por essa exigência.

³Para uma definição adequada dos termos entre aspas, ver [76] e referências ali citadas.

para o caso simples de $\mathbb{R}^{2n}$ impediria até mesmo a quantização de uma partícula em $\mathbb{R}^n$, se fosse levada a sério. Na prática, porém, o processo de quantizar uma teoria clássica toma uma forma bem menos ambiciosa e geral: tomam-se uns poucos observáveis clássicos para quantizar, que podem ser sugeridos por motivações físicas, e a partir destes se constroem os respectivos operadores. Como exemplo, consideremos a quantização de uma partícula livre na reta real $\mathbb{R}$. Nesse caso, os observáveis mais naturais são posição e momento ao longo da reta. Estes corresponderão a operadores auto-adjuntos $\hat{p}$ e $\hat{q}$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de estados físicos, obedecendo à relação canônica de comutação

$$\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q} = i\hbar I. \quad (2.4)$$

Na chamada representação de Schrödinger, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, o espaço das funções de quadrado integrável à Lebesgue, $\hat{p} = -i\hbar d/dx$ e $\hat{q}$ é o operador multiplicação por q , $(\hat{q}\psi)(q) = q\psi(q)$, ambos os operadores sendo definidos num domínio apropriado⁴. Neste contexto simples, é possível mostrar (teorema de von Neumann) que essa representação é única num sentido preciso [82], apesar da quantização no sentido de Dirac conforme descrita acima não exista neste caso. Isso mostra como uma simplificação adequada do conjunto de observáveis escolhidos para a quantização concorre bastante para tornar viável o processo de quantização.

A lição a ser tirada dessas considerações é que restrições adequadas ao problema da quantização são necessárias e desejáveis, de acordo com o problema em mãos. É claro que o problema de obter os observáveis adequados e suas representações a fim de quantizar uma dada teoria clássica pode ser um problema bastante complicado. Teremos que buscar a escolha mais natural de observáveis a serem quantizados no caso dos géons.

Escolheremos somente uma classe de observáveis motivados fisicamente para quantizar géons, e com essa escolha seremos capazes de quantizar a teoria clássica correspondente de modo simples: construiremos uma certa álgebra de operadores, e buscaremos representações irredutíveis dessa álgebra. As várias representações serão interpretadas como vários *setores quânticos* da teoria, isto é, vários sistemas quânticos possuindo o mesmo limite clássico.

2.2 O Espaço de Estados Clássicos dos Géons na Gravitação em $(2 + 1)d$

Até agora neste Capítulo, descrevemos como podemos, a partir de um dado espaço de fase clássico, passar a uma descrição quântica. Nos dedicaremos a descrever como se pode atribuir um espaço de fase a géons topológicos.

Conforme descrevemos na Introdução, a teoria clássica e a teoria quântica dos géons que tratamos ao longo desta dissertação é uma versão bastante simplificada, quase um “toy model”, de uma teoria inacessivelmente complexa onde os campos de matéria, a métrica do espaço-tempo e a própria topologia deste sofreriam flutuações quânticas. Se ignoramos,

⁴De acordo com um argumento simples, (2.4) implica que ao menos um dos operadores $\hat{q}$ ou $\hat{p}$ é necessariamente não-limitado [82], devendo portanto ser especificado um domínio adequado.

para começar, os graus de liberdade de campos de matéria e desconsideramos flutuações na topologia, temos então uma teoria quântica dos graus de liberdade geométricos, mais precisamente da métrica do espaço-tempo. A teoria resultante é a gravitação quântica propriamente dita.

Esta por si só já seria uma tarefa extraordinariamente difícil (ver [85, 86] para uma revisão recente, e uma extensa lista de referências), tanto de um ponto de vista técnico quanto conceitual. De fato, um enorme esforço tem sido empregado nos últimos 50 anos para entender as características da gravitação quântica. Entre as teorias mais conhecidas atualmente estão a Teoria de Cordas [87] e o método de quantização da gravidade baseado nas chamadas variáveis de Ashtekar, [50, 86]. A elaboração de ambas as teorias ainda está em andamento, mas o ponto mais sério é que não se tem hoje qualquer indicação empírica para julgar se as previsões que essas teorias fornecem são fisicamente corretas. Portanto, uma teoria quântica *completa* da gravitação parece no momento uma idéia distante. Seja qual for a teoria correta, esta aparentemente só se torna relevante para energias da ordem da energia de Planck ($\sim 10^{19}$ GeV), totalmente inacessível por métodos experimentais modernos. Contudo, podemos tentar explorar alguns de seus aspectos com as ferramentas teóricas à nossa disposição. No que concerne todos os dados empíricos conhecidos, a Relatividade Geral fornece uma teoria efetiva da gravitação em energias baixas em comparação com a energia de Planck. Parece então natural tentar descobrir até que ponto esta teoria pode ser quantizada.

O processo de aplicar para a gravitação quântica os mesmos métodos utilizados para a Teoria Quântica de Campos no espaço de Minkowski resulta, como mencionamos na Seção 1.1, numa teoria não-renormalizável em 4 dimensões. A razão disto é que, ao contrário da QED, por exemplo, onde o parâmetro $e^2/\hbar c$ de expansão na teoria de perturbação não tem dimensão, no caso da gravitação quântica em quatro dimensões, esse parâmetro é um comprimento l_P ao quadrado. Essa quantidade $l_P \equiv (G\hbar/c^3)^{1/2}$ é o chamado comprimento de Planck (em unidades no cgs, $l_P \sim 10^{-33}$ cm). Portanto, para que a teoria de perturbação tenha significado, os termos na série devem ter dimensões de potências do inverso de l_P^2 cada vez maiores. Com isso, o “grau superficial de divergência” [93] aumenta com um maior número de “loops”, e não se podem cancelar essas divergências apenas com uma renormalização de massas, cargas ou funções de onda.

Porém, como Ashtekar tem enfatizado constantemente (veja [50] para uma argumentação detalhada sobre esse ponto), uma teoria perturbativamente não-renormalizável pode fazer sentido se quantizada não-perturbativamente desde o início. De fato, essa é a premissa básica para empreender a quantização da Relatividade Geral usando as “variáveis de loop” (veja [86] para uma revisão).

Considerável simplificação técnica é obtida se passamos a considerar a Relatividade Geral em três dimensões espaço-temporais, ao invés das quatro usuais [88, 89, 90]. De fato, Witten [67] mostrou que, nesse caso, e com o formalismo de primeira ordem, a teoria tem um número *finito* de graus de liberdade físicos, sendo de fato equivalente a uma teoria de campos com a ação de Chern-Simons [91]. A teoria quântica é bem definida e finita, reduzindo-se essencialmente à mecânica quântica do sistema clássico correspondente ⁵.

⁵A presença de graus de liberdade de gauge, contudo, complica razoavelmente as coisas do ponto de vista técnico. Ver [92].

Simplificação adicional é obtida na teoria quântica se, ao invés de considerarmos a métrica do espaço-tempo como a variável fundamental, adotarmos a *conexão de spin* e um *campo de tríades* como variáveis geométricas básicas. Este é o chamado formalismo de “primeira ordem” da Relatividade Geral [10, 67, 68, 88].

O formalismo de primeira ordem é particularmente adequado para tratar a gravitação canônica em $(2+1)d$ que analisaremos aqui. A partir de agora assumimos que a variedade descrevendo o espaço-tempo M é da forma $M = \Sigma \times \mathbb{R}$, onde Σ denota uma variedade de dimensão dois, e a reta real $\mathbb{R}$ corresponde à dimensão temporal. Na convenção que adotamos nesta dissertação, índices de Lorentz espaço-temporais são representados por letras gregas, e índices espaciais por letras latinas $i, j = 1, 2$. Índices internos de $SO(2, 1)$ são representados por letras latinas no início do alfabeto $a, b = 0, 1, 2$. Esses índices internos são levantados e baixados pela métrica de Lorentz $\eta_{ab} = \text{diag}(+ - -)$. Conforme já mencionamos, toma-se como variáveis fundamentais uma *tríade*, isto é, um conjunto de três campos vetoriais (mais precisamente campos de 1-formas) lisos e ortonormais em cada ponto do espaço-tempo, e denotada por $e^{(3)a} = e_\mu^{(3)a} dx^\mu$ e uma 1-forma conexão lisa a valores na álgebra de Lie de $SO(2, 1)$, $A^{(3)a} = A_\mu^{(3)a} dx^\mu$, ambos definidos em M ⁶.

Em termos das variáveis fundamentais de campo, a ação de Einstein-Hilbert toma a forma [31]

$$S = \int_M e^{(3)a} \wedge F_a^{(3)}, \quad (2.5)$$

onde $F_a^{(3)} = d^{(3)} A_a^{(3)} + \frac{1}{2} \epsilon_{abc} A^{(3)b} \wedge A^{(3)c}$ é a curvatura para a conexão $A^{(3)}$. Variando esta ação com respeito a $A^{(3)}$ e $e^{(3)}$, obtêm-se as equações de movimento ⁷

$$\begin{aligned} F^{(3)a} &= 0; \\ D^{(3)} e^{(3)a} &= 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $D^{(3)}$ denota a derivação covariante com respeito à conexão $A^{(3)}$. A primeira destas equações nada mais é do que a equação de Einstein no vácuo: uma vez que o tensor de Weyl é identicamente nulo em três dimensões, dizer que o espaço-tempo tem tensor de Ricci nulo corresponde a dizer que o tensor de curvatura é nulo [8, 10] (fisicamente, não há ondas gravitacionais em $(2+1)d$). Em outras palavras, a conexão $A^{(3)}$ é *plana*. A segunda equação significa que a *torção* $T^{(3)a} = D^{(3)} e^{(3)a}$ do espaço-tempo é nula.

Vamos agora revisar brevemente a análise canônica da gravitação em $(2+1)d$. Uma vez que M é da forma $\Sigma \times \mathbb{R}$, podemos dividir o espaço-tempo em “espaço + tempo”, e considerar as eqs. de movimento (2.6) em coordenadas. Obtemos assim o seguinte sistema de equações para as componentes espaciais:

$$\begin{aligned} F_{ij}^a &= 0, \\ D_{[i} e_{j]}^a &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

⁶Aqui e no que segue, usaremos o sobrescrito 3 no lado direito para designar campos em M e omitiremos o sobrescrito para designar campos em Σ . Estamos aqui assumindo implicitamente que o fibrado subjacente é trivial, para facilitar a exposição. As generalizações, óbvias aos leitores versados em teoria básica de fibrados [2, 5, 3, 4], serão desnecessárias aqui.

⁷Por conveniência da discussão, ignoramos por agora eventuais termos de superfície na ação (2.5). Voltaremos a discuti-los mais adiante nesta Seção.

que são nada mais que o pullback das equações (2.6) para Σ pela inclusão $\Sigma \hookrightarrow \Sigma \times \mathbb{R} : x \mapsto (x, 0)$. A derivada covariante é agora tomada com respeito ao pullback A para Σ da conexão $A^{(3)}$. Agora, A pode ser vista como uma conexão sobre Σ com curvatura e torção nulas. Note-se que as eqs. (2.7) não envolvem derivadas temporais dos campos fundamentais: as mesmas são de fato *vínculos* para os campos e^a e A_a em Σ em qualquer instante de tempo dado. As demais equações são de fato equações descrevendo a evolução temporal de e^a e A_a :

$$\begin{aligned}\partial_t A^a &= dA_0^a + \epsilon_{bc}^a A^b A_0^c, \\ \partial_t e^a &= de_0^a + \epsilon_{bc}^a (A^b e_0^c - A_0^b e^c),\end{aligned}\tag{2.8}$$

onde a derivada exterior é definida em Σ .

Temos agora que A_{aj} e $\epsilon^{ij} e_i^a$, $i = 1, 2$ são variáveis canonicamente conjugadas em Σ . Pode-se perceber isto derivando-se a Lagrangeana de Einstein-Hilbert em (2.5) com respeito a $\partial_t A_{aj}$. O conjunto dos pares (e^a, A^a) , satisfazendo aos vínculos (2.7), corresponde ao espaço de fase (reduzido) $\mathcal{P}$ da teoria. Este é geometricamente o fibrado cotangente sobre o espaço das conexões $SO(2, 1)$ sobre Σ (ver, por exemplo, [88, 89, 90] e referências ali citadas). A estrutura simplética canônica é dada pelos colchetes de Poisson advindos de (2.5) da maneira usual. Os únicos que não se anulam são:

$$\{A_i^a(x), e_j^b(y)\} = \frac{1}{2} \delta_{ab} \epsilon_{ij} \delta^{(2)}(x - y),\tag{2.9}$$

onde $x, y \in \Sigma$. Esta equação deixa claro o caráter distribucional desses campos.

Os vínculos podem ser escritos na forma

$$\begin{aligned}C(\Lambda) &= \int_{\Sigma} \Lambda_a F^a; \\ C'(\Omega) &= \int_{\Sigma} \Omega_a D e^a,\end{aligned}\tag{2.10}$$

onde Λ_a e Ω_a , $a = 0, \dots, 2$, são funções-teste lisas a valores reais sobre Σ , utilizadas para “suavizar” os vínculos. As funções $C(\Lambda)$ e $C'(\Omega)$ são geradores infinitesimais de transformações de gauge locais de $SO(2, 1)$ e translações espaciais infinitesimais. Essas últimas são equivalentes “on shell” (isto é, se aplicarmos as equações de movimento) aos difeomorfismos de Σ , conforme discutido por Witten [91]. Variações de $C(\Lambda)$ e $C'(\Omega)$ resultam em termos de superfície, que devem ser nulos para que esses funcionais sobre o espaço de fase sejam diferenciáveis com respeito aos campos. Agora devemos considerar dois casos distintos. No primeiro caso, Σ pode ser uma variedade não-compacta. Nessa situação, para garantir que os termos de superfície sejam zero, as funções “suavizantes” Λ e Ω devem se anular no infinito. Com essa condição sobre Λ e Ω satisfeita, $C(\Lambda)$ e $C'(\Omega)$ passam a ser geradores de transformações de gauge lisas locais *que são triviais (isto é, iguais à identidade) no infinito espacial*. Denotamos o grupo dessas transformações por $\mathcal{G}^\infty$. O segundo caso ocorre quando Σ é uma variedade fechada (isto é, compacta e sem fronteira, como a esfera S^2 ou o toro T^2), e portanto os termos de superfície são identicamente nulos. Não há, nesse caso, nenhuma condição limitante adicional sobre as

funções Λ_a e Ω_a . Conclui-se portanto, que se Σ é fechada, $C(\Lambda)$ e $C'(\Omega)$ serão agora geradores de *todas* as transformações de gauge lisas ⁸. Denotamos esse grupo por $\mathcal{G}$.

Para quantizar essa teoria no formalismo canônico, deve-se adotar o que no jargão da quantização geométrica é chamado de polarização [74]: tome-se “metade” do espaço de fase como o “espaço das coordenadas”, ou espaço de configuração, e a outra metade como o “espaço dos momentos” ⁹. Uma vez escolhida uma polarização, constrói-se o espaço de Hilbert na “representação de Schrödinger”, composto pelas funções de onda sobre o espaço de configuração. Em nosso caso, o espaço de fase é um fibrado cotangente. É então muito mais conveniente e natural escolher o conjunto das conexões de $SO(2,1)$ como o espaço de configurações. Portanto, os estados na teoria quântica deverão ser descritos por funcionais $\psi[A]$. Porém a teoria tem vínculos. A implementação destes ao nível quântico requer o emprego do procedimento de Gupta-Bleuler (ver, por exemplo, a pag. 127 de [93]): $C(\Lambda)$ e $C'(\Omega)$ são promovidos a *operadores* $\hat{C}(\Lambda)$ e $\hat{C}'(\Omega)$ agindo nas funções de onda [52]. Os estados físicos são aqueles aniquilados pela ação desses operadores. A equação $\hat{C}(\Lambda)\psi[A] = 0$ nos diz que ψ depende somente da classe de equivalência sob transformações de gauge (triviais no infinito) das conexões em Σ . Em outras palavras $\psi[A_1] = \psi[A_2]$, sempre que $A_1 = gA_2g^{-1} + gdg^{-1}$ para alguma transformação de gauge local $g : \Sigma \rightarrow SO(2,1)$ ¹⁰. Se Σ for não-compacta, é necessário que $g(\infty) = e$, onde e denota a identidade de $SO(2,1)$. De forma semelhante, o vínculo $F^a = 0$ implica que $\psi[A] = 0$ para toda conexão A que não seja plana. Mas essas duas condições juntas implicam que o espaço de configurações físico Q é dado pelo assim chamado *espaço de moduli* das conexões planas. Este é o conjunto das classes de equivalência sob transformações de gauge das conexões planas sobre Σ . O espaço de moduli é bastante conhecido e importante na matemática [94, 95]. Se denotarmos o espaço das conexões planas sobre Σ por $\mathcal{A}_\Sigma$, teremos que $Q = \mathcal{A}_\Sigma/\mathcal{G}$ se Σ for fechada. *A priori* $Q = \mathcal{A}_\Sigma/\mathcal{G}^\infty$ se Σ for uma superfície não-compacta. Na realidade, a descrição de Q no caso de Σ não-compacta é um pouco mais elaborada do que isto. Estamos omitindo aqui algumas sutilezas importantes, às quais voltaremos mais adiante.

É um fato geométrico bem conhecido que conexões sobre um fibrado principal estão associadas com as assim chamadas *holonomias*. Recordamos vários fatos a respeito dessa relação, que nos serão úteis mais tarde. Não mostraremos aqui as demonstrações correspondentes, já que estas são material padrão em livros de geometria diferencial (veja, por exemplo, [4]). Lembramos que, dada uma conexão A em Σ , definimos suas holonomias da seguinte maneira [2, 5, 4]: fixamos um ponto qualquer $p_0 \in \Sigma$ e para cada curva fechada

⁸Por “todas”, queremos dizer todas as transformações de gauge locais que podem ser infinitesimalmente geradas, às vezes chamadas na literatura de transformações de gauge “pequenas”, que pertencem à componente conexa contendo a identidade do grupo (de dimensão infinita) das transformações de gauge locais - ver, por exemplo, [4].

⁹Ao contrário do que se poderia pensar a partir do estudo dos sistemas físicos mais simples, essa escolha nem sempre é trivial em sistemas mais complicados - veja Ref. [74].

¹⁰Uma transformação de gauge local só pode ser escrita globalmente como uma função a valores em $SO(2,1)$ se o fibrado subjacente é trivial. Estamos ignorando essas sutilezas seguindo o uso físico corrente, para agilizar a exposição.

γ começando e terminando em p_0 , a holonomia correspondente é dada por

$$W(A, \gamma, p_0) = P \exp \int_{\gamma} A. \quad (2.11)$$

O símbolo P aqui indica uma integração ordenada ao longo do caminho dado por γ . Podemos ver $W(A, \gamma, p_0)$ como um elemento de $SO(2, 1)$ [2, 5, 4]. É possível mostrar que sob uma transformação de gauge local essa holonomia se altera da seguinte maneira:

$$W(A, \gamma, p_0) \rightarrow g(p_0)W(A, \gamma, p_0)g^{-1}(p_0),$$

onde $g(p_0)$ denota o valor em p_0 da transformação de gauge. Conclui-se imediatamente desta lei de transformação que uma holonomia é invariante sob uma transformação local de gauge trivial em p_0 . Então, cada holonomia de fato só depende da classe de equivalência $[A]$ sob transformações de gauge triviais no infinito, se o ponto base p_0 for escolhido ali. É possível mostrar ainda que, se A é plana, sua holonomia só depende da classe de homotopia $[\gamma]$ do caminho fechado γ . Denotamos por $\pi_1(\Sigma)$ o grupo de homotopia composto por caminhos fechados começando e terminando em p_0 . Associada a cada classe de equivalência $[A]$ existe um homomorfismo

$$W([A]) : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow SO(2, 1). \quad (2.12)$$

Denotaremos por $\tilde{Q}$ o conjunto de todos os homomorfismos de $\pi_1(\Sigma)$ em $SO(2, 1)$.

A descrição acima sugere que é possível descrever o espaço de moduli das conexões planas através de holonomias, isto é, através do conjunto $\tilde{Q}$. De fato isso pode ser feito, mas novamente a descrição variará, dependendo se Σ é uma superfície fechada ou não-compacta. Vamos fixar doravante o ponto $p_0 \in \Sigma$.

Suponhamos primeiro que Σ é fechada. Nesse caso, dadas duas conexões A_1 e A_2 planas e equivalentes de gauge, as respectivas holonomias são relacionadas por

$$W(A_1) \rightarrow g(p_0)W(A_2)g^{-1}(p_0)$$

para alguma transformação de gauge local. Podemos então considerar em $\tilde{Q}$ a seguinte relação de equivalência: dados $W_1, W_2 \in \tilde{Q}$, definimos que $W_1 \sim W_2$ se, e somente se, existe $g \in SO(2, 1)$ tal que $W_1 = gW_2g^{-1}$. Então, duas conexões na mesma classe de gauge corresponderão a holonomias relacionadas por conjugação e portanto também equivalentes por essa relação que ora definimos. Na verdade, pode-se mostrar (ver, por exemplo, a seção 5.4.3 da Ref. [96]) que existe uma bijeção entre classes de gauge de conexões planas e classes de conjugação de elementos de $\tilde{Q}$. Em outras palavras,

$$Q = \tilde{Q}/SO(2, 1), \quad (2.13)$$

onde se entende que o quociente se refere à equivalência por conjugação definida acima.

Uma importante observação topológica precisa ser feita. O espaço Q definido em (2.13) nos fornece mais do que apenas conexões planas: Q é de fato o espaço de moduli de *todos os fibrados principais de $SO(2, 1)$ planos sobre Σ* . Ou seja, o espaço de todos os *pares* $(P, [A])$ onde P é um fibrado principal de $SO(2, 1)$ sobre Σ e $[A]$ é uma classe de gauge de

conexões planas sobre P [96]. O mesmo espaço é obtido por Witten [67] ao considerar sua versão de Chern-Simons da gravitação em $(2+1)d$. É um fato bem conhecido [67, 94] que Q possui várias componentes conexas. Cada uma delas corresponde *grossa modo* a todas as topologias possíveis de fibrados principais de $SO(2,1)$ sobre Σ . Isto quer dizer que, no formalismo de primeira ordem que estamos considerando aqui, o espaço de configuração inclui várias topologias para o fibrado onde os campos estão definidos. Em contraste, no formalismo métrico o fibrado subjacente é o dos referenciais ou, equivalentemente, o fibrado tangente TM . Este último é fixado univocamente pela topologia de Σ . Essa riqueza de fibrados $SO(2,1)$ sobre Σ que se obtém no formalismo de primeira ordem é portanto inesperada *a priori*.

Felizmente, essa multiplicidade de fibrados não representa uma falha grave. Como veremos logo em seguida, existe uma componente conexa de Q contendo somente aqueles fibrados com a mesma topologia global de TM . Essa componente pode ser selecionada devido a certas considerações físicas.

A fim de ver isto, podemos, ao invés do fibrado tangente TM , considerar $F(M)$, o fibrado de todos os referenciais locais no espaço-tempo M . Lembramos que este é um fibrado principal com grupo de estrutura $GL(3, \mathbb{R})$ associado ao fibrado tangente TM , e portanto suas funções de transição são idênticas [3, 97].

Na presença de uma métrica não-degenerada g de assinatura Lorentziana, o grupo de estrutura de $F(M)$ pode ser reduzido a $SO(2,1)$. Neste caso, o fibrado é topologicamente equivalente ao fibrado principal dos referenciais ortonormais pela métrica g [5, 97]. Sua topologia ainda é determinada pela de TM .

No caso do formalismo de primeira ordem, a métrica é vista como uma entidade secundária, podendo-se descrever a geometria através de conexões e tríades. De fato, seja E um fibrado vetorial *arbitrário* sobre M com grupo de estrutura $SO(2,1)$ e fibra $\mathbb{R}^3$, mas que não seja necessariamente isomorfo ao fibrado tangente TM . Pode-se induzir uma métrica em M da seguinte forma: considere em cada fibra de E a métrica de Minkowski η . Uma tríade e pode ser vista [5, 6] como uma aplicação de fibrados vetoriais entre TM e E , ou equivalentemente uma 1-forma sobre M com valores em E . Dados dois campos vetoriais lisos X e Y sobre M , definimos o tensor covariante de segunda ordem g por

$$g(X, Y) := \eta(e(X), e(Y)). \quad (2.14)$$

Não é difícil ver que g assim definido é uma métrica Lorentziana. Porém, essa métrica é geralmente degenerada, sendo não-degenerada apenas se e satisfaz certas condições de invertibilidade. Estas são equivalentes a dizer que e é um isomorfismo de fibrados vetoriais entre TM e E . Mas é claro que isto só pode ocorrer se estes fibrados forem topologicamente equivalentes.

A lição a ser tirada dessa discussão é que, no formalismo de primeira ordem, podemos em princípio escolher a tríade e e a conexão A num fibrado vetorial E com grupo de estrutura $SO(2,1)$ completamente arbitrário. Essa arbitrariedade é o que origina a riqueza de topologias aparecendo na descrição do espaço de configurações.

No formalismo métrico, por outro lado, o fibrado é fixado desde o início como sendo TM , e a métrica como sendo não-degenerada. Nesse sentido, o formalismo de primeira ordem pode ser considerado mais geral do que o métrico, mas essa generalidade é obtida a

um preço: o espaço-tempo pode admitir métricas altamente singulares. Estas correspondem, por exemplo, a alças completamente colapsadas cujo significado físico é duvidoso. Portanto, a estratégia usualmente adotada é o abandono das topologias distintas daquela de TM . Essa estratégia não elimina completamente as singularidades, mas estas serão mais “suaves” [67], e admitem interpretações físicas [88].

Restringindo a topologia do fibrado, o espaço de configuração Q terá uma única componente conexa, correspondendo a fibrados com a mesma topologia daquela de $F(M)$. Essa componente é, por sua vez, isomorfa [67] ao chamado *espaço de Teichmüller* da superfície Σ , que é o espaço das estruturas complexas sobre Σ [4, 91, 92, 96]¹¹.

O caso não-compacto tem características bastante distintas (ver, por exemplo a Ref. [99]). Veremos que nesse caso o espaço de configuração é de fato mais complicado do que apenas $\mathcal{A}/\mathcal{G}^\infty$, como tínhamos antecipado. Inicialmente, chamamos a atenção ao fato de que a ação de Einstein-Hilbert não é dada simplesmente por (2.5), podendo assumir a forma mais geral

$$S = \int_{\Sigma \times \mathbb{R}} e^{(3)a} \wedge F_a^{(3)} + \text{termos de superfície.} \quad (2.15)$$

Esses termos de superfície aparecem porque *no caso não-compacto é necessário especificar o comportamento dos campos no infinito*, para que as equações de movimento e o problema variacional estejam bem postos. As variações são feitas somente sobre o conjunto dos campos que satisfazem tais condições assintóticas. Ao realizar essas variações, contudo, eventuais integrações por partes podem dar origem a termos de superfície não-nulos. Precisamos então dos termos de superfície da eq. (2.15) para compensá-los. A forma específica desses termos depende da escolha das condições assintóticas. Tais termos de superfície são, é claro, identicamente nulos se Σ é fechada. Essas questões são tratadas em detalhes, no contexto da Relatividade Geral, nas Refs. [61, 62].

Fixado um comportamento assintótico, consideremos o espaço das duplas (e, A) , onde e é uma triáde e A uma conexão, ambos sobre Σ , que satisfazem às eqs. (2.7) e a esse *comportamento assintótico*. O espaço de fase é então o espaço das classes de equivalência $[(e, A)]$ sob transformações de gauge. Já observamos que, no caso não-compacto, a teoria só precisa ser invariante com respeito a transformações locais de gauge de $SO(2, 1)$ que são triviais no infinito. Estas formam o grupo que denotamos por $\mathcal{G}^\infty$. Seja $\mathcal{A}_\Sigma^\infty$ o espaço da conexões de $SO(2, 1)$ planas sobre Σ . Neste caso, o espaço de configurações da teoria será $\mathcal{A}_\Sigma^\infty/\mathcal{G}^\infty$. Gostaríamos de descrever esse espaço via holonomias, como fizemos no caso compacto acima. Por conveniência, escolhemos o ponto-base p_∞ no infinito. Para isso, assumimos que existe uma “fronteira no infinito” bem definida, que denotamos por $\partial\Sigma$, e que $p_\infty \in \partial\Sigma$. Holonomias correspondentes a curvas fechadas começando e terminando em p_∞ serão automaticamente invariantes sob transformações em $\mathcal{G}^\infty$. Poderíamos então ser tentados a identificar

$$\mathcal{A}_\Sigma^\infty/\mathcal{G}^\infty \simeq \tilde{Q}.$$

Isto não pode ser feito, porém, devido a uma sutileza importante que consideramos a seguir.

¹¹Essa discussão é estritamente válida se o gênero de Σ for maior que um. O toro requer uma análise mais cuidadosa [98].

A ação (2.15) deve ser finita para uma classe razoável de campos. Essa condição requer que o integrando do primeiro termo se anule no infinito tão ou mais rápido que $1/r^3$, onde r é uma variável radial apropriada. Essa será uma condição *suficiente* e não muito restritiva¹². Para implementá-la, podemos fazer a seguinte escolha para as condições assintóticas:

$$e \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1/r \quad (2.16)$$

$$A \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1/r. \quad (2.17)$$

Nesse caso, $F \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1/r^2$ e portanto $e \wedge F \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 1/r^3$, como desejado. Contudo, A só entra na ação através do tensor de curvatura F . Portanto, A em si não precisa ir a zero no infinito, como acima. Só precisamos impor que $A \xrightarrow{r \rightarrow \infty} g(x)dg^{-1}(x)$, onde $g(x)$ é uma transformação de gauge espacial *qualquer*, não necessariamente trivial na “fronteira no infinito” $\partial\Sigma$. Conexões planas relacionadas por tais transformações genéricas não são, como vimos, fisicamente equivalentes. Como consequência, a aplicação $g(x) : \partial\Sigma \rightarrow SO(2,1)$ entra na especificação da conexão plana. Portanto, denotando o espaço das aplicações da fronteira de Σ em $SO(2,1)$ por $Maps(\partial\Sigma \rightarrow SO(2,1))$, temos [99]:

$$A_\Sigma^\infty / \mathcal{G}^\infty = \tilde{Q} \times Maps(\partial\Sigma \rightarrow SO(2,1)), \quad (2.18)$$

sendo esta a identificação correta para o caso não-compacto.

Nesta tese, estudaremos um modelo físico cujo espaço de configuração é semelhante ao descrito na eq. (2.13). *Ao invés do grupo $SO(2,1)$, entretanto, teremos um grupo finito H .* Essa simplificação aparentemente grosseira é, ao contrário, bastante rica: o sistema possui um interesse físico e matemático intrínseco [35, 36] e nos fornece *insights* de como tratar o caso gravitacional pleno descrito acima [37, 38]. Esse espaço de configuração “simplificado” de géons será introduzido no próximo Capítulo.

2.3 A Quantização de Mackey

Passamos agora para a descrição de um formalismo, que pode ser usado como um método de quantização, proposto por G.W. Mackey [77, 78]. Satisfeitas certas condições, esse método é geral ao ponto de abranger os casos conhecidos mais simples da mecânica quântica. Ao mesmo tempo, é restrito o suficiente para tornar a quantização factível. Esse formalismo se aplica quando temos um espaço de configuração Q e um grupo G agindo sobre Q . Portanto, se partirmos de um espaço de fase $\mathcal{P}$, este terá que ser da forma $\mathcal{P} = T^*Q$, isto é, terá que possuir uma estrutura de fibrado cotangente sobre uma certa variedade Q . O caso de uma partícula em $\mathbb{R}^n$ se encaixa nessa categoria. Toda a discussão abaixo, com exceção do exemplo de um espaço de configuração finito e das relações de comutação, foi adaptada de [77, 78].

Nesse formalismo, definimos observáveis “tipo posição” através de MVP’s, e operadores “tipo momento” através de ações de grupo sobre o espaço Q de configurações. No que segue, Q não precisará ser uma variedade diferenciável. Bastará que seja um espaço

¹²Na realidade, a convergência da integral só requeriria que o integrando fosse a zero tão ou mais rápido que $1/r^{2+\epsilon}$, com $\epsilon > 0$, mas nos contentaremos com a escolha feita.

topológico, que assumiremos separável, localmente compacto e dotado de uma medida de Borel μ . Essas hipóteses são puramente técnicas e permitem demonstrar os teoremas pertinentes ao formalismo de Mackey. Elas abrangem virtualmente todos os casos físicos de interesse. Em particular, se verificam no caso do espaço de configuração de géons simplificado, que introduziremos mais adiante nessa tese. Tomaremos como espaço de Hilbert dos estados quânticos o espaço das funções a valores complexos e de quadrado integrável, $\mathcal{H} = L^2(Q, d\mu)$. Dado um conjunto de Borel E em Q , definimos a função *característica* $\chi_E : Q \rightarrow \{0, 1\}$ correspondente a E :

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \notin E. \end{cases} \quad (2.19)$$

A partir desta função, podemos definir o projetor P_E em $\mathcal{H}$ por

$$P_E\psi := \chi_E\psi, \quad (2.20)$$

para todo $\psi \in \mathcal{H}$. É fácil ver que a associação $E \mapsto P_E$ assim definida é uma MVP. Nesta tese, chamaremos essa MVP de *MVP de Mackey*. Avisamos ao leitor, contudo, que essa designação não é padrão e apenas a usaremos aqui por conveniência. Cada projetor P_E pode ser visto como um observável possuindo só dois valores (experimentos para medir observáveis desse tipo são chamados experimentos “sim-não” [79]): 1 se a “posição” do sistema estiver em E e zero se isto não ocorrer.

Uma observação crucial na teoria de Mackey é que todo observável do “tipo posição” (isto é, operadores auto-adjuntos em $\mathcal{H}$ associados a funções de Borel a valores reais sobre Q) pode ser obtido através desta MVP. De fato, seja f uma função contínua a valores reais sobre Q , com suporte compacto (e portanto limitada em Q)¹³. Podemos definir um operador auto-adjunto $\hat{f}$ sobre $\mathcal{H}$ da forma usual:

$$\hat{f}\psi(x) := f(x)\psi(x), \quad (2.21)$$

para todo $\psi \in \mathcal{H}$. Como f é de suporte compacto, o lado direito de (2.21) de fato é de quadrado integrável. Mas note-se que f é uma função de Borel, e portanto se considerarmos um boreliano U na reta real, $f^{-1}(U)$ será também um boreliano em Q . Pode-se verificar facilmente que a associação

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{H}) \\ U &\mapsto P_{f^{-1}(U)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

é uma MVP sobre $\mathbb{R}$. Pelo teorema espectral, existe um único operador auto-adjunto associado a essa MVP e este é precisamente $\hat{f}$. Isso mostra que podemos construir cada operador tipo posição a partir da MVP de Mackey.

Faremos agora uma breve digressão e consideraremos um exemplo concreto de uma MVP de Mackey que será muito importante ao tratar a quantização de géons: vamos assumir que o espaço de configurações Q é um conjunto *finito*. Uma situação bem conhecida

¹³Podemos estender as considerações que seguem a qualquer função de Borel real, mas os operadores correspondentes serão em geral não-limitados. Para evitar complicações devidas às várias possibilidades de domínios de operadores, introduzimos a restrição de suporte compacto.

onde um espaço de configurações finito ocorre é o de uma rede finita unidimensional de spins de Ising com n sítios. Esse sistema possui 2^n configurações. Como veremos mais adiante, o espaço de configuração dos géons considerado nesta tese se reduzirá a um conjunto finito.

Sendo Q finito, podemos atribuir-lhe a topologia discreta (isto é, *todo* subconjunto de Q é visto como um aberto dessa topologia). Munido dessa topologia, Q se torna um espaço topológico separável e compacto. Seja X um espaço topológico qualquer. Toda função $f : Q \rightarrow X$ é contínua. Um espaço topológico finito e com a topologia discreta admite uma medida natural, a chamada *medida de contagem* μ_c . Esta simplesmente associa a cada boreliano o número de elementos contidos no mesmo:

$$\mu_c(E) = \text{número de elementos em } E,$$

para todo $E \in \mathcal{B}(Q)$. Como o lado direito dessa equação é sempre finito, a medida está bem definida. É fácil ver que *qualquer função* no conjunto $\mathcal{F}(Q, \mathbb{C})$ das funções a valores complexos sobre Q é de quadrado integrável com a medida μ_c . De fato, dada qualquer $f \in \mathcal{F}(Q, \mathbb{C})$, a integral de seu quadrado é simplesmente dada por

$$\int_Q |f|^2 d\mu_c := \sum_{x \in Q} |f(x)|^2 < \infty.$$

Tomemos agora um elemento $x_0 \in Q$. Consideremos a função característica

$$Q_{x_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = x_0 \\ 0, & \text{se } x \neq x_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Para toda $f \in \mathcal{F}(Q, \mathbb{C})$, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{x_0 \in Q} f(x_0) Q_{x_0}(x), \quad (2.24)$$

para todo $x \in Q$. Portanto, podemos omitir o argumento, e toda função pode ser expandida na forma:

$$f = \sum_{x_0 \in Q} f(x_0) Q_{x_0}. \quad (2.25)$$

Essa equação mostra que a família $\{Q_{x_0}\}_{x_0 \in Q}$ forma uma base para $\mathcal{F}(Q, \mathbb{C})$. Portanto, $\mathcal{F}(Q, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^N$, onde N é o número de elementos no conjunto Q . Podemos definir em $\mathcal{F}(Q, \mathbb{C})$ um produto interno natural:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{x_0 \in Q} \overline{f(x_0)} g(x_0), \quad (2.26)$$

para todas as $f, g \in \mathcal{F}(Q, \mathbb{C})$. A barra superior indica conjugação complexa. Com esse produto interno, $\mathcal{F}(Q, \mathbb{C})$ se torna um espaço de Hilbert de *dimensão finita* (igual a N), e esse será o espaço de Hilbert das “funções de onda” correspondendo à quantização do espaço de configurações finito Q . Chamaremos esse espaço de Hilbert de $\mathcal{H}_Q$.

Consideremos agora como será a MVP de Mackey nesse caso simples. Novamente denotemos por $\mathcal{B}(Q)$ a σ -álgebra de Borel correspondendo à topologia discreta em Q . Seja $E \in \mathcal{B}(Q)$ um boreliano, a função χ_E definida em (2.19) pode ser escrita, usando (2.25), na forma

$$\chi_E = \sum_{x_0 \in E} Q_{x_0}. \quad (2.27)$$

Por outro lado, para cada Q_{x_0} , podemos definir um operador $\hat{Q}_{x_0}$ do tipo posição via a equação (2.21). Obtemos

$$\hat{Q}_{x_0}\psi(x) := \delta_{x_0,x}\psi(x), \quad (2.28)$$

para toda $\psi \in \mathcal{H}_Q$. Aqui, $\delta_{x_0,x}$ é o delta de Kronecker. Podemos mostrar que esses operadores obedecem à seguinte relação

$$\hat{Q}_{x_0}\hat{Q}_{x'_0} = \delta_{x_0,x'_0}\hat{Q}_{x_0}. \quad (2.29)$$

Em particular, $\hat{Q}_{x_0}^2 = \hat{Q}_{x_0}$, ou seja, esses operadores são projetores em $\mathcal{H}_Q$. Usando agora a definição da MVP de Mackey, eq. (2.20), e as eqs. (2.27) e (2.28), obtemos, para cada boreliano E ,

$$P_E = \sum_{x_0 \in E} \hat{Q}_{x_0}. \quad (2.30)$$

Consideramos agora os observáveis do tipo posição. Estes claramente corresponderão ao conjunto $\mathcal{F}(Q, \mathbb{R})$ de todas as funções a valores *reais* (uma vez que os operadores correspondentes, definidos pela eq. (2.21), devem ser auto-adjuntos). Seja $f \in \mathcal{F}(Q, \mathbb{R})$ e $\hat{f}$ o respectivo observável. Em vista da (2.25), temos

$$\hat{f} = \sum_{x_0 \in Q} f(x_0)\hat{Q}_{x_0}. \quad (2.31)$$

Mas escrevendo $Q = \{x_1, \dots, x_N\}$ e $\lambda_i \equiv f(x_i)$, podemos reescrever a eq. (2.24) na forma

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \hat{Q}_{f^{-1}(\lambda_i)}. \quad (2.32)$$

Esta nada mais é do que uma maneira de escrever o teorema espectral nesse caso simples: a MVP correspondente ao operador auto-adjunto $\hat{f}$ é gerada pela família de projetores $\{\hat{Q}_{f^{-1}(\lambda_i)}\}$, em consonância com o que mostramos para o caso geral. Chamamos a atenção para o fato de que neste contexto simples, a eq. (2.32) continua válida para operadores “tipo posição” advindos de funções a valores *complexos*. Nesse caso, porém, os operadores não são auto-adjuntos e portanto não podem corresponder, estritamente, a observáveis na teoria quântica. Essa observação será relevante quando estivermos estudando géons.

Vamos agora retornar à teoria de Mackey para o caso geral de um espaço de configurações qualquer (separável e localmente compacto). Nossa intenção é considerar como observáveis “tipo momento” podem ser definidos dentro da mesma. Tomemos novamente um espaço de configuração Q como acima, dotado de uma medida μ . Vamos assumir que

temos um grupo G agindo em Q de forma a preservar a medida μ . Nesse caso, existe uma representação U em $L^2(Q, \mu)$ dada por

$$(U_g \psi)(x) := \psi(g^{-1}x), \quad (2.33)$$

para todos $x \in Q$, $g \in G$, e $\psi \in L^2(Q, \mu)$. A representação assim definida é unitária, pois

$$\begin{aligned} \langle U_g \psi, U_g \psi \rangle &:= \int_Q (U_g \bar{\psi})(x) (U_g \psi)(x) d\mu(x) \\ &= \int_Q \bar{\psi}(g^{-1}x) \psi(g^{-1}x) d\mu(x), \end{aligned} \quad (2.34)$$

e fazendo a mudanças de variável $y \equiv g^{-1}x$, temos

$$\begin{aligned} \langle U_g \psi, U_g \psi \rangle &= \int_Q \bar{\psi}(y) \psi(y) d\mu(gy) \\ &\equiv \int_Q \bar{\psi}(y) \psi(y) d\mu(y) \\ &= \langle \psi, \psi \rangle, \end{aligned} \quad (2.35)$$

pois a medida μ é invariante por hipótese.

Note-se que podemos definir a MVP de Mackey P como em (2.20). Usando-se essa definição e a eq.(2.33), mostra-se facilmente que

$$U_g P_E U_{g^{-1}} = P_{g[E]}. \quad (2.36)$$

De um modo geral, toda MVP em Q sobre um espaço de Hilbert separável qualquer $\mathcal{H}$, que seja relacionada como em (2.36) com uma representação unitária de G sobre $\mathcal{H}$, é chamada de um *sistema de imprimitividade* [77, 78]. Esse conceito é extremamente importante na teoria de representações de grupos e álgebras, devido ao chamado *teorema de imprimitividade* de Mackey, que fornece uma forma poderosa de obter representações de uma vasta classe de grupos e de álgebras. Não utilizaremos esse teorema diretamente nesta tese, e portanto não o enunciaremos aqui. Basta que o leitor tenha em mente que o teorema de imprimitividade é crucial na demonstração de um outro teorema (teorema 3.9 de [81]), que classifica as representações de uma classe de álgebras que utilizaremos nesta tese (ver Seção 4.2 do Capítulo 4 e o Apêndice B). A real importância da eq.(2.36) para nós reside no fato de que a mesma representa uma ampla generalização das relações de comutação entre variáveis de posição e momento da mecânica quântica. Como exemplo, vamos considerar o caso simples de $Q = \mathbb{R}$, dotado de sua medida usual de Lebesgue, e G como o grupo comutativo das translações na reta real. Este pode ser identificado com o próprio $\mathbb{R}$, visto como um grupo comutativo com respeito à soma. Assim, fazemos $G = \mathbb{R}$. Uma vez que nosso objetivo é expositivo, vamos proceder de maneira formal, sem nos preocupar com o rigor. Considere uma translação infinitesimal dada por

$$T_\epsilon(x) = x + \epsilon, \quad (2.37)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. $\epsilon > 0$ é, por hipótese, “pequeno”. A representação (2.33) induzida em $L^2(\mathbb{R}, dx)$, dá, em primeira ordem em ϵ ,

$$U_\epsilon = \mathbb{I} + i\epsilon\hat{p} + O(\epsilon^2), \quad (2.38)$$

onde $\hat{p} := -id/dx$ é o “operador momento linear”. Se aplicamos essas considerações à (2.36), teremos

$$(\mathbb{I} + i\epsilon\hat{p})P_E(\mathbb{I} - i\epsilon\hat{p}) \simeq P_{E+\epsilon}, \quad (2.39)$$

para todo boreliano E de $\mathbb{R}$. Podemos reescrever esta equação na forma

$$P_E\hat{p} - \hat{p}P_E \simeq i\frac{P_{E+\epsilon} - P_E}{\epsilon}. \quad (2.40)$$

A MVP de Mackey coincide, neste caso simples, com a MVP associada, via teorema espectral, ao “operador posição” definido por $(\hat{x}\psi)(x) = x\psi(x)$, para quase todo $\psi \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ ¹⁴. Podemos escrever, formalmente [82],

$$\hat{x} = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP_\lambda. \quad (2.41)$$

Em vista da eq. (2.40), temos que

$$dP_\lambda\hat{p} - \hat{p}dP_\lambda = i\frac{dP_{\lambda+\epsilon} - dP_\lambda}{\epsilon}. \quad (2.42)$$

Podemos então “multiplicar por λ e integrar em λ ” em ambos os membros. Note-se agora que

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda dP_{\lambda+\epsilon} = \int_{\mathbb{R}} (\lambda' - \epsilon) dP_{\lambda'}, \quad (2.43)$$

e lembrando [82] que $\int_{\mathbb{R}} dP_\lambda = P_{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{I}$, teremos

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda dP_{\lambda+\epsilon} = \hat{x} - \epsilon\mathbb{I}. \quad (2.44)$$

Em vista dessas considerações, concluímos, tomando o limite $\epsilon \rightarrow 0$, que

$$\hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x} = i\mathbb{I}, \quad (2.45)$$

que é a relação usual de comutação. De forma mais rigorosa, é possível mostrar [78] que o teorema de imprimitividade implica no teorema de Stone e von Neumann sobre a unicidade das relações de comutação de Heisenberg.

Voltemos ao caso geral; passamos agora a discutir o significado físico da representação unitária U ¹⁵. Seja θ um homomorfismo qualquer da reta real (vista como grupo aditivo

¹⁴ A menos de considerações sobre o domínio desse operador.

¹⁵ As considerações desta Seção podem ser estendidas ao caso em que temos apenas uma representação *projetiva* [78]. Nos restringimos ao caso estritamente unitário por simplicidade.

com respeito à soma) no grupo G . Em outras palavras, uma aplicação contínua $\theta : \mathbb{R} \rightarrow G$ tal que

$$\theta(0) = e,$$

onde e é a identidade do grupo G , e

$$\theta(t + s) = \theta(t)\theta(s),$$

para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$. Nesse caso, a aplicação $t \rightarrow U_{\theta(t)}$ é uma representação da reta real. Pelo teorema de Stone [82, 83], existe um único operador auto-adjunto A_θ em $L^2(Q, \mu)$ tal que $U_{\theta(t)} = \exp(itA_\theta)$ ¹⁶. Esse operador A_θ corresponde a um observável em mecânica quântica, que chamamos de observável “do tipo momento”. O nome, claro, é sugerido pelo caso $Q = \mathbb{R}^3$, com G o grupo das translações no espaço $\simeq \mathbb{R}^3$. Neste caso, θ pode ter a interpretação de um “movimento no espaço”, e o observável correspondente é precisamente a componente do momento linear na direção deste movimento.

A observação crucial é portanto que uma ação unitária de um grupo funciona como uma maneira de introduzir variáveis “do tipo momento” na teoria quântica. Novamente, essa forma de proceder se torna importante para nós devido ao fato de que a mesma admite uma pronta generalização. Com efeito, note-se que se G é discreto, o único θ contínuo é a aplicação constante $t \mapsto e$. Nesse caso, é fácil ver que o operador auto-adjunto correspondente é identicamente nulo: em outras palavras, o conceito de gerador infinitesimal de uma dada operação perde o significado. Mas a idéia de operações finitas ainda tem significado, e estas podem ser incorporadas no formalismo de Mackey.

Concluindo, gostaríamos de sumarizar as conclusões deste Capítulo que são importantes para o caso dos géons:

- Existe uma grande liberdade na escolha dos observáveis, que pode ser feita de acordo com a conveniência para o processo de quantização, desde que respeitadas as características físicas do sistema;
- Pode-se utilizar a MVP de Mackey como sucedâneo dos observáveis “do tipo posição”, e ações de grupo no espaço de configuração para introduzir variáveis “do tipo momento”. Haverá entre elas uma “relação de comutação generalizada” (dada pela eq.(2.36)). Esta escolha de variáveis para a quantização representa uma generalização do esquema usual da quantização canônica: escolher como variáveis coordenadas e momentos que parametrizam o espaço de fase clássico, promovendo-os a operadores em $L^2(Q, \mu)$. Em particular, o formalismo de Mackey é o único que faz sentido para quantizar uma teoria com espaço de configuração discreto, onde o conceito de espaço de fase perde o significado.

No próximo Capítulo, vamos discutir o espaço de configuração que usaremos para a quantização, e qual o grupo G de operações subjacente que age neste espaço; no Capítulo 4, mostraremos como podemos usar o formalismo de Mackey para quantizar esse espaço de configuração: a idéia é embeber a MVP de Mackey e a ação do grupo G numa álgebra. A seguir, buscaremos as representações irredutíveis da mesma.

¹⁶Para que o teorema de Stone seja válido, é necessário que $t \rightarrow U_{\theta(t)}$ seja uma aplicação fortemente contínua. Mas isto ocorre, porque pode ser demonstrado que $g \mapsto U_g \psi$ é uma aplicação contínua $G \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mu)$, para todo $\psi \in L^2(\mathbb{R}, \mu)$ [78].

Capítulo 3

Teorias de Gauge Discretas para Géons

No Capítulo anterior, estudamos em detalhe a construção do espaço de configuração clássico para géons na Relatividade Geral. Argumentamos ali que a teoria resultante era ainda por demais complexa para uma avaliação direta, e antecipamos que nos proporíamos a construir uma teoria cujo espaço de configuração fosse análogo, porém com um grupo *finito*, ao invés do grupo $SO(2, 1)$. O objetivo deste Capítulo é introduzir uma teoria para os géons que nos permitirá cumprir essa expectativa.

Não se deve porém imaginar que a teoria que construiremos ao longo dessa tese é apenas um “toy model” para a teoria gravitacional completa. Apesar de ser motivada por esta, ficará claro que a construção desenvolvida no restante dessa dissertação possui um grande interesse independente. Relacionamos aqui alguns fatores que contribuem para esse interesse:

- A teoria descreve um setor de baixas energias de uma teoria de gauge com quebra espontânea de simetria na presença de topologia espacial não-trivial [100];
- A estrutura matemática construída é rica e eficiente na classificação do espectro desse setor de baixas energias [100, 101, 102];
- O limite de baixas energias da teoria estudada aqui é correspondente a um exemplo simples de uma teoria topológica de campos [103, 104];
- Mostra-se uma inesperada relação entre spin e estatística para géons. Sabe-se que o teorema de spin-estatística usual é violado para géons (ver as Refs. [28, 29, 30, 32, 34] e a Seção 5.3;
- Obtêm-se estados que podem ser vistos como “estados localizados” em gravitação quântica [36]. Esses estados “herdam” a relação entre spin e estatística comentada no item anterior;
- Pode-se estudar uma versão simples e “dependente do observador” de flutuações quânticas na topologia espacial [35].

Antes de introduzirmos a teoria propriamente dita, vamos relembrar alguns fatos relevantes acerca de teorias de gauge com quebra espontânea de simetria que serão importantes nesta dissertação. Sugerimos ao leitor interessado em mais detalhes sobre esse tema a consulta de [93, 100, 105] e as referências ali citadas.

A noção de simetria é uma das mais fundamentais da física moderna. O conhecimento das simetrias de uma teoria física não só fornece muitas informações valiosas sobre a estrutura da mesma e facilita cálculos técnicos, mas em alguns casos o conjunto dessas simetrias sugere quase univocamente a forma da teoria em si. É bem conhecido o exemplo da Relatividade Geral, cuja estrutura foi sugerida a Einstein devido a considerações de simetria: no caso, a necessidade de passar da simetria de Lorentz para uma teoria que fosse invariante por transformações gerais de coordenadas espaço-temporais.

De um modo geral, num sistema físico definido por uma ação, uma simetria corresponde a um grupo de transformações do espaço-tempo e/ou dos graus de liberdade da teoria que deixam a ação, e portanto as equações de movimento descrevendo o sistema, invariantes. Via de regra, o conjunto dessas transformações de simetria tem a estrutura matemática de um grupo [41, 43, 44, 45]. As simetrias relacionadas à invariância por transformações de coordenadas do espaço-tempo são chamadas externas (como a invariância de Lorentz) e simetrias não relacionadas com transformações de coordenadas são ditas internas (como simetrias de gauge, por exemplo). Também se faz uma distinção entre uma simetria global, que é a mesma em todo o espaço-tempo, e normalmente leva, via o teorema de Nöether [93], a uma quantidade conservada, e uma simetria local, que depende continuamente dos pontos do espaço-tempo. O chamado princípio de gauge se baseia no fato de que para converter uma dada simetria de gauge global numa simetria de gauge local se requer a introdução de graus de liberdade adicionais, que serão os mediadores de interações.

Ocorre que uma simetria da ação *não* precisa ser uma simetria do estado fundamental da teoria. Se uma ação é invariante sob um grupo de simetria G , mas o estado fundamental for invariante apenas por um subgrupo próprio H de G , dizemos que a teoria possui quebra espontânea de simetria [45, 93]. A simetria não se perde por completo, contudo, pois os geradores de G que não são geradores de H transformam um estado fundamental em outro.

Um exemplo simples mas clássico de um sistema apresentando quebra espontânea de simetria é o de um modelo de Heisenberg de spins com interação ferromagnética, em três dimensões espaciais (veja, por exemplo, [106]). Nesse modelo, a cada ponto i de uma rede no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^3$ se associa um vetor $\mathbf{S}_i$ de módulo constante (igual a 1 digamos), representando um spin em princípio livre para girar nas três dimensões espaciais. A Hamiltoniana do sistema é dada, na ausência de campo magnético externo, por

$$H = -J \sum_{\{i,j\}} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad (3.1)$$

onde $J > 0$ é uma constante de acoplamento, e a interação é tomada só entre primeiros vizinhos. Essa Hamiltoniana possui uma simetria global $SO(3)$, manifesta na forma de (3.1), correspondente a girar todos os spins da mesma forma. Contudo, pode ser visto qualitativamente que esse sistema apresenta uma transição de fase [2, 106]. Com efeito,

estados de equilíbrio são aqueles que minimizam a energia livre $F = \langle H \rangle - TS$, onde $\langle, \rangle$ é a média mecânico-estatística usual, T é a temperatura, suposta uniforme em todo material, e S é a entropia. Para baixas temperaturas, podemos desprezar o termo TS , e portanto a minimização de F ocorre basicamente minimizando-se $\langle H \rangle$. É evidente de (3.1) que isto é obtido se todos os spins se alinham na mesma direção. Para temperaturas altas, contudo, o termo TS domina, e F é minimizada essencialmente maximizando-se a entropia, o que ocorre se as direções dos spins são totalmente randômicas. Assim, para temperaturas acima de um certo valor crítico T_c , a chamada temperatura de Curie, a simetria é de fato $SO(3)$. Porém, para uma temperatura $T < T_c$, a simetria é quebrada pelo aparecimento de uma magnetização espontânea $\mathbf{M}$. Esta é devida à tendência, favorecida pela minimização da energia livre do sistema, dos spins de se alinharem ao longo de uma direção definida. O vetor $\mathbf{M}$ funciona portanto como um *parâmetro de ordem* nessa transição, sendo zero para $T \geq T_c$ e diferente de zero para $T < T_c$. Um estado fundamental é uma configuração que corresponde a um mínimo absoluto da energia livre do sistema. Pode haver várias dessas configurações com a mesma energia, isto é, o estado fundamental pode ser degenerado. Esse é o caso do ferromagneto: para cada estado fundamental os spins estarão todos alinhados ao longo de uma direção definida. Essa configuração só é invariante por rotações em torno de um eixo definido por essa direção, e portanto o grupo de invariância do estado fundamental é $SO(2)$. As possíveis direções de magnetização correspondem aos diversos estados fundamentais, e podemos facilmente nos convencer de que o conjunto desses estados fundamentais está em bijeção com uma esfera S^2 . Podemos passar de um estado fundamental a outro via uma rotação.

Os aspectos físicos da quebra de uma simetria global são diferentes dos de uma simetria local. Suponhamos que um dado sistema físico descrito por uma teoria de campos possui um grupo de simetria *global* que é um grupo de Lie G , espontaneamente quebrado para um subgrupo H . O bem conhecido teorema de Goldstone [45, 93] nos diz que a quebra de tal simetria dá origem a graus de liberdade sem massa chamados bósons de Goldstone. Especificamente, cada gerador “quebrado”, isto é, gerador de G que não é um gerador de H , corresponde a um campo bosônico de massa nula. No exemplo do ferromagneto descrito acima, esses bósons são as chamadas *ondas de spin* [106].

Quando a simetria quebrada é uma simetria local, contudo, esses bósons sem massa poderão combinar-se com os campos de gauge de massa nula para formar um campo de gauge *massivo*. Isto pode ser feito através do famoso *mecanismo de Higgs*. Esse mecanismo é crucial no modelo de Glashow-Weinberg-Salam da teoria unificada das interações fraca e eletromagnética, onde o grupo de gauge $SU(2) \times U(1)$ é espontaneamente quebrado para o subgrupo $U(1)$ do eletromagnetismo, dando origem aos bósons massivos W e Z que mediam a interação fraca [43]. Outro exemplo importante é o do supercondutor comum: na transição da fase normal para a supercondutora, a simetria local de gauge $U(1)$ original é espontaneamente quebrada por um condensado de pares de Cooper [106]. Isso dá origem a uma massa M_A para o fóton no meio supercondutor, como demonstrado pelo efeito Meissner: campos magnéticos são expulsos da região supercondutora, tendo um comprimento de penetração característico dado em unidades apropriadas pelo inverso de M_A .

Além das características discutidas acima, teorias de campo com quebra espontânea

de simetria podem apresentar os chamados *defeitos topológicos*, *excitações topológicas*, ou simplesmente *defeitos* (veja Refs. [105, 107, 108]). Fisicamente, estes são graus de liberdade coletivos carregando “cargas” ou números quânticos que se conservam por razões topológicas, e não devido a uma simetria da ação. Matematicamente, correspondem a uma classe de soluções das equações de campo no setor de baixas energias, que são estáveis devido à conservação de suas cargas topológicas. Defeitos podem se manifestar como estruturas em forma de partícula, de filamento ou planar (sólitons), ou ser interpretados como processos de tunelamento quânticos (instantons). O exemplo arquetípico de defeitos em teoria de campos são os vórtices de Abrikosov-Nielsen-Olesen [109] em supercondutores do tipo II. Nesse sistema, a simetria de gauge $U(1)$ é espontaneamente quebrada pelo condensado de pares de Cooper. Como vimos acima, devido ao efeito Meissner, não pode haver campo magnético no interior do supercondutor. Os vórtices correspondem a tubos finos onde a fase supercondutora é quebrada (ou seja, o material dentro desses tubos é normal). Podemos ter então fluxos de campo magnético através desses tubos, e a carga topológica de cada vórtice é precisamente o valor do fluxo que o atravessa. É possível mostrar que tais fluxos só podem ter valores discretos.

Para estudar defeitos topológicos dentro de uma dada teoria de campos do ponto de vista teórico, existe um programa razoavelmente canônico. Inicialmente, se utilizam argumentos topológicos, freqüentemente considerações de homotopia, para avaliar se um dado modelo apresenta cargas topológicas. Depois, tenta-se provar a existência dessas soluções por métodos de análise funcional ou por construção explícita. Pode-se então tentar obter o espaço dessas soluções, ou ao menos sua dimensão, em função da carga topológica correspondente. De um modo geral, o espaço de todas as soluções correspondendo a defeitos será desconexo, havendo uma componente conexa para cada valor da carga topológica [4, 105, 108].

As propriedades físicas dos defeitos topológicos podem ser avaliadas de duas formas distintas. Numa delas, podemos nos concentrar no próprio espaço de soluções correspondentes a defeitos. Podemos quantizar esse espaço, no espírito da Seção 2.1, e a teoria quântica correspondente seria uma teoria quântica dos próprios defeitos. Outra forma é considerar uma dada solução de defeito como um *background* clássico fixo, e considerar as interações com partículas ou outras excitações do modelo, estas últimas sendo quantizadas. Isto equivale a investigar a física daquele modelo no *background* do defeito, o que por sua vez fornece uma descrição semiclássica da teoria no setor topológico correspondente.

Como essas considerações sobre defeitos topológicos podem se aplicar a géons? Para responder a essa pergunta, temos que retomar a “superteoria” hipotética mencionada na Introdução, na qual a própria topologia espacial é vista como um grau de liberdade, podendo portanto variar. Para fixar idéias, pensemos numa variedade espacial bidimensional Σ , que podemos imaginar como um plano com um certo número de “alças”. O grau de liberdade topológico na teoria é simplesmente o gênero (número de “alças”) de Σ . Cada alça pode ser vista como um géon. Mas então, o gênero pode ser visto como uma carga topológica, e podemos ver as alças como “defeitos” ou “sólitons” na própria topologia. Uma teoria quântica desses “defeitos” teria que permitir que o gênero sofresse flutuações quânticas. Além da topologia, a teoria pode ter graus de liberdade locais, como uma métrica e outros campos definidos sobre Σ . A nossa abordagem, no espírito do parágrafo

anterior, será sempre considerar que o gênero tem um valor n fixo e considerarmos a dinâmica dos demais campos no *background* correspondente. Isso nos dará informações sobre essa “superteoria” no setor topológico rotulado pela carga n . É nesse sentido que nos referiremos mais adiante ao “espaço de configurações de n géons”, “espaço de Hilbert de n géons”, etc.

3.1 Lagrangeana e Espaço de Configurações

Tendo tratado dos aspectos gerais, vamos nos concentrar agora na teoria específica que usaremos nesta dissertação. Seguimos uma abordagem inspirada pelo trabalho do grupo de F. Bais em Amsterdã, detalhado na Ref. [100]. Nesse trabalho, aquele grupo investiga as propriedades de soluções de vórtices de uma teoria de gauge em um espaço tempo de Minkowski de $(2+1)d$, onde a simetria de gauge descrita por um grupo de Lie G é espontaneamente quebrada a um subgrupo finito H , devido a um valor não-nulo de um campo de Higgs Φ .

O sistema que consideramos aqui é uma teoria de Yang-Mills-Higgs com um grupo de gauge G , em princípio não abeliano (os resultados valem para o caso abeliano, com as devidas adaptações). Por simplicidade, e para fixar idéias, assumimos que $G = SU(N)$ para algum N ¹. Embora os resultados não dependam qualitativamente dessa escolha, isso torna a discussão matematicamente mais conveniente. Consideramos que o espaço-tempo é tridimensional, da forma $M = \Sigma \times \mathbb{R}$ e dotado de uma métrica estática com elemento de linha que se escreve, em coordenadas adaptadas, na forma

$$ds^2 = dt^2 - g_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.2)$$

onde t é uma coordenada temporal e os g_{ij} 's compõem uma métrica de assinatura $+2$ arbitrária mas fixa em Σ . Os campos fundamentais da teoria são potenciais de gauge A_μ^a , onde $\mu = 0, 1, 2$ são índices espaço-temporais e $a = 1, 2, \dots, \dim G$ é um índice interno (da álgebra de Lie de G) e um campo de Higgs Φ transformando-se na representação fundamental de G [5, 43, 44], isto é, o campo de Higgs será tomado como uma aplicação lisa $\Phi : M \rightarrow \mathbb{C}^N$, e para $x \in M$, $\Phi(x)$ pode ser portanto visto como um vetor coluna com entradas $\Phi^I(x) \in \mathbb{C}$, com $I = 1, 2, \dots, N$. Denotamos os geradores da álgebra de Lie de G por T_a , que podemos ver como matrizes, e às vezes juntaremos os potenciais de gauge na forma de matrizes $N \times N$ $A_\mu \equiv A_\mu^a T_a$. Definimos o tensor intensidade de campo na forma usual [2, 5, 93]

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

onde $[\cdot, \cdot]$ é o comutador usual de matrizes. A Lagrangeana da teoria é [100] dada por

$$\mathcal{L}_{YMH} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (D_\mu \Phi)^\dagger \cdot (D^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad (3.3)$$

onde $D_\mu := \partial_\mu + A_\mu$ denota a derivada covariante determinada pela conexão correspondente ao campo de gauge A_μ , e assumiremos doravante, a menos de menção em contrário,

¹Tomaremos o fibrado principal subjacente como sendo trivial.

que um somatório nos índices internos repetidos está subentendido ². $V(\Phi)$ é um potencial G -invariante que dá origem a um conjunto $\mathcal{V}$ de configurações do campo de Higgs que minimiza esse potencial,

$$\mathcal{V} = \{\Phi \text{ tal que } V(\Phi) = 0\}.$$

Note-se que V pode ser visto como uma função em $\mathbb{C}^N$ com valores em $\mathbb{R}$. Isto significa, se $\mathcal{V}$ é não vazio, que existe um subconjunto $\mathcal{V}_0 \subset \mathbb{C}^N$ tal que $(z_1, \dots, z_N) \in \mathcal{V}_0$ se, e somente se, $V(z_1, \dots, z_N) = 0$. Chamamos $\mathcal{V}_0$ de *espaço dos vácuos* [105]. É fácil ver que $\Phi \in \mathcal{V}$ se, e somente se, a imagem de Φ está contida em $\mathcal{V}_0$, isto é, Φ puder ser visto como uma aplicação $M \rightarrow \mathcal{V}_0$.

Note-se ainda que G age em $\mathcal{V}_0$, isto é, a ação de G em $\mathbb{C}^N$ preserva esse subconjunto: uma vez que V é por hipótese G -invariante, $V(g\vec{z}) = V(\vec{z})$, $\forall g \in G, \vec{z} \in \mathbb{C}^N$. Se fixamos $\vec{z}_0 \in \mathcal{V}_0$, o subgrupo

$$H_{\vec{z}_0} = \{h \in G \mid h\vec{z}_0 = \vec{z}_0\}$$

de G é chamado às vezes de subgrupo *pequeno, estabilizador, ou de estabilidade, associado a $\vec{z}_0$* [43]. Sejam $\vec{z}_0, \vec{z}'_0 \in \mathcal{V}_0$ tais que existe $g \in G$ “ligando” os dois, isto é, $\vec{z}'_0 = g\vec{z}_0$. Dado $h \in H_{\vec{z}_0}$, temos $g^{-1}hg\vec{z}'_0 = g^{-1}h\vec{z}_0 = g^{-1}\vec{z}_0 \equiv \vec{z}'_0$. Então, obtemos uma aplicação

$$\begin{aligned} H_{\vec{z}_0} &\rightarrow H_{\vec{z}'_0} \\ h &\mapsto g^{-1}hg, \end{aligned} \tag{3.4}$$

que facilmente se mostra ser um isomorfismo $H_{\vec{z}_0} \simeq H_{\vec{z}'_0}$. Um caso particularmente importante que consideramos mais adiante é quando a ação de G em $\mathcal{V}_0$ é *transitiva*, isto é, dados dois desses vácuos (elementos de $\mathcal{V}_0$), sempre existe $g \in G$ conectando os dois. Isto quer dizer que o grupo de estabilidade de cada ponto de $\mathcal{V}_0$ é o mesmo, que denotamos simplesmente por H , e que podemos estabelecer uma bijeção $\mathcal{V}_0 \simeq G/H$, onde G/H denota o espaço dos cosets à esquerda (para uma definição deste conceito, ver, por exemplo, [43, 44]). Para obter esta bijeção, basta fixar um $\vec{z}_0 \in \mathcal{V}_0$ qualquer, e a aplicação

$$\begin{aligned} G/H &\rightarrow \mathcal{V}_0 \\ [g] &\mapsto g\vec{z}_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

é a bijeção procurada.

Por conveniência, assumimos aqui, sem perda de generalidade, que $V(\Phi)$ é positivo definido ($V(\Phi) \geq 0$), sendo zero apenas se $\Phi \in \mathcal{V}$. Doravante também assumiremos que a ação de G em $\mathcal{V}_0$ é transitiva e tomaremos, a menos de menção em contrário, $\mathcal{V}_0 \equiv G/H$.

Para o que segue, faremos uma fixação do gauge: escolhemos o chamado “gauge temporal” $A_0 = 0$ (para uma prova de que esta é de fato uma fixação do gauge, ver a seção 4.4, capítulo 4, de [9]). A seguir, computamos a expressão da energia total do sistema nesse gauge, usando a ação (3.3). Para isso, definimos os momentos conjugados

²Na definição da Lagrangeana, deixamos também subentendido um fator global $\sqrt{-g}$, que omitimos por este não ser relevante para a discussão que segue.

aos campos de Higgs e de gauge [93]:

$$\begin{aligned}(\pi_A^a)^i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_i^a)}; \\ (\pi_\Phi)_I &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \Phi^I)}; \\ (\pi_{\Phi^\dagger})_I &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\Phi}^I)},\end{aligned}\tag{3.6}$$

onde a barra superior denota conjugação complexa. Definimos então a energia total E [93, 105] por

$$E := \int_{\Sigma} d^2x [(\pi_A^a)^i \partial_0 A_i^a + (\pi_\Phi)_I \partial_0 \Phi^I + (\pi_{\Phi^\dagger})_I \partial_0 \bar{\Phi}^I - \mathcal{L}].\tag{3.7}$$

Depois de um cálculo simples (omitido aqui), obtemos, para a densidade de energia (integrando de E), que denotamos por ϵ , a expressão

$$\epsilon = -\frac{1}{2} F^{a10} F_{10}^a + \frac{1}{4} F^{aij} F_{ij}^a + (\partial_0 \Phi)^\dagger \cdot (\partial_0 \Phi) + g^{ij} (D_i \Phi)^\dagger \cdot (D_j \Phi) + V(\Phi).\tag{3.8}$$

Ao contrário do que possa parecer à primeira vista, cada um dos termos de (3.8) é positivo definido. Para o terceiro e o último termos desta equação, isto é óbvio. A fim de mostrá-lo para os demais termos, começamos definindo o “campo elétrico”

$$E_i^a := F_{0i}^a.$$

Para cada a , isto define um vetor em Σ , e de acordo com (3.2), temos

$$F^{a10} F_{10}^a = -g^{ij} E_i^a E_j^a,$$

que é simplesmente o módulo de um vetor em Σ , levando em conta a assinatura da métrica. O mesmo argumento mostra a positividade do quarto termo. Finalmente, também temos

$$F^{aij} F_{ij}^a = g^{ik} g^{jl} F_{kl}^a F_{ij}^a \equiv (\mathbf{V}^a)_i (\mathbf{V}^a)_i^l = \text{tr}[(\mathbf{V}^a)^2],$$

onde definimos as matrizes $\mathbf{V}^a$ por $(\mathbf{V}^a)_j^i := g^{ik} F_{kj}^a$. Isto mostra de forma manifesta que o segundo termo é positivo definido.

Tendo definido a energia, *definimos* agora o espaço de fase $\mathcal{P}$ desta teoria como o espaço dos campos $(A, \Phi, \pi_A, \pi_\Phi)$ para os quais a densidade de energia ϵ tem suporte compacto. Definimos também o espaço de configuração $\mathcal{C}$ como o espaço dos campos (A, Φ) para os quais o integrando do funcional

$$E[A, \Phi] = \int_{\Sigma} \left[\frac{1}{4} F^{aij} F_{ij}^a + g^{ij} (D_i \Phi)^\dagger \cdot (D_j \Phi) + V(\Phi) \right] dx^2\tag{3.9}$$

tem suporte compacto ³.

³A exigência de suporte compacto é mais restritiva do que o estritamente necessário. Podemos apenas pedir que a energia ou o funcional (3.9) sejam finitos [105]. Porém, isto envolveria uma discussão sobre a velocidade com que os integrandos vão a zero ao se aproximar do infinito espacial. A forma como fazemos aqui é menos geral, porém mais econômica e conceitualmente suficiente para os nossos propósitos.

Vamos agora mostrar que essa teoria possui setores topológicos não-triviais.

Uma vez que todos os termos de (3.9) devem ter suporte compacto, para cada $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$, existe um subconjunto compacto $K \subset \Sigma$ tal que cada um desses termos é separadamente zero em $\Sigma \setminus K$. Isto implica que numa vizinhança do infinito espacial teremos

$$\begin{aligned} F_{ij}^a &= 0; \\ D_i \Phi &= 0; \\ V(\Phi) &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

A primeira dessas equações significa que A é plana em $\Sigma \setminus K$. A última implica que o campo de Higgs é necessariamente condensado no infinito espacial, ou mais precisamente, a restrição de Φ a $\Sigma \setminus K$ é uma aplicação com valores no conjunto dos vácuos $\mathcal{V}_0$. A segunda equação nos diz que o campo de Higgs é covariantemente constante fora de K ; é uma equação diferencial de primeira ordem, e podemos resolvê-la se temos o campo de gauge A .

Resolvamos agora a primeira e a segunda simultaneamente em $\Sigma \setminus K$. Escolhamos uma conexão A plana nessa região. Fixemos um ponto $p \in \Sigma \setminus K$, e definamos $\Phi(p) \equiv \Phi_0 \in \mathbb{C}$. Para $x \in \Sigma \setminus K$ temos que ter (veja, por exemplo, [5])

$$\Phi(x) = P \exp \left\{ \int_P^x A_i^a T_a ds^i \right\} \Phi_0, \tag{3.11}$$

onde o “ P ” indica uma integração ordenada num caminho arbitrário em entre p e x . Porém, a função (3.11) é multi-valorada, pois podemos escolher vários caminhos entre x e p . Sejam γ_1 e γ_2 dois desses caminhos. Se um deles pode ser continuamente deformado no outro sem sair de $\Sigma \setminus K$, temos que os valores de $\Phi(x)$ correspondentes coincidem, pois uma vez que a conexão é plana nessa região, a holonomia

$$P \exp \left\{ \int_{\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}} A_i^a T_a ds^i \right\} = e,$$

onde e é a identidade no grupo G . Se contudo $\gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$ não for contrátil a p em $\Sigma \setminus K$, essa igualdade não se verifica em geral. Para que Φ seja monovalorada em $\Sigma \setminus K$, temos portanto que impor que

$$P \exp \left\{ \int_{\gamma} A_i^a T_a ds^i \right\} \Phi_0 = \Phi_0, \tag{3.12}$$

para *todo* caminho fechado γ em $\Sigma \setminus K$. Em outras palavras, todas as holonomias com base em p de A nessa região tomam valores num subgrupo $H_0 \subset G$ que preserva Φ_0 . Neste caso, Φ é univocamente determinado na região $\Sigma \setminus K$ por A e pelo seu valor em P . Em outras palavras, *se fixamos p e escolhemos $\Phi_0 \in \mathcal{V}_0$, a solução nessa região é descrita univocamente pela conexão (plana) A , cujas holonomias com base em p tomam valores no subgrupo estabilizador H_0 de Φ_0 .*

Estamos agora em posição de mostrar que o espaço de configuração, e portanto também o de fase, é desconexo em geral. Vamos fixar $(A, \Phi) \in \mathcal{C}$ como a solução obtida acima. Tomemos agora um circuito γ fechado envolvendo K , começando e terminando em p .

Por conveniência, podemos escolher p e γ na “circunferência no infinito” representando o infinito espacial. A restrição de Φ a este circuito, que chamamos de Φ_γ , pode então ser vista como uma aplicação contínua $S^1 \rightarrow \mathcal{V}_0$. A imagem dessa aplicação é uma curva fechada no espaço dos vácuos $\mathcal{V}_0$ começando e terminando em $\Phi_0 \equiv \Phi(p) \in \mathcal{V}_0$. Considere um outro elemento $(A', \Phi') \in \mathcal{C}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que (A', Φ') satisfaz às eqs. (3.10) fora de K (basta escolher K grande o suficiente). Assumamos também que $\Phi'(P) = \Phi_0$, ou seja, que Φ e Φ' coincidem em P (isto *não* significa que sejam iguais em toda parte fora de K , pois A' é em princípio diferente de A em $\Sigma \setminus K$). Então, também podemos concluir que a restrição de Φ' à curva γ é uma aplicação contínua $S^1 \rightarrow \mathcal{V}_0$ cuja imagem é uma curva fechada contida em $\mathcal{V}_0$, começando e terminando em Φ_0 . Imaginemos que queremos agora traçar um caminho contínuo contido no espaço de configurações $\mathcal{C}$, ligando (A, Φ) a (A', Φ') . Isto corresponde a deformar continuamente uma configuração na outra. Em particular, cada configuração intermediária contida nesse caminho define uma curva fechada em $\mathcal{V}_0$, conforme vimos. Mas então a existência desse caminho contínuo em $\mathcal{C}$ implica em particular na possibilidade de deformar continuamente a curva em $\mathcal{V}_0$ correspondente a Φ naquela correspondente a Φ' . *Mas isso só é possível em geral se $\mathcal{V}_0$ for simplesmente conexo.* Caso contrário, ter-se-á necessariamente que permitir que a curva imagem deixasse $\mathcal{V}_0$ para alguma configuração intermediária (A_c, Φ_c) . Porém isso implicaria que o potencial $V(\Phi_c)$ teria que ser não-nulo para algum ponto de γ no infinito, e isso por sua vez faria com que a energia $E[A_c, \Phi_c]$ dessa configuração divergisse, correspondendo ao sistema ter energia infinita. Portanto $(A_c, \Phi_c) \notin \mathcal{C}$.

Concluimos então que $\mathcal{C}$ é em geral desconexo, cada componente conexa correspondendo a um setor topológico que é classificado por um elemento do grupo fundamental $\pi_1(\mathcal{V})$ ⁴. O caráter topológico das soluções é fisicamente estável: como vimos, é necessário fornecer energia infinita ao sistema para passar de um tipo topológico a outro. Outra forma de ver isto é olhando para (3.7): no infinito, temos que ter $\partial_0 A_i = \partial_0 \Phi = 0$, mostrando a estaticidade da configuração no infinito, e consequentemente a preservação do seu caráter topológico.

A existência desses setores topológicos é um sinal da existência de soluções descrevendo defeitos. De fato, a teoria apresenta em seu espectro soluções de baixas energias correspondendo a vórtices (veja [3, 4, 100, 105, 108] e referências ali citadas). Estes correspondem a mínimos absolutos da energia $E[A, \Phi]$. A idéia é que se tentamos tomar o integrando de $E[A, \Phi]$ igual a zero em toda parte, podemos encontrar obstruções topológicas, dependendo do setor em consideração. Nesses setores não-triviais, haverá regiões onde as eqs. (3.10) não são satisfeitas, e em particular o campo de Higgs não está condensado, e há um “campo magnético” não nulo (na verdade seu análogo não-abeliano) aí. É bem conhecido [100, 109] que o raio médio dessas regiões, chamadas de “caroço” (*core*) do vórtice é inversamente proporcional à massa M_H do bóson de Higgs. No limite de baixas energias podemos considerar M_H muito grande, e portanto ver os vórtices essencialmente como estruturas pontuais.

Quais são as consequências físicas da presenças desse vórtices? Note-se que qualquer

⁴Poder-se-ia perguntar se A também admite configurações topológicas não triviais neste contexto. Essa possibilidade é excluída quando o grupo de gauge é simplesmente conexo (veja a seção 1.4.1 de [100] e referências ali citadas), como é o caso de $SU(N)$.

matéria acoplada ao nosso modelo dado pela Lagrangeana (3.3) deve ser descrita por um multiplete Ψ que carrega uma representação Γ irredutível, em geral não-abeliana, do grupo G . Quando essa matéria é levada a circundar um vórtice, a função de onda Ψ sofre um “efeito Aharonov-Bohm” não-abeliano [100, 110, 112] e volta como $\Gamma(h)\Psi$, onde h é a holonomia ao redor do circuito seguido pela matéria. Este elemento $h \in H$ é chamado, em analogia com o caso abeliano, de *fluxo magnético*, ou simplesmente *fluxo* do vórtice. Também de muito interesse físico é o que ocorre quando um vórtice com fluxo h_1 circunda adiabaticamente outro vórtice de fluxo h_2 : adquirem novos fluxos $h_2 h_1 h_2^{-1}$ e $h_1 h_2 h_1^{-1}$. Essa é a chamada *metamorfose de fluxos* [111], que leva a efeitos físicos observáveis em princípio, como espalhamento de Aharonov-Bohm desses vórtices [112].

Nesta dissertação, somente consideramos o setor de mais baixa energia, onde as eqs. (3.10) são válidas em toda Σ . Isto nos permite ignorar os vórtices e estudar quais os aspectos da teoria que derivam apenas da topologia da própria variedade espacial Σ , e não de configurações topológicas específicas do campo de Higgs. Essas configurações existem mesmo que Σ tenha gênero zero, isto é, seja homeomorfo ao plano $\mathbb{R}^2$. Podemos, em vista da nossa descrição das soluções das eqs. (3.10), escolher um “ponto no infinito”, que a partir de agora denotamos por p_∞ , e um elemento $\Phi_0 \in \mathcal{V}_0$. Doravante suporemos essas escolhas fixas. Uma fixação diferente nos dará teorias quânticas unitariamente equivalentes [100]. Feita essa escolha, denotamos por H o subgrupo de estabilidade dos vácuos. A partir de agora assumimos implicitamente que H é um subgrupo finito de G .

Vamos agora introduzir uma forma mais conveniente de parametrizar as soluções da (3.10). Cada solução dessas equações é dada por uma conexão A plana cujas holonomias tomam valores em H . Esta define por sua vez (via suas holonomias) um homomorfismo

$$\tau_A : \pi_1(\Sigma) \rightarrow H, \quad (3.13)$$

entre o grupo fundamental $\pi_1(\Sigma)$ e o grupo finito H . Reciprocamente, dado um homomorfismo τ como esse, podemos definir uma solução para as eqs. (3.10): existe um teorema [97], mostrando que dado um homomorfismo como o da (3.13), é possível construir um fibrado principal P_τ sobre Σ (essencialmente único, a menos de equivalência entre fibrados) com fibra H . Este pode ser visto como um subfibrado do fibrado principal original (suposto trivial) com fibra G . É também um teorema da Ref. [97] que todo fibrado principal com fibra discreta sobre uma variedade possui uma única conexão (a menos de transformação de gauge), necessariamente plana. Chamamos a conexão assim obtida sobre P_τ de A . Agora encontramos um Φ : basta definir $\Phi(p_\infty) = \Phi_0$ e seu valor em cada $x \in \Sigma$ pode ser definido por transporte paralelo como já mostramos. O par (A, Φ) é por construção uma solução das eqs. (3.10).

A lição que tiramos dessa discussão é que as soluções das eqs. (3.10) são essencialmente parametrizadas por homomorfismos $\tau : \pi_1(\Sigma) \rightarrow H$. Então o nosso espaço de configuração, que chamaremos daqui por diante simplesmente de T , é dado por

$$T = \{\tau : \pi_1(\Sigma) \rightarrow H \mid \tau \text{ homomorfismo}\}.$$

Essa descrição vale também para o caso dos vórtices, vistos como partículas pontuais: basta considerar cada vórtice como uma “singularidade”, isto é, efetivamente retirar de Σ

os pontos correspondendo a vórtices. Curvas fechadas em torno dessas “singularidades” são não-contratíveis e suas holonomias dão o fluxo dos vórtices.

Duas observações são importantes aqui. A primeira é que na Seção 2.2 tivemos oportunidade de analisar o espaço dos homomorfismos de $\pi_1(\Sigma)$ sobre $SO(2,1)$ e vimos como esse era naturalmente o espaço de configuração da gravitação em $(2+1)d$ no formalismo de primeira ordem. Então T é como uma versão com grupo finito desse espaço, como havíamos antecipado. Ademais é possível mostrar que esse T é essencialmente o espaço dos fibrados principais sobre Σ (módulo equivalência) tendo como fibra o grupo finito H [97]. Esse espaço é precisamente o “espaço de fase” de uma teoria de Chern-Simons com grupo finito definida por Witten e Dijkgraaf em [103] e posteriormente estudada em mais detalhes por Quinn e Freed [104]. Esse é um dos exemplos mais simples de uma *teoria topológica de campos* [95, 96, 113]: note-se que não há graus de liberdade locais, apenas graus de liberdade topológicos, a saber a topologia dos H -fibrados principais sobre Σ .

Capítulo 4

A Álgebra Quântica para Géons

Tendo descrito em detalhes como se constrói um espaço de configuração T simplificado para géons, estamos agora quase prontos para passar à quantização dessa teoria. A idéia básica que utilizaremos para tanto será a seguinte. Podemos dotar T da medida de contagem. Veremos que o grupo finito de simetria de gauge residual H e o assim chamado grupo das classes de isotopia, atuam sobre T , de modo a preservar essa medida. Podemos então construir a MVP de Mackey sobre T , e esta, com respeito à ação dos grupos acima, formará um sistema de imprimitividade. Vamos em seguida, a partir desse sistema de imprimitividade, construir uma álgebra, que chamamos *álgebra dos campos*, e que dará uma descrição matemática do sistema de géons. *Definimos então uma quantização desse sistema como uma representação unitária e irredutível da álgebra dos campos sobre algum espaço de Hilbert.* As várias representações possíveis corresponderão aos vários setores de géons, cada uma sendo descrita por dois tipos de números quânticos generalizados, que chamaremos de *fluxo* e *carga* dos géons. Esta forma de ver a quantização é o análogo de interpretar, em mecânica quântica relativística, as várias representações do grupo de Poincaré como os vários possíveis tipos de partícula, cada representação sendo classificada pelos números quânticos massa e spin [42].

4.1 Obtendo a Álgebra dos Campos

Antes de considerar o caso dos géons diretamente, vamos ilustrar o procedimento esboçado acima para o caso mais simples de vórtices pontuais numa variedade espacial Σ homeomorfa a um plano, conforme discutido no Capítulo anterior. Para simplificar, tomemos o exemplo de um único vórtice pontual no plano. Podemos pensar nesse vórtice como uma “singularidade” no plano, e existe uma curva fechada não-contratível γ circundando essa singularidade. A holonomia correspondente $\tau(\gamma)$ dá o fluxo carregado pelo vórtice. Se estamos só interessados em informações topológicas, é irrelevante a posição do vórtice, e basta que consideremos seu fluxo, caracterizado pelo elemento $h \in H$. Em outras palavras, o “espaço de configuração” T para o vórtice é composto pelos elementos de H . Outro modo de ver isto é que $\pi_1(\Sigma)$, nesse caso, é o grupo fundamental de um plano menos um ponto, que possui um único gerador. A holonomia associada a esse gerador define univocamente um homomorfismo $\pi_1(\Sigma) \rightarrow H$ portanto $\text{Hom}(\pi_1(\Sigma) \rightarrow H) \simeq H$ é

o espaço de configuração . A partir de agora, a medida de contagem estará implícita a menos de menção em contrário. Portanto, podemos tomar o espaço de Hilbert como o espaço $\mathcal{F}(H)$ das funções em H a valores complexos. Denotamos por $P_h \in \mathcal{F}(H)$ a função característica com suporte em $h \in H$. Então é fácil ver que

$$P_h P_{h'} = \delta_{hh'} P_h, \quad (4.1)$$

e portanto $P_h^2 = P_h$. Usando a medida de contagem, podemos definir um produto interno em $\mathcal{F}(H)$ da forma usual, e para o mesmo deduzimos que

$$\langle P_{h'}, P_h \rangle = \delta_{hh'}, \quad (4.2)$$

e portanto o conjunto $\{P_h\}_{h \in H}$ forma uma base ortonormal de $\mathcal{F}(H)$.

Como vimos no Capítulo 2, podemos definir projetores $\hat{P}_h$ através dessas funções, e juntos esses projetores definem uma MVP de Mackey sobre $T \simeq H$.

Consideremos os “operadores do tipo momento” desse sistema. Estes são introduzidos através da ação de algum grupo sobre o espaço de configuração, obedecendo à equação (2.36). Note-se que uma holonomia não é em geral um invariante de gauge. Transformações de gauge agem por conjugação dessas holonomias. Portanto, H age conjugando todas as holonomias baseadas no ponto de referência p_∞ no infinito por um elemento de H , e um dado fluxo σ transforma-se sob H na forma

$$\sigma \mapsto h\sigma h^{-1}. \quad (4.3)$$

Em outras palavras, temos uma ação de H nas holonomias por conjugação dos fluxos. Essa ação corresponde à simetria de gauge “não quebrada” do sistema no seu limite de baixas energias. Nos referiremos a esta ação de H simplesmente como as H -transformações. Os elementos $h \in H$ podem ser vistos como operadores, que designamos por $\hat{\delta}_h$, agindo em funções $f \in \mathcal{F}(H)$ da maneira óbvia:

$$(\hat{\delta}_h f)(x) = f(h^{-1}xh). \quad (4.4)$$

Nesse caso, temos a sequência

$$\begin{aligned} (\hat{\delta}_h \hat{P}_\sigma \hat{\delta}_{h^{-1}} f)(x) &= (\hat{P}_\sigma \hat{\delta}_{h^{-1}} f)(h^{-1}xh) = \delta_{\sigma, h^{-1}xh}(h^{-1}f)(\sigma) \\ &= \delta_{h\sigma h^{-1}, x}(f)(h\sigma h^{-1}) \equiv (\hat{P}_{h\sigma h^{-1}} f)(x), \end{aligned} \quad (4.5)$$

para qualquer $f \in \mathcal{F}(H)$. Em outras palavras,

$$\hat{\delta}_h \hat{P}_\sigma \hat{\delta}_{h^{-1}} = \hat{P}_{h\sigma h^{-1}}. \quad (4.6)$$

Isto é, com a ação de H , a MVP definida por $\hat{P}$ forma um sistema de imprimitividade no sentido de Mackey; portanto, as H -transformações e essa MVP podem ser interpretadas como fornecendo “operadores do tipo momento” e “operadores do tipo posição”, respectivamente.

Agora faremos uma transição importante. Até aqui, defimos os operadores correspondentes às H -transformações e os projetores $\{\hat{P}_h\}_{h \in H}$ como operadores independentes. O

que faremos agora é reuni-los numa álgebra de operadores, cujas representações nos darão os setores físicos da teoria [100, 101]. Para fazê-lo, começamos percebendo que os projetores formam uma base de um espaço vetorial que não é outro senão o próprio $\mathcal{F}(H)$. Sob multiplicação usual ponto a ponto de funções, esta é uma álgebra abeliana de dimensão finita com unidade (dada pela função constante 1), que chamamos simplesmente de *álgebra de operadores do tipo posição*. Portanto, o espaço das funções complexas sobre H possui um papel dual nessa teoria. Primeiro, pode ser visto passivamente como um espaço de Hilbert das “funções de onda” onde a álgebra de campos está representada. Esta é o que chamamos a *representação definidora* da álgebra. Nessa situação, escrevemos a base ortonormal dada pelas funções características como $\{|h\rangle\}_{h \in H}$, e podemos reescrever (4.2) nessa notação como

$$\langle h | h' \rangle = \delta_{hh'}. \quad (4.7)$$

Podemos também reinterpretar a eq. (4.4) neste caso, para cada $g \in H$, na forma

$$\hat{\delta}_g |h\rangle \equiv |ghg^{-1}\rangle, \quad (4.8)$$

o que implica em particular que $\hat{\delta}_{g_1}\hat{\delta}_{g_2} = \hat{\delta}_{g_1g_2}$. Em segundo lugar, além do papel de espaço de Hilbert carregando a representação definidora, podemos ver $\mathcal{F}(H)$ como parte da própria álgebra de operadores do tipo posição.

Agora, se consideramos o conjunto dos operadores correspondentes a H -transformações, o que temos é uma álgebra que, como espaço vetorial, é gerada pelos $\hat{\delta}_h$'s, e cujo produto é o mesmo que aquele dado pela multiplicação do grupo. A álgebra com unidade assim construída é a chamada *álgebra de grupo* de H , que denotamos por $\mathbb{C}(H)$ (veja, por exemplo, [42]). Existe uma generalização da noção de álgebra de grupo para o caso de grupos localmente compactos quaisquer [114]. Porém, uma vez que só a utilizaremos no presente contexto de um grupo finito, a forma simplificada com que introduzimos o conceito será suficiente para nossos fins. A álgebra de grupo $\mathbb{C}(H)$ age sobre a álgebra $\mathcal{F}(H)$ como automorfismos desta última, isto é, a cada operador $\hat{\delta}_g$ com $g \in H$, corresponde uma aplicação $\mathcal{F}(H) \rightarrow \mathcal{F}(H)$ definida por (4.4), e que preserva o produto em $\mathcal{F}(H)$:

$$[\hat{\delta}_g(f_1f_2)](x) = (f_1f_2)(gxg^{-1}) = f_1(gxg^{-1})f_2(gxg^{-1}) = [(\hat{\delta}_gf_1)(\hat{\delta}_gf_2)](x),$$

$\forall f_1, f_2 \in \mathcal{F}(H)$. Podemos então definir uma nova álgebra, chamada *produto semidireto* das álgebras $\mathbb{C}(H)$ e $\mathcal{F}(H)$. Como espaço vetorial, essa álgebra é $\mathbb{C}(H) \otimes \mathcal{F}(H)$; adotaremos uma base denotada por $(\hat{\delta}_g, \hat{P}_x)$ e produto dado por

$$(\hat{\delta}_{g_1}, \hat{P}_{x_1}) \cdot (\hat{\delta}_{g_2}, \hat{P}_{x_2}) := (\hat{\delta}_{g_1g_2}, \hat{P}_{x_1}\hat{P}_{g_2x_2g_2^{-1}}), \quad (4.9)$$

o qual pode ser verificado diretamente na representação definidora, atuando com os projetores e as H transformações simultaneamente, justapondo os respectivos operadores. Esse produto semidireto é denotado por $D(H) = \mathbb{C}(H) \ltimes \mathcal{F}(H)$, que é um exemplo de uma álgebra conhecida na literatura como *Drinfeld (quantum) double* (veja, por exemplo, [100, 101, 115] e referências ali citadas). Este tem a estrutura algébrica de uma *álgebra de Hopf quase triangular* [102, 115].

Antes de explicar em breves termos o significado desta última afirmação, vamos reavaliar o significado físico dessa construção um tanto abstrata que fizemos até aqui.

Primeiro, temos a base na “representação das coordenadas”, $\{|h\rangle\}_{h \in H}$. Como é usual em mecânica quântica, dada uma função de onda ψ , a grandeza $|\langle h | \psi \rangle|^2$ nos dá a probabilidade de uma medida do fluxo nos dar o valor h . Isto quer dizer que a teoria aqui construída é de fato uma teoria “primeiro quantizada” de vórtices, cuja descrição é feita através de seu fluxo. Um estado quântico corresponde em princípio a superposições de vários valores de fluxo do vórtice. Os projetores $\{\hat{P}_h\}_{h \in H}$ são observáveis que nos dão o resultado de experimentos do tipo “sim-não”: uma medição de $\hat{P}_h$ corresponde à pergunta “A medição do fluxo do vórtice resultará no valor h ?”. A resposta será “sim” se o autovalor medido for um e “não” se for zero.

Mais sutis são os operadores $\{\hat{\delta}_g\}_{g \in H}$. Estes não são observáveis do sistema, mas sim operadores unitários implementando uma simetria residual (de gauge), a de H . Nesse sentido, são análogos *grosso modo* a operadores de rotação e translação na mecânica quântica de uma partícula livre, por exemplo. É claro, porém, que neste último caso as simetrias são contínuas, e portanto o teorema de Stone [82, 83] garante a existência de operadores auto-adjuntos que são os geradores infinitesimais de translação e rotação (operadores de momento linear e angular, respectivamente), enquanto esses observáveis subjacentes estão ausentes para a simetria discreta que temos aqui. Uma melhor analogia é com o operador de carga elétrica Q em QED em $(3+1)d$, definido [93] por

$$Q := \int_{\mathbf{R}^3} \nabla \cdot \mathbf{E} \, d^3x,$$

onde $\mathbf{E}$ é o operador correspondente ao vetor campo elétrico. Este operador de carga é um observável na QED, e é o gerador infinitesimal da simetria $U(1)$ da teoria. Como observável, está relacionado com medidas do campo elétrico no infinito espacial, e via a definição de Q acima, da carga. O espaço de Hilbert da teoria se divide em setores superseleccionados classificados por essas cargas, que assumem valores discretos. Em nosso caso, algo semelhante ocorre. A representação definidora da álgebra $D(H)$ em $\mathcal{F}(H)$, que é nosso espaço de Hilbert original, é redutível. Isso pode ser visto facilmente notando que, fixando um $h_0 \in H$ qualquer, o espaço vetorial gerado pelo conjunto de vetores $\{|gh_0g^{-1}\rangle\}_{g \in H}$ é um subespaço invariante do espaço de Hilbert original. Veremos mais adiante, ao estudar a teoria de representação de uma certa classe de álgebras incluindo $D(H)$, que este subespaço dá uma representação irredutível. Portanto nosso espaço de Hilbert $\mathcal{F}(H)$ original se divide em setores superseleccionados classificados pelas classes de conjugação de H (veja [100, 101, 112] e referências ali citadas). Cada setor possui um espaço de Hilbert $\mathcal{H}^A$ associado à classe A e gerado pela base $\{|h\rangle\}_{h \in A}$.

Não se deve concluir daí, contudo, que um dado vórtice deveria ser caracterizado pela classe de conjugação do seu fluxo, ao invés do fluxo em si [112]. Se temos dois fluxos h_1 e h_2 distintos, gh_1g^{-1} e gh_2g^{-1} também são, $\forall g \in H$. O que acontece aqui é que há uma ambiguidade na determinação do valor de cada fluxo, pois o fluxo, assim como cor para quarks [93], não é uma grandeza invariante de gauge. Mas uma vez fixada essa ambiguidade escolhendo “valores padrão” para os diversos fluxos, podemos medi-los sem dificuldade através de experimentos de espalhamento de cargas não-abelianas (representações do grupo H) pelo vórtice: embora não haja interações locais, há interações topológicas do tipo Aharonov-Bohm (veja [100, 111, 112] para uma análise mais detalhada

Figura 4.1: A figura mostra as curvas fechadas γ_i ($1 \leq i \leq 3$). As classes de homotopia $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$ geram o grupo fundamental do plano com uma única alça (géon). A classe $[\gamma_3]$ não é independente de $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$.

desse tipo de experimento envolvendo vórtices).

Voltemos à discussão matemática sobre a estrutura da álgebra $D(H)$.

A estrutura de Hopf de $D(H)$ [115] implica em particular a existência de um *co-produto*, isto é, uma aplicação

$$\Delta : D(H) \longrightarrow D(H) \otimes D(H) ,$$

que é um homomorfismo de álgebras. Como vimos, os fluxos são vistos como partículas primeiro quantizadas em $(2+1)d$, e as representações irredutíveis de $D(H)$ correspondem aos diferentes setores de partícula da teoria. A existência de um coproduto permite estudar processos de fusão dessas partículas [100, 102], e descrever os setores de muitos vórtices. A quase-triangularidade implica a existência da chamada *matriz* R , $R \in D(H) \otimes D(H)$, que é um operador responsável por permutações de partículas, e portanto tem um papel no espalhamento carga-vórtice ou vórtice-vórtice [112]. Não entraremos em maiores detalhes sobre esses processos aqui, pois saem do nosso escopo. Para maiores detalhes, ver [100].

Para determinar a álgebra descrevendo géons topológicos, seguimos um método similar ao usado para o caso dos vórtices, respeitando contudo cuidadosamente as diferenças dos dois sistemas. Inicialmente, temos que obter os operadores do tipo posição para géons. A variedade espacial Σ na presença de géons é um plano com uma ou mais alças, e como enfatizamos no Capítulo 3, vamos assumir por simplicidade que não há vórtices presentes. Começamos considerando um único géon, ou seja, vamos assumir por agora que Σ é um plano com uma única alça. Em todas as figuras, representamos um géon como um “buraco quadrado” no plano, cujos lados opostos devem ser mentalmente identificados, para obter a alça correspondente. Podemos ver facilmente que $\pi_1(\Sigma)$ possui dois geradores, que escolhemos como $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$, mostrados na Fig. 4.1. Não é difícil se convencer que

$$[\gamma_3] = [\gamma_1][\gamma_2][\gamma_1]^{-1}[\gamma_2]^{-1}.$$

Na verdade, $\pi_1(\Sigma)$ é livremente gerado por $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$, ou seja, não há relação entre os geradores $[\gamma_1]$ e $[\gamma_2]$. Seja $g = W([\gamma_1], [\gamma_2]) \in \pi_1(\Sigma)$ uma palavra formada por $[\gamma_1]$, $[\gamma_2]$ e suas inversas. Então, qualquer homomorfismo $\tau : \pi_1(\Sigma) \rightarrow H$ leva g na palavra $W(a, b) \in H$, onde $a = \tau(\gamma_1)$ e $b = \tau(\gamma_2)$. Portanto, o homomorfismo τ é completamente caracterizado pelos fluxos $\tau(\gamma_1) = a$ e $\tau(\gamma_2) = b$. Uma vez que não há relação entre a e b , o conjunto T de todos esses homomorfismos é simplesmente parametrizado por $H \times H$. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2 *Seja H um grupo finito e Σ o plano com um único géon, ou em outras palavras uma variedade bidimensional homeomorfa a*

$$M = \mathbf{R}^2 \# \mathbf{T}^2.$$

Sejam γ_1 e γ_2 curvas fechadas representantes das classes gerando $\pi_1(\Sigma)$ conforme a convenção da Fig. 4.1. Definimos uma configuração clássica $\tau_{(a,b)} \in T$ de um géon como o homomorfismo dado por

$$\tau_{(a,b)}(\gamma_1) = a, \tau_{(a,b)}(\gamma_2) = b. \quad (4.10)$$

Esta definição meramente formaliza nossa discussão anterior sobre o espaço de configuração para o caso de um único géon. É importante ter em mente que $T \cong H \times H$ e portanto é um conjunto finito. Por simplicidade de notação, uma configuração de um único géon será denotada simplesmente por um par (a, b) de fluxos. Note-se que não estamos explicitamente identificando aquelas configurações que diferem por uma H -transformação. Isto é assim devido ao fato de que as funções de onda não precisam ser funções “invariantes”, mas apenas “covariantes” sob as simetrias do problema. Apenas quantidades observáveis como seu módulo quadrado ou fases de Aharonov-Bohm, precisam ser invariantes. Em nossa abordagem, a invariância destas quantidades ocorre naturalmente.

Sendo $T \cong H \times H$ o espaço de configuração para um único géon, a álgebra de operadores do tipo posição, em completa analogia com o caso dos vórtices, é simplesmente o espaço $\mathcal{F}(T)$ das funções em T a valores complexos, dotado do produto ponto a ponto de funções. Assim como no caso dos vórtices, esse espaço também tem o papel de espaço de Hilbert carregando a chamada representação definidora da álgebra dos campos, a ser definida no que segue. Para evitar confusões, nos referiremos a esse espaço vetorial simplesmente como V daqui por diante. A álgebra $\mathcal{F}(T)$ é gerada pelas funções características $Q_{(a,b)}$. Novamente como no caso dos vórtices, se olhamos essas funções como base do espaço vetorial V , as denotamos por $|a, b\rangle$, $a, b \in H$, e temos também associadas a elas projetores em V obedecendo à relação

$$\hat{Q}_{(a,b)} |c, d\rangle = \delta_{a,c} \delta_{b,d} |c, d\rangle. \quad (4.11)$$

De (4.11) obtém-se

$$\hat{Q}_{(a,b)} \hat{Q}_{(c,d)} = \delta_{a,c} \delta_{b,d} \hat{Q}_{(c,d)}. \quad (4.12)$$

Além dos projetores $\hat{Q}_{(a,b)}$, temos também os operadores implementando H -transformações. Neste contexto de géons, contudo, veremos que há ainda outra simetria da teoria que precisa ser levada em consideração explicitamente na álgebra. Essa simetria

corresponde à ação do grupo dos difeomorfismos $Diff^\infty(\Sigma)$ de Σ que são triviais no infinito.

Começemos analisando as H -transformações.

Assim como com vórtices, a ação de H em T é por conjugação de ambos os fluxos (a, b) , e novamente corresponde à simetria de gauge residual da teoria, ou equivalentemente, à liberdade de redefinir globalmente os fluxos. Teremos portanto operadores induzidos $\hat{\delta}_g$ para cada $g \in H$, agindo na representação definidora V :

$$\hat{\delta}_g |a, b\rangle = |gag^{-1}, gbg^{-1}\rangle. \quad (4.13)$$

De (4.13) se vê que a multiplicação de operadores $\hat{\delta}_g$ é

$$\hat{\delta}_g \hat{\delta}_h = \hat{\delta}_{gh}. \quad (4.14)$$

A álgebra gerada pelos $\hat{\delta}_g$ é portanto novamente a álgebra de grupo $\mathbb{C}(H)$. A relação entre $\mathcal{F}(H \times H)$ e $\mathbb{C}(H)$ pode ser deduzida de (4.11) e (4.13). Vemos facilmente que

$$\hat{\delta}_g \hat{Q}_{(a,b)} \hat{\delta}_g^{-1} = \hat{Q}_{(gag^{-1}, gbg^{-1})}. \quad (4.15)$$

Em outras palavras a álgebra $\mathbb{C}(H)$ age em $\mathcal{F}(H \times H)$ por automorfismos (compare com (4.6)), e com respeito à ação do grupo H , $\hat{Q}$ define uma MVP de $T \cong H \times H$ sobre V que é um sistema de imprimitividade.

Além de H -transformações, fluxos (a, b) podem sofrer alterações devido à ação do grupo dos difeomorfismos triviais no infinito, $Diff^\infty(\Sigma)$. A idéia é que esses difeomorfismos atuam nos geradores de $\pi_1(\Sigma)$ alterando os fluxos captados por estes. Tais difeomorfismos devem corresponder a uma simetria da teoria, uma vez que alterações nos geradores de $\pi_1(\Sigma)$ não devem afetar grandezas físicas observáveis. Os elementos do subgrupo $Diff_0^\infty(\Sigma)$, que é a componente conexa à identidade do grupo completo dos difeomorfismos, agem trivialmente em $\pi_1(\Sigma)$. De fato, lembramos que o ponto base p_∞ utilizado para auferir as holonomias está no infinito, e portanto não é afetado por $Diff^\infty(\Sigma)$. Os elementos do subgrupo $Diff_0^\infty(\Sigma)$ por sua vez correspondem a *isotopias*, isto é, deformações contínuas de curvas dentro de Σ , que não alteram a classe de homotopia das mesmas. Em outras palavras, classes de homotopia, e conseqüentemente os fluxos, são preservados por essas operações. Portanto, na verdade, o grupo que de fato tem uma ação não-trivial é o chamado *grupo das classes de isotopia*¹, que abreviaremos no resto dessa dissertação por GCI, e denotaremos por M_Σ [49, 70, 71], definido por

$$M_\Sigma = \frac{Diff^\infty(\Sigma)}{Diff_0^\infty(\Sigma)}. \quad (4.16)$$

Na presente situação, onde Σ é $\mathbb{R}^2$ com um único géon, o GCI é isomorfo a uma extensão central do grupo $SL(2, \mathbb{Z})$, denotada por $St(2, \mathbb{Z})$, e chamada grupo de Steinberg. Este por sua vez é o mesmo CGI de um toro menos um ponto (veja [30] para uma discussão

¹Esta é uma tradução livre para o português do *mapping class group*, cuja tradução literal não tem significado claro em nosso idioma.

Figura 4.2: Torções de Dehn correspondendo a difeomorfismos do GCI. As faixas contêm curvas fechadas, omitidas na figura. Rotações são todas tomadas no sentido anti-horário por convenção.

detalhada desse grupo e uma prova de que ele de fato é o GCI nesse caso). Denotaremos os geradores de $M_\Sigma = St(2, \mathbf{Z})$ por A e B . Estes correspondem [70, 71] a classes de isotopias de difeomorfismos ² chamados *torções de Dehn* (*Dehn twists*). Uma torção de Dehn pode ser entendida da seguinte forma. Tome-se uma curva fechada em Σ . Em seguida, considere-se uma *vizinhanças tubular*, ou seja, uma faixa em Σ contendo esta curva. Introduza-se nessa faixa, uma “coordenada radial” $r \in [0, 1]$, de forma que $r = 0$ e $r = 1$ correspondam às duas curvas que são as fronteiras da faixa, respectivamente (veja a Fig. 4.2). Para se produzir uma torção de Dehn, rotacionam-se os pontos da faixa de tal forma que o ângulo de rotação $\theta(r)$ é zero para $r = 0$ e aumenta gradualmente, chegando a 2π em $r = 1$. A Fig. 4.2 mostra como realizar torções de Dehn, e na Fig. 4.3, mostra-se como a torção de Dehn B , que é um dos geradores do GCI, deforma a curva fechada γ_1 . Note-se nessa figura como a classe de homotopia da curva é alterada, de modo que já não podemos deformá-la continuamente à forma original. Também crucial para nós é a torção de Dehn ao longo de uma curva que envolve o géon, que será interpretada como uma rotação 2π do géon [26, 28, 30], como vimos no Capítulo 1. Esta torção de Dehn será fundamental para discutir a noção de spin de um géon topológico. A faixa correspondente a essa rotação é denotada por $C_{2\pi}$ na Fig. 4.2. Notamos porém que $C_{2\pi}$ não é independente de A e B . Pode-se mostrar que [30]

$$C_{2\pi} = (AB^{-1}A)^4. \quad (4.17)$$

O grupo M_Σ é gerado por A e B , e mais as relações de que $C_{2\pi}$ comuta com A e B . É bastante útil pensarmos nos elementos de M_Σ algebricamente como palavras $W(A, B)$ formadas por A , B seus respectivos elementos inversos.

²Nesta dissertação, freqüentemente, e com certo abuso de linguagem, usamos um representante da classe de isotopia como a própria classe.

Figura 4.3: A torção de Dehn B e sua ação em γ_1 .

A importância dessa discussão é que A e B agem em $[\gamma_i] \in \pi_1(\Sigma)$, induzindo portanto uma ação em $(a, b) \in T$, e conseqüentemente operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ na representação definidora V . Consideremos por exemplo a ação de B em γ_1 , conforme representada na Fig. 4.3. Vemos que $[\gamma_1] \rightarrow [\gamma_1][\gamma_2]$, e portanto $a \rightarrow ab$. Por outro lado, B mantém $[\gamma_2]$ invariante. Pode-se facilmente checar que A e B induzem os seguintes operadores em V :

$$\begin{aligned}\hat{A} | a, b \rangle &= | a, ba \rangle, \\ \hat{B} | a, b \rangle &= | ab, b \rangle.\end{aligned}\quad (4.18)$$

Para uma palavra arbitrária $W(A, B)$, o operador correspondente é $W(\hat{A}, \hat{B})$, isto é, a mesma palavra de A e B com estes substituídos por $\hat{A}$ and $\hat{B}$ ³. Por exemplo, $C_{2\pi}$ na Fig. 4.2 se escreve como $(AB^{-1}A)^4$ e o operador correspondente $\hat{C}_{2\pi}$ pode ser imediatamente computado:

$$\hat{C}_{2\pi} | a, b \rangle = | c^{-1}ac, c^{-1}bc \rangle, \quad (4.19)$$

onde usamos a definição $c = aba^{-1}b^{-1}$.

Ao longo dessa tese nos referimos à quantidade $c = aba^{-1}b^{-1}$ como o *fluxo global* de um géon. É o fluxo capturado pela curva fechada γ_3 . Quando tivermos n géons, com fluxos globais $c_1, \dots, c_n$ respectivamente⁴, chamaremos a grandeza $c_1 \dots c_n$ de *fluxo total* do sistema. É óbvio que para $n = 1$, as noções de fluxo global e fluxo total coincidem.

É também possível realizar rotações do géon por múltiplos inteiros do ângulo $\frac{\pi}{2}$ usando $C_{\frac{\pi}{2}} = AB^{-1}A$. O operador correspondente é

$$\hat{C}_{\frac{\pi}{2}} | a, b \rangle = | b^{-1}, bab^{-1} \rangle. \quad (4.20)$$

³Note-se que estamos usando acento circunflexo para distinguir uma operação de grupo dos correspondentes operadores em V .

⁴Por convenção, para efeito de medição de fluxos, sempre tomamos os géons como estando alinhados e numerados da esquerda para a direita.

Pode-se perguntar por que estamos interessados em difeomorfos para os géons, uma vez que não os incluímos no caso dos vórtices. Para entender isto, considere um plano $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_n\}$, isto é, o plano menos n pontos. Esta variedade representa geometricamente um conjunto de n vórtices. Considere o grupo das classes de isotopia dessa variedade. Primeiro se $n = 1$, temos que esse grupo é trivial, pois torções de Dehn nesse caso não alteram classes de homotopia de curvas. Se $n \geq 2$, contudo, o GCI é isomorfo ao grupo das tranças de classe n (braid group) $\mathcal{B}_n$ [71, 102, 115]. Porém, no caso dos vórtices, há uma extraordinária coincidência, pois a álgebra pertinente $D(H)$ é, como vimos, uma álgebra de Hopf. Acontece que produtos tensoriais de ordem n de representações dessa álgebra são automaticamente representações de $\mathcal{B}_n$ [102, 115, 116], e portanto não é necessário incluir o GCI no caso de n vórtices. Em outras palavras, se os vórtices individuais se transformam respectivamente nas representações $V_1, \dots, V_n$, o produto tensorial $V_1 \otimes \dots \otimes V_n$ carrega uma representação de $\mathcal{B}_n$. Já no caso dos géons, como veremos, a álgebra correspondente infelizmente não é de Hopf, e a inclusão do GCI deve ser feita *ad hoc*. Este é não trivial, mesmo no caso de um único géon, como mostra nossa discussão.

O grupo $\mathcal{M}$ agindo em V que é gerado por $\hat{A}$ e $\hat{B}$ definidos por (4.18) é de fato aquele que é relevante para nós. Ao contrário do GCI, $\mathcal{M}$ é um grupo finito. Ocorre que um número infinito de palavras $W(\hat{A}, \hat{B})$ do GCI agem como o operador identidade em V , devido ao fato de T ser finito. $\mathcal{M}$ pode ser naturalmente identificado com M_Σ dividido por um certo subgrupo normal.

De fato, seja M_0 o subgrupo de $St(2, \mathbb{Z})$ definido por

$$M_0 = \left\{ d \in St(2, \mathbb{Z}) \mid \hat{d} \mid a, b \rangle = \mid a, b \rangle, \forall a, b \in H \right\}.$$

É fácil ver que M_0 é um subgrupo normal. Com efeito, dada qualquer palavra $W \in St(2, \mathbb{Z})$, tal que

$$W(\hat{A}, \hat{B}) \mid a, b \rangle = \mid a', b' \rangle,$$

temos a relação

$$\begin{aligned} W^{-1}(\hat{A}, \hat{B}) \hat{d} W(\hat{A}, \hat{B}) \mid a, b \rangle &= W^{-1}(\hat{A}, \hat{B}) \hat{d} \mid a', b' \rangle = W^{-1}(\hat{A}, \hat{B}) \mid a', b' \rangle = \\ &= \mid a, b \rangle. \end{aligned}$$

Em vista dessas considerações, definimos o GCI efetivo $\mathcal{M}$ agindo na representação definidora V como o quociente

$$\mathcal{M} = St(2, \mathbb{Z}) / M_0.$$

Mostramos agora que $\mathcal{M}$ é de fato finito. Seja n o número de elementos de H e a_i , $i = 1 \dots n$ esses elementos. Construimos uma base para V da seguinte forma:

$$\mathcal{B} = \{ \mid a_i, a_j \rangle, \quad i, j = 1 \dots n \}.$$

Ora, o grupo $\mathcal{M}$ age então como subgrupo do grupo das permutações de $\mathcal{B}$, e portanto a ordem de $\mathcal{M}$ é no máximo igual a $n^2!$.

A álgebra gerada pelos operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ é novamente a álgebra de grupo $\mathbb{C}(\mathcal{M})$. Juntamente com $\mathbb{C}(H)$ e $\mathcal{F}(H \times H)$, esta nos fornece a álgebra total dos campos para um único géon, que denotamos por $\mathcal{A}^{(1)}$. Diretamente das definições (4.11), (4.13) e (4.18) vemos que

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_g \hat{A} &= \hat{A} \hat{\delta}_g, & \hat{\delta}_g \hat{B} &= \hat{B} \hat{\delta}_g, \\ \hat{\delta}_g \hat{Q}_{(a,b)} \hat{\delta}_g^{-1} &= \hat{Q}_{(gag^{-1}, gbg^{-1})}, \\ \hat{C}_{2\pi} \hat{A} &= \hat{A} \hat{C}_{2\pi}, & \hat{C}_{2\pi} \hat{B} &= \hat{B} \hat{C}_{2\pi}, \\ \hat{A} \hat{Q}_{(a,b)} \hat{A}^{-1} &= \hat{Q}_{(a,ba)}, & \hat{B} \hat{Q}_{(a,b)} \hat{B}^{-1} &= \hat{Q}_{(ab,b)}.\end{aligned}\quad (4.21)$$

Portanto, ambas as álgebras $\mathbb{C}(H)$ e $\mathbb{C}(\mathcal{M})$ agem em $\mathcal{F}(H \times H)$ como automorfismos desta última. A ação de uma palavra genérica $W(\hat{A}, \hat{B})$ no projetor $\hat{Q}_{(a,b)}$ será denotada por

$$W(\hat{A}, \hat{B}) \hat{Q}_{(a,b)} W^{-1}(\hat{A}, \hat{B}) = \hat{Q}_{(w^{(a)}, w^{(b)})}. \quad (4.22)$$

onde $(w^{(a)}, w^{(b)})$ é um par de palavras em a e b seus inversos, representando a ação de $W(A, B)$ em (a, b) . Portanto, a MVP $\hat{Q}$ é também um sistema de imprimitividade com respeito à ação de $\mathcal{M}$.

Existem duas formas equivalentes de apresentar $\mathcal{A}^{(1)}$. Uma é usando a representação definidora, como fizemos em (4.11), (4.13) e (4.18). Outra forma é definir $\mathcal{A}^{(1)}$ como a álgebra gerada por todos os $\hat{Q}_{(a,b)}$, $\hat{\delta}_g$, $\hat{A}$ e $\hat{B}$ com as relações (4.21). Em todo caso, temos

$$\mathcal{A}^{(1)} = \mathbb{C}(H \times \mathcal{M}) \ltimes \mathcal{F}(H \times H). \quad (4.23)$$

Introduzimos agora a álgebra dos campos para *dois* géons, seguindo a mesma idéia que utilizamos para um único géon topológico. Lembramos que no caso de um único géon, $\mathcal{A}^{(1)}$ consiste de sub-álgebras, a saber a de operadores do tipo posição $\mathcal{F}(T)$, as H -transformações $\mathbb{C}(H)$, e as “translações em T ” dadas por uma realização $\mathcal{M}$ do GCI M_Σ . A álgebra $\mathcal{A}^{(2)}$ para dois géons consistirá das mesmas três partes distintas, mas agora com $T = H \times H \times H \times H \equiv H^4$, e Σ sendo $\mathbb{R}^2$ com duas alças.

Começamos examinando o grupo fundamental

$$\pi_1(\Sigma) = \pi_1(\mathbf{R}^2 \# \mathbf{T}^2 \# \mathbf{T}^2).$$

Sejam γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ as curvas fechadas na Fig. 4.4. Pode-se mostrar [2] que $\pi_1(\Sigma)$ é o grupo livre gerado pelas $[\gamma_i]$. Uma “configuração” τ para dois géons é dada por um homomorfismo $\tau : \pi_1(\Sigma) \rightarrow H$. Portanto τ é completamente caracterizado pelas holonomias $\tau(\gamma_i) \in H$ ao longo das curvas γ_i . Uma vez que não se têm relações entre os $[\gamma_i]$ ’s, as holonomias $\tau(\gamma_1), \tau(\gamma_2), \tau(\gamma_3)$ e $\tau(\gamma_4)$ são quatro elementos arbitrários de H . Em outras palavras, o conjunto $T^{(2)}$ de configurações τ pode ser identificado com $T^{(1)} \times T^{(1)} = (H \times H) \times (H \times H)$, onde $T^{(1)}$ é o espaço de configuração de um único géon. A álgebra correspondente $\mathcal{F}(H^4)$ é então o produto direto das álgebras de operadores do tipo posição de géons individuais, ou seja

$$\mathcal{F}(H^4) \cong \mathcal{F}(H \times H) \otimes \mathcal{F}(H \times H).$$

Figura 4.4: As classes de homotopia $[\gamma_i]$ ($1 \leq i \leq 4$) relativas às curvas fechadas mostradas na figura geram o grupo fundamental do plano com dois géons.

É natural trabalhar com a representação definidora em $V \otimes V$, gerado pelos vetores da forma

$$|a_1, b_1\rangle \otimes |a_2, b_2\rangle,$$

onde os subscritos denotam os géons. Os operadores do tipo posição são gerados por projetores $\hat{Q}_{(a_1, b_1)} \otimes \hat{Q}_{(a_2, b_2)}$ agindo em $V \otimes V$ da maneira usual, ou seja,

$$\hat{Q}_{(a_1, b_1)} \otimes \hat{Q}_{(a_2, b_2)} |a'_1, b'_1\rangle \otimes |a'_2, b'_2\rangle = \delta_{a_1, a'_1} \delta_{b_1, b'_1} \delta_{a_2, a'_2} \delta_{b_2, b'_2} |a_1, b_1\rangle \otimes |a_2, b_2\rangle. \quad (4.24)$$

Desta forma, esses operadores pertencem a $\mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(1)}$.

A ação das H -transformações $g \in H$ nos fluxos (a_1, b_1, a_2, b_2) ocorre por uma conjugação global de todos eles, o que induz a ação

$$|a_1, b_1\rangle \otimes |a_2, b_2\rangle \rightarrow |ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}\rangle \otimes |ga_2g^{-1}, gb_2g^{-1}\rangle \quad (4.25)$$

em $V \otimes V$. O operador associado é obviamente identificado com $\hat{\delta}_g \otimes \hat{\delta}_g \in \mathbb{C}(H) \otimes \mathbb{C}(H)$, uma vez que

$$\hat{\delta}_g \otimes \hat{\delta}_g |a_1, b_1\rangle \otimes |a_2, b_2\rangle = |ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}\rangle \otimes |ga_2g^{-1}, gb_2g^{-1}\rangle. \quad (4.26)$$

Portanto, operadores correspondendo a H -transformações também pertencem a $\mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(1)}$.

Consideremos agora a ação do GCI M_Σ nesse contexto. Ocorre que para dois ou mais géons, M_Σ é muito mais complicado do que para um único géon [70, 71]. Nesse caso, o GCI é gerado por torções de Dehn “internas” do tipo de A e B (veja Fig. 4.2) para cada géon individual, mais difeomorfismos envolvendo pares de géons.

Sejam A_i, B_i , $i = 1, 2$ geradores de “difeomorfismos internos” para cada géon individual. Os operadores associados agindo em $V \otimes V$ são claramente dados por

$$\hat{A}_1 = \hat{A} \otimes \mathbb{I}, \quad \hat{A}_2 = \mathbb{I} \otimes \hat{A}$$

Figura 4.5: A permutação de géons.

$$\hat{B}_1 = \hat{B} \otimes \mathbb{I}, \quad \hat{B}_2 = \mathbb{I} \otimes \hat{B} \quad (4.27)$$

onde $\mathbb{I}$ é o operador identidade em V .

Existem dois tipos adicionais de transformações além dos difeomorfismos internos. A primeira, chamada permutação (*exchange*), que às vezes chamamos simplesmente de *troca*, é análoga ao processo correspondente para partículas. A segunda é a chamada translação de alças (*handle slide*), e não possui um análogo para partículas, uma vez que faz uso da estrutura interna do géon.

Até este ponto, todos os operadores que consideramos na álgebra $\mathcal{A}^{(2)}$ eram na forma $x \otimes y \in \mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(1)}$. Ocorre porém que este não é o caso da permutação e do transporte de alças. Estes mais ou menos correspondem a interações entre géons e não podem ser escritos em termos de operadores em $\mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(1)}$. Para descrever interações entre géons, precisamos definir um par dos assim chamados automorfismos de “*flip*” de $V \otimes V$. Estes são necessários à construção dos operadores de permutação e translação de alças.

Definição 3 Dado um estado de dois géons

$$|a_1, b_1\rangle \otimes |a_2, b_2\rangle \in V \otimes V,$$

os automorfismos de *flip* σ e γ são definidos por:

$$\begin{aligned} \sigma |a_1, b_1\rangle \otimes |a_2, b_2\rangle &:= |a_2, b_2\rangle \otimes |a_1, b_1\rangle, \\ \gamma |a_1, b_1\rangle \otimes |a_2, b_2\rangle &:= |a_1, b_2\rangle \otimes |a_2, b_1\rangle. \end{aligned}$$

Estes automorfismos não são dados geometricamente como operações do GCI, mas a menos que se introduzam esses operadores, não se podem relacionar a álgebra de dois com as álgebras dos géons individuais. Mostraremos que a álgebra $\mathcal{A}^{(2)}$ pode ser obtida do produto tensorial $\mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(1)}$ quando acrescentamos σ e γ .

No processo de permutação, dois géons trocam suas posições. Na nossa convenção, o géon da direita (esquerda) move-se no sentido anti-horário para a posição da esquerda (direita) (ver Fig. 4.1). O efeito na permutação de géons nos estados é da forma

$$\mathcal{R} |a_1, b_1\rangle \otimes |a_2, b_2\rangle = |c_1^{-1}a_2c_1, c_1^{-1}b_2c_1\rangle \otimes |a_1, b_1\rangle, \quad (4.28)$$

Figura 4.6: A translação de alças é interpretada geometricamente como uma monodromia completa de duas “pernas” de alças distintas seguida por uma rotação de 2π de cada “perna”. A figura mostra representações equivalentes da translação de alças: Em (a), o géon é visto como uma caixa retangular no plano. Em (b), identificamos dois lados opostos do retângulo correspondendo ao géon, de forma que agora o mesmo fica representado por dois círculos no plano, cada um correspondendo a uma “perna”.

onde $c_1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$. Este operador é equivalente aos operadores de *braiding* para partículas e também satisfazem a equação de Yang-Baxter [102, 115],

$$(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I}) = (\mathbb{I} \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes \mathbb{I})(\mathbb{I} \otimes \mathcal{R}). \quad (4.29)$$

É possível checar usando as definições que o operador de permutação (4.28) pode ser escrito como o produto

$$\mathcal{R} = \sigma R \quad (4.30)$$

onde $R \in \mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(1)}$ é o análogo da chamada *matriz R universal para uma álgebra de Hopf quase-triangular* [102, 115]⁵. Em nosso caso, R é dada por

$$R = \sum_{a,b} \hat{Q}_{(a,b)} \otimes \hat{\delta}_{aba^{-1}b^{-1}}^{-1}. \quad (4.31)$$

A translação de alça é mostrada na Fig. 4.6. Em (a), o géon é visto como uma caixa retangular no plano. Em (b), identificamos dois dos lados do retângulo e nessa figura o géon está portanto sendo representado por dois círculos no plano conectados por linhas tracejadas. A translação de alças é então definida como a operação que realiza uma troca no sentido anti-horário do segundo e do terceiro círculos, seguida por uma rotação de 2π no sentido horário de cada um destes círculos. Como esperado, esta torção de Dehn age nos geradores $[\gamma_i]$ de $\pi_1(\Sigma)$ dados na Fig. 4.4, e por consequência nas holonomias. Sob a transformação indicada na Fig. 4.6, as curvas fechadas $[\gamma_i]$ serão mapeadas em novas curvas $[\tilde{\gamma}_i]$. Como exemplo, mostramos como a translação de alças age em γ_1 . A

⁵Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Hopf. A matriz R universal corresponde de forma concreta (isto é, em termos de representações de álgebras de Hopf) essencialmente à permutação duas a duas de partículas idênticas, cada uma carregando uma representação H de $\mathcal{A}$. Matematicamente, a matriz R universal é um elemento de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, que obedece à equação de Yang-Baxter (4.29). Uma álgebra de Hopf dotada de uma matriz R associada é chamada quase-triangular.

Figura 4.7: A figura (a) mostra a curva fechada γ_1 definida na figura Fig. 3.4. A curva transformada $\tilde{\gamma}_1$ está indicada em (b). As figuras (c) e (d) representam dois passos na deformação de $\tilde{\gamma}_1$.

curva γ_1 está mostrada na Fig. 4.7 (a). Após a ação do difeomorfismo, γ_1 é mapeada em $\tilde{\gamma}_1$, indicada na Fig. 4.7 (b). Precisamos expressar $\tilde{\gamma}_1$ em termos dos geradores $[\gamma_1]$. É fácil ver que $\tilde{\gamma}_1$ pode ser deformada em $\gamma_1 \alpha \gamma_4$, onde α é a curva fechada envolvendo o segundo géon. A sequência de deformações está indicada na Fig. 4.7 (b), (c) e (d). Uma vez que α mede o fluxo total $a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1}$, é fácil ver que $\tilde{\gamma}_1$ medirá o fluxo $a_1 (a_2 b_2 a_2^{-1})$. Pode-se repetir o mesmo procedimento para as outras curvas e mostrar que a ação nessas curvas induz uma ação em $V \otimes V$ dada pelo seguinte operador de translação de alças, que denotamos por $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} |a_1, b_1\rangle \otimes |a_2, b_2\rangle &= \\ &= |a_1 (a_2 b_2 a_2^{-1}), (a_2 b_2 a_2^{-1})^{-1} b_1 (a_2 b_2 a_2^{-1})\rangle \otimes |(a_2 b_2 a_2^{-1})^{-1} b_1 (a_2 b_2 a_2^{-1}) a_2, b_2\rangle. \end{aligned}$$

Esta é uma ação bastante complicada, mas existe uma maneira de escrever $\mathcal{S}$ como um produto de elementos de $\mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(1)}$ com os automorfismos de *flip*, da mesma forma que o operador $\mathcal{R}$. O resultado é ⁶

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \gamma \left(\mathbb{I} \otimes \sum_{g,h} Q_{(g,h)} \hat{\delta}_g \right) (\mathbb{I} \otimes B) \gamma \cdot \\ &\cdot (\mathbb{I} \otimes C_{\frac{\pi}{2}}) \gamma \left(\mathbb{I} \otimes \sum_{g,h} Q_{(h,g)} \hat{\delta}_{g^{-1}} \right) \gamma \cdot \\ &\cdot \gamma (\mathbb{I} \otimes C_{\frac{\pi}{2}}) \gamma (B^{-1} \otimes \mathbb{I}) \gamma (\mathbb{I} \otimes C_{-\pi}). \end{aligned} \quad (4.32)$$

⁶Este resultado foi obtido pelo professor Eliezer Batista.

Isto completa a descrição de $\mathcal{A}^{(2)}$. A álgebra para dois géons é gerada pelos elementos de $\mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(1)}$, por $\mathcal{R}$ e por $\mathcal{S}$.

Estas construções são facilmente generalizáveis e podemos escrever a álgebra $\mathcal{A}^{(n)}$ para n géons. Está claro que

$$\underbrace{\mathcal{A}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^{(1)}}_n \subset \mathcal{A}^{(n)}.$$

A álgebra completa $\mathcal{A}^{(n)}$ pode ser obtida agora juntando os operadores $\mathcal{R}_{ij}$ e $\mathcal{S}_{ij}$ de permutação e translação de alças entre o i -ésimo e o j -ésimo géon. Estes podem ser facilmente construídos usando operadores análogos aos de (4.30) e (4.32), agindo na i -ésima e na j -ésima entrada de $V \otimes \dots \otimes V$.

Os elementos A_i , B_i , $\mathcal{R}_{ij}$ e $\mathcal{S}_{ij}$ de $\mathcal{A}^{(n)}$ geram um grupo $\mathcal{M}_n$ que é homomorfo ao GCI M_Σ do plano com n géons [70]. Além das relações do próprio M_Σ , contudo, teremos relações extras que tornam $\mathcal{M}_n$ efetivamente finito.

4.2 Quantizando a Álgebra dos Campos

Como vimos, a álgebra $\mathcal{A}^{(1)}$ descreve os graus de liberdade topológicos de um único géon no plano. O que entendemos aqui por quantizar este sistema, é, no espírito do Capítulo 2, obter as representações irredutíveis $\mathcal{A}^{(1)}$; cada uma dessas representações corresponde a um setor físico da teoria. Em outras palavras, se definimos $\mathcal{A}^{(1)}$ como agindo num certo espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, esse espaço se repartirá em representações irredutíveis:

$$\mathcal{H} = \oplus_r \mathcal{H}_r, \quad (4.33)$$

onde $\mathcal{H}_r$ denota uma particular representação irredutível descrevendo um certo tipo de géon. Uma vez que a álgebra é de dimensão finita, haverá um número finito de representações irredutíveis de $\mathcal{A}^{(1)}$. Além disso, os espaços de Hilbert $\mathcal{H}$ são todos de dimensão finita (pode-se mostrar isto de forma análoga ao caso de *grupos* finitos. Ver [42, 117]). No caso dos quantum doubles, as representações irredutíveis são plenamente classificadas [101, 118]. Para o caso dos géons, a álgebra é ligeiramente mais complicada devido à existência de estrutura interna. Contudo, ocorre que essa álgebra pertence a uma classe conhecida como *álgebras de grupos de transformação*, estudadas por Glimm [80], o qual classificou todas as suas representações irredutíveis (veja também [81]) e na qual se incluem tanto a álgebra $\mathcal{A}^{(1)}$ aqui definida para géons quanto os quantum doubles. Vamos considerar abaixo apenas a definição das álgebras de grupos de transformação para o caso de grupos e conjuntos finitos, que é nosso caso de interesse nessa tese. Mostramos no Apêndice B a definição geral destas álgebras, bem como o teorema que classifica as representações irredutíveis dessas álgebras.

Definição 4 *Seja X um conjunto finito e seja G um grupo finito agindo à esquerda em X . Em outras palavras, há uma aplicação $\alpha_g : X \rightarrow X$ para cada $g \in G$. Como antes, denotamos por $\mathcal{F}(X)$ a álgebra de funções a valores complexos em X e por $\mathbb{C}(G)$ a álgebra de grupo de G . Definimos a álgebra do grupo de transformação G de X , e a denotamos*

por $\mathcal{A}$, como o espaço vetorial

$$\mathcal{A} := \mathcal{F}(X) \otimes \mathbb{C}(G);$$

e dados elementos de uma base (Q_x, g) , onde $Q_x \in \mathcal{F}(X)$ e $g \in \mathbb{C}(G)$ ⁷, temos o produto definido por

$$(Q_x, g) \cdot (Q_y, h) := (Q_x Q_{\alpha_g(y)}, gh). \quad (4.34)$$

Aqui, Q_x denota a função característica com suporte em $x \in X$.

Passamos agora a construir representações irredutíveis (RI). Consideremos algumas construções preliminares.

Seja x_0 um elemento de X . Denotamos por $K_{x_0} \subset G$ o subgrupo de estabilidade com respeito a x_0 , ou seja,

$$K_{x_0} = \{g \in G \mid \alpha_g(x_0) = x_0\}. \quad (4.35)$$

O subgrupo de estabilidade K_{x_0} divide o grupo G em classes de equivalência de *cosets* à esquerda: dados $g_1, g_2 \in G$, dizemos que $g_1 \sim g_2$ se, e somente se $g_1 = g_2 h$, onde $h \in K_{x_0}$. É fácil ver que isto é de fato uma relação de equivalência. É claro que uma vez que G é ele próprio finito, existe um número finito dessas classes. Seja agora N o número dessas classes de equivalência e vamos fixar arbitrariamente um representante $\xi_i \in G$, $i = 1 \dots N$ para cada classe com a convenção de que $\xi_1 = e$. Escrevemos então a seguinte partição de G em cosets à esquerda:

$$G = \xi_1 K_{x_0} \cup \xi_2 K_{x_0} \cup \dots \cup \xi_N K_{x_0}. \quad (4.36)$$

Recordamos que $\mathcal{F}(X)$ possui um papel dual: é uma álgebra, mas ao mesmo tempo pode ser visto como um espaço vetorial sobre o qual age o grupo G , na forma $gQ_x := Q_{\alpha_g(x)}$. Esta ação pode, é claro, ser estendida para uma ação de $\mathbb{C}(G)$ por linearidade. $\mathcal{F}(X)$ também age sobre si próprio por produto ponto a ponto. No que segue, denotamos como fizemos para vórtices e para a representação definidora da álgebra dos campos para géons, os elementos Q_x por $|x\rangle$ quando quisermos considerá-los como vetores em $\mathcal{F}(X)$ visto apenas como espaço vetorial, sobre o qual agem $\mathbb{C}(G)$ e o próprio $\mathcal{F}(X)$ como álgebra. Podemos dar a esse espaço um produto interno que de fato o torna um espaço de Hilbert, dado por

$$\langle x \mid x' \rangle = \delta_{x, x'}.$$

Denotaremos doravante esse espaço de Hilbert por $\mathcal{H}_0$.

Finalmente, enunciamos o teorema de classificação das RI's de álgebras do grupo de transformação G de X para o caso de G e X finitos.

Teorema 1 (Teorema de Classificação) *Seja $|j\rangle_\rho$, $j = 1, \dots, n$ uma base ortonormal de um espaço de Hilbert V_ρ carregando uma RI ρ de K_{x_0} . Então, dado um $x_0 \in X$ fixo, elementos $\xi_i \in G$, $i = 1, \dots, N$ como acima, os vetores*

$$\xi_i |x_0\rangle \otimes |j\rangle_\rho := |\alpha_{\xi_i}(x_0)\rangle \otimes |j\rangle_\rho,$$

⁷Por simplicidade notacional, de agora em diante usaremos g , e não $\hat{g}$, para nos referirmos abstratamente aos elementos de uma álgebra de grupo, quando não houver possibilidade de confusão, e manteremos esta última forma apenas para as H -transformações.

formam uma base de uma RI da álgebra $\mathcal{A}$ no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_{x_0, \rho} := \mathcal{H}_0 \otimes V_\rho$ dada por

$$(Q_x, g) | \alpha_{\xi_i}(x_0) \rangle \otimes | j \rangle_\rho := \delta_{x, \alpha_{\xi_{i'}}(x_0)} | \alpha_{\xi_{i'}}(x_0) \rangle \otimes \Gamma^{(\rho)}(\beta)_{kj} | k \rangle_\rho,$$

onde $\xi_{i'}$ e $\beta \in K_{x_0}$ são univocamente determinados pela equação

$$g\xi_i = \xi_{i'}\beta,$$

e $\Gamma^{(\rho)}$ é a matriz na base $\{|j\rangle_\rho\}$ de ρ . Ademais, toda RI de $\mathcal{A}$ é equivalente à representação acima, para alguma escolha de $x_0 \in X$ e V_ρ RI de K_{x_0} (é óbvio que todas as possíveis escolhas dos ξ 's dão todas a mesma RI).

Demonstração: Ver o Apêndice B e as Refs. [80, 81]. Definimos equivalência de representações de uma álgebra no Apêndice B.

Este resultado é análogo a uma construção das representações do grupo de Poincaré usando a chamada teoria das representações induzidas (veja [119]).

É também fácil ver que se temos outro $x'_0 \in X$ na mesma órbita de x_0 em X sob a ação de G , isto é, se existe um $g_0 \in G$ tal que $g_0 x_0 = x'_0$, então K_{x_0} é isomorfo a $K_{x'_0}$. De fato, a aplicação

$$\begin{aligned} K_{x'_0} &\rightarrow K_{x_0} \\ h &\mapsto g_0^{-1} h g_0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

nos fornece o isomorfismo procurado. Concluimos que RI's inequivalentes de $\mathcal{A}$ só dependem da órbita de x_0 , que denotaremos aqui por $[x_0]$, e da RI ρ de K_{x_0} . Fisicamente, estas duas grandezas descrevem os números quânticos que caracterizam os diversos setores da teoria física cuja álgebra subjacente é $\mathcal{A}$.

O quantum double $D(H)$ e a álgebra $\mathcal{A}^{(1)}$ são, como observamos, casos particulares de $\mathcal{A}$. O quantum double é obtido simplesmente fazendo $X = H$, $G = H$, com a ação $\alpha_g(h) = ghg^{-1}$. Para a álgebra de um único géon, por sua vez, toma-se

$$X = H \times H$$

e para o grupo G o produto $H \times \mathcal{M}$. As ações de $g \in H$ e $W \in \mathcal{M}$ comutam, e são dadas por

$$\alpha_g(a, b) = (gag^{-1}, bgb^{-1}), \quad g \in H$$

e

$$\alpha_W(a, b) = (w^{(a)}, w^{(b)}), \quad W \in \mathcal{M},$$

onde usamos a notação de (4.22). As RI's da álgebra definidas pelas relações (4.23) podem ser portanto construídas dado um elemento $(a, b) \in H \times H$. O subgrupo de estabilidade $K_{(a,b)} \subset H \times H$ é definido nesse caso por

$$K_{(a,b)} = \{(g, W) \in H \times \mathcal{M} \mid \alpha_g \alpha_W(a, b) := (gw^{(a)}g^{-1}, gw^{(b)}g^{-1}) = (a, b)\}. \quad (4.38)$$

Então, após escolher representantes $\xi_1, \dots, \xi_N$ para os cosets, a partição de $H \times \mathcal{M}$ pode ser escrita como

$$H \times \mathcal{M} = \xi_1 K_{(a,b)} \cup \xi_2 K_{(a,b)} \cup \dots \cup \xi_N K_{(a,b)}. \quad (4.39)$$

Seja $|1\rangle, \dots, |n\rangle \in \mathbb{C}(H \times \mathcal{M})$ uma base de uma RI de $K_{(a,b)}$. De acordo com nosso teorema de classificação, os vetores

$$|\alpha_{\xi_i}(a, b)\rangle \otimes |j\rangle_\rho, \quad (4.40)$$

com $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n$, formam uma base de uma RI da álgebra $\mathcal{A}^{(1)}$.

Vamos expressar as representações de $\mathcal{A}^{(1)}$ numa notação mais compacta. A ação de $H \times \mathcal{M}$ em $X = H \times H$ divide X em órbitas. Denotamos por $[a, b]$ a órbita contendo o elemento $(a, b) \in H \times H$. Chamaremos coletivamente de ρ os números quânticos classificando as RI's de $K_{(a,b)}$. Pode-se ver de (4.40) que uma RI r é caracterizada por um par $r = ([a, b], \rho)$. Uma base de uma RI r de $\mathcal{A}^{(1)}$ será portanto escrita como vetores $|i, j\rangle_r^{(a,b)}$, $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, n$ definidos por

$$|i, j\rangle_r^{(a,b)} := \xi_i |a, b\rangle \otimes |j\rangle_\rho \quad (4.41)$$

onde $|a, b\rangle$ é um estado na representação definidora, ξ_i são como em (4.39) e $|j\rangle_\rho$ são elementos de uma base ortonormal para um espaço de Hilbert carregando uma RI ρ de $K_{(a,b)}$. Claro que o conjunto de vetores assim definidos dependem da órbita do par (a, b) que escolhamos. Portanto fixamos os fluxos individuais a e b , e doravante omitimos o sobrescrito.

A ação de $Q_{(a', b')}$ é dada por

$$Q_{(a', b')} |i, j\rangle_r = Q_{(a', b')} \xi_i |a, b\rangle \otimes |j\rangle_\rho = Q_{(a', b')} |a_i, b_i\rangle \otimes |j\rangle_\rho = \delta_{a', a_i} \delta_{b', b_i} |i, j\rangle_r. \quad (4.42)$$

Seja gW um elemento genérico de $H \times \mathcal{M}$ ⁸. A equação

$$gW \xi_i = \xi_{i'} \beta \quad (4.43)$$

define univocamente uma nova classe $\xi_{i'}$, juntamente com um elemento do grupo de estabilidade $\beta \in K_{(a,b)}$. A ação de $gW \in \mathcal{A}^{(1)}$ em $|i, j\rangle_r$ é determinada por (4.43) e pode ser escrita como

$$gW |i, j\rangle_r = \xi_{i'} |a, b\rangle \otimes \beta |j\rangle_\rho = \sum_k \Gamma^{(\rho)}(\beta)_{kj} |i', k\rangle_r \quad (4.44)$$

onde $\Gamma^{(\rho)}$ é a representação matricial de $K_{(a,b)}$ em V_ρ na base $\{|j\rangle\}$.

Como dissemos antes, cada RI $r = ([a, b], \rho)$ descreve um tipo de géon quântico distinto. Mas qual o sentido físico por trás dos números quânticos dessas RI's, obtidos abstratamente através do teorema de classificação?

Antes de dar uma resposta a essa questão, devemos fazer algumas observações que depois se mostrarão relevantes para a mesma. Voltando ao teorema de classificação, notamos que podemos considerar dois extremos. Em um extremo, podemos escolher a representação ρ como a *representação trivial* de K_{x_0} , isto é, com $V_\rho = \mathbb{C}$ e $\Gamma^{(\rho)}(\beta) = \mathbb{I}$, para todo $\beta \in K_{x_0}$. Nesse caso, os vetores $\{\xi_i | x_0\rangle\}$ formam a base para a RI de $\mathcal{A}$. Se especializamos para o caso do quantum double, reescrevemos esses vetores como

⁸Freqüentemente, no que segue, usaremos a forma justaposta gW para indicar o elemento $(g, W) \in H \times \mathcal{M}$ (ou o correspondente elemento da álgebra de grupo de $H \times \mathcal{M}$).

$\{|x_i h_0 x_i^{-1}\rangle\}$, os quais estão em correspondência biunívoca com os elementos da classe de conjugação de $h_0 \in H$. Vimos ao estudarmos vórtices que a cada uma dessas classes de conjugação, correspondia um multiplete gerado pelos vetores associados a seus elementos, e que a representação definidora de $D(H)$ se decompunha nesses multipletos. Vemos então que cada multiplete descreve um setor de um único vórtice, sob o grupo de gauge residual H ; estes são, como já tínhamos antecipado, RI's de $D(H)$. A escolha do elemento “fiducial” h_0 corresponde a definir o fluxo “magnético” correspondente.

O outro extremo a ser considerado é quando x_0 é um *ponto fixo* da ação de G , isto é, $gx_0 = x_0$, para todo $g \in G$. Nesse caso o grupo estabilizador é o próprio G , e só há uma única classe de equivalência, compreendendo todos os elementos de G . De acordo com o teorema de classificação, as RI's de $\mathcal{A}$ serão dadas essencialmente pelas RI's de G . Novamente, se especializamos para o caso dos vórtices, podemos tomar como ponto fiducial a identidade e de H , e a classe de RI's do double $D(H)$ assim obtidas corresponderão às RI's de H . Isto parece estranho à primeira vista: obtemos todo um conjunto de RI's não triviais com fluxo magnético trivial! Para esclarecer esse ponto, devemos voltar um pouco atrás e considerar nossa teoria com quebra espontânea de simetria, dada pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YMH} + \mathcal{L}_{\text{matéria}}.$$

Novamente, $\mathcal{L}_{YMH}$ é a Lagrangeana para o modelo de Higgs não-abeliano dada em (3.3), e a Lagrangeana $\mathcal{L}_{\text{matéria}}$ descreve campos de matéria adicionais minimamente acoplados aos campos de gauge. Em princípio, esses campos de matéria correspondem a multipletos que se transformam irreduzivelmente sob o grupo espontaneamente quebrado original. Sob o grupo de simetria residual H na fase de Higgs, porém, essas representações se tornam redutíveis, e se decompõem em RI's de H . Em suma, *as representações irreduzíveis de H descrevem os tipos de matéria, ou mais precisamente de “carga” não-abeliana comportados pela teoria, no setor de Higgs.* Portanto chegamos à surpreendente sugestão de que as RI's de $D(H)$ com fluxo trivial automaticamente descrevem, na teoria primeiro quantizada, os setores de partículas sem fluxo e com carga. Nesse caso, as representações intermediárias de $D(H)$ entre esses extremos corresponderiam a partículas dotadas de fluxo e “carga”, chamadas na literatura de *dyons*. Uma análise mais cuidadosa [100] confirma essa hipótese. É interessante notar que, no caso dos dyons, as “cargas” permitidas correspondem a RI's do grupo estabilizador do fluxo associado, e não de todo H [100, 112]. Isso é um reflexo de uma obstrução global à implementação de transformações de gauge [120]: só as H -transformações que comutam com o fluxo do vórtice podem ser implementadas. Um fenômeno similar ocorre para monopolos não-abelianos em $(3+1)d$, onde é conhecido como *problema de cor global* [121].

A interpretação física para os setores geônicos é inteiramente análoga. Temos os setores “puramente magnéticos”, onde ρ é a representação trivial, e o géon possui apenas fluxos; setores “puramente elétricos”, nos quais os fluxos são triviais e há apenas “carga”, e finalmente setores mistos, correspondendo à presenças de fluxo e carga. Aqui, porém estas cargas devem também corresponder a representações do GCI, além do grupo de gauge residual H , devido à topologia espacial não-trivial. Os espaços vetoriais $\mathcal{H}_r$ gerados pelos estados $|i, j\rangle_r$ são todos de dimensão finita, e também espaços de Hilbert, com o produto

escalar dado por

$$\langle i', j' | i, j \rangle_r = \delta_{ii'} \delta_{jj'}. \quad (4.45)$$

Uma vez que as álgebras $\mathcal{A}^{(1)}$ são distintas para diferentes escolhas do grupo discreto H , não é possível, no grau de generalidade em que estamos trabalhando, definir explicitamente o espectro de um géon. Primeiro, precisamos fixar um grupo específico H , e só então uma descrição mais completa pode ser empreendida. Não faremos a escolha de um H específico nesta tese. Nosso interesse aqui é conseguir uma generalidade estrutural suficiente, que permita generalizações. Como veremos no próximo Capítulo, várias consequências físicas interessantes podem ser obtidas, mesmo no formalismo genérico que tratamos aqui.

Considere agora dois géons descritos por RI's r_1 e r_2 . O espaço de Hilbert associado é simplesmente

$$\mathcal{H}^{(12)} := \mathcal{H}_{r_1} \otimes \mathcal{H}_{r_2}. \quad (4.46)$$

Como explicamos na Seção 4.1, a álgebra dos campos consiste em $\mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(1)}$ juntamente com uma matriz $\mathcal{R}$ associada à permuta dos géons, e $\mathcal{S}$, que gera a translação de alças. Os elementos de $\mathcal{A}^{(1)} \otimes \mathcal{A}^{(1)}$ agem naturalmente em (4.46). Falta apenas especificar as ações de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ nos estados de $\mathcal{H}_{r_1} \otimes \mathcal{H}_{r_2}$.

A ação de $\mathcal{R}$ é completamente determinada pela fórmula (4.30):

$$\mathcal{R} = \sigma \sum_{a,b} Q_{(a,b)} \otimes \hat{\delta}_{aba^{-1}b^{-1}}^{-1}.$$

Em outras palavras

$$\mathcal{R} | i, j \rangle_{r_1} \otimes | k, l \rangle_{r_2} = \sum_{a,b} \hat{\delta}_{aba^{-1}b^{-1}}^{-1} | k, l \rangle_{r_2} \otimes Q_{(a,b)} | i, j \rangle_{r_1}. \quad (4.47)$$

A generalização para n géons é simples, e não será trabalhada aqui.

Pode-se pensar em $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ como matrizes de espalhamento para um par de géons. A matriz $\mathcal{R}$ representa uma interação “elástica”, no sentido de que dois géons “incidentes” com números quânticos r_1 e r_2 são espalhados como dois objetos ainda carregando os mesmos números r_1 e r_2 . Por sua vez, $\mathcal{S}$ é um espalhamento não trivial, no qual os géons resultantes estão em estados que são superposições não-coerentes de vários géons do espectro. Isto ocorre porque os automorfismos de “flip” σ e γ aparecendo na definição de $\mathcal{S}$, eq. (4.32), misturam fluxos, e portanto não preservam o produto (4.46). Esta, porém, é uma análise bastante envolvida, que não aprofundaremos além desse ponto.

Capítulo 5

O Teorema de Spin-Estatística e Outros Resultados

Neste último Capítulo, apresentamos algumas consequências importantes do formalismo que temos desenvolvido até aqui. De início, mostraremos como podemos adaptar nossas técnicas para analisar géons “à distância”. Isto é, mostraremos que para um observador que não possa avaliar a estrutura interna de um géon, este de fato se comporta, num certo sentido a ser tornado preciso, como uma partícula. Estudaremos em seguida as consequências desse fato para a maneira como o observador “enxerga” a topologia espacial subjacente. Em particular, daremos alguns indícios de que, em baixas energias, o géon é instável e decai na forma de partículas, podendo inclusive desaparecer.

Finalmente, mostraremos o resultado isolado mais importante desta dissertação: um teorema de spin-estatística para géons. Tendo em conta a discussão na Introdução, a existência desse teorema em nosso formalismo é notável, uma vez que não incorporamos explicitamente mudanças de topologia. Ao mesmo tempo, esta não será a versão usual do teorema de spin-estatística; este último aparentemente só pode ser obtido se permitirmos que mudanças na topologia ocorram [33, 39].

5.1 O Géon como Partícula

Temos visto até aqui que um géon é um objeto topológico dotado de uma certa estrutura interna. Na teoria quântica, podemos descrevê-lo através de uma álgebra $\mathcal{A}^{(1)}$. Todavia, podemos agora nos imaginar na posição de um observador que analisasse o géon de uma “grande distância”, ou que equivalentemente a escala de observação fosse muito maior do que o comprimento típico de um géon. Nesse caso, é de se esperar que esse observador considerasse, para compor sua álgebra descrevendo o sistema de um géon, apenas aqueles operadores que não “vêem” a estrutura interna do mesmo. A álgebra resultante deveria portanto ser uma sub-álgebra $\mathcal{A}_L^{(1)} \subset \mathcal{A}^{(1)}$.

Nessa aproximação, um géon topológico não deveria ser muito diferente de uma partícula no plano, ou de um vórtice em $(2 + 1)d$. Poderíamos esperar que a “álgebra de longas distâncias” $\mathcal{A}_L^{(1)}$ fosse equivalente a $D(H)$, o quantum double introduzido no

Capítulo anterior. Na realidade, veremos que essa expectativa não é exatamente correta. Embora a álgebra $\mathcal{A}_L^{(1)}$ contenha o quantum double, ela tem de fato alguns elementos extras além daqueles em $D(H)$.

Observáveis de longa distância não deveriam ser capazes de detectar a estrutura interna do géon. Por exemplo, realizando experimentos do tipo Aharonov-Bohm nessa escala, esperamos ter acesso apenas aos efeitos do fluxo total, ou a holonomia da curva fechada γ_3 envolvendo o géon. Portanto, o único projetor detectável na escala de longas distâncias é aquele com suporte no fluxo total c do nosso géon único. Podemos defini-lo em termos dos projetores $\hat{Q}_{(a,b)}$ de géons, de forma natural, como

$$\hat{Q}_c^{(1)} := \sum_{a,b} \delta_{aba^{-1}b^{-1},c} \hat{Q}_{(a,b)}. \quad (5.1)$$

O índice (1) em $\hat{Q}_c^{(1)}$ serve como lembranças de que o projetor aqui definido é um elemento de $\mathcal{A}^{(1)}$, a álgebra de um único géon.

A álgebra dos operadores $\hat{Q}_c^{(1)}$ pode ser obtida através da álgebra (4.12), resultando em

$$\hat{Q}_{c_1}^{(1)} \hat{Q}_{c_2}^{(1)} = \delta_{c_1, c_2} \hat{Q}_{c_1}^{(1)}. \quad (5.2)$$

Portanto, a álgebra gerada por $\{\hat{Q}_c^{(1)}\}_{c \in H}$ é isomorfa a $\mathcal{F}(H)$.

As H -transformações $\hat{\delta}_g \in \mathbb{C}(H)$ agem em $\hat{Q}_c^{(1)} \in \mathcal{F}(H)$. De (4.21) e (5.1), podemos verificar que

$$\hat{\delta}_g \hat{Q}_c^{(1)} \hat{\delta}_g^{-1} = \hat{Q}_{g c g^{-1}}^{(1)}. \quad (5.3)$$

Desta forma, $\hat{\delta}_g$ pode ser considerada sem qualquer alteração como uma operação de longas distâncias. Para manter a notação uniforme, definiremos, para essa Seção,

$$\hat{\delta}_g^{(1)} := \hat{\delta}_g. \quad (5.4)$$

Os operadores $\{\hat{Q}_c^{(1)}\}_{c \in H}$ deveriam comutar com os operadores locais em $\mathcal{A}^{(1)}$, a saber os difeomorfismos $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Isto deve ser verdade, uma vez que a ação do GCI não deveria mudar $[\gamma_3]$, pois podemos tomar γ_3 muito grande, de forma que as torções de Dehn A e B não ajam em γ_3 (ver Fig. 4.1 e Fig. 4.2). De fato, podemos verificar que

$$\hat{A} \hat{Q}_c^{(1)} \hat{A}^{-1} = \hat{B} \hat{Q}_c^{(1)} \hat{B}^{-1} = \hat{Q}_c^{(1)}. \quad (5.5)$$

Chamemos de $\mathcal{D}^{(1)} \subset \mathcal{A}^{(1)}$ a álgebra gerada pelos $\hat{Q}_c^{(1)}$'s e $\hat{\delta}_g^{(1)}$'s. É claro que $\mathcal{D}^{(1)}$ é isomorfa ao quantum double $D(H) \cong \mathcal{F}(H) \otimes \mathbb{C}(H)$. Como consequência, $\mathcal{D}^{(1)}$ tem estrutura de uma álgebra de Hopf quase-triangular [102, 115]. Aqui queremos nos concentrar em duas propriedades específicas dessa álgebra, quais sejam a existência de um co-produto e de uma matriz R universal. Vamos revisar rapidamente esses conceitos. Para detalhes, ver [115].

Um co-produto $\mathcal{D}^{(1)}$ é uma aplicação linear

$$\Delta : \mathcal{D}^{(1)} \longrightarrow \mathcal{D}^{(1)} \otimes \mathcal{D}^{(1)},$$

que é co-associativo, ou seja,

$$(\Delta \otimes Id) \circ \Delta = (Id \otimes \Delta) \circ \Delta ,$$

e um morfismo de álgebras,

$$\Delta(a \cdot b) = \Delta(a) \cdot \Delta(b) .$$

Para o quantum double, o co-produto tem as expressões

$$\Delta(\hat{Q}_c^{(1)}) = \sum_g \hat{Q}_g^{(1)} \otimes \hat{Q}_{g^{-1}c}^{(1)} \quad (5.6)$$

e

$$\Delta(\hat{\delta}_g^{(1)}) = \hat{\delta}_g^{(1)} \otimes \hat{\delta}_g^{(1)} . \quad (5.7)$$

A quase-triangularidade do quantum double é equivalente à existência de uma matriz R , que é responsável pelos processos de permutação de partículas. A matriz R para o quantum double pode ser escrita como

$$\mathcal{R}^{(1)} = \sigma \sum_{g \in H} \hat{Q}_g^{(1)} \otimes \hat{\delta}_{g^{-1}}^{(1)} . \quad (5.8)$$

Lembramos que a álgebra completa $\mathcal{A}^{(1)}$ também tem uma matriz R dada por (4.30). Devemos agora nos perguntar se a matriz R (5.8) para a sub-álgebra $\mathcal{D}^{(1)} \subset \mathcal{A}^{(1)}$ é compatível com (4.30). É simples ver que elas são de fato idênticas.

Podemos pensar na matriz R para $\mathcal{A}^{(1)}$ como uma extensão trivial da matriz R de $\mathcal{D}^{(1)}$. Uma questão importante é se é possível estender o co-produto para a álgebra completa de um único géon $\mathcal{A}^{(1)}$. Não nos foi possível chegar a uma conclusão definitiva, mas temos razões para acreditar que Δ não pode ser estendido. Uma razão para essa crença é que o co-produto está associado a processos de *fusão* de partículas ao nível quântico. Mais precisamente, seja $\mathcal{A}$ uma álgebra qualquer dotada de um co-produto Δ . Dadas duas representações irreduzíveis R_1 e R_2 de $\mathcal{A}$ sobre espaços de Hilbert V_1 e V_2 , respectivamente, o produto tensorial $V_1 \otimes V_2$ carrega uma representação, via a correspondência $a \mapsto (R_1 \otimes R_2)\Delta(a)$, entre elementos $a \in \mathcal{A}$ e operadores em $\mathcal{A}$. Pode-se ver facilmente, usando as propriedades do co-produto, que essa correspondência de fato define uma representação de $\mathcal{A}$ em $V_1 \otimes V_2$. A representação assim definida é, em geral, redutível, e portanto pode ser decomposta como uma soma direta de representações irreduzíveis. Fisicamente, isto quer dizer que podemos "fundir" duas partículas que sejam descritas na teoria quântica pelos espaços de Hilbert V_1 e V_2 , e as várias RI's aparecendo na decomposição de $V_1 \otimes V_2$ são os possíveis "canais de decaimento" dessas partículas. É difícil de visualizar como um processo de fusão como esse para géons poderia ser possível, sem introduzir mudanças de topologia desde o início.

Um outro elemento da álgebra de longa distância $A_L^{(1)}$ é o operador $C^{(1)}$ responsável pela torção de Dehn ao longo de um círculo englobando o géon. Em outras palavras, $C^{(1)}$ representa a rotação de 2π do géon,

$$C^{(1)} \equiv C_{2\pi} . \quad (5.9)$$

Note-se que $C^{(1)}$ comuta com todos os elementos de $\mathcal{D}^{(1)}$. Uma vez que devemos ter $C_{2\pi}^N = \mathbb{I}$ para algum N , este elemento gera uma álgebra de grupo isomorfa a $\mathbb{C}(\mathbb{Z}_N)$.

Em suma, a álgebra de longa distância $\mathcal{A}_L^{(1)}$ é isomorfa a $D(H) \otimes \mathbb{C}(\mathbb{Z}_N)$. Fisicamente, o significado disto é que a grandes distâncias o géon é equivalente a uma partícula com um grau interno de liberdade para rotação. É este grau extra de liberdade que torna um géon visto à distância ligeiramente diferente de um vórtice.

Consideremos a seguir a configuração com dois géons e a álgebra $\mathcal{A}^{(2)}$ correspondente. A análise de longa distância nesse caso levanta um fenômeno interessante. Podemos imaginar um processo “dinâmico” no qual, a medida em que “nos afastamos”, dois géons se tornam pontuais e ao mesmo tempo se aproximam um do outro. Ao final, um único objeto pontual permanece, e podemos procurar por operadores que ainda fazem sentido nesse limite. Não é difícil de se convencer que estes serão a) o projetor do fluxo total $\hat{Q}_c^{(2)}$ dos dois géons; b) as H -transformações e c) a torção de Dehn ao redor de um círculo envolvendo ambos os géons.

O projetor do fluxo total dos sistema é dado por

$$\hat{Q}_c^{(2)} := \sum_{a,b,a',b'} \delta_{aba^{-1}b^{-1}a'b'a'^{-1}b'^{-1},c} \hat{Q}_{(a,b)} \otimes \hat{Q}_{(a',b')}. \quad (5.10)$$

O índice (2) indica que $Q_c^{(2)}$ é um elemento de $\mathcal{A}^{(2)}$. Pode-se escrever essa expressão de modo mais transparente como:

$$\hat{Q}_c^{(2)} = \sum_g \hat{Q}_g^{(1)} \otimes \hat{Q}_{g^{-1}c}^{(1)}. \quad (5.11)$$

De modo semelhante, H -transformações são dadas por

$$\hat{\delta}_g^{(2)} := \hat{\delta}_g^{(1)} \otimes \hat{\delta}_g^{(1)}. \quad (5.12)$$

Se comparamos as duas últimas equações com a definição (5.6)-(5.7), vemos que

$$\hat{Q}_c^{(2)} = \Delta(\hat{Q}_c^{(1)}), \quad (5.13)$$

$$\hat{\delta}_g^{(2)} = \Delta(\hat{\delta}_g^{(1)}). \quad (5.14)$$

Denotemos por $\mathcal{D}^{(2)}$ a álgebra gerada por $Q_c^{(2)}$ e $\hat{\delta}_g^{(2)}$. De (5.13) e (5.14) segue-se que $\mathcal{D}^{(2)}$ é homomorfa à álgebra $\mathcal{D}^{(1)}$. De fato, é fácil ver que elas são isomórficas.

Como no caso anterior, a álgebra de longa distância $\mathcal{A}_L^{(2)}$ possui um gerador extra dado pela torção de Dehn $C^{(2)}$ ao longo de um círculo envolvendo ambos os géons, com

$$C^{(2)} = \mathcal{R}^2. \quad (5.15)$$

Como já era de se esperar, a álgebra $\mathcal{A}_L^{(2)}$ é isomorfa a $D(H) \otimes \mathbb{C}(\mathbb{Z}_N)$ e portanto também descreve uma partícula com grau de liberdade interno de rotação.

Fica claro dessa discussão como podemos generalizar para obter a álgebra $\mathcal{A}_L^{(n)}$ para n géons. Esta é gerada pela torção de Dehn $C^{(n)}$ ao longo de um círculo envolvendo os n

géons, juntamente com elementos $Q_c^{(n)}, \hat{\delta}_g^{(n)} \in \mathcal{A}^{(1)} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}^{(1)}$ dados pela aplicação iterada do co-produto. Por exemplo, para $n = 3$,

$$\hat{Q}_c^{(3)} = (Id \otimes \Delta) \otimes \Delta(\hat{Q}_c^{(1)}), \quad (5.16)$$

$$\hat{\delta}_g^{(3)} = (Id \otimes \Delta) \otimes \Delta(\hat{\delta}_g^{(1)}). \quad (5.17)$$

Note-se que por causa da co-associatividade, podíamos ter escrito $(\Delta \otimes Id) \otimes \Delta$ ao invés de $(Id \otimes \Delta) \otimes \Delta$ nas últimas duas fórmulas.

Na próxima Seção vamos ver como podemos usar a análise de longa distância aqui introduzida para explorar como a topologia espacial subjacente é percebida por um observador sem acesso à estrutura interna do géon. Veremos que do ponto de vista desse observador, o géon é uma estrutura instável, e pode decair em partículas, ou mesmo no vácuo.

5.2 Topologia Clássica e Teoria Quântica

Nesta dissertação, temos considerado, como modelo para o espaço-tempo, variedades com $(2+1)d$ e seções espaciais consistindo de um plano com um certo número n de alças. Em outras palavras, para cada instante de tempo dado, temos um sistema com n géons. Se o número desses géons varia de um instante de tempo a outro, dizemos que ocorreu uma mudança de topologia espacial. Dizer que a topologia espacial é fixa equivale a dizer que a variedade espaço-temporal subjacente é da forma $\Sigma \times \mathbb{R}$.

Em nossa análise, começaremos com uma variedade espaço-temporal da forma $\Sigma \times \mathbb{R}$ como antes, e portanto *classicamente*, o número de géons será tomado como fixo. Porém, *um observador realizando medidas na teoria quântica não tem como dizer, a priori, qual é a topologia subjacente, uma vez que ele só tem acesso à álgebra descrevendo o sistema, e suas representações*. Suponhamos que nossa variedade espacial seja um plano com um único géon, e que um observador hipotético esteja avaliando qual é a topologia espacial. Ele utiliza graus de liberdade associados a algum sistema físico no *background* do géon, e é precisamente a forma como esses graus de liberdade interagem com a topologia que dá as informações sobre a mesma. Porém, a teoria física que o observador usa para descrever essa interação depende, entre outras coisas, da escala de energia que é acessível a ele. Por exemplo, se o tamanho típico do géon é muito pequeno, para “enxergar” sua estrutura interna é preciso utilizar partículas com comprimento de onda Compton compatível com esse tamanho, e portanto bastante energéticas. Se a energia necessária para criar essas partículas for muito alta para a escala acessível a nosso observador, ele será efetivamente incapaz de detetar a estrutura interna do géon. Este será visto em princípio como uma partícula. Podemos então nos perguntar se, do ponto de vista de nosso observador, essa partícula é estável. Em nosso formalismo, descobrimos que a resposta é em geral negativa. *Mais ainda, é possível que essa “partícula”, que é como nosso observador de baixas energias vê o géon, decaia no vácuo, e para todos os efeitos desapareça para esse observador*.

Embora o modelo desenvolvido aqui seja simples demais para ser realista, ele sugere uma razão pela qual não se detectam estruturas topológicas não-triviais em nosso universo:

essas estruturas podem ser instáveis em baixas energias, sendo somente excitadas em altas energias. Essa sugestão está em harmonia com análises feitas em gravitação quântica, em relação à chamada “espuma de espaço-tempo” (*spacetime foam*) [8].

Vamos tornar essas considerções precisas dentro do formalismo algébrico que desenvolvemos nessa dissertação.

Vamos imaginar que um géon, representado por um quadrado no plano com lados opostos identificados, possua um tamanho típico l . Intuitivamente, um géon poderia desaparecer no limite quando l se tornasse muito pequeno. Nesse caso, um géon pareceria um objeto pontual. Vamos então considerar o caso limite $l \rightarrow 0$. Está claro que as holonomias associada com as curvas γ_1 e γ_2 na Fig. 4.1 não fazem sentido nesse limite. O único fluxo observável nesse limite é a holonomia de γ_3 , responsável pela medição do fluxo total. A álgebra descrevendo essa situação limite é precisamente aquela associada à aproximação do géon como partícula, $\mathcal{A}_L^{(1)} \subset \mathcal{A}^{(1)}$, introduzida na Seção anterior. O limite $l \rightarrow 0$ corresponde, como já discutimos, e tomar o limite de longa distância, ou de baixas energias. Operadores descrevendo os fluxos individuais não entram nessa descrição.

No caso de um único géon, a teoria quântica é descrita por estados quânticos transformando-se sob uma RI r de $\mathcal{A}^{(1)}$. Da inclusão

$$i^{(1)} : \mathcal{A}_L^{(1)} \hookrightarrow \mathcal{A}^{(1)}, \quad (5.18)$$

segue-se que r é também uma representação (em geral redutível) de $\mathcal{A}_L^{(1)}$. Seja $\mathcal{H}_r$ o espaço de Hilbert carregando a representação r . Em geral, $\mathcal{H}_r$ pode ser decomposta como uma soma direta

$$\mathcal{H}_r = \bigoplus_{\sigma} N_{\sigma}^r V_{\sigma}, \quad N_{\sigma}^r \in \mathbb{N} \quad (5.19)$$

Onde cada V_{σ} carrega uma RI σ de $\mathcal{A}_L^{(1)}$. Observadores de longa distância não podem detetar observáveis misturando as diversas RI's de $\mathcal{A}_L^{(1)}$.

Um observador de longa distância interpreta a (5.19) como significando que um géon na representação r pode decair em diferentes *partículas* transformando-se nas representações σ . Nessa interpretação, a multiplicidade N_{σ}^r está relacionada com a *probabilidade* de o géon decair no tipo de partícula descrito por V_{σ} . Note-se que é possível que a representação trivial $\sigma = 0$ de $\mathcal{A}_L^{(1)}$ ocorra em (5.19). Nesse caso, para um observador trabalhando apenas com $\mathcal{A}_L^{(1)}$, *haverá uma probabilidade não-nula de que o géon decaia no vácuo*.

Como exemplo, vamos agora caracterizar a representação de vácuo, como a chamaremos, e discutir o decaimento de um géon no vácuo.

As RI's de $\mathcal{A}_L^{(1)}$ são classificadas de forma semelhante às da álgebra $\mathcal{A}^{(1)}$, uma vez que ambas têm a mesma estrutura de álgebras de grupo de transformação. A RI trivial $V_0 \simeq \mathbb{C}$ na decomposição (5.19) é gerada por qualquer estado $|\text{VAC}\rangle \in \mathcal{H}_r$ satisfazendo

$$Q_c^{(1)} |\text{VAC}\rangle = \delta_{e,c} |\text{VAC}\rangle, \quad (5.20)$$

$$\hat{\delta}_g^{(1)} |\text{VAC}\rangle = |\text{VAC}\rangle, \quad (5.21)$$

$$C^{(1)} |\text{VAC}\rangle = |\text{VAC}\rangle. \quad (5.22)$$

Chamaremos qualquer estado obedecendo essas condições de “vácuo”. Não é difícil mostrar que uma representação $r = ([a, b], \rho)$ contém estados satisfazendo (5.20) se, e

somente se, $aba^{-1}b^{-1}$ é a identidade. Ademais, sob a condição

$$aba^{-1}b^{-1} = e,$$

todos os estados em $\mathcal{H}_r$, $r = ([a, b], \rho)$, satisfazem à eq. (5.20). Restam-nos, portanto, apenas as condições (5.21) e (5.22) para definir o estado de vácuo. Essas condições significam simplesmente que $|VAC\rangle$ transforma-se numa representação trivial do grupo $H \times \mathbb{Z}_N$, onde $\mathbb{Z}_N$ é gerado por $C^{(1)} = \hat{C}_{2\pi}$.

Vamos mostrar um exemplo em que o decaimento no vácuo ocorre naturalmente. Considere uma RI qualquer de $\mathcal{A}^{(1)}$ da forma $r_0 = ([a, b], \epsilon)$, onde a e b estão no centro de H , isto é, comutam com todos os outros elementos, e ϵ é a representação trivial do subgrupo de estabilidade de (a, b) . Nesse caso, temos que $aba^{-1}b^{-1} = e$, e portanto qualquer vetor nessa representação satisfaz (5.20), conforme discutimos acima. Uma vez que a e b estão no centro de H , comutam com todas as H -transformações, e portanto $H \subset K_{(a,b)}$. Isto quer dizer que as H -transformações agem trivialmente em $\mathcal{H}_r$, e portanto (5.21) é satisfeita. Finalmente, a ação de $C^{(1)}$ corresponde neste caso à conjugação pelo fluxo. Cada vetor nessa representação tem o fluxo bem definido e igual a e . Portanto (5.22) também se verifica. Com isso acabamos por mostrar que *todos* os vetores dessa representação decairão no vácuo.

Esse exemplo também ilustra o fato de que o espaço vetorial $\mathcal{H}_r$ pode conter mais de uma cópia da representação trivial de $H \times \mathbb{Z}_N$. Denotaremos o conjunto correspondente de vetores ortonormais por

$$|VAC; l\rangle, \quad l = 1, 2, \dots, N_0^r.$$

Encontrar $|VAC; l\rangle$ numa dada decomposição de cada $\mathcal{H}_r$ é um problema em teoria de grupos que pode ser resolvido apenas com uma escolha específica do grupo discreto H . Não tentaremos fazê-lo nesta dissertação.

A probabilidade $P(\psi)$ de um estado normalizado $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_r$ de decair no vácuo é dada por

$$P(\psi) = \begin{cases} \sum_l |\langle VAC; l | \psi \rangle|^2 \neq 0 & \text{if } N_0^r \neq 0, \\ = 0 & \text{if } N_0^r = 0. \end{cases} \quad (5.23)$$

Se $N_0^r = 0$, um único géon descrito por r não pode decair no vácuo.

Todavia, *dois* géons descritos por r e r' podem aniquilar-se mutuamente. A idéia nesse caso é que à distância vemos os géons como objetos pontuais e podemos aproximá-los. Ao final, resta um único objeto pontual, a ser descrito pela álgebra $\mathcal{A}_L^{(2)}$ introduzida na Seção anterior. Da inclusão

$$i^{(2)} : \mathcal{A}_L^{(2)} \hookrightarrow \mathcal{A}^{(2)} \quad (5.24)$$

segue-se que o espaço de estados $\mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_{r'}$ de dois géons carrega uma representação (reduzível) de $\mathcal{A}_L^{(2)}$. Denotemos por σ as RI's de $\mathcal{A}_L^{(2)}$, com espaços vetoriais correspondentes V_σ . Então

$$\mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_{r'} = \bigoplus_{\sigma} N_{\sigma}^{(r,r')} V_{\sigma}, \quad N_{\sigma}^{(r,r')} \in \mathbb{N}. \quad (5.25)$$

Portanto, os operadores de $\mathcal{A}_L^{(2)}$ poderão detectar apenas o vácuo se $N_0^{(r,r')}$ não for igual a zero. A representação de vácuo e a probabilidade de decaimento são dadas por fórmulas análogas a (5.20)-(5.23).

Essa discussão é imediatamente generalizável para o caso de um número arbitrário de géons. Sejam n descritos por representações $r_1, \dots, r_n$. O espaço de estados $\mathcal{H}_{r_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{r_n}$ é uma representação da álgebra de longas distâncias $\mathcal{A}_L^{(n)} \subset \mathcal{A}^{(n)}$ descrita na Seção anterior. Novamente, esse sistema pode decair no vácuo se a decomposição em RI's de $\mathcal{A}_L^{(n)}$ contém a representação trivial.

5.3 Um Teorema de Spin-Estatística para Géons em $(2+1)d$

O Teorema de Spin-Estatística é uma lei física bem estabelecida, e é válida para a maior parte das partículas conhecidas na Natureza. Ao estudar gravitação quântica, somos levados naturalmente a inquirir se existe de fato alguma teoria de campos que possua em seu espectro géons como excitações de um *background* espacial topologicamente trivial. Como já dissemos em mais de uma ocasião nesta tese, tal teoria permanece um ideal distante, mas nada nos impede de investigar alguns de seus aspectos. Por exemplo, numa teoria desse tipo, géons se comportariam como quanta e é uma pergunta fundamental se, à semelhanças dos quanta de campos locais conhecidos, géons possuem associados a eles noções de spin e estatística e, em particular, se uma versão do teorema de spin-estatística continua válida nesse contexto.

Para colocar essa questão em perspectiva, começamos com alguns comentários gerais. Spin e estatística são duas propriedades fundamentais, que podem de um modo geral ser definidas de modo completamente independente *a priori*. Essas propriedades se referem não apenas a partículas, mas de um modo geral a subsistemas compostos de várias partículas ou mesmo de objetos extensos como sólitons. A natureza tensorial ou espinorial do spin é determinada pelo comportamento da função de onda do sistema quando o subsistema sob consideração é rotacionado de 2π . Por sua vez, a estatística se refere ao que ocorre à função de onda quando dois subsistemas idênticos são trocados de lugar. Portanto é de primária importância que possamos obter operadores atuando no espaço de Hilbert do sistema capazes de implementar ao nível dos estados quânticos as operações de rotação de 2π e troca de subsistemas. Para géons, já estamos de posse dessa informação, através dos operadores $C_{2\pi}$ e $\mathcal{R}$ definidos no Capítulo 4. Ao considerar com esses operadores atuam, seremos levados a uma relação definida entre spin e estatística, mas a mesma difere da usual por uma fase.

No teorema de spin-estatística usual, o procedimento é simples. Prepara-se um estado de duas partículas que é dado pelo produto tensorial de duas cópias de um mesmo estado (arbitrário) de uma partícula, com o mesmo spin. Em seguida, testa-se o efeito sobre esse estado do operador de rotação de 2π de uma das partículas versus o de troca de duas partículas. Se estas duas operações assim realizadas terminam no mesmo resultado, o teorema usual se verifica.

Ao tentar repetir este procedimento para estados de dois géons, chegamos à conclusão

de que a relação não é exatamente válida, mas a diferenças entre as duas operações (de troca de dois géons e de rotação de um dos géons do par) é apenas uma fase global. A condição para que isto ocorra, porém, é que os fluxos globais de cada géon do par *não apenas devem pertencer à mesma classe de conjugação, mas têm que ser iguais*.

Recordemos que um géon individual tem seus estados descritos por vetores numa RI, digamos $r = ([a, b], \rho)$, da álgebra $\mathcal{A}^{(1)}$. Fisicamente, dois géons se transformando nessa mesma representação são “indistinguíveis”. Como vimos no teorema de classificação das RI’s, podemos tomar uma base ortonormal de vetores da forma $\xi_i | (a, b) \rangle \otimes | j \rangle$. Se escrevemos $\xi_i(a, b) \equiv (a_i, b_i)$, chegamos à conclusão que um géon no estado descrito por esse vetor de base possui um fluxo global (associado ao gerador $[\gamma_3]$) dado por $c_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} = \xi_i c \xi_i^{-1}$, onde $c = aba^{-1}b^{-1}$. Portanto, a cada vetor da base, há associado um fluxo diferente. Dois géons podem portanto ter fluxos globais diferentes, mas na mesma classe de conjugação, e ainda assim ser considerados “indistinguíveis”, por exemplo se cada um estiver num estado correspondendo a um de dois vetores distintos da base. Um estado genérico de um géon descrito pela representação r é uma superposição desses vetores de base, e portanto o fluxo global de um estado de um géon não é em geral uma grandeza bem definida; apenas sua classe de conjugação o é. Portanto, em princípio é estranho que o teorema de spin-estatística requeira que os fluxos globais de cada géon sejam rigorosamente iguais.

Mostraremos no que segue que isso pode ser interpretado como uma indicação de que *o fluxo total de um sistema de géons é uma grandeza superselecionada, no mesmo sentido que a carga elétrica é superselecionada em QED*. Explicaremos como ocorre essa superseleção na Seção 5.3.1. Aqui nós apenas notamos que, como consequência dessa regra de superseleção, os únicos estados *físicos* são as superposições de vetores de base com o mesmo fluxo. Se assumimos que a regra de superseleção é de fato válida, a conexão entre spin e estatística é válida para todos os estados *físicos*.

Começamos considerando dois géons num plano. A álgebra de dois géons $\mathcal{A}^{(2)}$ está dada uma vez que fixemos um grupo finito H . Na Seção 4.1 vimos que a permuta, ou troca, de dois géons é realizada pelo operador $\mathcal{R}$ definido em (4.30). Por sua vez, a rotação de 2π de um dos dois géons pode ser escrita como $\hat{C}_{2\pi} \otimes \mathbb{I}$ ou $\mathbb{I} \otimes \hat{C}_{2\pi}$. Gostaríamos então de saber se a álgebra $\mathcal{A}^{(2)}$ contém alguma relação entre os operadores de troca de géons e de rotação de 2π de um dos géons.

Fixemos uma RI $r = ([a, b], \rho)$ de $\mathcal{A}^{(1)}$. Vetores de estado $|i, j\rangle_r \in \mathcal{H}_r$ dados por (4.41) não possuem spin bem definido, uma vez que não são em geral autoestados de $\hat{C}_{2\pi}$. O primeiro passo para estabelecer uma relação entre spin e estatística é conhecer os autoestados de $\hat{C}_{2\pi}$. Lembramos que $\hat{C}_{2\pi} \in \mathcal{M}$ e que $\mathcal{M}$ é um grupo finito. Portanto existe um menor inteiro não negativo N tal que

$$\hat{C}_{2\pi}^N = 1. \quad (5.26)$$

Os autovalores de $\hat{C}_{2\pi}$ são então $e^{i2\pi s}$, onde o spin s toma valores $s = 0, 1/N, 2/N, \dots, (N-1)/N$. Podemos notar que o operador

$$P_s = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in2\pi s} \hat{C}_{2\pi}^n \quad (5.27)$$

atuando em $\mathcal{H}_r$ projeta em estados de spin s . O fator $1/N$ garante que $P_s^2 = P_s$, e assumimos que $N \geq 2$, de modo a termos um comportamento não trivial sob uma rotação de 2π . Além disso, é fácil ver que qualquer estado em $\mathcal{H}_r$ com spin s pode ser obtido por combinações lineares de vetores $|s; i, j\rangle$ dados por

$$|s; i, j\rangle = P_s |i, j\rangle_r. \quad (5.28)$$

Para se ver isto, suponha-se que $|s; v\rangle \in \mathcal{H}_r$ é um vetor normalizado com spin s , ou em outras palavras $\hat{C}_{2\pi} |s; v\rangle = e^{2\pi i s} |s; v\rangle$. Nesse caso temos, pela definição do projetor, que $P_s |s; v\rangle \equiv |s; v\rangle$. Por outro lado, como $\{|i, j\rangle_r\}$ é uma base, podemos expandir $|s; v\rangle$:

$$|s; v\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |i, j\rangle_r,$$

para algum conjunto de números $c_{ij} \in \mathbb{C}$. Atuando com P_s em ambos os membros dessa equação temos finalmente

$$|s; v\rangle = \sum_{ij} c_{ij} |s; i, j\rangle,$$

como queríamos mostrar.

Considere-se agora um par de géons, ambos carregando a mesma representação $r = ([a, b], \rho)$ e o mesmo spin s . Ademais, vamos assumir que ambos os géons possuem o mesmo fluxo global $c_i = \xi_i c \xi_i^{-1}$, onde $c = aba^{-1}b^{-1}$, ou seja, assumimos que cada géon é uma superposição de vetores com o mesmo fluxo. Vamos analisar as consequências dessas hipóteses. Os ξ_i 's em (4.40) agem em $|a, b\rangle$ de tal maneira que o fluxo c fica conjugado por ξ_i . Em outras palavras, o fluxo de cada vetor da base $\{|i, j\rangle_r\}$ será c_i . Dessa forma, c_i se torna uma quantidade caracterizando um setor particular de superseleção dentro de r , uma vez que argumentemos que de fato os fluxos devem ser superselecionados. Vamos mostrar que a estatística do sistema é completamente determinada pelo spin s e a representação r , e que essa relação não depende de c_i . Mais precisamente,

$$\mathcal{R} |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = e^{i(2\pi s - \theta_r)} |\phi\rangle \otimes |\psi\rangle, \quad (5.29)$$

onde os estados $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ transformam-se de acordo com a representação r e ambos têm o mesmo spin s e o mesmo fluxo global c_i . Em (5.29), θ_r é um ângulo que só depende de r . A conexão de spin-estatística usual é verdadeira apenas para aquelas representações r para as quais $\theta_r = 0$.

É suficiente que verifiquemos (5.29) para estados $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ da base (5.28):

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = P_s |i, j\rangle_r &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in2\pi s} \hat{C}_{2\pi}^n \{ \xi_i |a, b\rangle \otimes |j\rangle_\rho \}, \\ |\phi\rangle = P_s |k, l\rangle_r &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-in2\pi s} \hat{C}_{2\pi}^n \{ \xi_k |a, b\rangle \otimes |l\rangle_\rho \}, \\ c_i &= c_k. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Usando (4.47) podemos mostrar, após uma curta álgebra (que omitimos), que

$$\mathcal{R} \{P_s | i, j \rangle_r \otimes P_s | k, l \rangle_r\} = | \Phi \rangle \otimes P_s | i, j \rangle_r. \quad (5.31)$$

com

$$| \Phi \rangle = \frac{1}{N} \sum_n e^{-in2\pi s} \hat{C}_{2\pi}^n \hat{\delta}_{c_i}^{-1} \{ | a_k, b_k \rangle \otimes | l \rangle_\rho \}. \quad (5.32)$$

Nesta última fórmula, usamos a notação

$$| a_k, b_k \rangle := \xi_k | a, b \rangle, \quad (5.33)$$

com c_i , o fluxo global de $| a_i, b_i \rangle$, sendo dado por $c_i = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. O resultado (5.31) é um produto tensorial onde apenas o primeiro fator ainda não está na forma que desejamos, a saber $(\text{uma fase}) \times | \psi \rangle$.

Consideremos $| \Phi \rangle$ mais detidamente. Primeiro definimos

$$E_i = \hat{\delta}_{c_i} \hat{C}_{2\pi} \quad (5.34)$$

e escrevemos $| \Phi \rangle$ na forma

$$| \Phi \rangle = e^{i2\pi s} \frac{1}{N} \sum_n e^{-in2\pi s} \hat{C}_{2\pi}^n E_i^{-1} \{ \xi_k | a, b \rangle \otimes | l \rangle_\rho \}. \quad (5.35)$$

Vamos em seguida mostrar que

$$E_i \xi_k = \xi_k E_1, \quad (5.36)$$

onde $E_1 = \hat{\delta}_c \hat{C}_{2\pi}$ com $c = aba^{-1}b^{-1}$. De fato, note-se para começar que

$$E_i \xi_k | a, b \rangle = \hat{\delta}_{c_i} C_{2\pi} \xi_k | a, b \rangle = \hat{\delta}_{c_i} C_{2\pi} | a_k, b_k \rangle = | a_k, b_k \rangle = \xi_k | a, b \rangle, \quad (5.37)$$

onde usamos o fato que $c_i = c_k$. Por conseguinte,

$$E_i \xi_k = \xi_k \beta, \quad (5.38)$$

onde β é um elemento do subgrupo de estabilidade $K_{(a,b)}$ de (a, b) .

Só nos resta mostrar agora que de fato $\beta = E_1 := \hat{\delta}_c C_{2\pi}$. Lembramos que por definição ξ_1 é a identidade do grupo $H \times \mathcal{M}$.

De (5.38) segue que

$$\beta = \xi_k^{-1} E_i \xi_k. \quad (5.39)$$

Se tomamos um ξ_k genérico na forma $\hat{\delta}_{g_k} \omega_k$ para algum $g_k \in H$ e algum $\omega_k \in \mathcal{M}$, vemos que

$$\beta = \omega_k^{-1} \hat{\delta}_{g_k}^{-1} (\hat{\delta}_{c_i} C_{2\pi}) \delta_{g_k} \omega_k = \hat{\delta}_{g_k}^{-1} (\hat{\delta}_{c_i} C_{2\pi}) \hat{\delta}_{g_k} = \hat{\delta}_{g_k^{-1} c_i g_k} C_{2\pi}, \quad (5.40)$$

uma vez que ω_k comuta com H -transformações. Mas podemos mostrar que

$$c_i = c_k = g_k c g_k^{-1}, \quad (5.41)$$

o que nos permite concluir, de (5.40), que $\beta = E_1$, e nesse caso (5.36) segue-se como consequência. Para mostrar (5.41), escrevemos

$$|a_k, b_k\rangle = \xi_k |a, b\rangle := \hat{\delta}_{g_k} \omega_k |a, b\rangle = \omega_k |g_k a g_k^{-1}, g_k b g_k^{-1}\rangle. \quad (5.42)$$

Se recordamos que elementos de $\mathcal{M}$ não podem mudar o fluxo global, podemos comparar o fluxo global no primeiro e último membro de (5.42). Com isso, vem

$$c_k = g_k c g_k^{-1}. \quad (5.43)$$

Agora, de (5.36) nós temos

$$E_i^{-1} \xi_k = \xi_k E_1^{-1}. \quad (5.44)$$

É um exercício simples, mas não particularmente ilustrativo, mostrar que E_1 está no centro do subgrupo de estabilidade $K_{(a,b)}$ de (a, b) , e portanto o omitimos. Dessa forma, de (4.44), vem

$$E_i^{-1} \{\xi_k | a, b\rangle \otimes |l\rangle_\rho\} = \xi_k |a, b\rangle \otimes E_1^{-1} |l\rangle_\rho. \quad (5.45)$$

Ora, uma vez que estados $|l\rangle_\rho$ formam uma base de uma RI (unitária) de $K_{(a,b)}$, podemos aplicar o lema de Schur [44, 42, 117] para concluir que o operador E_1 dá origem a uma fase $e^{i\theta_r}$ em (5.45), dependente da RI $r = ([a, b], \rho)$. Juntando todos os resultados:

$$|\Phi\rangle = e^{i(2\pi s - \theta_r)} \frac{1}{N} \sum_n e^{-in2\pi s} \hat{C}_{2\pi}^n \{\xi_k | a, b\rangle \otimes |l\rangle_\rho\} = e^{i(2\pi s - \theta_r)} P_s |k, l\rangle. \quad (5.46)$$

Com isto, concluímos a demonstração da eq. (5.29). Uma vez que a fase θ_r surge devido a considerações formais, ela é indeterminada em nosso formalismo.

5.3.1 O papel de H : O Princípio de Superseleção

Nosso objetivo nesta Seção é enfatizar como a hipótese de superseleção de fluxos totais surge naturalmente se nos confinamos à idéia de que apenas observáveis locais têm significado físico direto.

Começamos notando que as H -transformações podem ser vistas como operações não-locais na teoria. Para ver isso, consideremos por simplicidade um sistema de N géons $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_N$ num estado $|a_1, b_2\rangle \otimes \dots \otimes |a_N, b_N\rangle$. Realizando-se uma H -transformação por um elemento $g \in H$, esse estado se torna $|ga_1 g^{-1}, gb_2 g^{-1}\rangle \otimes \dots \otimes |ga_N g^{-1}, gb_N g^{-1}\rangle$. Mas este estado final é inteiramente equivalente ao que obtemos ao fazer um vórtice ou um géon de fluxo global g circundarem $\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_N$ em um círculo com raio arbitrariamente grande em torno desses N géons, o que é claramente uma operação não-local. Outra maneira de ver essas transformações é como vimos na Seção 4.1. Nesta última abordagem, a idéia é que devemos ter uma ambigüidade essencial na determinação do fluxo total dos N géons, pois este não é uma grandeza invariante de gauge. Fixada uma classe de conjugação, há várias possíveis escolhas do fluxo padrão dentro desta classe.

Para um único géon, podemos então concluir que, para cada RI $r = ([a, b], \rho)$ de $\mathcal{A}^{(1)}$, devemos ter uma decomposição

$$\mathcal{H}_r = \bigoplus_{c_i} \mathcal{H}_r^{c_i},$$

onde a soma direta é sobre os subespaços com fluxo bem definido $c_i = \xi_i c \xi_i^{-1}$. Os subespaços $\mathcal{H}_r^{c_i}$ são as imagens dos projetores

$$\hat{Q}_{c_i}^{(1)} = \sum_{a,b} \delta_{c_i, aba^{-1}b^{-1}} \hat{Q}_{(a,b)},$$

e as H -transformações são as únicas que não preservam esses subespaços. Nosso princípio de superseleção para o caso de um único géon corresponde à afirmação de que estados físicos puros (isto é, que não são misturas estatísticas) são vetores dentro de algum dos subespaços $\mathcal{H}_r^{c_i}$.

Essa discussão pode ser generalizada para N géons. Se os mesmos transformam-se de acordo com representações $r_1, \dots, r_N$, a afirmação de que o fluxo *total* é superseleccionado significa que devemos ter uma decomposição

$$\mathcal{H}_{r_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N = \bigoplus_c \mathcal{E}_c,$$

onde a soma direta é sobre todos os fluxos totais c que podem ser obtidos dos produtos $c_{i_1}, \dots, c_{i_N}$. Os subespaços $\mathcal{E}_c$ são as imagens em $\mathcal{H}_{r_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ dos projetores

$$\hat{Q}_c^{(N)} = \sum_{c_{i_1}, \dots, c_{i_N}} \delta_{c, c_{i_1} \dots c_{i_N}} \hat{Q}_{c_{i_1}}^{(1)} \otimes \dots \otimes \hat{Q}_{c_{i_N}}^{(1)},$$

onde se subentende que a soma é somente sobre os c_{i_k} 's que aparecem nas respectivas representações r_k . Nosso princípio de superseleção para o caso de N géons corresponde então à afirmação de que estados físicos puros são vetores dentro de algum dos subespaços $\mathcal{E}_c$.

O fator crucial aqui é que *toda observável local deve comutar com $\hat{Q}_c^{(N)}$. Isto deve ocorrer, pois uma medição de um observável local envolve apenas operações locais, e as únicas operações capazes de alterar o fluxo total são as H -transformações, que são não-locais*¹.

Com essa discussão preliminar estamos em posição de esclarecer como a noção de superseleção do fluxo total garante naturalmente o teorema de spin-estatística para géons provado acima. A fim de estabelecer essa relação, tivemos que recorrer a estados da forma $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$, onde $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ eram estados transformando-se em uma RI r e tendo o mesmo spin s . Assumimos como verdadeiras, ao longo de nossa demonstração, duas hipóteses básicas:

- Os estados $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ foram considerados como estados de fluxos globais c_i e c_k bem definidos, isto é, esses estados foram tomados como superposições de vetores da base com o mesmo fluxo global associado.
- Os fluxos c_i e c_k eram iguais.

¹As noções de localidade e distância são definidas com respeito à métrica do *background*.

A segunda destas hipóteses é natural e facilmente implementável, pois como observado com respeito a vórtices na Seção 4.1 (veja também [112]), a noção de igualdade ou diferenças de fluxos é bem definida e invariante de gauge. Basta portanto preparar dois estados de um único géon com o mesmo fluxo global. O problema está na primeira premissa. Como já discutimos, cada vetor pode em princípio ser uma superposição de vários fluxos diferentes. Levando-se em conta o princípio de superseleção, é necessário ter que o fluxo total dos *dois géons tomados conjuntamente* deve ser bem definido. À primeira vista, nada impede que $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ individualmente correspondam a uma superposição de vários fluxos globais mas o produto tensorial dos dois ter fluxo total bem definido.

Mostraremos agora que isso não ocorre. Imaginemos para simplificar, que $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ correspondem individualmente a superposições de apenas dois fluxos. A generalização para qualquer número de fluxos é imediata. Escrevemos esquematicamente $|\psi\rangle = |c_1\rangle + |c_2\rangle$ e $|\phi\rangle = |c'_1\rangle + |c'_2\rangle$, onde c_i e c'_i , $i = 1, 2$ são fluxos globais. Nesse caso, temos

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle = |c_1\rangle \otimes |c'_1\rangle + |c_1\rangle \otimes |c'_2\rangle + |c_2\rangle \otimes |c'_1\rangle + |c_2\rangle \otimes |c'_2\rangle.$$

O princípio de superseleção aplicado a dois géons nos diz que se o estado $|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle$ é um estado físico puro, apenas se seu fluxo está bem definido; Isto quer dizer que cada termo do lado direito dessa equação deve ter um mesmo fluxo bem definido, digamos c . Nesse caso $c_1 c'_1 = c_1 c'_2 = c_2 c'_1 = c_2 c'_2 = c$. Portanto $c_1 = c_2$ e $c'_1 = c'_2$, o que mostra que de fato $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ têm de ter os fluxos individuais bem definidos, se o fluxo total o é. Portanto, o princípio de superseleção do fluxo total é uma condição suficiente para que possamos mostrar o teorema, e torna as condições que impomos inteiramente naturais.

Pode-se perguntar se esse princípio é necessário. Não obstante o fato de termos que assumi-lo para mostrar o teorema de spin-estatística (5.29), é possível que exista outra forma de mostrá-lo sem utilizar esse princípio. É possível inclusive que essa outra forma de demonstrar traga mais informações sobre as fases θ_r , que são indeterminadas em nosso formalismo. Essas possibilidades só podem ser esclarecidas com uma posterior investigação. Ao menos esse princípio parece ser natural o suficiente para que o fato de o tomarmos como verdadeiro não seja um libelo teórico sério.

Conclusão e Perspectivas

Nesta dissertação, construímos em detalhes uma teoria quântica para géons a partir do setor de baixas energias de uma teoria de gauge discreta. Embora conceitualmente simples, tal construção revela uma surpreendente riqueza matemática e permite consequências físicas notáveis, como a instabilidade da topologia espacial não-trivial em baixas energias e uma conexão entre spin e estatística de géons. Vários dos resultados aqui discutidos têm ramificações, algumas das quais passamos a discutir brevemente.

Para começar, em nossa versão do teorema de spin-estatística, temos uma fase extra θ_r para cada RI da álgebra geônica. Esta fase aparece devido a considerações formais, e seu significado não parece ser identificável dentro do formalismo que desenvolvemos. Este problema parece ser um tanto complexo, e está presentemente sob nossa ativa consideração [38]. Entretanto, resultados preliminares indicam que esta fase está ligada a uma “massa” adquirida pelo géon na teoria.

O teorema de spin-estatística discutido aqui resulta de forma quase imediata num teorema análogo para uma classe de estados “localizados” em gravitação quântica em $(2+1)d$ [36]. Com um pouco mais de esforço, fomos capazes de estender boa parte do formalismo aqui apresentado para essencialmente *todos* os estados clássicos em gravitação quântica em $(2+1)d$ no formalismo de primeira ordem [37]. A idéia é que as várias construções matemáticas feitas aqui utilizaram o grupo finito H . Acontece que é possível mostrar que tais construções podem ser estendidas para o caso de um grupo de Lie localmente compacto. Em particular, para o grupo $SO(2,1)$ a álgebra resultante fornece uma quantização do espaço de configuração clássico para géons discutido na Seção 2.2 do Capítulo 2 [37, 38]. Com isto, pudemos mostrar um teorema de spin-estatística válido para a gravitação quântica em $(2+1)d$, ao menos no formalismo de primeira ordem.

Pode-se perguntar a esta altura porque, se de fato existem estruturas topológicas não-triviais, estas não foram até aqui observadas. O fato é que a Relatividade Geral impõe restrições não somente sobre a geometria do espaço-tempo, mas também sobre sua topologia. Um exemplo disto é a restrição sobre as possíveis topologias espaciais nos modelos de Robertson-Walker [20]: neste caso, as únicas topologias do espaço-tempo compatíveis com homogeneidade e isotropia são $S^3 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}P^3 \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}P^3$ é o espaço real projetivo de dimensão três. As chamadas *condições de energia* [20] sobre o tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ provocam restrições ainda mais surpreendentes. O teorema de Gannon [123] implica que, num espaço-tempo satisfazendo a chamada condição de energia fraca ², ao

²Esta é a exigência de que $T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0$, para todo campo vetorial v do tipo tempo. Acredita-se que essa condição deve ser válida, ao menos classicamente, para qualquer tipo de matéria fisicamente

tentar-se desenvolver dados iniciais de Cauchy numa variedade espacial tridimensional S^3 com uma topologia multiplamente conexa, o correspondente desenvolvimento de Cauchy é geodesicamente incompleto no passado ou no futuro de S , ou em outras palavras, o espaço-tempo possui uma singularidade. Mais recentemente, o assim chamado teorema de censura topológica ativa [124] estabelece que num espaço-tempo assintoticamente plano e globalmente hiperbólico, obedecendo a condições de energia ainda menos restritivas do que a condição de energia fraca, cada curva causal começando e terminando na fronteira no infinito pode ser homotopicamente deformada para uma curva nessa fronteira. Fisicamente, isto significa que uma sonda ou um raio de luz emitidas por um observador no infinito para obter informações sobre uma eventual estrutura multiplamente conexa do espaço-tempo jamais retornará. Este resultado foi extendido para contextos mais gerais do que o assintoticamente plano; veja [125] e as referências ali citadas. Estes teoremas sugerem fortemente que mesmo que estruturas topológicas macroscópicas existissem, elas seriam inobserváveis. Contudo, se a topologia espacial é *compacta*, as condições destes teoremas são violadas, e podemos ter topologias espaciais não-triviais [126]. Uma consideração importante é se de fato existem soluções das equações de Einstein correspondentes a géons. Em outras palavras, gostaríamos de saber se existem métricas com tensor de Ricci nulo em $(2+1)d$ para um espaço-tempo com topologia $\Sigma \times \mathbb{R}$, onde $\Sigma = T^2 \# \mathbb{R}^2$. Na Ref. [38], construímos explicitamente uma tal solução. Em harmonia com os teoremas discutidos acima, a nossa solução possui uma singularidade cosmológica (isto é, do tipo de Friedmann-Robertson-Walker) no passado ou no futuro. Ainda não está claro, contudo, se esta solução é assintoticamente cônica, o que a caracterizaria de fato como descrevendo um objeto isolado em Relatividade Geral.

Na teoria quântica, como já mencionamos várias vezes ao longo desta tese, e situação é bastante diferente. Neste caso, com relação aos teoremas mencionados no parágrafo anterior, as condições de energia utilizadas para demonstrá-los são freqüentemente violadas. Por exemplo, Wald e Yurtsever [127] mostraram que essas condições de energia são violadas pelo tensor de energia-momento renormalizado de campos livres em espaços-tempo genéricos. Matéria violando as condições de energia é chamada de “exótica” na literatura. É a existência de matéria quântica “exótica” que torna possível a violação do teorema clássico da área (teorema 12.2.6 de [9])⁴ por buracos negros evaporando [128], e torna possível a radiação de Hawking; é também este tipo de matéria a responsável pela existência de “buraco de verme atravessáveis”, a despeito dos teoremas acima (veja [129] para detalhes e uma lista bastante completa de referências). Para nosso formalismo, é suficiente que existam soluções que apresentem uma folheação por superfícies de Cauchy regulares onde possamos definir dados iniciais, que é tudo o que necessitamos para construir a teoria quântica para os géons. Singularidades do tipo espaço no passado ou no futuro não afetam nossas conclusões. Em outras palavras, no formalismo de primeira ordem que utilizamos, a teoria quântica não “enxerga” essas singularidades, uma vez que

razoável.

³Mais precisamente, uma superfície de Cauchy parcial e regular próxima ao infinito; veja [123] para as definições apropriadas.

⁴Este teorema afirma essencialmente que a área do horizonte de ventos de um buraco negro jamais pode decrescer se a condição fraca de energia se verifica.

a existência de tríades singulares é naturalmente contemplada [67, 88].

Finalmente, a extensão do nosso formalismo para gravitação quântica em $(2+1)d$ com constante cosmológica e para $(3+1)d$ está sendo estudada. No primeiro caso, a dificuldade está na caracterização do espaço de configuração, que é bastante mais complicado do que a situação com constante cosmológica nula. O caso tridimensional, por sua vez, está ainda mais incipiente. Neste caso, há vários tipos diferentes de géons topológicos, e o espaço de configuração clássico possui dimensão infinita. Ainda não está claro se nosso formalismo pode dar conta dessa situação.

Apêndice A

Algumas Definições Básicas em Teoria da Medida

Este Apêndice tem por objetivo dar algumas definições utilizadas nesta dissertação ao leitor não familiarizado com a Teoria da Medida. Constitui uma introdução rudimentar e esquemática ao assunto, o que será suficiente para nossos fins. Ao leitor interessado em aprofundar-se nesse assunto, recomendamos as Refs. [23, 24, 82], que foram nossas fontes para esta pequena revisão.

Grosso modo, o objetivo da Teoria da Medida é fundamentar de forma rigorosa e generalizar as noções intuitivas de comprimento, área, volume, etc. de um conjunto. Tais noções se aplicam em geral a subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, mas podem-se considerar subconjuntos de um certo conjunto X qualquer, e atribuir números reais aos mesmos de acordo com certas regras a serem tornadas precisas. Fala-se então que essa maneira de atribuir números reais (em geral não negativos) a subconjuntos de X nos dá uma *medida* em (ou sobre) X . Um aspecto talvez surpreendente na Teoria da Medida é que tais noções intuitivas, uma vez formalizadas de forma adequada, *não podem ser aplicadas a qualquer conjunto*, isto é, nem todos os subconjuntos de um dado conjunto podem ser *mensuráveis*, dada uma medida (veja um exemplo desse fato mesmo para certos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, os chamados conjuntos de Vitali, em [24]). Com isso queremos dizer, não que tais subconjuntos não-mensuráveis tenham uma medida infinita, mas que essa noção não faz sentido, isto é, a medida não pode ser finita, infinita, ou nula. A caracterização dos conjuntos mensuráveis é também parte da Teoria da Medida. Finalmente, existe uma estreita relação entre a noção de medida sobre um conjunto e a noção de integração de funções sobre o mesmo. Elucidar e formalizar essa relação é outro tópico fundamental na teoria.

Começemos então tomando um conjunto Ω e consideremos o conjunto de todos os subconjuntos de Ω , que denotaremos por $P(\Omega)$, ou seja, $P(\Omega) = \{A \mid A \text{ é subconjunto de } \Omega\}$. Conforme mencionamos, em geral nem todos os subconjuntos de Ω , isto é, nem todos os elementos de $P(\Omega)$, poder ter uma medida associada. A formalização de conjuntos mensuráveis é dada via a noção de σ -álgebra:

Definição 5 *Um subconjunto não-vazio $\mathcal{M} \subseteq P(\Omega)$ é dito ser uma σ -álgebra sobre Ω se possui as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, \Omega \in \mathcal{M}$;
2. $A \in \mathcal{M}$ implicar que o complemento de A em Ω , $A^c \equiv \Omega \setminus A$, pertence $\mathcal{M}$;
3. Dada uma seqüência contável $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{M}$, a união $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

Observamos ainda que o nome σ -álgebra possui raízes históricas e nada tem a ver com o conceito usual de uma álgebra (um espaço vetorial dotado de um produto entre seus elementos), veja Ref. [24] para maiores detalhes.

Cada membro de uma σ -álgebra é chamado de *conjunto mensurável*. Um par $(\Omega, \mathcal{M})$, onde Ω é um conjunto e $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra sobre Ω é chamado de *espaço mensurável*. Frequentemente se omite $\mathcal{M}$ quando não há possibilidade de confusão e se fala do próprio Ω como um espaço mensurável.

Fixemos então o conjunto Ω e consideremos alguns exemplos de σ -álgebra:

- $P(\Omega)$ é um exemplo de σ -álgebra, e de fato é claramente a maior σ -álgebra que se pode formar sobre Ω . É a chamada σ -álgebra *discreta*.
- Seja $\mathcal{M}$ o conjunto formado por dois elementos, $\mathcal{M} = \{\emptyset, \Omega\}$. Essa é a menor σ -álgebra que se pode formar em Ω e é chamada σ -álgebra *indiscreta* ou *trivial*.
- Considere-se um subconjunto $A \subset \Omega$. A coleção $\mathcal{M} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ é uma σ -álgebra. De fato, é fácil ver que esta é a menor σ -álgebra contendo A , e é chamada de σ -álgebra *gerada* por A .

Exemplos menos triviais são obtidos por uma classe de σ -álgebras, que são de fato as únicas relevantes nesta tese, as chamadas σ -álgebras de Borel, que passamos a discutir.

Primeiramente vamos estabelecer um resultado importante: *uma intersecção arbitrária de σ -álgebras é uma σ -álgebra*.

De fato, seja Ω um conjunto e seja $\{\mathcal{M}_i\}_{i \in I}$ uma coleção de σ -álgebras sobre Ω , onde I é um conjunto qualquer de índices (não necessariamente discreto). Note-se que uma vez que cada $\mathcal{M}_i$ é individualmente uma σ -álgebra, e portanto $\emptyset, \Omega \in \mathcal{M}_i$, para cada $i \in I$. Segue-se imediatamente que $\emptyset, \Omega \in \mathcal{M} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{M}_i$. Seja agora $A \subset \Omega$, tal que $A \in \mathcal{M}$. Neste caso, $A \in \mathcal{M}_i$, para todo $i \in I$, e novamente pelo fato destas serem σ -álgebras, o complemento A^c de A em Ω é um elemento de cada $\mathcal{M}_i$, e portanto $A^c \in \mathcal{M}$. Finalmente, dada uma seqüência contável $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{M}$. Então, para cada $i \in I$, $A_n \in \mathcal{M}_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto a união $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}_i$. Mas então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ e a prova está completa.

Podemos então dar a seguinte definição:

Definição 6 Considere um subconjunto não-vazio $\mathcal{C} \subseteq P(\Omega)$, ou seja, uma coleção não-vazia de subconjuntos de Ω . A intersecção de todas as σ -álgebras sobre Ω que contêm a coleção $\mathcal{C}$ é uma σ -álgebra sobre Ω , chamada a σ -álgebra gerada por $\mathcal{C}$. Essa é obviamente a menor σ -álgebra contendo $\mathcal{C}$.

Agora estamos prontos para definir a σ -álgebra de Borel de um espaço topológico.

Definição 7 Seja (X, τ) um espaço topológico, onde τ é uma topologia sobre X , portanto uma coleção de subconjuntos de X , chamados abertos. A σ -álgebra gerada por τ é chamada σ -álgebra de Borel sobre (X, τ) . Será denotada por $\mathcal{B}(X, \tau)$. Quando estiver claro a que topologia nos referimos, escreveremos simplesmente $\mathcal{B}(X)$. Os elementos de $\mathcal{B}(X, \tau)$ são chamados de conjuntos de Borel ou borelianos.

Assim, quando escrevermos $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, estará subentendida a topologia usual de $\mathbb{R}^n$.

Tendo introduzido os conjuntos mensuráveis, passamos a definir medida.

Definição 8 Seja $(\Omega, \mathcal{M})$ um espaço mensurável. Uma medida em $(\Omega, \mathcal{M})$ é uma função $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. Dada uma seqüência contável $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos disjuntos de $\mathcal{M}$, $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

Uma tripla $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, onde Ω é um conjunto, $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra sobre Ω e μ é uma medida em $(\Omega, \mathcal{M})$ é chamada *espaço de medida*. Se (Ω, τ) é um espaço topológico, uma medida em $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega, \tau))$ é chamada de uma *medida de Borel*. Em geral, um dado espaço topológico admite muitas medidas de Borel distintas.

Consideremos alguns exemplos.

- *A Medida de Contagem*. Seja $(\Omega, \mathcal{M})$ um espaço de medida. Para $A \in \mathcal{M}$ definimos

$$\mu_c(A) = \begin{cases} \infty, & \text{se } A \text{ não for um conjunto finito} \\ \text{o número de elementos de } A, & \text{se } A \text{ for um conjunto finito.} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Essa medida “conta” os elementos de cada conjunto mensurável.

- *A Medida de Dirac em x_0* . Sejam $(\Omega, \mathcal{M})$ um espaço de medida, e x_0 um elemento de Ω . Para cada $A \in \mathcal{M}$ definimos

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } x_0 \notin A \\ 1, & \text{se } x_0 \in A \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Essa é uma medida “concentrada” em x_0 .

Recordamos ao leitor que dados dois espaços topológicos (X, τ_X) e (Y, τ_Y) , uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita ser contínua se $\forall U \in \tau_Y, f^{-1}(U) \in \tau_X$, isto é, se a imagem inversa de todo aberto for um aberto. Existe uma definição análoga para espaços mensuráveis.

Definição 9 Sejam $(\Omega, \mathcal{M}_\Omega)$ e $(\Pi, \mathcal{M}_\Pi)$ espaços mensuráveis. Uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \Pi$ é dita ser mensurável se $\forall A \in \mathcal{M}_\Pi, f^{-1}(A) \in \mathcal{M}_\Omega$, isto é, se a imagem inversa de todo conjunto mensurável é um conjunto mensurável.

Se Ω e Π são ademais espaços topológicos, e as respectivas σ -álgebras são de Borel, uma função mensurável entre esses dois espaços é chamada de *função de Borel* ou *função boreliana*.

Dado um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$, podemos definir uma noção de integral de uma funções mensurável f sobre um conjunto mensurável $A \in \mathcal{M}$, que denotamos $\int_A f d\mu$. A construção é um pouco envolvida e não a descreveremos aqui. Veja em especial a Ref. [23].

Apêndice B

O Teorema de Classificação

Neste Apêndice, nosso objetivo é mostrar como o teorema de classificação de RI's enunciado na Seção 4.2 do Capítulo 4 segue de forma relativamente imediata de um teorema mais geral encontrado nas Refs. [80, 81]. Uma demonstração dessa versão mais geral está além do escopo desta tese. Contudo, esse teorema envolve conceitos não diretamente tratados ao longo da dissertação, e portanto faz-se necessária uma ligação com nossa versão simplificada.

Nossa estratégia terá três passos. Inicialmente, vamos definir com mais detalhe a noção de álgebra de grupo de transformação, mencionada superficialmente no Capítulo 4. Essa classe de álgebras foi definida por Glimm em [80], que essencialmente classificou suas representações irredutíveis. Aqui, utilizaremos uma versão do teorema de Glimm em termos das chamadas *representações induzidas* de um grupo G localmente compacto por um subgrupo fechado H (teorema 3.9 de [81]). O conceito de representações induzidas em si, porém, não será diretamente necessário para nós, e o omitiremos aqui. O leitor interessado pode consultar [78] para uma definição detalhada e algumas propriedades desse tipo de representação. A seguir, apresentamos o teorema de classificação geral. Finalmente, mostraremos que as representações que obtivemos no corpo da tese são equivalentes às fornecidas por esse teorema geral.

Começamos com a definição formal de uma álgebra de grupo de transformação.

Definição 10 *Seja G um grupo compacto agindo de forma contínua sobre um espaço topológico compacto X ¹. Denotemos a ação por*

$$\begin{aligned}\alpha : G \times X &\rightarrow X \\ (g, x) &\mapsto \alpha_g(x).\end{aligned}\tag{B.1}$$

Seja $C(G \times X)$ o conjunto das funções contínuas a valores complexos sobre $G \times X$. Dizemos que $C(G \times X)$ é uma álgebra de grupo de transformação (AGT) se o mesmo é dotado de um produto " $\bullet$ " e de uma $$ -operação dadas por*

$$(F_1 \bullet F_2)(x, g) = \int_G F_1(x, h) F_2(\alpha_{h^{-1}}(x), h^{-1}g) dh, \tag{B.2}$$

¹A teoria de representação pode de fato ser estendida para o caso de G e X serem apenas localmente compactos. Nos restringimos ao caso compacto por simplicidade, uma vez que este já será suficiente para nosso objetivo.

$$F^*(x, g) = F(\alpha_{g^{-1}}(x), g^{-1}),$$

onde a barra superior denota conjugação complexa e a integração é com respeito à medida de Haar sobre G .

Pode-se checar diretamente da definição que $C(G \times X)$ é uma $*$ -álgebra.

Vamos mostrar que nossa álgebra $\mathbb{C}(G) \ltimes \mathcal{F}(X)$, definida, quando G e X são finitos, por (4.34), é de fato uma AGT. Com efeito, se G e X são finitos, podemos considerar o conjunto

$$B := \{Q_x \otimes \delta_g \mid x \in X, g \in G\}. \quad (\text{B.3})$$

Seguindo a notação introduzida nesta tese, Q_x é a função característica em X com suporte em x , e δ_g denota o mesmo tipo de função em G com suporte em g . Vemos facilmente que o conjunto B é uma base para $C(G \times X)$ (todas as funções são contínuas neste caso). Em termos destes elementos, as operações na eq. (B.2) se tornam

$$\begin{aligned} (Q_x \otimes \delta_g) \bullet (Q_{x'} \otimes \delta_{g'}) &= \delta_{x, \alpha_g(x')} (Q_x \otimes \delta_{gg'}), \\ (Q_x \otimes \delta_g)^* &= Q_{\alpha_{g^{-1}}(x)} \otimes \delta_{g^{-1}}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Vemos que essa álgebra é de fato isomórfica à que definimos no Capítulo 4, ou em outras palavras $\mathbb{C}(G) \ltimes \mathcal{F}(X) \simeq C(G \times X)$. Não mencionamos a $*$ -operação naquele contexto, pois não fizemos uso da mesma.

Daqui por diante, fixamos G e X compactos e com uma ação contínua α de G em X . Fixamos também a AGT $C(G \times X)$ correspondente. Glimm [80] define uma norma em $C(G \times X)$ por

$$\|F\|_1 := \int_G \|F(\cdot, h)\|_\infty dh, \quad (\text{B.5})$$

onde $\|\cdot\|_\infty$ é a norma do sup em X . Nesse caso, teremos

$$\|F_1 \bullet F_2\|_1 \leq \|F_1\|_1 \|F_2\|_1. \quad (\text{B.6})$$

O teorema de classificação que apresentaremos adiante classifica todas as $*$ -representações irredutíveis e $\|\cdot\|_1$ -limitadas de $C(G \times X)$ (a menos de equivalências). Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert carregando uma representação τ de $C(G \times X)$. Então, τ é dita $\|\cdot\|_1$ -limitada se para todo $\psi \in \mathcal{H}$ tivermos $\|\tau(F)\psi\|_{\mathcal{H}} \leq \|F\|_1 \|\psi\|_{\mathcal{H}}$, para quaisquer $\psi \in \mathcal{H}$ e $F \in C(G \times X)$.

Seja agora H um subgrupo fechado de G . É possível mostrar que a medida de Haar em G induz uma medida G -invariante μ no espaço G/H dos cosets à esquerda. Pode-se mostrar também que toda medida em G/H é equivalente a esta. Não faremos essas demonstrações aqui, mas o leitor interessado pode consultar [122].

Seja ρ uma representação unitária de H num espaço de Hilbert V_ρ . Podemos então definir o conjunto

$$\begin{aligned} L_\rho^2(G, V_\rho) &:= \{ \psi : G \rightarrow V_\rho \mid \psi(gh) = \rho(h^{-1})\psi(g), \forall h \in H, \\ &\text{e } \|\psi\|^2 := \int_{G/H} \|\psi(z)\|_{V_\rho}^2 d\mu \}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Este conjunto se torna um espaço de Hilbert se introduzimos o produto interno

$$\langle \psi, \phi \rangle := \int_{G/H} \langle \psi(z), \phi(z) \rangle_{V_\rho} d\mu. \quad (\text{B.8})$$

Podemos agora enunciar o teorema de classificação (correspondente ao teorema (3.9) da Ref.[81]) ²:

Teorema 2 *Sejam G e X como acima. Seja $\{\mathcal{O}_i\}_{i \in I}$ a coleção de G -órbitas em X (I é um conjunto de índices). Para cada $i \in I$ escolhamos algum $x_i \in \mathcal{O}_i$; seja K_{x_i} o subgrupo de estabilidade de x_i em G , e adotemos a medida invariante μ_i em $G/K_{x_i} \simeq \mathcal{O}_i$. Denotemos por $\tilde{K}_{x_i}$ o conjunto das classes de equivalência de representações unitárias de K_{x_i} . Para cada $\rho \in \tilde{K}_{x_i}$, escolhamos um representante, também denotado por ρ , que é uma representação irredutível e unitária de K_{x_i} em algum espaço de Hilbert V_ρ . Então, para $i \in I$ e $\rho \in \tilde{K}_{x_i}$, temos $*$ -representações τ_ρ^i , irredutíveis, $\|\cdot\|_1$ -limitadas e mutuamente inequivalentes, de $C(G \times X)$ em $L_\rho^2(G, V_\rho)$ dadas por*

$$(\tau_\rho^i(F)\psi)(g) := \int_G F(\alpha_g(x_i), h) \psi(h^{-1}g) dh, \quad (\text{B.9})$$

e todas as $*$ -representações irredutíveis e $\|\cdot\|_1$ -limitadas de $C(G \times X)$ são equivalentes a alguma τ_ρ^i .

Para posterior referência, notamos que para o caso particular de $F = f \otimes \delta_h$, (B.9) se reduz a

$$(\tau_\rho^i(f \otimes \delta_h)\psi)(g) := f(\alpha_g(x_i)) \psi(h^{-1}g). \quad (\text{B.10})$$

Vamos fazer uma pequena pausa para explicar o que queremos dizer com o termo “representações equivalentes”. Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra e sejam R_1 e R_2 representações de $\mathcal{A}$ em espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente. Dizemos que R_1 e R_2 são *equivalentes* se existe um operador unitário $V : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$, chamado *operador entrelaçante*, tal que

$$V(R_1(a)\phi_1) = R_2(a)V(\phi_1), \quad (\text{B.11})$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ e $\phi_1 \in \mathcal{H}_1$.

Agora, só nos resta a tarefa de demonstrar a equivalência com nossa abordagem. Para este fim, vamos assumir a partir de agora que G e X são finitos. Fixemos uma representação irredutível e unitária ρ de $\mathbb{C}(G)$ no espaço de Hilbert V_ρ , e uma base $\{|j\rangle_\rho\}_{j=1,\dots,N}$ de V_ρ . Fixemos também $x_0 \in X$, e um conjunto $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,M}$ de representantes de cada classe de equivalência elemento do espaço G/K_{x_0} dos cosets à esquerda. Sabemos então que o conjunto $\{|\alpha_{\xi_i}(x_0)\rangle \otimes |j\rangle_\rho\}$ é uma base ortonormal de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_r$, que carrega uma representação irredutível r de $\mathbb{C}(G) \rtimes \mathcal{F}(X) \simeq C(G \times X)$. Se denotamos por $\mathcal{O}$ a G -órbita de x_0 em X , é fácil ver $\mathcal{H}_r \equiv \mathcal{F}(\mathcal{O}) \otimes V_\rho$. Definimos então uma aplicação linear dada por

$$\begin{aligned} V : \mathcal{F}(\mathcal{O}) \otimes V_\rho &\rightarrow L_\rho^2(G, V_\rho) \\ \phi \otimes v &\mapsto \psi_{\phi \otimes v}, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

²Avisamos ao leitor que o teorema foi adaptado aqui para o subcaso de G e X compactos, e que adotamos uma notação ligeiramente diferente daquela usada em [81].

onde

$$\psi_{\phi \otimes v}(g) := \phi(\alpha_{\xi_i}(x_0))\rho(h_g^{-1})v. \quad (\text{B.13})$$

Aqui, $h_g \in K_{x_0}$ é univocamente definido pela equação $g = \xi_i h_g$, para algum dos ξ_i 's.

É fácil ver que V assim definida é uma bijeção. Por exemplo, mostremos que a mesma é sobrejetora. Dada $\psi \in L^2_\rho(G, V_\rho)$, temos para todo $g \in G$ ($\equiv \xi_i h_g$, para algum ξ_i),

$$\psi(g) \equiv \sum_j \psi^j(g) |j\rangle_\rho = \sum_j \psi^j(\xi_i)\rho(h_g^{-1}) |j\rangle_\rho \equiv V\left(\sum_j f_\psi^j \otimes |j\rangle_\rho\right)(g),$$

onde definimos as funções $f_\psi^j \in \mathcal{F}(\mathcal{O})$ por $f_\psi^j(\alpha_g(x_0)) := \psi^j(\xi_i)$. Vemos também que V é um operador unitário:

$$\begin{aligned} \langle V(\phi \otimes v), V(\phi \otimes v) \rangle_{L^2_\rho(G, V_\rho)} &= \sum_{G/K_{x_0}} \langle \psi_{\phi \otimes v}(z), \psi_{\phi \otimes v}(z) \rangle_{V_\rho} \\ &= \sum_{\xi_i} \phi(\alpha_{\xi_i}^{-1}(x_0))\phi(\alpha_{\xi_i}(x_0))\langle v, v \rangle_{V_\rho} \\ &\equiv \langle \phi \otimes v, \phi \otimes v \rangle_{\mathcal{H}_r}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Só nos falta agora demonstrar que V é um operador entrelaçante. No que segue, usaremos a notação $\delta_g \equiv g$. Consideremos um elemento $(f, g) := \sum_{x \in X} f(x)(Q_x, g)$ de $\mathbb{C}(G) \ltimes \mathcal{F}(X)$. Dado $\phi \otimes v \in \mathcal{F}(\mathcal{O}) \otimes V_\rho$, temos

$$\begin{aligned} (f, g) \cdot (\phi \otimes v) &= \sum_{x \in X} \sum_{i,j} f(x)\phi(\alpha_{\xi_i}(x_0))v^j(Q_x, g) | \alpha_{\xi_i}(x_0) \rangle \otimes |j\rangle_\rho \\ &\equiv \sum_{x \in X} \sum_{i,j} f(x)\phi(\alpha_{x\xi_i}(x_0))v^j\delta_{x, \alpha_{\xi_i^g}(x_0)} | \alpha_{\xi_i^g}(x_0) \rangle \otimes \rho(h_g^i) |j\rangle_\rho \\ &= \sum_i f(\alpha_{\xi_i^g}(x_0))\phi(\alpha_{\xi_i}(x_0)) | \alpha_{\xi_i^g}(x_0) \rangle \otimes \rho(h_g^i)v, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

onde ξ_i^g e o elemento $h_g^i \in K_{x_0}$ são univocamente definidos pela equação $g\xi_i := \xi_i^g h_g^i$. Agora, dado $y \in G$, escrevemos $y \equiv \xi_l h_y$; com essa notação, temos, usando a definição de V ,

$$V((f, g) \cdot (\phi \otimes v))(y) = \sum_i f(\alpha_{\xi_i^g}(x_0))\phi(\alpha_{\xi_i}(x_0))\delta_{\alpha_{\xi_i^g}(x_0), \alpha_{\xi_l}(x_0)}\rho(h_y^{-1}h_g^i)v. \quad (\text{B.16})$$

Nesta equação, só sobrevivem os termos para os quais $\xi_i^g = \xi_l$. Suponhamos que existam ξ_i, ξ_i' tais que

$$\begin{aligned} g\xi_i &= \xi_l\beta_1, \\ g\xi_i' &= \xi_l\beta_2, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

com $\beta_1, \beta_2 \in K_{x_0}$. Neste caso, $g\xi_i\beta_1^{-1} = g\xi_i'\beta_2^{-1}$, e portanto $\xi_i = \xi_i'(\beta_2^{-1}\beta_1)$. Mas isto só é possível se $\xi_i = \xi_i'$ e $\beta_1 = \beta_2$.

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tomo: 3549 ex. 1

Agora, note-se que podemos escrever $g^{-1}y = \xi_k \beta_k$; ξ_k e $\beta_k \in K_{x_0}$ são univocamente determinados. Portanto, $g\xi_k = \xi_l h_y \beta_k^{-1}$; da unicidade desse ξ_k , concluímos que

$$V((f, g) \cdot (\phi \otimes v))(y) = f(\alpha_y(x_0))\phi(\alpha_{g^{-1}y}(x_0))\rho(\beta_k^{-1})v \quad (\text{B.18})$$

Por outro lado, por definição, temos

$$V(\phi \otimes v)(g^{-1}y) = \phi(\alpha_{\xi_k}(x_0))\rho(\beta_k^{-1})v. \quad (\text{B.19})$$

Uma vez que $\alpha_{g^{-1}y}(x_0) \equiv \alpha_{\xi_k}(x_0)$, comparando (B.18) e (B.19) chegamos finalmente a

$$V((f, g) \cdot (\phi \otimes v)) = f(\alpha_y(x_0))V(\phi \otimes v)(g^{-1}y). \quad (\text{B.20})$$

Esse resultado mostra que V é de fato um operador entrelaçante entre as representações $(r, \mathcal{H}_r)$ e $(\tau_\rho^0, L_\rho^2(G, V_\rho))$, o que conclui a demonstração (conf. a eq. (B.10)) de equivalência entre as mesmas.

Referências Bibliográficas

- [1] B.F. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (1980).
- [2] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing, Bristol e Filadélfia (1990).
- [3] C. Nash e S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists*, Academic Press, San Diego (1983).
- [4] C. Nash, *Differential Topology and Quantum Field Theory*, Academic Press, London (1991).
- [5] M. Göckeler e T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge University Press, Cambridge (1987).
- [6] J. Baez e J.P. Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, World Scientific, Singapore (1994).
- [7] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Wiley, New York (1972).
- [8] C.W. Misner, K.S. Thorne e J.A. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973).
- [9] R.M. Wald, *General Relativity*, Chicago University Press, Chicago (1984).
- [10] R. d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press, Oxford (1992).
- [11] I.M. Benn e R.W. Tucker, *An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics*, IOP Publishing, Bristol e Filadélfia (1987).
- [12] S.W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **43** (1975) 199.
- [13] G.W. Gibbons and S.W. Hawking, *Euclidean Quantum Gravity*, World Scientific, Singapore (1993).
- [14] R.M. Wald, "The Thermodynamics of Black Holes", preprint de Los Alamos gr-qc/9912119.

- [15] N.D. Birrel e P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [16] F.J. Tipler, Ann. of Phys. **108** (1977) 1;
S.W. Hawking, Nucl. Phys. **B144** (1978) 349;
R. Sorkin, Phys. Rev. **D33** (1986) 978;
A. Anderson and B. DeWitt, Found. Phys. **16** (1986) 91;
C.A. Manogue, E. Copeland and T. Dray, Parmana **30** (1988) 279;
G. Horowitz, Class. Quant. Grav. **8** (1991) 587.
- [17] R.P. Feynmann e A.P. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York (1965).
- [18] J. Glimm e A. Jaffe, *Quantum Physics - A Functional Integral Point of View*, Segunda Edição, Springer-Verlag, New York (1987).
- [19] R.P. Geroch, J. Math. Phys. **8** (1967) 782.
- [20] S.H. Hawking e G.F.R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [21] E. Witten, Nucl. Phys. **B323** (1989) 113.
- [22] G.W. Gibbons e S.W. Hawking, Comm. Math. Phys. **148** (1992) 345.
- [23] P.J. Fernandez, *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1976).
- [24] J.C.A. Barata, Notas de Aula, IFUSP.
- [25] J.A. Wheeler, Phys. Rev. **97** (1955) 511;
J.A. Wheeler, Ann. Phys. **2** (1957) 60;
J.A. Wheeler, *Geometrodynamics*, Academic Press, New York (1962).
- [26] J.L. Friedman e R.D. Sorkin, Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 1100;
J.L. Friedman e R.D. Sorkin, Gen. Rel. Grav. **14** (1982) 615.
- [27] J.L. Friedman e D.M. Witt, Phys. Lett. B **120** (1983) 324;
D.M. Witt, J. Math. Phys. **27** (1986) 573.
- [28] R.D. Sorkin, "Introduction to Topological Geons", in *Topological Properties and Global Structure of Spacetime*, editado por P.G. Bergmann e V. de Sabhata, Plenum, New York (1986).
- [29] S.D. Sorkin, "Classical Topology and Quantum Phases: Quantum Geons", in *Proceedings, Geometric and Algebraic Aspects of Non-linear Field Theory, Amalfi, Italy, May 1988*, editado por G. Marmo, S. De Fillipo, M. Marinaro e G. Vilasi, North-Holland, Amsterdam e New York (1989).

- [30] C. Aneziris, A.P. Balachandran, M. Bourdeau, S. Jo, T.R. Ramadas e R.D. Sorkin, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 331;
C. Aneziris, A.P. Balachandran, M. Bourdeau, S. Jo, R.D. Sorkin e T.R. Ramadas, *Int. Jour. Mod. Phys.* **A4** (1989) 5459.
- [31] J. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993) 215.
- [32] R.D. Sorkin e Sumati Surya, "Geon Statistics and UIR's of the Mapping Class Group", in *Proceedings: First Latin American Symposium on High Energy Physics and VII Mexican School of Particles and Fields, Mérida, México, Nov. 1996*, editado por Juan Carlos D'Olivo, Martin Klein-Kreislev e Héctor Méndez, AIP Conference Proceedings 400, New York (1997).
- [33] H.F. Dowker e R.D. Sorkin, *Class. Quant. Grav.* **15** (1998) 1153.
- [34] R.D. Sorkin e S. Surya, *Int. J. Mod. Phys.* **A13** (1998) 3749.
- [35] A.P. Balachandran, E. Batista, I.P. Costa e Silva e P. Teotonio-Sobrinho, *Int. J. Mod. Phys.*, **A15** (2000) 1629, preprint de Los Alamos hep-th/9905136.
- [36] A.P. Balachandran, E. Batista, I.P. Costa e Silva e P. Teotonio-Sobrinho, *Nucl. Phys.* **B566** (2000) 441, preprint de Los Alamos hep-th/9906174.
- [37] A.P. Balachandran, E. Batista, I.P. Costa e Silva e P. Teotonio-Sobrinho, "A Novel Spin-Statistics Theorem in $(2 + 1)d$ Gravity" (submetido ao *Mod. Phys. Lett. A*).
- [38] A.P. Balachandran, E. Batista, I.P. Costa e Silva e P. Teotonio-Sobrinho, "On a Generalized Spin-Statistics Relation for Quantum Geons" (em preparação).
- [39] H.F. Dowker e R.D. Sorkin, "Spin and Statistics in Quantum Gravity", preprint de Los Alamos gr-qc/0101042.
- [40] F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1144;
F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **49** (1982) 957;
J. Fröhlich and P.A. Marchetti, *Nucl. Phys.* **B356** (1991) 533.
- [41] D.J. Simms, *Lie Groups and Quantum Mechanics*, Lecture Notes in Math. 52, Springer-Verlag, New York (1968).
- [42] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York (1950).
- [43] L. O'Raiheartaigh, *Gauge Structure of Gauge Theories*, Cambridge University Press, Cambridge (1986).
- [44] D.H. Sattinger e O.L. Weaver, *Lie Groups and Algebras with Applications to Physics, Geometry and Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1986).
- [45] A. Sudberry, *Quantum Mechanics and the Particles of Nature - An Outline for Mathematicians*, Cambridge University Press, Cambridge (1986).

- [46] B.S. DeWitt, Phys. Rev. **162** (1967) 1195;
B.S. DeWitt, Phys. Rev. **162** (1967) 1239.
- [47] R.J. Jackiw e C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **36** (1976) 1116.
- [48] P. Hasenfratz e G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **36** (1976) 1119.
- [49] A.P. Balachandran, G. Marmo, B.-S. Skagerstam e A. Stern, *Classical Topology and Quantum States*, World Scientific, Singapore (1991).
- [50] A. Ashtekar, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity*, World Scientific, Singapore (1991).
- [51] C.J. Isham, R. Penrose e D.W. Sciama (eds.), *Quantum Gravity: An Oxford Symposium*, Oxford University Press, Oxford (1975);
C.J. Isham, R. Penrose e D.W. Sciama (eds.), *Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium*, Oxford University Press, Oxford (1981).
- [52] A. Ashtekar e R.P. Geroch, Rept. Prog. Phys. **37** (1974) 1211.
- [53] R. Arnowitt, S. Deser e C.S. Misner, "The Dynamics of General Relativity", in *Gravitation: An Introduction to Current Research*, editado por Louis Witten, Wiley, New York (1962).
- [54] A. Held (ed.), *General Relativity and Gravitation - One Hundred Years After the Birth of Albert Einstein*, Plenum, New York (1980).
- [55] A. Fischer e E. Marsden, "The Initial Value Problem and the Dynamical Formulation of General Relativity", in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, editado por S.W. Hawking e W. Israel, Cambridge University Press, Cambridge (1979).
- [56] R. Abraham e J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, Segunda Edição, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1978).
- [57] C. Camacho e A.L. Neto, *Teoria Geométrica das Folheações*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1979).
- [58] P.A.M. Dirac, Can. J. Math. **2** (1950) 129;
P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London **A109** 642.
- [59] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York (1964).
- [60] M. Henneaux e C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, New Jersey (1992).
- [61] T. Regge e C. Teitelboim, Ann. Phys. **88** (1974) 286.
- [62] J.D. Brown, *Lower Dimensional Gravity*, World Scientific, Singapore (1988).
- [63] R.M. Wald e A. Zoupas, Phys. Rev. **D61** (2000) 084027.

- [64] H. Hendriks, Bull. Soc. Math. France, Memoire **53** (1977) 81.
- [65] S. Deser, R. Jackiw e G. 't Hooft, Ann. Phys. **152** (1984) 220.
- [66] M. Henneaux, Phys. Rev. **D29** (1984) 2766;
S. Deser, Class. Quantum Grav. **2** (1985) 489.
- [67] E. Witten, Nucl. Phys. **B311** (1988) 41.
- [68] A. Ashtekar, V. Hussein, C. Rovelli, J. Samuel e L. Smolin, Class. Quantum Grav. **6** (1989) L185.
- [69] J. Stillwell, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag, New York (1980).
- [70] W.B.R. Lickorish, Proc. Camb. Phil. Soc. **60** (1964) 769;
B. Wajnryb, Israel J. Math. **45** (1983) 157;
J.S. Birman, Contemp. Math. **78** (1988) 13.
- [71] J.S. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Princeton University Press, New Jersey (1972).
- [72] J. Hempel, *3-Manifolds*, Princeton University Press, New Jersey (1976).
- [73] H. Seifert e W. Threlfall, *A Textbook of Topology*, Academic Press, New York (1980).
- [74] N.M.J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, Segunda Edição, Oxford University Press, Oxford (1991).
- [75] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz e D. Sternheimer, Ann. Phys. **111** (1977) 61.
- [76] N.B. Landsman, *Mathematical Topics Between Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1998).
- [77] G.W. Mackey, Proc. Nat. Acad. Sci. **35** (1949) 537;
G.W. Mackey, Am. J. Math. **73** (1951) 576;
G.W. Mackey, Ann. Math. **55** (1952) 101;
G.W. Mackey, Ann. Math. **58** (1953) 193;
G.W. Mackey, Acta Math. **99** (1958) 265.
- [78] G.W. Mackey, *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*, Benjamin, New York (1968).
- [79] G.W. Mackey, *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Benjamin, New York (1963).
- [80] J. Glimm, Trans. Am. Math. Soc. **101** (1961) 124;
J. Glimm, Pacific J. Math. **12** (1962) 825.

- [81] T.H. Koornwinder e N.M. Muller, *J. Lie Theory* **7** (1997), 33. Erratum no volume 8 (1998).
- [82] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 1, Academic Press, New York (1975).
- [83] F.J. Thayer, *Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1987).
- [84] H.J. Gröenwald, *Physica* **12** (1946) 405;
L. Van Hove, *Mem. de l'Acad. Roy. de Belgique (Classe des Sci.)* **XXVI** (1951) 61.
- [85] C.J. Isham, "Structural Problems Facing Quantum Gravity", in *Proceedings of the 14th International Conference on General Relativity and Gravitation*, editado por M. Francaviglia, G. Longhi, L. Lusanna e E. Sorace, World Scientific, Singapore (1997).
- [86] C. Rovelli, "Loop Quantum Gravity", *Living Reviews of Relativity* (revista eletrônica), gr-qc/9710008.
- [87] D. Marolf, "String/M-branes for Relativists", gr-qc/9908045.
- [88] H.-J. Matschull, *Class. Quantum Grav.* **12** (1995) 2621.
- [89] V. Moncrief, *J. Math. Phys.* **30** (1989) 2907;
S. Carlip, "Lectures on $(2 + 1)$ -Dimensional Gravity", gr-qc/9503024;
S. Carlip e J.E. Nelson, *Phys. Lett.* **B324** (1994) 299;
S. Carlip e J.E. Nelson, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 5642.
- [90] S. Carlip, *Quantum Gravity in $2 + 1$ Dimensions*, Cambridge University Press, Cambridge (1998).
- [91] E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **117** (1998) 353;
E. Witten, *Comm. Math. Phys.* **121** (1989) 351.
- [92] S. Axelrod, S. Della Pietra e E. Witten, *J. Diff. Geom.* **33** (1991) 787.
- [93] C. Itzykson e J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, Singapore (1980).
- [94] M. Atiyah e R. Bott, *Phil. Trans. R. Soc. London* **A308** (1982) 523;
N.J. Hitchin, *Comm. Math. Phys.* **131** (1990) 347;
W. Goldman, *Adv. Math.* **54** (1984) 200;
W. Goldman, *Invent. Math.* **93** (1988) 557.
- [95] M. Atiyah, *The Geometry and Physics of Knots*, Lezioni Lincee, Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [96] D. Birmingham, M. Blau e G. Thompson, *Phys. Rep.* **209** (1991) 129.
- [97] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton (1951).

- [98] J. Louko and D.M. Marolf, *Class. Quantum Grav.* **11** (1994) 311
- [99] S. Carlip, *Nucl. Phys.* **B324** (1989) 106.
- [100] M.D.F. de Wild Propitius, "Topological Interactions in Broken Gauge Theories", tese de doutoramento, Universidade de Amsterdam, 1995, preprint de Los Alamos hep-th/9511195.
- [101] R. Dijkgraaf, V. Pasquier e P. Roche, *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **18B** (1990) 60.
- [102] S. Sawin, "Links, Quantum Groups and TQFT's", preprint de Los Alamos gr-qc/9506002.
- [103] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **129** (1990) 393.
- [104] D.S. Freed and F. Quinn, *Commun. Math. Phys.* **156** (1993) 435.
- [105] A.S. Schwarz, *Quantum Field Theory and Topology*, Springer-Verlag, Berlin (1993).
- [106] K. Huang, *Statistical Mechanics*, Segunda Edição, Wiley, New York (1987).
- [107] S. Coleman, "Classical Lumps and Their Quantum Descendants", in *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge (1985);
N.D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51** (1979) 591.
- [108] R. Rajamaran, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam (1982).
- [109] A. Abrikosov, *JETP* **5** (1959) 1174;
H.B. Nielsen e P. Olensen, *Nucl. Phys.* **B61** (1973) 45.
- [110] Y. Aharonov e D. Bohm, *Phys. Rev.* **115** (1959) 485.
- [111] F.A. Bais, *Nucl. Phys.* **B170** (1980) 32;
L. Krauss e J. Preskill, *Nucl. Phys.* **B341** (1990) 50;
F. Wilczek e Y.-S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 13.
- [112] H.-K. Lo e J. Preskill, *Phys. Rev.* **D48** (1993) 4821;
K.-M. Lee, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 2030.
- [113] M. F. Atiyah, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. Paris* **68** (1989) 175.
- [114] M. A. Rieffel, *Adv. Math.* **13** (1974) 176.
- [115] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag, New York (1995).
- [116] N. Reshetikhin and V.G. Turaev, *Invent. Math.* **103** (1991) 547.
- [117] M. Hamermesh, *Group Theory and Its Application to Physical Problems*, Dover, New York (1962).
- [118] K. Szlachányi and P. Vecsernyés, *Comm. Math. Phys.* **156** (1993) 127.

- [119] A.P. Balachandran and C.G. Trahern, *Lectures on Group Theory for Physicists*, Monographs and Textbooks in Physical Science 3, Bibliopolis, Napoli (1985).
- [120] A.P. Balachandran, F. Lizzi e V.G. Rodgers, Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 1818;
A. Schwarz, Nucl. Phys. **B208** (1982) 141;
M.G. Alford, K. Benson, S. Coleman, J. March-Russel e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1623;
M.G. Alford, K. Benson, S. Coleman, J. March-Russel e F. Wilczek, Nucl. Phys. **B349** (1991) 414.
- [121] P. Nelson e A. Manohar, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 943;
A.P. Balachandran, G. Marmo, N. Mukunda, J.S. Nilsson, E.C.G. Sudarshan e F. Zaccaria, Phys. Rev. Lett. **50** (1983) 1553;
P. Nelson e S. Coleman, Nucl. Phys. **B237** (1984) 1.
- [122] L.H. Loomis, *Abstract Harmonic Analysis*, D. Van Nostrand, Princeton (1953).
- [123] D. Gannon, J. Math. Phys. **16** (1975) 2364;
C.W. Lee, Commun. Math. Phys. **51** (1976) 157.
- [124] J.L. Friedman, K. Schleich e D.M Witt, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 1486.
- [125] G.J. Galloway, K. Schleich, D.M Witt e E. Woolgar, "The AdS/CFT Correspondence Conjecture and Topological Censorship", Los Alamos preprint hep-th/9912119.
- [126] G. Mess. "Lorentz Spacetimes of Constant Curvature", preprint do Institut des Hautes Etudes Scientifiques IHES/M/90/28.
- [127] R.M. Wald e U. Yurtsever, Phys. Rev. **D44** (1991) 403.
- [128] P. Candelas, Phys. Rev. **D21** (1980) 2185.
- [129] M. Visser, *Lorentzian Wormholes - From Einstein to Hawking*, American Institute of Physics, New York (1996).