Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Estudo da dinâmica de um oscilador amortecido com retroalimentação retardada

Daniel Câmara de Souza

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Coraci Pereira Malta

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Mestre em Física.

Banca examinadora:
Prof.ª Dr.ª Coraci Pereira Malta - IF (USP)
Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas - IF (USP)
Prof. Dr. Roberto André Kraenkel - IFT (UNESP)

São Paulo
2011

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Souza, Daniel Câmara de

Estudo da dinâmica de um oscilador amortecido com retro-alimentação retardada — São Paulo, 2011.

Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo.

Instituto de Física — Departamento de Física Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Coraci Pereira Malta

Área de concentração: Física

Unitermos: 1. Equações Diferenciais com Retardamento; 2. Equações Diferenciais Funcionais; 3. Física Matemática; 4. Sistemas Dinâmicos; 5. Caos

USP/IF/SBI-017/2011

Dedico esta obra à minha noiva,
meus pais, meus irmãos, amigos,
familiares e professores

Agradecimentos

Agradeço à minha noiva, Nanci, pelo companheirismo, pela inspiração, amizade e por todos momentos especiais que passamos juntos e os que haveremos de desfrutar. Aos meus pais Antônio e Maria José, irmãos Danilo e Douglas, cunhadas Vanessa e Francine, sobrinho João Vitor, cunhados Daniel e Ivan, concunhadas Eliane e Daniela, sogro Anacleto, sogra Cinira, demais familiares e amigos André e Roberto pelo apoio incondicional, pelo incentivo, pela motivação e por todos momentos de alegria. Expresso minha gratidão à minha orientadora de iniciação científica e mestrado, Coraci, pelas discussões e conversas, pela liberdade concedida e confiança depositada. Aos amigos da física, do alojamento estudantil e da minha república da UNESP/Ilha Solteira, onde iniciei a graduação, Saulo, Reginaldo, Michel, Michael, Alexandre, João Paulo, Ricardo, Eric, Bruno, José Mário e Thiago, e os amigos do CRUSP e do Instituto de Física da USP/Capital, Fagner, Guilherme, Brunna, Adriana, Daniel, Paulo, Jaqueline, Marcelo, Benedito, Thiago, Michel e Davi, pelo apoio e incentivo, pelas valiosas discussões em sala e pelos corredores, pelos rachões de futebol e festas. Aos professores e funcionários da UNESP e da USP pela dedicação e disposição para ajudar a resolver os problemas. Ao computador pelas indispensáveis e incessantes horas seguidas de cálculos elegantes, grandiosos e precisos. E ao meu cachorrinho de estimação pelas horas descontraídas, divertidas e isentas de preocupação. Por fim, agradeço também às agências de fomento FAPESP e CNPq pelo vital e indispensável apoio financeiro.

Resumo

A dinâmica da equação diferencial com retardo $\ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = f(x_\tau)$, para a função não linear $f(x_\tau) = \tanh(\alpha x_\tau)$, foi analisada como função dos parâmetros a, b, α e do retardo τ, onde $x_\tau = x(t - \tau)$. Esse modelo descreve um oscilador harmônico amortecido sujeito a retroalimentação com retardo τ. Nesse estudo, examinamos os casos de retroalimentação negativa $(\alpha < 0)$ e positiva $(\alpha > 0)$. Usamos o método de passos para mostrar a propriedade de suavização da solução, da equação diferencial não linear com retardo, com o crescimento de t. Fizemos a análise da estabilidade local, construímos as cartas de estabilidade no espaço de parâmetros, e mostramos que o espectro de autovalores é discreto e, no máximo, enumerável. Foram construídos diagramas de bifurcação que exibiram a ocorrência da bifurcação de Hopf supercrítica, da bifurcação de forquilha supercrítica, e da bifurcação de Hopf dupla. Para alguns pontos de bifurcação de Hopf dupla, ressonantes e não ressonantes, foi calculada numericamente a série temporal, construído o espaço de fase e gerado o mapa de primeiro retorno para uma dada seção de Poincaré. Por fim, realizamos a discretização da equação do oscilador e fizemos uma breve análise da dinâmica da equação não linear de diferenças resultante.

Abstract

The dynamics of the delay differential equation $\ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = f(x_\tau)$, for the nonlinear function $f(x_\tau) = \tanh(\alpha x_\tau)$, has been analyzed as a function of the parameters a, b, α and the delay τ, where $x_\tau = x(t - \tau)$. This model describes a damped harmonic oscillator subject to feedback with delay τ. Here, we have examined the cases of negative feedback $(\alpha < 0)$ and positive feedback $(\alpha > 0)$. The method of steps have been used to show the property of solutions smoothing, for the nonlinear delay differential equation, for the increasing t. We have analyzed the local stability, made the stability charts, and showed that the spectrum of eigenvalues is discrete and at most enumerable. We have constructed the bifurcation diagrams that showed the occurrence of supercritical Hopf bifurcation, the supercritical pitchfork bifurcation and double Hopf bifurcation. For some points of resonant and non-resonant double Hopf bifurcation we have numerically calculated the time series, produced the phase space, and generated the first return map for a given Poincaré section. Finally, we have performed a discretization of the equation and made a brief analysis of the dynamics of the resulting nonlinear difference equation.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1
Introdução

Dentro do escopo geral das equações diferenciais funcionais existem as equações diferenciais funcionais com retardos, cuja forma geral é

$$x^{(n)}(t) = f\left(t, x^{(n_1)}(t-\tau_1(t)),\, x^{(n_2)}(t-\tau_2(t)),\, \ldots, x^{(n_k)}(t-\tau_k(t))\right), \tag{1.0.1}$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $x^{(n)}(t)$ é a n-ésima derivada de $x(t)$ em relação ao tempo e $n_i \geq 0$ e $\tau_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$. Na equação (1.0.1) a função f e os retardos τ_i são dados. De acordo com Kolmanovskii e Myhkis[1] a equação (1.0.1) é denominada equação diferencial funcional do tipo retardada ou equação diferencial funcional retardada se $\max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} < n$, é dita equação diferencial funcional do tipo neutra sempre que $\max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} = n$, e equação diferencial funcional do tipo avançada caso $\max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\} > n$. É comum encontrar na literatura os termos equação diferencial de diferença e equação diferencial com argumento desviante para designar as equações diferenciais do tipo retardada, neutra e/ou avançada.

O estudo de equações diferenciais de primeira ordem com argumento desviante teve início em 1728 com John Bernoulli no estudo do problema da vibração sonora num tubo de comprimento finito; ainda no século XVIII Leonhard Euler trabalhou com equações desse tipo[2]. Já segundo Pinney[3], o primeiro tratamento de equações diferenciais de diferenças de primeira ordem ocorreu em 1728 com John Bernoulli, no problema de vibração de uma leve corda esticada, de comprimento finito, ao longo da qual foram colocadas massas iguais e igualmente espaçadas. No entanto, foi apenas por volta de 1950 que a teoria de equações com retardo começou a receber atenção de matemáticos aplicados, assim como de outros cientistas ao redor do mundo[2,4].

Nas últimas décadas as equações diferenciais com retardo tem surgido em diversos problemas de interesse teórico e/ou prático em física, matemática, biologia, química, economia e engenharia[1,5–19]. O tempo de retardo ocorre devido ao tempo finito de transmissão de informação, ou princípio da causalidade, em problemas de interação entre partículas em física, sistemas

fisiológicos, dinâmica populacional e sistemas de controle. Quando o retardo é muito menor do que os tempos característicos do fenômeno em estudo, é possível usar equações diferenciais ordinárias para a modelagem do problema. Caso contrário, é necessário o uso de equações diferenciais com retardo.

No presente trabalho vamos realizar um estudo teórico de uma equação diferencial de segunda ordem não linear e com retardo. Essa equação descreve um oscilador harmônico amortecido com retroalimentação retardada, que aparece em problemas de regulação neuromuscular de movimento e postura[20], biestabilidade acústico-óptica[21], corte de metais[22–24], controle em cascata de dispositivos de nível de fluido[25,26], reflexo pupilar com grampeamento eletrônico[27,28], e no controle de *container* por guindaste[29].

Sistemas com mecanismos de retroalimentação podem ser divididos em sistemas com retroalimentação negativa, positiva e mista. Sistemas de retroalimentação negativa (positiva) são aqueles em que desvios de um estado estacionário tendem a ser minimizados (amplificados) pela retroalimentação. O sistema com retroalimentação mista incorpora uma mescla de retroalimentação negativa e positiva.

Para termos um problema como referencial vamos considerar o movimento unidimensional de uma partícula, de massa constante m, sujeita a uma força restauradora linear $-kx(t)$ (retroalimentação negativa), uma força de amortecimento $-2\gamma\dot{x}(t)$, e uma força não linear retardada $F\tanh(\alpha x(t-\tau))$, que pode se comportar como força restauradora (retroalimentação negativa) ou repulsiva (retroalimentação positiva). Com essas forças a segunda lei de Newton aplicada nessa partícula fornece a equação:

$$m\ddot{x}(t) = -2\gamma\dot{x}(t) - kx(t) + F\tanh(\alpha x(t-\tau)). \tag{1.0.2}$$

Sem perda de generalidade vamos reescrever essa equação numa forma mais simples, com menos parâmetros, mas que continua atendendo a gama de problemas de interesse:

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = f(x_\tau), \tag{1.0.3}$$

onde $x_\tau = x(t-\tau)$, $f(x_\tau) = \tanh(\alpha x_\tau)$, sendo que $a > 0$, $b > 0$, $\tau > 0$ e α são os parâmetros. Em alguns momentos investigaremos os casos limite onde a, b, τ e/ou α são nulos. A retroalimentação será positiva quando $\alpha > 0$ e negativa para $\alpha < 0$. A Figura 1.0.1 exibe um diagrama esquemático de um oscilador oscilador harmônico amortecido com retroalimentação retardada. Existe uma extensa literatura que investigou uma equação do tipo (1.0.3) para o caso de retroalimentação negativa, ou seja, quando a função $f(x_\tau)$ é monotônica decrescente[20–34]. No entanto, existem poucos estudos de equações do tipo (1.0.3) para a retroalimentação positiva, isto é, no caso em que a função $f(x_\tau)$ é monotônica crescente, e até mesmo para o caso de retroalimentação mista[35], onde a função $f(x_\tau)$ é monotônica crescente para alguns intervalos e monotônica decrescente para outros.

Existem dois caminhos para solucionar um conjunto de equações diferenciais, pode-se tentar integrá-lo analiticamente ou numericamente. A primeira abordagem fornece uma solução geral, porém só é possível em casos muito especiais. Já a abordagem numérica só não é possível em casos excepcionais, porém tem o inconveniente de ser válida apenas para uma situação específica, pois uma nova escolha para os valores das condições iniciais ou dos parâmetros obriga o cálculo de uma nova solução numérica. Às vezes, o que se deseja saber não é a forma

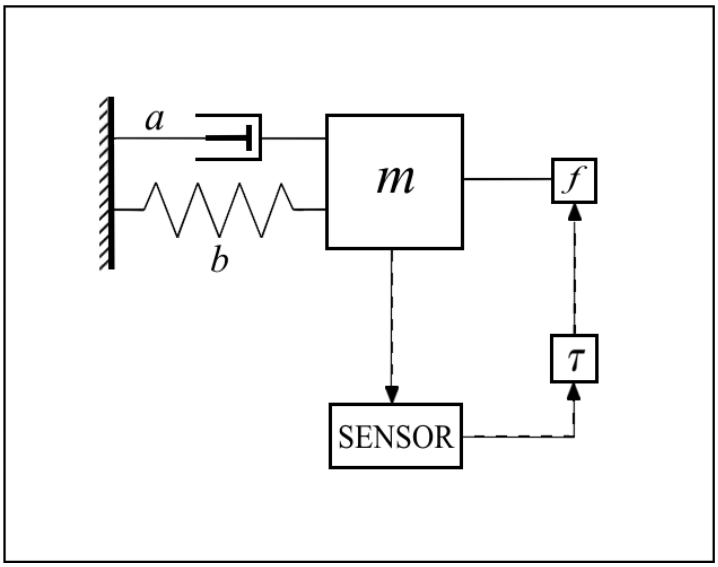

Figura 1.0.1: Diagrama esquemático de um oscilador harmônico amortecido com retroalimentação retardada.

exata da solução, mas sim seu comportamento qualitativo. Nesses casos, busca-se descobrir que famílias de soluções podem ser associadas a determinados valores dos parâmetros e/ou das condições iniciais do sistema dinâmico em questão. Nesse contexto o que se torna importante é o estudo de técnicas e métodos que permitem obter propriedades qualitativas das soluções tais como condições estabilidade, caráter oscilatório, periodicidade, quase periodicidade ou caoticidade, sem que seja necessário resolver o conjunto de equações diferenciais.

Uma equação do tipo (1.0.3) foi estudada por Milton e Ohira[35] para um caso de retroalimentação mista e investigada por Campbell *et al.* [30, 31] para o caso de retroalimentação negativa, onde analisaram a estabilidade dos pontos fixos e a variedade central para uma função $f(x_\tau)$ monotonicamente decrescente. No presente estudo vamos tratar das retroalimentações positiva e negativa para o caso especial da função monotônica $f(x_\tau) = \tanh(\alpha x_\tau)$. O objetivo do presente trabalho é determinar as possíveis dinâmicas que a equação (1.0.3) oferece através de estudos analíticos e numéricos. O emprego desses dois métodos de análise são indispensáveis, pois dão suporte um ao outro e se retroalimentam. Cumpridas essas análises espera-se obter um visão ampla da dinâmica do sistema (1.0.3) e ser capaz de avaliar o potencial dos métodos analíticos e numéricos utilizados e a forma como eles se completam durante o desenvolvimento.

No Capítulo 2 iniciaremos o estudo analítico da equação (1.0.3), verificando as condições de existência e unicidade de sua solução e definindo alguns conceitos de estabilidade para as soluções estacionárias. No Capítulo 3, será feita a análise da estabilidade local dos pontos de equilíbrio da equação (1.0.3). Para isso, vamos obter os pontos de equilíbrio dessa equação, linearizar o sistema de equações equivalente (3.1.1) em torno de cada ponto de equilíbrio e construir as cartas de estabilidade no espaço de parâmetros. Em seguida, no Capítulo 4 mostraremos como utilizamos o pacote de integração dde23 do software MATLAB® R2008a e seus principais aspectos, calcularemos algumas soluções por integração numérica e compararemos com as soluções obtidas por integração analítica pelo método de passos. Com as

séries temporais obtidas por integração numérica construiremos, no Capítulo 5, os diagramas de bifurcação de equilíbrio e codimensão 1 e examinaremos alguns pontos de bifurcação de Hopf dupla, ressonantes e não ressonantes, por meio de séries temporais, espaço de fase e mapas de primeiro retorno para uma dada seção de Poincaré. No Capítulo 6 discretizaremos a equação (1.0.3) e faremos a análise da estabilidade local da dinâmica da equação não linear de diferenças resultante. Por fim, faremos uma discussão no Capítulo 7 e exporemos algumas conclusões no Capítulo 8.

2

Existência, Unicidade e Propriedades da Solução

Na Seção 2.1 mostramos a existência e unicidade das soluções do sistema (2.1.1) supondo, essencialmente, que a função $f(x(t-\tau))$ e as histórias sejam localmente Lipschitz contínuas e também aplicando o método de obtenção de solução conhecido como método de passos na Seção 2.2. Usando o método de passos mostramos a propriedade de suavização da solução a medida que o tempo cresce. Por fim, na Seção 2.3 expomos alguns conceitos de estabilidade para as soluções estacionárias.

2.1 Existência e Unicidade

A equação diferencial de segunda ordem (1.0.3) é equivalente ao sistema de equações diferenciais de primeira ordem para $t > 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = f(x(t-\tau)) - 2ay(t) - bx(t). \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Para resolver problemas de valor inicial para sistemas bidimensionais de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem são necessárias apenas duas condições iniciais. Já para resolver o sistema bidimensional de equações diferenciais com retardo (2.1.1) é necessário fornecer um conjunto infinito de condições iniciais, que consiste nas histórias $x(t) = \varphi(t)$ para $t \in [-\tau, 0]$ e $y(t) = \phi(t)$ para $t \in (-\tau, 0)$. Em geral, não é necessário que $\phi(t) = \dot{\varphi}(t)$, pois as histórias não precisam satisfazer o sistema de equações diferenciais (2.1.1)[36], mas para o oscilador vamos sempre exigir que $x(t) = \varphi(t)$ seja apenas contínua para $t \in [-\tau, 0]$ e que $y(t) = \dot{\varphi}(t)$ para $t \in (-\tau, 0)$. Para mostrar que a solução desse sistema de equações existe, e é única, vamos

enunciar e utilizar um teorema de existência e unicidade, cuja prova pode ser encontrada em Hale e Lunel[6], Bellman e Cooke[36], e Driver[37], para o problema de valor inicial geral:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-\tau)), & t \geq t_0, \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t), & t \leq t_0, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

onde $\boldsymbol{F} : [t_0, \infty) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$. Antes de enunciar o teorema vamos expor a definição de uma função localmente Lipschitz contínua:

Definição 2.1.1 (Função Localmente Lipschitz Contínua) *Uma função $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ com $\boldsymbol{F} : [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ é dita localmente Lipschitz contínua em $\boldsymbol{u}$, por exemplo, com constante M se e somente se, existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{u}$ tal que para todo $\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{u}_2$ que pertençam a $\mathcal{U}$ exista uma constante $M > 0$ tal que*

$$\|\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v})\| \leq M \|\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1\| . \tag{2.1.3}$$

Teorema 2.1.1 (Existência Local e Unicidade) *Considere o problema de valor inicial dado por* (2.1.2). *Tome $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ e $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^d$ como vizinhança de $\varphi(t_0)$ e $\varphi(t_0 - \tau(t_0, \varphi(t_0)))$, respectivamente, e suponha que a função $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ seja contínua com respeito a t e localmente Lipschitz contínua com relação a $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ em $[t_0, t_0 + h] \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ para algum $h > 0$. Além disso, suponha que a história $\boldsymbol{\varphi}(t)$ seja localmente Lipschitz contínua para $t \leq t_0$ e que a função do retardo $\tau(t, \boldsymbol{y}) \geq 0$ seja contínua com respeito a t e localmente Lipschitz contínua com relação a $\boldsymbol{y}$ em $[t_0, t_0 + h] \times \mathcal{U}$. Então, o problema* (2.1.2) *tem uma única solução em $[t_0, t_0 + \delta)$ para algum δ e essa solução depende continuamente da história dada.*

Usando os vetores $\boldsymbol{y} = (x, y)^T$ e $\boldsymbol{y}_\tau = (x_\tau, y_\tau)^T$ para o sistema (2.1.1) tem-se que

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_\tau) = \begin{pmatrix} y \\ f(x_\tau) - 2ay - bx \end{pmatrix}, \tag{2.1.4}$$

pois nesse caso $\boldsymbol{F}$ não depende explicitamente do tempo. Definindo a norma $\|.\|$ para vetores $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y)^T$, como a norma Euclideana $\|\boldsymbol{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$, demonstramos na Proposição 2.1.2 que a função $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_\tau)$ dada pela equação (2.1.4) é localmente Lipschitz contínua em relação a $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{y}_\tau$ para qualquer função $f(x_\tau)$ que seja localmente Lipschitz contínua. No nosso caso de especial interesse $f(x_\tau) = \tanh(\alpha x_\tau)$, que é Lipschitz contínua em $\mathbb{R}$, conforme a Proposição 2.1.1, e o retardo é uma função constante e portanto satisfaz as condições exigidas pelo Teorema 2.1.1. Assim, para garantir a existência local e unicidade da solução do sistema (2.1.1), de acordo com o Teorema 2.1.1, resta apenas impor que a história $\varphi(t)$ seja localmente Lipschitz contínua.

Proposição 2.1.1 *A função $f(x) = \tanh(\alpha x)$ é Lipschitz contínua em $\mathbb{R}$ com constante α.*

Demonstração. A derivada da função $f(x) = \tanh(\alpha x)$ é limitada $f'(x) = \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha x) \leq |\alpha|$. E pelo teorema do valor médio, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x - y)| \leq |\alpha||x - y|$, mostrando que $f(x)$ é Lipschitz em $\mathbb{R}$ com constante α. ■

Proposição 2.1.2 *A função vetorial*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_\tau) = \begin{pmatrix} y \\ f(x_\tau) - 2ay - bx \end{pmatrix}, \tag{2.1.5}$$

é localmente Lipschitz contínua em $\boldsymbol{y} = (x,y)^T$ *e* $\boldsymbol{y}_\tau = (x_\tau, y_\tau)^T$.

Demonstração. Primeiro, vamos demonstrar que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_\tau)$ é localmente Lipschitz contínua na vizinhança $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^2$ de $\boldsymbol{y}$. No caso $\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_1$ a condição de Lipschitz é trivialmente satisfeita. Tomando $\boldsymbol{y}_2$ e $\boldsymbol{y}_1$ distintos em $\mathcal{Y}$ vem que

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}_2,\boldsymbol{y}_\tau) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_\tau)\| \leq M \|\boldsymbol{y}_2 - \boldsymbol{y}_1\|, \tag{2.1.6}$$

$$\sqrt{(y_2-y_1)^2 + [2a(y_2-y_1) - b(x_2-x_1)]^2} \leq M_2\sqrt{(y_2-y_1)^2 + (x_2-x_1)^2}, \tag{2.1.7}$$

mas para quaisquer pontos $\boldsymbol{y}_2$ e $\boldsymbol{y}_1$ no plano $\mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^2$ existe uma constante $\beta_1 \in \mathbb{R}$ que define a reta dada por $x_2 - x_1 = \beta_1(y_2 - y_1)$ para $y_2 \neq y_1$, ou uma constante $\beta_2 \in \mathbb{R}$ que define a reta dada por $y_2 - y_1 = \beta_1(x_2 - x_1)$ para $x_2 \neq x_1$; de modo que podemos reescrever a desigualdade (2.1.7) e definir, respectivamente, as constantes M_1 ou M_2, que satisfazem a condição de continuidade de Lipschitz:

$$M_1 \geq \sqrt{\frac{1 + (2a - b\beta_1)^2}{1 + \beta_1^2}} \quad \text{ou} \quad M_2 \geq \sqrt{\frac{\beta_2^2 + (2a-b)^2}{1 + \beta_2^2}}. \tag{2.1.8}$$

Agora vamos mostrar que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_\tau)$ é localmente Lipschitz contínua na vizinhança $\mathcal{Y}_\tau \subseteq \mathbb{R}^2$ de $\boldsymbol{y}_\tau$. Descartando o caso trivial, tomando $\boldsymbol{y}_{\tau 1}$ e $\boldsymbol{y}_{\tau 2}$ distintos em $\mathcal{Y}_\tau$, tem-se

$$\|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_{\tau 2}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}_{\tau 1})\| \leq M \|\boldsymbol{y}_{\tau 2} - \boldsymbol{y}_{\tau 1}\|, \tag{2.1.9}$$

$$|f(x_{\tau 2}) - f(x_{\tau 1})| \leq M\sqrt{(y_{\tau 2} - y_{\tau 1})^2 + (x_{\tau 2} - x_{\tau 1})^2}, \tag{2.1.10}$$

porém, vimos na Proposição 2.1.1 que para $f(x) = \tanh(\alpha x)$ sempre existe c tal que $|f(x) - f(y)| = |f'(c)(x-y)|$, e sabemos que para quaisquer pontos $y_{\tau 2}$ e $y_{\tau 1}$ no plano $\mathcal{Y}_\tau \subseteq \mathbb{R}^2$ existe uma constante $\beta_1 \in \mathbb{R}$ que define a reta dada por $x_{\tau 2} - x_{\tau 1} = \beta_1(y_{\tau 2} - y_{\tau 1})$ para $y_{\tau 2} \neq y_{\tau 1}$, ou uma constante $\beta_2 \in \mathbb{R}$ que define a reta dada por $y_{\tau 2} - y_{\tau 1} = \beta_2(x_{\tau 2} - x_{\tau 1})$ para $x_{\tau 2} \neq x_{\tau 1}$; de modo que podemos reescrever a desigualdade (2.1.10) e definir, respectivamente, as contantes M_1 ou M_2:

$$M_1 \geq \frac{|\beta_1 f'(c)|}{\sqrt{1+\beta^2}} \quad \text{ou} \quad M_2 \geq \frac{|\beta f'(c)|}{\sqrt{1+\beta^2}}, \tag{2.1.11}$$

que satisfazem a condição de continuidade de Lipschitz. ■

2.2 Método de Passos

Uma propriedade importante dos sistemas de equações diferenciais com retardo do tipo (2.1.1) diz respeito à propagação de descontinuidades. Normalmente, as soluções de equações diferenciais com retardo neutras e sistemas de equações diferenciais com retardo de dimensão $n \geq 2$ propagam as descontinuidades nos chamados *breaking points*[38], pontos de descontinuidade. Uma forma de verificar se ocorrem essas descontinuidades nas soluções do sistema (2.1.1) consiste em aplicar o método de passos para obter sua solução[39].

O método de passos consiste na técnica de calcular a solução de um sistema de equações diferenciais com retardo dividindo-o numa sequência de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Para aplicar esse método de resolução vamos definir o intervalo $\mathcal{I}_0 = [-\tau, 0]$, para as histórias $\varphi(t)$ e $\phi(t)$, que vamos denotar respectivamente por $x_0(t)$ e $y_0(t)$, onde não necessariamente devemos ter $\phi(t) = \dot{\varphi}(t)$. E para cada solução, que vamos denotar por $x_n(t)$ e $y_n(t)$, vamos definir o intervalo correspondente $\mathcal{I}_n = ((n-1)\tau, n\tau]$ com $n \in \mathbb{N}^*$. Assim, no primeiro passo, a solução do sistema (2.1.1) para $t \in \mathcal{I}_1 = (0, \tau]$ será dada pelo problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = y_1(t), \\ \dot{y}_1(t) = f(x_0(t-\tau)) - 2ay_1(t) - bx_1(t), \\ x_1(0) = x_0(0) \quad \text{e} \quad y_1(0) = y_0(0), \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Suponha que $\varphi(t)$ e $\phi(t)$ são de classe $C^0(\mathcal{I}_0, \mathbb{R})$ e tais que as soluções $x_1(t)$ e $y_1(t)$ existam e sejam, no mínimo, de classe $C^0(\mathcal{I}_0, \mathbb{R})$, e que a função f seja de classe $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ [1]. Com isso, o sistema (2.2.1) mostra que as soluções $x_1(t)$ e $y_1(t)$ são de classe $C^1(\mathcal{I}_0, \mathbb{R})$, pois a composição de funções contínuas e a soma de funções contínuas num intervalo, resultam em funções contínuas nesse intervalo. Derivando o sistema (2.2.1) em relação ao tempo obtemos que a segunda derivada de $x_1(t)$ e $y_1(t)$ não estão definidas, já que, por suposição, a história $x_0(t-\tau)$ é de classe $C^0(\mathcal{I}_1, \mathbb{R})$. Agora, no segundo passo, a solução para $t \in \mathcal{I}_2 = (\tau, 2\tau]$ virá de

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = f(x_1(t-\tau)) - 2ay_2(t) - bx_2(t), \\ x_2(\tau) = x_1(\tau) \quad \text{e} \quad y_2(\tau) = y_1(\tau). \end{cases} \tag{2.2.2}$$

Derivando o sistema (2.2.2) em relação ao tempo tem-se que

$$\begin{cases} \ddot{x}_2(t) = \dot{y}_2(t), \\ \ddot{y}_2(t) = \dfrac{\partial f(x_1(t-\tau))}{\partial x_1(t-\tau)} \dot{x}_1(t-\tau) - 2a\dot{y}_2(t) - b\dot{x}_2(t), \end{cases} \tag{2.2.3}$$

cujo lado direito é contínuo, já que $x_1(t)$ e $y_1(t)$ são de classe $C^1(\mathcal{I}_1, \mathbb{R})$ e garantem a existência de $x_2(t)$ e $y_2(t)$; e além disso, por suposição, a função f é de classe $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Portanto,

[1] Uma função $f : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ com domínio $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ é dita ser de classe $C^0(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ se for uma função contínua, e de classe $C^n(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ se sua n-ésima derivada for uma função contínua.

$x_2(t)$ e $y_2(t)$ são de classe $C^2(\mathcal{I}_2, \mathbb{R})$. Dessa forma, no n-ésimo passo, teremos o sistema de equações diferenciais ordinárias para $t \in \mathcal{I}_n = ((n-1)\tau, n\tau]$

$$\begin{cases} \dot{x}_n(t) = y_n(t), \\ \dot{y}_n(t) = f(x_{n-1}(t-\tau)) - 2ay_n(t) - bx_n(t), \\ x_n((n-1)\tau) = x_{n-1}((n-1)\tau) \quad \text{e} \quad y_n((n-1)\tau) = y_{n-1}((n-1)\tau), \end{cases} \tag{2.2.4}$$

e derivando o sistema (2.2.4) $(n-1)$ vezes obtém-se que $x_n(t)$ e $y_n(t)$ são de classe $C^n(\mathcal{I}_n, \mathbb{R})$. Teoricamente, esse procedimento leva à existência e unicidade da solução no semi-eixo $[0, \infty)$, no caso em que f é de classe $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Desse modo, a cada iteração no método de passos as soluções vão se suavizando, de modo que no n-ésimo passo as soluções $x_n(t)$ e $y_n(t)$ são de classe $C^n(((n-1)\tau, n\tau], \mathbb{R})$, e, portanto, de um modo geral, as soluções serão de classe $C^n((n\tau, \infty), \mathbb{R})$, no caso em que f é de classe $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Normalmente, em $t = 0$ a solução é contínua e as derivadas pela esquerda e pela direita são diferentes, pois não é necessário impor que as histórias $\varphi(t)$ e $\phi(t)$, satisfaçam o sistema (2.1.1) para $t \in \mathcal{I}_0$. No caso em que essa condição é imposta, no n-ésimo passo a solução será de classe $C^{(n+1)}(\mathcal{I}_n, \mathbb{R})$.

A propriedade de suavização da solução a medida que o tempo cresce é uma característica típica para equações diferenciais com retardo[1]. Essa propriedade mostra que, no caso em que a função f é infinitamente diferenciável, as soluções periódicas do sistema de equações em questão serão infinitamente diferenciáveis[4]. Para equações diferenciais com retardo neutro essa suavização não ocorre e, em geral, a solução pode ter a derivada descontínua em todos os *breaking points*[39].

Esse método de integração sucessiva também pode ser aplicado em equações diferenciais com retardos que dependem do tempo[4] e em casos onde os retardos dependem do estado, sendo que no último caso o passo muda ao longo da órbita, ao invés de ser constante[39]. Nos casos de múltiplo retardo aparecem algumas complicações na determinação dos intervalos dos passos quando os retardos não são comensuráveis.

2.3 Definições de Estabilidade para as Soluções Estacionárias

Uma vez que a existência e unicidade da solução do sistema (2.1.1) foram estabelecidas, nossa próxima proposta será estudar a estabilidade de suas soluções estacionárias. Isso será feito no Capítulo 3, mas vamos expor aqui algumas definições acerca dos conceitos de estabilidade que serão utilizados. Uma solução $\boldsymbol{y}^*$ de um sistema de equações com retardo do tipo $\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{y}(t-\tau))$ é dita estacionária se $\dot{\boldsymbol{y}}^* = 0$ e consequentemente as soluções estacionárias desse sistema serão calculadas impondo que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{y}^*) = 0$. Para as definições a seguir vamos considerar uma solução estacionária $\boldsymbol{y}^*$ qualquer, que também vamos chamar de ponto fixo ou de ponto de equilíbrio. Primeiro vamos fixar o conceito de estabilidade no sentido de Liapunov, ou simplesmente estabilidade; depois vamos determinar o conceito de estabilidade uniforme;

em seguida vamos estabelecer o conceito de estabilidade orbital ou estabilidade no sentido de Poincaré; e por fim vamos enunciar a definição de estabilidade assintótica[36, 40]. Um ponto de equilíbrio que é estável no sentido de Lyapunov, mas não é um atrator[2], é dito neutramente estável[41]. Um centro é um exemplo de ponto fixo neutramente estável[42].

Definição 2.3.1 (Estabilidade) *O ponto de equilíbrio $\boldsymbol{y}^*$ do sistema* (2.2.1) *é estável, ou estável no sentido de Lyapunov, para $t \to \infty$ se, dados dois números reais t_0 e $\epsilon > 0$, existe um número real $\delta > 0$ tal que para qualquer solução contínua $\boldsymbol{y}(t)$ de* (2.2.1) *tem-se que*

$$\max_{t_0 \le t \le t_0+T} \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}^*\| \le \delta, \tag{2.3.1}$$

implicará que

$$\max_{t_0 \le t < \infty} \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}^*\| \le \epsilon. \tag{2.3.2}$$

Definição 2.3.2 (Estabilidade Uniforme) *O ponto de equilíbrio $\boldsymbol{y}^*$ do sistema* (2.2.1) *é uniformemente estável para $t \to \infty$, se, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que se $\boldsymbol{y}(t)$ é uma solução de* (2.2.1) *que satisfaz* (2.3.1) *para qualquer $t_0 \ge 0$, então $\boldsymbol{y}(t)$ satisfaz* (2.3.2).

Definição 2.3.3 (Estabilidade Assintótica) *O ponto de equilíbrio $\boldsymbol{y}^*$ do sistema* (2.2.1) *é assintoticamente estável para $t \to \infty$, se:*

(a) é estável;

(b) para cada $t_0 \ge 0$ existe um $\delta = \delta(t_0)$ tal que toda solução que satisfaz (2.3.1) *também irá satisfazer a relação*

$$\lim_{t \to \infty} \|\boldsymbol{y}(t) - \boldsymbol{y}^*\| = 0. \tag{2.3.3}$$

No Capítulo 3 vamos calcular os autovalores para a versão linearizada do sistema (2.1.1) em torno de um ponto fixo. O cálculo dos autovalores para um dado ponto fixo permite verificar se ele será instável, de acordo com a Definição 2.3.4.

Definição 2.3.4 (Instabilidade) *O ponto de equilíbrio $\boldsymbol{y}^*$ do sistema* (2.1.1) *será instável se para a versão linearizada desse sistema em torno desse ponto fixo existir algum autovalor com parte real positiva.*

[2] Um ponto fixo é um atrator se todas as trajetórias que iniciam na sua vizinhança são atraídas para ele quando $t \to \infty$.

3
Análise da estabilidade local

No presente capítulo analisamos a estabilidade local do sistema (3.1.1). Por meio da linearização do sistema (3.1.1) em torno de seus pontos fixos mostramos, na Seção 3.1, que o espectro de autovalores é discreto e, no máximo, enumerável. Na seção 3.2 estudamos os casos de espectro real de autovalores. Em seguida, na Seção 3.3 desenvolvemos algumas cartas de estabilidade no espaço de parâmetros. Por último, na Seção 3.4 obtivemos que além de discreto, o espectro é limitado em uma dada região no plano de autovalores.

3.1 Linearização, Pontos de Equilíbrio e Espectro de Autovalores

O sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = f(x_\tau) - 2ay - bx, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

é equivalente à equação diferencial de segunda ordem (1.0.3). Os pontos de equilíbrio (x^*, y^*) do sistema (3.1.1) são obtidos impondo que $\dot{x} = \dot{y} = 0$. Assim, os pontos fixos serão dados por $y^* = 0$ e $bx^* = f(x^*)$, onde usamos o fato de que nos pontos fixos $x = x^*$ implica em $x_\tau = x^*$. Para o nosso caso, de especial interesse, a função de retroalimentação será dada por $f(x) = \tanh(\alpha x)$ e, com isso, a última igualdade para os pontos fixos fica

$$bx^* = \tanh(\alpha x^*). \tag{3.1.2}$$

No caso da retroalimentação negativa $(\alpha < 0)$, para quaisquer b e α a equação (3.1.2) terá apenas a raiz nula (Figura 3.1.1 (a)). E no caso da retroalimentação positiva $(\alpha > 0)$; para $b \geq \alpha$ a equação (3.1.2) terá apenas a raiz nula $x_0^* = 0$, e para $0 < b < \alpha$ essa equação terá três raízes

distintas x_-^*, x_0^* e x_+^*, sendo que $x_-^* = -x_+^*$ (Figura 3.1.1 (b)). Desse modo, os possíveis pontos de equilíbrio serão $P_- = (x_-^*, 0)$, $P_0 = (0\,,0)$ e $P_+ = (x_+^*, 0)$, sendo que P_0 sempre existe.

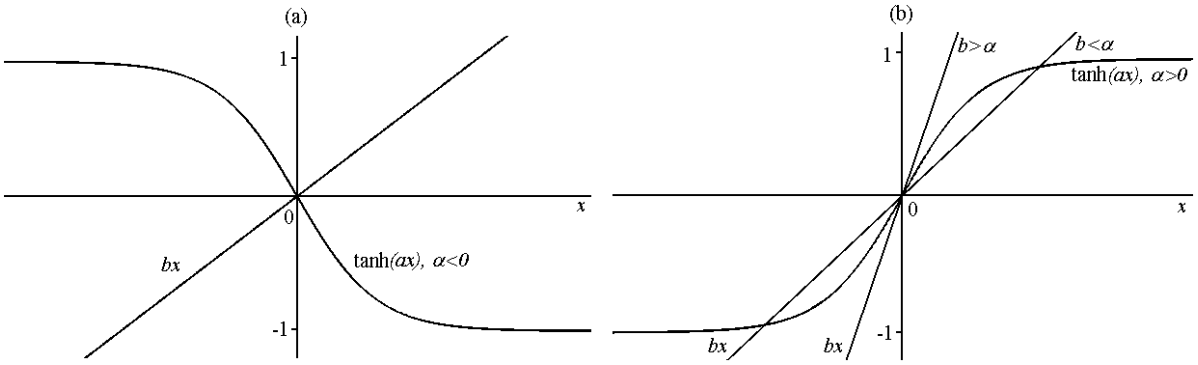

Figura 3.1.1: Método gráfico para encontrar as soluções de (3.1.2): (a) para retroalimentação negativa $(\alpha < 0)$ existe apenas uma solução, (b) para retroalimentação positiva $(\alpha > 0)$ existe uma solução se $(b > \alpha)$ e três soluções se $(b < \alpha)$.

Para investigar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio devemos linearizar o sistema (3.1.1) em torno de cada ponto de equilíbrio. Com esse intuito, definimos as seguintes funções: $X(r) = y$ e $Y(r) = f(x_\tau) - 2ay - bx$, onde $r = (x, y, x_\tau)$. Expandindo-as em série de Taylor em torno de $r^* = (x^*, y^*, x^*)$ e desprezando os termos não lineares, temos

$$\begin{cases} \dot{x} = X(r^*) + X_x(r^*)(x - x^*) + X_y(r^*)(y - y^*) + X_{x_\tau}(r^*)(x_\tau - x^*), \\ \dot{y} = Y(r^*) + Y_x(r^*)(x - x^*) + Y_y(r^*)(y - y^*) + Y_{x_\tau}(r^*)(x_\tau - x^*), \end{cases} \tag{3.1.3}$$

onde $X_x(r^*)$, por exemplo, denota a derivada parcial de X com relação a x calculada no ponto fixo r^*. Com isso, e usando que $X(r^*) = Y(r^*) = 0$, chegamos ao sistema linear de equações

$$\begin{cases} \dot{x} = y - y^*, \\ \dot{y} = -2a(y - y^*) - b(x - x^*) + f'(x^*)(x_\tau - x^*). \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Definindo a constante $d = f'(x^*) = \alpha\,\mathrm{sech}^2(\alpha x^*)$ e deslocando o ponto fixo (x^*, y^*) para a origem definindo as variáveis $u = x - x^*$ e $v = y - y^*$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = du_\tau - 2av - bu, \end{cases} \tag{3.1.5}$$

que pode ser reescrito como a equação diferencial linear de segunda ordem com retardo

$$\ddot{u} + 2a\dot{u} + bu = du_\tau. \tag{3.1.6}$$

Assim, os três pontos de equilíbrio, P_-, P_0 e P_+, geram apenas dois valores distintos para o parâmetro d, e vamos denotá-los por $d_0 = \alpha$ e $d_\pm = \alpha\,\mathrm{sech}^2(\alpha x_\pm^*)$.

Utilizando o ansatz $u = s\,\mathrm{e}^{\lambda t}$, com $\lambda \in \mathbb{C}$ e $s \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, na equação (3.1.6) obtêm-se a equação característica transcendental

$$\lambda^2 + 2a\lambda + b = d\mathrm{e}^{-\lambda\tau}. \tag{3.1.7}$$

O conjunto de todos os autovalores que satisfazem a equação característica (3.1.7) formam o espectro da equação diferencial linear com retardo (3.1.6). Definindo a função complexa $E(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + b - d\mathrm{e}^{-\lambda\tau}$ vamos representar o espectro de autovalores pelo conjunto $\sigma(\Sigma) := \{\lambda \in \mathbb{C} : E(\lambda) = 0\}$. A cada autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ está associado um autovetor $s \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Note que o espectro independe da história $\varphi(t)$ do problema, sendo válido para um determinado conjunto de parâmetros. A dimensão do espaço de soluções da equação linear (3.1.6) será dada pela soma da multiplicidade algébrica de todas as soluções λ da equação característica (3.1.7). Facilmente prova-se que a função $E(\lambda)$ é analítica (holomórfica) em todo o plano $\mathbb{C}$. A analiticidade de $E(\lambda)$ em todo o plano $\mathbb{C}$ nos permite obter duas importantes propriedades do espectro de autovalores $\sigma(\Sigma)$. A primeira, é que para uma função analítica em todo o plano $\mathbb{C}$ os zeros são isolados, pois sempre é possível desenvolver uma série de Taylor na vizinhança de cada zero[43]. A segunda, é que o conjunto formado por todos os zeros de uma função analítica é, no máximo, contável[44] (veja a Definição 3.1.1). Portanto, o espetro $\sigma(\Sigma)$ é discreto e, no máximo, enumerável.

Definição 3.1.1 (Conjunto enumerável) *Um conjunto $\mathcal{X}$ é dito enumerável (ou contável) quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$.*

A solução trivial $\lambda = 0$ da equação (3.1.7) ocorre somente para o caso particular de retroalimentação positiva com $d = b$. Tomando $\lambda = \gamma + \mathrm{i}\omega$, com $\gamma \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{R}$, o ponto de equilíbrio do sistema (3.1.1) será assintoticamente estável para $\gamma < 0$ e instável caso $\gamma > 0$. Para $\gamma = 0$ não podemos afirmar que o ponto fixo será neutramente estável, uma vez que é necessário analisar termos de ordem superior aos termos lineares da série de Taylor (3.1.3). Nas Seções 3.2, 3.3 e 3.4 analisamos, respectivamente, os casos onde a solução da equação (3.1.7) é: um número real, um número imaginário puro e um número complexo qualquer.

O caso especial da equação característica (3.1.7) com $\tau = 0$ é de particular interesse, pois será usado para comparar a estabilidade das regiões com $\tau \neq 0$ das cartas de estabilidade que serão construídas na Seção 3.3 com as estabilidades das fronteiras dessas cartas onde o retardo é nulo. Com $\tau = 0$ a equação característica (3.1.7) fornece as seguintes soluções:

$$\lambda_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2 + d - b}. \tag{3.1.8}$$

Logo, para $d > b$ o ponto de equilíbrio do sistema não linear (3.1.1) será um ponto de sela, para $0 < a^2 + d - b < a^2$ será um um nó estável e para $a^2 + d - b < 0$ será um foco estável. Para $a = 0$ e $d < b$ podemos afirmar que o ponto de equilíbrio do sistema linear (3.1.5) será um centro, porém, para saber se o ponto fixo do sistema não linear (3.1.1) também será um centro é necessário utilizar a teoria da variedade central para calcular a projeção da variedade central sobre as variedades estáveis e instáveis. Resumindo, no que diz respeito à estabilidade; para $\tau = 0$ e $a \neq 0$ o ponto de equilíbrio será assintoticamente estável se $d < b$, e instável se $d > b$.

No caso de um sistema não-linear de equações diferenciais ordinárias o Teorema de Hartman-Grobman garante que na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico[1] o retrato de fases

[1] Um ponto de equilíbrio é dito hiperbólico se para todos autovalores λ calculados nesse ponto fixo tem-se $\mathrm{Re}\{\lambda\} \neq 0$. Se para algum dos autovalores tem-se $\mathrm{Re}\{\lambda\} = 0$ o ponto fixo é dito não hiperbólico, elíptico ou degenerado.

do sistema linearizado é topologicamente equivalente ao retrato de fase do sistema não linear original[42,45]. Para as equações diferenciais com retardo, a estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico também é preservada[7].

3.2 Estabilidade Assintótica: autovalor real $\lambda = \gamma$

Substituindo $\lambda = \gamma$ na equação (3.1.7) temos a equação transcendental

$$\gamma^2 + 2a\gamma + b = d\mathrm{e}^{-\gamma\tau}, \tag{3.2.1}$$

que pode ser reescrita na forma

$$\gamma(\gamma + 2a) = d\mathrm{e}^{-\gamma\tau} - b. \tag{3.2.2}$$

Definindo as funções $G(\gamma) = \gamma(\gamma + 2a)$ e $H(\gamma) = d\mathrm{e}^{-\gamma\tau} - b$ podemos resolver a equação (3.2.2) encontrando graficamente interseção das funções $G(\gamma)$ e $H(\gamma)$. Descartando o caso em que a equação não tem solução real, a Figura 3.2.1 mostra os casos em que, dependendo dos valores dos parâmetros, a equação (3.3.1) pode ter uma, duas ou três soluções reais. Representando, em cada caso, o número de autovalores por uma ênupla onde as componentes denotam o sinal do autovalor, com − para negativo, 0 para nulo e + para positivo, temos as seguintes possibilidades: (a) $(+)$, (b) (0), (c) $(-)$, (d) $(-)$, (e) $(-,+)$, (f) $(-,0)$, (g) $(-,-)$, (h) $(-,-)$, (i) $(-,-)$, (j) $(-,-,+)$, (k) $(-,-,0)$ e (l) $(-,-,-)$. Sendo assim, o espectro discreto de autovalores real puro tem, no máximo, um conjunto de três autovalores que está dentro de uma das possibilidades acima descritas.

O ponto de equilíbrio será assintoticamente estável para os casos (c), (d), (g), (h), (i) e (l) e instável para os casos (a), (e) e (j). Para determinar analiticamente a estabilidade dos casos restantes devemos incluir termos de ordem superior na análise da estabilidade local ou utilizar a teoria da variedade central.

Para efeito de comparações com os resultados da Seção 3.4 construímos os mesmos diagramas da Figura 3.2.1 trocando apenas os tipos de retroalimentação por meio da transformação $d \to -d$. Essa mudança causa uma reflexão das curvas exponencias com relação às suas assíntotas, resultando nos gráficos da Figura 3.2.2.

Na proposição a seguir vamos determinar a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema (3.1.5) para o caso de retroalimentação positiva com $d > b$, utilizando a equação característica para autovalores reais (3.2.1). Essa proposição será utilizada para determinar a estabilidade de regiões de algumas cartas de estabilidade na Seção 3.3.

Proposição 3.2.1 *Dado o conjunto de parâmetros positivos $\{a, b, d, \tau\}$, para o caso com $d > b$ o ponto de equilíbrio do sistema* (3.1.5) *é instável.*

Demonstração. Para demonstrar que o ponto fixo do sistema (3.1.5) é instável basta encontrarmos um autovalor com parte real positiva. A existência desse autovalor pode ser estabelecida esboçando os gráficos das funções $G(\gamma) = \gamma(\gamma + 2a)$ e $H(\gamma) = d\mathrm{e}^{-\gamma\tau} - b$. Na Figura 3.2.3 fica claro que sempre existirá o autovalor positivo γ_0 para o conjunto de parâmetros positivos $\{a, b, d, \tau\}$. ■

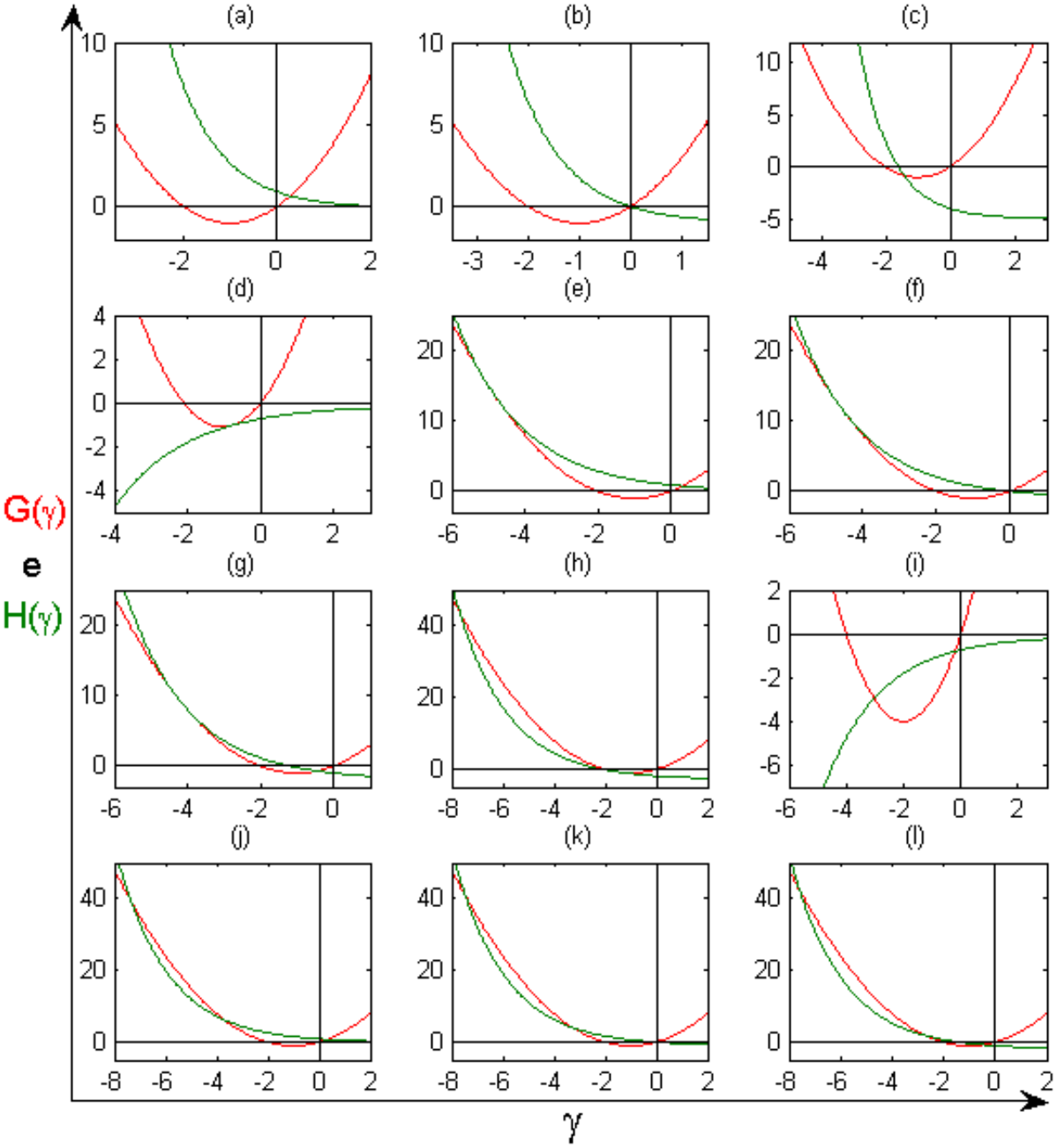

Figura 3.2.1: Soluções gráficas da equação (3.2.2) para o conjunto de parâmetros (a, b, d, τ) igual a: (a) $(1\,;0{,}1\,;1\,;1)$, (b) $(1\,;1\,;1\,;1)$, (c) $(1\,;5\,;1\,;1)$, (d) $(1{,}050\,;0{,}1\,;-0{,}63\,;0{,}5)$, (e) $(1\,;0{,}1\,;1\,;0{,}543)$, (f) $(1\,;1\,;1\,;0{,}557)$, (g) $(1\,;2\,;1\,;0{,}576)$, (h) $(1\,;2{,}868\,;1\,;0{,}5)$, (i) $(2\,;0{,}1\,;-0{,}63\,;0{,}5)$, (j) $(1\,;0{,}1\,;1\,;0{,}5)$, (k) $(1\,;1\,;1\,;0{,}5)$ e (l) $(1\,;2\,;1\,;0{,}5)$.

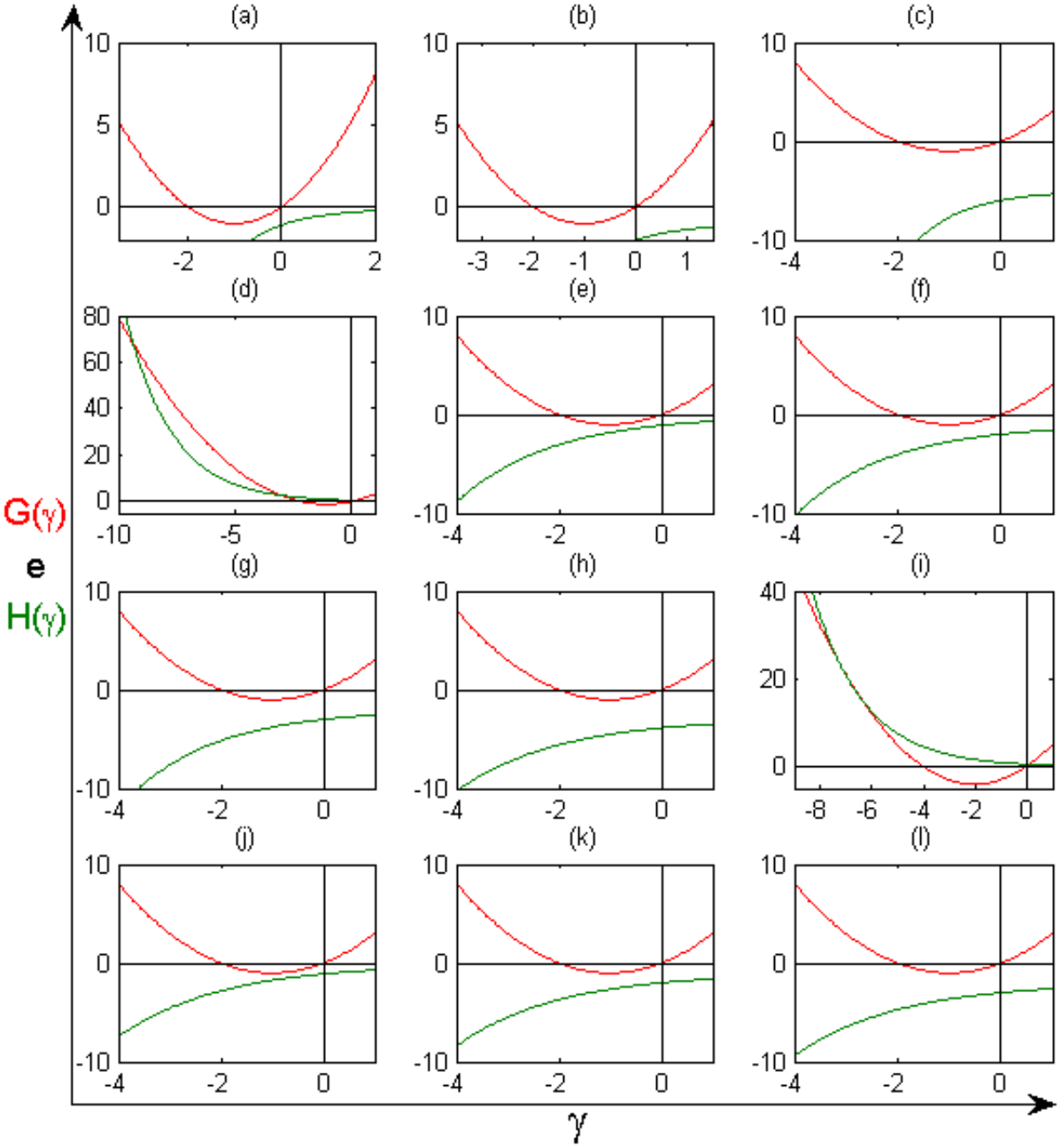

Figura 3.2.2: Soluções gráficas da equação (3.2.2) para o conjunto de parâmetros (a, b, d, τ) igual a: (a) (1 ; 0,1 ; -1 ; 1), (b) (1 ; 1 ; -1 ; 1), (c) (1 ; 5 ; -1 ; 1), (d) (1,050 ; 0,1 ; 0,63 ; 0,5), (e) (1 ; 0,1 ; −1; 0,543), (f) (1 ; 1 ; -1 ; 0,557), (g) (1 ; 2 ; -1 ; 0,576), (h) (1 ; 2,868 ; -1 ; 0,5), (i) (2 ; 0,1 ; 0,63 ; 0,5), (j) (1 ; 0,1 ; -1 ; 0,5), (k) (1 ; 1 ; -1 ; 0,5) e (l) (1 ; 2 ; -1 ; 0,5).

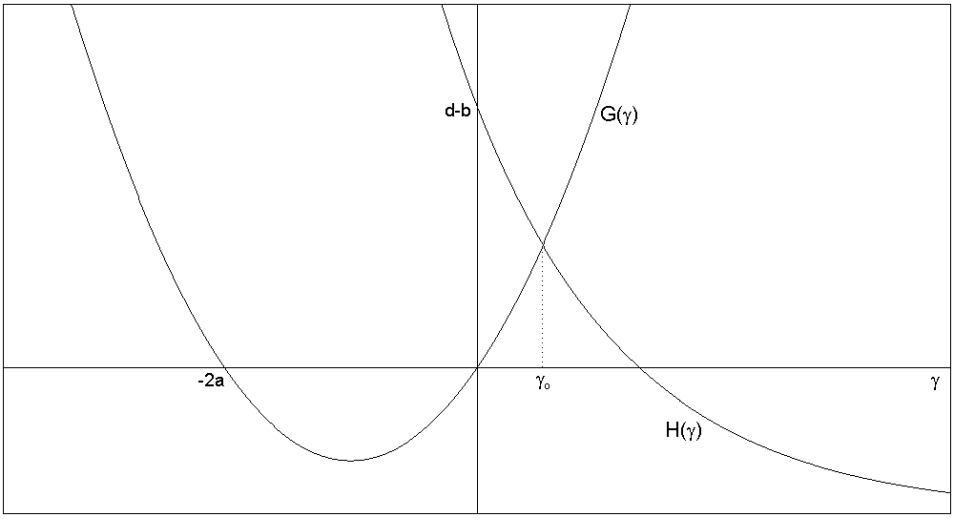

Figura 3.2.3: Método gráfico para encontrar as soluções de (3.2.1) para o caso de retroalimentação positiva com $d > b$.

3.3 Cartas de Estabilidade: autovalor imaginário puro $\lambda = \mathrm{i}\omega$

Tomando $\lambda = \mathrm{i}\omega$ e descartando a solução trivial impondo $\omega > 0$ a equação (3.1.7) fica

$$\frac{b-\omega^2}{d} + \mathrm{i}\frac{2a\omega}{d} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}. \tag{3.3.1}$$

Analisando as soluções da equação (3.3.1) graficamente: o lado direito de (3.3.1) descreve um círculo unitário no plano complexo, ao passo que o lado esquerdo descreve um arco de parábola. O arco de parábola inicia no ponto $(\mathrm{Re}, \mathrm{Im}) = (b/d, 0)$, quando $\omega = 0$ e, conforme ω cresce, ele pode cruzar com o círculo unitário em um ou dois pontos, ou não cruzar o círculo unitário, dependendo dos valores dos parâmetros. As Figuras 3.3.1 (a) e (b) exibem as regiões em que ocorrem duas, uma ou nenhuma solução para os casos de retroalimentação positiva e negativa, respectivamente.

Separando as partes real e imaginária da equação (3.3.1) tem-se

$$\mathrm{sen}(\omega\tau) = \frac{-2a\omega}{d}, \tag{3.3.2a}$$

$$\cos(\omega\tau) = \frac{b-\omega^2}{d}. \tag{3.3.2b}$$

Elevando as equações (3.3.2b) e (3.3.2a) ao quadrado e somando-as obtém-se que

$$\omega^4 - 2(b-2a^2)\omega^2 + (b^2-d^2) = 0, \tag{3.3.3}$$

cujas soluções reais e positivas são

$$\omega_\pm = \sqrt{(b-2a^2) \pm \sqrt{(b-2a^2)^2 + (d^2-b^2)}}. \tag{3.3.4}$$

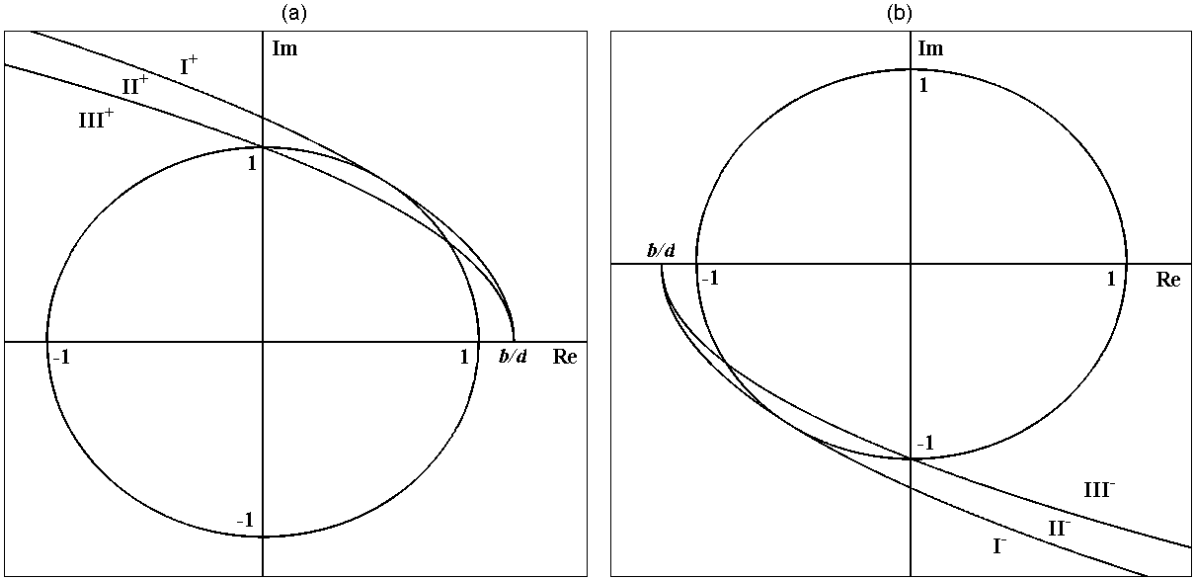

Figura 3.3.1: Método gráfico para encontrar as soluções de (3.3.1) para: (a) retroalimentação positiva com $(b/d > 1)$ e (b) retroalimentação negativa com $(b/d < -1)$.

As equações (3.3.2b) e (3.3.2a) são invariantes sob a transformação $\omega \to -\omega$. Assim, as quatro soluções da equação característica (3.1.7) que a equação (3.3.4) fornece, serão dadas por $\lambda = \pm i\omega_{\pm}$.

Em princípio, utilizando ainda as equações (3.3.2b) e (3.3.2a) obtemos o tempo de retardo em função dos outros parâmetros

$$\tau_{j,\pm} = \frac{1}{\omega_{\pm}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{2a\omega_{\pm}}{\omega_{\pm}^2 - b}\right) + 2\pi j\right], \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{3.3.5}$$

No entanto, definindo a função arco tangente por $\tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$, percebe-se que é necessário analisar os quadrantes nos quais as funções seno e cosseno das equações (3.3.2b) e (3.3.2a) estão definidas para estabelecer os quadrantes da função arco tangente. Vamos fazer esse estudo definindo os intervalos adequados do parâmetro a, e examinando o sinal das equações (3.3.2b) e (3.3.2a).

Antes disso, observe que as equações (3.3.5) e (3.3.4) estabelecem uma relação entre o retardo τ e os parâmetros a, b e d. As curvas $\tau(a)$, $\tau(b)$ e $\tau(d)$ correspondem à região no espaço de parâmetros onde as soluções do sistema linear (3.1.5) são periódicas, uma região de transição de estabilidade, e por isso são denominadas fronteiras de estabilidade. Com essas curvas construiremos as cartas de estabilidade $\tau \times a$, $\tau \times b$ e $\tau \times d$, também conhecidas como diagramas de estabilidade. Para a elaboração dessas cartas examinaremos os intervalos em que cada variável está definida e determinaremos os ramos apropriados e as singularidades que ocorrem na função arco tangente da equação (3.3.5).

Para definir os intervalos adequados do parâmetro a, rearranjando a equação (3.3.3) na forma

$$a^2 = \frac{d^2 - (\omega^2 - b)^2}{4\omega^2}, \tag{3.3.6}$$

vamos conseguir alguns resultados importantes.

Por um lado, temos que $|\omega^2 - b| \leq |d|$, para $\omega^2 > b$ teremos também $\omega \leq \sqrt{b + |d|}$, e para $\omega^2 < b$ vem que também $\omega \geq \sqrt{b - |d|}$. Com isso, determinamos o intervalo de ω para o caso $b > |d|$:

$$\sqrt{b - |d|} \leq \omega \leq \sqrt{b + |d|}, \tag{3.3.7}$$

onde os extremos correspondem ao caso $a = 0$. Por outro lado, tomando $a \neq 0$, podemos considerar a como uma função de ω e examinar a função

$$a(\omega) = \sqrt{\frac{d^2 - (\omega^2 - b)^2}{4\omega^2}}, \tag{3.3.8}$$

para obter o intervalo em que o parâmetro a está definido. Calculando a primeira derivada temos

$$a'(\omega) = \frac{(b^2 - d^2) - \omega^4}{4a(\omega)\omega^3}, \tag{3.3.9}$$

logo, $a'(\omega^*) = 0 \Leftrightarrow \omega^* = (b^2 - d^2)^{1/4}$. Observando que $a'(\omega) > 0$ se $\omega < \omega^*$ e que $a'(\omega) < 0$ se $\omega > \omega^*$, concluímos que ω^* é o ponto de máximo da função $a(\omega)$ com ω no intervalo (3.3.7). Com o resultado $a(\omega^*) = \sqrt{b - \sqrt{b^2 - d^2}}/\sqrt{2}$, e definindo

$$a_{\max} \equiv \frac{\sqrt{b - \sqrt{b^2 - d^2}}}{\sqrt{2}}, \tag{3.3.10}$$

limitamos, para $b > |d|$, o intervalo de a em[2]:

$$0 \leq a \leq a_{\max}. \tag{3.3.11}$$

Já para o caso $b < |d|$, a equação (3.3.4) mostra que existe apenas a frequência ω_+ e que o parâmetro a pode assumir qualquer valor não negativo.

Agora estamos em condições de determinar o quadrante em que a função $\tan(\omega\tau)$ utilizada para obter a equação (3.3.5) está definida. Com esse intuito vamos definir previamente os seguintes intervalos:

$$\mathcal{Q}_n \equiv \left[(4j + n - 1)\frac{\pi}{2}, (4j + n)\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_{nm} \equiv \mathcal{Q}_n \cup \mathcal{Q}_m, \tag{3.3.12}$$

para $j \in \mathbb{N}$ e $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Sabemos que ω pode tomar dois valores distintos, ω_+ e ω_-. Da equação (3.3.2b) vemos que $\operatorname{sen}(\omega\tau)$ é não negativo para a retroalimentação negativa $(d < 0)$, e não positivo para a retroalimentação positiva $(d > 0)$; logo $\omega\tau \in \mathcal{Q}_{12}$ para $d < 0$, e $\omega\tau \in \mathcal{Q}_{34}$ para $d > 0$. Além disso, de (3.3.2a) vem que $\cos(\omega\tau)$ deve ter o mesmo sinal que $b - \omega^2$ para a retroalimentação positiva e o mesmo sinal de $\omega^2 - b$ para a retroalimentação negativa. E quando ω varia de $\sqrt{b - |d|}$ a $\sqrt{b + |d|}$, a cresce de zero a $a_{\max}$ e então decai a zero novamente, e $\omega^2 - b$ muda de

[2]Esse intervalo também é obtido para o caso $b/|d| > 1$ impondo diretamente que as soluções $\omega_\pm$ dadas pela equação (3.3.4) sejam reais através de: $(b - 2a^2) \pm \sqrt{(b - 2a^2)^2 + (d^2 - b^2)} > 0$ e $4a^4 - 4ba^2 + d^2 > 0$.

sinal em $\omega = \sqrt{b}$, que de acordo com a equação (3.3.6), corresponde ao valor intermediário $a = |d|/(2\sqrt{b})$, que vamos denotar por

$$a_{\text{sing}} \equiv \frac{|d|}{2\sqrt{b}}. \tag{3.3.13}$$

Note que existe apenas a singularidade $\omega_+^2 - b = 0$ na função arco tangente da equação (3.3.5), que ocorre quando $a = a_{\text{sing}}$, justificando a notação, singular. Ora, da equação (3.3.4) temos

$$\omega_\pm^2 - b = -2a^2 \pm \sqrt{(b - 2a^2)^2 + (d^2 - b^2)}, \tag{3.3.14}$$

de onde segue-se que $\omega_-^2 - b \leq 0$. E, da imposição $\sqrt{(b - 2a^2)^2 + (d^2 - b^2)} \geq 2a^2$, obtemos que $a \geq |d|/(2\sqrt{b})$, logo, $\omega_+^2 - b \geq 0$ para $a \geq a_{\text{sing}}$, e $\omega_+^2 - b \leq 0$ para $a \leq a_{\text{sing}}$.

Assim, para a retroalimentação negativa $\cos(\omega_-\tau)$ é não positivo, e $\cos(\omega_+\tau)$ é não positivo se a pertence ao intervalo $[0, a_{\text{sing}}]$ e não negativo se a pertence ao intervalo $[a_{\text{sing}}, a_{\max}]$. Para a retroalimentação positiva $\cos(\omega_-\tau)$ é não negativo, e $\cos(\omega_+\tau)$ é não negativo se a pertence ao intervalo $[0, a_{\text{sing}}]$ e não positivo se a pertence ao intervalo $[a_{\text{sing}}, a_{\max}]$. Reescrevendo esses resultados usando os intervalos apropriados dos argumentos de $\cos(\omega_\pm\tau)$ vem que para $d < 0$ o argumento $\omega_-\tau \in \mathcal{Q}_{23}$, e $\omega_+\tau \in \mathcal{Q}_{23}$ se $a \in [0, a_{\text{sing}}]$ e pertence ao intervalo $\mathcal{Q}_{14}$ se $a \in [a_{\text{sing}}, a_{\max}]$. Para $d > 0$ o argumento $\omega_-\tau \in \mathcal{Q}_{14}$, e $\omega_+\tau \in \mathcal{Q}_{14}$ se $a \in [0, a_{\text{sing}}]$ e pertence ao intervalo $\mathcal{Q}_{23}$ se $a \in [a_{\text{sing}}, a_{\max}]$.

Reunindo os resultados encontrados para os intervalos apropriados dos argumentos $\omega_\pm\tau$ de $\cos(\omega_\pm\tau)$ e $\operatorname{sen}(\omega_\pm\tau)$ determinam-se os quadrantes apropriados para a função $\tan(\omega_\pm\tau)$ para os casos de retroalimentação positiva e negativa, conforme segue resumido na Tabela 3.1. E com isso, ficam definidos os ramos apropriados para a função arco tangente da equação (3.3.5) para a retroalimentação negativa e positiva. Portanto, o retardo, que em princípio seria dado por (3.3.5), na verdade fica separado nos seguintes casos:

- Para retroalimentação negativa $d < 0$, com $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \tau_{j,-} = \dfrac{1}{\omega_-}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{2a\omega_-}{\omega_-^2 - b}\right) + 2\pi j + \pi\right], \text{ se } a \in [0, a_{\max}], \\ \tau_{j,+} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_+}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{2a\omega_+}{\omega_+^2 - b}\right) + 2\pi j\right], \text{ se } a \in [0, a_{\text{sing}}], \\ \dfrac{1}{\omega_+}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{2a\omega_+}{\omega_+^2 - b}\right) + 2\pi j + \pi\right], \text{ se } a \in [a_{\text{sing}}, a_{\max}]. \end{cases} \end{cases} \tag{3.3.15}$$

- Para retroalimentação positiva $d > 0$, com $j \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} \tau_{j,-} = \dfrac{1}{\omega_-}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{2a\omega_-}{\omega_-^2 - b}\right) + 2\pi j + 2\pi\right], \text{ se } a \in [0, a_{\max}], \\ \tau_{j,+} = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_+}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{2a\omega_+}{\omega_+^2 - b}\right) + 2\pi j + \pi\right], \text{ se } a \in [0, a_{\text{sing}}], \\ \dfrac{1}{\omega_+}\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{2a\omega_+}{\omega_+^2 - b}\right) + 2\pi j + 2\pi\right], \text{ se } a \in [a_{\text{sing}}, a_{\max}]. \end{cases} \end{cases} \tag{3.3.16}$$

Intervalo de a	Quadrante para $(d < 0)$	Quadrante para $(d > 0)$
$[0, a_{\max}]$	$\tan(\omega_-\tau) \leq 0$ e $\omega_-\tau \in \mathcal{Q}_2$	$\tan(\omega_-\tau) \leq 0$ e $\omega_-\tau \in \mathcal{Q}_4$
$[0, a_{\text{sing}}]$	$\tan(\omega_+\tau) \leq 0$ e $\omega_+\tau \in \mathcal{Q}_2$	$\tan(\omega_+\tau) \leq 0$ e $\omega_+\tau \in \mathcal{Q}_4$
$[a_{\text{sing}}, a_{\max}]$	$\tan(\omega_+\tau) \geq 0$ e $\omega_+\tau \in \mathcal{Q}_1$	$\tan(\omega_+\tau) \geq 0$ e $\omega_+\tau \in \mathcal{Q}_3$

Tabela 3.1: Definição dos quadrantes para o argumento da função $\tan(\omega_\pm\tau)$ para os casos de retroalimentação positiva e negativa com as funções $\text{sen}(\omega_\pm\tau)$ e $\cos(\omega_\pm\tau)$ dadas pelas equações (3.3.2b) e (3.3.2a).

Dessa forma, definimos os valores específicos do retardo pelas equações (3.3.15) e (3.3.15). Agora, vamos determinar as condições de existência para as frequências $\omega_\pm$ dadas pela equação (3.3.8). A razão $b/|d|$ pode ser identificada com o ganho G da retroalimentação[35] pela relação

$$G = \left(\frac{b}{|d|}\right)^{-1} \tag{3.3.17}$$

e, como veremos a seguir, ela desempenha um papel importante na análise da estabilidade local.

Para $b/|d| < 1$, temos $(d^2 - b^2) > 0$, e vemos pela equação (3.3.4) que a equação (3.3.3) terá apenas a solução ω_+, independente do valor de a (veja a Figura 3.3.2 (a)). O fato de existir apenas uma solução de (3.3.3) para $b/|d| < 1$ pode ser visto mais facilmente separando os casos de retroalimentação positiva com $b/d < 1$ e negativa com $b/d > -1$, e observando que as parábolas iniciariam dentro dos círculos unitários das Figuras 3.3.1 (a) e (b), respectivamente.

Já para o caso $b/|d| > 1$ temos $(d^2 - b^2) < 0$, e pela equação (3.3.4) vemos que (3.3.3) terá duas raízes positivas distintas somente se $|b - 2a^2| > \sqrt{b^2 - d^2}$ e $b > 2a^2$, ou seja, se $b - 2a^2 > \sqrt{b^2 - d^2}$, de onde obtemos a desigualdade $a < a_{\max}$. Em particular, para $a = a_{\max}$ a equação (3.3.3) terá apenas a raiz $\omega = (b^2 - d^2)^{1/4}$ de multiplicidade dois (veja as Figuras 3.3.2 (b)-(d)), nesse caso as parábolas estarão nas fronteiras entre as Regiões I^+ e II^+, e I^- e II^-. E no caso $a > a_{\max}$ a equação (3.3.3) não terá raiz positiva.

Agora, vamos determinar as condições que o parâmetro a deve satisfazer nas Regiões $\text{I}^\pm$, $\text{II}^\pm$ e $\text{III}^\pm$ das Figuras 3.3.1 (a) e (b). De acordo com a equação (3.3.1), para encontrar o valor de a

no qual as parábolas estão nas fronteiras entre as Regiões II^+ e III^+, e II^- e III^- devemos impor que as partes reais dos dois lados da equação (3.3.1) sejam nulas e que as partes complexas sejam iguais a 1 para a retroalimentação positiva, e iguais a -1 para a retroalimentação negativa, ou seja:

$$\frac{b-\omega^2}{d} = \cos(\omega\tau) = 0, \quad \text{e} \quad \frac{2a\omega}{d} = -\operatorname{sen}(\omega\tau) = \pm 1, \quad \Rightarrow \tag{3.3.18}$$

$$\omega = \sqrt{b} = \frac{|d|}{2a} = \begin{cases} \dfrac{(4n+1)\pi}{2\tau}, & \text{se} \quad d > 0 \\ \dfrac{(4n+3)\pi}{2\tau}, & \text{se} \quad d < 0 \end{cases}, \quad \text{onde} \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.3.19}$$

onde $+1$ corresponde ao caso de retroalimentação positiva e -1 ao de negativa. Portanto, $a = a_{\text{sing}}$ e as condições que o parâmetro a terá que satisfazer para cada Região serão:

$$a_{\max} < a, \qquad \text{Regiões } \mathrm{I}^{\pm}. \tag{3.3.20}$$

$$a_{\text{sing}} < a < a_{\max}, \qquad \text{Regiões } \mathrm{II}^{\pm}, \tag{3.3.21}$$

$$0 < a < a_{\text{sing}}, \qquad \text{Regiões } \mathrm{III}^{\pm}. \tag{3.3.22}$$

Em suma, a existência das soluções para a equação (3.3.3) em função do ganho da retroalimentação $G = |d|/b$ pode ser dividida nos casos onde G é menor, igual ou maior do que um. Para $G > 1$ e todo a existirá apenas a solução ω_+. Para $G = 1$ a raiz ω_+ existirá para todo a sendo que é nula para $a \geq \sqrt{b/2}$ e a raiz ω_- será nula para qualquer a. Para $G < 1$ existirão duas raízes se $a < a_{\max}$, apenas a raiz $\omega = (b^2 - d^2)^{1/4}$ se $a = a_{\max}$, e no caso $a > \sqrt{b/2} > a_{\max}$ não existirá solução.

No restante desta seção vamos construir e analisar os diagramas de estabilidade $\tau \times a$, $\tau \times b$ e $\tau \times d$ na respectiva ordem.

Antes de iniciar a construção e análise das cartas de estabilidade vamos examinar o que ocorre com a estabilidade de um ponto de equilíbrio quando aumentamos o parâmetro τ a partir de $\tau = 0$. Para isso, vamos calcular a derivada do autovalor λ com relação a τ e extrair a parte real dessa derivada no ponto de transição de estabilidade $\lambda = \mathrm{i}\omega$. Derivando a equação característica (3.1.7) com respeito a τ tem-se:

$$2\lambda\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} + 2a\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} = -d\left(\lambda + \tau\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}, \tag{3.3.23}$$

$$(2\lambda + 2a + d\tau\mathrm{e}^{-\lambda\tau})\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} = -d\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\tau}, \tag{3.3.24}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau} = \frac{-d\lambda}{d\tau + 2(a+\lambda)\mathrm{e}^{\lambda\tau}}. \tag{3.3.25}$$

Logo, na fronteira de estabilidade $\lambda = \mathrm{i}\omega$ vem que

$$\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega} = \frac{-\mathrm{i}d\omega}{d\tau + 2(a+\mathrm{i}\omega)[\cos(\omega\tau) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\omega\tau)]}, \tag{3.3.26}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega} = \frac{-\mathrm{i}d\omega}{[d\tau + 2a\cos(\omega\tau) - 2\omega\,\mathrm{sen}(\omega\tau)] + \mathrm{i}2[a\,\mathrm{sen}(\omega\tau) + \omega\cos(\omega\tau)]}, \tag{3.3.27}$$

de onde tomamos a parte real

$$\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega}\right\} = \frac{-2d\omega[a\,\mathrm{sen}(\omega\tau)+\omega\cos(\omega\tau)]}{[d\tau+2a\cos(\omega\tau)-2\omega\,\mathrm{sen}(\omega\tau)]^2+4[a\,\mathrm{sen}(\omega\tau)+\omega\cos(\omega\tau)]^2}, \tag{3.3.28}$$

e utilizando as relações (3.3.2b) e (3.3.2a) obtemos que

$$\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega}\right\} = \frac{2d^2\omega^2(\omega^2 + 2a^2 - b)}{[d^2\tau + 2a(b-\omega^2) + 4\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega\tau)]^2 + 4\omega^2[\omega^2 - b + 2a^2]^2}. \tag{3.3.29}$$

Por outro lado, a equação (3.3.4) fornece que $\omega_\pm^2 + 2a^2 - b = \pm\sqrt{(b-2a^2)^2 + (d^2-b^2)}$. Portanto, tomando o sinal da equação (3.3.29) para $\omega = \pm\omega_\pm$ tem-se que

$$\mathrm{sgn}\left(\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\lambda=\pm\mathrm{i}\omega_+}\right\}\right) = 1, \quad \mathrm{sgn}\left(\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\lambda=\pm\mathrm{i}\omega_-}\right\}\right) = -1. \tag{3.3.30}$$

Esses sinais mostram que, conforme aumentamos o tempo de retardo, quando o retardo atinge o valor τ_+ o par de autovalores cruza o eixo imaginário em $\lambda = \pm\mathrm{i}\omega_+$ da esquerda para a direita, e quando o retardo atinge o valor τ_- dado pela equação (3.3.5) o par de autovalores complexo-conjugados volta a cruzar o eixo imaginário, porém, agora cruza em $\lambda = \pm\mathrm{i}\omega_-$ e da direita para a esquerda. Em τ_- espera-se que ocorra uma bifurcação de Hopf subcrítica, gerando um ciclo instável, e em τ_+ espera-se que ocorra uma bifurcação de Hopf supercrítica, gerando um ciclo limite estável. Esses resultados serão usados para determinar a estabilidade das regiões das cartas de estabilidade.

Com o intuito de determinar a estabilidade das regiões das cartas de estabilidade $\tau \times a$ vamos avaliar o sinal da parte real da derivada do autovalor com relação ao parâmetro a nos pontos $\lambda = \pm\mathrm{i}\omega_\pm$. Derivando a equação característica (3.1.7) com relação ao parâmetro a obtém-se que

$$2\lambda\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a} + 2\lambda + 2a\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a} = -d\tau\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a}\mathrm{e}^{-\lambda\tau}, \tag{3.3.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a} = \frac{-2\lambda}{2(a+\lambda) + d\tau\mathrm{e}^{-\lambda\tau}}. \tag{3.3.32}$$

E na fronteira de estabilidade $\lambda = \mathrm{i}\omega$ temos

$$\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega} = \frac{-\mathrm{i}2\omega}{[2a + d\tau\cos(\omega\tau)] + \mathrm{i}[2\omega - d\tau\,\mathrm{sen}(\omega\tau)]}, \tag{3.3.33}$$

tomando a parte real

$$\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega}\right\} = \frac{-2\omega[2\omega - d\tau\,\mathrm{sen}(\omega\tau)]}{[2a + d\tau\cos(\omega\tau)]^2 + [2\omega - d\tau\,\mathrm{sen}(\omega\tau)]^2}, \tag{3.3.34}$$

e utilizando novamente as relações (3.3.2b) e (3.3.2a) obtemos que

$$\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega}\right\} = \frac{-4\omega^2(1 + a\tau)}{[2a + \tau(b - \omega^2)]^2 + 4\omega^2(1 + a\tau)^2}, \tag{3.3.35}$$

logo

$$\mathrm{sgn}\left(\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}a}\right|_{\lambda=\pm\mathrm{i}\omega_\pm}\right\}\right) = -1. \tag{3.3.36}$$

Portanto, conforme aumentamos o coeficiente de amortecimento a, os dois pares de autovalores complexo-conjugados cruzam o eixo imaginário em $\pm\mathrm{i}\omega_\pm$ da direita para a esquerda, de forma que sempre existe um valor de a tal que o ponto fixo é assintoticamente estável. Sendo assim, nos diagramas da Figura 3.3.2 os valores de parâmetros para os quais o equilíbrio é assintoticamente estável ficam à direita da fronteira de estabilidade, como se espera, na direção em que o coeficiente de amortecimento a cresce. Para a retroalimentação negativa esse resultado é corroborado quando examinamos a consequência dos sinais da equação (3.3.30). Para a retroalimentação negativa e positiva a estabilidade sobre o eixo a da carta de estabilidade prevista pelos autovalores dados pela equação (3.1.8) concordam com esse resultado[3]. Entretanto, para a retroalimentação positiva com $d > b$ vimos na Proposição 3.2.1 que o ponto fixo será instável para qualquer $a > 0$.

Nesse momento, temos todas as informações necessárias para construir as curvas $\tau(a)$ das cartas de estabilidade $\tau \times a$ e determinar as regiões de estabilidade e instabilidade. Na Figura 3.3.2 exibimos quatro desses diagramas para os casos $\alpha < 0$, logo, nos quatro casos existe apenas o ponto de equilíbrio $x^* = 0$. Nesses diagramas podemos observar que para o caso $|d|/b < 1$ existem valores de a tais que, aumentando o retardo τ, ocorrem várias trocas de estabilidade; e para os casos onde $|d|/b > 1$, independente do valor de a, aumentando o retardo τ, ocorre apenas uma troca de estabilidade.

Dados os parâmetros b e α, vimos na Seção 3.1 que para $b > \alpha$ o único ponto fixo é a origem $x_0^* = 0$, enquanto que para $b < \alpha$ existem três pontos de equilíbrio distintos, a origem $x_0^* = 0$ e os pontos simétricos $x_-^* = -x_+^* \neq 0$. O parâmetro de linearização d será dado por $d = \alpha \equiv d_0$ na origem x^*, e por $d = \alpha\sec^2(\alpha x_\pm^*) \equiv d_\pm$ nos pontos simétricos $x_\pm^*$. Desse modo, para um dado valor de d uma carta de estabilidade $\tau \times a$ pode determinar a estabilidade da origem do caso onde $d = \alpha$, e a estabilidade dos pontos simétricos no caso $d = \alpha\sec^2(\alpha x_\pm^*)$. Nas cartas de estabilidade apresentaremos apenas os parâmetros d e b, mas nos casos em que $d < b$ pode-se calcular o valor de α e os pontos fixos $x_\pm^*$ tomando $d = d_\pm$ e resolvendo o sistema de equações

[3]Exceto para a origem $(a, \tau) = (0, 0)$ no caso da retroalimentação positiva com $d < b$, onde a equação (3.1.8) prevê que o ponto fixo será neutramente estável.

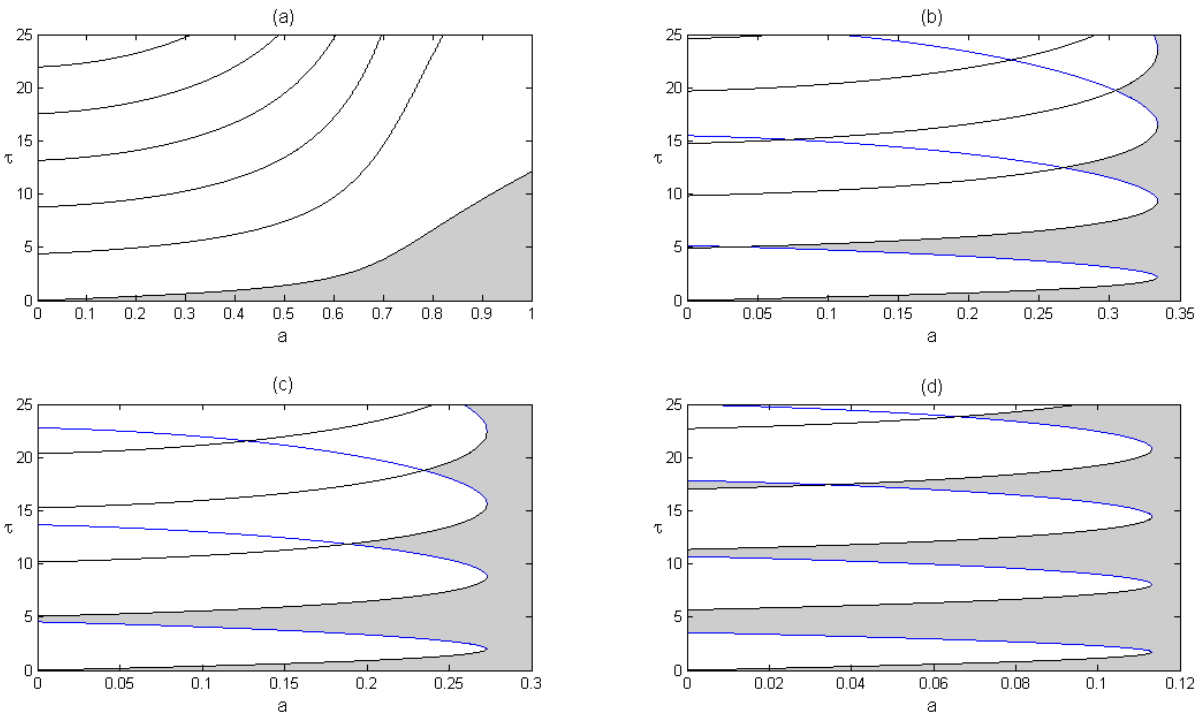

Figura 3.3.2: Diagramas de estabilidade $\tau \times a$ para j de 0 a 5 com os ramos $\tau_{j,+}$ (preto) e $\tau_{j,-}$ (azul) para $b = 1$ e: (a) $d = -1{,}05$, (b) $d = -0{,}63$, (c) $d = -0{,}525$ e (d) $d = -0{,}225$. O ponto fixo x_0^* é assintoticamente estável na região em cinza e instável nas outras regiões. A escala vertical é a mesma para todos os gráficos, mas note que as escalas horizontais são distintas.

transcendentais

$$\begin{cases} d_\pm = \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha x_\pm^*), \\ b x_\pm^* = \tanh(\alpha x_\pm^*). \end{cases} \tag{3.3.37}$$

Por exemplo, considere o caso da Figura 3.3.2 (b) com retroalimentação oposta, $b = 1$ e $d = 0{,}63$. Tomando $d_\pm = d$ e resolvendo o sistema (3.3.37) numericamente tem-se $\alpha = 1{,}24061577$ e $x_\pm^* = \pm 0{,}70156147$. Logo, para $b = 1$ e $\alpha = 1{,}24061577$ tem-se $d_\pm = 0{,}63$ e $d_0 = 1{,}24061577$. Utilizando esse caso e o caso correspondente à Figura 3.3.2 (a), onde $b = 1$ e $\alpha = 1{,}05$ fornecem $x_\pm^* = \pm - 0{,}37070573$, $d_\pm = 0{,}90570612$ e $d_0 = 1{,}05$, construímos os diagramas da Figura 3.3.3. Nos casos (a) e (c) o ponto fixo $x_0^* = 0$ é instável em qualquer região, enquanto nos casos (b) e (d) os pontos fixos $x_\pm^* = \pm 0{,}3707$ serão estáveis na região em cinza e instáveis nas demais regiões.

Quando mantemos b e d fixos e variamos τ e/ou a vemos que nos diagramas $\tau \times a$ podem ocorrer três tipos de bifurcações de Hopf: a subcrítica, a supercrítica e a dupla. Essas três ocorrências estão ilustradas na Figura 3.3.4 para o caso em que mantemos o retardo τ fixo e variamos o coeficiente de amortecimento a. Considere apenas as regiões das fronteiras de estabilidade onde $\omega_\pm > 0$. A bifurcação de Hopf supercrítica (subcrítica) ocorre quando a fronteira de estabilidade é cruzada saindo da região de estabilidade (instabilidade) e entrando na região de instabilidade (estabilidade), gerando um ciclo limite estável (instável) no retrato de fase. A bifurcação de Hopf dupla ocorre quando passamos por um ponto onde se cruzam dois

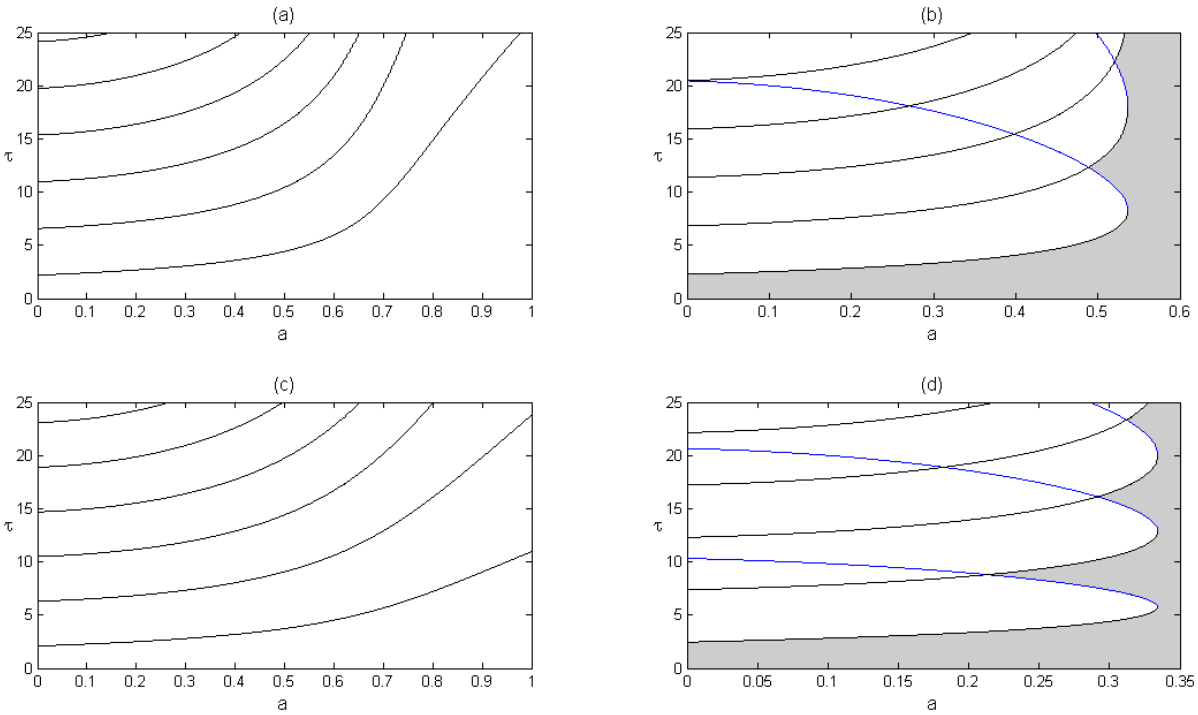

Figura 3.3.3: Diagramas de estabilidade $\tau \times a$ para j de 0 a 5 com os ramos $\tau_{j,+}$ (preto) e $\tau_{j,-}$ (azul) para $b = 1$ e: para $\alpha = 1{,}05$ tem-se (a) $d = 1{,}05 \equiv d_0$ e (b) $d = 0{,}90570612 \equiv d_\pm$; e para $\alpha = 1{,}24061577$ tem-se (c) $d = 1{,}24061577 \equiv d_0$ e (d) $d = 0{,}63 \equiv d_\pm$. Nos casos (a) e (c) o ponto fixo $x_0^* = 0$ é instável em qualquer região, enquanto nos casos (b) e (d) os pontos fixos $x_\pm^* = \pm 0{,}3707$ serão estáveis na região em cinza e instáveis nas demais regiões.

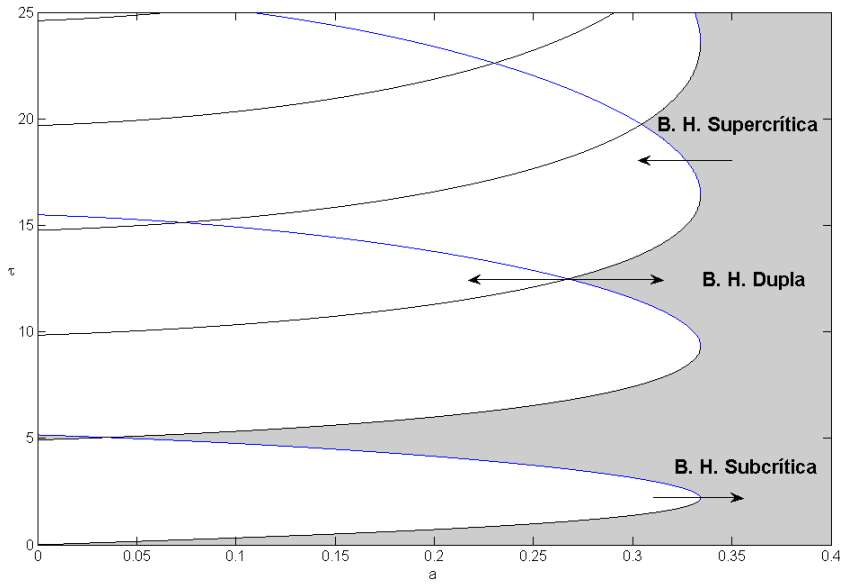

Figura 3.3.4: Carta de estabilidade $\tau \times a$ para $b = 1$ e $d = -0{,}63$ com as setas indicando a direção em que ocorrem as Bifurcações de Hopf Subcrítica, Supercrítica e Dupla. A origem x_0^* é assintoticamente estável na região em cinza e assintoticamente instável nas demais regiões.

ramos das fronteiras de estabilidade; e se atravessarmos as fronteiras de estabilidade saindo das regiões de estabilidade (instabilidade) e entrando nas regiões de instabilidade (estabilidade), pode-se esperar que apareçam ciclos limite estáveis e/ou instáveis no espaço de fase. Devido à ocorrência dessas bifurcações de Hopf nas fronteiras de estabilidades, elas também são conhecidas como linhas de bifurcação de Hopf.

Tomando $\alpha = d$ foi verificado, por simulações numéricas, que em todas as regiões das cartas de estabilidade da Figura 3.3.2 onde o equilíbrio é instável existem ciclos limite estáveis. Nas cartas de estabilidade das Figuras 3.3.3 (b) e (d) foram verificados ciclos limite estáveis em todas as regiões e espera-se que existam ciclos limite instáveis nas regiões em cinza. Nas regiões em cinza das Figuras 3.3.3 (b) e (d) a origem x_0^* é instável, os pontos fixos simétricos $x_\pm^*$ são estáveis e existe um ciclo limite estável entre a origem e os pontos fixos $x_\pm^*$ e, por isso, espera-se que exista um ciclo limite instável que se localiza numa região do espaço de fase tal que, a região interna ao ciclo limite instável contém o ciclo limite estável, e a região externa ao ciclo limite instável contém os pontos fixos $x_\pm^*$.

Agora, passamos a considerar os parâmetros a e d fixos e b como uma variável. Usando as equações (3.3.4) e (3.3.5) vamos determinar os intervalos em que b está definido para cada caso e, em seguida, construir e analisar o diagrama de estabilidade $\tau \times b$.

Pela equação (3.3.4) vemos que para o caso $b - 2a^2 < 0$ a solução ω_+ existirá somente se $b < 2a^2$, $b < |d|$ e $b < a^2 + d^2/4a^2$, e a solução ω_- não existirá para qualquer valor de b. E para o caso $b - 2a^2 > 0$ a solução ω_+ existirá apenas se $2a^2 < b < a^2 + d^2/4a^2$ e a solução ω_- existirá somente se $b > 2a^2$, $b > |d|$ e $b < a^2 + d^2/4a^2$. Além disso, note que a desigualdade $|d| < a^2 + d^2/4a^2$ é satisfeita para quaisquer a e d, que $2a^2 < a^2 + d^2/4a^2 \Leftrightarrow 2a^2 < |d|$ e que $2a^2 > a^2 + d^2/4a^2 \Leftrightarrow 2a^2 > |d|$. Dessa forma, obtemos que dados os parâmetros a e d o intervalo de b é definido como segue: para ω_+ no caso $|d| \leq 2a^2$ teremos $0 \leq b \leq |d|$ e no caso $|d| > 2a^2$ obtemos $0 \leq b \leq a^2 + d^2/4a^2$, para ω_- no caso $|d| > 2a^2$ teremos $2a^2 < b < a^2 + d^2/4a^2$. Outra informação importante para a construção do diagrama de estabilidade $\tau \times b$ é o valor de b em que ocorre a singularidade da função arco tangente da equação (3.3.5), dado por $b_{\text{sing}} = d^2/4a^2$. Baseados nessas informações construímos as curvas $\tau(b)$ dos diagramas de estabilidade $\tau \times b$ exibidos na Figura 3.3.5.

Para determinar a estabilidade das regiões das cartas de estabilidade $\tau \times b$ vamos avaliar o sinal da parte real da derivada do autovalor com relação ao parâmetro b nos pontos $\lambda = \pm i\omega_\pm$. Derivando a equação característica (3.1.7) em relação ao parâmetro b tem-se que

$$2\frac{d\lambda}{db}\lambda + 2a\frac{d\lambda}{db} + 1 = -d\tau\frac{d\lambda}{da}e^{-\lambda\tau}, \tag{3.3.38}$$

$$\frac{d\lambda}{db} = \frac{-1}{2(a+\lambda) + d\tau e^{-\lambda\tau}}. \tag{3.3.39}$$

Na fronteira de estabilidade $\lambda = i\omega$ vem que

$$\left.\frac{d\lambda}{db}\right|_{\lambda=i\omega} = \frac{-1}{[2a + d\tau\cos(\omega\tau)] + i[2\omega - d\tau\,\mathrm{sen}(\omega\tau)]}, \tag{3.3.40}$$

tomando a parte real novamente

$$\operatorname{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}b}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega}\right\} = \frac{-[2a + d\tau\cos(\omega\tau)]}{[2a + d\tau\cos(\omega\tau)]^2 + [2\omega - d\tau\operatorname{sen}(\omega\tau)]^2}, \tag{3.3.41}$$

e utilizando as relações (3.3.2b) e (3.3.2a) temos

$$\operatorname{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}b}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega}\right\} = \frac{\tau(\omega^2 - b) - 2a}{[\tau(\omega^2 - b) - 2a]^2 + 4\omega^2(1 + a\tau)^2}. \tag{3.3.42}$$

Por outro lado, a equação (3.3.4) fornece que $\omega_\pm^2 - b = -2a^2 \pm \sqrt{4a^4 - 4a^2b + d^2}$, logo

$$\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}b}\right|_{\lambda=\pm\mathrm{i}\omega_-}\right\}\right) = \operatorname{sgn}\left(\tau_{j,-}(\omega_-^2 - b) - 2a\right) = -1, \tag{3.3.43}$$

$$\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}b}\right|_{\lambda=\pm\mathrm{i}\omega_+}\right\}\right) = \operatorname{sgn}\left(\tau_{j,+}(\omega_+^2 - b) - 2a\right). \tag{3.3.44}$$

Desse modo, dados os parâmetros a e d pode-se calcular o sinal de (3.3.44) em função de b. É possível mostrar numericamente que o sinal de (3.3.44) é positivo se a derivada de $\tau_{j,+}$ com relação a b é negativa, e negativo se a derivada de $\tau_{j,+}$ com relação a b é positiva. No entanto, é possível obter alguns resultados analíticos com relação ao sinal da equação (3.3.44). Quando $b = b_{\text{sing}}$ temos $\omega_+^2 - b = 0$ e o sinal de (3.3.44) é negativo. Agora, supondo que $b \neq b_{\text{sing}}$ e reescrevendo a equação (3.3.44) na forma

$$\operatorname{sgn}\left(\operatorname{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}b}\right|_{\lambda=\pm\mathrm{i}\omega_+}\right\}\right) = \operatorname{sgn}\left(\omega_+^2 - b\right)\operatorname{sgn}\left(\tau_{j,+} - \frac{2a}{\omega_+^2 - b}\right). \tag{3.3.45}$$

teremos que analisar os dois sinais. Supondo que $\tau_{j,+} > 2a/(\omega_+^2 - b)$ e usando a equação (3.3.5) temos que

$$\frac{1}{\pm\omega_+}\left[\tan^{-1}\left(\frac{2a\omega_+}{\omega_+^2 - b}\right) + 2\pi j\right] > \frac{2a}{\omega_+^2 - b}, \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{3.3.46}$$

de onde vem que

$$\tan\left(\frac{2a\omega_+}{\omega_+^2 - b}\right) < \frac{\pm 2a\omega_+}{\omega_+^2 - b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2a\omega_+}{\omega_+^2 - b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_+^2 - b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad b > b_{\text{sing}}. \tag{3.3.47}$$

Do mesmo modo obtemos que $\tau_{j,+} < 2a/(\omega_+^2 - b) \quad \Leftrightarrow \quad \omega_+^2 - b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad b < b_{\text{sing}}$. Portanto, para b nas localidades de b_{sing} o sinal de (3.3.44) é negativo, eliminando a hipótese do sinal de (3.3.45) mudar em b_{sing}.

Reunindo os resultados referentes aos sinais das equações (3.3.43) e (3.3.44) determina-se a estabilidade das regiões dos diagramas $\tau \times b$. Esse resultado é corroborado quando examinamos a consequência dos sinais da equação (3.3.30). Para a retroalimentação negativa e positiva a estabilidade sobre o eixo b da carta de estabilidade, prevista pelos autovalores dados pela equação (3.1.8), também concorda com esse resultado. Todavia, pela Proposição

3.2.1 tem-se que o ponto fixo será instável em toda região com $d > b$. Combinando essas previsões determinamos por completo a estabilidade das regiões das cartas de estabilidade para a retroalimentação negativa, conforme na Figura 3.3.5, e para a retroalimentação positiva, como segue na Figura 3.3.6.

Nas cartas de estabilidade, para a retroalimentação negativa na Figura 3.3.5, e retroalimentação positiva na Figura 3.3.6, o ponto fixo é assintoticamente estável nas regiões em cinza e instável nas demais regiões. Nessas cartas de estabilidade observamos que, dependendo dos valores dos parâmetros a e d, quando mantemos o retardo τ fixo e variamos a constante elástica b podem ocorrer uma ou duas mudanças de estabilidade, e mantendo b fixo e variando τ pode ocorrer uma sequência de mudanças de estabilidade nos casos (c) e (d) das Figuras 3.3.5 e 3.3.6, onde $|d| < 2a^2$, e apenas uma ou nenhuma mudança de estabilidade para os casos (c) e (d) das Figuras 3.3.5 e 3.3.6, onde $|d| > 2a^2$. Por exemplo, no diagrama da Figura 3.3.5 (d) para $\tau = 2{,}61$ o ponto de equilíbrio é instável se $b < 6{,}743$, estável se $6{,}743 < b < 7{,}167$, instável novamente se $7{,}167 < b < 8{,}833$ e estável novamente se $b > 8{,}833$. Tomando $\alpha = d$, verificamos a existência de ciclos limite estáveis para o sistema não linear (3.1.1) em todas regiões de instabilidade de todas as cartas de estabilidade da Figura 3.3.5 e nas regiões de instabilidade com $b > d$ nas cartas das Figuras 3.3.6 (c) e (d).

Vimos na Seção 3.1 que para a retroalimentação negativa a origem x_0^* é o único ponto fixo, enquanto para a retroalimentação positiva a origem x_0^* é o único ponto fixo para $b > d$, e para $b < d$ existem os pontos fixos x_0^* e $x_\pm^*$. Logo, considerando $d = \alpha = d_0$ nas Figuras 3.3.5 e 3.3.6 as cartas de estabilidade fornecerão a estabilidade da origem x_0^*. E calculando os valores correspondentes $d_\pm = \alpha \sec^2(\alpha x_\pm^*)$ nas regiões das cartas de estabilidade para retroalimentação positiva com $b < d$, onde a origem é instável, verifica-se que os pontos fixos $x_\pm^*$ serão assintoticamente estáveis. Assim, tomando $\alpha = d$, nas regiões com $b < d$ a origem x_0^* é instável, os pontos fixos simétricos $x_\pm^*$ são estáveis e existe um ciclo limite estável entre a origem e os pontos fixos $x_\pm^*$ e, por isso, espera-se que exista um ciclo limite instável que se localiza numa região tal que, a região interna ao ciclo limite instável contém o ciclo limite estável, e a região externa ao ciclo limite instável contém os pontos fixos $x_\pm^*$.

Por fim, vamos considerar os parâmetros a e b fixos e d como uma variável, e utilizando as equações (3.3.4) e (3.3.5) vamos determinar os intervalos em que d está definido para cada caso e com isso construir os diagramas de estabilidade $\tau \times d$ para retroalimentação positiva e negativa.

Pela equação (3.3.4) vemos que para o caso onde $b > 2a^2$ a solução ω_+ existirá para todo $|d| > 2a\sqrt{b - a^2}$, e a solução ω_- existirá somente se $2a\sqrt{b - a^2} < |d| < b$. Haverá apenas a solução ω_+ para a situação $a^2 < b < 2a^2$ com $|d| > b$ e $|d| > 2a\sqrt{b - a^2}$, e para o caso $b < a^2$ com $|d| > b$. Para determinarmos os ramos adequados para a função arco tangente da equação (3.3.5) devemos encontrar o valor de $|d|$ em que ocorre a singularidade dessa função, ou seja, o valor tal que $\omega_\pm^2 - b = 0$. É direto que essa singularidade ocorrerá apenas para o caso $\omega_+^2 - b$, e quando $|d| = 2a\sqrt{b}$. Com base nessas informações construímos as curvas $\tau(d)$ dos diagramas de estabilidade $\tau \times d$ exibidos nas Figuras 3.3.7 e 3.3.8.

Com o objetivo de determinar a estabilidade das regiões das cartas de estabilidade $\tau \times d$ vamos avaliar o sinal da derivada da parte real do autovalor com relação ao parâmetro d nos pontos

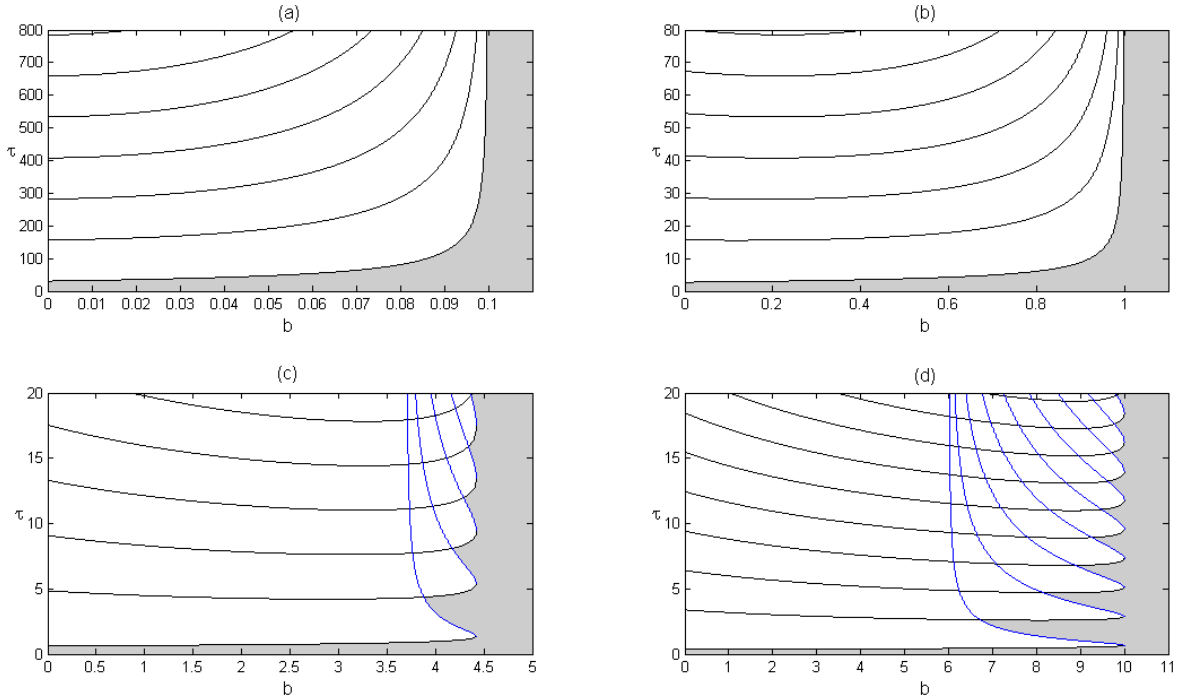

Figura 3.3.5: Diagramas de estabilidade $\tau \times b$ com j de 0 até 9 para os ramos $\tau_{j,+}$ (preto) e $\tau_{j,-}$ (azul) para $a = 1$ e: (a) $d = -0{,}1$, (b) $d = -1$, (c) $d = -3{,}7$ e (d) $d = -6$. O ponto fixo é assintoticamente estável para os parâmetros na região em cinza e instável nas demais regiões.

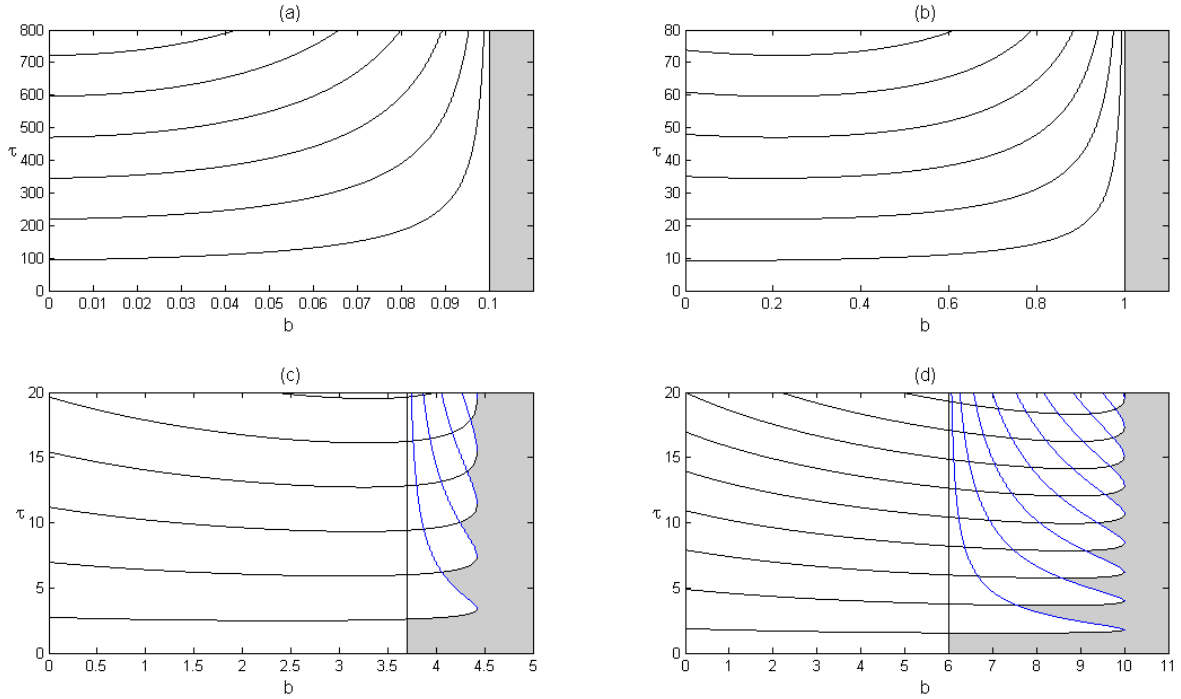

Figura 3.3.6: Diagramas de estabilidade $\tau \times b$ com j de 0 até 8 para os ramos $\tau_{j,+}$ (preto) e $\tau_{j,-}$ (azul) para $a = 1$ e: (a) $d = 0{,}1$, (b) $d = 1$, (c) $d = 3{,}7$ e (d) $d = 6$. O ponto fixo é assintoticamente estável para os parâmetros na região em cinza e instável nas demais regiões.

$\lambda = \pm \mathrm{i}\omega_{\pm}$. Derivando a equação característica (3.1.7) em relação ao parâmetro d chega-se em

$$2\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d}\lambda + 2a\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d} = \left(1 - d\tau\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d}\right)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}, \tag{3.3.48}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d} = \frac{1}{d\tau + 2(a+\lambda)\mathrm{e}^{\lambda\tau}}. \tag{3.3.49}$$

Na fronteira de estabilidade $\lambda = \mathrm{i}\omega$ temos

$$\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega} = \frac{1}{[d\tau + 2a\cos(\omega\tau) - 2\omega\,\mathrm{sen}(\omega\tau)] + \mathrm{i}2[a\,\mathrm{sen}(\omega\tau) + \omega\cos(\omega\tau)]}, \tag{3.3.50}$$

tomando a parte real

$$\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega}\right\} = \frac{[d\tau+2a\cos(\omega\tau)-2\omega\,\mathrm{sen}(\omega\tau)]}{[d\tau+2a\cos(\omega\tau)-2\omega\,\mathrm{sen}(\omega\tau)]^2+4[a\,\mathrm{sen}(\omega\tau)+\omega\cos(\omega\tau)]^2}, \tag{3.3.51}$$

e utilizando novamente as relações (3.3.2b) e (3.3.2a) chega-se em

$$\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d}\right|_{\lambda=\mathrm{i}\omega}\right\} = \frac{d[d^2\tau + 2a(b+\omega^2)]}{[d^2\tau + 2a(b+\omega^2)]^2 + 4\omega^2[\omega^2 - b + 2a^2]^2}, \tag{3.3.52}$$

logo

$$\mathrm{sgn}\left(\mathrm{Re}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}d}\right|_{\lambda=\pm\mathrm{i}\omega_{\pm}}\right\}\right) = \mathrm{sgn}(d). \tag{3.3.53}$$

Sendo assim, para a retroalimentação positiva $(d > 0)$ teremos um valor de d tal que um par de autovalores complexo-conjugados cruza o eixo imaginário da esquerda para a direita, e para a retroalimentação negativa $(d < 0)$ teremos um valor de d tal que o outro par de autovalores complexo-conjugados cruza o eixo imaginário da direita para a esquerda. Esse resultado é corroborado quando examinamos a consequência dos sinais da equação (3.3.30). Para a retroalimentação negativa e positiva a estabilidade sobre o eixo d da carta de estabilidade, prevista pelos autovalores dados pela equação (3.1.8), também concorda com esse resultado. No entanto, pela Proposição 3.2.1 tem-se que o ponto fixo será instável em toda região com $d > b$. Reunindo esses resultados determinamos por completo a estabilidade das regiões das cartas de estabilidade para a retroalimentação negativa na Figura 3.3.7 e para a retroalimentação positiva na Figura 3.3.8.

Nas cartas de estabilidade para a retroalimentação negativa da Figura 3.3.7 e retroalimentação positiva da Figura 3.3.8 o ponto fixo é assintoticamente estável nas regiões em cinza claro e instável nas demais regiões. Portanto, para certos valores de d fixos podemos variar τ e provocar uma sequência de mudanças de estabilidade nos casos (a) e (b) das Figuras 3.3.7 e 3.3.7, onde $b > 2a^2$, e apenas uma ou nenhuma mudança de estabilidade para os casos (c) e (d) das Figuras 3.3.7 e 3.3.8, onde $b < 2a^2$.

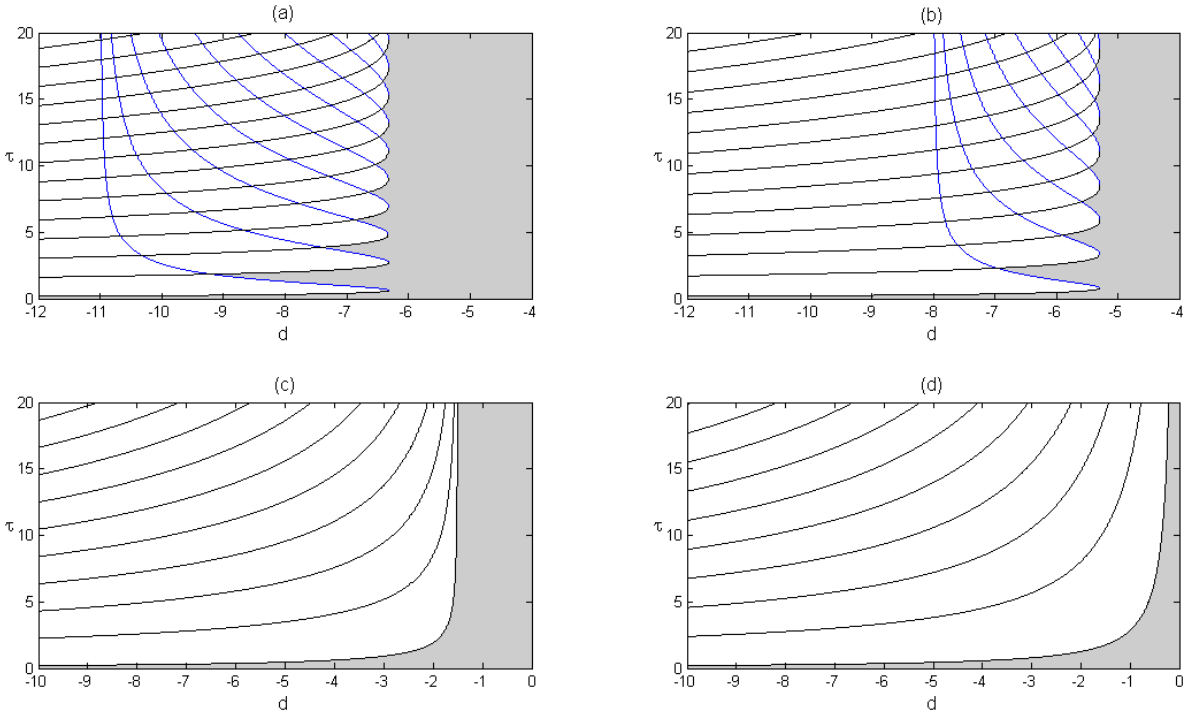

Figura 3.3.7: Diagramas de estabilidade $\tau \times d$ com j de 0 a 13 para os ramos $\tau_{j,+}$ (preto) e $\tau_{j,-}$ (azul) para $a = 1$ e: (a) $b = 11$, (b) $b = 8$, (c) $b = 1{,}5$ e (d) $b = 0{,}1$. Em todos o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável na região em cinza e instável nas demais regiões.

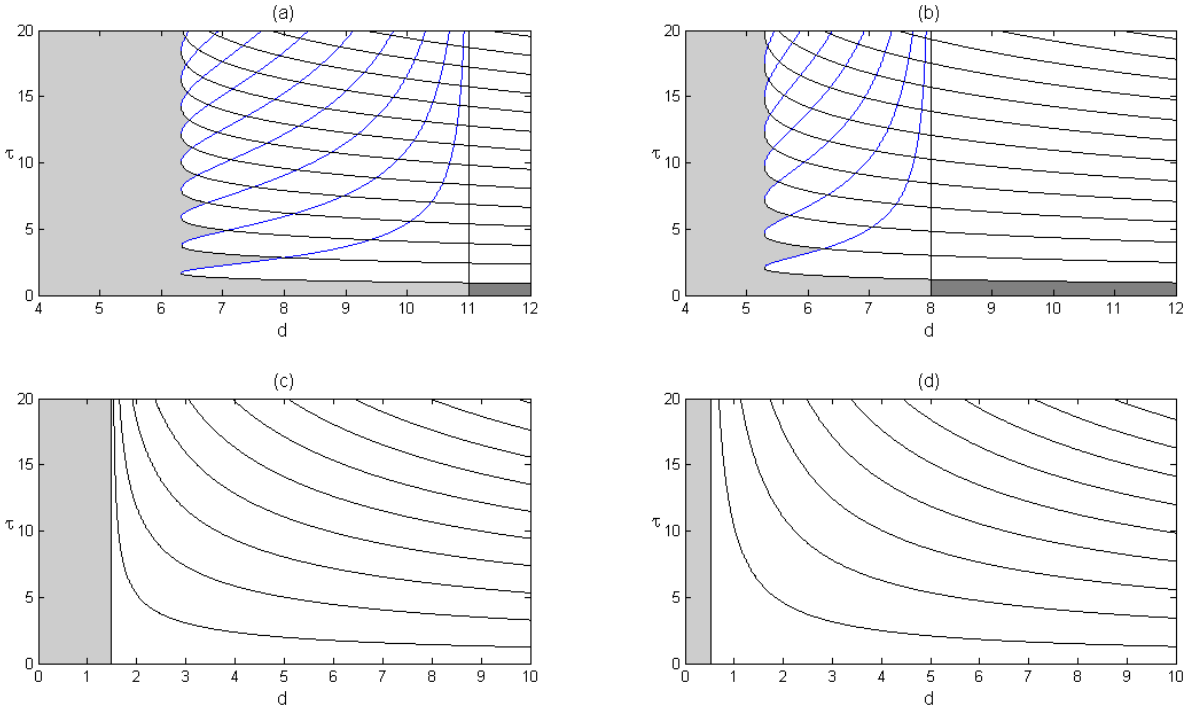

Figura 3.3.8: Diagramas de estabilidade $\tau \times d$ com j de 0 a 13 para os ramos $\tau_{j,+}$ (preto) e $\tau_{j,-}$ (azul) para $a = 1$ e: (a) $b = 11$, (b) $b = 8$, (c) $b = 1{,}5$ e (d) $b = 0{,}5$. As regiões em cinza claro são de estabilidade assintótica, e as demais de instabilidade.

Para a retroalimentação negativa a origem x_0^* é o único ponto fixo, ao passo que para a retroalimentação positiva a origem x_0^* é o único ponto fixo para $d < b$, e para $d > b$ existem os pontos fixos x_0^* e $x_\pm^*$. Por conseguinte, considerando $d = \alpha = d_0$ nas Figuras 3.3.7 e 3.3.8 as cartas de estabilidade fornecerão a estabilidade da origem x_0^*. Calculando os valores correspondentes $d_\pm = \alpha \sec^2(\alpha x_\pm^*)$ nas regiões das cartas de estabilidade para retroalimentação positiva com $b < d$, onde a origem é instável, verifica-se que os pontos fixos $x_\pm^*$ serão assintoticamente estáveis nas regiões em cinza escuro e instáveis nas regiões em branco. Sendo assim, nos casos (a) e (b) da Figuras 3.3.8, fixando o retardo τ e variando d ocorrerá a bifurcação de forquilha supercrítica em $d = b$, quando atravessamos a fronteira entre as regiões em cinza claro e cinza escuro. Novamente, tomado $\alpha = d$, verificamos a existência de ciclos limite estáveis para o sistema não linear (3.1.1) em todas regiões de instabilidade de todas as cartas de estabilidade da Figura 3.3.7 e nas regiões de instabilidade, em branco, das cartas das Figuras 3.3.8 (a) e (b).

Nesta seção construímos cartas de estabilidade bidimensionais que, além de determinar a estabilidade dos pontos fixos hiperbólicos, permitiram prever a ocorrência de alguns tipos de bifurcações de codimensão 1 e 2, e os pontos no espaço de parâmetros onde ocorrem essas bifurcações. Da mesma forma, espera-se que a construção de diagramas de estabilidade tridimensionais permita prever a ocorrência de bifurcações de codimensão 2 e 3, e os pontos no espaço de parâmetros onde ocorrem essas bifurcações.

A maioria das cartas de estabilidade construídas nesta seção contêm regiões de estabilidade, preenchidas na cor cinza, que tomam a forma característica do esboço de um pinheiro e, por isso, essas cartas de estabilidade são chamadas de diagramas de estabilidade "árvore de natal"[30, 31].

3.4 Espectro Discreto Limitado: autovalor com partes real e imaginária $\lambda = \gamma \pm \mathrm{i}\omega$

Vimos na Seção 3.3 que o espectro de autovalores é discreto e, no máximo, enumerável. Aqui vamos ver que, além disso, o espectro discreto de autovalores é limitado. Para isso, vamos obter os espectros de autovalores resolvendo um sistema bidimensional de equações transcendentais para γ e ω, e construir o diagrama de autovalores $\omega \times \gamma$.

Tomando $\lambda = \gamma + \mathrm{i}\omega$ a equação transcendental (3.1.7) fica:

$$(\gamma + \mathrm{i}\omega)^2 + 2a(\gamma + \mathrm{i}\omega) + b = d\mathrm{e}^{-(\gamma+\mathrm{i}\omega)\tau}, \tag{3.4.1}$$

$$(\gamma^2 + \mathrm{i}2\gamma\omega - \omega^2) + 2a(\gamma + \mathrm{i}\omega) + b = d\mathrm{e}^{-\gamma\tau}[\cos(\omega\tau) - \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(\omega\tau)]. \tag{3.4.2}$$

Separando as partes reais e imaginárias, tem-se:

$$d\,\mathrm{sen}(\omega\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau} = -2\omega(\gamma + a), \tag{3.4.3a}$$

$$d\cos(\omega\tau)\mathrm{e}^{-\gamma\tau} = \gamma(\gamma + 2a) + (b - \omega^2). \tag{3.4.3b}$$

As equações (3.4.3b) e (3.4.3a) são invariantes sob a transformação $\omega \to -\omega$, e podemos tomar $\omega \geq 0$, sem perda de generalidade. Dividindo a equação (3.4.3b) pela (3.4.3a) e usando o

mesmo raciocínio desenvolvido na Seção 3.3 segue-se que o retardo, em princípio, será:

$$\tau = \frac{1}{\omega}\left\{\tan^{-1}\left[\frac{2\omega(\gamma+a)}{(\omega^2-b)-\gamma(\gamma+2a)}\right]\right\}. \tag{3.4.4}$$

Para determinar o quadrante exato da função arco tangente para cada par (γ,ω) é necessário avaliar o sinal do numerador e do denominador de seu argumento, tanto para a retroalimentação negativa quanto para a positiva.

Elevando as equações (3.4.3b) e (3.4.3a) ao quadrado e somando-as obtemos que

$$\gamma^2(\gamma+2a)^2+2\gamma(\gamma+2a)(b-\omega^2)+(b-\omega^2)^2+4\omega^2(\gamma+a)^2 = d^2\mathrm{e}^{-2\gamma\tau}. \tag{3.4.5}$$

No entanto, um autovalor que satisfaz a relação (3.4.5) não necessariamente satisfaz o sistema de equações (3.4.3b) e (3.4.3a), enquanto que um autovalor que satisfaz esse sistema de equações, necessariamente satisfaz a equação (3.4.5). Ainda assim, veremos que o procedimento de somar as equações elevadas ao quadrado será útil. Para γ a equação transcendental (3.4.5) é semelhante à equação (3.2.1), só que ao invés de um polinômio de segundo grau do lado esquerdo temos um polinômio de quarto grau, logo, do mesmo modo que mostramos existir no máximo três raízes reais distintas para a equação (3.2.1) pode-se mostrar que existem no máximo cinco raízes reais γ distintas para a equação (3.4.5). Já para ω, a equação (3.4.5) é biquadrada e podemos encontrar sua solução reescrevendo-a na seguinte forma:

$$\gamma^2(\gamma+2a)^2+2b\gamma(\gamma+2a)-2(\gamma^2+2a\gamma)\omega^2+(\omega^4-2b\omega^2+b^2)+4\omega^2(\gamma+a)^2 = d^2\mathrm{e}^{-2\gamma\tau}, \tag{3.4.6}$$

$$\omega^4+2[2(\gamma+a)^2-(\gamma^2+2a\gamma)-b]\omega^2+[\gamma^2(\gamma+2a)^2+2b\gamma(\gamma+2a)+b^2-d^2\mathrm{e}^{-2\gamma\tau}] = 0, \tag{3.4.7}$$

$$\omega^4+2[(\gamma+a)^2+a^2-b]\omega^2+[\gamma^2(\gamma+2a)^2+2b\gamma(\gamma+2a)+b^2-d^2\mathrm{e}^{-2\gamma\tau}] = 0. \tag{3.4.8}$$

Agora, definindo as contantes

$$B = (\gamma+a)^2+a^2-b,$$

e

$$C = \gamma^2(\gamma+2a)^2+2b\gamma(\gamma+2a)+b^2-d^2\mathrm{e}^{-2\gamma\tau},$$

a equação (3.4.8) fica

$$\omega^4+2B\omega^2+C = 0, \tag{3.4.9}$$

cujas soluções são

$$\omega_\pm^2 = -B \pm \sqrt{B^2-C}, \tag{3.4.10}$$

que juntamente com

$$\begin{aligned} B^2 &= (b-a^2)^2 + 2(a^2-b)(\gamma^2+2\gamma a+a^2) + (\gamma^4+4\gamma^3 a+6\gamma^2 a^2+4\gamma a^3+a^4) \\ &= \gamma^4+4a\gamma^3+(8a^2-2b)\gamma^2+(8a^3-4ab)\gamma+(4a^4-4ba^2+b^2), \end{aligned} \tag{3.4.11}$$

e

$$C = \gamma^4 + 4a\gamma^3 + (4a^2 + 2b)\gamma^2 + 4ab\gamma + (b^2 - d^2 \mathrm{e}^{-2\gamma\tau}), \tag{3.4.12}$$

fornecem as soluções positivas

$$\omega_\pm = \sqrt{(b-a^2) - (\gamma+a)^2 \pm \sqrt{d^2\mathrm{e}^{-2\gamma\tau} - 4(\gamma+a)^2(b-a^2)}}. \tag{3.4.13}$$

Para que as soluções $\omega_\pm$ dadas pela equação (3.4.13) sejam reais o conjunto de parâmetros deve satisfazer a desigualdade

$$4(\gamma+a)^2(b-a^2) \leq d^2\mathrm{e}^{-2\gamma\tau}, \tag{3.4.14}$$

e além dessa condição, para que ω_+ exista devemos ter

$$(\gamma+a)^2 - (b-a^2) \leq \sqrt{d^2\mathrm{e}^{-2\gamma\tau} - 4(\gamma+a)^2(b-a^2)}, \tag{3.4.15}$$

e para que ω_- exista devemos ter

$$(b-a^2) - (\gamma+a)^2 \geq \sqrt{d^2\mathrm{e}^{-2\gamma\tau} - 4(\gamma+a)^2(b-a^2)}. \tag{3.4.16}$$

No caso $b \leq a^2$ a condição (3.4.14) é automaticamente satisfeita, a solução ω_+ existirá se a condição (3.4.15) for satisfeita, e a solução ω_- não existirá para todo γ. No caso $b > a^2$ a solução ω_+ existirá se as condições (3.4.14) e (3.4.15) forem satisfeitas, e a solução ω_- existirá se as condições (3.4.14) e (3.4.16) forem satisfeitas. Observe que no limite $\gamma \to -\infty$, segundo a equação (3.4.5), sempre existirá ω_+ que satisfaz a equação (3.4.13).

Assim, os pares (γ, ω) que satisfazem o sistema de equações (3.4.3b) e (3.4.3a) necessariamente satisfazem a equação (3.4.13), por isso, as quatro curvas $\omega(\gamma) = \pm\omega_\pm(\gamma)$ são chamadas de curvas envelope dos autovalores, pois englobam os autovalores existentes[13]. Na Figura 3.4.1 exibimos as curvas envelope de autovalores para alguns valores de conjuntos de parâmetros. Observe que as curvas envelope exibidas na Figura 3.4.1 englobam uma mistura dos espectros da retroalimentação positiva e negativa, pois na equação (3.4.13) o parâmetro d só ocorre elevado ao quadrado.

Antes de obter o espectro de autovalores que estão contidos nas curvas envelope, vamos mostrar algumas utilidades dessas curvas. Primeiramente, note que, como se espera, para $\omega = 0$ os diagramas da Figura 3.4.1 fornecem as raízes γ obtidas graficamente pelas Figuras 3.2.1 e 3.2.2. Nos casos da Figura 3.4.1; se para $\omega = 0$ uma das quatro curvas envelope estiver definida para algum $\gamma > 0$, o ponto de equilíbrio será instável; se para $\omega = 0$ as quatro curvas envelope estiverem definidas apenas para $\gamma < 0$, o ponto fixo será assintoticamente estável; e no caso em que as curvas envelope estejam definidas para $\gamma = 0$, o ponto fixo será não hiperbólico, sendo necessário utilizar a teoria da variedade central para determinar sua estabilidade. Agora,

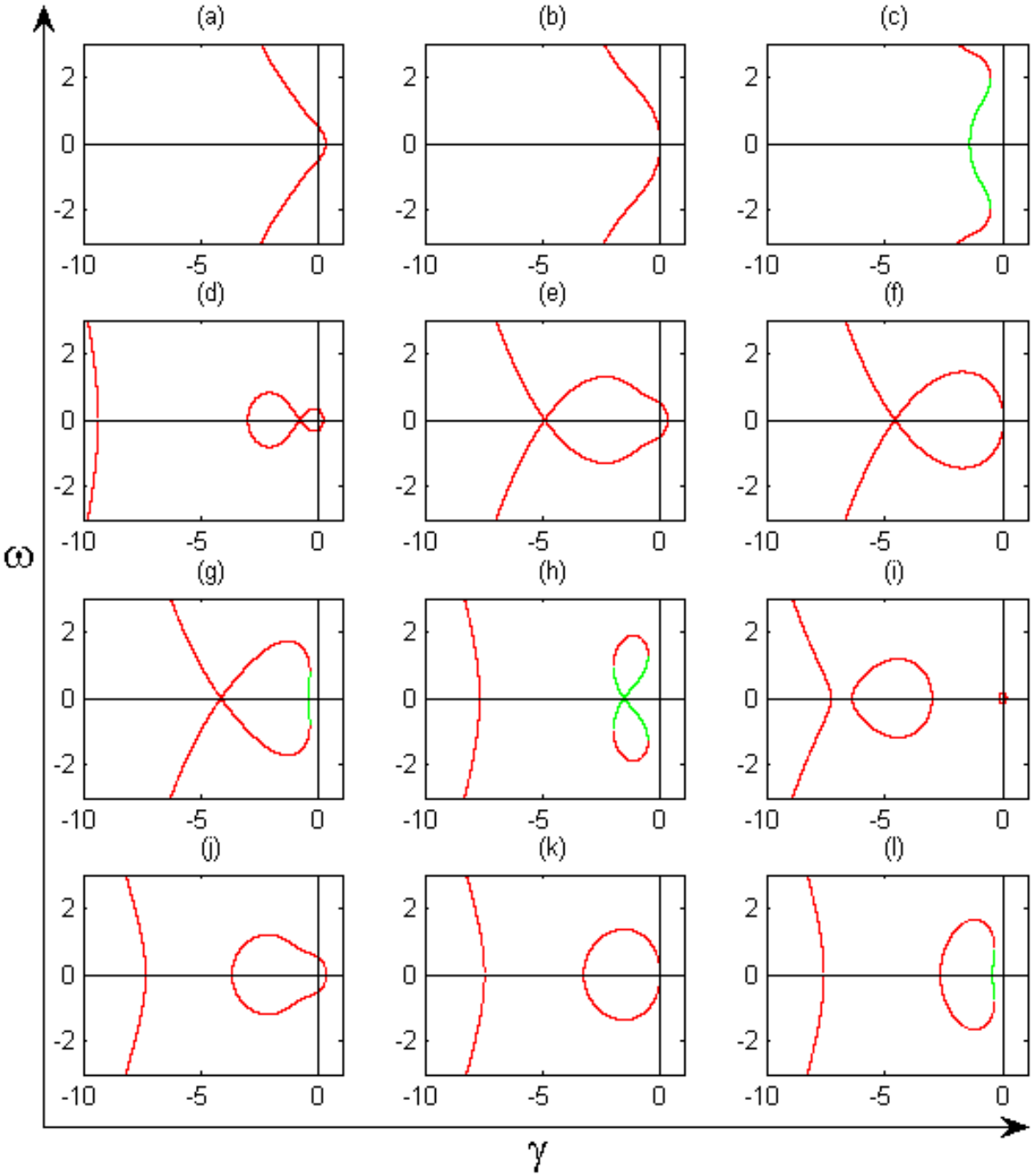

Figura 3.4.1: Curvas envelope $\omega \times \gamma$, com os ramos $\pm\omega_-$ em verde e $\pm\omega_+$ em vermelho para o conjunto de parâmetros $(a\,;b;\,d;\,\tau)$ igual a: (a) $(1\,;0{,}1\,;\pm1\,;1)$, (b) $(1\,;1\,;\pm1\,;1)$, (c) $(1\,;5\,;\pm1\,;1)$, (d) $(1{,}050\,;0{,}1\,;\pm0{,}63\,;0{,}5)$, (e) $(1\,;0{,}1\,;\pm1\,;0{,}543)$, (f) $(1\,;1\,;\pm1\,;0{,}557)$, (g) $(1\,;2\,;\pm1\,;0{,}576)$, (h) $(1\,;2{,}868\,;\pm1\,;0{,}5)$, (i) $(2\,;0{,}1\,;\pm0{,}63\,;0{,}5)$, (j) $(1\,;0{,}1\,;\pm1\,;0{,}5)$, (k) $(1\,;1\,;\pm1\,;0{,}5)$ e (l) $(1\,;2\,;\pm1\,;0{,}5)$.

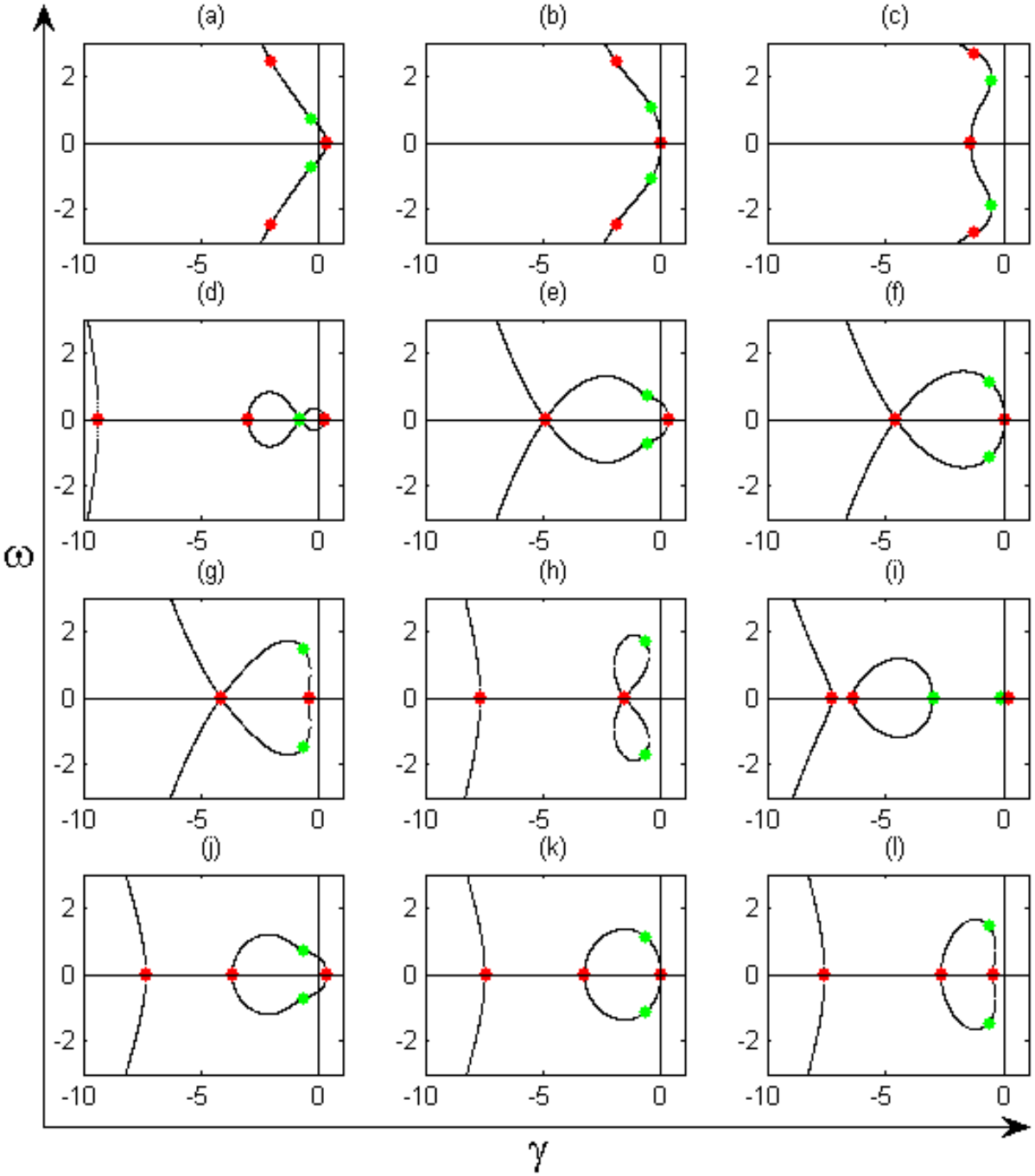

Figura 3.4.2: Curvas envelope e espectro parcial de autovalores para retroalimentação negativa (◆ verde) e positiva (◆ vermelho), e as curvas envelope $\omega = \pm\omega_{\pm}$ para o conjunto de parâmetros $(a\,;\,b\,;\,d\,;\,\tau)$ igual a: (a) $(1\,;0{,}1\,;\pm1\,;1)$, (b) $(1\,;1\,;\pm1\,;1)$, (c) $(1\,;5\,;\pm1\,;1)$, (d) $(1{,}050\,;0{,}1;\,\pm0{,}63\,;0{,}5)$, (e) $(1\,;0{,}1\,;\pm1\,;0{,}543)$, (f) $(1\,;1\,;\pm1\,;0{,}557)$, (g) $(1\,;2\,;\pm1\,;0{,}576)$, (h) $(1\,;2{,}868;\ \pm1\,;0{,}5)$, (i) $(2\,;0{,}1\,;\pm0{,}63\,;0{,}5)$, (j) $(1\,;0{,}1\,;\pm1\,;0{,}5)$, (k) $(1\,;1\,;\pm1\,;0{,}5)$ e (l) $(1\,;2\,;\pm1\,;0{,}5)$.

para quaisquer valores do conjunto de parâmetros $\{a, b, d, \tau\}$; se para algum ω uma das curvas envelope estiverem definidas para algum $\gamma > 0$, o ponto de equilíbrio será instável; e se para qualquer ω as quatro curvas envelope estiverem definidas somente para $\gamma < 0$, o ponto de equilíbrio será assintoticamente estável.

Depois de construir as curvas envelopes resolvemos numericamente o sistema de equações transcendentais (3.4.3b) e (3.4.3a) para γ e ω. Na Figura 3.4.2 exibimos os espectros parciais de autovalores obtidos para retroalimentação positiva e para retroalimentação negativa, para os mesmos casos da Figura 3.4.1.

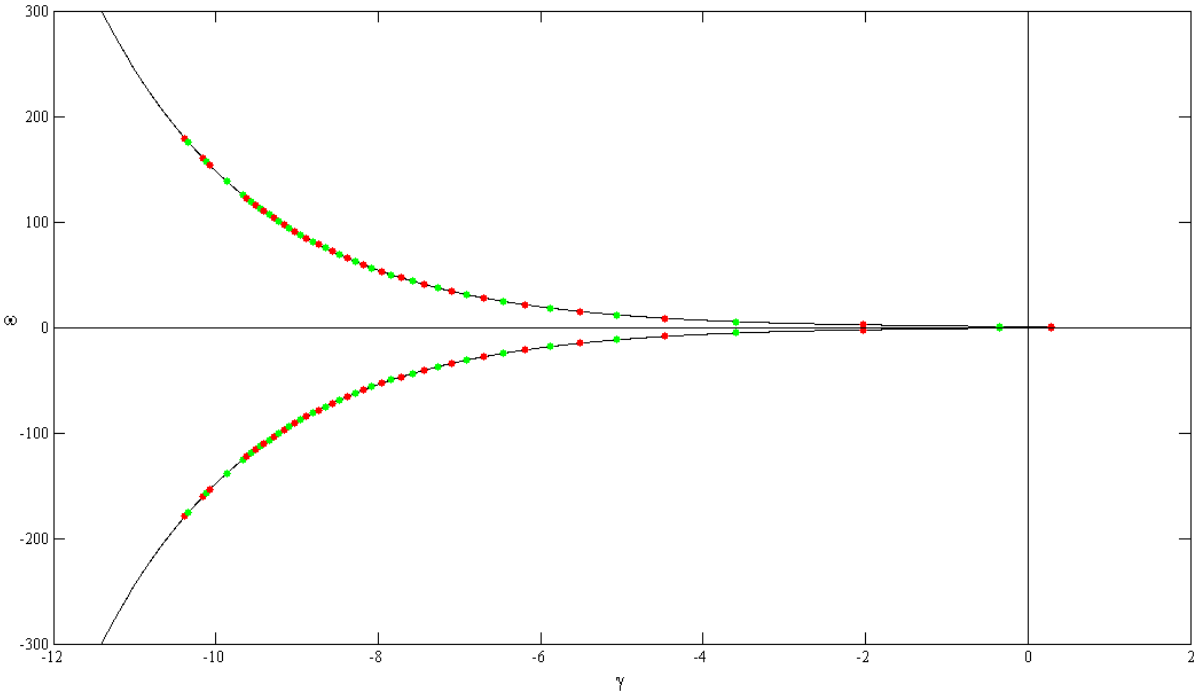

Figura 3.4.3: Curvas envelope e espectro completo de autovalores para retroalimentação negativa (◆ verde) e positiva (◆ vermelho), e as curvas envelope $\omega = \pm\omega_{\pm}$ para $a = 1$, $b = 0{,}1$, $d = \pm 1$ e $\tau = 1$.

Na Figura 3.4.3 exibimos o espectro completo de autovalores para o caso da Figura 3.4.2 (a) numa escala em que fica claro que o espectro de autovalores é limitado numa região do plano $\omega \times \gamma$, contando 24 pares de autovalores complexo-conjugados, tanto para a retroalimentação positiva quanto para a negativa. Observando o sistema de equações transcendentais (3.4.3b) e (3.4.3a) conclui-se que nas regiões com $\gamma\tau \ll -1$ e $\gamma\tau \gg 1$ não existem soluções γ e ω. Pela equação (3.4.13) nota-se que para $\gamma\tau \ll -1$ temos $\omega_+ \approx |d|\mathrm{e}^{-\gamma\tau/2}$, mostrando que a curva envelope sempre exibirá esse comportamento assintótico para o ramo positivo ω_+. Desse modo, definindo o supremo do valor absoluto da parte real do autovalor, $\gamma_{\sup} = \sup|\gamma|$, limitamos o autovalor λ ao disco de raio $|d|\mathrm{e}^{\gamma_{\sup}\tau}$. Em todos os casos da Figura 3.4.2 o espectro completo de autovalores, distante da origem, com $\omega \gg 1$, é similar ao caso exibido na Figura 3.4.3.

Sendo assim, além das cartas de estabilidade construídas na Seção 3.3, outra forma de analisar a estabilidade do sistema de equações diferenciais com retardo (3.1.1), tomando um dos parâmetros $\{a, b, d, \tau\}$ como variável, é acompanhar a dependência que o espectro de autovalores tem com esse parâmetro. Nos casos em que o ponto de equilíbrio é assintoticamente

estável, tomando o máximo da parte real $\gamma_{\max}$, para uma pequena perturbação em torno desse ponto fixo, podemos definir o tempo característico de retorno[32] como $t_r = -1/\gamma_{\max}$, de modo que a perturbação é amortecida, ao menos, tão rapidamente quanto e^{-t/t_r}.

4
Integração Numérica

Neste capítulo, apresentamos algumas características do método de integração utilizado. Comparamos as integrações numéricas implementadas no MATLAB® R2008a com as integrações analíticas realizadas aplicando o método de passos, para uma caso particular da equação 4.1.1.

4.1 Integração Numérica e o Método de Passos

Para a integração numérica da equação

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = f(x_\tau), \tag{4.1.1}$$

foi utilizado o pacote de integração numérica para equações diferenciais com retardo constante dde23 do MATLAB® R2008a[46,47]. Basicamente, esse pacote faz a integração numérica empregando o método de passos, integrando a equação diferencial com retardo reduzindo-a em uma sequência de equações diferenciais ordinárias. O pacote dde23 utiliza o método de Runge-Kutta de terceira ordem BS(2,3)[48] e uma interpolação cúbica de Hermite.

O método dde23 pode ser empregado na integração numérica de equações diferenciais funcionais mais gerais da forma

$$z'(t) = f(t, z(t), z(t-\tau_1), z(t-\tau_2), \ldots, z(t-\tau_k)), \tag{4.1.2}$$

onde $z(t) \in \mathbb{R}^n$ e $\tau = \min(\tau_1, \ldots, \tau_k) > 0$. As equações são resolvidas num intervalo $t_0 \leq t \leq t_f$ e requerem a história $z(t) = H(t)$ para $t \leq t_0$. O método dde23 permite o controle do erro absoluto e do erro relativo ao longo da integração. Por definição[49], de um modo geral se p^* é uma aproximação para p, o erro absoluto e o erro relativo são dados, respectivamente, por $p - p^*$ e $(p - p^*)/p$, para $p \neq 0$. Agora, considere uma integração numérica da equação (4.1.2) com

passo h no tempo, e aproximação numérica para $z(t_n)$, com $t_n = t_0 + nh$ para $n \in \mathbb{N}$, denotada por z_n. Para essa integração, as definições de erro acima levam, respectivamente, às seguintes relações para o erro absoluto e o erro relativo no n-ésimo passo de integração

$$\epsilon_{\text{abs}} = |z_{n+1} - z_n| \quad \text{e} \quad \epsilon_{\text{rel}} = \frac{|z_{n+1} - z_n|}{|z_{n+1}|}. \tag{4.1.3}$$

Essencialmente, o pacote dde23 exige que se passe como argumentos, a matriz do sistema de equações diferenciais de primeira ordem com retardo, $Sistema = f(t,\ z(t),\ z(t-\tau_1),\ z(t-\tau_2),\ \ldots,\ z(t-\tau_k))$, o vetor com os retardos, $Retardos = [\tau_1,\ \ldots, \tau_k]$, o vetor com as histórias, $Historias = H(t)$, o intervalo de tempo para gerar a solução, $Tempo = [t_0, t_f]$, as opções do pacote e o conjunto de parâmetros, e devolve as soluções por meio de uma matriz $Solucao$ de acordo com a sintaxe

$$Solucao = \text{dde23}(Sistema, Retardos, Historias, Tempo, Opcoes, Parametros).$$

Dentre o conjunto de opções do pacote dde23, pode-se estipular o erro absoluto ϵ_{abs} e o erro relativo ϵ_{rel} por meio da sintaxe

$$Opcoes = \text{ddeset}(\text{'AbsTol'}, \epsilon_{\text{abs}}, \text{'RelTol'}, \epsilon_{\text{rel}}).$$

Para uma exposição detalhada do uso do pacote dde23 e dos métodos numérico empregados nele veja Shampine e Thompson[46], Shampine, Thompson e Kierzenka[50], Shampine, Gladwell e Thompson[47] e Shampine[51].

Agora, vamos aplicar o método de passos na equação (4.1.1) linearizada em torno da origem, que, de acordo com a Seção 3.1, pode ser rescrita como o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = dx_\tau - 2ay - bx, \end{cases} \tag{4.1.4}$$

e verificar que, rapidamente, esse método se mostra irrealizável analiticamente, sendo necessário executá-lo numericamente. Considere as histórias $x(t) = 1$ e $y(t) = 0$ com $t \in [-\tau, 0]$ e os seguintes valores de parâmetros $a = 1$, $b = 2$, $d = -1$ e $\tau = \pi$. Assim, usando as notações com sub-índices introduzidas na Seção 2.2, para $t \in \mathcal{I}_0$ temos a história

$$\begin{cases} x_0(t) = 1, \\ y_0(t) = 0, \end{cases} \tag{4.1.5}$$

e o primeiro passo provê o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias para $t \in \mathcal{I}_1$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = y_1(t), \\ \dot{y}_1(t) = -1 - 2[y_1(t) + x_1(t)]. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

que junto com condições iniciais

$$\begin{cases} x_1(0) = 1, \\ y_1(0) = 0, \end{cases} \tag{4.1.7}$$

dadas pelo sistema (4.1.5), geram a solução

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{3}{2}\left[\operatorname{sen}(t) + \cos(t)\right]\mathrm{e}^{-t} - \dfrac{1}{2}, \\ y_1(t) = -3\operatorname{sen}(t)\mathrm{e}^{-t}. \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Com isso, obtemos que a primeira derivada da solução $x(t)$ é contínua em $t = 0$, $y_0(0) = 0 = y_1(0)$, mas sua segunda derivada é descontínua nesse ponto, $0 = \dot{y}_0(0) \neq \dot{y}_1(0) = -3$. O segundo passo leva ao sistema de equações seguinte, definido para $t \in \mathcal{I}_2$

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = \dfrac{3}{2}\left[\operatorname{sen}(t) + \cos(t)\right]\mathrm{e}^{\pi - t} + \dfrac{1}{2} - 2[y_2(t) + x_2(t)]. \end{cases} \tag{4.1.9}$$

com condições iniciais

$$\begin{cases} x_2(\pi) = -\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{-\pi} - \dfrac{1}{2}, \\ y_2(\pi) = 0. \end{cases} \tag{4.1.10}$$

dadas pelo sistema (4.1.8), resultam na solução

$$\begin{cases} x_2(t) = \dfrac{3}{4}\left\{[2+(2-\pi+t)\mathrm{e}^{\pi}]\operatorname{sen}(t)+[2+(1+\pi-t)\mathrm{e}^{\pi}]\cos(t)\right\}\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{1}{4}, \\ y_2(t) = \dfrac{3}{4}\left\{[-2-(\pi-t)\mathrm{e}^{\pi}]\operatorname{sen}(t)+[2+(1-\pi+t)\mathrm{e}^{\pi}]\cos(t)\right\}\mathrm{e}^{-t}+\dfrac{1}{4}-x_2(t). \end{cases} \tag{4.1.11}$$

Agora, obtemos que a solução $x(t)$ tem a primeira derivada contínua em $t = \pi$, $y_1(\pi) = 0 = y_2(\pi)$, a segunda derivada contínua, $\dot{y}_1(\pi) = 3\mathrm{e}^{-\pi} = \dot{y}_2(\pi)$, porém a terceira derivada descontínua nesse ponto, $-1 - 6\mathrm{e}^{-\pi} = \ddot{y}_1(\pi) \neq \ddot{y}_2(\pi) = -6\mathrm{e}^{-\pi}$. Essa suavização nos *breaking points*, que ocorre a cada passo dado, foi prevista na Seção 2.2. O terceiro passo dá o sistema de equações, para $t \in \mathcal{I}_3$

$$\begin{cases} \dot{x}_3(t) = y_3(t), \\ \dot{y}_3(t) = -x_2(t-\pi) - 2[y_3(t) + x_3(t)]. \end{cases} \tag{4.1.12}$$

com condições iniciais dadas pelo sistema (4.1.11)

$$\begin{cases} x_3(2\pi) = x_2(2\pi), \\ y_3(2\pi) = y_2(2\pi). \end{cases} \tag{4.1.13}$$

A cada passo a complicação dos cálculos aumenta, o que torna a continuidade desse método impraticável, apesar de possível para esse caso do sistema linear (4.1.4). Todavia, aplicando o método de passos no sistema não linear

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \tanh(\alpha x_\tau) - 2ay - bx, \end{cases} \tag{4.1.14}$$

para as histórias $x(t) = 1$ e $y(t) = 0$ com $t \in [-\tau, 0]$, e os parâmetros $a = 1$, $b = 2$, $\alpha = -1$ e $\tau = \pi$, veremos que o método se mostra irrealizável rapidamente. O primeiro passo fornece a solução no intervalo $\mathcal{I}_1$

$$\begin{cases} x_1(t) = \left(1 - \dfrac{\tanh(\alpha)}{2}\right)[\operatorname{sen}(t) + \cos(t)]\,\mathrm{e}^{-t} + \dfrac{\tanh(\alpha)}{2}, \\ y_1(t) = [2 - \tanh(\alpha)]\operatorname{sen}(t)\mathrm{e}^{-t}, \end{cases} \tag{4.1.15}$$

e o segundo passo provê o sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x}_2(t) = y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = \tanh(x_1(t-\pi)) - 2[y_2(t) + x_2(t)]. \end{cases} \tag{4.1.16}$$

O sistema de equações diferencias ordinárias (4.1.16) não tem solução em função de funções transcendentais elementares, impossibilitando o cálculo analítico da solução da equação (4.1.1) no intervalo $\mathcal{I}_2$. Sabe-se que são muito raros os casos de sistemas de equações diferenciais com retardo que são passíveis de integração analítica, veja algumas dessas exceções em Shampine, Gladwell e Thompson[47] e Elsgolts[4].

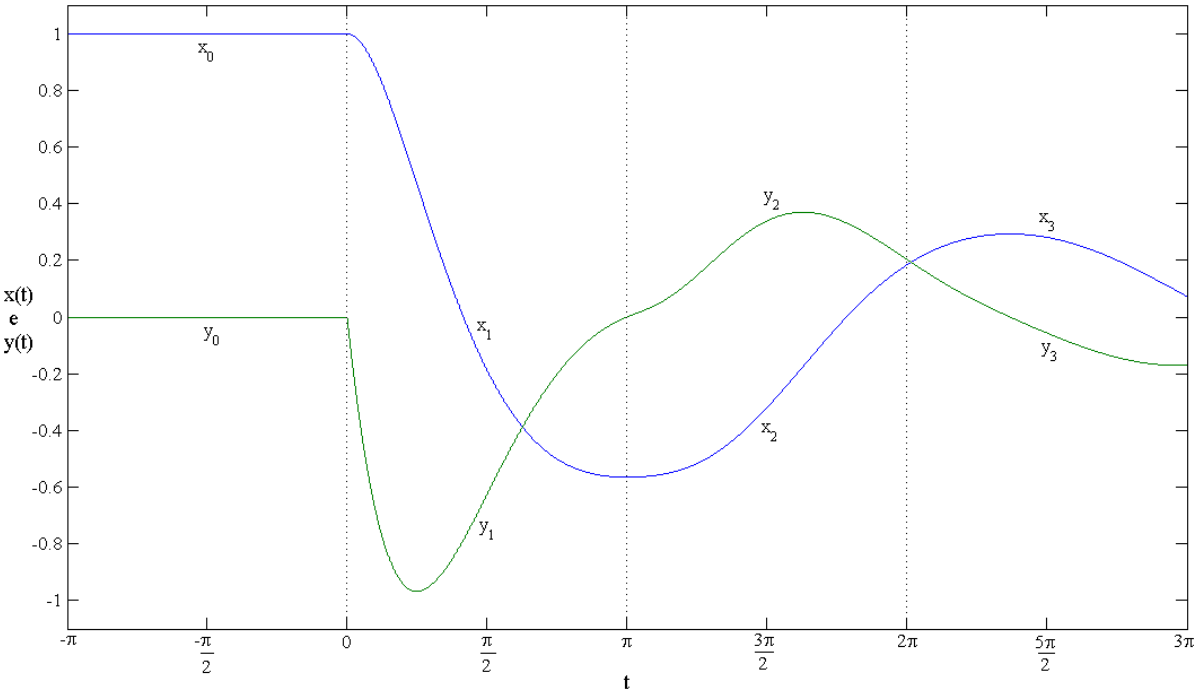

Figura 4.1.1: Soluções do sistema linear (4.1.4) para $a = 1$, $b = 2$, $d = -1$, $\tau = \pi$ com as histórias $x(t) = 1$ e $y(t) = 0$ para $t \in [-\tau, 0]$, obtidas por integração numérica.

Quando é possível realizar a integração nos primeiro passos, o método de passos define uma solução única e global, mas frequentemente se torna difícil de realizar quando intervalo de tempo, em que se deseja encontrar a solução, é muito maior que o retardo τ. Na Figura 4.1.1 exibimos a solução numérica do sistema (4.1.4) no intervalo $[0, 3\pi]$ para o caso $a = 1$,

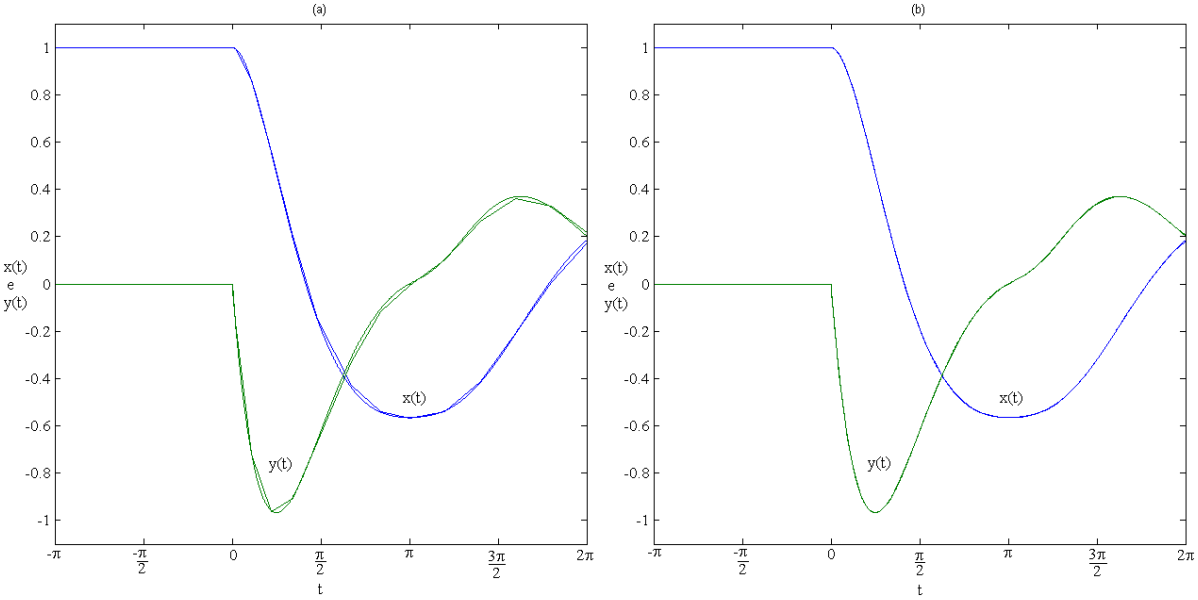

Figura 4.1.2: Soluções do sistema linear (4.1.4) para $a = 1$, $b = 2$, $d = -1$, $\tau = \pi$ com as histórias $x(t) = 1$ e $y(t) = 0$ para $t \in [-\tau, 0]$, obtida pelo método de passos e por integração numérica com (a) $\epsilon_{\text{abs}} = \epsilon_{\text{rel}} = 10^{-2}$ e (b) $\epsilon_{\text{abs}} = \epsilon_{\text{rel}} = 10^{-4}$.

$b = 2$, $d = -1$ e $\tau = \pi$ e histórias $x(t) = 1$ e $y(t) = 0$ para $t \in [-\pi, 0]$, usando o erro absoluto $\epsilon_{\text{abs}} = 10^{-3}$ e o erro relativo $\epsilon_{\text{rel}} = 10^{-3}$ no pacote dde23. Para efeito de comparação, exibimos nas Figuras 4.1.2 (a) e (b) a solução numérica da equação (4.1.1) e sua solução exata, obtida pelo método de passos, para esse caso no intervalo $[0, 2\pi]$. Na integração numérica do caso da Figura 4.1.2 (a) usamos os erros $\epsilon_{\text{abs}} = \epsilon_{\text{rel}} = 10^{-2}$, e no caso da Figura 4.1.2 (b) usamos os erros $\epsilon_{\text{abs}} = \epsilon_{\text{rel}} = 10^{-4}$.

Uma vez que as séries temporais são obtidas por integração numérica pode-se construir retratos de fase, diagramas de bifurcação, e utilizar ferramentas tais como o mapa de primeiro retorno para obter as assinaturas das bifurcações de Hopf dupla. Isso será feito no Capítulo 5.

5
Bifurcação Local

Aqui investigamos as bifurcações previstas nas cartas de estabilidade da Seção 3.3. Na Seção 5.1 examinamos as bifurcações locais de equilíbrio e codimensão 1, tomando cada um dos parâmetros $\{a, b, \alpha, \tau\}$ como parâmetro de bifurcação. E na Seção 5.2 são analisados alguns pontos de bifurcação de Hopf dupla. A ocorrência dessas bifurcações em equações do tipo (1.0.3) tem sido investigada nas últimas décadas[34, 52–54].

5.1 Bifurcações Locais de Equilíbrio e Codimensão 1

Dado um ponto fixo, as bifurcações locais de equilíbrio podem ser previstas analisando o campo vetorial na sua vizinhança, que, por sua vez, pode ser estudado pela estabilidade prevista pelos cálculos dos autovalores nesse ponto. Existem apenas quatro tipos de bifurcação local de equilíbrio para sistemas contínuos que podem ser consideradas de codimensão um[1]: bifurcação sela-nó, bifurcação transcrítica, bifurcação de forquilha e bifurcação de Hopf[42]. Os diagramas de estabilidade obtidos na Seção 3.3 indicam que no sistema de equações (2.1.1) ocorre a bifurcação de Hopf supercrítica e subcrítica, a bifurcação de Hopf dupla, e a bifurcação de forquilha supercrítica.

Considere um parâmetro qualquer ξ dentre o conjunto $\{a, b, d, \tau\}$ e o autovalor escrito em função desse parâmetro na forma $\lambda(\xi) = \gamma(\xi) \pm \mathrm{i}\omega(\xi)$. Para que um dado valor de parâmetro ξ_0 seja um ponto de bifurcação de Hopf devemos ter que

$$\gamma(\xi_0) = 0, \quad \omega(\xi_0) \neq 0 \quad \text{e} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}\xi}\right|_{\xi=\xi_0} \neq 0. \tag{5.1.1}$$

A bifurcação de Hopf supercrítica (subcrítica) ocorre quando um par de autovalores complexo-conjugados cruzam o eixo imaginário, com $|\omega| > 0$, no sentido positivo (negativo) do eixo real,

[1] A forma normal desses quatro tipo de bifurcação podem ser escritas em função de apenas um parâmetro.

gerando um ciclo limite estável (instável) no retrato de fase. Existem teoremas que definem as condições que um sistema de equações diferenciais com retardo tem que satisfazer para garantir a existência e obter a direção da bifurcação de Hopf[7].

Na bifurcação de forquilha surge um par de pontos de equilíbrio a partir de um ponto de equilíbrio inicial. Se o ponto fixo inicial é estável (instável) e se torna instável (estável) quando surgem dois pontos fixos estáveis (instáveis), diz-se que ocorreu uma bifurcação supercrítica (subcrítica) de forquilha. As bifurcações de forquilha ocorrem nesse sistema porque: (i) a equação $\ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = \tanh(\alpha x_\tau)$ é invariante sob a transformação $x \to -x$, (ii) quando a retroalimentação se torna positiva com $b < \alpha$ essa equação fornece três pontos fixos, a origem x_0^* e dois pontos simétricos em relação à origem, $x_-^* = -x_+^*$, e de mesma estabilidade, já que $d_- = d_+$. Essa simetria elimina a hipótese de ocorrência da bifurcação sela-nó[55]. Para que ocorra a bifurcação transcrítica é necessário que existam pelo menos dois pontos fixos com estabilidades opostas para todos os valores de um dado parâmetro, exceto no ponto crítico, e isso não pode ocorrer nesse sistema já que o ponto fixo x_0^* sempre existe e os pontos fixos $x_-^* = -x_+^*$ têm a mesma estabilidade. Portanto, das quatro possibilidades de bifurcações locais de equilíbrio e codimensão 1, apenas será possível a ocorrência das bifurcações de Hopf e das bifurcações de forquilha.

A seguir exibimos e analisamos os diagramas de bifurcação de equilíbrio e codimensão 1 para os parâmetros a, b, d e τ. Os valores e intervalos de cada parâmetro foram baseados nas cartas de estabilidade da Seção 3.3 para possibilitar a comparação com as previsões de estabilidade local, ocorrência de bifurcações, e para confrontar as dinâmicas com retroalimentação positiva e negativa. Esses diagramas foram obtidos da seguinte forma. Por exemplo, para o diagrama com parâmetro de bifurcação a no intervalo $[a_{\min}, a_{\max}]$ fixamos o conjunto de parâmetros $\{b, d, \tau\}$ e dividimos esse intervalo em N pontos. Primeiro integramos o sistema de equações

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = \tanh(\alpha x(t-\tau)) - 2ay(t) - bx(t), \end{cases} \tag{5.1.2}$$

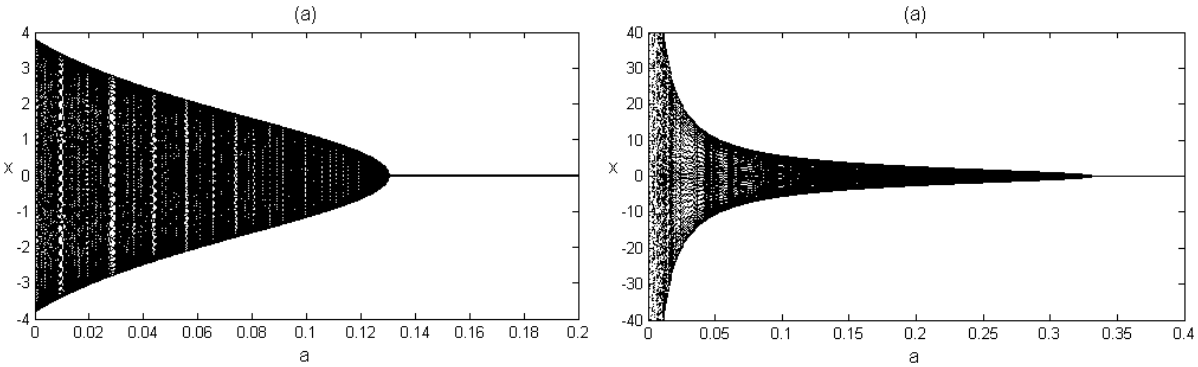

Figura 5.1.1: Diagrama de bifurcação para o parâmetro a com $b = 1$, $\tau = 5{,}5$ e: (a) $\alpha = -0{,}63$ e (b) $\alpha = 0{,}63$.

para o conjunto de parâmetros $\{a_{\min}, b, d, \tau\}$ e plotamos os últimos N pontos da série temporal obtida, descartando o transiente; em seguida acrescentamos $\Delta a = (a_{\max} - a_{\min})/(N-1)$ no

parâmetro a e repetimos esse processo para o conjunto $\{a_{\min} + \Delta a, b, d, \tau\}$; e assim sucessivamente até atingir $a_{\max}$. Para cada integração usamos uma história constante $x(t) = \varphi_0$, $y(t) = 0$ com $t \in [-\tau, 0]$, e a cada passo Δa trocamos o sinal de φ_0.

Para $b = 1$ e $\tau = 5{,}5$ vemos na Figura 5.1.1, que tanto para a retroalimentação negativa $\alpha = -0{,}63$ (Figura 5.1.1 (a)) quanto para a retroalimentação positiva $\alpha = 0{,}63$ (Figura 5.1.1 (b)), ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica na direção em que a decresce. Os pontos de bifurcação e as amplitudes de oscilação são diferentes, e para a retroalimentação positiva a amplitude de oscilação diverge quando $a \to 0$.

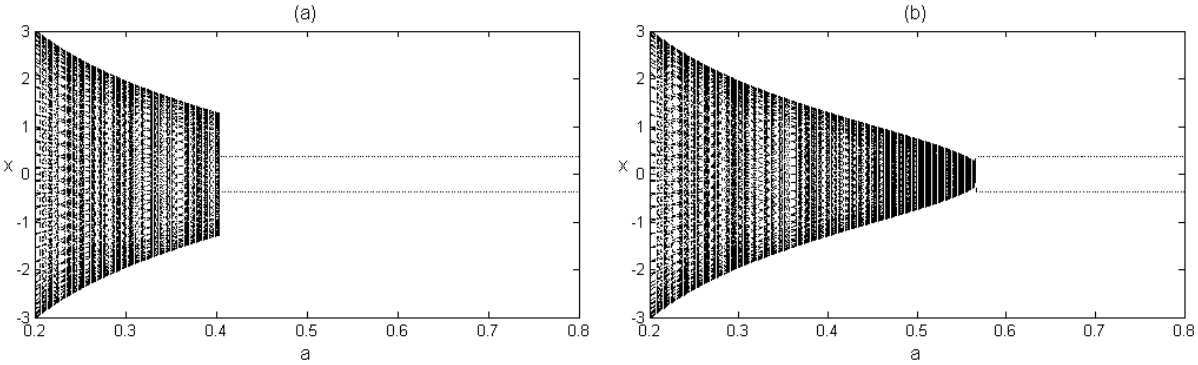

Figura 5.1.2: Diagrama de bifurcação para o parâmetro a com $b = 1$, $\tau = 5{,}5$, $\alpha = 1{,}05$ e histórias com: (a) $\varphi_0 = 10^{-3}$ e (b) $\varphi_0 = 10^3$.

Ainda considerando a como parâmetro de controle, para o caso $b = 1$, $\tau = 5{,}5$ e retroalimentação positiva $\alpha = 1{,}05$, construímos o diagrama de bifurcação da Figura 5.1.2 (a) para a história com $\varphi_0 = 10^{-3}$, e o diagrama de bifurcação da Figura 5.1.2 (b) para a história com $\varphi_0 = 10^3$. Comparando esses dois diagramas nota-se para valores de a na região com $0{,}41 \lesssim a \lesssim 0{,}56$ ocorre o fenômeno da multi-estabilidade entre os pontos fixos estáveis $x^*_\pm$ e o ciclo limite estável existente. Como vimos na Seção 3.3, acredita-se que essa multi-estabilidade ocorra devido à existência de um ciclo limite instável, localizado no espaço de fase de modo que o ciclo limite estável fica na região interna do ciclo limite instável e os pontos fixos $x^*_\pm$, na região externa.

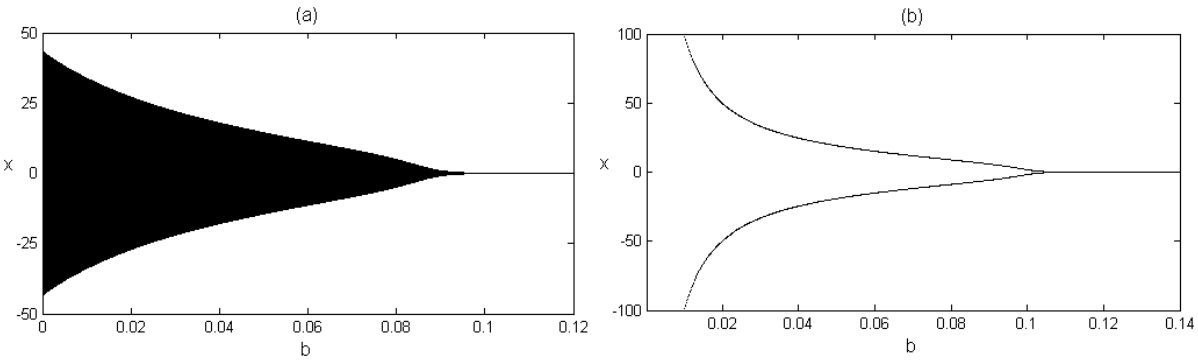

Figura 5.1.3: Diagrama de bifurcação para o parâmetro b com $a = 1$, $\tau = 100$ e: (a) $\alpha = -0{,}1$ e (b) $\alpha = 0{,}1$.

Variando o parâmetro b para o conjunto de valores $a = 1$ e $\tau = 100$ encontramos uma

bifurcação de Hopf supercrítica na direção decrescente de b, para a retroalimentação negativa $\alpha = -0{,}1$ (Figura 5.1.3 (a)), e uma bifurcação de forquilha supercrítica na direção decrescente de b, para a retroalimentação positiva $\alpha = 0{,}1$ (Figura 5.1.3 (b)).

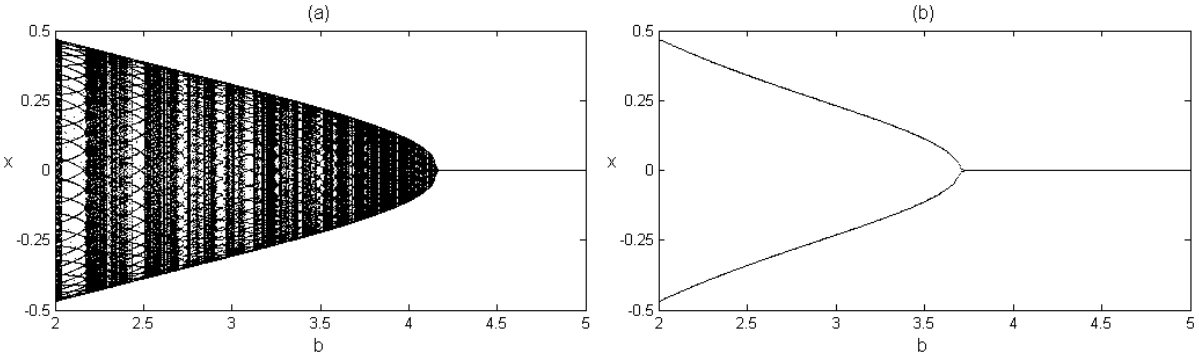

Figura 5.1.4: Diagrama de bifurcação para o parâmetro b com $a = 1$, $\tau = 5$, $\alpha = 3{,}7$ e histórias com: (a) $\varphi_0 = 100$ e (b) $\varphi_0 = 0{,}1$.

Agora, para a retroalimentação positiva $\alpha = 3{,}7$, com $a = 1$ e $\tau = 5$, as bifurcações dependem da história, surgindo o fenômeno de multi-estabilidade entre um ciclo limite estável e os pontos de equilíbrio estáveis $x^*_\pm$. Para a história $\varphi(t) = 100$ obtivemos uma bifurcação de Hopf supercrítica na direção em que b decresce (Figura 5.1.4 (a)), enquanto que para a história $\varphi(t) = 100$ tivemos uma bifurcação de forquilha supercrítica na direção em que b decresce (Figura 5.1.4 (b)). Note que nesses diagramas os pontos de bifurcação são distintos e, a medida que b decresce, o ciclo limite estável se aproxima dos pontos de equilíbrio estáveis $x^*_\pm$, que estão na região externa ao ciclo limite.

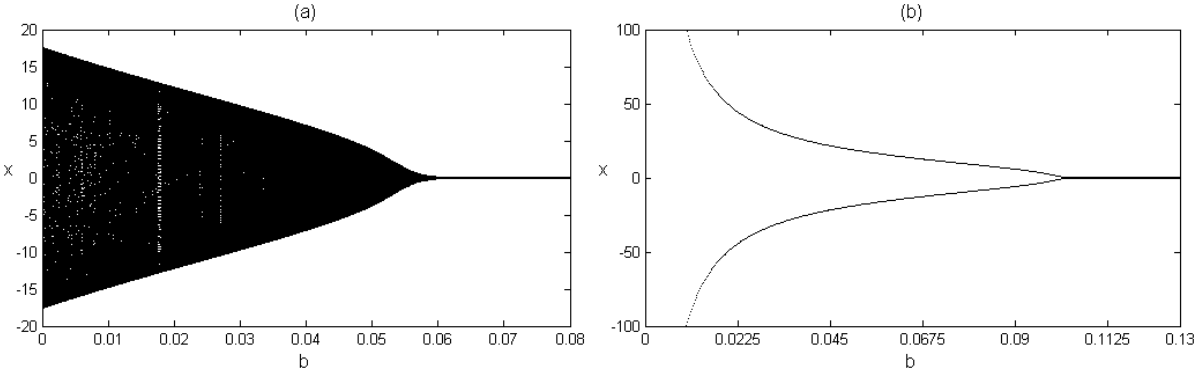

Figura 5.1.5: Diagrama de bifurcação para o parâmetro b com $a = 1$, $\tau = 50$ e: (a) $\alpha = -0{,}1$ e (b) $\alpha = 0{,}1$.

Também variando o parâmetro b, para o conjunto de parâmetros $a = 1$ e $\tau = 50$ encontramos uma bifurcação de Hopf supercrítica na direção em que b decresce, para a retroalimentação negativa $\alpha = -0{,}1$ (Figura 5.1.5 (a)) e uma bifurcação de forquilha supercrítica na direção em que b decresce, para a retroalimentação positiva $\alpha = 0{,}1$ (Figura 5.1.5 (b)).

Tomando como parâmetro de bifurcação o parâmetro α da retroalimentação, tanto para o caso $a = 1$, $b = 11$ e $\tau = 1$ quanto para o caso $a = 1$, $b = 1{,}5$ e $\tau = 5$ obtivemos uma bifurcação

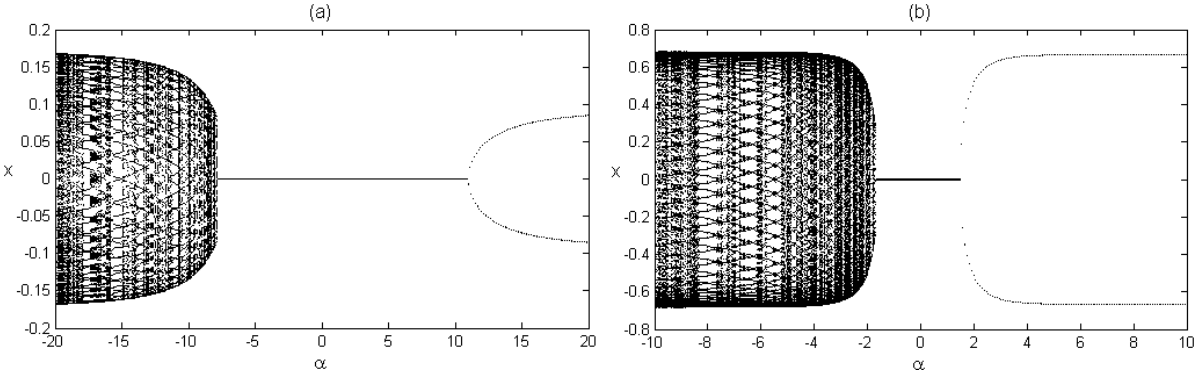

Figura 5.1.6: Diagrama de bifurcação para o parâmetro α com a = 1 e: (a) b = 11 e τ = 1 e (b) b = 1,5 e τ = 5.

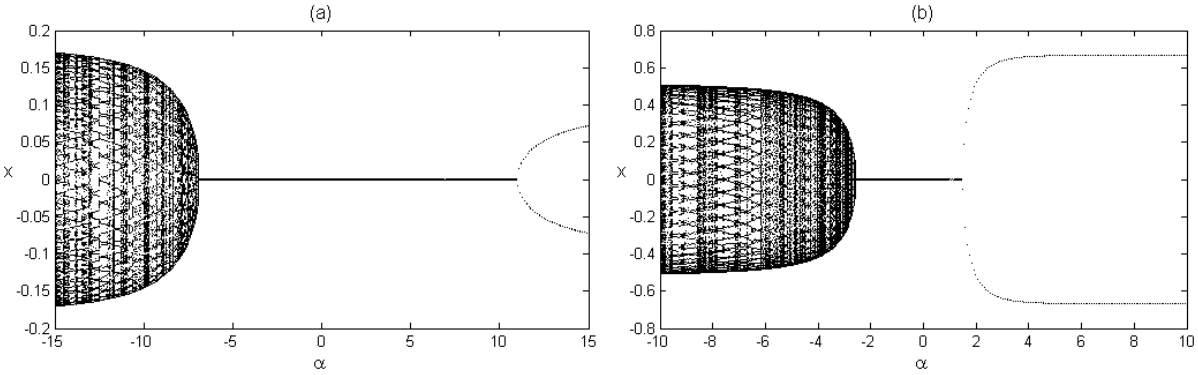

Figura 5.1.7: Diagrama de bifurcação para o parâmetro α com a = 1 e: (a) b = 11 e τ = 0,9 e (b) b = 1,5 e τ = 1,2092.

de Hopf supercrítica na direção decrescente de α e uma bifurcação de forquilha supercrítica na direção crescente de α. Veja as Figuras 5.1.6 e 5.1.7.

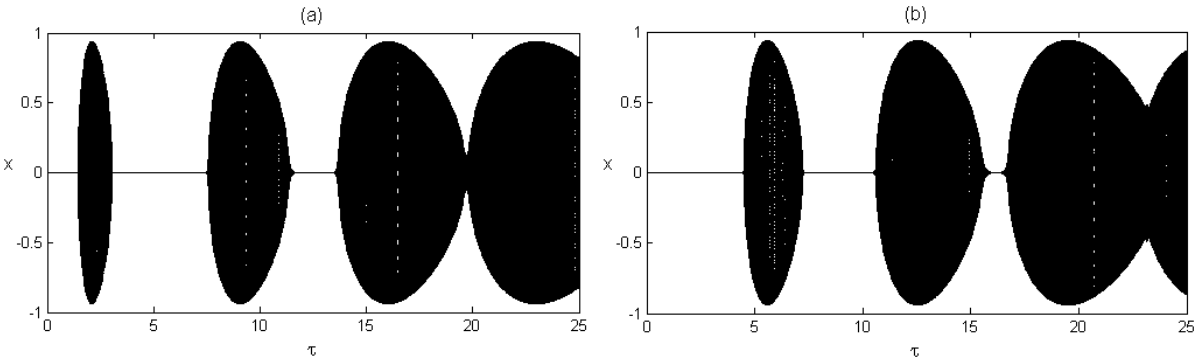

Figura 5.1.8: Diagrama de bifurcação para o parâmetro τ com a = 0,3046, b = 1 e: (a) α = −0,63 e (b) α = 0,63.

Por fim, tomando o retardo τ como parâmetro de bifurcação obtivemos uma sequência de bifurcações de Hopf supercrítica nas direções crescente e decrescente de τ, como exibidas nas Figuras 5.1.8 e 5.1.9.

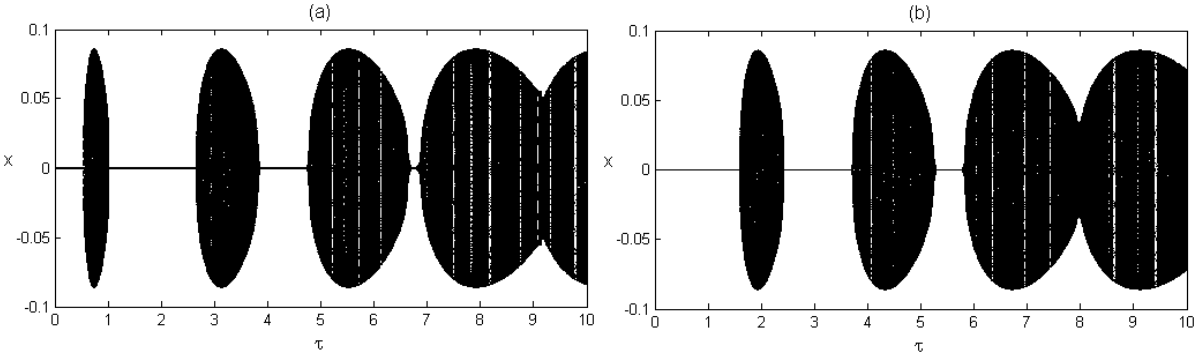

Figura 5.1.9: Diagrama de bifurcação para o parâmetro τ com $a = 1$, $b = 8{,}8947$ e: (a) $\alpha = -6$ e (b) $\alpha = 6$.

Em suma, tomando como parâmetro de controle, cada um dos parâmetros $\{a, b, \alpha, \tau\}$, vimos que ocorrem apenas a bifurcação de Hopf supercrítica e a bifurcação de forquilha supercrítica. Para a retroalimentação positiva a amplitude de oscilação diverge quando $a \to 0$, e quando $b \to 0$ os pontos de equilíbrio simétricos divergem, $x^*_\pm \to \pm\infty$. A bifurcação de Hopf supercrítica ocorre variando cada um dos parâmetros, no entanto ela está fortemente associada ao retardo τ. Já a bifurcação de forquilha supercrítica está associada aos parâmetros b e d. Comparando as estabilidades dos pontos fixos previstas pelas cartas de estabilidade e as obtidas pelos diagrama de bifurcação é notória a concordância da estabilidade local. Não foi observada a ocorrência da bifurcação de forquilha subcrítica e da bifurcação de Hopf subcrítica, inicialmente prevista na Seção 3.3.

5.2 Bifurcação de Hopf Dupla e Seção de Poincaré

A bifurcação de Hopf dupla é de codimensão 2, e as características da bifurcação dependem da direção do vetor formado pelos dois parâmetros de controle. Para diferentes direções podem ocorrer distintas bifurcações. Aqui, vamos investigar os tipos de bifurcação de Hopf dupla examinando a dinâmica do sistema de equações (5.1.2) sobre diferentes pontos de bifurcação. A bifurcação de Hopf dupla ocorre quando dois pares de autovalores complexo-conjugados cruzam o eixo imaginário. Vimos na Seção 3.3 que nas fronteiras de estabilidade das cartas de estabilidade da Seção 3.3 temos $\lambda = \pm i\omega$, e, em princípio, o movimento tem período aproximado $T = 2\pi/\omega$, logo, nos cruzamentos entre duas fronteiras de estabilidade teremos dois pares de autovalores complexo-conjugados, $\lambda_{1_\pm} = \pm i\omega_1$ e $\lambda_{2_\pm} = \pm i\omega_2$. No caso em que os movimentos sobre cada fronteira são periódicos, definindo as variáveis $\dot{\theta}_1(t) = \omega_1$ e $\dot{\theta}_2(t) = \omega_2$ pode-se construir o toro bidimensional $\theta_2 \times \theta_1$. A superposição de dois movimentos harmônicos simples resulta em dois movimentos qualitativamente diferentes. A oscilação será periódica somente se a razão entre as frequências ω_1 e ω_2 for um número racional, de forma que a trajetória no toro bidimensional é fechada. E a oscilação será quase periódica se a razão entre as frequências for um número irracional, formando uma trajetória aberta que não se cruza no toro bidimensional, e que para $t \to \infty$ preenche o toro completamente[42]. Nos dois casos ocorrerão batimentos se $\omega_1 \cong \omega_2$.

Nas cartas de estabilidade da Seção 3.3 é evidente que os cruzamentos entre as fronteiras de

estabilidade sempre se dão entre as fronteiras com $\lambda_{+\pm} = \pm i\omega_+$ e com $\lambda_{-\pm} = \pm i\omega_-$. Quando as frequências ω_- e ω_+ são comensuráveis, com

$$\frac{\omega_-}{\omega_+} = \frac{n_-}{n_+} = n, \quad \text{onde} \quad n_- \in \mathbb{N}^* \quad \text{e} \quad n_+ \in \mathbb{N}^* \quad \text{e} \quad n \in \mathbb{Q}, \tag{5.2.1}$$

diz-se que a bifurcação de Hopf dupla é ressonante com $n_- : n_+$, caso contrário, a bifurcação é dita não ressonante. Vimos na Seção 3.3 que quando ω_- e ω_+ existem simultaneamente, sempre satisfazem $\omega_- \leq \omega_+$, logo, nos casos de ressonância sempre teremos $n_- \leq n_+$. Nos casos em que $n_- : n_+ = \{1:1, 1:2, 1:3, 1:4\}$ a ressonância é dita de ordem baixa ou ressonância forte, caso contrário a ressonância é dita de ordem alta ou ressonância fraca[54]. Utilizando a equação (3.3.4) e a condição de ressonância (5.2.1) chega-se na seguinte relação entre os parâmetros $\{a, b, d\}$:

$$a = \sqrt{\frac{b}{2} - \frac{(n_+^2 + n_-^2)}{4n_+n_-}\sqrt{b^2 - d^2}}. \tag{5.2.2}$$

Substituindo (5.2.2) na equação (3.3.4) obtém-se as frequências para a ressonância $n_- : n_+$:

$$\omega_- = \sqrt{\frac{n_-}{n_+}\sqrt{b^2 - d^2}} \quad \text{e} \quad \omega_+ = \sqrt{\frac{n_+}{n_-}\sqrt{b^2 - d^2}}. \tag{5.2.3}$$

Como vimos na Seção 3.3, as frequências ω_- e ω_+ existem simultaneamente e são não nulas somente se $b - 2a^2 \geq \sqrt{b^2 - d^2}$, com $b > |d|$ e $b > 2a^2$.

Dada uma ressonância qualquer $n_- : n_+$ e qualquer par de parâmetros dentre o trio $\{a, b, d\}$, tais que a equação (5.2.2) seja satisfeita, podemos calcular o terceiro parâmetro com a equação (5.2.2), em seguida calcular as frequências (5.2.3) e finalmente obter o retardo pela equação (3.3.15), definindo por completo o ponto de bifurcação no espaço de parâmetros. Expomos a seguir três exemplos de pontos de bifurcação de Hopf ressonante.

Considere a ressonância forte $1:1$ com $b = 5$ e $d = \pm 3$, e consequentemente $a = 1/\sqrt{2}$, $\omega_\pm = 2$ e

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \tau_{i,+} &= 0{,}9553166181245092 + \pi i \\ \tau_{j,-} &= 0{,}9553166181245092 + \pi j \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad d < 0 \quad \text{com} \quad i \quad \text{e} \quad j \in \mathbb{N}, \\ &\left.\begin{aligned} \tau_{i,+} &= 2{,}5261129449194057 + \pi i \\ \tau_{j,-} &= 2{,}5261129449194057 + \pi j \end{aligned}\right\} \quad \text{para} \quad d > 0 \quad \text{com} \quad i \quad \text{e} \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

E impondo que $\tau_{i,+} = \tau_{j,-}$ temos que para esse conjunto de parâmetros a ressonância $1:1$ ocorrerá para todos os retardos $\tau_{j,\pm}$ com $j \in \mathbb{N}$. Na Figura 5.2.1 exibimos as série temporais das soluções e o espaço de fase, sem o transiente, para $i = j = 0$ e $d = \alpha = 3$. As histórias são constantes $x(t) = 0{,}1$ e $y(t) = 0$ para $t \in [-\tau, 0]$. O movimento é oscilatório em torno da origem com período em torno de $T = 3{,}14$, e converge num ciclo limite estável.

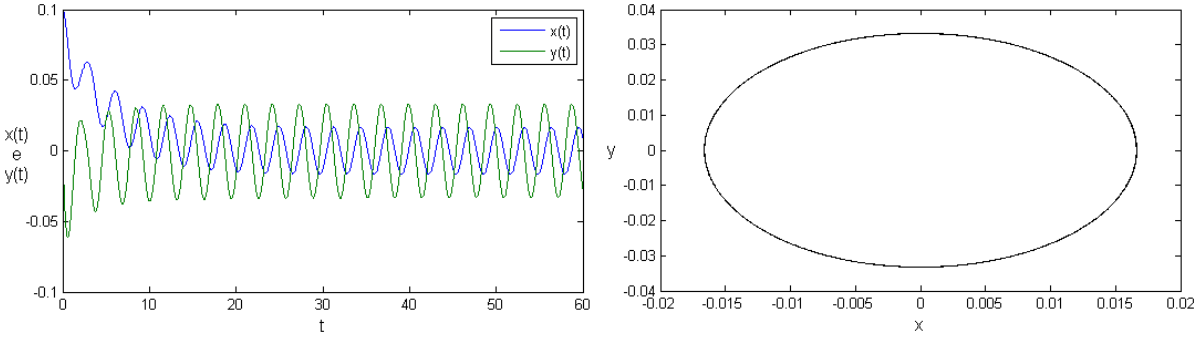

Figura 5.2.1: Série temporal e espaço de fase no ponto de uma bifurcação de Hopf dupla com ressonância forte $1:1$ e: $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 5$, $\alpha = 3$ e $\tau = 2{,}5261129$.

Agora, considere a ressonância forte $1:2$ com $b = 5$ e $d = \pm 3$, e consequentemente $a = 0$, $\omega_+ = 2$, $\omega_- = \sqrt{2}$ e

$$\left.\begin{array}{l} \tau_{i,+} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}} \\ \tau_{j,-} = \frac{\pi + 2\pi j}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \quad \text{para} \quad d < 0 \quad \text{com} \quad i \quad \text{e} \quad j \in \mathbb{N},$$
$$\left.\begin{array}{l} \tau_{i,+} = \frac{\pi + 2\pi i}{2\sqrt{2}} \\ \tau_{j,-} = \frac{2\pi + 2\pi j}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \quad \text{para} \quad d > 0 \quad \text{com} \quad i \quad \text{e} \quad j \in \mathbb{N}. \tag{5.2.5}$$

Logo, para $d < 0$ a ressonância $1:2$ ocorrerá para todo i e j tais que $i = 2j + 1$, enquanto que para $d > 0$ não ocorrerá essa ressonância, pois não existirão i e j tais que $\tau_{i,+} = \tau_{j,-}$. Na Figura 5.2.2 exibimos as série temporais das soluções e o espaço de fase, sem o transiente, para $j = 0$ e $i = 1$. Foram utilizadas como histórias $x(t) = 0{,}01$ e $y(t) = 0$ para $t \in [-\tau, 0]$. O movimento é periódico e com período aproximadamente igual a $T = 4{,}44$, e converge num ciclo limite duplo[30].

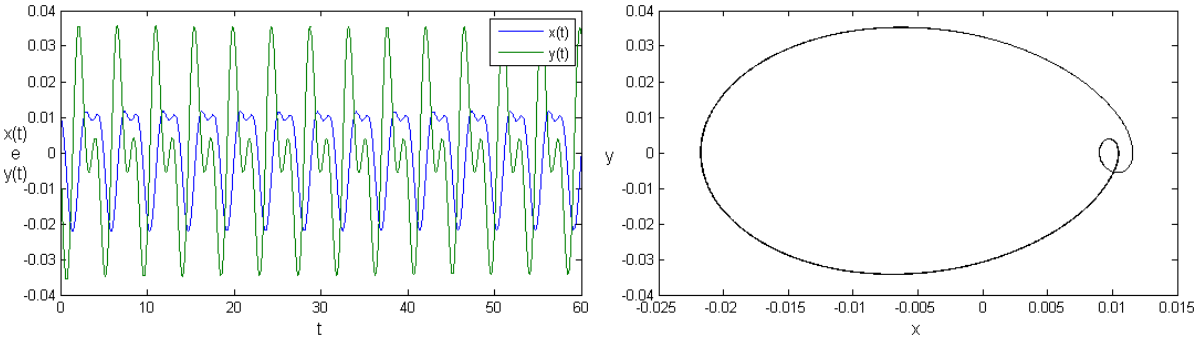

Figura 5.2.2: Série temporal e retrato de fase no ponto de uma bifurcação de Hopf dupla com ressonância forte $1:2$ e: $a = 0$, $b = 5$, $\alpha = -3$ e $\tau = 2{,}2214414690791831$.

Para um determinado conjunto de parâmetros podemos obter pontos de bifurcação de Hopf dupla utilizando as cartas de estabilidade obtidas na Seção 3.3 e as equações (3.3.4) e (3.3.15).

Por exemplo, considere o primeiro ponto em que ocorre uma bifurcação de Hopf dupla na carta de estabilidade da Figura 3.3.2 (a) para os menores valores de a e τ. Esse primeiro ponto decorre da interseção do ramo $\tau_{0,-}$ com o ramo $\tau_{1,+}$, e pela equação (3.3.15), isso ocorre se:

$$\frac{1}{\omega_-}\left[\tan^{-1}\left(\frac{2a\omega_-}{\omega_-^2-b}\right)+\pi\right]=\frac{1}{\omega_+}\left[\tan^{-1}\left(\frac{2a\omega_+}{\omega_+^2-b}\right)+2\pi\right]. \tag{5.2.6}$$

Substituindo os valores de parâmetros $b = 1$ e $d = -0{,}63$, provenientes da carta de estabilidade da Figura 3.3.2 (a), e resolvendo numericamente a equação transcendental (5.2.6) obtém-se que $a = 0{,}0351358930189689$. Com isso, calculamos $\omega_\pm$ pela equação (3.3.4) e obtivemos a ressonância fraca $10^{16} : 20906703195718914$, e em seguida calculamos o retardo $\tau = 5{,}0429755171965845$ usando a equação (3.3.15). Na Figura 5.2.3 exibimos as séries temporais e o espaço de fase, sem o efeito transiente, para esse ponto de bifurcação de Hopf dupla. Foram utilizadas como histórias $x(t) = 0{,}01$ e $y(t) = 0$ para $t \in [-\tau, 0]$. O movimento resultante é quase periódico e com batimento pouco acentuado, sendo que a amplitude máxima oscila com período em torno de $T \cong 113$.

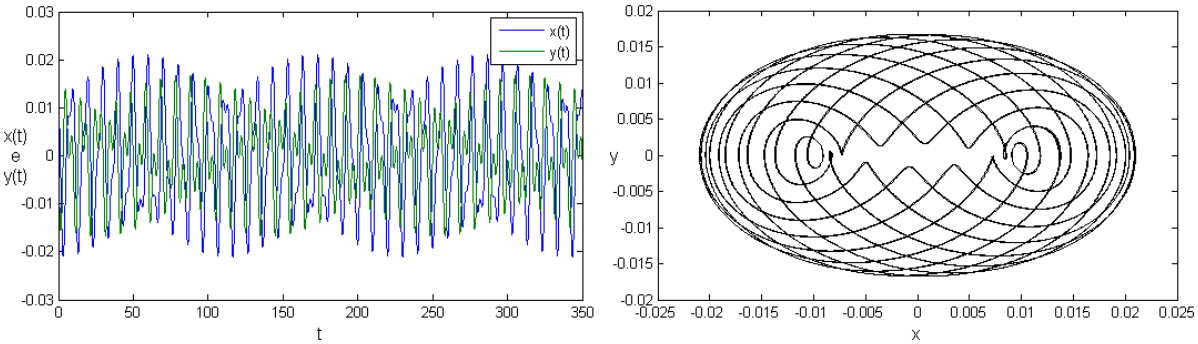

Figura 5.2.3: Série temporal e retrato de fase no ponto de uma bifurcação de Hopf dupla não ressonante ou com ressonância fraca aproximada $10^{16} : 20906703195718914$ e: $a = 0{,}0351358930189689$, $b = 1$, $\alpha = -0{,}63$ e $\tau = 5{,}0429755171965845$.

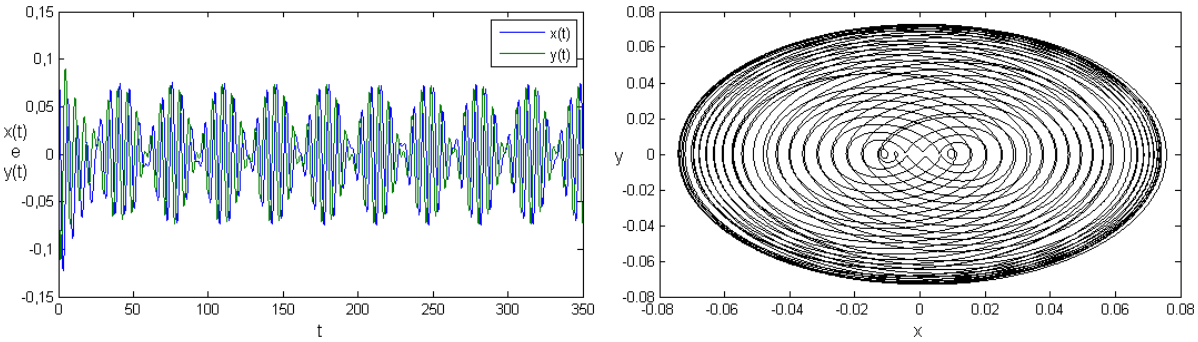

Figura 5.2.4: Série temporal e retrato de fase no ponto de uma bifurcação de Hopf dupla não ressonante ou com ressonância fraca aproximada $10^{16} : 12046120783744794$ e: $a = 0{,}0659901280538366$, $b = 1$, $\alpha = -0{,}225$ e $\tau = 23{,}8339755902050750$.

Com os valores de parâmetros $b = 1$ e $d = -0{,}63$, oriundos da carta de estabilidade da Figura 3.3.2 (d), e o parâmetro calculado numericamente $a = 0{,}0659901280538366$ chega-se

na ressonância fraca 10^{16} : 12046120783744794 e no retardo $\tau = 23{,}8339755902050750$. Na Figura 5.2.4 exibimos as séries temporais e o espaço de fase, sem o efeito transiente, para esse ponto de bifurcação de Hopf dupla. Foram utilizadas como histórias $x(t) = 0{,}1$ e $y(t) = 0$ para $t \in [-\tau, 0]$. O movimento oscilatório resultante é quase periódico e com batimento acentuado, sendo que a amplitude máxima oscila com período em torno de $T \cong 34$.

Como $y = \dot{x}$ podemos prever algumas características gerais dos retratos do sistema de equações (2.1.1). As trajetórias dos retratos de fase sempre cruzam o eixo x verticalmente, pois em $y = 0$ temos $\dot{x} = 0$. Além disso, conforme o tempo aumenta, as trajetórias no semi plano com $y > 0$ caminham na direção positiva do eixo x, já que $\dot{x} > 0$; e as as trajetórias no semi plano com $y < 0$ caminham na direção negativa do eixo x, pois $\dot{x} < 0$.

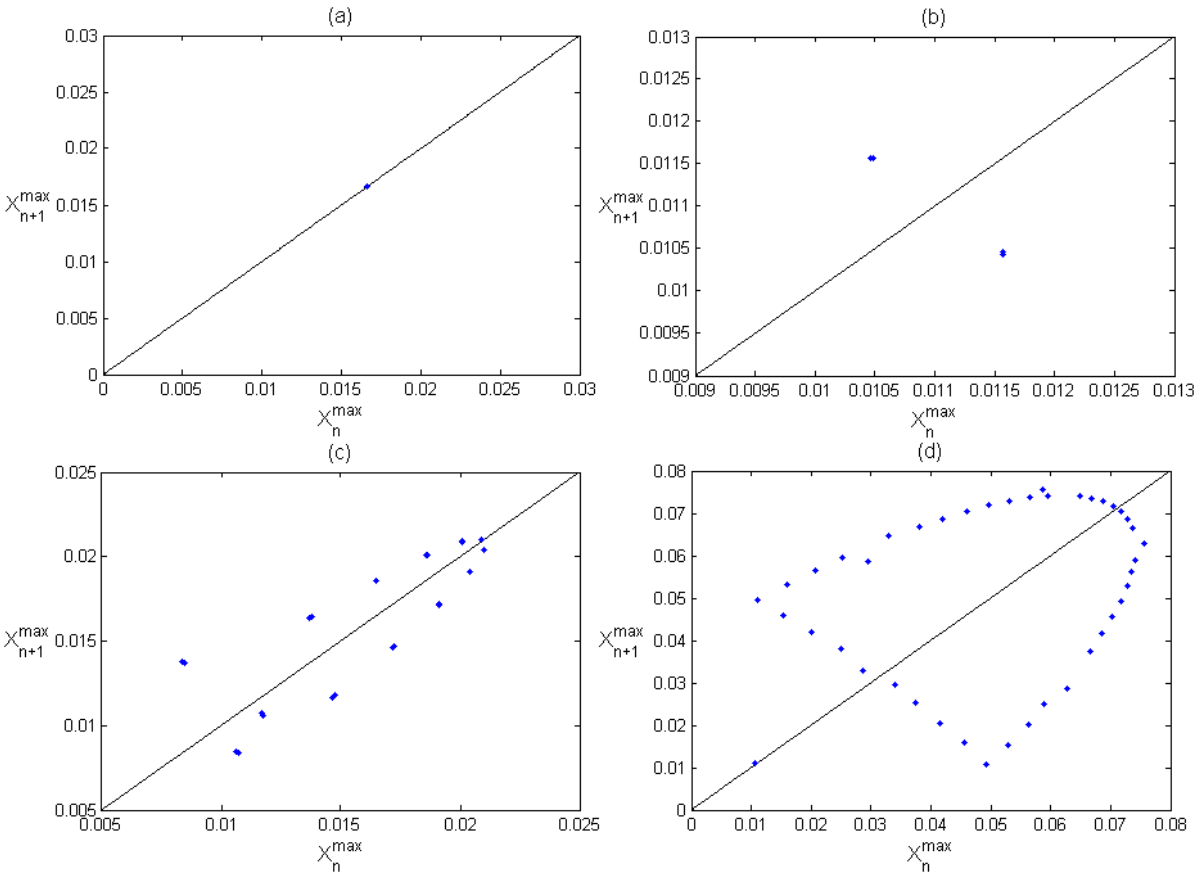

Figura 5.2.5: Mapa de primeiro retorno para a seção de Poincaré que contém os máximos da posição para os casos das Figuras 5.2.1 a 5.2.4, com mesmo intervalo temporal e transiente descartado.

Ainda para examinar a dinâmica sobre os pontos de bifurcação de Hopf dupla, construímos os mapas de primeiro retorno para a seção de Poincaré que contém os máximos da posição, $x_{n+1}^{\max} \times x_n^{\max}$, com $x > 0$. Na Figura 5.2.5 exibimos os mapas de primeiro retorno para os casos das Figuras 5.2.1 a 5.2.4 com o mesmo intervalo temporal e descartando o efeito transiente. Esses mapas indicam que os movimentos são, respectivamente, de período igual ao de oscilação, ao dobro, cerca de uma dezena e cerca de uma centena de vezes o período de oscilação, respectivamente. Na Figura 5.2.6 exibimos os mapas de primeiro retorno para

simulações com tempos 10 vezes maiores do que os tempos das simulações das Figuras 5.2.1 a 5.2.4, e descartando o efeito transiente. Comparando os casos (a) e (b) das Figuras 5.2.5 e 5.2.6, percebe-se que na verdade nesses casos o equilíbrio é fracamente estável[56, 57]. E comparando os casos (c) e (d) das Figuras 5.2.5 e 5.2.6 nota-se que, aumentando o intervalo temporal, surgem trechos de curvas, uma assinatura de que a dinâmica do sistema é quase periódica nesses casos.

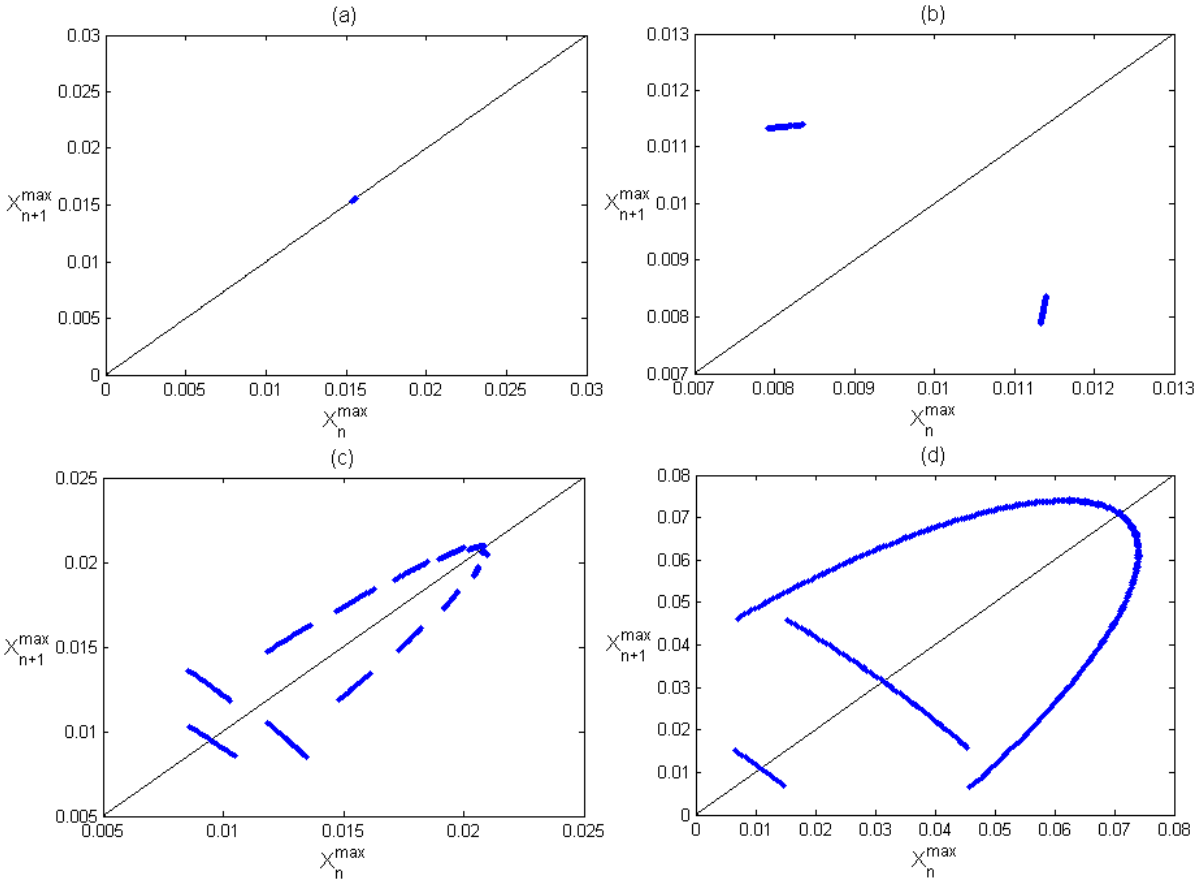

Figura 5.2.6: Mapa de primeiro retorno para a seção de Poincaré que contém os máximos da posição para os casos das Figuras 5.2.1 a 5.2.4, com intervalos temporais 10 vezes maiores e transiente descartado.

6
Equação Discreta

O principal objetivo desse capítulo é fazer a análise da estabilidade local para uma equação de diferença do tipo $x_{t+1} = F(x_t, x_{t-1}, x_{t-\tau-1})$, resultante de uma discretização simples da equação (1.0.3) e realizar um breve estudo para o caso mais simples com $\tau = 1$.

6.1 Estabilidade Local

Considerando que o retardo e o tempo são discretizados em unidades de tempo, o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = f(x(t-\tau)) - 2ay(t) - bx(t), \end{cases} \tag{6.1.1}$$

pode ser discretizado pela transformação $x(t) \to x_t$, $y(t) \to y_t$, $\dot{x}(t) \to x_{t+1} - x_t$, $\dot{y}(t) \to y_{t+1} - y_t$, $x(t-\tau) \to x_{t-\tau}$, sendo que agora $t \in \mathbb{Z}$ e $\tau \in \mathbb{N}^*$. Assim, o sistema (6.1.1) discretizado será dado por

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + y_t, \\ y_{t+1} = f(x_{t-\tau}) - bx_t + (1-2a)y_t. \end{cases} \tag{6.1.2}$$

Os pontos fixos (x^*, y^*) desse sistema discreto são obtidos impondo que $x_{t+1} = x_t = x^*$, $y_{t+1} = y_t = x^*$. Com isso, $x_{t-\tau} = x^*$ e obtemos que os pontos fixos são dados por $y^* = 0$ e $bx^* = f(x^*)$. Vamos analisar o caso $f(x) = \tanh(\alpha x)$, para o qual temos os mesmos pontos de equilíbrio obtidos na Seção 3.1 para o caso contínuo.

Para calcular as séries temporais de um sistema bidimensional de equações discretas do tipo

$$\begin{cases} x_{t+1} = F(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = G(x_t, y_t), \end{cases} \tag{6.1.3}$$

é necessário fornecer apenas um par de condições iniciais (x_0, y_0) . Já para calcular as séries temporais do sistema de equações (6.1.2) é necessário fornecer um conjunto de $(\tau + 1)$ pares de condições iniciais $\{(x_{-\tau}, y_{-\tau}), (x_{(1-\tau)}, y_{(1-\tau)}), \ldots, (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0)\}$.

Para investigar a estabilidade local dos pontos de equilíbrio devemos linearizar o sistema (6.1.2) em torno de um ponto de equilíbrio. Com esse intuito vamos definir as funções $X(x_t, y_t, x_{t-\tau}, y_{t-\tau}) = y_t$ e $Y(x_t, y_t, x_{t-\tau}, y_{t-\tau}) = f(x_{t-\tau}) - 2ay_t - bx_t$ e as matrizes

$$\boldsymbol{r}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_{t-\tau} = \begin{pmatrix} x_{t-\tau} \\ y_{t-\tau} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \tag{6.1.4}$$

e reescrever o sistema (6.1.2) na forma matricial

$$\boldsymbol{r}_{t+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_t, \boldsymbol{r}_{t-\tau}). \tag{6.1.5}$$

E para obter a aproximação linear do campo vetorial $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_\tau)$ num ponto fixo $\boldsymbol{r}^*$ vamos definir as seguintes matrizes Jacobianas[58] calculadas nesse ponto:

$$\boldsymbol{J}_t(\boldsymbol{r}^*) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x_t} & \frac{\partial X}{\partial y_t} \\ \frac{\partial Y}{\partial x_t} & \frac{\partial Y}{\partial y_t} \end{pmatrix}\right|_{\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{r}^*}, \quad \boldsymbol{J}_{t-\tau}(\boldsymbol{r}^*) = \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x_{t-\tau}} & \frac{\partial X}{\partial y_{t-\tau}} \\ \frac{\partial Y}{\partial x_{t-\tau}} & \frac{\partial Y}{\partial y_{t-\tau}} \end{pmatrix}\right|_{\boldsymbol{r}_t = \boldsymbol{r}^*}. \tag{6.1.6}$$

Dessa maneira, o sistema (6.1.5) linearizado em torno do ponto fixo $\boldsymbol{r}^*$ será

$$\boldsymbol{r}_{t+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}^*, \boldsymbol{r}^*) + \boldsymbol{J}_t(\boldsymbol{r}^*)(\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{r}^*) + \boldsymbol{J}_{t-\tau}(\boldsymbol{r}^*)(\boldsymbol{r}_{t-\tau} - \boldsymbol{r}^*), \tag{6.1.7}$$

ou ainda, usando que $\boldsymbol{r}^* = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}^*, \boldsymbol{r}^*)$, esse sistema discreto pode ser escrito explicitamente na forma:

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} - x^* \\ y_{t+1} - y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -b & (1-2a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t - x^* \\ y_t - y^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ f'(x^*) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-\tau} - x^* \\ y_{t-\tau} - y^* \end{pmatrix}. \tag{6.1.8}$$

Definindo a constante $d = f'(x^*) = \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha x^*)$ e deslocando o ponto fixo $\boldsymbol{r}^* = (x^*, y^*)$ para a origem definindo as variáveis $u_t = x_t - x^*$ e $v_t = y_t - y^*$, obtemos o sistema linear de equações de diferenças

$$\begin{cases} u_{t+1} = u_t + v_t, \\ v_{t+1} = du_{t-\tau} - bu_t + (1-2a)v_t. \end{cases} \tag{6.1.9}$$

Novamente, os três pontos fixos geram dois valores distintos para o parâmetro d, e vamos denotá-los por $d_0 = \alpha$ e $d_\pm = \alpha \sec^2(\alpha x_\pm^*)$. Da primeira equação do sistema (6.1.9) temos $v_t = u_{t+1} - u_t$, usando isso na segunda equação desse sistema o reduzimos no mapa unidimensional

$$u_{t+2} + 2(a-1)u_{t+1} + (1 + b - 2a)u_t - du_{t-\tau} = 0, \tag{6.1.10}$$

ou ainda,

$$u_{t+\tau+2} + 2(a-1)u_{t+\tau+1} + (1 + b - 2a)u_{t+\tau} - du_t = 0. \tag{6.1.11}$$

Para uma equação homogênea linear de diferença, como (6.1.11), podemos supor[59] que a solução é do tipo $u_t = \lambda^t$ com $\lambda \in \mathbb{C}$, ou seja, $u_{t+1} = \lambda u_t$. Substituindo esse ansatz na equação (6.1.11), e descartando a solução trivial nula, obtêm-se a equação característica

$$\lambda^{\tau+2} + 2(a-1)\lambda^{\tau+1} + (1+b-2a)\lambda^{\tau} - d = 0. \tag{6.1.12}$$

Se as $\tau + 2$ raízes dessa equação característica $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\tau+2}\}$ são distintas, a solução geral da equação (6.1.11) será da forma

$$u_t = \sum_{i=1}^{\tau+2} a_i \lambda_i, \quad \text{com} \quad a_i \in \mathbb{C}. \tag{6.1.13}$$

Agora, se existem apenas $n < \tau + 2$ raízes distintas $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ respectivamente com multiplicidades $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ tais que $\sum_{i=1}^{n} m_i = \tau + 2$, a solução da equação (6.1.11) será da forma

$$u_t = \sum_{i=1}^{\tau+2} (a_{i,0} + a_{i,1}t + a_{i,2}t^2 + \ldots + a_{i,n}t^n)\lambda_i^t, \quad \text{onde} \quad a_i,j \in \mathbb{C} \quad \text{com} \quad j = \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{6.1.14}$$

A equação característica (6.1.12) também pode ser obtida por outro método de linearização; reduzindo o mapa bidimensional (6.1.2) em um mapa de dimensão $\tau + 2$ obteremos informações adicionais sobre sua dinâmica[60]. Iniciamos esse método observando que, da primeira equação do sistema (6.1.9) temos $y_t = x_{t+1} - x_t$, e usando isso na segunda equação desse sistema o reduzimos no mapa unidimensional

$$x_{t+2} + 2(a-1)x_{t+1} + (1+b-2a)x_t - f(x_{t-\tau}) = 0, \tag{6.1.15}$$

ou ainda,

$$x_{t+1} = 2(1-a)x_t + (2a-b-1)x_{t-1} + f(x_{t-\tau-1}). \tag{6.1.16}$$

Agora, definindo os vetores

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{t+1}^{(1)} \\ x_{t+1}^{(2)} \\ \vdots \\ x_{t+1}^{(\tau+2)} \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t) = \begin{pmatrix} 2(1-a)x_t^{(1)} + (2a-b-1)bx_t^{(2)} + f\left(x_t^{(\tau+2)}\right) \\ x_t^{(1)} \\ \vdots \\ x_t^{(\tau+1)} \end{pmatrix}, \tag{6.1.17}$$

podemos reescrever a equação homogênea linear de diferença (6.1.11) na forma do sistema linear homogêneo de diferença e de dimensão $\tau + 2$:

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_t). \tag{6.1.18}$$

Esse sistema tem $\tau + 2$ equações acopladas que geram um espaço de fase de dimensão $\tau + 2$, e seus pontos fixos, $\boldsymbol{x}^*$, serão obtidos impondo que $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$. A versão linearizada desse sistema, na vizinhança de um ponto fixo $\boldsymbol{x}^*$, será dada por

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^*)(\boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*), \tag{6.1.19}$$

onde a matriz Jacobiana calculada no ponto fixo, $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^*)$, é dada por

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^*) = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.1.20}$$

sendo que

$$a_0 = 2(1-a), \quad b_0 = (2a - b - 1) \quad \text{e} \quad d = \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha x^*). \tag{6.1.21}$$

Com $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{x}^*$, definindo a matriz constante $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^*)$ e deslocando o ponto fixo para a origem definindo a variável $\boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}^*$ chegamos ao sistema

$$\boldsymbol{\xi}_{t+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_t. \tag{6.1.22}$$

Usando o ansatz $\boldsymbol{\xi}_{t+1} = \lambda\boldsymbol{\xi}_t$, com $\lambda \in \mathbb{C}$, na equação (6.1.21), tem-se a equação de autovalores

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_t = \lambda\boldsymbol{\xi}_t. \tag{6.1.23}$$

Logo, $(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{1})\boldsymbol{\xi}_t = \mathbf{0}$ e para que haja solução $\boldsymbol{\xi}_t$ não nula, devemos impor que

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\mathbf{1}) = 0. \tag{6.1.24}$$

Imposição essa, que também fornece a equação característica (6.1.12). Entretanto, nesse caso, λ é interpretado como um autovalor que está associado a um autovetor ξ.

Se para todos os autovalores da matriz Jacobiana calculada no ponto fixo $\boldsymbol{x}^*$ tivermos $|\lambda| < 1$, esse ponto fixo será assintoticamente estável, enquanto que, se para algum dos autovalores tivermos $|\lambda| > 1$, esse ponto fixo será instável. O teorema de Hartman-Grobman para mapas garante que a estabilidade local de um ponto de equilíbrio hiperbólico[1] de um sistema não linear é igual à estabilidade desse ponto na versão linearizada desse sistema[42, 55]. Agora, se para algum dos autovalores tivermos que $|\lambda| = 1$, pode-se tentar determinar a estabilidade desse ponto fixo não-hiperbólico utilizando a teoria da variedade central[42].

Agora, com as definições de estabilidade acima e o segundo método de linearização vamos obter outra importante informação sobre a estabilidade do sistema discreto (6.1.2). Note que, desenvolvendo o determinante da matriz Jacobiana (6.1.21) em colunas; tomando a última

[1] Nesse caso discreto, o ponto fixo x^* é dito hiperbólico se para todos autovalores tem-se $|\lambda| \neq 1$. Caso contrário, o ponto fixo é dito não hiperbólico.

coluna temos $\det(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^*)) = d(-1)^{2(\tau+2)}\det(\mathbf{1})$, de onde vem que $\det(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^*)) = d$. Nos casos em que a matriz Jacobiana $\boldsymbol{J}$ é diagonalizável, existe uma matriz invertível $\boldsymbol{P}$ tal que $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$, onde $\boldsymbol{D}$ é uma matriz diagonal e seus elementos correspondem aos autovalores da matriz Jacobiana $\boldsymbol{J}$. Com isso, usando que $\det(\boldsymbol{P}) = 1$ e $\det(\boldsymbol{D}) = \det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{J})\det(\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{P}^{-1})\det(\boldsymbol{J})\det(\boldsymbol{P})$ obtemos que $\det(\boldsymbol{J}) = \det(\boldsymbol{D})$. Assim, podemos relacionar o determinante da matriz Jacobiana com seus autovalores λ_i por

$$\det(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^*)) = \prod_i^{\tau+2} \lambda_i. \tag{6.1.25}$$

Tomando o valor absoluto da equação (6.1.25) temos que $|d| = \prod_i^{\tau+2} |\lambda_i|$, logo, quando nenhum autovalor é nulo o ponto fixo $\boldsymbol{x}^*$ será instável se $|d| > 1$.

6.2 Sistema Discreto Tridimensional

Nesta seção vamos analisar o caso particular mais simples, com $\tau = 1$, e examinar algumas das dinâmicas que o sistema discreto (6.1.2) pode oferecer. Nesse caso, o sistema não linear (6.1.18) fica

$$\begin{cases} x_{t+1}^{(1)} = a_0 x_t^{(1)} + b_0 x_t^{(2)} + \tanh(\alpha x_t^{(3)}), \\ x_{t+1}^{(2)} = x_t^{(1)}, \\ x_{t+1}^{(3)} = x_t^{(2)}, \end{cases} \tag{6.2.1}$$

Impondo que $x_{t+1}^{(n)} = x_t^{(n)} \equiv x_n^*$, para $n = \{1, 2, 3\}$ obtemos que nos pontos fixos $P_i = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ do sistema tridimensional (6.2.1) tem-se $x_1^* = x_2^* = x_3^* \equiv x^*$ e $x^* = a_0 x^* + b_0 x^* + \tanh(\alpha x^*)$, que fornecem a equação transcendental $bx^* = \tanh(\alpha x^*)$. Como vimos na Seção 3.1, para $b \geq \alpha$ essa equação transcendental terá apenas a raiz nula $x_0^* = 0$, e para $b < \alpha$ essa equação terá três raízes distintas x_-^*, x_0^* e x_+^*, sendo que $x_-^* = -x_+^*$. Portanto, os pontos fixos serão $P_0 = (0, 0, 0)$ e $P_\pm = (x_\pm^*, x_\pm^*, x_\pm^*)$ com $P_- = -P_+$.

E agora o determinante (6.1.24) fornece a equação característica

$$\lambda^3 - a_0\lambda^2 - b_0\lambda - d = 0. \tag{6.2.2}$$

Esse polinômio tem três raízes, sendo que uma é real, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, as outras duas formam um par complexo-conjugado, $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3 \in \mathbb{C}$, e são dadas por:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 2(M + N) + \dfrac{a_0}{3}, \\ \lambda_2 = \bar{\lambda}_3 = -(M + N) + \dfrac{a_0}{3} + \mathrm{i}\sqrt{3}(M - N), \end{cases} \tag{6.2.3}$$

onde

$$\begin{cases} M = \dfrac{1}{12}\left(8a_0^3 + 36b_0a_0 + 108d + 12\sqrt{12da_0^3 - 3b_0^2a_0^2 - 12b_0^3 + 54b_0a_0d + 81d^2}\right)^{1/3}, \\ N = \dfrac{(b_0 + a_0^2/3)}{12M}. \end{cases} \tag{6.2.4}$$

Quando, ao variarmos um parâmetro de controle, um ponto fixo hiperbólico se torna não hiperbólico, pode ocorrer uma bifurcação. Aqui vamos considerar apenas os casos de pontos fixos não hiperbólicos em que para um autovalor (ou para um par de autovalores complexo-conjugados) tem-se $|\lambda| = 1$ e os autovalores restantes possuem módulo menor que 1.

Considere o círculo unitário no plano $\mathrm{Re}\{\lambda\} \times \mathrm{Im}\{\lambda\}$. A bifurcação de duplicação de período (também conhecida como bifurcação *flip*) ocorre quando um autovalor, ou um par de autovalores, cruza o círculo unitário com parte imaginária nula em -1. Quando um autovalor, ou um par de autovalores, cruza o círculo unitário com parte imaginária nula em +1 ocorre ou uma bifurcação sela-nó, ou uma bifurcação de forquilha ou uma bifurcação transcrítica. A bifurcação de Neimark-Sacker (também conhecida como bifurcação de Hopf para mapas ou bifurcação de Hopf secundária) ocorre quando um par de autovalores, com parte imaginária não nula, deixa o círculo unitário.

Reescrevendo o sistema não linear (6.2.1) como a equação de diferença não linear retardada

$$x_{t+1} = a_0x_t + b_0x_{t-1} + \tanh(\alpha x_{t-2}), \tag{6.2.5}$$

vemos que para o caso $a = b = 1$ tem-se $a_0 = b_0 = 0$ e, com isso, a equação (6.2.5) fica $x_{t+1} = \tanh(\alpha x_{t-2})$. Desse modo, nas proximidades da origem, para $\alpha = 1$ temos aproximadamente $x_t = x_{t-3}$, período 3; e para para $\alpha = -1$ temos aproximadamente $x_t = -x_{t-3}$, período 6.

Na Figura 6.2.1 a série temporal da equação não linear (6.2.5) para o caso de período 3, onde $a = 1$, $b = 1$ e $\alpha = 1$, com condições iniciais $x_0 = 10^{-3}$, $x_{-1} = -10^{-3}$ e $x_{-2} = 10^{-2}$. E na Figura 6.2.2 mostramos uma simulação para o caso de período 6, onde $a = 1$, $b = 1$ e $\alpha = -1$, com condições iniciais $x_0 = 10^{-3}$, $x_{-1} = -10^{-3}$ e $x_{-2} = 10^{-2}$.

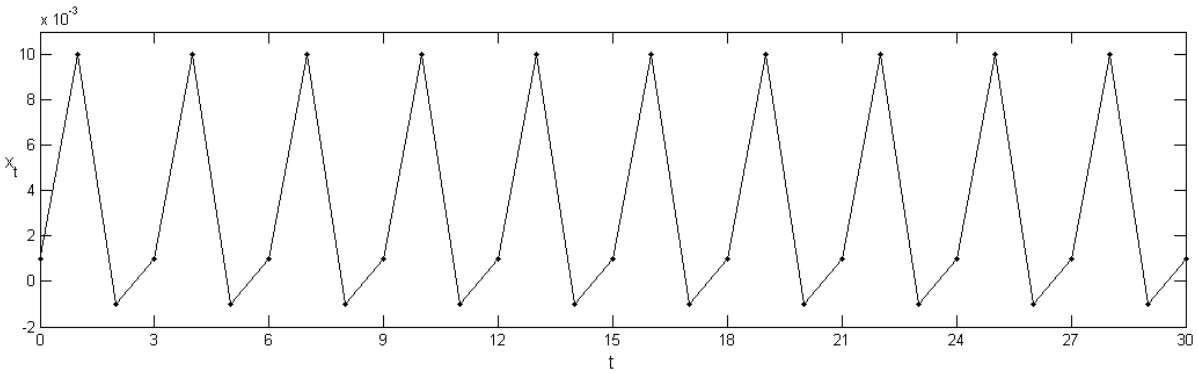

Figura 6.2.1: Série temporal do sistema (6.2.1) para $a = 1$, $b = 1$ e $\alpha = 1$, com condições iniciais $x_0 = 10^{-3}$, $x_{-1} = -10^{-3}$ e $x_{-2} = 10^{-2}$.

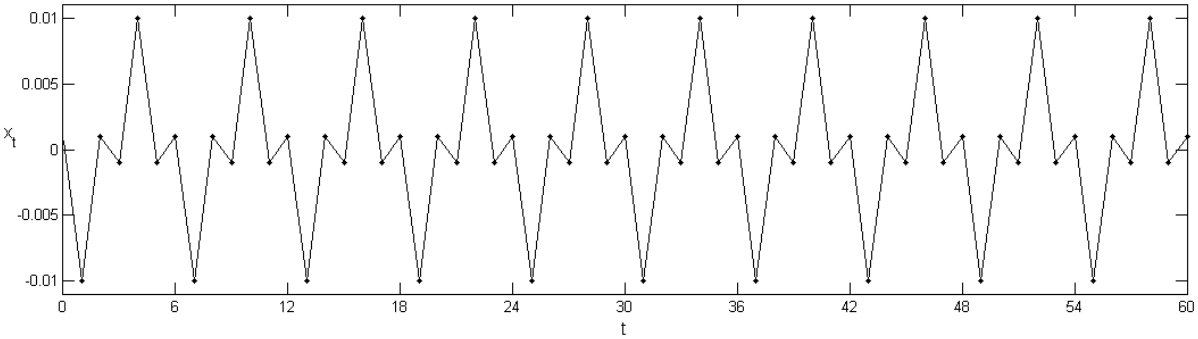

Figura 6.2.2: Série temporal do sistema (6.2.1) para $a = 1$, $b = 1$ e $\alpha = -1$, com condições iniciais $x_0 = 10^{-3}$, $x_{-1} = -10^{-3}$ e $x_{-2} = 10^{-2}$.

Na Figura 6.2.3 exibimos a série temporal da equação não linear (6.2.5) no caso onde $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \bar{\lambda}_3 = -1/4 + \mathrm{i}\sqrt{15}/4$, para os valores de parâmetros $a = 1{,}25$, $b = 2{,}5$ e $\alpha = 0$, com condições iniciais $x_0 = 10^{-3}$, $x_{-1} = -10^{-3}$ e $x_{-2} = 10^{-3}$. Nesse caso o ponto de equilíbrio é elíptico, com $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$, e o movimento é irregular. Tomando como parâmetro de bifurcação uma das possibilidades $\mu = \{a, b, d\}$, no ponto μ_0 em que ocorre a bifurcação de Neimark-Sacker, o par de autovalores complexo-conjugados pode ser escrito na forma polar $\lambda_{2,3}(\mu) = r(\mu)\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta(\mu)}$ e deve satisfazer $r'(\mu_0) \neq 0$ e $0 < \theta(\mu_0) < \pi$. Para esse caso, verificamos a ocorrência da bifurcação de Neimark-Sacker apenas para os parâmetros b e α, em suas direções crescentes.

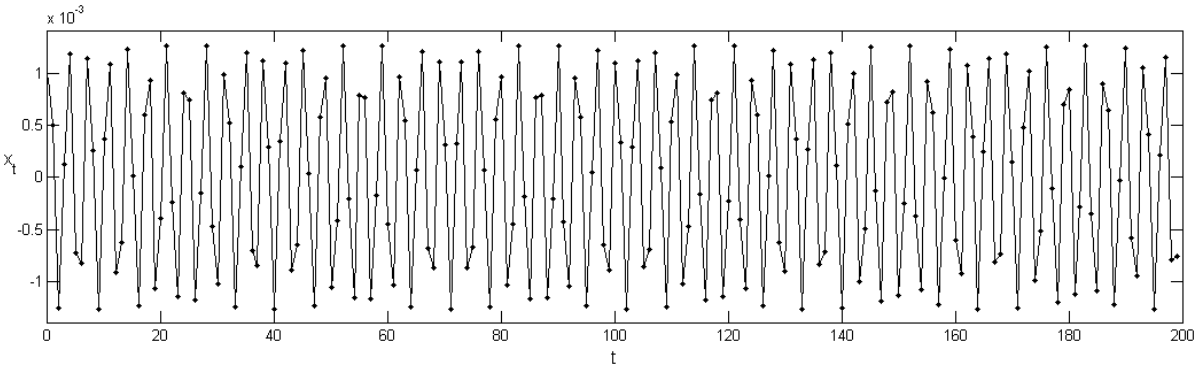

Figura 6.2.3: Série temporal do sistema (6.2.1) para $a = 1{,}25$, $b = 2{,}5$ e $\alpha = 0$, com condições iniciais $x_0 = 10^{-3}$, $x_{-1} = -10^{-3}$ e $x_{-2} = 10^{-3}$.

7
Discussão

Nos casos de retroalimentação positiva, apesar da força retardada ser do tipo repulsora, pelo fato de depender da posição no passado, ela pode atuar tanto como restauradora quanto como repulsora. Esse comportamento possibilita a estabilização dos pontos fixos $x_{\pm}^{*}$ e a existência de ciclos limite em alguns casos de retroalimentação positiva.

Para as cartas de estabilidade $\tau \times a$ da Figura 3.3.2, na região onde $\tau \ll 1$ com $\tau > 12a$ e $a \lll 1$ o ponto de equilíbrio é instável e verificamos a existência de ciclo limite estável, e na região onde $\tau < a \ll 1$ o ponto de equilíbrio é estável. Sendo assim, por um lado, a inclusão de um "pequeno" retardo na retroalimentação ($\tau \ll 1$ com $\tau > 12a$ e $a \lll 1$) pode causar mudanças bruscas na dinâmica do oscilador harmônico amortecido, fazendo com que a origem perca a estabilidade e gere um ciclo limite estável no espaço de fase (ocorrendo uma bifurcação de Hopf supercrítica), como alerta Kuang[8] "*Small Delays Can Have Large Effects*". Por outro lado, a inclusão de um retardo "muito pequeno" ($\tau < a \ll 1$) não altera a estabilidade do ponto fixo, como mostra Smith[19] "Small Delays Are Harmless". Dependendo do conjunto de parâmetros, esses efeitos de pequenos retardos também ocorrem em certas regiões para outras cartas de estabilidade, tanto para a retroalimentação negativa quanto para a positiva.

Na integração numérica das equações diferenciais com retardo utilizamos o pacote dde23, que é baseado no método de Runge-Kutta de terceira ordem BS(2,3)[48] e em uma interpolação cúbica de Hermite. No entanto, existem diversos métodos de integração numérica para equações com retardo, tais como o método θ, outros baseados no método de Runge-Kutta de quarta ordem, além de outros descritos em Jiaoxun e Yuhao[11] e Bellen e Zennaro[9].

Além do espaço de fase e mapas de primeiro retorno, pode-se utilizar o pseudo espaço de fase $(x, x_{\tau}, \dot{x})$ para examinar as características da bifurcação de Hopf dupla e verificar a existência de toros bidimensionais[30].

Nos casos em que o ponto de equilíbrio é neutramente estável, pode-se cacular o período aproximado, T, das soluções periódicas $T = 2\pi/\omega$ nas proximidades desse ponto de equilíbrio, onde ω é dado pelas equações (3.3.4) e (3.3.5). Dado um período T qualquer, para um conjunto

de parâmetros (a, b, d), a equação (3.3.15) mostra que existem infinitos (contáveis) valores para o retardo τ tais que o movimento nas proximidades do ponto de equilíbrio tem aproximadamente esse mesmo período.

Vimos no Capítulo 3 que, dado um sistema linear de equações com retardo obtido por meio de uma linearização de um sistema não linear em torno de um ponto fixo, o Teorema de Hartman-Grobman garante a equivalência topológica dos retratos de fase desses dois sistemas na vizinhança desse ponto fixo, apenas para os casos em que esse ponto de equilíbrio é hiperbólico. Para determinar a estabilidade dos pontos de equilíbrio não hiperbólicos (elípticos) pode-se utilizar a técnica de redução da variedade central. Essa técnica consiste em representar as equações diferenciais por meio de operadores, decompor o espaço de soluções, determinar as equações com operadores na forma adjunta, calcular a variedade central, fazer a projeção usando o espaço adjunto central e, finalmente, calcular a forma normal sobre a variedade central[61]. Com essa forma normal pode-se investigar as bifurcações envolvidas nos pontos de equilíbrio, tais como as bifurcações de Hopf subcrítica, supercrítica e dupla. Mostrar analiticamente que uma bifurcação de Hopf é subcrítica ou supercrítica, normalmente, é uma tarefa árdua[42].

Nos pontos de bifurcação de Hopf dupla existem dois pares de autovalores complexo-conjugados. Logo, é possível construir uma variedade quadridimensional nesses pontos. O fluxo sobre essa variedade representará o comportamento a longo prazo do sistema todo na vizinhança do ponto de bifurcação. Essa tarefa algebricamente desencorajadora[30] (para uma discussão veja Campbell *et al.*[31]) tem sido recentemente facilitada com o uso do *software* de manipulação algébrica MAPLE®[18].

Várias técnicas clássicas, tais como método de convergência, técnicas de variedade central, e forma normal tem sido usadas para estudar equações diferenciais com retardo[61,62]. O método de múltiplas escalas tem sido utilizado para determinar a estabilidade de pontos de equilíbrio elípticos[61–63].

Vimos que para alguns conjuntos de parâmetro, a origem x_0^* é instável, os pontos fixos simétricos $x_\pm^*$ são estáveis e existe um ciclo limite estável entre a origem e os pontos fixos $x_\pm^*$ e, por isso, espera-se que exista um ciclo limite instável na região entre o ciclo limite estável e os pontos fixos $x_\pm^*$. No entanto, não é possível localizar esse ciclo limite instável no espaço de fase integrando a equação (1.0.3); pois, além dele ser instável, não tem como definir as bacias de atração dos pontos fixos $x_\pm^*$ e do ciclo limite no espaço de fase, uma vez que cada solução depende da história dada, que consiste num conjunto infinito de condições iniciais.

Por meio de estudos analíticos e numéricos cumprimos o objetivo principal do presente trabalho: fizemos um esboço da dinâmica apresentada pela equação diferencial não linear com retardo (1.0.3), como função dos parâmetros a, b, α e τ. Obtivemos uma dinâmica rica, exibida nas diversas cartas de estabilidade e nos diagramas de bifurcação, onde verificamos a ocorrência da bifurcação de Hopf supercrítica, da bifurcação de forquilha supercrítica e da bifurcação de Hopf dupla. Além disso, foram observados ciclos limite estáveis e instáveis, ciclo limite duplo e multi-estabilidade.

Apesar do nosso objeto de estudo ter sido o sistema não linear (3.1.1), a estabilidade local prevista pelas cartas de estabilidade e pelos espectros de autovalores para os pontos fixos desse sistema, também se aplica ao único ponto fixo do sistema linear com retardo (3.1.6), a origem. Logo, o sistema linear (3.1.6) também gera uma dinâmica rica.

As simulações exibiram movimentos oscilatórios, periódicos e quase periódicos. A aparência de caos em sistemas de controle, redes neurais e sistemas fisiológicos tem sido mais associada ao tipo de retroalimentação mista do que à retroalimentação negativa ou positiva[64, 65]. Foi provado a existência de caos para a equação diferencial de segunda ordem com retardo $\ddot{x}(t) = f(x(t-\tau)) - bx(t)$ para o caso de uma retroalimentação mista[66]. Para o caso da equação (1.0.3) com retroalimentação mista também foi verificada a existência de toro bidimensional e caos[25, 26].

De um modo geral, os métodos e técnicas de análise expostos ao longo do texto podem ser aplicados a sistema de equações diferenciais não lineares de ordem n com retardos constantes. Segundo Baker[67], essa classe de sistemas é importante e ampla, pois funções com retardo constante ocorrem com muita frequência em modelagem na literatura.

8
Conclusão

Neste trabalho vimos técnicas e métodos para analisar a dinâmica da equação diferencial não linear com retardo constante (1.0.3).

A existência e unicidade da solução da equação (1.0.3) foram demonstradas baseadas, essencialmente, no fato da função $f(x_\tau) = \tanh(\alpha x_\tau)$ e as histórias serem localmente Lipschitz contínuas. Usando o método de passos mostramos que ocorre a suavização da solução da equação (1.0.3) a medida que o tempo cresce.

A linearização da equação (1.0.3) em torno de seus pontos de equilíbrio forneceu uma equação característica do tipo $E(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + b - d\mathrm{e}^{-\lambda\tau} = 0$. Como consequência da função $E(\lambda)$ ser analítica no plano complexo, vimos que o espectro de autovalores dessa equação é discreto e, no máximo, enumerável. Calculando as raízes dessa equação característica e separando os casos onde o autovalor é um número real e um número imaginário puro, construímos as curvas das cartas de estabilidade $\tau \times a$, $\tau \times b$ e $\tau \times d$, e determinamos suas regiões de instabilidade e estabilidade. Usando o caso onde o autovalor é um número complexo qualquer, vimos como obter explicitamente os espectros de autovalores e as regiões em que esses espectros de autovalores estão limitados. Para um caso particular foram calculados 24 pares de autovalores complexo-conjugados. Realizando simulações numéricas verificamos a estabilidade dos pontos fixos e a existência dos ciclos limite estáveis previstos em todas as cartas de estabilidade. No entanto, apenas nas cartas de estabilidade com retroalimentação positiva das Figuras 3.3.3 (b) e (d) acredita-se que existam os ciclos limite instáveis previstos. Nesses casos, ocorreu a multi-estabilidade entre os pontos fixos $x_\pm^*$ estáveis e o ciclo limite estável existente.

As bifurcações de Hopf supercrítica, e a bifurcação supercrítica de forquilha foram previstas usando as cartas de estabilidade e verificadas numericamente para a equação (1.0.3). Usando a simetria espacial presente na equação (1.0.3) vimos que não pode ocorrer a bifurcação sela-nó e a bifurcação transcrítica nesse sistema. Orientados pelas cartas de estabilidade e pelas condições de ressonância encontramos numericamente alguns pontos de bifurcação de Hopf

dupla com ressonância forte e fraca. Por meio de séries temporais, dos espaços de fase e dos mapas de primeiro retorno verificamos a existência de ciclos limite, ciclos limite duplo, e movimentos quase periódicos com e sem batimentos.

Uma simples discretização do sistema de equações (2.1.1) levou a um sistema de equações de diferença $\boldsymbol{\xi}_{t+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_t$ de dimensão $\tau + 2$, sendo que nesse caso $\tau \in \mathbb{N}^*$. Para o caso mais simples com $\tau = 1$ a análise da estabilidade local mostrou uma dinâmica simples; com soluções de período aproximadamente 3 e 6, soluções irregulares, e a ocorrência da bifurcação de Neimark-Sacker.

Os nossos estudos foram feitos para retroalimentação negativa ou positiva com $f(x_\tau) = \tanh(\alpha x_\tau)$, mas também podem ser facilmente estendidos para outras funções $f(x_\tau)$, inclusive para retroalimentação mista, tal como a proposta por Milton e Ohira[35]. Para trabalhos futuros pode-se realizar a redução da variedade central para esses casos de retroalimentação e, em seguida, usar a forma normal para determinar a estabilidade dos pontos fixos elípticos

Referências Bibliográficas

[1] V. Kolmanovskii and A. Myhkis. *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Kluwer Academic Publishers, 1999.

[2] G. S. Ladde; V. Lakshmikantham and B. G. Zhang. *Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Marcel Dekker Inc., 1987.

[3] E. Pinney. *Ordinary Difference-Differential Equations*. University of California Press, 1958.

[4] L. E. El'sgol'ts. *Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments*. Holden-Day, Inc., 1966.

[5] K. Gopalsamy. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*. Kluwer Academic Publishers, 1992.

[6] J. K. Hale and S. M. V. Lunel. *Introduction to Functional Differential Equations*. Springer-Verlag, 1993.

[7] O. Diekmann; S. A. van Gils; S. M. Verduyn Lunel and H.-O. Walther. *Delay Equations: Functional-, Complex-, and Nonlinear Analysis*. Springer-Verlag, 1995.

[8] Y. Kuang. *Delay Differential Equations: With Applications in Population Dynamics*. Academic Press, Inc., 1993.

[9] A. Bellen and M. Zennaro. *Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Oxford University Press, 2003.

[10] A. Beuter; L. Glass; M. C. Mackey and M. S. Titcombe, editors. *Nonlinear Dynamics in Physiology and Medicine*. Springer-Verlag, 2003.

[11] K. Jiaoxun and C. Yuhao. *Stability of Numerical Methods for Delay Differential Equations*. Science Press, 2005.

[12] O. Arino; M. L. Hbid and E. Ait Dads, editors. *Delay Differential Equations and Applications*. Springer, 2006.

[13] W. Michiels and S.-I. Niculescu. *Stability and Stabilization of Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach*. Society for Industrial Mathematics, 2007.

[14] J. Chiasson and J. J. Loiseau. *Applications of Time Delay Systems*. Springer-Verlag, 2007.

[15] N. MacDonald; C. Cannings and F. C. Hoppensteadt. *Biological Delay Systems: Linear Stability Theory*. Cambridge University Press, 2008.

[16] J. J. Loiseau; W. Michiels; S.-I. Niculescu and R. Sipahi. *Topics in Time Delay Systems Analysis, Algorithms and Control*. Springer-Verlag, 2009.

[17] T. Erneux. *Applied Delay Differential Equations*. Springer, 2009.

[18] B. Balachandran; T. Kalmar-Nagy and D. E. Gilsinn, editors. *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*. Springer-Verlag, 2009.

[19] H. Smith. *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences*. Springer, 2010.

[20] M. C. Mackey and J. G. Milton. Feedback, delays and the origin of blood cell dynamics. *Comments Theoretical Biology*, 1:299–327, 1990.

[21] R. Vallée; P. Dubois; M. Côté and C. Delisle. Second-order differential-delay equation to describe a hybrid bistable device. *Physical Review A*, 36:1327–1332, 1987.

[22] D. W. Wu and C. R. Liu. An analytical model of cutting dynamics. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 17:107–111, 1985.

[23] B. S. Berger; M. Rokni and I. Minis. Complex dynamics in metal cutting. *Quarterly of Applied Mathematics*, 51:601–612, 1993.

[24] G. Stépán. Modelling nonlinear regenerative effects in metal cutting. *Philosophical Transactions A*, 359:739–757, 2001.

[25] E. Boe and H. C. Chang. Dynamics of delayed systems under feedback control. *Chemical Engineering Science*, 44:1281–1294, 1989.

[26] E. Boe and H. C. Chang. Transition to chaos from a two-torus in a delayed feedback system. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 1:67–81, 1991.

[27] A. Longtin and J. G. Milton. Modelling autonomous oscillations in the human pupil light reflex using non-linear delay-differential equations. *Bulletin of Mathematical Biology*, 51(5):605–624, 1989.

[28] J. G. Milton and A. Longtin. Evaluation of pupil constriction and dilation from cycling measurements. *Vision Research*, 30(4):515–525, 1990.

[29] T. Erneux and T. Kalmár-Nagy. Nonlinear stability of a delayed feedback controlled container crane. *Journal of Vibration and Control*, 13:603–616, 2007.

[30] S. A. Campbell; J. Bélair; T. Ohira and J. Milton. Complex dynamics and multistability in a damped harmonic oscillator with delayed negative feedback. *Chaos*, 5:640–645, 1995.

[31] S. A. Campbell; J. Bélair; T. Ohira and J. Milton. Limit cycles, tori and complex dynamics in a second-order differential equation with delayed negative feedback. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 7:213–236, 1995.

[32] K. L. Cooke and Z. Grossman. Discrete delay, distributed delay and stability switches. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 86:592–627, 1982.

[33] D. E. Gilsinn. Estimating critical hopf bifurcation parameters for a second-order delay differential equation with application to machine tool chatter. *Nonlinear Dynamics*, 30:103–154, 2002.

[34] Y. Song; T. Zhang and M. O. Tadé. Stability and multiple bifurcations of a damped harmonic oscillator with delayed feedback near zero eigenvalue singularity. *Chaos*, 18(4):0431131–0431139, 2008.

[35] J. G. Milton and T. Ohira. Dynamics of neuro-muscular control with delayed displacement-dependent feedback. *Proceedings of the first World Congress of Nonlinear Analysis '92*, 4:3085–3094, 1995.

[36] R. Bellman and K. L. Cooke. *Differential-Difference Equations*. Academic Press, Inc., 1963.

[37] R. D. Driver. *Ordinary and Delay Differential Equations*. Springer-Verlag, 1977.

[38] S.-I. Niculescu and K. Gu, editors. *Advances in Time-Delay Systems*. Springer-Verlag, 2004.

[39] J. De Luca. Double-slit and electromagnetic models to complete quantum mechanics. *Arxiv preprint arXiv:1006.3197v5*, 2010.

[40] D. W. Jordan and P. Smith. *Nonlinear Ordinary Differential Equations*. Oxford University Press, 2007.

[41] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley, 1994.

[42] L. H. A. Monteiro. *Sistemas Dinâmicos*. Livraria da Física, 2006.

[43] R. V. Churchill. *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill, 1976.

[44] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1970.

[45] N. Fiedler-Ferrara and C. P. C. do Prado. *Caos - Uma Introdução*. Edgard Blücher, 1995.

[46] L. F. Shampine and S. Thompson. Solving ddes in matlab. *Applied Numerical Mathematics*, 37:441–458, 2001.

[47] L. F. Shampine; I. Gladwell and S. Thompson. *Solving ODEs with MATLAB*. Cambridge University Press, 2003.

[48] P. Bogacki and L. F. Shampine. A 3(2) pair of runge–kutta formulas. *Applied Mathematics Letters*, 2:321–325, 1989.

[49] L. F. Shampine; R. C. Alen and Jr. S. Pruess. *Fundamentals of Numerical Computing*. John Wiley & Sons, Inc., 1997.

[50] L. F. Shampine; S. Thompson and J. Kierzenka. Solving delay differential equations with dde23. *www.mathworks.com/dde_tutorial*, 2002.

[51] L. F. Shampine. Solving odes and ddes with residual control. *Applied Numerical Mathematics*, 52:113–127, 2005.

[52] S. A. Campbell and V. G. LeBlanc. Resonant hopf-hopf interactions in delay differential equations. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 10:327–346, 1998.

[53] T. Kalmár-Nagy; G. Stépán and F. C. Moon. Subcritical hopf bifurcation in the delay equation model for machine tool vibrations. *Nonlinear Dynamics*, 26:121–142, 2001.

[54] J. Xu and K. W. Chung. Double hopf bifurcation with strong resonances in delayed systems with nonlinearities. *Mathematical Problems in Engineering*, 2009:759363, 16 pages, 2009.

[55] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer-Verlag, 1983.

[56] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1998.

[57] Y. A. Kuznetsov. Andronov-hopf bifurcation. *Scholarpedia*, 1(10):1858, 2006.

[58] M. R. Roussel. Delay-differential equations. *http://people.uleth.ca/~roussel/nld/delay.pdf*, 2005.

[59] S. Elaydi. *An Introduction to Difference Equations*. Springer, 2005.

[60] T. Buchner and J. J. Zebrowski. Logistic map with a delayed feedback: Stability of a discrete time-delay control of chaos. *Physical Review E*, 63:016210, 2000.

[61] A. H. Nayfeh. Order reduction of retarded nonlinear systems - the method of multiple scales versus center-manifold reduction. *Nonlinear Dynamics*, 51:483–500, 2008.

[62] S. L. Das and A. Chatterjee. Second order multiple scales for oscillators with large delay. *Nonlinear Dynamics*, 39:375–394, 2005.

[63] S. L. Das and A. Chatterjee. Multiple scales without center manifold reductions for delay differential equations near hopf bifurcations. *Nonlinear Dynamics*, 30:323–335, 2002.

[64] L. Glass and C. P. Malta. Chaos in multi-looped negative feedback systems. *Journal of Theoretical Biology*, 145:217–223, 1990.

[65] J. C. B. Figueiredo; L. Diambra; L. Glass and C. P. Malta. Chaos in two-loop negative feedback systems. *Physical Review E*, 65:051905, 2002.

[66] U. an der Heiden and W. Bayer. Chaos proved for a second-order difference differential equation. *Nonlinear Analysis*, 48:461–474, 2002.

[67] C. T. H. Baker; C. A. H. Paul and D. R. Willé. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations. *Advances in Computational Mathematics*, 3:171–196, 1995.