Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Inomogeneidade na distribuição de matéria no universo

Fabício Nascimento

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Elcio Abdalla (orientador)

Prof. Dr. Valerio Kurak (IFUSP)

Prof. Dr. Marcelo B. Ribeiro (UFRJ)

SBI-IFUSP

305M81013841

Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo para obtenção
do Título de Mestre em Física.

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

Maio 2003

del 12/06/03

523.1
N 244j

M

ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Nascimento, Fabrício

Inomogeneidade na Distribuição de Matéria no
Universo. São Paulo, 2003

Dissertação (Mestrado) Universidade de São Paulo
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Cosmologia;
2. Fractal; 3. Distribuição; 4. Matéria;
5. Inomogeneidade.

USP/IF/SBI-040/2003

Resumo

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, sob a orientação do Prof. Dr. [nome], para obtenção do título de Bacharel em Física. O trabalho trata da [tema] e foi desenvolvido durante o curso de graduação. O objetivo principal é [objetivo] e os resultados obtidos são [resultados].

Agradecimentos.

Muitas pessoas do Instituto foram importantes para mim durante este trabalho e há vários amigos que sempre estiveram dispostos a ajudar quando precisei. Agradeço sinceramente a todos eles.

Agradeço especialmente a meu orientador pelo trabalho.

Agradeço também a minha família que sempre me apoiou.

Finalmente, agradeço a FAPESP pelo suporte financeiro.

Resumo.

Através dos dados experimentais, tem-se constatado que a distribuição da matéria em grande escala do universo não é homogênea, revelando a existência de estruturas compatíveis com a conhecida formação de fractais pelo menos até distâncias de aproximadamente $200Mpc$. Resultados recentes corroboram tais observações, indicando a existência de vazios, "voids", e aglomerados de galáxias, fazendo com que o Modelo Padrão do universo sofra críticas. Neste contexto, foi proposta uma nova análise estatística para tratar os dados observacionais, que apresentam uma correlação compatível com a de uma distribuição fractal com dimensão $D = 2$.

Neste trabalho, são apresentadas duas abordagens para este problema. A primeira consiste em analisar e validar a "conjectura fractal aparente", a qual afirma que a estrutura fractal em pequena ou larga escala tem origem em efeitos relativísticos quando grandezas observáveis são calculadas ao longo do cone de luz passado do observador. A partir desta condição sobre tais grandezas relevantes para o estudo da distribuição de matéria, é verificado que mesmo em um universo espacialmente homogêneo do Modelo Padrão, sua densidade média em função da distância reproduz uma lei de potência característica de uma distribuição fractal e com valor para o expoente compatível com os medidos experimentalmente.

Na segunda abordagem, é construída uma Lagrangeana para um universo hierárquico. As equações do movimento são resolvidas numericamente e é obtida a evolução temporal da dimensão fractal para diferentes condições iniciais. O modelo, que é inicialmente homogêneo, evolui para um universo auto-similar com uma dimensão fractal aproximadamente constante.

Abstract.

The observational data lend some support to the idea that the large-scale distribution of matter in the universe is not homogeneous, revealing the existence of structures compatible with the well known fractal formations at least up to distances of $200Mpc$. Recent results indicate the existence of voids, clusters of galaxies and clusters of clusters. To face this problem, a new statistical analysis is presented to deal with the observational data, which shows a correlation compatible with a fractal distribution of dimension $D = 2$.

In this work, two different approaches for the problem are presented. The first one consists of an analysis of the "apparent fractal conjecture", which states that the observed fractal structure of large-scale distribution of galaxies arises when some observational quantities, selected by their relevance in fractal characterization, are calculated along the past light cone. Implementing this condition in the proposed set of observational relations profoundly changes the behavior of many observables in the standard cosmological models. In particular, the observed average density becomes inhomogeneous even in the spatially homogeneous spacetime of standard cosmology. It is approximately described by a fractal like distribution, with a scale behavior compatible with an observable single fractal system.

In the second approach, a non-relativistic Lagrangian for a hierarchical universe is constructed. The equations of motion are solved numerically and the evolution of the fractal dimension is obtained for different initial conditions. The model, which is initially homogeneous, evolves into a self-similar universe with a remarkably constant fractal dimension.

Índice

1	Modelo Padrão.	3
2	Geometria Fractal.	21
3	Distribuição de Matéria no Universo.	29
3.1	Modelo Fractal.	29
3.2	Função de Correlação.	32
3.3	Possível transição para homogeneidade.	42
3.4	Conclusões.	43
4	Conjectura Fractal Aparente.	45
4.1	Introdução.	45
4.2	Definição de densidade em cosmologia.	46
4.3	Distâncias cosmológicas.	47
4.4	Distância, volume e densidade.	49
4.5	Conjectura Fractal aparente	57
5	Perturbação Cosmológica e Resultados.	59
5.1	Teoria de perturbação.	59
5.2	Perturbações Invariantes de Escala das Equações de Einstein. . .	61
5.3	Perturbações Invariantes de Escala no caso Einstein-de Sitter. .	71
5.4	Cálculo dos observáveis sobre o cone de luz passado.	76
5.5	Problema numérico	82
5.6	Resultados obtidos pela solução numérica.	84
5.7	Conclusão.	89
6	Modelo dinâmico para um universo auto-similar.	91
6.1	Introdução.	91

6.2	Modelo Fractal.	92
6.3	Solução Numérica e suas Limitações.	96
6.4	Evolução da dimensão fractal.	97
6.5	A Lei de Hubble.	98
6.6	Idade do Universo.	100
6.7	Conclusões.	101
7	Considerações Finais.	102

Capítulo 1

Modelo Padrão.

Introdução.

A visão atual da evolução do universo é baseada no modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) descrito neste capítulo. Devido a seu grande sucesso, este modelo é aceito como padrão. Algumas equações estão apenas apresentadas, pois suas deduções são um pouco longas e não acrescentam informação relevante para este trabalho. Entretanto, tais equações serão úteis para os demais capítulos, principalmente no que irá tratar das perturbações nas equações de Einstein com invariância de dilatação.

As observações astronômicas são consistentes com um universo esféricamente simétrico que esteja próximo de uma distribuição homogênea para a matéria. O modelo de Friedmann-Robertson-Walker contendo a expansão do universo, explica a existência da lei de Hubble, prevê o espectro térmico da radiação cósmica de fundo e somado à Teoria Geral da Relatividade, cria um cenário razoável para a idade, para a massa do universo e para a abundância de elementos leves. Vê-se na cosmologia uma rede de resultados interconectados que sugere ser este o caminho para uma descrição aproximada da realidade.

Os elementos principais na ótica do modelo padrão podem ser resumidos como a seguir:

- O universo está se expandindo. A distância média l entre corpos está aumentando na proporção

$$\frac{dl}{dt} = H_0 l,$$

sendo o valor da constante de proporcionalidade, denominada *constante de Hubble*, igual a 75 km/s/Mpc também apresentado através da definição do *raio de Hubble*

$$L_H \equiv \frac{c}{H_0} \sim 4000 \text{ Mpc}.$$

- A distribuição da massa, na média em larga escala, está próxima de uma distribuição homogênea. Flutuações nesta distribuição estão limitadas a $\delta M/M \leq 10^{-4}$ para volumes em escala comparável ao raio de Hubble. As flutuações se tornam maiores, $\delta M/M \sim 1$, quando a escala observada é da ordem de um por cento da anterior.
- A dinâmica da expansão do universo é descrita pela Teoria Geral da Relatividade de Einstein. Ela proporciona uma descrição observacional e matematicamente consistentes.
- O universo expandiu de um estado quente e denso no qual sua energia total era dominada por uma radiação térmica de corpo negro.

O termo usual "big bang" neste modelo cosmológico é um pouco inadequado pois sugere identificar um evento que marca o início da expansão, além deste ser visto como uma explosão localizada no espaço. Ambas as idéias estão incorretas. O universo observado não indica haver uma posição privilegiada no qual tal explosão tivesse ocorrido mas é possível traçar a evolução do universo de volta no tempo até um estado em que a distância média entre as partículas era dez ordens de magnitude menor do que é hoje.

Princípio da Equivalência e Força Gravitacional.

O Princípio da Equivalência baseia-se na igualdade entre a massa gravitacional e a inercial, já demonstrada por Galileu, Huygens e Bessel. No conhecido exemplo do elevador em queda livre, como consequência desta igualdade, nenhum campo gravitacional estático e homogêneo pode ser detectado por um observador dentro do elevador pois tanto ele quanto o elevador respondem ao campo com a mesma aceleração.

A força inercial não cancela exatamente a força gravitacional para sistemas em queda livre em campos gravitacionais não homogêneos ou dependentes do tempo. Entretanto, pode-se esperar um cancelamento aproximado se a atenção for restrita a uma região suficientemente pequena na qual o campo gravitacional varie muito pouco. Satisfeita tal condição, formula-se o Princípio da Equivalência como: *em qualquer ponto do espaço-tempo de um campo gravitacional arbitrário, é possível escolher um sistema de coordenadas local tal que, numa região suficientemente pequena em torno deste ponto, as leis da física tenham a mesma forma que têm em um sistema de coordenadas cartesiano não acelerado e com ausência de gravidade.*

Considere uma partícula movendo-se livremente com a influência apenas de uma força gravitacional. De acordo com o Princípio da Equivalência, existe um sistema de coordenadas ξ^α em queda livre no qual sua equação de movimento é uma linha reta no espaço-tempo, ou seja,

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (1.1)$$

com $d\tau$ sendo o tempo próprio,

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (1.2)$$

e $\eta_{\alpha\beta}$ o Tensor de Minkowski dado por $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Suponha outro sistema de coordenadas x^μ que seja cartesiano e, para simplificar, em repouso com relação ao laboratório (poderia ser até mesmo um sistema curvilíneo ou acelerado). As coordenadas ξ^α do sistema em queda livre são funções de x^μ e a Eq.(1.1) será

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$, e sendo o produto

$$\frac{\partial \xi^\alpha \partial x^\lambda}{\partial x^\mu \partial \xi^\alpha} = \delta_\mu^\lambda,$$

obtém-se finalmente a equação de movimento

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0, \quad (1.3)$$

na qual $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é a *conexão afim*, definida como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (1.4)$$

O tempo próprio (1.2) também pode ser expresso em termos destas coordenadas arbitrárias,

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu,$$

ou seja,

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

tal que $g_{\mu\nu}$ seja o *tensor métrico* definido, agora em termos das novas coordenadas, por

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta}.$$

Para definir o significado de sistema "localmente inercial", dentro do Princípio da Equivalência, é necessário fixar que, em um ponto X no espaço-tempo, sempre será possível encontrar um sistema de coordenadas na qual a primeira derivada do tensor métrico $g_{\mu\nu}(X)$ seja nula, $g_{\mu\nu,\alpha}(X) = 0$ e que não seja possível eliminar sua segunda derivada, $g_{\mu\nu,\alpha\beta}(X) \neq 0$.

Este tratamento para a partícula em queda livre mostra que o campo que determina a força gravitacional é a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, sendo o intervalo em tempo próprio entre dois eventos, com separação infinitesimal, determinado pela forma do tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

A métrica $g_{\mu\nu}$ é agora o novo equivalente do potencial gravitacional, ou seja, suas derivadas determinam $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma$ pela equação

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right\}. \quad (1.5)$$

No limite Newtoniano pode-se conferir esta relação entre a métrica e o potencial gravitacional. Considere o caso de uma partícula em movimento, com baixa velocidade, em um campo gravitacional fraco e estático. A partir da Eq.(1.3) escreve-se

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

Todas as derivadas temporais de $g_{\mu\nu}$ são iguais a zero devido o fato do campo ser estático, logo

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu}.$$

Para este campo fraco, supõe-se que a métrica seja escrita como

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad \text{com } |h_{\alpha\beta}| \ll 1. \quad (1.6)$$

Em primeira ordem de $h_{\alpha\beta}$ temos

$$\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}.$$

que substituído na equação do movimento, resulta em

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \nabla h_{00},$$

e

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0.$$

Pela solução da segunda equação, $dt/d\tau$ deve ser igual a uma constante. Dividindo a equação para $d^2\mathbf{x}/d\tau^2$ por $(dt/d\tau)^2$ encontra-se

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00}. \quad (1.7)$$

O resultado correspondente para a teoria newtoniana é

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla \phi, \quad (1.8)$$

no qual ϕ é o potencial gravitacional. A solução para distância r grande a partir do centro de um corpo esférico de massa M tem a forma

$$\phi = -\frac{GM}{r}, \quad (1.9)$$

sendo G a constante de Newton.

Comparando as equações (1.7) e (1.8) conclui-se que

$$h_{00} = -2\phi + \text{cte.}$$

A métrica deve ser $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ para grandes distâncias, logo h_{00} é igual a zero no infinito e a constante, desta forma, será igual a zero. Retornando a Eq(1.6) obtém-se

$$g_{00} = -(1 + 2\phi), \quad (1.10)$$

que é a relação final entre o tensor métrico e o potencial gravitacional newtoniano que se desejava encontrar.

Tensor de Curvatura e a Equação do Campo.

O tensor de curvatura é construído a partir do tensor métrico e suas primeira e segunda derivadas. Isso é necessário pois se utilizado apenas o tensor métrico e a primeira derivada, de acordo com o princípio da equivalência, será sempre possível encontrar um sistema de coordenadas em que esta derivada seja nula, restando apenas um tensor construído a partir do tensor métrico, e sendo esta uma igualdade entre tensores, deve ser verdadeira em todos os sistemas de coordenadas.

Uma maneira de se derivar o tensor desejado é iniciar pela lei de transformação da conexão afim de um sistema x'^{α} para um sistema x^{α} , ambos quaisquer; ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}.$$

O termo não homogêneo no lado direito da equação acima faz com que $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ não tenha uma lei de transformação tal como é definida para um tensor. Isolando este termo obtém-se

$$\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}$$

Diferenciando com relação a x^k e posteriormente agrupando termos similares temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^k \partial x^\mu \partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^k} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda \right) \\ &\quad - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}}{\partial x'^\eta} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau'} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda'} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau'} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda'} \right) \\ &\quad - \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \left(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^k} + \Gamma_{k\nu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} + \Gamma_{k\mu}^\lambda \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \right). \end{aligned}$$

Subtraindo a equação acima dela mesma mas com os índices ν e k trocados, todos os termos envolvendo produtos de Γ' com Γ desaparecem, restando apenas

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda \right) \\ &\quad - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau'}}{\partial x'^\eta} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\eta}^{\tau'}}{\partial x'^\sigma} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\tau'} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda'} + \Gamma_{\lambda\eta}^{\tau'} \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda'} \right). \end{aligned}$$

Este resultado pode ser escrito como

$$R_{\rho\sigma\eta}^{\tau'} = \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x^k}{\partial x'^\eta} R_{\mu\nu k}^\lambda, \quad (1.11a)$$

sendo

$$R_{\mu\nu k}^\lambda = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{\mu k}^\lambda}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{k\eta}^\lambda - \Gamma_{\mu k}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\lambda. \quad (1.12)$$

A equação (1.11a), que contém a maneira como $R_{\mu\nu k}^\lambda$ se transforma na mudança de sistemas de coordenadas, indica que ele é de fato um tensor. Este é denominado *tensor de curvatura* e é o único tensor que pode ser construído a

partir do tensor métrico e de suas primeira e segunda derivadas, sendo linear nesta segunda derivada.

Para obter a equação do campo gravitacional utiliza-se novamente o limite newtoniano para um campo fraco e estático produzido por uma densidade de massa ρ não relativística. A componente temporal nos dois índices do tensor métrico é aproximadamente dada por

$$g_{00} \simeq -(1 + 2\phi).$$

O potencial newtoniano ϕ é determinado pela Equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho.$$

A componente T_{00} do tensor de energia e momento para matéria não relativística, como será visto posteriormente, é igual a esta densidade de massa ρ , ou seja,

$$T_{00} = \rho.$$

Combinando estas equações temos

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00}.$$

Este resultado motiva procurar, para uma distribuição geral $T_{\mu\nu}$ de energia e momento, uma equação para o campo na forma:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu}$$

sendo $G_{\mu\nu}$ um tensor contendo uma combinação da métrica e de suas primeira e segunda derivadas sendo linear na segunda derivada. Outra característica importante deste tensor vem da conservação de energia e momento. Devido a esta condição sobre $T_{\mu\nu}$, a derivada covariante de $G_{\mu\nu}$ deve ser igual a zero. O tensor $T_{\mu\nu}$ é simétrico, logo $G_{\mu\nu}$ também o será. Estas características do tensor $G_{\mu\nu}$ permitem obtê-lo na forma

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.13)$$

sendo

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda} \quad \text{denominado Tensor de Ricci e} \\ R &= g^{\mu k} R_{\mu k} \quad \text{o escalar de curvatura.} \end{aligned}$$

O resultado final para a Equação de Einstein será

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (1.14)$$

O tensor $G_{\mu\nu}$ pode conter também o próprio tensor métrico, ou seja, $g_{\mu\nu}$ multiplicado por uma constante Λ , isto é,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}.$$

A constante Λ é denominada *constante cosmológica*. Seu valor deve ser pequeno para que continue sendo válido, no limite newtoniano, a lei de atração não relativística na forma usual.

Princípio Cosmológico de Einstein

O Princípio de Mach, que se refere ao problema da inércia, está ligado à idéia de Einstein de um universo necessariamente homogêneo em larga escala. Na mecânica newtoniana define-se referencial inercial com a condição de que corpos livres tenham velocidade constante, sendo que a aceleração e a rotação têm características absolutas.

Ernest Mach argumenta ser absurdo pensar que sistemas inerciais reflitam uma propriedade absoluta da natureza, mas sim, que estejam relacionados ao movimento relativo ao resto da matéria no universo. A idéia é adotada por Einstein em sua teoria. A matéria é a fonte para o tensor métrico, o qual descreve a geometria do espaço, fixando o sistema referencial inercial.

É possível encontrar soluções da Equação de Einstein que não contenham a idéia de Mach. Por exemplo, o tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ é a única solução da equação com ausência de matéria. Para uma partícula que se distancia arbitrariamente do resto da matéria do universo, tal que esta tenha uma contribuição desprezível na equação do campo, a solução no caso limite será $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Este sistema define um referencial inercial para a partícula ao mesmo tempo em que se está arbitrariamente longe da matéria do universo (fonte), contrariando a idéia de Mach.

O problema para a teoria de Einstein passa a ser utilizar condições de contorno que eliminem soluções "anti-Machianas". Uma das primeiras propostas, argumentada por de Sitter, seria uma matéria hipotética não observável que dominasse a distribuição de matéria. Einstein, por sua vez, propõe que a distribuição de matéria no universo seja homogênea na média em larga escala e que esta proporcione um espaço curvo que se feche em si próprio.

No Princípio de Mach não há nada na distribuição de matéria que permita distinguir direções, logo, no conceito de Einstein, apresentado no princípio cosmológico, a matéria observável do universo também será isotrópica. O volume do universo seria finito sem fronteira, eliminando a necessidade de uma matéria hipotética. Seria, então, impossível para uma partícula mover-se arbitrariamente longe sem encontrar matéria. A idéia ganhou rápida aceitação seja pelos resultados de Hubble ou pela maneira como simplificava o tratamento do problema matemático.

Já era conhecido que as galáxias tendiam a aparecer em grupos ou aglomerados. Não era errado imaginar que, nos futuros resultados de Hubble, esta hierarquia continuasse a existir em escalas cada vez maiores. Neste modelo, continuariam a encontrar galáxias para distâncias maiores mas a densidade (em número de galáxias) iria decrescer a cada nível de hierarquia. Einstein (1922) afirma que a visão era consistente com a Relatividade Geral mas a rejeita por ser inconsistente com o Princípio de Mach.

O "Princípio Cosmológico de Einstein" é visto hoje como a hipótese de um universo espacialmente homogêneo e isotrópico. A homogeneidade do universo significa que por qualquer evento no espaço-tempo passa uma hipersuperfície do tipo espaço em que as grandezas físicas como densidade, pressão e curvatura não se alteram. Já a isotropia deve se vista como o fato de não haver direção preferencial, ou seja, um observador que "se move com o fluido cosmológico" não pode distinguir direções diferentes por medidas físicas locais. Dentro do Modelo Padrão, o Princípio Cosmológico se reduz a uma condição de consistência. Em larga escala o desvio da homogeneidade e da isotropia na distribuição da massa devem estar de acordo com as observações como o grau de anisotropia da radiação cósmica de fundo.

Vale observar que muitos aceitam o princípio cosmológico por sua simplificação matemática, outros pela concordância com as observações experimentais, mas Einstein fora motivado simplesmente pela idéia de que um universo que não fosse homogêneo e isotrópico em larga escala seria absurda.

Uma formulação mais fraca do Princípio Cosmológico propõe que o universo não possua centro e seja isotrópico em qualquer lugar. De acordo com Yuriy V. Baryshev [1], a afirmação de que nesta formulação é possível deduzir homogeneidade é verdadeira apenas para distribuição de matéria contínua e não para o caso discreto.

Métrica de Robertson-Walker e Equações de Friedmann.

O Princípio Cosmológico leva a um elemento de linha esfericamente simétrico para a métrica, representado na forma da Métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{(1 - kr^2)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right\}, \quad (1.15)$$

sendo $R(t)$ uma função dependente do tempo e k uma constante que, por uma escolha nas unidades de r , tem os valores 0 e ± 1 . Para os cálculos seguintes é útil escrever apenas as componentes do tensor como

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1, \\ g_{0i} &= 0, \\ g_{ij} &= R^2(t) \tilde{g}_{ij}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

para

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{rr} &= (1 - kr^2)^{-1}, \\ \tilde{g}_{\theta\theta} &= r^2, \\ \tilde{g}_{\varphi\varphi} &= r^2 \sin^2 \theta, \\ \tilde{g}_{ij} &= 0 \text{ se } i \neq j. \end{aligned}$$

A partir dos componentes da Métrica de Robertson-Walker calculam-se os $\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma$. Devido a grande simetria desta métrica, os únicos parâmetros diferentes de zero serão

$$\Gamma_{ij}^0 = R\dot{R}g_{ij}, \quad (1.17)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{\dot{R}}{R} \delta_j^i, \quad (1.18)$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} (\tilde{g}^{-1})^{il} \left\{ \frac{\partial \tilde{g}_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial \tilde{g}_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial x^l} \right\} \equiv \tilde{\Gamma}_{jk}^i. \quad (1.19)$$

O tensor de Ricci terá as componentes

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{3\ddot{R}}{R}, \\ R_{0i} &= 0, \\ R_{ij} &= -\left(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k\right)\tilde{g}_{ij}. \end{aligned}$$

O tensor de energia-momento de relevância no modelo padrão é o tensor para o fluido perfeito ($c = 1$)

$$T_i^k = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p), \quad (1.20)$$

sendo a densidade total $\rho = \rho_m + \rho_r + \rho_v$ (matéria, radiação e vácuo respectivamente) e pressão total $p = p_m + p_r + p_v$.

A solução da Equação de Einstein (1.14) será, para a componente G_{00}

$$3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p)R. \quad (1.21)$$

Para a componente G_{rr} a equação resultante será

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)R^2. \quad (1.22)$$

Eliminando $\ddot{R}$ das equações (1.21) e (1.22), obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem para $R(t)$,

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2. \quad (1.23)$$

Outra equação relevante é a conservação de energia,

$$\frac{d}{dR}(\rho R^3) = -3pR^2. \quad (1.24)$$

Conhecendo a equação de estado que relaciona ρ e p , determina-se através da Eq.(1.24) a densidade ρ em função de $R(t)$.

Em muitos dos casos de interesse físico, a equação de estado apropriada tem a forma

$$p = p(\rho) = \varpi\rho, \quad (1.25)$$

sendo π uma constante. Como exemplo, se a densidade de energia do universo for dominada por matéria não relativística e pressão desprezível resulta em

$$\rho \propto R^{-3} \text{ para } p \ll \rho.$$

Conhecer ρ como função de R , é possível determinar $R(t)$, denominado *fator de escala*, para qualquer tempo resolvendo a Eq.(1.23). As equações fundamentais da dinâmica em cosmologia são a Equação de Einstein, a conservação de energia e momento e a equação de estado. O modelo cosmológico, baseado na métrica de Robertson-Walker, em que $R(t)$ é obtido desta forma, é conhecido como *Modelo de Friedmann*.

No instante presente, a densidade de energia do universo, de acordo com a Eq.(1.23), é dada por

$$\rho_0 = \frac{3}{8\pi G} \left(H_0^2 + \frac{k}{R^2} \right).$$

O caso $k = 0$ define o valor da densidade crítica $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$. Se a densidade atual do universo for menor que a densidade crítica, $k = -1$, o universo estará sempre em expansão. Para $k = 1$, a densidade do universo é maior que a densidade crítica e a expansão deverá parar, iniciando uma contração do espaço.

Expansão do Espaço e Redshift Cosmológico

Einstein propôs um modelo de universo com uma solução estática da equação do campo, num período em que os dados observacionais eram poucos. O modelo realmente previa a lei de Hubble e a isotropia da distribuição de matéria, baseado no princípio cosmológico. Um universo estático no entanto, tem problemas conceituais como, por exemplo, o fato de distribuições estáticas não serem gravitacionalmente estáveis, logo a homogeneidade em larga escala não permaneceria nesta configuração muito além do tempo médio de vida de uma estrela. Estes problemas são resolvidos ao se adotar o modelo com expansão.

A expansão do universo significa que a distância própria entre pares de galáxias aumenta com o tempo, as galáxias apresentam uma velocidade de recessão umas das outras. Entretanto, elas devem estar suficientemente separadas pois em sistemas gravitacionalmente coesos, como o grupo local, não ocorre expansão. Instabilidades gravitacionais tendem a agrupar galáxias em sistemas dentro de uma hierarquia crescente de massa que foge da expansão

geral. A lei de Hubble refere-se a galáxias separadas o bastante para tais instabilidades serem desprezíveis.

Na métrica de Robertson-Walker, a distância métrica própria l do observador no centro do sistema de coordenadas para um corpo com coordenadas fixas r_0, θ, φ , será

$$l = R(t) \cdot r_0,$$

sendo r_0 constante. A velocidade de recessão é obtida derivando a relação acima, resultando

$$v = \dot{l} = \dot{R} \cdot r_0 = \frac{\dot{R}}{R} l \equiv H \cdot l. \quad (1.26)$$

A distância em que a velocidade v é igual à da luz chama-se *Raio de Hubble*. Experimentalmente o que se observa é um deslocamento para o vermelho da radiação de objetos distantes. Definindo o *deslocamento para o vermelho* z de um corpo luminoso como

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}, \quad (1.27)$$

será válida a relação

$$(1 + z) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = \frac{R_0}{R_1}, \quad (1.28)$$

na qual o índice *um* se refere à emissão e o índice *zero* à recepção (observador). A equação (1.26) é aplicável para qualquer distância de separação, mesmo para aquelas maiores que o raio de Hubble, em que a velocidade de recessão seria maior que a da luz. Esta velocidade super-relativística pode ser vista como a soma de pequenas velocidades de observadores próximos, sendo a relatividade restrita válida na vizinhança de cada um destes observadores.

Radiação Cósmica de Fundo

A radiação cósmica de fundo preenche uniformemente o espaço, de maneira consistente com o princípio cosmológico. O espectro desta radiação está bem próximo do espectro térmico de Planck para uma temperatura em torno de

3K, logo, deve estar em equilíbrio térmico. Tal equilíbrio não pode ser produzido pelo universo como é hoje pois ele é praticamente transparente para a radiação, ou seja, a radiação cósmica de fundo atravessa distâncias da ordem do raio de Hubble com pouca mudança provocada pela expansão do universo. Por isso, a interpretação padrão seria que essa radiação fora herdada de uma época passada quando o universo em expansão era denso e quente o suficiente para haver equilíbrio térmico. O espectro térmico tende a se manter próximo ao espectro de corpo negro quando matéria e radiação interagem, pois a capacidade térmica da radiação é muito maior que a da matéria. Quando a interação da radiação com a matéria torna-se desprezível a expansão homogênea do universo resfria esta radiação preservando o espectro térmico. Os dados mais precisos indicam $T_0 = 2,736 \pm 0,017 K$.

A presença da radiação cósmica de fundo proporciona considerável credibilidade ao modelo de Friedmann, ou seja, tal radiação é uma forte evidência da expansão do universo a partir de um estado denso. Em particular, no estudo da história térmica da matéria, enquanto ela se expande e se resfria, é possível estimar a abundância de elementos leves e os valores encontrados estão em acordo com o observado atualmente.

Matéria Escura e Constante Cosmológica

Antes de 1980 a idéia usual era de que a matéria escura seria uma matéria ordinária em alguma forma não detectável, como um gás ou estrelas pouco massivas. A partir de então nota-se a possibilidade desta matéria poder ser explicada através de neutrinos massivos ou alguma outra partícula não bariônica mais exótica. A noção de matéria escura aparece em duas situações distintas. A primeira seria o resultado dinâmico indicando que a massa nas galáxias está fora da parte central luminosa, onde a massa de estrelas luminosas domina. O segundo contexto está relacionado com o parâmetro de densidade do universo ser igual a um, $\Omega = 1$, enquanto a contribuição da matéria usual é uma fração deste total. Adotar uma constante cosmológica, Λ , ou um campo agindo como tal, é uma das maneiras de se fazer com que um universo de baixa densidade tenha curvatura desprezível. Seria uma solução para o problema da massa mas ainda seria necessário uma matéria escura móvel acoplada a dinâmica das galáxias. Um único tipo de partícula que satisfizesse ambas as necessidades seria mais elegante, mas não é possível ignorar que seja preciso tanto a constante cosmológica quanto a matéria escura.

Distribuição de Matéria no Universo

As galáxias estão distribuídas de forma inhomogênea quando observadas em pequenas escalas. Entender o aglomerado de galáxias é tão importante quanto medir quanto a distribuição média em grande escala está próxima do postulado no princípio cosmológico.

A medida do desvio da homogeneidade é avaliado pelo desvio quadrático médio $\delta N^2 = \langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2$, sendo N o número de galáxias calculado no volume de uma esfera de raio l completamente compreendida pela região na qual se tem dados observacionais. Como exemplo, na distribuição de *IRAS*, a flutuação é

$$\frac{\delta N}{\langle N \rangle} = 0,5 \pm 0,1 \quad , \quad \text{para um raio } l = 30h^{-1} \text{ Mpc}.$$

Este comprimento $l = 30h^{-1} \text{ Mpc}$ ou $H_0 l \sim 3000 \text{ kms}^{-1}$ marca uma escala característica de transição entre grandes flutuações vistas em menores escalas para menores flutuações em maiores escalas. Isto não está em conflito com a existência de sistemas consideravelmente maiores que $30h^{-1} \text{ Mpc}$, mas apenas requer que os efeitos desses sistemas sobre a média em larga escala sejam menores.

Por muito tempo, astrônomos utilizaram fotografias para o estudo da estrutura da distribuição das galáxias sem a observação direta da distribuição tridimensional da matéria. Recentemente, diversos mapas tridimensionais da distribuição de galáxias no universo, baseados nas medidas do deslocamento para o vermelho da radiação emitida [2], indicaram a presença de estruturas na forma de filamentos e grandes vazios. Pietronero e colaboradores [3] mostraram, para várias destas amostras, utilizando um método moderno de física-estatística, que a distribuição exibe um comportamento fractal de dimensão $D \approx 2$ pelo menos até a escala de 200 Mpc . Apenas para evitar confusões à frente, destaca-se que alguns autores preferem utilizar o valor $\gamma = 3 - D$ para denominar a dimensão fractal. O próximo capítulo será dedicado a expor de forma mais completa tal análise e seu resultado.

O princípio cosmológico nos leva a uma distribuição média homogênea de matéria e a isotopia da radiação cósmica de fundo, válida em uma precisão de uma parte em cem mil. São fortíssimos argumentos em favor da homogeneidade. Todavia, a observação de grandes mapas sobre a distribuição de matéria

luminosa nos mostra uma inhomogeneidade difícil de se compreender no âmbito de um universo homogêneo, obedecendo ao princípio cosmológico.

Este é o ponto que levou estatísticos a verificar o princípio cosmológico através da observação direta das distribuições de galáxias. O fato de sermos levados a uma distribuição aparentemente fractal é compatível com o fato de termos aglomerados e aglomerados de aglomerados. Assim, passa a ser importante investigarmos esta possibilidade de diferença em relação ao modelo padrão, o que será feito aqui, primeiramente com uma revisão sobre fractais, a descrição estatística, e depois com os modelos simples para sua explicação, pelo menos para as distâncias de aglomerados de aglomerados.

Capítulo 2

Geometria Fractal.

O nome *Fractal* foi introduzido por Benoit B. Mandelbrot [4] para caracterizar algumas figuras muito descontínuas ou irregulares mas que obedecem a um certo padrão. No esforço para defini-las matematicamente, Mandelbrot em 1983 propôs que "um fractal seja por definição um conjunto no qual a dimensão de Hausdorff-Besicovitch estritamente difere da dimensão topológica". À frente será discutido o significado de dimensão de Hausdorff, mas o importante nesta primeira tentativa foi o fato de se mostrar insuficiente por excluir figuras que deveriam ser consideradas fractais. Posteriormente, Mandelbrot define fractal como "uma figura formada por partes que são de alguma forma similares ao conjunto por inteiro". Com o avanço no conhecimento sobre tais figuras, fica claro que seria melhor defini-las por um conjunto de técnicas e métodos aplicáveis no estudo de parâmetros geométricos irregulares e auto-similares. Sendo assim, quando um conjunto F for denominado fractal, deve-se ter em mente que:

- F tem uma estrutura fina, ou seja, detalhes em escalas arbitrariamente menores.
- F é muito irregular para ser descrito na linguagem geométrica usual, tanto local como globalmente.
- F tem alguma forma de auto-similaridade estatística ou aproximada.
- Usualmente, a dimensão de F (definida de alguma forma) é maior ou menor que sua dimensão topológica.

- Na maior parte dos casos de interesse F é definido de forma simples, provavelmente de forma recursiva.

Esta definição inclui a insuficiente tentativa de Mandelbrot. Além disso, mantém aberta a possibilidade de uma dada forma fractal ser caracterizada por diferentes definições de dimensão fractal, que não precisam necessariamente coincidir entre si, sendo escolhidas de acordo com o caso de interesse. Entretanto, estas diferentes dimensões têm a propriedade comum de assumirem, possivelmente, valores fracionários.

A geometria fractal é considerada uma revolução na maneira de representar matematicamente e estudar figuras, conjuntos e funções, que antes eram consideradas patológicas. Em propósitos mais práticos, pode ser utilizada para a descrição aproximada de alguns objetos físicos. Por exemplo, a geometria de uma região costeira é fractal.

Dimensão de Hausdorff.

Inicialmente introduzida por Hausdorff em 1919 e desenvolvida por A. S. Besicovitch em 1930, esta definição de dimensão, que pode ter valores fracionários, mostrou-se coincidir com outras definições. Não será apresentada aqui uma dedução matematicamente rigorosa. A discussão sobre como obter a dimensão Hausdorff será feita de forma intuitiva.

A questão básica a ser respondida é: como medir o "tamanho" de um conjunto F de pontos no espaço? Uma maneira simples de medir o comprimento de uma curva, a área de uma superfície ou o volume de um objeto é dividir o espaço em pequenas partes com tamanho δ . Poderiam, como exemplo, ser usadas esferas de diâmetro δ para medir volumes.

Uma curva pode ser medida encontrando o número $N(\delta)$ de segmentos de linha com comprimento δ necessários para cobri-la. Para uma curva ordinária, ou seja, não fractal, de comprimento L , o número de seguimento é $N(\delta) = L / \delta$ e o comprimento da curva dado por

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \delta. \quad (2.1)$$

No limite de $\delta \rightarrow 0$, a medida L tende assintoticamente para o valor do comprimento da curva e é independente do valor de δ .

De forma semelhante, a área consiste em obter o número de quadrados de área δ^2 necessários para cobrir a superfície. Para um número de quadrados

$N(\delta)$, a área será

$$A = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \delta^2. \quad (2.2)$$

O volume, pelo mesmo método, com $N(\delta)$ cubos, será

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \delta^3. \quad (2.3)$$

Para curvas ordinárias, ao medir sua área e seu volume ambos tenderão a zero conforme δ for a zero, e a única medida de interesse é o comprimento.

Seja um conjunto de pontos que definem uma superfície. A medida normal a ser feita é a área como em (2.2). Para superfícies ordinárias, o número de quadrados necessários para cobrir a superfície é $N(\delta) = A/\delta^2$, no limite em que δ desaparece, sendo A a área da superfície. É possível associar um volume para a superfície formado pela soma de volumes de cubos necessários para cobrir a superfície:

$$V = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \delta^3 = \lim_{\delta \rightarrow 0} A \delta. \quad (2.4)$$

Este volume vai a zero conforme $\delta \rightarrow 0$, como era esperado.

Para associar um comprimento para a superfície simplesmente faz-se a medida:

$$L = \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} A \delta^{-1}, \quad (2.5)$$

que diverge para $\delta \rightarrow 0$. Não é possível cobrir uma superfície com um número finito de segmentos, logo, a única medida de interesse é a área.

No entanto, há curvas que se comportam de forma tão complicada ao ponto de terem comprimento infinito e preencherem uma superfície. Da mesma forma, há superfícies que preenchem um volume. Estes conjuntos de pontos podem ser estudados generalizando a definição de medida vista anteriormente.

Para encontrar a medida do "tamanho" de um conjunto de pontos F no espaço, adota-se a função teste $h(\delta) = \gamma(d) \delta^d$, que cubra o conjunto para formar a medida $H_d(F) = \sum h(\delta)$. Para linhas, quadrados e cubos, o fator geométrico é $h(\delta) = 1$. Em geral, conforme δ tende a zero, a medida de tamanho $H_d(F)$ será infinita ou zero dependendo da escolha da dimensão d da medida. A dimensão Hausdorff D de um conjunto F é a dimensão crítica na qual a medida $H_d(F)$ salta de infinito para zero.

A quantidade $H_d(F)$ é denominada *d-medida* do conjunto e seu valor para $d = D$ pode ser finito. É a posição do salto em H_d como função de d que caracteriza o conjunto. Esta definição significa que a Dimensão Hausdorff D é uma propriedade local, no sentido que são medidas as propriedades do conjunto de pontos no limite de um diâmetro δ tendendo a zero da função teste usada para cobri-lo.

Os casos familiares são $D = 1$ para linhas, $D = 2$ para superfícies e $D = 3$ para volumes. Entretanto, há inúmeros conjuntos nos quais a Dimensão Hausdorff não é um valor inteiro, e são denominados *fractais*. De fato, no cálculo de $H_d(F)$ para conjuntos irregulares ou "quebrados", o valor de D realmente ocorre em valores fracionários.

Dimensão de Similaridade e Curva de Peano.

O fractal discutido pode ser considerado um conjunto de pontos preenchendo o espaço o qual tem a dimensão topológica usual. Do ponto de vista da física, isto coincide com o número de graus de liberdade definido pelo número de variáveis independentes. A localização de um ponto numa linha é determinado por um número real e um conjunto de dois números reais independentes define um plano. Se dimensão for definida como graus de liberdade, é possível considerar um espaço d -dimensional para qualquer d não inteiro. De fato, na mecânica clássica é convencional tratar o movimento de m partículas em 3 dimensões como o movimento de uma partícula em um espaço $6m$ -dimensional, se considerado que a localização e o momento sejam independentes.

Em 1890 *Giuseppe Peano* descreve uma curva capaz de preencher um plano uniformemente sendo também possível de ser evitado o auto-contato. Como a localização de um ponto na curva de Peano, como em qualquer curva, pode ser determinado por um único valor real, ela torna possível descrever a posição de um ponto no plano com um único número real, fazendo com que o número de graus de liberdade ou a dimensão do plano seja um, contradizendo o valor empírico 2 esperado. Para visualizar como a curva de Peano preenche o espaço, é introduzida uma nova definição de dimensão baseada em similaridade. Se um segmento for dividido em N partes, no fim do processo cada novo segmento será uma escala $\delta = 1/N$ do inicial, o que significa $N \delta = 1$. Se um quadrado for dividido em N quadrados, cada um será uma escala $\delta = 1/N^{1/2}$ do inicial, logo $N \delta^2 = 1$. Nota-se que o expoente de δ corresponde a dimensão do espaço em cada caso. Generalizando, para um objeto com N partes, cada escala abaixo do objeto inteiro será caracterizada pelo fator δ . A relação $N \delta^D = 1$

idealizada. Alguns destes fractais podem ser usados para modelar estruturas físicas e este é o interesse agora, discutir formar fractais reais que são encontradas em fenômenos naturais. É preciso aplicar o máximo possível, os conceitos matemáticos e ferramentas desenvolvidas no estudo de estruturas fractais reais e quando estas ferramentas matemáticas se mostrarem insuficientes, serão necessárias novas ferramentas para abordar o problema. Se a ferramenta existente se mostrar inadequada, provavelmente uma nova definição de dimensão fractal terá que ser introduzida. Veremos a frente um exemplo onde se encontra tal situação. No clássico problema do comprimento de uma linha costeira, uma prática aplicação da Eq.(2.1) fornece a ferramenta necessária para a caracterização da forma da costa.

O comprimento da linha costeira é um problema fractal que fora caracterizado como tal e resolvido por Mandelbrot. Ele nos dá um exemplo interessante de uma forma fractal na natureza.

As figuras de uma linha costeira em várias escalas dão uma indicação intuitiva de sua estrutura fractal (inclusive da auto-similaridade) e nos levam a perguntar qual o comprimento total desta linha.

Figura 2.2: Fotos em diferentes escalas de uma mesma linha costeira.

Um método para se medir tal comprimento é usar um bastão de comprimento δ marcando passos consecutivos ao longo da costa e contar o número de passos $N(\delta)$ necessários para percorrê-la por inteiro. Veja a figura abaixo.

Figura 2.3: Passos consecutivos de comprimento fixo para medir o comprimento da linha costeira.

Entretanto, o tamanho δ fará diferença no resultado final. Um δ grande não estaria contando as estruturas menores e mais detalhadas e o comprimento final seria dado por $L = \delta N(\delta)$. Usando um comprimento δ menor, as estruturas maiores continuariam a ser medidas e o resultado final para L seria maior pois incluiria a contribuição dos detalhes no recorte da costa que só aparecem se observada mais detalhadamente. Uma discussão mais rigorosa requer agora mapas mais detalhados, que por sua vez revelariam mais estruturas menores, fazendo necessário novamente um δ ainda menor. Desta forma, a linha costeira pode ser tão longa quanto se queira, logo, é preciso adotar para esse problema um limite inferior para δ .

Outra forma de abordar o problema é cobrir o mapa da costa com quadrados de lado δ sendo $N(\delta)$ o número destes quadrados necessários. Repetindo o processo para valores cada vez menores de δ , faz-se um gráfico de $N(\delta)$ em função de δ . Assintoticamente, no limite para δ pequenos, a seguinte equação é válida,

$$N(\delta) = 1/\delta^D.$$

Então, a dimensão fractal D da linha costeira pode ser determinada pela inclinação da reta no gráfico $N(\delta) \times \delta$. Esta forma de obter a dimensão fractal é denominada *dimensão por contagem de caixa* ou *dimensão de caixa*. Como exemplo, este procedimento adotado para alguns mapas reais, costas bastante recortadas dão valores como $D = 1,52$ e um pouco menores como $D = 1,32$ para costas menos recortadas, o que está de acordo com a noção intuitiva do problema. Da equação para o comprimento L em função de $N(\delta)$ escreve-se

$$L = \delta^{1-D},$$

o que mostra a direta relação do comprimento com a dimensão de δ .

A *dimensão por contagem de caixa* nos dá uma medida sistemática aplicável a qualquer estrutura no plano e pode ser facilmente adaptada para estruturas no espaço. É talvez o método mais usado e pode ser estendido a sistemas que não sejam auto-similares.

A necessidade do limite inferior está presente na aplicação de fractais para modelar a distribuição da matéria no universo. Neste caso, o limite inferior está diretamente relacionado à distância média entre galáxias, que são os tijolos iniciais da formação da estrutura em estudo.

Neste trabalho, veremos distribuições fractais como uma maneira simples de se descrever uma distribuição não homogênea da matéria no universo. Fractais são usualmente representados por funções descontínuas, entretanto, o único fato a ser usado será correspondente à definição de dimensão fractal.

Capítulo 3

Distribuição de Matéria no Universo.

3.1 Modelo Fractal¹.

Em 1975, B.B.Mandelbrot [4] descreve um modelo de universo puramente fractal e invariante de escala. O modelo descreve uma hierarquia de aglomerados geometricamente elegante, entretanto, não há uma transcrição deste modelo em parâmetros físicos, ou seja, no modelo não é claro como lidar com as observações cosmológicas tais como a isotropia da radiação cósmica de fundo, o espectro térmico e o deslocamento para o vermelho da radiação emitida pelos corpos luminosos.

Em uma hierarquia invariante de escala, observa-se que a massa se concentra formando estruturas mais densas que a média para qualquer escala na qual for feita a medição. Como exemplo de construção de uma estrutura hierárquica, inicia-se com um bastão de comprimento l no qual são posicionados, em ambas extremidades, bastões de comprimento l/λ , com orientação aleatória. Em cada nova extremidade repete-se o processo mas com bastões de comprimento l/λ^2 . A construção prossegue com sucessivas potências de $\lambda > 1$, até haver bastões suficientes para posicionar uma galáxia em cada extremidade livre. O sistema também poderia estar com o bastão inicial ligado a outro de comprimento λl e assim por diante. Simulações numéricas, que utilizam va-

¹ Este texto que segue foi escrito baseado nos artigos de Pietronero e colaboradores [5] e, principalmente, em um artigo de revisão chamado "Fractals and the Distribution of Galaxies" de Marcelo Ribeiro e Alexandre Y. Miguelote [6].

riações desta forma de construção, dão uma razoável aproximação para o que se observa sobre a distribuição das galáxias, aglomerados e super-aglomerados.

A dimensão fractal de uma distribuição de galáxias está relacionada ao valor médio $N(r)$ do número de galáxias contando apenas aquelas que se encontram no interior de uma região esférica de raio r centrada em uma destas galáxias. Em um fractal invariante de escala, com todas as galáxias pertencentes ao mesmo nível de hierarquia, esta contagem do número médio de galáxias varia como uma lei de potência da distância,

$$N(r) = Ar^d \quad (3.1)$$

sendo A uma constante e o índice d a dimensão fractal. Em uma distribuição espacial uniforme o valor da dimensão d é igual a três.

Para encontrar a dimensão d em função dos parâmetros usados na construção da estrutura fractal utilizada, nota-se que caso r aumente para λr , o número médio N será duas vezes maior devido haver agora duas das estruturas com o nível de hierarquia anterior, posicionadas nas duas extremidades do bastão de comprimento λr , ou seja,

$$N(\lambda r) = A(\lambda r)^d = 2Ar^d,$$

de modo que a dimensão d é dada pela equação

$$\lambda^d = 2.$$

Neste modelo, a densidade média de galáxias correspondente a um raio r é

$$n(r) \propto N(< r)/r^3 \propto r^{-\gamma}, \quad \text{com } \gamma = 3 - d.$$

Para dimensão $d < 3$ a densidade média tenderá a zero no limite de r arbitrariamente grande.

Posteriormente, será útil o uso da *densidade condicional* definida por

$$\tilde{n}(r) \equiv \frac{1}{S(r)} \frac{dN}{dr} = \frac{d}{4\pi} Ar^{-\gamma}, \quad (3.2)$$

sendo $S(r)$ a área da casca esférica de raio r .

A energia potencial gravitacional por galáxia, pertencente a um aglomerado, varia com a escala, ou com o raio, desta concentração,

$$\phi = \frac{ANm^2}{rc^2} \propto r^{d-1} = r^{2-\gamma},$$

sendo m a massa de uma galáxia característica desta concentração. Este potencial, com dimensões *um* ou *dois*, tem a importante propriedade de não divergir, em grande ou pequena escala, quando estão envolvidas velocidades relativísticas.

Fixando que as estrelas vivam para sempre em um universo fractal estático, verifica-se que a luminosidade média integrada sobre toda a superfície do céu é proporcional à massa média por unidade de área calculada a partir de uma galáxia qualquer,

$$i \propto \int_0^\infty n(r)dr.$$

Para γ maior que a unidade, a integral acima converge no limite de r grande tal que, neste universo estático, não haverá o paradoxo de Olber mesmo se as estrelas brilharem eternamente.

Há também motivação para o modelo fractal a partir das observações astronômicas. A análise da distribuição de aglomerados, incluindo o deslocamento para o vermelho, realizada por *de Lapparent, Geller e Huchra* em 1986 e 1988 [5] foi a primeira a revelar a existência de estruturas tais como filamentos de galáxias e grandes vazios, para escalas nas quais esperava-se encontrar uma distribuição homogênea. Os primeiros catálogos de galáxias forneciam apenas a posição angular, ou seja, dois ângulos caracterizando a posição da galáxia no céu. Nas últimas décadas, a tomada de medidas ganhou grande impulso devido a novas técnicas. Com a observação da distância radial através do deslocamento para o vermelho da radiação emitida, obteve-se a distribuição tridimensional real das galáxias. Foram descobertas inomogeneidades para escalas nas quais a *função de correlação* para galáxias e para aglomerados, explicada a seguir, devesse ser desprezível. O primeiro estudo destas inomogeneidades mostrou um comportamento de lei de potência, com expoente 1,8, para a função de correlação. Esta lei é encontrada em diferentes catálogos de medidas observacionais. Entretanto, uma transição para uma distribuição homogênea em grande escala ainda não foi estabelecida. Havendo ou não esta mudança, a lei de potência caracterizando a função de correlação indica haver

um comportamento dependente da escala e uma estrutura fractal simples descreve tal comportamento.

3.2 Função de Correlação.

A informação completa sobre a distribuição da matéria deve conter a posição espacial e a respectiva massa dos objetos observados para um dado volume V , permitindo definir para a densidade a função

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1,2,\dots}^N m_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (3.3)$$

sendo m_i e $\mathbf{r}_i$ a massa e a posição da i -ésima galáxia e N o número total destas no volume V . As massas são pouco conhecidas no momento, logo, os catálogos (amostras) disponíveis para a caracterização numérica da distribuição dão apenas a posição $\{\mathbf{r}_i\}$, limitando a análise a

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{i=1,2,\dots}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (3.4)$$

que corresponde a utilizar massas unitárias para todos os pontos ocupados.

Testar modelos sobre a origem das estruturas observadas no universo consiste em compará-los com as medições numéricas destas estruturas. Inicialmente, tais medidas estatísticas eram analisadas de acordo com o cenário do modelo padrão. O cálculo da *função de correlação de dois pontos* $\xi(r)$, proposta por Peebles e colaboradores, fora fortemente empregada, mas é consistente apenas para caracterizar a correlação de sistemas em que a densidade média possa ser bem definida, tendo apenas pequenas flutuações em torno desta média. A homogeneidade deveria ser verificada a partir de escalas bem pequenas ($\sim 5 - 10 \text{ Mpc}/h$).

Para uma distribuição aleatório estática mas homogênea (galáxias posicionadas independente e aleatoriamente) contendo N galáxias em um volume V , a probabilidade de se encontrar uma galáxia no elemento de volume dV é proporcional a este volume e ao número médio de galáxias por unidade de volume $\bar{n} = N/V$, sendo também independente da posição, ou seja,

$$dP = \frac{\bar{n}}{N} dV. \quad (3.5)$$

Caso não ocorram aglomerações ou vazios na distribuição, a probabilidade dP_{12} de encontrar galáxias nos volumes dV_1 e dV_2 será o produto $dP_1 dP_2$. No entanto, se houver alguma correlação, haverá um desvio do comportamento aleatório e a probabilidade conjunta diferirá do produto simples. A função de correlação de dois pontos $\xi(\mathbf{r}_{12})$ é, por definição, o que mede tal diferença, sendo

$$dP_{12} \equiv \left(\frac{\bar{n}}{N}\right)^2 [1 + \xi(\mathbf{r}_{12})] dV_1 dV_2, \quad (3.6)$$

a probabilidade de encontrar um par de galáxias nos volumes dV_1 e dV_2 nas posições $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$. Como $\xi(\mathbf{r}_{12})$ não deve depender da posição, então $\mathbf{r}_{12} \rightarrow |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ e devido à homogeneidade e à isotropia em larga escala, $\xi(\mathbf{r}_{12})$ deve ir a zero para $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ grande. Definida desta forma, $\xi > 0$ está relacionado a aglomeração e $\xi < 0$ a vazios na distribuição. A função $\xi(r)$ é análoga ao segundo momento ou variância da distribuição.

Para obter a forma da função de correlação é usual adotar um sistema contínuo. Neste caso, tendo as galáxias como os constituintes do fluido, com densidade variável $n(\mathbf{r})$, a densidade média, calculada para um volume de dimensões comparáveis a de aglomerados de galáxias, será

$$\frac{1}{V} \int_V n(\mathbf{r}) d\mathbf{V} = \langle n \rangle = \bar{n}, \quad (3.7)$$

no qual dV é o elemento de volume em $\mathbf{r}$. A probabilidade conjunta de encontrar galáxias em dV_1 para $\mathbf{r}' + \mathbf{r}_1$ e em dV_2 para $\mathbf{r}' + \mathbf{r}_2$ é dada por

$$\left(\frac{1}{N}\right)^2 n(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_1) n(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_2) dV_1 dV_2.$$

Fazendo a média desta equação sobre o volume da amostra,

$$dP_{12} = \frac{1}{N^2 V} \int_V n(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_1) n(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}' dV_1 dV_2, \quad (3.8)$$

e comparando-a com a expressão (3.6) obtém-se

$$\langle n \rangle^2 [1 + \xi(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)] = \frac{1}{V} \int_V n(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_1) n(\mathbf{r}' + \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}'. \quad (3.9)$$

Finalmente, com uma mudança de variáveis, $\mathbf{r}' + \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}' + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$ e dV sendo o elemento de volume em $\mathbf{r}_0$, escreve-se $\xi(r)$ na forma

$$\xi(r) = \frac{\langle n(\mathbf{r}_0)n(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \rangle}{\langle n \rangle^2} - 1. \quad (3.10)$$

Quanto ao comportamento de $\xi(r)$ para um líquido com densidade homogênea bem definida, a função será -1 para $r = 0$, pois não pode haver dois átomos na mesma posição, sendo então $\langle n(\mathbf{r}_0)n(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \rangle = 0$, posteriormente crescendo para um valor máximo quando $\mathbf{r}$ é da ordem de dois raios atômicos e passando então a oscilar até saturar em zero, com $\langle n(\mathbf{r}_0)n(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \rangle = \langle n \rangle^2$, deixando claro que $\xi(r)$ descreve a flutuação em torno da média, logo temos

$$\int_V \xi(r) d\mathbf{r} = 0. \quad (3.11)$$

Define-se *distância de correlação* R_0 , com a posição em que $\xi = 1$. Sendo o sistema essencialmente homogêneo, não se esperam grandes densidades, $\xi \gg 1$, ou buracos, $\xi \ll 1$, para distâncias muito maiores que a de correlação.

Cada catálogo com dados astronômicos contendo a distribuição tridimensional das galáxias ou aglomerados abrange uma faixa do céu observado delimitada por um ângulo sólido Ω e uma profundidade R , que corresponde à distância do objeto mais distante medido. O tamanho da amostra R_A é definido como o raio da maior esfera completamente contida pela amostra. A análise feita com a função de correlação utiliza apenas os dados contidos nesta esfera, evitando supor propriedades sobre o que ocorre fora dos limites da amostra.

Utilizando a análise dada pela equação (3.10) sobre os catálogos de galáxias disponíveis, verificou-se que a função $\xi(r)$ pode ser caracterizada por uma lei de potência

$$\xi(r) \approx Ar^{-\gamma}, \quad (3.12)$$

com $\gamma \approx 1,77 \pm 0,04$ e $R_0 = (5,4 \pm 1)h^{-1}Mpc$ no intervalo $10kpc \lesssim r \lesssim 10Mpc$, sendo A uma constante.

Funções de correlação de ordem superior generalizam a definição dada em (3.6). A estimativa da função para três pontos, $\zeta(r_a, r_b, r_c)$, que no caso estacionário é uma função apenas do tamanho dos lados do triângulo formado

por três pontos ocupados, é consistente com uma distribuição dada por uma hierarquia de aglomerados.

O primeiro problema enfrentado por esta análise foram as diferenças entre as amplitudes A para galáxias ($A_g \approx 20$), aglomerados ($A_c \approx 360$) e aglomerados de aglomerados ($A_{sc} \approx 1000 - 1500$), enquanto o expoente γ se mantém o mesmo para qualquer escala. Outro problema foi a proporcionalidade entre a distância de correlação R_0 e o tamanho da amostra. Novamente chama-se a atenção ao fato da análise supor homogeneidade mas ao mesmo tempo não fornecer um teste para tal hipótese. As explicações propostas inicialmente abordavam estes problemas separadamente enquanto a posterior "Hipótese Fractal" incluiu ambos.

Nos trabalhos de Pietronero e colaboradores [5] afirma-se que as evidências de regiões não homogêneas em larga escala, como aglomerados (*clusters*), super-aglomerados e vazios (*voids*) [6] tornam o uso da função $\xi(r)$ conceitualmente incorreto. O problema ocorre devido ao fato do sistema não ser suficientemente homogêneo para o tamanho da menor amostra analisada. A densidade média não poder ser definida como uma propriedade intrínseca, sendo que irá variar com o tamanho das amostras. Apesar de ser apropriada para o modelo de padrão, o método não leva em consideração efeitos de curvatura e não fornece um teste para a hipótese de homogeneidade em larga escala. A partir destes problemas e dos resultados fornecidos por $\xi(r)$ propõem um cálculo de correlação que não contém a hipótese do princípio cosmológico. Do ponto de vista da análise dos dados observacionais, era necessário adotar uma correlação entre pares adequada para descrever as propriedades intrínsecas de sistemas que pudessem ou não ser auto-similares (fractal), ou cuja densidade média pudesse depender do tamanho da amostra. Neste caso, a presença de um objeto em $\mathbf{r}_0$ influencia a probabilidade de encontrar outro em $\mathbf{r}$, tal que

$$G(r) \equiv \langle n(\mathbf{r}_0)n(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \rangle \neq \langle n \rangle^2,$$

do contrário, não havendo correlação (caso homogêneo)

$$G(r) \approx \langle n \rangle^2.$$

A função $G(r)$ definida acima contém $\langle n \rangle = N/V$, que varia com o tamanho da amostra, por isso define-se apropriadamente a nova correlação entre dois pontos como

$$\Gamma(r) = \frac{\langle n(\mathbf{r}_0)n(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \rangle}{\langle n \rangle}. \quad (3.13)$$

Considerando a equação para a média (3.7) e $n(\mathbf{r})$ escrito como soma de funções delta (3.4), escreve-se

$$\Gamma(r) = \frac{\frac{1}{V} \int n(\mathbf{r}_0)n(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) d\mathbf{r}_0}{\frac{N}{V}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}), \quad (3.14)$$

na qual r_i referente às coordenadas de todos os objetos do sistema. O significado da expressão acima fica claro após calculada a média angular

$$\tilde{n}_i(r) dr = \frac{1}{4\pi r^2} \int d\Omega \int_r^{r+dr} r'^2 dr' n(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi r^2} N'_i(r), \quad (3.15)$$

sendo que $N'_i(r)$ representa o número total de objetos nas posições r_j tal que $r \leq |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| \leq r + dr$. Logo, $\tilde{n}_i(r)$ é a densidade condicional com relação ao i -ésimo objeto, simplificando a forma de $\Gamma(r)$ para:

$$\Gamma(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \tilde{n}_i(r) = \tilde{n}(r). \quad (3.16)$$

A utilização de $\Gamma(r)$ corresponde à análise estatística da *densidade média condicional* $\tilde{n}(r)$ definida anteriormente, com relação a todos os objetos contidos na amostra. Ao contrário da função $\xi(r)$, este contexto não necessita definir a densidade e o tamanho da amostra, sendo que este último aparecerá apenas através do número total de objetos N . Uma amostra maior implica apenas em uma estatística melhor.

Em fractais simples, como o descrito anteriormente, a densidade condicional é uma quantidade bem definida e proporciona a mesma lei de potência para todo ponto do sistema, sendo

$$\Gamma(r) = \tilde{n}(r) = \frac{d}{4\pi} A r^{-\gamma}. \quad (3.17)$$

Pode ser mostrado que A está relacionado, aproximadamente, à distância média l entre vizinhos mais próximos no sistema, sendo

$$l \approx \left(\frac{1}{A}\right)^{\frac{1}{d}} \Gamma_e(1 + 1/d), \quad (3.18)$$

em que Γ_e é a função gamma de Euler.

O comportamento de lei de potência pode ser eventualmente seguido por uma transição para um regime homogêneo. A distância em que isto ocorre será representada por λ_0 e denominada *escala de homogeneidade*. O gráfico a seguir esquematiza este comportamento iniciado por uma lei de potência e com $\lambda_0 < R_A$.

Gráfico 3.1: Transição de lei de potência para homogeneidade, demarcada pelo comprimento λ_0 .

$$\begin{aligned} \Gamma(r) &= \left(\frac{dA}{4\pi}\right) r^{d-3} && \text{para } r \ll \lambda_0 \\ \Gamma(r) &= \langle n \rangle_{R_A} && \text{para } r \gg \lambda_0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Para uma distribuição unicamente fractal, a densidade média $\langle n \rangle$ vai a zero em um sistema infinito, então $G(r) = 0$ e $\lambda_0 = \infty$, conseqüentemente

a função $\xi(r)$ não está definida. Neste caso a única quantidade capaz de caracterizar a correlação de dois pontos será

$$\Gamma(r) = \frac{\langle n(r_0)n(r_0+r) \rangle_{R_A}}{\langle n \rangle_{R_A}}.$$

Do ponto de vista operacional, a primeira análise a ser feita sobre a amostra deve ser $\Gamma(r)$. Isto é necessário para distinguir entre dois casos: (1) se há uma tendência a homogeneidade correspondendo a uma achatamento de $\Gamma(r)$ e a estimativa de $\lambda_0 < R_A$ e de $\langle n \rangle$; (2) a continuação do comportamento fractal indefinidamente. Apenas no primeiro caso fará sentido o estudo da função de correlação $\xi(r)$ e obter desta a distância de correlação R_0 ($\xi(R_0) = 1$) que estará relacionada a λ_0 , mas é para o segundo caso que se torna possível apreciar a diferença entre as duas funções, sendo que elas estão relacionadas simplesmente por

$$\xi(r) = \frac{\Gamma(r)}{\langle n \rangle_{R_A}} - 1.$$

De fato, a expressão para $\xi(r)$, caso a distribuição seja estritamente fractal, será

$$\xi(r) = \frac{d}{3} \left(\frac{r}{R_A} \right)^{d-3} - 1 \quad (3.20)$$

e de (3.20) segue para R_0 uma relação linear com o tamanho da amostra R_A

$$R_0 = \left(\frac{d}{6} \right)^{\frac{1}{3-d}} R_A,$$

logo R_0 não tem significado físico como no primeiro caso em que se observa haver homogeneidade em escalas maiores. Nota-se também que a amplitude de $\Gamma(r)$ está relacionada ao corte inferior l do fractal enquanto a de $\xi(r)$ está relacionada ao limite superior da distribuição R_A .

O resultado principal para a função $\Gamma(r)$ foi a consistência dos dados entre diferentes amostras, com um comportamento fractal com $\gamma \approx 2$. Atualmente é aceito que a distribuição das galáxias tenha uma estrutura fractal até a escala de $30 - 50 \text{ Mpc}/h$, e as atenções focadas em qual seria a escala a partir da qual haveria transição para distribuição homogênea.

Como demonstração de que este novo método é o mais adequado vê-se, no gráfico seguinte, o acordo entre vários catálogos de redshift disponíveis com distâncias de 0,1 a 1000 Mpc/h:

Gráfico 3.2: Correlação completa para vários catálogos de redshift disponíveis na faixa de distância de 0,1 -1000 Mpc/h . Uma linha de referência de inclinação -1 está representada ($\gamma = 1$).

Dele também pode-se concluir não haver tendência a homogeneidade ($\lambda_0 > R_A$) até a maior escala apresentada. Em contraste, verificando o conflito entre os dois métodos apresentados, o próximo gráfico contém o resultado de $\xi(r)$ para os mesmos dados.

Gráfico 3.3: Análise usual baseada na função $\xi(r)$ para os mesmos dados do gráfico anterior. Os resultados parecem confusos dando a impressão que os catálogos de galáxias não são bons estatisticamente.

A análise estatística utilizando a densidade condicional $\Gamma(r)$ revela a concordância entre vários catálogos de redshift disponíveis cobrindo a larga faixa de $0,1$ a $1000 Mpc/h$. Eles obedecem a um decaimento na forma de lei de potência com expoente $\gamma \approx 1,8$, sem qualquer tendência a homogeneidade.

O modelo também fornece uma justificativa para a discrepância entre as amplitudes da lei de potência para galáxias, aglomerados e super-aglomerados

no uso da função $\xi(r)$. Definindo R_g , R_a e R_{sa} como o tamanho das amostras para os três casos respectivamente, as amplitudes serão

$$\begin{aligned} A_g &= \frac{d}{3} \left(\frac{1}{R_g} \right)^{d-3}, \\ A_a &= \frac{d}{3} \left(\frac{1}{R_a} \right)^{d-3}, \\ A_{sa} &= \frac{d}{3} \left(\frac{1}{R_{sa}} \right)^{d-3}, \end{aligned}$$

de onde se obtém

$$\frac{A_a}{A_g} = \left(\frac{R_g}{R_a} \right)^\gamma.$$

Para os catálogos de galáxias e clusters a diferença de escala envolvidas é da ordem de $R_a \approx 5R_g$. Com $\gamma = 1,8$, a relação entre as amplitudes será

$$\frac{A_c}{A_g} \approx 18,$$

que está de acordo com o que se observa nas medidas estatísticas para estas escalas. O mesmo pode ser feito entre aglomerados e super-aglomerados mas as medidas para super-aglomerados ainda são pouco precisas.

O modelo fractal fornece uma descrição atrativa e simples da distribuição das galáxias. Em geral, é aceito que a distribuição tenha uma estrutura fractal até a escala de $30 - 50 Mpc/h$. Não é possível excluir que a matéria visível irá se tornar homogênea para alguma escala ainda não observada. Independente dos resultados mostrados até $1000 Mpc/h$, é esperado que a matéria seja homogênea em escala maiores devido às evidências como a radiação cósmica de fundo, além da menor precisão dos dados com o aumento da distância. No entanto, o melhor método para identificar a transição ainda será o uso da função $\Gamma(r)$.

Se o comportamento fractal se estender até $300 - 500 Mpc/h$, a visão atual da formação de estruturas, a partir do desacoplamento da matéria e da radiação, estará comprometida por não haver tempo suficiente para a criação de estruturas em larga escala tão correlacionadas, iniciadas por flutuações do campo gravitacional. Caso se confirme a fractalidade até $1000 Mpc/h$, terá que ser adotado um novo modelo para a métrica global.

Toda a discussão refere-se à matéria luminosa. A participação da matéria escura neste cenário não é nada clara. Há duas possibilidades: (1) que a matéria escura esteja essencialmente ligada à luminosa, o que não justificaria o uso da métrica Robertson-Walker; (2) que a matéria escura seja homogênea em larga escala e domine sobre a matéria luminosa, retomando a validade do modelo padrão.

3.3 Possível transição para homogeneidade.

Como foi visto anteriormente, a densidade condicional $\Gamma(r)$ obedece uma lei de potência para $r < \lambda_0$ e para $r > \lambda_0$ é uma constante, ou seja, pela equação (3.17) será

$$\begin{aligned}\Gamma(r) &= \frac{d}{4\pi} A r^{-\gamma} \quad \text{para } r < \lambda_0 \quad \text{e} \\ \Gamma(r) &= n_0 \quad \text{para } r \geq \lambda_0.\end{aligned}\tag{3.21}$$

com $\gamma = 3 - d$. Desta forma, para $r = \lambda_0$ escreve-se

$$n_0 = \frac{d}{4\pi} A \lambda_0^{-(3-d)}.\tag{3.22}$$

Neste momento é necessário definir a densidade condicional integrada $I(r)$ como

$$I(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \Gamma(r') dr'.\tag{3.23}$$

Esta função corresponde ao número total de galáxias em uma região esférica de raio r . No caso aqui tratado ela será da forma

$$\begin{aligned}I(r) &= A r^d, \quad \text{para } r < \lambda_0 \quad \text{e} \\ I(r) &= d A \lambda_0^d \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} d A \lambda_0^{-(3-d)}, \quad \text{para } r \geq \lambda_0.\end{aligned}$$

A mudança da lei de potência de d para 3 indica a transição para distribuição homogênea em λ_0 .

Se há o interesse de utilizar a função $\xi(r)$ para este sistema, é preciso especificar o raio da amostra R_S explicitamente. Considerando que a densidade

$\langle n \rangle$ é o número total de galáxias por unidade de volume da amostra, esta será

$$\langle n \rangle = \frac{dA}{4\pi} \lambda_0^{-(3-d)} \left[1 + \left(\frac{3}{d} - 1 \right) \left(\frac{\lambda_0}{R_S} \right)^3 \right],$$

e pela equação (3.21) obtém-se

$$\begin{aligned} \xi(r) &= \frac{dA}{4\pi} \frac{r^{-(3-d)}}{\langle n \rangle} - 1 \quad \text{para } r < \lambda_0 \quad \text{e} \\ \xi(r) &= \frac{dA}{4\pi} \frac{\lambda_0^{-(3-d)}}{\langle n \rangle} - 1 \quad \text{para } r \geq \lambda_0, \end{aligned}$$

no qual a dependência de $\langle n \rangle$ com R_S implica que o ponto em que $\xi(r) = 0$ seja uma função de λ_0 e R_S . Então, a função $\xi(r)$, que ainda é um instrumento inapropriado, tornasse correto para o caso limite em que $\lambda_0 \ll R_S$ no sentido que $\langle n \rangle$ se torna independente de R_S . Então, neste caso temos

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \frac{dA}{4\pi} \lambda_0^{-(3-d)}, \\ \xi(r) &= \left(\frac{r}{\lambda_0} \right)^{-(3-d)} - 1, \quad \text{para } r < \lambda_0 \quad \text{e} \\ \xi(r) &= 0 \quad \text{para } r \geq \lambda_0. \end{aligned}$$

Somente neste caso, a distância de correlação R_0 está relacionado com a escala de homogeneidade λ_0 ,

$$r_0 = 2^{1/(d-3)} \lambda_0,$$

logo, a estimativa para a distância em que irá ocorrer a transição, para o caso $d \approx 2$, é de $r_0 = \lambda_0/2$.

3.4 Conclusões.

A implementação da função de correlação de dois pontos $\xi(r)$ para a análise estatística da distribuição das galáxias é problemática devido ela supor implicitamente que haja homogeneidade. Esta suposição está escondida na densidade média, a qual não parece ser uma propriedade física bem definida

para esta distribuição. Esta média é uma função do tamanho da amostra; um resultado consistente com uma visão fractal da distribuição. Para resolver este problema é introduzida uma nova análise estatística que pode testar se a distribuição das galáxias é ou não homogênea.

O modelo fractal oferece uma atrativa e simples descrição para a distribuição das galáxias no universo observado e a nova função de correlação $\Gamma(r)$ está em pleno acordo com este cenário. Desta análise, observa-se a concordância entre vários catálogos de galáxias numa faixa de 0,1 a $10^3 Mpc$, apresentando um decaimento na forma de lei de potência com uma dimensão fractal $d = 2$, sem qualquer tendência para homogeneidade.

Capítulo 4

Conjectura Fractal Aparente.

4.1 Introdução.

Para definir a escala a partir da qual a distribuição da matéria no universo torna-se homogênea é importante saber como caracterizar observacionalmente a densidade cosmológica. Para isso, é usual considerar as correções relativísticas desprezíveis dentro de um intervalo de valores para o "redshift" no qual este e a distância tenham uma relação linear (lei de Hubble).

Entretanto, para propósitos práticos ou teóricos, há pelo menos duas formas de se encontrar o limite desta região aproximadamente newtoniana. A forma mais utilizada consiste em tratar apenas das galáxias cujas velocidades de recessão sejam pequenas se comparadas à velocidade da luz. O segundo método, denominado "critério de Bondi" (1960)[10], menos conhecido mas igualmente importante, consiste em determinar o limite desta região em função do comportamento dinâmico da luz. Em outras palavras, a mecânica newtoniana não produz uma teoria dinâmica para a luz, assim como ocorre na mecânica relativística, logo haverá uma escala suficientemente grande tal que a luz não possa mais ser considerada instantaneamente transmitida da fonte ao observador, definindo o limite até o qual a aproximação newtoniana é válida.

Contrariamente ao que se pode imaginar de início, a implementação prática destes dois critérios nem sempre levam ao mesmo resultado. O primeiro critério utiliza a Lei de Hubble sendo escrita aproximadamente por uma lei velocidade-distância, enquanto o outro significa resolver a geodésica em um cenário necessariamente relativístico, obtendo expressões para as grandezas observáveis ao longo do cone de luz passado do observador e comparando estes resultados

com as previsões newtonianas. Entretanto, neste caso, a não-linearidade da Relatividade Geral fará com que estas grandezas observáveis tenham diferentes aproximações newtonianas para diferentes distâncias observadas. Deve-se, então, considerar estes dois critérios como complementares e isso implica que o alcance da aproximação newtoniana é, por consequência, dependente de qual grandeza observável se está tratando.

Será mostrada a seguir, a forma como este comportamento não linear aparece nas definições de distâncias e densidades além de sua importância no estudo da fractalidade da distribuição de matéria no universo.

4.2 Definição de densidade em cosmologia.

Em cosmologia, podem-se definir dois tipos de densidades: a densidade local ρ e a densidade média $\langle \rho \rangle$, também denominada densidade de volume ρ_V . Esta última corresponde à média da densidade local em um dado volume. Caso ρ seja sempre a mesma, então a densidade média será igual à ela. Entretanto, seja no caso newtoniano ou relativístico, esta simples afirmação somente será verdadeira em épocas específicas. Em outras palavras, a densidade local é uma função do tempo $\rho = \rho(t)$, sendo a mesma apenas em épocas fixas.

Suponha duas distâncias d_1 e d_2 sendo $d_1 < d_2$. Se existir uma função $t = t(d)$ relacionando tempo e distância tal que maiores distâncias correspondam a tempos menores, então um objeto localizado à distância d_1 será associado ao tempo t_1 enquanto um objeto a distância d_2 está associado t_2 mais recente ($t_1 > t_2$). Sendo a densidade dependente apenas do tempo, então $\rho(t_1) \neq \rho(t_2)$, o que significa que a média $\langle \rho \rangle = (1/2) [\rho(t_1) + \rho(t_2)] \neq \rho(t_1)$ ou $\rho(t_2)$. Portanto, mesmo na cosmologia padrão, as densidades local e média serão iguais apenas em épocas semelhantes. Somente é possível falar sobre observar a homogeneidade do universo se tal medida for feita numa mesma época " t ". Entretanto, quando as observações astronômicas tratam deste problema, este comportamento crítico é contornado apenas supondo que as regiões medidas estão próximas o suficiente para garantir que estejam no mesmo ou bem próximo do valor " t ". Apenas grandes valores do deslocamento para o vermelho não estariam mais neste caso.

A importância da análise que será apresentada aqui, está em tratar da função $t = t(d)$ e sua relevância para o problema da homogeneidade. Será mostrado a seguir que tal função existe quando o Critério de Bondi é utilizado

e é dada pela geodésica ou cone de luz passado. Esta função não está definida na mecânica newtoniana, logo, somente pode ser obtida em uma análise completamente relativística, ou seja, inicialmente é necessário utilizar o critério de Bondi. Encontrando a distância na qual $\rho \neq \langle \rho \rangle$, imediatamente são obtidos o alcance da aproximação newtoniana e a transição para o modelo padrão.

Na cosmologia hierárquica, ou fractal, o problema acima descrito, não parece ser tão relevante devido estar generalizado que em um universo fractal essa diferenciação entre densidade local e média seja feita desde o início. Entretanto, como os modelos anteriores eram apenas newtonianos, não era possível discutir seus aspectos relativísticos e como eles estavam relacionados ao modelo padrão. Isto apenas se torna possível quando é utilizado o critério de Bondi no modelo padrão ao mesmo tempo em que se define uma densidade média dentro deste modelo.

É importante destacar que a questão básica é saber como um modelo cosmológico espacialmente homogêneo pode parecer, ou ser observado como não homogêneo. O caminho para isso é construir a densidade média fazendo a média da densidade local ao longo do cone de luz passado.

4.3 Distâncias cosmológicas.

Distância em cosmologia é um tema confuso, principalmente por não haver uma terminologia unificada. Entretanto, o número de definições de distâncias é, de fato, bem pequeno. Até hoje, o melhor tratamento deste tema foi feito por Ellis (1971, p. 144)[14], no qual são expostas as mais importantes definições de distâncias que serão utilizadas neste trabalho. Além disso, o tratamento dado por Ellis é geral, no sentido de que é válido em qualquer modelo cosmológico.

Inicialmente, é comum pensar que a dificuldade associada ao conceito de distância em cosmologia possa ser eliminada apenas utilizando a "distância própria". O problema nesta definição vem do fato de que separações entre corpos são, em geral, distâncias geométricas não observáveis. Um exemplo é a distância absoluta que requer posicionar uma barra rígida entre dois pontos separados do espaço e na mesma época. Isto vai contra o critério de Bondi, logo, a distância absoluta não é relevante para o problema aqui tratado.

A distância de luminosidade d_L é a mais utilizada em astronomia. Ela é definida como a relação entre o fluxo observado I' da fonte observada e sua luminosidade intrínseca L em um espaço chato e estático. Pode-se definir

também a distância de área d_A , e da mesma forma a distância de área de galáxia d_G . Ambas determinam a distância a partir da comparação do ângulo sólido medido pelo observador e a área intrínseca do corpo observado.

As distâncias observáveis abaixo estão ligadas por uma teorema geométrico conhecido como teorema de reciprocidade de Etherington (1933)[11] que é escrito como

$$d_L = d_A (1 + z)^2 = d_G (1 + z). \quad (4.1)$$

Em termos de fluxo de luminosidade bolométrico (todas as frequências) o teorema leva à equação

$$F = \frac{L}{4\pi (d_A)^2 (1 + z)^4} = \frac{L}{4\pi (d_G)^2 (1 + z)^2} = \frac{L}{4\pi (d_L)^2}. \quad (4.2)$$

Não há uma solução correta e única, pois todas são construções operacionais definidas inteiramente pelo seus respectivos métodos de medição. O melhor a ser feito na astronomia é conectar os observáveis por uma teoria e testar o que tal teoria prediz quando as equações são escritas em termos apenas dos observáveis. Partindo deste ponto, o importante agora é encontrar as consequências disto no problema da observação da homogeneidade do universo. Isto implica escolher uma distância entre as várias possíveis, pois a definição de volume e, conseqüentemente, o tipo de densidade média utilizadas devem estar explícitos.

O teorema da reciprocidade dá a relação geral entre as distâncias cosmológicas mas não diz como as calcular. Da equação (4.2) fica claro que caso não estejam disponíveis informações astrofísicas intrínsecas do corpo observado, a única forma de resolver tal equação é adotar algum modelo cosmológico, obtendo expressões para uma escolha prévia de distância dentro deste modelo. Entretanto, para tratar da homogeneidade, há um problema adicional. Como fora dito, testar a homogeneidade da distribuição da matéria no universo implica fazer uma escolha de um tipo de distância. Caso sejam obtidos dados da magnitude aparente e não for feita uma correção quanto ao deslocamento para o vermelho, resultará em uma distância de luminosidade d_L como se estivessemos em um universo estático e sem expansão.

4.4 Distância, volume e densidade.

Em 1974, McVittie [12] demonstra que todas as distâncias observáveis diferem para valores grandes de z , mas são praticamente as mesmas para valores moderados e pequenos. Baseado nisso e também na equação (4.1) pode-se pensar que a discussão anterior sobre distâncias observáveis tenha sido em vão. Entretanto, o problema aqui tratado não lida com distâncias mas com densidades médias, construídas teoricamente a partir da contagem do número de objetos e do volume observado. Este é obtido pela terceira potência da distância observada ao longo do cone de luz passado, logo, distâncias observáveis são funções não lineares do parâmetro afim do cone de luz, ou seja, as densidades médias são funções altamente não lineares da geodésica. Uma mudança na definição de distância pode alterar drasticamente o comportamento da densidade média, não importando se estas distâncias são similares para valores próximos de seus respectivos parâmetros afins.

Caso Einstein-de Sitter.

Inicia-se escrevendo a métrica para o modelo Einstein-de Sitter da seguinte forma ($c = G = 1$),

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (4.3)$$

sendo $R(t)$ o fator de escala dado por

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} \rho R^2, \quad (4.4)$$

e a densidade local como

$$\rho = \frac{1}{6\pi R^3(t)}. \quad (4.5)$$

Caso seja fixado o instante inicial como $t=0$, então a solução da equação (4.4) fica escrita como

$$R(t) = \left(t + \frac{2}{3H_0}\right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.6)$$

na qual H_0 é o valor atual da constante de Hubble.

É possível agora obter a equação para o cone de luz passado integrando a geodésica da métrica (4.3), $dt/dr = -R(t)$ do momento inicial ($t = r = 0$) até um valor de t qualquer. A solução é dada por

$$3 \left(t + \frac{2}{3H_0} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{18}{H_0} \right)^{\frac{1}{3}} - r, \quad (4.7)$$

na qual a coordenada radial tem o papel de um parâmetro ao longo da geodésica.

Já é conhecido que o deslocamento para o vermelho $z(t)$ neste modelo é escrito por $1 + z = R(0)/R(t)$ ou pela equação (4.6),

$$1 + z = \left(\frac{18}{H_0} \right)^{\frac{2}{3}} \left[\left(\frac{18}{H_0} \right)^{\frac{1}{3}} - r \right]^{-2}, \quad (4.8)$$

e o fator de escala ao longo da geodésica é

$$R(t(r)) = \frac{1}{9} \left[\left(\frac{18}{H_0} \right)^{\frac{1}{3}} - r \right]^2. \quad (4.9)$$

A distância definida pela equação (4.1) pode ser obtida neste modelo através da distância de área $d_A = rR(t(r))$. Assim podem ser escritas como

$$d_A = \frac{r}{9} \left[\left(\frac{18}{H_0} \right)^{\frac{1}{3}} - r \right]^2, \quad (4.10)$$

$$d_z = \frac{cz}{H_0}, \quad (4.11)$$

$$d_L = \frac{r}{9} \left(\frac{18}{H_0} \right)^{\frac{4}{3}} \left[\left(\frac{18}{H_0} \right)^{\frac{1}{3}} - r \right]^{-2}, \quad (4.12)$$

$$d_G = r \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (4.13)$$

As coordenadas correspondentes ao big bang são atingidas quando $R(t_b) = 0$ sendo t_b o instante deste evento. É possível agora escrever o valor do parâmetro r_b sendo $t_b = -\frac{2}{3H_0}$ e $r_b = \left(\frac{18}{H_0}\right)^{\frac{1}{3}}$. Com estes valores pode-se escrever o comportamento assintótico do redshift e das seguintes distâncias

$$\lim_{r \rightarrow r_b} z = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow r_b} d_l = \infty, \quad \lim_{r \rightarrow r_b} d_A = 0, \quad \lim_{r \rightarrow r_b} d_G = \frac{2}{H_0}. \quad (4.14)$$

Nota-se o comportamento assintótico completamente diferente para estas distâncias. A distância de luminosidade cresce sem limite assim como o deslocamento para o vermelho, enquanto a distância de área de galáxia cresce até um valor máximo finito. Além disso, a distância de área cresce inicialmente e depois decresce, atingindo o zero no momento do "big bang". É possível verificar que d_A atinge um máximo em $z = 1,25$. Invertendo a equação (4.12), as distâncias podem ser escritas em termos do "redshift" como

$$d_A = \frac{2}{H_0} \left[\frac{1 + z - \sqrt{1 + z}}{(1 + z)^2} \right] = \frac{z}{H_0} - \frac{7z^2}{4H_0} + \frac{19z^3}{8H_0} - \dots, \quad (4.15)$$

$$d_l = \frac{2}{H_0} \left[1 + z - \sqrt{1 + z} \right] = \frac{z}{H_0} - \frac{z^2}{4H_0} + \frac{z^3}{8H_0} - \dots, \quad (4.16)$$

$$d_G = \frac{2}{H_0} \left[\frac{1 + z - \sqrt{1 + z}}{1 + z} \right] = \frac{z}{H_0} - \frac{3z^2}{4H_0} + \frac{5z^3}{8H_0} - \dots, \quad (4.17)$$

cujas expressões na forma de séries são válidas para $z < 1$. Como já se esperava, estas distâncias coincidem em primeira ordem, entretanto, o interesse aqui é saber quantos termos de ordem maior influenciam a densidade média e para valores de z moderados.

O gráfico abaixo mostra o comportamento da distância e redshift no modelo Einstein- de Sitter. Fica claro que o comportamento assintótico difere para cada definição de distância, a partir de valores moderados de z .

Gráfico 4.1: Diferentes definições de distância em função do deslocamento para o vermelho dadas pelas equações acima. Fica claro o desvio a partir de valores moderados de z . Neste gráfico foi utilizado $H_0 = 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ e $c = 300000 \text{ km/s}$.

O próximo passo nesta análise é definir o volume observável. É natural usar uma extensão da noção de volume no espaço euclidiano, ou seja,

$$V_A = \frac{4}{3}\pi (d_A)^3 \quad V_L = \frac{4}{3}\pi (d_L)^3 \quad V_G = \frac{4}{3}\pi (d_G)^3. \quad (4.18)$$

Também será usado o volume em um espaço de redshift, sendo

$$V_z = \frac{4}{3}\pi (d_z)^3 \quad (4.19)$$

no qual

$$d_z = \frac{cz}{H_0}. \quad (4.20)$$

Nesta equação as duas constantes são necessariamente correções nas dimensões envolvidas.

Substituindo a distância de galáxia dada pela equação (4.13) na definição de volume dada acima obtém-se

$$V_G = \frac{32\pi}{3H_0^3(1+z)^{\frac{3}{2}}} \left[\sqrt{1+z} - 1 \right]^3. \quad (4.21)$$

Esta definição de volume é a mesma apresentada por Sandage (1995, p. 19, eq. 142)[13]. Esta expressão aparece em vários textos sobre o assunto como se fosse a única expressão possível para o volume em função do redshift, ignorando o fato de que há outras três definições de volume que podem ser usadas em qualquer análise. A forma como Sandage apresenta os observáveis em cosmologia é correta, entretanto não é completa. As demais definições de volumes observáveis e densidades são relevantes no cenário da fractalidade da distribuição de matéria no universo.

Da equação geral obtida por Ellis (1971, p. 159)[14], obtém-se o número de contagem bolométrico no modelo Einstein-de Sitter (Ribeiro, 1992ab)

$$N_c = \frac{2r^3}{9M_g}, \quad (4.22)$$

no qual M_g é a massa média das galáxias ($\sim 10^{11} M_{solar}$).

As densidades médias podem ser calculadas facilmente através da equação $\langle \rho \rangle = M_G N_c / V$. Como há quatro tipos de volume, derivam-se quatro equações diferentes para a densidade média e todas, a princípio, obtidas por grandezas observáveis. Considerando as equações (4.8), (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) e (4.22) seguem

$$\langle \rho_l \rangle = \frac{\rho_0}{(1+z)^3}, \quad (4.23)$$

$$\langle \rho_z \rangle = 8\rho_0 \left[\frac{1+z-\sqrt{1+z}}{z(1+z)} \right]^3, \quad (4.24)$$

$$\langle \rho_A \rangle = \rho_0 (1+z)^3, \quad (4.25)$$

$$\langle \rho_G \rangle = \rho_0, \quad (4.26)$$

sendo

$$\rho_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi}, \quad (4.27)$$

a densidade critica, isto é, a densidade local no modelo Einstein-de Sitter na hiper-superfície correspondente ao momento atual.

A densidade média construída com as distâncias de área de galáxia d_G , dada pela equação (4.26), comporta-se como a densidade local atual ao longo do cone de luz passado. Conseqüentemente, se tal definição de distância for utilizada para estudar o desvio de uma densidade homogênea, mesmo se analisado ao longo do cone de luz, levará a uma densidade média constante no modelo Einstein-de Sitter. Sendo assim, as outras três densidades são as de maior importância.

Gráfico 4.2: Densidades médias $\langle \rho_L \rangle$ e $\langle \rho_A \rangle$ usando duas diferentes definições de distância d_L e d_A . A terceira densidade $\langle \rho_z \rangle$ foi construída usando o próprio z como medida de distância. Estas densidades médias estão representadas pela razão com a densidade local presente ρ_0 . Pode-se ver que o desvio da homogeneidade espacial ocorre ainda em valores pequenos de z , tornando-se particularmente grandes para $z \approx 0, 1$.

É simples verificar que quando $z \rightarrow 0$, $\langle \rho_L \rangle = \langle \rho_z \rangle = \langle \rho_A \rangle = \rho_0$. Então, no momento do "big bang", estas médias se comportam de maneiras bem diferentes. Sendo que no "big bang" o valor de $z \rightarrow \infty$ (4.14), é possível verificar os seguintes limites

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \langle \rho_l \rangle = 0. \quad (4.28)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \rho = 0, \quad (4.29)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \langle \rho_A \rangle = \infty. \quad (4.30)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \langle \rho_z \rangle = 0. \quad (4.31)$$

A equação (4.28) fora deduzida no artigo de Ribeiro (1992b). A equação (4.29) é conhecida na literatura. Quanto à equação (4.30), sua forma era esperada pois a densidade local diverge no "big bang". O importante a se destacar aqui é que, mesmo no modelo padrão, alguns tipos de densidade média vão a zero no instante do "big bang". Esta propriedade não é restrita apenas ao modelo Einstein-de Sitter, ela está presente em toda a cosmologia padrão.

Para a análise destas densidades no contexto da fractalidade da distribuição da matéria no universo, inicialmente reescrevem-se estas densidades como

$$\langle \rho_l \rangle = \rho_0 (1 - 3z + 6z^2 - 10z^3 + \dots), \quad (4.32)$$

$$\langle \rho_z \rangle = \rho_0 \left(1 - \frac{9}{4}z + \frac{57}{16}z^2 - \frac{39}{8}z^3 + \dots \right), \quad (4.33)$$

$$\langle \rho_A \rangle = \rho_0 (1 + 3z + 3z^2 + z^3). \quad (4.34)$$

Nota-se a presença do termo de ordem zero nas expansões acima, enquanto as séries para as diferentes distâncias, dada pelas equações (4.15), (4.16) e (4.17), iniciam com o termo de primeira ordem. Sendo a lei de Hubble uma relação entre distância e deslocamento para o vermelho, derivada da expansão

em primeira ordem da distância, fica claro que devido à não linearidade das equações de Einstein para o campo, as relações observáveis comportam-se de forma diferente para diferentes profundidades observadas. Conseqüentemente, enquanto a linearidade da lei de Hubble é preservada no modelo Einstein-de Sitter até aproximadamente $z \approx 1$, um valor implicitamente assumido como o limite inferior até o qual efeitos relativísticos podem ser desprezados, as densidades médias observáveis contruídas com d_L , d_A e z são fortemente afetadas por efeitos relativísticos em valores ainda mais baixos do deslocamento para o vermelho. Então, enquanto o termo de ordem zero desaparece na relação entre distância e z , ele não é diferente de zero para densidades médias para o respectivo valor do z . Este termo de ordem zero é o fator principal no diferente comportamento destas duas quantidades observáveis em valores pequenos de z . Pietronero, Montuori e Sylos-Labini (1997) nomearam este efeito como "paradoxo Hubble-de Vaucouleurs". Entretanto, pela análise apresentada aqui e nos trabalhos de Ribeiro (1995; veja Abdalla, Mohayaee e Ribeiro 2000), fica claro que não há paradoxo, mas apenas efeitos relativísticos diferentes sobre os observáveis em valores moderados do deslocamento para o vermelho.

Esta discussão feita até agora pode ser resumida na seguinte frase: as inomogeneidades observáveis na cosmologia do modelo Einstein-de Sitter não estão relacionadas com a linearidade da lei de Hubble em valores moderados do deslocamento para o vermelho. Durante a medição, o observador pode usar formulas que não seguem o critério de Bondi e por isso assumir que na escala observada ($z < 1$) é seguro desprezar as correções relativísticas baseando-se no fato de que nesta escala é verificado observacionalmente que a lei de Hubble é uma relação linear. Entretanto, verificou-se que a linearidade da lei de Hubble tem um alcance que somente coincide com uma densidade constante se for utilizada a distância de área de galáxias como a definição de distância. Isto não ocorre com qualquer das outras definições.

Considerando a equação (4.14) obteve-se da equação (4.28) da qual concluiu-se que no modelo Einstein-de Sitter é correto o seguinte limite

$$\lim_{d_L \rightarrow \infty} \langle \rho_L \rangle = 0. \quad (4.35)$$

Este resultado proporciona uma ligação com o modelo hierárquico. James R. Wertz [15] postulou que em um modelo cosmológico puramente hierárquico, a densidade global existe e é zero medida de qualquer lugar. O limite acima mostra que o modelo Einstein-de Sitter obedece a este requisito chave para

uma cosmologia fractal. Este resultado aparece naturalmente quando as relações observáveis em cosmologia são tratadas em um cenário inteiramente relativístico.

4.5 Conjectura Fractal aparente

Baseado nos resultados acima é possível agora discutir com mais maturidade alguns conceitos errados que aparecem na literatura, frutos de suposições que não são mais válidas e que levam a falsos problemas na cosmologia. O primeiro destes conceitos a ser tratado é a afirmação de que verificar a homogeneidade da distribuição das galáxias pelos dados observacionais, é a única forma pela qual o modelo de Robertson-Walker será considerado correto e não verificá-la invalidaria tal modelo.

Foi mostrado aqui que algumas características bastante inhomogêneas aparecem no Modelo Einstein-de Sitter. Além disso, M. Ribeiro (1993, 1994) [7] mostrou que tais características também podem ser encontradas em qualquer solução para as Equações de Einstein que pertençam ao Modelo Padrão. Este resultado foi obtido sem nenhuma mudança no modelo, na métrica ou em alguma suposição básica. As propriedades fractais aparecem como propriedades do modelo, assim como obedecer ao princípio cosmológico, a linearidade da lei de Hubble e a isotropia da radiação cósmica de fundo. É importante destacar que os parâmetros cosmológicos pertencentes ao Modelo Padrão mantêm suas interpretações e definições usuais. Desta forma, reconhecer uma certa fractalidade observada na cosmologia não é necessariamente incompatível com reconhecidas noções básicas da cosmologia moderna.

O que fica claro com estes resultados é que a homogeneidade intrínseca do modelo padrão é espacial, ou seja, é um fator geométrico que não necessariamente se traduz em uma quantidade astronomicamente observável. Isto somente ocorre em circunstâncias especiais. A observação de inhomogeneidades em valores pequenos do deslocamento para o vermelho mostra que efeitos relativísticos começam a ser relevantes na cosmologia observacional em valores de z muito menores do que se supunha anteriormente.

O segundo conceito falho é discutir as possíveis evidências para uma distribuição homogênea, ou não, sem deixar explícita a escolha do tipo de distância utilizada na análise. Se a distância for obtida pelos dados de z utilizando a relação $cz = H_0 \cdot d_z$, não incluindo nenhum fator $(1 + z)$ como aparece para

as demais definições de distância, estará se escolhendo a definição de distância que mais se aproxima da linearidade da lei de Hubble.

Vê-se que alguns pontos básicos de uma distribuição fractal são encontrados no modelo padrão em sua forma mais simples, ou seja, o modelo Einstein-de Sitter não perturbado. Entretanto, como as densidades médias construídas com d_L e z não decaem linearmente neste modelo, é natural perguntar se um modelo com perturbação resultaria em um decaimento para a densidade na forma de uma lei de potência, assim como previsto pela descrição fractal da distribuição observada. Se isso ocorrer, o modelo cosmológico padrão poderia ser reconciliado com uma distribuição fractal das galáxias até certa medida a ser determinada. Neste ponto, há embasamento suficiente para propor a seguinte conjectura [8]: a fractalidade observada da distribuição da matéria em larga escala deve surgir quando relações observáveis necessárias para a caracterização fractal são calculadas ao longo do cone de luz passado do observador em uma métrica perturbada dentro da cosmologia padrão. Estas "relações observáveis necessárias para a caracterização fractal" referem-se a escolher d_L ou d_Z como distâncias e construir densidades médias a partir delas, ou seja, derivar expressões para o número de contagem de fontes (corpos) e calcular $\langle \rho_L \rangle$ e $\langle \rho_z \rangle$ como definido anteriormente, tudo feito ao longo do cone de luz.

Esta conjectura tem implicações teóricas e observacionais. Do lado teórico, não é mais possível ignorar a escolha da distância e todos os cálculos devem obedecer a esta escolha. Do lado observacional, torna-se necessária uma análise cuidadosa sobre qualquer conjunto de dados coletados, sendo que pode ocorrer uma escolha implícita de definição para a distância no processo.

Se esta conjectura se mostrar correta, mesmo que parcialmente, fractais em cosmologia não seriam mais vistos em oposição ao princípio cosmológico. Ferramentas usuais na cosmologia relativística, como a aproximação por fluido, permaneceriam válidas.

Como uma possível consequência desta conjectura, uma caracterização detalhada da estrutura fractal observada poderia fornecer uma ligação com o tipo de perturbação necessária em nosso modelo cosmológico e também dentro do problema da formação de galáxias.

Capítulo 5

Perturbação Cosmológica e Resultados.

5.1 Teoria de perturbação.

Sabemos que o universo era bastante homogêneo no início e agora vemos inúmeras estruturas. Dentro da cosmologia, acredita-se que estas irregularidades são originadas por "instabilidades gravitacionais". Pequenas flutuações na densidade do fluido cósmico homogêneo, assim como era o universo em sua forma inicial, cresceram dando origem às estruturas observadas hoje. Esta idéia foi introduzida por J. Jeans em 1902 ao demonstrar que um fluido homogêneo e isotrópico é instável para pequenas perturbações em sua densidade. No universo, estas flutuações crescem com o tempo caso a pressão que suporta tal fluido cósmico seja menor que a força gravitacional. Sendo a pressão desprezível no universo, uma região um pouco mais densa irá continuamente agregar a matéria que está a sua volta, se tornando instável até colapsar, formando um objeto sólido. Esta análise, aplicada a um fluido estatístico newtoniano, é uma tentativa de se entender a formação das estruturas conhecidas. Para a cosmologia moderna é preciso introduzir a expansão do universo e os demais efeitos relativísticos.

Mesmo sem um cenário detalhado, a simples idéia de que as estruturas observadas no universo são resultado da amplificação de pequenas flutuações no universo primordial, parece funcionar muito bem. Estas perturbações crescem lentamente com o tempo até serem fortes o suficiente para se separarem do fundo homogêneo e colapsar em sistemas gravitacionalmente fechados como

galáxias e aglomerados de galáxias.

Aqui iremos adotar de início a existência destas pequenas inomogeneidades em algum tempo inicial do universo mas esteja claro que nenhum modelo cosmológico está completo sem explicar o processo físico que dá origem a estas flutuações. Para isso, a teoria de inflação parece ser a melhor opção.

Entender os detalhes da formação de estruturas requer, entre outras coisas, conhecer o estado inicial do universo. Tal formação inicia-se efetivamente com o fim da era dominada por radiação, entrando para a era dominada por matéria ($t_{eq} \simeq 4,4 \cdot 10^{10} \Omega^{-2} s$, no qual Ω é o parâmetro de densidade do universo). As informações necessárias incluem: (1) a quantidade total de matéria não relativística; (2) a composição do universo e a contribuição de cada componente da densidade total; (3) o tipo de perturbação inicial (adiabática ou isotérmica). Tendo estas informações é possível, a princípio, construir um cenário detalhado da formação das estruturas e possibilitando comparar tal resultado com o universo observado.

Ao se tratar com perturbações cosmológicas deve-se ter cuidado com o problema do "gauge" ou calibre. O problema tem origem em uma liberdade intrínseca ao se fazer uma transformações de "gauge". Mesmo uma grandeza que se comporte como um escalar em uma mudança de coordenadas, a perturbação desta não será invariante em uma transformação de "gauge", tendo em vista que a grandeza em questão não seja zero e dependente do tempo no fundo não perturbado. Apenas uma transformações de "gauge" não tem significado físico. Um exemplo típico são perturbações na densidade. Sendo que a densidade é um escalar dependente do tempo no fundo não perturbado, sua perturbação não é invariante em uma transformação de "gauge".

A seguir será desenvolvido um modelo de perturbação linear presente tanto na densidade quanto na pressão e na métrica do espaço-tempo. Dada a forma da perturbação, serão obtidas as equações de campo que tal perturbação deve satisfazer, utilizando uma aproximação linear. Como no exemplo dado, esta perturbação não sobre com o problema de ser apenas uma transformação de "gauge".

5.2 Perturbações Invariantes de Escala das Equações de Einstein.

O modelo de perturbação utilizado aqui fora desenvolvido por Abdalla, Mohayaee e Ribeiro [16][17]. Ele consiste em obter equações diferenciais solúveis para métrica do modelo padrão com fator de escala dependente da coordenada radial, realizando aproximações em primeira ordem. Tal perturbação corresponde a uma flutuação adiabática no fundo homogêneo. Usaremos a seguinte métrica,

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(r, t) \left\{ \frac{dr^2}{(1 - kr^2)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right\}, \quad (5.1)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1, \\ g_{0i} &= 0, \\ g_{rr} &= R^2(r, t) f(r), \\ g_{\theta\theta} &= r^2 R^2(r, t), \\ g_{\varphi\varphi} &= r^2 R^2(r, t) \sin^2 \theta, \\ g_{ij} &= 0 \text{ para } i \neq j, \end{aligned} \quad (5.2)$$

sendo

$$f(r) = \frac{1}{(1 - kr^2)}. \quad (5.3)$$

De acordo com a Equação de Einstein, vamos obter equações diferenciais para uma solução da forma

$$R(r, t) = R_o(t) + X(t) r^{-\sigma}, \quad (5.4)$$

$$g_{00} T^{00} = \rho(r, t) = \rho_o(t) + \lambda(t) r^{-\gamma},$$

$$g_{rr} T^{rr} = p(r, t) = p_o(t) + \pi_r(t) r^{-\gamma'},$$

$$g_{\theta\theta}T^{\theta\theta} = p'(r, t) = p'_o(t) + \pi_\theta(t) r^{-\gamma'}.$$

tal que $R_o(t)$, $\rho_o(t)$, $p_o(t)$ e $p'_o(t)$ sejam respectivamente o fator de escala, a densidade, a pressão radial e a pressão polar para o fundo homogêneo e $\gamma \approx 1$.

Inicialmente, calculam-se as novas conexões afins

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) = \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma. \quad (5.5)$$

Para o primeiro caso, faz-se $\sigma = 0$ obtendo

$$\Gamma_{00}^0 = 0$$

$$\Gamma_{rr}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rr}}{\partial t} = \frac{R\dot{R}}{(1 - kr^2)},$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial t} = r^2 R\dot{R}, \quad (5.6)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial t} = r^2 R\dot{R} \sin^2 \theta.$$

Fazendo agora $\lambda = 0$ temos

$$\Gamma_{0\mu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial g_{0\sigma}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu 0}}{\partial x^\sigma} \right) = \Gamma_{\mu 0}^\sigma.$$

Vê-se que $\Gamma_{0\mu}^\sigma = 0$ caso tenhamos $\sigma \neq \mu$ ou $\sigma = \mu = 0$, logo,

$$\Gamma_{0r}^r = \Gamma_{0\theta}^\theta = \Gamma_{0\varphi}^\varphi = \frac{\dot{R}}{R}. \quad (5.7)$$

Temos ainda os seguintes casos diferentes de zero,

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2 f} \frac{\partial(R^2 f)}{\partial r},$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -\frac{1}{2} \frac{1}{R^2 f} \frac{\partial(r^2 R^2)}{\partial r},$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -\frac{1}{2} \frac{1}{R^2 f} \frac{\partial(R^2 r^2 \sin^2 \theta)}{\partial r},$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 R^2} \frac{\partial(r^2 R^2)}{\partial r}, \quad (5.8)$$

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\frac{1}{2} \frac{\partial(\sin^2 \theta)}{\partial \theta},$$

$$\Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{r\theta}^\theta,$$

$$\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial(\sin^2 \theta)}{\partial \theta}.$$

Com tais componentes calculam-se o tensor de Ricci $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ e o escalar de curvatura $\mathcal{R}$ dados por

$$\mathcal{R}_{\mu\xi} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda}}{\partial x^{\xi}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\xi}^{\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\xi\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\xi}^{\eta} \Gamma_{\lambda\eta}^{\lambda}, \quad (5.9)$$

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}. \quad (5.10)$$

Obtemos as componentes do tensor de Ricci diferentes de zero dadas por

$$\mathcal{R}_{00} = 3 \left(\frac{\ddot{R}}{R} - \frac{\dot{R}^2}{R^2} \right) + 3 \frac{\dot{R}^2}{R^2} = 3 \frac{\ddot{R}}{R}, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{R}_{rr} = \frac{2R''}{R} + \frac{2R'}{rR} - \frac{2R'^2}{R^2} - \frac{2R'krf}{R} - 2\dot{R}^2 f - R\ddot{R}f - 2kf, \quad (5.12)$$

$$\mathcal{R}_{\theta\theta} = -r^2 R\ddot{R} - 2kr^2 + \frac{3rR'}{Rf} + \frac{r^2 R''}{Rf} - \frac{kr^3 R'}{R} - 2r^2 \dot{R}^2, \quad (5.13)$$

$$\mathcal{R}_{\varphi\varphi} = \mathcal{R}_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (5.14)$$

$$\mathcal{R}_{0r} = 2 \left(\frac{\dot{R}'}{R} - \frac{\dot{R}R'}{R^2} \right). \quad (5.15)$$

O escalar de curvatura será

$$\mathcal{R} = -6 \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{4R''}{R^3 f} + \frac{8R'}{rR^3 f} - \frac{2R'^2}{R^4 f} - \frac{4krR'}{R^3} - \frac{6\dot{R}^2}{R^2} - \frac{6k}{R^2}. \quad (5.16)$$

Verifica-se que tais componentes do tensor se reduzem aos do modelo padrão se as derivadas em relação a coordenada r forem iguais a zero. Pelos resultados acima obtidos, as equações de Einstein serão

$$\frac{3\dot{R}^2}{R^2} - \frac{2R''}{R^3 f} + \frac{R^2}{R^4 f} - \frac{4R'}{r R^3 f} + \frac{2krR'}{R^3} + \frac{3k}{R^2} = 8\pi G\rho, \quad (5.17)$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{2R'}{r R^3 f} + \frac{k}{R^2} = -8\pi Gp, \quad (5.18)$$

$$\frac{2\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{R'}{r R^3 f} - \frac{R''}{R^3 f} + \frac{krR'}{R^3} + \frac{R'^2}{R^4 f} + \frac{k}{R^2} = -8\pi Gp', \quad (5.19)$$

$$2\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\dot{R}}{R} \right) = -8\pi GT_{0r}, \quad (5.20)$$

Pretende-se, por aproximação em primeira ordem, separar o que corresponde somente à perturbação. Torna-se necessário saber a relação entre os expoentes do termo de perturbação do fator de escala σ e da densidade γ . Isto é feito resolvendo as equações de conservação de energia e momento

$$D^\nu T_{\mu\nu} = \partial^\nu T_{\mu\nu} - g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\sigma}^\nu T_{\nu\mu} - g^{\rho\sigma} \Gamma_{\rho\mu}^\nu T_{\sigma\nu} = 0, \quad (5.21)$$

sendo

$$T_{00} = -\rho g_{00} = \rho,$$

$$T_{rr} = pg_{rr} = pR^2(r, t)f(r),$$

$$T_{\theta\theta} = p'g_{\theta\theta} = p'r^2R^2(r, t),$$

$$T_{\varphi\varphi} = p' g_{\varphi\varphi} = p' R^2(r, t) r^2 \sin^2 \theta,$$

$$T_{0r} \neq 0.$$

Para $\mu = 0$ na equação de conservação temos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{R^2 f} \frac{\partial T_{0r}}{\partial r} + 3 \frac{\dot{R}}{R} \rho + \frac{\dot{R}}{R} (p + 2p') + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{R^4 f^2} \frac{\partial(R^2 f)}{\partial r} - \frac{1}{r^2 R^4 f} \frac{\partial(R^2 r^2)}{\partial r} \right) T_{0r} = 0.$$

que multiplicado por R^3 resulta em

$$\frac{\partial}{\partial t} (R^3 \rho) + \frac{(p + 2p')}{3} \frac{\partial R^3}{\partial t} - \frac{(1 - kr^2)}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (T_{0r} r^2 R) + kr R T_{0r} = 0. \quad (5.22)$$

Vê-se que para $T_{0r} = 0$ e $p = p'$ recupera-se a equação usual da métrica de Robertson-Walker,

$$\frac{\partial}{\partial t} (R^3 \rho) = -p \frac{\partial R^3}{\partial t}.$$

Da mesma maneira, para $\mu = r$ obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial t} (R^3 T_{0r}) - \frac{R}{r^2} \frac{\partial(r^2 R^2 p)}{\partial r} + \frac{R}{r^2} \frac{\partial(R^2 r^2)}{\partial r} p' = 0, \quad (5.23)$$

e novamente para $p = p' = p(t)$ temos

$$\frac{\partial}{\partial t} (R^3 T_{0r}) = 0.$$

Assim como fora escrito para R , $\rho(r, t)$, $p(r, t)$ e $p'(r, t)$, adota-se T_{0r} escrito por

$$T_{0r} = gf(R)r^{-\gamma'} \quad (5.24)$$

sendo g uma constante e $f(R)$ uma função do fator de escala.

Da equação de conservação (5.22), e com a seguinte aproximação (para grandes valores de r)

$$R^3 = R_0^3 + 3R_0^2 X r^{-\sigma} + 3R_0 X^2 r^{-2\sigma} + X^3 r^{-3\sigma} \approx R_0^3 + 3R_0^2 X r^{-\sigma}, \quad (5.25)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (R_0^3 \lambda) r^{-\gamma} + 3 \frac{\partial}{\partial t} (\rho_o R_0^2 X) r^{-\sigma} + 3 p_o \frac{\partial}{\partial t} (R_0^2 X) r^{-\sigma} + \frac{(\pi_r + 2\pi_\theta)}{3} \frac{\partial R_0^3}{\partial t} r^{-\gamma} \\ & - (-\gamma' + 2) g f R_o r^{-\gamma'-1} - (-\sigma - \gamma' + 2) g f X r^{-\sigma-\gamma'-1} + (-\gamma' + 3) k g f R_o r^{-\gamma'+1} \\ & + (-\sigma - \gamma' + 2) k g f X r^{-\sigma-\gamma'+1} + k f X r^{-\sigma-\gamma'} = 0, \end{aligned}$$

encontrando os seguintes termos de ordens de r : $-\gamma, -\sigma, -\gamma' - 1, -\sigma - \gamma' - 1, -\gamma' + 1, -\sigma - \gamma' + 1, -\sigma - \gamma'$.

Fazendo o mesmo para (5.23) resulta em

$$\frac{\partial}{\partial t} (g f R_0^3) r^{-\gamma'} + \frac{\partial}{\partial t} (3 g f R_0^2 X) r^{-\sigma-\gamma'} + [(\gamma - 2) \pi_r + 2\pi_\theta] R_0^3 r^{-\gamma-1} \quad (5.26)$$

$$[(2\sigma + 3\gamma - 6) \pi_r + (4 - 2\sigma) \pi_\theta] R_0^2 X r^{-\sigma-\gamma-1}$$

$$[(3\sigma + 3\gamma - 8) \pi_r + (6 - 4\sigma) \pi_\theta] R_o X^2 r^{-2\sigma-\gamma-1}$$

$$[(2\sigma + \gamma - 2) \pi_r + (-2\sigma + 2) \pi_\theta] X^3 r^{-3\sigma-\gamma-1}$$

$$+ (2R_0^2 X \pi_\theta r^{-\sigma-\gamma-2}) = 0,$$

encontrando termos de ordens : $-\gamma', -\gamma-1, -\sigma-\gamma-1, -2\sigma-\gamma-1, -3\sigma-\gamma-1, -\sigma-\gamma-2$.

Da Equação de Einstein (5.20) para grandes valores de r escreve-se

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\dot{R}_0}{R_0} + \left(\frac{\dot{X}}{R_0} - \frac{\dot{R}_0 X}{R_0^2} \right) r^{-\sigma} \right] = -4\pi G g f(R) r^{-\gamma'},$$

$$\left(\frac{\dot{X}}{R_0} - \frac{\dot{R}_0 X}{R_0^2} \right) \sigma r^{-\sigma-1} = 4\pi G g f(R) r^{-\gamma'}. \quad (5.27)$$

no qual temos então $\gamma' = \sigma + 1$. Observando as ordens encontradas acima, nas condições propostas, teremos necessariamente

$$\sigma = \gamma = \gamma' - 1, \quad (5.28)$$

e os demais termos de ordem superior serão desprezados. As duas equações de conservação se resumem a

$$\frac{\partial}{\partial t} (R_o^3 \lambda + 3\rho_o R_o^2) + 3p_o \frac{\partial}{\partial t} (R_o^2 X) + \frac{(\pi_r + 2\pi_\theta)}{3} \frac{\partial R_o^3}{\partial t} + (2 - \sigma) \frac{1}{4\pi G} k g f R_o = 0, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (g f R_o^3) + (\sigma - 2) R_o^3 \pi_r + 2 R_o^3 \pi_\theta = 0. \quad (5.30)$$

Encontrada a relação entre os expoentes, as equações para os termos de perturbação são calculadas a partir das equações de Einstein fazendo as seguintes aproximações, validas para grandes valores de r ,

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{R_0} \left(1 - \frac{X}{R_0} r^{-\sigma} \right),$$

$$\frac{k}{R^2} \approx \frac{k}{R_0^2} \left(1 - 2 \frac{X}{R_0} r^{-\sigma} \right),$$

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{R}_0 + \dot{X} r^{-\sigma}}{R_0 + X r^{-\sigma}} \approx \frac{\dot{R}_0}{R_0} + \left(\frac{\dot{X}}{R_0} - \frac{\dot{R}_0 X}{R_0^2} \right) r^{-\sigma},$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{R}_0 + \ddot{X} r^{-\sigma}}{R_0 + X r^{-\sigma}} \approx \frac{\ddot{R}_0}{R_0} + \left(\frac{\ddot{X}}{R_0} - \frac{\ddot{R}_0 X}{R_0^2} \right) r^{-\sigma}, \quad (5.31)$$

$$\frac{R''}{R^3 f} \approx \frac{1}{R_0^3} (1 - k r^2) (-\sigma) (-\sigma - 1) X r^{-\sigma-2},$$

$$\frac{R'^2}{R^4 f} \approx \frac{1}{R_0^4} (1 - k r^2) \sigma^2 X^2 r^{-2\sigma-2},$$

$$\frac{R'}{R^3 f} \approx -\frac{1}{R_0^3} (1 - k r^2) \sigma X r^{-\sigma-2},$$

$$\frac{k r R'}{R^3} \approx -\frac{1}{R_0^3} k \sigma X r^{-\sigma}.$$

Substituindo na equação(5.17) teremos

$$3 \left(\frac{\dot{R}_0}{R_0} \right)^2 + 6 \frac{\dot{R}_0}{R_0} \left(\frac{\dot{X}}{R_0} - \frac{\dot{R}_0 X}{R_0^2} \right) r^{-\sigma} + 3 \left(\frac{\dot{X}}{R_0} - \frac{\dot{R}_0 X}{R_0^2} \right)^2 r^{-2\sigma} \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{R_0^3}(1-kr^2)(-\sigma)(-\sigma-1)Xr^{-\sigma-2} + \frac{1}{R_0^4}(1-kr^2)\sigma^2X^2r^{-2\sigma-2} \\
& + \frac{4}{R_0^3}(1-kr^2)\sigma Xr^{-\sigma-2} - \frac{2}{R_0^3}k\sigma Xr^{-\sigma} + 3\frac{k}{R_0^2}\left(1-2\frac{X}{R_0}r^{-\sigma}\right) \\
& = 8\pi G(\rho_o(t) + \lambda(t)r^{-\sigma}),
\end{aligned}$$

e eliminando termos de ordem zero correspondentes ao fundo homogêneo e os maiores que σ resulta em

$$6\frac{\dot{R}_0}{R_0}\left(\frac{\dot{X}}{R_0} - \frac{\dot{R}_0 X}{R_0^2}\right) + 2k(\sigma+1)(\sigma-3)\frac{X}{R_0^3} = 8\pi G\lambda. \quad (5.33)$$

Da mesma forma, as demais equações temos

$$\frac{\ddot{X}}{R_0} - \frac{\ddot{R}_0 X}{R_0^2} + \frac{\dot{R}_0 \dot{X}}{R_0^2} - \frac{\dot{R}_0^2 X}{R_0^3} - k(\sigma+1)\frac{X}{R_0^3} = -4\pi G\pi_r, \quad (5.34)$$

$$\frac{\ddot{X}}{R_0} - \frac{\ddot{R}_0 X}{R_0^2} + \frac{\dot{R}_0 \dot{X}}{R_0^2} - \frac{\dot{R}_0^2 X}{R_0^3} + \frac{1}{2}k(\sigma+1)(\sigma-2)\frac{X}{R_0^3} = -4\pi G\pi_\theta, \quad (5.35)$$

$$\frac{\sigma}{4\pi G}\left(\frac{\dot{X}}{R_0} - \frac{\dot{R}_0 X}{R_0^2}\right) = gf(R). \quad (5.36)$$

As equações (5.33), (5.34) e (5.35) são denominadas *Equações de Einstein com Perturbações Invariantes de Escala*, sendo a parte homogênea a mesma obtida para o modelo padrão. É possível testar a validade destas equações substituindo seus resultados para $\lambda(t)$, $\pi_r(t)$ e $\pi_\theta(t)$ em função de $R_0(t)$ e $X(t)$, nas equações de conservação (5.22) e (5.23). Como resultando para a primeira delas temos

$$[3 + (\sigma + 1)(\sigma - 3) + \sigma(2 - \sigma)] \frac{2}{8\pi G} k\dot{X} +$$

$$[-3 - (\sigma + 1)(\sigma - 2) + (\sigma + 1) - \sigma(2 - \sigma)] \frac{2}{8\pi G} \frac{k\dot{R}_0 X}{R_0} = 0,$$

que será igual a zero para qualquer valor de σ .

Para a segunda equação temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi G} \sigma \left(2R_0\dot{R}_0\dot{X} + R_0^2\ddot{X} - \dot{R}_0^2 X - R_0\ddot{R}_0 X - R_0\dot{R}_0\dot{X} \right) \\ & - \frac{1}{4\pi G} (\sigma - 2) \left[R_0^2\ddot{X} - R_0\ddot{R}_0 X + R_0\dot{R}_0\dot{X} - \dot{R}_0^2 X - k(\sigma + 1)X \right] \\ & - \frac{1}{4\pi G} \left[2R_0^2\ddot{X} - 2R_0\ddot{R}_0 X + 2R_0\dot{R}_0\dot{X} - 2\dot{R}_0^2 X + k(\sigma + 1)(\sigma - 2)X \right] = 0, \end{aligned}$$

que também é satisfeita para qualquer valor de σ .

É importante destacar novamente que esta perturbação no fator de escala não é apenas uma transformação de "gauge" sem significado físico.

5.3 Perturbações Invariantes de Escala no caso Einstein-de Sitter.

O cálculo explícito de $X(t)$, $\lambda(t)$ e $\pi_r(t)$, para um determinado fator de escala $R_0(t)$, a partir das equações (5.33) e (5.34), necessita adotar uma equação de estado relacionando $p(r, t)$ e $\rho(r, t)$. Para a parte homogênea esta equação usualmente é dada por uma relação linear, $p_o(t) = \varpi \rho_o(t)$. Para a perturbação, será utilizada a relação $\pi_r(t) = \alpha \lambda(t)$, sendo α uma constante não

necessariamente igual a ϖ . Entretanto, para fins práticos, teremos uma perturbação aproximadamente adiabática tomando α próximo de ϖ . Em geral, $\alpha = \varpi = v_s^2$, sendo v_s a velocidade do som, que, a princípio, não é alterada pela perturbação. Com isso, acoplam-se as equações (5.33) e (5.34) obtendo-se

$$\ddot{X} + (1 + 3\alpha) \frac{\dot{R}_0}{R_0} \dot{X} + \left[- (1 + 3\alpha) \frac{\dot{R}_0^2}{R_0^2} - \frac{\ddot{R}_0}{R_0} + k(\sigma + 1)(\sigma\alpha - 3\alpha - 1) \frac{1}{R_0^2} \right] X = 0. \quad (5.37)$$

A primeira derivada pode ser eliminada pela substituição

$$X = R_0^{-\frac{1+3\alpha}{2}} Y,$$

levando à equação

$$\ddot{Y} + \left\{ -\frac{3}{4} (1 + \alpha) (1 + 3\alpha) \frac{\dot{R}_0^2}{R_0^2} - \frac{3}{2} (1 + \alpha) \frac{\ddot{R}_0}{R_0} + k(\sigma + 1)(\sigma\alpha - 3\alpha - 1) \frac{1}{R_0^2} \right\} Y = 0 \quad (5.38)$$

que, utilizando as Equações de Einstein para a parte homogênea, pode ser reescrita como

$$\ddot{Y} + \left\{ 6\pi G (1 + \alpha) (p_0 - \alpha\rho_0) + C_0 \frac{k}{R_0^2} \right\} Y = 0, \quad (5.39)$$

para $C_0 = \frac{3}{4} (1 + \alpha) (1 + 3\alpha) + (\sigma + 1) (\sigma\alpha - 3\alpha - 1)$.

Como fundo homogêneo para o universo no modelo Einstein-de-Sitter ($k = 0$) temos

$$\rho_o(t) = \frac{1}{6\pi G (\varpi + 1)^2 t^2}, \quad (5.40)$$

$$R_o(t) = A t^{\frac{2}{3(\varpi+1)}},$$

sendo A uma constante a ser determinada. Substituindo o fator de escala acima na equação (5.38) obtém-se

$$\ddot{Y} + \left\{ \frac{-\alpha - \alpha^2 + \varpi + \varpi\alpha}{(\varpi + 1)^2} \right\} Y t^{-2} = 0, \quad (5.41)$$

que tem uma simples solução dada por

$$Y = c t^{\frac{1}{2} \pm \frac{|2\alpha - \varpi + 1|}{2(\varpi + 1)}}.$$

Com isso, a forma final de $X(t)$ será

$$X(t) = c A^{\frac{-1-3\alpha}{2}} t^{\xi_{\pm}}, \quad (5.42)$$

$$\text{sendo } \xi_{\pm} = \frac{-1-3\alpha}{3(\varpi+1)} + \frac{1}{2} \pm \frac{|2\alpha - \varpi + 1|}{2(\varpi+1)}.$$

Para obter $\lambda(t)$ basta aplicar o resultado acima na equação (5.33) escrita para $k = 0$, ou seja,

$$6 \frac{\dot{R}_0}{R_0} \left(\frac{\dot{X}}{R_0} - \frac{\dot{R}_0 X}{R_0^2} \right) = 8\pi G \lambda,$$

cuja solução será

$$\lambda(t) = \left(\frac{1}{2\pi G(\varpi+1)} \right) \left[\xi_{\pm} - \frac{2}{3(\varpi+1)} \right] c A^{-\frac{3}{2}(1+\alpha)} t^{-\frac{2}{3(\varpi+1)} + \xi_{\pm} - 2}. \quad (5.43)$$

Finalizando, as soluções completas $R(t)$ e $\rho(t)$ serão

$$R(t) = A t^{\frac{2}{3(\varpi+1)}} + cA^{\frac{-1-3\alpha}{2}} t^{\xi_{\pm}} r^{-\sigma}, \quad (5.44)$$

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G(\varpi+1)^2 t^2} + \left(\frac{1}{2\pi G(\varpi+1)} \right) \left[\xi_{\pm} - \frac{2}{3(\varpi+1)} \right] cA^{-\frac{3}{2}(1+\alpha)} t^{-\frac{2}{3(\varpi+1)} + \xi_{\pm} - 2} r^{-\sigma}. \quad (5.45)$$

$$\text{sendo } \xi_{\pm} = \frac{-1-3\alpha}{3(\varpi+1)} + \frac{1}{2} \pm \frac{|2\alpha - \varpi + 1|}{2(\varpi+1)}.$$

É necessária atenção no termo $\beta_{\pm} = \xi_{\pm} - \frac{2}{3(\varpi+1)}$ presente na perturbação da densidade pois quando este é zero a perturbação também será, gerando condições sobre os valores válidos de α e ϖ . Para $\varpi > -1$, reescrevendo este termo como

$$\beta_{\pm} = -\frac{(2\alpha - \varpi + 1)}{2(\varpi+1)} \pm \frac{|2\alpha - \varpi + 1|}{2(\varpi+1)},$$

haverá os seguintes casos

	$2\alpha - \varpi + 1 > 0$	$2\alpha - \varpi + 1 = 0$	$2\alpha - \varpi + 1 < 0$
β_+	$= 0$	$= 0$	> 0
β_-	< 0	$= 0$	$= 0$

Pode-se ver que o único caso válido se resume a

$$\beta_{\pm} = \beta = -\frac{2\alpha - \varpi + 1}{\varpi + 1}. \quad (5.46)$$

independente do sinal de $2\alpha - \varpi + 1$, desde que esta equação seja diferente de zero.

Gráfico 5.1: A reta corresponde aos valores de α e ϖ em que a perturbação vai a zero.

Pode-se avaliar o crescimento da perturbação em relação ao fundo homogêneo através da expressão

$$\eta = \left(\frac{t}{t_0} \right)^\zeta, \quad (5.47)$$

sendo ζ o *parâmetro de crescimento* dado por

$$\zeta = \frac{\ln(\lambda R_0^\gamma / \rho_0)}{\ln(t)} = \frac{2\gamma}{3(\varpi + 1)} + \beta = \frac{2\gamma - 6\alpha + 3\varpi - 3}{3(\varpi + 1)}, \quad (5.48)$$

no qual t_0 e t marcam o começo e o fim da era termodinâmica em consideração. Sendo assim, a perturbação crescerá para $\zeta > 0$ e decairá para $\zeta < 0$. Para $\varpi = \alpha = 0$ e $\gamma \approx 1$, no período dominado por matéria, ζ é negativo e a hipótese de densidade homogênea do modelo padrão permanece válida.

Gráfico 5.2: Reta em que $\zeta = 0$, para $\gamma = 1$. Acima dela, as combinações de α e w resultarão modos crescentes de perturbação e abaixo, modos decrescentes.

A solução para a parte polar da perturbação, $\pi_\theta(t)$, também pode ser obtida pelo mesmo processo. Entretanto esta componente não é de interesse para a análise seguinte, sendo que ela se restringe ao cone de luz, ou seja, à coordenada radial.

5.4 Cálculo dos observáveis sobre o cone de luz passado.

Será desenvolvido um método para se obter as relações observáveis como distância de luminosidade e de área. Isto será utilizado posteriormente para testar a *conjectura fractal aparente* verificando se neste modelo perturbado, a relação entre densidade média e alguma das distâncias observáveis reproduz uma *lei de potência*.

O primeiro passo para se obter as relações observáveis em um espaço-tempo é através da solução da geodésica ou cone de luz passado do observador. A expressão para ela é obtida tomando-se $ds^2 = d\theta^2 = d\phi^2 = 0$ na métrica, ou seja,

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{R(r,t)}{f(r)},$$

sendo $R(r, t)$ o fator de escala perturbado e $f(r) = 1 - kr^2$.

Note que é apenas por conveniência que se escreve esta expressão em termos de r e t . De fato, ambas coordenadas são funções do parâmetro afim λ , assim sendo, a expressão acima pode ser reescrita como

$$\frac{dt}{d\lambda} = -\frac{R(r, t)}{f(r)} \frac{dr}{d\lambda}. \quad (5.49)$$

É um problema bastante difícil calcular a solução analítica para a equação da geodésica até mesmo no caso dominado por matéria com $f = 1$, ou então, derivar expressões analíticas para as relações observáveis, neste caso com fator de escala perturbado. Primeiramente, todas as expressões para as relações observáveis serão obtidas para uma métrica com perturbação dependente da coordenada radial e em seguida o problema será resolvido numericamente utilizando a métrica com perturbação no fator de escala. Tal procedimento possibilitará obter as relações observáveis também de forma numérica. Para percorrer este caminho, inicia-se derivando o deslocamento para o vermelho nesta geometria.

A expressão geral para o deslocamento para o vermelho, em qualquer espaço-tempo, é dado por (Ellis 1971)

$$1 + z = \frac{(u^a k_a)_{\text{fonte}}}{(u^a k_a)_{\text{observador}}}, \quad (5.50)$$

na qual u^a é a quadrivelocidade entre fonte e observador e k^a é o vetor tangente à geodésica que os conecta. Se fonte e observador movem-se juntamente, então $u^a = \delta_0^a$, e a equação acima será

$$1 + z = \frac{(dt/d\lambda)_{\text{fonte}}}{(dt/d\lambda)_{\text{observador}}}. \quad (5.51)$$

Encontrar $dt/d\lambda$ em ambos requer o uso de um método indireto, descrito a seguir.

A lagrangeana para a métrica na coordenada radial é

$$\mathcal{L} = -\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \frac{R^2(r, t)}{f^2(r)} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2, \quad (5.52)$$

e a equação de Euler-Lagrange tem a forma

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0,$$

que aplicada à equação (5.52) leva a

$$\frac{d\dot{t}}{d\lambda} + \left(\frac{R}{f^2} \frac{\partial R}{\partial t} \right) \dot{r}^2 = 0, \quad (5.53)$$

$$\frac{d\dot{r}}{d\lambda} + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{R}{f} \frac{df}{dr} \right) \dot{r}^2 + \left(\frac{2}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \right) \dot{r} \dot{t} = 0, \quad (5.54)$$

nas quais os pontos referem-se à derivada com relação ao parâmetro λ . Se usarmos a geodésica nas equações (5.53) e (5.54), é possível integrar ambas uma vez. Os resultados são escritos respectivamente como

$$\dot{t} = \left[\int \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \right) d\lambda + b_1 \right]^{-1}, \quad (5.55)$$

$$\dot{r} = \left[\int \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{f} \frac{df}{dr} + \frac{2}{f} \frac{\partial R}{\partial t} \right) d\lambda + b_2 \right]^{-1}. \quad (5.56)$$

onde b_1 e b_2 são constantes de integração.

Para encontrar estas constantes, vamos escrever o intervalo mantendo ϕ e t constantes,

$$ds^2 = \frac{R^2}{f^2} (dr^2 + f^2 r^2 d\theta^2).$$

É necessário que a métrica seja regular na origem espacial, ou seja, quando $r \rightarrow 0$, a métrica deve ser euclidiana. Desta forma, $f^2 \rightarrow 1$, $R^2/f^2 \rightarrow cte$, enquanto $r \rightarrow 0$. Em outras palavras, requer-se que esta métrica obedeça à condição

$$\lim_{r \rightarrow 0} R = 1. \quad (5.57)$$

Agora, se substituirmos novamente (5.55) e (5.56) de volta na geodésica obtém-se

$$\left[\int \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{f} \frac{df}{dr} + \frac{2}{f} \frac{\partial R}{\partial t} \right) d\lambda + b_2 \right] = -\frac{R}{f} \left[\int \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \right) d\lambda + b_1 \right]. \quad (5.58)$$

Esta equação é válida para qualquer λ , inclusive na origem, onde o observador está localizado. Daqui para frente, o evento do observador será denotado como $\lambda = 0$. Então, considerando a condição (5.57), a equação (5.58) temos que

$$b_2 = -b_1.$$

Se considerarmos a mesma condição, a equação (5.55) será

$$\left[\frac{dt}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{b_1}. \quad (5.59)$$

O interesse maior aqui é no raio de luz que chega ao observador, isto é, o modelo lida com o fóton ao longo do cone de luz, logo, é natural escolher $b_1 = -1$ como constante. Sendo assim, $b_2 = 1$ e com isso (5.55) e (5.59) são reescritas como

$$\frac{dt}{d\lambda} = \left[\int \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \right) d\lambda - 1 \right]^{-1}, \quad (5.60)$$

$$\left[\frac{dt}{d\lambda} \right]_{\lambda=0} = -1. \quad (5.61)$$

Definindo um termo auxiliar I como

$$I \equiv \int \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial t} \right) d\lambda, \quad (5.62)$$

as equações (5.60) e (5.61) nos permitem reescrever o "redshift" (5.51) como

$$z = \frac{1}{1 - I}. \quad (5.63)$$

Ainda é preciso calcular o termo auxiliar I para avaliar o "redshift" e isso é feito através da expressão (5.62) substituída em (5.58), obtendo-se

$$\left[\int \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{f} \frac{df}{dr} + \frac{2}{f} \frac{\partial R}{\partial t} \right) d\lambda + 1 \right] = -\frac{R}{f} (I - 1). \quad (5.64)$$

Considerando as equações (5.62) e (5.64), então (5.55) e (4.43) podem ser reescritas como

$$\begin{aligned} \frac{dt}{d\lambda} &= \frac{1}{I - 1}, \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{f}{(1 - I) R}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Da equação (5.62) obtem-se

$$\frac{dI}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial r} \frac{d\lambda}{dr} \right) dr,$$

e, finalmente, substituindo a equação (5.65) na expressão acima temos

$$\frac{dI}{dr} = \left(\frac{1 - I}{f} \right) \frac{\partial R}{\partial t}. \quad (5.66)$$

A solução da equação diferencial de primeira ordem (5.66) fornece o termo auxiliar I e, conseqüentemente, o "redshift" dado por (5.63). Para $r \rightarrow 0$ temos $f = 1$, $R =$, $I = 0$, e $dI/dr = 0$. Lembrando que, havendo um termo perturbado, o problema tratado é uma equação diferencial cuja solução analítica é difícil ou até mesmo impossível de se encontrar.

As expressões para as relações observáveis podem agora ser obtidas diretamente deste termo auxiliar. A distância de área é dada por

$$(d_A)^2 = \frac{dA_0}{d\Omega_0},$$

na qual $d\Omega$ é o elemento de ângulo sólido com r constante e d_A é a área da seção de choque para este ângulo sólido. Para a métrica em questão temos

$$d\Omega_0 = d\theta \sin \theta d\phi \quad \text{e} \quad dA_0 = R^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

Desta forma, a distância de área é dada pela expressão

$$d_A = rR. \quad (5.67)$$

A distância de luminosidade é obtida a partir da distância de área pela relação (denominada teorema da reciprocidade de Etherington)

$$d_L = (d_A)^2 (1+z)^4.$$

Então, para um tempo-espaço dado pela métrica em questão, a distância de luminosidade tem a forma

$$d_L = rR(1+z)^2 = \frac{rR}{(1-I)^2}. \quad (5.68)$$

A expressão geral para a "contagem de número" em qualquer modelo cosmológico em um ponto P no cone de luz passado é

$$dN = (d_A)^2 d\Omega_0 [n(-k^a n_a)] d\lambda \quad (5.69)$$

sendo n o número de contagem de corpos luminosos por unidade de volume. Tomando a eq.(5.49) e o termo $k_0 = dt/d\lambda$, a equação (5.69) é reescrita na forma

$$dN = 4\pi n r^2 R^3 dr,$$

na qual fora feita uma integração sobre todo o ângulo sólido. Supõe-se agora que todos os corpos contados sejam galáxias e suas massas aproximadamente iguais, então

$$n = \frac{\rho}{M_G},$$

com a massa das galáxias $M_G = 10^{11} M_{\text{solar}}$. Obtém-se uma nova equação diferencial para ser resolvida numericamente

$$\frac{dN}{dr} = \frac{4\pi}{M_G} \rho r^2 R^3.$$

Finalizando, para discutir sobre a fractalidade, é preciso um volume observável. Posteriormente será feita uma análise utilizando a distâncias de luminosidade, então define-se aqui o volume

$$V = \frac{4}{3}\pi d_L^3,$$

e a respectiva densidade média observável,

$$\langle \rho \rangle = \frac{M_G N}{V}. \quad (5.70)$$

Estas duas grandezas são fundamentais para a caracterização de uma estrutura fractal simples.

5.5 Problema numérico

Vimos que para obter as relações observáveis é preciso resolver três equações diferenciais: a geodésica para o cone de luz passado, o termo auxiliar I e a contagem de número de corpos N . Entretanto, estas duas últimas necessitam da solução da geodésica que depende de $R(t, r)$. Em outras palavras, ela nos dá a função $t = t(r)$ necessária para obter I e N .

A integração destas equações obedece ao seguinte algoritmo. Dadas condições iniciais r_1, t_1, I_1 e N_1 , usa-se um código para solução de uma equação diferencial ordinária para avançar um passo na variável r , ou seja, r_2 , obtendo um t_2 . Com esse novo ponto (t_2, r_2) obtém-se I_2 e N_2 por suas respectivas equações diferenciais ordinárias. Os novos valores t_2, I_2 e N_2 podem ser usados agora para repetir o ciclo até terminar a integração em r_n . Neste procedimento simples é necessário tomar o devido cuidado para se assegurar que está sendo usado o valor correto obtido na integração da geodésica para o cálculo de (5.44) e (5.45). Em outras palavras, sendo t_i um valor intermediário ($i = 1, \dots, n$), obtido numericamente, da geodésica $t = t(r)$, então ele deve ser usado para encontrar R_i, ρ_i e $\partial R_i / \partial t_i$, que posteriormente serão usados para encontrar t_{i+1}, I_{i+1} e N_{i+1} e assim por diante. Em posse desta integração, calcula-se as distâncias observáveis e a densidade média pelas equações (5.63), (5.67), (5.68), e (5.70), obtidas anteriormente.

O valor inicial da coordenada radial apresenta um problema. Se iniciarmos a integração de $r = 0$, de acordo com a equação (5.44), iremos enfrentar uma singularidade na origem. Para evitar isso, vamos assumir que o espaço

seja euclidiano de $r = 0$ até um $r = r_1$, no qual r_1 seja tão pequeno quanto possível. O desvio de uma distribuição homogênea ocorre a partir de $z = 0,04$, ou $160 Mpc$. Sendo assim, é razoável supor que o espaço seja euclidiano até $z = 0,03$ ou $100 Mpc$ o que corresponde a $r_1 = 0,1$ como valor inicial para a solução numérica. Na rotina produzida, foram usadas distâncias em Gpc e unidades com $c = G = 1$. Neste caso temos $M_G = 10^{11} M_{sol} = 4,78 \times 10^{12}$ e $H_0 = 0,25$ para o valor da constante de Hubble de $75 \text{ km s}^{-1} Mpc^{-1}$ nas unidades usuais.

Todo este procedimento está de acordo com a condição (5.57) mas, de fato, introduz a noção de que há uma interface euclidiana para não-euclidiana em $r = r_1$. Isto implica que devemos encontrar valores iniciais neste ponto para iniciar a integração numérica. Nesta interface, a geodésica se reduz à equação

$$t = -r + t_0,$$

o que implica nos seguintes valores iniciais: $R(t_1, r_1) = 1$, $t_1 = -r_1 + t_0$ e $r = r_1$,

No qual t_0 é o instante presente. Sendo que o tempo decorrido desde o "big Bang" é o mesmo para todos os observadores no modelo padrão, podemos adotar o mesmo tempo do modelo não perturbado.

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}.$$

Estes valores iniciais aplicados na equação (5.44), permite encontrar a expressão que relaciona as duas constantes A e c presentes em $R(t, r)$ e $\rho(t, r)$,

$$At_1^{\frac{2}{3(\varpi+1)}} + cA^{\frac{-1-3\alpha}{2}} t_1^{\xi \pm} r_1^{-\sigma} = 1. \quad (5.71)$$

Na região euclidiana próxima à origem, o valor da densidade média é o mesmo que o valor crítico do Modelo Padrão, isto é, o valor da densidade local para o universo Einstein-de Sitter no instante presente. Usando esta condição na equação (5.45) obtemos

$$\rho(t_1, r_1) = \frac{3H_0^2}{8\pi} = \frac{1}{6\pi G(\varpi+1)^2 t_1^2} + \quad (5.72)$$

$$\left(\frac{1}{2\pi G(\varpi + 1)} \right) \left[\xi_{\pm} - \frac{2}{3(\varpi + 1)} \right] c A^{-\frac{3}{2}(1+\alpha)} t_1^{-\frac{2}{3(\varpi+1)} + \xi_{\pm} - 2} r_1^{-\sigma}.$$

Com estas duas equações, (5.71) e (5.72), é possível obter as duas constantes dependendo apenas das condições iniciais e de H_0 , ou seja,

$$A = \left\{ 1 + \left(\frac{3H_0^2}{8\pi} - \frac{1}{6\pi G(\varpi + 1)^2 t_1^2} \right) \frac{2\pi G(\varpi + 1)}{\left[\xi_{\pm} - \frac{2}{3(\varpi+1)} \right]} t_1^2 \right\}^{-1} t_1^{-\frac{2}{3(\varpi+1)}},$$

$$c = \left(1 - A t_1^{\frac{2}{3(\varpi-1)}} \right) A^{\frac{1+3\alpha}{2}} t_1^{-\xi_{\pm}} r_1^{\sigma}.$$

Finalmente, para a contagem de número (5.69), em $r = r_1$ temos

$$\frac{dN}{dr} = \frac{4\pi}{M_G} \rho r^2 R^3 \quad \Rightarrow \quad N(r_1) = \frac{H_0 r_1^3}{2M_G}.$$

Esta última expressão implica que

$$\langle \rho \rangle|_{r=r_1} = \rho_0,$$

como já era esperado.

5.6 Resultados obtidos pela solução numérica.

A fim de verificar se a "conjectura fractal aparente" está correta, utilizou-se a perturbação proposta anteriormente para o caso Einstein-de Sitter, calculando os observáveis e a densidade média através da solução numérica desenvolvida. A intenção é observar o comportamento de $\langle \rho \rangle$ como função de uma distância observável, esperando que isto nos leve a uma *lei de potência*. Foi escolhida distância de luminosidade para esta análise mas qualquer uma das demais poderia ser utilizada. Espera-se que $\langle \rho(d_L) \rangle$ seja aproximadamente da forma

$$\langle \rho \rangle = cte. (d_L)^\epsilon, \quad (5.73)$$

com valor do expoente $\varepsilon \approx -1$, que corresponde à dimensão fractal $D \approx 2$.

Vimos que os efeitos relativísticos têm contribuição significativa na densidade média para distâncias cujo valor do deslocamento da radiação para o vermelho abrange valores pequenos, $z < 0,1$, a moderados, $0,1 < z < 1$. Aqui iremos, então, tentar verificar se estes efeitos estão presentes nas regiões de $z > 0,1$ a valores grandes $z > 1$. Para definir um padrão de análise nos diferentes valores de ϖ e α , por experimentação numérica foi definida uma região de interesse, ou seja, para $\gamma = 1$, $-0,5 < \varpi < 1/3$, $-0,5 < \alpha < 0,25$ e $\varpi - 1 + 2\alpha \neq 0$ (lembrando que esta última condição é imposta pela perturbação). Para isso, foi necessário ver o resultado de vários gráficos a fim de encontrar um intervalo em d_L adequado pois, estando fixado o intervalo na coordenada radial r (que é o parâmetro livre da integração, varrendo de $0,1 < r < 5$), o correspondente intervalo em d_L varia bastante devido a mudança do fator de escala que os relaciona. Como "intervalo adequado" para d_L significa estar na região de deslocamento da radiação para o vermelho z com valores de moderado a grande, isto é, $z > 0,1$ e no qual fosse possível visualizar como as duas variáveis ϖ e α modificavam o comportando desta relação entre $\langle \rho \rangle$ e d_L . Das tabelas geradas pela solução numérica, iniciar a análise de $d_L = 1$ garante estar fora da região de pequenos valores de "redshift" e $d_L = 6$ como valor final garante que todos os gráficos estejam varrendo uma região de grandes valores do deslocamento para o vermelho ($z \approx 4$) e a diferença no comportamento entre os gráficos já se tornou quase indistingtível. Seguem os gráficos analisados.

Gráfico 5.3: Comparação de $\langle \rho(d_L) \rangle$ para alguns valores de α com ϖ e γ fixos.

Não há o gráfico para $\varpi = -0,5$ e $\alpha = 0,8$ pois este ponto está muito próximo da região em que a perturbação vai a zero. Partindo de $d_L = 1$ todos os gráficos obtidos têm a forma de uma lei de potência e isso permitiu a seguinte análise. Um novo programa com um valor de ϖ como entrada e varrendo o intervalo $-0.5 < \alpha < 0.8$, utiliza o cálculo anterior como sub-rotina e faz um ajuste de reta em $\log(\langle \rho \rangle) \times \log(d_L)$, para $1 < d_L < 6$, obtendo o coeficiente ε , ou seja, de (5.73) temos

$$\log(\langle \rho \rangle) = \log(cte) + \varepsilon \cdot \log(d_L). \quad (5.74)$$

Seguem os resultados para $\varpi = -0,5$; $-0,25$; $0,0$ e $1/3$.

Gráfico 5.4: Coeficiente da reta ε em função de α .

Um pequeno intervalo em α teve que ser omitido para cada ϖ evitando a região $\varpi - 1 + 2\alpha = 0$, mas para que todos estivessem na mesma faixa de valores, todos os gráficos estão limitados a $\alpha < 0,3$. Há de se lembrar que a perturbação adiabática é válida para $\varpi \approx \alpha$. Os valores do coeficiente ε estão próximos de -1 como esperado. Entretanto, vê-se também uma forte dependência do expoente com o tipo de matéria predominante, ou seja, com a variação de ϖ . O comportamento de lei de potência para $\langle \rho \rangle$ e d_L pode ser visto em todos os valores de ϖ e α (exceto para $\varpi - 1 + 2\alpha \approx 0$) independente de serem modos crescentes ou decrescentes de perturbação.

A qualidade dos ajustes é vista pelo desvio quadrático médio, χ^2 , apresentado no gráfico seguinte.

Gráfico 5.5: Qualidade do ajuste χ^2 em função de α .

Pode-se concluir destes gráficos que a "conjectura fractal aparente" é confirmada, pelo menos para o caso Einstein-de-Sitter com a perturbação aqui utilizada e o comportamento de lei de potência fica mais evidenciado quanto maior o valor de ω . Para valores de γ maiores a análise obteve o mesmo resultado mas com menor variação do expoente ε com os valores de α .

É necessário verificar se a Lei de Hubble está presente neste modelo perturbado. Para isso, pode-se analisar os gráficos do deslocamento para o vermelho com relação à distância observável utilizada.

Gráfico 5.6: Distância de luminosidade d_L em função de z para os valores de α e w analisados.

Pode-se afirmar pelos gráficos que a linearidade da relação entre distância e velocidade é perdida conforme se toma valores cada vez menores de w e, assim como anteriormente, a variação em α tem menor expressão que a feita em w .

5.7 Conclusão.

A solução numérica mostra que a distribuição da matéria neste modelo cosmológico perturbado pode ser descrita, aproximadamente, por uma lei de potência decrescente, assim como nos dados experimentais existentes, ou seja, uma distribuição de galáxias invariante de escala. Em outras palavras, descrito por um simples sistema fractal de dimensão $D \approx 2$. Este resultado prova que a "conjectura fractal aparente" é correta, pelo menos para esta perturbação adotada. Entretanto, neste modelo de perturbação a linearidade da Lei de Hubble não é mais satisfeita para os valores negativos de ϖ .

Como consequência destes resultados, é importante destacar que ainda deve ser verificado se a conjectura se mantém válida para diferentes formas de perturbação no modelo padrão. Entretanto, mesmo neste simples modelo perturbado, fica claro que a discussão sobre a fractalidade da distribuição da matéria no universo não necessita mais continuar apresentando pontos antagônicos, ou seja, uma distribuição espacialmente fractal ou homogênea, motivada por satisfazer ou não o Princípio Cosmológico. Os resultados sugerem que o parâmetro invariante de escala observado pode ser entendido dentro do contexto do modelo padrão e a "conjectura fractal aparente" proporciona um ponto inicial para construir este panorama. O Princípio Cosmológico e a possibilidade de um sistema infinitamente invariante de escala, ou fractal, podem, talvez, serem reconciliados em um único e simples cenário teórico. Além disso, se a lei de potência observada na densidade aparece em soluções perturbadas dentro do modelo padrão, então é possível especular se a distribuição de galáxias invariante de escala pode ser considerada uma observação direta da evidência de flutuações na densidade do universo em seu início, gerados, talvez, de forma similar à anisotropia existente na radiação cósmica de fundo.

Capítulo 6

Modelo dinâmico para um universo auto-similar.

6.1 Introdução.

O estudo mais extenso sobre um modelo cosmológico inhomogêneo é o espaço tempo de Tolman (Tolman 1934 [17], Boldi 1947 [18]). Esta solução para a matéria descrita como uma poeira tem sido usada para modelar uma cosmologia hierár-

quica compatível com os resultados observacionais. No capítulo anterior foi estudado um universo esfericamente simétrico inhomogêneo mas isotrópico, que permite uma solução com pressão diferente de zero. Entretanto, os resultados obtidos desta forma supõem um centro privilegiado para o universo devido ao tipo de perturbação usada e, em alguns casos, perde-se a linearidade da lei de Hubble. Um universo auto-similar que não tenha tais dificuldades só pode ser construído com uma distribuição de matéria não analítica. Entretanto, muitos fenômenos cosmológicos podem ser explicados por um modelo newtoniano, especialmente na era dominada por matéria.

O modelo de universo auto-similar contruído aqui foi obtido por Abdalla, Afshordi, Khodjasteh e Mohayaee [20]. Sua dinâmica é governada por gravitação newtoniana. O universo é dividido em k aglomerados esféricos, cada um constituído por k sub-aglomerados. Estes, por sua vez, também são constituídos por k aglomerados de nível inferior, ou seja, seus respectivos sub-aglomerados. Esta cascata de aglomerados desce até o nível de galáxias. A massa e o raio de cada aglomerado podem ser usados para definir a dimensão fractal.

Escreveremos a energia cinética e potencial de cada aglomerados em termos de sua energia do centro de massa e da energia interna de seus sub-aglomerados. A energia térmica é obtida impondo que a entropia total do ensemble canônico do aglomerado e de seus sub-aglomerados se mantenha constante. A lagrangeana final é formulada em termos de dois parâmetros dinâmicos: o raio do maior aglomerado e sua razão com relação ao raio de seus sub-aglomerados. Os raios do maior e do menor aglomerados, a razão entre a massa e a massa crítica contida numa esfera de raio igual a 20Mpc, o número de subaglomerados em cada aglomerado e a razão que caracteriza quanto significativa é a energia térmica e a gravitacional, são deixados como parâmetros livres. Fixando estes dois diferentes valores observacionais, nós podemos resolver a equação de movimento numericamente. Para a solução, podemos traçar a evolução da dimensão fractal e verificar a linearidade da relação entre velocidade e distância ao longo do tempo comparando com a idade do universo.

Será visto que para condições iniciais diferentes, um universo com dimensão fractal igual a 3 evolui para um universo com dimensão fractal da ordem de 2 no momento presente.

6.2 Modelo Fractal.

Considere um modelo de universo hierárquico tal que um aglomerado esférico de raio R_n e massa M_n é composto por k sub-aglomerados uniformemente distribuídos e de raio R_{n-1} e massa M_{n-1} , ou seja,

$$M_n = kM_{n-1} \quad \text{e} \quad R_n = \alpha R_{n-1} \quad (6.1)$$

no qual α mede a razão entre os raios de aglomerado em níveis diferentes. O parâmetros k e α não dependem de n e o menor constituinte da hierarquia é uma galáxia de massa M_1 . Sendo que galáxias não se expandem, supomos que elas não contenham sub-aglomerados. Neste modelo, o universo contém N hierarquias, no qual N é um parâmetro livre.

A expressão (6.1) pode ser reescrita em termos da massa M e do raio R do maior aglomerado como

$$M_n = k^{n-N} M \quad \text{e} \quad R_n = \alpha^{n-N} R. \quad (6.2)$$

A dimensão fractal D é dada por (Coleman e Pietronero 1992)

$$D = \frac{\ln k}{\ln \alpha}. \quad (6.3)$$

É definido que os aglomerados não dissociem nem colidam durante a evolução do sistema e isso deixa R , α e a dimensão fractal como as únicas grandezas dinâmicas neste modelo.

Escreve-se a lagrangeana do modelo incluindo as energias gravitacional e térmica dos aglomerados. A energia cinética de uma esfera de raio L expandindo uniformemente é

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \dot{r}^2 dv = \frac{3}{10} M \dot{L}^2, \quad (6.4)$$

onde foi usado

$$\dot{r} = \frac{\dot{L}}{L} r.$$

Nota-se que a lei de Hubble não é implicitamente suposta como válida na expressão acima podendo ser diferente para diferentes aglomerados. Para um sistema composto, como este, a energia cinética total é a soma da energia cinética do centro de massa do aglomerado com a energia cinética dos elementos que o constituem no referencial deste centro de massa. Desta forma, a energia cinética do aglomerado de índice $n + 1$ pode ser escrita como

$$T_{n+1} = \frac{3M_{n+1}\dot{R}_{n+1}^2}{10} + kT_n. \quad (6.5)$$

Conseqüentemente, a energia total T será

$$T = \frac{3}{10} \sum_{n=2}^N k^{N-n} M_n \dot{R}_n^2 \approx \frac{3}{10} M R^2 \left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{2\dot{\alpha}\dot{R}}{\alpha^3 R} + \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^4} \right), \quad (6.6)$$

no qual há uma aproximação feita para α^2 muito maior que a unidade. Esta aproximação está de acordo com a observação. Como exemplo, o raio do sub-aglomerado local é da ordem de 10 vezes o raio do grupo local. Este valor

será usado daqui para frente como uma hipótese de trabalho e também será o utilizado na solução numérica.

A energia potencial pode ser obtida de forma semelhante. A energia potencial gravitacional de uma esfera uniforme é $-3GM^2/5R$ e será igual a $-3GM^2(1 - 1/k)/5R$ para uma distribuição discreta de massa. Neste modelo, a energia potencial do aglomerado $n + 1$ é

$$U_{n+1} = kU_n - \frac{3GM_n^2 k(k-1)}{5R_{n+1}}. \quad (6.7)$$

Há de se destacar que nestas condições temos

$$D > 1 \quad \text{para} \quad \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{N-1} \ll 1,$$

$$D < 1 \quad \text{para} \quad \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{N-1} \gg 1.$$

O primeiro caso é compatível o valor da dimensão fractal medida experimentalmente e pode ser usado para aproximar a energia potencial como

$$U \approx -\frac{3GM^2}{5\mu R(1 - \alpha/k)}, \quad (6.8)$$

sendo $\mu = (1 - k^{-1})^{-1}$.

Enquanto expande, os aglomerados também flutuam aleatoriamente. Isto introduz um termo generalizado para a parte térmica na lagrangeana. A função de partição canônica para um sistema com N partículas interagindo pelo potencial gravitacional é dada por

$$Z = \frac{1}{N!} \int dq^{3N} dp^{3N} \exp(-\beta \mathcal{H}(q, p)), \quad (6.9)$$

onde a hamiltoniana $\mathcal{H}$ é

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left(\frac{P_i^2}{2m} \right) + U\{q_i\}. \quad (6.10)$$

Para calcular a integral sobre o termo do potencial observa-se que o volume disponível para um sub-aglomerado dentro do aglomerado de nível $n + 1$ é

$\frac{4}{3}\pi(R_{n+1}^3 - (k-1)R_n^3)$. Para k sub-aglomerados, há um expoente de k para o volume disponível completo no espaço de configuração, ou seja,

$$Z \propto \beta^{-\frac{3N}{2}} \prod_{n=2}^N (R_n^3 - (k-1)R_{n-1}^3)^{(k^{N-n+1})} e^{-\beta U}. \quad (6.11)$$

Para obter a expressão acima, o termo $e^{\beta U}$ foi fatorado como uma constante, no qual foi definido que a dependência em q já havia ocorrido ao se tomar uma distribuição de aglomerados homogênea. Usando a equação padrão na termodinâmica para a conservação de entropia S ,

$$S = \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \quad (6.12)$$

a energia térmica pode ser escrita como

$$\mathcal{E} \approx \frac{3Ma}{10} R^{-2\mu} (\alpha^3 - k + 1)^{-2\mu/3} \alpha^{3p}, \quad (6.13)$$

para $k^{N-1} \gg 1$, devido a condição $\alpha^2 \gg 1$, $p = \frac{2}{3}(N\mu + \mu^2)$ e ao valor da constante a dependente do valor inicial da entropia em larga escala.

A partir das expressões (6.6), (6.8) e (6.13), a lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{3M}{10} \left(\dot{R}^2 - \frac{2\dot{\alpha}\dot{R}R}{\alpha^3} + \frac{\dot{\alpha}^2 R^2}{\alpha^4} + \frac{g}{(k-\alpha)R} - aR^{-2\mu} (\alpha^3 - k + 1)^{-2\mu/3} \alpha^{3p} \right), \quad (6.14)$$

onde $g = 2GMk/\mu$. A equação do movimento para α será

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = & 2\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha} + \alpha \left(\frac{\dot{R}}{R} \right)^2 - 2\frac{\dot{\alpha}\dot{R}}{R} + \frac{\alpha g (2\alpha - k)}{2(k-\alpha)^2 R^3} \\ & + \left(aR^{-2\mu-2} \alpha^{3p+3} (\alpha^3 - k + 1)^{-2\mu/3-1} \right) \left(\mu\alpha^3 - \frac{2}{3}p(\alpha^3 - k + 1) \right), \end{aligned} \quad (6.15)$$

enquanto para R obtém-se

$$\begin{aligned} \ddot{R} = & \frac{\alpha^{-2}\dot{R}^2}{R} - 2\alpha^{-3}\dot{\alpha}\dot{R} + \frac{g(2\alpha - k)}{2(k-\alpha)^2 R^2} \\ & + \left(aR^{-2\mu-1} (\alpha^3 - k + 1)^{-2\mu/3-1} \alpha^{3p} \right) \left(\mu\alpha^3 + \left(\mu - \frac{3}{2}p \right) (\alpha^3 - k + 1) \right). \end{aligned} \quad (6.16)$$

6.3 Solução Numérica e suas Limitações.

As equações de movimento são resolvidas numericamente. Os parâmetros do modelo são R , $\dot{R}$, α , $\dot{\alpha}$, N , k , a e M . Os quatro primeiros são definidos como condições iniciais e os demais como constantes. Todos são obtidos a partir de grandezas observáveis. O tempo inicial é tomado como zero e a solução é realizada tanto para frente quanto para trás no tempo, dentro da era dominada por matéria.

O raio R marca a transição de uma distribuição hierárquica para uma aleatória e homogênea e isto deve ocorrer entre 30 e 100 Mpc . Subseqüentemente, o valor presente de $\dot{R}$ é fixado pelo valor observado da constante de Hubble.

O fato de $\dot{\alpha}$ ir a zero para distâncias próximas é uma implicação direta da lei de Hubble e como valor inicial de α , que relaciona os raios de uma escala para a outra, foi tomado como α devido a condição $\alpha^2 \gg 1$.

Os parâmetros α , N , k e M podem ser fixado usando os raios do maior e do menor aglomerados (R e R_2 , respectivamente, no qual este último é da ordem de 3 Mpc que é o tamanho de nosso grupo local). A constante Ω é definida como a razão entre a massa contida em uma esfera de raio 20 Mpc e a massa crítica e deve estar na ordem de 0,25 a 1,0. Para M adotamos a massa típica de uma galáxia que é da ordem de 10^{11} massas solares e o presente valor da dimensão fractal que é da ordem de 2. O parâmetro a pode ser fixado usando o nível virial N_c no qual temos $2\mathcal{E}_{N_c} = U_{N_c}$.

Vale a pena comentar sobre a aproximação newtoniana e várias outras usadas no modelo. Em geral, a aproximação newtoniana é satisfatoriamente usada na era dominada por matéria. Entretanto, em um modelo auto-similar, o alcance de tal aproximação pode estar correlacionado. Isto é o mesmo que dizer que enquanto o tempo necessário para a luz viajar através do sistema é menor comparado ao tempo característico da evolução da dimensão em que o regime newtoniano é aplicável. Especialmente, para tempos após aproximadamente $15 \cdot 10^9$ anos, ou para $\frac{c\dot{\alpha}}{R\alpha} \ll 1$, o uso da aproximação não-relativística é justificado. Outra aproximação feita para α^2 , que resulta em um erro máximo de 9% nos resultados para $D = 3$.

6.4 Evolução da dimensão fractal.

Usando a solução numérica da equação do movimento para α é traçada a evolução da dimensão fractal. Os gráficos abaixo contendo a dimensão fractal em relação ao tempo mostram a evolução desta dimensão durante a era dominada por matéria até o momento em que a aproximação newtoniana não era mais válida. Todos os gráficos têm como condições iniciais $D = 1,5, 2,0$ e $2,5$.

Gráfico 6.1: Evolução temporal da dimensão fractal.

Nos gráficos, vê-se que a dimensão fractal é praticamente constante em $D = 2$.

Gráfico 6.2: Comportamento da dimensão fractal de tempos remotos até o instante presente.

Há de se destacar a homogeneidade nos tempos remotos, devido a maior contribuição da energia térmica, sendo que isto está em desacordo com a isotropia da radiação cósmica de fundo. Entretanto, o espectro completo de anisotropia da RCF, que é a melhor forma para conectar o modelo padrão com a formação de estruturas, está além da capacidade deste modelo.

As soluções são bastante estáveis para tempos futuros e a dimensão permanece num valor médio em torno de 2 por um longo tempo e varrendo o intervalo completo dos parâmetros. Isto confirma que no momento presente a dimensão é independente do tempo, o que já era suposto ao se resolver a equação de movimento. Não se espera nenhuma alteração na estrutura fractal para tempos futuros de acordo com este modelo.

6.5 Idade do Universo.

Outra das constantes cruciais, obtidas através da observação, é a idade do universo. Em qualquer modelo cosmológico, a idade do universo depende fortemente do valor de Ω , e este, por sua vez, depende do raio de transição neste modelo. Um valor maior de Ω leva a um universo mais jovem. Entretanto, Ω , como é definido no modelo padrão, não existe para este modelo. Supusemos que Ω estaria entre 0,1 e 1 como dado pelo modelo de Friedmann, que somente é válido para um raio de transição da ordem de $20 Mpc$. Um raio de transição maior leva a um valor muito menor para omega e conseqüentemente uma idade bem maior.

No caso extremo com $\Omega = 1$, $N_c = 0$ e raio de transição de $300 Mpc$ ou $1 Gpc$ obtém-se aproximadamente 16 bilhões de anos para tal idade. Este resultado está em acordo com a idade máxima estimada para as estrelas mais velhas que é de $15,8 \pm 2,1$ bilhões de anos.

Gráfico 6.3: Raio do universo em função do tempo.

6.6 Conclusões.

Foi construído um modelo de universo fractal não relativístico. Este modelo inicia-se homogêneo e evolui rapidamente para uma distribuição auto-similar com uma dimensão fractal constante. A homogeneidade nos tempos iniciais explica a isotropia da radiação cósmica de fundo. A idade do universo estimada aqui está de acordo com os resultados observacionais mas não é alterada com os parâmetros do modelo.

Capítulo 7

Considerações Finais.

O princípio cosmológico nos leva a uma distribuição homogênea de matéria e à isotropia da radiação cósmica de fundo. Recentemente, diversos mapas tridimensionais da distribuição de galáxias, baseados nas medidas do deslocamento para o vermelho da radiação emitida [2], indicaram a presença de estruturas na forma de filamentos e grandes vazios. Pietronero e colaboradores [3] mostraram, para várias destas amostras, utilizando um método moderno de física-estatística, que a distribuição exibe um comportamento fractal pelo menos até a escala de $200 Mpc$.

Este primeiro estudo das inomogeneidades mostrou um comportamento de lei de potência, com expoente 1,8, para a função de correlação. Esta lei é encontrada em diferentes catálogos de medidas observacionais. Entretanto, uma transição para uma distribuição homogênea em larga escala ainda não foi estabelecida. Havendo ou não esta mudança, a lei de potência caracterizando a função de correlação indica haver um comportamento dependente da escala. O modelo fractal oferece uma atrativa e simples descrição para a distribuição das galáxias no universo observado.

Algumas características bastante inomogêneas aparecem no Modelo Einstein-de Sitter. As propriedades fractais aparecem como propriedades do modelo, assim como obedecer ao princípio cosmológico, a linearidade da lei de Hubble e a isotropia da radiação cósmica de fundo. A homogeneidade intrínseca do modelo padrão é espacial, ou seja, é um fator geométrico que não necessariamente se traduz em uma quantidade astronomicamente observável. Há embasamento suficiente para propor a seguinte conjectura [8]: a fractalidade observada da distribuição da matéria em larga escala deve surgir quando re-

lações observáveis necessárias para a caracterização fractal são calculadas ao longo do cone de luz passado do observador em uma métrica perturbada dentro da cosmologia padrão.

Através de soluções numéricas mostrou-se que a distribuição da matéria em um modelo cosmológico perturbado pode ser descrita, aproximadamente, por uma lei de potência decrescente, ou seja, uma distribuição de galáxias invariante de escala, descrito por um simples sistema fractal. Este resultado prova que a "conjectura fractal aparente" é correta, pelo menos para esta perturbação adotada. Como consequência destes resultados, é importante destacar que ainda deve ser verificado se a conjectura se mantém válida para diferentes formas de perturbação no modelo padrão. Entretanto, mesmo neste simples modelo perturbado, fica claro que a discussão sobre a fractalidade da distribuição da matéria no universo não necessita mais continuar apresentando pontos antagônicos.

Não existe um modelo teórico analítico que descreva um universo inhomogêneo e invariante de escala. O modelo de universo auto-similar contruído aqui foi obtido por Abdalla, Afshordi, Khodjasteh e Mohayaee [20]. Sua dinâmica é governada por gravitação newtoniana. A massa e o raio de cada aglomerado podem ser usados para definir a dimensão fractal. Verifica-se que para condições iniciais diferentes, um universo com dimensão fractal igual a 3 evolui para um universo com dimensão fractal da ordem de 2 no momento presente. A homogeneidade nos tempos iniciais explica a isotropia da radiação cósmica de fundo. Também observou-se que para energia térmica insignificante, a lei de Hubble é aproximadamente obedecida.

Apêndice.

Programas em linguagem C++ utilizados no trabalho.

```

/*****
/*          Conjectura fractal aparente          */
/*          Cálculo dos observáveis              */
*****/

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>
# define pi 2.0*asin(1.0)
# define Mg 4.787591e-12
# define h0 0.250173071
# define epsilon 0.1
# define r_final 5.0
# define nstep 950

/* funções */

/* Cálculo do Fator de Escala R(t,r) */
double calc_R(double r, double t, double A, double C, double w,
              double alfa, double gama, double n) {
    double R0, X, R;
    R0= A*pow(t,2.0/(3.0*w+3.0));
    X= C*pow(A,(-3.0*alfa-1.0)/2.0)*pow(t,n);
    R= R0+X*pow(r,-gama);
    return R;
}

/* Cálculo da derivada de R(t,r) com o tempo */
double calc_delR(double r, double t, double A, double C, double w,
                 double alfa, double gama, double n) {
    double dR0, dX, dRdt;
    dR0= (2.0/(3.0*w+3.0))*A*pow(t,(2.0/(3.0*w+3.0))-1.0);
    dX= C*pow(A,(-3.0*alfa-1.0)/2.0)*n*pow(t,n-1.0);
    dRdt= dR0+dX*pow(r,-gama);
    return dRdt;
}

/* Cálculo da densidade contendo perturbação */
double rho(double r, double t, double A, double C, double w,
           double alfa, double gama, double n) {
    double ro0, L, ro;
    ro0=1.0/(6.0*pi*pow(w+1.0,2.0)*pow(t,2.0));
    L= (1.0/(2.0*pi*(w+1.0)))*(n-(2.0/(3.0*w+3.0)))*
    C*pow(A,-(3.0*alfa+3.0)/2.0)*pow(t,n-2.0-(2.0/(3.0*w+3.0)));

```

```

    ro= ro0+L*pow(r,-gama);
    return ro;
}

/* As próximas três funções fazem parteda solução das      */
/* equações diferenciais */
void derivs( double x, double y[], double dydx[],double A, double C,
             double w, double alfa, double gama, double n) {
    double dtdr, dNdr, dIdr;
    dtdr= -calc_R(x,y[0],A,C,w,alfa,gama,n);
    dNdr= (4.0*pi/Mg)*rho(x,y[0],A,C,w,alfa,gama,n)*pow(x,2.0)*pow(-
dtdr,3.0);
    dIdr= (1.0-y[2])*calc_delR(x,y[0],A,C,w,alfa,gama,n);
    dydx[0]= dtdr;
    dydx[1]= dNdr;
    dydx[2]= dIdr;
}

/* Método utilizado: Runge-Kutta de quarta ordem */
void rk4(double y[],double dydx[], double x, double h,
         double yout[], double A, double C, double w,
         double alfa, double gama, double n) {
    int i;
    double h6, hh, xh, dym[3], dyt[3], yt[3];
    hh=h*0.5;
    h6=h/6.0;
    xh=x+hh;
    for(i=0; i<3; i++)
        yt[i]=y[i]+hh*dydx[i];
    derivs(xh,yt,dyt,A,C,w,alfa,gama,n);
    for(i=0; i<3; i++)
        yt[i]=y[i]+hh*dyt[i];
    derivs(xh,yt,dym,A,C,w,alfa,gama,n);
    for(i=0; i<3; i++) {
        yt[i]=y[i]+h*dym[i];
        dym[i]=dyt[i]+dym[i];
    }
    derivs(x+h, yt, dyt,A,C,w,alfa,gama,n);
    for(i=0; i<3; i++)
        yout[i]=y[i]+h6*(dydx[i]+dyt[i]+2.0*dym[i]);
}

int rkdummy(double vstart[], double r[], double t[], double N[],
            double I[], double A, double C, double w,
            double alfa, double gama, double n) {
    int k;
    double h, x, dv[3], v[3];
    v[0]=vstart[0];
    v[1]=vstart[1];
    v[2]=vstart[2];
    r[0]=epsilon;
    t[0]=v[0];N[0]=v[1];I[0]=v[2];
    x=epsilon;
    h=(r_final-epsilon)/nstep;
    for(k=0; k<nstep; k++) {
        derivs(x,v,dv,A,C,w,alfa,gama,n);
        rk4(v,dv,x,h,v,A,C,w,alfa,gama,n);
        if(x+h==x) k=nstep+1;
        x=x+h;
    }
}

```



```

    r[k+1]=x;
    t[k+1]=v[0];N[k+1]=v[1];I[k+1]=v[2];
    if((r[k]*calc_R(r[k],t[k],A,C,w,alfa,gama,n)/pow((1.0-
        I[k]),2.0))>=6.0) /* critério de parada */
        return k;
    } return k-1;
}

/* programa principal */

void main(void) {
    FILE *z_dL_ro1,
        *z_dL_ro2;
    int i, j, k, l;
    char seq[40];
    double r[1000], t[1000],N[1000],I[1000],t1, ncl,I10,
        A, C, w, alfa, gama, n, vstart[3], aux1, aux2,
        z[1000], dl[1000], rhom[1000], bigr, t0, ro0,V;

    /* Valores de entrada w, alfa e gama */
    printf ("\n\n Valor de w ( w aprox. -0.5):");
    scanf("%lf",&w);
    printf ("\n Valor de alfa ( alfa aprox. 0.0):");
    scanf("%lf",&alfa);
    gama=1.0;

    r[0]= epsilon;
    t0=2.0/(3.0*h0*(w+1.0));

    I10=0.0;
    t1=t0-epsilon;
    ncl=(pow(h0,2.0)/(2.0*Mg))*pow(epsilon,3.0);
    ro0= 3.0*pow(h0,2.0)/(8.0*pi);
    vstart[0]=t1;
    vstart[1]=ncl;
    vstart[2]=I10;

    /* Constantes n, A e C dependentes das condicoes iniciais */
    if (((2.0*alfa-w+1.0)/(2.0*w+2.0))==0.0)
        printf(" \n 2.0*alfa+1.0 = 0");
    n= ((-3.0*alfa-1.0)/(3.0*w+3.0))+(1.0/2.0)-((2.0*alfa-
w+1.0)/(2.0*w+2.0));
    aux1= ro0-1.0/(6.0*pi*pow(w+1.0,2.0)*pow(t1,2.0));
    aux2= 2.0*pi*(w+1.0)*aux1*pow(t1,2.0)/(n-(2.0/(3.0*w+3.0)));
    A= pow(t1,-2.0/(3.0*w+3.0))/(1.0+aux2);
    C= pow(A,(3.0*alfa+1.0)/2.0)*pow(epsilon,gama)*pow(t1,-n)*
        (1.0-A*pow(t1,2.0/(3.0*w+3.0)));
    printf(" \n n= %.3lf, A= %.10lf, C= %.10lf \n ",n,A,C);

    /* Inicio da solução */
    printf ("\n Iniciar solu#Eo (1 para sim e 0 para n#Eo):");
    scanf("%d",&k);
    if(k==1){
        k=rkdumb(vstart,r,t,N,I,A,C,w,alfa,gama,n);

    /* Calculando observaveis */
    for(i=0; i<=k; i++) {

```

```

        bigr=calc_R(r[i],t[i],A,C,w,alfa,gama,n);
        z[i]=I[i]/(1.0-I[i]);
        dl[i]=r[i]*bigr/pow((1.0-I[i]),2.0);
        V=(4.0*pi/3.0)*pow(dl[i],3.0);
        rhom[i]=Mg*N[i]/V;
    }

/* criar arquivos de dados*/
    printf ("\n Criar arquivo: (1 para sim e 0 para nEo):");
    scanf("%d",&j);
    if(j==1){
        z_dL_rol = fopen("z_dL_rol.txt","w");
        for(i=0; i<k; i++)
            fprintf( z_dL_rol," %f %f %f \n",z[i],dl[i],rhom[i]);
        fclose (z_dL_rol);
        z_dL_rol = fopen("z_dL_rol.txt","r");
        z_dL_ro2 = fopen("z_dL_ro2.txt","w");
        while (!feof(z_dL_rol)) {
            fscanf (z_dL_rol," %[^\\n]",seq);
            for (i=0;i<38;i++)
                if (seq[i]=='.') seq[i]=' ';
            fprintf (z_dL_ro2,"%s\\n",seq);
        }
        fclose (z_dL_rol);
        fclose (z_dL_ro2);
    }
    }
    getch();
}/* fim do programa */

```



```

/*****
/*      Modelo dinâmico para um universo auto-similar.      */
/*      Soluções das equações diferenciais                    */
*****/
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>
#define h0 0.055

/* função para cálculo de segunda derivada de alfa */
double alfa_2p(double alfap, double Rp, double alfa,
               double R, double k, double g, double u,
               double p, double a) {
    double aux, aux1, aux2, aux3, aux4, resultado;
    aux=pow(alfa,3.0)-k+1.0;
    aux1=2.0*pow(alfap,2.0)/alfa+alfa*pow(Rp/R,2.0)-2.0*alfap*Rp/R;
    aux2=alfa*g*(pow(alfa,3.0)-k)/(2.0*pow(k-alfa,2.0)*pow(R,3.0));
    aux3=a*pow(R,-2.0*u-2.0)*pow(alfa,3.0*p+3.0)*pow(aux,-(2.0*u/3.0)-
1.0);
    aux4=u*pow(alfa,3.0)-(3.0*p*aux/2.0);
    resultado=aux1+aux2+aux3*aux4;
    return resultado;
}

/* função para cálculo de segunda derivada de R */
double R_2p(double alfap, double Rp, double alfa,
            double R, double k, double g, double u,
            double p, double a) {
    double aux, aux1, aux2, aux3, aux4, resultado;
    aux=pow(alfa,3.0)-k+1.0;
    aux1=(pow(alfa,-2.0)*pow(Rp,2.0)/R)-(2.0*pow(alfa,-3.0)*alfap*Rp);
    aux2=g*(2.0*alfa-k)/(2.0*pow(k-alfa,2.0)*pow(R,2.0));
    aux3=a*pow(R,-2.0*u-1.0)*pow(alfa,3.0*p)*pow(aux,-(2.0*u/3.0)-1.0);
    aux4=u*pow(alfa,3.0)-(u-3.0*p/2.0)*aux;
    resultado=aux1+aux2+aux3*aux4;
    return resultado;
}

/* Solução das equações diferenciais */

void rkdummy(double t[], double alfa2p[], double R2p[], double alfap[],
             double Rp[], double alfa[],
             double R[], double k, double g, double u, double p,
             double a, double tf){
    int i;
    double h;
    h=tf/1000.0;
    t[0]=0.0;
    for(i=0;i<1000;i++){
        alfa2p[i]=alfa_2p(alfap[i],Rp[i],alfa[i],R[i],k,g,u,p,a);
        R2p[i]=R_2p(alfap[i],Rp[i],alfa[i],R[i],k,g,u,p,a);
        alfap[i+1]=alfap[i]+h*alfa2p[i];
        Rp[i+1]=Rp[i]+h*R2p[i];
        alfa[i+1]=alfa[i]+h*alfap[i];
        R[i+1]=R[i]+h*Rp[i];
        t[i+1]=t[i]+h;
    }
}

```

```

)
/* programa principal */
void main(void) {
    FILE *dados1,
        *dados2;
    int i, j, l;
    char seq[40];
    double t[1000], alfa[1000], alfa2p[1000], alfa2p[1000], R[1000],
        Rp[1000], R2p[1000], dim[1000], z[1000], k, a, M, u, p, D,
        N, Nc, tf, pcte, omega, g;

/* Valores de entrada e constantes */
    printf ("\n\n Valor de D:");
    scanf("%lf",&D);
    printf ("\n Valor de R:");
    scanf("%lf",&R[0]);
    printf ("\n Valor de Nc:");
    scanf("%lf",&Nc);
    printf ("\n Valor de omega:");
    scanf("%lf",&omega);
    printf ("\n Valor de tempo final:");
    scanf("%lf",&tf);
    alfa2p[0]=0;
    Rp[0]=h0*R[0];
    alfa[0]=10.0;
    k=exp(D*log(alfa[0]));
    N=2.0-log10(3.0/R[0]);
    M=omega*pow(20.0,3.0)*pow(h0,2.0)/2.0;
    u=1.0/(1.0-pow(k,-1.0));
    p=(2.0/3.0)*(N*u+pow(u,2.0));
    pcte=(2.0/3.0)*(Nc*u+pow(u,2.0));
    a=M*pow(R[0],-2.0*u-1.0)*pow(alfa[0],3.0*pcte)
    *pow(pow(alfa[0],3.0)-k+1.0,-2.0*u/3.0)/(u-u*alfa[0]/k);
    g=2.0*M*k/u;
    i=0.0;
    alfa2p[i]=alfa_2p(alfa2p[i],Rp[i],alfa[i],R[i],k,g,u,p,a);
    R2p[i]=R_2p(alfa2p[i],Rp[i],alfa[i],R[i],k,g,u,p,a);

/* Inicio da solucao da equação diferencial*/
    printf ("\n Iniciar solucao (1 para sim e 0 para nao):");
    scanf("%d",&j);
    if(j==1)
        rkdump( t, alfa2p, R2p, alfa2p, Rp, alfa, R, k, g, u, p, a, tf);

/* Calculando grandezas finais */
    for(i=0; i<1000; i++)
        dim[i]=log(k)/log(alfa[i]);

/* criar arquivos */
    printf ("\n Criar arquivo: (1 para sim e 0 para nao):");
    scanf("%d",&j);
    if(j==1){
        dados1 = fopen("dados1.txt","w");
        for(i=0; i<1000; i++)
            fprintf( dados1," %.2f      %.0f      %.4f \n",t[i], R[i],
                dim[i]);
        fclose (dados1);
    }
}

```



```
dados1 = fopen("dados1.txt","r");
dados2 = fopen("dados2.txt","w");
while (!feof(dados1)) {
    fscanf (dados1," %[^\\n]",seq);
    for (i=0;i<100;i++)
        if (seq[i]=='.') seq[i]=',';
    fprintf (dados2,"%s\\n",seq);
}
fclose (dados1);
fclose (dados2);
}
getch();
}/* fim */
```

Bibliografia.

- [1] Baryshev Tu. V., 1995, em "First Amaldi Conference on Gravitational Wave experiments" p.251 (World Scientific); (gr-qc/9911081)
- [2] B. R. Tully *Astrophys. J.* **303** (1986) 25;
 B. R. Tully, R. Scaramella, G. Vetollani and G. Zamorani *Astrophys. J.* **388** (1992) 9;
 N. A. Bahcall and R. M. Soneira *Astrophys. J.* **270** (1983) 20; D/ J. Batusky and J. O. Burns *Astrophys. J.* **299** (1985) 5;
 R. Durrer, J. P. Eckmann, F. Sylos Labini, M. Montuori and L. Pietronero, astro-ph/ 9702116.;
 R. B. Larson Mon. Not. R. Astron. Soc. **194** (1981) 890;
 E. Falgoutone, T. G. Phyllips and C. K. Walker, *Astrophys. J.* **378** (1991) 186.
- [3] F. Sylos Labini, M. Montuori and L. Pietronero astro-ph/9709276.
- [4] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, New York 1983.
- [5] L. Pietronero *Physica A* **144** (1987) 257;
 P. H. Coleman, L. Pietronero and R. H. Sanders *Astr. and Astrophys Lett.* **200** (1988) L32.;
 P. H. Coleman and L. Pietronero *Phys. Rep.* **213** (1992) 311.
 Pietronero L. 1987, *Physica A*, **144**, 257;
 Pietronero L., Montori, M., e Sylos-labini, F., 1997, *Critical Dialogues in Cosmology*, N. Turok, Singapore 1997, 24;
 Sylos-labini, F., Montori, M. e Pietronero L., L. 1998, *Phys. Rep.*, **293**, 61, astro-ph/9803218;
 Pietronero L., e Sylos-labini, F., 2000, astro-ph/0002124.
- [6] Ribeiro, M. B., and Miguelote, A. Y. 1998, *Braz. J. Phys.*, **28**, 132; astro-ph/983218.
- [7] Ribeiro, M. B. 1993, *Astrophys. J.*, **415**, 469
- [8] Ribeiro, M. B. 1995, *Astrophys. J.*, **441**, 477, astro-ph/9910145.
 Ribeiro, M. B. 2001a, *Fractals*, in press, gr-qc/9909093;
 Ribeiro, M. B. 2001b *General. Rel. Grav.*, astro-ph/0104181.
- [9] Ribeiro, M. B. 1994, *Deterministic Chaos in General Relativity*. D. Hobbil, A. Burd, and A. Coley, New York: Plenum Press, 1994, 269;
- [10] Bondi, H., 1960, *Cosmology*, 2nd ed., (Cambridge University Press).
- [11] Etherington, I. M. H. 1933, *Phil. Mag.*, **15**, 761; reprinted, *Gen. Rel. Grav.*, in press.
- [12] McVittie, G. C. 1974, *Quart. J. Royal Astr. Soc.*, **15**, 246.
- [13] Sandage, A. 1995, *The Deep Universe*, Saaa-Fee Advanced Course 23, B. Binggeli and R. Buser, (Berlin: Springer), 1.
- [14] Ellis, G. F. R. 1971, *General Relativity and Cosmology*, Proc. of the International School of Physics "Enrico Fermi", R. K. Sachs New York: Academic Press, 1971, 104.
- [15] Wertz, J. R. 1970, *Newtonian Hierarchical Cosmology*, PhD thesis (University of Texas at Austin).
- [16] E. Abdalla , R. Mohayaee and M. Ribeiro astro-ph/9910003.
- [17] E. Abdalla and R. Mohayaee *Einstein equations for a fractal universe*,

- astro-ph/9706181;
 Elcio Abdalla and R. Mohayaee *Phys. Rev. D* **59** (1999) 084014;
 E. Abdalla, N. Afshordi, K. Khodjasteh e N. R. Mohayaee astro, R. 1999,
Astron. Astrophys., 345, 22;
 E. Abdalla and R. Mohayaee, R. 1999, *Phts. rev. D*, 59, 084014, astro-ph/9810146.
- [18] Tolman R. C., 1934, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 20. 169.
 - [19] Boldi H. 1947, *MNRS*, 167, 55.
 - [20] E. Abdalla, N. Afshordi, K. Khodjasteh e N. R. Mohayaee astro; astro-ph/9803187.
 - [21] S. Weinberg *Gravitation and Cosmology*, John Wiley and Sons, 1972.
 - [22] Peebles, P. J. E. 1980, *The Large-Scale Structure of the Universe*,
 Princeton University Press;
 - [23] Joyce, M., Saki, K. 1970, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **22**, 1.
 - [24] Coles, P. 1998, *Nature*, **391**, 120.
 - [25] Davis, M. e outros, 1988, *Astrophys. J.*, **333**, L9.