

# UM ESTUDO SOBRE O DECAIMENTO

$$D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$$

Patrícia Camargo Magalhães

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

**Grhafte**

(Grupo de Hádrons e Física Teórica)

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Março de 2014



à Ciça, Marcos,

Bia e Pipa



# Agradecimentos

Gostaria agradecer as muitas pessoas que de alguma forma compartilharam essa longa caminhada comigo: os amig@s de uma vida, @s companheiro de luta por uma universidade e uma ciência mais democrática, @s parceiro da física e as amigas do basquete. São algumas Marias, Lígias, Thaises, Gabis, Maris, Lauras, .... , que sempre me incentivaram a seguir adiante. I also would like to thank my friends from The University of Manchester for the kind reception and friendship.

Em especial agradeço:

- Ao professor Mané, por sua orientação sempre dedicada e ensinamentos que ao longo desses 10 anos de trabalho juntos me guiaram não somente no desenvolvimento desta pesquisa.
- To professor Mike Birse for the supervision and teachings during a year I spent at The University of Manchester.
- À meus pais Marcos e Ciza e minha irmã Bia pelo apoio incondicional sempre.
- Ao Maurício pelo amor e apoio infinito.
- Aos amigos da física que compartilharam a complexidade do dia a dia e me ajudaram em momentos cruciais: Priscila, Henrique, Jáiro, Diogos, Gabriel e Davi.
- À todos os professores, funcionários e em especial aos colegas do GRHAFITE, por proporcionarem um ambiente sempre muito enriquecedor e amigável.
- À FAPESP e à CAPES pelo apoio financeiro sem o qual este trabalho não seria possível.



# Resumo

Este estudo é dedicado ao entendimento do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . Desenvolvemos dois modelos que abordam aspectos complementares dos principais processos dinâmicos que atuam em tal decaimento: o vértice fraco, onde ocorre a transição  $c \rightarrow Ws$ , e as interações entre os três mésons no estado final. Este trabalho foi motivado por um resultado experimental importante sobre o decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , no qual a fase em onda S de um par  $K\pi$  do estado final não coincide com a fase do espalhamento  $K\pi$  livre, chamado *puzzle* das fases. No primeiro modelo, as interações de estado final foram descritas por sucessivos reespalhamentos dos pares  $K\pi$ , enquanto o vértice fraco foi aproximado por uma função sem estrutura. O espalhamento  $K\pi$  é um ingrediente fundamental e é calculado usando uma lagrangiana efetiva quirial com ressonâncias. As amplitudes do decaimento são calculadas perturbativamente, até a segunda ordem do reespalhamento  $K\pi$ , para as três topologias acessíveis ao sistema. Os resultados do primeiro modelo mostram a importância das interações de estado finais, sendo o efeito da interação própria de três corpos essencial para a boa descrição dos dados experimentais obtida a partir de uma das topologias. No segundo modelo, o vértice fraco do decaimento é calculado a partir de uma teoria efetiva que acopla o setor leve de  $SU(3)$  ao setor do charme e descreve todas as interações, fortes e fracas, entre os dois setores. Esse modelo inclui a dependência correta de momento nos vértices e contém essencialmente três melhorias: (i) incorpora corretamente a estrutura de onda P no vértice fraco ao usar correntes do tipo  $V^\mu - A^\mu$ ; (ii) inclui o vértice  $V_{DK}^\mu$  parametrizado em termos de fatores de forma monopulares; e (iii) inclui no vértice  $V_{\pi\pi}^\mu$  a transição  $W \rightarrow \pi\pi$  intermediada pela ressonância  $\rho$ , o que dá origem a um fator de forma forte. Os resultados do segundo modelo mostram que o efeito dos fatores de forma no vértice  $D \rightarrow K$  são pequenos e mais importantes em altas energias. A inclusão do méson  $\rho$  como uma ressonância é muito

significativa e desloca a fase para  $\approx -90^\circ$  no limiar, o que explica o comportamento qualitativo dos dados experimentais na mesma região.



# Abstract

This study describes the  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  decay. We developed two models for complementary issues of the main dynamic process in this system: the weak vertex, where the transition  $c \rightarrow Ws$  takes place, and the interactions between the three mesons in the final state. This work was motivated by important experimental results for  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  decay in which the S wave phase for a  $K\pi$  pair in the final state does not agree with the phase from  $K\pi$  free scattering amplitude, which is here named phase puzzle. In the first model, the interaction in the final states are treated as successive rescattering between  $K\pi$  pairs, and the weak vertex is approximated as structureless functions. The  $K\pi$  amplitude is a fundamental ingredient and is calculated using an effective quiral lagrangian with resonances. The decay amplitudes were solved perturbatively up to second order in  $K\pi$  rescattering for all the three topologies that can contribute. The results for the first model show the importance of final state interactions where the proper three body effect are essential for the good description of experimental data, obtained from one of the topologies. In the second model, the weak vertex is calculated using an effective theory that couples the light  $SU(3)$  sector to the charm sector and describes all interactions, strong and weak, between the two sectors. This model includes the correct momentum dependences at vertices and contain mainly three improvements: (i) correctly incorporates the P- wave momentum structure in the vertex through the use of  $V^\mu - A^\mu$  currents; (ii) includes  $V_{DK}^\mu$  vertex parametrized by monopoles form factors; and (iii) includes in the  $V_{\pi\pi}^\mu$  vertex the  $W \rightarrow \pi\pi$  transition intermediated by a  $r$  resonance, which gives rise to a strong form factor. The results for the second model show that the form factors effects on  $D \rightarrow K$  vertex are small and more important at higher energy. The inclusion of the  $\rho$  meson as a resonance is very significant and dislocates the phase shift from zero to  $\approx -90^\circ$  at threshold, which explains the qualitative experimental data

behaviour in the same region.

# Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vii
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Panorama experimental	4
1.2 Decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$	7
1.2.1 Vértice Fraco	8
1.2.2 Interações de estado final	14
<b>2 Amplitude de espalhamento <math>K\pi</math></b>	<b>17</b>
2.1 Amplitude em árvore	18
2.1.1 <i>kernel</i> da interação	23
2.2 Amplitude unitária	27
2.3 Comparação com os dados experimentais	29
2.3.1 onda S, $I = 1/2$	29
2.3.2 onda P, $I = 1/2$	33
2.3.3 onda S, $I = 3/2$	35
2.4 Polos da amplitude $K\pi$	35
2.5 Representação alternativa da amplitude $K\pi$	37
2.6 Extensão dos dados	37
<b>3 Primeiro modelo: FSI</b>	<b>41</b>
3.1 Vértice Fraco sem estrutura	43
3.2 Solução perturbativa	43
3.3 Resultados	50
<b>4 Segundo modelo: vértice fraco</b>	<b>55</b>
4.1 Vértice $\langle \bar{K}^0   V^\mu   D^+ \rangle$	57

4.2	Vértice $\langle \pi^+ \pi^0   V^\mu   0 \rangle$ . . . . .	62
4.3	Amplitude - $\rho$ sem largura . . . . .	64
4.3.1	Resultados . . . . .	68
4.4	A largura do $\rho$ . . . . .	72
4.4.1	$D^+ \rightarrow \pi^0 \pi^+ \bar{K}^0$ em árvore . . . . .	76
4.5	Amplitude - $\rho$ com largura . . . . .	77
4.5.1	Resultado - a convergência da série $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 \pi^0 \pi^+$ . . . . .	79
4.5.2	Resultados - a amplitude $K\pi$ . . . . .	81
4.5.3	Resultados - a largura do $\rho$ . . . . .	83
4.6	Amplitude cruzada - onda S . . . . .	84
4.6.1	Amplitude - onda P . . . . .	86
4.6.2	Onda S - canais direto e cruzado: resultados . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Conclusão e perspectivas</b> . . . . .	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Cinemática</b> . . . . .	<b>105</b>
A.1	Dois Corpos . . . . .	105
A.2	Três Corpos . . . . .	107
A.3	Projeção no referencial do par 12 . . . . .	108
A.4	Diagrama de Dalitz . . . . .	109
<b>B</b>	<b>Resultados para o sistema <math>K\pi</math></b> . . . . .	<b>111</b>
B.1	SU(3) . . . . .	111
B.2	Isospin do sistema $K\pi$ . . . . .	114
B.3	Projeção da amplitude $K\pi$ em onda S . . . . .	116
B.4	Ajuste para três ressonâncias . . . . .	117
B.5	Extensão Analítica . . . . .	119
<b>C</b>	<b>Integrais de <i>loop</i></b> . . . . .	<b>123</b>
C.1	Bolha . . . . .	123
C.2	Bolha Tensorial . . . . .	132
C.3	Triângulo $I_{xyz}$ . . . . .	134
C.3.1	Resultados . . . . .	145
C.4	Caixa . . . . .	147
C.5	Integrais tensoriais para onda P . . . . .	150
<b>D</b>	<b>Espalhamento elástico <math>\pi\pi</math></b> . . . . .	<b>155</b>
<b>E</b>	<b>Vértice axial</b> . . . . .	<b>159</b>
E.1	Amplitude . . . . .	159

E.2	Fatores de Forma . . . . .	163
E.2.1	Limite $M_{D^*}^2$ e $M_{D_s}^2$ para o infinito . . . . .	166
E.2.2	Resultado preliminar . . . . .	167
<b>F</b>	<b>Valores numéricos</b>	<b>171</b>



# Lista de Figuras

1.1	Fase em onda S do par $K\pi$ : obtida pelas colaborações FOCUS[5] (triângulo) e E791[4] (círculo) no decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ ; obtida pela colaboração LASS [6] no espalhamento livre (quadrado). . . . .	4
1.2	Diagrama de Daliz para o decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ retirado de [4]. . . . .	6
1.3	Representação esquemática do decaimento do méson pesado em $K\pi\pi$ ; o primeiro diagrama representa a amplitude partônica (rosa) e os demais, o reespalhamento hadrônico. . . . .	7
1.4	Diagramas de Feynman retirados de [26], que representam as diferentes formas de interação em um decaimento fraco de um méson pesado em dois leves; as linhas de glúons foram omitidas. . . . .	9
1.5	Diagramas de Feynman permitidos de cor, em diferentes processos hadronizados no estado final. . . . .	10
1.6	Diagrama de Feynman que mostra o efeito da transformação de Fierz[27]. A cor vermelha evidencia a troca de correntes e o méson $W^0$ é fictício. . . . .	10
1.7	Diagramas de Feynman suprimido de cor, em diferentes processos de hadronização no estado final. . . . .	11
1.8	Diagramas de Feynman para o acoplamento axial $\langle K\pi A^\mu D\rangle$ ; A linha pontilhada azul representa ressonâncias da família $K^*$ que decaem em $K\pi$ . . . . .	13
1.9	Diagramas de Feynman para o acoplamento vetorial $\langle K V^\mu D\rangle$ ; o $D_s^*$ pode ser $D_s^*(2100)$ ou $D_{s0}^*(2300)$ . . . . .	14
1.10	Diagrama principal de modelos de FSI na aproximação de quase dois corpos, ou $2 + 1$ . . . . .	15
2.1	Diagramas de Feynman da interação $K\pi$ . . . . .	19
2.2	O vértice de contato da interação $K\pi$ . . . . .	19
2.3	Comparação numérica das estruturas que compõem o <i>kernel</i> da onda S com $I = 1/2$ . . . . .	25
2.4	projeções na onda S que compõem o <i>kernel</i> com $I = 1/2$ . . . . .	25
2.5	Elementos que compõem o <i>kernel</i> da onda P em $I = 1/2$ . . . . .	26

2.6	<i>kernel</i> da amplitude $I = 1/2$ . . . . .	27
2.7	Equação de Bethe-Salpeter simplificada. . . . .	27
2.8	Módulo da amplitude $K\pi$ da onda S com $I = 1/2$ , $ T_{1/2} $ : equação (2.41) (verde), $L$ representa a contribuição do termo de contato (2.30) (azul), $c_d$ e $c_m$ são os respectivos termos da equação (2.31) (vermelho), obtidos zerando um de cada vez. . . . .	30
2.9	Fase da amplitude $K\pi$ equação (2.41) com 3 conjuntos de parâmetros: linha cheia (2.45), tracejada (2.46) e pontilhada (2.47), comparadas com os dados experimentais da colaboração LASS[6] e Estrabrooks <i>et. al</i> [7]. . .	31
2.10	Fase $K\pi$ na onda S com $I=1/2$ (2.41), comparada com os dados do LASS[6].	32
2.11	Módulo $K\pi$ no canal $I=1/2$ para onda S comparada com os dados do LASS[6] normalizados pelo fator $16\pi/\rho(s)$ . . . . .	33
2.12	Fase da amplitude do espalhamento $K^-\pi^+$ $I = 1/2$ na onda P comparada com os dados experimentais do LASS[6]. . . . .	34
2.13	módulo da amplitude unitária do espalhamento $K^-\pi^+$ $I = 1/2$ na onda P comparada com os dados experimentais da colaboração LASS[6]. . . . .	34
2.14	Fase a amplitude de isospin $3/2$ em onda S comparada como LASS[6]. . . . .	35
2.15	Dois polos em $ D(s) $ no plano $s$ -complexo. . . . .	36
2.16	Apenas um polo em $ D(s) $ no plano $s$ -complexo. . . . .	37
2.17	Componentes real ( linha cheia ) e imaginária ( linha tracejada) da amplitude $K\pi$ da eq.(2.39)(azul) e na representação em função dos polos (PR), eq.(2.50) (vermelho). . . . .	38
2.18	Fase e módulo do espalhamento $K\pi$ em onda S; as funções híbridas são dadas pela curva teórica até o primeiro dado experimental e depois passam a ser descritas pelos próprios dados da colaboração LASS[6]. . . . .	38
2.19	Fase e módulo do espalhamento $K\pi$ em onda P; as funções híbridas são dadas pela curva teórica até o primeiro dado experimental e depois passam a ser descritas pelos próprios dados da colaboração LASS[6]. . . . .	39
3.1	Modelo para o $D$ decaindo em $K\pi\pi$ , iniciando no vértice fraco (W) e incluindo FSI. . . . .	41
3.2	série de reespalhamento que implementa unitariedade em três corpos. . . .	42
3.3	As topologias do vértice fraco consideradas no cálculo de $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ ; a linha ondulada representa o $W^+$ que vira um ponto no cálculo. . . . .	43
3.4	Amplitude da série perturbativa. . . . .	44
3.5	Diagrama da evolução em FSI do vértice fraco $W_a$ ; a linha ondulada é $W^+$ , sempre conectada a um $\pi^+$ ; O par $\pi\bar{K}$ produzido no lado oposto pode ser neutro ou carregado. . . . .	47



3.6	Diagrama do vértice fraco $W_b$ ; a curva ondulada é $W^+$ , sempre grudada a um $\pi^+$ e a linha pontilhada é uma ressonância escalar, cuja largura é dada pela subestrutura $R$ descrita na linha de baixo. . . . .	48
3.7	Diagramas que compõem $A_c$ até dois loops; um pión que sai do $W^+$ é neutro o outro carregado. . . . .	50
3.8	Fase da contribuição dominante: $A_a$ e $A_b$ se sobrepõem aos dados experimentais do LASS[6] (diamante) de espalhamento $K\pi$ ; $A_c$ deslocado de $-163^\circ$ descreve os dados da FOCUS [5](triângulo) e E791[18](círculo) na região elástica (pontilhada vertical). . . . .	51
3.9	Fase $K\pi$ das amplitudes em $N = 2$ : $A_a$ (azul), $A_b$ (laranja) e $A_c$ (azul); com as contribuições relativas a $\lambda'_1$ (traço- pontilhada), $\lambda'_2$ (tracejada) e $a_{b2}$ (pontilhada); comparadas aos dados experimentais das colaborações FOCUS [5] (triângulo) e LASS[6] (diamante). . . . .	52
3.10	Módulo das amplitude em $N = 2$ : (esquerda) $A_a$ (3.20) e $A_c$ (3.32); (direita) $A_b$ (3.26); comparadas com as respectivas contribuições parciais para a primeira (tracejada) e a segunda ordem (pontilhada). . . . .	53
3.11	Fases da amplitude $A_c$ deslocadas de $148^\circ$ : ordem dominante (tracejada) e $N = 2$ (contínua); comparada com os dados experimentais das colaboração FOCUS data[5] (triângulo), E791[18] (círculo) a LASS[6] (diamante). . . . .	53
4.1	Diagrama de Feynman da amplitude vetorial $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . . . . .	55
4.2	Diagramas de Feynman para o vértice axial. . . . .	56
4.3	Diagramas de Feynman para o vértice vetorial. . . . .	56
4.4	O diagrama do vértice vetorial com vértice vestido. . . . .	57
4.5	Fatores de forma escalar vetorial do decaimento $D \rightarrow WK$ , gráfico retirado de [88]. . . . .	60
4.6	FF eletromagnético do pión na formulação de EGPR[22]. . . . .	63
4.7	Transição $W \rightarrow \pi\pi$ para um $\rho$ pontual. . . . .	64
4.8	Diagrama dominante da amplitude vetorial $A$ . . . . .	64
4.9	Fase da amplitude $A$ (4.31) comparada com os dados experimentais da colaboração FOCUS[5]. . . . .	68
4.10	Módulo da amplitude $A$ (4.31), comparada com os dados experimentais da colaboração FOCUS[5]; as curvas representam a magnitude (contínua), parte real (tracejada) e imaginária (pontilhada). . . . .	69
4.11	Fase da amplitude $A$ para diferentes limites de contribuição de fatores de forma e do $\rho$ , comparados aos dados experimentais[5]. . . . .	70
4.12	Módulo da amplitude $A$ para diferentes limites de contribuições de fatores de forma, comparados aos dados experimentais[5]. . . . .	71

4.13	Diagramas que contribuem para o vértice $W \rightarrow \pi\pi$ e incorporam a largura no $\rho$ . . . . .	72
4.14	Comparação entre a função completa de $1/D_\rho$ (4.50) com a aproximada a uma função do polo do $\rho$ (4.51). . . . .	76
4.15	Diagrama de Feynman em árvore para $D^+ \rightarrow \pi^0\pi^+\bar{K}^0$ . . . . .	76
4.16	Diagrama de Feynman para o vértice vetorial com o $\rho$ vestido. . . . .	77
4.17	Dois primeiros termos da série para o processo $D^+ \rightarrow \pi^0\pi^+\bar{K}^0$ . . . . .	79
4.18	Modulo das várias contribuições para a amplitude de decaimento $D^+ \rightarrow \pi^0\pi^+\bar{K}^0$ em onda S: termo em árvore $A_{tree}^0$ , (4.59), com $D_\rho$ aproximado, (4.51) (tracejada) e exato, (4.50) (pontilhada); termo em primeira ordem $A_{loop}^0$ , (4.62) (traço-pontilhada) e a soma dos dois primeiros termos da série (contínua). . . . .	80
4.19	Fase das várias contribuições para a amplitude de decaimento $D^+ \rightarrow \pi^0\pi^+\bar{K}^0$ em onda S: termo em árvore $A_{tree}^0$ , (4.59), com $D_\rho$ aproximado, (4.51) (tracejada); termo em primeira ordem $A_{loop}^0$ , (4.62) (traço-pontilhada) e a soma dos dois primeiros termos da série (contínua). . . . .	81
4.20	Fase e módulo da amplitude de decaimento $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ em onda S com largura no $\rho$ , $A_f$ (4.58), alimentada por uma amplitude de dois corpos $T_{K\pi}$ puramente teórica, eq. (2.39) (contínua) e uma híbrida, definida na seção 2.6 (círculo). . . . .	82
4.21	Fase da amplitude do decaimento $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ em onda S: $A$ , eq.(4.31), com o méson $\rho$ sem largura (quadrado - tracejada); $A_f$ , eq.(4.58), com largura da ressonância $\rho$ (círculo - contínua); comparados com os dados experimentais da FOCUS[5]. . . . .	83
4.22	Módulo da amplitude de decaimento $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ em onda S: $A$ , eq.(4.31), com o $\rho$ sem largura (quadrado - tracejada); $A_f$ , eq.(4.58), com largura da ressonância $\rho$ (círculo - contínua); comparados com os dados experimentais da FOCUS[5]. . . . .	84
4.23	Diagrama de Feynman da interação $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ no canal cruzado. . . . .	84
4.24	Módulo da amplitude de decaimento $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ em onda P com $T_P$ teórico (contínua) e híbrido (tracejada) e as partes real (pontilhada) e imaginária(traço-pontilhada) da amplitude com $T_P$ teórico. . . . .	90
4.25	Fases da amplitude de decaimento $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ em onda P: $A_p$ (4.88) com $T_P$ híbrida (círculo-tracejada) e a função Breit-Wigner (BW) utilizada pela colaboração FOCUS[5] (contínua). . . . .	91
4.26	Comparação entre as fases da amplitude três e dois corpos na onda P: $A_p$ , (4.88), (círculo - tracejada) e $T_P$ (quadrado - contínua), ambas no caso híbrido. . . . .	92

4.27	Fase do decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ em onda S: comparação entre os dados da colaboração FOCUS modificados pela inclusão do efeito do <i>loop</i> fraco e os dados originais [5]. . . . .	93
4.28	Comparação entre as fases da amplitude $A_P$ obtidas com: $T_P$ híbrido (círculo - tracejada), e $T_P$ teórico (contínua). . . . .	94
4.29	Módulo da amplitude do decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ em onda S: canal direto $A_S$ , eq. (4.77), com $T_{K\pi}$ teórico (contínua); canal cruzado oriundo da onda S, $\bar{A}_S^S$ , eq.(4.68) (tracejada) e da onda P, $\bar{A}_S^P$ , eq(4.69) (pontilhada). . . . .	94
4.30	Fase e módulo da amplitude de decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ em onda S comparada com os dados experimentais da colaboração FOCUS[5]: canal direto $A_S$ (4.58) (contínua); e a soma dos canal direto com o cruzado $\bar{A}_S$ (4.67) (tracejada). . . . .	95
4.31	Fase de amplitude de decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ em onda S: contribuição do canal direto $A_s$ , (4.58) (contínua) e a soma das contribuições dos canais direto e trocado $A_S + \bar{A}_S$ (tracejada); comparadas aos dados experimentais das colaborações FOCUS[5] (triângulo) e E791[18] (círculo) somados de $55^\circ$ . . . . .	98
5.1	Fase da amplitude de decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ em onda S para o termo dominante: $A_c$ , deslocado de $-163^\circ$ , descreve os dados das colaborações FOCUS[5](triângulo) e E791[4](círculo); $A_a$ e $A_b$ descrevem os dados do espalhamento $K\pi$ livre[6](diamante). . . . .	100
5.2	Fase da amplitude vetorial do decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ em onda S com largura no $\rho$ , (4.58), e alimentada por uma amplitude de dois corpos $T_{K\pi}$ híbrida; comparada aos dados experimentais das colaborações FOCUS[5] e E791[4]. . . . .	103
A.1	Espalhamento elástico $K^b(k)\pi^a(q) \rightarrow K^d(k')\pi^c(q')$ . . . . .	105
A.2	Decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . . . . .	107
B.1	Diagrama de Argand (esquerda) e os pontos escolhidos que fixam a amplitude em determinados valores de $s$ : azul ( $I_i, \pi/2$ ), rosa ( $z_i, \pi$ ). . . . .	118
B.2	Ajuste da fase da amplitude $K\pi$ com 3 ressonâncias no <i>kernel</i> (2.29). . . . .	119
B.3	Contorno no plano complexo de $z$ usado na relação de dispersão (B.40). A linha grossa preta representa o corte no eixo real acima do limiar. . . . .	120
B.4	Gráfico de $\theta_\lambda$ em função de $\theta_s$ , para $ z $ acima e abaixo do corte. . . . .	121
B.5	Gráfico de $\sqrt{\lambda}$ acima e abaixo do corte nas duas superfícies de Riemann. . . . .	122
C.1	Integral de <i>loop</i> da interação $K\pi$ . . . . .	123
C.2	Componentes real e imaginária da função $\bar{L}(s)$ . . . . .	131

C.3	Componentes real e imaginária da função $\bar{L}(s)$ , enfatizando a região próxima ao limiar. . . . .	131
C.4	Diagrama de Feynman do tipo triângulo $I_{xyz}$ . . . . .	134
C.5	Diagrama do triângulo $I_{\pi K\theta}$ . . . . .	136
C.6	Diagrama de Feynman para os triângulos $I_{\pi K\rho}$ (esquerda) e $I_{\pi Ka}$ (direita) .	137
C.7	Diagrama de Feynman para o triângulo $I_{K\rho a}$ ou $I_{K\rho b}$ . . . . .	139
C.8	Diagrama de Feynman para o triângulo $I_{\pi\rho V}$ . . . . .	140
C.9	Diagrama de Feynman para o triângulos $I_{\pi K\rho}$ com largura no $\rho$ . . . . .	141
C.10	Diagrama de Feynman para o triângulo $I_{K\rho a}$ ou $I_{K\rho b}$ com o $\rho$ vestido. . . .	142
C.11	Diagrama de Feynman para o triângulo $I_{\pi\rho V}$ com $\rho$ vestido. . . . .	144
C.12	Parte real (contínua) e imaginária (tracejada) da função $\Pi_{\pi Ka}$ . . . . .	146
C.13	Parte real (contínua) e imaginária (tracejada) da função $\Pi_{\pi K\rho}$ para o propagador do $\rho$ com (fat ) e sem largura. . . . .	146
C.14	Diagrama de Feynman para a caixa $I_{\pi K\rho V}$ . . . . .	148
D.1	Diagramas de Feynman que contribuem para amplitude de espalhamento $\pi\pi$ em árvore com $I(J^P) = 1(1^-)$ . . . . .	155
D.2	Fase da amplitude $\pi\pi$ , (D.16) comparada com o resultado de Colangelo Gasser e Leutwyler (CGL)[89]. . . . .	157
E.1	Diagramas de Feynman que contribuem para a amplitude axial do $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . . . . .	160
E.2	Amplitude de produção. . . . .	160
E.3	Magnitude de $T_A$ , com todas as constantes de acoplamento que contribuem para eq.(E.26) fixadas em 1. . . . .	168
E.4	Acoplamento dos diagramas com ressonâncias em $T_A$ (E.26), para diferentes valores de a e b. . . . .	169
E.5	Magnitude de $T_A$ com todos os acoplamentos que contribuem para eq.(E.26) com três sets para $G_{wDx}$ , para a e b fixados em $-0.5$ . . . . .	170

# Lista de Tabelas

4.1	Fator de forma vetorial e escalar presentes na literatura para o $D \rightarrow K$ . . .	60
4.2	valores de $F(0)$ presentes na literatura para o processo $D^0 \rightarrow K^-$ . . . . .	61
B.1	Constantes de estrutura antissimétricas; as demais combinações de índices podem ser obtidas sabendo que $f_{ijk}$ é antissimétrico pela troca de dois índices vizinhos. . . . .	111
B.2	Constantes de estrutura simétricas; as demais combinações de índices podem ser obtidas sabendo que $d_{ijk}$ é simétrico pela troca de dois índices vizinhos. . . . .	113
C.1	Resultados para a função $\Pi_{xyz}$ que são constante. . . . .	147



# Capítulo 1

## Introdução

Em 1964, Gell-Mann[1] e Zweig[2] propuseram, independentemente, um modelo que explicava o espectro de partículas existentes na época. Nesse modelo, as partículas seriam constituídas por objetos com número bariônico e cargas elétricas fracionárias, os quarks, que poderiam ter três sabores distintos:  $u$  (*up*),  $d$  (*down*) e  $s$  (*strange*). Os Hádrons, partículas formadas por quarks, são organizadas por mésons e bárions. Os mésons seriam compostos por um par quark-antiquark, enquanto os bárions e os antibárions conteriam três quarks ou três antiquarks. O modelo de quarks teve sucesso ao explicar o espectro de partículas conhecidas, as transições eletromagnéticas e as interações fracas de diferentes hádrons. Preservando simetrias fundamentais, solucionou uma série de problemas e, ao mesmo tempo, abriu as portas para uma infinidade de outras questões a serem entendidas. Nascia, então, um novo paradigma na física de partículas que, décadas depois, foi sistematizado na QCD.

## QCD

A QCD ou *quantum chromo dynamics* é, hoje, a teoria fundamental das interações fortes, simétrica pelo grupo de Lie não abeliano  $SU(3)$  de cor. Os campos de matéria desta teoria são os quarks e as interações são mediadas por bósons de calibre, os glúons. A carga de cor é uma qualidade inalterável, sendo cada quark um tripleto de cor (RGB), enquanto os glúons têm cor e anticor. A simetria de cor foi proposta como uma simetria oculta para satisfazer o princípio de Pauli para os bárions e, na natureza, todos os estados seriam

singletos de cor. Sem a simetria de cor, o estado  $\Delta^{++}$  composto por três quarks  $u$  violaria o princípio de Pauli por ter todos os spins paralelos. Os quarks possuem 6 sabores, em ordem crescente de massa são eles:  $u$  (*up*),  $d$  (*down*),  $s$  (*strange*),  $c$  (*charm*),  $b$  (*bottom*) e  $t$  (*top*).

A QED e a QCD são teorias quânticas irmãs, embora possuam características e objetos distintos, ambas são teorias de calibre, mas enquanto a primeira é abeliana, a QCD não o é. Por isso, a intensidade da interação na QED, dada pelo troca de fótons e descrita pela lei de Coulomb, diminui com a distância entre duas partículas. Na QCD, por outro lado, ocorrem bolhas de glúons virtuais, que provocam um efeito de antibrindagem de cor. Esse efeito diminui com a distância, o que faz com que a força seja fraca a pequenas distâncias e grande a longas distâncias. Dada a relação entre distância e energia, para distâncias pequenas ou energias altas, o acoplamento é fraco e podemos descrever a QCD perturbativamente, sendo quarks e glúons os graus de liberdade. Esse fenômeno é conhecido como liberdade assintótica, uma característica intrínseca a teorias de calibre não-abelianas.

Em energias baixas, o forte acoplamento entre os quarks não possibilita tratamentos perturbativos da QCD. Ou seja, a QCD não permite um entendimento direto da fenomenologia de baixas energia[3]. Cálculos não perturbativos com quarks são em alguns casos viáveis na QCD na rede, um campo ainda em evolução que simula as estruturas e, formalmente, calcula interações da QCD no computador. A alternativa é usar teorias efetivas que utilizam lagrangianas com graus de liberdade hadrônicos. A forma mais estabelecida para descrever sistemas que envolvem mésons pseudoescalares e escalares com massa abaixo de 1 GeV são as teorias efetivas, com simetria quiral. Para gerar observáveis coerentes com a QCD, é necessário que essas teorias efetivas partilhem das mesmas simetrias que a teoria fundamental. Essa é uma característica essencial dos modelos efetivos.

A lagrangiana é dada na eq.(1.1)[3] e descreve as interações glúon- glúon, quark-glúon e o termo de massa dos quarks

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{2} \langle G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} \rangle + \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu) q_f - m_f \bar{q}_f q_f , \quad (1.1)$$

A existência de quarks com massas muito diferentes, implica na existência de dois limites



diferentes a essa teoria:  $m_f \rightarrow 0$  e  $m_f \rightarrow \infty$ . No primeiro, quando consideramos que  $m_u = m_d = m_s$  a lagrangiana (1.1) é simétrica sobre o grupo de  $SU(3)$ , tal simetria é fracamente quebrada pelo fato dos quarks não serem iguais, mas sim próximos. Se a esse limite acrescentarmos que as massas dos três quarks são desprezadas i.e.,  $m_u = m_d = m_s = 0$ , a lagrangiana (1.1) passa a ser simétrica por  $SU(3) \times SU(3)$ , chamada de simetria quiral. Por outro lado, quando as massas dos quarks forem muito grandes, como no caso do  $t$  e do  $b$ , as simetrias do grupo de Lie unitário não se aplicam e a QCD pode ser tratada perturbativamente, no caso de grande momento transferido, ou ainda, usando teorias efetivas de quarks pesados, no caso de baixo momento.

Neste estudo sobre o decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , a interação entre os mésons no estado final pode ser tratada por uma teoria efetiva simétrica em  $SU(3)$ . Mas a transição entre o estado inicial e os finais, implica a existência do quark  $c$  e configura um problema de escala, pois ele não se enquadra em nenhum dos dois limites discutidos acima. Ao longo do texto voltaremos a abordar essa questão.

Este trabalho trata de interações hadrônicas e reafirma a sua importância para o entendimento de processos que ocorrem em altas energias e incluem mésons leves, como nos decaimentos de mésons  $D$  em píons e káons. Mostramos que a física das partículas leves, guiada pela simetria quiral, tem um papel fundamental na descrição de tais processos, mesmo em um espaço de fase acessível a até 3 GeV.

Esta pesquisa foi motivada por um resultado experimental importante sobre o decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , no qual a fase em onda S de um par  $K\pi$  do estado final, obtida pelas colaborações E791[4] e FOCUS[5], não coincide com a fase obtida para a mesma onda do espalhamento livre, determinado pela colaboração LASS[6]. Os dois conjuntos de dados são mostrados na fig. 1.1 e o primeiro aspecto importante a ser destacado é que os provenientes do decaimento do  $D^+$  estão disponíveis desde o limiar do canal  $K\pi$ , o que não acontece com os associados ao espalhamento livre. Esse fato motivou, durante algum tempo, a esperança de que dados provenientes de diagramas de Dalitz pudessem ser usados para testar cálculos baseados em teorias de perturbação quiral. Por outro lado, a fig. 1.1 mostra também que os dois conjuntos de dados têm dependências diferentes com a energia, principalmente na região abaixo de 1.2 GeV. Essa dicotomia, denominada o *puzzle* das fases, foi por um longo tempo entendida pelos experimentais e

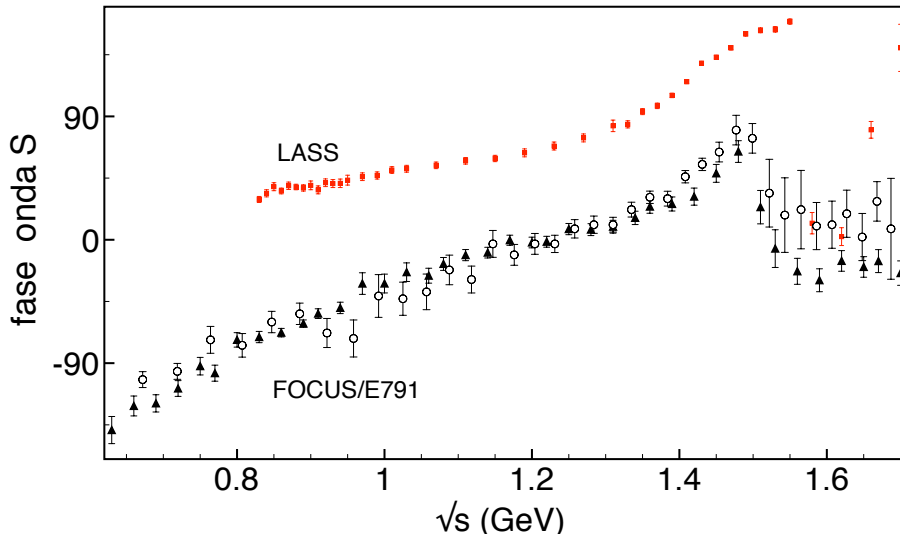


Figura 1.1: Fase em onda S do par  $K\pi$ : obtida pelas colaborações FOCUS[5] (triângulo) e E791[4] (círculo) no decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ ; obtida pela colaboração LASS [6] no espalhamento livre (quadrado).

muitos teóricos como uma possível contradição ao teorema de Watson[44]. O teorema de Watson[44] afirma, a partir da unitariedade e analiticidade de uma amplitude de produção em dois corpos, que a sua fase deve ser a mesma que a do espalhamento livre das partículas do estado final no regime elástico, em que apenas um canal contribui. Isso porque, nessas condições, a única fonte de estrutura dinâmica acessível ao sistema vem da interação dos dois corpos[40]. O *puzzle* das fases foi a motivação central para iniciarmos o estudo do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  e que culminou neste trabalho de tese.

## 1.1 Panorama experimental

Os últimos dados de espalhamento  $K\pi$  disponíveis são de 1988, da colaboração LASS[6], extraídos de reações do tipo  $KN \rightarrow \pi KN$ . Nesses processos, o káon incidente interage com um pión da nuvem ao redor do núcleon e a amplitude  $K\pi$  é obtida a partir dos eventos com baixo momento transferido. Os dados disponíveis estão limitados ao intervalo de energia  $0.70 < E_{K\pi} < 2.96$  GeV e, portanto, bem acima do limiar que ocorre em  $E_{K\pi} = 0.63$  GeV. O primeiro conjunto de dados é mais antigo, de 1978 [7] e mediu as quatro combinações possíveis de carga do sistema  $K\pi$  com isospin 1/2 e 3/2, no intervalo

$0.7 < E_{K\pi} < 1.9$ . Já o segundo conjunto de dados, de 1988 [6], possui um alcance maior de energia, com dados no intervalo  $0.825 < E_{K\pi} < 2.960$  e mediu o espalhamento  $K^-\pi^+$  sem separar os diferentes canais de isospin e inelasticidades. Em ambos os trabalhos, ressonâncias foram obtidas como estados intermediários do espalhamento nas diferentes ondas parciais analisadas, sendo as mais relevantes: a ressonância escalar  $K_0^*(1430)$ , na onda S, e as vetoriais  $K^*(892)$  e  $K^*(1680)$ , na onda P. A ressonância escalar  $K_0^*(1950)$  também foi obtida pelo segundo conjunto de dados da colaboração LASS [6]. Embora esse também seja o canal no qual a ressonância estranha  $k$  se manifesta, ela não foi observada, dentro do intervalo de energia considerado, mas diversas análises dos mesmos dados, empregadas por diferentes modelos teóricos [8–15] obtiveram o  $\kappa$ , com massas de valores que oscilam em torno de 0.8 GeV[16].

Os decaimentos do méson  $D^+$  podem ser: leptônicos, dentre os quais o processo  $D^+ \rightarrow \tau^+\nu_\tau$  é favorecido[16]; semileptônicos, que podem ter um ou mais mésons no estado final, como  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\ell\nu_\ell$  ou  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0\ell\nu_\ell$ ; e puramente hadrônicos, como o  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ , que estudamos. Os decaimentos hadrônicos do  $D$  envolvem vários mésons que podem interagir entre si antes de chegarem ao detector. Portanto, na perspectiva dos grupos experimentais, amplitudes de interação de dois corpos deveriam estar presente no decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$  e poderiam ser, a princípio, extraída diretamente dos dados de três corpos.

O método mais eficaz de análise de processos envolvendo três corpos no estado final é baseado no diagrama de Dalitz [17]. Essa ferramenta evidencia a dinâmica do decaimento por meio de uma seção de choque graficada em um espaço de fase bidimensional, em que os eixos do diagrama são duas das três massas invariantes que fixam a cinemática do processo. Detalhes da cinemática desses diagramas são fornecidos no apêndice A.4.

Para o caso do decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ , o diagrama de Dalitz obtido pela colaboração FOCUS[5] é apresentado na fig.1.2. Nele todas as ondas parciais da amplitude estão sobrepostas e algumas ressonâncias podem ser diretamente identificadas devido a excessos ou vales, em regiões específicas do diagrama, dependendo da suas massas e números quânticos. Um exemplo é a ressonância vetorial  $K^*(892)$ , que pode ser identificada pelas bandas vertical e horizontal ao redor de 0.9 GeV. É visível, também, uma interferência ao redor de 1.4 GeV (destrutiva ou construtiva) que pode ser explicada devido

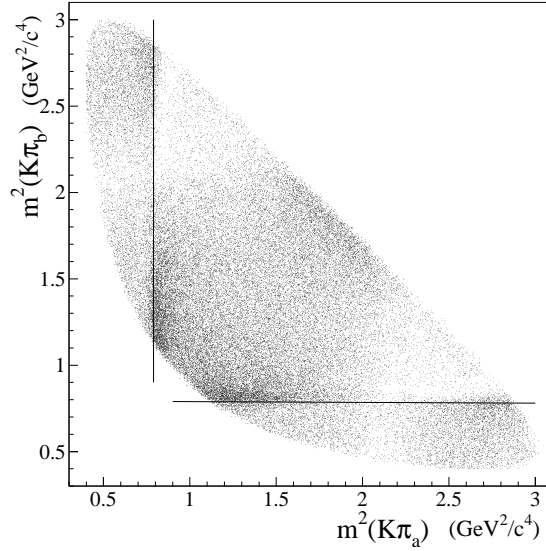


Figura 1.2: Diagrama de Dalitz para o decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  retirado de [4].

às ressonâncias escalar  $K_0^*(1430)$  e vetorial  $K_1^*(1400)$ . Outras ressonâncias também estão presentes no diagrama de Dalitz, como mostram as análises experimentais quantitativas, embora não sejam perceptíveis visualmente, por estarem emaranhadas ou terem baixa intensidade. Nesse contexto, o entendimento das interações de estado final do decaimento são fundamentais para desvendar as estruturas presentes no diagrama de Dalitz e, assim, permitir a extração de informações a respeito da dinâmica do processo, até acerca de violação de CP, se houver.

O decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  foi analisado experimentalmente por diferentes colaborações: E791 em 2002[4] e 2006[18], FOCUS em 2007[19] e 2009[5] e CLEOc em 2008[20]; sendo que novos dados ainda são esperados das colaborações LHCb e BESIII. Neste trabalho, tivemos acesso aos dados das colaborações E791[18] e FOCUS[5] que serão, portanto, tomados como referência.

O método de análise do diagrama de Dalitz, proposto pelas colaborações E791[18] e FOCUS[5], é, segundo eles, independente de modelo. Nesse método, as onda P e D são parametrizados pelo modelo isobárico, no qual as amplitudes são compostas por uma soma coerente de amplitudes ressonantes do tipo Breit-Wigners. A amplitude em onda S, por outro lado, é descrita por uma função complexa da massa invariante do par  $K\pi$  a ser

determinada por um ajuste aos dados experimentais. Para melhorar o ajuste aos dados, o espectro de massa do  $K\pi$  foi uniformemente distribuído em 40 bins e, em cada um deles, representado pelo índice  $j$ , a amplitude da onda  $S$  é dada em função de dois números reais:  $\mathcal{A}_0(m_{K\pi}^j) = a_0^j e^{i\delta^j}$ , e o conjunto de 40 pares  $(a_0^j, \delta^j)$  (80 parâmetros livres) são ajustados ao diagrama de Dalitz em conjunto com as demais ondas parciais normalizadas pela onda  $P$ . A escolha da onda  $P$  como referência às demais ondas é amparada no fato do  $K^*(892)$  ser uma ressonância estreita e bem pronunciada no diagrama de Dalitz. Por isso, os dados em onda  $P$  foram substituídos por uma função nos moldes do modelo isobárico, que possui os parâmetros das ressonâncias  $K^*(892)$  fixados em um ajuste à onda  $P$  do espalhamento  $K\pi$  livre[6]. Nesse método, o ajuste ao diagrama de Dalitz fornece as fases das ondas  $S$  e  $D$  relativas às da onda  $P$  e também fixa os parâmetros das demais ressonâncias que contribuem no processo de decaimento. No capítulo 4, discutimos a influência que essa normalização pode ter sobre os dados experimentais da onda  $S$ .

## 1.2 Decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$

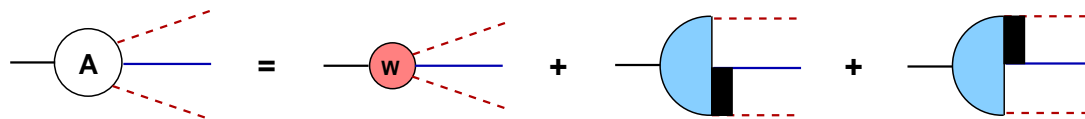


Figura 1.3: Representação esquemática do decaimento do méson pesado em  $K\pi\pi$ ; o primeiro diagrama representa a amplitude partônica (rosa) e os demais, o reespalhamento hadrônico.

A dinâmica do processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  contém duas estruturas fundamentais. A primeira delas está relacionada à transição  $c \rightarrow sW^+$  no vértice primário, em presença do condensado de quarks leves do vácuo da QCD. A segunda estrutura diz respeito às interações hadrônicas no estado final, por meio das quais os sistemas produzidos no vértice fraco se propagam até atingirem o detector onde, finalmente, são identificados como sendo os estados  $K^- \pi^+ \pi^+$ . Portanto, o decaimento fraco é, em síntese, um vértice primário que se acopla às interações do estado final. No nosso problema, a interação hadrônica no estado final (FSI) é simétrica pela troca dos píons e a amplitude pode ser expressa, de forma genérica, pelos diagramas de Feynman da figura 1.3. Nela, o primeiro

termo é chamado de partônico e representa a probabilidade de os mésons produzidos no decaimento fraco não interagirem até chegarem ao detector. Os demais diagramas representam o reespalhamento dos mésons, nas interações de estado final.

A evolução no entendimento teórico do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , descrita neste trabalho, foi bastante significativa. Esta tese possui dois eixos principais, cada um deles associado a um modelo específico: o primeiro, foca no entendimento da interação de estado final e o segundo, na descrição da transição fraca. As ideias principais de ambos são apresentadas na sequência.

### 1.2.1 Vértice Fraco

É no vértice fraco que se inicia o processo de formação dos hádrons que são observados no estado final do decaimento. Do ponto de vista microscópico, um dos quarks do sistema inicial sofre uma transição fraca e os produtos se recombinaem, formando mésons. Em escala hadrônica, é impossível descrever as interações de cor mediadas por trocas de glúons entre os quarks que se propagam até o detector. Por isso, as descrições existentes tratam as interações de sistemas leves, envolvendo os quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$ , por meio de teorias efetivas quirais [21, 22] e as de sistemas pesados, como o méson  $B$ , por meio de teorias de fatorização da QCD[23, 24] ou teorias efetivas de quarks pesados[25]. Nenhuma dessas teorias é diretamente aplicável ou adequada para descrever os decaimentos do  $D$ , pois a sua massa corresponde a uma escala intermediária, que não pode ser considerada nem muito grande nem muito pequena. As abordagens que existem hoje para o  $D$  são extensões de uma ou outra, ou ainda, combinações delas.

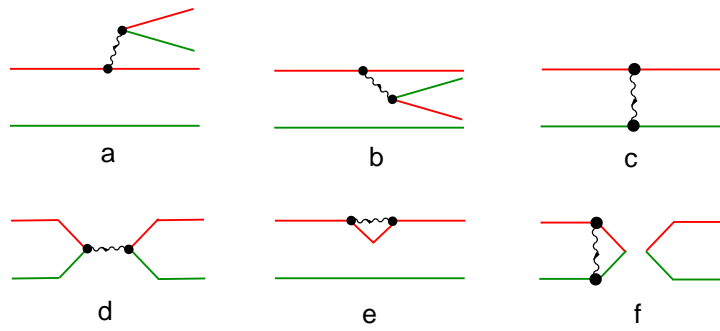


Figura 1.4: Diagramas de Feynman retirados de [26], que representam as diferentes formas de interação em um decaimento fraco de um méson pesado em dois leves; as linhas de glúons foram omitidas.

Todas as topologias acessíveis para os decaimentos fracos de um méson com um quark pesado em dois outros com quarks leves foram identificadas por Chau[26], em 1983, e constam da fig.1.4. Ela representa as várias possibilidades de fluxo de quarks originados de um hádron pesado até se tornarem leves, no estado final. O diagrama *a* é chamado de permitido de cor (*color allowed*), pois contém uma emissão externa do  $W$ , que decai em um par quark anti-quark branco. O diagrama *b* é o suprimido de cor (*color suppressed*), pois uma emissão interna do  $W$  gera um par que precisa combinar a carga de cor adequadamente com os quarks do mar, para formar os hádrons. O diagrama *c*, representa a troca de  $W$ , que só ocorre em mésons eletricamente neutros. Já o diagrama *d* é chamado de aniquilação de  $W$ , pois o par  $q\bar{q}$  se aniquila para formar o  $W$ , que dá origem a um segundo par, contendo quarks leves. Os diagramas *e* e *f* são chamados pinguim e *side-way* pinguim. Trocas de glúons entre os quarks não foram representadas.

No caso específico do decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ , os diagramas de *c* a *f* não contribuem. O primeiro, por não se tratar de um decaimento neutro, o diagrama *d* é suprimido de Cabibbo e os dois últimos implicam duas trocas de sabor, o que não ocorre nesse caso. O modo como o diagrama *a* dá origem a processos hadrônicos está exemplificado na fig. 1.5, para alguns casos de interesse neste trabalho, em que as bolhas amarela e azul são, respectivamente, os acoplamentos do tipo axial  $\langle K\pi|A^\mu|D\rangle$  e vetorial  $\langle K|V^\mu|D\rangle$ . Existem, ainda, muitas outras possibilidades, não desenhadas.

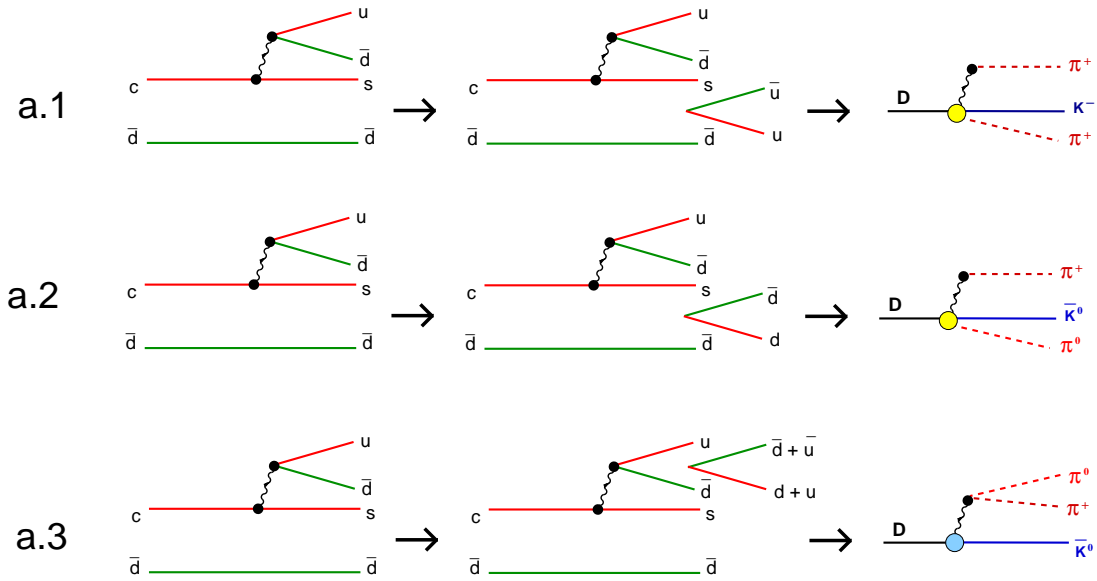


Figura 1.5: Diagramas de Feynman permitidos de cor, em diferentes processos hadronizados no estado final.

Para descrever os processos hadrônicos associados ao diagrama  $b$ , suprimido de cor, utiliza-se a transformação de Fierz[27], uma identidade matemática, que permite a troca formal dos pares de quarks envolvidos. Na linguagem de diagramas de Feynman, a transformação de Fierz pode ser representada pela figura 1.6 e, por corresponder a uma igualdade matemática, o diagrama resultante não descreve a física microscópica.

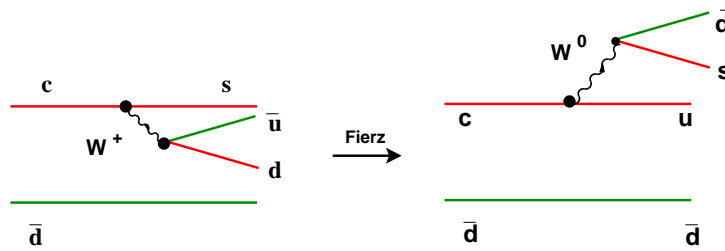


Figura 1.6: Diagrama de Feynman que mostra o efeito da transformação de Fierz[27]. A cor vermelha evidencia a troca de correntes e o méson  $W^0$  é fictício.

A transformação de Fierz permite escrever algumas das correntes hadrônicas suprimidas de cor como nos exemplos da fig. 1.7. É esperado que essas contribuições envolvam o fator  $1/N_c = 1/3$ , associado à probabilidade de acertar as cores com os quarks do mar.



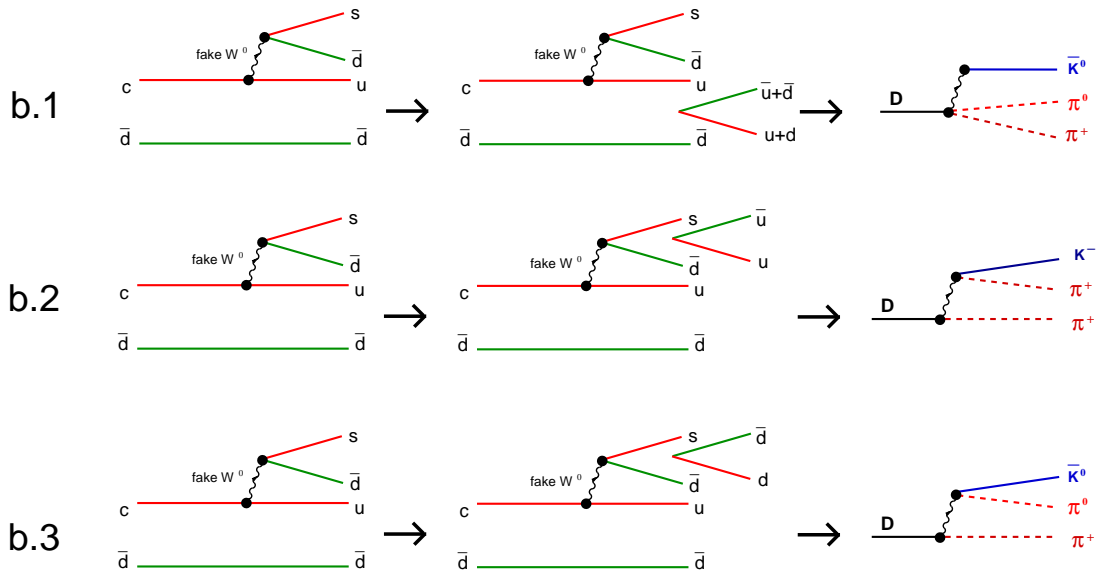


Figura 1.7: Diagramas de Feynman suprimido de cor, em diferentes processos de hadronização no estado final.

Os diagramas propostos por Chau são muito úteis para motivar uma discussão qualitativa sobre o decaimento do  $D^+$ . Entretanto, eles não permitem diretamente o cálculo de amplitudes. Uma questão paralela, é que a diferença entre as massas dos quarks do estado inicial e final são grandes o suficiente para criar um problema de escala de teorias. Na QCD perturbativa, uma possibilidade para estruturar o cálculo dos processos  $a$  e  $b$  da fig. 1.4 é construir uma lagrangiana efetiva, diretamente proporcional aos elementos de mistura da matriz CKM (Cabibbo, Kobayashi e Maskawa)[27], composta por correntes hadrônicas, e usar a hipótese de fatorização. Essa abordagem foi proposta inicialmente por Bauer, Stech and Wirbel em 1985[28] e detalhada para o caso específico do méson  $D$ , em 1987 [29]. A técnica de fatorização implica em considerar, separadamente, as correntes com fluxos de quarks diferentes. Portanto, implícita na fatorização, está a hipótese de não interação entre os hádrons provenientes das diferentes correntes no estado final. Segundo Buras *et al.*[30] a fatorização é tanto melhor quanto mais pesado for o quark do estado inicial.

A lagrangiana efetiva proposta por Bauer *et al.* [29] para os decaimentos fracos do méson  $D$  é:

$$L_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \{a_1 (\bar{u} d')_H (\bar{s}' c)_H + a_2 (\bar{s}' d')_H (\bar{u} c)_H\} , \quad (1.2)$$

em que  $G_F$  é a constante de Fermi,  $a_1$   $a_2$  são, respectivamente, os coeficientes dos diagramas permitidos e suprimidos por cor, calculados usando os coeficientes de Wilson [29], enquanto que  $(\bar{q}q)_H$  representa o valor esperado da ação das correntes fracas  $(V-A)^\mu$  no hádron. No caso dos diagramas permitidos de cor para o processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , a corrente  $(\bar{u}d')_H$  é realizada pelo elemento de matriz  $\langle H(\bar{u}d)|(A-V)^\mu|0\rangle$ , que representa a probabilidade de hádrons serem produzidos a partir do vácuo pela energia proveniente do  $W^+$ . Esses sistemas hadrônicos podem ser um  $\pi$  no caso axial (A) ou  $\pi\pi$ , no vetorial (V). Já a corrente  $(\bar{s}'c)_H$  é realizada pelo elemento de matriz  $\langle H(s)|(A-V)^\mu|D\rangle$ , e  $H(s)$  pode ser  $K\pi$  no caso axial ou  $\bar{K}_0$ , no vetorial.

No cálculo do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , a técnica da fatorização foi utilizada por Diakonou e Diakonou[31], em 1989, por Bediaga, Gobel e Galain[32, 33], em 1997 e, de uma maneira mais elaborada, por Boito e Escribano[34], em 2009. No entanto, em todos esses trabalhos, o vértice vetorial foi ignorado e o vértice axial tratado como sendo intermediado por uma ressonância  $R$ , tal que:  $\langle K\pi|A^\mu|D\rangle \equiv \langle K\pi|T|R\rangle \langle R|A^\mu|D\rangle$ . Nesse tipo de cenário, o estado final do decaimento é tratado como sendo, exclusivamente, constituído pela interação de dois corpos do par  $K\pi$ , acompanhada por um  $\pi$  espectador.

Uma maneira alternativa de tratar a amplitude fraca, foi proposta por Burdman e Donoghue[35] e, simultaneamente, por Wise[36]. Nesses trabalhos, os autores constroem uma lagrangiana efetiva que incorpora, de uma só vez, as simetrias dos quarks pesados e quiral. Isso significa que, na mesma lagrangiana efetiva, coexistem dois limites da QCD,  $m_q \rightarrow \infty$  e  $m_q \rightarrow 0$ . Embora seja explicitamente mencionada a possibilidade de utilizar essa abordagem para os decaimentos charmosos, os trabalhos originais restringem-se aos decaimentos do méson  $B$ .

Neste trabalho, abordamos o vértice fraco a partir de uma adaptação para o méson  $D$  das lagrangianas propostas em [35] e [36], incorporando o setor do charme como um operador externo ao setor  $SU(3)$  leve. Deste modo, todos os processos, fracos (w) e fortes (s), passam a ser descritos por uma lagrangiana com a estrutura

$$\mathcal{L} = \sum \mathcal{L}_i^{(s)} + \sum \mathcal{L}_i^{(w)} \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_i^{(s,w)} = [g_i] \left\{ [L_i] \otimes [H_i^{(s,w)}] \right\}_{SU(3)} \quad (1.4)$$

em que  $g_i$  são constantes de acoplamento fenomenológicas,  $L_i$  corresponde ao setor de

$SU(3)$  composto de quarks leves ( $u, d, s$ ), fundamentado na ChPT[22] e  $H_i^{(s,w)}$  representa o setor pesado, composto de singletos e octetos de  $SU(3)$ , construídos com os campos de charme. O fator  $H_i^{(s,w)}$  inclui acoplamentos fortes (s), que preservam o quark  $c$ , e fracos (w), nos quais o charme é absorvido pelo vácuo de  $SU(3)$ . O rótulo  $SU(3)$  em (1.4) enfatiza que o acoplamento entre os setores leve e pesado é um objeto com propriedades de transformação bem definidas por esse grupo.

Os termos relevantes da lagrangiana para o processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  foram construídos a partir de (1.4), seguindo as regras de simetria e conservação necessárias, e envolvem constantes de acoplamento que precisam de subsídios fenomenológicos para serem conhecidas. Lagrangianas efetivas descrevem transições fracas permitidas de cor (fig. 1.5) sem recorrer à hipótese da fatorização, e têm a vantagem de tratar adequadamente o setor de baixas energias, comprometido com a simetria quiral. Os cálculos no contexto de lagrangianas efetivas são feitos, desde o início, em nível hadrônico. Assim, por exemplo, os acoplamentos axiais são descritos por vários processos, tais como os representados na figura 1.8, e incluem tanto ressonâncias estranhas, da família  $K^*$ , como estados com charme ligados ( $D_s^+$ ) e excitados ( $D_0^*$ ). Já a fig.1.9, mostra a estrutura hadrônica do acoplamento vetorial, que inclui os estados excitados da família  $D_s^*$ .

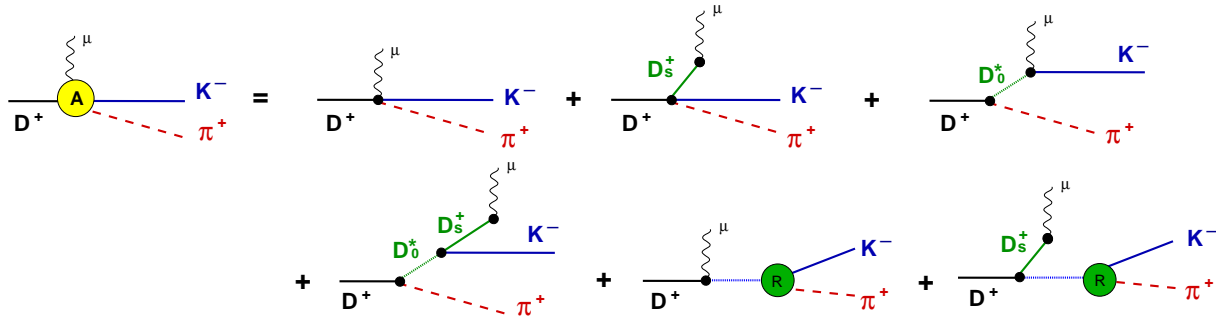


Figura 1.8: Diagramas de Feynman para o acoplamento axial  $\langle K\pi|A^\mu|D\rangle$ ; A linha pontilhada azul representa ressonâncias da família  $K^*$  que decai em  $K\pi$ .

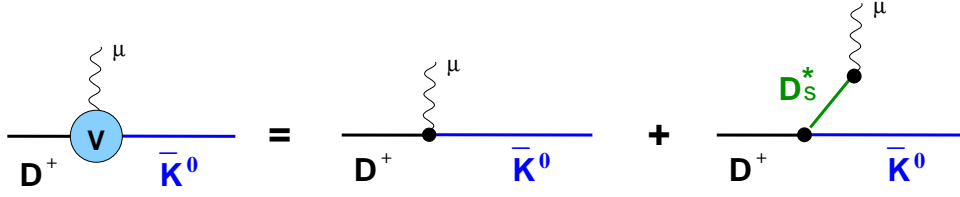


Figura 1.9: Diagramas de Feynman para o acoplamento vetorial  $\langle K|V^\mu|D \rangle$ ; o  $D_s^*$  pode ser  $D_s^*(2100)$  ou  $D_{s0}^*(2300)$ .

A amplitude resultante para o vértice vetorial será apresentada e discutida no capítulo 4, parametrizada em termos de fatores de forma. Já o cálculo do vértice axial, caracterizado pelo elemento de matriz  $\langle K\pi|A^\mu|D \rangle$ , é bem mais complicado do que o vetorial, sendo abordado no apêndice E. Em particular, sua parametrização em termos de fatores de forma precisa de quatro estruturas de momento e muitas constantes de acoplamento desconhecidas, como sugere a fig. 1.8. A alternativa existente na literatura para o vértice axial, consiste em impor que o decaimento do méson  $D$  seja sempre intermediado por uma ressonância, como mencionamos anteriormente[34] [31]. Embora a abordagem de Boito e Escribano[34] seja muito rigorosa e a melhor que temos até agora, adotar essa aproximação consistiria em desconsiderar toda uma classe de diagramas mostrados na fig. 1.8.

### 1.2.2 Interações de estado final

O segundo aspecto importante da dinâmica dos decaimentos de mésons pesados é o fato dos hádrons produzidos no vértice fraco poderem interagir entre si antes de atingir o detector. Essa faceta do problema nunca havia sido tratada de forma tão completa na literatura, até os presentes trabalhos relacionados a esta pesquisa do nosso grupo[37–39]. Embora diversos trabalhos teóricos em decaimentos envolvendo três corpos relativístico apontem a importância da interação de estado final na definição da amplitude e, consequentemente, na formatação do diagrama de Dalitz resultante [40–43]. A abordagem técnica usual desse problema consiste em considerar as FSI nos decaimentos de mésons pesados, incluindo o  $D$ , na aproximação de quase-dois-corpos, ou  $(2+1)$ , em que um dos mésons apenas assiste à interação dos outros dois [31, 34]. Nesse caso, o diagrama que

descreve o processo corresponde ao da figura 1.10, com a amplitude final determinada pela interação de dois corpos e a fase, para a amplitude de três corpos é igual à do espalhamento  $K\pi$  [6]. Assim, a aproximação  $(2 + 1)$  suporta a crença de que o teorema de Watson[44] deveria ser válido no processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . Nossos resultados, discutidos ao longo do trabalho, mostram que isso não se aplica.

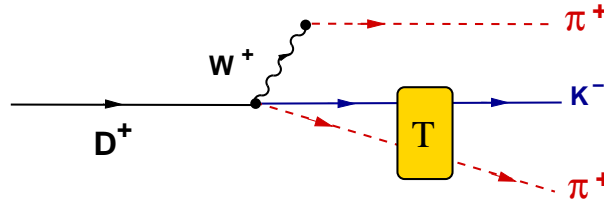


Figura 1.10: Diagrama principal de modelos de FSI na aproximação de quase dois corpos, ou  $2 + 1$ .

Para tratar de maneira rigorosa as interações de três corpos no estado final do decaimento, é preciso considerar que elas envolvem mésons leves com energias altas e, portanto, que a cinemática do problema deve ser relativística. Por isso, não é possível importar as abordagens para sistemas de três corpos empregados em Física Nuclear. Atualmente, novos modelos e técnicas começam a ser desenvolvidos, como em [45, 46], para serem aplicados ao problema do decaimento em três mésons. A unitariedade no sistema de três corpos é discutida por Azimov[47], e exemplos de teorias relativísticas para sistemas de dois ou três corpos podem ser encontradas nas referências [48–54], mas não serão abordadas neste trabalho.

Independentemente do modelo utilizado para descrever os processos no estado final do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , a descrição da interação  $\pi^+ \pi^+$  pode ser suprimida, pois ela possui  $I = 2$  e é fraca e repulsiva. Por outro lado, o tratamento envolve, necessariamente, a interação do par  $K\pi$ , que será calculada no próximo capítulo.

### Da tese

O trabalho apresentado nesta tese teve início em um estudo esquemático, desenvolvido em 2008, em conjunto com Boito e Zarnauskas[55], no qual a amplitude em onda S do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  foi calculada na aproximação de FSI do tipo  $(2 + 1)$  e o

vértice fraco usando uma lagrangiana  $SU(4)$ . Embora esse trabalho não tenha avançado em sua comparação com os dados experimentais e a simetria  $SU(4)$  não seja boa, ele teve uma importância estrutural. As simetrias e leis de conservação, utilizadas na descrição do processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , foram suficientes para que a dinâmica acessível ao sistema fosse revelada. Dessa forma, esse estudo preliminar serviu de guia para a elaboração de um modelo de FSI em que os três corpos interagem. Neste primeiro modelo, as interações de estado final são descritas por sucessivos reespalhamentos dos pares  $K\pi$ , se configurando um problema de três corpos relativístico. O problema da unitariedade em três corpos foi formulada por uma equação integral, inspirada na decomposição de Faddeev [45], e se mostrou compatível com o nosso cálculo perturbativo, até 2ª ordem [37].

O *primeiro modelo* para o decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , apresentado no capítulo 3, foi resultado de um esforço conjunto de pesquisadores de diferentes instituições. A grande limitação do *primeiro modelo* para o processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  foi a descrição do vértice fraco, considerado uma constante sem estrutura. Desta forma, no *segundo modelo* proposto, apresentado no capítulo 4, o vértice fraco do decaimento foi descrito a partir de uma adaptação ao setor do charme da lagrangiana proposta em [35] e [36]. Este segundo modelo trás essencialmente duas melhorias: (i) incorpora corretamente a estrutura de onda P no vértice ao incluir a transição  $W \rightarrow \pi\pi$ , intermediada pela ressonância  $\rho$ ; e (ii) o vértice  $\langle \bar{K}^0 | V^\mu | D^+ \rangle$  é incluído com a dependência correta de momento, parametrizado em termos de fatores de forma.

Para ajudar na fluidez da leitura todos os detalhes de contas e desenvolvimentos teóricos específicos foram colocados nos apêndices, que são fundamentais para a compreensão dos resultados. Nesse sentido, a tese está organizada para descrever: a amplitude de espalhamento  $K\pi$ , no capítulo 2; o primeiro modelo: Interação de estado final (FSI), no capítulo 3; o segundo modelo: vértice fraco, no capítulo 4 e as conclusões e perspectivas são discutidas no capítulo 5.

# Capítulo 2

## Amplitude de espalhamento $K\pi$

A amplitude de espalhamento  $K\pi$  é um ingrediente fundamental no cálculo das interações de estado final do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , independentemente do modelo utilizado. A interação do par  $K\pi$  inclui trocas de ressonâncias escalares na onda S, tais como o  $K_0^*(1430)$ , e vetoriais na onda P, tais como o  $K^*(892)$  e o  $K^*(1680)$ . O processo  $K\pi$  elástico já foi bastante estudado, teórica e experimentalmente. A motivação recente para isso foi a busca e o entendimento do  $\kappa$ , a ressonância escalar estranha mais leve do espectro. Embora ela já tenha sido observada em diversos experimentos [4, 5, 20, 56, 57] e obtida por vários modelos teóricos [8–15], seu *status* no “Particle Data Group” (PDG) 2012[16] ainda é incerto (“Needs confirmation”), com massa e largura calculadas pela média dos valores obtidos na literatura:  $m_\kappa = 0.682 \pm 0.029$  GeV;  $\Gamma_\kappa = 0.547 \pm 0.034$  GeV.

O cálculo do espalhamento  $K\pi$  incluindo simetria quiral foi desenvolvido por Bernard, Kaiser e Meißner[58, 59], na expansão até um *loop* da lagrangiana da ChPT[21]. A inclusão de ressonâncias nessa lagrangiana foi proposta por Ecker, Gasser, Pich e De Rafael[22] e aplicada ao espalhamento  $K\pi$  por Jamin, Oller e Pich[14]. O fato de a massa do  $\kappa$  ser pequena na escala da teoria de baixas energias ( $\approx 1$  GeV), implica que ele não pode ser considerado uma ressonância fundamental na lagrangiana quiral[22]. Ou seja, o  $\kappa$  não pode se tornar um estado ligado do sistema  $K\pi$  quando desligamos os seus acoplamentos. Por exemplo, em cálculos a baixas energias, baseados em unitarização de amplitudes, ele aparece como um estado gerado dinamicamente, associado a um polo no plano complexo[13, 60]. No final deste capítulo, veremos como o polo do kappa se manifesta na nossa amplitude  $K\pi$ . O resultado para o seu polo,  $m_\kappa = 0.658 \pm 0.013$  GeV

e  $\Gamma_\kappa = 0.557 \pm 0.024$  GeV, reconhecido na literatura como o mais independente de modelo, foi proposto por Descotes-Genon e Moussallam [15], usando relações de dispersão, via equações de Roy, e a lagrangiana da ChPT[21]. O método baseado em relações de dispersão foi desenvolvido inicialmente para o  $\sigma$ , em  $SU(2)$ [61]. Uma revisão detalhada dos diversos modelos teóricos utilizados para obter a ressonância kappa, incluindo as interpretações sobre sua subestrutura quarkônica como tetra-quark[62], méson-méson[63], molécula ou gluebals, pode ser encontrada na dissertação de mestrado [64].

Quanto aos dados experimentais para o espalhamento  $K\pi$ , os dois resultados mais recentes são os da colaboração LASS: Estabrooks *et al.*[7] de 1978 e Aston *et al.*[6] de 1988. Ambos não cobrem a região de baixa energia. O primeiro grupo mediu separadamente as quatro combinações possíveis de carga do sistema  $K\pi$  com isospin  $1/2$  e  $3/2$ , para o regime elástico. Já o segundo grupo, mediu, especificamente, o espalhamento  $K^-\pi^+$  até 1.96 GeV, sem separar os diferentes canais de isospin e inelasticidades. Em uma comunicação particular, tivemos acesso aos dados da colaboração LASS[6] para o espalhamento  $K\pi$  com  $I = 1/2$ , obtida após a subtração da contribuição com  $I = 3/2$  dos dados de Estabrooks *et al.* [7]. Esse será o conjunto de dados tomado como referência nesta tese.

Neste capítulo, calculamos a amplitude de espalhamento  $K\pi$  elástica em ondas  $S$  e  $P$ , que serão utilizadas no estudo da amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ . Os diagramas que contribuem são descritos por uma Lagrangiana quiral com ressonâncias[22] e as amplitudes resultantes projetadas nas ondas parciais  $S$  e  $P$ . Este procedimento gera os *kernels* da interação  $K\pi$ , que são unitarizados via equação de Bethe-Salpeter[65], resultando em amplitudes unitárias. A cinemática do processo está descrita no apêndice A e os detalhes técnicos dos cálculos relativos a amplitude de espalhamento  $K\pi$  estão alocados no apêndice B.

## 2.1 Amplitude em árvore

A interação  $K\pi$ , em nível árvore, é representada pelos diagramas de Feynman da parte de cima da fig. 2.1. O primeiro diagrama é a contribuição de contato,  $\mathcal{O}(q^2)$ , dominante; os indicados por  $S$  e  $V$  são, respectivamente, as contribuições das ressonâncias escalares e vetoriais, em  $\mathcal{O}(q^4)$ , e  $I$ , também de  $\mathcal{O}(q^4)$ , representa termos inelásticos, como a



contribuição do canal  $K\eta'$ . O símbolo da somatória explicita a possibilidade de várias ressonâncias, com os mesmos números quânticos, poderem contribuir simultaneamente.

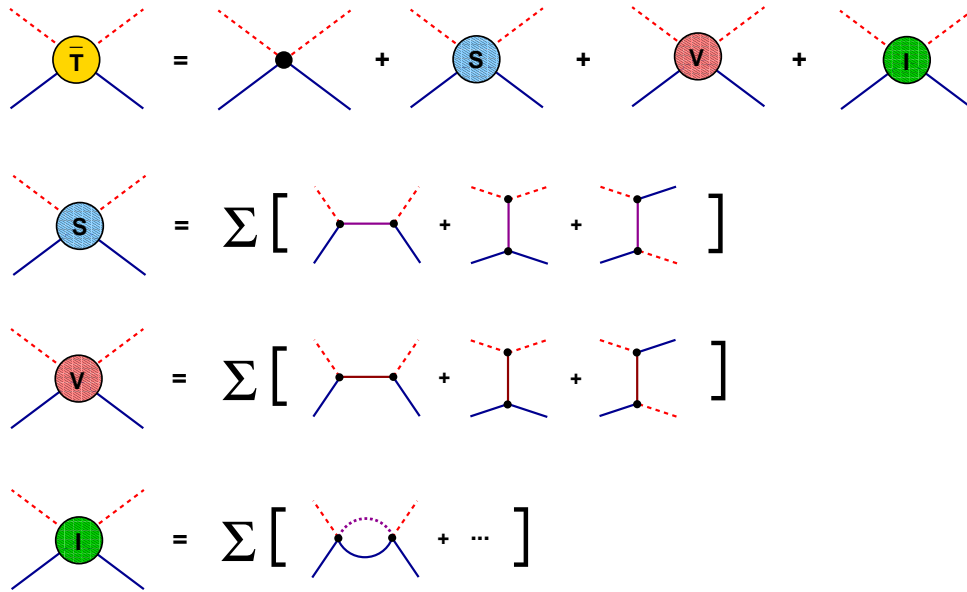


Figura 2.1: Diagramas de Feynman da interação  $K\pi$ .

A amplitude  $K\pi$  em árvore é, portanto, dada pela soma das contribuições descritas acima:

$$\bar{T}_I = \bar{T}^c + \bar{T}^S + \bar{T}^V + \bar{T}^I. \quad (2.1)$$

As formas dessas varias contribuições são obtidas a partir de Lagrangianas efetivas. Por isso, consideramos inicialmente a amplitude para o processo  $P_a(k) P_b(q) \rightarrow P_c(k') P_d(q')$ , em que  $P_i$  é um pseudoescalar com índice  $i$  de  $SU(3)$ . Essa amplitude, representada por  $\bar{T}$ , é mostrada na fig.2.2. O sistema  $K\pi$  tem acesso a dois canais de isospin:  $1/2$  e  $3/2$ ,

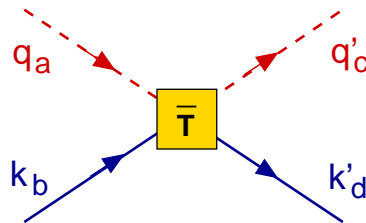


Figura 2.2: O vértice de contato da interação  $K\pi$ .

resultado do acoplamento de  $I = 1$  do pión e  $I = 1/2$  do kaon. Essas possibilidades estão representadas pelo índice inferior  $I$  na eq. (2.1).

### Termo de contato

O termo de contato é descrito pela lagrangiana efetiva quiral proposta por Gasser e Leutwyler [21]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_M^{(2)} &= 3F^2 B \sigma_0 \\
&+ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - B (\sigma_0 \delta_{ij} + \sigma_8 d_{8ij}) \phi_i \phi_j \\
&- \frac{1}{6F^2} f_{ijs} f_{kls} \phi_i \partial_\mu \phi_j \phi_k \partial^\mu \phi_l + \frac{B}{24F^2} \left[ \sigma_0 \left( \frac{4}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 d_{ijs} d_{kls} \right) \right. \\
&+ \left. \sigma_8 \left( \frac{4}{3} \delta_{ij} d_{kls} + \frac{4}{3} d_{ijs} \delta_{kl} + 2 d_{ijm} d_{kln} d_{8mn} \right) \right] \phi_i \phi_j \phi_k \phi_l, \tag{2.2}
\end{aligned}$$

em que  $F$  é a constante de decaimento dos mésons no vácuo,  $\phi_i$  são os bósons de Goldstone de  $SU(3)$  e  $d_{ijk}$  e  $f_{ijs}$  são, respectivamente, as constantes de estrutura simétrica e antissimétrica de  $SU(3)$ . Todas as relações e estruturas que envolvem o grupo de Lie  $SU(3)$  estão detalhadas no apêndice B.1. A primeira linha dessa lagrangiana está associada à quebra espontânea de simetria quiral e é o termo responsável por conferir massas aos pseudoescalares; a segunda corresponde à propagação livre e, as demais, a auto interações, responsáveis pelo termo de contato  $K\pi \rightarrow K\pi$ .

A amplitude de contato derivada da lagrangiana 2.2 é:

$$\begin{aligned}
iT^C &= i2 [A_{abcd}(u-t) - A_{acbd}(s-u) - A_{adbc}(s-t)] \\
&+ i8 [B_{abcd} + B_{acbd} + B_{adbc}] ; \\
A_{ijkl} &= -\frac{1}{6F^2} f_{ijs} f_{kls}, \tag{2.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{ijkl} &= \frac{B}{24F^2} \left[ \sigma_0 \left( \frac{4}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2 d_{ijs} d_{kls} \right) \right. \\
&+ \left. \sigma_8 \left( \frac{4}{3} \delta_{ij} d_{kls} + \frac{4}{3} d_{ijs} \delta_{kl} + 2 d_{ijm} d_{kln} d_{8mn} \right) \right]. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

### Ressonâncias

As contribuições dos diagramas  $S$  e  $V$ , na fig.2.1, são dadas por trocas de ressonâncias escalares ou vetoriais nos canais  $s$ ,  $t$  e  $u$ . Todas as interações relevantes podem ser descritas pela lagrangiana proposta em [22], na qual as ressonâncias também são campos que se

acoplam aos pseudoescalares, no contexto de  $SU(3)$ . A vantagem desta abordagem, em comparação com cálculos de  $\mathcal{O}(q^4)$  em ChPT[58], é que ela permite estender o alcance da teoria a energias mais altas.

O termo da lagrangiana[22] que descreve a interação entre ressonâncias escalares e mésons pseudoescalares é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S^{(2)} = & \frac{2\tilde{c}_d}{F^2} R_0 \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{4\tilde{c}_m}{F^2} B R_0 (\sigma_0 \delta_{ij} + \sigma_8 d_{8ij}) \phi_i \phi_j \\ & + \frac{2c_d}{\sqrt{2}F^2} d_{ijk} R_k \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{4Bc_m}{\sqrt{2}F^2} \left[ \sigma_0 d_{ijk} + \sigma_8 \left( \frac{2}{3} \delta_{ik} \delta_{js} + d_{is8} d_{jsk} \right) \right] \phi_i \phi_j R_k ; \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que  $\tilde{c}_d$ ,  $\tilde{c}_m$  e  $c_d$ ,  $c_m$  são as constantes de acoplamento entre os mésons pseudoescalares e as ressonâncias escalares  $R_0$ , singleto, e  $R_k$ , membro do octeto, que precisam ser fixadas. Essa lagrangiana também foi usada para o sistema  $K\pi$  na referência [14], na qual os valores para  $c_d$  e  $c_m$  foram estimados, impondo a saturação das constantes de baixa energia pelas ressonâncias. Os autores obtiveram os valores:

$$|c_d| = 30 \pm 10 \text{ MeV}; \quad |c_m| = 43 \pm 14 \text{ MeV}; \quad (2.6)$$

muito próximos dos obtidos em [22],  $|c_d| = 32 \text{ MeV}$  e  $|c_m| = 42 \text{ MeV}$ , extraídos do decaimento  $a_0 \rightarrow \eta\pi$ . Os valores de  $\tilde{c}_d$  e  $\tilde{c}_m$  foram definidos, como em [22], impondo o vínculo dado pelo limite de grande  $N_c$ :  $|\tilde{c}_d| = |c_d|/\sqrt{3}$  e  $|\tilde{c}_m| = |c_m|/\sqrt{3}$ .

A lagrangiana da interação de ressonâncias vetoriais e mésons pseudoescalares, também proposta em [22], é dada por:

$$\mathcal{L}_V^{(2)} = \frac{iG_V}{\sqrt{2}} \langle V_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \rangle; \quad (2.7)$$

$$\langle V_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \rangle = \frac{1}{F^2} V_a^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_i \partial_\nu \phi_j (if_{aij} + d_{aij}); \quad (2.8)$$

em que  $V_a^{\mu\nu}$  é um elemento do octeto vetorial. No caso das ressonâncias com estranheza,  $a = 6, 7$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle V_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \rangle = & \frac{\sqrt{2}}{F^2} \left[ \left( \partial_\mu \pi^- \partial_\nu K^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \pi^0 \partial_\nu K^0 \right) \bar{K}^{*\mu\nu} \right. \\ & \left. + \left( \partial_\mu K^- \partial_\nu \pi^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \bar{K}^0 \partial_\nu \pi^0 \right) K^{*\mu\nu} \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

sendo  $G_V$  uma constante de acoplamento universal que, no limite de grande  $N_c$ , pode ser aproximada para  $G_V = f_\pi/\sqrt{2} = 65.3 \text{ MeV}$ [66]. Nesse trabalho usamos  $G_V = f_{K\pi}/\sqrt{2} = 72.63 \text{ MeV}$ , que também está dentro do intervalo de valores disponíveis na literatura[14].

De posse do termo de contato e das lagrangianas para as ressonâncias, calculamos as amplitude elásticas dos diagramas da fig. 2.1. Agrupando todas as contribuições, denotando acoplamentos do tipo escalar ou vetorial por índices superiores  $S$  e  $V$ , e efetuado as projeções de isospin, (B.27) e (B.26), temos

- $\bar{T}_{1/2}$

$$\bar{T}_{1/2} = \bar{T}_{1/2}^C(s, t) + \bar{T}_{1/2}^S(s) + \bar{T}_{1/2}^S(t) + \bar{T}_{1/2}^S(u) + \bar{T}_{1/2}^V(s) + \bar{T}_{1/2}^V(t) + \bar{T}_{1/2}^V(u) , \quad (2.10)$$

$$\bar{T}_{1/2}^C(s) = \frac{1}{4 F^2} [4 s + 3 t - 4 (M_\pi^2 + M_K^2)] ; \quad (2.11)$$

$$\bar{T}_{1/2}^S(s) = -\frac{3}{2} \frac{1}{F^4} \frac{[c_d s - (c_d - c_m)(M_\pi^2 + M_K^2)]^2}{s - m_{R_\kappa}^2} ; \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{1/2}^S(t) &= \frac{1}{3} \frac{1}{F^4} \frac{1}{t - M_8^2} [c_d t - 2M_K^2(c_d - c_m)] [c_d t - 2M_\pi^2(c_d - c_m)] \\ &\quad - \frac{4}{F^4} \frac{1}{t - M_0^2} [\tilde{c}_d t - 2M_K^2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)] [\tilde{c}_d t - 2M_\pi^2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)] ; \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\bar{T}_{1/2}^S(u) = \frac{1}{2} \frac{1}{F^4} \frac{[c_d u - (c_d - c_m)(M_\pi^2 + M_K^2)]^2}{u - m_{R_\kappa}^2} ; \quad (2.14)$$

$$\bar{T}_{1/2}^V(s) = -\frac{3}{4} \frac{G_V^2}{F^4} \frac{[2st + s^2 - 2s(M_\pi^2 + M_K^2) + (M_\pi^2 - M_K^2)^2]}{s - m_{K^*}^2} ; \quad (2.15)$$

$$\bar{T}_{1/2}^V(t) = -\frac{G_V^2}{F^4} \frac{1}{t - m_\rho^2} [2st + t^2 - 2t(M_\pi^2 + M_K^2)] ; \quad (2.16)$$

$$\bar{T}_{1/2}^V(u) = \frac{1}{4} \frac{G_V^2}{F^4} \frac{[2tu + u^2 - 2u(M_\pi^2 + M_K^2) + (M_\pi^2 - M_K^2)^2]}{u - m_{K^*}^2} . \quad (2.17)$$

- $\bar{T}_{3/2}$

$$\bar{T}_{3/2} = \bar{T}_{3/2}^C + \bar{T}_{3/2}^S(s) + \bar{T}_{3/2}^S(t) + \bar{T}_{3/2}^S(u) + \bar{T}_{3/2}^V(s) + \bar{T}_{3/2}^V(t) + \bar{T}_{3/2}^V(u) , \quad (2.18)$$

$$\bar{T}_{3/2}^C(s) = -\frac{1}{2F^2} [s - (m_\pi^2 + m_K^2)] ; \quad (2.19)$$

$$\bar{T}_{3/2}^S(s) = 0 ; \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{3/2}^S(t) = & \frac{1}{3} \frac{1}{F^4} \frac{1}{t - M_\rho^2} [c_d t - 2M_K^2(c_d - c_m)] [c_d t - 2M_\pi^2(c_d - c_m)] \\ & - \frac{4}{F^4} \frac{1}{t - M_0^2} [\tilde{c}_d t - 2M_K^2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)] [\tilde{c}_d t - 2M_\pi^2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)] ; \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\bar{T}_{3/2}^S(u) = -\frac{1}{F^4} \frac{[c_d u - (c_d - c_m)(M_\pi^2 + M_K^2)]^2}{u - m_{R_\kappa}^2} ; \quad (2.22)$$

$$\bar{T}_{3/2}^V(s) = 0 ; \quad (2.23)$$

$$\bar{T}_{3/2}^V(t) = \frac{1}{2} \frac{G_V^2}{F^4} \frac{1}{t - m_\rho^2} [2st + t^2 - 2t(M_\pi^2 + M_K^2)] ; \quad (2.24)$$

$$\bar{T}_{3/2}^V(u) = -\frac{1}{2} \frac{G_V^2}{F^4} \frac{[2tu + u^2 - 2u(M_\pi^2 + M_K^2) + (M_\pi^2 + M_K^2)^2]}{u - m_{K^*}^2} . \quad (2.25)$$

### 2.1.1 kernel da interação

O *kernel* contém toda a informação dinâmica do sistema, o que justifica sua denominação como o *núcleo* do espalhamento. Os vários *kernels* da interação  $K\pi$ , a serem empregados na equação de Bethe-Salpeter, são obtidos a partir da projeção das amplitudes (2.10) e (2.18) em ondas parciais, no centro de massa do par  $K\pi$ . Essa projeção fornece[67]:

$$\bar{T}_I(s, t) = \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1) P_L(x) \mathcal{K}_{LI}(s) = \mathcal{K}_{0I}(s) + 3 \cos \theta \mathcal{K}_{1I}(s) + \dots ; \quad (2.26)$$

sendo  $x = \cos \theta$  e  $\theta$ , o ângulo do espalhamento no centro de massa do sistema  $K\pi$ ;  $P_L(x)$  é o polinômio de Legendre de ordem  $L$  e  $\mathcal{K}_{LI}$  o *kernel* da interação na onda  $L$  com isospin  $I$ . A função  $\mathcal{K}_{LI}$  é obtida invertendo a relação (2.26)

$$\mathcal{K}_{LI} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx P_L(x) \bar{T}_I(s, x) \quad (2.27)$$

e, portanto, é preciso substituir nos resultados anteriores as variáveis  $t$  e  $u$  em função de  $s$  e  $\theta$ , como indicado nas eqs. (A.3) e (A.4). As contribuições relevantes para este trabalho incluem apenas as duas primeiras ondas parciais,  $S$  e  $P$ . Dessa forma, é preciso integrar as amplitudes (2.10) e (2.18) usando a relação (2.27). Quando as amplitudes

forem proporcionais a polinômios em  $s$ , podem-se usar os resultados:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx P_0(x) = 1 ; \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx P_1(x) = \frac{1}{3}. \quad (2.28)$$

O desenvolvimento deste cálculo para a onda  $S$  está feito em detalhes no apêndice B.3. Para a onda  $P$ , o cálculo é análogo e foi feito apenas numericamente. É importante notar que o termo de contato pode contribuir para as duas projeções em ondas parciais.

### Onda S

O termo dominante do *kernel* na onda S de isospin 1/2 é dado pela interação de contato, no setor de baixas energias, e pela contribuição ressonante do canal  $s$ , em energias mais altas. A amplitude em árvore, é dada por:

$$\mathcal{K}_{S1/2} = \mathcal{K}_{S1/2}^C - \sum_i \frac{\alpha_i(s)}{s - m_i^2}; \quad (2.29)$$

$$\mathcal{K}_{S1/2}^C = \frac{1}{F^2} \left( 1 - \frac{3}{8} \rho^2(s) \right) s - (M_\pi^2 + M_K^2) ; \quad (2.30)$$

$$\alpha_i(s) = \frac{3}{2F^4} [c_d^i s - (c_d^i - c_m^i) (M_K^2 + M_\pi^2)]^2 ; \quad (2.31)$$

sendo que o índice  $i$ , na somatória, indica que mais de uma ressonância escalar pode contribuir no canal  $s$ , cada uma delas com um acoplamento característico. As contribuições dos canais  $t$  e  $u$  são pequenas, como mostraremos em seguida, e podem ser descartadas. Existem três parâmetros livres:  $c_d^i$ ,  $c_m^i$  e  $m_i$ , para cada ressonância  $i$  considerada. É importante enfatizar que, dentre as ressonâncias escalares que podem contribuir diretamente em (2.29), não está incluído o  $\kappa$ , pois este é gerado dinamicamente.

Para fornecer um exemplo da importância dos vários termos que compõem o *kernel* (2.29), consideramos o caso de apenas uma ressonância, o  $K_0^*(1430)$  e tomamos os valores de  $c_d$  e  $c_m$  dados em (2.6). Obtemos, então, as funções mostradas na fig.2.3, na qual é possível ver que o termo de contato domina o setor de baixa energia, como o esperado e que, a medida que  $s$  aumenta, a relevância do termo ressonante cresce. O gráfico mostra também que, embora  $c_d$  e  $c_m$  sejam relevantes, a importância do primeiro é muito maior. O acoplamento do tipo  $c_d$ , proposto pela  $\chi PT$ , não é usual em tratamentos de ressonâncias, normalmente baseadas em estruturas do tipo  $c_m$ .

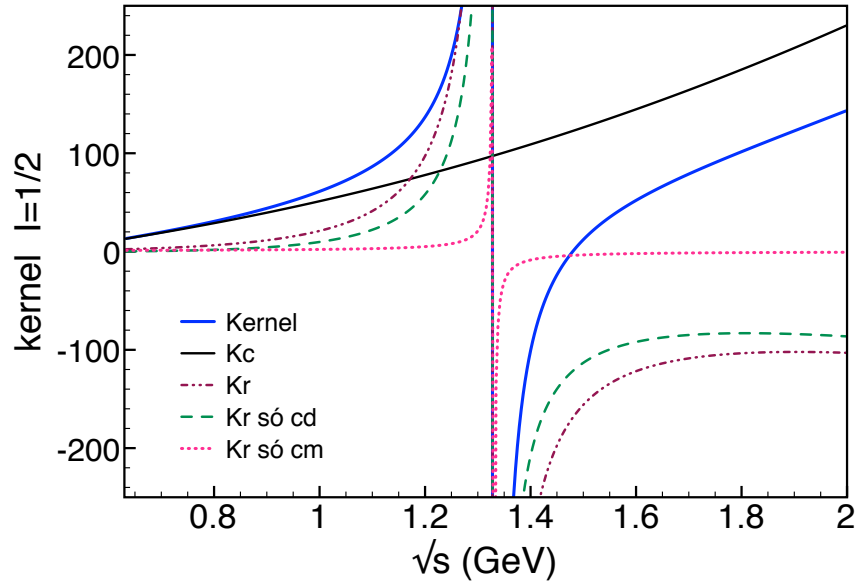


Figura 2.3: Comparação numérica das estruturas que compõem o *kernel* da onda S com  $I = 1/2$ .

O *kernel* dado por (2.29) não contém contribuições dos canais  $t$  e  $u$  cruzados. Essas exclusões são justificadas pelos resultados mostrados na fig. 2.4, que indicam que elas são muito pequenas em comparação com a contribuição não ressonante do canal  $s$  ( $\mathcal{K}_{NR}^S$ ).

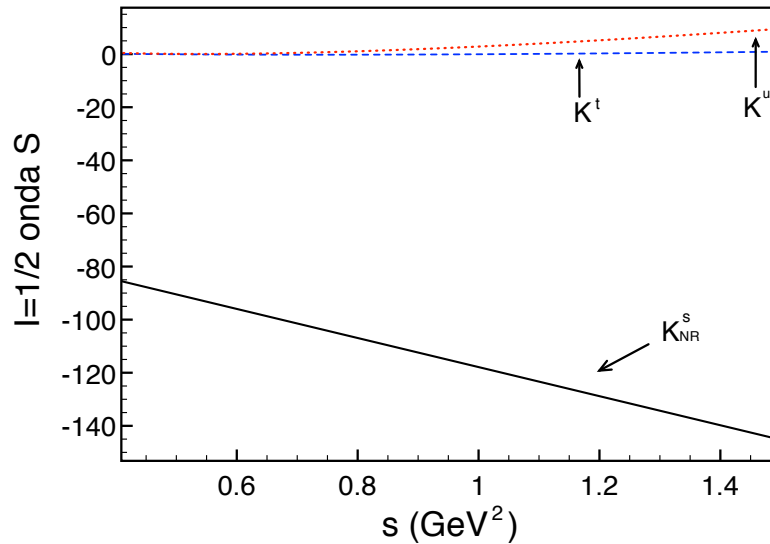


Figura 2.4: projeções na onda S que compõem o *kernel* com  $I = 1/2$ .

Neste trabalho, também não consideramos a contribuição do canal de isospin  $I = 3/2$ , que é repulsivo e não possui nenhuma ressonância no canal  $s$ . Esse caráter repulsivo pode ser percebido diretamente da expressão dominante para o *kernel*, proveniente do termo

de contato:

$$\mathcal{K}_{S3/2} = -\frac{1}{2F^2} [s - (m_\pi^2 + m_K^2)] . \quad (2.32)$$

### Onda P

No caso da onda P, é na amplitude de isospin 1/2 que as ressonâncias se manifestam, e temos o  $K^*(892)$  e o  $K^*(1680)$ . As amplitudes que contribuem para o *kernel* da onda P em  $I = 1/2$ , após projeção das eqs.(2.11) e (2.15), estão dispostas no gráfico da fig. 2.5. Neste caso, novamente, desprezamos contribuições dos canais  $t$  e  $u$ .

Na onda P com  $I = 3/2$ , os termos de contato e ressonante no canal  $s$  são nulos e, portanto, as únicas contribuições vêm dos canais  $t$  e  $u$ . As equações (2.16, 2.17, 2.24, 2.25), mostram que as amplitudes  $t$  e  $u$  no canal  $I = 3/2$  são proporcionais às respectivas em  $I = 1/2$  que, por sua vez, são pequenas como mostra o gráfico 2.5. Assim, podemos desprezar o canal  $I = 3/2$ , como no caso da onda S.

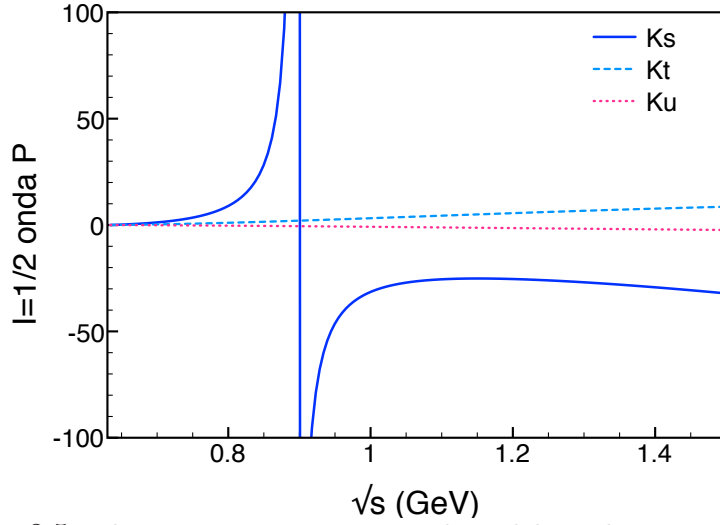


Figura 2.5: Elementos que compõem o *kernel* da onda P em  $I = 1/2$ .

A amplitude dominante do *kernel* em onda P com  $I = 1/2$  é dada pela soma dos termos de contato e do canal  $s$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{P1/2} &= \left\{ \frac{1}{2F^2} \frac{1}{4s} - \frac{1}{4} \left( \frac{G_V}{F^2} \right)^2 \frac{1}{s - m_{K^*}^2} \right\} (s^2 - 2s(M_K^2 + M_\pi^2) + (M_K^2 - M_\pi^2)^2) \\ &= -\frac{1}{8F^2} \frac{m_{K^*}^2}{s - m_{K^*}^2} \frac{s^2 - 2s(M_K^2 + M_\pi^2) + (M_K^2 - M_\pi^2)^2}{s} ; \end{aligned} \quad (2.33)$$

em que, na última passagem foi usada a aproximação  $G_V^2 = \frac{F^2}{2}$  discutida acima.



## 2.2 Amplitude unitária

O *kernel*  $\mathcal{K}_{L1/2}$ , sem as contribuições dos canais  $t$  e  $u$ , pode ser representado pelo diagrama de Feynman da fig. 2.6, em que as reticências evidenciam a possibilidade de outras ressonâncias contribuírem. Esse tipo de *kernel* (2.29) tem um comportamento divergente,

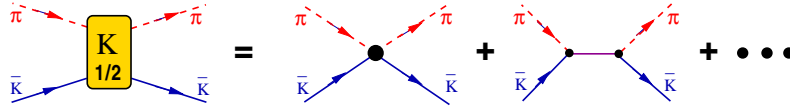


Figura 2.6: *kernel* da amplitude  $I = 1/2$ .

e explode quando  $s$  é igual à massa nominal da ressonância,  $s = m_R^2$ . Por isso, a unitarização é fundamental para, ao mesmo tempo, modular essa divergência e expandir a validade da teoria, em princípio limitada pela ChPT à região de baixas energias. Para tanto, usamos a equação de Bethe-Salpeter [65] que, em sua forma integral, determina a amplitude unitária  $T_{LI}$  por:

$$T_{LI}(s) = \mathcal{K}_{LI}(s) - i \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\mathcal{K}_{LI}(s, l) T_{LI}(s, l)}{[(P/2 + l)^2 - M_\pi^2 + i\epsilon][(P/2 - l)^2 - M_K^2 + i\epsilon]}, \quad (2.34)$$

em que  $P = p_\pi + p_K$  e  $LI$  representa a onda parcial e o isospin. Traduzida em termos de diagramas de Feynman, a equação de Bethe-Salpeter corresponde à fig. 2.7. Essa equação pode ser simplificada se considerarmos que a dependência de  $l$  em  $\mathcal{K}_{LI}(s, l)$  e  $T_{LI}(s, l)$  pode ser desprezada em energias baixas, o que resulta em

$$T_{LI}(s) = \mathcal{K}_{LI}(s) [1 - T_{LI}(s) \Delta_{\pi K}(s)], \quad (2.35)$$

sendo  $\Delta_{\pi K}$  a função de Green do par de mésons. Esse resultado foi enfatizado por

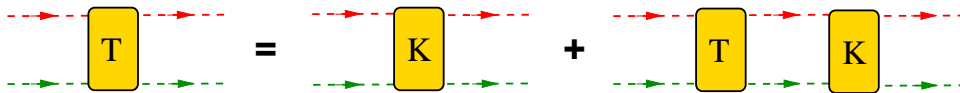


Figura 2.7: Equação de Bethe-Salpeter simplificada.

Oller e Oset[68] que mostraram que, no caso de interação entre mésons, o tratamento da equação simplificada (2.35) corresponde à aproximação de escada, resultando em uma série geométrica, a série de Dyson.

No caso da interação simplificada, a amplitude unitária pode ser expressa por:

$$T_{LI} = \frac{\mathcal{K}_{LI}}{1 + \mathcal{K}_{LI}\Omega}, \quad (2.36)$$

em que  $\Omega$  é a função de Green do sistema  $K\pi$ , dada pela integral

$$\Omega = i \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P/2 + l)^2 - M_\pi^2 + i\epsilon} \frac{1}{(P/2 - l)^2 - M_K^2 + i\epsilon}. \quad (2.37)$$

Por envolver dois propagadores, essa integral é chamada de tipo bolha e está calculada em detalhes no apêndice C.1. Ela diverge logaritmicamente mas, seguindo a proposta de Gasser e Leutwyler [21], a sua parte regular pode ser definida pela subtração:

$$\bar{\Omega}(s) = \Omega(s) - \Omega(0); \quad (2.38)$$

pois a divergência contida em  $\Omega(s)$  é cancelada por  $\Omega(0)$ . A expressão final para o propagador regularizado é dada em termos da função  $\bar{L}(s)$ , calculada explicitamente, para diferentes intervalos de  $s$ , nas eqs. (C.21) - (C.28). Essa regularização introduz uma constante arbitrária  $C_{LI}$  real. De volta à (2.36), a amplitude regular resulta em

$$T_{LI}(s) = \frac{\mathcal{K}_{LI}}{1 + \mathcal{K}_{LI}(\bar{\Omega} + C_{LI})}; \quad (2.39)$$

A região de maior interesse neste problema é aquela acima do limiar da reação  $K\pi$ ,  $s > (M_K + M_\pi)^2$ . Nesse caso, a função  $\bar{\Omega}$  é complexa,

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_R + i\bar{\Omega}_I, \quad (2.40)$$

como mostram as eqs. (C.28) e (C.29). Na região elástica, a amplitude é unitária e pode ser expressa em termos da sua fase como

$$T_{LI}(s) = \frac{16\pi}{\rho} \sin \delta_{LI} e^{i\delta_{LI}}, \quad (2.41)$$

sendo  $\rho$  a função cinemática dada em (A.5) e

$$\tan \delta_{LI} = -\frac{\bar{\Omega}_I \mathcal{K}_{LI}}{1 + \mathcal{K}_{LI}(\bar{\Omega}_R + C_{LI})}. \quad (2.42)$$

Em geral, os dados fornecidos em artigos experimentais não costumam ser expressos em termos da normalização relativística usada em (2.41). Usualmente, eles são representados em termos de uma função  $f$ , tal que

$$T_{LI} = \frac{16\pi}{\rho} f_{LI}, \quad (2.43)$$

sendo

$$f_{LI} = |f_{LI}| e^{i\delta_{LI}}. \quad (2.44)$$

No caso elástico,  $|f_{LI}| = \sin \delta_{LI}$ .

### Matriz K

Um método de unitarização bastante utilizado na literatura é o baseado na aproximação de matriz K[69], o qual considera que as partículas que interagem dentro do *loop* estão na camada de massa e portanto, que a função de Green se reduz à contribuição da parte imaginária da função  $\bar{\Omega}$  em (2.40). As implicações dessa aproximação podem ser avaliadas inspecionando a figura C.2.

## 2.3 Comparação com os dados experimentais

Como discutimos no capítulo 2, a dinâmica das interações no estado final do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  é dominada pela interação  $K\pi$  e, portanto, uma boa descrição dessa amplitude é fundamental para a confiabilidade e acurácia dos resultados. A amplitude teórica é mais importante no nosso primeiro modelo para o decaimento, apresentado no capítulo 3, no qual ela é iterada e precisa ser integrada em mais de um *loop*. Já no segundo modelo, apresentado no capítulo 4, a melhora efetuada na descrição do vértice primário do decaimento indicou que apenas uma interação  $K\pi$  é suficiente. Isso permite incluir diretamente os dados experimentais do espalhamento  $K\pi$ , na região onde eles estão disponíveis. Em energias baixas, uma extensão, baseada em teoria, precisa ser utilizada.

### 2.3.1 onda S, $I = 1/2$

Para produzir um sentimento acerca da estrutura da amplitude  $T_{S1/2}(s)$ , a mais importante neste trabalho, consideramos o *kernel* da onda S, (2.29), com apenas uma ressonância no canal s. Neste caso, temos 5 parâmetros na amplitude  $K\pi$ :  $F$ ,  $c_d$ ,  $c_m$ ,  $m_R$  e  $C_{S1/2}$ . Para  $c_d$  e  $c_m$  escolhemos os valores propostos em [14](2.6), estimados a partir da lagrangiana quirial. Para a massa nominal da ressonância  $K_0^*(1430)$ , optamos pelo valor no qual os dados para a fase da colaboração LASS[6] passam por  $90^\circ$  i.e.,  $m_R = 1.33$

GeV. Finalmente, para a constante  $C_{S1/2}$ , escolhemos o valor para o qual a parte real do denominador da amplitude (2.39) é zero na massa da ressonância, que corresponde a  $\mathcal{R}[\Omega(m_R^2)] = C_{S1/2}$ . Na prática essa escolha obriga a fase a passar por  $90^\circ$  em  $s = m_R^2$ , ou seja, no mesmo ponto que os dados do LASS. Para as demais constantes usamos:  $F = F_{K\pi} = \sqrt{F_\pi F_K} = 0.103$  GeV [14] e as massas dos mésons do PDG[16]. Todos esses valores numérico estão concentrados no apêndice F e fornecem o gráfico do módulo da amplitude de espalhamento  $K\pi$  da fig. 2.8. A contribuição total, relativa à eq. (2.41), é descrita pela curva contínua (verde) que é máxima perto de  $1$  GeV<sup>2</sup> e possui um zero em  $s \approx 2.7$ GeV<sup>2</sup>. Podemos identificar, a partir do gráfico, o papel que os parâmetros exercem na amplitude (2.41) analisando as contribuições parciais do termo dominante (*leading order*,  $L$ ) associado à interação de contato, e as devidas aos parâmetros  $c_d$  e  $c_m$ .

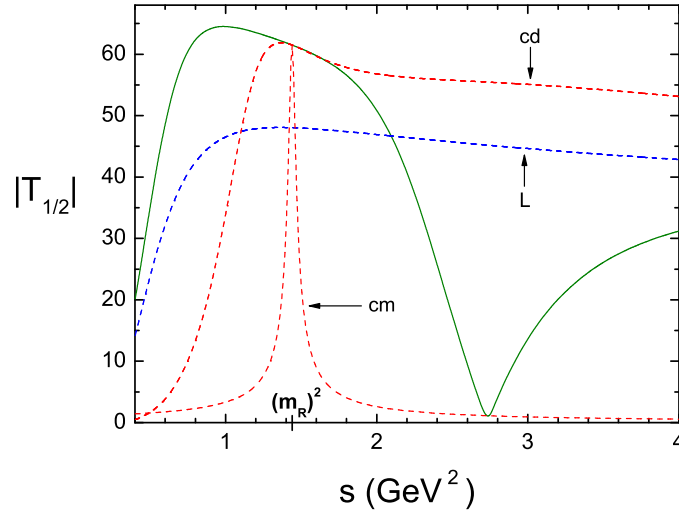


Figura 2.8: Módulo da amplitude  $K\pi$  da onda S com  $I = 1/2$ ,  $|T_{1/2}|$ : equação (2.41) (verde),  $L$  representa a contribuição do termo de contato (2.30) (azul),  $c_d$  e  $c_m$  são os respectivos termos da equação (2.31) (vermelho), obtidos zerando um de cada vez.

Pode-se ver que a curva rotulada por  $c_m$  é do tipo Breit-Wigner com um pico estreito e centrado na massa nominal da ressonância, enquanto a devida a  $c_d$  é bem larga. As duas curvas associadas à ressonância respeitam o teorema quiral de baixa energia e são pequenas próximas ao limiar, que é claramente dominado pelo termo de contato,  $L$ . O termo de contato também contribui de maneira significativa em todo o espaço de fase, embora seja menor que  $c_d$  para valores de  $s > 1$  GeV<sup>2</sup>.

Esse modelo não descreve adequadamente os dados experimentais e, por isso, foi

necessário considerar outros conjuntos de parâmetros. As previsões de três conjuntos de parâmetros para a fase são descritas no gráfico da fig. 2.9 e discutidas na sequência. Neste problema, existe uma forte correlação entre os parâmetros e, por isso, vários conjuntos de valores podem resultar em bons ajustes para os dados experimentais, como já mostraram Jamin, Oller e Pich em [14]. Desta forma, ao primeiro conjunto de parâmetros, adicionamos dois outros, que privilegiam outras regiões dos dados experimentais. Os três conjuntos de parâmetro são representados abaixo, com  $c_d$ ,  $c_m$  e  $m_R$  dados em GeV.

$$c_d = 0.030, \quad c_m = 0.043, \quad m_R = 1.33, \quad C_{S1/2} = -0.001836; \quad (2.45)$$

$$c_d = 0.030, \quad c_m = 0.043, \quad m_R = 1.33, \quad C_{S1/2} = 0.001836; \quad (2.46)$$

$$c_d = 0.0352, \quad c_m = 0.001, \quad m_R = 1.33, \quad C_{S1/2} = -0.001. \quad (2.47)$$

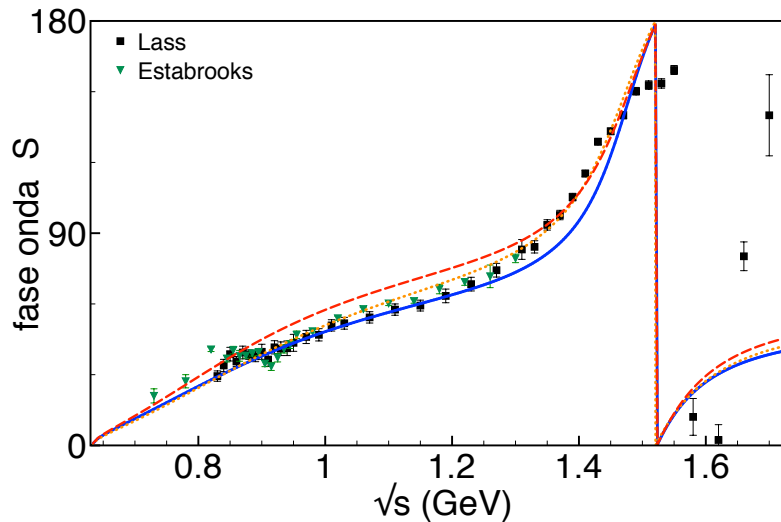


Figura 2.9: Fase da amplitude  $K\pi$  equação (2.41) com 3 conjuntos de parâmetros: linha cheia (2.45), tracejada (2.46) e pontilhada (2.47), comparadas com os dados experimentais da colaboração LASS[6] e Estrabrooks *et. al*[7].

Inspecionando a figura 2.9, notamos que nenhuma das três curvas consegue descrever os dados na região acima de 1.5 GeV. Isso é coerente com o fato de a parametrização proposta para a amplitude ser elástica e conter apenas uma ressonância escalar o que, formalmente, a limita à região  $\sqrt{s} < 1.4$  GeV. Embora a opção dos parâmetros fenomenológicos, (2.45), descreva os dados de baixa energia da referência [7] (Estabrooks *et al.*), ela passa longe dos dados da colaboração LASS[6] na maior parte do intervalo, e apenas consegue acompanhar

a subida da curva entre 1.3 e 1.5 GeV. Já para a segunda escolha, (2.46), ocorre o oposto: ela descreve bem os dados de baixa energia da colaboração LASS[6], mas descola deles para energias maiores que 1.3 GeV. A terceira escolha de parâmetros, (2.47), acompanha o limite de mais alta energia do primeiro e de baixa energia do segundo. As três curvas em 2.9 podem ser consideradas ajustes satisfatórios aos dados experimentais, o que confirma a forte correlação entre os parâmetros observada em [14].

Com o estudo acima, fica evidente que, com apenas uma ressonância e sem incluir inelasticidades, não é possível descrever toda a curva experimental. Nessa direção, um ajuste considerando três ressonâncias escalares, ainda sem inelasticidade, está feito no apêndice B.4 e mostra que, deste modo, é possível descrever melhor o comportamento dos dados. O resultado foi comparado com o obtido por Frederico *et al.*[45] e demonstra a importância do efeito da inelasticidade.

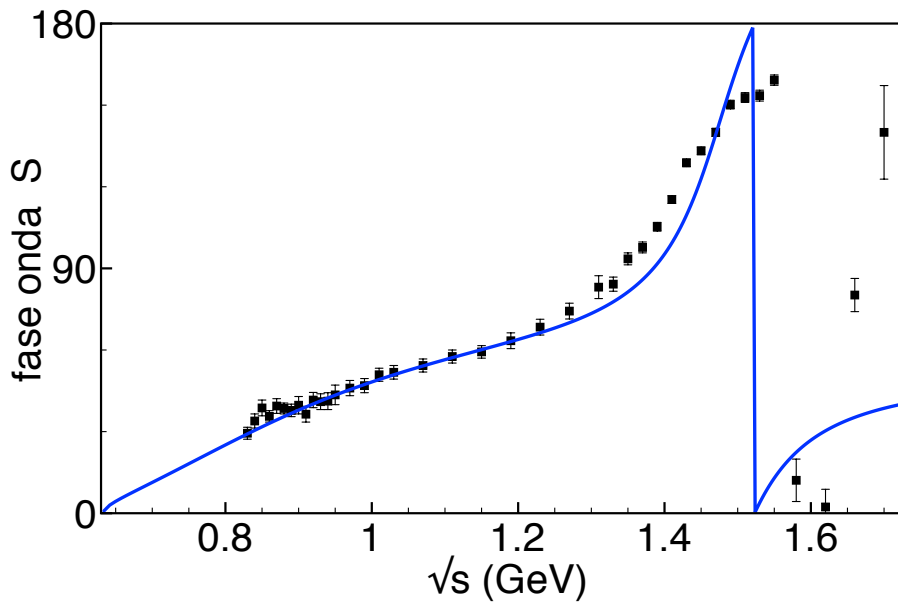


Figura 2.10: Fase  $K\pi$  na onda S com  $I=1/2$  (2.41), comparada com os dados do LASS[6].

No entanto, para o objetivo deste trabalho, é suficiente uma amplitude com um ajuste comprometido com a região de baixas energias e o limite quiral, o que acontece com o segundo conjunto de parâmetros, (2.46). Nos gráficos da fig.2.10 e 2.11 mostramos a fase e o módulo da amplitude  $K\pi$  para onda  $S$  e  $I = 1/2$ , para esse conjunto de parâmetros,

em comparação com os dados da colaboração LASS[6].

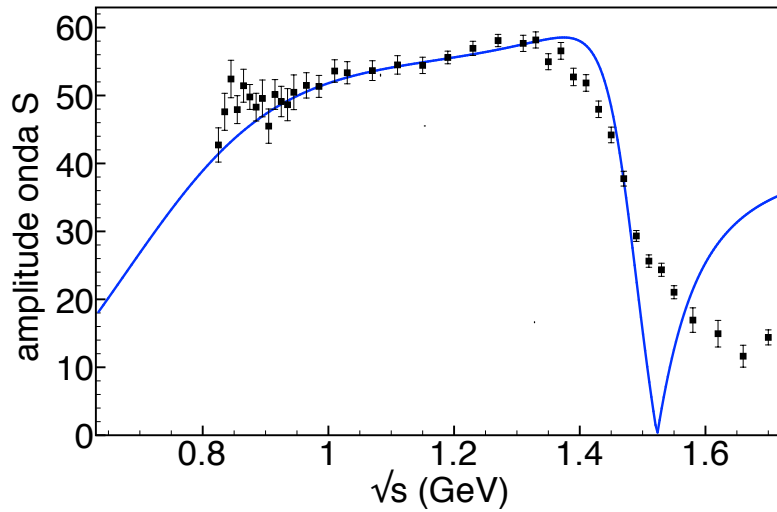


Figura 2.11: Módulo  $K\pi$  no canal  $I=1/2$  para onda  $S$  comparada com os dados do LASS[6] normalizados pelo fator  $16\pi/\rho(s)$ .

É importante notar que o formato da amplitude  $K\pi$  em onda  $S$  difere muito de uma Breit-Wigner. Esse efeito está associado à presença do polo do kappa, uma ressonância muito larga e que não foi incluída explicitamente, pois é gerada dinamicamente no processo de espalhamento.

### 2.3.2 onda $P$ , $I = 1/2$

A amplitude unitária na onda  $P$  é obtida incluindo o *kernel* vetorial  $\mathcal{K}_{P1/2}$  (2.33) em (2.39). Uma vez que  $G_V = F_{K\pi}/\sqrt{2}$ , o *kernel* (2.33) possui apenas um parâmetro livre: a massa do  $K^*(892)$ , que foi fixada em  $m_{K^*} = 0.89594$  GeV, segundo o proposto pela colaboração FOCUS[5], na análise do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . A unitarização introduz um segundo parâmetro,  $C_{P1/2}$ , que foi escolhido da mesma forma que  $C_{S1/2}$ , ou seja, fenomenologicamente: o valor no qual a parte real do denominador da amplitude é zero na massa da ressonância  $\mathcal{R}[\Omega(m_{K^*}^2)] = C_{P1/2} = 0.005088$ . Com isso, a fase teórica passa por  $90^\circ$  na massa nominal da ressonância  $K^*(892)$ . O gráfico da fase na onda  $P$ , fig.2.12, mostra que existe um bom acordo entre a curva teórica e os dados na região de baixas energias. A curva teórica descreve a subida abrupta devida à ressonância  $K^*(892)$ , mas descola dos dados para valores de  $\sqrt{s} > 1.2$  GeV. Esse comportamento é esperado pois o *kernel* não inclui outras ressonâncias que contribuem para a onda  $P$ , como

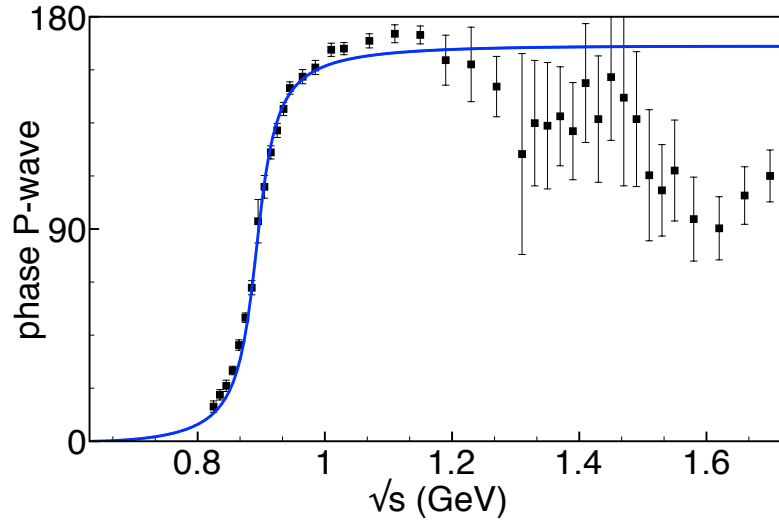


Figura 2.12: Fase da amplitude do espalhamento  $K^- \pi^+$   $I = 1/2$  na onda P comparada com os dados experimentais do LASS[6].

o  $K^*(1680)$ . Na fig.2.13, foi comparado o módulo da onda P com os dados experimentais

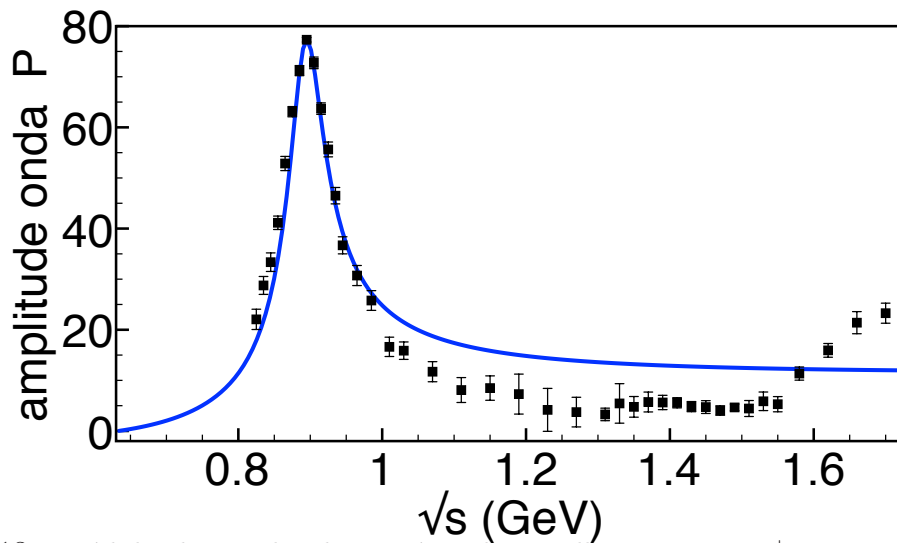


Figura 2.13: módulo da amplitude unitária do espalhamento  $K^- \pi^+$   $I = 1/2$  na onda P comparada com os dados experimentais da colaboração LASS[6].

da colaboração LASS [6] e, novamente, identificamos um bom acordo na região  $\sqrt{s} < 1$  GeV. Ao contrário da onda  $S$ , o módulo da onda  $P$  é uma assinatura de uma função do tipo Breit-Wigner, dominada pela ressonância  $K^*(892)$ .



### 2.3.3 onda S, $I = 3/2$

A física no canal  $I = 3/2$  é, certamente, menos interessante que a do  $I = 1/2$ , pois nele não existem contribuições ressonantes nas ondas  $S$  e  $P$ . O *kernel* para a onda S, da maneira como foi definido em (2.32), inclui apenas a amplitude do contato e é repulsivo. A amplitude é obtida incluindo o *kernel* na amplitude unitarizada, (2.39), e está característica não muda.

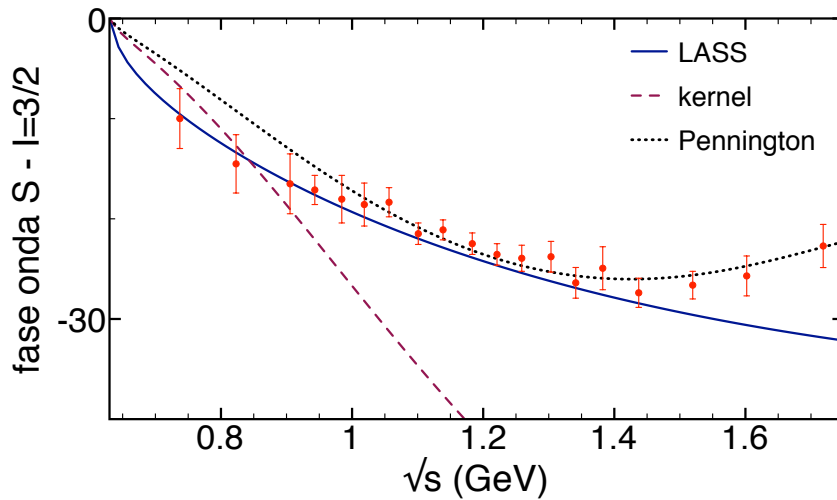


Figura 2.14: Fase a amplitude de isospin 3/2 em onda S comparada como LASS[6].

No gráfico 2.14, vemos que o resultado obtido para fase na onda  $S$  com  $I = 3/2$  não descreve os dados experimentais da referência [7]. Acrescentamos à comparação uma parametrização proposta por Pennington *et al.*[19] e outra pela colaboração LASS[7] sobre seus próprios dados. Embora no limite quiral, a fase que obtivemos concorde com a de Pennington *et al.*[19], logo após ela diverge dos dados. Isso reflete a aproximação muito drástica feita na escolha do nosso *kernel* pois, embora essa onda não tenha ressonância no canal  $s$ , existem contribuições nos canais  $t$  e  $u$ , que foram desprezadas. Não vamos nos aprofundar nesse estudo, pois a amplitude do canal de  $I = 3/2$  não será utilizada no cálculo do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  como discutiremos nos capítulos seguintes.

## 2.4 Polos da amplitude $K\pi$

Em posse de uma amplitude  $K\pi$  teórica, podemos explorar a dinâmica das ressonâncias escalares. Ressonâncias são polos na segunda folha de Riemann, definidos

matematicamente como sendo zeros do denominador da amplitude. Portanto, para encontrar os polos da amplitude (2.39), convém escreve-la como

$$T_{S1/2}(s) = \mathcal{K}_{S1/2}(s)/D(s); \quad (2.48)$$

$$D(s) = 1 + \mathcal{K}_{S1/2}(s) [\bar{\Omega}(s) + C_{S1/2}]. \quad (2.49)$$

Em seguida, estendemos  $D(s)$ , função da variável  $s$  real, para  $D(z)$ , função da variável  $z$  definida no plano complexo. Para determinar a amplitude como função da variável  $z$ , é preciso fazer uma extensão analítica da função  $\bar{\Omega}(s)$  ou, o que é equivalente, da função de *loop*  $L(s)$ . O cálculo dessa extensão está feito em detalhes no apêndice B.5. A amplitude possui um corte no eixo real, a partir do limiar, no qual as duas folhas de Riemann se conectam. Na folha física,  $L(z)$  é analítica e, na segunda folha, encontram-se os polos da amplitude  $K\pi$ .

Considerando apenas uma ressonância explícita no *kernel* da equação (2.29) e usando os parâmetros obtidos no ajuste da fase aos dados experimentais (2.46), dois polos são encontrados na segunda folha de Riemann, como mostra a fig. 2.15. O polo mais pesado

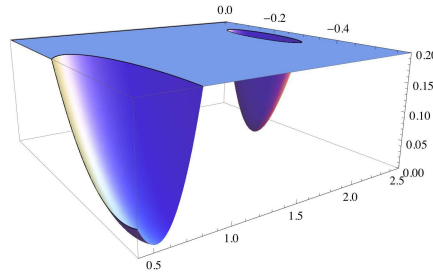


Figura 2.15: Dois polos em  $|D(s)|$  no plano  $s$ -complexo.

corresponde à ressonância explícita na lagrangiana, o  $K_0^*(1430)$ . O mais leve foi gerado dinamicamente e é identificado como o  $\kappa$ , com massa dada por:  $750 - i236.3$  MeV. Para enfatizar a presença do processo de geração dinâmica do  $\kappa$ , foi analisado o caso em que não há ressonâncias provenientes da Lagrangiana no *kernel* (2.29), ou seja, ele apenas contém a contribuição do termo de contato. Nesse caso, o denominador de  $D(z)$  possui apenas um zero no plano  $s$ -complexo, como mostra a fig. 2.16. Esse polo também é identificado como o  $\kappa$  e sua posição é quase a mesma que a obtida anteriormente:  $705 - i248.5$  MeV. Isso reforça o argumento de que este polo nasce diretamente do reespalhamento do par  $K\pi$ ,

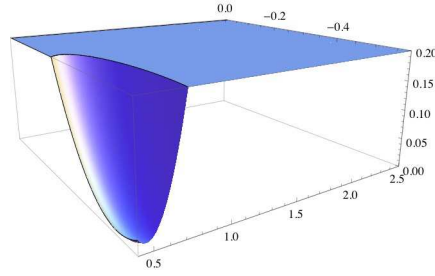


Figura 2.16: Apenas um polo em  $|D(s)|$  no plano  $s$ -complexo.

no fenômeno denominado geração dinâmica de ressonâncias. Este efeito já foi observado para o kappa em [14] e outros processos mesônicos[70]. O fato das posições dos polos do  $\kappa$ , nas figs. 2.15 e 2.16, não serem idênticas é um indício da interferência com a segunda ressonância.

## 2.5 Representação alternativa da amplitude $K\pi$

As amplitudes  $K\pi$  construídas neste capítulo foram utilizadas para o cálculo do processo  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ . Em um determinado estágio deste cálculo, apresentado no próximo capítulo, foi útil representar numericamente a amplitude de espalhamento (2.39) em função de polos, por meio da expressão

$$T = \frac{\mathcal{K}}{D} = \mathcal{K} \left[ \beta + \frac{\gamma_\kappa}{s - \theta_\kappa} + \frac{\gamma_1}{s - \theta_1} \right], \quad (2.50)$$

em que  $\theta_\kappa$  é relativo ao polo do kappa e  $\theta_1$  ao polo do  $K_0^*(1430)$ . Os valores obtidos em ajuste numérico da amplitude teórica (2.39), foram:  $\beta = 0.2200$ ,  $\gamma_\kappa = -0.1849 + i0.6378 \text{ GeV}^2$ ,  $\gamma_1 = 0.2247 + i0.1260 \text{ GeV}^2$ .

Quando comparada com a amplitude teórica, figura 2.17, vemos que a representação em termos dos polos (PR) é compatível e descreve razoavelmente bem a região de validade do diagrama de Dalitz:  $0.4 < s < 2.99 \text{ GeV}^2$ .

## 2.6 Extensão dos dados

No segundo modelo desenvolvido para o  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ , cap.4, não é necessário iterar a amplitude  $K\pi$  e podemos utilizar diretamente os dados experimentais. Entretanto, esses

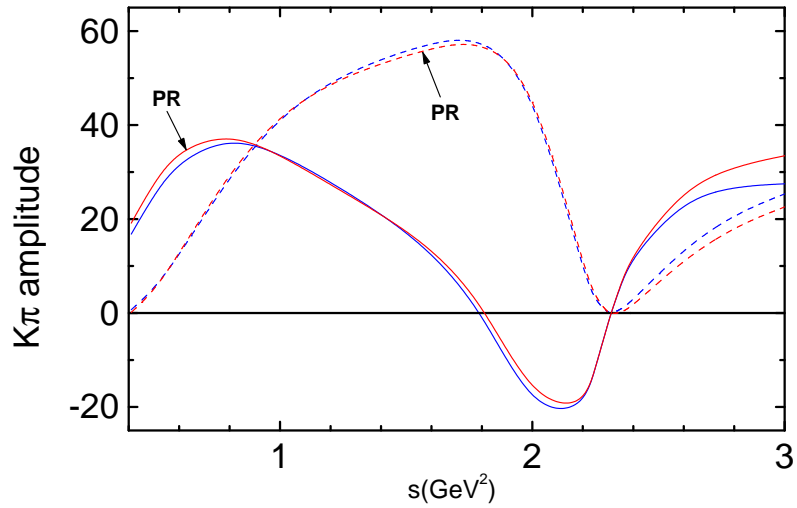


Figura 2.17: Componentes real ( linha cheia ) e imaginária ( linha tracejada) da amplitude  $K\pi$  da eq.(2.39)(azul) e na representação em função dos polos (PR), eq.(2.50) (vermelho).

dados não existem na região de baixa energia e, por isso, empregamos uma amplitude híbrida, que tem o setor de baixas energias descrito pela amplitude teórica, baseada em simetria quiral e, os demais, pelos próprios dados experimentais do espalhamento livre. Os gráficos abaixo revelam a melhor versão de ajuste para a fase e módulo com os dados experimentais para as ondas S e P. As amplitudes híbridas correspondem às amplitudes teóricas até o primeiro dado experimental, em 0.825 GeV.

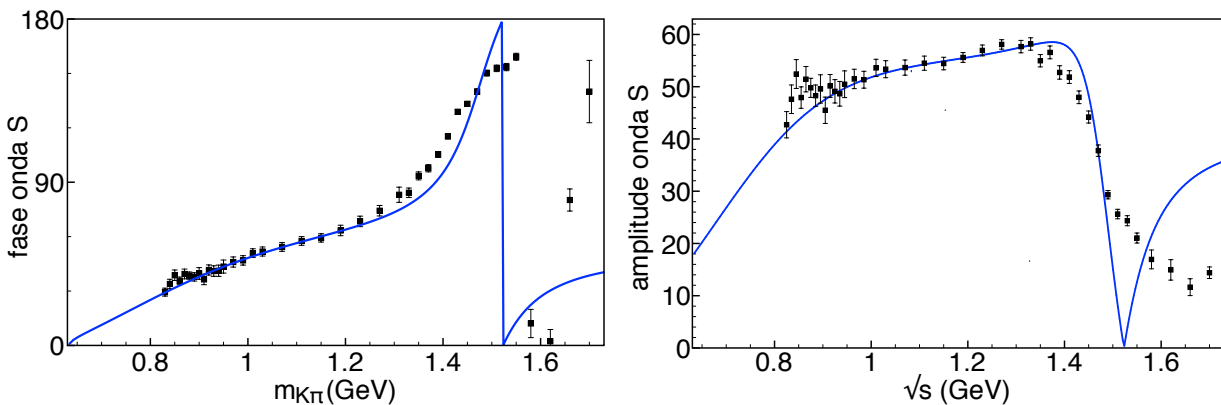


Figura 2.18: Fase e módulo do espalhamento  $K\pi$  em onda S; as funções híbridas são dadas pela curva teórica até o primeiro dado experimental e depois passam a ser descritas pelos próprios dados da colaboração LASS[6].

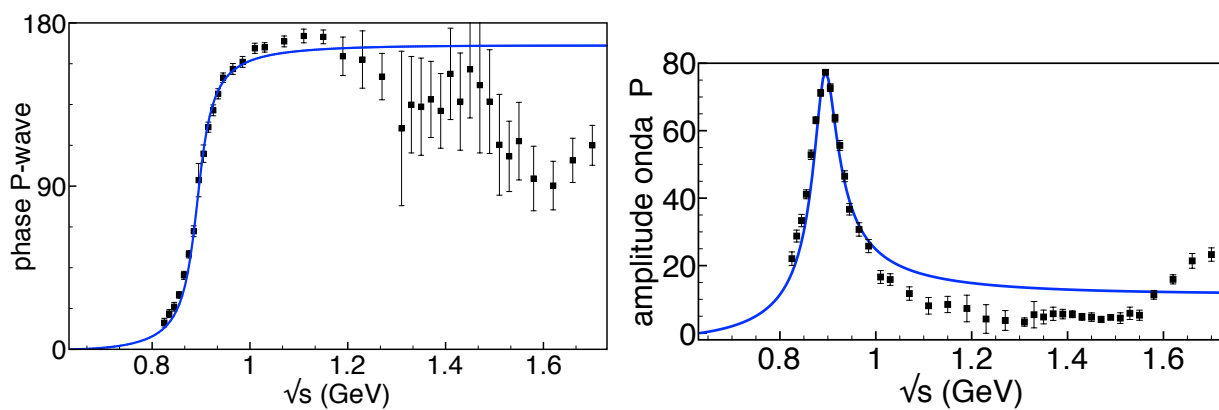


Figura 2.19: Fase e módulo do espalhamento  $K\pi$  em onda P; as funções híbridas são dadas pela curva teórica até o primeiro dado experimental e depois passam a ser descritas pelos próprios dados da colaboração LASS[6].



# Capítulo 3

## Primeiro modelo: FSI

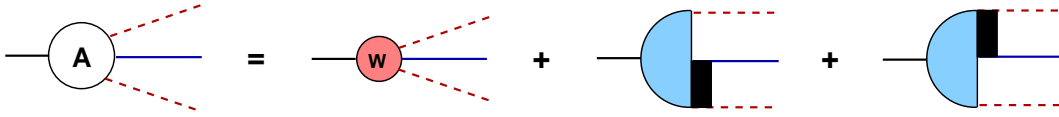


Figura 3.1: Modelo para o  $D$  decaindo em  $K\pi\pi$ , iniciando no vértice fraco (W) e incluindo FSI.

Os dados experimentais do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S ainda não são completamente entendidos. Antes do trabalho realizado pelo nosso grupo[37], não era claro que poderia existir, de fato, uma diferença entre a fase de um par  $K\pi$  do estado final do decaimento, que será chamado a partir de agora como  $[K\pi]_S$ , e a fase em onda S do espalhamento livre, mostrada na fig. 1.1. Menos claro, ainda, era o entendimento de qual seria a origem dinâmica deste efeito. Na perspectiva teórica, existem duas fontes possíveis: o vértice fraco e a interação de estado final (FSI). Como discutido no capítulo 1.2, a amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ ,  $A(m_{12}^2, m_{23}^2)$ , é composta por estas duas partes fundamentais. A inexistência de um cálculo incluindo as FSI próprias de três corpos motivou o início deste estudo, no qual buscamos desenvolver um modelo minimamente realista.

De modo geral a amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  é escrita como

$$A(m_{12}^2, m_{23}^2) = W(m_{12}^2, m_{23}^2) + a(m_{12}^2) + a(m_{23}^2). \quad (3.1)$$

em que  $W(m_{12}^2, m_{23}^2)$  corresponde à contribuição partônica e a interação entre os hádrons no estado final é representada pelas funções  $a(m_{12}^2)$  e  $a(m_{32}^2)$ .

No modelo construído para a FSI, desprezamos a interação  $\pi^+\pi^+$  e consideramos que o káon interage com um pión por vez, e portanto, as funções são descritas por uma série de sucessivos reespalhamentos  $K\pi$ , como na figura 3.2. O primeiro diagrama da série é do tipo  $(2+1)$ , o único nos modelos baseados em interação de quase-dois corpos[31, 34]. Já o segundo diagrama, é o primeiro com efeitos próprios de três corpos, e a unitariedade da amplitude de três corpos é garantida pela totalidade da série.

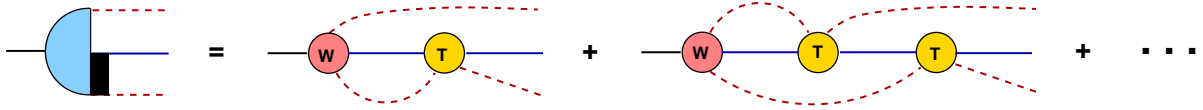


Figura 3.2: série de reespalhamento que implementa unitariedade em três corpos.

A série que descreve cada uma das funções  $a$  é perturbativa, e as diversas ordens são determinadas pelo número de vezes que  $T$ , a amplitude de espalhamento  $K\pi$ , aparece em um dado diagrama. É importante enfatizar que essa série *não* corresponde a uma expansão em *loops* já que, conforme discutido no capítulo 2, existem infinitos *loops* no interior da amplitude  $T$ .

A solução completa não perturbativa da série da fig. 3.2 pode ser calculada usando a decomposição de Faddeev, método que foi aplicado ao  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$  por Frederico *et al*[45]. Devido às dificuldades técnicas que envolvem uma abordagem desse tipo, somadas ao caráter exploratório deste primeiro cálculo, empregamos um método alternativo para ressomar a série. Os ingredientes para calcular o primeiro diagrama são conhecidos: amplitude  $K\pi$ , descrita no capítulo anterior, e o *loop* de interação do par  $K\pi$ , apresentado no apêndice C.1. Já o segundo diagrama envolve o cálculo de dois *loops*, conectados por trocas de momentos entre as três partículas do sistema e uma amplitude  $K\pi$ . É importante enfatizar que, em sendo um estudo pioneiro e exploratório muitas aproximações foram feitas. Na amplitude de dois corpos não foram incluídas contribuições de isospin  $3/2$ , onda P e inelasticidades e o vértice fraco foi considerado como pontual e sem estrutura. Esta última aproximação é discutida na sequência.



### 3.1 Vértice Fraco sem estrutura

Como discutido no capítulo 1.2, devido ao problema associado ao tamanho da massa do quark  $c$  e as escalas da QCD, não há uma teoria especialmente desenvolvida para o cálculo do vértice fraco do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . Como o foco do primeiro modelo eram as interações hadrônicas, aproximamos a função  $W$ , do vértice fraco, por uma constante e consideramos apenas as topologias correspondentes a interação permitida de cor; as associadas aos diagramas suprimidos de cor foram desprezadas. Isso permite que, nesta primeira etapa, pudéssemos analisar a influência das interações próprias de estado final. O vértice fraco é dado pelas três topologias representadas na fig. 3.3.

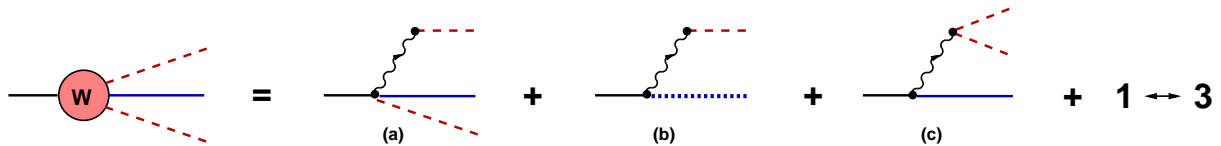


Figura 3.3: As topologias do vértice fraco consideradas no cálculo de  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ ; a linha ondulada representa o  $W^+$  que vira um ponto no cálculo.

As topologias  $a$  e  $b$  são do tipo axial e se relacionam com as das figs. 1.8, e a  $c$  com a do tipo vetorial, fig.1.9. Os acoplamentos fracos da figura 3.3 foram, simplesmente, considerados constantes sem estrutura, representados por  $W_a$ ,  $W_b$  e  $W_c$ .

Cada topologia evoluiu de forma independente até o detector e índices de isospin associados são mantidos, o que requer um pouco de atenção. No caso do diagrama partônico, a projeção em  $I = 1/2$  com estado final  $K^-(k) \pi^+(q) \pi^+(q')$  resulta:  $W_a \rightarrow \sqrt{2/3} W_a$ ,  $W_b \rightarrow 1 W_b$  e  $W_c \rightarrow 0 W_c$ . O vértice  $W_b$ , já nasce projetado em  $I = 1/2$  devido ao seu acoplamento com a ressonância escalar enquanto o vértice  $W_c$  não contribui nessa ordem.

### 3.2 Solução perturbativa

A amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  é dada pela evolução do vértice fraco primário, que pode ser qualquer uma das topologias da fig. 3.3, no modelo de FSI, representado pelos diagramas de Feynman da fig. 3.2. Na sequência esse processo será

desenvolvido para cada topologia individualmente, usando as projeções dos estados  $K\pi$  carregados ( $K^-\pi^+$ ) e neutros ( $\bar{K}^0\pi^0$ ), em amplitudes de isospin 1/2 e 3/2, dadas no apêndice B.2. As várias amplitudes são designadas pelos mesmos índices dos vértice fracos correspondentes.

Para as três topologias consideradas, a série perturbativa tem a forma da fig.3.4,

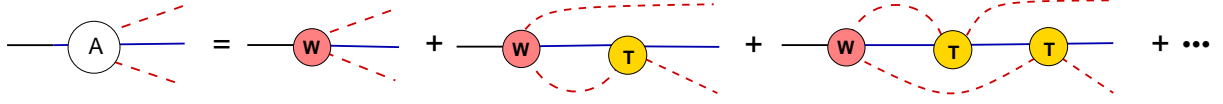


Figura 3.4: Amplitude da série perturbativa.

e escrevemos

$$A(m_{12}^2, m_{23}^2) = W(m_{12}^2, m_{23}^2) + a(m_{12}^2) + a(m_{23}^2); \quad (3.2)$$

$$a(m_{12}^2) = \sum_{N=1}^{\infty} a_N(m_{12}^2), \quad (3.3)$$

em que  $N$  é a ordem perturbativa. O cálculo do termo de primeira ordem fornece

$$\begin{aligned} a_1(m_{12}^2) &= -i W T(m_{12}^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_{12}-k)^2 - M_\pi^2]} \frac{1}{[k^2 - M_K^2]} \\ &= -W T(m_{12}^2) \Omega(m_{12}^2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

sendo  $\Omega(m_{12}^2)$  a função de *loop* discutida no apêndice C.1. Ela é divergente e precisa ser regularizada. Por isso, efetuamos um subtração, supondo que a constante seja a mesma utilizada no espalhamento  $K\pi$  elástico, representada por  $C_{S1/2}$ , e obtemos

$$a_1(m_{12}^2) = -W T(m_{12}^2) [\bar{\Omega}(m_{12}^2) + C_{S1/2}], \quad (3.5)$$

A amplitude  $T$  foi unitarizada no capítulo 2 e dada na eq.(2.39) como:

$$T = \frac{\mathcal{K}}{1 + \mathcal{K} (\bar{\Omega} + C_{S1/2})} \quad (3.6)$$

e, portanto,

$$[\bar{\Omega} + C_{S1/2}]T = 1 - \frac{1}{D} \quad (3.7)$$

$$D = 1 + \mathcal{K} (\bar{\Omega} + C_{S1/2}). \quad (3.8)$$

Isso permite que a eq.(3.5) possa ser escrita como

$$a_1(m_{12}^2) = -W + a'_1(m_{12}^2), \quad (3.9)$$

$$a'_1(m_{12}^2) = -\frac{W}{D}. \quad (3.10)$$

O segundo termo da série é dado por

$$\begin{aligned} a_2(m_{12}^2) &= -W T(m_{12}^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_{12}-k)^2 - M_\pi^2]} \frac{1}{[k^2 - M_K^2]} T[(p_3 + k)^2] \\ &\times \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_3 - k - k')^2 - M_\pi^2]} \frac{1}{[k'^2 - M_K^2]} \\ &= i W T(m_{12}^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_{12}-k)^2 - M_\pi^2]} \frac{1}{[k^2 - M_K^2]} T[(p_3 + k)^2] \Omega[(p_3 + k)^2]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

subtraindo quando necessário a contante de renormalização  $C_{S1/2}$  e usando a eq.3.7, encontramos

$$a_2(m_{12}^2) = -a_1(m_{12}^2) + a'_2(m_{12}^2), \quad (3.12)$$

$$a'_2(m_{12}^2) = -i W T(m_{12}^2) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_{12}-k)^2 - M_\pi^2]} \frac{1}{[k^2 - M_K^2]} \frac{1}{D[(p_3+k)^2]}. \quad (3.13)$$

Procedendo de modo totalmente análogo, encontramos

$$\begin{aligned} a_3(m_{12}^2) &= -a_2(m_{12}^2) + a'_3(m_{12}^2), \\ a'_3(m_{12}^2) &= -W T(m_{12}^2) \int \frac{d^4 k}{(4\pi)^4} \frac{1}{(p_{12}-k)^2 - M_\pi^2} \frac{1}{k^2 - M_K^2 + i\epsilon} T(k+p_3) \\ &\times \int \frac{d^4 k'}{(4\pi)^4} \frac{1}{[(k+p_3)-k']^2 - M_\pi^2} \\ &\times \frac{1}{k'^2 - M_K^2 + i\epsilon} \frac{1}{D[(k'+p_{12}-k)^2]}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} a_4(m_{12}^2) &= -a_3(m_{12}^2) + a'_4(m_{12}^2), \\ a'_4(m_{12}^2) &= i W T(m_{12}^2) \int \frac{d^4 k}{(4\pi)^4} \frac{1}{(p_{12}-k)^2 - M_\pi^2} \frac{1}{k^2 - M_K^2} T(k+p_3) \\ &\times \int \frac{d^4 k'}{(4\pi)^4} \frac{1}{[(k+p_3)-k']^2 - M_\pi^2} \frac{1}{k'^2 - M_K^2} T[(p_{12}-k+k')^2] \\ &\times \int \frac{d^4 k''}{(4\pi)^4} \frac{1}{\{[k'+(p_{12}-k)]-k''\}^2 - M_\pi^2} \\ &\times \frac{1}{k''^2 - M_K^2} \frac{1}{D[(p_3+k-k'+k'')^2]}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Juntando todos esses resultados encontramos um comportamento recorrente

$$\begin{aligned}
a_1(m_{12}^2) &= -W + a'_1(m_{12}^2), \\
a_2(m_{12}^2) &= -a_1(m_{12}^2) + a'_2(m_{12}^2), \\
a_3(m_{12}^2) &= -a_2(m_{12}^2) + a'_3(m_{12}^2), \\
a_4(m_{12}^2) &= -a_3(m_{12}^2) + a'_4(m_{12}^2), \\
&\dots = \dots
\end{aligned} \tag{3.16}$$

e a soma dos dois lados pode ser escrita formalmente. Entretanto, antes de fazer isso, precisamos incluir as estruturas de isospin do problema relacionadas as transições  $\langle \pi^+ K^- | T | \pi^+ K^- \rangle$  (B.22) e  $\langle \pi^0 \bar{K}^0 | T | \pi^+ K^- \rangle$  (B.24). O fator de recombinações de isospin é  $[2/3]$  para cada reespalhamento e os resultados (3.16) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}
a_1(m_{12}^2) &= -W + a'_1(m_{12}^2), \\
[2/3]a_2(m_{12}^2) &= -[2/3]a_1(m_{12}^2) + [2/3]a'_2(m_{12}^2), \\
[2/3]^2 a_3(m_{12}^2) &= -[2/3]^2 a_2(m_{12}^2) + [2/3]^2 a'_3(m_{12}^2), \\
[2/3]^3 a_4(m_{12}^2) &= -[2/3]^3 a_3(m_{12}^2) + [2/3]^3 a'_4(m_{12}^2), \\
&\vdots \\
[2/3]^{(N-1)} a_N(m_{12}^2) &= -[2/3]^{(N-1)} a_{N-1}(m_{12}^2) + [2/3]^{(N-1)} a'_N(m_{12}^2).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Efetuada a soma sobre ambos os lados, encontramos

$$[3/2] \sum_{N=1}^{\infty} [2/3]^N a_N(m_{12}^2) = -W - \sum_{N=1}^{\infty} [2/3]^N a_N(m_{12}^2) + [3/2] \sum_{N=1}^{\infty} [2/3]^N a'_N(m_{12}^2),$$

e, a relação entre as somas das duas séries é dada por:

$$[5/2] \sum_{N=1}^{\infty} [2/3]^N a_N(m_{12}^2) = -W + [3/2] \sum_{N=1}^{\infty} [2/3]^N a'_N(m_{12}^2). \tag{3.18}$$

### Contribuição $A_a$

A amplitude  $A_a$ , associada ao acoplamento fraco  $W_a$ , é dada pela série da fig. 3.5, em que os pares  $K\pi$  intermediários podem ser carregados ou neutros e o pión que sai do  $W^+$  é sempre positivo.

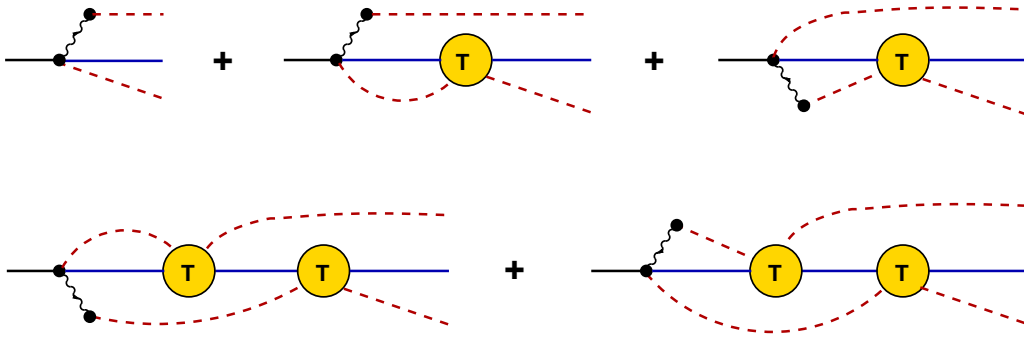


Figura 3.5: Diagrama da evolução em FSI do vértice fraco  $W_a$ ; a linha ondulada é  $W^+$ , sempre conectada a um  $\pi^+$ ; O par  $\pi\bar{K}$  produzido no lado oposto pode ser neutro ou carregado.

Uma das diferenças entre os diagramas com número ímpares ou pares de *loops* é a alternância da interação do káon, que pode se dar com o pión que sai do  $W^+$  ou com o que é produzido no mesmo vértice. Os diagramas com interação de estado final são descritos por uma função  $\lambda_N$ , que se relaciona com  $a_N$  por:  $W\lambda_N \equiv a_N$ . A série em  $A_a$ , incluindo os devidos fatores de isospin, é escrita como

$$A_a(m_{12}^2, m_{23}^2) = \sqrt{\frac{2}{3}} W_a \left\{ 1 + \frac{5}{3} \left[ \lambda_1(m_{12}^2) + \frac{2}{3} \lambda_2(m_{12}^2) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \lambda_3(m_{12}^2) \cdots \right] \right\} + (1 \leftrightarrow 3). \quad (3.19)$$

O resultado (3.17) permite reescrever esta série de maneira mais simples, em função de  $\lambda'$ , para  $W\lambda'_N \equiv a'_N$

$$A_a(m_{12}^2, m_{23}^2) = \sqrt{\frac{2}{3}} W_a \left[ \lambda'_1(m_{12}^2) + \frac{2}{3} \lambda'_2(m_{12}^2) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \lambda'_3(m_{12}^2) + \cdots \right] + (1 \leftrightarrow 3), \quad (3.20)$$

Neste ponto, passamos a considerar apenas os dois primeiros termos desta série. A função  $\lambda'_1(m_{12}^2)$  está determinada pela eq. (3.10). Para calcular  $\lambda'_2$  a partir de (3.13), é preciso resolver uma integral complexa com três denominadores, sendo  $D$  uma função complicada dada em (3.8). Inicialmente, algumas tentativas foram feitas, como o método de Cauchy, que contorna as divergências na energia para, depois, integrar o resultado no espaço tridimensional. Esta técnica, ainda que precisa, resulta em muita álgebra. Por isso, ao final, o método escolhido foi o das integrais de Feynman, possibilitado por uma representação alternativa da amplitude  $K\pi$  (2.50), na qual  $1/D$  é determinada pela

soma dos polos das ressonâncias  $\kappa$  e  $K_0^*(1430)$ , com coeficientes complexos fixados de tal forma que ambas as representações sejam equivalentes, na região acessível do espaço de fase. Nessa aproximação a integral em (3.13) é reduzida a uma soma de integrais do tipo triângulo,

$$I_{\pi K\theta}(m_{12}^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_{12}-k)^2 - M_\pi^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[[k^2 - M_K^2 + i\epsilon] (p_3+k)^2 - \theta]}, \quad (3.21)$$

em que  $\theta = \theta_R - i\theta_I$ , corresponde à posição do polo do plano  $s$  complexo, para  $\theta_R$  e  $\theta_I$  constantes positivas. A integral (3.21) é feita em detalhes no apêndice C.3 e o resultado é dado em função da integral covariante  $\Pi_{\pi K\theta}$  (C.69)

$$I_{\pi K\theta} = i \frac{\Pi_{\pi K\theta}}{16\pi^2} \quad (3.22)$$

e a função  $\lambda_2$  pode ser escrita como

$$\lambda_2(m_{12}^2) = T(m_{12}^2) \left\{ -\beta [\bar{\Omega}(m_{12}^2) + C_{S1/2}] + \gamma_\kappa \frac{\Pi_{\pi K\theta_\kappa}}{(16\pi^2)} + \gamma_1 \frac{\Pi_{\pi K\theta_1}}{(16\pi^2)} \right\}. \quad (3.23)$$

em que  $\beta$ ,  $\gamma_\kappa$  e  $\gamma_1$  são os coeficientes complexos ajustados, fornecidos em (2.50).

### Contribuição $A_b$

Os diagramas da amplitude  $A_b$  até segunda ordem na interação  $K\pi$ , são apresentados na fig.3.6 e caracterizados pela produção de uma ressonância diretamente no vértice fraco.

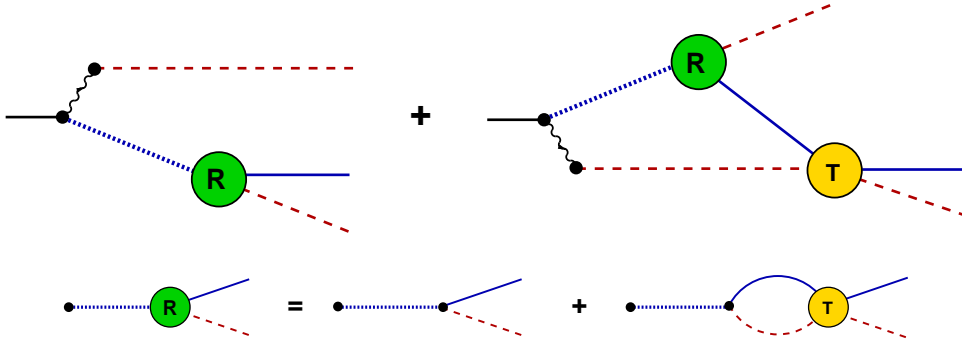


Figura 3.6: Diagrama do vértice fraco  $W_b$ ; a curva ondulada é  $W^+$ , sempre grudada a um  $\pi^+$  e a linha pontilhada é uma ressonância escalar, cuja largura é dada pela subestrutura  $R$  descrita na linha de baixo.

Se considerarmos apenas uma ressonância nua, o diagrama em árvore será divergente, pois contém um polo na região física. Por essa razão a ressonância precisa ser vestida com

uma bolha da interação  $K\pi$  e os dois diagramas da fig.3.6 precisam ser considerados. Esse processo é chamado amplitude de produção,  $R$ , em que usamos o formalismo proposto em [71]. A amplitude  $R$ , para uma ressonância de massa  $m_R$ , obtida por meio das mesmas regras de Feynman que produziram as eqs. (2.29) e (2.31) e, após a subtração da parte divergente do *loop*, pode ser escrita como

$$R(m_{12}^2) = -i \frac{1}{F^2} [c_d m_{12}^2 - (c_d - c_m)(M_\pi^2 - M_K^2)] \frac{1}{m_{12}^2 - m_R^2} [1 - T(m_{12}^2) (\bar{\Omega}(m_{12}^2) + C_{S1/2})] . \quad (3.24)$$

em que a constante  $C_{S1/2}$  foi escolhida como sendo a mesma que a usada na amplitude  $K\pi$  (2.39). Podemos, mais uma vez, usar (3.7) para simplificar  $R$  e obtemos

$$R(m_{12}^2) = -i \frac{1}{F^2} [c_d m_{12}^2 - (c_d - c_m)(M_\pi^2 - M_K^2)] \frac{1}{[m_{12}^2 - m_R^2] D(m_{12}^2)} . \quad (3.25)$$

Um aspecto importante deste resultado é que as duas contribuições da linha de baixo da fig.3.6 são individualmente divergentes, mas com a soma delas isso não acontece pois o polo nu é fatorado e cancela o mesmo polo presente na função  $D(m_{12}^2)$ . Esse tipo de característica decorre do tratamento consistente dos vários elementos da dinâmica. A série da amplitude  $A_b$  até segunda ordem é dada por:

$$A_b = a_{b1} + a_{b2} + \dots , \quad (3.26)$$

$$a_{b1}(m_{12}^2) = i W_b R^1(m_{12}^2) , \quad (3.27)$$

$$a_{b2}(m_{12}^2) = W_b \frac{2}{3} T(m_{12}^2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{R^1(p_3+k)}{[(p_{12}-k)^2 - M_\pi^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[k^2 - M_K^2 + i\epsilon]} , \quad (3.28)$$

De forma análoga ao que foi feito em  $\lambda'_2$ ,  $a_{b2}$  pode ser reduzida a uma soma de integrais do tipo triângulo e obtemos

$$a_{b2}(m_{12}^2) = W_b \frac{2}{3} T(m_{12}^2) \frac{1}{F^2} \left\{ \beta [\bar{\Omega}(m_{12}^2) + C_{S1/2}] c_d - g \left( \beta + \frac{\gamma_\kappa}{m_R^2 - \theta_\kappa} - \frac{\gamma_1}{m_R^2 - \theta_1} \right) \frac{\Pi_{\pi K m_R^2}}{(16\pi^2)} \right. \\ \left. - \gamma_\kappa \left( c_d - \frac{g}{m_R^2 - \theta_\kappa} \right) \frac{\Pi_{\pi K \theta_\kappa}}{(16\pi^2)} - \gamma_1 \left( c_d - \frac{g}{m_R^2 - \theta_1} \right) \frac{\Pi_{\pi K \theta_1}}{(16\pi^2)} \right\} ; \quad (3.29)$$

$$g = c_d m_R^2 - (c_d - c_m)(M_K^2 + M_\pi^2). \quad (3.30)$$

### Contribuição $A_c$

A amplitude  $A_c$ , relacionada ao acoplamento  $W_c$ , é dada pela fig. 3.7 e tem um  $\bar{K}_0$  associado ao  $D$  um acoplamento vetorial leve no processo  $W \rightarrow \pi^+\pi^0$ . Deste modo,

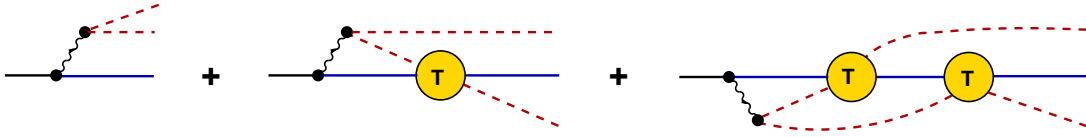


Figura 3.7: Diagramas que compõem  $A_c$  até dois loops; um pión que sai do  $W^+$  é neutro o outro carregado.

o diagrama em árvore não contribui para o estado final  $K^-\pi^+\pi^+$  e, portanto, não é computado à amplitude  $A_c$ . Os diagramas de primeira e segunda ordens possuem a mesma estrutura dos da fig. 3.5, e podemos escrever a sua série como

$$A_c(m_{12}^2, m_{23}^2) = -\frac{\sqrt{2}}{3} W_c \left\{ \lambda_1(m_{12}^2) + \frac{2}{3} \lambda_2(m_{12}^2) \left(\frac{2}{3}\right)^2 \lambda_3(m_{12}^2) \cdots \right\} + (1 \leftrightarrow 3). \quad (3.31)$$

Usando o resultado (3.17), temos

$$A_c(m_{12}^2, m_{23}^2) = -\frac{\sqrt{2}}{5} W_c \left[ -1 + \lambda'_1(m_{12}^2) + \frac{2}{3} \lambda'_2(m_{12}^2) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \lambda'_3(m_{12}^2) \cdots \right] + (1 \leftrightarrow 3). \quad (3.32)$$

em que  $\lambda'_1$  e  $\lambda'_2$  são obtidos a partir das eqs. (3.10) e (3.13).

### 3.3 Resultados

As amplitudes  $A_a$  (3.19),  $A_b$  (3.26) e  $A_c$  (3.32) foram calculadas numericamente e os resultados para a fase e o módulo são discutidos em seguida, comparados aos dados experimentais das colaborações FOCUS[5] e E791[4].

No gráfico para fase  $[K\pi]_S$ , fig. 3.8, são mostradas as contribuições do termo dominante de cada uma das amplitudes. No caso de  $A_a$ , o termo dominante da série (3.20) é dado por  $\lambda'_1$ , em  $A_b$  (3.26), ele é dado pelo primeiro diagrama da fig. 3.6 e, na topologia  $A_c$  (3.32), em consequência da ressonância da série (3.17), a contribuição dominante é dada pelos dois primeiros termos em (3.32). A fig. 3.8 mostra que  $A_a$  e  $A_b$  caem exatamente em cima da fase experimental do espalhamento  $K\pi$  livre[6], enquanto a forma de  $A_c$  é claramente diferente. Quando transladado de  $-163^\circ$ , ela descreve os dados da FOCUS



[5] até o limite da região elástica. Os comportamentos das fases de  $A_a$  e  $A_b$  podem ser entendidos pelo fato do termo dominante em ambos ser proporcional a  $1/D$ , ou seja, só incluem informação do sistema de dois corpos  $K\pi$  e, conseqüentemente, respeitam o teorema de Watson[44]. Por outro lado,  $A_c$  não possui diagrama em árvore e descreve uma interação própria de 3 corpos.

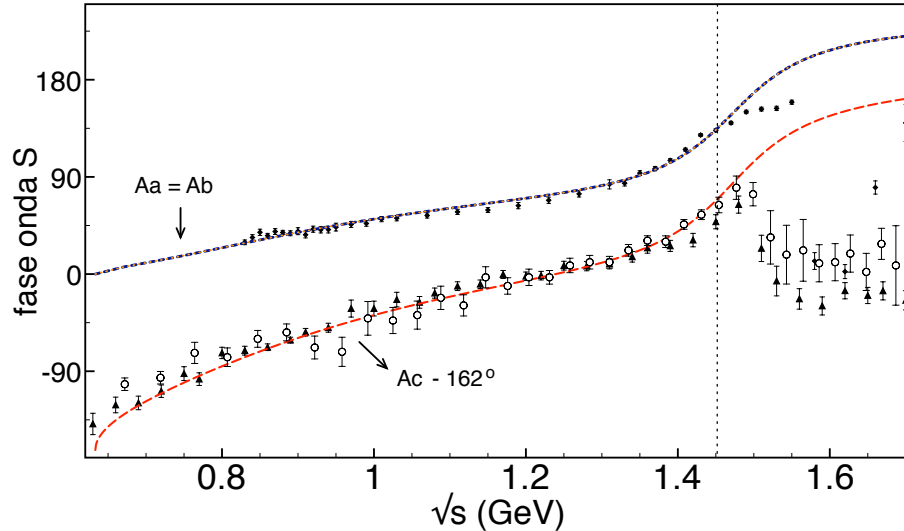


Figura 3.8: Fase da contribuição dominante:  $A_a$  e  $A_b$  se sobrepõem aos dados experimentais do LASS[6] (diamante) de espalhamento  $K\pi$ ;  $A_c$  deslocado de  $-163^\circ$  descreve os dados da FOCUS [5](triângulo) e E791[18](círculo) na região elástica (pontilhada vertical).

O resultado da contribuição da segunda ordem na fase  $[K\pi]_S$  é mostrado na fig. 3.9 em comparação com a ordem anterior e as contribuições relativas dos termos no interior das série. É bastante nítida a diferença entre as duas primeiras ordens para as amplitude  $A_a$  e  $A_b$ , que não são mais compatíveis com o a fase do espalhamento  $K\pi$  livre, demonstrando que o teorema de Watson[44] não se aplica mais. A oscilação em  $A_b$  perto do limiar é devida a uma falta de precisão numérica na função  $a_{b2}$ , eq(3.30), cuja origem está no cancelamento incompleto entre a amplitude  $K\pi$  exata e a aproximada. De maneira análoga ao que acontece para o termo dominante, a contribuição da amplitude  $A_c$  descreve bem os dados da FOCUS[5] até o limiar da região inelástica, quando deslocada de  $-148^\circ$ , como mostra mais adiante a fig.3.11.

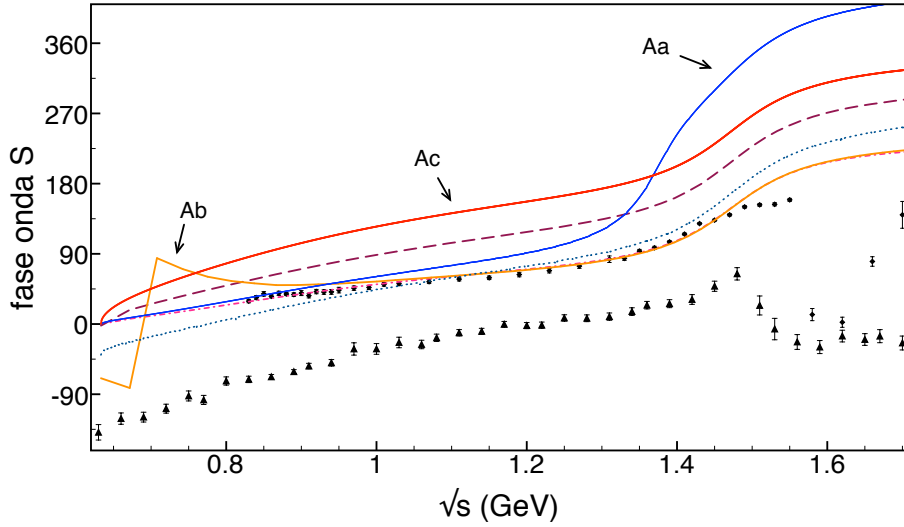


Figura 3.9: Fase  $K\pi$  das amplitudes em  $N = 2$ :  $A_a$  (azul),  $A_b$  (laranja) e  $A_c$  (azul); com as contribuições relativas a  $\lambda'_1$  (traço- pontilhada),  $\lambda'_2$  (tracejada) e  $a_{b2}$  (pontilhada); comparadas aos dados experimentais das colaborações FOCUS [5] (triângulo) e LASS[6] (diamante).

A importância relativa das contribuições parciais  $\lambda'_2$  e  $a_{b2}$  só pode ser avaliada nos resultados para os módulos das amplitudes, fig.3.10, nos quais podemos observar que elas tendem a ser menores do que a contribuição em primeira. Uma inversão desta relação está localizada na região em torno da massa da ressonância  $m_R$  e se deve ao fato da função  $D$ , eq.(3.8), possuir um polo no eixo real em  $s = m_R$ , oriundo do *kernel* da amplitude. Sendo  $\lambda'_1 = 1/D$ , a primeira ordem é nula nesse ponto e a região em torno dele é dominada pela contribuição de  $\lambda'_2$ . Esse resultado é mais uma evidência da importância da contribuição de três corpos.

Na comparação com os dados experimentais da FOCUS[5] para o módulo, fig. 3.10, vemos que  $A_c$  possui um zero na mesma posição que os dados e que também coincide com o zero da amplitude  $K\pi$ , fig. 2.11.

O estudo acima mostrou que a amplitude  $A_c$  possui um bom acordo com o dados experimentais tanto para a fase como para o módulo. No gráfico da fig3.11, comparamos as contribuições da fase para a amplitude  $A_c$  no termo dominante e em  $N = 2$ . O resultado mostra que há uma diferença de  $15^\circ$  entre a contribuição do termo dominante de  $A_c$  e a ordem seguinte, sendo ambas bons ajustes para os dados experimentais da colaboração FOCUS[5].

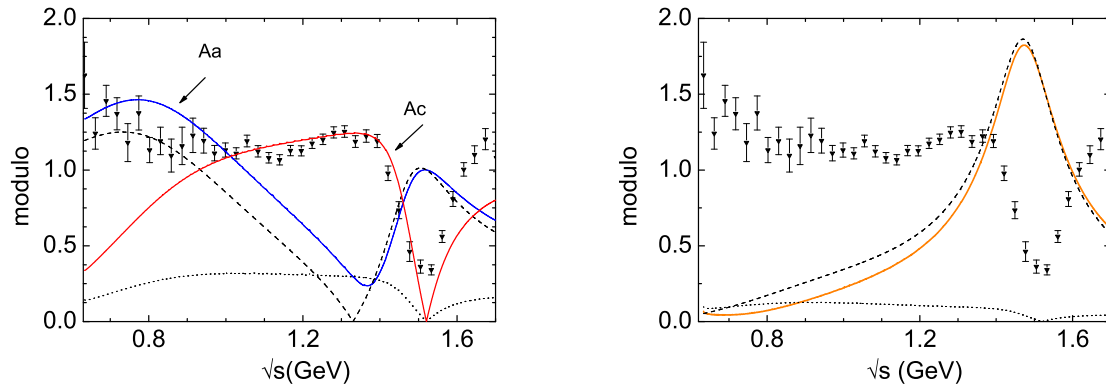


Figura 3.10: Módulo das amplitude em  $N = 2$ : (esquerda)  $A_a$  (3.20) e  $A_c$  (3.32); (direita)  $A_b$ (3.26); comparadas com as respectivas contribuições parciais para a primeira (tracejada) e a segunda ordem (pontilhada).

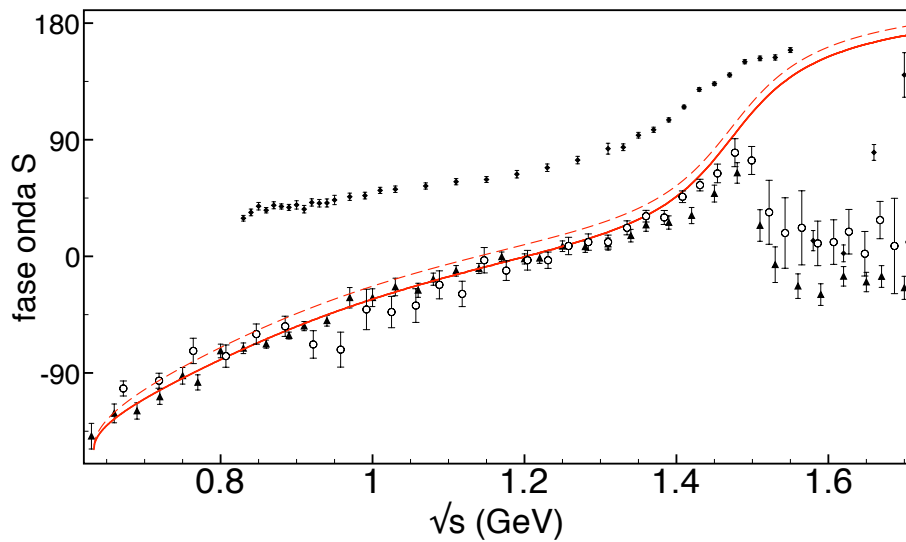


Figura 3.11: Fases da amplitude  $A_c$  deslocadas de  $148^\circ$ : ordem dominante (tracejada) e  $N = 2$  (contínua); comparada com os dados experimentais das colaboração FOCUS data[5] (triângulo), E791[18] (círculo) a LASS[6] (diamante).

## Principais conclusões

- As fases das amplitudes  $A_a$  e  $A_b$  em primeira ordem (até um *loop*) são equivalentes à fase experimental  $K\pi$  do LASS[6] e, portanto, estão em acordo com o teorema de Watson[44], figura 3.8.

- A amplitude do vértice vetorial  $A_c$  (3.32), deslocada em  $-148^\circ$ , é capaz de descrever os dados experimentais do limiar até a região próxima ao pico, fig3.9). A contribuição dominante em  $A_c$  também fornece uma descrição adequada dos dados, como mostra a fig3.8, quando subtraído de  $163^\circ$ .
- O módulo da amplitude  $A_c$ , fig.(3.10, esquerda), tem um zero na posição correta (igual aos dados) na região  $\sqrt{s} \approx 1.5$  GeV. Nesse mesmo ponto a amplitude de espalhamento  $K\pi$  vai a zero, o que sugere uma forte correlação.
- As interações de estado final são importantes e mostram a não adequação do teorema de Watson ao decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ .
- Por alguma razão, o vértice vetorial  $A_c$  parece ser favorecido, uma vez que ambos os gráficos da fase 3.11 e do módulo 3.10 mostram uma boa adequação aos dados. A sua principal diferença para as demais séries é que ele não possui contribuição em árvore.
- Nosso estudo sugere que a diferença entre as fases  $[K\pi]_S$  do decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$  e do espalhamento livre é entendida como uma consequência da interação de estado final entre as três partículas do sistema  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ .

# Capítulo 4

## Segundo modelo: vértice fraco

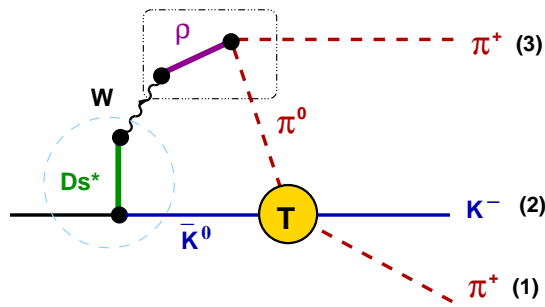


Figura 4.1: Diagrama de Feynman da amplitude vetorial  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ .

No capítulo anterior, o decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  foi calculado com foco na descrição das interações do estado final com três corpos. Devido ao seu caráter exploratório, algumas simplificações foram feitas para facilitar o desenvolvimento dos cálculos. A principal delas foi a escolha de um vértice fraco constante e sem estrutura. A amplitude de espalhamento  $K\pi$  também ficou restrita à contribuição elástica na onda S do canal de isospin 1/2, tendo sido deixadas de lado as devidas à onda P, ao canal 3/2 e a inelasticidades, tais como a abertura do canal  $K\eta'$ .

Mesmo com essas limitações, aquela abordagem conseguiu mapear as estruturas fundamentais que compõem o decaimento e mostrou a relevância do processo que nasce do vértice vetorial fraco ( $A_c$ , fig. 3.7) na descrição dos dados experimentais de  $[K\pi]_S$ . Como mostram os gráficos da figs. 3.8 e 3.9, a série com acoplamento fraco do tipo vetorial resulta em uma descrição razoável para o módulo e muito boa para a fase. Nesta segunda etapa do trabalho, aprimoramos a descrição do vértice fraco associado à transição  $c \rightarrow s$ .

Como discutido no cap.1.2, o tratamento da interação fraca no setor do charme não é trivial, pois envolve um problema de escala. A lagrangiana efetivação quiral utilizada neste trabalho, baseada em Burdman e Donoghue[35] e Wise[36], acopla os campos pesados em um multiplete de mésons com charme, externo à lagrangiana de  $SU(3)$ , e descreve todos os processos fortes e fracos, envolvendo os campos leves ( $\pi, K, \dots$ ) e pesados ( $D, D^\dagger, D_s^+, D^*, \dots$ ). No vértice vetorial do processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , esse setor é representado pelo círculo pontilhado azul na fig. 4.1. Essa figura destaca, ainda, uma segunda melhoria, de caráter mais formal e bem estabelecida na literatura, o tratamento do vértice  $W \rightarrow \pi\pi$ , indicada pela caixa preta. Esse vértice incorpora, na nova versão, uma estrutura que inclui o méson  $\rho(770)$  como um estado ressonante intermediário.

Os diagramas considerados no capítulo anterior, a partir das três topologias da fig.3.3 envolvem vértices axial e vetorial, representados nas figuras 4.2 e 4.3 pelas bolhas amarela e azul, respectivamente. As estruturas detalhadas dos vértices axial e vetorial foram mostradas nas figs. 1.8 e 1.9 . Esses diagramas representam, também, as séries perturbativas em interações de estados finais. Por conveniência, associamos a ordem de um diagrama ao número de vezes que a amplitude  $K\pi$  aparece nele. Assim, por exemplo, nas figs. 4.2 e 4.3 são mostrados, explicitamente, diagramas de ordem zero, um e dois.

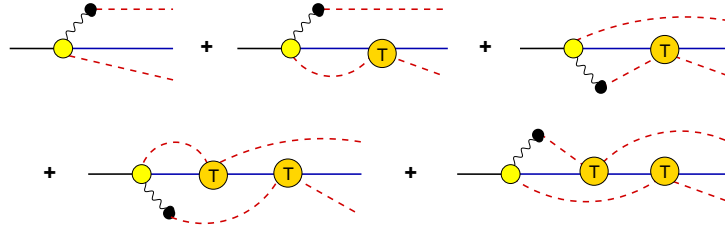


Figura 4.2: Diagramas de Feynman para o vértice axial.

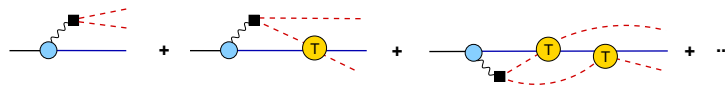


Figura 4.3: Diagramas de Feynman para o vértice vetorial.

No caso da fig. 4.3, os dois píons indicados no vértice em árvore correspondem ao par  $\pi^+ \pi^0$ . Por isso, é mais interessante representar a série da fig. 4.3 como em 4.4, em que o

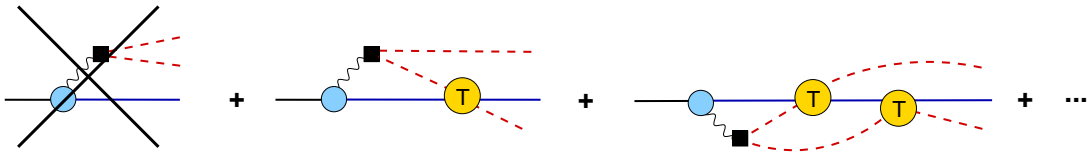


Figura 4.4: O diagrama do vértice vetorial com vértice vestido.

“x”, no primeiro diagrama enfatiza o fato de que o termo em árvore não contribui para o estado final  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ .

Neste segundo modelo, optamos por focar no estudo do vértice vetorial, buscando compreender melhor a relevância deste processo na descrição dos dados experimentais, sinalizada no capítulo anterior. O diagrama da fig.4.1 representa a contribuição, em primeira ordem, para a amplitude vetorial do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  e contém, essencialmente, três estruturas. A primeira delas é o vértice da interação  $K\pi$ , representada por  $T$ , calculada no cap. 2 e que está, portanto, sobre controle. A segunda, indicada pelo quadrado pontilhado preto, destaca o decaimento do vácuo excitado pelo  $W^+$  em dois píons, associado ao elemento de matriz  $\langle \pi^+ \pi^0 | V^\mu | 0 \rangle$ , bem conhecido na literatura e intermediado pela ressonância  $\rho$ . Essa é uma das melhorias do novo modelo, que agora inclui o fator de forma forte do vértice  $\pi\pi$  e é apresentada na seção 4.2, para o caso do  $\rho$  sem largura, e na seção 4.4, para o  $\rho$  com largura. Por fim, a terceira estrutura, destacada pelo círculo azul em 4.1, é o vértice  $\langle \bar{K}^0 | V^\mu | D^+ \rangle$ , que concentra a dependência do charme no problema. Esse elemento de matriz é bem conhecido na literatura e, neste segundo modelo é incluído com a dependência correta de momento e parametrizado em termos de fatores de forma, discutidos na próxima seção.

## 4.1 Vértice $\langle \bar{K}^0 | V^\mu | D^+ \rangle$

Os fatores de forma (FF) são de extrema relevância na descrição da dinâmica das interações fracas e, também, estão presentes na determinação dos coeficientes da matriz CKM. A falta de informação sobre a estrutura de fatores de forma é a maior fonte de incerteza na obtenção de tais coeficientes. Eles são, atualmente, objetos de estudo no setor de quarks  $c$ ,  $b$  e  $t$ , dialogando com: os novos resultados experimentais dos super

aceleradores, a busca pela violação de carga-paridade (CPV) e a física além do modelo padrão. A precisão dos dados experimentais demanda o refinamento dos modelos teóricos para os fatores de forma. A falta de informação sobre os parâmetros dos FF é, também, grave no caso das transições entre mésons pesados e leves porque, nesse contexto, o espaço de fase acessível ao sistema é muito maior do que nos processos envolvendo apenas mésons leves ou pesados. É importante entender a dependência do fator de forma como função de  $q^2$  - o quadrimomento transferido - pois, quando integrado no espaço de fase, ele fornece o observável “*branching ratio*” do processo.

O decaimento fraco do méson  $D$  pode ocorrer por meio de três processos distintos: leptônico  $D \rightarrow l\nu_l$ ; semileptônico, com um ou mais mésons no estado final,  $D \rightarrow Kl\nu_l$ ,  $D \rightarrow \pi l\nu_l$  e  $D \rightarrow K\pi l\nu_l$  e não leptônico ou, simplesmente hadrônico, tais como  $D \rightarrow \pi\pi\pi$  e  $D \rightarrow K\pi\pi$ . Os processos leptônicos são simples e fornecem informação sobre a constante de decaimento do méson  $D$  no vácuo,  $F_D$ . Já o estudo dos decaimentos semileptônicos permite a extração de informações sobre constantes de acoplamento, que também aparecem em decaimentos hadrônicos mais complexos. Por exemplo, o vértice  $D^0 \rightarrow W\bar{K}^0$ , seguido do processo  $W \rightarrow \pi^0\pi^+$ , constitui um estágio intermediário possível no decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ . No entanto, o  $W$  também pode decair em léptons e o vértice  $D \rightarrow WK$  é o mesmo para os decaimentos semileptônico e hadrônico.

De modo geral, a amplitude do vértice  $D \rightarrow WK$  pode ser parametrizada em termos de dois fatores de forma. Representando a matriz de transição  $\langle \bar{K}^0 | V^\mu | D^+ \rangle$  por  $V_{DK}^\mu$ , temos:

$$V_{DK}^\mu = \left[ P_D^\mu + p_K^\mu - \frac{M_D^2 - M_K^2}{P^2} P^\mu \right] F_+(P^2) + \frac{M_D^2 - M_K^2}{P^2} P^\mu F_0(P^2), \quad (4.1)$$

em que  $P = P_D - p_K$  é o momento transferido e  $F_0$  e  $F_+$  são os fatores de forma escalar e vetorial.

Em muitos tratamentos de decaimentos semileptônicos do méson  $D$ , a descrição dos FF foi baseada na expansão em polos simples. Resultados experimentais mais recentes das colaborações CLEO[72] e FOCUS[73] utilizam modelos envolvendo um e dois polos, como sugerido em [74]. Os resultados obtidos mostram que a estrutura de dois polos é importante para grandes valores de  $q^2$ , região em que a expansão em polo simples destoa dos dados.



Existe uma grande variedade de cálculos teóricos para FF descrevendo decaimentos semileptônicos de mésons pesados em sistemas leves, e cada um deles possui sua limitação. No caso do modelo a quarks [75, 76], embora ele consiga descrever os FF escalar e vetorial em toda a região de  $q^2$ , não é possível relacioná-lo à lagrangiana da QCD, devido a problemas na definição da massa efetiva dos quarks e à indefinição da função de onda dos mésons. Já as regras de soma da QCD (QCDSR) [77] são adequadas apenas para descrever o comportamento em baixos momentos transferidos, enquanto a QCD na rede [78–80] e HM $\chi$ PT [81] são adequados para a região de altos momentos.

No caso do decaimento semileptônico  $D \rightarrow Kl\nu_l$ , existem algumas restrições aos FF escalar e vetorial que podem ser importadas do caso do pión. A principal delas é uma decorrência de um teorema para *píons moles*, no qual a cinemática do problema impõe duas restrições [82]:  $F_0(0) = F_+(0)$  e  $F_0(\Delta_{D\pi}) = \frac{F_D}{F_\pi}$ , sendo  $\Delta_{D\pi} = M_D^2 - M_\pi^2$  e  $F_D, F_\pi$ , as constantes de decaimento dos respectivos mésons no vácuo.

A decisão acerca da melhor estrutura para os fatores de forma da eq.(4.1) está relacionada a uma escolha de modelos. A partir da lagrangiana efetiva construída para descrever a interação fraca do decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$  [83], sintetizada na eq. (1.4), foi possível calcular os diagramas da fig. 1.9, que contribuem para a amplitude da interação  $D^+ \rightarrow W^+\bar{K}^0$ . Os resultados podem ser expressos em termos de FF:

$$F_+(q^2) = \frac{1}{F} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} G_{wD0} + \frac{\sqrt{2}}{4} G_{wD1} - 2\sqrt{2} G_{uD D^*} G_{wD1}^* \left[ 1 - \frac{M_D^*}{M_D^* - q^2} \right] \right\} \quad (4.2)$$

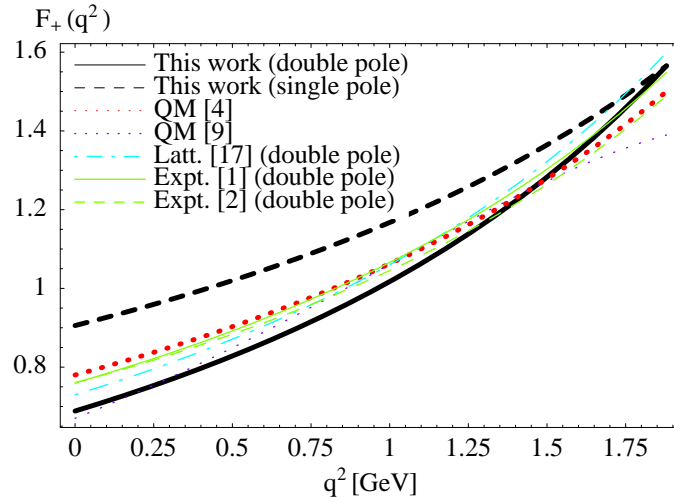
$$F_0(q^2) = \frac{\sqrt{2}}{2F(M_D^2 - M_K^2)} \left\{ (M_D^2 - M_K^2 + q^2) \frac{G_{wD0}}{2} - q^2 (M_D^2 + M_K^2 - q^2) G_{wD2} \right\} \quad (4.3)$$

em que  $G_{nD_i}$  são constantes de acoplamento fortes ( $n = u$ ) ou fracas ( $n = w$ ), que precisam ser obtidas a partir de informações experimentais ou fenomenológicas. As estruturas destes fatores de forma são mais complicadas do que as baseadas em apenas um polo do  $D_s^*$ , mas uma escolha de parâmetros poderia ser feita de tal forma a reduzir  $F_+(q^2)$  a um polo simples. A falta de informação para fixar todas as constantes em (4.2) e (4.3) nos levou a optar por usar um FF dentre os disponível na literatura. A tabela 4.1 resume as principais propostas de estruturas de FF, para o caso  $D^0 \rightarrow K^-\nu_l$ , enquanto a tabela 4.2 agrupa os diferentes valores de  $F_+(0)$  existentes na literatura, seguindo abordagens teóricas distintas. Como podemos ver, esses valores oscilam em torno de 0.75.

$D \rightarrow K$	$F_+(q^2)$	$F_0(q^2)$
LCSR single pole [84]	$\frac{F_+(0)}{1-q^2/m_{pole}^2}$	-
FOCUS[73]	single pole $\frac{F_+(0)}{(1-q^2/M_{pole}^2)}$	-
	modified pole $\frac{F_+(0)}{(1-q^2/M_{D^*s}^2)(1-\alpha q^2/M_{D^*s}^2)}$	-
HM $\chi$ T [81]	single pole $\frac{F_+(0)}{(1-q^2/M_{D^*s}^2)}$	1.81
	modified pole $\frac{F_+(0)}{(1-q^2/M_{D^*s}^2)(1-aq^2/M_{D^*s}^2)}$	$\frac{c_B(1-a)}{1-bq^2/M_{D^*s}^2}$

Tabela 4.1: Fator de forma vetorial e escalar presentes na literatura para o  $D \rightarrow K$ .

Em busca de precisão para os fatores de forma escalares e vetoriais do processo semi-leptônico  $D\pi \rightarrow \nu l$ , Ananthanarayan[88] usou informações obtidas a partir de unitariedade e analiticidade e propôs uma nova parametrização, levando em consideração a posição da singularidade do polo do primeiro estado excitado da ressonância  $D_s^*$ . O resultado é mostrado no gráfico da fig. 4.5, retirado de [88], comparado com outras

Figura 4.5: Fatores de forma escalar vetorial do decaimento  $D \rightarrow WK$ , gráfico retirado de [88].

estruturas para o fator de forma vetorial  $D \rightarrow KW$ . Podemos notar uma coerência entre as descrições para polo vestido (double pole) e a diferença deste para a descrição com o polo simples, que é qualitativamente pequena para grandes momentos transferidos e maior em energias mais altas ou pequenos momentos transferidos.

$D^0 \rightarrow K^-$	$F_{+,0}(0)$
BES 2004 [85]	$0.78 \pm 0.04 \pm 0.03$
CLEOc 2009 [86]	0.739(9)
Babar2007 [87]	0.737(10)
LCSR [82]	$0.75^{+0.11}_{-0.08}$
LCSR [84]	0.76(3)
QM[75]	0.78
WSB[28]	0.76
LQCD [78]	0.73(3)(7)
LQCD [79]	0.78(5)(4)
LQCD[80]	0.747(19)

Tabela 4.2: valores de  $F(0)$  presentes na literatura para o processo  $D^0 \rightarrow K^-$ .

No nosso trabalho, visando uma simplificação dos cálculos, o fator de forma do vértice  $D \rightarrow KW$  é descrito na aproximação de polo simples. A amplitude do vértice  $D^+ \rightarrow W\bar{K}^0$ , que entra na descrição do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , a bolha azul na fig. 4.1, é dada por

$$T_{DK}^\mu = \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C \right] V_{DK}^\mu \quad (4.4)$$

em que a transição  $V_{DK}^\mu$ , é definida em (4.1). As funções  $F_0$  e  $F_+$  foram escolhidos na forma:

$$F_+(P^2) = \frac{F^{DK}(0)}{1 - P^2/m_a^2}; \quad (4.5)$$

$$F_0(P^2) = \frac{F^{DK}(0)}{1 - P^2/m_b^2}. \quad (4.6)$$

O valor numérico da constante  $F^{DK}(0) = 0.75$  foi retirada de [82] e os de  $m_a^2$  e  $m_b^2$  são, respectivamente, as massas dos estados excitados  $D_s^{*+}(2100)$  vetorial e  $D_{s0}^*(2317)$  escalar, retirados do PDG[16].

É útil escrever a diferença dos FF usando (4.5) e (4.6):

$$\begin{aligned} F_+(P^2) - F_0(P^2) &= F^{DK}(0) \left[ \frac{m_a^2}{m_a^2 - P^2} - \frac{m_b^2}{m_b^2 - P^2} \right] \\ &= F^{DK}(0) P^2 \left[ \frac{m_b^2 - m_a^2}{(m_a^2 - P^2)(m_b^2 - P^2)} \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

para que a amplitude do vértice  $D \rightarrow WK$  possa ser colocada na forma

$$T_{DK}^\mu = \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C F^{DK}(0) \right] \left[ (P_D^\mu + p_K^\mu) \frac{m_a^2}{m_a^2 - P^2} - P^\mu \frac{(M_D^2 - M_K^2)(m_b^2 - m_a^2)}{(m_a^2 - P^2)(m_b^2 - P^2)} \right]. \quad (4.8)$$

## 4.2 Vértice $\langle \pi^+ \pi^0 | V^\mu | 0 \rangle$

A amplitude do processo  $W \rightarrow \pi\pi$ , representada pelo quadrado preto da figura 4.4, já foi muito estudada na literatura e a sua forma é bem conhecida[66, 89], sendo dominada pela ressonância  $\rho(770)$ . A ideia de dominância do méson vetorial (VMD) tem origem fenomenológica e afirma que, se um méson vetorial puder contribuir intermediando um processo, ele deverá saturar a respectiva constante de acoplamento [90]. Em uma releitura dessa dominância, pautada na teoria de perturbação quiral, o trabalho de Ecker, Gasser, Pich e De Rafael[22] mostra que as constantes de acoplamento de vértices vetoriais são dominadas por ressonâncias.

A amplitude da transição  $W^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$  pode ser dividida entre uma constante de acoplamento fraca, que depende da matriz CKM, e uma corrente forte, definida pelo elemento de matriz  $\langle \pi^+ \pi^0 | V^\mu | 0 \rangle$ , o qual representamos por  $V_{\pi\pi}^\mu$ . A sua parametrização em fatores de forma corresponde a um caso particular da eq.(4.1), no limite de isospin, em que as massas dos dois píons são iguais:

$$\begin{aligned} V_{\pi\pi}^\mu(P^2) &= \left[ p_+^\mu - p_0^\mu - \frac{M_\pi^2 - M_\pi^2}{P^2} P^\mu \right] F_+^\rho(P^2) + \frac{M_\pi^2 - M_\pi^2}{P^2} P^\mu F_0^\rho(P^2), \\ &= (p_+^\mu - p_0^\mu) F_+^\rho(P^2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

sendo  $p_+ \equiv p_{\pi^+}$ ,  $p_0 \equiv p_{\pi^0}$  e  $P^2 = (p_+ + p_0)^2$ , a massa invariante do par  $\pi^+ \pi^0$ . Vemos que  $V_{\pi\pi}^\mu$  só depende do fator de forma vetorial.

Na formulação de EGPR[22] para o fator de forma eletromagnético do pión, que corresponde a um elemento de matriz do mesmo tipo que a eq. (4.9), ele é descrito pelos

diagramas da fig.4.6 e inclui a contribuições de dois termos, um de contato e um outro ressonante, com o méson  $\rho$ . A amplitude deste processo, obtida a partir da lagrangiana

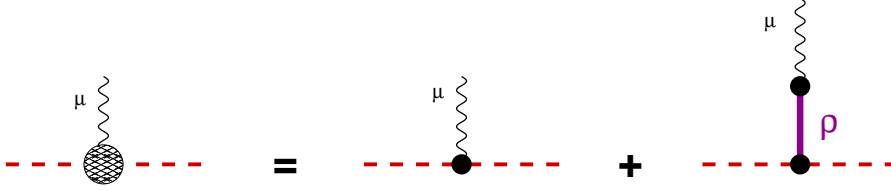


Figura 4.6: FF eletromagnético do pión na formulação de EGPR[22].

efetiva quiral[22], resulta em

$$\begin{aligned} V_{\pi\pi}^{\mu}(t) &= (p_+ - p_0)^{\mu} \left( 1 + \frac{F_V G_V}{F_{\pi}^2} \frac{t}{m_{\rho}^2 - t} \right) \\ &= (p_+ - p_0)^{\mu} \left( \frac{m_{\rho}^2 - t \left( 1 - \frac{F_V G_V}{F_{\pi}^2} \right)}{m_{\rho}^2 - t} \right). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Os valores disponíveis na literatura para os parâmetros desse resultado são:  $F_V = 154$  MeV,  $G_V = [53 - 69]$  MeV,  $F_{\pi} = 93$  MeV, que correspondem a  $\frac{F_V G_V}{F_{\pi}^2} \approx 1$ . Adotando a igualdade exata para essa relação, encontramos

$$V_{\pi\pi}^{\mu}(t) = (p_+ - p_0)^{\mu} \frac{m_{\rho}^2}{m_{\rho}^2 - t}. \quad (4.11)$$

Ao comparar a amplitude (4.11) com a descrição do vértice em termos de fatores de forma, eq.(4.9), obtemos o FF vetorial do pión, dado por:

$$F_+^{\rho}(t) = \frac{m_{\rho}^2}{m_{\rho}^2 - t} \quad (4.12)$$

que é, portanto, dominado pelo polo nu do méson  $\rho$ .

Ao analisar os resultados dos cálculos com e sem o termo de contato em (4.10), vemos que existe uma diferença importante entre eles: sem o termo de contato, o FF (4.12) teria a presença da variável  $t$  no numerador ao invés de  $m_{\rho}^2$ . Essa diferença é crítica no limite de baixos valores de  $t$ , quando (4.12) vai para 1 e não a zero, como seria o limite sem o termo de contato. Dessa forma, o termo de contato é fundamental e participa de uma conspiração que elimina a dependência da energia no numerador da amplitude e faz com que  $F_+(0) = 1$ , como esperado.

Motivados pela formulação de EGPR[22] para o FF eletromagnético do pión, o  $\rho$  foi incluído também no caso  $W \rightarrow \pi^+\pi^-$ , como representado na fig.4.7. Embora as figuras 4.6 e 4.7 envolvam vértices de mésons vetoriais com dois pions, o primeiro deles ocorre no canal  $t$ , enquanto o segundo se dá no canal  $s$  e, portanto, os fatores de forma exploram regiões cinemáticas diferentes.

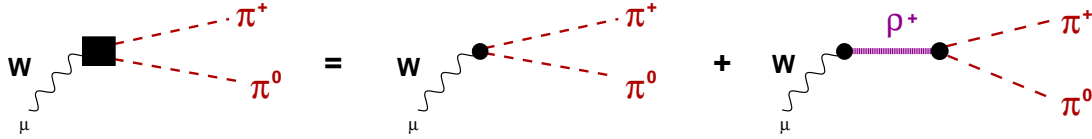


Figura 4.7: Transição  $W \rightarrow \pi\pi$  para um  $\rho$  pontual.

A amplitude de decaimento do vácuo, excitado pela energia do  $W^+$ , em dois pions, representada pelos diagramas da fig. 4.7, é descrita através de um vértice forte que possui a mesma estrutura que (4.10) e, por isso, podemos usar o mesmo FF vetorial calculado em (4.12). A amplitude de transição do vácuo, fig.4.7, inclui também o acoplamento fraco  $W^+\pi^+\pi^0$  e é dada por

$$T_{\pi\pi}^\mu = \left[ \frac{g}{2} \cos \theta_c \right] V_{\pi\pi}^\mu = \left[ \frac{g}{2} \cos \theta_c \right] (p_+ - p_0)^\mu \frac{m_\rho^2}{m_\rho^2 - P^2}. \quad (4.13)$$

Deste modo, o FF utilizado corresponde a uma aproximação de polo simples. Ele fornece a dependência da energia apenas no denominador da amplitude  $W \rightarrow \pi\pi$ , o que será útil no cálculo do decaimento do  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ , como veremos em seguida.

### 4.3 Amplitude - $\rho$ sem largura

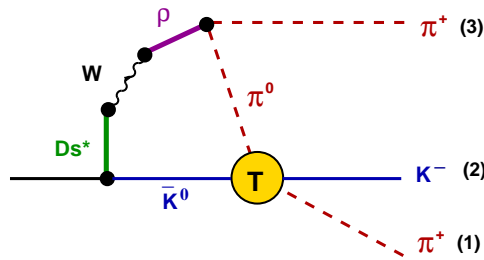


Figura 4.8: Diagrama dominante da amplitude vetorial A.

Os resultados para os vértices  $V_{DK}^\mu$  e  $V_{\pi\pi}^\mu$ , apresentados nas seções anteriores, permitem a elaboração de uma versão mais completa do cálculo da amplitude  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , discutido no capítulo 3. Permanecemos focados na série do vértice vetorial da fig. 4.4 e, como o diagrama em árvore não contribui, os efeitos de ordem dominante envolvem o cálculo de, pelo menos, um *loop*. O resultado do estudo da convergência da série perturbativa das interações de estado final, a ser apresentado adiante, sugerem que não é necessário o cálculo do segundo *loop*. Por isso, considerando os vértices vestidos das figuras 1.9 e 4.7, a amplitude vetorial  $A$ , em primeira ordem, é determinada pelo diagrama 4.8.

As regras de Feynman permitem escrever a amplitude  $A$  como:

$$iA = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} i T_{DK}^\mu i \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} i T_{\pi\pi}^\nu \frac{i}{(l - P_D)^2 - M_K^2} \frac{i}{(l - p_3)^2 - M_\pi^2} i T_{K\pi}, \quad (4.14)$$

em que  $l$  foi escolhido como sendo o momento que entra no *loop* e passa pelas ressonâncias  $D_s^*$  e  $\rho$ :  $l = P$ . A cinemática do processo, apresentada no apêndice A.2, permite escrever também o momento dos mésons  $\pi$  e  $K$ , dentro do *loop*, em função de variáveis externas e  $l$ .

A amplitude  $A$  é uma função de combinações invariantes dos momentos das partículas externas. No caso deste diagrama, a amplitude depende apenas da massa invariante  $m_{12}$ , do par  $K\pi$ . Na expressão (4.14), o único fator que não depende de  $l$  é  $T_{K\pi}$ , que representa a transição

$$\langle \pi^0 \bar{K}^0 | T | \pi^+ K^- \rangle = T_{K\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2}(m_{12}^2), \quad (4.15)$$

como dado no apêndice B.2 (B.24). Por isso, ela pode sair da integral, e escrevemos

$$A = \frac{i}{M_W^2} T_{K\pi} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l - P_D)^2 - M_K^2} \frac{1}{(l - p_3)^2 - M_\pi^2} [T_{DK} \cdot T_{\pi\pi}]. \quad (4.16)$$

Substituindo os resultados para os vértices  $T_{DK}$  (4.8) e  $T_{\pi\pi}$  (4.13), temos

$$\begin{aligned} A &= -i \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C F^{DK}(0) \right] \frac{1}{M_W^2} \left[ \frac{g}{2} \cos \theta_c \right] \frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2}(m_{12}^2) \\ &\times \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l - P_D)^2 - M_K^2} \frac{1}{(l - p_3)^2 - M_\pi^2} \left[ (2p_3 - l)_\mu \frac{-m_\rho^2}{l^2 - m_\rho^2} \right] \\ &\times \left[ (2P_D^\mu - l^\mu) \frac{-m_a^2}{l^2 - m_a^2} - l^\mu \frac{(M_D^2 - M_K^2)(m_b^2 - m_a^2)}{(l^2 - m_a^2)(l^2 - m_b^2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

A eq.(4.17) pode ser organizada de forma mais compacta representando os denominadores dos propagadores dos mésons como:

$$\begin{aligned} D_\pi &= (l - p_3)^2 - M_\pi^2, & D_K &= (l - P_D)^2 - M_K^2, \\ D_\rho &= l^2 - m_\rho^2, & D_a &= l^2 - m_a^2, & D_b &= l^2 - m_b^2, \end{aligned} \quad (4.18)$$

e obtemos

$$\begin{aligned} A &= -i [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] \frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2}(m_{12}^2) m_\rho^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_K} \frac{1}{D_\pi} \frac{1}{D_\rho} \\ &\times \left[ (2P_D - l) \cdot (2p_3 - l) \frac{m_a^2}{D_a} + l \cdot (2p_3 - l) \frac{(M_D^2 - M_K^2)(m_b^2 - m_a^2)}{D_a D_b} \right]; \end{aligned} \quad (4.19)$$

sendo  $G_F$  a constante de Fermi, dada por

$$G_F = \left( \frac{g^2}{4\sqrt{2}M_W^2} \right). \quad (4.20)$$

A integral (4.19) envolve dois produtos escalares, que dependem de momentos internos e externos ao *loop*. Para simplificar o cálculo, rescrevemos estes produtos escalares em termos das funções definidas em (4.18), com a dupla finalidade de diminuir a dependência de momento do numerador e, também, de reduzir o número de propagadores em cada integral. Um dos produtos escalares pode ser escrito como:

$$l \cdot (2p_3 - l) = -D_\pi. \quad (4.21)$$

O outro, embora mais complicado, também pode ser reduzido, escrevendo

$$(2P_D - l) \cdot (2p_3 - l) = 4P_D \cdot p_3 + l^2 - 2P_D \cdot l - 2l \cdot p_3 \quad (4.22)$$

e usando relações cinemáticas do apêndice A.2, o que resulta na forma

$$(2P_D - l) \cdot (2p_3 - l) = M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - m_\rho^2 - 2m_{12}^2 + D_\pi + D_K - D_\rho. \quad (4.23)$$

Introduzindo as expressões (4.21) e (4.23) de volta em (4.19), a amplitude passa a ser escrita como

$$\begin{aligned} A &= -i [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] \frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2}(m_{12}^2) m_\rho^2 m_a^2 \\ &\times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - m_\rho^2 - 2m_{12}^2 + D_\pi + D_K - D_\rho}{D_K D_\pi D_a D_\rho} \right. \\ &\left. - \frac{(M_D^2 - M_K^2)(m_b^2 - m_a^2) D_\pi}{D_K D_\pi D_\rho D_a D_b m_a^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$



Agora, é possível cancelar alguns dos propagadores com as respectivas funções do numerador, reduzindo (4.24) a uma soma de integrais envolvendo diferentes propagadores, mas sem nenhuma dependência do momento integrado no numerador. Definindo

$$\begin{aligned}\alpha &= [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] \frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2}(m_{12}^2) m_\rho^2 m_a^2; \\ \beta &= M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - m_\rho^2 - 2m_{12}^2; \\ \gamma &= (M_D^2 - M_K^2) \frac{(m_b^2 - m_a^2)}{m_a^2}\end{aligned}\quad (4.25)$$

temos:

$$\begin{aligned}A &= -i\alpha \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{\beta}{D_\rho D_a D_K D_\pi} + \frac{1}{D_\rho D_a D_K} + \frac{1}{D_\rho D_a D_\pi} - \frac{1}{D_a D_\pi D_K} \right. \\ &\quad \left. - \gamma \frac{1}{D_\rho D_a D_b D_K} \right\}.\end{aligned}\quad (4.26)$$

A amplitude (4.26) se reduz ao cálculo de integrais de *loop* sem índices de Lorentz, envolvendo três propagadores, chamadas de triângulos,  $I_{xyz}$ , ou quatro propagadores, chamadas de caixas,  $I_{xyzw}$ , sendo que os índices inferiores indicam as partículas envolvidas. Deste modo, obtemos:

$$A = -i\alpha \{ \beta I_{\pi K \rho a} + I_{K \rho a} + I_{\pi \rho a} - I_{\pi K a} - \gamma I_{K \rho ab} \} . \quad (4.27)$$

Por conveniência, independentemente do número de propagadores envolvidos, as integrais de *loop* são expressas em termos de funções  $\Pi$ , por

$$I_{xyz} = i \frac{\Pi_{xyz}}{(4\pi)^2}; \quad I_{xyzw} = i \frac{\Pi_{xyzw}}{(4\pi)^2} . \quad (4.28)$$

Essas funções  $\Pi$  são integrais covariantes, escritas em termos de parâmetros de Feynman. Assim, trabalhamos com a expressão

$$A = \frac{\alpha}{(4\pi)^2} \{ \beta \Pi_{\pi K \rho a} + \Pi_{K \rho a} + \Pi_{\pi \rho a} - \Pi_{\pi K a} - \gamma \Pi_{K \rho ab} \} . \quad (4.29)$$

Todas as funções que contribuem em (4.29) estão calculadas nos apêndices C.3 e C.4. A caixa  $I_{xyzw}$ , aparentemente a mais complicada das integrais, pode ser reduzida a uma soma de duas funções triângulo. No caso  $I_{\pi K \rho a}$ , eq.(C.142), temos

$$\Pi_{\pi K \rho a} = \frac{1}{m_a^2 - m_\rho^2} (\Pi_{\pi K a} - \Pi_{\pi K \rho}) , \quad (4.30)$$

e o resultado para  $\Pi_{K\rho ab}$  é totalmente análogo.

Finalmente, a amplitude do vértice vetorial é dada por:

$$\begin{aligned}
 A = & \left[ G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0) \right] \frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2}(m_{12}^2) \frac{m_\rho^2 m_a^2}{(4\pi)^2} \\
 & \times \left\{ (M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - m_\rho^2 - 2m_{12}^2) \Pi_{\pi K\rho} \right. \\
 & - (M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - m_a^2 - 2m_{12}^2) \Pi_{\pi K a} \\
 & \left. + \Pi_{\pi\rho a} + \Pi_{K\rho a} + \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_a^2} (\Pi_{K\rho a} - \Pi_{K\rho b}) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

Os conteúdos numéricos e físicos deste resultado são explorados na seção seguinte.

### 4.3.1 Resultados

A amplitude do vértice vetorial, eq.(4.31), foi calculada numericamente, a partir das integrais de Feynman dadas no apêndice D. Os resultados para o módulo e a fase da amplitude, baseados em valores realísticos dos parâmetros das ressonâncias (apêndice F), são apresentados nos gráficos da figuras 4.9 e 4.10 e comparados com os dados experimentais da colaboração FOCUS[5]. No caso da fase, fig. 4.9, o primeiro fato que

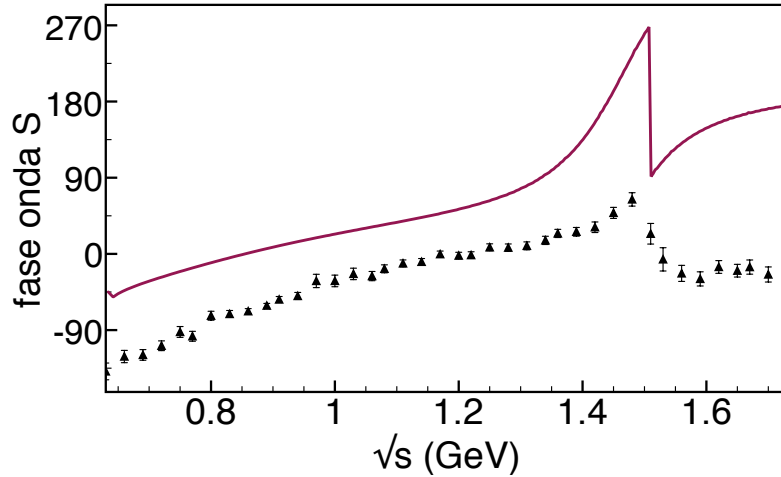


Figura 4.9: Fase da amplitude  $A$  (4.31) comparada com os dados experimentais da colaboração FOCUS[5].

chama a atenção é que, no limiar da reação, ela vale  $\approx -50^\circ$ . Isto representa um avanço conceitual em relação aos resultados obtidos no nosso primeiro cálculo, apresentado no

capítulo anterior, nos quais a fase é sempre obrigada a começar em zero (gráfico 3.8). Por isso, ele fornece informações acerca dos processos envolvidos no decaimento.

A dinâmica do processo que dá origem à amplitude  $A$ , representada pelo diagrama da fig. 4.8, pode ser dividida em duas partes. A primeira delas corresponde ao *loop* do vértice fraco, que agora incorpora tanto os fatores de forma como a sua dependência correta em onda P. A segunda, corresponde à amplitude de espalhamento  $K\pi$ , que carrega fases elásticas e inelásticas, originadas no *loop* leve associado ao sistema  $K\pi$  e de *loops* envolvendo mésons mais pesados. O nosso cálculo é baseado na amplitude  $K\pi$  teórica, desenvolvida no cap. 2, mas que pode, também, ser substituída pelos dados experimentais correspondentes.

A energia que circula no *loop* da fig. 4.8, embora não possibilite o decaimento do  $D_s^*$ , é suficiente para abrir os canais de decaimento dos pares  $K\pi$  e  $K\rho$ . O primeiro deles, o único estudado no capítulo 3, está associado à parte imaginária da bolha do sistema  $K\pi$ . Portanto, a novidade incorporada ao *loop* vetorial vem do canal  $K\rho$ , introduzindo novas fontes de estruturas complexas. O efeito da interferência dessa nova estrutura aparece no gráfico da fase, fig. 4.9, explica o deslocamento do limiar para cerca de  $-50^\circ$ . O resultado obtido para o módulo da amplitude  $A$ , fig. 4.10, preserva o zero na mesma posição que o presente na amplitude de espalhamento  $K\pi$ .

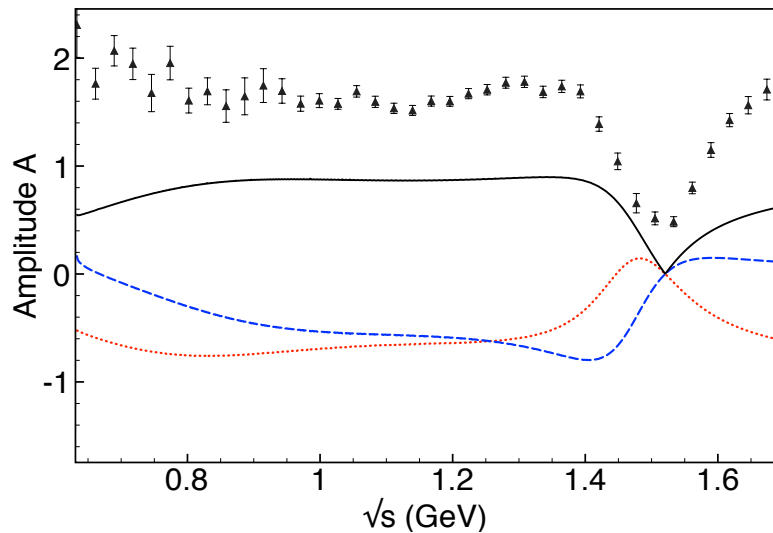


Figura 4.10: Módulo da amplitude  $A$  (4.31), comparada com os dados experimentais da colaboração FOCUS[5]; as curvas representam a magnitude (contínua), parte real (tracejada) e imaginária (pontilhada).

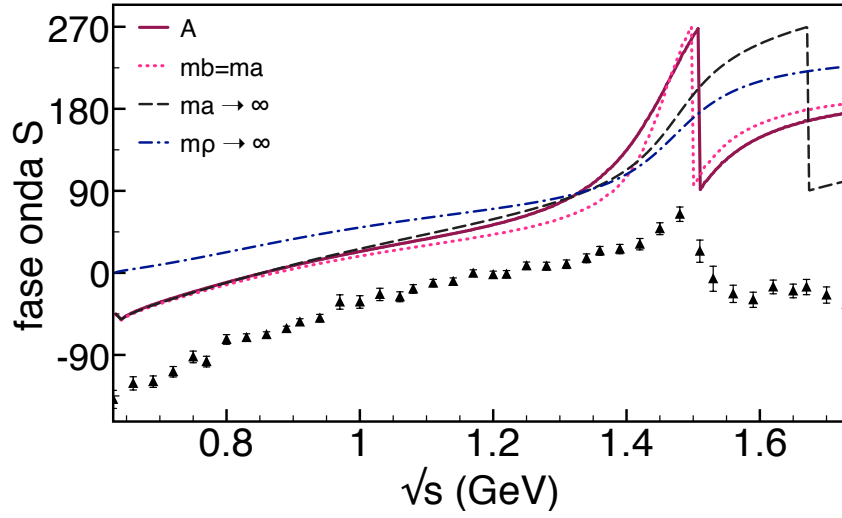


Figura 4.11: Fase da amplitude  $A$  para diferentes limites de contribuição de fatores de forma e do  $\rho$ , comparados aos dados experimentais[5].

Para compreender melhor o papel que as diferentes estruturas têm na composição da fase da nova amplitude  $A$  (4.31), fazemos um exercício matemático e variamos, em etapas, os parâmetros dos vários fatores de forma. Inicialmente, igualamos as massas  $m_a$  e  $m_b$ , dos FF vetorial e escalar do  $D_s^*$ , em (4.31). A curva “ $m_b = m_a$ ”, no gráfico 4.11, representa o cancelamento do último termo na equação (4.31) e indica que o seu efeito é pequeno, como esperado.

Em seguida desligamos, em sequência, as contribuições dos fatores de forma  $V_{DK}$  e  $V_{\pi\pi}$ . Nessas duas estruturas, a dependência da energia está contida em funções do tipo monopolo, por isso, elas podem ser desligadas considerando o limite em que a massa da ressonância relevante tende ao infinito pois, nesse caso

$$\left[ \frac{1}{1 - P^2/m^2} \right] \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1 \quad (4.32)$$

Na fig. 4.11, a curva “ $m_a \rightarrow \infty$ ” incorpora à anterior o limite em que a ressonância vetorial  $a$  não contribui e podemos notar que o efeito é mínimo no setor de baixas energias e bastante significativo para valores de  $\sqrt{s} > 1.4$  GeV. Este padrão é esperado para fatores de forma envolvendo uma ressonância cuja a massa é maior que a energia disponível no sistema pois, nesse caso, o denominador do propagador da ressonância nunca se anula.

Por fim, a curva “ $m_\rho \rightarrow \infty$ ” desliga a contribuição do  $\rho$  a partir da anterior e equivale a uma amplitude sem o FF associado à ressonância leve. Na ausência dos denominadores  $D_a$ ,  $D_b$  e  $D_\rho$  na amplitude  $A$ , eq.(4.26), a integral passa a ser divergente, por conter apenas dois propagadores e, como no caso da amplitude do capítulo 3, ela precisaria ser renormalizada por meio de uma constante arbitrária. Independentemente da perda de qualidade na amplitude, esse limite teórico tem consequências interessantes. A principal delas é uma grande mudança no comportamento da fase, que volta a sair de zero, se aproximando da curva obtida no primeiro modelo (gráfico fig. 3.8). A diferença entre a primeira e a última curva, demonstra claramente que o méson  $\rho$  é o principal responsável pela inclusão das novas estruturas complexas no vértice fraco, que melhoram o acordo com os dados experimentais. A parte imaginária do *loop* do vértice fraco, associada ao  $\rho$ , é a responsável por fazer com que o limiar da fase seja negativo, em concordância qualitativa com os dados experimentais.

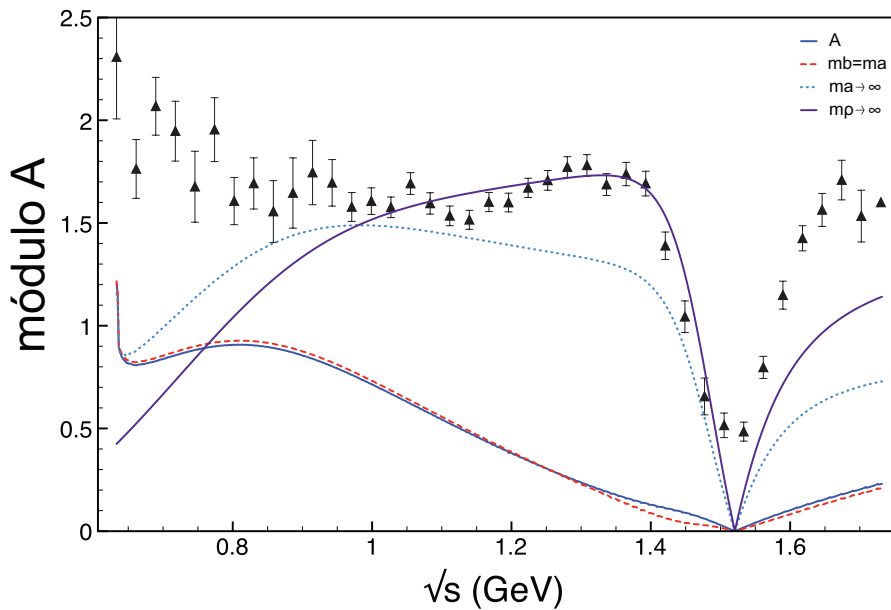


Figura 4.12: Módulo da amplitude  $A$  para diferentes limites de contribuições de fatores de forma, comparados aos dados experimentais[5].

O estudo equivalente para o módulo, mostrado da fig.4.12, evidencia os tamanhos das contribuições nos diferentes limites. No caso em que os FF deixam de contribuir para a amplitude  $A$ , a curva volta a se aproximar da obtida no primeiro estudo, curva  $A_c$  na fig. 3.10 .

## 4.4 A largura do $\rho$

O papel central que o méson  $\rho$  tem nos resultados para a fase e o módulo do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  indica que é preciso explorar mais a fundo e melhorar a descrição do vértice  $V_{\pi\pi}^\mu$ . Um dos modos de fazer isso é tratar o  $\rho$  como uma ressonância, incluindo a sua largura. A utilização de um  $\rho$  sem largura é justificada no estudo de fatores de forma do pión no canal  $t$ . No entanto, no canal  $s$  e em diagramas de Dalitz, onde ressonâncias se manifestam, as estruturas complexas do propagador do  $\rho$  podem contribuir de maneira significativa e devem ser consideradas.

No nosso problema, o  $\rho$  aparece dentro de um *loop* e, por isso, não é possível o uso direto de informações fenomenológicas. Por esse motivo, é preciso construir um modelo onde o méson  $\rho$ , vestido pela interação  $\pi\pi$ , passe a ter uma largura dinâmica. Essa vestimenta introduz uma função complexa no seu propagador, que pode introduzir novas fases no cálculo da amplitude  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ .

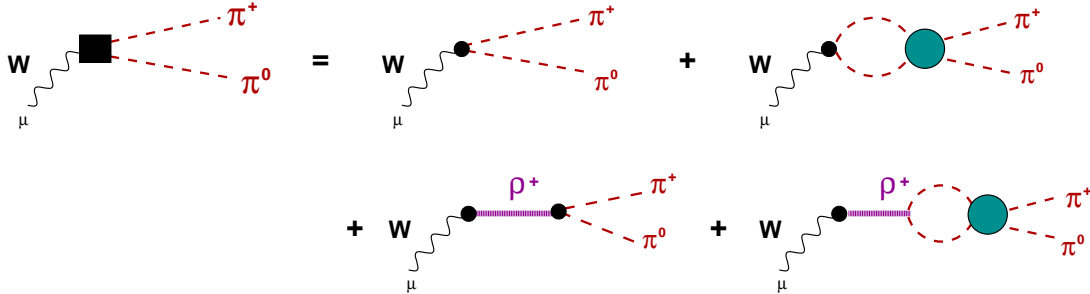


Figura 4.13: Diagramas que contribuem para o vértice  $W \rightarrow \pi\pi$  e incorporam a largura no  $\rho$ .

No modelo considerado, o decaimento  $W \rightarrow \pi\pi$  passa a ser descrito pelos diagramas da fig. 4.13, que incorporam os efeitos do reespalhamento dos píons no estado final. Os diagramas da fig. 4.7 precisam ser recalculado, incluindo a amplitude de espalhamento  $\pi\pi$ , representada pela bolha verde. Por ser proveniente do  $W$ , o sistema  $\pi\pi$  está em onda P e a amplitude correspondente é apresentada no apêndice D. A figura 4.13 envolve, também, um *loop* com as mesmas partículas do estado final cujos momentos são denotados por  $q_+$  e  $q_0$ .

A amplitude para o novo vértice  $W^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$  passa a ser dada por:

$$\begin{aligned} T_{\pi\pi}^\mu &= \frac{g}{2} \cos \theta_c V_{\pi\pi}^\mu \\ &= -\frac{g}{2} \cos \theta_c \frac{m_\rho^2}{P^2 - m_\rho^2} [(p_+ - p_0)^\mu + I^\mu], \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$I^\mu = -i \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{2 l^\mu}{[(l + P/2)^2 - M_\pi^2][(l - P/2)^2 - M_\pi^2]} T_{\pi\pi}^1(P^2, l), \quad (4.34)$$

em que usamos,

$$\begin{aligned} q_+ - q_0 &= 2l; & q_+ + q_0 &= P = p_+ + p_0; \\ q_+ &= P/2 + l; & q_0 &= P/2 - l; \end{aligned} \quad (4.35)$$

sendo  $T_{\pi\pi}^1(P^2, l)$  a amplitude elástica  $\pi\pi$  com  $I = 1$ , função da combinação  $P^2$  de momentos externos e da variável de integração  $l$ . A dependência em  $l$  ocorre porque, na função a ser integrada, a amplitude  $\pi\pi$  deve ser projetada na onda P do estado inicial. Ela está contida na estrutura que desempenha o papel do ângulo de espalhamento em  $T_{\pi\pi}^1$ , e precisa ser discutida em algum detalhe.

No caso do espalhamento livre, a contribuição da onda P é dada por:

$$T_{\pi\pi}^1(P^2, \cos \theta) = 3 \cos \theta T_{\pi\pi}^{P1}(P^2); \quad (4.36)$$

em que  $\theta$  é o ângulo do espalhamento e  $T_{\pi\pi}^{P1}$  é a amplitude calculada no apêndice D, eq.(D.9):

$$T_{\pi\pi}^{P1} = \frac{\mathcal{K}^{P1}}{1 + \mathcal{K}^{P1}(\bar{\Omega}_\pi + C_\pi)}, \quad (4.37)$$

$$\mathcal{K}^{P1} = -\frac{m_\rho^2}{3F^2} \frac{P^2 - 4M_\pi^2}{P^2 - m_\rho^2}. \quad (4.38)$$

Para obter o equivalente ao  $\cos \theta$  na função (4.34), o escrevemos em função das variáveis de Mandelstam (A.11):

$$\cos \theta = \frac{t - u}{P^2 - 4M_\pi^2}, \quad (4.39)$$

e notamos que as variáveis correspondentes a  $t$  e  $u$ , na amplitude  $\pi\pi$  da fig.4.13, dependem de momentos externos e internos da integração. Por isso, para a amplitude ligada, temos

$$t = (p_+ - q_+)^2; \quad u = (q_+ - p_0)^2; \quad (4.40)$$

e a diferença entre eles resulta:

$$t - u = -2(p_+ - p_0)^\nu l_\nu. \quad (4.41)$$

Portanto, podemos escrever a amplitude  $\pi\pi$  no interior da integral como:

$$T_{\pi\pi}^1(P^2, l) = -\frac{6(p_+ - p_0)_\nu l^\nu}{P^2 - 4M_\pi^2} T_{\pi\pi}^{P1}(P^2). \quad (4.42)$$

A integral  $I^\mu$  em (4.34) passa a ser:

$$I^\mu = i(p_+ - p_0)_\nu 12 \frac{T_{\pi\pi}^{P1}(P^2)}{P^2 - 4M_\pi^2} I^{\mu\nu} \quad (4.43)$$

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{[(P/2 + l)^2 - M_\pi^2][(P/2 - l)^2 - M_\pi^2]}; \quad (4.44)$$

A integral tensorial  $I^{\mu\nu}$  foi calculada no apêndice C.2, e o resultado é proporcional à bolha  $\pi\pi$  (C.59):

$$I^{\mu\nu} = i \frac{1}{3} \left( \frac{P^2}{4} - M_\pi^2 \right) \left[ \frac{P^\mu P^\nu}{4P^2} + g_{\mu\nu} \right] (\bar{\Omega}_\pi + C_\pi). \quad (4.45)$$

Voltando à (4.43), e notando que o termo  $P^\mu P^\nu (p_+ - p_0)_\nu = (p_+ + p_0)^\mu (p_+^2 - p_0^2)$  é nulo, pois  $p_+$  e  $p_0$  referem-se a partículas livres e idênticas, temos

$$I^\mu = -(p_+ - p_0)^\mu T_{\pi\pi}^{P1}(P^2) [\bar{\Omega}_\pi + C_\pi]. \quad (4.46)$$

Usando este resultado em (4.33), obtemos

$$T_{\pi\pi}^\mu = -\frac{g}{2} \cos \theta_c \frac{m_\rho^2}{P^2 - m_\rho^2} (p_+ - p_0)^\mu \left\{ 1 - T_{\pi\pi}^{P1}(P^2) [\bar{\Omega}_\pi + C_\pi] \right\}. \quad (4.47)$$

O primeiro termo no interior das chaves é o mesmo que o dado na eq.(4.13), enquanto o segundo corresponde à extensão desejada. Analisando a amplitude (4.47), vemos que ela possui um polo explícito e por isso, parece ser divergente quando  $P^2 = m_\rho^2$ . No entanto, esse polo é cancelado pelo termo entre chaves. Usando as eqs. (4.37) e (4.38) o produto das funções  $T_{\pi\pi}^{P1}(P^2) [\bar{\Omega}_\pi + C_\pi]$ , que pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} T_{\pi\pi}^{P1}(P^2) [\bar{\Omega}_\pi + C_\pi] &= 1 - \frac{1}{1 + \mathcal{K}^{P1}(\bar{\Omega}_\pi + C_\pi)} \\ &= 1 - \frac{P^2 - m_\rho^2}{P^2 - m_\rho^2 - \frac{m_\rho^2}{3F^2} (P^2 - 4M_\pi^2) (\bar{\Omega}_\pi + C_\pi)}. \end{aligned} \quad (4.48)$$



Incluindo (4.48) em (4.33), obtemos a expressão final para a nova amplitude da transição  $W \rightarrow \pi\pi$  :

$$T_{\pi\pi}^{\mu} = -\frac{g}{2} \cos \theta_c (p_+ - p_0)^{\mu} \frac{m_{\rho}^2}{D_{\rho}(P^2)} \quad (4.49)$$

$$D_{\rho}(P^2) = P^2 - m_{\rho}^2 - \frac{m_{\rho}^2}{3F^2}(P^2 - 4M_{\pi}^2)(\bar{\Omega}_{\pi} + C_{\pi}) . \quad (4.50)$$

Podemos notar que o polo simples foi, de fato, cancelado, o que reflete a consistência do referencial teórico utilizado. A amplitude  $T_{\pi\pi}^{\mu}$  (4.49), após a inclusão da largura dinâmica no  $\rho$ , contém um propagador complexo. A parte real do denominador  $D_{\rho}(P^2)$  está associada a massa do  $\rho$  e a parte imaginária, que vem da função  $\bar{\Omega}_{\pi}$ , corresponde à sua largura.

### o méson $\rho$

O méson  $\rho$  tem um papel muito importante na interação  $\pi\pi$  em onda P. Segundo o PDG[16], sua massa e largura são, respectivamente, 0.77549(34) GeV e 0.1494(10) GeV. Ele corresponde a um polo na segunda folha de Riemann da amplitude  $\pi\pi$ , cuja posição é obtida encontrando o zero do denominador (4.50).

Quando a nova função  $T_{\pi\pi}^{\mu}$ , eq.(4.49), é inserida no cálculo da amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , como feito no caso do  $\rho$  sem largura em (4.16), a estrutura complicada do denominador  $D_{\rho}(P^2)$ , eq.(4.50), impede que a integral de *loop* associada possa ser solucionada usando as técnicas de Feynman. Para contornar essa dificuldade técnica, optamos por aproximar  $D_{\rho}$  como uma função simples da posição do polo do  $\rho$ , com um coeficiente complexo, ajustado de maneira a reproduzir a função original, no intervalo do espaço de fase do  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . Desta forma, escrevemos

$$\frac{1}{D_{\rho}(P^2)} \simeq \frac{N_{\rho}}{\tilde{D}_{\rho}} ; \quad (4.51)$$

$$\frac{1}{\tilde{D}_{\rho}} = \frac{1}{P^2 - (\Theta_R - i\Theta_I)} ; \quad (4.52)$$

em que  $\Theta_R = m_{\rho}^2 - \Gamma_{\rho}^2/4 = 0.5760 \text{ GeV}^2$ ,  $\Theta_I = m_{\rho}\Gamma_{\rho} = 0.1107 \text{ GeV}^2$ , e  $N_{\rho}$  é uma constante complexa, ajustada para  $N_{\rho} = 1.016 - i0.2607$ . A comparação entre as duas funções  $1/D_{\rho}$  está feita no gráfico da fig. 4.14 e mostra que a versão completa, (4.50), é muito bem descrita pela aproximação do polo, (4.51).

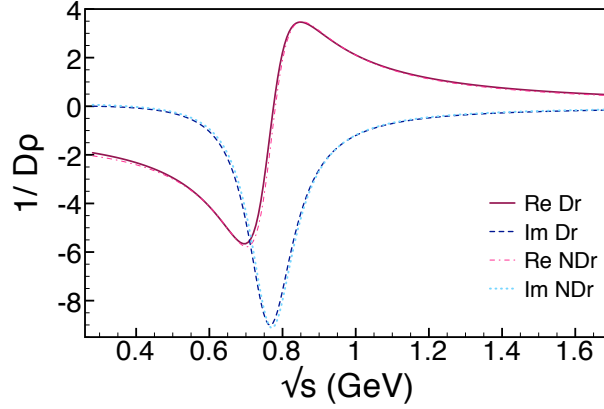


Figura 4.14: Comparação entre a função completa de  $1/D_\rho$  (4.50) com a aproximada a uma função do polo do  $\rho$  (4.51).

#### 4.4.1 $D^+ \rightarrow \pi^0 \pi^+ \bar{K}^0$ em árvore

Como um passo intermediário do cálculo da amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , construímos o diagrama em árvore do processo  $D^+ \rightarrow \pi^0 \pi^+ \bar{K}^0$ . Esse diagrama está representado na fig. 4.15, em que o vértice da bolha azul é a amplitude  $D \rightarrow WK$ ,

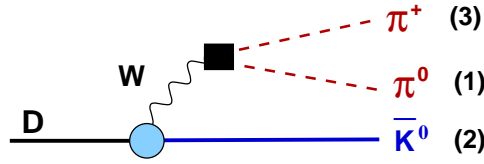


Figura 4.15: Diagrama de Feynman em árvore para  $D^+ \rightarrow \pi^0 \pi^+ \bar{K}^0$ .

definida na eq.(4.4), enquanto que a caixa preta descreve a transição  $W \rightarrow \pi\pi$  com o  $\rho$  vestido, representada na fig. 4.13, eq. (4.49).

Nesse processo, os mésons que saem do vértice fraco são livres e, portanto, estão na camada de massa. Usando os resultados (4.4), (4.8) e (4.49), obtemos:

$$iA^0 = iT_{DK}^\mu \frac{i g_{\mu\nu}}{M_W^2} iT_{\rho\pi\pi}^\nu \quad (4.53)$$

$$A^0 = [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] (p_3 - p_1)_\mu \frac{m_\rho^2}{D_\rho} \left[ (P_D^\mu + p_2^\mu) \frac{-m_a^2}{D_a} - P^\mu \frac{(M_D^2 - M_K^2)(m_b^2 - m_a^2)}{D_a D_b} \right], \quad (4.54)$$

em que  $P = p_1 + p_3$  e  $P^2 = m_{13}^2$ . Os propagadores  $D_a$ ,  $D_b$  são dados em (4.18) e  $D_\rho$ , é dado em (4.51) e os três dependem de  $m_{13}^2$ . Embora os produtos escalares que aparecem

em (4.54), só dependam de momentos externos, podemos nos apropriar dos resultados obtidos em (4.21) e (4.23), usando  $l = p_1$  e tomando o cuidado de rescrever o termo  $D_\rho + m_\rho^2 = m_{13}^2$ , porque a eq. (4.23) refere-se a um polo simples, o que não se aplica mais. Fazendo isso e lançando mão da nova expressão para  $\frac{1}{D(\rho)}$ , eq. (4.51), a amplitude do diagrama em árvore, fig. 4.15, passa a ser dada por

$$\begin{aligned}
 A^0 &= - [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] N_\rho \frac{m_\rho^2}{\tilde{D}_\rho} \\
 &\times \left\{ [M_D^2 + 2 M_\pi^2 + M_K^2 - 2 m_{12}^2 - P^2 + D_\pi + D_K] \frac{m_a^2}{D_a} \right. \\
 &\left. - (p_3^2 - p_1^2)(M_D^2 - M_K^2) \left( \frac{1}{D_a} - \frac{1}{D_b} \right) \right\}. \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

Embora  $D_\pi$  e  $D_K$  sejam nulos, uma vez que os seus momentos estão na camada de massa, escolhemos deixá-los explícitos em (4.55), para facilitar o cálculo em um *loop*, que será feito na sequência. O mesmo vale para a última linha de (4.55), em que  $p_1^2 = p_3^2$ . O resultado para  $A^0$  é uma função de  $m_{12}^2$  e  $m_{13}^2$  e, para ser expandido em ondas parciais, precisa ser projetado no referencial do par 12, o que é feito no apêndice A.3. Os resultados numéricos serão apresentados mais adiante.

## 4.5 Amplitude - $\rho$ com largura

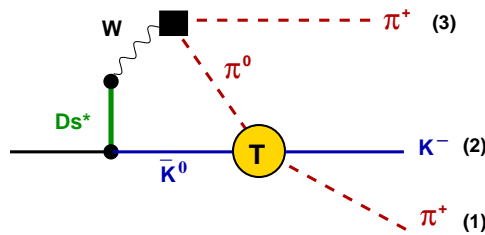


Figura 4.16: Diagrama de Feynman para o vértice vetorial com o  $\rho$  vestido.

A amplitude do vértice vetorial para o decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  com o  $\rho$  vestido,  $A_f$ , é representada pelo diagrama da fig. 4.16. Ele é bastante parecido com o caso do  $\rho$  sem largura, a diferença entre eles está contida no propagador  $D_\rho$ , que agora é complexo e foi simplificado pela expressão (4.51). Ele está incorporado na amplitude em árvore do

processo  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 \pi^0 \pi^+$  e, assim, a amplitude do diagrama 4.16 pode ser obtida inserindo (4.55) em uma integral de *loop*. O resultado é análogo ao dado em (4.24), e temos:

$$\begin{aligned}
A_f &= -i [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] \frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2}(m_{12}^2) m_a^2 N_\rho m_\rho^2 \\
&\times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_K D_\pi} \frac{1}{\tilde{D}_\rho} \left\{ [M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - 2m_{12}^2 - l^2 + D_\pi + D_K] \frac{1}{D_a} \right. \\
&\left. - D_\pi \left( \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_a^2} \right) \left[ \frac{1}{D_a} - \frac{1}{D_b} \right] \right\}, \tag{4.56}
\end{aligned}$$

em que os propagadores  $D_i$  são os mesmo dados em (4.18), com exceção do  $\tilde{D}_\rho$ , que esta relacionado a (4.52). Análogo ao procedimento usado no caso do  $\rho$  sem largura, a integração (4.56) é simplificada pela presença de funções  $D$ s no numerador, o que permite reduzir (4.56) a uma soma de integrais do tipo triângulo ou caixa, com índices que representam as partículas envolvidas:

$$\begin{aligned}
A_f &= -i [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] \frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2}(m_{12}^2) m_a^2 N_\rho m_\rho^2 \\
&\times \left\{ [M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - 2m_{12}^2 - m_a^2] I_{\pi K \rho a} - I_{\pi K \rho} + I_{K \rho a} + I_{\pi \rho a} \right. \\
&\left. + \left( \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_a^2} \right) [I_{K \rho a} - I_{K \rho b}] \right\}. \tag{4.57}
\end{aligned}$$

sendo que o índice  $\rho$ , nesse caso, representa o polo complexo  $\Theta_R - i\Theta_I$ . Por isso, com exceção de  $I_{\pi K a}$  que não muda, as demais integrais do tipo triângulo e caixa que aparecem em (4.57) precisaram ser recalculadas. Usando as relações (4.28) e (4.30), a amplitude pode ser escrita em termos das função de *loop*  $\Pi_{xyz}$  e, finalmente, temos:

$$\begin{aligned}
A_f &= [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] \frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2}(m_{12}^2) m_a^2 m_\rho^2 \frac{N_\rho}{16\pi^2} \\
&\times \left\{ \frac{(m_a^2 - \Theta_R) - i\Theta_I}{(m_a^2 - \Theta_R)^2 + \Theta_I^2} [M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - 2m_{12}^2 - m_a^2] (\Pi_{\pi K a} - \Pi_{\pi K \rho}) \right. \\
&\left. - \Pi_{\pi K \rho} + \Pi_{\pi \rho a} + \Pi_{K \rho a} + \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_a^2} (\Pi_{\pi \rho a} - \Pi_{\pi \rho b}) \right\}. \tag{4.58}
\end{aligned}$$

As diferentes funções de *loop* presentes neste resultado são obtidas no apêndice C.3, usando o formalismo de Feynman. É importante notar que as integrais  $\Pi_{\pi K \rho}$  e  $\Pi_{\pi K a}$  são dependentes de  $m_{12}^2$ , enquanto as demais são constantes.

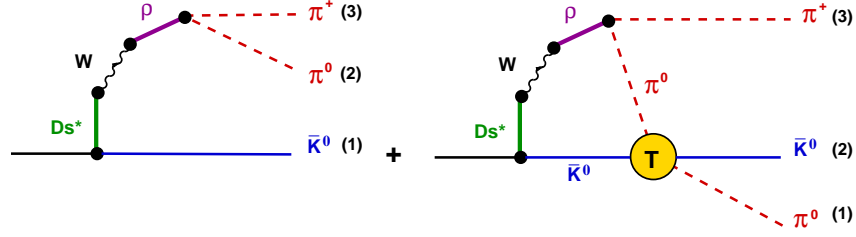
4.5.1 Resultado - a convergência da série  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 \pi^0 \pi^+$ 

Figura 4.17: Dois primeiros termos da série para o processo  $D^+ \rightarrow \pi^0 \pi^+ \bar{K}^0$ .

Como discutido anteriormente, na amplitude vetorial do processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , o termo em árvore é nulo e a primeira contribuição vem do termo de primeira ordem. Por outro lado, no caso do decaimento  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 \pi^0 \pi^+$ , o diagrama em árvore contribui e é possível analisar a importância relativa entre os termos em árvore e de primeira ordem.

Os dois primeiros termos da série do decaimento  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 \pi^0 \pi^+$  são mostrados pelos gráficos da fig.4.17, em que o termo em árvore já foi calculado em (4.55), na aproximação em que o propagador do  $\rho$  é dado pela eq.(4.51). Após projeção na onda S, a amplitude é descrita por:

$$\begin{aligned}
 A_{tree}^0 &= - [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] m_a^2 m_\rho^2 \frac{N_\rho}{m_a^2 - \Theta_R + i \Theta_I} \\
 &\times \{ [M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - m_\rho^2 - 2m_{12}^2 - m_a^2] \Pi_a(m_{12}^2) \\
 &- [M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - m_\rho^2 - 2m_{12}^2 - \Theta_R + i \Theta_I] \Pi_\rho(m_{12}^2) \}; \quad (4.59)
 \end{aligned}$$

em que

$$\Pi_{[a;\rho]} = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{[m_a^2; m_\rho^2] - \alpha_{13}^2 - \beta}{[m_a^2; m_\rho^2] - \alpha_{13}^2 + \beta}, \quad (4.60)$$

sendo  $\alpha_{13}^2$  uma função cinemática, definida no apêndice A.3. Para checar a precisão da aproximação (4.51), a amplitude em árvore (4.59) também foi calculada com o propagador completo, dado em (4.50).

A amplitude em primeira ordem é muito similar à dada pela eq. (4.58), a única diferença sendo o coeficiente de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa da amplitude de espalhamento  $K\pi$  que, segundo (B.21), difere da anterior por um fator de  $-1/\sqrt{2}$ . Assim, a amplitude do segundo diagrama da fig.4.17 é:

$$\begin{aligned}
A_{loop}^0 &= [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] \frac{1}{3} T_{1/2}(m_{12}^2) m_a^2 m_\rho^2 \frac{N_\rho}{16 \pi^2} \\
&\times \left\{ \frac{(m_a^2 - \Theta_R) - i\Theta_I}{(m_a^2 - \Theta_R)^2 + \Theta_I^2} [M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - 2m_{12}^2 - m_a^2] (\Pi_{\pi K a} - \Pi_{\pi K \rho}) \right. \\
&\quad \left. - \Pi_{\pi K \rho} + \Pi_{\pi \rho a} + \Pi_{K \rho a} + \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_a^2} (\Pi_{\pi \rho a} - \Pi_{\pi \rho b}) \right\}.
\end{aligned} \tag{4.61}$$

em que as integrais de loop  $\Pi_{xyz}$  estão calculadas no apêndice C.3 . A amplitude resultante é, portanto, dada por

$$A^0 = A_{tree}^0 + A_{loop}^0. \tag{4.62}$$

Os resultados para os módulos das várias contribuições estão na figura 4.18. O primeiro fato a ser notado é que não existe nenhuma diferença significativa entre as curvas obtidas com o uso do propagador do  $\rho$  exato, eq. (4.50) e o aproximado, eq. (4.51) , o que confirma a qualidade desta aproximação. Além disso, o que é mais importante, elas revelam, claramente, a dominância do termo em árvore. O resultado para as fases, mostrados na fig. 4.19, também, confirmam dominância do termo em árvore.

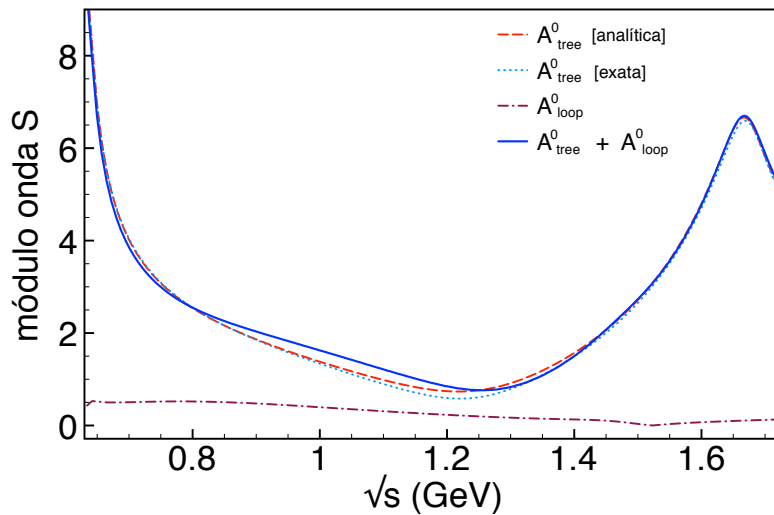


Figura 4.18: Módulo das várias contribuições para a amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow \pi^0 \pi^+ \bar{K}^0$  em onda S: termo em árvore  $A_{tree}^0$ , (4.59), com  $D_\rho$  aproximado, (4.51) (tracejada) e exato, (4.50) (pontilhada); termo em primeira ordem  $A_{loop}^0$ , (4.62) (traço-pontilhada) e a soma dos dois primeiros termos da série (contínua) .

É possível compreender a escala da diferença entre os dois termos, comparando as funções que determinam as suas amplitudes: eqs. (4.59) e (4.62). A função em primeira ordem possui um fator  $T_{1/2}/48\pi^2$  a mais do que na árvore. Esse fator deve ser entendido como sendo o produto de  $T_{1/2}/3$ , associado à amplitude  $K\pi$ , por  $1/16\pi^2$ , proveniente da integral de *loop*. No capítulo 2, na discussão em torno da fig.2.8, vimos que  $T_{1/2} \leq 60$  na região cinemática de interesse. Isso significa que o fator  $T_{1/2}/48\pi^2$  é  $< 1/10$ , o que diminui, de pelo menos uma ordem de grandeza, a importância do termo que envolve a amplitude  $K\pi$ . Para confirmar essa interpretação, também verificamos explicitamente que as funções  $\Pi$  que aparecem em (4.59) e (4.62) têm a mesma ordem de grandeza.

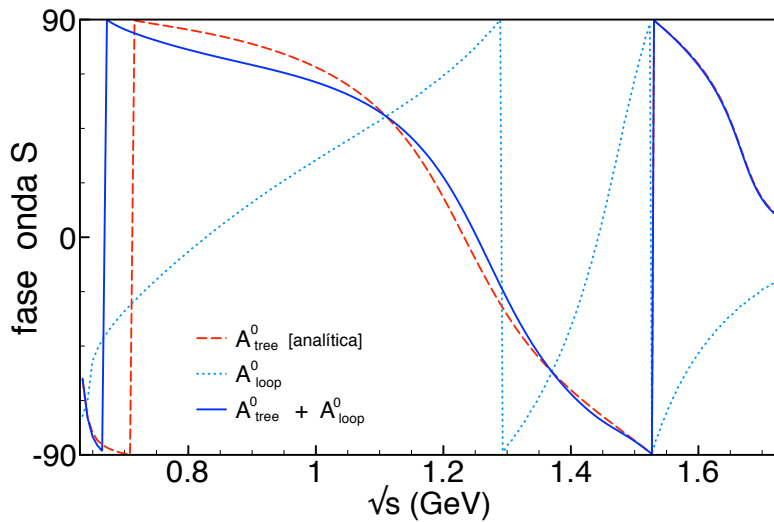


Figura 4.19: Fase das várias contribuições para a amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow \pi^0 \pi^+ \bar{K}^0$  em onda S: termo em árvore  $A_{tree}^0$ , (4.59), com  $D_\rho$  aproximado, (4.51) (tracejada); termo em primeira ordem  $A_{loop}^0$ , (4.62) (traço-pontilhada) e a soma dos dois primeiros termos da série (contínua).

Esse estudo, ainda que preliminar, sugere fortemente que a série perturbativa nas interações de estado final deve convergir à razão de  $(T_{K\pi}/16\pi^2 < 1/10)$  de uma ordem para a seguinte.

#### 4.5.2 Resultados - a amplitude $K\pi$

Os resultados da seção anterior sugerem que o termo dominante do processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  seja o dado pela fig. 4.16. Isso significa que aqui, ao contrário do que

acontecera no capítulo 3, não é necessário iterar a amplitude  $K\pi$  no interior de integrais de *loop*. Consequentemente, a amplitude híbrida, introduzida na seção 2.6, torna-se mais conveniente pois ela usa diretamente os dados experimentais da colaboração LASS[6], onde eles estão disponíveis i.e., para  $\sqrt{s} > 0.825$  GeV, e a teoria, baseada em perturbação quiral, para a região de baixas energias. A amplitude  $T_{K\pi}$  teórica ajustada aos dados, por outro lado, inclui apenas uma ressonância explícita no *kernel*  $\mathcal{K}_{S1/2}$ , (2.29), cuja expressão unitarizada é dada por (2.39). A comparação entre as duas amplitudes de dois corpos é feita nos gráficos da fig.2.18, nos quais fica evidente que, embora a amplitude puramente teórica seja uma boa descrição dos dados, ela está limitada à  $\sqrt{s} < 1.4$  GeV.

Nos gráficos da fig.4.20, mostramos os resultados para a fase e o módulo da amplitude  $A_f$ , (4.58), considerando as duas possibilidades para a amplitude de dois corpos:  $T_{K\pi}$  teórico e  $T_{K\pi}$  híbrido. Podemos notar que, a exceção do pico no módulo em  $\sqrt{s} \approx 0.8$  GeV, as curvas são praticamente equivalentes até 1.4 GeV e, portanto, preservam a mesma diferença observada entre as amplitudes  $T_{K\pi}$  na fig. 2.18.

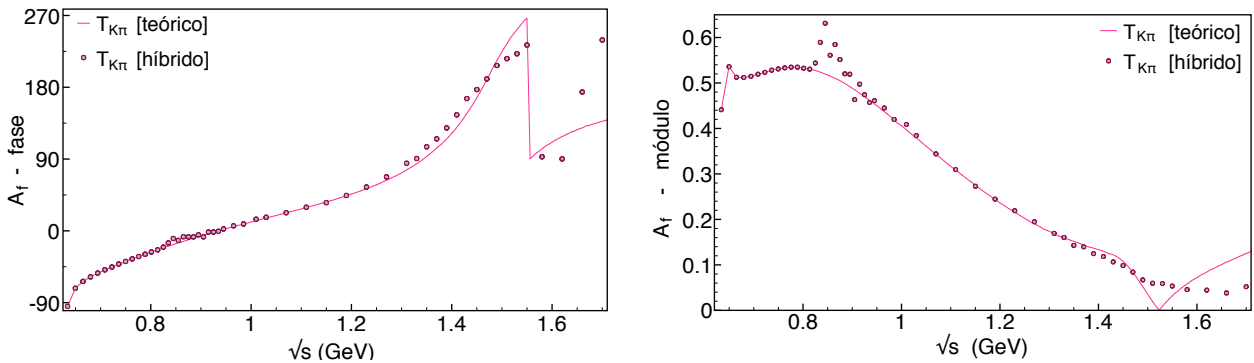


Figura 4.20: Fase e módulo da amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S com largura no  $\rho$ ,  $A_f$  (4.58), alimentada por uma amplitude de dois corpos  $T_{K\pi}$  puramente teórica, eq. (2.39) (contínua) e uma híbrida, definida na seção 2.6 (círculo) .

No contexto deste trabalho, estamos interessados em minimizar ao máximo possíveis ruídos aos resultados da amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  e, por isso, é mais indicado incluir uma amplitude de dois corpos que melhor descreva o espaço de fase acessível ao sistema. Optamos, assim, por utilizar a função híbrida como referência de amplitude de espalhamento  $K\pi$ , sempre que for possível.



### 4.5.3 Resultados - a largura do $\rho$

A amplitude de decaimento  $A_f$ , (4.58), representada pelo diagrama da fig.4.16, inclui o méson  $\rho$  como uma ressonância levando em consideração a sua largura dinâmica. Por isso, essa amplitude é conceitualmente melhor do que a anterior  $A$ , eq.(4.31), em que o  $\rho$  não possui largura.

A comparação numérica entre as duas amplitude, calculadas com a função de dois corpos híbrida, é mostrada na fig. 4.21 para a fase e na fig. 4.22 para o módulo.

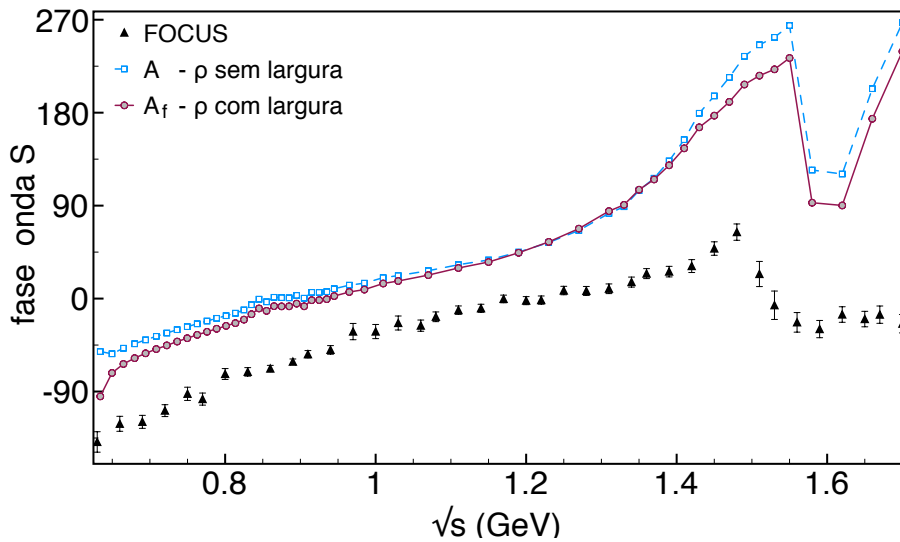


Figura 4.21: Fase da amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S:  $A$ , eq.(4.31), com o méson  $\rho$  sem largura (quadrado - tracejada);  $A_f$ , eq.(4.58), com largura da ressonância  $\rho$  (círculo - contínua); comparados com os dados experimentais da FOCUS[5].

O primeiro fato a ser notado no gráfico da fase, é que o efeito da inclusão da largura do  $\rho$  é pequeno e não afeta apenas a região do limiar, mas principalmente a região de mais alta energia. Ambas as curvas possuem a mesma estrutura e passam por  $90^\circ$  no mesmo ponto, como o esperado, uma vez que nessa região, o comportamento das curvas está associado a existência de uma ressonância e se configura como uma característica mais fundamental da amplitude.

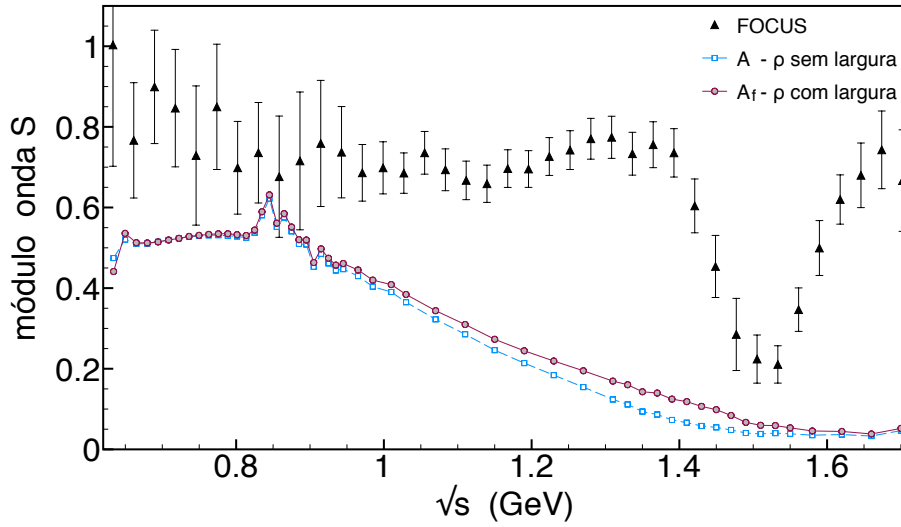


Figura 4.22: Módulo da amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S:  $A$ , eq.(4.31), com o  $\rho$  sem largura (quadrado - tracejada);  $A_f$ , eq.(4.58), com largura da ressonância  $\rho$  (círculo - contínua); comparados com os dados experimentais da FOCUS[5].

No gráfico do módulo, fig.4.22, o efeito da largura de manifesta em regiões diferente do espaço de fase. Ele não é mais visível na região próxima ao limiar, onde as duas curvas agora são equivalentes, e passa a ser mais significativo para  $\sqrt{s} > 1$  GeV.

O estudo acima mostrou que, embora seja pequeno, considerar a largura do  $\rho$  produz um efeito importante principalmente em energias mais altas e, portanto, deve ser considerado. Por isso, amplitude  $A_f$ , (4.58), descrita pelo diagrama da fig.4.16, passa a ser a referência neste trabalho para o vértice vetorial  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S.

## 4.6 Amplitude cruzada - onda S

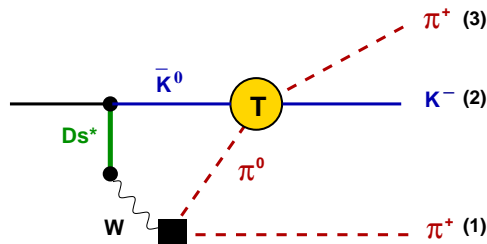


Figura 4.23: Diagrama de Feynman da interação  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  no canal cruzado.

O estado final do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  possui duas partículas idênticas e, por isso, as amplitudes calculadas anteriormente precisam ser simetrizadas. O diagrama cruzado é mostrado na fig. 4.23, e tem os píons trocados em relação à fig. 4.16. O cálculo da amplitude deste diagrama cruzado é ligeiramente mais complicada do que a calculada para o canal direto do par 12, eq.(4.70). Isso se deve ao fato de que a interação do par  $K\pi$ , que agora está no canal do par 23, quando projetada no par 12 introduz componentes da onda P do espalhamento. Do ponto de vista forma, a amplitude cruzada pode ser obtida trocando  $m_{12} \rightarrow m_{32}$  ou, simplesmente,  $1 \rightarrow 3$  nos resultados para a amplitude direta. O problema, nesse caso, é que estamos interessados em ondas parciais específicas e a mudança  $m_{12} \rightarrow m_{32}$  provoca uma mistura entre elas.

No caso do canal direto, a expansão da amplitude em ondas parciais é dada por:

$$A(m_{12}^2) = A_S(m_{12}^2) + 3 \cos \theta A_P(m_{12}^2); \quad (4.63)$$

em que  $\theta$  nesse caso é o ângulo de espalhamento entre as partículas 1 e 2 em relação ao centro de massa do par 12, e como discutido no apêndice A.3 pode ser representado como:

$$\cos \theta = \frac{\alpha_{13}^2 - m_{13}^2}{\beta} \quad (4.64)$$

sendo  $m_{13}^2$ ,  $\alpha_{13}^2$  e  $\beta$  funções de  $m_{12}^2$ . A amplitude cruzada pode ser escrita de maneira análoga empregando a prescrição  $m_{12} \rightarrow m_{32}$  e obtemos

$$\bar{A}(m_{23}^2) = A_S(m_{23}^2) + 3 \cos \theta_{23} A_P(m_{23}^2). \quad (4.65)$$

Dado que  $m_{23}$  e o  $\cos \theta_{23}$  dependem do ângulo  $\theta$  definido acima, a amplitude no canal cruzado precisa ser projetada na onda S do par 12. Ou seja, é preciso calcular a integral

$$\bar{A}_S(m_{12}^2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx \bar{A}(m_{12}^2, x), \quad (4.66)$$

com  $x = \cos \theta$ . Para facilitar a análise dos resultados, é conveniente reescrever a eq.(4.66) separando as contribuições oriundas das diferentes ondas parciais, como

$$\bar{A}_S(m_{12}^2) = \bar{A}_S^S(m_{12}^2) + \bar{A}_S^P(m_{12}^2), \quad (4.67)$$

$$\bar{A}_S^S(m_{12}^2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx A_S(m_{23}^2), \quad (4.68)$$

$$\bar{A}_S^P(m_{12}^2) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx [3 \cos \theta_{23} A_P(m_{23}^2)], \quad (4.69)$$

O cálculo de  $\bar{A}_S^S(m_{12}^2)$ , eq.(4.68), pode ser feito diretamente do resultado da eq.(4.56), substituindo  $m_{12}^2$  por  $m_{23}^2$ . Já o cálculo de  $\bar{A}_S^P(m_{12}^2)$ , eq.(4.69), depende da amplitude em onda P do canal direto, que será abordado na sequência.

### 4.6.1 Amplitude - onda P

Para uma análise mais completa do vértice vetorial do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , é importante calcular a contribuição da onda P. Em conjunto com a onda S, ela possibilita a análise do Dalitz plot do decaimento, e também, calcular a amplitude do diagrama cruzado (fig. 4.23).

O cálculo da amplitude em onda P, precisa da amplitude de espalhamento  $K\pi$  no mesmo canal. Para incluir essa nova contribuição, generalizamos a amplitude do diagrama 4.16, eq.(4.56), considerando as ondas S e P da amplitude  $K\pi$ .

$$\begin{aligned}
A &= -i [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] m_a^2 m_\rho^2 N_\rho \\
&\times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_K D_\pi} \frac{1}{\tilde{D}_\rho} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{3} [T_S(m_{12}^2) + 3 \cos \theta_{K\pi} T_P(m_{12}^2)] \right\} \\
&\times \left\{ [M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - 2m_{12}^2 - l^2 + D_\pi + D_K] \frac{1}{D_a} \right. \\
&\left. - D_\pi \left( \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_a^2} \right) \left[ \frac{1}{D_a} - \frac{1}{D_b} \right] \right\}, \tag{4.70}
\end{aligned}$$

Por outro lado, vimos na seção anterior que essa amplitude também pode ser escrita como na eq.(4.63), em que a amplitude  $A_S$  é exatamente a calculada em (4.58). Comparando as duas expressões para a amplitude  $A$ , temos que a contribuição referente a onda P é dada por:

$$\begin{aligned}
3 \cos \theta A_P(m_{12}^2) &= -i [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] \frac{\sqrt{2}}{3} [3 T_P(m_{12}^2)] m_a^2 m_\rho^2 N_\rho \\
&\times \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_K D_\pi} \frac{1}{\tilde{D}_\rho} [\cos \theta_{K\pi}] \\
&\times \left\{ [M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - 2m_{12}^2 - l^2 + D_\pi + D_K] \frac{1}{D_a} \right. \\
&\left. - D_\pi \left( \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_a^2} \right) \left[ \frac{1}{D_a} - \frac{1}{D_b} \right] \right\}. \tag{4.71}
\end{aligned}$$

É importante ressaltar que o  $\cos \theta_{K\pi}$  guarda a informação estrutural da onda P na integral. Como ele está dentro do *loop* e é integrado, não coincide com o  $\cos \theta$ . A expressão para o  $\cos \theta_{K\pi}$  no caso em que todas as partículas estão na camada de massa é dada no apêndice A.1, eq.(A.6). Neste contexto, é preciso reescrever o  $\cos \theta_{K\pi}$ , levando em consideração que dois dos momentos estão fora da camada de massa:

$$\cos \theta = \frac{s(t-u) + [(l-p_3)^2 - (l-P_D)^2] (M_\pi^2 - M_K^2)}{s^2 \rho^2(s)}, \quad (4.72)$$

em que  $s$ ,  $t$ ,  $u$  e  $\rho(s)$  se referem ao sistema de dois copos e precisam ser reescritos na linguagem do sistema de 3 corpos no centro de massa do par 12. Para a variável  $s$  isso é simples, pois ela equivale a  $m_{12}^2$ , a energia do centro de massa do par; a função  $\rho(s)$  está relacionada com  $q'$ , o trimomento do par dado em (A.33); e as variáveis  $t$  e  $u$ , dependem de momentos internos ao *loop* e são dadas por :

$$t = ([l-p_3] - p_1)^2; \quad u = ([l-p_3] - p_2)^2; \quad (4.73)$$

a diferença entre eles resulta:

$$t - u = 2p_3 \cdot (p_1 - p_2) - 2(p_1 - p_2) \cdot l + (M_\pi^2 - M_K^2). \quad (4.74)$$

Voltando a (4.72), obtemos

$$\begin{aligned} \cos \theta_{K\pi} = & \frac{1}{4m_{12}^2 q'^2} \{ 2m_{12}^2 l \cdot (p_2 - p_1) + 2m_{12}^2 p_3 \cdot (p_1 - p_2) \\ & + (M_\pi^2 - M_K^2)[m_{12}^2 - (M^2 - M_\pi^2) + 2l \cdot (p_1 + p_2)] \}; \end{aligned} \quad (4.75)$$

e usando os resultados de (A.41) e (A.42) em (4.75), temos :

$$\cos \theta_{K\pi} = -\frac{1}{4m_{12}^2 q'^2} \{ 2m_{12}^2 \beta \cos \theta + 2m_{12}^2 [(p_1 - p_2)_\mu + (M_K^2 - M_\pi^2)(p_1 + p_2)_\mu] l^\mu \}. \quad (4.76)$$

A presença de  $l^\mu$  na integral (4.71), altera a estrutura dos *loops* calculados em (4.58), que passam a ser tensoriais e precisam ser recalculados. Em função dessas novas integrais, a amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  na onda P é dada por:

$$\begin{aligned} 3 \cos \theta A_P = & -i [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] \frac{\sqrt{2}}{3} [3 T_P(m_{12}^2)] m_a^2 m_\rho^2 N_\rho \\ & \times \left\{ [M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - 2m_{12}^2 - m_a^2] I_{\pi K \rho a}^P - I_{\pi K \rho}^P + I_{K \rho a}^P + I_{\pi \rho a}^P \right. \\ & \left. - \left( \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_a^2} \right) [I_{K \rho a}^P - I_{K \rho b}^P] \right\}. \end{aligned} \quad (4.77)$$

As novas integrais têm a forma:

$$I_{\pi K\rho a}^P = \int \frac{d^4l}{(4\pi)^2} \frac{[\cos\theta_{K\pi}]}{D_K D_\pi \tilde{D}_\rho D_a}, \quad (4.78)$$

$$I_{\pi K\rho}^P = \int \frac{d^4l}{(4\pi)^2} [\cos\theta_{K\pi}] \frac{1}{D_\pi D_K \tilde{D}_\rho}, \quad (4.79)$$

$$I_{\pi\rho a}^P = \int \frac{d^4l}{(4\pi)^2} [\cos\theta_{K\pi}] \frac{1}{D_\pi \tilde{D}_\rho D_a}, \quad (4.80)$$

$$I_{K\rho a}^P = \int \frac{d^4l}{(4\pi)^2} [\cos\theta_{K\pi}] \frac{1}{D_K \tilde{D}_\rho D_a}, \quad (4.81)$$

$$I_{K\rho b}^P = \int \frac{d^4l}{(4\pi)^2} [\cos\theta_{K\pi}] \frac{1}{D_K \tilde{D}_\rho D_b}. \quad (4.82)$$

Ao substituir a função  $\cos\theta_{K\pi}$ , eq. (4.76), em cada uma das integrais acima, a parte proporcional a  $\cos\theta$  não depende de  $l$  e sua solução é trivial: equivale a respectiva integral de *loop* sem índice de Lorentz. Desta forma, as integrais podem ser escritas de modo uniforme como

$$I_{(\dots)}^P = -\frac{1}{4m_{12}^2 q'^2} \left\{ 2m_{12}^2 \beta \cos\theta I_{(\dots)} + 2m_{12}^2 [(p_1 - p_2)_\mu + (M_K^2 - M_\pi^2)(p_1 + p_2)_\mu] I_{(\dots)}^\mu \right\}.$$

em que  $I_{(\dots)}^\mu$  corresponde às eqs. (4.78 - 4.82) com  $\cos\theta_{K\pi} \rightarrow l^\mu$ . Essas integrais tensoriais foram calculadas no apêndice C.5 e os resultados para as eqs. (4.78 - 4.82) podem ser reescritos em termos de integrais de *loop* sem índice de Lorentz:

$$I_{\pi K\rho a}^P = -\frac{\beta \cos\theta}{2q'^2} \left\{ I_{\pi K\rho a} - \frac{1}{4Q'^2 m_{12}^2} \left\{ 2m_{12}^2 I_{\pi K\rho} - (M_D^2 - M_\pi^2 + m_{12}^2) I_{\pi\rho a} \right. \right. \\ \left. \left. + (M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) I_{K\rho a} - [(M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2)(M_D^2 - M_K^2) - 2m_{12}^2 m_a^2] I_{\pi K\rho a} \right\} \right\}, \quad (4.83)$$

$$I_{\pi K\rho}^P = -\frac{\beta \cos\theta}{2q'^2} \left\{ I_{\pi K\rho} - \frac{1}{4Q'^2 m_{12}^2} \left\{ [(M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2)(M_D^2 - M_K^2) - 2m_{12}^2(\Theta_R - i\Theta_I)] I_{\pi K\rho} \right. \right. \\ \left. \left. - 2m_{12}^2 I_{\pi K} + (M_D^2 - M_\pi^2 + m_{12}^2) I_{K\rho} - (M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) I_{\pi\rho} \right\} \right\}, \quad (4.84)$$

$$I_{\pi\rho a}^P = -\frac{\beta \cos\theta}{2q'^2} \left[ I_{\pi\rho a} - \frac{1}{2M_\pi^2} (m_a^2 I_{\pi\rho a} + I_{\pi\rho} - I_{\rho a}) \right], \quad (4.85)$$

$$I_{K\rho a}^P = -\frac{\beta \cos\theta}{2q'^2} \left\{ I_{K\rho a} - \frac{1}{2M_D^2} [(m_a^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{K\rho a} + I_{K\rho} - I_{\rho a}] \right\}, \quad (4.86)$$

$$I_{K\rho b}^P = -\frac{\beta \cos\theta}{2q'^2} \left\{ I_{K\rho b} - \frac{1}{2M_D^2} [(m_b^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{K\rho b} + I_{K\rho} - I_{\rho b}] \right\}, \quad (4.87)$$

Como o esperado, todas as integrais (4.83) - (4.87) são proporcionais a  $\cos \theta$ , o que nos permite reescrever a eq.(4.77). A contribuição da amplitude em onda P é, finalmente dada por:

$$\begin{aligned}
A_P(m_{12}^2) &= i [G_F \cos^2 \theta_C F^{DK}(0)] \frac{\sqrt{2}}{3} [T_P(m_{12}^2)] m_a^2 m_\rho^2 N_\rho \left[ \frac{\beta}{2 q'^2} \right] \\
&\times \left\{ [M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - 2m_{12}^2 - m_a^2] \left\{ I_{\pi K \rho a} - \frac{1}{4 Q'^2 m_{12}^2} \{ 2 m_{12}^2 I_{\pi K \rho} \right. \right. \\
&- (M_D^2 - M_\pi^2 + m_{12}^2) I_{\pi \rho a} + (M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) I_{K \rho a} \\
&- [(M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2)(M_D^2 - M_K^2) - 2 m_{12}^2 m_a^2] I_{\pi K \rho a} \left. \left. \right\} \right\} \\
&- \left\{ I_{\pi K \rho} - \frac{1}{4 Q'^2 m_{12}^2} \{ [(M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2)(M_D^2 - M_K^2) - 2 m_{12}^2 (\Theta_R - i \Theta_I)] I_{\pi K \rho} \right. \\
&- 2 m_{12}^2 I_{\pi K} + (M_D^2 - M_\pi^2 + m_{12}^2) I_{K \rho} - (M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) I_{\pi \rho} \left. \left. \right\} \right\} \\
&+ \left\{ I_{\pi \rho a} - \frac{1}{2 M_\pi^2} (m_a^2 I_{\pi \rho a} + I_{\pi \rho} - I_{\rho a}) \right\} \\
&+ \left\{ I_{K \rho a} - \frac{1}{2 M_D^2} [(m_a^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{K \rho a} + I_{K \rho} - I_{\rho a}] \right\} \\
&- \left( \frac{M_D^2 - M_K^2}{m_a^2} \right) \left\{ I_{K \rho a} - I_{K \rho b} - \frac{1}{2 M_D^2} [(m_a^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{K \rho a} + I_{K \rho} - I_{\rho a} \right. \\
&- (m_b^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{K \rho b} - I_{K \rho} + I_{\rho b}] \left. \right\}. \tag{4.88}
\end{aligned}$$

Nos resultados acima, as integrais do tipo triângulo são as mesmas que aparecem na amplitude em onda S, calculadas no apêndice C.3. A novidade são as integrais do tipo bolha  $I_{xy}$ , calculadas no apêndice C.1, e que possuem uma constante de renormalização arbitrária. Com exceção de  $I_{\pi K}$ , descrita pela eq. (C.30), em que o ponto de subtração escolhido foi o mesmo que  $C_{S1/2}$ , nas demais integrais ele é dado por  $C = I_{xy}(0)$ . As integrais  $I_{\pi \rho}$ ,  $I_{K \pi}$  e  $I_{K \rho}$  são dadas pelas eqs.(C.126), (C.116) e (C.116) e  $I_{\rho a}$  e  $I_{\rho b}$  pela eq. (C.44).

## Resultados

A amplitude  $A_P$ , para onda P do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , é dada pela eq.(4.88) em função da amplitude  $T_P$  do espalhamento  $K \pi$  livre no mesmo canal. Na determinação numérica de  $A_P$ , utilizamos duas amplitudes de dois corpos: a teórica, obtida a partir

do *kernel*  $\mathcal{K}_{P1/2}$ , (2.33), na expressão unitarizada da eq.(2.39), e a híbrida, apresentada e discutida na seção 2.6. Como discutimos acima no contexto da onda S, a amplitude híbrida é mais interessante do que a teórica, pois combina a descrição do setor de energias baixas pautado na simetria quiral e o setor de energias mais altas ( $\sqrt{s} > 0.825$  GeV), determinado pelos dados experimentais da colaboração LASS[6]. A amplitude teórica, por sua vez, contém apenas uma ressonância e, por isso, é formalmente limitada para valores de  $\sqrt{s} > 1.2$  GeV. O resultado para o módulo da amplitude  $A_P$  (4.88) é apresentado no gráfico da fig. 4.24, para as duas amplitude de dois corpos, em conjunto com as partes real e imaginária da função. Os formatos das curvas se assemelham às de uma Breit-Wigner (BW), com um pico na massa do  $K^*(892)$ .

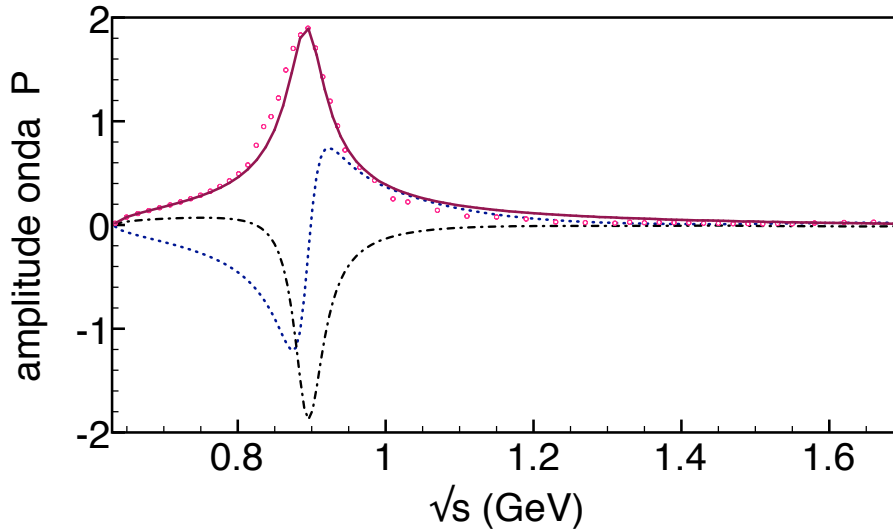


Figura 4.24: Módulo da amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda P com  $T_P$  teórico (contínua) e híbrido (tracejada) e as partes real (pontilhada) e imaginária (traço-pontilhada) da amplitude com  $T_P$  teórico.

Como discutido na introdução, a fase da amplitude na onda P do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  é usada como normalização dos dados experimentais, e é a partir dela que as colaborações E791[4] e FOCUS[5] obtêm os dados da onda S. Por isso, na onda P, só podemos comparar o nosso resultado com a curva teórica usada para representar os dados experimentais. Essa curva é uma função Breit-Wigner ligeiramente modificada, cujos parâmetros são fornecido nas referências [4, 5]. No gráfico da fig. 4.25, mostramos o resultado para a fase da nossa melhor amplitude  $A_P$  (4.88), ou



seja, aquela alimentada pela amplitude  $T_P$  híbrida, juntamente com a parametrização experimental usada pela colaboração FOCUS[5]. A comparação entre as duas curvas

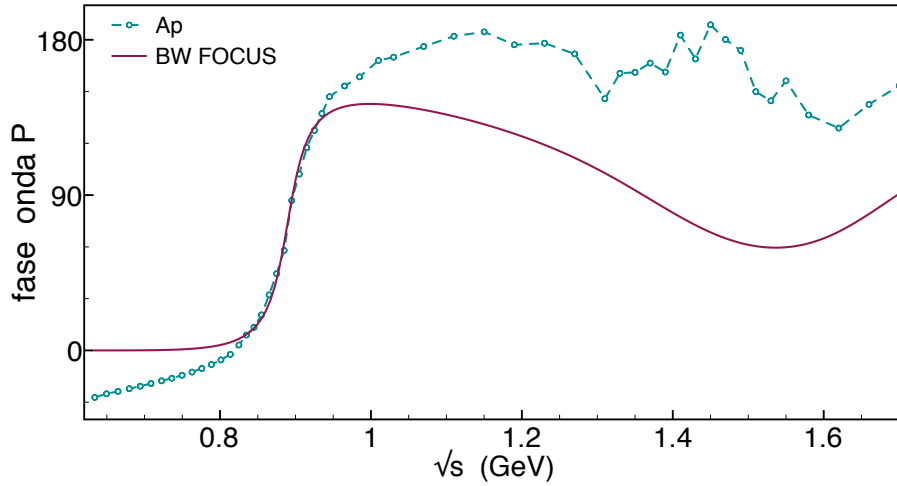


Figura 4.25: Fases da amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda P:  $A_P$  (4.88) com  $T_P$  híbrida (círculo-tracejada) e a função Breit-Wigner (BW) utilizada pela colaboração FOCUS[5] (contínua).

fornece informações importantes. Inicialmente, notamos que elas coincidem apenas na região ascendente em torno da massa do  $K^*(892)$ , passando por  $90^\circ$  no mesmo ponto. Para energias maiores do que 1 GeV, as curvas não são idênticas, mas podem, com alguma flexibilidade, serem consideradas consistentes. Por outro lado, no setor de baixas energias, as diferenças são mais importantes. No limiar, enquanto a amplitude da colaboração FOCUS[5] sai de zero, o valor da função  $A_P$  é  $\approx -30^\circ$ . Embora essa discordância seja bem significativa no limiar e na região de baixas energias, ela não pode ser atribuída à amplitude híbrida empregada para  $T_P$ , pois ela é baseada em Lagrangianas quirais [61] e, portanto, corresponde à melhor extrapolação possível para os dados experimentais. Tal discordância deve, portanto, ser atribuída à fase associada ao *loop* fraco da fig. 4.16. É possível dimensionar essa contribuição, lembrando que na eq. (4.88), a amplitude  $A_P$  é dada pelo produto de  $T_P$  por um fator associado ao vértice fraco. Por isso, na fig. 4.26, comparamos a amplitude  $A_P$  com a amplitude de dois corpos  $T_P$ , ambas no caso híbrido.

A discrepância entre a nossa curva teórica e a utilizada pela colaboração FOCUS pode, em princípio, representar um grande problema para a física do processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ .

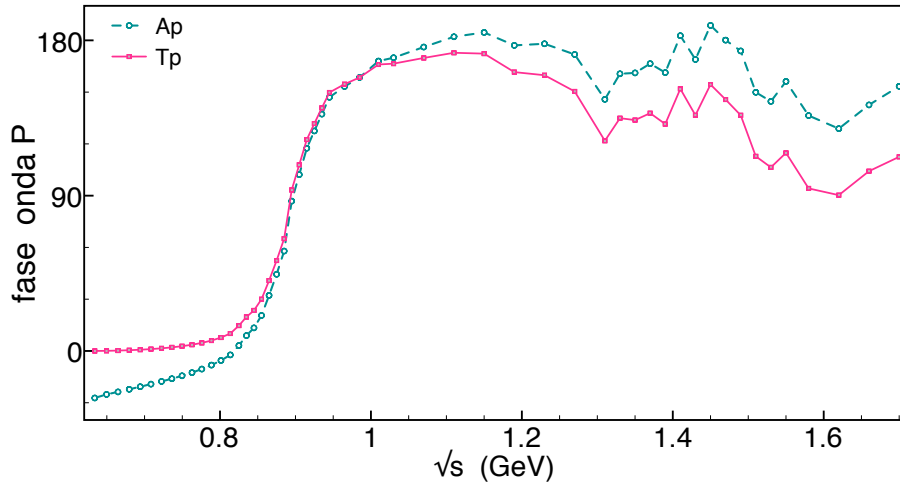


Figura 4.26: Comparação entre as fases da amplitude três e dois corpos na onda P:  $A_P$ , (4.88), (círculo - tracejada) e  $T_P$  (quadrado - contínua), ambas no caso híbrido.

Isso ocorre porque, se a melhor curva para representar os dados experimentais for uma semelhante à nossa, que não se anula no limiar, os dados referentes à onda S precisam ser reavaliados. Se levarmos em conta o efeito do *loop* no vértice fraco, obtido na subtração das duas curvas da fig. 4.26 e adicionarmos essa diferença aos dados da FOCUS[5] para onda S, podemos sugerir uma modificação aos mesmos. Os novos dados da onda S são comparados aos propostos pela colaboração FOCUS[5] na fig. 4.27. Vemos que a diferença entre os conjuntos de dados é pequena e consistente com a diferença das curvas na fig. 4.26. O fato mais relevante é a inclinação dos novos dados na região próxima ao limiar, que é mais acentuada do que a anterior.

Como discutimos no início desta seção, a amplitude de dois corpos  $T_P$  híbrida é melhor do que a puramente teórica. O gráfico da fig.4.28 evidencia essa diferença no caso da fase da amplitude  $A_P$  ao comparar o resultado obtido com as duas amplitudes na eq.(4.88). Podemos ver que elas são praticamente idênticas até  $\sqrt{s} \approx 1.2$  GeV, quando a fase embutida de  $T_P$  teórico tende a uma constante e a fase com  $T_P$  híbrido, por outro lado, demonstra ter uma estrutura. Embora saibamos que a híbrida é mais completa e, por isso, mais indicada para o cálculo da amplitude de decaimento, nem sempre será possível utilizá-la, como ocorre no caso da amplitude do canal cruzado, que abordaremos na sequência.

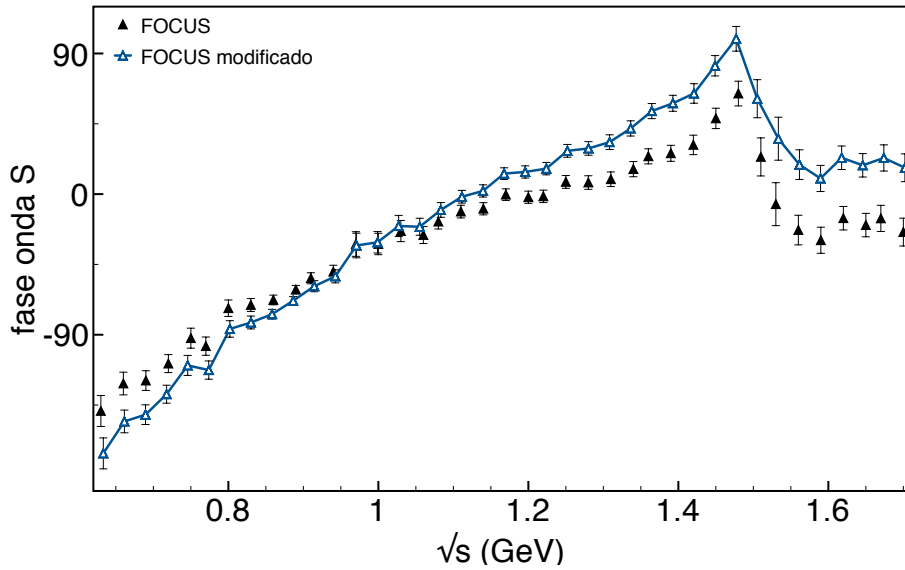


Figura 4.27: Fase do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S: comparação entre os dados da colaboração FOCUS modificados pela inclusão do efeito do *loop* fraco e os dados originais [5].

#### 4.6.2 Onda S - canais direto e cruzado: resultados

Amplitude do diagrama cruzado  $\bar{A}^S$ , fig. 4.23, também contribui para a amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  dado à simetria imposta pela presença de dois  $\pi^+$  no estado final. Este estudo ainda está em andamento e os resultados, apresentados abaixo, são preliminares e mostram características importantes. Embora a função híbrida seja a amplitude de dois corpos mais indicada para descrever a região de energias altas, como discutido acima, ela não pode ser utilizada neste contexto, pois a amplitude do canal cruzado precisa guardar a informação da sua dependência com a energia que será integrada no processo de projeção na onda S do par 12, eq.(4.66). Assim, nos cálculos das amplitudes em ondas parciais S e P do canal cruzado:  $\bar{A}_S^S$  e  $\bar{A}_P^P$ , utilizamos as funções de dois corpos puramente teórica, que incluem apenas uma ressonância explícita nos *kernels* das ondas S e P do sistema  $K\pi$ , como apresentado na seção 2.2.

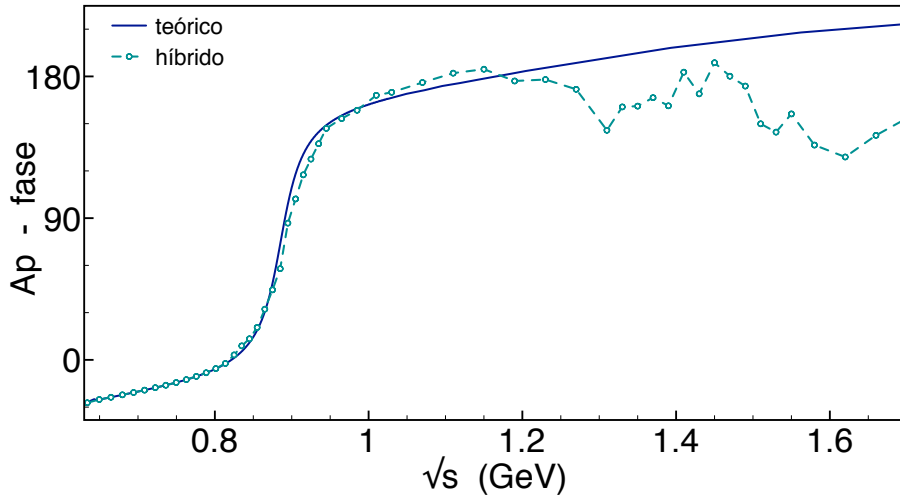


Figura 4.28: Comparação entre as fases da amplitude  $A_P$  obtidas com:  $T_P$  híbrido (círculo - tracejada), e  $T_P$  teórico (contínua).

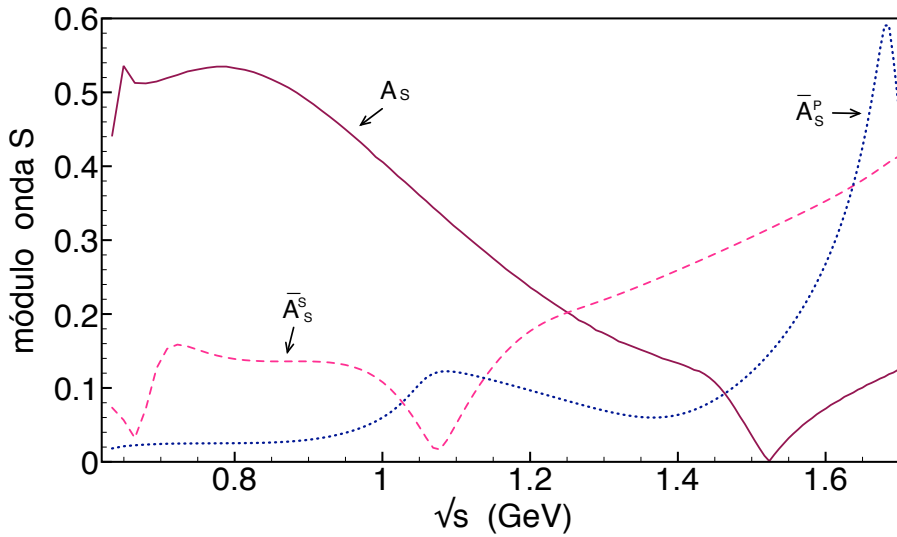


Figura 4.29: Módulo da amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S: canal direto  $A_S$ , eq. (4.77), com  $T_{K\pi}$  teórico (contínua); canal cruzado oriundo da onda S,  $\bar{A}_S^S$ , eq.(4.68) (tracejada) e da onda P,  $\bar{A}_S^P$ , eq(4.69) (pontilhada).

Os resultados para o módulo das amplitudes do canal cruzado, após serem projetadas na onda S do par 12, são mostradas na fig. 4.29, em conjunto com a amplitude do canal direto  $A_S$ . Juntas elas compõem todos os elementos que contribuem para a amplitude vetorial do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S. Na comparação entre as curvas  $\bar{A}_S^S$  e  $A_S$ , vemos que a cruzada espelha o comportamento geral do canal direto, sendo o zero do

último deslocado para a região de baixas energias. Esse efeito pode ser entendido como um resultado da projeção (4.68), que inverte as regiões cinemáticas e espalha a curva, reduzindo estruturas mais pronunciadas. Sob a luz desta observação, podemos entender que a amplitude cruzada proveniente da onda P:  $\bar{A}_S^P$  possui um pico pronunciado no final do espaço de fase associado à ressonância  $K^*(892)$ , cujo efeito da integração de sua estrutura bastante pronunciada no canal direto, como vimos na fig.4.24, também afeta a região próxima a 1 GeV. É muito significativo, na análise da fig. 4.29, a importância relativa observada entre as amplitudes do canal direto e cruzado. Enquanto a primeira é mais importante no setor de baixas energias, sendo maior que as demais até  $\sqrt{s} \approx 1.2$  GeV, as amplitudes cruzadas são mais relevantes no setor de energias altas e no limite superior do espaço de fase são, juntas, quase uma ordem de grandeza maior do que  $A_S$ .

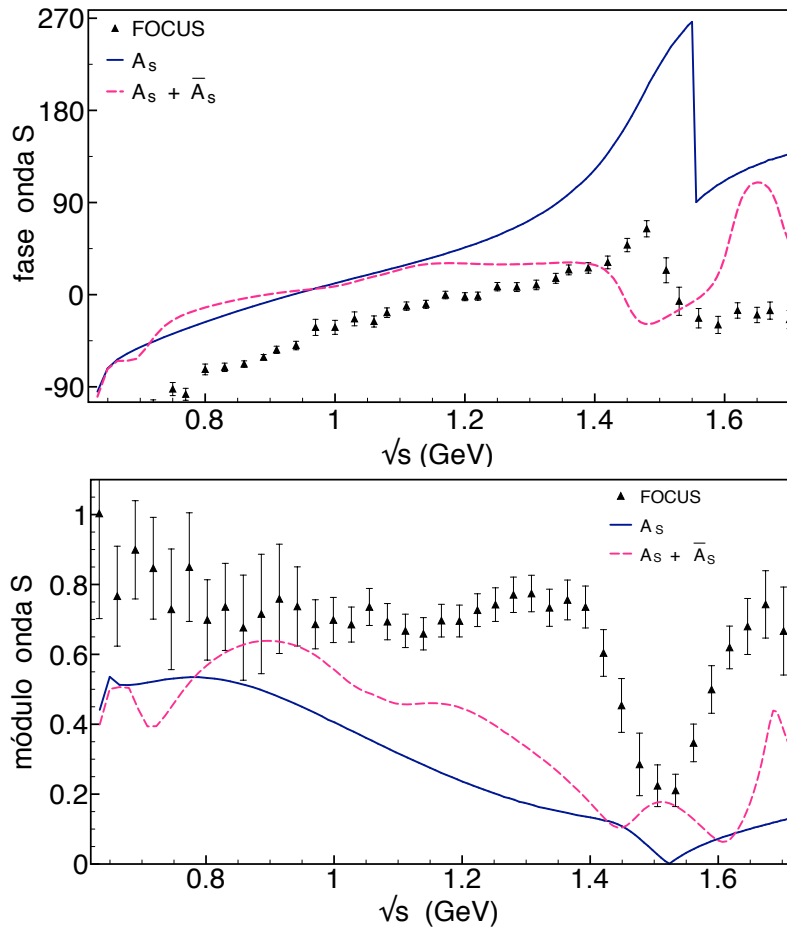


Figura 4.30: Fase e módulo da amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S comparada com os dados experimentais da colaboração FOCUS[5]: canal direto  $A_S$  (4.58) (contínua); e a soma dos canal direto com o cruzado  $\bar{A}_S$  (4.67) (tracejada).

Os resultados para a fase e o módulo da amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S considerando as contribuições dos canais direto,  $A_S$  (4.58), e cruzado,  $\bar{A}_S$  (4.67), são apresentados na fig. 4.30 em comparação com a amplitude do canal direto.

Chama atenção o fato da fase resultante da soma ser dominada pela contribuição direta até 1.15 GeV, enquanto que no módulo a curva da soma apenas mantém a tendência da curva direta. Em ambas a influência do cruzado é mais significativa a partir de 1.2 GeV, espelhando o comportamento observado na fig. 4.29. Fica claro nessa análise, que a inclusão da amplitude do diagrama cruzado contribui de forma importante e altera o resultado do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  tanto para a fase, como para o módulo. Este resultado é curioso, pois afirma que a contribuição do cruzado é mais importante do que a do canal direto em altas energias.

## Principais conclusões

Este capítulo contém um estudo extenso e aprofundado sobre a amplitude vetorial do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . Os principais resultados obtidos são resumidos a seguir.

- A primeira contribuição não nula para amplitude vetorial vem do termo de primeira ordem da série perturbativa nas interações de estados finais e corresponde a diagramas como o da fig. 4.16.
- A influência do fator de forma  $D \rightarrow W \bar{K}$  na amplitude de decaimento é pequena, sendo quase nula no limiar e bastante significativa para valores de  $\sqrt{s} > 1.4$  GeV (fig. 4.11). Isso é entendido pelo fato da massa da ressonância associada ao FF ser maior do que o espaço de fase acessível ao sistema.
- A ressonância vetorial  $\rho$  tem um papel de destacada relevância como estado intermediário no decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . A energia que circula no *loop* da fig. 4.8 é suficiente para abrir os canais de decaimento dos pares  $K\pi$  e  $K\rho$ , o que implica na existência de duas fases no sistema cujo efeito de interferência desloca o limiar da fase para  $\approx -50^\circ$  (gráfico fig. 4.11).
- Na ausência de fatores de forma, a fase e o módulo da amplitude de decaimento se aproximam das obtidas no capítulo 3 ( figs.4.10 e 4.11 ).

- O estudo da convergência da série em  $D^+ \rightarrow \pi^0\pi^+\bar{K}^0$ , ainda que preliminar, sugere fortemente que a série perturbativa nas interações de estado final deve convergir à razão de  $(T_{K\pi}/16\pi^2 < 1/10)$  de uma ordem para a seguinte (figs. 4.18 e 4.19). Esse resultado justifica calcular somente a primeira ordem do decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ .
- O resultado da amplitude vetorial calculada com as amplitudes de dois corpos híbrida e puramente teórica possuem a mesma estrutura (fig. 4.20), sendo a primeira mais adequada ao regime de energias mais altas.
- O tratamento do  $\rho$  como uma ressonância introduz uma função complexa no seu propagador. O efeito dessa medida é pequeno e é mais importante em energias altas, figs.4.21 e 4.22. No limiar, a fase é deslocada de  $\approx -50$  para  $\approx -90$ . Embora pequena, a largura do  $\rho$  é relevante e deve ser incluída.
- Os resultados da amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$  em onda P apresentaram uma discordância importante em relação a amplitude proposta pela colaboração FOCUS[5], que é usada como normalização dos dados de onda S (fig.4.20). No limiar, enquanto a fase da colaboração FOCUS sai de zero, a nossa é  $\approx -30$ . Essa discordância está relacionada à fase associada ao *loop* fraco.
- O efeito do *loop* fraco foi quantificado pela diferença entre as amplitudes de três e dois corpos na onda P e usado para propor uma modificação aos dados experimentais em onda S ( fig. 4.27). Os dados modificados possuem uma inclinação mais acentuada na região próxima ao limiar.
- A amplitude do diagrama do canal cruzado, fig. 4.23, contribui de maneira significativa à amplitude do decaimento em onda S, principalmente a partir de 1.2 GeV. Este resultado sugere que a contribuição do cruzado é mais importante do que a do canal direto em altas energias.
- O resultado final deste modelo para a amplitude vetorial do decaimento  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$  em onda S pode ser resumido na fig. 4.31, no qual podemos ver que, enquanto a fase da amplitude do canal direto,  $A_S$ , descreve muito bem os dados

experimentais do limiar até  $\sqrt{s} \approx 1.4$  GeV, a fase com a contribuição do cruzado só descreve os dados até 1.1 GeV.

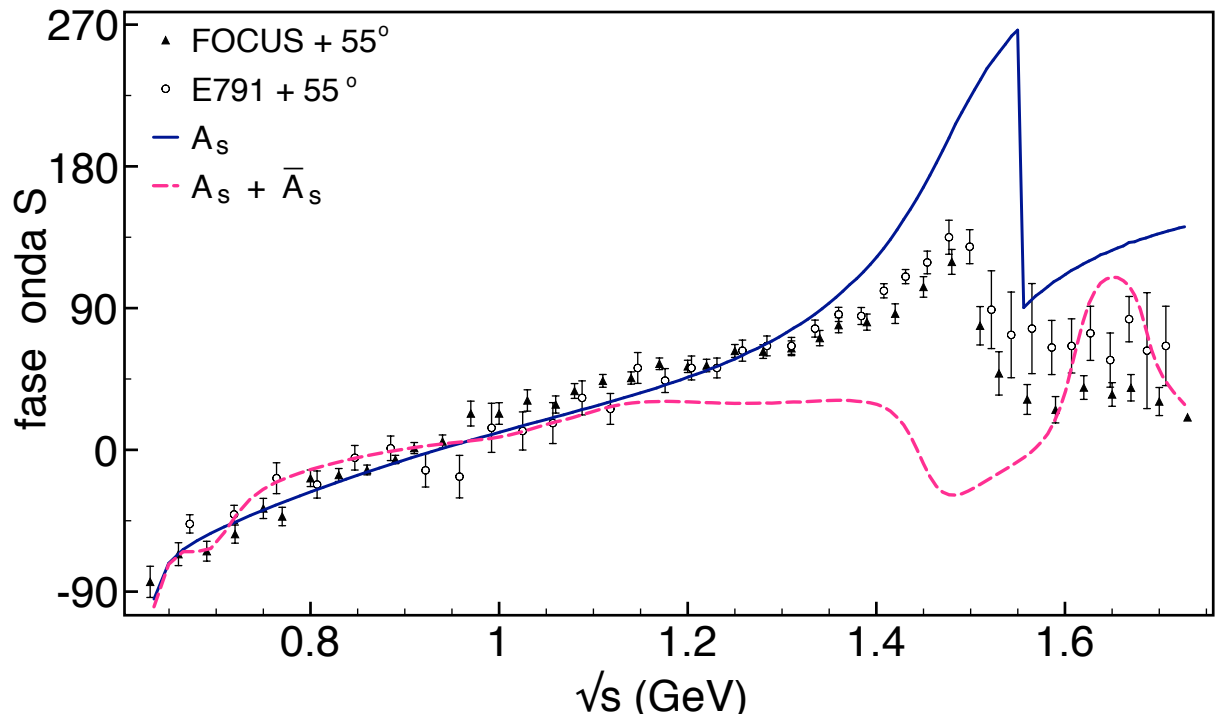


Figura 4.31: Fase de amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S: contribuição do canal direto  $A_S$ , (4.58) (contínua) e a soma das contribuições dos canais direto e trocado  $A_S + \bar{A}_S$  (tracejada); comparadas aos dados experimentais das colaborações FOCUS[5] (triângulo) e E791[18] (círculo) somados de  $55^\circ$ .



# Capítulo 5

## Conclusão e perspectivas

Neste estudo sobre o decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  desenvolvemos dois modelos, que investigam aspectos complementares dos processos dinâmicos que atuam no decaimento. As interações hadrônicas no estado final (FSI) foram o foco do primeiro, e o vértice fraco, no qual o quark  $c$  se transforma em um  $s$ , foi o foco do segundo. A motivação principal para a escolha desse processo como objeto de estudo foi o *puzzle* das fases, relacionado à diferença observada experimentalmente entre as fases em onda S dos sistemas  $K\pi$  provenientes do decaimento e do espalhamento livre, como mostra a fig.1.1. No que diz respeito ao tratamento teórico do problema, partimos de uma formulação efetiva da QCD baseada em simetria quiral, válida para hádrons formados por quarks leves em energias baixas e fizemos um esforço para estender esse referencial, da maneira mais consistente possível, para energias mais altas. Isso permitiu que as interações de dois e três corpos fossem abordadas de maneira unificada.

### Primeiro modelo

No *primeiro modelo*, apresentado no capítulo 3, não consideramos a estrutura do vértice fraco e a FSI foi descrita supondo que os três mésons interagem por meio de reespalhamentos  $K\pi$  alternados, como mostra a figura 3.2. A amplitude de espalhamento  $K\pi$  é, portanto, um ingrediente fundamental tendo sido descrita, no capítulo 2, a partir de uma lagrangiana efetiva quiral com ressonâncias[22]. A amplitude do decaimento foi expressa em termos de uma série perturbativa, na qual cada ordem era determinada pelo

número de interações da amplitude  $K\pi$ . O tratamento consistente das amplitudes de dois e três corpos deu origem a uma relação de recorrência entre os termos subsequentes, o que permitiu que a série pudesse ser ressomada, mesmo depois da inclusão dos efeitos de isospin. Esse procedimento produziu uma nova série perturbativa, que foi calculada até a segunda ordem, para as três topologias de vértice fraco acessíveis ao sistema, apresentadas na fig.3.3.

O principal resultado deste primeiro modelo, foi indicar uma possível explicação para a diferença entre as fases do espalhamento  $K\pi$  e do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . Como mostra o gráfico das fases obtidas considerando somente a primeira contribuição perturbativa, fig.5.1, as fases das amplitudes do tipo axial,  $A_a$  e  $A_b$ , são equivalentes à do espalhamento livre, como o esperado de acordo com o teorema de Watson. Por outro lado, a curva para a fase da amplitude vetorial,  $A_c$ , está em ótimo acordo com dados experimentais do decaimento [5], quando deslocada de  $-163^\circ$ . A diferença fundamental entre as topologias axial e vetorial é que a última envolve somente contribuições com interações de estado final, enquanto no caso axial, essas contribuições interferem com o termo partônico.

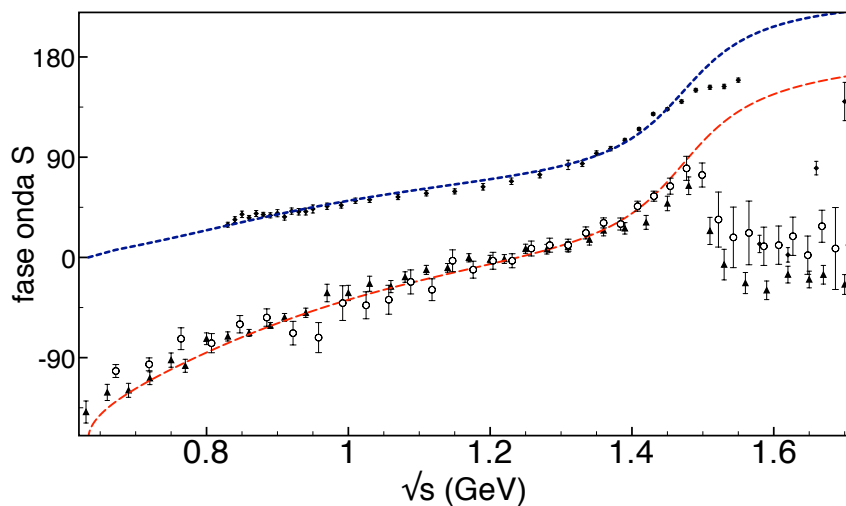


Figura 5.1: Fase da amplitude de decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S para o termo dominante:  $A_c$ , deslocado de  $-163^\circ$ , descreve os dados das colaborações FOCUS[5](triângulo) e E791[4](círculo);  $A_a$  e  $A_b$  descrevem os dados do espalhamento  $K\pi$  livre[6](diamante).

Quando incluímos uma segunda interação  $K\pi$ , ou seja, consideramos o primeiro reespalhamento, fig. 3.9, vemos que as fases de  $A_a$  e  $A_b$  não reproduzem mais a fase

do espalhamento, demonstrando o efeito da introdução da interação de três corpos. Já a fase de  $A_c$ , continua sendo compatível com os dados do decaimento, agora deslocada de  $-148^\circ$ . O fato de  $A_c$  não apresentar uma alteração significativa se deve ao fato da natureza do efeito em primeira ordem já ser de três corpos.

Assim, o primeiro modelo mostra que as interações de estado final são importantes já em primeira ordem, e que o teorema de Watson não se aplica ao processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . A contribuição que vem do vértice vetorial é muito relevante e, sozinha, promove um ótimo ajuste dos dados experimentais da fase no regime elástico, fig.5.1, e um ajuste razoável para o módulo, fig. 3.10. Podemos concluir, portanto, que a partir de um modelo simples obtivemos respostas satisfatórias ao *puzzle* das fases.

## Segundo modelo

A principal limitação do *primeiro modelo* foi a abordagem ao vértice fraco, considerado como uma constante sem estrutura. A correção desta lacuna motivou o *segundo modelo*, apresentado no capítulo 4, em que descrevemos o vértice fraco primário do decaimento, baseado na transição  $c \rightarrow s W$ , usando uma adaptação da lagrangiana para quarks pesados proposta em [35] e [36], que acopla o setor leve de  $SU(3)$  ao setor do charme e descreve todas as interações, fortes e fracas, entre os dois setores.

Com foco na transição do vértice vetorial, este modelo traz três melhorias em relação ao primeiro:

- (i) incorpora corretamente a estrutura de onda P no vértice fraco ao usar correntes do tipo  $V^\mu - A^\mu$ ;
- (ii) o vértice  $V_{DK}^\mu$  é incluído com a dependência correta de momento, parametrizado em termos de fatores de forma monopulares;
- (iii) o vértice  $V_{\pi\pi}^\mu$  é incluído com a dependência correta de momento e a transição  $W \rightarrow \pi\pi$  é intermediada pela ressonância  $\rho$ , o que dá origem a um fator de forma forte.

Ao estudar a importância relativa destes novos elementos na amplitude vetorial do decaimento em onda S, mostramos que:

- (i) o efeito dos FF no vértice  $D \rightarrow K$  é pequeno e mais perceptível em energias altas ;
- (ii) o efeito do  $\rho$  é muito significativo em todo o espaço de fase;

(iii) a largura dinâmica do  $\rho$ , embora seja pouco relevante em baixas energias, figs. 4.21 e 4.22, torna-se importante para energias mais altas e, portanto, precisa ser incluída;

(iv) a inclusão do estado intermediário  $K\rho$  no *loop* do vértice fraco é responsável por deslocar a fase da amplitude com largura no  $\rho$  de  $\approx -90^\circ$  no limiar. Isso explica o comportamento qualitativo dos dados experimentais nessa região, até então não compreendido.

Em linhas gerais, essas conclusões indicam o papel importante desempenhado pela física hadrônica neste decaimento e, em especial, no que diz respeito às contribuições de ressonâncias leves como estados intermediários.

A amplitude vetorial do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S, inclui dois tipos de contribuição: do canal direto  $A_S$ , (4.58), representado pelo diagrama da fig.4.16, e do canal cruzado  $\bar{A}_S$ , (4.66), representado pelo diagrama da fig. 4.23. Neste *segundo modelo*, o resultado da convergência da série em  $D^+ \rightarrow \bar{K}^0 \pi^0 \pi^+$  (fig.4.18) sugere que a série perturbativa nas interações de estado final converge à razão de  $(T_{K\pi}/16\pi^2 < 1/10)$ , o que justifica calcular somente a primeira ordem do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . Conseqüentemente, a amplitude  $K\pi$  não precisa ser iterada no interior de integrais de *loop* e podemos usar a amplitude híbrida (seção 2.6) que é mais conveniente do que a puramente teórica, calculada no capítulo 2, pois unifica a descrição de baixas energias baseada em perturbação quiral e os dados experimentais disponíveis, em energias maiores do que 0.825 GeV. As duas amplitudes de espalhamento  $K\pi$ : híbrida e teórica, foram confrontadas nos resultados para a amplitude de decaimento  $A_S$ , fig. 4.20, e diferem apenas para energias maiores do que 1.4 GeV, como o esperado.

No cálculo da amplitude do canal cruzado  $\bar{A}_S$ , a interação  $K\pi$  está no canal do par 23 e, quando projetada no par 12, introduz componentes da onda P do espalhamento. Esse mesmo processo de projeção, impede que a amplitude de dois corpos  $K\pi$  híbrida seja usada no canal cruzado, pois a sua dependência na energia é necessária para que ela possa ser integrada. Os resultados da contribuição do canal cruzado são preliminares e mostram, na fig. 4.31, que ele é dominante em altas energias, sendo o setor de baixas energias dominado pelo canal direto e, ainda, que a sua inserção na amplitude do decaimento piora o acordo com os dados experimentais. No entanto, este efeito ainda não está completamente entendido e precisa ser investigado com mais detalhes.

A amplitude do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda P,  $A_P$  (4.77), foi necessária, inicialmente, no cálculo do canal cruzado  $\bar{A}_S^P$ , (4.69), mas ela trouxe desdobramentos interessantes e inesperados a este trabalho. Na perspectiva das colaborações experimentais, a onda P do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  é dominada pelo polo do  $K^*(892)$  e pode ser usada como normalização aos dados das demais ondas parciais que são extraídos diretamente do diagrama de Dalitz. Por isso, acessível à comparação temos a função teórica que representa os dados, o que no caso das colaborações FOCUS[5] e E791[4] são funções Breit-Wigner modificadas. O resultado para a fase da amplitude  $A_P$ , fig.4.25, apresenta uma discordância significativa no limiar em relação à proposta pela colaboração FOCUS[5], enquanto a última sai de zero, a nossa é  $\approx -30$ . Nosso estudo revelou que essa discordância está relacionada à fase associada ao *loop* fraco (fig. 4.16). No entanto, é importante enfatizar que a discrepância observada entre a nossa curva teórica e a utilizada pela colaboração FOCUS pode, em princípio, representar um grande problema para a física do processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ . Isso porque, se a curva que representa os dados for similar à nossa, a exemplo do exercício que fizemos, fig.4.27, os dados referentes à onda S precisam ser revistos.

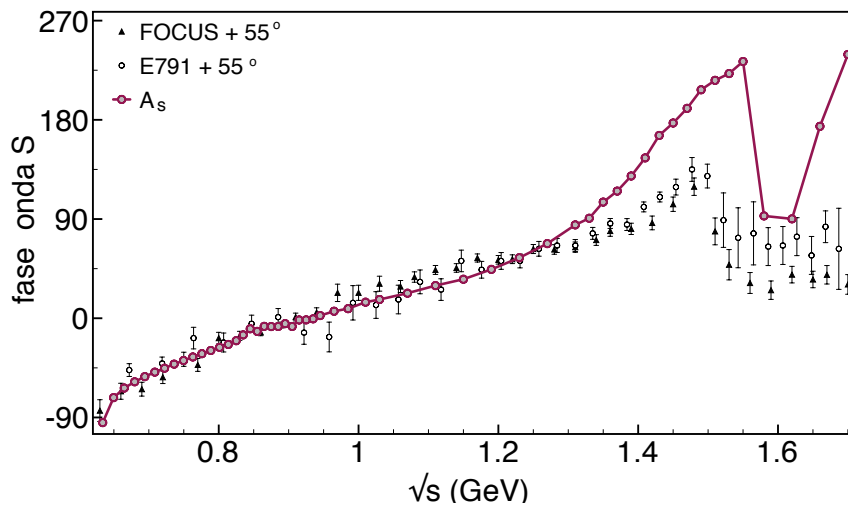


Figura 5.2: Fase da amplitude vetorial do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S com largura no  $\rho$ , (4.58), e alimentada por uma amplitude de dois corpos  $T_{K\pi}$  híbrida; comparada aos dados experimentais das colaborações FOCUS[5] e E791[4].

Por fim, o resultado mais consistente para a amplitude vetorial do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda S foi obtido a partir da amplitude do canal direto  $A_S$ , com

largura no méson  $\rho$  e alimentado pela amplitude de dois corpos híbrida. O gráfico da fase, fig.5.2, mostra que ela resulta em um ótimo ajuste aos dados experimentais deslocados de  $+55^\circ$ . O fato da fase ser  $-90^\circ$  no limiar, mostra uma característica importante deste *segundo modelo* e representa um avanço conceitual em relação ao *primeiro modelo*, no qual a fase era obrigada a ser zero na origem.

Para concluir, este trabalho de tese se constitui como um estudo aprofundado sobre o decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  e é uma contribuição relevante para a comunidade de física de Hádrons. Ao abordar os dois aspectos centrais na sua dinâmica: o vértice fraco e o FSI, mostramos que, por um lado a interação dos três mésons no estado final é importante e modifica o espaço de fase e por outro, um tratamento adequado ao vértice fraco explica o nascimento da fase experimental abaixo de zero.

## Perspectivas

Os resultados deste estudo sobre o  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  mostraram que a amplitude vetorial é capaz de descrever, sozinha, os dados experimentais para a fase, muito bem, e do módulo, de maneira razoável. No entanto, ainda é preciso compreender porque o sistema parece favorecer o decaimento vetorial.

É preciso finalizar o cálculo da amplitude do vértice axial, apresentada no apêndice E, e para isso será necessário fixar as constantes de acoplamento usando alguma informação fenomenológica. O resultado do estudo da convergência da série em  $D^+ \rightarrow \pi^0 \pi^+ \bar{K}^0$  mostrou que o termo em árvore é absolutamente dominante, dado que ela converge à razão de  $(T_{K\pi}/16\pi^2 < 1/10)$ , esse fator também está presente na série relacionada ao vértice axial, indicando que este efeito também será visto lá. Em posse da amplitude axial, será possível analisar a composição da onda S e da onda P no diagrama de Dalitz.

Por fim, o ferramental teórico e técnico desenvolvido para este decaimento pode ser aplicado a outros decaimentos análogos como o  $D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ ,  $B^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ ,  $B^+ \rightarrow K^- K^+ \pi^+$ , entre outros.

# Apêndice A

## Cinemática

### A.1 Dois Corpos

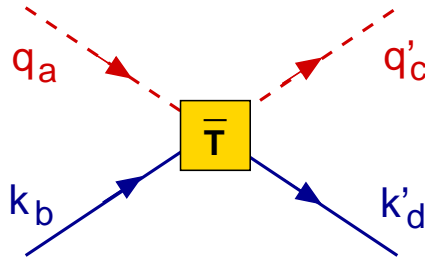


Figura A.1: Espalhamento elástico  $K^b(k)\pi^a(q) \longrightarrow K^d(k')\pi^c(q')$

As amplitudes de dois corpos  $K\pi$  e  $\pi\pi$  são ingredientes da descrição do decaimento em três corpos. As variáveis de Mandelstam, usadas para descrever a cinemática de dois corpos são

$$\begin{aligned} s &= (q + k)^2 = (q' + k')^2 ; \\ t &= (q - q')^2 = (k - k')^2 ; \\ u &= (q - k')^2 = (k - q')^2. \end{aligned} \tag{A.1}$$

No caso  $K\pi$ , elas são relacionadas entre si, na camada de massa, por  $s+t+u = 2M_\pi^2+2M_K^2$ . No referencial do centro de massa, no qual  $\mathbf{q} + \mathbf{k} = 0 = \mathbf{q}' + \mathbf{k}'$ ,  $\sqrt{s}$  é a energia do sistema. Em uma reação elástica, os módulos de todos os trimomentos são iguais. Chamando esse módulo de  $|\mathbf{p}|$ , temos  $|\mathbf{q}| = |\mathbf{k}| = |\mathbf{q}'| = |\mathbf{k}'| = |\mathbf{p}|$ , e as variáveis de Mandelstam ficam

relacionadas a  $|\mathbf{p}|$  e ao ângulo de espalhamento  $\theta$  por

$$s = \frac{4\mathbf{p}^2}{\rho^2(s)}, \quad (\text{A.2})$$

$$t = -2(1 - \cos \theta) \mathbf{p}^2; \quad (\text{A.3})$$

$$u = 2(1 - \cos \theta) \mathbf{p}^2 - s + 2M_\pi^2 + 2M_K^2. \quad (\text{A.4})$$

sendo  $\rho(s)$  uma função importante para a amplitude de espalhamento, dada por:

$$\rho(s) = \sqrt{1 - 2\frac{(M_K + M_\pi)^2}{s} + \frac{(M_K^2 - M_\pi^2)^2}{s^2}}. \quad (\text{A.5})$$

O ângulo  $\theta$  do espalhamento  $K\pi$  pode ser definido em termos das variáveis de Mandelstam como:

$$\cos \theta = \frac{s(t - u) + (M_K^2 - M_\pi^2)^2}{s^2 \rho^2(s)}. \quad (\text{A.6})$$

## Espalhamento $\pi\pi$

O espalhamento  $\pi\pi$  também contribui ao cálculo da interação de estado final do  $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$  e os resultados relevantes podem ser obtidos fazendo  $M_K \rightarrow M_\pi$  nas expressões anteriores.

No centro de massa, em função do ângulo  $\theta$  de espalhamento e de  $\mathbf{p}^2$ , o trimomento do par  $\pi\pi$ , as variáveis de Mandelstam são dadas por

$$s = 4(\mathbf{p}^2 + M_\pi^2), \quad (\text{A.7})$$

$$t = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta), \quad (\text{A.8})$$

$$u = -2\mathbf{p}^2(1 + \cos \theta) - . \quad (\text{A.9})$$

a inversão dessas expressões fornece

$$\mathbf{p}^2 = (s - 4M_\pi^2)/4, \quad (\text{A.10})$$

$$\cos \theta = \frac{t - u}{s - 4M_\pi^2}. \quad (\text{A.11})$$



## A.2 Três Corpos

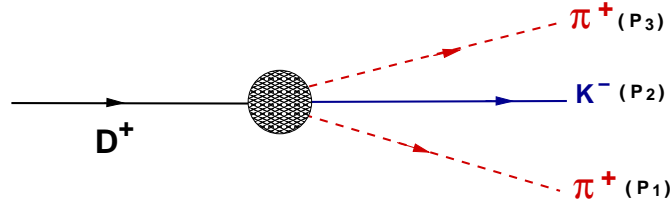


Figura A.2: Decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$

O momento do méson  $D$  é representado por  $P_D$  e, portanto,

$$P_D = p_2 + p_1 + p_3 . \quad (\text{A.12})$$

Os índices são definidos na figura A.2, em que ficam atribuídos 1 e 3 aos píons e 2 ao kaon.

Usamos as variáveis de acordo com a notação definida no PDG[16], em que as massas invariantes dos três pares no sistema de três corpos são  $m_{12}^2$ ,  $m_{23}^2$  e  $m_{13}^2$ , tais que

$$m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2 , \quad (\text{A.13})$$

$$m_{23}^2 = (p_3 + p_2)^2 , \quad (\text{A.14})$$

$$m_{13}^2 = (p_1 + p_3)^2 , \quad (\text{A.15})$$

e vinculadas por

$$m_{12}^2 + m_{23}^2 + m_{13}^2 = M_D^2 + 2 M_\pi^2 + M_K^2 . \quad (\text{A.16})$$

Algumas relações cinemáticas que serão úteis no desenvolvimento do cálculo, e que decorrem das equações acima são:

$$2 P_D \cdot p_1 = M_D^2 + m_1^2 - m_{23}^2 ; \quad (\text{A.17})$$

$$2 P_D \cdot p_2 = M_D^2 + m_2^2 - m_{13}^2 ; \quad (\text{A.18})$$

$$2 P_D \cdot p_3 = M_D^2 + m_3^2 - m_{12}^2 . \quad (\text{A.19})$$

O referencial usado para análise dos decaimentos do  $D$ , e que também será adotado neste trabalho, é o seu referencial de repouso, no qual  $P_D = (M_D, 0)$ .

### A.3 Projeção no referencial do par 12

No centro de massa do par 12, os quadrimomentos podem ser escritos como:

$$P' = (E'; 0, 0, Q'), \quad (\text{A.20})$$

$$p'_1 = (w'_1; q' \sin \theta, 0, q' \cos \theta), \quad (\text{A.21})$$

$$p'_2 = (w'_2; -q' \sin \theta, 0, -q' \cos \theta), \quad (\text{A.22})$$

$$p'_3 = P' - p'_1 - p'_2 = (E - w'_1 - w'_2; 0, 0, Q'), \quad (\text{A.23})$$

A condição da camada de massa dos mésons, impõe

$$P'^2 = E'^2 - Q'^2 = M_D^2, \quad (\text{A.24})$$

$$p_1'^2 = w_1'^2 - q'^2 = M_\pi^2, \quad (\text{A.25})$$

$$p_2'^2 = w_2'^2 + q'^2 = M_K^2, \quad (\text{A.26})$$

$$p_3'^2 = (E - w'_1 - w'_2)^2 - Q'^2, \quad (\text{A.27})$$

A partir das eqs. (A.21) e (A.22), obtemos

$$(p'_1 + p'_2)^2 = (w'_1 + w'_2)^2 = m_{12}^2; \quad (\text{A.28})$$

$$(\text{A.29})$$

e a diferença entre (A.26) e (A.25) fornece

$$(w'_1 + w'_2)(w'_1 - w'_2) = M_K^2 - M_\pi^2. \quad (\text{A.30})$$

Esses dois resultados fixam os valores das energias  $w'_1$  e  $w'_2$ :

$$w'_1 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{m_{12}^2} - \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{\sqrt{m_{12}^2}} \right], \quad (\text{A.31})$$

$$w'_2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{m_{12}^2} + \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{\sqrt{m_{12}^2}} \right]. \quad (\text{A.32})$$

O valor de  $q'$  é obtido ao introduzir (A.31) em (A.25),

$$q' = \frac{1}{2\sqrt{m_{12}^2}} \sqrt{m_{12}^4 - 2(M_\pi^2 + M_K^2)m_{12}^2 + (M_\pi^2 - M_K^2)^2}. \quad (\text{A.33})$$

A energia  $E'$  é obtida fazendo (A.24 - A.25),

$$E' = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{m_{12}^2} + \frac{M_D^2 - M_\pi^2}{\sqrt{m_{12}^2}} \right]. \quad (\text{A.34})$$

Finalmente,  $Q'$  é obtido substituindo os valores acima em (A.24)

$$Q' = \frac{1}{2\sqrt{m_{12}^2}} \sqrt{m_{12}^4 - 2(M_\pi^2 + M_D^2)m_{12}^2 + (M_\pi^2 - M_D^2)^2}. \quad (\text{A.35})$$

Com esses resultados, podemos projetar as massas invariantes  $m_{13}^2$  (A.15) e  $m_{23}^2$  (A.14), no referencial do par 12, em função  $m_{12}^2$  e  $\theta$ , o ângulo entre  $p_1$  e  $p_3$ :

$$m_{13}^2 = \alpha_{13}^2 - \beta \cos \theta; \quad (\text{A.36})$$

$$m_{23}^2 = \alpha_{23}^2 + \beta \cos \theta; \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{13}^2 &= M_D^2 + m_2^2 - 2E'w'_2, \\ &= \frac{1}{2} \left( M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - m_{12}^2 - \frac{(M_D^2 - M_\pi^2)(M_K^2 - M_\pi^2)}{m_{12}^2} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} \alpha_{23}^2 &= M_D^2 + m_1^2 - 2E'w'_1, \\ &= \frac{1}{2} \left( M_D^2 + M_K^2 + 2M_\pi^2 - m_{12}^2 + \frac{(M_D^2 - M_\pi^2)(M_K^2 - M_\pi^2)}{m_{12}^2} \right); \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\beta = 2Q'q'. \quad (\text{A.40})$$

O ângulo  $\theta$ , entre as partículas 1 e 3, pode ser escrito em função de variáveis covariantes como:

$$-2\beta \cos \theta = m_{13}^2 - m_{23}^2 - \alpha_{13}^2 + \alpha_{23}^2; \quad (\text{A.41})$$

ou, alternativamente,

$$-2m_{12}^2\beta \cos \theta = m_{12}^2 [2(p_1 - p_2) \cdot p_3] + (M_K^2 - M_\pi^2) [2(p_1 + p_2) \cdot p_3]. \quad (\text{A.42})$$

## A.4 Diagrama de Dalitz

O diagrama de Dalitz é uma importante ferramenta utilizada pelos experimentais na análise de decaimentos em três corpos. Isso porque ele expressa a seção de choque dos decaimentos em um espaço de fase bidimensional, cujos eixos são funções de escalares de Lorentz construídos a partir da cinemática do problema. Usando a notação do PDG[16],

os eixos do diagrama de Dalitz apropriado ao nosso problema são as massas invariantes  $m_{12}^2$  e  $m_{23}^2$  e o elemento do espaço de fase é dado por:

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{(32M_D^3)} |\bar{\mathcal{M}}|^2 dm_{12}^2 dm_{23}^2,$$

sendo  $\mathcal{M}$  a matriz do decaimento, que contém a dinâmica do processo. Caso não exista dinâmica, o diagrama de Dalitz é uniforme no espaço de fase. Por outro lado, qualquer assimetria no diagrama representa um informação física sobre o processo.

A cinemática do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  (A.19) define as bordas do diagrama de Dalitz :

$$(m_1 + m_2)^2 \leq m_{12}^2 \leq (M_D - m_3)^2, \quad (\text{A.43})$$

$$(m_2 + m_3)^2 \leq m_{23}^2 \leq (M_D - m_1)^2, \quad (\text{A.44})$$

$$(m_1 + m_3)^2 \leq m_{13}^2 \leq (M_D - m_2)^2, \quad (\text{A.45})$$

lembrando que os índices 1 e 3 são píons e 2 o kaon.

# Apêndice B

## Resultados para o sistema $K\pi$

### B.1 $SU(3)$

O grupo  $SU(3)$  é importante porque acomoda os quarks  $u$ ,  $d$  e  $s$  em multipletos e, por isso, é útil no estudo das interações entre píons e kaons. Ele é um grupo de Lie, e tem esse nome porque suas representações matriciais de ordem mais baixa são unitárias ( $U$ ), têm determinante 1 (*Special*, em inglês) e três elementos. A álgebra do grupo é dada pelos geradores  $F_k$ , que satisfazem as relações de comutação

$$[F_i, F_j] = i f_{ijk} F_k . \quad (\text{B.1})$$

As grandezas  $f_{ijk}$ , dadas na tabela B.1, são as constantes de estrutura que definem o grupo e são antissimétricas pela troca de quaisquer dois índices.

Tabela B.1: Constantes de estrutura antissimétricas; as demais combinações de índices podem ser obtidas sabendo que  $f_{ijk}$  é antissimétrico pela troca de dois índices vizinhos.

$ijk$	$f_{ijk}$	$ijk$	$f_{ijk}$	$ijk$	$f_{ijk}$
123	1	246	1/2	367	-1/2
147	1/2	257	1/2	458	$\sqrt{3}/2$
156	-1/2	345	1/2	678	$\sqrt{3}/2$

Gell-Mann, em 1962, mostrou que a representação de ordem mais baixa de  $SU(3)$  é realizada por matrizes unitárias ( $3 \times 3$ ), com determinante 1, que obedecem as relações

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i f_{ijk} \lambda_k, \quad (\text{B.2})$$

e podem ser expressas por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Elas são conhecidas como as matrizes de Gell-Mann, que agem sobre o vetor de quarks  $q = (u, d, s)$ . Além de (B.2), elas obedecem as relações de anticomutação

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} + 2 d_{ijk} \lambda_k, \quad (\text{B.4})$$

em que  $d_{ijk}$  são as constantes de estrutura totalmente simétricas, dadas na tabela B.2.

Tabela B.2: Constantes de estrutura simétricas; as demais combinações de índices podem ser obtidas sabendo que  $d_{ijk}$  é simétrico pela troca de dois índices vizinhos.

$ijk$	$d_{ijk}$	$ijk$	$d_{ijk}$	$ijk$	$d_{ijk}$	$ijk$	$d_{ijk}$
118	$1/\sqrt{3}$	228	$1/\sqrt{3}$	338	$1/\sqrt{3}$		
146	$1/2$	247	$-1/2$	344	$1/2$	448	$-1/2\sqrt{3}$
157	$1/2$	256	$1/2$	355	$1/2$	558	$-1/2\sqrt{3}$
				366	$-1/2$	668	$-1/2\sqrt{3}$
				377	$-1/2$	778	$-1/2\sqrt{3}$
						888	$-1/\sqrt{3}$

Os traços das matrizes  $\lambda$ , indicados por  $\langle \dots \rangle$  e importantes em cálculos de interações, são dados por

$$\bullet \quad \langle \lambda_i \lambda_j \rangle = 2\delta_{ij} , \quad (\text{B.5})$$

$$\bullet \quad \langle [\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k \rangle = 4i f_{ijk} , \quad (\text{B.6})$$

$$\bullet \quad \langle \{ \lambda_i, \lambda_j \} \lambda_k \rangle = 4 d_{ijk} , \quad (\text{B.7})$$

$$\bullet \quad \langle \lambda_i \lambda_j \lambda_k \rangle = \frac{1}{2} \langle [\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k + \{ \lambda_i, \lambda_j \} \lambda_k \rangle = 2i f_{ijk} + 2 d_{ijk} , \quad (\text{B.8})$$

$$\bullet \quad \langle [\lambda_i, \lambda_j] [\lambda_k, \lambda_l] \rangle = -8 f_{ijs} f_{kls} , \quad (\text{B.9})$$

$$\bullet \quad \langle \{ \lambda_i, \lambda_j \} \{ \lambda_k, \lambda_l \} \rangle = \frac{16}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + 8 d_{ijs} d_{kls} . \quad (\text{B.10})$$

Analisando as matrizes de Gell-Mann, vemos que as primeiras três são as matrizes de Pauli com uma linha e uma coluna de zeros a mais, necessárias dada a dimensão do espaço. Isso demonstra que a simetria de isospin de  $SU(2)$  corresponde a um sub-grupo de  $SU(3)$ . A matriz  $\lambda_8$  comuta com  $\lambda_3$  e, portanto, elas podem ser diagonalizadas simultaneamente. Enquanto  $\lambda_3$  está associada ao isospin,  $\lambda_8$  está associada à estranheza e define o operador hipercarga :  $Y = \frac{2}{\sqrt{3}} \lambda_8$ .

O multipletto dos mésons pseudoescalares são vetores deste grupo, descritos pelos campos  $\phi_i \equiv \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_8$  que se transformam por

$$[F_i, \phi_j] = i f_{ijk} \phi_k . \quad (\text{B.11})$$

As relações entre os campos físicos, os campos  $\phi_i$  e os seus conteúdo de quarks são mostradas abaixo,

$$\begin{aligned}
(u\bar{d}) &\leftrightarrow \pi^+ \leftrightarrow (\phi_1 - i\phi_2)/\sqrt{2}, & (d\bar{u}) &\leftrightarrow \pi^- \leftrightarrow (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}, \\
(u\bar{s}) &\leftrightarrow K^+ \leftrightarrow (\phi_4 - i\phi_5)/\sqrt{2}, & (s\bar{u}) &\leftrightarrow K^- \leftrightarrow (\phi_4 + i\phi_5)/\sqrt{2}, \\
(d\bar{s}) &\leftrightarrow K^0 \leftrightarrow (\phi_6 - i\phi_7)/\sqrt{2}, & (s\bar{d}) &\leftrightarrow \bar{K}^0 \leftrightarrow (\phi_6 + i\phi_7)/\sqrt{2}, \\
(u\bar{u} + d\bar{d})/\sqrt{2} &\leftrightarrow \pi^0 \leftrightarrow \phi_3, & [c_1(u\bar{u} + d\bar{d}) + c_2(s\bar{s})] &\leftrightarrow \eta \leftrightarrow \phi_8. \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

O estado da partícula é obtido pela ação do hermitiano conjugado destes campos no vácuo. Desta forma, os campos dos mésons pseudoescalares, em notação cartesiana e usando a convenção de fase de Gasiorowicz[67], são dados por

$$\begin{aligned}
|\pi^+\rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) |0\rangle, & |\pi^0\rangle &= \phi_3 |0\rangle, \\
|\pi^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) |0\rangle, & |\eta\rangle &= \phi_8 |0\rangle, \\
|K^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_4 - i\phi_5) |0\rangle, & |K^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_4 + i\phi_5) |0\rangle, \\
|K^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_6 - i\phi_7) |0\rangle, & |\bar{K}^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_6 + i\phi_7) |0\rangle. \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

## B.2 Isospin do sistema $K\pi$

Os estados de interesse neste problema são:  $|K^-\pi^+\rangle$  e  $|\bar{K}^0\pi^0\rangle$ . O sistema  $|\bar{K}\pi\rangle$  pode ter duas projeções de isospin:  $I = 1/2$  e  $I = 3/2$ , resultante da combinação dos isospins do pión (1) e do káon (1/2), que correspondem a

$$\begin{aligned}
|\pi^+\rangle &= |1, 1\rangle; & |\pi^0\rangle &= |1, 0\rangle; & |\pi^-\rangle &= |1, -1\rangle; \\
|\bar{K}^0\rangle &= |1/2, 1/2\rangle; & |K^-\rangle &= |1/2, -1/2\rangle, & & \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

em que a projeção em  $I_z$  é definida segundo a convenção de Gasiorowicz[91].



O produto  $[1] \otimes [1/2]$  é obtido usando as relações de Clebsch-Gordan[27] e os estados mesônicos  $|\bar{K}\pi\rangle$  são dados em função dos canais de isospin como

$$|\pi^+ K^- \rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, 1/2\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, 1/2\rangle , \quad (\text{B.15})$$

$$|\pi^0 \bar{K}^0 \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, 1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, 1/2\rangle ; \quad (\text{B.16})$$

$$|\pi^+ \bar{K}^0 \rangle = |3/2, 3/2\rangle , \quad (\text{B.17})$$

$$|\pi^0 K^- \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} |3/2, -1/2\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |1/2, -1/2\rangle ; \quad (\text{B.18})$$

$$|\pi^- \bar{K}^0 \rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |3/2, -1/2\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |1/2, -1/2\rangle ; \quad (\text{B.19})$$

$$|\pi^- K^- \rangle = |3/2, -3/2\rangle . \quad (\text{B.20})$$

No caso do espalhamento  $K\pi \rightarrow K\pi$ , a amplitude  $T$  pode ser expressa em componentes  $T_{1/2}$  e  $T_{3/2}$ , com isospin bem definido. As várias situações de interesse para o sistema  $\bar{K}\pi$  são:

$$\langle \pi^0 \bar{K}^0 | T | \pi^0 \bar{K}^0 \rangle = \frac{2}{3} T_{3/2} + \frac{1}{3} T_{1/2} ; \quad (\text{B.21})$$

$$\langle \pi^+ K^- | T | \pi^+ K^- \rangle = \frac{1}{3} T_{3/2} + \frac{2}{3} T_{1/2} ; \quad (\text{B.22})$$

$$\langle \pi^+ K^- | T | \pi^0 \bar{K}^0 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} T_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2} ; \quad (\text{B.23})$$

$$\langle \pi^0 \bar{K}^0 | T | \pi^+ K^- \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} T_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3} T_{1/2} ; \quad (\text{B.24})$$

$$\langle \pi^+ \bar{K}^0 | T | \pi^+ \bar{K}^0 \rangle = T_{3/2}. \quad (\text{B.25})$$

Os cálculos de interesse no contexto do espalhamento  $K\pi$ , desenvolvidos no capítulo 2, são mais facilmente realizados para estados de carga. Por isso, extraímos as amplitudes com isospin bem definido a partir das eqs. (B.21) e (B.22), escrevendo

$$T_{3/2} = 2 \langle \pi^0 \bar{K}^0 | T | \pi^0 \bar{K}^0 \rangle - \langle \pi^+ K^- | T | \pi^+ K^- \rangle ; \quad (\text{B.26})$$

$$T_{1/2} = - \langle \pi^0 \bar{K}^0 | T | \pi^0 \bar{K}^0 \rangle + 2 \langle \pi^+ K^- | T | \pi^+ K^- \rangle . \quad (\text{B.27})$$

### B.3 Projeção da amplitude $K\pi$ em onda $S$

Adotamos o sistema de centro de massa do par  $K\pi$ , discutido no apêndice A.1. Ao projetar as amplitudes de espalhamento com isospin bem definidos na onda  $S$ , calculadas no capítulo 2, temos dois tipos de integrais a resolver. Uma delas é linear em  $\theta$  e a outra, originada dos propagadores, possui  $\theta$  no denominador. As integrais dos propagadores dos canais  $t$  e  $u$  tornam-se funções de  $s$  e são dadas por

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{t - m^2} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{2x\mathbf{p}^2 - m^2 - 2\mathbf{p}^2} = -\frac{1}{s\rho^2(s)} \log \left( \frac{s\rho^2(s)}{m^2} + 1 \right), \quad (\text{B.28})$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{u - m^2} = \frac{1}{s\rho^2(s)} \log \left( 1 - \frac{s\rho^2(s)}{s - 2(M_\pi^2 + M_K^2) + m^2} \right). \quad (\text{B.29})$$

Após a projeção na onda  $S$ , a amplitude  $\bar{T}$  fornece as componentes do *kernel*  $\mathcal{K}_{SI}$  do espalhamento  $K\pi$ , dadas por

- $I = 1/2$

$$\mathcal{K}_{S1/2} = \mathcal{K}_{S1/2}^C + K_{S1/2}^s + K_{S1/2}^t + K_{S1/2}^u, \quad (\text{B.30})$$

$$\mathcal{K}_{1/2}^C = \frac{1}{F^2} [(1 - 3\rho^2/8)s - (M_\pi^2 + M_K^2)]; \quad (\text{B.31})$$

$$K_{S1/2}^s = -\frac{3}{2} \frac{1}{F^4} \frac{[c_d s - (c_d - c_m)(M_\pi^2 + M_K^2)]^2}{s - m_{K_0^*}^2}; \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{aligned} K_{S1/2}^t &= -\frac{4}{F^4} \left\{ -\frac{1}{s\rho^2(s)} \log \left( \frac{s\rho^2(s)}{m_{f_0}^2} + 1 \right) [\tilde{c}_d m_{f_0}^2 - 2M_K^2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)] \right. \\ &\quad \times [\tilde{c}_d m_{f_0}^2 - 2M_\pi^2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)] + [\tilde{c}_d^2 m_{f_0}^2 - 2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)(M_K^2 + M_\pi^2)] \left. \right\} \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{1}{F^4} \left\{ -\frac{1}{s\rho^2(s)} \log \left( \frac{s\rho^2(s)}{m_{f_8}^2} + 1 \right) [c_d m_{f_8}^2 - 2M_K^2(c_d - c_m)] \right. \\ &\quad \times [c_d m_{f_8}^2 - 2M_\pi^2(c_d - c_m)] + [c_d^2 m_{f_8}^2 - 2(c_d - c_m)(M_K^2 + M_\pi^2)] \left. \right\}; \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{aligned} K_{S1/2}^u &= \frac{1}{2} \frac{1}{F^4} \left\{ \frac{1}{s\rho^2(s)} \log \left( 1 - \frac{s\rho^2(s)}{s - 2(M_\pi^2 + M_K^2) + m_{K_0^*}^2} \right) [c_d m_{K_0^*}^2 - (c_d - c_m)(M_\pi^2 + M_K^2)]^2 \right. \\ &\quad \left. + [c_d^2 m_{K_0^*}^2 - 2(c_d - c_m)(M_\pi^2 + M_K^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

- $I = 3/2$

$$\mathcal{K}_{3/2} = K_{3/2}^C + K_{S3/2}^u + K_{S3/2}^t, \quad (\text{B.35})$$

$$K_{3/2}^C = -\frac{1}{2F^2} [s - (M_\pi^2 + M_K^2)]; \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} K_{S3/2}^t &= K_{S1/2}^t = -\frac{4}{F^4} \left\{ -\frac{1}{s\rho^2(s)} \log \left( \frac{s\rho^2(s)}{m_{f_0}^2} + 1 \right) [\tilde{c}_d m_{f_0}^2 - 2M_K^2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)] \right. \\ &\quad \times [\tilde{c}_d m_{f_0}^2 - 2M_\pi^2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)] + [\tilde{c}_d^2 m_{f_0}^2 - 2(\tilde{c}_d - \tilde{c}_m)(M_K^2 + M_\pi^2)] \left. \right\} \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{1}{F^4} \left\{ -\frac{1}{s\rho^2(s)} \log \left( \frac{s\rho^2(s)}{m_{f_8}^2} + 1 \right) [c_d m_{f_8}^2 - 2M_K^2(c_d - c_m)] \right. \\ &\quad \times [c_d m_{f_8}^2 - 2M_\pi^2(c_d - c_m)] + [c_d^2 m_{f_8}^2 - 2(c_d - c_m)(M_K^2 + M_\pi^2)] \left. \right\}; \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} K_{S3/2}^u &= -\frac{1}{F^4} \left\{ \frac{1}{s\rho^2(s)} \log \left( 1 - \frac{s\rho^2(s)}{s - 2(M_\pi^2 + M_K^2) + m_{K_0^*}^2} \right) [c_d m_{K_0^*}^2 - (c_d - c_m)(M_\pi^2 + M_K^2)]^2 \right. \\ &\quad \left. + [c_d^2 m_{K_0^*}^2 - 2(c_d - c_m)(M_\pi^2 + M_K^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

## B.4 Ajuste para três ressonâncias

O ajuste da fase da amplitude  $K\pi$  na onda S, baseado em um *kernel* contendo apenas uma ressonância, resulta no gráfico da fig. 2.10. Embora a amplitude  $K\pi$  calculada (2.39) descreva bem os dados experimentais da colaboração LASS[6] no setor de baixas energias, ela descola dos mesmos a partir de  $\sqrt{s} \approx 1.4$  GeV. É nessa mesma região que a amplitude deixa de ser elástica com a abertura de canal  $K\eta'$  mas, também, podem haver contribuições de outras ressonância escalares mais pesadas do que o  $K_0^*(1430)$ . Focando na segunda possibilidade, incluímos outras duas ressonâncias escalares na amplitude de espalhamento  $K\pi$ .

Ao considerar três ressonâncias explícitas no *kernel* (2.29), ao invés de uma, temos que ajustar 10 parâmetros livres. Para facilitar o ajuste, estabelecemos condições de contorno fenomenológicas e fixamos alguns parâmetros, obrigando a função a passar por pontos cruciais. Uma vez que consideramos três ressonâncias em uma parametrização elástica e

unitária, podemos considerar que a fase, se descrita de forma contínua, dará uma volta e meia no diagrama de Argand[92] pois, a cada ressonância correspondem  $180^\circ$ . A figura B.1 mostra, à esquerda, o diagrama para o caso elástico e, à direita, os pontos fixos escolhidos para ajustar os dados experimentais. Em azul, são os pontos  $(I_i, \pi/2)$ , que correspondem às energias para o caso em que  $\delta = \pi/2$  e, em rosa, os pontos  $(z_i, \delta = \pi)$ .

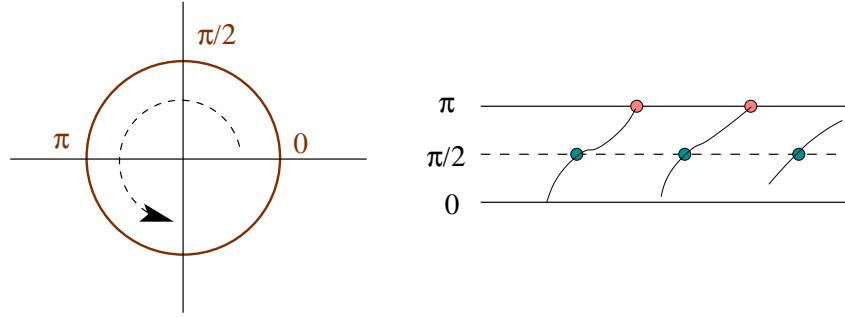


Figura B.1: Diagrama de Argand (esquerda) e os pontos escolhidos que fixam a amplitude em determinados valores de  $s$ : azul  $(I_i, \pi/2)$ , rosa  $(z_i, \pi)$ .

O melhor ajuste obtido, apresentado na fig. B.2, resultou no seguinte conjunto de parâmetros, em GeV:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 1.23; \quad c_d^1 = 0.312; \quad c_m^1 = 0.509; \\
 m_2 &= 1.65; \quad c_d^2 = 0.150; \quad c_m^2 = -0.225; \\
 m_3 &= 1.90; \quad c_d^3 = 0.150; \quad c_m^3 = 0.484; \\
 C_{S1/2} &= 0.00595;
 \end{aligned} \tag{B.39}$$

O gráfico da fig.B.2 mostra que, com a parametrização unitária, são necessárias três ressonâncias para descrever os dados experimentais. Embora os dados demandem a existência de três ressonâncias neste canal, no PDG [16] podemos encontrar apenas uma totalmente estabelecida, o  $K_0^*(1430)$ , que corresponde a  $m_1$ . Há ainda a ressonância  $K_0^*(1950)$  com  $I(J^P) = 1/2(0^+)$ , omitida da tabela resumo[16], e que poderia corresponder a  $m_3$ . Finalmente, há uma ressonância no PDG [16] com números quânticos de paridade desconhecidos, mas com  $I = 1/2$ , o  $K(1630)$ , que poderia ser o correspondente a  $m_2$ .

O ajuste da fase, fig. B.2, também foi comparado com o empregado por Frederico *et al.*[45], baseado em um modelo de interação a dois corpos, relativístico, com 3 ressonâncias

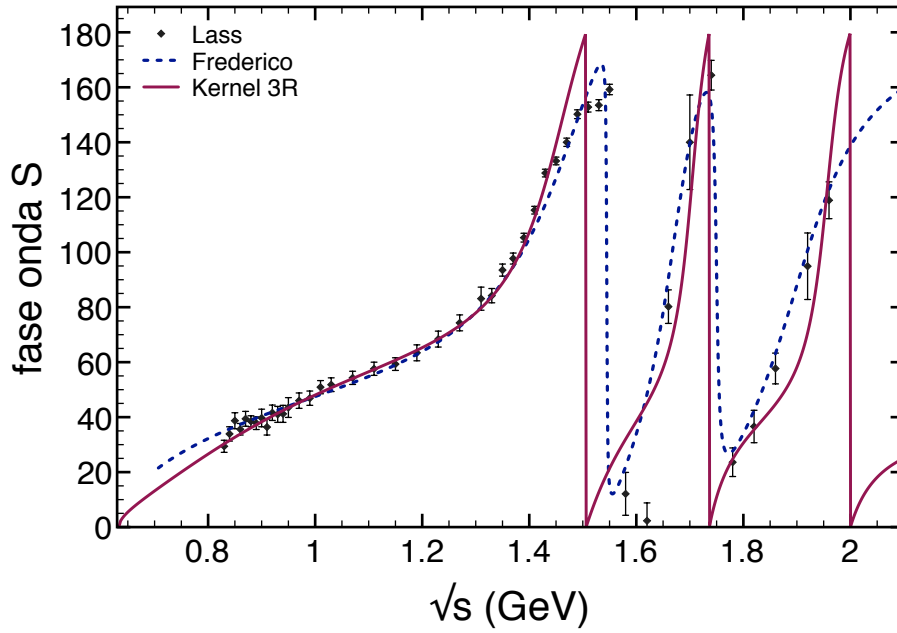


Figura B.2: Ajuste da fase da amplitude  $K\pi$  com 3 ressonâncias no *kernel* (2.29).

e inelasticidade, usando teoria de campos no cone de luz. A comparação mostra os efeitos da inelasticidade.

## B.5 Extensão Analítica

No estudo dos polos da amplitude de espalhamento  $K\pi$ , precisamos estender analiticamente a variável  $s$  para todo o plano complexo. Para isso, usamos a relação de dispersão definida por [93]:

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{\text{limiar}}^{\infty} \frac{ds' \text{Im}F(s')}{(s' - z - i\epsilon)}; \quad (\text{B.40})$$

sendo  $z$  qualquer ponto no plano complexo dentro do contorno definido pela curva fechada  $C$ , mostrada na figura B.3. No caso da amplitude de espalhamento, a função a ser estendida analiticamente é  $L(s)$ , a função de *loop*. Acima do limiar, ela é dada pela eq(C.28) que, manipulada, se torna:

$$L(s) = 2 - \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{s} \ln \left( \frac{M_K}{M_\pi} \right) - \frac{\sqrt{\lambda}}{s} \ln \left[ \frac{s - M_K^2 - M_\pi^2 + \sqrt{\lambda}}{2M_K M_\pi} \right] + i\pi \frac{\sqrt{\lambda}}{s}, \quad (\text{B.41})$$

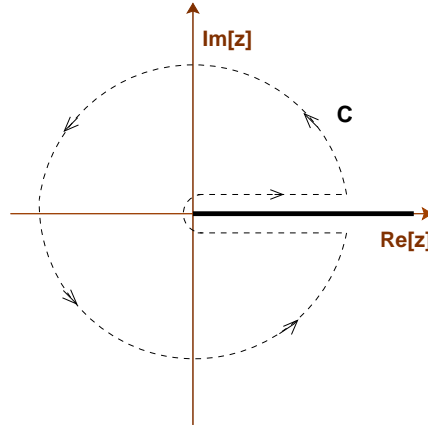


Figura B.3: Contorno no plano complexo de  $z$  usado na relação de dispersão (B.40). A linha grossa preta representa o corte no eixo real acima do limiar.

para  $\lambda = \lambda(s, M_\pi^2, M_K^2)$ , (C.41).

Como evidencia (B.41),  $L(s)$  possui uma componente imaginária a partir do limiar e portanto, não será analítica ao longo do corte  $s \geq (M_\pi + M_K)^2$ . Para estender essa função a todo o plano complexo, aplicamos (B.3) em (B.41):

$$L(z) = \int_{\mu^2}^{\infty} ds' \frac{\sqrt{s'^2 - 2s'(M_\pi^2 + M_K^2) + (M_K^2 - M_\pi^2)^2}}{s'(s' - z - i\epsilon)}; \quad (\text{B.42})$$

$$\mu = M_\pi + M_K.$$

A integral B.43 tem solução numérica e equivale à solução analítica:

$$L(z) = 2 - \frac{M_\pi^2 - M_K^2}{z} \ln\left(\frac{M_\pi}{M_K}\right) + \frac{\sqrt{\lambda(z)}}{z} \ln\left[\frac{M_K^2 + M_\pi^2 - z + \sqrt{\lambda(z)}}{2M_K M_\pi}\right]. \quad (\text{B.43})$$

O resultado mostra que, sobre o eixo  $s$  real, a integral da parte imaginária é igual à parte real da função, o que está de acordo com os resultados de relações de dispersão [93].

É preciso tomar cuidado com as funções  $\sqrt{\lambda(z)}$  e  $\ln(z)$ , porque elas dividem o argumento complexo em diferentes ramificações que, na prática, precisam ser contínuas. Para garantir que estamos no domínio correto das diferentes ramificações, analisamos a função  $\sqrt{\lambda(z, M_K^2, M_\pi^2)}$  para  $z = a + ib$ :

$$\begin{aligned} \lambda &= (a^2 + b^2) - 2a(M_\pi^2 + M_K^2) + (M_\pi^2 - M_K^2)^2 + i2b[a - (M_\pi^2 + M_K^2)]; \\ &= |\lambda|e^{i\theta_\lambda} \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

em que  $\theta_\lambda$  é definido de forma a respeitar o círculo unitário começando em 0 e terminando em  $2\pi$ , o que é imposto garantindo:

$$\mathcal{R}\lambda > 0, \mathcal{I} \geq 0 \rightarrow \theta_\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{\mathcal{I}\lambda}{\mathcal{R}\lambda} \right);$$

$$\mathcal{R}\lambda \leq 0, \mathcal{I} > 0 \rightarrow \theta_\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{\mathcal{I}\lambda}{\mathcal{R}\lambda} \right) + \pi;$$

$$\mathcal{R}\lambda < 0, \mathcal{I} \leq 0 \rightarrow \theta_\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{\mathcal{I}\lambda}{\mathcal{R}\lambda} \right) + \pi;$$

$$\mathcal{R}\lambda \geq 0, \mathcal{I} < 0 \rightarrow \theta_\lambda = \tan^{-1} \left( \frac{\mathcal{I}\lambda}{\mathcal{R}\lambda} \right) + 2\pi.$$

Em função de  $\theta_s$ , o ângulo da variável  $z = |z|e^{i\theta_s}$ , o comportamento de  $\theta_\lambda$  pode ser visto na fig. B.4 e é diferente acima e abaixo do corte, ou seja para  $|z| < (M_\pi + M_K)^2$  e  $|z| > (M_\pi + M_K)^2$ .

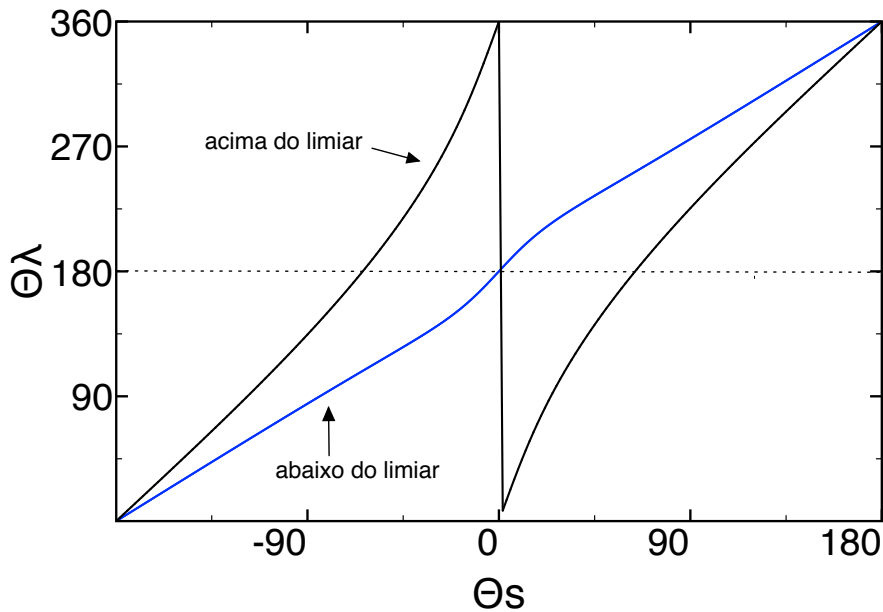


Figura B.4: Gráfico de  $\theta_\lambda$  em função de  $\theta_s$ , para  $|z|$  acima e abaixo do corte.

A raiz da função  $\lambda(z)$  tem duas ramificações, que identificamos como:

$$[\sqrt{\lambda}]_1 = \sqrt{|\lambda|}e^{i\theta_\lambda/2}; \quad (\text{B.45})$$

$$[\sqrt{\lambda}]_2 = -\sqrt{|\lambda|}e^{i\theta_\lambda/2}, \quad (\text{B.46})$$

representadas em função de  $\theta_s$  nas figuras em B.5. s Elas mostram que as funções são

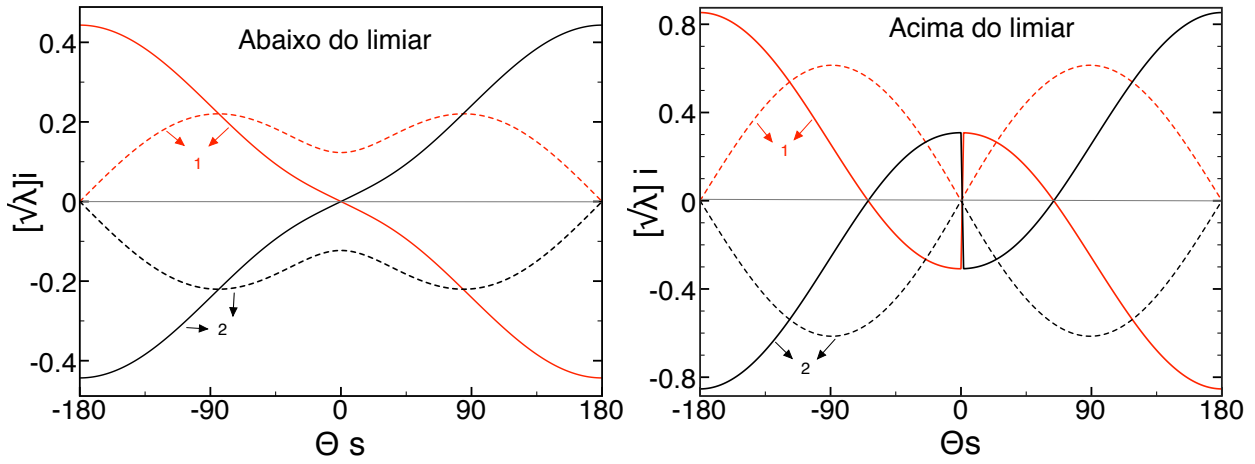


Figura B.5: Gráfico de  $\sqrt{\lambda}$  acima e abaixo do corte nas duas superfícies de Riemann.

contínuas ao longo do corte e passam de uma ramificação a outra em  $\theta_s = 0.0$ .

A função  $L(z)$  (B.43) também possui um valor em cada ramo:

$$\begin{aligned}
 [L(z)]_n &= 1 + \frac{M_K^2 + M_\pi^2}{M_\pi^2 - M_K^2} \ln(M_\pi/M_K) - \frac{M_\pi^2 - M_K^2}{z} \ln(M_\pi/M_K) \\
 &\quad + \frac{[\sqrt{\lambda(z)}]_n}{z} \ln \left[ \frac{M_K^2 + M_\pi^2 - z + [\sqrt{\lambda(z)}]_n}{2M_K M_\pi} \right]
 \end{aligned} \tag{B.47}$$

Para encontrar os polos da amplitude, exploramos a segunda folha de Riemann e usamos  $[\sqrt{\lambda}]_2$  e  $[L(z)]_2$ .



# Apêndice C

## Integrais de *loop*

Neste apêndice são agrupadas todas as integrais de *loop* (bolhas, triângulos e caixas) utilizadas neste trabalho em seus diferentes estágios.

### C.1 Bolha

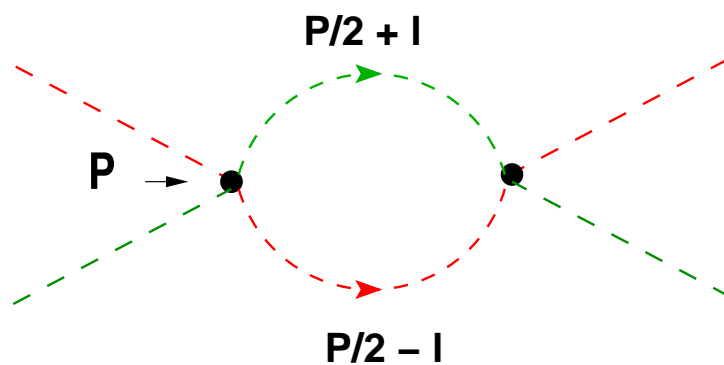


Figura C.1: Integral de *loop* da interação  $K\pi$ .

A integral envolvendo dois propagadores é especialmente importante, porque ela contribui diretamente a algumas amplitudes e, também, por representar um estágio intermediário no cálculo de integrais mais complexas. Aqui ela é apresentada de forma genérica, e ao final, reduzida ao caso que nos interessa, a interação  $K\pi$ . Na figura, a linha verde representa uma partícula de massa  $m_a$  e a vermelha, uma de massa  $m_b$ . O quadrimomento que flui pelo diagrama é  $P$ , e equivale à soma dos quadrimomentos dos

mésos  $a$  e  $b$ . Desta forma, a integral a ser resolvida é:

$$I = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P/2 + l)^2 - m_a^2} \frac{1}{(P/2 - l)^2 - m_b^2}. \quad (\text{C.1})$$

Para resolve-la introduzimos um parâmetro de Feynman [27]

$$\frac{1}{AB} = \Gamma(2) \int_0^1 dx \frac{1}{[(1-x)A + xB]^2} = \Gamma(2) \int_0^1 dx \frac{1}{\mathcal{D}^2}, \quad (\text{C.2})$$

sendo

$$\mathcal{D} = l^2 + 2l \cdot \eta - \Sigma^2; \quad (\text{C.3})$$

em que

$$\begin{aligned} \eta &= (1 - 2x)P/2, \\ \Sigma^2 &= (1 - x)m_a^2 + xm_b^2 - P^2/4. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Para completar quadrados e eliminar a dependência em  $l$ , efetuamos as mudanças de variáveis:

$$l' = l + \eta, \quad (\text{C.5})$$

$$\Delta = \eta^2 + \Sigma^2, \quad (\text{C.6})$$

o que permite escrever

$$\mathcal{D} = l'^2 - \Delta, \quad (\text{C.7})$$

e, portanto,

$$I = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2}. \quad (\text{C.8})$$

em que denominamos  $l' \rightarrow l$ .

O cálculo dessa integral é feito passando do espaço de Minkowski para o espaço Euclidiano, usando

$$l^0 \equiv il_E^0 \quad l^i \equiv l_E^i,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} l^2 &= l_0^2 - \mathbf{l}^2 = -l_{0E}^2 - \mathbf{l}_E^2 = (-1)(l_{0E}^2 + \mathbf{l}_E^2) = -l_E^2, \\ d^4 l &\equiv id^4 l_E. \end{aligned}$$

A integral no espaço Euclidiano é dada por

$$I = \frac{i}{(-1)^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2}, \quad (\text{C.9})$$

e diverge logaritmicamente. Para eliminar essa divergência efetuamos uma regularização dimensional, o que significa calcular a integral em  $D$  dimensões e, depois, tomar o limite de  $D \rightarrow 4$ .

$$I_D = i \int_0^1 dx \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = i \int_0^1 dx \mathcal{I}, \quad (\text{C.10})$$

com

$$\mathcal{I} = \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2}. \quad (\text{C.11})$$

sendo o elemento de volume em  $D$  dimensões, definido por

$$\frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} = \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} l_E^{(D-1)} dl_E.$$

O integrando de (C.11) depende apenas da variável radial e a integração angular pode ser efetuada usando uma identidade entre a integral do ângulo sólido e a área da hipersfera de raio unitário[27],

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}.$$

A parte radial de (C.11),  $R$ , é calculada escrevendo

$$R = \int dl \frac{l^{D-1}}{(l^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int d(l^2) \frac{(l^2)^{(D/2-1)}}{(l^2 + \Delta)^2},$$

e, usando a variável

$$\xi = \Delta(l^2 + \Delta)^{-1}, \quad d\xi = -\Delta(l^2 + \Delta)^{-2} dl^2,$$

obtemos ,

$$R = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\Delta} \right)^{(2-D/2)} \int_0^1 d\xi \xi^{(1-D/2)} (1 - \xi)^{(D/2-1)}.$$

A integral em  $\xi$  pode ser encontrada na referência [94], e resulta em

$$R = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\Delta} \right)^{(2-D/2)} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)},$$

e podemos calcular a integral em  $D$  dimensões:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} R, \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \left( \frac{1}{\Delta} \right)^{(2-D/2)}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Para fazer o limite  $D \rightarrow 4$ , escrevemos  $D = 4 - \epsilon$  e fazemos  $\epsilon \rightarrow 0$ . As componentes de (C.12) podem ser expandidas em função de  $\epsilon$

$$\begin{aligned}\Gamma(\epsilon/2) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma, \\ \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{\epsilon/2} &= 1 - \frac{\epsilon}{2} \log(\Delta/\mu^2), \\ (4\pi)^{\epsilon/2} &= 1 + \frac{\epsilon}{2} \log(4\pi),\end{aligned}$$

e encontramos

$$\mathcal{I} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi) - \log(\Delta/\mu^2) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]. \quad (\text{C.13})$$

Nesse resultado, a divergência de  $\mathcal{I}$  foi isolada no termo proporcional a  $1/\epsilon$ , enquanto que a dependência com energia está contida na função  $\log(\Delta/\mu^2)$ , onde  $\mu^2$  é uma escala arbitrária, introduzida para manter o argumento do logaritmo adimensional. Assim, no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , a integral  $I$  dada em (C.9) contém um termo divergente, somado a termos regulares. A componente regular de  $I$ , que incorpora a dependência da energia, é definida como

$$I^{reg} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \int dx \ln \left( \frac{\Delta}{\mu^2} \right). \quad (\text{C.14})$$

Nos nossos cálculos, é conveniente usar uma notação ligeiramente diferente e escrevemos  $\Delta = D_{ab}$ . Usando as eqs. (C.6) e (C.4), obtemos

$$D_{ab} = (1-x)m_a^2 + xm_b^2 - x(1-x)P^2 = P^2(x-x_1)(x-x_2) \quad (\text{C.15})$$

e, por conveniência, o resultado (C.14) é reescrito como

$$I^{reg} = \frac{i}{(4\pi)^2} L(P^2); \quad (\text{C.16})$$

$$L(P^2) = -\int_0^1 dx \ln \left( \frac{D_{ab}}{\mu^2} \right). \quad (\text{C.17})$$

Ao efetuar a integral no parâmetro de Feynman, precisamos tomar cuidado para saber em qual regime da função logarítmica estamos. O numerador  $D_{ab}$ , do logaritmo da integral, é uma função que depende de  $P^2$ , momento externo ao *loop*, e de  $x$ , variável de integração. Estudar as raízes de  $D_{ab}$  é fundamental, pois a função log se torna complexa

quando seu argumento é negativo. As raízes de  $D_{ab}$  são dadas por

$$x_1 = \frac{1}{2P^2} \left[ (P^2 + m_a^2 + m_b^2) - \sqrt{\lambda(P^2, m_a^2, m_b^2)} \right], \quad (\text{C.18})$$

$$x_2 = \frac{1}{2P^2} \left[ (P^2 + m_a^2 + m_b^2) + \sqrt{\lambda(P^2, m_a^2, m_b^2)} \right], \quad (\text{C.19})$$

$$\lambda(P^2, m_a^2, m_b^2) = (P^2 + m_a^2 - m_b^2)^2 - 4P^2 m_a^2; \quad (\text{C.20})$$

em que  $\lambda$  é uma função de Källén e depende de  $P^2$ .

As raízes (C.19) e (C.18) podem ser complexas se  $\lambda$  for negativa, o que acontece para valores de  $P^2 \geq (m_a - m_b)^2$  e  $P^2 \leq (m_a + m_b)^2$ , e o resultado da integral de (C.16), necessariamente, terá uma componente imaginária na região física da interação.

## Bolha $K\pi$

Voltando para o caso específico que nos interessa, o da interação  $K\pi$ , identificamos  $m_a = M_\pi$ ,  $m_b = M_K$ , e a solução da integral de *loop* fica dividida em diferentes intervalos de energia. Listamos, a seguir, as formas da função  $L(s)$  adequadas a dada um deles, obtidas a partir da eq.(C.16).

**Caso**  $P^2 < (M_K - M_\pi)^2$

$$\begin{aligned} L(P^2) = & 2 - \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{P^2} \ln \left( \frac{M_K}{M_\pi} \right) - \ln \left( \frac{M_K M_\pi}{\mu^2} \right) \\ & + \frac{\sqrt{\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}}{2P^2} \ln \left[ \frac{M_K^2 + M_\pi^2 - P^2 + \sqrt{\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}}{M_K^2 + M_\pi^2 - P^2 - \sqrt{\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

**Caso**  $(M_K - M_\pi)^2 < P^2 < (M_K^2 + M_\pi^2)$

Usando as definições

$$\begin{aligned} \delta &= (P^2 + M_K^2 - M_\pi^2)/2P^2, \\ \eta &= \frac{\sqrt{-\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}}{2P^2}, \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
L(P^2) = & 2 - \ln\left(\frac{P^2}{\mu^2}\right) - (1 - \delta) \ln[(1 - \delta)^2 + \eta^2] \\
& - \delta \ln[\delta^2 + \eta^2] - 2\eta \left[ \tan^{-1}\left(\frac{1 - \delta}{\eta}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\delta}{\eta}\right) \right]
\end{aligned} \tag{C.22}$$

Para a soma de  $\tan^{-1}$  vale a relação[95]:

$$[xy < 1] \rightarrow \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1} \frac{x + y}{1 - xy}; \tag{C.23}$$

e (C.22) pode ser expressa por

$$\begin{aligned}
L(P^2) = & 2 - \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{P^2} \ln\left(\frac{M_K}{M_\pi}\right) - \ln\left(\frac{M_K M_\pi}{\mu^2}\right) \\
& - \frac{\sqrt{-\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}}{P^2} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}}{M_K^2 + M_\pi^2 - P^2}\right).
\end{aligned} \tag{C.24}$$

**Caso**  $(M_K^2 - M_\pi^2) < P^2 < (M_K + M_\pi)^2$

Este caso é similar ao anterior, com apenas uma mudança de sinal. Portanto, usamos a condição[95]

$$[x > 0, xy > 1] \rightarrow \tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \pi + \tan^{-1} \frac{x + y}{1 - xy} \tag{C.25}$$

e temos

$$\begin{aligned}
L(P^2) = & 2 - \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{P^2} \ln\left(\frac{M_K}{M_\pi}\right) - \ln\left(\frac{M_K M_\pi}{\mu^2}\right) \\
& - \frac{\sqrt{-\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}}{P^2} \left[ \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{-\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}}{M_K^2 + M_\pi^2 - P^2}\right) + \pi \right].
\end{aligned} \tag{C.26}$$

**Caso**  $P^2 > (M_K + M_\pi)^2$

Nesse intervalo de energia,  $D_{K\pi}$  pode ser negativo dentro do intervalo de integração. Quando isso acontece, usamos

$$\ln(-|D_{K\pi}|) = \ln(e^{-i\pi}|D_{K\pi}|) = \ln|D_{K\pi}| - i\pi, \tag{C.27}$$

e obtemos um resultado complexo, dado por

$$\begin{aligned}
L(P^2) = & 2 - \frac{M_K^2 - M_\pi^2}{P^2} \ln \left( \frac{M_K}{M_\pi} \right) - \ln \left( \frac{M_K M_\pi}{\mu^2} \right) \\
& - \frac{\sqrt{\lambda(s, M_K^2, M_\pi^2)}}{2P^2} \ln \left[ \frac{M_K^2 + M_\pi^2 - P^2 + \sqrt{\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}}{M_K^2 + M_\pi^2 - P^2 - \sqrt{\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}} \right] \\
& + i\pi \frac{\sqrt{\lambda(P^2, M_K^2, M_\pi^2)}}{P^2}. \tag{C.28}
\end{aligned}$$

### Propagador do sistema $K\pi$

No estudo da amplitude de espalhamento  $K\pi$  por meio da equação de Bethe-Salpeter, apresentada no capítulo 3, aparece naturalmente a função  $\Omega(s)$ , associada à propagação de um par  $K\pi$  intermediário. E essa função está relacionada à integral (C.1) por

$$\Omega(s) \equiv iI_{K\pi}(s) = -\frac{1}{(16\pi^2)} [L(s) + \Lambda_\infty]; \tag{C.29}$$

em que  $L(s)$  é a função de *loop* calculada acima e  $\Lambda_\infty$  contem a divergência ultravioleta mostrada na eq.(C.13). Uma possível versão regularizada de (C.29) pode ser escrita como:

$$\bar{\Omega}(s) = \Omega(s) - \Omega(0) = -\frac{1}{(16\pi^2)} [L(s) - L(0)] = -\frac{\bar{L}(s)}{(16\pi^2)} \tag{C.30}$$

O valor da função  $L(0)$  é obtido expandindo a função  $\lambda$  em (C.21) para  $P^2 = \epsilon$ , sendo  $\epsilon$  pequeno.

$$\lambda \approx (m_a^2 - m_b^2)^2 \left[ 1 - \frac{2\epsilon(m_a^2 + m_b^2)}{(m_a^2 - m_b^2)^2} \right] \tag{C.31}$$

e

$$\sqrt{\lambda} = (m_a^2 - m_b^2) \left[ 1 - \frac{\epsilon(m_a^2 + m_b^2)}{(m_a^2 - m_b^2)^2} \right]. \tag{C.32}$$

A função  $L(P^2)$  passa, então, a ser:

$$L \rightarrow 2 - \ln \left( \frac{m_a m_b}{\mu^2} \right) + \frac{m_a^2 - m_b^2}{\epsilon} \left\{ -\ln \left( \frac{m_a}{m_b} \right) + \left[ \frac{1}{2} - \frac{\epsilon(m_a^2 + m_b^2)}{2(m_a^2 - m_b^2)^2} \right] \ln \left[ \left( \frac{m_a^2}{m_b^2} \right) \frac{1 - \frac{\epsilon}{m_a^2 - m_b^2}}{1 + \frac{\epsilon}{m_a^2 - m_b^2}} \right] \right\}. \tag{C.33}$$

No limite  $\epsilon \rightarrow 0$  usamos [95]:

$$\ln \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \cong 2x + \frac{2}{3}x^3 + \dots \quad -1 < x < 1 \tag{C.34}$$

e obtemos

$$L(0) = 1 - \ln \left( \frac{m_a m_b}{\mu^2} \right) - \frac{m_a^2 + m_b^2}{m_a^2 - m_b^2} \ln \left( \frac{m_a}{m_b} \right). \quad (\text{C.35})$$

Agora podemos voltar à bolha da interação  $K\pi$ , (C.30), e calcular  $\bar{L}(s) = L(s) - L(0)$ . Os resultados, também divididos em diferentes intervalos de  $s$ , são resumidos abaixo.

## Resultados

- $s < (M_K - M_\pi)^2$  : (C.36)

$$\bar{L}(s) = L_0 + \frac{\sqrt{\lambda(s, M_K^2, M_\pi^2)}}{s} \ln \left[ \frac{M_K^2 + M_\pi^2 - s + \sqrt{\lambda(s, M_K^2, M_\pi^2)}}{2M_\pi M_K} \right],$$

- $(M_K - M_\pi)^2 < s < (M_K^2 + M_\pi^2)$  : (C.37)

$$\bar{L}(s) = L_0 - \frac{\sqrt{-\lambda(s, M_K^2, M_\pi^2)}}{s} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{-\lambda(s, M_K^2, M_\pi^2)}}{M_K^2 + M_\pi^2 - s} \right),$$

- $(M_K^2 - M_\pi^2) < s < (M_K + M_\pi)^2$  : (C.38)

$$\bar{L}(s) = L_0 - \frac{\sqrt{-\lambda(s, M_K^2, M_\pi^2)}}{s} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{-\lambda(s, M_K^2, M_\pi^2)}}{M_K^2 + M_\pi^2 - s} \right) + \pi \right],$$

- $s > (M_K + M_\pi)^2$  : (C.39)

$$\begin{aligned} \bar{L}(s) = L_0 - \frac{\sqrt{\lambda(s, M_K^2, M_\pi^2)}}{s} \ln \left[ \frac{M_K^2 + M_\pi^2 - s + \sqrt{\lambda(s, M_K^2, M_\pi^2)}}{2M_K M_\pi} \right] \\ + i\pi \frac{\sqrt{\lambda(s, M_K^2, M_\pi^2)}}{s}, \end{aligned}$$

com

$$L_0 = 1 + \frac{M_K^2 + M_\pi^2}{M_\pi^2 - M_K^2} \ln \left( \frac{M_\pi}{M_K} \right) - \frac{M_\pi^2 - M_K^2}{s} \ln \left( \frac{M_\pi}{M_K} \right); \quad (\text{C.40})$$

$$\lambda(s, M_\pi^2, M_K^2) = s^2 - 2s(M_\pi^2 + M_K^2) + (M_K^2 - M_\pi^2)^2. \quad (\text{C.41})$$

O comportamento da função  $\bar{L}(s)$ , fundamental na descrição da amplitude  $K\pi$ , é mostrado nos gráficos das figs. C.2 e C.3.



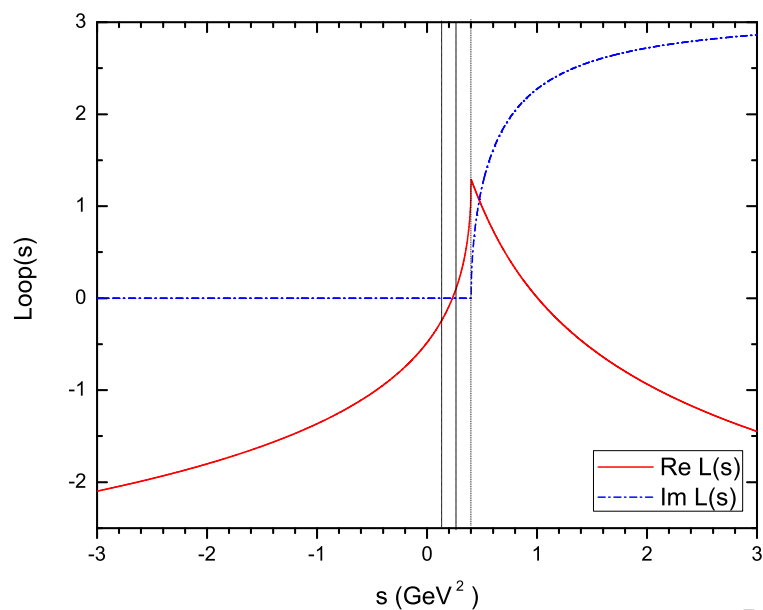


Figura C.2: Componentes real e imaginária da função  $\bar{L}(s)$

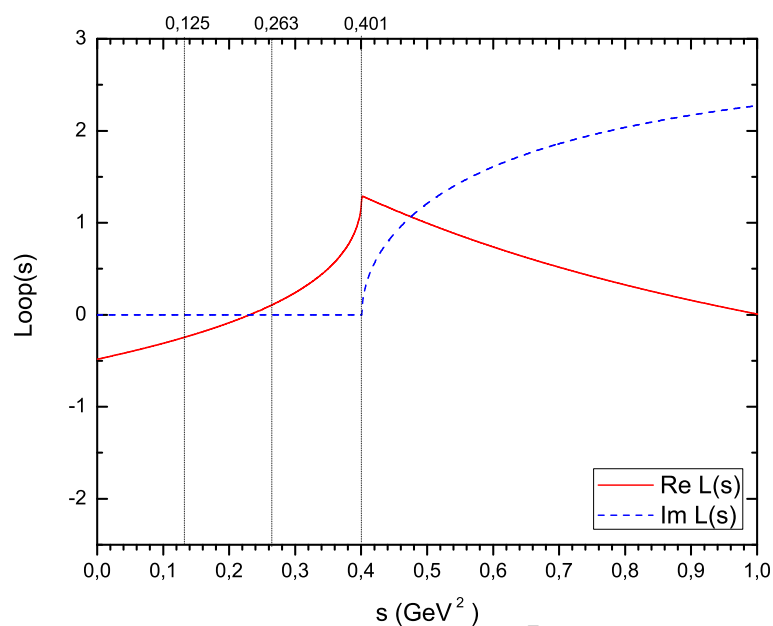


Figura C.3: Componentes real e imaginária da função  $\bar{L}(s)$ , enfatizando a região próxima ao limiar.

## Bolha $\rho a$

No decorrer do cálculo da amplitude  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  na onda P, as integrais do tipo triângulo se reduzem a bolhas, e algumas delas podem ser obtidas diretamente de (C.30). No entanto, na bolha  $\rho a$ , o momento do centro de massa resulta em  $P^2 = 0$  e, portanto, é preciso fazer a integração analítica desde o princípio:

$$\begin{aligned} \Pi_{\rho a} &= - \int da \ln \left( \frac{(1-a)m_a^2 + a\Theta}{\mu^2} \right); \\ &= \frac{1}{m_a^2 - \Theta} \left[ \Theta \ln \left( \frac{\Theta}{\mu^2} \right) - \Theta - m_a^2 \ln \left( \frac{m_a^2}{\mu^2} \right) + m_a^2 \right]; \\ &= 1 + \frac{1}{m_a^2 - \Theta} \left[ \Theta \ln \left( \frac{\Theta}{\mu^2} \right) - m_a^2 \ln \left( \frac{m_a^2}{\mu^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.42})$$

para

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_R - i\Theta_i, \\ \theta_\Theta &= \tan^{-1} \left( \frac{\Theta_i}{\Theta_R} \right); \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

e

$$\Pi_{\rho a} = 1 + \frac{1}{m_a^2 - \Theta} \left[ \Theta \ln \left( \frac{|\Theta|}{\mu^2} \right) - m_a^2 \ln \left( \frac{m_a^2}{\mu^2} \right) + i\Theta \theta_\Theta \right]. \quad (\text{C.44})$$

## C.2 Bolha Tensorial

No cálculo da amplitude  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  feita no capítulo 5, a inclusão da largura no méson  $\rho$  requer o uso de uma integral tensorial do tipo bolha:

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l_\mu l_\nu}{D_+ D_-}; \quad (\text{C.45})$$

em que

$$D_+ = (l + q/2)^2 - M_\pi^2; \quad (\text{C.46})$$

$$D_- = (l - q/2)^2 - M_\pi^2. \quad (\text{C.47})$$

Explicitando a estrutura tensorial da integral (C.45), escrevemos

$$I^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D_+ D_-} = \frac{i}{(4\pi)^2} \{ q^\mu q^\nu \Pi_q + g^{\mu\nu} \bar{\Pi}^{00} \} \quad (\text{C.48})$$

sendo que as funções  $\Pi_q$  e  $\bar{\Pi}^{00}$  podem ser expressas em termos de integrais sem índices de Lorentz.

Para obter essas funções, inicialmente multiplicamos  $q_\mu$  pelo lado esquerdo de (C.48) e temos,

$$\begin{aligned} q_\mu I^{\mu\nu} &= \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{q \cdot l l^\nu}{D_+ D_-} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{(D_+ - D_-) l^\nu}{D_+ D_-}, \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \left[ \frac{l^\nu}{(l - q/2)^2 - M_\pi^2} - \frac{l^\nu}{(l + q/2)^2 - M_\pi^2} \right]. \end{aligned} \quad (C.49)$$

As mudanças de variável  $p = l \pm q/2$  permitem escrever

$$\begin{aligned} q_\mu I^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left[ \frac{(p + q/2)^\nu}{p^2 - M_\pi^2} - \frac{(p - q/2)^\nu}{p^2 - M_\pi^2} \right], \\ &= \frac{1}{2} q^\nu \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_\pi^2}. \end{aligned} \quad (C.50)$$

A integral em (C.50) é divergente e precisa ser renormalizada, o que introduz uma constante arbitrária  $C'$ . Desta forma, temos

$$q_\mu I^{\mu\nu} = \frac{1}{2} q^\nu C'. \quad (C.51)$$

Por outro lado, a multiplicação de  $q_\mu$  pelo lado direito de (C.48), resulta em

$$q_\mu I^{\mu\nu} = \frac{i}{(4\pi)^2} q^\nu \{q^2 \Pi_q + \bar{\Pi}^{00}\} \quad (C.52)$$

Comparando esses dois resultado para  $q_\mu I^{\mu\nu}$ , aprendemos que

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \{q^2 \Pi_q + \bar{\Pi}^{00}\} = \frac{1}{2} C'. \quad (C.53)$$

Efetuando o mesmo procedimento com o operador  $g_{\mu\nu}$ , temos o resultado exato

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} I^{\mu\nu} &= \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{D_+ D_-} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{2}(D_+ + D_-) + (M_\pi^2 - q^2/4)}{D_+ D_-} \\ &= (M_\pi^2 - q^2/4) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{D_+ D_-} = (M_\pi^2 - q^2/4) I, \end{aligned} \quad (C.54)$$

para  $I$  dado na eq.(C.1). A partir da equação (C.48), também temos

$$g_{\mu\nu} I^{\mu\nu} = \frac{i}{(4\pi)^2} \{q^2 \Pi_q + 4 \bar{\Pi}^{00}\} \quad (C.55)$$

e, portanto,

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \{q^2 \Pi_q + 4 \bar{\Pi}^{00}\} = (M_\pi^2 - q^2/4) I. \quad (C.56)$$

**Resultado**

A partir das eqs. (C.53) e (C.56), obtemos

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \bar{\Pi}^{00} = \frac{1}{3} (M_\pi^2 - q^2/4) I - \frac{C'}{6} \quad (\text{C.57})$$

e,

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \Pi_q = -\frac{1}{3} \frac{(M_\pi^2 - q^2/4)}{q^2} I + \frac{2}{3q^2} C'. \quad (\text{C.58})$$

Substituindo os resultados em (C.48), temos

$$I^{\mu\nu} = -\frac{1}{3} (M_\pi^2 - q^2/4) I \left[ \frac{-q^\mu q^\nu}{q^2} + g^{\mu\nu} \right] + C' \left[ \frac{2}{3} \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} - \frac{1}{6} g^{\mu\nu} \right]. \quad (\text{C.59})$$

A constante  $C'$ , presente neste resultado, representa apenas a integral divergente em (C.50) e é desprezada. Neste caso, o restante da eq.(C.59) indica que  $I^{\mu\nu}$  é proporcional à integral tipo bolha da interação  $\pi\pi$ , i.e.,  $I = -i\Omega_\pi$ .

**C.3 Triângulo  $I_{xyz}$** 

As integrais de *loop* do tipo triângulo  $I_{xyz}$ , com três propagadores, aparecem nos cálculos do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , nos capítulos 3 e 4. Elas têm a forma geral

$$I_{xyz} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_x - l)^2 - m_x^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[(p_y - l)^2 - m_y^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[(p_z + l)^2 - m_z^2]}, \quad (\text{C.60})$$

sendo  $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$  mostrados na figura C.4, em que a soma dos momentos externos é nula.

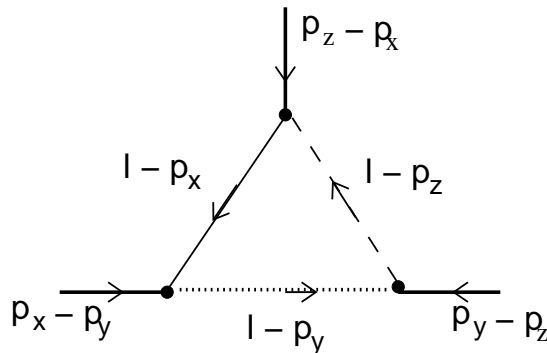


Figura C.4: Diagrama de Feynman do tipo triângulo  $I_{xyz}$ .

Diferentemente da bolha, a integral triângulo (C.60) não é divergente e, portanto, não precisa ser renormalizada. Baseados em [96], a integral, desenvolvida usando os

parâmetros de Feynman, pode ser expressa em função de  $\Pi_{xyz}$ , como

$$I_{xyz} = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi_{xyz} \quad (\text{C.61})$$

$$\Pi_{xyz} = - \int_0^1 da a \int_0^1 db \frac{1}{D_{xyz}}, \quad (\text{C.62})$$

com

$$\begin{aligned} D_{xyz} &= (1-a)m_x^2 + a(1-b)m_y^2 + abm_z^2 - i\epsilon \\ &\quad - a(1-a)(1-b)(p_x - p_y)^2 - a(1-a)b(p_x - p_z)^2 \\ &\quad - a^2b(1-b)(p_y - p_z)^2; \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

As diferentes funções  $\Pi_{xyz}$ , que contribuem no cálculo da amplitude  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , são apresentadas e calculadas em seguida. Dependendo do arranjo cinemático de cada *loop*, a segunda integração no parâmetro de Feynman só tem solução numérica. Nesses casos, a função  $\Pi_{xyz}$  passa a ser expressa em termos de  $J_n(a)$  como

$$\Pi_{xyz} = - \int_0^1 da J(a), \quad (\text{C.64})$$

$$J(a) = \int_0^1 db \frac{a}{D_{\pi K \theta}}. \quad (\text{C.65})$$

**Caso**  $p_y = p_z = 0$

No caso particular em que dois dos quadrimomentos envolvidos são iguais, o propagador de Feynman (C.63) pode ser simplificado para:

$$D_{xyz} = (1-a)m_x^2 + a(1-b)m_y^2 + abm_z^2 - i\epsilon - a(1-a)p_x^2, \quad (\text{C.66})$$

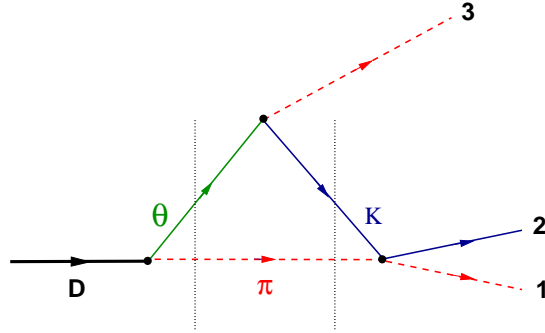
$$= abB + C(a) - i\epsilon, \quad (\text{C.67})$$

$$B = m_z^2 - m_y^2,$$

$$C(a) = (1-a)(m_x^2 - ap_x^2) + am_y^2,$$

e o integrando  $J(a)$  é dado por:

$$J(a) = \frac{1}{m_z^2 - m_y^2} \left[ \ln \left( \frac{aB + C(a)}{C(a)} \right) \right]. \quad (\text{C.68})$$

Figura C.5: Diagrama do triângulo  $I_{\pi K \theta}$ .

### Triângulo $\Pi_{\pi K \theta}$

O *loop* do tipo triângulo presente no cálculo do capítulo 3, apresentado na fig. C.5, representa a reação  $D(P) \rightarrow [\pi K](p_{12}) \pi(p_3)$ , com estados intermediários  $\pi(p_{12} - k)$ ,  $\theta(p_3 + k)$ ,  $K(k)$ . A variável  $\theta = \theta_R - i \theta_I$  representa a posição de um polo genérico no plano  $s$ -complexo, com  $\theta_R$  e  $\theta_I$  constantes positivas.

A integral de *loop* é descrita pela função  $\Pi_{\pi K \theta}$  como,

$$\Pi_{\pi K \theta} = - \int_0^1 da a \int_0^1 db \frac{1}{D_{\pi K \theta}}. \quad (\text{C.69})$$

Identificando  $p_x = p_{12}$ ,  $m_x = M_\pi$ ,  $p_y = 0$ ,  $m_y = M_K$ ,  $p_z = -p_3$  e  $m_z = \theta$  e, substituindo em (C.63), temos

$$\begin{aligned} D_{\pi K \theta} &= (1-a) M_\pi^2 + a(1-b) M_K^2 + ab \theta_R - i [\epsilon + ab(\theta_I - \epsilon)] \\ &- a(1-a)(1-b) s - a(1-a) b M_D^2 - a^2 b(1-b) M_\pi^2, \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

em que escrevemos  $p_{12}^2 = m_{12}^2 \equiv s$ .

A dupla integral em (C.69) pode ser calculada numericamente mas, quando  $\theta_I = \epsilon$ , ocorrem problemas de precisão. Por isso, paralelamente ao cálculo numérico, analisamos o limite quiral em  $SU(2)$ , desprezando  $M_\pi^2$ , e eliminamos os termos proporcionais a  $b^2$  em

$D_{\pi K\theta}$ . Com essa aproximação, a integral sobre o parâmetro  $b$  resulta em

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^1 db \frac{a}{D_{\pi K\theta}} \\
&= \frac{G+i(\theta_I-\epsilon)}{G^2+(\theta_I-\epsilon)^2} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{[F+G]^2+[(\theta_I-\epsilon)+\epsilon/a]^2}{F^2+(\epsilon/a)^2} \right. \\
&\quad \left. - i \frac{F(\theta_I-\epsilon)-G(\epsilon/a)}{|F(\theta_I-\epsilon)-G(\epsilon/a)|} \left[ \tan^{-1} \frac{x-y}{1+xy} + \sigma \pi \right] \right\}, \\
F &= M_K^2 - (1-a)s, \\
G &= (\theta_R - M_K^2) - (1-a)(M_D^2 - s), \\
x &= \frac{(F+G)G + (\theta_I - \epsilon)(\theta_I - \epsilon + \epsilon/a)}{|F(\theta_I - \epsilon) - G(\epsilon/a)|}, \\
y &= \frac{FG + (\theta_I - \epsilon)(\epsilon/a)}{|F(\theta_I - \epsilon) - G(\epsilon/a)|}, \tag{C.71}
\end{aligned}$$

para  $[xy > -1] \rightarrow \sigma = 0$ ,  $[xy < -1 \text{ e } x > 0] \rightarrow \sigma = +1$ ,  $[xy < -1 \text{ e } x < 0] \rightarrow \sigma = -1$ . Esse resultado foi usado para calibrar o cálculo numérico e obtivemos uma convergência entre ambos no caso de  $\epsilon$  muito pequeno.

### Triângulos $\Pi_{\pi K\rho}$ e $\Pi_{\pi Ka}$

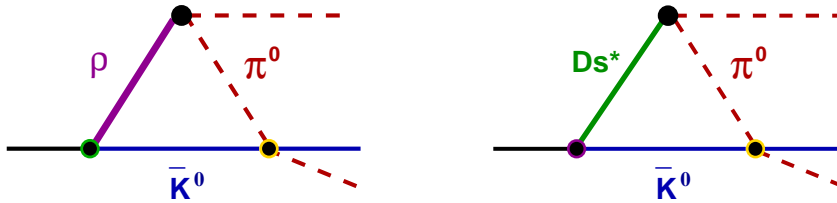


Figura C.6: Diagrama de Feynman para os triângulos  $I_{\pi K\rho}$  (esquerda) e  $I_{\pi Ka}$  (direita)

O cálculo das funções  $\Pi_{\pi K\rho}$  e  $\Pi_{\pi Ka}$ , fig. C.6, são análogos, uma vez que os quadrimomentos de  $\rho$  e  $D_s^*$  são iguais. Nesse caso, identificamos  $p_x = -p_3$ ,  $m_x = M_\pi$ ,  $p_y = -P_D$ ,  $m_y = M_K$ ,  $p_z = 0$  e  $m_z$  pode ser  $m_a$  ou  $m_\rho$ . Assim, temos

$$\Pi_{\pi Kz} = -\frac{1}{M_D^2} \int_0^1 da J_a, \tag{C.72}$$

$$J_a = a \int_0^1 db \frac{1}{D_{\pi Kz}}, \tag{C.73}$$

e usando (C.63),

$$D_{\pi Kz} = (1-a)(M_\pi^2 - a(1-b)s - abM_\pi^2) + \quad (C.74)$$

$$a(1-b)(M_K^2 - abM_D^2) + abm_z^2 - i\epsilon;$$

$$= [a^2b^2 + abB_a + C_a - i\epsilon] M_D^2;$$

$$B_a = [m_z^2 - M_K^2 + s - M_\pi^2 - a(s - M_\pi^2 + M_D^2)] / M_D^2; \quad (C.75)$$

$$C_a = [(1-a)M_\pi^2 - aM_K^2 - a(1-a)s] / M_D^2; \quad (C.76)$$

$$\lambda = B_a^2 - 4C_a. \quad (C.77)$$

Assim,

$$J_a = \int_0^a de \frac{1}{e^2 + eB_a + C_a - i\epsilon} \quad (C.78)$$

e a integração em  $e$  pode ser feita a partir das raízes de  $D_{\pi Kz}$ ,

$$D_{\pi Kz} = (e - e_1)(e - e_2); \quad (C.79)$$

$$e_1 = (-B_a + \sqrt{\lambda + i4\epsilon}) / 2; \quad (C.80)$$

$$e_2 = (-B_a - \sqrt{\lambda + i4\epsilon}) / 2; \quad (C.81)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} J_a &= \int_0^a de \frac{1}{e^2 + eB_a + C_a - i\epsilon} = \frac{1}{e_1 - e_2} \int_0^a de \left( \frac{1}{e - e_1} - \frac{1}{e - e_2} \right) \\ &= \frac{1}{e_1 - e_2} \left[ \ln \left( \frac{a - e_1}{-e_1} \right) - \ln \left( \frac{a - e_2}{-e_2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[ \ln \left( \frac{2a + B_a - \sqrt{\lambda}}{B_a - \sqrt{\lambda}} \right) - \ln \left( \frac{2a + B_a + \sqrt{\lambda}}{B_a + \sqrt{\lambda}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (C.82)$$

É preciso tomar cuidado para especificar a ramificação correta da função logaritmo, uma vez que o argumento em (C.82) pode ser negativo e imaginário, dependendo da combinação de  $s$  e  $a$ .

Após um tratamento adequado das diferentes ramificações que a função pode acessar, a função  $J_a(a)$  é escrita como:



$$\begin{aligned}
J_a = & \Theta(\lambda) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \ln \left( \frac{|2a + B_a - \sqrt{\lambda}|}{|2a + B_a + \sqrt{\lambda}|} \right) - \ln \left( \frac{|B_a - \sqrt{\lambda}|}{|B_a + \sqrt{\lambda}|} \right) \right. \\
& + i\pi [\Theta(-C_a) + 2\Theta(-B_a)\Theta(C_a) - \Theta(-D_z) - 2\Theta(-(2a + B_a))\Theta(D_z)] \left. \right\} \\
& + \Theta(-\lambda) \frac{2}{\sqrt{|\lambda|}} \left\{ \tan^{-1} \left( \frac{a\sqrt{|\lambda|}}{aB_a + 2C_a} \right) \pi \Theta(aB_a + 2C_a)\Theta(2a + B_a)\Theta(-B_a) \right\};
\end{aligned} \tag{C.83}$$

em que  $\Theta(x)$  é a função Theta de Heaviside definida por:

$$\begin{aligned}
\Theta(x) = & \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{para } x = 0 \\ 1 & \text{para } x > 0. \end{cases}
\end{aligned} \tag{C.84}$$

### Triângulos $\Pi_{K\rho a}$ e $\Pi_{K\rho b}$

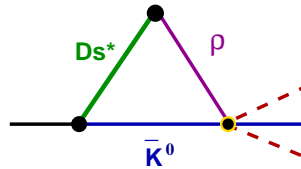


Figura C.7: Diagrama de Feynman para o triângulo  $I_{K\rho a}$  ou  $I_{K\rho b}$

Os triângulos relativos às funções  $\Pi_{K\rho a}$  e  $\Pi_{K\rho b}$  são representados pelo mesmo diagrama, fig. C.7, em que o  $D_s^*$  representa tanto o estado escalar ( $b$ ) como o vetorial ( $a$ ). Dessa forma, os dois são calculados juntos.

A função  $\Pi_{K\rho z}$  é simplificada pelo fato de dois dos quadrimomentos nos propagadores serem iguais ( $P_\rho = P_{D_s^*} = P$ ) e, portanto, identificamos  $p_x = -P_D m_x = M_K$ ,  $p_y = p_z = 0$ ,  $m_y = m_\rho$  e  $m_z$ , que pode ser igual a  $m_a$  ou  $m_b$ .

$$\Pi_{K\rho z} = - \int_0^1 da J_c, \tag{C.85}$$

$$J_c = a \int_0^1 db \frac{1}{D_{K\rho z}}. \tag{C.86}$$

O propagador de Feynman nesse caso é dado por (C.67) e, podemos usar diretamente o resultado (C.68) para  $J_c$ , que fica:

$$J_c = \frac{1}{m_z^2 - m_\rho^2} \left\{ \ln |(1-a)(M_K^2 - aM_D^2) + am_z^2| - \ln |(1-a)(M_K^2 - aM_D^2) + am_\rho^2| \right. \\ \left. - i\pi \left( \Theta[-\{(1-a)(M_K^2 - aM_D^2) + am_z^2\}] - \Theta[-\{(1-a)(M_K^2 - aM_D^2) + am_\rho^2\}] \right) \right\}. \quad (\text{C.87})$$

Novamente a função  $\Theta$  garante que a função  $\ln$  vá para a ramificação correta quando o integrando for negativo. Isso pode ocorrer, pois a energia que circula dentro do *loop*, fig. C.7, pode chegar a valores maiores do que  $(M_K + m_\rho)$  e o decaimento  $D^+ \rightarrow \bar{K}\rho^+$  torna-se possível. O resultado do integrando  $J_c$  (C.87) não depende da energia  $e$ , portanto, a função  $\Pi_{K\rho z}$  (C.85) será em uma constante complexa depois de integrada em  $a$ .

### Triângulo $\Pi_{\pi\rho a}$

O cálculo da integral triângulo  $I_{\pi\rho a}$ , fig. C.8, é um caso particular da anterior. Identificamos  $p_x = -P_3$ ,  $p_y = p_z = 0$ ,  $m_x = M_\pi$ ,  $m_y = m_\rho$ , e  $m_z = m_a$ .

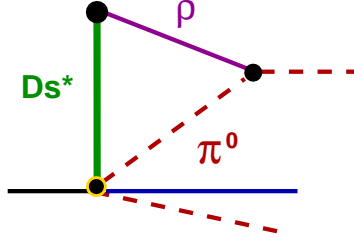


Figura C.8: Diagrama de Feynman para o triângulo  $I_{\pi\rho a}$

A integral é dada por

$$\Pi_{\pi\rho a} = - \int_0^1 da J_d, \quad (\text{C.88})$$

$$J_d = a \int_0^1 db \frac{1}{D_{\pi\rho a}}, \quad (\text{C.89})$$

e usando (C.68), podemos escrever direto o resultado para o integrando  $J_d$ , que fica

$$J_d = \frac{1}{m_a^2 - m_\rho^2} \ln \left( \frac{(1-a)^2 M_\pi^2 + a m_a^2}{(1-a)^2 M_\pi^2 + a m_\rho^2} \right). \quad (\text{C.90})$$

Nesse caso o argumento da função  $\ln$  é sempre positivo e a integral é real. Analisando o diagrama deste triângulo, fig. C.8, vemos que a máxima energia disponível no *loop* é  $M_\pi^2$ ,

ou seja, não é suficiente para que o  $\rho$  possa ser estado final de um decaimento. A função  $J_d$  (C.90) não depende da energia e o resultado da integral em  $a$  é uma contante real.

### Triângulo $\Pi_{\pi K \rho}$ - $\rho$ com largura

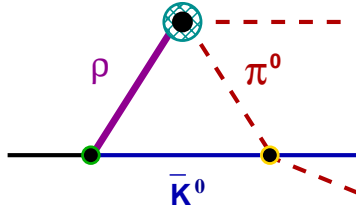


Figura C.9: Diagrama de Feynman para o triângulo  $I_{\pi K \rho}$  com largura no  $\rho$ .

O cálculo da integral triângulo  $I_{\pi K \rho}$  quando o méson  $\rho$  tem largura, fig. C.9, é similar ao caso em que ele não tem largura. Eles diferem quanto à massa  $m_z$  que, agora, é complexa. Nesse caso temos:  $p_x = -p_3$ ,  $m_x = M_\pi$ ,  $p_y = -P_D$ ,  $m_y = M_K$ ,  $p_z = 0$ ,  $m_z^2 = \Theta_R - i\Theta_i$  e a integral é dada por

$$\Pi_{\pi K \rho} = -\frac{1}{M_D^2} \int_0^1 da J'_a. \quad (\text{C.91})$$

$$J'_a = a \int_0^1 db \frac{1}{D_{\pi K \rho}}, \quad (\text{C.92})$$

com

$$D_{\pi K \rho} = [a^2 b^2 + ab B'_a + C_a - i\epsilon] M_D^2;$$

$$B'_a = B_{ra} - i\Theta_i \quad (\text{C.93})$$

$$B_{ra} = [\Theta_R - M_K^2 + s - M_\pi^2 - a(s - M_\pi^2 + M_D^2)] / M_D^2; \quad (\text{C.94})$$

$$C_a = [(1-a)M_\pi^2 - aM_K^2 - a(1-a)s] / M_D^2; \quad (\text{C.95})$$

$$\lambda_a = B_a'^2 - 4C_a = [B_{ra}^2 - \Theta_i^2 - 4C_a] - i 2 B_{ra} \Theta_i \quad (\text{C.96})$$

$$= \lambda_{aR} + i\lambda_{ai} = |\lambda_a| e^{i\theta_{\lambda_a}}. \quad (\text{C.97})$$

Introduzindo as funções

$$F_{a1} = \frac{2a + B'_a - \sqrt{\lambda_a}}{M_D^2} = \frac{|2a + B'_a - \sqrt{\lambda_a}|}{M_D^2} e^{i\theta_{F_{a1}}}; \quad (\text{C.98})$$

$$G_{a1} = \frac{B'_a - \sqrt{\lambda_a}}{M_D^2} = \frac{|B'_a - \sqrt{\lambda_a}|}{M_D^2} e^{i\theta_{G_{a1}}}; \quad (\text{C.99})$$

$$F_{a2} = \frac{2a + B'_a + \sqrt{\lambda_a}}{M_D^2} = \frac{|2a + B'_a + \sqrt{\lambda_a}|}{M_D^2} e^{i\theta_{F_{a2}}}; \quad (\text{C.100})$$

$$G_{a2} = \frac{B'_a + \sqrt{\lambda_a}}{M_D^2} = \frac{|B'_a + \sqrt{\lambda_a}|}{M_D^2} e^{i\theta_{G_{a2}}}; \quad (\text{C.101})$$

o integrando é dado por:

$$J'_a(a) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_a}} \left\{ \ln \left( \frac{|F_{a1}| |G_{a2}|}{|G_{a1}| |F_{a2}|} \right) + i\theta_{J_a} \right\}, \quad (\text{C.102})$$

$$\theta_{J_a} = \theta_{F_{a1}} - \theta_{F_{a2}} - \theta_{G_{a1}} + \theta_{G_{a2}}, \quad (\text{C.103})$$

em que a função  $\sqrt{\lambda_a}$  é uma raiz complexa. Usando (C.97), temos

$$\sqrt{\lambda_a} = \sqrt{|\lambda_a|} \cos(\theta_{\lambda_a}/2) + i\sqrt{|\lambda_a|} \sin(\theta_{\lambda_a}/2), \quad (\text{C.104})$$

$$= R_{aR} + iR_{aI} \quad (\text{C.105})$$

e o integrando (C.102) pode ser simplificado para

$$J'_a(a) = \frac{1}{R_{aR}^2 + R_{aI}^2} \left\{ \left[ R_{aR} \ln \left( \frac{|F_{a1}| |G_{a2}|}{|G_{a1}| |F_{a2}|} \right) + R_{aI} \theta_{J_a} \right] + i \left[ R_{aR} \theta_{J_a} - R_{aI} \ln \left( \frac{|F_{a1}| |G_{a2}|}{|G_{a1}| |F_{a2}|} \right) \right] \right\}. \quad (\text{C.106})$$

### Triângulos $\Pi_{K\rho a}$ e $\Pi_{K\rho b}$ - $\rho$ com largura

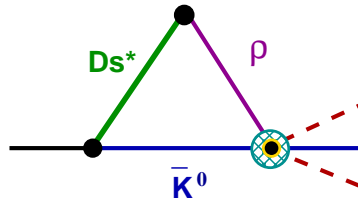


Figura C.10: Diagrama de Feynman para o triângulo  $I_{K\rho a}$  ou  $I_{K\rho b}$  com o  $\rho$  vestido.

Os triângulos  $I_{K\rho a}$  e  $I_{K\rho b}$ , incluindo a largura dinâmica do  $\rho$ , são descritos pelo mesmo diagrama, fig. C.10, em que  $D_s^*$  representa tanto o estado escalar ( $b$ ) como o vetorial ( $a$ ).

Análogo ao triângulo com o  $\rho$  sem largura, (C.85), temos:  $p_x = -P_D$ ,  $p_y = p_z = 0$ ,  $m_x = M_K$ ,  $m_z = m_a$  ou  $m_b$ , e, agora,  $m_y^2 = \Theta_R - i\Theta_i$ . As novas integrais tem a forma

$$\Pi_{K\rho z} = - \int_0^1 da J'_c, \quad (\text{C.107})$$

$$J'_c = a \int_0^1 db \frac{1}{D_{K\rho z}}. \quad (\text{C.108})$$

Usando o resultado (C.68), a função  $J'_c$  pode ser escrita como a soma de dois termos,

$$J'_c = \frac{1}{m_a^2 - (\Theta_R - i\Theta_i)} \left[ \ln \left( \frac{D_{Ka}}{M_D^2} \right) - \ln \left( \frac{D_{K\rho}}{M_D^2} \right) \right] \quad (\text{C.109})$$

$$D_{Ka} = (1-a)(M_K^2 - aM_D^2) + am_a^2 - i\epsilon \quad (\text{C.110})$$

$$D_{K\rho} = [(1-a)(M_K^2 - aM_D^2) + a\Theta_R] - i[a\Theta_i + (1-a)\epsilon], \quad (\text{C.111})$$

em que  $D_{K\rho}$  é uma função complexa. Por isso a escrevemos em coordenadas polares, como

$$|D_{K\rho}| = \sqrt{\mathcal{R}[D_{K\rho}]^2 + \mathcal{I}[D_{K\rho}]^2}, \quad (\text{C.112})$$

$$\theta_{K\rho} = \tan^{-1} \left( \frac{\mathcal{I}[D_{K\rho}]}{\mathcal{R}[D_{K\rho}]} \right). \quad (\text{C.113})$$

A função  $D_{Ka}$  pode assumir valores negativos e, por isso, precisamos da função  $\Theta$  para garantir o  $\ln$  vai para a ramificação correta. Assim, o integrando é dado por

$$J'_c = \frac{(m_a^2 - \Theta_R) - i\Theta_i}{\sqrt{(m_a^2 - \Theta_R)_+^2 \Theta_i^2}} \left\{ \ln \left( \frac{|D_{Ka}|}{M_D^2} \right) - \ln \left( \frac{|D_{K\rho}|}{M_D^2} \right) - i[\pi\Theta[-D_{Ka}] + \theta_{K\rho}] \right\}. \quad (\text{C.114})$$

O resultado para  $J'_c$  (C.114) não depende da energia  $e$ , portanto, a função  $\Pi_{K\rho z}$  (C.107) é uma constante complexa, depois de integrada em  $a$ .

Uma maneira alternativa de calcular a função  $\Pi_{K\rho a}$  (C.107) é representá-la como a diferença de duas bolhas que podem ser calculadas analiticamente.

$$\Pi_{K\rho z} = \frac{(m_a^2 - \Theta_R) - i\Theta_i}{\sqrt{(m_a^2 - \Theta_R)_+^2 \Theta_i^2}} [\Pi_{Ka} - \Pi_{K\rho}] \quad (\text{C.115})$$

em que  $\Pi_{Ka}$  é um caso específico da bolha calculada em (C.30), e  $\Pi_{K\rho}$  é dada por:

$$\begin{aligned} \Pi_{K\rho}(P^2) &= 2 - \frac{1}{2P^2} \left[ P^2 - M_K^2 + \Theta_R - i(\Theta_i - \epsilon) - \sqrt{\lambda} \right] \ln \frac{\Theta_R - i\Theta_i}{M_D^2} \\ &\quad - \frac{1}{2P^2} \left[ P^2 + M_K^2 - \Theta_R + i(\Theta_i - \epsilon) - \sqrt{\lambda} \right] \ln \frac{M_K^2}{M_D^2} \\ &\quad - \frac{\sqrt{\lambda}}{P^2} \ln \left[ \frac{P^2 - M_K^2 - \Theta_R + i(\Theta_i - \epsilon) + \sqrt{\lambda}}{2M_D^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.116})$$

para  $P^2 = M_D^2$ , e

$$\lambda = [M_D^2 + M_K^2 - \Theta_R + i(\Theta_i - \epsilon)]^2 - 4P^2 [M_K^2 - i\epsilon] \quad (\text{C.117})$$

### Triângulo $\Pi_{\pi\rho a}$ - $\rho$ com largura

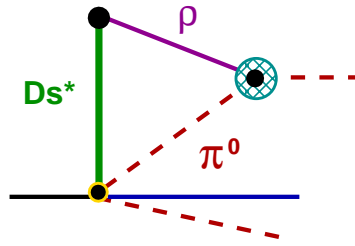


Figura C.11: Diagrama de Feynman para o triângulo  $I_{\pi\rho V}$  com  $\rho$  vestido.

O cálculo deste triângulo é muito similar a seu análogo com o  $\rho$  sem largura (C.88), e temos:  $p_x = -P_3$ ,  $p_y = p_z = 0$ ,  $m_x = M_\pi$ ,  $m_y^2 = \Theta_R - i\Theta_i$ , e  $m_z = m_a$ ,

$$\Pi_{\pi\rho a} = - \int_0^1 da J'_d, \quad (\text{C.118})$$

$$J'_d = a \int_0^1 db \frac{1}{D_{\pi\rho a}}, \quad (\text{C.119})$$

usando o resultado de (C.68), podemos escrever  $J'_d$  como a soma de dois termos, e integral numérica a ser feita é:

$$J'_d = \frac{1}{m_a^2 - (\Theta_R - i\Theta_i)} \left[ \ln \left( \frac{D_{\pi a}}{M_D^2} \right) - \ln \left( \frac{|D_{\pi\rho}|}{M_D^2} \right) - i\theta_{\pi\rho} \right], \quad (\text{C.120})$$

para

$$D_{\pi a} = (1-a)^2 M_\pi^2 + a m_a^2 - i\epsilon; \quad (\text{C.121})$$

$$D_{\pi\rho} = [(1-a)^2 M_\pi^2 + a\Theta_R] - i[a\Theta_i + (1-a)\epsilon]; \quad (\text{C.122})$$

em que  $D_{\pi a}$  é sempre positiva e  $D_{\pi\rho}$  complexa. Usando coordenadas polares:

$$|D_{\pi\rho}| = \sqrt{\mathcal{R}[D_{\pi\rho}]^2 + \mathcal{I}[D_{\pi\rho}]^2}, \quad (\text{C.123})$$

$$\theta_{\pi\rho} = \tan^{-1} \left( \frac{\mathcal{I}[D_{\pi\rho}]}{\mathcal{R}[D_{\pi\rho}]} \right). \quad (\text{C.124})$$

É preciso tomar cuidado com escolha do quadrante correto para  $\theta_{\pi\rho}$  de forma que ele permaneça no intervalo  $\pi \geq \theta_{\pi\rho} > -\pi$ . O integrando (C.120) não depende da energia, e o resultado para (C.118) é uma constante complexa.

Também é possível representar a  $\Pi_{\pi\rho a}$  em termos de duas bolhas, tal que,

$$\Pi_{\pi\rho a} = \frac{(m_a^2 - \Theta_R) - i\Theta_i}{\sqrt{(m_a^2 - \Theta_R)_+^2 + \Theta_i^2}} [\Pi_{\pi a}(M_\pi^2) - \Pi_{\pi\rho}(M_\pi^2)] \quad (\text{C.125})$$

em que  $\Pi_{\pi a}$  é um caso específico da bolha calculada em (C.30), e  $\Pi_{\pi\rho}$  é dado por:

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi\rho}(M_\pi^2) = & 2 - \frac{1}{2M_\pi^2} \left[ \Theta_R - i(\Theta_i - \epsilon) - \sqrt{\lambda} \right] \ln \frac{\Theta_R - i\Theta_i}{M_D^2} \\ & - \frac{1}{2M_\pi^2} \left[ 2M_\pi^2 - \Theta_R + i(\Theta_i - \epsilon) - \sqrt{\lambda} \right] \ln \frac{M_\pi^2}{M_D^2} \\ & - \frac{\sqrt{\lambda}}{M_\pi^2} \ln \left[ \frac{M_\pi^2 - M_K^2 - \Theta_R + i(\Theta_i - \epsilon) + \sqrt{\lambda}}{2M_D^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{C.126})$$

para

$$\lambda = [2M_\pi^2 - \Theta_R + i(\Theta_i - \epsilon)]^2 - 4M_\pi^2[M_\pi^2 - i\epsilon]. \quad (\text{C.127})$$

### C.3.1 Resultados

No capítulo 4, a amplitude  $A$  do processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  foi calculada duas vezes, para os casos do  $\rho$  sem e com largura. Em ambos os casos, essa amplitude tem a forma

$$A = \frac{\alpha}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\beta}{m_a^2 - m_\rho^2} (\Pi_{\pi K a} - \Pi_{\pi K \rho}) + \Pi_{K \rho a} + \Pi_{\pi \rho a} - \Pi_{\pi K a} - \frac{\gamma}{m_a^2 - m_b^2} (\Pi_{K \rho a} - \Pi_{K \rho b}) \right\}. \quad (\text{C.128})$$

A integral  $I_{\pi K a}$  é a mesma nos dois casos e o seu, apresentado na fig. C.12, mostra que a parte imaginária de  $\Pi_{\pi K a}$  é zero no limiar. Isso é esperado, uma vez que, nesse *loop*, não há energia suficiente para o  $D_s^*$  decair e o único corte possível é em  $K\pi$ , o mesmo da

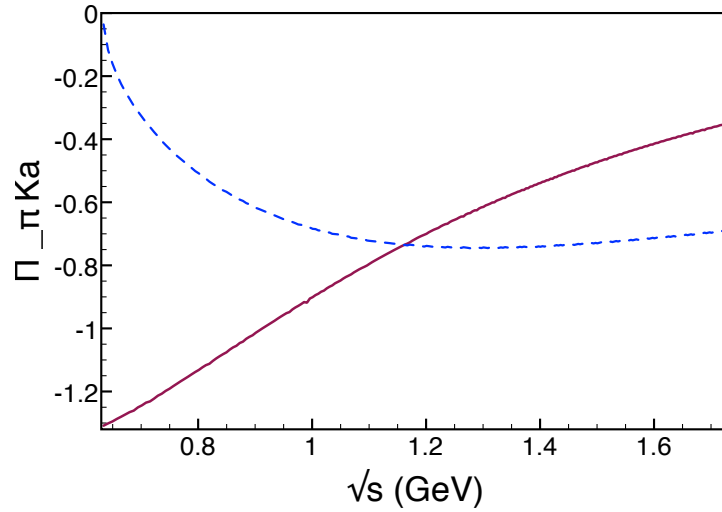


Figura C.12: Parte real (contínua) e imaginária (tracejada) da função  $\Pi_{\pi K a}$ .

amplitude de espalhamento. Portanto, a fase é nula no limiar e, acima dele, é dada pelo corte  $K\pi$ .

A integral  $I_{\pi K \rho}$ , foi calculada para os casos de  $\rho$  com e sem largura, e os resultados são mostrados no gráfico na fig. C.13. Diferentemente de  $I_{\pi K a}$ , agora as componentes imaginárias, em ambos os casos, não saem de zero. Isso ocorre devido à estrutura de cortes do sistema que, agora, são dois:  $K\pi$  e  $K\rho$ . Enquanto o primeiro é o mesmo que  $\Pi_{\pi K \rho}$ , o segundo é novo e provoca o surgimento de uma parte imaginária abaixo do limiar.

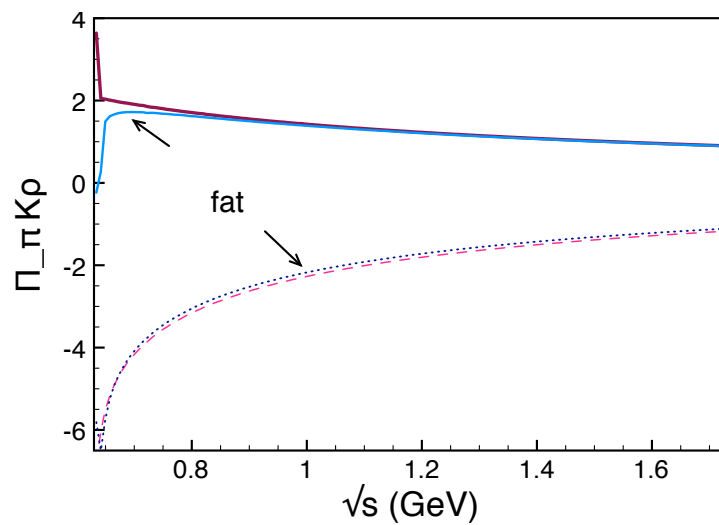


Figura C.13: Parte real (contínua) e imaginária (tracejada) da função  $\Pi_{\pi K \rho}$  para o propagador do  $\rho$  com (fat) e sem largura.



Como podemos observar na fig. C.13, com exceção da região próxima ao limiar, as curvas da parte real e imaginária são muito próximas para os dois casos, mostrando que a inclusão da largura dinâmica tem um efeito muito pequeno nos resultados. A largura nominal do  $\rho$  é dada por  $\Gamma_\rho = 0.1494(10)$  GeV [16], o que corresponde a um polo estreito e pouco profundo na segunda folha de Riemann, o que justifica a pequena influência da largura do  $\rho$  nas integrais  $I_{\pi K\rho}$ .

Finalmente, na tabela C.1, constam os resultados da integrais  $I_{xyz}$  que não dependem da energia, e portanto, são constantes. Vamos que as diferenças são pequenas mas não desprezíveis.

	$\rho$ com largura	$\rho$ sem largura
$\Pi_{K\rho a}$	$-0.44302 - i0.57346$	$-0.46421 - i0.59877$
$\Pi_{K\rho b}$	$-0.40797 - i0.46723$	$-0.42750 - i0.48639$
$\Pi_{\pi\rho a}$	$-0.50628 - i0.03126$	$-0.5242$

Tabela C.1: Resultados para a função  $\Pi_{xyz}$  que são constante.

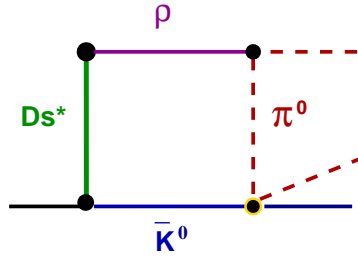
## C.4 Caixa

A integral do tipo caixa, com quatro propagadores, é análoga ao triângulo. Nos casos de interesse neste trabalho, no mínimo dois dos quadrimomentos nos propagadores são iguais. Portanto, podemos desenvolver o caso em que  $p_z = p_w = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 I_{xyzw} &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p_x-l)^2 - m_x^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[(p_y-l)^2 - m_y^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[l^2 - m_z^2]} \frac{1}{[l^2 - m_w^2]}, \\
 &= \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi_{xyzw},
 \end{aligned}$$

$$\Pi_{xyz} = - \int_0^1 da a^2 \int_0^1 db b \int_0^1 dc \frac{1}{D_{xyzw}^2}, \quad (\text{C.129})$$

$$\begin{aligned}
 D_{xyzw} &= (1-a)m_x^2 + b(1-a)m_y^2 + ab(1-c)m_z^2 + abc m_w^2 - i\epsilon \\
 &\quad - a(1-a)(1-b)(p_x - p_y)^2 - a(1-a)b p_x^2 - a^2 b(1-b) p_y^2.
 \end{aligned} \quad (\text{C.130})$$

Caixa  $\Pi_{\pi K \rho a}$ Figura C.14: Diagrama de Feynman para a caixa  $I_{\pi K \rho a}$ .

No cálculo da caixa  $I_{\pi K \rho a}$ , fig. C.14, os quadrimomentos do propagador do  $\rho$  e  $m_a$  são iguais, e podemos usar (C.130). Identificando  $p_x = -p_3$ ,  $m_x = M_\pi$ ,  $p_y = -P_D$ ,  $m_y = M_K$ ,  $p_z = p_w = 0$ ,  $m_z^2 = \Theta_R - i\Theta_i$  e  $m_w = m_a$ , temos

$$\Pi_{\pi K \rho a} = \int_0^1 da \int_0^1 db a^2 b J_e(a, b). \quad (\text{C.131})$$

$$J_e = \int_0^1 dc \frac{1}{D_{\pi K \rho a}^2}, \quad (\text{C.132})$$

$$\begin{aligned} D_{\pi K \rho a} = & (1-a)(M_\pi^2 - a(1-b)s - abP_3^2) + a(1-b)(M_K^2 - abM_D^2) \\ & + abm_\rho^2 + cab(m_a^2 - m_\rho^2). \end{aligned} \quad (\text{C.133})$$

Para isolar a dependência da variável  $c$ , escrevemos

$$D_{\pi K \rho a} = F(a, b) + cH(a, b); \quad (\text{C.134})$$

em que

$$\begin{aligned} F(a, b) = & (1-a)(M_\pi^2 - a(1-b)s - abM_\pi^2) \\ & + a(1-b)(M_K^2 - abM_D^2) + abm_\rho^2; \end{aligned} \quad (\text{C.135})$$

$$H(a, b) = ab(m_a^2 - m_\rho^2). \quad (\text{C.136})$$

Esses resultados estão relacionados às funções usadas em triângulos por

$$F(a, b) = D_{\pi K \rho} \quad (\text{C.137})$$

$$F(a, b) + H(a, b) = D_{\pi K a}. \quad (\text{C.138})$$

A equação (C.132) é reescrita como

$$J_e(a, b) = \int_0^1 dc \frac{1}{(F + cH)^2}; \quad (\text{C.139})$$

$$= \frac{-1}{ab(m_a^2 - m_\rho^2)} \left( \frac{1}{F + H} - \frac{1}{F} \right); \quad (\text{C.140})$$

usando (C.137), (C.138), podemos voltar a (C.131) e temos:

$$\Pi_{\pi K \rho a} = \frac{1}{m_a^2 - m_\rho^2} \int_0^1 da \int_0^1 db \left( \frac{-a}{D_{\pi K a}} - \frac{-a}{D_{\pi K \rho}} \right) \quad (\text{C.141})$$

$$= \frac{1}{m_a^2 - m_\rho^2} (\Pi_{\pi K a} - \Pi_{\pi K \rho}) . \quad (\text{C.142})$$

Este resultado é importante porque mostra que a integral do tipo caixa pode ser reduzida a duas integrais do tipo triângulo, já calculadas na eq.(C.87).

### Caixa $\Pi_{K \rho ab}$

O segundo tipo de caixa de que precisamos é  $I_{K \rho ab}$ , que possui três propagadores com quadrimomentos iguais:  $p_\rho = p_a = p_b = P$ . Por isso, o propagador de Feynman (C.130) é simplificado para:

$$\begin{aligned} D_{K \rho ab} &= (1 - a)M_K^2 - a(1 - b)m_\rho^2 + ab m_a^2 + cab (M_b^2 - m_a^2) - a(1 - a)M_D^2; \\ &= F' + c H'; \end{aligned} \quad (\text{C.143})$$

em que,

$$F' = (1 - a)M_K^2 - a(1 - b)m_\rho^2 + ab m_a^2 - a(1 - a)M_D^2 = D_{K \rho a}, \quad (\text{C.144})$$

$$H' = ab (M_b^2 - m_a^2) \quad (\text{C.145})$$

$$F' + H' = D_{K \rho b}, \quad (\text{C.146})$$

e, seguindo o mesmo procedimento usado em (C.142), temos:

$$\Pi_{K \rho ab} = \frac{1}{M_b^2 - m_a^2} (\Pi_{K \rho b} - \Pi_{\pi K a}) . \quad (\text{C.147})$$

## C.5 Integrais tensoriais para onda P

As integrais de *loop* que aparecem no decorrer do cálculo do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  em onda P (4.77), são similares às já calculadas na onda S, mas incluem parte do tensor associado ao  $\cos \theta_{K\pi}$  dado por

$$\cos \theta_{K\pi} = -\frac{1}{4m_{12}^2 q'^2} \left\{ 2m_{12}^2 \beta \cos \theta + 2m_{12}^2 [(p_1 - p_2)_\mu + (M_K^2 - M_\pi^2)(p_1 + p_2)_\mu] l^\mu \right\}. \quad (\text{C.148})$$

em que  $l$  é o momento de flui no *loop*. As integrais associadas são tensoriais e discutidas individualmente na sequência.

### Caixa $I_{\pi K \rho a}^P$

A integral tensorial do tipo caixa (4.78), contém a função

$$I_{\pi K \rho a}^\mu = \int \frac{d^4 l}{(4\pi)^2} \frac{l^\mu}{D_K D_\pi D_\rho D_a} \quad (\text{C.149})$$

sendo os propagadores  $D_i$  são os mesmo dados em (4.18). O método para resolver essa integral é similar ao desenvolvido para a bolha tensorial (C.2). A estrutura de Lorentz permite que a integral (C.149) seja parametrizada como

$$I_{\pi K \rho a}^\mu = X p_3^\mu + Y (p_1 + p_2)^\mu, \quad (\text{C.150})$$

onde  $X$  e  $Y$  são funções a serem determinadas. Elas podem ser obtidas multiplicando  $I_{\pi K \rho a}^\mu$  por  $p_{3\mu}$ , a partir de (C.149), obtemos

$$\begin{aligned} p_{3\mu} I_{\pi K \rho a}^\mu &= \int \frac{d^4 l}{(4\pi)^2} \frac{p_3 \cdot l}{D_K D_\pi D_\rho D_a} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 l}{(4\pi)^2} \frac{m_a^2 + M_D^2 - M_K^2 + D_a - D_K}{D_K D_\pi D_\rho D_a} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (m_a^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{\pi K \rho a} + I_{\pi K \rho} - I_{\pi \rho a} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.151})$$

Por outro lado, aplicando  $p_{3\mu}$  em (C.150), temos

$$\begin{aligned} p_{3\mu} I_{\pi K \rho a}^\mu &= X M_\pi^2 + Y p_3 \cdot (p_1 + p_2), \\ &= \frac{1}{2} [X 2 M_\pi^2 + Y (M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2)]. \end{aligned} \quad (\text{C.152})$$

Igualando as duas estruturas, obtemos a primeira equação para  $X$  e  $Y$ :

$$XM_\pi^2 + Y(M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) = (m_a^2 + M_D^2 - M_K^2)I_{\pi K\rho a} + I_{\pi K\rho} - I_{\pi\rho a}. \quad (\text{C.153})$$

Para obter uma segunda equação, repetimos o procedimento, multiplicando os dois membros de  $I_{\pi K\rho a}^\mu$  por  $(p_1 + p_2)_\mu$ . Para a integral (C.149), temos

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)_\mu I_{\pi K\rho a}^\mu &= \int \frac{d^4 l}{(4\pi)^2} \frac{(p_1 + p_2) \cdot l}{D_K D_\pi D_\rho D_a} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4 l}{(4\pi)^2} \frac{M_D^2 - M_K^2 + D_\pi - D_K}{D_K D_\pi D_\rho D_a} \\ &= \frac{1}{2} \{ (M_D^2 - M_K^2)I_{\pi K\rho a} + I_{K\rho a} - I_{\pi\rho a} \}, \end{aligned} \quad (\text{C.154})$$

enquanto (C.150), fornece

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2)_\mu I_{\pi K\rho a}^\mu &= X(p_1 + p_2) \cdot p_3 + Y(p_1 + p_2)^2, \\ &= \frac{1}{2} [X(M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) + Y2m_{12}^2]. \end{aligned} \quad (\text{C.155})$$

Igualando (C.154) e (C.155), encontramos

$$X(M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) + Y2m_{12}^2 = (M_D^2 - M_K^2)I_{\pi K\rho a} + I_{K\rho a} - I_{\pi\rho a}. \quad (\text{C.156})$$

Em posse de (C.153) e (C.156), podemos resolver o sistema e encontrar os valores de  $X$  e  $Y$ . Usando as relações cinemáticas presentes no apêndice A.2 e a definição da função  $Q'$  dada em (A.35) e fazendo  $X \rightarrow X_{\pi\rho a}$ ,  $Y \rightarrow Y_{\pi\rho a}$ , encontramos:

$$\begin{aligned} X_{\pi\rho a} &= \frac{1}{4Q'^2 m_{12}^2} \{ -2m_{12}^2 I_{\pi K\rho} + (M_D^2 - M_\pi^2 + m_{12}^2) I_{K\rho a} - (M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) I_{\pi\rho a} \\ &\quad + [(M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2)(M_D^2 - M_K^2) - 2m_{12}^2 m_a^2] I_{\pi K\rho a} \}, \end{aligned} \quad (\text{C.157})$$

$$\begin{aligned} Y_{\pi\rho a} &= -\frac{1}{4Q'^2 m_{12}^2} \{ (M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) [-(m_a^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{\pi K\rho a} + I_{\pi\rho a} - I_{\pi K\rho}] \\ &\quad + 2M_\pi^2 [(M_D^2 - M_K^2) I_{\pi K\rho a} - I_{\pi\rho a} + I_{K\rho a}] \}. \end{aligned} \quad (\text{C.158})$$

Com esses, a integral  $I_{\pi K\rho a}^\mu$  (C.150) fica completamente definida em termos de integrais de *loop* conhecidas e calculadas neste apêndice. Inserindo este resultado de volta à  $I_{\pi K\rho a}^P$

usando a eq.(4.83), o produto com os quadrimomentos externos resulta:

$$\begin{aligned} & 2 m_{12}^2 [(p_1 - p_2)_\mu + (M_K^2 - M_\pi^2) (p_1 + p_2)_\mu] [X p_3^\mu + Y (p_1 + p_2)^\mu] \\ = & 2 X [m_{12}^2 p_3 \cdot (p_1 - p_2) + (M_K^2 - M_\pi^2) p_3 \cdot (p_1 + p_2)] , \end{aligned} \quad (\text{C.159})$$

$$= -2 X m_{12}^2 \beta \cos \theta , \quad (\text{C.160})$$

e a função  $Y$  é cancelada no processo. Na última passagem usamos o resultado de (A.42), obtido no apêndice da cinemática, com as massas invariante projetadas no referencial do par 12. Com esse resultado, obtemos

$$I_{\pi K \rho a}^P = -\frac{1}{4 m_{12}^2 q'^2} 2 m_{12}^2 \beta \cos \theta \{I_{\pi K \rho a} - X\} . \quad (\text{C.161})$$

e a função  $X$  é dada em (C.157).

### Triângulo $I_{\pi K \rho}^P$

Para a integral do triângulo  $I_{\pi K \rho}^P$ , é preciso calcular a integral tensorial

$$I_{\pi K \rho}^\mu = \int \frac{d^4 l}{(4\pi)^2} \frac{l^\mu}{D_K D_\pi D_\rho} . \quad (\text{C.162})$$

De maneira análoga ao que fizemos no caso da caixa, a integral pode escrita em termos dos momentos externos

$$I_{\pi K \rho}^\mu = X p_3^\mu + Y (p_1 + p_2)^\mu . \quad (\text{C.163})$$

Para encontrar  $X$  e  $Y$ , o procedimento é exatamente o mesmo que o desenvolvido para a caixa, a única diferença sendo o número de propagadores. Como o quadrimomento em  $D_\rho$ , é o mesmo que em  $D_a$ , podemos usar o resultado obtido nas eqs.(C.157) e (C.158), tomando o cuidado de tomar o correto cancelamento de propagadores e substituir  $m_a^2 \rightarrow (\Theta_\rho - i\Theta_i)$ , a massa imaginária do  $\rho$ . Fazendo isso, obtemos:

$$\begin{aligned} X_{\pi K \rho} &= \frac{1}{4 Q'^2 m_{12}^2} \left\{ -2 m_{12}^2 I_{\pi K} + (M_D^2 - M_\pi^2 + m_{12}^2) I_{K \rho} - (M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) I_{\pi \rho} \right. \\ &\quad \left. + [(M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) (M_D^2 - M_K^2) - 2 m_{12}^2 (\Theta_\rho - i\Theta_i)] I_{\pi K \rho} \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.164})$$

$$\begin{aligned} Y_{\pi K \rho} &= -\frac{1}{4 Q'^2 m_{12}^2} \left\{ (M_D^2 - M_\pi^2 - m_{12}^2) [ -((\Theta_\rho - i\Theta_i) + M_D^2 - M_K^2) I_{\pi K \rho} + I_{\pi \rho} - I_{\pi K} ] \right. \\ &\quad \left. + 2 M_\pi^2 [(M_D^2 - M_K^2) I_{\pi K \rho} - I_{\pi \rho} + I_{K \rho}] \right\} . \end{aligned} \quad (\text{C.165})$$

A integral  $I_{\pi K\rho}^\mu$  (C.163) fica, assim, dada em termos de integrais do tipo triângulo e bolha conhecidas e calculadas anteriormente.

### Triângulo $I_{\pi\rho a}^P$

A integral associada ao triângulo  $I_{\pi\rho a}^P$  é dada por

$$I_{\pi\rho a}^\mu = \int \frac{d^4 l}{(4\pi)^2} \frac{l^\mu}{D_\pi D_\rho D_a} \quad (\text{C.166})$$

e ela depende apenas do momento  $p_3$ . Portanto, podemos escrever

$$I_{\pi\rho a}^\mu = X p_3^\mu; \quad (\text{C.167})$$

e  $X$  é calculada multiplicando (C.166) por  $p_{3\mu}$ , o que fornece

$$\begin{aligned} p_{3\mu} I_{\pi\rho a}^\mu &= \int \frac{d^4 l}{(4\pi)^2} \frac{p_3 \cdot l}{D_\pi D_\rho D_a}, \\ &= \int \frac{1}{2} \frac{D_a + m_a^2 - D_\pi}{D_\pi D_\rho D_a}, \\ &= \frac{1}{2} [m_a^2 I_{\pi\rho a} + I_{\pi\rho} - I_{\rho a}]. \end{aligned} \quad (\text{C.168})$$

e

$$p_{3\mu} I_{\pi\rho a}^\mu = X p_3^\mu p_{3\mu} = X M_\pi^2. \quad (\text{C.169})$$

Igualando (C.168) e (C.169), obtemos

$$X = \frac{1}{2 M_\pi^2} [m_a^2 I_{\pi\rho a} + I_{\pi\rho} - I_{\rho a}], \quad (\text{C.170})$$

e

$$I_{\pi\rho a}^\mu = p_3^\mu \frac{1}{2 M_\pi^2} [m_a^2 I_{\pi\rho a} + I_{\pi\rho} - I_{\rho a}]. \quad (\text{C.171})$$

### Triângulos $I_{K\rho a}^P$ e $I_{K\rho b}^P$

A integral para o triângulo  $I_{K\rho a}^P$  é dada por

$$I_{K\rho a}^\mu = \int \frac{d^4 l}{(4\pi)^2} \frac{l^\mu}{D_K D_\rho D_a} \quad (\text{C.172})$$

e ela só depende de  $P_D$ . Desta forma, podemos escrever

$$I_{K\rho a}^\mu = X P_D^\mu; \quad (\text{C.173})$$

multiplicando (C.172) por  $P_{D\mu}$ , temos

$$\begin{aligned} P_{D\mu} I_{K\rho a}^\mu &= \int \frac{d^4 l}{(4\pi)^2} \frac{P_D \cdot l}{D_K D_\rho D_a}, \\ &= \frac{1}{2} [(m_a^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{K\rho a} + I_{K\rho} - I_{\rho a}]. \end{aligned} \quad (\text{C.174})$$

e

$$P_{D\mu} I_{K\rho a}^\mu = X M_D^2. \quad (\text{C.175})$$

Igualando (C.175) e (C.174), encontramos

$$X = \frac{1}{2 M_D^2} [(m_a^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{K\rho a} + I_{K\rho} - I_{\rho a}], \quad (\text{C.176})$$

e

$$I_{K\rho a}^\mu = P_D^\mu \frac{1}{2 M_D^2} [(m_a^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{K\rho a} + I_{K\rho} - I_{\rho a}]. \quad (\text{C.177})$$

O resultado para  $I_{K\rho b}^\mu$  é totalmente análogo e dado por

$$I_{K\rho b}^\mu = P_D^\mu \frac{1}{2 M_D^2} [(m_b^2 + M_D^2 - M_K^2) I_{K\rho b} + I_{K\rho} - I_{\rho b}]. \quad (\text{C.178})$$



# Apêndice D

## Espalhamento elástico $\pi\pi$

A interação  $\pi\pi$  é descrita a partir da lagrangiana efetiva quirial [22], que inclui ressonâncias como graus explícitos de liberdade. A amplitude  $\pi^a(p_a)\pi^b(p_b) \rightarrow \pi^c(p_c)\pi^d(p_d)$  elástica tem a forma genérica:

$$T_{\pi\pi} = \delta_{ab}\delta_{cd}A(s, t, u) + \delta_{ac}\delta_{bd}A(t, u, s) + \delta_{ad}\delta_{bc}A(u, t, s), \quad (\text{D.1})$$

em que  $a, b, c, d$  são os índices de isospin. Neste trabalho, o nosso foco são os píons que nascem no decaimento do méson  $W$ , fig. 4.13, o que obriga a amplitude de interação  $\pi\pi$  ter  $I(J^P) = 1(1^-)$ . Seguindo a notação de Leutwyler[21], a amplitude de interesse é dada por  $T_{\pi\pi}^{I=1} = A(t, u, s) - A(u, s, t)$ . Os diagramas de Feynman que contribuem de

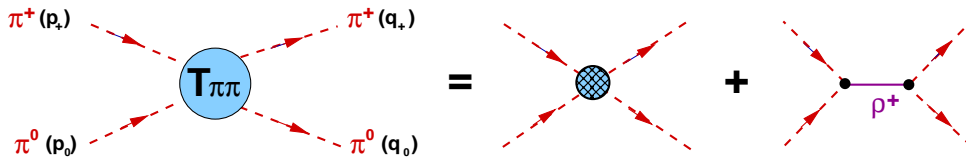


Figura D.1: Diagramas de Feynman que contribuem para amplitude de espalhamento  $\pi\pi$  em árvore com  $I(J^P) = 1(1^-)$ .

forma mais importante para a amplitude de espalhamento em árvore estão representados na fig.D.1, em que o termo de contato, de ordem  $\mathcal{O}(q^2)$ , domina o setor de baixas energias e o diagrama com a ressonância vetorial  $\rho$ , de  $\mathcal{O}(q^4)$ , domina em energias mais altas. As contribuições de diagramas envolvendo trocas de ressonâncias nos canais  $t$  e  $u$  são pequenas e, por isso, desconsideradas. Nessa aproximação, a amplitude  $T_{\pi\pi}^1$ , em árvore, é

dada pela soma dos termos de contato, eq.(D.2), e ressonante, eq.(D.3):

$$T_c^1 = (t - u) \frac{1}{F^2}; \quad (D.2)$$

$$T_\rho^1 = -(t - u) \frac{2G_V^2}{F^4} \frac{s}{s - m_\rho^2}; \quad (D.3)$$

$$T_{\pi\pi}^1 = (t - u) \left[ \frac{1}{F^2} - \frac{2G_V^2}{F^4} \frac{s}{s - m_\rho^2} \right], \quad (D.4)$$

sendo  $F$  a constante de decaimento do pión e  $G_V$ , a constante de acoplamento entre o  $\rho$  e os pions. As variáveis de Mandelstam  $s$ ,  $t$  e  $u$  para o caso  $\pi\pi$  são dadas no apêndice A.1, eqs(A.7 - A.9).

O *kernel* de interesse é obtido através da expansão da amplitude (D.4) em ondas parciais:

$$\bar{T}_{\pi\pi}^1(s, t) = \sum_{L=0}^{\infty} (2L + 1) P_L(\cos\theta) \mathcal{K}^{L1}(s) = \mathcal{K}^{S1}(s) + 3 \cos\theta \mathcal{K}^{P1}(s) + \dots; \quad (D.5)$$

e a componente associada à onda P é obtida invertendo essa relação. Assim, obtemos

$$\mathcal{K}^{P1} = \frac{s - 4 M_\pi^2}{3} \left[ \frac{1}{F^2} - \frac{2G_V^2}{F^4} \frac{s}{s - m_\rho^2} \right]. \quad (D.6)$$

Os Valores possíveis para  $G_V$  estão no intervalo  $53 \text{ MeV} < G_V < 69 \text{ MeV}$  [22]. O valor  $G_V = F/\sqrt{2} = 65.9 \text{ MeV}$  está dentro desse intervalo e é adotado aqui, porque permite a simplificação da álgebra. O kernel, em particular, pode ser reescrito como:

$$\mathcal{K}^{P1} = -\frac{m_\rho^2}{3 F^2} \frac{s - 4 M_\pi^2}{s - m_\rho^2}. \quad (D.7)$$

A amplitude unitária é obtida apos a iteração do *kernel* por meio da equação de Bethe-Salpeter [68], sendo dada por

$$T_{\pi\pi}^{P1} = \frac{\mathcal{K}^{P1}}{1 + \mathcal{K}^{P1} \Omega_\pi}, \quad (D.8)$$

em que  $\Omega_\pi$  é a função de *loop* do sistema  $\pi\pi$ . Essa função diverge e precisa ser regularizada, o que introduz uma constante real  $C_\pi$ . A amplitude resultante é

$$T_{\pi\pi}^{P1} = \frac{\mathcal{K}^{P1}}{1 + \mathcal{K}^{P1}(\bar{\Omega}_\pi + C_\pi)}. \quad (D.9)$$

A função de *loop* do sistema  $\pi\pi$  é um caso particular da calculada no apêndice C.1 eq.(C.30) e, agora, inclui o fator de simetria  $S = 1/2$ , devido à presença de duas partículas idênticas. Ela é dada por

$$\bar{\Omega}_\pi(s) = -\frac{S}{(16\pi^2)} [L_\pi(s) - L_\pi(0)] = -\frac{\bar{L}_\pi(s)}{(32\pi^2)}, \quad (D.10)$$

para  $\bar{L}_\pi(s)$  definido para diferentes regiões de  $s$  como:

$$\bullet \quad s < 0 \rightarrow \bar{L}_\pi(s) = 2 + \frac{\sqrt{\lambda}}{s} \ln \left[ \frac{2M_\pi^2 - s + \sqrt{\lambda}}{2M_\pi^2} \right], \quad (\text{D.11})$$

$$\bullet \quad 0 < s < 2M_\pi^2 \rightarrow \bar{L}_\pi(s) = 2 - \frac{\sqrt{-\lambda}}{s} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{-\lambda}}{2M_\pi^2 - s} \right), \quad (\text{D.12})$$

$$\bullet \quad 2M_\pi^2 < s < 4M_\pi^2 \rightarrow \bar{L}_\pi(s) = 2 - \frac{\sqrt{-\lambda}}{s} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{-\lambda}}{2M_\pi^2 - s} \right) + \pi \right], \quad (\text{D.13})$$

$$\bullet \quad s > 4M_\pi^2 \rightarrow \bar{L}_\pi(s) = 2 - \frac{\sqrt{\lambda}}{s} \ln \left[ \frac{s - 2M_\pi^2 + \sqrt{\lambda}}{2M_\pi^2} \right] + i\pi \frac{\sqrt{\lambda}}{s}, \quad (\text{D.14})$$

$$\lambda = s^2 - 4sM_\pi^2. \quad (\text{D.15})$$

A escolha da constante de subtração  $C_\pi$  é feita obrigando a fase a passar por  $90^\circ$  na massa da ressonância  $\rho$ , i.e.,  $C_\pi = -\mathcal{R}[\bar{\Omega}_\pi(m_\rho^2)]$ .

No regime elástico, a amplitude  $\pi\pi$  (D.9) pode ser escrita em função da fase como

$$T_{\pi\pi}^{P1} = 32\pi \sqrt{\frac{s}{s - 4M_\pi^2}} \sin \delta e^{i\delta}. \quad (\text{D.16})$$

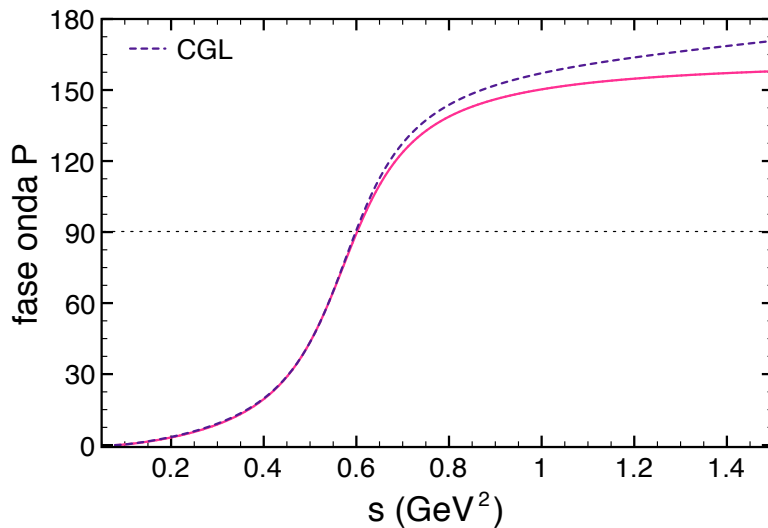


Figura D.2: Fase da amplitude  $\pi\pi$ , (D.16) comparada com o resultado de Colangelo Gasser e Leutwyler (CGL)[89].

A figura D.2 mostra o resultado para a fase  $\pi\pi$  da onda P, obtida a partir da equação (D.9), em comparação com a fornecida por Colangelo, Gasser e Leutwyler (CGL)[89], em um cálculo até  $\mathcal{O}(q^6)$  na ChPT. Como mostra o gráfico, a região de baixas energias está em

perfeito acordo com CGL e a divergência na região de energias mais altas é relativamente pequena.

# Apêndice E

## Vértice axial

A contribuição do vértice axial é consideravelmente mais complicada do que a do vértice vetorial e embora tenhamos calculado os fatores de forma, não existe informação fenomenológica disponível para fixar todas as constantes necessárias. Embora não tenha sido possível finalizar a contribuição do vértice axial para a amplitude  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , este apêndice é um guia em estágio avançado deste processo.

A dinâmica do vértice axial  $D \rightarrow K\pi W$  é descrita pela lagrangiana (1.4), uma adaptação ao setor leve das propostas em [35] e [36]. A nota elaborada por Robilotta[97] descreve todas as regras de Feynman dos acoplamentos fortes e fracos entre os mésons  $D$ ,  $D_s^*$ ,  $\pi$  e  $K$ . A inclusão de ressonâncias escalares e vetoriais que se acoplam ao setor do charme, por um lado, e a píons e kaons, por outro, foi feita usando o formalismo proposto por EGPR[22] no contexto e  $SU(3)$  leve. Com isso, temos todos os elementos necessários para calcular a amplitude do vértice axial, representada pelos diagramas da figura 1.8.

### E.1 Amplitude

O decaimento axial do processo  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  pode ser dividido em duas partes: (i) a transição  $D \rightarrow K\pi W$  representada pelo elemento de matriz  $\langle K^- \pi^+ | V^\mu - A^\mu | D^+ \rangle$  e (ii) o decaimento do pión no vácuo excitado pela energia do  $W^+$ . Como o último processo é bem conhecido na literatura como sendo proporcional a  $F_\pi$ , nos concentramos no primeiro. A transição  $D \rightarrow K\pi W$  foi introduzida no capítulo 1.2, descrita pelos diagramas da fig.1.8. Tais diagramas são reproduzidos na fig. fig.E.1, com legenda nos diagramas para facilitar

a relação com as respectivas regras de Feynman que são apresentadas na sequência.

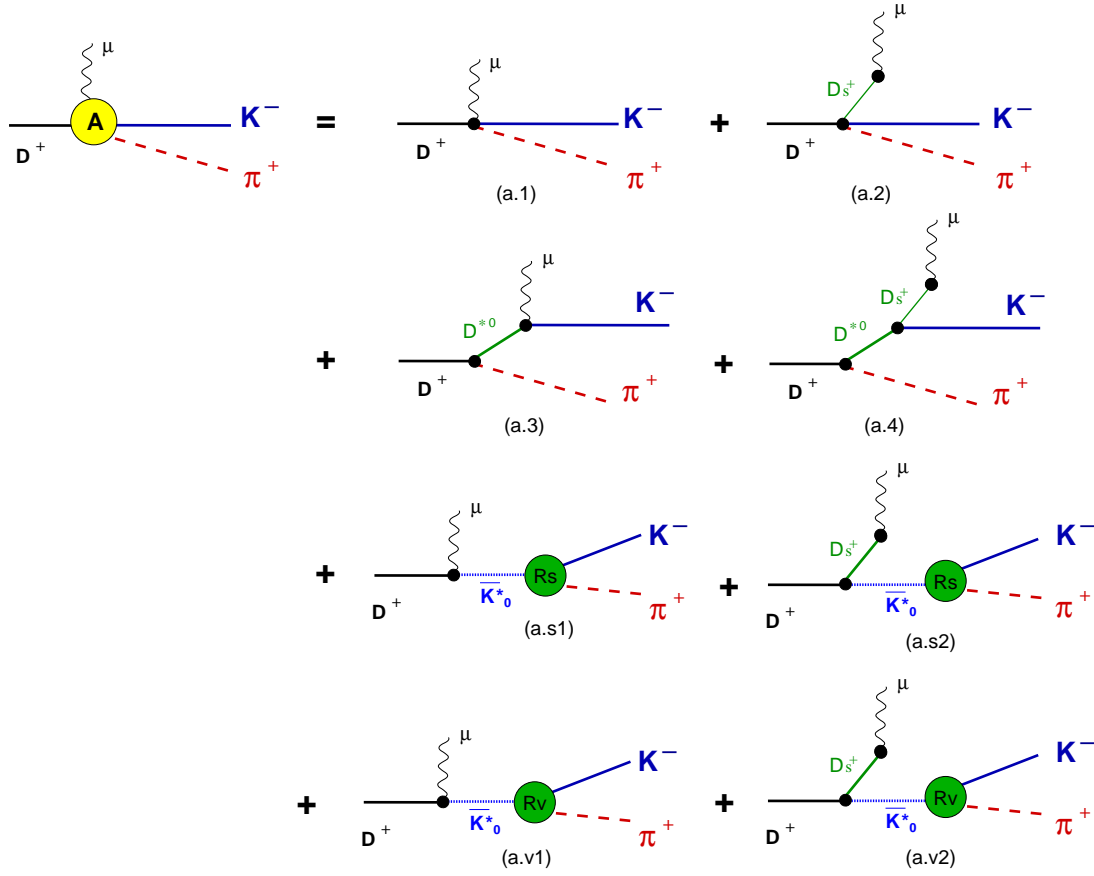


Figura E.1: Diagramas de Feynman que contribuem para a amplitude axial do  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ .

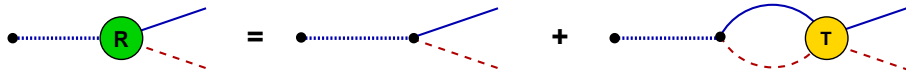


Figura E.2: Amplitude de produção.

As amplitudes de produção, representada por  $R$  nos diagramas  $a.s$  e  $a.v$ , são descritas pelos diagramas da fig. E.2 em que o diagrama em árvore precisa ser vestido por um *loop* de mésons para não divergir. A amplitude de produção  $R$  para o caso escalar e vetorial pode é dada por:

$$iR_s = \frac{\sqrt{2} cds - (cd - cm)(M_\pi^2 + M_K^2)}{F^2 (s - m_{K_0^*}^2 + i\epsilon)} (1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^S); \quad (\text{E.1})$$

$$iR_v = i \frac{G_V}{F^2} (p_\pi^\alpha p_K^\beta - p_\pi^\beta p_K^\alpha) \frac{1}{s - m_{K_0^*}^2 + i\epsilon} (1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^P). \quad (\text{E.2})$$

em que  $T_{K\pi}^S$  e  $T_{K\pi}^P$  são as componentes de onda S e P da amplitude de espalhamento  $K\pi$ , calculada no cap. 2.

Os vértices dos diagramas da fig.E.1 são uma mistura de acoplamentos calculados em [97] e [22], e as amplitudes resultantes são dadas por:

$$T_{(a.1)}^\mu = \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C \right] \left[ \frac{i}{F^2} \right] \times \left\{ G_{wD0} p_K^\mu + \frac{1}{4} G_{wD1} (P_D^\mu + (p_\pi - p_K)^\mu) - G_{wD2} (P_D \cdot p_K) P_D^\mu \right\}; \quad (\text{E.3})$$

$$T_{(a.2)}^\mu = \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C \right] \left[ -\frac{i G_{wD1}}{8 F^2} \right] \left( \frac{1}{(P_D - p_\pi - p_K)^2 - M_{D_s}^2 + i \epsilon} \right) \times [(2P_D - p_\pi - p_K) \cdot (p_\pi - p_K)] (P_D - p_\pi - p_K)^\mu; \quad (\text{E.4})$$

$$T_{(a.3)}^\mu = \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C \right] \left[ \frac{i 4 G_{uDD^*}}{F^2} \right] \left[ \frac{1}{(P_D - p_\pi)^2 - M_{D^*}^2 + i \epsilon} \right] \times \{ 2 G_{wD0}^* [(p_\pi \cdot p_K) P_D^\mu - (P_D \cdot p_K) p_\pi^\mu] + [G_{wD1}^* - 2 (P_D - p_\pi) \cdot p_K G_{wD2a}^*] [(P_D - p_\pi) \cdot p_\pi P_D^\mu - (P_D - p_\pi) \cdot P_D p_\pi^\mu] + 2 G_{wD2b}^* [(M_\pi^2 - P_D \cdot p_\pi) (P_D \cdot p_K) + (M_D^2 - P_D \cdot p_\pi) (p_\pi \cdot p_K)] (P_D - p_\pi)^\mu - i 2 G_{wD2c}^* \epsilon^{\mu\theta\phi\lambda} (P_D - p_\pi)^2 p_{\pi\theta} p_{K\phi} P_{D\lambda} \}; \quad (\text{E.5})$$

$$T_{(a.4)}^\mu = \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C \right] \left[ \frac{i 8 G_{uDD^*}^2 G_{wD1}}{F^2} \right] \times \left[ \frac{1}{(P_D - p_\pi)^2 - M_{D^*}^2 + i \epsilon} \right] \left[ \frac{1}{(P_D - p_\pi - p_K)^2 - M_{D_s}^2 + i \epsilon} \right] \times [(P_D \cdot P_\pi)(p_\pi \cdot p_K) - M_D^2 (p_\pi \cdot p_K) - M_\pi^2 (P_D \cdot p_K) + (P_D \cdot P_\pi) (P_D \cdot p_K)] (P_D - p_\pi - p_K)^\mu; \quad (\text{E.6})$$

$$\begin{aligned}
T_{(a.s1)}^\mu &= -i \frac{2\gamma'_s}{F^2} \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C \right] \\
&\times [cds_{12} - (cd - cm)(M_\pi^2 + M_K^2)] \frac{(1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^S)}{s_{12} - m_{K_0^*}^2} P_D^\mu; \quad (E.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{(a.s2)}^\mu &= i \frac{2\gamma_s}{F^2} G_{wD1} \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C \right] \\
&\times [cds_{12} - (cd - cm)(M_\pi^2 + M_K^2)] \frac{(1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^S)}{s_{12} - m_{K_0^*}^2} \\
&\times \frac{1}{(P_D - p_\pi - p_K)^2 - M_{D_s}^2 + i\epsilon} P_{D_s}^\mu; \quad (E.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{(a.v1)}^\mu &= -i \frac{\sqrt{2}\gamma'_v}{F^2} G_V \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C \right] \\
&\times \frac{1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^P}{s_{12} - m_{K^*}^2} [P_D \cdot p_\pi p_K^\mu - P_D \cdot p_K p_\pi^\mu]; \quad (E.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{(a.v2)}^\mu &= i \frac{4\sqrt{2}\gamma_v}{F^2} G_{wD1} G_V \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \cos \theta_C \right] \\
&\times \frac{1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^P}{s_{12} - m_{K^*}^2 + i\epsilon} \frac{1}{(P_D - p_\pi - p_K)^2 - M_{D_s}^2 + i\epsilon} \\
&\times (P_D \cdot p_\pi P_{D_s} \cdot p_K - P_D \cdot p_K P_{D_s} \cdot p_\pi) P_{D_s}^\mu. \quad (E.10)
\end{aligned}$$

Nas amplitude acima, os acoplamentos do tipo  $G_{uDD^*}$  e  $G_{Dwx}$ , vem da lagrangiana (1.4) e precisam de informações fenomenológicas para serem fixadas.

## amplitude total

A amplitude total do decaimento axial é dada pela soma de todas as contribuições acima,

$$T_A^\mu = T_{(a.1)}^\mu + T_{(a.2)}^\mu + T_{(a.3)}^\mu + T_{(a.4)}^\mu + T_{(a.s1)}^\mu + T_{(a.s2)}^\mu + T_{(a.v1)}^\mu + T_{(a.v2)}^\mu \quad (E.11)$$



## E.2 Fatores de Forma

O vértice que descreve o processo  $D^+ \rightarrow W^+ X^0$  é, geneticamente, relacionado aos fatores de forma (FF) como

$$iT_{DWX} = i \left[ \frac{g}{2\sqrt{2}} \right] \left[ \cos \theta_C \langle X^0 | V^\mu - A^\mu | D^+ \rangle - \sin \theta_C \langle X^0 | V^\mu - A^\mu | D^+ \rangle \right] \quad (\text{E.12})$$

A forma geral para esse vértice foi dada por Kühn and Mirkes[98] como sendo:

$$\langle h_1(q_1) h_2(q_2) h_3(q_3) | V^\mu + A^\mu | 0 \rangle = V_1^\mu F_1 + V_2^\mu F_2 + i V_3^\mu F_3 + V_4^\mu F_4, \quad (\text{E.13})$$

$$V_1^\mu = q_1^\mu - q_3^\mu - Q^\mu \frac{Q \cdot (q_1 - q_3)}{Q^2},$$

$$V_2^\mu = q_2^\mu - q_3^\mu - Q^\mu \frac{Q \cdot (q_2 - q_3)}{Q^2},$$

$$V_3^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} q_{1\alpha} q_{2\beta} q_{3\gamma},$$

$$V_4^\mu = q_1^\mu + q_2^\mu + q_3^\mu = Q^\mu.$$

O FF  $V_3$  está associado à  $V^\mu$  enquanto os demais são relacionados à  $A^\mu$ . Para o caso específico do  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , temos:

$$\begin{aligned} \langle K^-(p_K) \pi^+(p_\pi) | A^\mu | D^+(P_D) \rangle = & - \left\{ \left[ (P_D + p_\pi)^\mu - Q^\mu \frac{Q \cdot (P_D + p_\pi)}{Q^2} \right] F_1 \right. \\ & \left. - \left[ (p_K - p_\pi)^\mu - Q^\mu \frac{Q \cdot (p_K - p_\pi)}{Q^2} \right] F_2 - Q^\mu F_4 \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

$$Q^\mu = p_K^\mu + p_\pi^\mu - P_D^\mu$$

Os quadrimomentos dos mésons que participam do decaimento do  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , podem ser escritos em termos de uma combinação apropriada dada pelos FF em (E.14):

$$P_D^\mu = \frac{1}{3} (2(P_D + p_\pi)^\mu + (p_K - p_\pi)^\mu - (p_\pi + p_K - P_D)^\mu); \quad (\text{E.15})$$

$$p_\pi^\mu = \frac{1}{3} ((P_D + p_\pi)^\mu - (p_K - p_\pi)^\mu + (p_\pi + p_K - P_D)^\mu); \quad (\text{E.16})$$

$$p_K^\mu = \frac{1}{3} ((P_D + p_\pi)^\mu + 2(p_K - p_\pi)^\mu + (p_\pi + p_K - P_D)^\mu); \quad (\text{E.17})$$

$$P_{Ds}^\mu = (-p_\pi - p_K + P_D)^\mu = -Q^\mu. \quad (\text{E.18})$$

Inserindo os quadrimomentos de volta em (E.14), os FF resultantes são dados por:

$$\begin{aligned}
F_1 = & -\frac{i}{3F^2} \left\{ G_{wD0} + \frac{1}{2} G_{wD1} - 2 G_{wD2} (P_D \cdot p_K) + 8 G_{uDD^*} G_{wD0}^* \left[ \frac{(p_\pi \cdot p_K) - (P_D \cdot p_K)}{(P_D - p_\pi)^2 - M_{D^*}^2 + i\epsilon} \right] \right. \\
& + 4 G_{uDD^*} [G_{wD1}^* - 2 (P_D - p_\pi) \cdot p_K G_{wD2a}^*] \left[ \frac{(P_D \cdot p_\pi - M_\pi^2)2 + (P_D \cdot p_\pi - M_D^2)}{(P_D - p_\pi)^2 - M_{D^*}^2 + i\epsilon} \right] \\
& + 8 G_{uDD^*} G_{wD2b}^* \left[ \frac{(M_\pi^2 - P_D \cdot p_\pi) (P_D \cdot p_K) + (M_D^2 - P_D \cdot p_\pi) (p_\pi \cdot p_K)}{(P_D - p_\pi)^2 - M_{D^*}^2 + i\epsilon} \right] \\
& - 2\gamma'_s [cds_{12} - (cd - cm)(M_\pi^2 + M_K^2)] \frac{(1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^S)}{s_{12} - m_{K_0}^2} \\
& \left. - \sqrt{2}\gamma'_v G_V \frac{1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^P}{s_{12} - m_{K^*}^2} (P_D \cdot p_\pi - P_D \cdot p_K) \right\}; \tag{E.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 = & \frac{i}{3F^2} \left\{ 2 \left( G_{wD0} - \frac{1}{4} G_{wD1} \right) - G_{wD2} (P_D \cdot p_K) \right. \\
& + \frac{4 G_{uDD^*}}{(P_D - p_\pi)^2 - M_{D^*}^2 + i\epsilon} [2G_{wD0}^* ((p_\pi \cdot p_K) + (P_D \cdot p_K))] \\
& + (G_{wD1}^* - 4 (P_D - p_\pi) \cdot p_K G_{wD2a}^*) (M_D^2 - M_\pi^2) \\
& + 2 G_{wD2b}^* ((M_\pi^2 - P_D \cdot p_\pi) (P_D \cdot p_K) + (M_D^2 - P_D \cdot p_\pi) (p_\pi \cdot p_K))] \tag{E.20} \\
& - 4\gamma'_s [cds_{12} - (cd - cm)(M_\pi^2 + M_K^2)] \frac{(1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^S)}{s_{12} - m_{K_0}^2} \\
& \left. + \sqrt{2}\gamma'_v G_V \frac{1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^P}{s_{12} - m_{K^*}^2} (2 P_D \cdot p_\pi + P_D \cdot p_K) \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_4 = & \frac{i}{F^2} \left\{ \left( G_{wD0} - \frac{1}{4} G_{wD1} \right) \frac{Q \cdot p_K}{Q^2} - G_{wD2} (P_D \cdot p_K) \frac{Q \cdot P_D}{Q^2} \right. \\
& + \frac{1}{4} G_{wD1} \left[ \frac{Q \cdot (P_D + p_\pi)}{Q^2} + \frac{1}{2} \frac{2 P_D \cdot (p_\pi - p_K) - (M_\pi^2 - M_K^2)}{Q^2 - M_{D_s}^2 + i\epsilon} \right] \\
& + \frac{4 G_{uD D^*}}{(P_D - p_\pi)^2 - M_{D^*}^2 + i\epsilon} \left[ 2 G_{wD0}^* \left( (p_\pi \cdot p_K) \frac{Q \cdot P_D}{Q^2} - (P_D \cdot p_K) \frac{Q \cdot p_\pi}{Q^2} \right) \right. \\
& + (G_{wD1}^* - 2 (P_D - p_\pi) \cdot p_K G_{wD2a}^*) \left( (P_D \cdot p_\pi - M_\pi^2) \frac{Q \cdot P_D}{Q^2} + (P_D \cdot p_\pi - M_D^2) \frac{Q \cdot p_\pi}{Q^2} \right) \\
& \left. + 2 G_{wD2b}^* \frac{Q \cdot (P_D - p_\pi)}{Q^2} \left( (M_\pi^2 - P_D \cdot p_\pi) (P_D \cdot p_K) + (M_D^2 - P_D \cdot p_\pi) (p_\pi \cdot p_K) \right) \right] \\
& + 8 G_{uD D^*}^2 G_{wD1} \left[ \frac{M_D^2 (p_\pi \cdot p_K) - (P_D \cdot P_\pi) (P_D \cdot p_K) + M_\pi^2 (P_D \cdot p_K) - (P_D \cdot P_\pi) (p_\pi \cdot p_K)}{[(P_D - p_\pi)^2 - M_{D^*}^2 + i\epsilon] [Q^2 - M_{D_s}^2 + i\epsilon]} \right] \\
& - 2\gamma'_s [cds_{12} - (cd - cm)(M_\pi^2 + M_K^2)] \frac{(1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^S) Q \cdot P_D}{s_{12} - m_{K_0^*}^2} \frac{1}{Q^2} \\
& - 2\gamma_s G_{wD1} [cds_{12} - (cd - cm)(M_\pi^2 + M_K^2)] \frac{(1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^S)}{s_{12} - m_{K_0^*}^2} \frac{1}{Q^2 - M_{D_s}^2 + i\epsilon} \\
& - \sqrt{2} \gamma'_v G_V \frac{1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^P}{s_{12} - m_{K^*}^2} \left( P_D \cdot p_\pi \frac{Q \cdot p_K}{Q^2} - P_D \cdot p_K \frac{Q \cdot p_\pi}{Q^2} \right) ; \\
& \left. - 4\sqrt{2} \gamma_v G_{wD1} G_V \frac{1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^P}{s_{12} - m_{K^*}^2 + i\epsilon} \frac{P_D \cdot p_\pi P_{D_s} \cdot p_K - P_D \cdot p_K P_{D_s} \cdot p_\pi}{Q^2 - M_{D_s}^2 + i\epsilon} \right\}. \tag{E.21}
\end{aligned}$$

Para obter a amplitude axial do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ , é preciso incluir a contribuição da transição  $W^\mu \rightarrow \pi^+$ , que é dada por:

$$\langle \pi^+ | A^\mu | 0 \rangle = i F_\pi \frac{g \cos \theta}{2} Q^\mu. \tag{E.22}$$

Quando multiplicamos (E.22) por (E.14), apenas o fator de forma  $F^4$  sobrevive e a amplitude axial resulta em

$$T_A = i \left[ \frac{g^2 \cos^2 \theta}{4\sqrt{2}} \right] F_\pi F_4 Q^2. \tag{E.23}$$

Esse resultado é muito importante neste problema por duas razões: (i) restringe o número de constantes de acoplamento e (ii) cria um problema para fixar as constantes restantes

usando informações experimentais do decaimento semileptônico  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \nu \ell_\nu$ . Isso porque, no último o  $F_4$  é proporcional a massa do neutrino.

Na atual situação, não existem informações fenomenológicas suficientes para fixar todas as constantes de acoplamento. A alternativa foi reduzir drasticamente o numero de constantes fazendo o limite em que os  $D^*$  e  $D_s$  são desligados. O que corresponde na prática a tomar o limite em que as massas de  $M_{D^*}^2$  e  $M_{D_s}^2$  vão para o infinito.

### E.2.1 Limite $M_{D^*}^2$ e $M_{D_s}^2$ para o infinito

Nesse limite, os propagadores são simplificados para:

$$\frac{1}{P^2 - M_{D^*}^2 + i\epsilon} = \frac{1}{M_{D^*}^2} \frac{1}{\frac{P^2}{M_{D_s}^2} - 1 + i\epsilon} (M_{D^*} \rightarrow \infty) \frac{-1}{M_{D_s}^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_{D_s}^4}\right); \quad (\text{E.24})$$

e o a função em (E.23) é dada por:

$$\begin{aligned} F_4 \times Q^2 \Rightarrow & \frac{i}{F^2} \left\{ \frac{G_{wD0}}{2} (M_\pi^2 + M_K^2 - s_{23}) - \frac{G_{wD1}}{4} (s_{13} - M_\pi^2) \right. \\ & - \frac{G_{wD2}}{4} (s_{12} + s_{23} - 2M_\pi^2)(s_{12} - M_\pi^2 - M_D^2) \\ & - \gamma'_s [cds_{12} - (cd - cm)(M_\pi^2 + M_K^2)] \frac{(1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^S)}{s_{12} - m_{K_0^*}^2} (s_{12} - M_\pi^2 - M_D^2) \\ & \left. - \frac{\sqrt{2}}{4} \gamma'_v G_V \frac{1 - \bar{\Omega}}{s_{12} - m_{K^*}^2} [(s_{12}(s_{13} - s_{23}) + M_\pi^4 + M_D^2)(M_K^2 - M_\pi^2)] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

As variáveis  $s_{13}$  e  $s_{23}$  foram projetadas no referencial das partículas 12, como feito no apêndice A.3, eqs(A.36) e (A.37) e em seguida, projetadas na onda S. Considerando apenas as contribuições de ressonâncias escalares, a estrutura mínima para a amplitude axial do decaimento resulta em

$$\begin{aligned} T_A = & - \left[ \frac{g^2 \cos^2 \theta}{4\sqrt{2}} \right] \frac{1}{F} \left\{ a_0 + a_1 s_{12} + a_2 \frac{(M_D^2 - M_\pi^2)(M_K^2 - M_\pi^2)}{s_{12}} \right. \\ & \left. + (a_3 + a_4 s_{12}) [cds_{12} - (cd - cm)(M_\pi^2 + M_K^2)] \frac{(1 - \bar{\Omega} T_{K\pi}^S)}{s_{12} - m_{K_0^*}^2} \right\}; \quad (\text{E.26}) \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{G_{wD0}}{4} (M_K^2 - M_D^2) - \frac{G_{wD1}}{8} (M_K^2 + M_D^2) \\
&+ \frac{G_{wD2}}{4} (4M_\pi^2(M_K^2 + M_D^2) + 3M_\pi^4 + M_D^4); \tag{E.27}
\end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{G_{wD0}}{4} + \frac{G_{wD1}}{8} - \frac{G_{wD2}}{4} (2M_\pi^2 + M_K^2 + M_D^2); \tag{E.28}$$

$$a_2 = -\frac{G_{wD0}}{4} + \frac{G_{wD1}}{8} + \frac{G_{wD2}}{4} (3M_\pi^2 + M_D^2); \tag{E.29}$$

$$a_3 = \gamma'_s (M_\pi^2 + M_D^2); \tag{E.30}$$

$$a_4 = -\gamma'_s; \tag{E.31}$$

## E.2.2 Resultado preliminar

O objetivo deste estudo inicial é adquirir alguma intuição sobre o comportamento desta amplitude e a importância relativa das diferentes constantes de acoplamento em (E.26). Para isso, demos valores arbitrários as constantes e os resultados são mostrados abaixo. A última linha da eq.(E.26) representa a contribuição dos diagramas com ressonâncias e pode ser reescrita, para facilitar, como:  $R_s(s) (a + b s)$ , para  $a$  e  $b$  constantes.

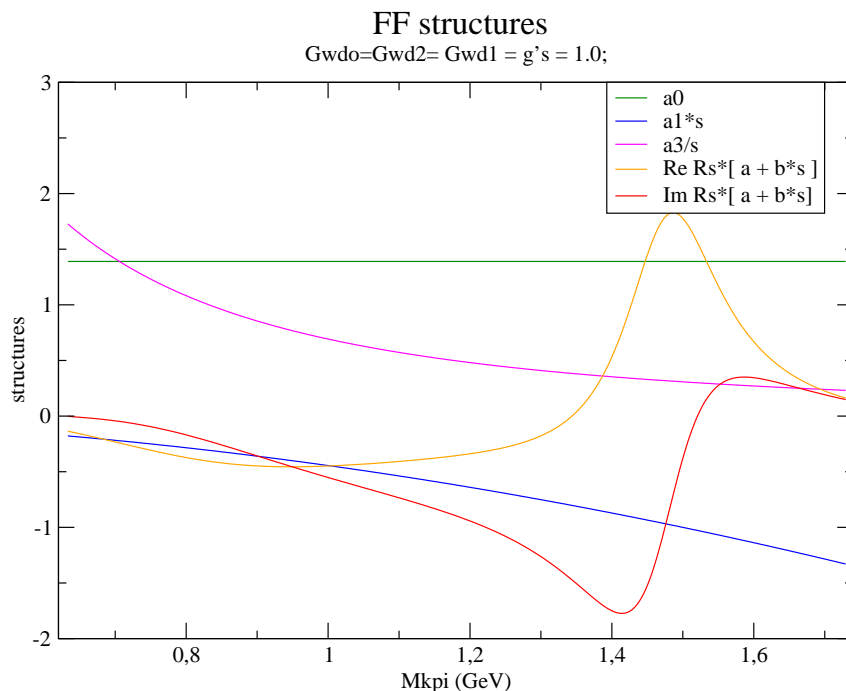


Figura E.3: Magnitude de  $T_A$ , com todas as constantes de acoplamento que contribuem para eq.(E.26) fixadas em 1.

Na fig. E.3, todas as constantes valem 1 e é visível que elas competem em importância entre si. Esse resultado indica que a amplitude axial é fortemente dependente dos valores que as constantes podem assumir. E, portanto, não é óbvio nesse estágio do entendimento do problema, que algum parâmetro deva dominar sobre outros. Analisando a contribuição da ressonância com mais cuidado, fig. E.4, vemos que uma escolha de valores de  $a$  e  $b$  pode minimizar essa contribuição. Não obstante, esse mesmo diagrama é considerado a principal contribuição em cálculos anteriores do decaimento  $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$  [31, 34]. Para completar, fixamos  $a$  e  $b$  na mínima contribuição observada (i.e.,  $a = b = -0.5$ ), e variamos os demais acoplamentos todos juntos. Como mostra a fig. E.5, os acoplamentos podem mudar a intensidade total da amplitude  $T_A$ .

Com esse estudo, podemos concluir que: (i) Não é óbvio que o acoplamento com a ressonância deva dominar os demais acoplamentos e (ii) precisamos de mais fontes de informações para fixar todas as constantes. Uma maneira de fazer isso, seria fazer um ajuste dos dados experimentais.

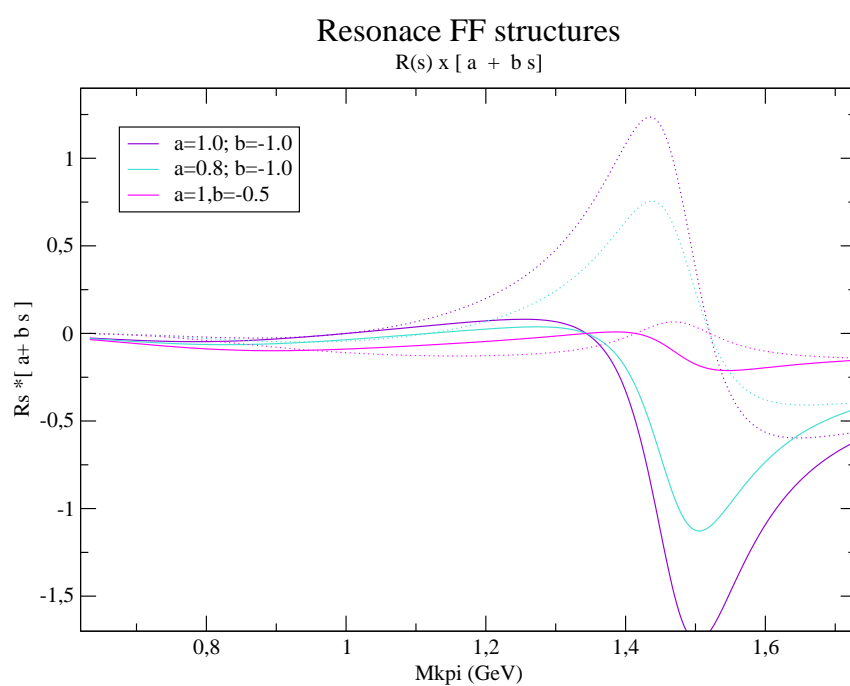


Figura E.4: Acoplamento dos diagramas com ressonâncias em  $T_A$  (E.26), para diferentes valores de  $a$  e  $b$ .

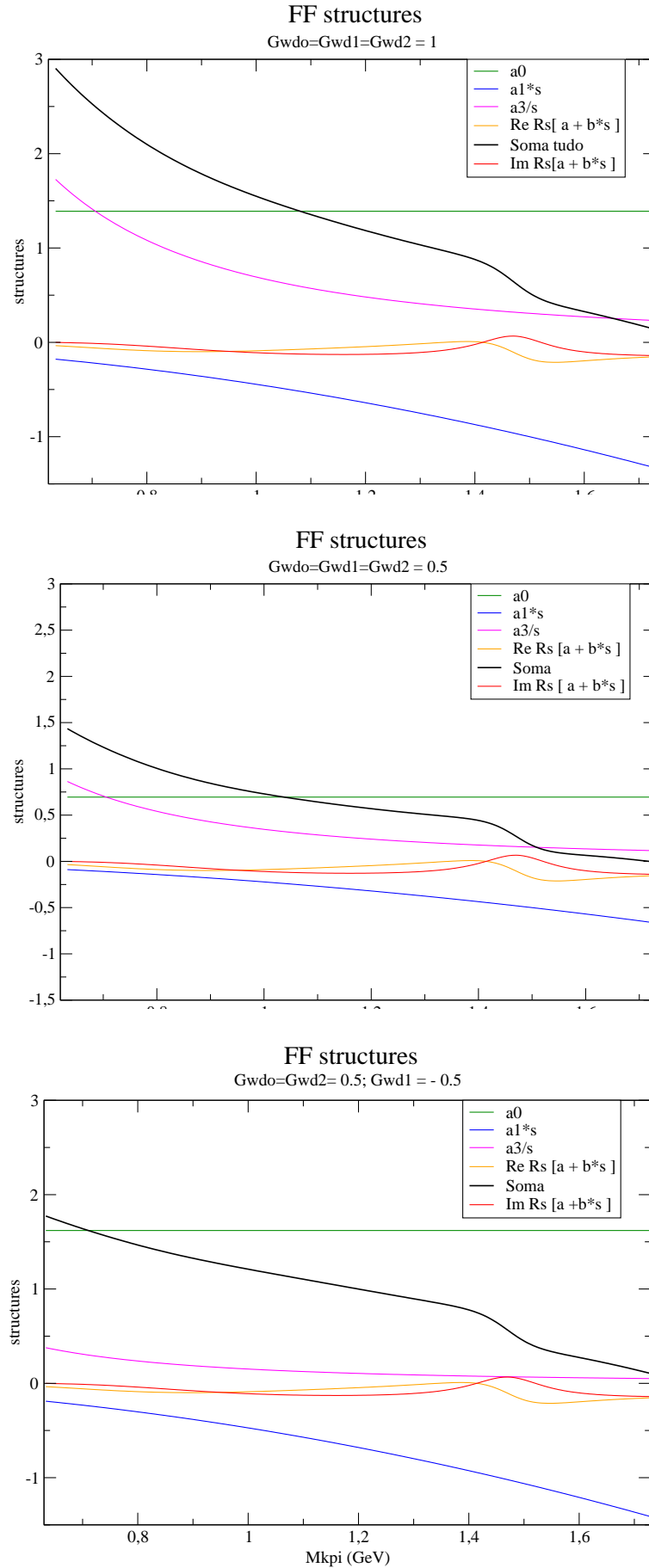


Figura E.5: Magnitude de  $T_A$  com todos os acoplamentos que contribuem para eq.(E.26) com três sets para  $G_{wDx}$ , para  $a$  e  $b$  fixados em  $-0.5$ .



# Apêndice F

## Valores numéricos

Todos os valores numérico utilizados em escala de GeV,  $\text{GeV}^{-1}$  ou são constantes.

Massas do PDG 2012[16]:

$$M_K = 0.493677 \quad (\text{F.1})$$

$$M_\pi = 0.13957 \quad (\text{F.2})$$

$$M_D = 1.86962 \quad (\text{F.3})$$

$$m_\rho = 0.77549; \quad (\text{F.4})$$

$$m_{D^*v} = 2.1; \quad (\text{F.5})$$

$$m_{D^*s} = 2.3; \quad (\text{F.6})$$

$$(\text{F.7})$$

Acoplamentos, tirados da literatura

$$F_{K\pi} = 0.102722; \quad (\text{F.8})$$

$$F_{\pi} = 0.093; \quad (\text{F.9})$$

$$c_d = 0.030; \quad (\text{F.10})$$

$$c_m = 0.043; \quad (\text{F.11})$$

$$G_F = 1.16637e - 5; \quad (\text{F.12})$$

$$\cos^2 \theta_c = 0.949089563; \quad (\text{F.13})$$

$$G_V = \frac{F_{(\pi, K\pi)}^2}{2}; \quad (\text{F.14})$$

$$F_1(0) = 0.75; \quad (\text{F.15})$$

$$(\text{F.16})$$

Resultado de ajustes

$$m_{K_0^*(1430)} = 1.33; \quad (\text{F.17})$$

$$C_s = 0.001836; \quad (\text{F.18})$$

$$m_{K^*} = 0.89594; \quad (\text{F.19})$$

$$C_v = 0.0051248; \quad (\text{F.20})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).
- [2] G. Zweig (1964), cERN-TH-401.
- [3] S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **B622**, 207 (2005), hep-ph/0504116.
- [4] E. M. Aitala et al. (E791), Phys. Rev. Lett. **89**, 121801 (2002), hep-ex/0204018.
- [5] J. M. Link et al. (FOCUS), Phys. Lett. **B681**, 14 (2009).
- [6] D. Aston et al., Nucl. Phys. **B296**, 493 (1988).
- [7] P. Estabrooks et al., Nucl. Phys. **B133**, 490 (1978).
- [8] E. van Beveren et al., Z. Phys. **C30**, 615 (1986), 0710.4067.
- [9] S. Ishida, T. Ishida, M. Ishida, K. Takamatsu, and T. Tsuru, Prog. Theor. Phys. **98**, 1005 (1997).
- [10] D. Black, A. H. Fariborz, F. Sannino, and J. Schechter, Phys. Rev. **D58**, 054012 (1998), hep-ph/9804273.
- [11] D. V. Bugg, Phys. Lett. **B572**, 1 (2003).
- [12] Z. Y. Zhou and H. Q. Zheng, Nucl. Phys. **A775**, 212 (2006), hep-ph/0603062.
- [13] J. A. Oller and E. Oset, Phys. Rev. **D60**, 074023 (1999), hep-ph/9809337.
- [14] M. Jamin, J. A. Oller, and A. Pich, Nucl. Phys. **B587**, 331 (2000), hep-ph/0006045.
- [15] S. Descotes-Genon and B. Moussallam, Eur. Phys. J. **C48**, 553 (2006), hep-ph/0607133.
- [16] J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys.Rev. **D86**, 010001 (2012).
- [17] R. H. Dalitz, Phil. Mag. **44**, 1068 (1953).

- 
- [18] E. M. Aitala et al. (E791), Phys. Rev. **D73**, 059901 (2006).
- [19] J. M. Link et al. (FOCUS), Phys. Lett. **B653**, 1 (2007), hep-ex/0705.2248.
- [20] G. Bonvicini et al. (CLEO Collaboration), Phys.Rev. **D78**, 052001 (2008), 0802.4214.
- [21] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B250**, 517 (1985).
- [22] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, and E. de Rafael, Nucl. Phys. **B321**, 311 (1989).
- [23] M. Beneke and M. Neubert, Nucl.Phys. **B675**, 333 (2003), hep-ph/0308039.
- [24] C. W. Bauer, D. Pirjol, and I. W. Stewart, Phys.Rev. **D65**, 054022 (2002), hep-ph/0109045.
- [25] M. Neubert, Phys.Rept. **245**, 259 (1994), hep-ph/9306320.
- [26] L.-L. Chau, Phys.Rept. **95**, 1 (1983).
- [27] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Westview Press, 1995).
- [28] M. Wirbel, B. Stech, and M. Bauer, Z.Phys. **C29**, 637 (1985).
- [29] M. Bauer, B. Stech, and M. Wirbel, Z.Phys. **C34**, 103 (1987).
- [30] A. J. Buras, M. Jamin, M. Lautenbacher, and P. H. Weisz, Nucl.Phys. **B370**, 69 (1992).
- [31] M. Diakonou and F. Diakonou, Phys.Lett. **B216**, 436 (1989).
- [32] I. Bediaga, C. Gobel, and R. Mendez-Galain, Phys.Rev.Lett. **78**, 22 (1997), hep-ph/9605442.
- [33] I. Bediaga, C. Gobel, and R. Mendez-Galain, Phys.Rev. **D56**, 4268 (1997), hep-ph/9704437.
- [34] D. Boito and R. Escribano, Phys.Rev. **D80**, 054007 (2009), 0907.0189.
- [35] G. Burdman and J. F. Donoghue, Phys.Lett. **B280**, 287 (1992).
- [36] M. B. Wise, Phys.Rev. **D45**, 2188 (1992).
- [37] P. Magalhaes, M. Robilotta, K. Guimaraes, T. Frederico, W. de Paula, et al., Phys.Rev. **D84**, 094001 (2011), hep-ph/1105.5120.

- [38] P. Magalhães, M. Robilotta, K. Guimarães, T. Frederico, W. de Paula, et al. (2013), [hep-ph/1307.8352](#).
- [39] P. C. Magalhães and M. R. Robilotta (2013), [hep-ph/1312.2033](#).
- [40] I. Caprini, Phys.Lett. **B638**, 468 (2006), [hep-ph/0603250](#).
- [41] C. Hanhart (2013), [1311.6627](#).
- [42] J. A. Oller, Phys. Rev. **D71**, 054030 (2005), [hep-ph/0411105](#).
- [43] B. Kubis, PoS **QNP2012**, 027 (2012).
- [44] K. M. Watson, Phys.Rev. **88**, 1163 (1952).
- [45] K. Guimaraes, I. Bediaga, A. Delfino, T. Frederico, A. dos Reis, et al., Nucl.Phys.Proc.Suppl. **199**, 341 (2010).
- [46] Z.-Y. Zhou, Q.-C. Wang, and Q. Gao, Chin. Phys. C **xxx**, yy (2009).
- [47] Y. Azimov, J.Phys.G **G37**, 023001 (2010), [0904.1376](#).
- [48] A. Stadler and F. Gross, Few Body Syst. **49**, 91 (2011).
- [49] W. Polyzou, Y. Huang, C. Elster, W. Glockle, J. Golak, et al., Few Body Syst. **49**, 129 (2011), [1008.5215](#).
- [50] E. P. Biernat, W. H. Klink, and W. Schweiger, Few Body Syst. **49**, 149 (2011), [1008.0244](#).
- [51] T. Frederico and G. Salmè, Few Body Syst. **49**, 163 (2011).
- [52] J. Carbonell and V. A. Karmanov, Few Body Syst. **49**, 205 (2011).
- [53] V. Sauli, Few Body Syst. **49**, 223 (2011).
- [54] S. Dorkin, T. Hilger, L. Kaptari, and B. Kampfer, Few Body Syst. **49**, 247 (2011), [1008.2135](#).
- [55] D. R. Boito, P. C. Magalhaes, M. R. Robilotta, and G. R. S. Zarnauskas (2008), [hep-ph/0805.4803](#).
- [56] Erratum-ibid (E791), Phys. Rev. **D74**, 059901 (2006).
- [57] M. Ablikim et al. (BES), Phys. Lett. **B633**, 681 (2006), [hep-ex/0506055](#).
- [58] V. Bernard, N. Kaiser, and U. G. Meissner, Nucl.Phys. **B357**, 129 (1991).

- [59] V. Bernard, N. Kaiser, and U. G. Meissner, Nucl.Phys. **B364**, 283 (1991).
- [60] J. A. Oller and E. Oset, Nucl. Phys. **A620**, 438 (1997), hep-ph/9702314.
- [61] I. Caprini, G. Colangelo, and H. Leutwyler, Phys. Rev. Lett. **96**, 132001 (2006), hep-ph/0512364.
- [62] T. V. Brito, F. S. Navarra, M. Nielsen, and M. E. Bracco, Phys.Lett. **B608**, 69 (2005), hep-ph/0411233.
- [63] J. R. Pelaez, Mod. Phys. Lett. **A19**, 2879 (2004), hep-ph/0411107.
- [64] P. C. Magalhães, *Scalar resonance: A modelo for  $\kappa$*  (Dissertação de Mestrado IFUSP - não publicado, 2008).
- [65] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).
- [66] G. Ecker, J. Gasser, H. Leutwyler, A. Pich, and E. de Rafael, Phys.Lett. **B223**, 425 (1989).
- [67] S. Gasiorowicz and D. A. Geffen, Rev. Mod. Phys. **41**, 531 (1969).
- [68] J. A. Oller and E. Oset, Nucl. Phys. **A620**, 438 (1997), hep-ph/9702314.
- [69] N. N. Achasov and G. N. Shestakov, Phy. Rev. **D49**, 5779 (1994).
- [70] J. Pelaez, J. Oller, and E. Oset, Nucl.Phys. **A675**, 92C (2000), hep-ph/9909556.
- [71] D. R. Boito, *Ressonâncias escalares: relações dinâmicas entre processos de espalhamento e produção* (Dissertação de Mestrado IFUSP - não publicado, 2007).
- [72] G. Huang et al. (CLEO Collaboration), Phys.Rev.Lett. **94**, 011802 (2005), hep-ex/0407035.
- [73] J. Link et al. (FOCUS Collaboration), Phys.Lett. **B607**, 233 (2005), hep-ex/0410037.
- [74] D. Becirevic and A. B. Kaidalov, Phys.Lett. **B478**, 417 (2000), hep-ph/9904490.
- [75] D. Melikhov and B. Stech, Phys.Rev. **D62**, 014006 (2000), hep-ph/0001113.
- [76] D. Melikhov and B. Stech, Phys.Rev. **D62**, 014006 (2000), hep-ph/0001113.
- [77] M. Bracco, M. Chiapparini, F. Navarra, and M. Nielsen, Prog.Part.Nucl.Phys. **67**, 1019 (2012), 1104.2864.

- [78] C. Aubin et al. (Fermilab Lattice Collaboration, MILC Collaboration, HPQCD Collaboration), *Phys.Rev.Lett.* **94**, 011601 (2005), [hep-ph/0408306](#).
- [79] A. Al-Haydari et al. (QCDSF Collaboration), *Eur.Phys.J.* **A43**, 107 (2010), 0903.1664.
- [80] H. Na, C. T. Davies, E. Follana, G. P. Lepage, and J. Shigemitsu, *Phys.Rev.* **D82**, 114506 (2010), 1008.4562.
- [81] S. Fajfer and J. F. Kamenik, *Phys.Rev.* **D71**, 014020 (2005), [hep-ph/0412140](#).
- [82] A. Khodjamirian, C. Klein, T. Mannel, and N. Offen, *Phys.Rev.* **D80**, 114005 (2009), 0907.2842.
- [83] M. R. Robilotta, *T-25: D in SU(3)* (Internal notes, 2012).
- [84] A. Khodjamirian, R. Ruckl, S. Weinzierl, C. Winhart, and O. I. Yakovlev, *Phys.Rev.* **D62**, 114002 (2000), [hep-ph/0001297](#).
- [85] M. Ablikim et al. (BES Collaboration), *Phys.Lett.* **B597**, 39 (2004), [hep-ex/0406028](#).
- [86] D. Besson et al. (CLEO Collaboration), *Phys.Rev.* **D80**, 032005 (2009), 0906.2983.
- [87] B. Aubert, , et al. (BABAR Collaboration), *Phys. Rev. D* **76**, 011102 (2007), URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.76.011102>.
- [88] B. Ananthanarayan, I. Caprini, and I. Sentitemsu Imsong, *Eur.Phys.J.* **A47**, 147 (2011), 1108.0284.
- [89] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, *Nucl.Phys.* **B603**, 125 (2001), [hep-ph/0103088](#).
- [90] J. J. Sakurai, *Currents and Mesons* (University of Chicaco Press, 1969).
- [91] S. Gasiorowicz, *Elementary Particle Physics* (John Wiley, 1996).
- [92] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course in Modern Analysis (Fourth ed.)*. (Cambridge University Press, 1927).
- [93] Bjork and Drell, *Quantum Relativistics* (New York, McGraw-Hill, 1964).
- [94] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Courier Dover Publications, 1970).

- 
- [95] Gradshteyn and Rhyzik, *Table os Integrals, Series and Products* (Academic Press, 2000).
- [96] M. R. Robilotta, *T-19: Complex loops* (Internal notes, 2011).
- [97] M. R. Robilotta, *FR-09: D in SU(3)* (Internal notes, 2012).
- [98] J. H. Kuhn and E. Mirkes, *Z.Phys.* **C56**, 661 (1992).