

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

# Limites de Unitariedade para Vértices Quárticos Anômalos

Eduardo da Silva Almeida

Orientador: Oscar J. P. Éboli

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física como  
requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Oscar José Pinto Éboli (USP)

Prof. Dr. Sergio Ferraz Novaes (UNESP/IFT)

Prof. Dr. Alexandre Alves (UNIFESP/Diadema)

São Paulo  
2018

University of São Paulo  
Physics Institute

# Unitarity Limits on Anomalous Quartic Vertex

Eduardo da Silva Almeida

Supervisor: Oscar J. P. Éboli

Dissertation submitted to the Physics Institute of the University of São Paulo  
in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Oscar José Pinto Éboli (USP)

Prof. Dr. Sergio Ferraz Novaes (UNESP/IFT)

Prof. Dr. Alexandre Alves (UNIFESP/Diadema)

São Paulo  
2018

# Conteúdo

Agradecimentos

Resumo

Abstract

Lista de figuras

Lista de tabelas

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Modelo Padrão</b>	<b>4</b>
1.1 Introdução . . . . .	4
1.2 Conteúdo e regras de transformação . . . . .	4
1.3 Lagrangiana . . . . .	6
1.4 Massas dos Bósons de gauge e férmions . . . . .	9
1.5 Interações quárticas . . . . .	10
<b>2 Teorias Efetivas</b>	<b>12</b>
2.1 Uma breve introdução . . . . .	12
2.2 Teoria de Fermi . . . . .	13
2.3 Lagrangiana efetiva de dimensão seis . . . . .	14
<b>3 Base de Helicidade</b>	<b>17</b>
3.1 Estados relativístico de uma partícula . . . . .	17
3.2 Estado relativístico de duas partículas . . . . .	21
3.3 Expansão em ondas parciais . . . . .	24
3.4 Teorema ótico na base de helicidade . . . . .	25
3.5 Polarização . . . . .	27
<b>4 Conseqüências da unitariedade no Modelo Padrão</b>	<b>31</b>
4.1 Limite na massa do Higgs . . . . .	31
4.2 Reação $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$ . . . . .	33
4.3 Reação $Z_0 Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-$ . . . . .	34
4.4 Reação $H Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-$ . . . . .	35
4.5 Reação $Z_0 Z_0 \rightarrow Z_0 Z_0$ . . . . .	36
4.6 Reação $HH \rightarrow HH$ . . . . .	37
4.7 Reação $HH \rightarrow W_0^+ W_0^-$ . . . . .	38
4.8 Reação $HH \rightarrow Z_0 Z_0$ . . . . .	38

4.9	Reação $HZ_0 \rightarrow HZ_0$ . . . . .	39
4.10	Expansão em ondas parciais e limite de unitariedade . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Consequências da unitariedade nos operadores efetivos de dimensão 8</b>	<b>42</b>
5.1	Introdução . . . . .	42
5.2	Características principais dos processos . . . . .	46
5.3	Análise de CPT . . . . .	48
5.4	Limite de unitariedade para as ondas parciais com $(Q, J) = (2, 0)$ . . .	49
5.5	Limite de unitariedade para as ondas parciais com $(Q, J) = (2, 1)$ . . .	56
5.6	Limite de unitariedade para as ondas parciais com $(Q, J) = (1, 0)$ . . .	58
5.7	Limite de unitariedade para as ondas parciais com $(Q, J) = (1, 1)$ . . .	61
5.8	Limite de unitariedade para as ondas parciais com $(Q, J) = (0, 0)$ . . .	62
5.9	Discussão . . . . .	64
	<b>Conclusão</b>	<b>66</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>69</b>

# Agradecimentos

Este trabalho não seria possível sem todas as positivas influências que tive ao longo do projeto, primeiramente gostaria de agradecer a minha família que foi a base de tudo.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Oscar J. P. Éboli, por todo o suporte e as várias reuniões que tivemos.

Ao suporte financeiro do CNPq, do qual possibilitou que eu não trabalhasse neste período e me dedicasse exclusivamente aos estudos.

# Resumo

Neste trabalho consideramos extensões do Modelo Padrão contendo vértices quárticos anômalos parametrizados por operadores efetivos de dimensão oito. Estes alteram o comportamento das amplitudes do tipo  $VV \rightarrow VV$ , onde  $V$  pode ser o fóton, o bóson  $Z$ , o bóson  $W$  ou o Higgs. Para essa extensão ser consistente, ela tem que obedecer o teorema ótico. Entretanto, as amplitudes geradas por estes operadores efetivos tendem a aumentar conforme a energia do centro de massa aumenta. Estudaremos o comportamento dessas amplitudes e determinaremos se há violação de unitariedade. Para isso utilizamos também o formalismo da base de helicidade.

**Palavras-chave:** Modelo Padrão; unitariedade; teorema ótico; vértices quárticos anômalos.

# Abstract

In this work we consider Standard Model extensions containing anomalous quartic vertex parametrized by effective dimension-eight operators. These modify the behaviour of the scattering amplitudes  $VV \rightarrow VV$ , where  $V$  can be photon,  $Z$  boson,  $W$  boson and Higgs. To this extension be consistent, it has to obey the optical theorem. However, the amplitudes generated by these effective operators tends to grow as the center of mass energy increase. We will study the behaviour of these amplitudes and we will determine if there is unitarity violation. For this it was also used the helicity base formalism.

**Keywords:** Standard Model; unitarity; optical theorem; anomalous quartic vertex.

# Lista de figuras

- (1.1) Diagramas de Feynman para a reação  $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão a nível de árvore.
- (4.1) Diagramas de Feynman para a reação  $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão a nível de árvore.
- (4.2) Diagramas de Feynman para a reação  $Z_0 Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão a nível de árvore.
- (4.3) Diagramas de Feynman para a reação  $H Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão a nível de árvore.
- (4.4) Diagramas de Feynman para a reação  $Z_0 Z_0 \rightarrow Z_0 Z_0$  do Modelo Padrão a nível de árvore.
- (4.5) Diagramas de Feynman para a reação  $HH \rightarrow HH$  do Modelo Padrão a nível de árvore.
- (4.6) Diagramas de Feynman para a reação  $HH \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão a nível de árvore.
- (4.7) Diagramas de Feynman para a reação  $HH \rightarrow Z_0 Z_0$  do Modelo Padrão a nível de árvore.
- (4.8) Diagramas de Feynman para a reação  $H Z_0 \rightarrow H Z_0$  do Modelo Padrão a nível de árvore.



# Lista de tabelas

- (1.1) Notação utilizada para todas as partículas elementares conhecidas até o momento com os valores de suas cargas elétricas e spin.
- (1.2) Férmions do Modelo Padrão agrupados em dubletos e singletos, com suas respectivas gerações e regras de transformação sob a simetria do modelo.
- (1.3) Bósons de gauge do Modelo Padrão e suas regras de transformação sob a simetria do modelo.
- (2.1) Vértices tríplexes e quárticos gerados pelos operadores de dimensão seis. Os vértices que são modificados estão marcados por  $\surd$ . A notação é a seguinte,  $V$  são os bósons de gauge do setor eletrofraco e  $H$  é o Higgs.
- (3.1) Quadrimomentos associados com as polarizações dos bósons transversais para reações do tipo  $2 \rightarrow 2$  no referencial do centro de massa.
- (3.2) Quadrimomentos associados com as polarizações dos bósons longitudinais para reações do tipo  $2 \rightarrow 2$  no referencial do centro de massa.
- (4.1) Amplitudes de cada diagrama de Feynman da reação  $W_0^+ W_0^+ \rightarrow W_0^+ W_0^+$  do Modelo Padrão. Os coeficientes  $A_i, B_i$  e  $C_i$  representam a dependência da amplitude na energia do centro de massa,  $A_i$  para  $s^2$ ,  $B_i$  para  $s$  e  $C_i$  independente de  $s$ .
- (4.2) Amplitudes de cada diagrama de Feynman da reação  $Z_0 Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^+$  do Modelo Padrão. Os coeficientes  $A_i, B_i$  e  $C_i$  representam a dependência da amplitude na energia do centro de massa,  $A_i$  para  $s^2$ ,  $B_i$  para  $s$  e  $C_i$  independente de  $s$ .
- (4.3) Amplitudes de cada diagrama de Feynman da reação  $H Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^+$  do Modelo Padrão, Os coeficientes  $A_i, B_i$  e  $C_i$  representam a dependência da amplitude na energia do centro de massa,  $A_i$  para  $s^2$ ,  $B_i$  para  $s$  e  $C_i$  independente de  $s$ .
- (5.1) Vértices quárticos gerados pelos operadores de dimensão oito. Os vértices quárticos que são modificados estão marcados por  $\surd$ .
- (5.2) Vértices quárticos gerados pelos operadores de dimensão oito Os vértices quárticos que são modificados estão marcados por  $\surd$ .
- (5.3) Vértices quárticos gerados pelos operadores de dimensão oito. Os vértices quárticos que são modificados estão marcados por  $\surd$ .
- (5.4) Todos os estados possíveis de duas partículas, construídos a partir das partículas elementares do Modelo Padrão. Os estados foram separados para cada onda parcial com carga total e momento angular total denotado por  $(Q, J)$ . A dimensão refere-se a matriz  $T^J$ , construída a partir dos estados.

- (5.5) Efeito dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial com  $(Q, J) = (2, 0)$ .
- (5.6) Efeito dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial com  $(Q, J) = (2, 1)$ .
- (5.7) Efeito dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial com  $(Q, J) = (1, 0)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{S_0}$  e  $\mathcal{L}_{S_1}$ .
- (5.8) Efeito dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial com  $(Q, J) = (1, 0)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{S_2}$  ao  $\mathcal{L}_{T_2}$ .
- (5.9) Efeito dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial com  $(Q, J) = (1, 1)$ .
- (5.10) Efeito dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial com  $(Q, J) = (0, 0)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{S_0}$  ao  $\mathcal{L}_{T_2}$ .
- (5.11) Efeito dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial com  $(Q, J) = (0, 0)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{T_5}$  ao  $\mathcal{L}_{T_9}$ .
- (5.12) Comparação entre os limites de unitariedade das ondas parciais com  $(Q, J) = (1, 0)$  e  $(Q, J) = (1, 1)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{S_0}$  ao  $\mathcal{L}_{M_3}$ .
- (5.13) Comparação entre os limites de unitariedade das ondas parciais com  $(Q, J) = (1, 0)$  e  $(Q, J) = (1, 1)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{M_4}$  ao  $\mathcal{L}_{T_7}$ .
- (5.14) Comparação entre os limites de unitariedade das ondas parciais com  $(Q, J) = (2, 0)$  e  $(Q, J) = (2, 1)$ .
- (5.15) Limites de unitariedade mais fortes obtidos pelos operadores efetivos de dimensão oito. Do operador  $\mathcal{L}_{S_0}$  ao  $\mathcal{L}_{T_0}$ .
- (5.16) Limites de unitariedade mais fortes obtidos pelos operadores efetivos de dimensão oito. Do operador  $\mathcal{L}_{T_1}$  ao  $\mathcal{L}_{T_9}$ .

# Introdução

O Modelo Padrão até o momento descreve de maneira excelente os dados disponíveis que temos do setor eletrofraco sendo que não existe uma evidência clara experimental de um desvio de suas previsões [1]. O modelo, contudo, não é completamente satisfatório e deixa-nos com várias questões em aberto como por exemplo: não descreve a interação gravitacional, massa dos neutrinos, o modelo contém uma quantidade significativa de parâmetros livres e não explica o motivo da hierarquia de massas.

O Modelo Padrão também é consistente teoricamente, ele é livre de anomalias e não viola unitariedade [2]. Veja o caso desta reação específica  $W_0^+ W_0^+ \rightarrow W_0^+ W_0^+$ , onde o "0" significa que a polarização da partícula é longitudinal. Em altas energias sabemos que os longitudinais tendem a ter um comportamento crescente com a energia do centro de massa, no entanto, os transversais não apresentam esse comportamento, então pode-se pensar que os longitudinais devam contribuir mais em uma boa parte dos casos. Seguem abaixo os diagramas de Feynman para esta reação:

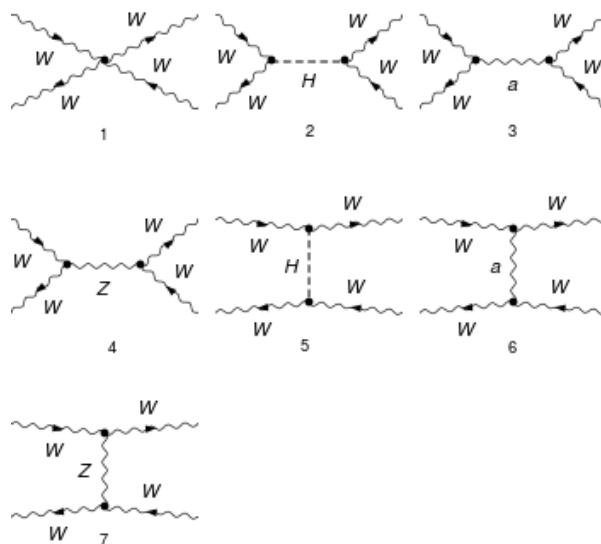


Figura 1: Diagramas de Feynman para a reação  $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão a nível de árvore.

Esta reação, assim como todas as outras provenientes do Modelo Padrão, no limite de altas energias a soma total da amplitude dos diagramas não violam unitariedade. O que acontece é que

os diagramas individuais podem crescer com a energia do centro de massa, entretanto quando se somam todos eles, existe um cancelamento dessa dependência restando apenas termos que não crescem com a energia do centro de massa. Em uma tentativa de extensão do modelo com a consequente introdução de novos diagramas, se a amplitude desses novos diagramas crescerem com a energia do centro de massa e não houver um cancelamento dessa dependência, o comportamento divergente na energia do centro de massa aparecerá e a teoria deixará de valer em um certo limite.

Existem diversas extensões do modelo, mas com a falta de sinais no LHC (Large Hadron Collider) de algum novo estado e como os dados continuam a convergir para o Modelo Padrão, isso motiva-nos a acreditar que nosso entendimento completo acontecerá quando formos para energias mais altas. Tendo consciência da nossa ignorância sobre a natureza a altas energias, teoria efetiva de campo se torna uma boa escolha para verificarmos as implicações de uma possível nova física, uma das razões é que em geral não precisamos de nenhum modelo específico. Com base nesses argumentos vamos trabalhar com uma lagrangiana efetiva do tipo

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{MP} + \sum_{i=5}^{\infty} \frac{f_i}{\Lambda^{i-4}} O_i(x), \quad (0.1)$$

onde  $O_i(x)$  são operadores de dimensão cinco ou maior, construídos a partir das partículas e simetrias do Modelo Padrão. O parâmetro  $\Lambda$  tem unidade de energia e é a escala característica da nova física. Ele é responsável por suprimir os efeitos dessa física nova que acreditamos que exista em altas energias.

Uma vez que o Modelo Padrão é uma teoria de gauge em  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , este grupo fixa completamente as interações envolvendo os vértices tríplexes (vértices com três bósons de gauge) e quárticos (vértices com quatro bósons de gauge). O que faremos nessa dissertação é focar nos genuínos vértices quárticos no setor eletrofraco, em outras palavras, vamos focar nos operadores de menor dimensão que geram vértices quárticos, mas não simultaneamente tríplexes. O operador efetivo de menor dimensão que realiza linearmente a simetria  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  e que seja genuinamente quártico são os de dimensão oito [3]. A lagrangiana efetiva que utilizaremos é dada por:

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{MP} + \frac{\mathcal{L}_8}{\Lambda^4}. \quad (0.2)$$

Ao introduzir os operadores efetivos de dimensão oito, introduziremos novas contribuições para as amplitudes de espalhamento contendo vértices quárticos. No limite de altas energias aquele cancelamento na dependência da energia que acontecia no Modelo Padrão, não haverá mais. O estudo do efeito desses operadores efetivos, será feito com o intuito de verificar os limites de unitariedade da teoria. O teorema ótico nos diz que amplitudes não podem ser arbitrariamente grandes e esta restrição nos trará um limite de validade dela. Para isso precisaremos da expansão em ondas parciais, seja  $M_{fi}$  calculado na base de helicidade, a expansão em ondas parciais é dada por:

$$M_{fi} = 16\pi \sum_J (2J+1) D_{\lambda_i \lambda_f}^{*J} (R^{-1}(\varphi_i, \theta_i, 0) R(\varphi_f, \theta_f, 0)) T_{\lambda_f, \lambda_i}^J, \quad (0.3)$$

onde  $J$  é o momento angular total,  $D_{\lambda_i \lambda_f}^{*J} (R^{-1}(\varphi_i, \theta_i, 0) R(\varphi_f, \theta_f, 0))$  é a matriz de Wigner e os ângulos dizem respeito a direção das partículas iniciais e finais,  $\lambda_{f,i}$  são as helicidades dos estados iniciais e finais. Seja  $T_{\lambda_f, \lambda_i}^J$  a amplitude da onda parcial, através do teorema ótico obteremos a seguinte restrição:

$$\left| T_{\lambda_f = \lambda_i, \lambda_i}^J \right| \leq 1. \quad (0.4)$$

A partir da eq. (0.4), encontraremos os limites de unitariedade. A dissertação divide-se da seguinte maneira, no capítulo 1, é feito uma introdução ao Modelo Padrão, com foco no objeto de interesse que são os vértices quárticos, enquanto que no capítulo 2, é feita uma breve introdução sobre algumas vantagens em utilizar teorias efetivas e dois exemplos. No capítulo 3, será apresentado o formalismo de expansão em ondas parciais e o teorema ótico, o qual será a ferramenta necessária para extrairmos as cotas superiores para os acoplamentos quárticos. No capítulo 4, vamos aplicar essa ferramenta ao caso do Modelo Padrão e tirar uma cota superior para a massa do Higgs assim como na ref.[4]. No capítulo 5, vamos finalmente extrair os limites de unitariedade para os acoplamentos quárticos, através dos operadores de dimensão oito.

# Capítulo 1

## Modelo Padrão

### 1.1 Introdução

O Modelo Padrão [5] é uma teoria de gauge, ela visa descrever as forças forte, fraca e eletromagnética da física de partículas. Ele é constituído por todas as partículas elementares que conhecemos até o momento, elas são os bósons de gauge de spin um, férmions e um escalar responsável pela quebra espontânea da simetria. Seu sucesso já aparece na previsão dos bósons W e Z antes de serem observados experimentalmente.

Apesar do sucesso do Modelo Padrão ele ainda não descreve uma teoria completa da física de partículas, por exemplo, não descreve a interação gravitacional, massa dos neutrinos, o modelo contém uma quantidade significativa de parâmetros livres, não explica o motivo da hierarquia de massas. Esses são alguns problemas mais imediatos que aparecem no Modelo Padrão, apesar disso ele descreve bem a física de partículas até a escala de poucos TeV. A partir dessas considerações, diversos pesquisadores trabalham com extensões deste modelo na esperança de encontrar um modelo maior que englobe o Modelo Padrão.

A simetria de gauge do Modelo Padrão é  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , as partículas associadas com o grupo  $SU(3)_C$  são os Gluons e os quarks, o índice c é chamado de cor e cada partícula que se acopla com eles é dita carregar cor. As partículas associadas ao grupo  $SU(2)_L$  são os bósons  $W_\mu^a$ , quarks, léptons e o escalar do Higgs. O símbolo L indica que apenas os férmions de mão esquerda interagem com os bósons do  $SU(2)_L$ . O bóson  $B_\mu$  está associado a simetria  $U(1)_Y$  e o símbolo Y é conhecido como hipercarga. O autovalor da hipercarga é responsável por acertarmos as cargas das partículas.

### 1.2 Conteúdo e regras de transformação

A tabela seguinte contém todas as partículas elementares conhecidas até o momento. Contudo, sabemos que conforme os aceleradores de partículas evoluírem e conseguirem produzir uma energia do centro de massa e luminosidade maiores, este quadro pode mudar aparecendo novas partículas.

Partícula	Símbolo	Carga elétrica	Spin
Eletron	$e$	-1	1/2
Muon	$\mu$	-1	1/2
Tau	$\tau$	-1	1/2
Neutrino do Eletron	$\nu_e$	0	1/2
Neutrino do Muon	$\nu_\mu$	0	1/2
Neutrino do Tau	$\nu_\tau$	0	1/2
Quark up	$u$	2/3	1/2
Quark down	$d$	-1/3	1/2
Quark charm	$c$	2/3	1/2
Quark strange	$s$	-1/3	1/2
Quark top	$t$	2/3	1/2
Quark bottom	$b$	-1/3	1/2
Fóton	$A$	0	1
Bósons $W^\pm$	$W$	$\pm 1$	1
Bóson Z	$Z$	0	1
Gluons	$G$	0	1
Higgs	$H$	0	0

Tabela 1.1: Notação utilizada para todas as partículas elementares conhecidas até o momento com os valores de suas cargas elétricas e spin.

Os férmions são agrupados em dubletos de mão esquerda ( $\Psi_L$ ) e singletos de mão direita ( $\Psi_R$ ). A tabela abaixo resume para os férmions suas respectivas gerações e regras de transformação sob a simetria de gauge.

Dubletos e singletos fermiônicos	1ª geração	2ª geração	3ª geração	Regra de transformação
$l_L$	$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$
$q_L$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$
$E_R$	$e_R$	$\mu_R$	$\tau_R$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$
$U_R$	$u_R$	$c_R$	$t_R$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})$
$D_R$	$d_R$	$s_R$	$b_R$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})$

Tabela 1.2: Férmions do Modelo Padrão agrupados em dubletos e singletos, com suas respectivas gerações e regras de transformação sob a simetria do modelo.

Para os bósons, o escalar é agrupado em um dubleto do  $SU(2)_L$ . Da mesma maneira segue a tabela abaixo para os bósons:

Escalar	Regras de transformação	
$\phi$	$\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$
Bósons		
$G_\mu^a$		$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, 0)$
$W_\mu^a$		$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$
$B_\mu$		$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$

Tabela 1.3: Bósons de gauge do Modelo Padrão e suas regras de transformação sob a simetria do modelo.

Para as regras de transformação utilizamos a notação  $(x, y, z)$ . O número  $x$  está associado a representação do  $SU(3)_C$ , o  $y$  para a representação do  $SU(2)_L$  e o  $z$  é o autovalor da hipercarga. Segue abaixo alguns exemplos de como os dubletos e singletos transformam-se:

$$e_R \rightarrow e^{i\beta(x)(-1)} e_R, \quad (1.1)$$

$$l_L \rightarrow e^{i\frac{\sigma^a}{2} \alpha^a(x)} e^{i\beta(x)(-\frac{1}{2}I)} l_L, \quad (1.2)$$

$$q_L \rightarrow e^{iT^a \eta^a(x)} e^{i\frac{\sigma^a}{2} \alpha^a(x)} e^{i\beta(x)(\frac{1}{6}I)} q_L, \quad (1.3)$$

onde as  $T^a$ 's,  $\sigma^a$ 's e  $I$  são os geradores do  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_L$  e a matriz identidade nesta ordem. Sabendo como eles se transformam, temos suas respectivas derivadas covariantes na nossa notação dadas por

$$D_\mu l_L = \partial_\mu l_L - ig W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} l_L + ig' B_\mu \frac{1}{2} l_L, \quad (1.4)$$

$$D_\mu q_L = \partial_\mu q_L - ig_s G_\mu^a T^a q_L - ig W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} q_L - ig' B_\mu \frac{1}{6} q_L, \quad (1.5)$$

$$D_\mu e_R = \partial_\mu e_R + ig' B_\mu e_R, \quad (1.6)$$

$$D_\mu U_R = \partial_\mu U_R - ig_s G_\mu^a T^a U_R - ig' B_\mu \frac{2}{3} U_R, \quad (1.7)$$

$$D_\mu D_R = \partial_\mu D_R - ig_s G_\mu^a T^a D_R + ig' B_\mu \frac{1}{3} q_L \quad (1.8)$$

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ig W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} \phi - ig' B_\mu \frac{1}{2} \phi, \quad (1.9)$$

onde  $g_s$ ,  $g$  e  $g'$  são as constantes de acoplamento do  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_L$  e  $U(1)_Y$ .

### 1.3 Lagrangiana

Vamos começar escrevendo a lagrangiana mais geral possível renormalizável, invariante sob a simetria de gauge  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  e que contenha todas as partículas da tabela (1.1):



$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{MP} = & (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - V(\phi^\dagger \phi) + i \bar{l}_L^i \gamma^\mu D_\mu l_L^i + i \bar{E}_R^i \gamma^\mu D_\mu E_R^i + i \bar{U}_R^i \gamma^\mu D_\mu U_R^i + \\
& i \bar{D}_R^i \gamma^\mu D_\mu (D_R)^i + i \bar{q}_L^i \gamma^\mu D_\mu q_L^i - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \\
& \bar{l}_L^i Y_e \phi E_R^i - \bar{q}_L^i Y_d \phi D_R^i - \bar{q}_L Y_u \tilde{\phi} U_R,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

sendo

$$\tilde{\phi} = i \sigma_2 \phi^*, \tag{1.11}$$

$$G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a T^a, \tag{1.12}$$

$$W_{\mu\nu} = W_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2}, \tag{1.13}$$

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \tag{1.14}$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \tag{1.15}$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \tag{1.16}$$

onde  $\varepsilon^{abc}$ ,  $f^{abc}$  e  $V(\phi^\dagger \phi)$  são as constantes de estrutura do  $SU(2)_L$ ,  $SU(3)_C$  e o potencial nesta ordem.

Vamos provar a invariância da lagrangiana sob a simetria de gauge  $SU(2)_L$ , a demonstração para as outras simetrias é análoga. Para isso precisamos lembrar como os campos e as derivadas covariantes se transformam:

$$\phi, \Psi_L \rightarrow U \phi, U \Psi_L, \tag{1.17}$$

$$D_\mu \phi, D_\mu \Psi_L \rightarrow U D_\mu \phi, U D_\mu \Psi_L, \tag{1.18}$$

$$W_{\mu\nu} \rightarrow U W_{\mu\nu} U^\dagger, \tag{1.19}$$

onde  $U$  é uma transformação arbitrária do  $SU(2)_L$ . Os termos cinéticos dos bósons da maneira que estão escritos na eq.(1.10), necessitam de uma prova que são invariantes. Vamos mostrar para o bóson  $W$ :

$$W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \rightarrow U W_{\mu\nu} U^\dagger U W^{\mu\nu} U^\dagger = U W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} U^\dagger, \tag{1.20}$$

calculando o traço da eq.(1.20), temos:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} \text{Tr} [U W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} U^\dagger] &= -\frac{1}{2} \text{Tr} [U^\dagger U W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}] \\
&= -\frac{1}{2} \text{Tr} [W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}] \\
&= -\frac{1}{2} \text{Tr} \left[ W_{\mu\nu}^a \frac{\sigma^a}{2} W^{b\mu\nu} \frac{\sigma^b}{2} \right] \\
&= -\frac{1}{2} W_{\mu\nu}^a W^{b\mu\nu} \frac{\delta^{ab}}{2} \\
&= -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Os dois primeiros termos na lagrangiana são do setor escalar, os próximos são os termos cinéticos dos férmions e bósons de gauge, note que o neutrino não possui componente de mão direita. Os últimos três termos são do setor de Yukawa, do qual após a quebra espontânea da simetria eletrofraca será responsável pelos férmions adquirirem massa. Ainda não terminamos de mostrar a invariância da lagrangiana sob a simetria de gauge, porque falta escrever um potencial para o escalar na forma mais geral possível e falta também justificar a invariância sob a simetria de gauge do último termo da lagrangiana. Para provar a invariância do termo  $\overline{q_L} Y_u \widetilde{\phi} u_R$ , considere  $f_i$  um dubleto do  $SU(2)$ , então:

$$f_1^\dagger \epsilon f_2^* = \epsilon^{ab} f_{1a}^* f_{2b}^* \rightarrow \epsilon^{ab} U_{ac}^* U_{bd}^* f_{1c}^* f_{2d}^* = \det(U^*) \epsilon^{cd} f_{1c}^* f_{2d}^* = f_1^\dagger \epsilon f_2^*. \quad (1.22)$$

Isso prova que  $\overline{q_L} \epsilon \phi^*$  é invariante  $SU(2)_L$ . Para finalizar sabemos que  $\epsilon = i\sigma_2$ , assim obtemos exatamente o último termo da lagrangiana.

O próximo passo é escrever a expressão mais geral do potencial. O invariante  $SU(2)_L$  na eq. (1.22) viola a simetria de hipercarga se fizermos  $f_1 \rightarrow \phi$  e  $f_2 \rightarrow \phi$ , portanto ele não será utilizado na equação do potencial. Deste modo a expressão mais geral possível para o potencial é dada por

$$V(\phi^\dagger \phi) = -m^2 (\phi^\dagger \phi)^2 + \lambda (\phi^\dagger \phi)^4. \quad (1.23)$$

Por conta do sinal negativo no termo que contém a massa na eq. (1.23), o potencial tem um mínimo diferente de zero. Por consequência, a simetria do vácuo não é a simetria da lagrangiana e a simetria é espontaneamente quebrada.

Primeiramente vamos minimizar o potencial, isso nos leva que  $\frac{dV}{d(\phi^\dagger \phi)^2} = 0$ , portanto  $|\langle \phi \rangle|^2 = \frac{m^2}{2\lambda}$ , onde  $\langle \phi \rangle$  é o valor esperado de vácuo. Calculando agora  $|\phi|^2$  e utilizando o dubleto com as componentes genéricas do tipo  $\phi = (\frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}, \frac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}})^T$ , obtemos que  $|\phi|^2 = \frac{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2}{2}$ . Conventionalmente vou escolher apenas a componente  $\langle \phi_3 \rangle \neq 0$ . Deste modo temos que:

$$\frac{\langle \phi_3 \rangle}{\sqrt{2}} = \frac{v}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{m^2}{2\lambda}} \implies \quad (1.24)$$

$$\langle \phi \rangle = (0, \frac{v}{\sqrt{2}})^T. \quad (1.25)$$

Sabemos pelo Teorema de Goldstone que por cada simetria contínua da lagrangiana que não é uma simetria do vácuo, existe um autovalor nulo na matriz de massa associado a cada uma dessas simetrias, dizemos então que esta simetria foi quebrada. Vamos descobrir quais simetrias foram quebradas, pode-se mostrar que o gerador que deixa o vácuo invariante é:

$$\left( \frac{\sigma_3}{2} + Y \right) \langle \phi \rangle = 0. \quad (1.26)$$

Com as hipercargas escolhidas na tabela 1, esta soma de operadores nos fornece exatamente o operador carga das partículas  $Q = \frac{\sigma_3}{2} + Y$ , então a quebra espontânea da simetria eletrofraca é a seguinte  $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{eletromag}}$ .

Devido a liberdade de gauge que temos, escolhemos o gauge unitário, sua parametrização é dada por

$$\phi = \left( 0, \frac{v + H}{\sqrt{2}} \right)^T, \quad (1.27)$$

onde  $H$  é uma partícula elementar chamada de Higgs.

## 1.4 Massas dos Bósons de gauge e férmions

Nesta subseção vamos determinar as massas dos bósons de gauge e férmions, partindo de

$$|D_\mu \langle \phi \rangle|^2 = \frac{1}{4} \left[ g^2 (W_\mu^1 - iW_\mu^2) (W_\mu^1 + iW_\mu^2) \frac{v^2}{2} + (-gW_\mu^3 + g'B_\mu)^2 \frac{v^2}{2} \right], \quad (1.28)$$

note que estamos deixando de lado os termos de interação com o Higgs, porque desejo calcular agora apenas as massas dos bósons de gauge. Lembrando que

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad (1.29)$$

nós obtemos o termo de massa para os bósons  $W^\pm$ . Para obter a massa das partículas neutras, veja que na eq.(1.28) há uma mistura entres os campos  $W_\mu^3$  e  $B_\mu$ . Então é necessário diagonalizar a matriz de massa, portanto:

$$\mathcal{L}_{neutros} = \frac{1}{4} (W_\mu^3 \quad B_\mu) \begin{pmatrix} g \frac{v^2}{2} & -g g' \frac{v^2}{2} \\ -g g' \frac{v^2}{2} & g' \frac{v^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (1.30)$$

diagonalizando a matriz de massas e definindo

$$\text{tg}\theta_w = \text{tg}_w \doteq \frac{g'}{g}, \quad (1.31)$$

então

$$Z_\mu = \cos\theta_w W_\mu^3 - \text{sen}\theta_w B_\mu, \quad (1.32)$$

$$A_\mu = \text{sen}\theta_w W_\mu^3 + \cos\theta_w B_\mu. \quad (1.33)$$

Portanto a lagrangiana de massas dos Bósons de gauge de spin um é dada por

$$\mathcal{L}_{massas} = \left( g^2 \frac{v^2}{4} \right) W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} \left( \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{4} \right) Z_\mu Z^\mu, \quad (1.34)$$

onde

$$M_w^2 = g^2 \frac{v^2}{4}, \quad (1.35)$$

$$M_z^2 = \frac{(g^2 + g'^2) v^2}{4}. \quad (1.36)$$

Para encontrar a massa do Bóson de Higgs, vamos partir da eq. (1.23). Após a quebra espontânea de simetria eletrofraca e substituindo as eqs. (1.27) e (1.24), a partir disso obtem-se termos de interação entre o Higgs e o termo de massa, correspondente a

$$V(\phi) \propto \frac{1}{2} (2\lambda v^2) H^2, \quad (1.37)$$

então a massa do Bóson de Higgs é

$$M_H = 2\lambda v^2. \quad (1.38)$$

Para obter a massa dos férmions vou exemplificar para a primeira geração. Primeiramente vou substituir a eq.(1.27) no setor de Yukawa da lagrangiana  $\mathcal{L}_{Yukawa} = -\bar{l}_L Y_e \phi e_R - \bar{q}_L Y_d \phi d_R - \bar{q}_L Y_u \tilde{\phi} u_R$ , onde  $Y_e, Y_d$  e  $Y_u$  são matrizes  $3 \times 3$  no espaço dos sabores. No espaço dos sabores temos

$$e_R = (e_R, \mu_R, \tau_R), \quad (1.39)$$

$$u_R = (u_R, c_R, t_R), \quad (1.40)$$

$$d_R = (d_R, s_R, t_R). \quad (1.41)$$

Após a quebra espontânea da simetria eletrofraca encontramos

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e}_L Y_e e_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{d}_L Y_d d_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{u}_L Y_u u_R. \quad (1.42)$$

Por ora estou deixando de lado os termos de interação com o Higgs, estamos focando nas massas dos férmions. Note que ainda não temos a massa das partículas, porque a matriz  $Y_i$  não é diagonal. Para obtermos as massas utilizamos o seguinte teorema, seja  $Y$  uma matriz complexa, então existem as matrizes unitárias  $U$  e  $V$  tal que  $\hat{Y}$  é diagonal:

$$U^\dagger Y_i V = \hat{Y}_i. \quad (1.43)$$

Para finalizar vamos rotacionar os campos no espaço dos sabores como  $e_L \rightarrow U_{eL} e_L$  e utilizar (1.43), lembre que a física é invariante sob certas redefinições dos campos que resultam na mesma matriz  $S$ . Deste modo nós vamos para a base de massas, ou seja, a base em que os termos de massa são diagonais. Obtendo que  $\mathcal{L}_{Yukawa} = -\frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \hat{Y}_e e_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{d}_L \hat{Y}_d d_R - \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{u}_L \hat{Y}_u u_R$ , portanto as massas dos férmions são:

$$M_i = \frac{v}{\sqrt{2}} \hat{Y}_i. \quad (1.44)$$

## 1.5 Interações quárticas

O Modelo Padrão fixa todas as interações do tipo  $ff \rightarrow ff, ff \rightarrow H, ff \rightarrow V, H \rightarrow HH, HH \rightarrow HH, V \rightarrow VV$  e  $VV \rightarrow VV$ , onde  $f$  são os férmions e  $V$  os bósons de gauge. Nesta dissertação há o interesse apenas nas interações entre bósons de gauge no setor eletrofraco, portanto vamos determinar todas elas. Começando por

$$\mathcal{L}_{cinetico} = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu}, \quad (1.45)$$

sabemos que deste termo é gerado vértices com três e quatro bósons, para os quárticos

$$\mathcal{L}_{quartico} = -\frac{1}{4} g^2 \epsilon_{abc} \epsilon_{ade} W_\mu^b W_\nu^c W^{d\mu} W^{e\nu}, \quad (1.46)$$

utilizando a relação entre o tensor de Levi-Civita e a delta de Kronecker em três dimensões, dada por

$$\varepsilon_{abc} \varepsilon_{ade} = \delta_{bd} \delta_{ce} - \delta_{be} \delta_{cd}, \quad (1.47)$$

obtemos que

$$\mathcal{L}_{cinetico} = -\frac{1}{4} g^2 \left[ \left( W_\mu^b W^{b\mu} \right)^2 - W_\mu^b W^{b\nu} W_\nu^c W^{c\mu} \right]. \quad (1.48)$$

Utilizando as eqs. (1.29), (1.32) e (1.33) temos que  $W_\mu^1 = \frac{W_\mu^+ + W_\mu^-}{\sqrt{2}}$ ,  $W_\mu^2 = -i \frac{W_\mu^- - W_\mu^+}{\sqrt{2}}$  e  $W_\mu^3 = Z_\mu c_w + A_\mu s_w$ . Substituindo na eq. (1.45), encontramos que

$$\mathcal{L}_{quartico} = \mathcal{L}_{WWWW} + \mathcal{L}_{WWZZ} + \mathcal{L}_{WWAA} + \mathcal{L}_{WWZA}, \quad (1.49)$$

onde

$$\mathcal{L}_{WWWW} = -\frac{1}{2} g^2 \left[ (W_\mu^+ W^{-\mu})^2 - (W_\mu^+ W^{+\mu}) (W_\nu^- W^{-\nu}) \right], \quad (1.50)$$

$$\mathcal{L}_{WWZZ} = -g^2 c_w^2 \left[ (W_\mu^+ W^{-\mu}) (Z_\mu Z^\mu) - (W_\mu^+ Z^\mu) (W_\nu^- Z^\nu) \right], \quad (1.51)$$

$$\mathcal{L}_{WWAA} = -g^2 s_w^2 \left[ (W_\mu^+ W^{-\mu}) (A_\mu A^\mu) - (W_\mu^+ A^\mu) (W_\nu^- A^\nu) \right] \quad (1.52)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WWZA} &= -g^2 c_w^2 s_w^2 \left[ 2 (W_\mu^+ W^{-\mu}) (Z_\mu A^\mu) - (W_\mu^+ A^\mu) (W_\nu^- Z^\nu) \right. \\ &\quad \left. - (W_\mu^+ Z^\mu) (W_\nu^- A^\nu) \right]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

A partir da eq. (1.45), temos vértices com três campos de gauge, chamarei eles de trípliques. Eles são dados por

$$\mathcal{L}_{tríplices} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{abc} W_{\mu\nu}^a W^{b\mu} W^{c\nu} = \mathcal{L}_{WWA} + \mathcal{L}_{WWZ}, \quad (1.54)$$

onde

$$\mathcal{L}_{WWA} = ig s_w \left[ W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu} A^\nu - W_{\mu\nu}^- W^{+\mu} A^\nu + W_\mu^+ W_\nu^- F^{\mu\nu} \right], \quad (1.55)$$

$$\mathcal{L}_{WWZ} = ig c_w \left[ W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu} Z^\nu - W_{\mu\nu}^- W^{+\mu} Z^\nu + W_\mu^+ W_\nu^- Z^{\mu\nu} \right]. \quad (1.56)$$

Note que da mesma expressão (1.45) é gerado os vértices trípliques e quárticos, em outras palavras, a invariância de gauge relaciona ambos os vértices.

Para finalizar as interações entre bósons, falta encontrar as interações envolvendo o Higgs. Utilizando o potencial (1.23) e (1.27), nós encontramos que

$$\mathcal{L}_{H-H} = -\lambda v H^3 - \frac{1}{4} \lambda H^4. \quad (1.57)$$

A interação do Higgs com os bosons  $Z$  e  $W$  podem ser obtidas facilmente utilizando a eq.(1.28), fazendo  $\frac{v}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{v}{\sqrt{2}} \left( 1 + \frac{H}{v} \right)$ . Então

$$\mathcal{L}_{H-gaugebosons} = -\left( \frac{H}{v} + \frac{H^2}{2v} \right) \left( 2M_w^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + M_z^2 Z_\mu Z^\mu \right). \quad (1.58)$$

Uma observação importante é que as interações entre bósons de gauge não violam simetria de carga, inversão temporal e paridade.

# Capítulo 2

## Teorias Efetivas

### 2.1 Uma breve introdução

Teorias efetivas são muito úteis quando nós procuramos entender a física em uma determinada escala de energia e não temos conhecimento da teoria completa. Em teorias onde existe uma grande hierarquia de escalas, podemos parametrizar nossa teoria em termos de uma escala de energia mais alta, onde essa escala característica será denotada por  $\Lambda$ . Essa escala pode ser representada por uma massa, um acoplamento, dentre outros parâmetros. Como por exemplo, imagine uma teoria em que temos apenas duas partículas de massa  $m, M$  onde  $m \ll M$ , é possível expandirmos a lagrangiana em termos da escala pesada  $\frac{1}{M}$  e usar esta lagrangiana efetiva no lugar da teoria completa, que por sinal em muitos casos seria muito mais difícil. Além disso muitas vezes como o caso do Modelo Padrão, nós não sabemos a teoria completa, então essa parametrização se torna muito útil na busca de uma nova física. Teoria de campo efetiva é a ferramenta que nos permitirá simplificar o estudo de sistemas físicos em diferentes escalas.

A função geradora da teoria  $Z[J]$  é definida como:

$$Z[J] = e^{iW[J]} = \int D[\phi] e^{iS[\phi] + i \int d^4x J(x)\phi(x)}, \quad (2.1)$$

onde  $W[J]$  é a funcional geradora dos diagramas conectados e  $J$  a fonte externa. Através da funcional geradora podemos obter o produto temporalmente ordenado de  $n$  campos da seguinte maneira

$$\langle \Omega | T(\hat{\phi}(x_1) \dots \hat{\phi}(x_n)) | \Omega \rangle = (-i)^n \left( \frac{1}{Z[0]} \frac{\partial^n Z[J]}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \right) \Big|_{J=0}. \quad (2.2)$$

Considere uma teoria renormalizável envolvendo campos leves e pesados escritos como  $\phi$  e  $\Phi$ . Os campos leves são os graus de liberdade de energia baixa e os campos pesados são os graus de liberdade de energia alta. Tal teoria pode ser escrita como

$$\mathcal{L}(\phi, \Phi) = \mathcal{L}_l(\phi) + \mathcal{L}_p(\Phi) + \mathcal{L}_{lp}(\phi, \Phi), \quad (2.3)$$

onde  $\mathcal{L}_l, \mathcal{L}_p$  e  $\mathcal{L}_{lp}(\phi, \Phi)$  é a lagrangiana que descreve apenas interações entre os graus de liberdade leves, pesados e ambos nesta ordem. Se você deseja ou precisa descrever uma teoria física apenas em uma determinada escala de energia  $E \ll \Lambda$ , nós podemos integrar fora os graus

de liberdade pesados e ficarmos com uma lagrangiana efetiva contendo apenas os graus de liberdade leves. Temos então

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{eff}} = \int D\phi|_{p < \Lambda} D\Phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_p(\Phi) + \mathcal{L}_l(\phi, \Phi))}. \quad (2.4)$$

Em geral a lagrangiana efetiva pode ser expandida como:

$$\mathcal{L}_{eff}(\phi) = \mathcal{L}_l(\phi) + \sum_i^\infty f_i O_i(x), \quad (2.5)$$

$$f_i = \frac{\alpha_i}{\Lambda^{d_i-4}}, \quad (2.6)$$

onde  $O_i(x)$  são um conjunto de operadores locais construídos dos graus de liberdade leves  $\phi$  que em geral podem ser infinitos operadores. Os coeficientes  $f_i$  são conhecidos como coeficientes de Wilson e codificam neles os efeitos da física pesada na escala  $E \ll \Lambda$ . Este coeficientes podem ser diferenciados em dois tipos, um deles é para  $d_i \leq 4$  onde eles formam um número finito de operadores e renormalizáveis. Os outros são para  $d_i > 4$ , onde temos um infinito número de operadores, não renormalizáveis.

## 2.2 Teoria de Fermi

Vamos apresentar dois exemplos para que isso torne-se mais claro. Há duas maneiras práticas de integrar fora um grau de liberdade pesado, a primeira é expandimos em  $\frac{1}{M}$  o propagador da partícula pesada no cálculo de amplitudes  $\frac{1}{p^2 - M^2} \rightarrow -\frac{1}{M^2} \left(1 + \frac{p^2}{M^2} + \dots\right)$ . A segunda opção consiste em ignoramos os termos cinéticos das partículas pesadas na lagrangiana, em seguida encontramos as equações de movimento nessa aproximação e isolarmos os campos pesados. Substituindo eles de volta na lagrangiana, obtemos uma lagrangiana efetiva constituída apenas dos graus de liberdade leves.

Escolheremos fazer isso através das equações de movimento clássicas. Se considerarmos o vev (valor esperado de vácuo) como o parâmetro da teoria pesada, podemos integrar fora as partícula  $W^\pm$  e  $Z$  da lagrangiana do Modelo Padrão, obtendo a teoria de Fermi dada por:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{QED} + \mathcal{L}_{fermions} \quad (2.7)$$

Para isso considere os seguintes termos da lagrangiana do Modelo Padrão:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \bar{\Psi}_L^i \gamma^\mu D_\mu \Psi_L^i + i \bar{\Psi}_R^i \gamma^\mu D_\mu \Psi_R^i - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z^\mu Z_\mu - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu\nu} + \\ & M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $\Psi$  são os férmions. Considerando zero os termos cinéticos dos bósons  $W$  e  $Z$ , os termos relevantes para a obtenção das equações de movimento para os bósons  $W$  e  $Z$  são:

$$\mathcal{L} = M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu Z^\mu + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^+ J^{-\mu} + \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- J^{+\mu} + g_z Z_\mu J_z^\mu \quad (2.9)$$

sendo

$$J^{+\mu} = \bar{e}_L^i \gamma^\mu \nu_L^i + \bar{d}_L^i \gamma^\mu V_{ckm}^\dagger u_L^i, \quad (2.10)$$

$$J^{-\mu} = \bar{v}_L^i \gamma^\mu e_L^i + \bar{u}_L^i \gamma^\mu V_{ckm} d_L^i, \quad (2.11)$$

$$J_z^\mu = \sum_{\Psi} \bar{\Psi} \gamma^\mu \left( g_L^\Psi P_L + g_R^\Psi P_R \right) \Psi, \quad (2.12)$$

$$g_z = \sqrt{g^2 + g'^2}, \quad (2.13)$$

$$g_L^f = T_3^f - s w^2 Q_f \quad (2.14)$$

$$\text{e } g_R^f = -s w^2 Q_f. \quad (2.15)$$

O próximo passo é encontrar as equações de movimento para os bósons  $W^{-\mu}, W^{+\mu}$  e  $Z_\mu$ , lembre-se que estamos ignorando os termos cinéticos dos bósons  $W^\pm$  e  $Z$ . As equações são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\mu^-} = M_W^2 W^{+\mu} + \frac{g}{\sqrt{2}} J^{+\mu} = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial W_\mu^+} = M_W^2 W^{-\mu} + \frac{g}{\sqrt{2}} J^{-\mu} = 0, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z_\mu} = M_Z^2 Z^\mu + g_z J_z^\mu = 0. \quad (2.18)$$

isolando os campos pesados, obtemos

$$W^{+\mu} = -\frac{g}{\sqrt{2} M_W^2} J^{+\mu}, \quad (2.19)$$

$$W^{-\mu} = -\frac{g}{\sqrt{2} M_W^2} J^{-\mu}, \quad (2.20)$$

$$Z^\mu = -\frac{g_z}{M_Z^2} J_z^\mu. \quad (2.21)$$

Substituindo as eqs.(2.19), (2.20) e (2.21) na eq. (2.9), encontramos a teoria de Fermi

$$\mathcal{L}_{fermions} = -\frac{2}{v^2} \left[ J^{+\mu} J_\mu^- + (J_z^\mu)^2 \right]. \quad (2.22)$$

Note que na eq. (2.22) o parâmetro pesado é  $\Lambda = v$  e  $\mathcal{L}_{fermions}$  é um operador efetivo de dimensão seis. Hoje em dia sabemos que o vev é da ordem de 247 GeV, nessa escala de energia dos 100 GeV podemos dizer que algo novo acontece. Neste caso seriam a aparição das partículas  $W$  e  $Z$ , cujas massas são aproximadamente 80 GeV e 91 GeV.

### 2.3 Lagrangiana efetiva de dimensão seis

De maneira análoga ao caso da teoria de Fermi podemos considerar o Modelo Padrão como uma teoria efetiva de uma teoria mais geral válida no regime de altas energias. O Modelo Padrão é uma teoria de sucesso como dito anteriormente, porque ele consegue uma excelente precisão em muitos observáveis na escala eletrofraca. Contudo, sabemos que ele ainda não responde a uma série de questões deixando uma lacuna de esperança em que deve existir uma teoria mais fundamental quando formos para altas energias. Com base nesses argumentos, acreditamos que a nova física seja pesada e que não tenha um impacto grande na física de baixas energias, em



outras palavras, a física pesada deve contribuir muito pouco em observáveis da física de baixas energias. Estas considerações acabam não deixando muito espaço para novas teorias físicas, devido a essa exigência da consistência com as previsões que já temos da teoria eletrofraca.

Vamos considerar o Modelo Padrão como uma teoria efetiva a baixas energias e utilizar das mesmas partículas e simetrias envolvidas do modelo, deste modo temos

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{modelopadrao} + \sum_{i=5}^{\infty} \frac{f_i}{\Lambda^{i-4}} O_i(x). \quad (2.23)$$

Utilizando a ref.[6, 7], irei apenas ilustrar alguns exemplos para termos uma perspectiva das consequências em adicioná-los. O primeiro operador que podemos construir é o único de dimensão 5, dado por

$$\mathcal{L}_5 = \frac{\alpha_5}{\Lambda} \bar{l}_L^c \tilde{\phi}^* \tilde{\phi}^\dagger l_L, \quad (2.24)$$

se os neutrinos forem partículas Majoranas, então após a quebra da simetria este operador fornece a massa delas que são dadas por  $m_\nu = -\frac{\alpha_5}{\Lambda} v^2$ . A próxima ordem nos traz os operadores de dimensão 6, vamos mostrar alguns exemplos e verificaremos como alguns operadores modificam as constantes do modelo, como

$$\mathcal{L}_6 = -\frac{1}{3} \frac{\alpha_{\phi 6}}{\Lambda^2} |\phi|^6, \quad (2.25)$$

este operador afeta diretamente o vev, corrigindo ele até a ordem de  $\frac{1}{\Lambda^2}$  da seguinte maneira  $v' \cong v \left(1 + \frac{1}{8} \frac{\alpha_{\phi 6}}{\lambda} \frac{v^2}{\Lambda^2}\right)$ . Existem operadores que podem introduzir uma mistura nos termos cinéticos dos campos, por exemplo após a quebra da simetria de

$$\mathcal{L}_6 = \frac{\alpha_{WB}}{\Lambda^2} \phi^\dagger \sigma_a W_{\mu\nu}^a \phi B^{\mu\nu} \propto -\frac{1}{2} \alpha_{WB} \frac{v^2}{\Lambda^2} W_{\mu\nu}^3 B^{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

a eq.(2.26) mistura  $W_{\mu\nu}^3$  e  $B^{\mu\nu}$ , deste modo torna-se necessário redefinir os campos até uma ordem de  $\frac{1}{\Lambda^2}$ . Temos então

$$W_\mu^{3'} = W_\mu^3 + \frac{\alpha_{WB}}{2} \frac{v^2}{\Lambda^2} B_\mu \quad (2.27)$$

$$B'_\mu = B_\mu + \frac{\alpha_{WB}}{2} \frac{v^2}{\Lambda^2} W_\mu^3. \quad (2.28)$$

Isso elimina as misturas no termo cinético, mas isso reflete também na derivada covariante e nos acoplamentos de gauge, refletindo posteriormente na massa também. A partir destes exemplos é claro que a introdução destes operadores efetivos acabam alterando as constantes do modelo, mas além disso ele introduz novos vértices. Vamos citar alguns operadores que alteram vértices tríplexes e quárticos:

$$O_{WWW} = \text{Tr} \left( W_\mu^\nu W_\nu^\beta W_\beta^\mu \right) \quad (2.29)$$

$$O_{WW} = \phi^\dagger W_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \phi, \quad (2.30)$$

$$O_{BB} = \phi^\dagger B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \phi, \quad (2.31)$$

$$O_{BW} = \phi^\dagger B_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \phi, \quad (2.32)$$

$$O_W = (D_\mu \phi)^\dagger W^{\mu\nu} D_\nu \phi, \quad (2.33)$$

$$O_B = (D_\mu \phi)^\dagger B^{\mu\nu} D_\nu \phi, \quad (2.34)$$

$$O_{\phi_1} = (D_\mu \phi)^\dagger \phi^\dagger \phi D^\mu \phi, \quad (2.35)$$

$$O_{\phi_4} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi \phi^\dagger \phi, \quad (2.36)$$

$$O_{\phi_2} = \frac{1}{2} \partial^\mu (\phi^\dagger \phi) \partial_\mu (\phi^\dagger \phi), \quad (2.37)$$

$$O_{\phi_3} = \frac{1}{3} (\phi^\dagger \phi)^3. \quad (2.38)$$

Na tabela abaixo se encontram quais vértices estes operadores mudaram, na notação de que  $VVV$  e  $VVVV$  significam  $V \rightarrow VV$  e  $VV \rightarrow VV$

	$VVV$	$VVVV$	$HVV$	$HVVV$	$HHVV$	$HHH$	$HHHH$
$O_{WWW}$	✓	✓					
$O_{WW}$			✓	✓	✓		
$O_{BB}$			✓		✓		
$O_{BW}$	✓	✓	✓	✓	✓		
$O_W$	✓	✓	✓	✓	✓		
$O_B$	✓		✓	✓	✓		
$O_{\phi_1}$	✓	✓	✓		✓	✓	✓
$O_{\phi_2}$			✓		✓	✓	✓
$O_{\phi_3}$						✓	✓
$O_{\phi_4}$			✓		✓	✓	✓

Tabela 2.1: Vértices tríplices e quárticos gerados pelos operadores de dimensão seis. Os vértices que são modificados estão marcados por ✓. A notação é a seguinte,  $V$  são os bósons de gauge eletrofracos e  $H$  é o Higgs.

Note que os operadores  $O_{WWW}$ ,  $O_{BW}$ ,  $O_W$  e  $O_{\phi_1}$  geram vértices quárticos e tríplices, assim como no caso do Modelo Padrão estes vértices estão ligados pela invariância de gauge. Como nessa dissertação temos o interesse no estudo dos vértices quárticos, os operadores de menor dimensão que geram vértices quárticos, mas não contém tríplices ou dois bósons em um vértice são os de dimensão oito. No último capítulo vamos descobrir qual o limite de unitariedade da teoria com estes novos operadores, para fazer esta análise precisamos do próximo capítulo chamado de Base de Helicidade.

## Capítulo 3

# Base de Helicidade

### 3.1 Estados relativístico de uma partícula

Nessa dissertação os cálculos de amplitude serão feitos na base de helicidade, ao invés de utilizarmos o formalismo de spin e suas cansativas regras de adição. Esta é uma escolha conveniente, porque nesta base os estados são ortogonais. O operador helicidade é definido como

$$\lambda = \vec{J} \cdot \frac{\vec{p}}{p}, \quad (3.1)$$

onde  $\lambda$  é a helicidade,  $\vec{J}$  é o momento angular total e  $\vec{p}$  é o momento linear da partícula. Foram utilizadas como referência para o desenvolvimento do formalismo [8, 9, 10, 11].

Para construir um estado relativístico de uma partícula livre na base de helicidade, primeiro de tudo é importante saber quais operadores comutam com a helicidade. Temos

$$[\lambda, H] = [\lambda, S^2] = [\lambda, J^2] = [\lambda, J_z] = 0, \quad (3.2)$$

onde  $H, S, J$  e  $J_z$  são a hamiltoniana, spin, momento angular total e componente  $z$  do momento angular total. Como aquecimento e por existir uma relação entre a base de helicidade e spin, construiremos primeiro um estado relativístico de uma partícula na base de spin e posteriormente construiremos para a helicidade. Considere o eixo de quantização  $z$  e  $|s, m\rangle$  um autoestado de  $S^2$  e  $S_z$  de uma partícula em repouso, onde  $S$  é o spin da partícula e  $S_i$  suas componentes. Primeiramente vamos aplicar uma rotação nesse estado  $U[R(\varphi, \theta, \gamma)]$ , onde  $(\varphi, \theta, \gamma)$  são os ângulos de Euler e  $U[R]$  um operador unitário dado por

$$U[R(\varphi, \theta, \gamma)] = e^{-i\varphi J_z} e^{-i\theta J_y} e^{-i\gamma J_z}, \quad (3.3)$$

sendo os  $J_i$ 's os geradores de rotação, onde eles mais três geradores de boosts formam os seis geradores do grupo de Lorentz. Aplicando uma rotação no estado  $|s, m\rangle$  e introduzindo um conjunto completo, temos

$$U[R]|s, m\rangle = \sum_{m'} |s, m'\rangle \langle s, m'| U[R]|s, m\rangle = \sum_{m'} |s, m'\rangle D_{m'm}^s(R), \quad (3.4)$$

onde

$$D_{m'm}^s(R(\varphi, \theta, \gamma)) = \langle s, m'| U[R(\varphi, \theta, \gamma)] |s, m\rangle = e^{-i\varphi m'} d_{m'm}^s(\theta) e^{-i\gamma m}, \quad (3.5)$$

$$d_{m'm}^s(\theta) = \langle s, m' | e^{-i\theta J_z} | s, m \rangle. \quad (3.6)$$

Prosseguindo com o formalismo, precisamos construir um estado com momento  $\vec{p}$  a partir do estado de repouso. Consequentemente necessitamos de um operador unitário que represente uma transformação de Lorentz. Para isso consideraremos apenas transformações de Lorentz próprias ortócronas, neste caso temos a seguinte representação

$$L(\vec{p}) = \hat{R}(\varphi, \theta, 0) L_z(p) \hat{R}^{-1}(\varphi, \theta, 0), \quad (3.7)$$

$$\hat{p} = r(\varphi, \theta, 0) \vec{z}, \quad (3.8)$$

onde  $L_z(p)$  é uma transformação de Lorentz na direção negativa do eixo  $z$ . A matriz  $r(\varphi, \theta, 0) \in SO(3)$ ,  $\vec{z}$  é o vetor unitário na direção  $z$  dado por  $(0, 0, 1)^T$  e  $\hat{p}$  é o vetor unitário que representa a direção do momento dado por  $(\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)^T$ . Note que através da rotação  $r(\varphi, \theta, 0)$  somos levados da direção  $z$  para a direção do momento  $\vec{p}$ , veja a eq.(3.8). Podemos então expressar esta transformação de Lorentz em termos de uma transformação unitária, dada por

$$U[L(\vec{p})] = U[\hat{R}(\varphi, \theta, 0)] U[L_z(p)] U^{-1}[\hat{R}(\varphi, \theta, 0)]. \quad (3.9)$$

Com todos os elementos necessários, podemos construir um estado com momento  $\vec{p}$  a partir do estado em repouso. Aplicando a transformação de Lorentz (3.9) no estado  $|s, m\rangle$ , temos que

$$|\vec{p}, s, m\rangle = U[L(\vec{p})] |s, m\rangle. \quad (3.10)$$

É interessante aplicar uma rotação arbitrária neste estado e ver como o momento angular irá se comportar, já que é de se esperar que a componente  $z$  seja alterada e  $S^2$  se mantenha invariante se a eq. (3.10) for uma construção correta. Utilizando as eqs. (3.9) e (3.10) obtemos que

$$U[R] |\vec{p}, s, m\rangle = U[R] U[\hat{R}] U[L_z] U^{-1}[\hat{R}] |s, m\rangle, \quad (3.11)$$

utilizando que  $U^{-1}[R] U[R] = I$ ,  $U^{-1}[\hat{R}] U^{-1}[R] = U^{-1}[R\hat{R}]$  e (3.9), resulta em

$$U[R] |\vec{p}, s, m\rangle = U[R\hat{R}] U[L_z] U^{-1}[R\hat{R}] U[R] |s, m\rangle = U[L(R\vec{p})] U[R] |s, m\rangle. \quad (3.12)$$

Para finalizar vamos introduzir um conjunto completo e aplicar o operador  $U[L(R\vec{p})]$  no estado  $|s, m'\rangle$ , portanto obtemos que

$$U[R] |\vec{p}, s, m\rangle = \sum_{m'} D_{m'm}^s |R\vec{p}, s, m'\rangle. \quad (3.13)$$

Veja que através da eq. (3.13), a componente  $S_z$  não é invariante,  $S^2$  é invariante e o momento  $\vec{p}$  foi rotacionado por  $R$ , assim como gostaríamos. O próximo passo é construir um estado momento  $\vec{p}$  e helicidade  $\lambda$ , lembre-se que a helicidade deve manter-se invariante sob rotações e boosts ao longo da direção  $\vec{p}$ . Com essas informações e utilizando a eq. (3.9), vamos construir este estado da seguinte maneira

$$|\vec{p}, s, \lambda\rangle = U[L(\vec{p})] U[\hat{R}] |s, \lambda\rangle = U[\hat{R}] U[L_z(p)] |s, \lambda\rangle. \quad (3.14)$$

Aplicando uma rotação neste estado, vamos verificar se a helicidade se mantém invariante. Portanto:

$$U[R]|\vec{p}, s, \lambda\rangle = U[R\hat{R}]U[L_z(p)]|\vec{p}, s, \lambda\rangle = |R\vec{p}, s, \lambda\rangle, \quad (3.15)$$

o mesmo acontecerá quando aplicarmos um boost na direção paralela a  $\vec{p}$ , deste modo

$$U[L']|\vec{p}, s, \lambda\rangle = U[L']U[L(\vec{p})]U[\hat{R}]|s, \lambda\rangle = U[L(\vec{p}')]U[\hat{R}]|s, \lambda\rangle = |\vec{p}', s, \lambda\rangle. \quad (3.16)$$

Como dito anteriormente existe uma conexão entre a base canônica e a de helicidade, introduzindo um conjunto completo na eq. (3.14) e utilizando a eq. (3.10) encontramos que

$$|\vec{p}, s, \lambda\rangle = U[L(\vec{p})]U[\hat{R}]|s, \lambda\rangle = \sum_m U[L(\vec{p})]|s, m\rangle D_{m\lambda}^s(\hat{R}) = \sum_m D_{m\lambda}^s(\hat{R})|\vec{p}, s, m\rangle. \quad (3.17)$$

Para finalizar o formalismo de uma partícula na base de helicidade, vamos mudar de base e diagonalizar o momento angular total, componente  $z$  do momento angular total, helicidade e a hamiltoniana. É importante ter um estado assim para podermos obter uma expansão em ondas parciais para o caso de partículas com spin. Vamos começar da eq. (3.14), ocultaremos o spin de agora em diante, porque ele não participa do cálculo e a notação fica muito carregada.

$$|\vec{p}, \lambda\rangle = U[\hat{R}]U[L_z(p)]|\vec{0}, \lambda\rangle = U[\hat{R}]|\vec{p}_z, \lambda\rangle.$$

Nas coordenadas esféricas podemos representar um estado com momento  $\vec{p}$  pela magnitude do momento e os ângulos esféricos  $(\theta, \phi)$ , então

$$|p, \theta, \phi, \lambda\rangle = U[\hat{R}(\phi, \theta, 0)]|p, 0, 0, \lambda\rangle \quad (3.18)$$

como  $J_z$  é um autovetor de  $|p, 0, 0, \lambda\rangle$  com autovalor  $\lambda$ , ele pode ser decomposto em estados  $|p, j, m, \lambda\rangle$  para  $m = \lambda$ , onde  $j$  é o momento angular total, então

$$|p, 0, 0, \lambda\rangle = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty} |p, j, m = \lambda, \lambda\rangle \langle p, j, m = \lambda, \lambda | p, 0, 0, \lambda\rangle = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty} |p, j, \lambda, \lambda\rangle N_j \quad (3.19)$$

Aplicando uma rotação  $U[\hat{R}]$  na eq. (3.19) e considerando que um estado  $|j, m\rangle$  sob uma rotação se transforma como

$$U[\hat{R}]|j, \lambda\rangle = \sum_m D_{m\lambda}^j[\hat{R}]|j, m\rangle, \quad (3.20)$$

obtemos que

$$|p, \theta, \phi, \lambda\rangle = \sum_{j=|\lambda|}^{\infty} \sum_{m=-j}^j |p, j, m, \lambda\rangle D_{m\lambda}^j(\phi, \theta, 0) N_j. \quad (3.21)$$

Note que a eq. (3.21) é uma generalização de ondas planas expandidas em ondas esféricas para uma partícula com spin, podemos ver isso fazendo  $s = 0$ . Voltando com nosso objetivo principal, vamos aplicar a relação de ortogonalidade para a matriz de Wigner D na eq. (3.21), dada por

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^\pi d\theta \sin\theta D_{mn}^{*j}(R(\varphi, \theta, \gamma)) D_{m'n'}^{j'}(R(\varphi, \theta, \gamma)) = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{j'j} \delta_{m'm} \delta_{n'n}, \quad (3.22)$$

para o nosso caso das matrizes de Wigner, temos:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta D_{m\lambda}^{*j}(R(\varphi, \theta, 0)) D_{m\lambda}^{j'}(R(\varphi, \theta, 0)) = \frac{4\pi}{2j+1} \delta_{j'j}. \quad (3.23)$$

Multiplicando a eq. (3.21) dos dois lados por  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta D_{m\lambda}^{*j}(R(\varphi, \theta, 0))$ , temos:

$$\begin{aligned} |p, j, m, \lambda\rangle &= N_j \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta D_{m\lambda}^{*j}(\varphi, \theta, 0) |p, \theta, \varphi, \lambda\rangle \\ &= N_j \int d\Omega D_{m\lambda}^{*j}(\varphi, \theta, 0) |p, \theta, \varphi, \lambda\rangle \implies \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \langle p', j', m', \lambda' | p, j, m, \lambda \rangle &= |N_j|^2 \iint d\Omega' d\Omega D_{m'\lambda'}^{*j'}(\varphi', \theta', 0) D_{m\lambda}^{*j}(\varphi, \theta, 0) \\ &\quad \times \langle p', \theta', \varphi', \lambda' | p, \theta, \varphi, \lambda \rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Para determinar  $N_j$  precisamos escolher a normalização dos estados, escolhamos que

$$\langle \vec{p}', s', m' | \vec{p}, s, m \rangle = (2\pi)^3 (2E) \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{s's} \delta_{m'm}, \quad (3.26)$$

$$\langle \vec{p}', s', \lambda' | \vec{p}, s, \lambda \rangle = (2\pi)^3 (2E) \delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) \delta_{s's} \delta_{\lambda'\lambda}, \quad (3.27)$$

$$\langle p', j', m', \lambda' | p, j, m, \lambda \rangle = (2\pi)^3 (2E) \frac{\delta(p' - p)}{p'p} \delta_{j'j} \delta_{m'm} \delta_{\lambda'\lambda}. \quad (3.28)$$

Com estas normalizações a relação de completza para os estados contínuos com momento  $\vec{p}$  escrevem-se como:

$$\sum_{sm} \int |\vec{p}, s, m\rangle \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3(2E)} \langle \vec{p}, s, m | = I, \quad (3.29)$$

$$\sum_{s\lambda} \int |\vec{p}, s, \lambda\rangle \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3(2E)} \langle \vec{p}, s, \lambda | = I, \quad (3.30)$$

$$\sum_{jm\lambda} \int |p, j, m, \lambda\rangle \frac{p^2 dp}{(2\pi)^3(2E)} \langle p, j, m, \lambda | = I. \quad (3.31)$$

Lembrando que  $\frac{d^3\vec{p}}{E}$  é invariante de Lorentz, com esta escolha de normalização nossas relações de completza são invariantes de Lorentz. Vamos voltar e determinar  $N_j$ , para isso precisamos lembrar que a delta tridimensional nas coordenadas cartesianas transforma-se para as coordenadas esféricas como

$$\delta^3(\vec{p}' - \vec{p}) = \frac{1}{p'p} \delta(p' - p) \delta(\cos\theta' - \cos\theta) \delta(\varphi' - \varphi), \quad (3.32)$$

substituindo (3.23), (3.27) e (3.32) em (3.25), temos

$$\langle p', j', m', \lambda' | p, j, m, \lambda \rangle = |N_j|^2 (2\pi)^3 (2E) \frac{\delta(p' - p)}{p'p} \frac{4\pi}{2j+1} \delta_{j'j} \delta_{m'm} \delta_{\lambda'\lambda}, \quad (3.33)$$

comparando (3.33) com (3.28), nós obtemos que

$$|N_j| = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \quad (3.34)$$

e

$$|p, j, m, \lambda\rangle = \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin\theta D_{m\lambda}^{*j}(\varphi, \theta, 0) |p, \theta, \varphi, \lambda\rangle. \quad (3.35)$$

### 3.2 Estado relativístico de duas partículas

Nesta seção vamos construir estados de duas partículas. Assim como fizemos na eq. (3.35), queremos encontrar um estado diagonal com o momento angular total ao quadrado das duas partículas ( $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$ ), componente  $z$  do momento angular total das duas partículas e com as helicidades das partículas, esse estado é escrito como  $|J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ . Quando ele for obtido estaremos prontos para obter a expansão em ondas parciais.

Considere um estado de duas partículas em um referencial arbitrário e na base de helicidade escrito como  $|\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2\rangle$ , onde o momento de cada uma delas é escrito como  $\vec{p}_i$  e a helicidade como  $\lambda_i$ . Este estado é o produto tensorial de dois estados de uma partícula, dado por:

$$|\vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2\rangle = |\vec{p}_1, \lambda_1\rangle \times |\vec{p}_2, \lambda_2\rangle. \quad (3.36)$$

No referencial do centro de massa e nas coordenadas esféricas este estado de duas partículas é descrito pela magnitude do momento de uma das partículas  $p$ , pelos ângulos esféricos  $(\theta, \varphi)$  de uma das partículas e suas helicidades escrito como  $|p, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ . A partir da base  $|p, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle$  vamos fazer uma mudança de base para  $|p, J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ , temos então que

$$|p, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \sum_{JM} c_{JM}(p, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2) |p, J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle. \quad (3.37)$$

onde  $c_{JM}(p, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2)$  é uma constante que a priori pode depender dos números quânticos  $J, M$ , da direção  $(\theta, \varphi)$  e da helicidade. Para  $\theta = \varphi = 0$  estamos na direção do eixo  $z$ , nesta situação temos duas partículas se movendo da direção oposta e  $|p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2\rangle$  é autoestado de  $J_z$  com autovalor  $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ . Então no lado direito da equação só temos termos do tipo  $M = \lambda$ . Portanto

$$|p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \sum_J c_{J\lambda}(p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2) |p, J, \lambda, \lambda_1, \lambda_2\rangle. \quad (3.38)$$

Vamos agora rodar o estado de volta para a direção  $\theta, \varphi$ , deste modo

$$|p, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle = U[R(\varphi, \theta, 0)] |p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2\rangle, \quad (3.39)$$

utilizando que

$$U[R] |p, J, \lambda, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \sum_M D_{M\lambda}^J[R] |p, J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle, \quad (3.40)$$

encontramos que:

$$|p, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \sum_{JM} c_{J\lambda}(p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2) D_{M\lambda}^J(\varphi, \theta, 0) |p, J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle. \quad (3.41)$$

Note que a equação (3.41) é a generalização para duas partículas da eq. (3.21). Para terminar precisamos encontrar o valor do coeficiente  $c_{J\lambda}(p, 0, 0, \lambda_1, \lambda_2)$ . Utilizando a relação de ortogonalidade (3.23) na eq. (3.41), obtemos que

$$|p, J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle = c_{J\lambda} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) D_{M\lambda}^{*J}(\varphi, \theta, 0) |p, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle, \quad (3.42)$$

a hamiltoniana comuta  $J^2, J_z, \lambda_1$  e  $\lambda_2$ , deste modo a parte em  $p$  se fatoriza. Então:

$$|J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle = c_{J\lambda} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) D_{M\lambda}^{*J}(\varphi, \theta, 0) |\theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle. \quad (3.43)$$

Para determinar  $c_{J\lambda}$  precisamos fixar as normalizações dos estados de duas partículas, assim como no caso de uma partícula.

Vamos começar pela normalização do estado de uma partícula na eq. (3.27) e generalizar para o caso de duas. A normalização para este estado em um referencial arbitrário e nas coordenadas cartesianas é escolhido tal que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}'_1, \lambda'_1; \vec{p}'_2, \lambda'_2 | \vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2 \rangle &= (2\pi)^6 4 E_1 E_2 \delta^3(\vec{p}'_1 - \vec{p}_1) \\ &\times \delta^3(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2) \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Assim como na ref.[11] vou introduzir novas variáveis :

$$P^\mu = (E, \vec{P}), \quad (3.45)$$

$$\vec{p} = \frac{(m_2 \vec{p}_1 - m_1 \vec{p}_2)}{m_1 + m_2}, \quad (3.46)$$

onde  $E$  é a soma da energia de cada partícula  $E = E_1 + E_2$ ,  $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  e  $\vec{p}$  o momento relativo entre elas.

Seja  $\vec{r}$  a coordenada relativa dada por  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , o momento relativo  $\vec{p}$  foi escolhido de modo que  $[r_i, p_j] = i\delta_{ij}$ . Para uma dada normalização  $a$ , vamos provar que

$$\langle \vec{p}'_1, \lambda'_1, \vec{p}'_2, \lambda'_2 | \vec{p}_1, \lambda_1, \vec{p}_2, \lambda_2 \rangle = a^2 \delta^4(P'^\mu - P^\mu) \delta(\Omega' - \Omega) \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} \quad (3.47)$$

Sabendo isso, podemos escrever que:

$$|\vec{p}_1, \lambda_1, \vec{p}_2, \lambda_2\rangle = a |P^\mu, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle, \quad (3.48)$$

onde a constante  $a$  é determinada pela normalização dos estados. Se eu integrar a eq.(3.44) por  $\iint \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 (2E_1)} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 (2E_2)}$ , nós obtemos  $\delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \times \delta_{\lambda'_2 \lambda_2}$ . Depois disso fazendo a substituição da eq. (3.48), nós encontramos que



$$\begin{aligned} & \iint \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 (2E_1)} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 (2E_2)} \langle \vec{p}'_1, \lambda'_1; \vec{p}'_2, \lambda'_2 | \vec{p}_1, \lambda_1; \vec{p}_2, \lambda_2 \rangle = \\ & \iint \frac{d^3 \vec{p}_1}{(2\pi)^3 (2E_1)} \frac{d^3 \vec{p}_2}{(2\pi)^3 (2E_2)} |a|^2 \langle P'^\mu, \theta', \varphi', \lambda'_1, \lambda'_2 | P^\mu, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \\ & \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Para encontrarmos a constante  $a$  precisamos determinar  $d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2$  em termos de  $d^4 P = dP^0 d^3 \vec{P}$  e  $d\Omega = d \cos\theta d\varphi$ . No caso do centro de massa  $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ , então as eqs. (3.45) e (3.46) tornam-se:

$$P^\mu = (E, \vec{0}), \quad (3.50)$$

$$\vec{p} = \vec{p}_1, \quad (3.51)$$

pode-se mostrar que

$$d^3 \vec{p}_1 d^3 \vec{p}_2 = d^4 P \frac{p E_1 E_2}{\sqrt{s}} d^2 \Omega. \quad (3.52)$$

onde  $s$  é a variável de Mandelstam. Elas são definidas da seguinte maneira para um espalhamento de  $p_1 p_2 \rightarrow k_1 k_2$ :  $s = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = (k_1^\mu + k_2^\mu)^2$ ,  $t = (p_1^\mu - k_1^\mu)^2 = (k_2^\mu - p_2^\mu)^2$  e  $u = (p_1^\mu - k_2^\mu)^2 = (k_1^\mu - p_2^\mu)^2$ . Substituindo a eq. (3.52) na eq. (3.49) e adotando a seguinte normalização

$$\begin{aligned} \langle P'^\mu, \theta', \varphi', \lambda'_1, \lambda'_2 | P^\mu, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2 \rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(P'^\mu - P^\mu) \delta(\cos\theta' - \cos\theta) \\ &\times \delta(\varphi' - \varphi) \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

obtemos que :

$$|a| = (4\pi) \sqrt{\frac{\sqrt{s}}{p}}. \quad (3.54)$$

Com a constante  $a$  calculada, a eq. (3.48) é dada por

$$|\vec{p}_1, \lambda_1, \vec{p}_2, \lambda_2\rangle = |p, \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle = (4\pi) \sqrt{\frac{\sqrt{s}}{p}} |\theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle |P^\alpha\rangle, \quad (3.55)$$

com as normalizações dos estados escolhidas como:

$$\langle P'^\alpha | P^\alpha \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P'^\alpha - P^\alpha), \quad (3.56)$$

$$\langle \theta', \varphi', \lambda'_1, \lambda'_2 | \theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \delta(\cos\theta' - \cos\theta) \delta(\varphi' - \varphi) \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2}. \quad (3.57)$$

Note que a eq. (3.56) é a fonte da conservação de energia e será sempre fatorizada no cálculo da matriz S.

Para encontrar a constante  $c_{J\lambda}$  falta escolher a normalização do estado  $|J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ . Escolhemos que

$$\langle J', M', \lambda'_1, \lambda'_2 | J, M, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \delta_{J'J} \delta_{M'M} \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2}, \quad (3.58)$$

da mesma maneira que foi feito para encontrar  $N_j$  na eq. (3.34), encontramos que

$$\delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} = \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2} \left( \frac{4\pi}{2J+1} \right) |c_{J\lambda}|^2, \quad (3.59)$$

portanto

$$|c_{J\lambda}| = |c_J| = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}. \quad (3.60)$$

Calculado o coeficiente  $c_{j\lambda}$ , a eq.(3.42) é dada por

$$|J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) D_{M\lambda}^{*J}(\varphi, \theta, 0) |\theta, \varphi, \lambda_1, \lambda_2\rangle, \quad (3.61)$$

onde  $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ . A eq. (3.61) será utilizada para fazermos a expansão em ondas parciais. Utilizando as eqs.(3.61) e (3.57), temos

$$\langle \theta, \varphi, \lambda'_1, \lambda'_2 | J, M, \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} D_{M\lambda}^{*J}(\varphi, \theta, 0) \delta_{\lambda'_1 \lambda_1} \delta_{\lambda'_2 \lambda_2}, \quad (3.62)$$

essa normalização será útil mais a frente no cálculo da expansão em ondas parciais.

### 3.3 Expansão em ondas parciais

Nesta seção vamos calcular a expansão em ondas parciais de uma amplitude espalhamento de  $2 \rightarrow 2$  na base de helicidade. Considere  $|i\rangle, |f\rangle$  os estados iniciais e finais, a partir da eq. (3.55) temos:

$$|i\rangle = |p_i, \theta_i, \varphi_i, \lambda_1, \lambda_2\rangle = (4\pi) \sqrt{\frac{\sqrt{s}}{p_i}} |P_i^\alpha, \theta_i, \varphi_i, \lambda_1, \lambda_2\rangle, \quad (3.63)$$

$$|f\rangle = |p_f, \theta_f, \varphi_f, \lambda_3, \lambda_4\rangle = (4\pi) \sqrt{\frac{\sqrt{s}}{p_f}} |P_f^\alpha, \theta_f, \varphi_f, \lambda_3, \lambda_4\rangle. \quad (3.64)$$

Calculando a matriz de transição  $T_{fi}$  com estes estados, obtemos

$$T_{fi} = \langle f | T | i \rangle = (2\pi)^6 4 \sqrt{\frac{s}{p_f p_i}} \delta^4(P_f^\alpha - P_i^\alpha) \langle \theta_f, \varphi_f, \lambda_3, \lambda_4 | T(s) | \theta_i, \varphi_i, \lambda_1, \lambda_2 \rangle, \quad (3.65)$$

é tradicional definirmos  $M_{fi}$  através de

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f^\alpha - P_i^\alpha) M_{fi} = \delta_{fi} + iT_{fi}, \quad (3.66)$$

temos então que

$$M_{fi} = (2\pi)^2 4 \sqrt{\frac{s}{p_f p_i}} \langle \theta_f, \varphi_f, \lambda_3, \lambda_4 | T(s) | \theta_i, \varphi_i, \lambda_1, \lambda_2 \rangle. \quad (3.67)$$

Vamos introduzir agora o conjuntos completos do estado  $|J, M, \lambda_1, \lambda_2\rangle$  na eq. (3.67), então

$$\begin{aligned} M_{fi} &= (2\pi)^2 4 \sqrt{\frac{s}{p_f p_i}} \sum_{JM J' M'} \langle \theta_f, \varphi_f, \lambda_3, \lambda_4 | JM, \lambda_3, \lambda_4 \rangle \\ &\times \langle J, M, \lambda_3, \lambda_4 | T(s) | J', M', \lambda_1, \lambda_2 \rangle \langle J', M', \lambda_1, \lambda_2 | \theta_i, \varphi_i, \lambda_1, \lambda_2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Utilizando a normalização (3.62) na eq. (3.68), encontramos que

$$M_{fi} = (2\pi)^2 4 \sqrt{\frac{s}{p_f p_i}} \sum_{JM} \left( \frac{2J+1}{4\pi} \right) D_{M\lambda_f}^{*J}(R(\varphi_f, \theta_f, 0)) D_{M\lambda_i}^J(R(\varphi_i, \theta_i, 0)) T_{\lambda_f \lambda_i}^J, \quad (3.69)$$

com

$$T_{\lambda_f \lambda_i}^J \doteq \langle J, M, \lambda_3, \lambda_4 | T(s) | J, M, \lambda_1, \lambda_2 \rangle. \quad (3.70)$$

Através das seguintes propriedades da matriz D :

$$D_{mm'}^j(R^{-1}) = \left[ D_{m'm}^j(R) \right]^*, \quad (3.71)$$

$$D_{m'm}^j(R_2 R_1) = \sum_k D_{m'k}^j(R_2) D_{km}^j(R_1), \quad (3.72)$$

aplicadas na eq. (3.69), temos a expansão em ondas parciais dada por

$$M_{fi} = 4\pi \sqrt{\frac{s}{p_f p_i}} \sum_J (2J+1) D_{\lambda_i \lambda_f}^{*J}(R^{-1}(\varphi_i, \theta_i, 0) R(\varphi_f, \theta_f, 0)) T_{\lambda_f \lambda_i}^J. \quad (3.73)$$

Lembre-se que estamos no centro de massa e através da eq. (3.61) sabemos que  $\lambda_f = \lambda_3 - \lambda_4$  e  $\lambda_i = \lambda_1 - \lambda_2$ . Para finalizar vamos redefinir  $T_{\lambda_f \lambda_i}^J$  da seguinte maneira:

$$T_{\lambda_f \lambda_i}^J \rightarrow 4 \sqrt{\frac{p_f p_i}{s}} T_{\lambda_f \lambda_i}^J, \quad (3.74)$$

com essa redefinição, a expansão em ondas parciais é dada por:

$$M_{fi} = 16\pi \sum_J (2J+1) D_{\lambda_i \lambda_f}^{*J}(R^{-1}(\varphi_i, \theta_i, 0) R(\varphi_f, \theta_f, 0)) T_{\lambda_f \lambda_i}^J. \quad (3.75)$$

### 3.4 Teorema ótico na base de helicidade

Nesta seção vamos derivar o teorema ótico na base de helicidade e posteriormente aplicar-lo a expansão em ondas parciais (3.75). Seja S a conhecida matriz de espalhamento "S" e  $|x\rangle$  um estado de múltiplas partículas, a unitariedade da matriz S significa

$$S^\dagger S = I, \quad (3.76)$$

uma propriedade importante do espaço de Hilbert é que ele é completo, isso significa que:

$$\sum_x \int \prod_{j \in x} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} |x\rangle \langle x| = I. \quad (3.77)$$

Sabendo que a relação entre a matriz S e a de transferência T é dada por  $S = I + iT$ , aplicando na eq. (3.76), temos que

$$i(T^\dagger - T) = T^\dagger T, \quad (3.78)$$

tomando o elemento de matriz  $fi$  de cada lado e rearranjando obtemos

$$i[(\langle i | T | f \rangle)^* - \langle f | T | i \rangle] = \langle f | T^\dagger T | i \rangle. \quad (3.79)$$

Utilizando a relação de completeza do lado direito e escrevendo a expressão da matriz  $T$  como  $T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f^\mu - P_i^\mu) M_{fi}$ , temos então o conhecido resultado do teorema ótico dado por

$$M_{fi} - M_{if}^* = i \sum_x \int \prod_{j \in x} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} (2\pi)^4 \delta^4(\sum_i p_i - \sum_x p_x) M_{xi} M_{xf}^*. \quad (3.80)$$

O último passo é aplicar a expansão em parciais (3.75) no teorema ótico (3.80). Vamos começar lidando com o lado direito da equação do teorema ótico, os cálculos serão feitos no centro de massa e vamos considerar apenas um estado intermediário de duas partículas de momentos  $q_1$  e  $q_2$ . É possível mostrar que para um espalhamento de  $M_{fi}(k_1(\lambda_1)k_2(\lambda_2) \rightarrow p_1(\lambda_3)p_2(\lambda_4))$  no referencial do centro de massa vale

$$\int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \int \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) = \frac{|\vec{q}_1|}{4\sqrt{s}} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\varphi' d\cos\theta', \quad (3.81)$$

onde  $s, t, u$  são as variáveis de Mandelstam. Alguns ângulos foram definidos ( $k_1, k_2$ ) está na direção  $z$ ,  $\theta$  ( $\varphi = 0$ ) é o ângulo de espalhamento entre  $(p_1, p_2)$  e  $(k_1, k_2)$  e  $(\theta', \varphi')$  o ângulo entre  $(q_1, q_2)$  e  $(k_1, k_2)$ . O conjunto completo em questão é

$$\sum_{\lambda'_1 - \lambda'_2} \int \prod_{j=1}^2 \frac{d^3 q_j}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} |q, \theta', \varphi', \lambda'_1 - \lambda'_2\rangle \langle q, \theta', \varphi', \lambda'_1 - \lambda'_2| = I, \quad (3.82)$$

substituindo no lado direito da eq. (3.80) as eqs. (3.75), (3.81) e (3.82), nós encontramos que

$$M_{fi} - M_{if}^* = i \frac{q_1}{4\sqrt{s}} \frac{(16\pi)^2}{(2\pi)^2} \sum_{JJ'\mu'} (2J+1)(2J'+1) \times \int d\Omega' D_{\lambda\mu'}^J(R^{-1}(0, \theta, 0)R(\varphi', \theta', 0)) T_{\mu'\lambda}^{*J} D_{\mu\mu'}^{*J'}(R(\varphi', \theta', 0)) T_{\mu'\mu}^{J'}, \quad (3.83)$$

onde  $\mu' = \lambda'_1 - \lambda'_2$ ,  $\lambda = \lambda_3 - \lambda_4$ ,  $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$  e  $d\Omega = d(\cos\theta)d\varphi$ . Utilizando que :

$$D_{\lambda\mu'}^J(R(0, -\theta, 0)R(\varphi', \theta', 0)) = \sum_{\lambda'} D_{\lambda\lambda'}^J(R(0, -\theta, 0)) D_{\lambda'\mu'}^J(R(\varphi', \theta', 0)),$$

$$\int d\Omega' D_{\lambda\mu'}^J(R(\varphi', \theta', 0)) D_{\mu\mu'}^{J'}(R(\varphi', \theta', 0)) = \frac{4\pi}{2J+1} \delta_{JJ'} \delta_{\lambda\mu},$$

então

$$M_{fi} - M_{if}^* = i \frac{64\pi q_1}{\sqrt{s}} \sum_J (2J+1) D_{\mu\lambda}^{*J}(R(0, \theta, 0)) (T^{\dagger J} T^J)_{\lambda\mu}. \quad (3.84)$$

Para o lado esquerdo obtemos analogamente que

$$M_{fi} - M_{if}^* = 16\pi \sum_J (2J+1) D_{\mu\lambda}^{*J}(R(0, \theta, 0)) (T_{\lambda\mu}^J - T_{\lambda\mu}^{\dagger J}), \quad (3.85)$$

através das eqs. (3.84) e (3.85) encontramos

$$T_{\lambda\mu}^J - T_{\lambda\mu}^{\dagger J} = i \frac{4|\vec{q}_1|}{\sqrt{s}} (T^{\dagger J} T^J)_{\lambda\mu}. \quad (3.86)$$

No limite de altas energias podemos considerar que a massa de  $q_1$  seja aproximadamente zero, portanto  $q_1 \rightarrow \frac{\sqrt{s}}{2}$ . Assumiremos também que as reações são elásticas, deste modo  $|i\rangle = |f\rangle$ . Sendo assim

$$\text{Im}(T^J)_{\lambda\lambda} = (T^{\dagger J} T^J)_{\lambda\lambda}, \quad (3.87)$$

para finalizar vamos escrever o elemento de matriz como  $T_{\lambda\lambda}^J = a + bi$ , onde  $a, b \in \mathfrak{R}$ , deste modo obtemos

$$b = a^2 + b^2 \implies a^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 = 1/4, \quad (3.88)$$

como

$$|T_{\lambda\lambda}^J| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{b}, \quad (3.89)$$

através da eq.(3.88), vemos que o maior valor que  $b$  pode assumir é 1, então

$$|T_{\lambda\lambda}^J| \leq 1 \quad (3.90)$$

Este resultado é fruto do teorema ótico na base de helicidade expandido em ondas parciais no limite de altas energias. A eq.(3.90) nos diz que amplitudes não podem ser arbitrariamente grandes, existe um limite para isso, quando esse limite for ultrapassado dizemos que a teoria viola unitariedade. Quando a unitariedade é violada já a nível de árvore, ordens mais altas são importantes, logo a expansão em ondas parciais pode não ser mais útil.

### 3.5 Polarização

Nas próximas seções faremos uso de polarizações longitudinais e transversais dos bósons de gauge, então nessa seção vamos encontrá-las. Na expressão da expansão em ondas parciais (3.75) nós calcularemos as amplitudes  $M_{fi}$  na base  $|\vec{p}_1, \vec{p}_2, \lambda_1, \lambda_2\rangle$ , tendo isso em mente será necessário obtermos as polarizações  $e^\mu(\vec{p}, \lambda)$  nesta base. A base de helicidade é definida como:

$$\vec{e}(\pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 + i\vec{e}_2), \quad (3.91)$$

$$\vec{e}(0) = \vec{e}_3, \quad (3.92)$$

onde:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.93)$$

Os  $J$ 's são os geradores do grupo  $SO(3)$ , que são determinados a partir das matrizes de rotação:

$$r_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (3.94)$$

$$r_2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \text{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

$$r_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.96)$$

onde  $r_1(\theta)$  é a rotação em torno do eixo  $x$ ,  $r_2(\theta)$  é a rotação em torno do eixo  $y$  e  $r_3(\theta)$  é a rotação em torno do eixo  $z$ , todas no sentido anti-horário. Os geradores são obtidos com  $J_k = i \frac{\partial r_k(\theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0}$ , dados por:

$$J_1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.97)$$

$$J_2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

$$J_3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

Aplicando os geradores do grupo  $SO(3)$  nas polarizações, nós obtemos que:

$$J_3 \vec{e}(m) = m \vec{e}(m), \quad (3.100)$$

$$J_{\pm} \vec{e}(\mp) = \sqrt{2} \vec{e}(0), \quad (3.101)$$

$$J_{\pm} \vec{e}(\pm) = 0, \quad (3.102)$$

$$J_{\pm} \vec{e}(0) = \sqrt{2} \vec{e}(\pm), \quad (3.103)$$

$$m = 0, -1, 1. \quad (3.104)$$

Claramente os vetores  $\vec{e}(m)$  são autovetores dos geradores  $J_i$  e estes geradores constituem uma representação de momento angular para partículas de spin um em repouso. A partir da polarização  $\vec{e}(m)$ , podemos definir uma quadri-polarização para partículas em repouso dada por

$$e^{\mu}(\vec{p} = 0, m) = (0, \vec{e}(m)). \quad (3.105)$$

Assim como em (3.10) e (3.14) podemos obter nossos estados de spin e helicidade com momento  $\vec{p}$ , dados por

$$e^{\mu}(\vec{p}, m) = [\hat{R}L_z(p) \hat{R}^{-1}]_{\nu}^{\mu} e^{\nu}(0, m) \quad (3.106)$$

$$e^{\mu}(\vec{p}, \lambda) = [\hat{R}L_z(p)]_{\nu}^{\mu} e^{\nu}(0, \lambda). \quad (3.107)$$

Sabendo que no repouso vale  $e^{\nu}(0, m) = e^{\nu}(0, \lambda)$  e calculando para  $\hat{R} = R_2(\theta)$  :

$$R_2(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & r_2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.108)$$

$$L_z(p) = \begin{pmatrix} \cosh z & 0 & 0 & \sinh z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sinh z & 0 & 0 & \cosh z \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

onde  $\cosh z = \frac{E}{M}$  e  $\sinh z = \frac{p}{M}$ . Para a eq. (3.107) nós encontramos que:

$$e^\mu(p\vec{e}_r, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \cos\theta, \pm i, -\sin\theta), \quad (3.110)$$

$$e^\mu(p\vec{e}_r, 0) = (\sinh z, \cosh z \sin\theta, 0, \cosh z \cos\theta) = \frac{1}{M} (p, E \sin\theta, 0, E \cos\theta), \quad (3.111)$$

$$\hat{p} = r_2(\theta) \vec{e}_3 = \sin\theta \vec{e}_1 + \cos\theta \vec{e}_3 = \vec{e}_r. \quad (3.112)$$

Desta maneira podemos construir um quadri-momento que está com polarização e tri-momento (3.110) e (3.112) dado por

$$p^\mu = (E, p \sin\theta, 0, p \cos\theta). \quad (3.113)$$

A partir das eqs. (3.110) e (3.111) vamos obter as outras direções do momento, para  $\theta = 0$  temos que

$$e^\mu(p\vec{e}_3, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0), \quad (3.114)$$

$$e^\mu(p\vec{e}_3, 0) = \frac{1}{M} (p, 0, 0, E), \quad (3.115)$$

$$p^\mu = (E, 0, 0, p). \quad (3.116)$$

Para  $\theta = \pi$ :

$$e^\mu(-p\vec{e}_3, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, \pm i, 0), \quad (3.117)$$

$$e^\mu(-p\vec{e}_3, 0) = \frac{1}{M} (p, 0, 0, -E), \quad (3.118)$$

$$p^\mu = (E, 0, 0, -p). \quad (3.119)$$

Para finalizar, para  $\theta \rightarrow \theta + \pi$ :

$$e^\mu(-p\vec{e}_r, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -\cos\theta, \pm i, \sin\theta), \quad (3.120)$$

$$e^\mu(-p\vec{e}_r, 0) = \frac{1}{M} (p, -E \sin\theta, 0, -E \cos\theta), \quad (3.121)$$

$$p^\mu = (E, -p \sin\theta, 0, -p \cos\theta), \quad (3.122)$$

note que todas as polarizações satisfazem  $p^\mu e_\mu(p) = 0$  e  $e^\mu(p) e_\mu^*(p) = -1$ .

Resumirei aqui os momentos associados com cada polarização transversal no referencial do centro de massa. Vou introduzir também uma notação que será utilizada mais á frente, quando um bóson de gauge for dito transversal ele será escrito como  $V_\pm^\mu$  com autovalor de helicidade  $\lambda = \pm 1$ , quando for dito longitudinal será escrito como  $V_0^\mu$ , com autovalor de helicidade  $\lambda = 0$ . Sendo assim temos que:

Momentos	Polarizações
$p_1^\mu = (E_1, 0, 0, p)$	$e_1^\mu(p\vec{e}_3, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \pm i, 0)$
$p_2^\mu = (E_2, 0, 0, -p)$	$e_2^\mu(-p\vec{e}_3, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -1, \pm i, 0)$
$p_3^\mu = (E_3, p' \sin\theta, 0, p' \cos\theta)$	$e_3^\mu(p'\vec{e}_r, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \cos\theta, \pm i, -\sin\theta)$
$p_4^\mu = (E_4, -p' \sin\theta, 0, -p' \cos\theta)$	$e_4^\mu(-p'\vec{e}_r, \pm 1) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -\cos\theta, \pm i, \sin\theta)$

Tabela 3.1: Quadrimomentos associados com as polarizações dos bósons transversais, para reações do tipo  $2 \rightarrow 2$  e no referencial do centro de massa.

Através de  $s = (p_1^\mu + p_2^\mu)^2 = (p_3^\mu + p_4^\mu)^2$  e considere que a massa da partícula  $p_i$  é  $m_i$ , obtemos que:

$$p^2 = \frac{(s - m_1^2 - m_2^2)^2 - 4m_1^2 m_2^2}{4s}, \quad (3.123)$$

$$p'^2 = \frac{(s - m_3^2 - m_4^2)^2 - 4m_3^2 m_4^2}{4s}. \quad (3.124)$$

Segue abaixo os momentos e polarizações longitudinais no referencial do centro de massa :

Momentos	Polarizações
$p_1^\mu = (E_1, 0, 0, p)$	$e^\mu(p\vec{e}_3, 0) = \frac{1}{m_1} (p, 0, 0, E_1)$
$p_2^\mu = (E_2, 0, 0, -p)$	$e^\mu(-p\vec{e}_3, 0) = \frac{1}{m_2} (p, 0, 0, -E_2)$
$p_3^\mu = (E_3, p' \sin\theta, 0, p' \cos\theta)$	$e^\mu(p'\vec{e}_r, 0) = \frac{1}{m_3} (p', E_3 \sin\theta, 0, E_3 \cos\theta)$
$p_4^\mu = (E_4, -p' \sin\theta, 0, -p' \cos\theta)$	$e^\mu(-p'\vec{e}_r, 0) = \frac{1}{m_4} (p', -E_4 \sin\theta, 0, -E_4 \cos\theta)$

Tabela 3.2: Quadrimomentos associados as polarizações dos bósons longitudinais, para reações do tipo  $2 \rightarrow 2$  e no referencial do centro de massa.

A partir de agora temos em mãos todas as ferramentas necessárias para extrairmos limites de unitariedade para o Modelo Padrão e para os operadores efetivos. No próximo capítulo vamos aplicar ao caso do Modelo Padrão.



## Capítulo 4

# Consequências da unitariedade no Modelo Padrão

### 4.1 Limite na massa do Higgs

Neste capítulo vamos verificar que o Modelo Padrão não viola unitariedade em interações envolvendo apenas bósons de gauge assim como na ref.[4]. Nós trabalharemos com reações do tipo  $VV \rightarrow VV$  onde  $V$  é um bóson de gauge, entretanto, este resultado já é conhecido de uma maneira geral. Resumidamente ele diz que em uma teoria renormalizável envolvendo bósons de gauge vetoriais, onde nela ocorre o processo de quebra espontânea da simetria, esta teoria não viola unitariedade, veja ref.[2]. Para impormos a validade do teorema ótico eq. (3.90), nós vamos calcular as amplitudes no limite de altas energias, com isso seremos capazes de obter uma cota superior para a massa do Higgs. Para tanto utilizaremos reações com carga total zero e a nível de árvore.

O bóson de Higgs é de vital importância no Modelo Padrão, como por exemplo, o mecanismo de Higgs, onde nele é possível explicar a origem das massas dos férmions, bósons de gauge e a própria massa do Higgs. No contexto da preservação da unitariedade da teoria ele também é fundamental, porque no canal  $J = 0$  as amplitudes de  $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$  e  $W_0^+ W_0^- \rightarrow Z_0 Z_0$  apresentam dependência em  $s$ . Esta dependência só desaparece quando consideramos os diagramas envolvendo o Higgs. Sabendo dessa vital importância para o modelo, é interessante tirar uma cota superior de sua massa já que o próprio modelo não é capaz de prevê-la.

Ao obtermos a cota superior para a massa do Higgs devemos ter em mente que se esta cota for ultrapassada, teoria de perturbação se torna insuficiente para a descrição da física.

Vamos agora começar a análise através do formalismo da base de helicidade, primeiramente utilizaremos a expressão da expansão em ondas parciais (3.75) e a relação de ortogonalidade (3.22), que são

$$M_{fi} = 16\pi \sum_J (2J+1) D_{\lambda_i \lambda_f}^{*J} (R^{-1}(\varphi_i, \theta_i, 0) R(\varphi_f, \theta_f, 0)) T_{\lambda_f, \lambda_i}^J,$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^\pi d\theta \sin\theta D_{mn}^{*J} (R(\varphi, \theta, \gamma)) D_{m'n'}^J (R(\varphi, \theta, \gamma)) = \frac{8\pi^2}{2J+1} \delta_{JJ} \delta_{m'm} \delta_{n'n}.$$

Utilizando essas duas equações obtemos :

$$T_{\lambda_f \lambda_i}^J = \frac{1}{32\pi} \int_0^\pi d\theta \sin\theta D_{\lambda_i \lambda_f}^J(0, \theta, 0) M_{fi}. \quad (4.1)$$

Para o caso dos bósons longitudinais, a helicidade de cada partícula é zero, portanto  $\lambda_f = \lambda_i = 0$ . Com isso temos que

$$T_{00}^J = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 dx P^J(x) M_{fi}, \quad (4.2)$$

onde foi usado que  $x = \cos\theta$ ,  $D_{00}^J(0, \theta, 0) = P^J(\cos\theta)$  e  $P^J(x)$  é o polinômio de Legendre. Para extrairmos a cota superior para a massa do Higgs precisamos primeiro obter as amplitudes de espalhamento  $VV \rightarrow VV$  na base de helicidade. As amplitudes foram calculadas no limite em que

$$s \gg M_H^2, M_z^2, M_w^2, \quad (4.3)$$

$$M_H^2 \gg M_z^2, M_w^2. \quad (4.4)$$

O próximo passo é determinar quais são os estados de duas partículas que contribuem para o cálculo, estados do tipo  $|V_{1\pm} V_{2\pm}\rangle$  não contribuem ao aplicar os limites (4.3) e (4.4). Pode-se ver isso da seguinte maneira, estados longitudinais no limite de altas tem sua polarização dada por  $\varepsilon^\mu(p) \rightarrow \frac{p^\mu}{M} \propto \frac{\sqrt{s}}{2M}$ , o fator  $\sqrt{s}$  a mais para os longitudinais mostra que eles contribuem mais em altas energias. Ao realizar o cálculo é possível notar que  $s$  ou a massa do Higgs são responsáveis por suprimir as amplitudes que contém estados desse tipo. Considere o seguinte exemplo,  $W^+ W^- \rightarrow AA$  e  $W^+ W^- \rightarrow ZA$ . Estes diagramas além de não envolverem o Higgs a nível de árvore, nós sabemos que o fóton só pode ser transversal, contribuindo menos ainda em altas energias, então esta reação não participará no limite imposto. Pode-se concluir disso que os estados longitudinais de duas partículas que contribuem são  $W_0^+ W_0^-, Z_0 Z_0, HH, HZ_0$ .

Em busca de maior facilidade nos cálculos todas as amplitudes serão calculadas no gauge unitário e utilizaremos também as expressões para quadrimomento e polarizações longitudinais contidas na tabela (3.2).

Para o cálculo das amplitudes foram utilizados os pacotes FeynArts e FormCalc [12] para o Mathematica. O FeynArts já contém o Modelo padrão então basta usá-lo diretamente. Ele é responsável por desenhar os diagramas de Feynman e criar as amplitudes, mas ele não é capaz de contrair índices. Considere o seguinte exemplo, suponha que apareça uma termo do tipo  $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ , o FeynArts não contém alguma função que contraia os índices e obtenha  $p \cdot p$ , para esta tarefa foi utilizado o FormCalc. Ele é capaz de contrair todos os índices e fatoriza a expressão o máximo possível restando o menor número de termos possíveis. Depois dessas etapas, impomos o limite de altas energias manualmente no Mathematica e obtemos os resultados.

## 4.2 Reação $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$

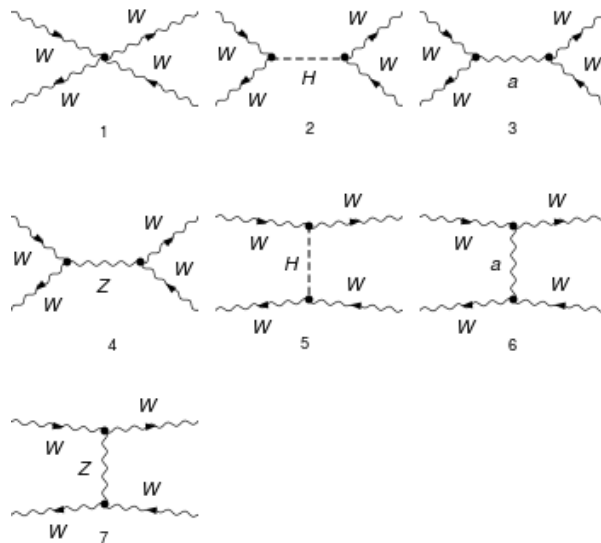


Figura 4.1: Diagramas de Feynman para a reação  $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão a nível de árvore.

Cada diagrama da figura está numerado por 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. No limite de altas energias podemos escrever a amplitude como:

$$M_{fi}(s) = A_i s^2 + B_i s + C_i + \sum_{n=1}^{\infty} O(1/s^n), \quad (4.5)$$

desta maneira podemos verificar o que acontece em cada ordem de  $s$ , segue abaixo uma tabela com os resultados:

Diagramas	$A_i$	$B_i$	$C_i$
1	$\frac{g^2}{16M_w^4} (\cos^2\theta + 6 \cos\theta - 3)$	$\frac{g^2}{4M_w^2} (2 - 6 \cos\theta)$	0
2	0	$-\frac{g^2}{4M_w^2}$	$-\frac{g^2 M_h^2}{4M_w^2}$
3	$-\frac{g^2 s_w^2 \cos\theta}{4M_w^4}$	0	0
4	$-\frac{g^2 c_w^2 \cos\theta}{4M_w^2}$	$-\frac{g^2 \cos\theta}{4M_w^2}$	0
5	0	$\frac{g^2}{8M_w^2} (1 - \cos\theta)$	$-\frac{g^2 M_h^2}{4M_w^2}$
6	$-\frac{g^2 s_w^2}{16M_w^4} (\cos^2\theta + 2 \cos\theta - 3)$	$\frac{2g^2 s_w^2 \cos\theta}{M_w^2}$	0
7	$-\frac{g^2 c_w^2}{16M_w^4} (\cos^2\theta + 2 \cos\theta - 3)$	$\frac{g^2}{4M_w^2} (8c_w^2 \cos\theta - \frac{\cos\theta}{2} - \frac{3}{2})$	0

Tabela 4.1: Amplitudes de cada diagrama de Feynman da reação  $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão. Os coeficientes  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  representam a dependência da amplitude na energia do centro de massa,  $A_i$  para  $s^2$ ,  $B_i$  para  $s$  e  $C_i$  independente de  $s$ .

Olhando apenas a dependência em  $s^2$  pode-se concluir que

$$\sum_i A_i = 0, \quad (4.6)$$

note que este cancelamento acontece em diagramas que contém apenas bósons vetoriais. Vamos agora examinar a dependência em  $s$ :

$$\sum_i B_i = 0. \quad (4.7)$$

Note que a soma dos diagramas envolvendo o Higgs 2 + 5 tem o sinal exatamente oposto da soma dos diagramas 1 + 4 + 6 + 7, isso prova que se não tivéssemos o Higgs o modelo violaria unitariedade na ordem  $s$ . Para finalizar vamos coletarmos os termos independentes de  $s$ , veja que a contribuição vem dos diagramas que contém o Higgs 2 + 5. Isso acontece devido o limite imposto ser  $M_H^2 \gg M_{w,z}^2$ , o restante dos diagramas que não tem o Higgs são suprimidos pela massa dele. Deste modo a amplitude de espalhamento na base de helicidade para esta reação é

$$M_{fi}(W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-) = \sum_i C_i = -2\sqrt{2}G_f M_h^2. \quad (4.8)$$

### 4.3 Reação $Z_0 Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-$

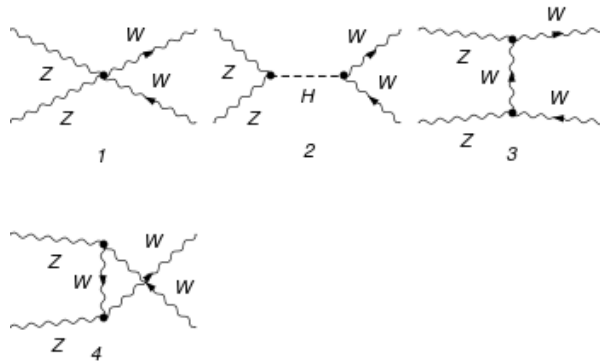


Figura 4.2: Diagramas de Feynman para a reação  $Z_0 Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão a nível de árvore

Assim como fizemos na tabela (4.1), vamos apresentar uma tabela com os resultados da amplitude de espalhamento de cada diagrama. Segue abaixo a tabela:

Diagramas	$A_i$	$B_i$	$C_i$
1	$\frac{g^2 c_w^4}{8M_w^4} (\cos^2 \theta - 3)$	$\frac{g^2 c_w^2}{2M_w^2} (c_w^2 + 1)$	0
2	0	$-\frac{g^2}{4M_w^2}$	$-\sqrt{2} G_f M_h^2$
3 + 4	$-\frac{g^2 c_w^4}{8M_w^4} (\cos^2 \theta - 3)$	$\frac{g^2}{4M_w^2} - \frac{g^2 c_w^2}{2M_w^2} (c_w^2 + 1)$	0

Tabela 4.2: Amplitudes de cada diagrama de Feynman da reação  $Z_0 Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão. Os coeficientes  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  representam a dependência da amplitude na energia do centro de massa,  $A_i$  para  $s^2$ ,  $B_i$  para  $s$  e  $C_i$  independente de  $s$ .

Então podemos concluir que

$$\sum_i A_i = 0, \quad (4.9)$$

$$\sum_i B_i = 0, \quad (4.10)$$

$$M_{fi}(Z_0 Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-) = \sum_i C_i = -\sqrt{2} G_f M_h^2. \quad (4.11)$$

Veja que da mesma maneira que na reação  $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$ , os termos  $A_i$  são cancelados pelos diagramas 1 + 3 + 4 que contém apenas bósons vetoriais. Para  $B_i$ , o diagrama 2 é o único que contém o Higgs e tem o sinal oposto da soma dos diagramas que contém apenas bósons vetoriais 1 + 3 + 4. Com relação ao  $C_i$ , a contribuição vem do diagrama que contém o Higgs.

#### 4.4 Reação $H Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-$

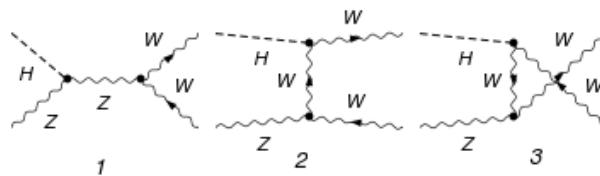


Figura 4.3: Diagramas de Feynman para a reação  $H Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão a nível de árvore

Neste mostrarei também uma tabela com o cálculo de cada diagrama para notarmos o cancelamento que aparecerá quando tomarmos os limites (4.3) e (4.4)

Diagramas	$A_i$	$B_i$	$C_i$
1	0	$\sqrt{2}G_f \cos\theta$	$-\sqrt{2}G_f M_h^2 \cos\theta$
2	0	$G_f \frac{-4M_w^2 + M_z^2 - M_z^2 \cos\theta}{\sqrt{2}M_z^2}$	$G_f M_h^2 \frac{1 + \cos\theta}{\sqrt{2}}$
3	0	$-G_f \frac{-4M_w^2 + M_z^2 + M_z^2 \cos\theta}{\sqrt{2}M_z^2}$	$G_f M_h^2 \frac{-1 + \cos\theta}{\sqrt{2}}$

Tabela 4.3: Amplitudes de cada diagrama de Feynman da reação  $H Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-$  do Modelo Padrão. Os coeficientes  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  representam a dependência da amplitude na energia do centro de massa,  $A_i$  para  $s^2$ ,  $B_i$  para  $s$  e  $C_i$  independente de  $s$ .

Então podemos concluir que

$$\sum_i A_i = 0, \quad (4.12)$$

$$\sum_i B_i = 0, \quad (4.13)$$

$$\sum_i C_i = 0, \quad (4.14)$$

$$M_{fi}(H Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-) = 0. \quad (4.15)$$

#### 4.5 Reação $Z_0 Z_0 \rightarrow Z_0 Z_0$

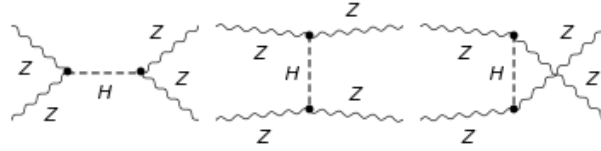


Figura 4.4: Diagramas de Feynman para a reação  $Z_0 Z_0 \rightarrow Z_0 Z_0$  do Modelo Padrão, a nível de árvore

Nós sabemos e vimos três exemplos de reações em que a unitariedade do Modelo Padrão não é violada, o cancelamento dos termos  $A_i$  e  $B_i$  da eq.(4.5) tem que acontecer no limite de altas energias. Sabendo tudo isso é fácil notar que a contribuição vem apenas dos termos  $C_i$ . Como já sabemos de onde vem a contribuição na amplitude, vamos calcular as amplitudes com todos os diagramas juntos. No limite de altas energias temos que a soma da amplitude dos três diagramas é

$$M_{fi}(Z_0 Z_0 \rightarrow Z_0 Z_0) = -\sqrt{2}G_f \left( \frac{s^2}{s - M_h^2} + \frac{t^2}{t - M_h^2} + \frac{u^2}{u - M_h^2} \right), \quad (4.16)$$

sabendo que  $\frac{s^2}{s - M_h^2} = s + \frac{M_h^2 s}{s - M_h^2}$ , basta fazer o mesmo para o termo que contém  $t$  e  $u$ , então

$$M_{fi}(Z_0 Z_0 \rightarrow Z_0 Z_0) = -\sqrt{2}G_f \left( s + \frac{M_h^2 s}{s - M_h^2} + t + \frac{M_h^2 t}{t - M_h^2} + u + \frac{M_h^2 u}{u - M_h^2} \right), \quad (4.17)$$

no limite de energias é válido utilizar que  $s + t + u = 4M_z^2 = 0$  e  $\frac{M_h^2}{s} = 0$ , então obtemos que

$$M_{fi}(Z_0 Z_0 \rightarrow Z_0 Z_0) = -\sqrt{2} G_f \left( \frac{M_h^2 s}{s \left(1 - \frac{M_h^2}{s}\right)} + \frac{M_h^2 t}{t \left(1 - \frac{M_h^2}{t}\right)} + \frac{M_h^2 u}{u \left(1 - \frac{M_h^2}{u}\right)} \right), \quad (4.18)$$

então

$$M_{fi}(Z_0 Z_0 \rightarrow Z_0 Z_0) = -\sqrt{2} G_f (M_h^2 + M_h^2 + M_h^2) = -3\sqrt{2} G_f M_h^2. \quad (4.19)$$

Veja que cada diagrama contribuiu com um  $-\sqrt{2} G_f M_h^2$  e que no limite de altas energias a contribuição de cada um deles é a mesma.

#### 4.6 Reação $HH \rightarrow HH$

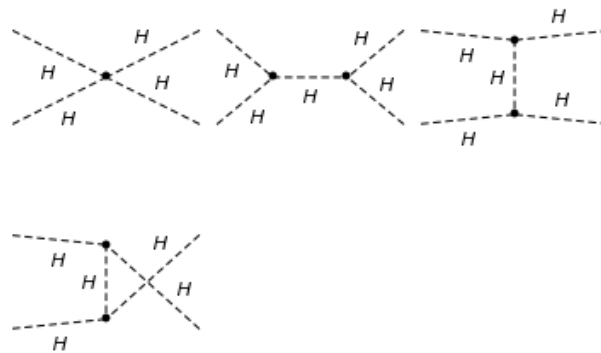


Figura 4.5: Diagramas de Feynman para a reação  $HH \rightarrow HH$  do Modelo Padrão, a nível árvore

De maneira análoga que calculamos a reação  $Z_0 Z_0 \rightarrow Z_0 Z_0$ , obtemos no limite de altas energias que

$$M_{fi}(HH \rightarrow HH) = -3 G_f \sqrt{2} M_h^2 \left( 1 + \frac{3 M_h^2}{s - M_h^2} + \frac{3 M_h^2}{t - M_h^2} + \frac{3 M_h^2}{u - M_h^2} \right), \quad (4.20)$$

então

$$M_{fi}(HH \rightarrow HH) = -3\sqrt{2} G_f M_h^2. \quad (4.21)$$

#### 4.7 Reação $HH \rightarrow W_0^+ W_0^-$

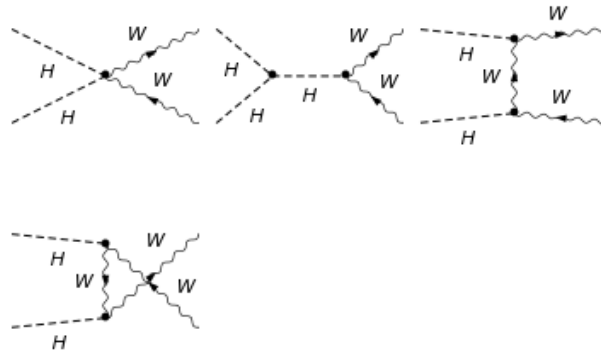


Figura 4.6: Diagramas de Feynman para a reação  $HH \rightarrow HH$  do Modelo Padrão, a nível árvore

$$M_{fi}(HH \rightarrow W_0^+ W_0^-) = -G_f \sqrt{2} M_h^2 \left( 1 + \frac{3M_h^2}{s - M_h^2} + \frac{M_h^2}{t - M_h^2} + \frac{M_h^2}{u - M_h^2} \right), \quad (4.22)$$

então

$$M_{fi}(HH \rightarrow W_0^+ W_0^-) = -\sqrt{2} G_f M_h^2. \quad (4.23)$$

#### 4.8 Reação $HH \rightarrow Z_0 Z_0$

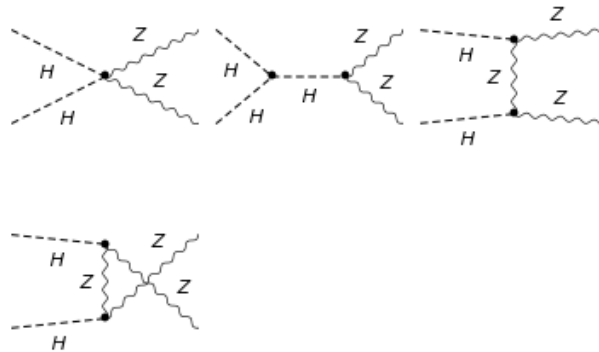


Figura 4.7: Diagramas de Feynman para a reação  $HH \rightarrow Z_0 Z_0$  do Modelo Padrão, a nível árvore

$$M_{fi}(HH \rightarrow Z_0 Z_0) = -G_f \sqrt{2} M_h^2 \left( 1 + \frac{3M_h^2}{s - M_h^2} + \frac{M_h^2}{t - M_h^2} + \frac{M_h^2}{u - M_h^2} \right), \quad (4.24)$$

então

$$M_{fi}(HH \rightarrow Z_0 Z_0) = -\sqrt{2} G_f M_h^2. \quad (4.25)$$



#### 4.9 Reação $HZ_0 \rightarrow HZ_0$

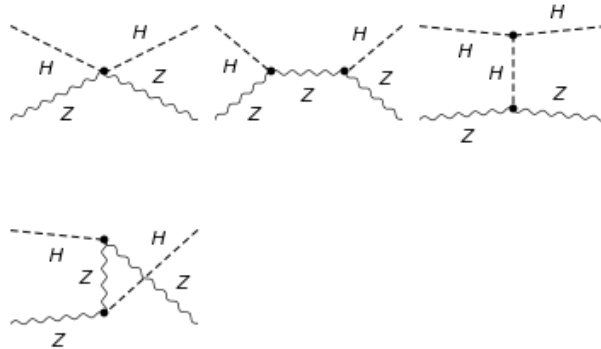


Figura 4.8: Diagramas de Feynman para a reação  $HZ_0 \rightarrow HZ_0$  do Modelo Padrão, à nível árvore

$$M_{fi}(HZ_0 \rightarrow HZ_0) = G_f \sqrt{2} M_h^2 \left( -2 + \frac{2s}{s - M_z^2} - \frac{3t}{t - M_h^2} + \frac{2u}{u - M_z^2} \right) \quad (4.26)$$

$$= G_f \sqrt{2} M_h^2 (-2 + 2 - 3 + 2) \quad (4.27)$$

$$= -\sqrt{2} G_f M h^2. \quad (4.28)$$

#### 4.10 Expansão em ondas parciais e limite de unitariedade

Para as reações  $HZ_0 \rightarrow Z_0Z_0$  e  $HZ_0 \rightarrow HH$ , não existe o acoplamento, portanto tem amplitude zero. Vamos agora expandir em ondas parciais as amplitudes calculadas cima, para isso vamos utilizar (4.2). Deste modo obtemos que:

$$T_{00}^0(Z_0Z_0 \rightarrow Z_0Z_0) = -\frac{3 G_f M_h^2}{8\pi\sqrt{2}}, \quad (4.29)$$

$$T_{00}^0(HH \rightarrow HH) = -\frac{3 G_f M_h^2}{8\pi\sqrt{2}}, \quad (4.30)$$

$$T_{00}^0(HH \rightarrow W_0^+ W_0^-) = -\frac{G_f M_h^2}{8\pi\sqrt{2}}, \quad (4.31)$$

$$T_{00}^0(HH \rightarrow Z_0Z_0) = -\frac{G_f M_h^2}{8\pi\sqrt{2}}, \quad (4.32)$$

$$T_{00}^0(HZ_0 \rightarrow HZ_0) = -\frac{G_f M_h^2}{8\pi\sqrt{2}}, \quad (4.33)$$

$$T_{00}^0(W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-) = -\frac{2 G_f M_h^2}{8\pi\sqrt{2}}, \quad (4.34)$$

$$T_{00}^0(Z_0Z_0 \rightarrow W_0^+ W_0^-) = -\frac{G_f M_h^2}{8\pi\sqrt{2}}. \quad (4.35)$$

Antes de extrairmos os limites de unitariedade, é necessário levar em conta o efeito que partículas idênticas causam no espaço de fase. Em uma reação envolvendo duas partículas indistinguíveis, sejam elas bósons ou férmions, a seção de choque total  $\sigma_{total}$  é dada por:

$$\sigma_{total} = \frac{1}{2} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (4.36)$$

onde  $\Omega$  é o ângulo sólido e a integral é feita sobre o espaço inteiro. O efeito resultante é o fator  $\frac{1}{2}$  a mais, onde você pode limitar o espaço de fase e não por ele ou absorver esse fator nos estados, minha escolha é a última e mostrarei como isso é feito a seguir. Voltando ao caso desta seção, apenas as amplitudes espalhamento entre os estados  $W_0^+ W_0^+$ ,  $Z_0 Z_0$ ,  $HH$  e  $HZ_0$  são diferentes de zero. Entretanto, note que os estados  $Z_0 Z_0$  e  $HH$  são constituídos de partículas idênticas, devemos ter cuidado com isso, porque na expressão (3.80) do teorema ótico, ao introduzir a relação de completeza (3.77), devemos diferenciar o caso de partículas idênticas com o fator  $\frac{1}{2}$  a mais. Vamos fazer um exemplo para entendermos o efeito resultante disso. Escrevendo a eq. (3.80) para o caso  $HH \rightarrow HH$ , utilizando a notação que  $M_{if} = M_{HHHH}$ . Encontramos:

$$2i \text{Im}(M_{HHHH}) = i \left( \int d\Phi M_{HHWW} M_{HHWW}^* + \frac{1}{2} \int d\Phi M_{HHZZ} M_{HHZZ}^* \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int d\Phi M_{HHHH} M_{HHHH}^* \right), \quad (4.37)$$

onde  $\frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_j} (2\pi)^4 \delta^4(p_i - p_x) = d\Phi$ . Note que no lado direito da eq. o fator  $\frac{1}{2}$  só aparece para  $HH$  e  $ZZ$ , porque  $W^+$  e  $W^-$  são distinguíveis pela sua carga. Multiplicando (4.37) por  $\frac{1}{2}$  de ambos os lados e absorvendo  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  em cada estado  $HH$  e  $ZZ$ , nós obtemos

$$2i \text{Im} M_{\frac{HH}{\sqrt{2}} \frac{HH}{\sqrt{2}}} = \left( \int d\Phi M_{\frac{HH}{\sqrt{2}} WW} M_{\frac{HH}{\sqrt{2}} WW}^* + \int d\Phi M_{\frac{HH}{\sqrt{2}} \frac{ZZ}{\sqrt{2}}} M_{\frac{HH}{\sqrt{2}} \frac{ZZ}{\sqrt{2}}}^* \right. \\ \left. + \int d\Phi M_{\frac{HH}{\sqrt{2}} \frac{HH}{\sqrt{2}}} M_{\frac{HH}{\sqrt{2}} \frac{HH}{\sqrt{2}}}^* \right). \quad (4.38)$$

Deste modo não precisamos limitar o espaço de fase para partículas idênticas, podemos apenas absorver o fator no próprio estado. Com todos os ingredientes necessários podemos começar a obter os limites de unitariedade.

Considere primeiramente apenas o estado elástico  $W_0^+ W_0^-$ , temos então a reação  $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$ . Note que ela tem amplitude maior, o motivo de escolhê-la entre as reações elásticas, é que quanto maior a amplitude mais cedo a unitariedade será violada. Utilizando que  $|T_{00}^0| \leq 1$ , obtemos

$$\left| -\frac{2G_f M_h^2}{8\pi\sqrt{2}} \right| \leq 1 \implies M_h \leq \left( \frac{4\pi\sqrt{2}}{G_f} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.39)$$

Podemos refinar um pouco mais considerando os quatro estados ordenadamente  $W_0^+ W_0^+$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} Z_0 Z_0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} HH$  e  $HZ_0$ . Deste modo temos a seguinte matriz de transição no espaço dos estados dada por:

$$T^0 \rightarrow -\frac{G_f M_h^2}{4\pi\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

Note que a matriz não é diagonal, portanto não podemos aplicar a condição  $|T_{00}^0| \leq 1$ . Lembre que esta relação é válida somente para estados elásticos. Para podermos aplicar o teorema ótico, vamos diagonalizar a matriz, deste modo não terão misturas fora da diagonal. Diagonalizando a matriz (4.40), temos que

$$-\frac{G_f M_h^2}{4\pi\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Escolhendo o maior autovalor, encontramos

$$M_h \leq \left( \frac{8\pi\sqrt{2}}{3G_f} \right)^{\frac{1}{2}} \simeq 1\text{TeV}. \quad (4.42)$$

Este resultado mostra que a cota superior para a massa do bóson de Higgs é da ordem de TeV, então teoria de perturbações nessa escala de energia torna-se não confiável. Com essa informação sobre a cota superior para a massa do Higgs, aceleradores de partículas que forem capazes de produzir energia no centro de massa da ordem de TeV serão capazes de detectar o Higgs se ele existir de fato, caso um acelerador desse não conseguisse detectá-lo, é sinal de que ele não existe. O Large Hadron Collider conhecido como LHC foi capaz de detectar através da equipe do ATLAS e CMS, uma partícula de massa em torno de 125 GeV que decaiu em um par de Z (O Modelo Padrão prevê este vértice) e depois decaiu em outras partículas. Além disso detectaram que ela tem paridade positiva e spin nulo, deste modo tudo isso indica que a partícula seja o bóson de Higgs [13, 14].

## Capítulo 5

# Consequências da unitariedade nos operadores efetivos de dimensão 8

### 5.1 Introdução

Como foi mencionado no capítulo de teorias efetivas, elas são de grande utilidade quando não conhecemos a teoria mais geral válida em qualquer escala de energia. Além disso não precisamos especificar nenhum modelo, podemos utilizar as mesmas partículas, as mesmas simetrias e os efeitos dos graus de liberdade pesados são codificados nos coeficientes de Wilson. Com base nesses argumentos o Modelo Padrão será tratado como uma teoria efetiva.

Nessa dissertação focamos em reações  $VV \rightarrow VV$ , onde  $V$  pode ser  $W^\pm, Z, H$  e  $A$ , considerando todas as helicidades possíveis. O operador de menor dimensão que contém este tipo de vértice e que não contém tríplexes ou apenas dois bósons de gauge em um vértice são os operadores de dimensão oito. Utilizando a ref.[3], segue abaixo a lista dos operadores de dimensão oito importantes para a análise dos vértices quárticos, ela está dividida em três blocos:

#### Operadores contendo apenas $D_\mu\phi$

$$\mathcal{L}_{S_0} = F_{S_0} (D_\mu\phi)^\dagger D_\nu\phi (D^\mu\phi)^\dagger D^\nu\phi \quad (5.1)$$

$$\mathcal{L}_{S_1} = F_{S_1} (D_\mu\phi)^\dagger D_\mu\phi (D^\nu\phi)^\dagger D^\nu\phi \quad (5.2)$$

$$\mathcal{L}_{S_2} = F_{S_2} (D_\mu\phi)^\dagger D_\nu\phi (D^\nu\phi)^\dagger D^\mu\phi. \quad (5.3)$$

#### Operadores contendo $2D_\mu\phi$ e $W_{\mu\nu}/B_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}_{M_0} = F_{M_0} (D_\beta\phi)^\dagger D^\beta\phi Tr [W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}] \quad (5.4)$$

$$\mathcal{L}_{M_1} = F_{M_1} (D_\beta\phi)^\dagger D^\mu\phi Tr [W_{\mu\nu} W^{\nu\beta}] \quad (5.5)$$

$$\mathcal{L}_{M_2} = F_{M_2} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} (D_\beta\phi)^\dagger D^\beta\phi \quad (5.6)$$

$$\mathcal{L}_{M_3} = F_{M_3} B_{\mu\nu} B^{\nu\beta} (D_\beta\phi)^\dagger D^\mu\phi \quad (5.7)$$

$$\mathcal{L}_{M_4} = F_{M_4} (D_\mu\phi)^\dagger W_{\beta\nu} D^\mu\phi B^{\beta\nu} \quad (5.8)$$

$$\mathcal{L}_{M_5} = F_{M_5} (D_\mu\phi)^\dagger W_{\beta\nu} D^\nu\phi B^{\beta\mu} + c.h \quad (5.9)$$

$$\mathcal{L}_{M_7} = F_{M_7} (D_\mu\phi)^\dagger W_{\beta\nu} W^{\beta\mu} D^\nu\phi. \quad (5.10)$$

### Operadores contendo $W_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}_{T_0} = F_{T_0} \text{Tr}[W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}] \text{Tr}[W_{\alpha\beta} W^{\alpha\beta}] \quad (5.11)$$

$$\mathcal{L}_{T_1} = F_{T_1} \text{Tr}[W_{\alpha\nu} W^{\mu\beta}] \text{Tr}[W_{\mu\beta} W^{\alpha\mu}] \quad (5.12)$$

$$\mathcal{L}_{T_2} = F_{T_2} \text{Tr}[W_{\alpha\mu} W^{\mu\beta}] \text{Tr}[W_{\beta\nu} W^{\nu\alpha}] \quad (5.13)$$

$$\mathcal{L}_{T_5} = F_{T_5} \text{Tr}[W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}] B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} \quad (5.14)$$

$$\mathcal{L}_{T_6} = F_{T_6} \text{Tr}[W_{\alpha\nu} W^{\mu\beta}] B_{\mu\beta} B^{\alpha\nu} \quad (5.15)$$

$$\mathcal{L}_{T_7} = F_{T_7} \text{Tr}[W_{\alpha\mu} W^{\mu\beta}] B_{\beta\nu} B^{\nu\alpha} \quad (5.16)$$

$$\mathcal{L}_{T_8} = F_{T_8} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} \quad (5.17)$$

$$\mathcal{L}_{T_9} = F_{T_9} B_{\alpha\mu} B^{\mu\beta} B_{\beta\nu} B^{\nu\alpha}, \quad (5.18)$$

onde  $F_{S_i, T_i, M_i} = \frac{f_{S_i, T_i, M_i}}{\Lambda^4}$  e c.h significa conjugado hermitiano.

Para entendermos o que será feito com estes operadores de dimensão oito vamos voltar para o caso do Modelo padrão do capítulo 4. Foi calculada a reação  $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$  no regime de altas energias, descobrimos que ela não viola unitariedade e isso estende-se para todo o Modelo Padrão. Com a introdução destes operadores de dimensão oito nós acrescentaremos novos vértices, por exemplo, voltando para a reação  $W_0^+ W_0^- \rightarrow W_0^+ W_0^-$ , o operador  $L_{s_0}$  gera dentre vários tipos de vértices quárticos, ele gera um com quatro bósons  $W$ . Ao acrescentar este operador não teremos um outro diagrama de Feynman que cancele a dependência em  $s$  que este novo vértice produz, então nesta situação a teoria vai violar unitariedade em alguma escala de energia. Uma solução padrão para isso é procurar novas partículas, um bom e velho exemplo é o caso da teoria de Fermi, teoria de Fermi viola unitariedade na escala de  $\frac{1}{\sqrt{G_f}} \sim 300 \text{ GeV}$ , antes dessa escala aparecem as partículas novas que seriam o  $W$  e  $Z$ . A partir da dependência em energia que os operadores de dimensão oito criam e através do teorema ótico, vamos obter uma cota superior dependente da energia do centro de massa e do acoplamento quártico.

Nós levaremos em conta o efeito de cada operador efetivo separadamente, deste modo  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{F_{S_i, T_i, M_i}}$ . Não precisamos nos preocupar com as amplitudes provenientes da lagrangiana do Modelo Padrão, porque serão suprimidas pelas amplitudes destes novos operadores.

A maior potência na energia que aparecerá no cálculo das amplitudes é  $s^2$ . Pode-se ver essa dependência intuitivamente da seguinte forma, no limite de altas energias cada polarização longitudinal contribui com

$$\varepsilon^\mu \rightarrow \frac{p^\mu}{M}, \quad (5.19)$$

onde  $p^\mu$  é o quadrimomento e  $M$  a massa da partícula. Podemos então imaginar que cada momento linear contribua com um  $\frac{\sqrt{s}}{2}$ , como são quatro bósons teremos uma proporção no máximo de  $(\sqrt{s})^4 = s^2$ .

É de interesse saber quais vértices quárticos são gerados pelos operadores de dimensão oito. Seguem abaixo três tabelas dizendo quais são eles. A abreviação  $WZWA$  significa  $W^+ Z \rightarrow W^+ A$ .

	WWWW	WWZZ	ZZZZ	WWZA	WWAA	ZZZA	ZZAA	ZAAA	AAAA
$L_{S_0}$	✓	✓	✓						
$L_{S_1}$	✓	✓	✓						
$L_{S_2}$	✓	✓	✓						
$L_{M_0}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
$L_{M_1}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
$L_{M_2}$		✓	✓	✓	✓	✓	✓		
$L_{M_3}$		✓	✓	✓	✓	✓	✓		
$L_{M_4}$		✓	✓	✓	✓	✓	✓		
$L_{M_5}$		✓	✓	✓	✓	✓	✓		
$L_{M_7}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
$L_{T_0}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$L_{T_1}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$L_{T_2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$L_{T_5}$		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$L_{T_6}$		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$L_{T_7}$		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$L_{T_8}$			✓			✓	✓	✓	✓
$L_{T_9}$			✓			✓	✓	✓	✓

Tabela 5.1: Vértices quárticos gerados pelos operadores de dimensão oito. Os vértices quárticos que são modificados estão marcados por ✓.

	WZWZ	WZWA	WZWH	WAWA	WAWH	WHWH	ZHWW	ZHZZ	ZHZA
$L_{S_0}$	✓		✓			✓	✓		
$L_{S_1}$	✓		✓			✓			
$L_{S_2}$	✓		✓			✓	✓		
$L_{M_0}$	✓	✓		✓		✓			
$L_{M_1}$	✓	✓		✓		✓			
$L_{M_2}$	✓	✓		✓					
$L_{M_3}$	✓	✓		✓					
$L_{M_4}$	✓	✓	✓	✓	✓		✓		
$L_{M_5}$	✓	✓	✓	✓	✓		✓		
$L_{M_7}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
$L_{T_0}$	✓	✓		✓					
$L_{T_1}$	✓	✓		✓					
$L_{T_2}$	✓	✓		✓					
$L_{T_5}$	✓	✓		✓					
$L_{T_6}$	✓	✓		✓					
$L_{T_7}$	✓	✓		✓					
$L_{T_8}$									
$L_{T_9}$									

Tabela 5.2: Vértices quárticos gerados pelos operadores de dimensão oito. Os vértices quárticos que são modificados estão marcados por ✓.

	ZHAA	ZHZH	ZHHH	HHWW	HHZZ	HHZA	HHAA	HHHH
$L_{S_0}$		✓		✓	✓			✓
$L_{S_1}$		✓		✓	✓			✓
$L_{S_2}$		✓		✓	✓			✓
$L_{M_0}$		✓		✓	✓	✓	✓	
$L_{M_1}$		✓		✓	✓	✓	✓	
$L_{M_2}$		✓			✓	✓	✓	
$L_{M_3}$		✓			✓	✓	✓	
$L_{M_4}$		✓			✓	✓	✓	
$L_{M_5}$		✓			✓	✓	✓	
$L_{M_7}$		✓		✓	✓	✓	✓	
$L_{T_0}$								
$L_{T_1}$								
$L_{T_2}$								
$L_{T_3}$								
$L_{T_6}$								
$L_{T_7}$								
$L_{T_8}$								
$L_{T_9}$								

Tabela 5.3: Vértices quárticos gerados pelos operadores de dimensão oito. Os vértices quárticos que são modificados estão marcados por ✓.

Vamos fazer algumas considerações sobre as tabelas acima. Os operadores do tipo  $\mathcal{L}_{S_i}$  não contém fótons, eles acabam se cancelando após a quebra espontânea da simetria. Em contra partida os operadores  $\mathcal{L}_{S_i}$  são os únicos a produzirem vértices com quatro Higgs, porque são os únicos que tem quatro derivadas covariantes  $D_\mu\phi$ . Com relação aos operadores do tipo  $\mathcal{L}_{T_i}$ , veja que por construção eles não contém vértices com o Higgs, eles foram foram construídos apenas com  $W_{\mu\nu}$ . A mesma análise pode ser feita para os operadores  $\mathcal{L}_{T_8, T_9}$ , eles geram vértices apenas com bósons neutros, porque em sua construção foi utilizado apenas o campo  $B_\mu$ . Ainda falando sobre os operadores  $\mathcal{L}_{T_i}$ , curiosamente eles são os únicos capazes de gerar vértices quárticos envolvendo quatro fótons. Estes operadores são capazes de gerar vértices com mais de quatro bósons, nesta dissertação focaremos apenas nos quárticos.

Foi mencionado no capítulo 4 a utilização dos pacotes FeynArts e Formcalc [12], onde no FeynArts já contém o Modelo Padrão. No caso de agora o FeynArts não possui os operadores de dimensão oito, a saída para isso foi utilizar também o pacote FeynRules [15], nele você pode acrescentar partículas, simetrias e lagrangianas que é o que precisamos. Esse pacote é uma ótima escolha para quem pretende implementar extensões para o Modelo Padrão. O pacote FeynRules já vem com o Modelo Padrão, a tarefa foi apenas adicionar as lagrangianas de dimensão oito. Feito isso ele tem várias funcionalidades como gerar todas as regras de Feynman, encontrar termos de massa, verificar se a lagrangiana é hermitiana, dentre outras. Para nosso objetivo a função importante que utilizamos foi que o FeynRules consegue transportar as informações que você implementou nele para o FeynArts. Ele cria três arquivos na linguagem que o FeynArts entende, então basta chamar o modelo no Mathematica que o FeynArts consegue entender.

## 5.2 Características principais dos processos

Como vamos calcular reações do tipo  $2 \rightarrow 2$ , é importante saber quais são todos os estados de duas partículas que podemos ter e com todas as helicidades possíveis. Eles estão separados para cada onda parcial de momento angular total  $J$  e carga total do estado  $Q$ .

Com relação as ondas parciais, conforme  $J$  aumenta, a contribuição da onda parcial normalmente é menor. Por consequência, os limites de unitariedade serão mais fortes na maior parte dos casos para a onda parcial  $J = 0$ . Isso é importante, porque estamos interessados em descobrir quão cedo a teoria viola unitariedade, então a expansão será feita no máximo até a onda com  $J = 1$ . Mais adiante na seção (5.9) vamos discutir um pouco essas afirmações. Segue abaixo a tabela:

$(Q, J)$	Estados	Dimensão
(2, 0)	$\frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}}, \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}}, \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}}$	$3 \times 3$
(2, 1)	$\frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}}, \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}}, \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}}, \frac{W_\pm^+ W_0^+}{\sqrt{2}}, \frac{W_0^+ W_\pm^+}{\sqrt{2}}$	$7 \times 7$
(1, 0)	$W_\pm^+ Z_\pm, W_0^+ Z_0, W_\pm^+ A_\pm, W_0^+ H$	$6 \times 6$
(1, 1)	$W_\pm^+ Z_\pm, W_0^+ Z_0, W_\pm^+ A_\pm, W_0^+ H, W_\pm^+ Z_0, W_0^+ Z_\pm, W_0^+ A_\pm, W_\pm^+ H$	$14 \times 14$
(0, 0)	$W_\pm^+ W_\pm^-, W_0^+ W_0^-, \frac{Z_\pm Z_\pm}{\sqrt{2}}, \frac{Z_0 Z_0}{\sqrt{2}}, Z_\pm A_\pm, \frac{A_\pm A_\pm}{\sqrt{2}}, Z_0 H, \frac{HH}{\sqrt{2}}$	$12 \times 12$

Tabela 5.4: Todos os estados possíveis de duas partículas, construídos a partir das partículas elementares do Modelo Padrão. Os estados foram separados para cada onda parcial com carga total e momento angular total denotado por  $(Q, J)$ . A dimensão refere-se a matriz  $T^J$ , construída a partir dos estados.

Meu objetivo agora é condensar os aspectos mais importantes que apareceram no cálculo das amplitudes com os operadores efetivos. No limite de altas energias vale que  $s \gg M_i$ , onde  $i = W^\pm, Z e H$ .

Foram realizados muitos cálculos de reações na base de helicidade e depois expandidas em ondas parciais com  $J = 0$  e 1, foi possível notar que todas as amplitudes das ondas parciais com  $J = 0$  são do tipo

$$T_{00}^0(s) = A_i s^2 + B_i s + C + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{s^n}\right). \quad (5.20)$$

Por exemplo, para o operador  $\mathcal{L}_{S_0}$  e  $Q = 1$ :

$$T_{00}^0(s) (W_0^+ Z_0 \rightarrow W_0^+ Z_0) = \frac{F_{S0}}{48\pi} s^2 + \frac{3F_{S0} (-M_w^2 - M_z^2)}{64\pi} s + \frac{7F_{S0} (M_w^4 + M_z^4)}{192\pi} + \frac{5F_{S0} M_w^2 M_z^2}{96\pi}. \quad (5.21)$$

Entretanto na onda com  $J = 1$  nem todas as amplitudes são do tipo da eq. (5.20), algumas delas são da seguinte forma:



$$T_{\lambda_f \lambda_i}^1(s) = A_i s^{\frac{3}{2}} + B_i s^{\frac{1}{2}} + C + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{s^{\frac{n}{2}}}\right) \quad (5.22)$$

Para ver isso, calculamos a seguinte reação:

$$T_{01}^1(s) (W_+^+ Z_0 \rightarrow W_0^+ Z_0) = \frac{F_{S0} M_w}{384 \pi} s^{\frac{3}{2}} + \frac{F_{S0} M_w (-3M_w^2 - M_z^2)}{384 \pi} s^{\frac{1}{2}}. \quad (5.23)$$

Isso pode ser entendido se lembramos que cada polarização longitudinal em energias altas contribui com  $\epsilon^\mu(p) \rightarrow \frac{p^\mu}{M} \propto \frac{\sqrt{s}}{2M}$ . A única diferença entre as reações nas eqs.(5.21) e (5.23) é que a primeira partícula é longitudinal para uma e transversal para outra, deste modo a eq.(5.23) tem um  $\sqrt{s}$  a menos no limite de altas energias.

Isso é importante, porque no canal  $J = 1$  podemos ter amplitudes do tipo das eqs. (5.20) e (5.22), onde a amplitude que tiver uma dependência em  $s$  maior, suprimirá a outra.

Vou apresentar um exemplo na prática de como isso acontece, utilizarei a onda parcial com  $(Q, J) = (2, 0)$  e para o operador  $\mathcal{L}_{S_0}$ . As amplitudes expandidas em ondas parciais entre os estados  $\frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}}$ ,  $\frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}}$  e  $\frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}}$  são:

$$\begin{aligned} T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) &= T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) \\ &= T_{00}^0 \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) \\ &= T_{00}^0 \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{F_{S_0} M_W^2 s}{16\pi}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} T_{00}^0 \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) &= T_{00}^0 \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) \\ &= T_{00}^0 \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) \\ &= T_{00}^0 \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{F_{S_0}}{16\pi} \left( \frac{-4M_W^2 s + s^2}{2} \right). \quad (5.26)$$

A partir dessas amplitudes, podemos construir  $T_{00}^0$  na base ordenada  $\left\{ \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}}, \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}}, \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right\}$ , dada por

$$T_{00}^0 \rightarrow \frac{F_{S0}}{8\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} M_W^2 s \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} M_W^2 s \\ \frac{1}{2} M_W^2 s & \frac{1}{2} M_W^2 s & \frac{1}{2} \frac{-4M_W^2 s + s^2}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

No limite de altas energias vale que  $s \gg M_w^2$ , temos então

$$T_{00}^0 = \frac{F_{S0} s^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{M_w^2}{s} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{M_w^2}{s} \\ \frac{1}{2} \frac{M_w^2}{s} & \frac{1}{2} \frac{M_w^2}{s} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2M_w^2}{s} \right) \end{pmatrix} \approx \frac{F_{S0} s^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

a partir disso podemos extrair o limite de unitariedade escolhendo o único autovalor diferente de zero, deste modo

$$\left| \frac{F_{S0} s^2}{32\pi} \right| \leq 1 \implies |F_{S0} s^2| \leq 32\pi. \quad (5.29)$$

Note que a amplitude da eq. (5.26) é a única que contém dependência em  $s^2$ , portanto no limite de altas energias a amplitude que tiver maior potência em  $s$  é a mais importante. Isso acontece em vários outros casos, onde a amplitude que contém a maior dependência em  $s$  acaba dominando os vínculos.

### 5.3 Análise de CPT

Os operadores efetivos de dimensão oito utilizados foram construídos de maneira que sejam invariantes sob as simetrias paridade, inversão temporal e conjugação de carga. Uma maneira de verificar se os cálculos não tem algum erro é verificar se a simetria está satisfeita.

Existem duas expressões envolvendo as amplitudes das ondas parciais que servem para verificar essas simetrias. Se a lagrangiana não viola paridade, a amplitude das ondas parciais satisfaz:

$$T_{\lambda_f \lambda_i}^J (V_{1,\lambda_1} V_{2,\lambda_2} \rightarrow V_{3,\lambda_3} V_{4,\lambda_4}) = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 (-1)^{s_3 + s_4 - s_1 - s_2} \quad (5.30) \\ \times T_{\lambda_f \lambda_i}^J (V_{1,-\lambda_1} V_{2,-\lambda_2} \rightarrow V_{3,-\lambda_3} V_{4,-\lambda_4}),$$

onde  $\eta_i$  e  $s_i$  é a paridade intrínseca e o spin da partícula  $i$ .

Para a inversão temporal temos a seguinte expressão

$$T_{\lambda_f \lambda_i}^J (V_{1,\lambda_1} V_{2,\lambda_2} \rightarrow V_{3,\lambda_3} V_{4,\lambda_4}) = T_{\lambda_f \lambda_i}^J (V_{3,\lambda_3} V_{4,\lambda_4} \rightarrow V_{1,\lambda_1} V_{2,\lambda_2}). \quad (5.31)$$

Vamos para um exemplo de como utilizar essas expressões. Considere o operador efetivo  $\mathcal{L}_{S_1}$  da onda parcial  $(Q, J) = (1, 0)$ . Para a reação  $WZ$ , temos :

$$T_{00}^0 (W_0^+ Z_0 \rightarrow W_{\pm}^+ Z_{\pm}) = \frac{F_{S_1} M_w M_z}{96\pi} s, \quad (5.32)$$

vamos então verificar se é invariante por paridade, aplicando a eq. (5.32) na eq. (5.30), obtemos

$$T_{00}^0 (W_0^+ Z_0 \rightarrow W_{+}^+ Z_{+}) = \eta_w \eta_z \eta_w \eta_z (-1)^{1+1-1-1} T_{00}^0 (W_0^+ Z_0 \rightarrow W_{-}^+ Z_{-}), \quad (5.33)$$

portanto

$$\frac{F_{S_1} M_w M_z}{96\pi} s = \eta_w^2 \eta_z^2 (-1)^0 \frac{F_{S_1} M_w M_z}{96\pi} s = \frac{F_{S_1} M_w M_z}{96\pi} s. \quad (5.34)$$

A partir da eq. (5.34) vemos que a simetria de paridade é satisfeita para a reação  $WZWZ$  gerado pelo operador efetivo  $L_{S_1}$ . Para verificar a simetria de inversão temporal vamos utilizar a eq. (5.31), então

$$T_{00}^0 (W_0^+ Z_0 \rightarrow W_+^+ Z_+) = T_{00}^0 (W_+^+ Z_+ \rightarrow W_0^+ Z_0). \quad (5.35)$$

Para esta reação as simetrias de paridade e inversão temporal foram satisfeitas. Note também que para esta reação não foi preciso saber qual a paridade intrínseca, porque eles apareceram ao quadrado na expressão. Contudo, isso não acontece para todas as reações, como por exemplo, a reação  $WHWZ$ . De maneira análoga foi feito para todas as reações, todas elas satisfazem as simetrias, entretanto as reações do tipo  $WZZA$ ,  $ZZZA$ ,  $ZAAA$ ,  $WZWA$ ,  $WZWA$ ,  $WZWH$ ,  $WAWH$ ,  $ZHWW$ ,  $ZHZZ$  e  $ZHZA$  para conservar paridade necessitam que:

$$\eta_h \eta_w = -1, \quad (5.36)$$

$$\eta_h \eta_z = -1, \quad (5.37)$$

$$\eta_z \eta_A = 1. \quad (5.38)$$

Sabemos que o Higgs tem paridade positiva, sabemos também que bósons vetoriais tem paridade negativa no setor bosônico. Deste modo as eqs. (5.36), (5.37) e (5.38) são satisfeitas. Concluímos que todos os vértices quárticos nessa dissertação satisfazem a simetria, reforçando a tentativa de minimizar erros nos cálculos.

#### 5.4 Limite de unitariedade para as ondas parciais com $(Q, J) = (2, 0)$

Para esta onda vamos detalhar o cálculo desde a amplitude na base de helicidade até a obtenção do limite de unitariedade. Para o operador  $\mathcal{L}_{S_0}$  já está feito na seção (5.2). Começaremos pelo operador  $\mathcal{L}_{S_1}$ .

Antes disso note uma coisa importante e que vai se repetir para cada operador, algumas amplitudes são sempre iguais. No caso dessa onda parcial elas são:

$$\begin{aligned} T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) &= T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) \\ &= T_{00}^0 \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) \\ &= T_{00}^0 \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$T_{00}^0 \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) = T_{00}^0 \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right), \quad (5.40)$$

$$T_{00}^0 \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = T_{00}^0 \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right). \quad (5.41)$$

Isso está relacionado com as simetrias de paridade (P) e inversão temporal (T), elas garantem que essas amplitudes sejam iguais. Os operadores efetivos que estamos usando nessa dissertação eles foram construídos invariantes sob P e T, como dito anteriormente isso pode ser uma forma de verificar se o cálculo está consistente.

### Operador $\mathcal{L}_{S_1}$ :

Como o cálculo foi feito no limite de altas energias, lembre que amplitudes com maior potência em  $s$  são as principais contribuições. No caso do operador  $\mathcal{L}_{S_1}$ , apenas uma reação contém uma dependência em  $s^2$  na amplitude, todas as outras reações são da ordem de  $s$  ou constante. Deste modo temos que:

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{F_{S_1} s^2}{8} (1 + \cos^2 \theta) = \frac{F_{S_1} s^2}{8} (1 + x^2), \quad (5.42)$$

onde  $x = \cos \theta$ , nesta subseção vamos utilizar frequentemente que o cosseno é  $x$ . Expandindo em ondas parciais e lembrando que

$$T_{00}^J = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 dx P^J(x) M_{fi},$$

para a onda parcial  $J = 0$ , temos :

$$\begin{aligned} T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) &= \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 dx \frac{F_{S_1} s^2}{8} (1 + x^2) \\ &= \frac{F_{S_1} s^2}{96\pi}. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Como esta é a única reação que contribui em  $s^2$ , ela obterá o limite de unitariedade mais forte. Então

$$\left| \frac{F_{S_1} s^2}{96\pi} \right| \leq 1 \implies |F_{S_1} s^2| \leq 96\pi. \quad (5.44)$$

### Operador $\mathcal{L}_{S_2}$ :

Para este operador temos a mesma situação, apenas  $M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right)$  tem dependência em  $s^2$ , as outras tem dependência em  $s$  ou constante. O resultado é exatamente o mesmo.

### Operador $\mathcal{L}_{M_0}$ :

Neste caso nenhuma das reações contém dependência em  $s^2$ , segue abaixo as amplitudes na base de helicidade :

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = F_{M_0} M_w^2 x^2 s, \quad (5.45)$$

$$\begin{aligned}
M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) &= M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) \\
&= M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) \\
&= M_{fi} \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} F_{M_0} M_w^2 (1 - x^2) s,
\end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned}
M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) &= M_{fi} \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) \\
&= O(M_w),
\end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}
M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) &= M_{fi} \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{1}{2} F_{M_0} M_w^2 (1 + x^2) s.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Expandindo em ondas parciais, obtemos

$$T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{F_{M_0} M_w^2 s}{48\pi}, \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}
T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) &= T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) \\
&= T_{00}^0 \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) \\
&= T_{00}^0 \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{F_{M_0} M_w^2 s}{48\pi},
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned}
T_{00}^0 \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) &= T_{00}^0 \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) \\
&= O(M_w),
\end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}
T_{00}^0 \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) &= T_{00}^0 \left( \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) \\
&= \frac{F_{M_0} M_w^2 s}{24\pi}.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Com estes resultados nós já somos capazes de extrair um limite de unitariedade para a teoria. Olhando as reações elásticas, a única que podemos utilizar é  $T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right)$ . Deste modo obtemos :

$$\left| T_{00}^0 \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) \right| \leq 1 \implies |F_{M_0} s| \leq \frac{24\pi}{M_w^2}. \quad (5.53)$$

Podemos refinar o resultado construindo a matriz  $T_{00}^0$  considerando todos os estados. Deste modo a matriz  $T_{00}^0$  na base ordenada  $\left\{ \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}}, \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}}, \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right\}$ , é dada por

$$T^0 \rightarrow \frac{F_{M_0} M_w^2 s}{24\pi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.54)$$

O próximo passo, assim como fizemos no capítulo 4 para extrairmos a cota superior da massa do Higgs, é diagonalizar a matriz. Deste modo a matriz será diagonal e podemos aplicar o teorema ótico, diagonalizando temos

$$T'^0 \rightarrow \frac{F_{M_0} M_w^2 s}{24\pi} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.55)$$

Vamos sempre escolher o maior autovalor, porque quanto maior o autovalor mais forte será o limite. Deste modo encontramos que

$$|F_{M_0} s| \leq \frac{16\pi}{M_w^2}. \quad (5.56)$$

**Operador  $\mathcal{L}_{M_1}$  :**

Neste caso também nenhuma das reações contém dependência em  $s^2$ , segue abaixo as amplitudes na base de helicidade:

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{4} F_{M_1} M_w^2 (1 + x^2) s, \quad (5.57)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{8} F_{M_1} M_w^2 (-3 + x^2) s, \quad (5.58)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{2} F_{M_1} M_w^2 s, \quad (5.59)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{1}{8} F_{M_1} M_w^2 (1 + x^2) s. \quad (5.60)$$

As outras amplitudes são obtidas pelas simetrias de paridade e inversão temporal. Construindo a matriz  $T_{00}^0$  na mesma base que anteriormente, obtemos

$$T^0 \rightarrow \frac{F_{M_1} M_w^2 s}{48\pi} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.61)$$

Diagonalizando

$$T'^0 \rightarrow \frac{F_{M_1} M_w^2 s}{48\pi} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.62)$$

escolhendo o maior autovalor, obtemos

$$|F_{M_1} s| \leq \frac{16\pi}{M_w^2}. \quad (5.63)$$

**Operador  $\mathcal{L}_{M_7}$  :**

Vamos prosseguir de maneira análoga aos últimos operadores. Temos então:

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} F_{M_7} M_w^2 s, \quad (5.64)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} F_{M_7} M_w^2 s, \quad (5.65)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} F_{M_7} M_w^2 s, \quad (5.66)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} F_{M_7} M_w^2 s. \quad (5.67)$$

Construindo a matriz  $T_{00}^0$  na mesma base que anteriormente, obtemos

$$T^0 \rightarrow \frac{F_{M_7} M_w^2 s}{32\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Diagonalizando

$$T'^0 \rightarrow \frac{F_{M_7} M_w^2 s}{32\pi} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.69)$$

Escolhendo o único autovalor, obtemos

$$|F_{M_7} s| \leq \frac{64\pi}{3M_w^2}. \quad (5.70)$$

**Operador  $\mathcal{L}_{T_0}$  :**

Analogamente:

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = O(M_w), \quad (5.71)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = O(s), \quad (5.72)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) = O(M_w), \quad (5.73)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} F_{T_0} s^2 (1 + x^2). \quad (5.74)$$

Construindo a matriz  $T_{00}^0$  na mesma base que anteriormente, obtemos

$$T_{00}^0 \rightarrow \frac{F_{T_0} s^2}{12\pi} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.75)$$

Diagonalizando

$$T_{00}' \rightarrow \frac{F_{T_0} s^2}{12\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.76)$$

O sinal do autovalor não é importante, porque temos um módulo na expressão do teorema ótimo, portanto obtemos

$$|F_{T_0} s^2| \leq 24\pi. \quad (5.77)$$

**Operador  $\mathcal{L}_{T_1}$  :**

Analogamente:

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = O(M_w), \quad (5.78)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = O(s), \quad (5.79)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) = F_{T_1} s^2, \quad (5.80)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} F_{T_1} (5 + x^2) s^2. \quad (5.81)$$

Construindo a matriz  $T_{00}^0$  na mesma base que anteriormente, obtemos



$$T_{00}^0 \rightarrow \frac{F_{T_1} s^2}{8\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.82)$$

Diagonalizando

$$T_{00}' \rightarrow \frac{F_{T_1} s^2}{8\pi} \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

Escolhendo o maior autovalor, obtemos

$$|F_{T_1} s^2| \leq \frac{48\pi}{7}. \quad (5.84)$$

**Operador  $\mathcal{L}_{T_2}$  :**

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = O(M_w), \quad (5.85)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = O(s), \quad (5.86)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} F_{T_2} s^2, \quad (5.87)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{8} F_{T_2} (1 + x^2) s^2. \quad (5.88)$$

Construindo a matriz  $T_{00}^0$  na mesma base que anteriormente, obtemos

$$T_{00}^0 \rightarrow \frac{F_{T_2} s^2}{16\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.89)$$

Diagonalizando

$$T_{00}' \rightarrow \frac{F_{T_2} s^2}{16\pi} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.90)$$

Escolhendo o maior autovalor, obtemos

$$|F_{T_2} s^2| \leq 24\pi. \quad (5.91)$$

Segue abaixo a tabela com o resumo de todos os limites de unitariedade que foram obtidos:

Operadores	Limite de unitariedade
$\mathcal{L}_{S_0}$	$ F_{S_0} s^2  \leq 32\pi$
$\mathcal{L}_{S_1}$	$ F_{S_1} s^2  \leq 96\pi$
$\mathcal{L}_{S_2}$	$ F_{S_2} s^2  \leq 96\pi$
$\mathcal{L}_{M_0}$	$ F_{M_0} s  \leq \frac{16\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{M_1}$	$ F_{M_1} s  \leq \frac{16\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{M_7}$	$ F_{M_7} s  \leq \frac{64\pi}{3M_w^2}$
$\mathcal{L}_{T_0}$	$ F_{T_0} s^2  \leq 24\pi$
$\mathcal{L}_{T_1}$	$ F_{T_1} s^2  \leq \frac{48\pi}{7}$
$\mathcal{L}_{T_2}$	$ F_{T_2} s^2  \leq 24\pi$

Tabela 5.5: Efeitos dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial com  $(Q, J) = (2, 0)$ .

Através da tabela (5.5), veja que os operadores  $\mathcal{L}_{M_0}$ ,  $\mathcal{L}_{M_1}$  e  $\mathcal{L}_{M_7}$  obtêm um limite de unitariedade em  $s$ , porque não há contribuição destes operadores em  $s^2$  para a reação  $W^+ W^+ \rightarrow W^+ W^+$ . Outro ponto importante é que os operadores  $\mathcal{L}_{M_2}$ ,  $\mathcal{L}_{M_3}$ ,  $\mathcal{L}_{M_4}$ ,  $\mathcal{L}_{M_5}$ ,  $\mathcal{L}_{T_5}$ ,  $\mathcal{L}_{T_6}$ ,  $\mathcal{L}_{T_7}$ ,  $\mathcal{L}_{T_8}$  e  $\mathcal{L}_{T_9}$  não tem o acoplamento para  $W^+ W^+ \rightarrow W^+ W^+$ , veja tabela (5.1).

## 5.5 Limite de unitariedade para as ondas parciais com $(Q, J) = (2, 1)$

Para não se tornar muito repetitivo, vou apresentar os cálculos de apenas um operador efetivo. Vou escolher o  $\mathcal{L}_{M_1}$ .

**Operador  $\mathcal{L}_{M_1}$  :**

Seguem abaixo as amplitudes calculadas na base de helicidade :

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{16} F_{M_1} s^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}, \quad (5.92)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_0^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{16} F_{M_1} s^2 (1 + \cos \theta), \quad (5.93)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_-^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{16} F_{M_1} s^2 (1 + \cos \theta), \quad (5.94)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_-^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{16} F_{M_1} s^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}, \quad (5.95)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{16} F_{M_1} s^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}, \quad (5.96)$$

$$M_{fi} \left( \frac{W_+^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{16} F_{M_1} s^2 (1 - \cos \theta). \quad (5.97)$$

As outras amplitudes são da ordem de  $O(s)$  ou  $O(M_w)$  ou estão relacionadas com estas pelas simetrias como já mencionei. Vamos expandir em ondas parciais, lembre que ela é dada por

$$T_{\lambda_f \lambda_i}^J = \frac{1}{32\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta D_{\lambda_i \lambda_f}^J(0, \theta, 0) M_{fi}.$$

Vamos aplicar para um caso :

$$\begin{aligned} T_{1-1}^1 \left( \frac{W_0^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) &= \frac{1}{32\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta D_{-11}^1(0, \theta, 0) \frac{1}{16} F_{M_1} s^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{32\pi} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left( \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \frac{1}{16} F_{M_1} s^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{F_{M_1} s^2}{1024\pi}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Analogamente obtemos todas as ondas parciais, dadas por

$$T_{1-1}^1 \left( \frac{W_0^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{F_{M_1} s^2}{1024\pi}, \quad (5.99)$$

$$T_{-1-1}^1 \left( \frac{W_0^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{F_{M_1} s^2}{384\pi}, \quad (5.100)$$

$$T_{-1-1}^1 \left( \frac{W_-^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_-^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{F_{M_1} s^2}{384\pi}, \quad (5.101)$$

$$T_{1-1}^1 \left( \frac{W_-^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_+^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{F_{M_1} s^2}{1024\pi}, \quad (5.102)$$

$$T_{11}^1 \left( \frac{W_+^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_-^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{F_{M_1} s^2}{1024\pi}, \quad (5.103)$$

$$T_{-11}^1 \left( \frac{W_+^+ W_0^+}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{W_0^+ W_+^+}{\sqrt{2}} \right) = \frac{F_{M_1} s^2}{384\pi}. \quad (5.104)$$

Temos todos os resultados em mãos, agora é só construir a matriz com todos os estados e diagonalizar. Deste modo obtemos:

$$|F_{M_1} s^2| \leq \frac{1536\pi}{11}. \quad (5.105)$$

Segue abaixo a tabela com o resumo de todos os limites de unitariedade que foram obtidos:

Operadores	Limite de unitariedade
$\mathcal{L}_{S_1}$	$ F_{S_1} s  \leq \frac{48\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{S_2}$	$ F_{S_2} s  \leq \frac{48\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{M_0}$	$ F_{M_0} s^2  \leq 128\pi$
$\mathcal{L}_{M_1}$	$ F_{M_1} s^2  \leq \frac{1536\pi}{11}$
$\mathcal{L}_{M_7}$	$ F_{M_7} s^2  \leq 192\pi$
$\mathcal{L}_{T_0}$	$ F_{T_0} s  \leq \frac{24\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{T_1}$	$ F_{T_1} s  \leq \frac{48\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{T_2}$	$ F_{T_2} s  \leq \frac{48\pi}{M_w^2}$

Tabela 5.6: Efeitos dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial com  $(Q, J) = (2, 1)$ .

A onda parcial de carga +2, tem apenas o estado  $W^+ W^+$  com diferentes helicidades. Comparando com a onda de carga zero, pode-se notar que ela fornece limite de unitariedade para bem menos operadores, veja isso comparando as tabelas (5.5) e (5.6) com as tabelas (5.10) e (5.11). Além disso foi necessário ir para onda  $J = 1$  para obtenção de todos os limites mais fortes.

Analisando os limites de unitariedade da tabela (5.6), os operadores  $\mathcal{L}_{S_1}, \mathcal{L}_{S_2}, \mathcal{L}_{T_0}, \mathcal{L}_{T_1}$  e  $\mathcal{L}_{T_2}$  tem um limite de unitariedade com ordem de grandeza muito parecida, isso também acontece para os operadores  $\mathcal{L}_{M_0}, \mathcal{L}_{M_1}$  e  $\mathcal{L}_{M_7}$ .

## 5.6 Limite de unitariedade para as ondas parciais com $(Q, J) = (1, 0)$

Segue abaixo duas tabelas com o resumo de todos os limites de unitariedade que foram obtidos. Devido o tamanho delas tive que dividir em duas partes:

Operadores	Limite de unitariedade
$\mathcal{L}_{S_0}$	$ F_{S_0} s^2  \leq 32\pi$
$\mathcal{L}_{S_1}$	$ F_{S_1} s^2  \leq 96\pi$

Tabela 5.7: Efeitos dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial  $(Q, J) = (1, 0)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{S_0}$  e  $\mathcal{L}_{S_1}$ .

Operadores	Limite de unitariedade
$\mathcal{L}_{S_2}$	$ F_{S_2} s^2  \leq 32\pi$
$\mathcal{L}_{M_0}$	$ F_{M_0} s  \leq \frac{15,2\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{M_1}$	$ F_{M_1} s  \leq \frac{15,2\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{M_2}$	$ F_{M_2} s  \leq \frac{21\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{M_3}$	$ F_{M_3} s  \leq \frac{21\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{M_4}$	$ F_{M_4} s^2  \leq 32\pi$
$\mathcal{L}_{M_5}$	$ F_{M_5} s^2  \leq 64\pi$
$\mathcal{L}_{M_7}$	$ F_{M_7} s  \leq \frac{20,3\pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{T_0}$	$ F_{T_0} s^2  \leq 24\pi$
$\mathcal{L}_{T_1}$	$ F_{T_1} s^2  \leq \frac{48\pi}{7}$
$\mathcal{L}_{T_2}$	$ F_{T_2} s^2  \leq 24\pi$
$\mathcal{L}_{T_5}$	$ F_{T_5} s^2  \leq 24\pi$
$\mathcal{L}_{T_6}$	$ F_{T_6} s^2  \leq \frac{48\pi}{7}$
$\mathcal{L}_{T_7}$	$ F_{T_7} s^2  \leq 24\pi$

Tabela 5.8: Efeitos dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial  $(Q, J) = (1, 0)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{S_2}$  ao  $\mathcal{L}_{T_7}$ .

Em alguns casos da tabela (5.7) e (5.8) vamos ter os limites de unitariedade dependentes do ângulo de mistura, vamos para um caso. Considere o operador efetivo  $\mathcal{L}_{M_2}$ , calculando da mesma maneira que foi feito acima as ondas parciais entre todos os estados possíveis, nós encontramos a seguinte matriz  $T_{00}^1$  na base ordenada  $\{W_+^+ Z_+, W_-^+ Z_-, W_0^+ Z_0, W_+^+ A_+, W_-^+ A_-, W_0^+ H\}$

$$T_{00}^1 \rightarrow \frac{F_{M_2} M_w^2 s}{48\pi} \begin{pmatrix} 0 & 2s_w^2 & s_w t g_w & 0 & -2s_w c_w & 0 \\ 2s_w^2 & 0 & s_w t g_w & -2s_w c_w & 0 & 0 \\ s_w t g_w & s_w t g_w & t g_w^2 & -s_w & -s_w & 0 \\ 0 & -2s_w c_w & -s_w & 0 & 2c_w^2 & 0 \\ -2s_w c_w & 0 & -s_w & 2c_w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.106)$$

diagonalizando :

$$T_{00}^1 \rightarrow \frac{F_{M_2} M_w^2 s}{48\pi} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3 + \cos 2\theta_w) \sec^2 \theta_w & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.107)$$

Nestes caso para a resposta final não ficar em termos do ângulos de mistura, vou substituir valores numéricos. Como nesta dissertação temos como objetivo apenas descobrir em que escala de energia a teoria começa violar unitariedade, não há preocupação com testes de precisão. Então vou escolher como parâmetros de entrada as massas de  $M_w$  e  $M_z$ , por conveniência. Utilizando o valor das massas do Particle Data Group, calcularemos o seno do ângulo de mistura a nível árvore, dado por

$$\sin^2\theta_w = 1 - \frac{M_w^2}{M_z^2} \simeq 0,22289, \quad (5.108)$$

então escolhendo o maior autovalor que se encontra na primeira linha e coluna da matriz (5.128) e substituindo o ângulo de mistura, nós obtemos que

$$|F_{M_2} s| \leq \frac{21\pi}{M_w^2}. \quad (5.109)$$

Isso acontece para os operadores  $\mathcal{L}_{M_0}$ ,  $\mathcal{L}_{M_1}$ ,  $\mathcal{L}_{M_2}$ ,  $\mathcal{L}_{M_3}$  e  $\mathcal{L}_{M_7}$ . Os outros operadores tem amplitudes dependendo do ângulo de mistura, mas ao diagonalizar a dependência no ângulo de mistura acaba desaparecendo pela trigonometria. Veja este exemplo, para  $\mathcal{L}_{T_0}$ , temos:

$$T_{00}^1 \rightarrow \frac{F_{T_0} s^2}{24\pi} \begin{pmatrix} 0 & c_w^2 & 0 & 0 & s_w c_w & 0 \\ c_w^2 & 0 & 0 & s_w c_w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_w c_w & 0 & 0 & s_w^2 & 0 \\ s_w c_w & 0 & 0 & s_w^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.110)$$

diagonalizando obtemos:

$$T_{00}^1 \rightarrow \frac{F_{T_0} s^2}{24\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.111)$$

Deste modo obtemos o limite de unitariedade para  $\mathcal{L}_{T_0}$  sem depender do ângulo de mistura, dado por:

$$|F_{T_0} s^2| \leq 24\pi. \quad (5.112)$$

Veja que nas matrizes (5.106) e (5.110) elas visualmente aparentam ter uma simetria envolvendo as amplitudes, isso é o efeito das simetrias de paridade e inversão temporal.

Na tabela (5.7) e (5.8) obtemos limites de unitariedade para mais operadores do que na onda com carga +2, devido ter mais tipos de reações. Além disso, a maioria dos limites mais fortes já foram obtidos, mas teremos que ir para onda parcial com  $J = 1$  para obtermos os limites mais fortes que faltam.

## 5.7 Limite de unitariedade para as ondas parciais com $(Q, J) = (1, 1)$

Segue abaixo uma tabela com o resumo de todos os limites de unitariedade que foram obtidos:

Operadores	Limite de unitariedade
$\mathcal{L}_{S_0}$	$ F_{S_0} s^2  \leq 192 \pi$
$\mathcal{L}_{S_1}$	$ F_{S_1} s^2  \leq 192 \pi$
$\mathcal{L}_{S_2}$	$ F_{S_2} s^2  \leq 192 \pi$
$\mathcal{L}_{M_0}$	$ F_{M_0} s^2  \leq 128 \pi$
$\mathcal{L}_{M_1}$	$ F_{M_1} s^2  \leq \frac{1536 \pi}{11}$
$\mathcal{L}_{M_2}$	$ F_{M_2} s^2  \leq 64 \pi$
$\mathcal{L}_{M_3}$	$ F_{M_3} s^2  \leq \frac{768 \pi}{11}$
$\mathcal{L}_{M_4}$	$ F_{M_4} s^2  \leq \frac{256 \pi}{\sqrt{3}}$
$\mathcal{L}_{M_5}$	$ F_{M_5} s^2  \leq \frac{512 \pi \sqrt{3}}{11}$
$\mathcal{L}_{M_7}$	$ F_{M_7} s^2  \leq 192 \pi$
$\mathcal{L}_{T_0}$	$ F_{T_0} s^2  \leq 48 \pi$
$\mathcal{L}_{T_1}$	$ F_{T_1} s^2  \leq 96 \pi$
$\mathcal{L}_{T_2}$	$ F_{T_2} s^2  \leq 192 \pi$
$\mathcal{L}_{T_5}$	$ F_{T_5} s^2  \leq 48 \pi$
$\mathcal{L}_{T_6}$	$ F_{T_6} s^2  \leq 96 \pi$
$\mathcal{L}_{T_7}$	$ F_{T_7} s^2  \leq 192 \pi$

Tabela 5.9: Efeitos dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de unitariedade para a onda parcial  $(Q, J) = (1, 1)$ .

A contribuição principal no limite de altas energias para esta onda parcial vem das amplitudes de espalhamento dos tipos  $V_{\pm}^1 V_{\pm}^2 \rightarrow V_{\pm}^3 V_{\pm}^4$ ,  $V_0^1 V_0^2 \rightarrow V_0^3 V_0^4$ ,  $V_{0,\pm}^1 V_{0,\pm}^2 \rightarrow V_{\pm,0}^3 V_{\pm,0}^4$  e  $V_{0,\pm}^1 V_{0,\mp}^2 \rightarrow V_{\pm,0}^3 V_{\mp,0}^4$ . Apenas estes estados geram amplitudes dependentes em  $s^2$ , os outros geram amplitudes dependentes de  $s^{\frac{3}{2}}$ ,  $s$  e  $s^{\frac{1}{2}}$  que acabam sendo suprimidas, como eu mencionei na seção (5.2).

Considere o seguinte exemplo para o operador  $\mathcal{L}_{M_2}$ . Os únicos estados que contribuem em  $s^2$  são  $W_0^+ Z_+$ ,  $W_0^+ Z_-$ ,  $W_0^+ A_+$  e  $W_0^+ A_-$ .

$$T_{00}^1 \rightarrow \frac{F_{M_2} s^2}{64 \pi} \begin{pmatrix} 0 & -s_w^2 & 0 & s_w c_w \\ -s_w^2 & 0 & s_w c_w & 0 \\ 0 & s_w c_w & 0 & -c_w^2 \\ s_w c_w & 0 & -c_w^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.113)$$

Diagonalizando obtemos de autovalor 1, -1 e o restante zero. Deste modo temos que :

$$|F_{M_2} s^2| \leq 64\pi. \quad (5.114)$$

Veja que uma matriz  $14 \times 14$  construída por 14 estados, acaba neste caso reduzindo para uma  $4 \times 4$ . Isso acontece por conta no limite de altas energias  $s^2 \gg s^{\frac{3}{2}}, s, s^{\frac{1}{2}}$ , além disso as amplitudes não são todas independentes devido as simetrias de paridade e inversão temporal. Isso torna a análise dos limites de unitariedade para esta onda um pouco mais manuseáveis.

Na tabela (5.9) veja que todos os operadores tem limites de unitariedade dependentes de  $s^2$ , pelo simples fato de ter 14 estados de duas partículas diferentes aumentando as chances de ter amplitudes da ordem de  $s^2$ . Com isso podemos parar a expansão na onda  $J = 1$ .

## 5.8 Limite de unitariedade para as ondas parciais com $(Q, J) = (0, 0)$

Seguem abaixo duas tabelas com o resumo de todos os limites de unitariedade. Devido ela ser muito grande ela foi dividida em duas partes:

Operadores	Limite de unitariedade
$\mathcal{L}_{S_0}$	$ F_{S_0} s^2  \leq 32\pi$
$\mathcal{L}_{S_1}$	$ F_{S_1} s^2  \leq \frac{96\pi}{7}$
$\mathcal{L}_{S_2}$	$ F_{S_2} s^2  \leq \frac{96\pi}{5}$
$\mathcal{L}_{M_0}$	$ F_{M_0} s^2  \leq \frac{32\pi}{\sqrt{6}}$
$\mathcal{L}_{M_1}$	$ F_{M_1} s^2  \leq \frac{128\pi}{\sqrt{6}}$
$\mathcal{L}_{M_2}$	$ F_{M_2} s^2  \leq \frac{16\pi}{\sqrt{2}}$
$\mathcal{L}_{M_3}$	$ F_{M_3} s^2  \leq \frac{64\pi}{\sqrt{2}}$
$\mathcal{L}_{M_4}$	$ F_{M_4} s^2  \leq 32\pi$
$\mathcal{L}_{M_5}$	$ F_{M_5} s^2  \leq 64\pi$
$\mathcal{L}_{M_7}$	$ F_{M_7} s^2  \leq \frac{256\pi}{\sqrt{6}}$
$\mathcal{L}_{T_0}$	$ F_{T_0} s^2  \leq \frac{12\pi}{5}$
$\mathcal{L}_{T_1}$	$ F_{T_1} s^2  \leq \frac{24\pi}{5}$
$\mathcal{L}_{T_2}$	$ F_{T_2} s^2  \leq \frac{96\pi}{13}$

Tabela 5.10: Efeitos dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de Unitariedade para a onda parcial  $(Q, J) = (0, 0)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{S_0}$  ao  $\mathcal{L}_{T_2}$ .



Operadores	Limite de unitariedade
$\mathcal{L}_{T_5}$	$ F_{T_5} s^2  \leq \frac{8\pi}{\sqrt{3}}$
$\mathcal{L}_{T_6}$	$ F_{T_6} s^2  \leq \frac{48\pi}{7}$
$\mathcal{L}_{T_7}$	$ F_{T_7} s^2  \leq \frac{32\pi}{\sqrt{3}}$
$\mathcal{L}_{T_8}$	$ F_{T_8} s^2  \leq \frac{3\pi}{2}$
$\mathcal{L}_{T_9}$	$ F_{T_9} s^2  \leq \frac{24\pi}{7}$

Tabela 5.11: Efeitos dos operadores efetivos de dimensão oito nos limites de Unitariedade para a onda parcial  $(Q, J) = (0, 0)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{T_5}$  ao  $\mathcal{L}_{T_9}$ .

A onda parcial  $(Q, J) = (0, 0)$  é a mais rica de todas, devido possuir mais possibilidades de estados de duas partículas. Note também que ela é a única onda parcial que foi capaz de obter limites de unitariedade para os operadores  $\mathcal{L}_{T_8}$  e  $\mathcal{L}_{T_9}$ , porque estes operadores efetivos geram apenas vértices neutros.

Através de todos os cálculos feitos para obtermos os limites de unitariedade para os operadores efetivos, notamos que os operadores  $\mathcal{L}_{T_i}$  na onda parcial  $J = 0$  exibem contruibuição apenas no espalhamento do tipo  $V_{1\pm}V_{2\pm} \rightarrow V_{3\pm}V_{4\pm}$ .

Vou mostrar um exemplo para o caso do operador efetivo  $\mathcal{L}_{T_8}$ , considere a matriz  $T^0$  na base ordenada  $\frac{Z_+Z_+}{\sqrt{2}}, \frac{Z_-Z_-}{\sqrt{2}}, \frac{Z_0Z_0}{\sqrt{2}}, Z_+A_+, Z_-A_-, \frac{A_+A_+}{\sqrt{2}}, \frac{A_-A_-}{\sqrt{2}}$  :

$$T^0 \rightarrow \frac{F_{T_8} s^2}{6\pi} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} s_w^4 & \frac{5}{2} s_w^4 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} c_w s_w^3 & -\frac{5}{\sqrt{2}} c_w s_w^3 & \frac{3}{2} s_w^2 c_w^2 & \frac{5}{2} s_w^2 c_w^2 \\ \frac{5}{2} s_w^4 & \frac{3}{2} s_w^4 & 0 & -\frac{5}{\sqrt{2}} c_w s_w^3 & -\frac{3}{\sqrt{2}} c_w s_w^3 & \frac{5}{2} s_w^2 c_w^2 & \frac{3}{2} s_w^2 c_w^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\sqrt{2}} c_w s_w^3 & -\frac{5}{\sqrt{2}} c_w s_w^3 & 0 & \frac{3}{2} s_w^2 c_w^2 & \frac{5}{2} s_w^2 c_w^2 & -\frac{3}{\sqrt{2}} c_w^3 s_w & -\frac{5}{\sqrt{2}} c_w^3 s_w \\ -\frac{5}{\sqrt{2}} c_w s_w^3 & -\frac{3}{\sqrt{2}} c_w s_w^3 & 0 & \frac{5}{2} s_w^2 c_w^2 & \frac{3}{2} s_w^2 c_w^2 & -\frac{5}{\sqrt{2}} c_w^3 s_w & -\frac{3}{\sqrt{2}} c_w^3 s_w \\ \frac{3}{2} s_w^2 c_w^2 & \frac{5}{2} s_w^2 c_w^2 & 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} c_w^3 s_w & -\frac{5}{\sqrt{2}} c_w^3 s_w & \frac{3}{2} c_w^4 & \frac{5}{2} c_w^4 \\ \frac{5}{2} s_w^2 c_w^2 & \frac{3}{2} s_w^2 c_w^2 & 0 & -\frac{5}{\sqrt{2}} c_w^3 s_w & -\frac{3}{\sqrt{2}} c_w^3 s_w & \frac{5}{2} c_w^4 & \frac{3}{2} c_w^4 \end{pmatrix},$$

Note que o estado  $Z_0Z_0$  não contribui. Depois de diagonalizar os autovalores são 4, -1 e o restante é zero. Deste modo obtemos que :

$$|F_{T_8} s^2| \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (5.115)$$

Para esta onda parcial não foi necessário ir para a onda  $J = 1$ , porque todos os limites de unitariedade encontrados são os mais fortes possíveis. O motivo por trás disso é que os limites para todos os operadores são dependentes em  $s^2$ , quando isso acontece podemos parar a expansão. Note que para as ondas de carga +1 e +2 isso não acontece, por isso que precisamos continuar a expansão. A próxima seção explicará isso com cuidado.

## 5.9 Discussão

Pretendo aqui explicar a importância que cada onda parcial  $J$  tem em nossos resultados, como dito anteriormente a maior contribuição **normalmente** vem da onda  $J = 0$ . Nosso primeiro exemplo é para o operador efetivo  $\mathcal{L}_{M_0}$ :

$$|F_{M_0} s| \leq \frac{128\pi}{s} \quad \text{em} \quad (Q, J) = (2, 1) \quad (5.116)$$

$$|F_{M_0} s| \leq \frac{16\pi}{M_w^2} \quad \text{em} \quad (Q, J) = (2, 0) \quad (5.117)$$

Como  $s \gg M_w^2$  o primeiro limite é mais forte. Veja que neste caso a onda parcial  $J = 1$  nos fornece um limite mais forte, o motivo disso é devido ao fato dela conter amplitudes dependentes em  $s^2$  e a onda parcial  $J = 0$  em  $s$ . Por outro lado, quando temos uma dependência em  $s^2$  na onda parcial  $J = 0$ , ela sempre fornecerá o limite mais forte.

Para nos convenceremos, vamos começar por um exemplo simples, depois farei uma comparação entre as ondas parciais  $J = 0$  e  $1$ . Considere a reação  $W_-^+ A_- \rightarrow W_+^+ A_+$  para o operador  $\mathcal{L}_{M_7}$ , temos então que

$$T_{00}^0 (W_-^+ A_- \rightarrow W_+^+ A_+) = \frac{c_w^2 F_{T_7}}{96\pi} s^2, \quad (5.118)$$

$$T_{00}^1 (W_-^+ A_- \rightarrow W_+^+ A_+) = -\frac{c_w^2 F_{T_7}}{192\pi} s^2 \quad (5.119)$$

$$\text{e } T_{00}^2 (W_-^+ A_- \rightarrow W_+^+ A_+) = \frac{c_w^2 F_{T_7}}{960\pi} s^2 \quad (5.120)$$

Note que nesse simples cálculo, conforme  $J$  aumenta, a onda parcial tem menor valor e portanto terá um limite cada vez mais fraco. Desse exemplo pode-se notar que se a onda parcial  $J = 0$  tiver uma dependência em  $s^2$ , conforme  $J$  aumenta o limite de unitariedade se tornará mais fraco. Segue abaixo uma comparação dos resultados que obtivemos entre as ondas parciais.

Operadores	Onda parcial $(Q, J) = (1, 0)$	Onda parcial $(Q, J) = (1, 1)$
$\mathcal{L}_{S_0}$	$ F_{S_0} s^2  \leq 32\pi$	$ F_{S_0} s^2  \leq 192\pi$
$\mathcal{L}_{S_1}$	$ F_{S_1} s^2  \leq 96\pi$	$ F_{S_1} s^2  \leq 192\pi$
$\mathcal{L}_{S_2}$	$ F_{S_2} s^2  \leq 32\pi$	$ F_{S_2} s^2  \leq 192\pi$
$\mathcal{L}_{M_0}$	$ F_{M_0} s  \leq \frac{15,2\pi}{M_w^2}$	$ F_{M_0} s^2  \leq 128\pi$
$\mathcal{L}_{M_1}$	$ F_{M_1} s  \leq \frac{22,5\pi}{M_w^2}$	$ F_{M_1} s^2  \leq \frac{1536\pi}{11}$
$\mathcal{L}_{M_2}$	$ F_{M_2} s  \leq \frac{21\pi}{M_w^2}$	$ F_{M_2} s^2  \leq 64\pi$
$\mathcal{L}_{M_3}$	$ F_{M_3} s  \leq \frac{21\pi}{M_w^2}$	$ F_{M_3} s^2  \leq \frac{768\pi}{11}$

Tabela 5.12: Comparação entre os limites de unitariedade das ondas parciais com  $(Q, J) = (1, 0)$  e  $(Q, J) = (1, 1)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{S_0}$  ao  $\mathcal{L}_{M_3}$ .

Operadores	Onda parcial $(Q, J) = (1, 0)$	Onda parcial $(Q, J) = (1, 1)$
$\mathcal{L}_{M_4}$	$ F_{M_4} s^2  \leq 32 \pi$	$ F_{M_4} s^2  \leq \frac{256 \pi}{\sqrt{3}}$
$\mathcal{L}_{M_5}$	$ F_{M_5} s^2  \leq 64 \pi$	$ F_{M_5} s^2  \leq \frac{512 \pi \sqrt{3}}{11}$
$\mathcal{L}_{M_7}$	$ F_{M_7} s  \leq \frac{20 \pi}{M_w^2}$	$ F_{M_7} s^2  \leq 192 \pi$
$\mathcal{L}_{T_0}$	$ F_{T_0} s^2  \leq 24 \pi$	$ F_{T_0} s^2  \leq 48 \pi$
$\mathcal{L}_{T_1}$	$ F_{T_1} s^2  \leq \frac{48 \pi}{7}$	$ F_{T_1} s^2  \leq 96 \pi$
$\mathcal{L}_{T_2}$	$ F_{T_2} s^2  \leq 24 \pi$	$ F_{T_2} s^2  \leq 192 \pi$
$\mathcal{L}_{T_5}$	$ F_{T_5} s^2  \leq 24 \pi$	$ F_{T_5} s^2  \leq 48 \pi$
$\mathcal{L}_{T_6}$	$ F_{T_6} s^2  \leq \frac{48 \pi}{7}$	$ F_{T_6} s^2  \leq 96 \pi$
$\mathcal{L}_{T_7}$	$ F_{T_7} s^2  \leq 24 \pi$	$ F_{T_7} s^2  \leq 192 \pi$

Tabela 5.13: Comparação entre os limites de unitariedade das ondas parciais com  $(Q, J) = (1, 0)$  e  $(Q, J) = (1, 1)$ . Do operador  $\mathcal{L}_{M_4}$  ao  $\mathcal{L}_{T_7}$ .

Veja que as ondas parciais  $(Q, J) = (1, 0)$  para os operadores  $\mathcal{L}_{S_0}, \mathcal{L}_{S_1}, \mathcal{L}_{S_2}$  e do  $\mathcal{L}_{M_4}$  até o  $\mathcal{L}_{T_9}$ , todas fornecem um limite de unitariedade com dependência em  $s^2$ . Comparando com a onda parcial  $(Q, J) = (1, 1)$ , para estes operadores citados acima todos os limites para a onda  $(Q, J) = (1, 0)$  são mais fortes.

Operadores	Onda parcial $(Q, J) = (2, 0)$	Onda parcial $(Q, J) = (2, 1)$
$\mathcal{L}_{S_0}$	$ F_{S_0} s^2  \leq 32 \pi$	Não contribui
$\mathcal{L}_{S_1}$	$ F_{S_1} s^2  \leq 96 \pi$	$ F_{S_1} s  \leq \frac{48 \pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{S_2}$	$ F_{S_2} s^2  \leq 96 \pi$	$ F_{S_2} s  \leq \frac{48 \pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{M_0}$	$ F_{M_0} s  \leq \frac{16 \pi}{M_w^2}$	$ F_{M_0} s^2  \leq 128 \pi$
$\mathcal{L}_{M_1}$	$ F_{M_1} s  \leq \frac{16 \pi}{M_w^2}$	$ F_{M_1} s^2  \leq \frac{1536 \pi}{11}$
$\mathcal{L}_{M_7}$	$ F_{M_7} s  \leq \frac{64 \pi}{3 M_w^2}$	$ F_{M_7} s^2  \leq 192 \pi$
$\mathcal{L}_{T_0}$	$ F_{T_0} s^2  \leq 24 \pi$	$ F_{T_0} s  \leq \frac{24 \pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{T_1}$	$ F_{T_1} s^2  \leq \frac{48 \pi}{7}$	$ F_{T_1} s  \leq \frac{48 \pi}{M_w^2}$
$\mathcal{L}_{T_2}$	$ F_{T_2} s^2  \leq 24 \pi$	$ F_{T_2} s  \leq \frac{48 \pi}{M_w^2}$

Tabela 5.14: Comparação entre os limites de unitariedade das ondas parciais com  $(Q, J) = (2, 0)$  e  $(Q, J) = (2, 1)$ .

Note que a onda parcial  $(Q, J) = (2, 0)$  para os operadores  $\mathcal{L}_{S_0}, \mathcal{L}_{S_1}, \mathcal{L}_{S_2}, \mathcal{L}_{T_0}, \mathcal{L}_{T_1}$  e  $\mathcal{L}_{T_2}$

forneem um limite de unitariedade dependente em  $s^2$ . Comparando com a onda parcial  $(Q, J) = (2, 1)$ , a onda  $J = 0$  fornece limites mais fortes para estes operadores como haviamos predito.

Resumindo, a expans3o em ondas parciais foi feita at3  $J = 1$ , porque s3 3 necess3rio ir at3  $J = 1$  para extrairmos o limite mais forte. Note que para a onda parcial  $(Q, J) = (0, 0)$  n3o foi preciso nem ir para pr3xima onda, porque **todos** os limites tem uma depend3ncia em  $s^2$  e por conta da discuss3o desse cap3tulo, sabemos que este limite 3 o mais forte.

## Conclusão

Neste trabalho nós obtemos os limites de unitariedade para os operadores efetivos de dimensão oito, onde eles alteram os vértices contendo o bósons de Higgs e os bósons de gauge eletrofracos. Foram calculadas apenas reações do tipo  $2 \rightarrow 2$ , com intuito de verificar o efeito destes operadores exclusivamente nos vértices quárticos. Nós encontramos que estes operadores efetivos geram amplitudes de espalhamento dependentes no máximo na ordem de  $s^2$  e este crescimento na energia do centro de massa acaba violando unitariedade em um certo limite. Os limites mais fortes que obtemos encontram-se nas próxima tabelas, dizendo qual onda parcial foi responsável por aquele limite. Os calculos aqui feitos servem para verificar se os limites obtidos no LHC provêm de uma região em que a teoria efetiva é válida. Os vértices quárticos já começaram a ser testados no LHC, mas há mais informações sobre reações do tipo  $2 \rightarrow 3$ , devido a precisarem de menos energia no centro de massa e luminosidade [16, 17, 18, 19, 20]. Conforme os aceleradores aperfeiçoarem, haverão mais dados sobre os acoplamentos quárticos anômalos.

Operadores	Limite de unitariedade mais forte	Onda parcial $(Q, J)$
$\mathcal{L}_{S_0}$	$ F_{S_0} s^2  \leq 32\pi$	$(2,0), (1,0)$ e $(0,0)$
$\mathcal{L}_{S_1}$	$ F_{S_1} s^2  \leq \frac{96\pi}{7}$	$(0,0)$
$\mathcal{L}_{S_2}$	$ F_{S_2} s^2  \leq \frac{96\pi}{5}$	$(0,0)$
$\mathcal{L}_{M_0}$	$ F_{M_0} s^2  \leq \frac{32\pi}{\sqrt{6}}$	$(0,0)$
$\mathcal{L}_{M_1}$	$ F_{M_1} s^2  \leq \frac{128\pi}{\sqrt{6}}$	$(0,0)$
$\mathcal{L}_{M_2}$	$ F_{M_2} s^2  \leq \frac{16\pi}{\sqrt{2}}$	$(0,0)$
$\mathcal{L}_{M_3}$	$ F_{M_3} s^2  \leq \frac{64\pi}{\sqrt{2}}$	$(0,0)$
$\mathcal{L}_{M_4}$	$ F_{M_4} s^2  \leq 32\pi$	$(0,0)$ e $(1,0)$
$\mathcal{L}_{M_5}$	$ F_{M_5} s^2  \leq 64\pi$	$(0,0)$ e $(1,0)$
$\mathcal{L}_{M_7}$	$ F_{M_7} s^2  \leq \frac{256\pi}{\sqrt{6}}$	$(0,0)$
$\mathcal{L}_{T_0}$	$ F_{T_0} s^2  \leq \frac{12\pi}{5}$	$(0,0)$

Tabela 5.15: Limites de unitariedade mais fortes obtidos pelos operadores efetivos de dimensão oito. Do operador  $\mathcal{L}_{S_0}$  ao  $\mathcal{L}_{T_0}$ .

Operadores	Limite de unitariedade mais forte	Onda parcial $(Q, J)$
$\mathcal{L}_{T_1}$	$ F_{T_1} s^2  \leq \frac{24\pi}{5}$	(0,0)
$\mathcal{L}_{T_2}$	$ F_{T_2} s^2  \leq \frac{96\pi}{13}$	(0,0)
$\mathcal{L}_{T_5}$	$ F_{T_5} s^2  \leq \frac{8\pi}{\sqrt{3}}$	(0,0)
$\mathcal{L}_{T_6}$	$ F_{T_6} s^2  \leq \frac{48\pi}{7}$	(0,0) e (1,0)
$\mathcal{L}_{T_7}$	$ F_{T_7} s^2  \leq \frac{32\pi}{\sqrt{3}}$	(0,0)
$\mathcal{L}_{T_8}$	$ F_{T_8} s^2  \leq \frac{3\pi}{2}$	(0,0)
$\mathcal{L}_{T_9}$	$ F_{T_9} s^2  \leq \frac{24\pi}{7}$	(0,0)

Tabela 5.16: Limites de unitariedade mais fortes obtidos pelos operadores efetivos de dimensão oito. Do operador  $\mathcal{L}_{T_1}$  ao  $\mathcal{L}_{T_9}$ .

## Bibliografia

- [1] G. Altarelli and M. W. Grunewald, “Precision electroweak tests of the standard model,” *Phys. Rept.*, vol. 403-404, pp. 189–201, 2004.
- [2] J. M. Cornwall, D. N. Levin, and G. Tiktopoulos, “Derivation of Gauge Invariance from High-Energy Unitarity Bounds on the  $s$  Matrix,” *Phys. Rev.*, vol. D10, p. 1145, 1974. [Erratum: *Phys. Rev.*D11,972(1975)].
- [3] O. J. P. Éboli and M. C. Gonzalez–Garcia, “Classifying the bosonic quartic couplings,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 9, p. 093013, 2016.
- [4] B. W. Lee, C. Quigg, and H. B. Thacker, “Weak Interactions at Very High-Energies: The Role of the Higgs Boson Mass,” *Phys. Rev.*, vol. D16, p. 1519, 1977.
- [5] C. P. Burgess and G. D. Moore, *The standard model: A primer*. Cambridge University Press, 2006.
- [6] T. Corbett, O. J. P. Éboli, and M. C. Gonzalez-Garcia, “Unitarity Constraints on Dimension-six Operators II: Including Fermionic Operators,” *Phys. Rev.*, vol. D96, no. 3, p. 035006, 2017.
- [7] B. Grzadkowski, M. Iskrzynski, M. Misiak, and J. Rosiek, “Dimension-Six Terms in the Standard Model Lagrangian,” *JHEP*, vol. 10, p. 085, 2010.
- [8] S. U. Chung, “SPIN FORMALISMS,” 1971.
- [9] T.-M. Y. Kurt Gottfried, *Quantum mechanics: Fundamentals*. New York: R. Stephen Berry, H. Eugene Stanley, Joseph L. Birman, Mikhail Voloshin, Mark P. Silverman, 2003.
- [10] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*. International Series In Pure and Applied Physics, New York: McGraw-Hill, 1980.
- [11] M. Jacob and G. C. Wick, “On the general theory of collisions for particles with spin,” *Annals Phys.*, vol. 7, pp. 404–428, 1959. [*Annals Phys.*281,774(2000)].
- [12] T. Hahn, “Feynman Diagram Calculations with FeynArts, FormCalc, and LoopTools,” *PoS*, vol. ACAT2010, p. 078, 2010.
- [13] G. Aad *et al.*, “Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC,” *Phys. Lett.*, vol. B716, pp. 1–29, 2012.
- [14] S. Chatrchyan *et al.*, “Observation of a new boson at a mass of 125 GeV with the CMS experiment at the LHC,” *Phys. Lett.*, vol. B716, pp. 30–61, 2012.

- [15] A. Alloul, N. D. Christensen, C. Degrande, C. Duhr, and B. Fuks, “FeynRules 2.0 - A complete toolbox for tree-level phenomenology,” *Comput. Phys. Commun.*, vol. 185, pp. 2250–2300, 2014.
- [16] M. Aaboud *et al.*, “Study of  $WW\gamma$  and  $WZ\gamma$  production in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV and search for anomalous quartic gauge couplings with the ATLAS experiment,” *Eur. Phys. J.*, vol. C77, no. 9, p. 646, 2017.
- [17] S. Chatrchyan *et al.*, “Search for  $WW\gamma$  and  $WZ\gamma$  production and constraints on anomalous quartic gauge couplings in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV,” *Phys. Rev.*, vol. D90, no. 3, p. 032008, 2014.
- [18] A. M. Sirunyan *et al.*, “Measurements of the  $pp \rightarrow W\gamma\gamma$  and  $pp \rightarrow Z\gamma\gamma$  cross sections and limits on anomalous quartic gauge couplings at  $\sqrt{s} = 8$  TeV,” *JHEP*, vol. 10, p. 072, 2017.
- [19] M. Aaboud *et al.*, “Studies of  $Z\gamma$  production in association with a high-mass dijet system in  $pp$  collisions at  $\sqrt{s} = 8$  TeV with the ATLAS detector,” *JHEP*, vol. 07, p. 107, 2017.
- [20] G. Aad *et al.*, “Evidence of W Production in  $pp$  Collisions at  $s=8$ TeV and Limits on Anomalous Quartic Gauge Couplings with the ATLAS Detector,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 115, no. 3, p. 031802, 2015.
- [21] V. Khachatryan *et al.*, “Study of vector boson scattering and search for new physics in events with two same-sign leptons and two jets,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 114, no. 5, p. 051801, 2015.
- [22] C. Degrande, N. Greiner, W. Kilian, O. Mattelaer, H. Mebane, T. Stelzer, S. Willenbrock, and C. Zhang, “Effective Field Theory: A Modern Approach to Anomalous Couplings,” *Annals Phys.*, vol. 335, pp. 21–32, 2013.
- [23] G. J. Gounaris, J. Layssac, J. E. Paschalis, and F. M. Renard, “Unitarity constraints for new physics induced by dim-6 operators,” *Z. Phys.*, vol. C66, pp. 619–632, 1995.
- [24] U. Baur and D. Zeppenfeld, “Unitarity Constraints on the Electroweak Three Vector Boson Vertices,” *Phys. Lett.*, vol. B201, pp. 383–389, 1988.
- [25] C. P. Burgess, “Introduction to Effective Field Theory,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, vol. 57, pp. 329–362, 2007.
- [26] B. Henning, X. Lu, and H. Murayama, “How to use the Standard Model effective field theory,” *JHEP*, vol. 01, p. 023, 2016.
- [27] J. Wudka, “Electroweak effective Lagrangians,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A9, pp. 2301–2362, 1994.
- [28] J. Wudka, “Applications of effective Lagrangians,” in *Beyond the standard model 4. Proceedings, 4th International Conference on High-Energy Physics, Tahoe City, USA, December 13-18, 1994*, pp. 97–104, 1994.
- [29] M. D. Schwartz, *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.



- [30] M. Aaboud *et al.*, “Measurement of  $W^\pm W^\pm$  vector-boson scattering and limits on anomalous quartic gauge couplings with the ATLAS detector,” *Phys. Rev.*, vol. D96, no. 1, p. 012007, 2017.
- [31] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995.
- [32] F. Halzen and A. D. Martin, *QUARKS AND LEPTONS: AN INTRODUCTORY COURSE IN MODERN PARTICLE PHYSICS*. 1984.
- [33] G. Altarelli, R. Barbieri, and F. Caravaglios, “Electroweak precision tests: A Concise review,” *Int. J. Mod. Phys.*, vol. A13, pp. 1031–1058, 1998.
- [34] D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*. 2008.
- [35] O. J. P. Eboli, M. C. Gonzalez-Garcia, and J. K. Mizukoshi, “ $p p \rightarrow j j e^+ \mu^+ \nu \nu$  and  $j j e^+ \mu^- \nu \nu$  at  $O(\alpha(\text{em})^6)$  and  $O(\alpha(\text{em})^4 \alpha(s)^2)$  for the study of the quartic electroweak gauge boson vertex at CERN LHC,” *Phys. Rev.*, vol. D74, p. 073005, 2006.
- [36] C. Degrande, “BSM constraints from EW measurements,” *EPJ Web Conf.*, vol. 49, p. 14009, 2013.
- [37] G. J. Gounaris, J. Layssac, and F. M. Renard, “Unitarity constraints for transverse gauge bosons at LEP and supercolliders,” *Phys. Lett.*, vol. B332, pp. 146–152, 1994.
- [38] G. Aad *et al.*, “Search for the  $b\bar{b}$  decay of the Standard Model Higgs boson in associated  $(W/Z)H$  production with the ATLAS detector,” *JHEP*, vol. 01, p. 069, 2015.
- [39] B. Tuchming and o. b. o. t. CDF, “Tevatron Higgs results,” *EPJ Web Conf.*, vol. 60, p. 02003, 2013.