UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

Teorias de Campos Discretas e Modelos Topológicos.

Miguel Jorge Bernabé Ferreira

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador:

Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho.

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IFUSP).

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata (IFUSP).

Profa. Dra. Tereza Cristina da Rocha Mendes (IFSC-USP).

São Paulo - SP

2012

Resumo

Neste trabalho estudamos as teorias de gauge puras (sem campo de matéria) na rede em três dimensões. Em especial, estudamos a subclasse das teorias topológicas [1]. A maneira como definimos e tratamos as teorias de gauge é diferente, mas equivalente, à forma usual apresentada em [2, 3]. Definimos estas teorias via o formalismo de Kuperberg [4], que é um formalismo puramente matemático de um invariante topológico de variedades tridimensionais. Este formalismo, embora bastante abstrato, pode ser adaptado para descrever as classes de modelos das teorias de gauge na rede [5], e traz várias vantagens, pois possibilita que tratemos de teorias topológicas e não topológicas, além da fácil identificação dos limites topológicos da função de partição. Estudamos também a classe das teorias chamadas quase topológicas [6], que podem ser pensadas como deformações de teorias topológicas. Em particular, consideramos teorias de gauge com grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$, que é o grupo de gauge mais simples possível com dinâmica não trivial. Dentro das teorias de gauge, identificamos as classes de modelos que são quase topológicos, além de outras classes nas quais a função de partição pode ser trivialmente calculada. A função de partição foi calculada explicitamente no caso quase topológico em duas situações: sobre a esfera tridimensional S^3 e sobre o toro $S^1 \times S^1 \times S^1$, que representa uma rede com condições periódicas de contorno. Dois modelos físicos de teorias de gauge, ainda com grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$, foram estudados: o modelo com ação de Wilson $S_W = \sum_{faces} [Tr(g) - 1]$ e o modelo com ação spin-gauge $S_{SG} = \sum_{faces} Tr(g)$. No limite de baixa temperatura ambos os modelos mostram-se ser topológicos, enquanto que no limite de alta temperatura mostraram-se ser trivialmente calculáveis.

Abstract

In this work we studied the class of models of pure lattice gauge theories (without matter fields) in three dimensions. Especially, we studied the subclass of topological theories [1]. Lattice gauge theories were defined in an unusual way, unlike the description shown in [2, 3]. We defined lattice gauge theories via the Kuperberg's formalism [4], which is a mathematical model for a topological invariant of 3-manifolds. Such formalism, although completely abstract, can describe the class of models of lattice gauge theories [5] because it can describe both topological and non topological theories, besides it provides an easy identification of the partition function topological limits. We also studied the class of theories called quasi topological [6], which can be thought as deformations of topological theories. As an example, we consider $\mathbb{Z}_2$ as gauge group, because it is the simplest group that does not imply trivial dynamics. Inside this class of models we identify the subclasses of quasi topological theories and also other classes in which the partition function can be trivially computed. The partition function was explicitly computed in two situations: on the 3-sphere S^3 and on the 3-manifold $S^1 \times S^1 \times S^1$ that represents periodic boundary conditions. Two physical models were studied: the model with Wilson's action $S_W(conf)$[1] and the model with spin-gauge action $S_{SG}(conf)$[2]. In the low temperature limit both models shown to be topological and in the high temperature limit they could be trivially computed.

[1] $S_W(g) = \sum_{faces} [Tr(g) - 1]$
[2] $S_{SG}(g) = \sum_{faces} Tr(g)$

Agradecimentos

Gostaria de agradecer...

- ao professor Dr. Paulo Teotônio Sobrinho, pela paciência, motivação e exemplo de didática.
- à Adriane, por suportar e entender a distância e que, mesmo longe, sempre esteve ao meu lado.
- aos meus pais Nilson e Magda pelo apoio e incentivo.
- aos amigos André Luiz M. Brito, Leandro Herculano da Silva, Leandro Oliveira do Nascimento, Patrick dos Santos Simonário, Rafael Rodrigues Francisco, Walace Sousa Elias e Willian André, pelas ajudas diretas e/ou indiretas neste trabalho e pelos momentos agradáveis.
- ao colega de trabalho Vitor Alves Pereira, pelas discussões sobre este trabalho e pela ajuda em alguns cálculos relacionados ao mesmo.
- aos professores Dr. João Carlos Alves Barata, Dr. Jorge Lacerda de Lyra e Dra. Tereza Cristina da Rocha Mendes, pelas críticas, sugestões e elogios.
- aos funcionários do Departamento de Física Matemática do IFUSP e aos funcionários da comissão de pós-graduação, em especial à Maria Izabel e Eber pela a ajuda quando precisei.
- à CAPES, pela ajuda financeira.

Sumário

1 Introdução **1**

2 Teorias de Gauge na Rede e Diagramas de Heegaard **8**

2.1 Teorias de Campos Discretas 8

2.1.1 Modelo de Ising em Duas Dimensões 9

2.1.2 Modelo de Ising em Três Dimensões 13

2.2 Teorias de Gauge Puras na Rede 14

2.2.1 Configurações de Gauge e a Ação da Teoria 15

2.2.2 Transformações de Gauge na Rede 19

2.2.3 Variedades (bi)tridimensionais e Redes 20

2.3 Diagramas de Heegaard 22

2.3.1 Complexidade das Variedades Tridimensionais 23

2.3.2 Triangulações de Variedades Tridimensionais 23

2.3.3 Diagramas de Heegaard Provenientes de uma Triangulação 24

2.3.4 Diagramas Simplificados de Heegaard 29

2.4 O Formalismo de Kuperberg 35

2.4.1 Os Tensores $M_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \cdots b_k}$ 35

2.4.2 Atribuição de Pesos às Curvas do Diagrama 37

2.4.3 Função de Partição do Formalismo de Kuperberg 38

2.5 Teorias de Gauge Puras Sobre Diagramas de Heegaard 39

3 Teorias de Campos Topológicas, Quase Topológicas e Prova da Invariância Topológica **43**

3.1 Teorias Topológicas e Quase Topológicas 44

3.2 Triangulações Topologicamente Equivalentes 45

3.2.1 Passo $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$ 46

3.2.2 Passo $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$ 47
3.3 Ação dos Passos de Pachner nos Diagramas Simplificados de Heegaard . . 49
3.3.1 Diagrama da Configuração $(1,4,6)$ 49
3.3.2 Diagrama da Configuração $(4,10,10)$ 49
3.3.3 Diagrama da Configuração $(2,7,9)$ 52
3.3.4 Diagrama da Configuração $(3,9,10)$ 53
3.4 Álgebras de Hopf e a Invariância Topológica 55
3.4.1 Sliding 56
3.4.2 Two-Point Move 58
3.4.3 Propriedade da Co-Integral 59
3.5 Invariância da Função de Partição pela Ação dos Passos de Pachner 62
3.5.1 Move $(1,4,6) \leftrightarrow (4,10,10)$ 62
3.5.2 Passo $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$ 64
3.5.3 Fatores Numéricos na Função Partição 66

4 Modelos Físicos com Grupo de Gauge $\mathbb{Z}_2$ 69
4.1 Pesos Modificados das Faces 69
4.2 Teorias de Gauge com Grupo de Gauge $\mathbb{Z}_2$ 73
4.2.1 Invariância da Função de Partição por Transformações de Base . . . 82
4.2.2 Pontos Calculáveis da Função de Partição 84
4.3 Modelos Físicos 90
4.3.1 Ação de Wilson 92
4.3.2 Ação Spin-Gauge 94

5 Considerações Finais 97

A Handlebodies 100

B Diagramas de Kuperberg e Álgebras de Hopf 102
B.1 Diagramas de Kuperberg 102
B.2 Álgebras de Hopf 104
B.2.1 Álgebras Associativas e com Unidade 104
B.2.2 Co-Álgebras Co-Associativas e com Co-Unidade 106
B.2.3 Bi-Álgebras 107

B.2.4 Álgebras de Hopf 108
B.3 Álgebra de Grupo $\mathbb{K}G$ 109
B.4 Identidades e Propriedades das Álgebras de Hopf 111

C Representações e Expansão em Caracteres **123**
C.1 Teoria das Representações de Grupos Discretos 123
C.1.1 $\mathbb{K}G$-módulos 124
C.1.2 Representações Irredutíveis 127
C.2 Representações Irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$ 128
C.3 Caracteres e Expansão em Caracteres 129
C.3.1 Caracteres Irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$ 132

Capítulo 1

Introdução

É um fato bastante conhecido que as teorias de campos têm se mostrados importante na descrição de fenômenos de física de altas energias, sendo o modelo padrão o exemplo mais importante. Em particular, as teorias de gauge são fundamentais. No entanto, o cálculo de quantidades relevantes para a física nem sempre é uma tarefa fácil. É comum fazermos uso de cálculos perturbativos e de manipulações formais que envolvem integrais funcionais. Neste contexto, a discretização das teorias de campos tem como objetivo contornar alguns destes problemas. Teorias de campos discretas são uma versão das teorias de campos formuladas sobre uma rede e não sobre uma variedade contínua. Esta rede pode ser pensada como uma discretização de uma variedade contínua. As teorias de gauge na rede, por exemplo, em duas dimensões são solúveis em geral [6, 7]. Já no caso tridimensional isso não é sempre verdade. As redes são formadas por vértices, links, faces e poliedros. Os campos são funções que associam a cada constituinte da rede um determinado valor e, uma vez definida a ação da teoria ($S\left(conf\right)$) no espaço-tempo Euclidiano, a dinâmica é determinada pela função de partição

$$Z = \sum_{conf} e^{-\beta S(conf)} \ .$$

São vários os modelos de teorias de campos na rede. Talvez o mais popular seja o modelo de Ising, muito utilizado no estudo do comportamento de materiais ferromagnéticos. O modelo de Ising em uma dimensão [8] e em duas dimensões sem campo externo [9] são exatamente solúveis, no entanto em três dimensões não dispomos de soluções exatas. Em geral, o mesmo vale para outras teorias de campos na rede em 3D, ou seja, não temos nenhum método de cálculo que seja não-perturbativo e, ao mesmo tempo, exato. Em

casos idealizados, em que o número de constituintes da rede é muito pequeno, a função de partição pode ser calculada explicitamente termo-a-termo, ou ainda, em casos nos quais a dinâmica é trivial, também pode-se calcular explicitamente a função de partição. Porém, em modelos mais realistas, em especial quando se considera o limite termodinâmico, este processo torna-se inviável.

Dentre as classe de modelos das teorias de campos discretas, existem as classes de modelos das teorias de gauge na redes. Essas teorias, desempenham um importante papel no estudo das teorias de campos. Se considerarmos, por exemplo, $\mathbb{Z}_2$ como grupo de gauge, temos uma teoria bastante interessante, pois o grupo de gauge é bastante simples e a dinâmica não é trivial, além de serem duais ao modelo de Ising [10]. Mas, mesmo com um grupo de gauge simples, como é o caso de $\mathbb{Z}_2$, o problema não pode ser resolvido exatamente em geral.

Em vista das dificuldades técnicas encontradas no cálculo da função de partição para teorias de campos discretas, uma classe peculiar de modelos de teorias de campos, a das *teorias de campos topológicas*, apareceu pela primeira vez em 1968, quando Ponzano e Regge estudaram um modelo discreto de gravitação quântica em três dimensões [12], o chamado *modelo de Ponzano-Regge*. Teorias de campos topológicas são teorias nas quais a função de partição depende exclusivamente da topologia da variedade. No caso de teorias topológicas discretas a função de partição não depende da rede, nem mesmo do número de constituintes da mesma, e sendo assim, a função de partição pode ser calculada exatamente, termo-a-termo, numa rede com um número pequeno de constituintes. Numa teoria de campos discreta em três dimensões a rede nada mais é que a discretização de uma variedade tridimensional, mas tal discretização não é única. Uma variedade pode ser discretizada por tetraedros, por exemplo, e nesse caso chamamos a rede de triangulação. Podemos considerar duas triangulações da mesma variedade, uma que possua um número muito pequeno de tetraedros e outra que possua um número muito grande. Neste caso, se a teoria for topológica, podemos calcular a função de partição em qualquer uma das duas triangulações obtendo o mesmo resultado, e sendo assim basta escolher a triangulação com o menor número de tetraedros.

Há ainda uma classe de teorias chamadas teorias *quase topológicas* [6], que podem ser interpretadas como sendo deformações das teorias topológicas e, consequentemente, um pouco mais gerais que as mesmas, mas nos quais quantidades relevantes, como a função de partição, ainda possam ser facilmente calculadas. A função de partição, nesse

caso, depende fracamente da discretização da variedade, isto é, dependem da discretização de uma forma trivial. Mais precisamente, depende somente do número de constituintes da rede, e não dos detalhes da mesma. As funções de partição quase topológicas, nos casos mais simples, são tais que podem ser escritas como a função de partição topológica multiplicado por um fator de escala, que depende dos números de links, faces e poliedros da rede.

Baseado em [4] e com o objetivo de estudar as teorias de campos discretas (mais especificamente, teorias topológicas), uma formulação alternativa das teorias de gauge, equivalente à apresentada em [2, 3], foi desenvolvida [5]. O formalismo descrito em [4], o qual chamamos de *formalismo de Kuperberg*, é um formalismo puramente matemático que define um invariante topológico para variedades tridimensionais. Apesar deste formalismo ter sido desenvolvido especialmente para a definição de modelos topológicos, foi mostrado em [5, 10] que ele pode ser adaptado para descrever teorias de gauge usuais. A descrição das teorias de gauge na rede via formalismo de Kuperberg traz várias vantagens do ponto de vista técnico, pois permite que tratemos em pé de igualdade teorias topológicas e não topológicas. Por esse motivo, leva a uma fácil identificação dos limites topológicos de uma teoria de gauge usual.

Redes tridimensionais são relativamente complicadas de se manipular, o que complica enormemente o tratamento das teorias de gauge em redes regulares. Como alternativa às redes, usaremos os diagramas de Heegaard [13], que são uma forma de discretizar variedades tridimensionais, não tão intuitivamente quanto triangulações, mas muito mais simples de se manipular. Além disso, para toda triangulação existe um diagrama de Heegaard associado, e as duas descrições são equivalentes.

Um passo importante ao se propor um modelo topológico é provar que, de fato, a função de partição deste modelo seja topológica, ou seja, provar que esta independe da triangulação. Em [4], é apresentada uma prova da invariância topológica do invariante topológico que usamos para descrever a função de partição das teorias de gauge na rede, porém essa prova faz uso de técnicas matemáticas que fogem dos propósitos deste trabalho, como por exemplo, a teoria de Morse. Por este motivo, apresentaremos uma prova alternativa, que é mais simples que a apresentada por Kuperberg e fornece algumas outras informações úteis no caso de teorias topológicas, além do fato de ser mais fácil de se entender, pois é baseada em alguns resultados de topologia combinatória em três dimensões [14]. Assim como na demonstração encontrada em [4], fazemos uso de algumas

identidades de álgebras de Hopf (apêndice B). Embora nossa prova seja mais simples, ela não é tão geral quanto a apresentada em [4], isto é, ela é válida somente para um tipo especial de rede, que são as redes triangulares (triangulações), ou seja, redes formadas por tetraedros, e por este motivo tratamos apenas de triangulações neste trabalho. Por simplicidade, consideraremos teorias de gauge chamadas *puras*, em que não há campos de matéria associados (embora o formalismo de Kuperberg possa descrever a classe das teorias de gauge com campo de Higgs na representação adjunta [10]) e consideraremos também na maior parte do tempo $\mathbb{Z}_2$ como grupo de gauge.

Nas teorias de gauge usuais atribui-se um elemento do grupo de gauge a cada link da rede. Além disso, atribuímos a cada plaqueta uma holonomia, ou seja, o produto dos elementos do grupo que vivem nos links da plaqueta. A ação S é uma função $S : G \to \mathbb{K}$ [1] da holonomia e fornece a dinâmica da teoria. No entanto, nem toda função S pode ser interpretada como ação, pois tal função deve ser invariante por transformações de gauge ou, equivalentemente, a função S deve ser invariante por conjugação dos elementos do grupo

$$S\left(hgh^{-1}\right) = S\left(g\right), \qquad \forall g, h \in G.$$

Funções invariantes por conjugação recebem o nome de funções de classe, e possuem a propriedade de poderem ser expandidas em caracteres (apêndice C), isto é, podem ser escritas como uma combinação linear dos caracteres irredutíveis e unitários do grupo G,

$$S\left(g\right) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \ \chi_i\left(g\right), \tag{1.1}$$

sendo $\chi_i\left(g\right)$ os n caracteres irredutíveis e unitários de G. Assim, uma maneira de parametrizar as teorias de gauge usuais é usando os n coeficientes a_i da expansão. No formalismo de Kuperberg, é imprecindível que tenhamos um diagrama de Heegaard $\mathcal{D}$ para definir a função de partição, além de um par $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$, sendo $\mathcal{A}$ uma álgebra e co-álgebra, (co-)associativa e (co-)semi-simples e $\mathcal{S} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um mapa linear tal que $\mathcal{S}^2 \equiv I_d$. Com isso, a função de partição fica dependendo do diagrama de Heegaard $\mathcal{D}$ e do par $(\mathcal{A}, \mathcal{S})$. No entanto, foi mostrado em [4] que quando $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Hopf a função de partição é independente de $\mathcal{D}$, ou seja, da triangulação. Portanto, a teoria é topológica. Conforme veremos, existe uma maneira mais conveniente de usar o formalismo de Kuperberg para descrever a classe de modelos das teorias de gauge usuais. Ao invés de codificarmos a

[1] sendo G o grupo de gauge e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

dinâmica do modelo na álgebra $\mathcal{A}$, fixamos esta álgebra como sendo a álgebra de grupo (apêndice B) e codificamos a dinâmica em elementos do centro da álgebra, $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$[2]. Assim, as teorias de gauge ficam parametrizadas por elementos $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, o que significa que cada modelo corresponde a um ponto no espaço dos parâmetros, formado por todos os elementos do centro de álgebra. No caso do grupo de gauge ser $\mathbb{Z}_2$, a dimensão da álgebra de grupo é igual a dois e, consequentemente, o espaço dos parâmetros também, de forma que podemos escrever $z = (\gamma, \eta)$, sendo γ e η dois parâmetros livres. Para cada par (γ, η) teremos uma dinâmica específica, ou seja, o peso estatístico de cada configuração. É possível escrever os parâmetros (γ, η) em termos das constantes a_0 e a_1 da expansão em caracteres, mostrado na expressão 1.1.

Neste trabalho, identificamos os pontos $(\gamma_{TOP}, \eta_{TOP})$ nos quais a função de partição $Z(\gamma, \eta)$ é topológica, que são os pontos: $z = (1, 0)$ e $z = (0, 1)$ (ver figura 1.1). Identificamos também as retas $z = (\lambda, 0)$ e $z = (0, \lambda)$, que são regiões quase topológicas do espaço dos parâmetros. Existem ainda duas outras retas, $z = (\lambda, \lambda)$ e $z = (\lambda, -\lambda)$, (retas tracejadas na figura 1.1), as quais representam regiões em que a função de partição pode ser trivialmente calculada. Nestas retas, a função de partição depende somente do números de constituintes da rede e independe da topologia. Foram estudados alguns modelos específicos de teorias de gauge com grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$, o modelo com ação $S_W = \sum_f \{1/_2 Tr\,(g + g^{-1}) - 1\}$, a qual chamamos de ação de Wilson e o modelo com a ação $S_{SG} = \sum_f \{1/_2 Tr\,(g + g^{-1})\}$, a qual chamamos de ação spin-gauge. Estes modelos possuem um único parâmetro livre e correspondem a curvas unidimensionais no espaço dos parâmetros (curvas azul e vermelha, respectivamente, na figura 1.1), além disso ambos os modeos mostraram ser quase topológicos no limite de baixa temperatura (fato que já havia sido estudado para ação spin-gauge [5]), pois neste limite as curvas que representam esses modelos interceptam (ou tendem assintoticamente para) as retas quase topológicas no espaço dos parâmetros. No limite de alta temperatura, ambos os modelos cruzam as retas em que a função de partição trivializa-se, e portanto a função de partição pode ser facilmente calculada neste limite. Na figura 1.1, podemos ver o espaço dos parâmetros no caso $\mathbb{Z}_2$ e os limites de baixa e alta temperatura dos modelos com ação de Wilson e ação spin-gauge.

Este trabalho está divido em quatro capítulos. O primeiro destes capítulos, o capítulo 2, é onde definimos as teorias de gauge usuais, o formalismo de Kuperberg e mostramos

[2] $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{A} : xy = yx,\ \forall y \in \mathcal{A}\}$

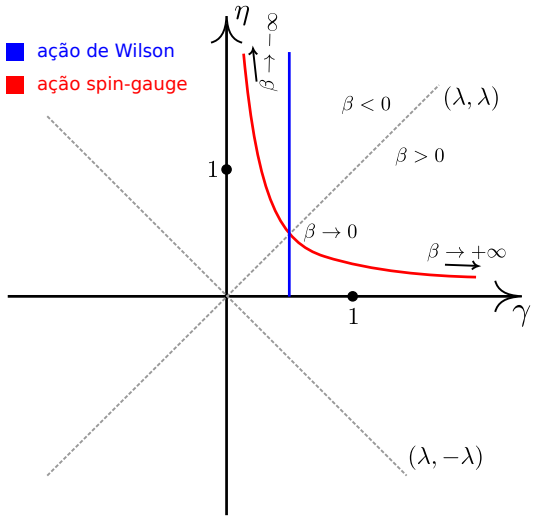


Figura 1.1: espaço dos parâmetros para o caso $\mathbb{Z}_2$. As curvas em azul e vermelho representam as parametrizações com elementos do centro da álgebra, dos modelos com ação de Wilson e ação spin-gauge, respectivamente.

como este formalismo pode ser usado para descrever a classe de modelos das teorias de gauge usuais na rede. Embora tenhamos usado $\mathbb{Z}_2$ como exemplo, a descrição de teorias de gauge no formalismo de Kuperberg vale para qualquer grupo de gauge compacto. As teorias de gauge usuais são definidas segundo a descrição contida em [2, 3] e o formalismo de Kuperberg é apresentado, mas não antes de definirmos os diagramas de Heegaard e mostrarmos como construir um diagrama a partir de uma triangulação. Em seguida, no capítulo 3, apresentamos a nossa prova da invariância topológica da função de partição nos pontos topológicos $(\gamma_{TOP}, \eta_{TOP})$, usando para isso certos resultados de topologia combinatória [14], diferentemente da prova apresentada por Kuperberg em [4]. Esses resultados de topologia combinatória são um conjunto de passos $(moves)$[3] de triangulação que garantem a invariância topológica da função de partição. Nossa prova da invariância topológica, conforme já mencionamos, é mais simples que a apresentada em [4], mas não tão geral quanto. No capítulo 4, os modelos físicos são discutidos. Os pontos topológicos e quase topológicos são identificados no caso $\mathbb{Z}_2$, e os limites de baixa e alta temperatura são estudados para a ação spin-gauge e a ação da Wilson. Além disso, calculamos exatamente o valor da função de partição nesses pontos topológicos para os casos em que a triangulação é a discretização da esfera tridimensional S^3 e no caso no

[3]Passos de triangulações são transformações locais nas triangulações que não alteram a topologia da mesma.

qual ela é a discretização de $S^1 \times S^1 \times S^1$. Este último representa o caso de redes com condições periódicas de contorno. Ainda no capítulo 4, usando a expansão em caracteres das funções de classe, mostramos como podemos parametrizar as teorias de gauge por elementos z do centro da álgebra de grupo e construímos o espaço dos parâmetros discutido anteriormente. No capítulo 5, fazemos alguns comentários finais e comentamos sobre perspectivas futuras. Nos apêndices A, B e C, algumas ferramentas matemáticas, essenciais para o desenvolvimento deste trabalho, são abordadas. No apêndice A fazemos uma construção, não muito rigorosa, mas mais intuitiva do espaço topológico chamado de *handlebody* [15], essencial na construção dos diagramas de Heegaard. No apêndice B podemos encontrar a definição e alguns exemplos de álgebras de Hopf, bem como a demonstração das identidades utilizadas neste trabalho. No último apêndice, discutimos e definimos alguns conceitos relacionados à teoria de representações de grupos finitos e discretos, e a técnica da expansão em caracteres de funções do tipo classe [16].

Este trabalho foi escrito de forma a ficar tão auto-contido quanto possível. Com exceção de alguns resultados de topologia combinatória (os quais podem ser encontrados em [13, 14]), todos os resultados relevantes para o mesmo encontram-se demonstrados de maneira detalhada nos apêndices. Ao leitor que não esteja familiarizado com álgebras de Hopf e teoria de representações de grupos discretos, recomendamos fortemente a leitura dos apêndices B e C antes de prosseguir com a leitura deste trabalho.

Capítulo 2

Teorias de Gauge na Rede e Diagramas de Heegaard

Neste capítulo definiremos as teorias de campos discretas, isto é, teorias de campos definidas numa rede, a qual pode ser pensada como sendo a triangulação de uma variedade bi ou tridimensional. Alguns exemplos de teorias de campo na rede, como o modelo de Ising em 2D e em 3D, serão discutidos. Teorias de gauge na rede também serão definidas neste capítulo.

Como alternativa às triangulações de variedades tridimensionais definiremos os *diagramas de Heegaard* [13], que nada mais são que uma forma de codificar toda a informação contida em uma triangulação. Porém, conforme veremos, tais diagramas são muito mais fáceis de se manipular que triangulações, o que torna seu uso bastante conveniente. Em seguida, ainda neste capítulo, definiremos as teorias de gauge sobre os diagramas de Heegaard como uma descrição alternativa para teorias de gauge na rede, mas que é equivalente à descrição usual. A descrição destas teorias sobre os diagramas de Heegaard tem origem em [4].

2.1 Teorias de Campos Discretas

Teorias de campos discretas são teorias de campos definidas em uma rede. Começaremos considerando alguns exemplos de teorias de campos bastante conhecidos que nos servirão como base para o entendimento de tais teorias. Tomemos como ponto de partida o mode-

lo de Ising em duas e três dimensões, que são modelos muito conhecidos e estudados na física.

2.1.1 Modelo de Ising em Duas Dimensões

Com o intuito de estudar fenômenos magnéticos em cristais o modelo de Ising foi proposto em 1920 por Wilhelm Lenz[1], embora o nome "modelo de Ising" tenha sido em homenagem a Ernst Ising[2], que em 1925 foi o primeiro a resolver exatamente o modelo no caso unidimensional. Desde então o modelo de Ising tem sido amplamente estudado em diversas áreas da física e em diversos tipos de problemas e, por esse motivo, iniciaremos este trabalho com uma breve discussão sobre este modelo.

Considere uma rede retangular bidimensional $\mathcal{L}$, a qual é constituída por vértices. Podemos mergulhar esta rede em $\mathbb{R}^2$ e assim dizer que $\mathcal{L}$ é constituída pelos pontos de $\mathbb{R}^2$ da forma $n = (n_x\ a, n_y\ b)$, sendo a e b os respectivos espaçamento horizontal e vertical entre os vértices e $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$. No caso particular em que $a = b$ dizemos que a rede é quadrada, a qual encontra-se ilustrada na figura 2.1 **(a)**.

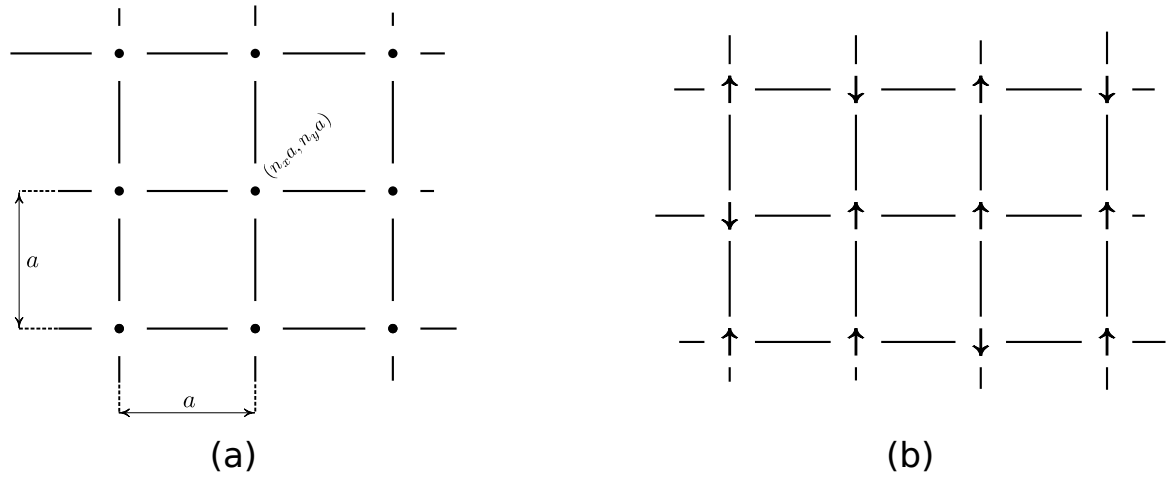


Figura 2.1: em **(a)** uma rede bidimensional quadrada e em **(b)** uma configuração arbitrária do modelo de Ising em duas dimensões.

Definir uma teoria de campos na rede significa definir uma função $\sigma : \mathcal{L} \to \mathbb{X}$, sendo $\mathbb{X}$ um conjunto chamado conjunto dos estados. No caso do modelo de Ising definimos

[1]Wilhelm Lenz (1888(Frankfurt, Alemanha)-1957 (Hamburg, Alemanha))

[2]Ernst Ising (1900 (Rhine, Alemanha) - 1998 (Illinois, USA))

um campo de spin $\sigma : \mathcal{L} \to \{+1, -1\}$ o qual atribui um valor para cada ponto da rede, assim atribuímos a cada vértice da rede uma variável de spin $\sigma(n)$ tal que $\sigma(n) = \pm 1$ e $n = (n_x, n_y)$. Chamamos $\sigma = +1$ de *spin-up* e $\sigma = -1$ de *spin-down* e representamos esquematicamente por uma seta apontando para cima e por uma seta apontando para baixo, respectivamente. Se atribuirmos um valor para $\sigma(n)$, para todo n da rede, isso determina uma configuração do sistema. Na figura 2.1 **(b)** encontra-se uma representação esquemática de uma configuração arbitrária. A dinâmica do modelo é definida pelo funcional que atribui um número $S\,(conf)$ para cada configuração. Em mecânica estatística $S\,(conf)$ é interpretado como sendo a energia associada a uma configuração, já na teoria quântica de campos $S\,(conf)$ é interpretado como a ação da teoria

Vamos considerar a *interação de primeiros vizinhos*, em que cada spin interage somente com os vizinhos mais próximos. Sendo assim a energia, ou ação, do sistema numa dada configuração é

$$S\,(conf) = -J \sum_{n,\mu} \sigma(n)\sigma(n+\mu), \tag{2.1}$$

sendo J a constante de acoplamento entre os spins e $\mu = (a, 0)$ ou $\mu = (0, b)$.

O sistema com a ação definida em (2.1) possui uma simetria global $\mathbb{Z}_2$, pois vê-se facilmente que a ação é invariante pela troca global de $\sigma = \pm 1$ por $\sigma = \mp 1$. Se um campo magnético externo é aplicado ao sistema deve-se acrescenter um termo de intereção spin-campo na ação do mesmo, pois cada spin, além de interagir com seus vizinhos, irá interagir com o campo magnético externo. Sendo assim a nova ação numa dada configuração fica

$$S\,(conf) = -J \sum_{n,\mu} \sigma(n)\sigma(n+\mu) - B \sum_{n} \sigma(n), \tag{2.2}$$

sendo B um parâmetro positivo.

O campo externo aplicado quebra a simetria global do sistema, pois agora se trocarmos o sinal de todos os spins da rede a ação não permanecerá inalterada. A probabilidade de encontrar o sistema numa configuração específica é proporcional ao fator de Boltzmann, $e^{-\beta S(conf)}$, sendo $\beta = 1/k_B T$ e escrevemos

$$P\,(conf) = \frac{e^{-\beta S(conf)}}{Z},$$

em que Z é a *função de partição* do sistema definida por

$$Z = \sum_{conf} e^{-\beta S(conf)}.$$

Veja que podemos escrever a ação da equação 2.2 da seguinte maneira

$$S\left(conf\right) = \sum_{n}\left[-J\sum_{\mu}\sigma(n)\sigma(n+\mu) - B\sigma(n)\right],$$

e portanto a função de partição fica

$$Z = \sum_{conf} e^{-\beta\sum_{n}\left[-J\sum_{\mu}\sigma(n)\sigma(n+\mu)-B\sigma(n)\right]} = \sum_{conf}\prod_{n} e^{\beta J\sum_{\mu}\sigma(n)\sigma(n+\mu)+\beta B\sigma(n)}\ .$$

No limite termodinâmico as propriedades termodinâmicas são obtidas através da energia livre de Helmholtz $F\left(T,V\right)$, que está relacionada com a função de partição por

$$F\left(T,V\right) = -\frac{1}{\beta}\ln Z.$$

Com a energia livre de Helmholtz pode-se calcular várias propriedades termodinâmicas do sistema, como por exemplo a pressão e a entropia, por meio das equações

$$\begin{aligned} p &= -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T} = \\ &\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial V}\ln Z\right)_{T}, \quad (2.3) \\ S &= -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{V} = \\ &\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\beta}\ln Z\right)_{V}. \end{aligned}$$

O valor médio da energia do sistema é calculado pela expressão abaixo

$$\langle E\rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z,$$

e a magnetização total M é definida por

$$M = \left\langle\frac{1}{N}\sum_{n}\sigma(n)\right\rangle = -\frac{1}{N\beta}\frac{\partial}{\partial B}\ln Z.$$

O conhecimento da função de partição possibilita o cálculo de várias outras quantidades, como por exemplo a energia livre de Helmholtz, a energia média, a magnetização, entre outras. No entanto, o cálculo da função de partição nem sempre é uma tarefa simples. No modelo de Ising em uma dimensão a função de partição pode ser facilmente calculada usando-se a técnica da matriz de transferência [8], já o cálculo da função de partição do modelo de Ising em duas e três dimensões estão longe de serem consideradas tarefas simples. Na próxima seção vamos definir o modelo de Ising em três dimensões antes de discutir a questão da solubilidade destes modelos.

O modelo de Ising não precisa necessariamente ser definido em uma rede quadrada como foi feito aqui. Podemos definir a mesma teoria em uma rede triangular, como mostrado na figura 2.2. A função de partição e as variáveis termodinâmicas definidas são as mesmas para redes triangulares, tanto regulares quanto não regulares. Lembremos que uma rede triangular (2D) regular é formada pelos pontos de $\mathbb{R}^2$ que são do tipo $n = \left(n_x\ a/_2, n_y\ a\sqrt{3}/_2\right)$, com $n_x, n_y \in \mathbb{Z}$ e a sendo o espaçamento entre dois vértices adjacentes.

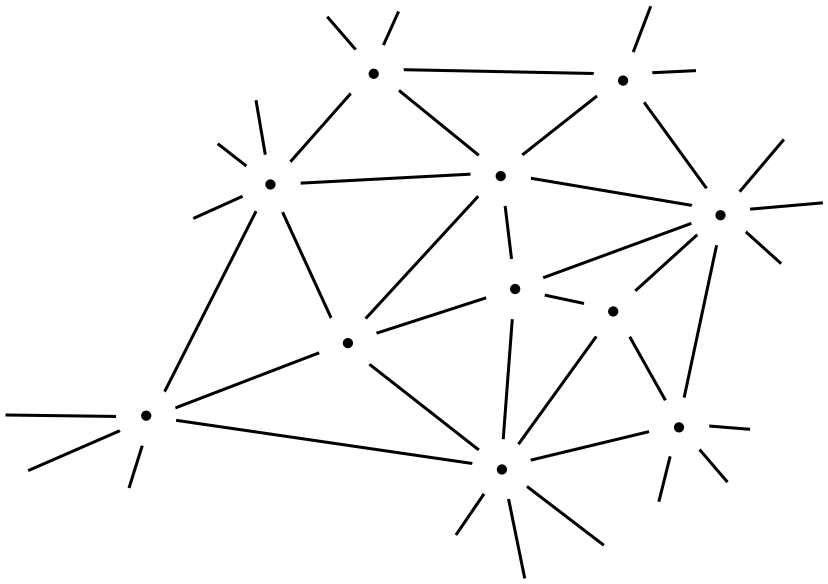


Figura 2.2: rede bidimensional triangular.

Define-se analogamente um campo de spin $\sigma : \mathcal{L} \to \{-1, +1\}$ que atribui uma variável de spin a cada ponto de $\mathcal{L}$. A ação do sistema e a função de partição são as mesmas definidas acima, com o detalhe que agora $\mu = (a, 0)$ ou $\mu = (a/_2, a\sqrt{3}/_2)$. Já para uma rede qualquer, como é o caso da rede desenhada na figura 2.2, isto não vale.

Conforme veremos adiante redes bidimensionais poligonais podem ser pensadas como sendo discretizações de variedades bidimensionais, sendo assim definir uma teoria de campo sobre uma rede significa definir uma teoria de campo sobre uma variedade. Normalmente em física o interesse maior é por redes quadradas (ou cúbicas, no caso tridimensional), mas neste trabalho daremos uma atenção especial às redes triangulares, pois é conhecido de topologia combinatória [13] que toda variedade, para $d = 2, 3$ dimensões, pode ser triangularizada, sendo assim podemos definir uma teoria de campo discreta sobre qualquer variedade para $d = 2, 3$. No caso bidimensional podemos discretizar qualquer variedade orientável por redes quadradas, mas isso não é verdade, em geral, para redes

tridimensionais.

Vamos considerar um exemplo de teoria de campos em três dimensões, o modelo de Ising em três dimensões.

2.1.2 Modelo de Ising em Três Dimensões

A definição do modelo de Ising em três dimensões é análoga à do modelo em duas dimensões, mas agora em uma rede tridimensional. Seja $\mathcal{L}$ uma rede tridimensional formada pelos pontos de $\mathbb{R}^3$ do tipo $n = (n_x a, n_y b, n_z c)$, com $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ e a, b, c números reais positivos, conforme mostrado na figura 2.3. No caso de uma rede cúbica temos $a = b = c$.

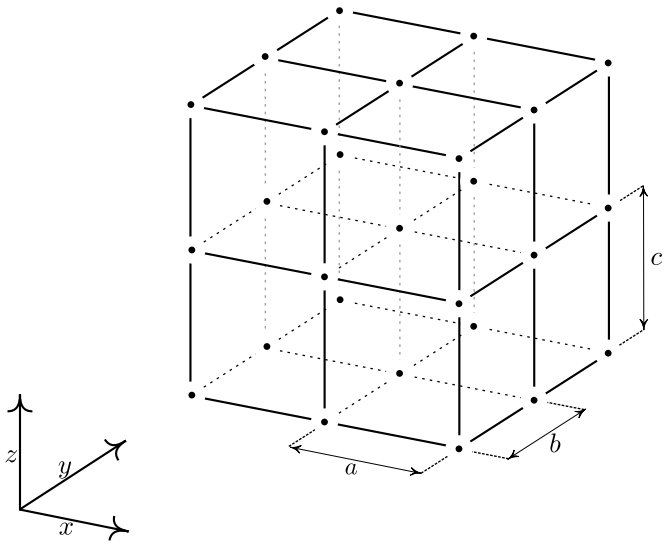


Figura 2.3: rede cúbica tridimensional.

A ação do sistema (sem campo externo) numa dada configuração é a mesma do modelo em duas dimensões, isto é, estamos considerando somente interações de primeiros vizinhos, assim ficamos com

$$S\left(conf\right) = -J \sum_{n,\mu} \sigma(n)\sigma(n+\mu)$$

com $\mu = (a, 0, 0)$, $\mu = (0, b, 0)$ ou $\mu = (0, 0, c)$ para uma rede cúbica. Na presença de um campo externo a ação fica

$$S\left(conf\right) = -J \sum_{n,\mu} \sigma(n)\sigma(n+\mu) - B \sum_{n} \sigma(n)$$

assim obtemos a função de partição que é

$$Z = \sum_{conf} e^{-\beta S(conf)} = \sum_{conf} \prod_{n} M(n)$$

sendo $M(n) = e^{\beta J \sum_{\mu}[\sigma(n)\sigma(n+\mu)+\beta B\sigma(n)]}$. As variáveis termodinâmicas são as mesmas já definidas.

Como dito antes, o conhecimento da função de partição possibilita o cálculo de várias propriedades termodinâmicas do sistema, no entanto em duas e três dimensões o cálculo da função partição não é simples como no caso unidimensional. O modelo unidimensional pode ser resolvido exatamente, mesmo com campo externo, usando-se a técnica da matriz de transferência, assim podemos calcular várias propriedades como por exemplo a magnetização, que geralmente é de bastante interesse no modelo. Já para o modelo bidimensional é sabido que na ausência de campo externo ($B = 0$) o modelo é solúvel [9] e pode ser calculado por meio da matriz de transferência [8], mas no caso geral, com campo externo não nulo, a solução analítica não é conhecida. O modelo de Ising em três dimensões permanece, até o presente momento, um problema em aberto. No entanto, o modelo de Ising pode ser estudado indiretamente, pois sabe-se [10] que o modelo de Ising é uma teoria dual às teorias de gauge tridimensionais na rede com grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$, as quais são o foco central deste trabalho.

Em geral problemas em modelos tridimensionais são muito mais complexos que problemas (uni)bidimensionais. Motivados por este fato trataremos somente de teorias em três dimensões. Conforme será visto nos próximos capítulos, a função de partição Z de uma teoria de gauge tridimensional torna-se topológica (ou quase topológica) em certos limites e isso significa que, nestes limites, é possível calcular Z exatamente em qualquer triangulação.

Agora que já vimos como definir teorias de campo na rede vamos definir teorias de gauge na rede, o que nos servirá como uma ponte para definir as teorias de campos discretas que abordaremos neste trabalho.

2.2 Teorias de Gauge Puras na Rede

Na seção anterior vimos um exemplo bastante conhecido de teoria de campo na rede, o modelo de Ising. Nesta seção definiremos, conforme definidas em [2] e em [3], as teorias

de gauge puras na rede, isto é, teorias de gauge na rede sem campo de matéria, que são o foco deste trabalho. Embora tenhamos definido alguns tipos de rede na seção anterior uma definição mais geral e formal de rede será necessária. Considere então a seguinte definição

Definição 2.1 *Uma rede é constituída por uma colagem de poliedros por suas faces, sendo que esta colagem deve ser tal que a fornteira de cada face seja identificada com a fronteira da outra face e vértices sejam identificados com vértices. Ao final desta colagem temos três conjuntos finitos $\mathcal{V}$, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$. Os elementos destes conjuntos são chamados vértices, links e faces, respectivamente. Estes vértices, links e faces são os vértices, arestas e faces dos poliedros usados na colagem.*

Veja que as redes quadradas e triangulares que definimos no caso do modelo de Ising estão de acordo com a definição acima, sendo assim essas redes são apenas alguns casos particulares de redes (bi)tridimensionais genéricas.

Em outras palavras uma rede é uma coleção de vértices, links e faces tais que as condições acima sejam satisfeitas.

2.2.1 Configurações de Gauge e a Ação da Teoria

Uma vez definida uma rede devemos agora definir orientações na mesma. Orientar um link da rede significa poder distinguir qual dos pontos de sua fronteira é o ponto inicial e qual é o ponto final e portanto somente é possível escolher entre duas orientações. Orientar uma face significa criar uma sequência, a menos de permutações cíclicas, com os links que são fronteira da mesma, veja a figura 2.4.

Uma rede em que todos os links e faces são orientados é chamada de rede orientada. Considere então uma rede orientada $\mathcal{L}$ e um grupo G, o qual chamamos de grupo de gauge. Considere uma função $\Phi : \mathcal{E} \to G$ que associa um elemento g_e do grupo de gauge a cada link $e \in \mathcal{E}$, isso define uma configuração de gauge. Fixada uma configuração de gauge definimos uma quantidade associada a cada face $f \in \mathcal{F}$ chamada *holonomia* da face f e denotamos por $U(f)$. A holonomia de uma face $f \in \mathcal{F}$ é definida como sendo o produto de todos os elementos do grupo de gauge que vivem nos links desta face. Este produto este que deve ser feito respeitando-se a orientação da face e dos links. Convencionamos que

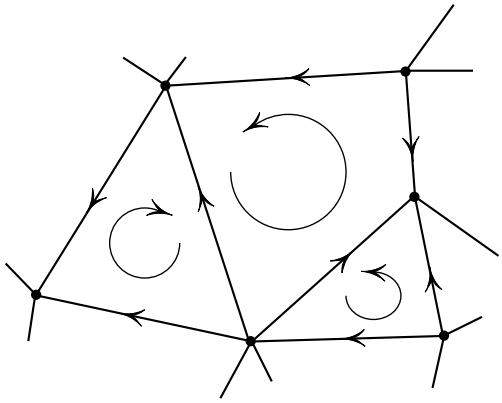


Figura 2.4: orientações dos links e faces da rede

quando um link e_i é percorrido do vértice inicial para o vértice final, então este contribui para a holonomia com g_{e_i}, caso contrário contribui com $g_{e_i}^{-1}$, ou seja

$$U(f) = g_{e_1}^{o_1} g_{e_2}^{o_2} \cdots g_{e_k}^{o_k},$$

sendo $o_i = \pm 1$, dependendo se o link é percorrido do vértice inicial para o final ($o_i = +1$) ou se é percorrido do vértice final para o inicial ($o_i = -1$). Por exemplo, a holonomia da face desenhada na figura 2.5 é dada por

$$U(f) = g_{e_1}^{-1} g_{e_2} g_{e_3}^{-1} g_{e_4}.$$

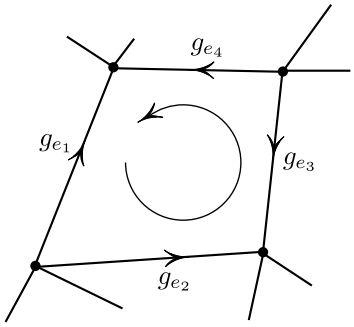


Figura 2.5: exemplo de configuração de gauge.

Observe que, como os links e_1 e e_3 possuem orientações contrárias à da face, então esses contribuíram com $g_{e_1}^{-1}$ e $g_{e_3}^{-1}$ para a holonomia, respectivamente. Note que começamos a calcular a holonomia a partir do link e_1 e o resultado foi o escrito acima, mas se começassemos a calcular a partir do link e_2, por exemplo, a holonomia seria diferente, mas a teoria não deve depender de qual link começamos a calcular a holonomia, portanto esse é um

detalhe que deve e será levado em consideração mais adiante, após definirmos a ação das teorias de gauge na rede.

A ação da teoria deve ser uma função invariante por permutações cíclicas da holonomia, pois assim podemos calcular a holonomia de cada face a partir de qualquer link da fronteira da mesma. Além disso a ação deve ser invariante por conjugação por elementos do grupo, caso contrário não será invariante por transformação de gauge, que definiremos a seguir. Funções invariantes por conjugação dos elementos do grupo são chamadas de funções de classe e são definidas por: uma função $f : G \to X$ é uma função de classe se $f(hgh^{-1}) = f(g)$, para todo $g, h \in G$. Funções de classe são automaticamente invariantes por permutações cíclicas, veja

$$f(abc) = f(a^{-1}abca) = f(bca) = f(b^{-1}bcab) = f(cab) \qquad \forall a, b, c \in G.$$

Seja então $T : G \to \mathbb{C}$ uma função de classe. Definimos a ação da teoria numa dada configuração de gauge, como escrita abaixo, a qual é invariante por conjugação por elementos do grupo G e por permutações cíclicas

$$S\left(conf\right) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \left\{ T\left[U(f)\right] + T\left[U^{-1}(f)\right] \right\}.$$

Uma vez definida a ação do sistema numa teoria de gauge discreta a função de partição é definida assim como definida no modelo de Ising

$$Z = \sum_{conf} e^{-\beta S(conf)},$$

e portanto,

$$Z = \sum_{conf} e^{-\beta \sum_{f \in \mathcal{F}} \left\{ T[U(f)] + T\left[U^{-1}(f)\right] \right\}}.$$

Resumindo, podemos dizer que a função de partição é do tipo

$$Z = \sum_{conf} \prod_{f} M(f),$$

sendo

$$M(f) = e^{-\beta \left\{ T[U(f)] + T\left[U^{-1}(f)\right] \right\}}. \tag{2.4}$$

Alternativamente podemos pensar que $M(f)$ é um peso estatístico associada à face $f \in \mathcal{F}$ e que a função de partição é a soma sobre todas as possíveis configurações de gauge do produto do peso de todas as faces da rede. Embora tenhamos definido teorias de gauge com grupos de gauge quaisquer, neste trabalho vamos tratar somente de grupos

discretos e finitos. No capítulo seguinte discutiremos alguns resultados obtidos somente para o grupo $\mathbb{Z}_n$, em especial para $\mathbb{Z}_2$. A ação aqui definida é geral, mas no caso particular em que $T\left[U(f)\right] = \frac{1}{2}Tr\left[U(f)\right]$ e o grupo de gauge é o grupo $\mathbb{Z}_2$ ela é chamada de *ação spin-gauge*, e é de bastante relevância em física, pois define uma teoria de gauge que é dual ao modelo de Ising. Outra ação bastante relevante em física é a chamada *ação de Wilson*, também bastante relevante em física por ser o caso discreto da ação de Yang-Mills [17], ação esta que é definida por $T\left[U(f)\right] = 1/2Tr\left[U(f)\right] - 1/2$. Tanto para ação spin-gauge quanto para ação de Wilson o traço é tomado em alguma representação.

Alguns pontos devem ser levados em consideração quando definimos teorias de gauge, o primeiro ponto é que a teoria não deve depender da orientação da rede, isto é, se trocarmos a orientação de alguma face ou de algum link a ação deve permanecer invariante. Um segundo ponto importante é que a ação não deve depender de qual link começamos calculando a holonomia das faces, e outro ponto importante é que a ação deve ser invariante por transformações de gauge, as quais definiremos em breve.

A ação do modelo é trivialmente invariante por inversão de orientação das faces, pois se invertermos a orientação de uma face $f \in \mathcal{F}$ isso implica na troca de $U(f)$ por $U^{-1}(f)$ e vice-versa, no entanto essas duas grandezas aparecem somadas na ação e consequentemente nada muda. Já uma inversão de orientação em um link da rede não deixa a ação invariante, portanto devemos impor que, se trocarmos a orientação de um determinado link, então devemos trocar o elemento g que vive neste link por g^{-1}. Pode-se facilmente ver que tal imposição implica que a ação do modelo deve ser invariante por inversão de orientação dos links, para ver isso considere a face desenhada na figura 2.6 **(a)**, cuja holonomia é

$$U(f) = g_{e_1}^{-1} g_{e_2} g_{e_3}^{-1} g_{e_4},$$

agora invertemos a orientação do link e_3 e trocamos g_{e_3} por $g_{e_3}^{-1}$ e assim a holonomia fica

$$U'(f) = g_{e_1}^{-1} g_{e_2} g_{e_3}^{-1} g_{e_4} = U(f).$$

Como já discutido, o fato de exigirmos que a função T seja uma função de classe garante que esta seja também invariante por permutações cíclicas e portanto podemos calcular a holonomia de uma face começando por qualquer link de sua fronteira.

Vamos agora tratar a questão da invariância por transformações de gauge.

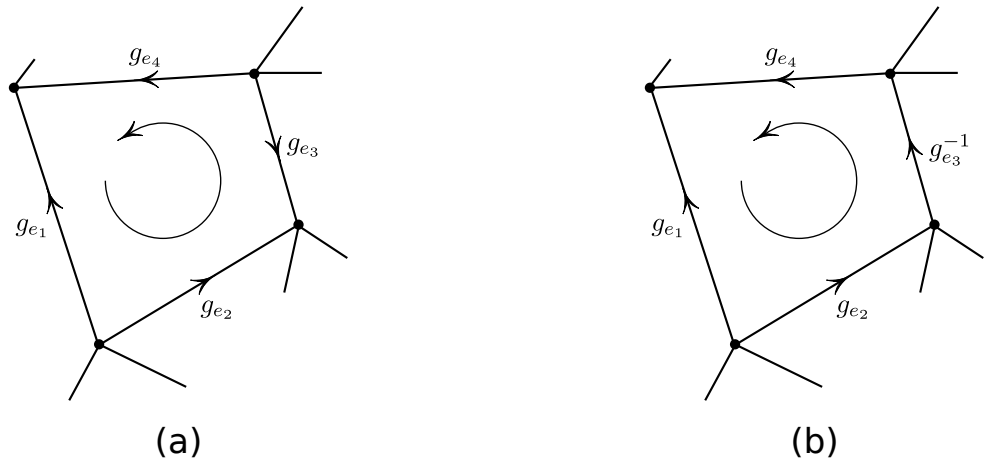


Figura 2.6: inversão de orientação dos links da rede.

2.2.2 Transformações de Gauge na Rede

Transformações de gauge podem ser definidas numa rede discreta da seguinte forma: associe um elemento $h_\nu \in G$ a cada vértice $\nu \in \mathcal{V}$ por meio de uma função $\Psi : \mathcal{V} \to G$, definimos a transformação de gauge sobre os elementos que vivem nos links por

$$g_e \mapsto h_{\nu_1}^{-1} g_e h_{\nu_2},$$

sendo ν_1 e ν_2 os vértices inicial e final do link e, respectivamente. Na figura 2.7 vê-se uma sequência ilustrando uma transformação de gauge na rede.

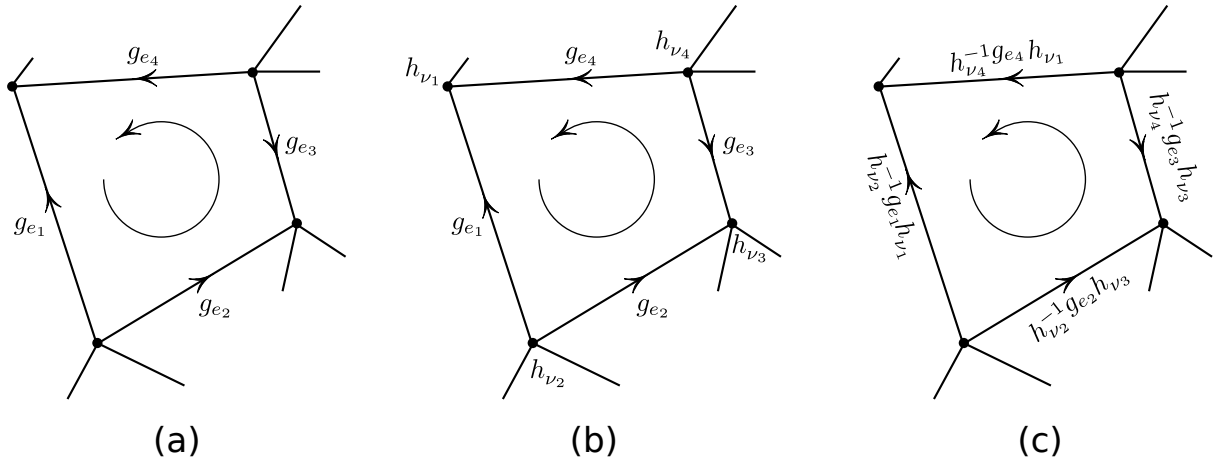


Figura 2.7: em **(a)** uma configuração de gauge arbitrária, em **(b)** atribuição de elementos do grupo aos vértices e em **(c)** a transformação de gauge aplicada nos elementos dos links.

A holonomia da face desenhada na figura 2.7, após aplicarmos uma transformação de

gauge, é a seguinte

$$\begin{aligned} U'(f) &= \left(h_{\nu 2}^{-1} g_{e_1} h_{\nu_1}\right)^{-1} \left(h_{\nu 2}^{-1} g_{e_2} h_{\nu_3}\right) \left(h_{\nu 4}^{-1} g_{e_3} h_{\nu_3}\right)^{-1} \left(h_{\nu 4}^{-1} g_{e_4} h_{\nu_1}\right) \\ &= h_{\nu_1}^{-1} \left(g_{e_1}^{-1} g_{e_2} g_{e_3}^{-1} g_{e_4}\right) h_{\nu_1} \\ &= h_{\nu_1}^{-1} U(f) h_{\nu_1} \ , \end{aligned}$$

sendo $U(f)$ a holonomia da mesma face antes de aplicarmos a transformação. Nota-se que a holonomia não é invariante por transformações de gauge, no entanto, devido ao fato de T ser uma função classe, $T\left[U(f)\right]$ é invariante por tais transformações

$$T\left[U'(f)\right] = T\left[h_{\nu_i}^{-1} U(f) h_{\nu_i}\right] = T\left[U(f)\right],$$

e com isso temos que a ação da teoria é invariante por transformações de gauge.

2.2.3 Variedades (bi)tridimensionais e Redes

Até agora definimos alguns exemplos de teorias de campos numa rede e teorias de gauge na rede, no entanto redes podem ser pensadas como sendo uma discretização de uma variedade (bi)tridimensional. Por exemplo, considere uma teoria de gauge definida sobre uma rede quadrada bidimensional conforme mostrado na figura 2.8 **(a)**. Estamos considerando que todas as faces da rede estão orientadas obedecendo a orientação do vetor normal, que aponta para cima (saindo do plano do papel), sendo assim pela regra da mão direita todas as faces estão orientadas no sentido anti-horário. A orientação dos links é arbitrária e por simplicidade não vamos desenhar a orientação das faces nem dos links, mas ambos estão orientados. Considere um grupo de gauge G, e que haja um elemento de G em cada link da rede. É muito comum em física tratarmos de redes finitas, mas isso implica em fronteiras e não estamos interessados nesse tipo de situação neste trabalho, pos simplicidade. Uma coisa que pode ser feita é considerarmos uma rede com condições periódicas de contorno, que consiste basicamente em supor que a rede se repete, ou seja, várias redes com a mesma configuração de gauge estão coladas por suas fronteiras. Considere o exemplo de uma rede bidimensional quadrada com condições periódicas de contorno, como na figura 2.8, topologicamente isso é equivalente a dizer que a_i e a'_i e os links b_i e b'_i estão identificados (colados), e assim obtemos a sequência esquematizada na figura 2.8.

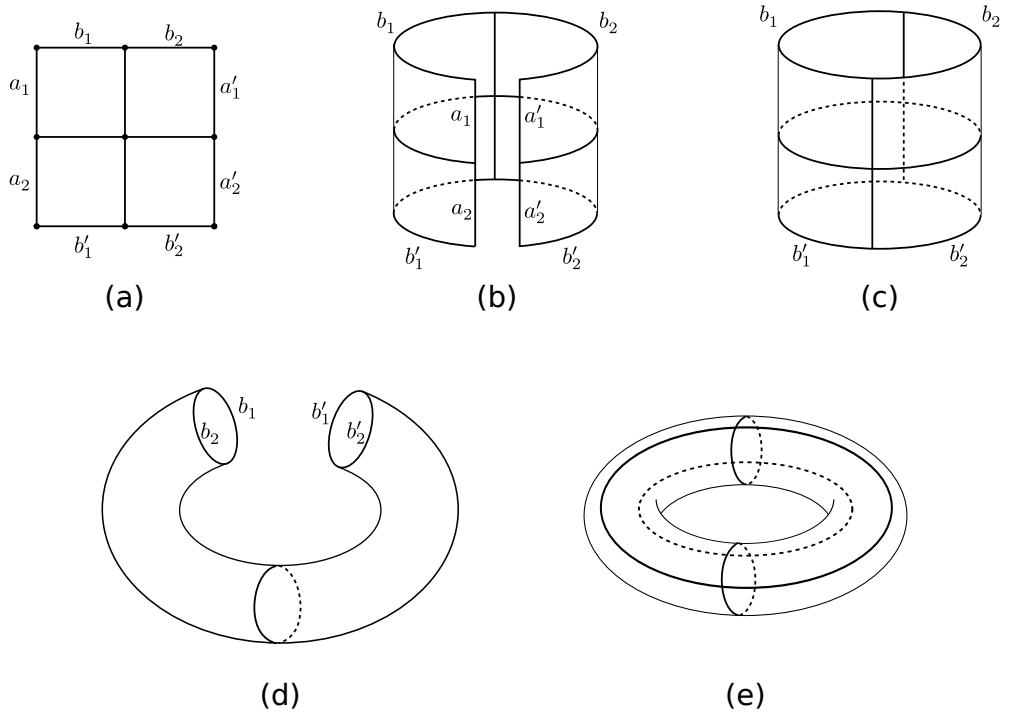


Figura 2.8: teoria de gauge em uma rede bidimensional com condições periódicas de contorno.

Nota-se que definir uma teoria de gauge sobre uma rede bidimensional quadrada com condições periódicas de contorno é equivalente a definirmos a teoria de gauge sobre uma discretização de um toro bidimensional, ou ainda sobre $S^1 \times S^1$. Note também que a variedade obtida é orientada, pois a rede foi orientada de forma coerente, de modo que todas as faces possuem a mesma orientação. Poderíamos ter feito o caminho inverso, isto é, afim de definir uma teoria de gauge discreta sobre um toro bidimensional poderíamos tê-lo dividido em vários quadrados e obteríamos uma rede quadrada com condições periódicas de contorno, ou ainda, poderíamos dividi-lo em triângulos e obteríamos uma rede triangular com condições periódicas de contorno. O mesmo raciocínio é válido com redes tridimensionais, se considerarmos uma rede tridimensional cúbica e impusermos condições periódicas de contorno o resultado será uma rede sobre $S^1 \times S^1 \times S^1$, que é uma variedade tridimensional. Por esse motivo podemos pensar numa rede como sendo a discretização de uma variedade, seja ela bi ou tridimensional. A questão que surge é: será que pode-se sempre discretizar uma variedade da maneira como foi feito no exemplo anterior? E a resposta para essa pergunta é sim. Dada uma variedade (bi)tridimensional é sempre possível discretiza-la da forma como foi feito para o toro bidimensional. Variedades bidimension-

ais sempre podem ser discretizadas na forma de uma rede quadrada [18] e portanto é sempre possível procedermos de forma análoga como feito na figura 2.8. Já variedades tridimensionais nem sempre podem ser discretizadas por redes cúbicas, mas certamente podem ser discretizadas por redes triangulares [13], ou seja, existem variedades tridimensionais que não podem ser "quadrangularizadas", enquanto que sempre podem ser triangularizádas, e é por esse motivo que neste trabalho consideraremos apenas redes triangulares. Certamente que algumas variedades tridimensionais podem ser discretizadas por redes quadradas, mas isso não é verdade em geral. A partir de agora trataremos somente de redes e variedades tridimensionais e sempre que nos referirmos a uma rede deve-se entender que esta é uma triangulação, salvo menção contrária.

Teorias de gauge em três dimensões são muito mais complicadas de se tratar que teorias de gauge em duas dimensões. As próprias triangulações são mais complicadas, até mesmo desenhá-las é difícil, e por isso a prova da invariância topológica para teorias em três dimensões torna-se não trivial, quando comparadas ao caso bidimensional. Felizmente podemos trabalhar, não com triangulações, mas sim com os chamados *diagramas de Heegaard*, que são uma maneira de codificar toda a informação contida na triangulação, mas conforme veremos são muito mais amigáveis de se tratar. Os diagramas de Heegaard, embora não sejam tão intuitivos quanto as triangulações, são uma ferramenta muito poderosa na discretização de variedades tridimensionais. Além do mais, tais diagramas são muito mais gerais que as triangulações, o que significa que para toda triangulação existe um diagrama de Heegaard associado, mas dado um diagrama de Heegaard não necessariamente existe uma triangulação associada. Conforme discutido em [10] as teorias de gauge via diagramas de Heegaard possibilitam tratarmos de dualidades entre dois modelos de forma bastante simples e elegante. A seguir veremos como construir um diagrama de Heegaard partindo de uma triangulação e veremos que isso pode ser feito maneira canônica, seguindo os passos dados por [13].

2.3 Diagramas de Heegaard

Nesta seção veremos como construir, de maneira canônica, um diagrama de Heegaard a partir de uma triangulação conhecida.

2.3.1 Complexidade das Variedades Tridimensionais

Variedades tridimensionais são variedades complicadas de se descrever. Variedades bidimensionais, por exemplo, se forem orientáveis, podem ser facilmente classificadas (apêndice de [13]) pelo genêro da superfície de um handlebody (apêndice A), o que significa que qualquer variedade bidimensional orientável é homeomorfa à superfície de uma handlebody de algum gênero, Além disso, toda variedade 2D pode ser discretizada numa rede triangular ou quadrada. Já para variedades 3D, não se pode classificá-las de maneira simples [13] como é o caso 2D, mesmo quando estas são orientáveis. As variedades tridimensionais podem ser discretizadas por redes triangulares, mas isso não é verdade em geral para redes quadradas.

2.3.2 Triangulações de Variedades Tridimensionais

Considere uma variedade tridimensional $\mathcal{M}$, orientada e sem fronteira. Vamos descrevê-la em termos de uma triangulação $\mathcal{L}$, que consiste basicamente de uma coleção de tetraedros sólidos colados por suas faces, conforme feito em [19]. O motivo pelo qual estamos considerando somente triangulações, ao invés de redes quadradas por exemplo, é que assim o teorema a seguir nos garante que sempre podemos discretizar uma variedade tridimensional desta forma [13].

Teorema 2.1 *Toda variedade tridimensional orientada é triangularizavel.*

A descrição de como os tetraedros devem ser colados, isto é, como deve ser feita a união disjunta destes, é dada a seguir.

Os tetraedros envolvidos na triangulação devem ser orientados e convencionamos a orientação do vetor normal a cada face do tetraedro apontando para fora do mesmo. Cada tetraedro é colado a outro por meio da identificação de suas faces, de modo que estes passam a compartilhar uma única face após a colagem. Não pode haver faces que não tenham sidas coladas a nenhuma outra, caso contrário teríamos uma variedade com fronteira, o que não está sendo estudado neste trabalho, por simplicidade. O processo de identificação das faces, ou colagem de tetraedros, é descrito a baixo.

Sejam T_1 e T_2 dois tetraedros orientados e sejam F_1 e F_2 faces de T_1 e T_2, respectivamente. A colagem é feita por um homeomorfismo $\varphi : F_1 \to F_2$ tal que a fronteira de uma face seja mapeado na fronteira da outra face e vértices sejam mapeados em vérticies. Na figura 2.9 temos um ilustração de como isso acontece.

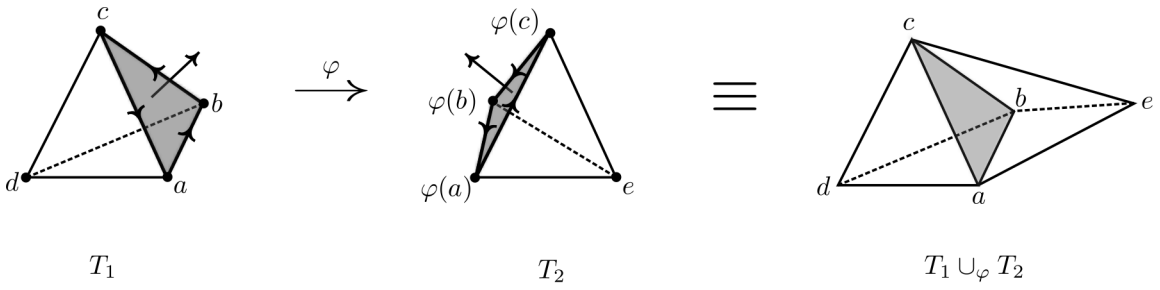


Figura 2.9: colagem dos tetraedros T_1 e T_2 pela identificação das faces F_1 e F_2 (em destaque).

A triangulação $\mathcal{L}$ da variedade $\mathcal{M}$ é constituída por uma colagem de tetraedros, de acordo com a definição 2.1. Embora triangulações sejam formas bastante intuitivas de discretizar uma variedade vamos agora definir os diagramas de Heegaard, que consiste basicamente em pensarmos na variedade como sendo uma colagem de dois espaços topológicos, um pouco mais complicados que tetraedros, chamados *handlebodies*. No apêndice A encontra-se a definição do espaço topológico que chamamos de handlebody. Um handleboy nada mais é que uma bola sólida com várias alças sólidas coladas.

2.3.3 Diagramas de Heegaard Provenientes de uma Triangulação

Pode-se, de forma canônica, descrever uma variedade como sendo a colagem de dois handlebodies a partir de uma triangulação $\mathcal{L}$ conhecida e no que segue encontra-se uma receita de como isso pode ser feito. Pense na triangulação como composta por duas partes essenciais: uma é um esqueleto unidimensional L_1 chamado de $1-$esqueleto (figura 2.10 **(a)**) formado somente pelas arestas e vértices dos tetraedros da triangulação e outra o complemento de L_1 em relação $\mathcal{L}$ o qual chamamos de L_2, assim $L_2 = \mathcal{L} - L_1$ (figura 2.11 **(a)**).

Considere uma vizinhança tubular H_1 de L_1, ou seja, a cada link associe um cilindro sólido e a cada vértice associe uma bola sólida. O espaço topológico obtido pela colagem

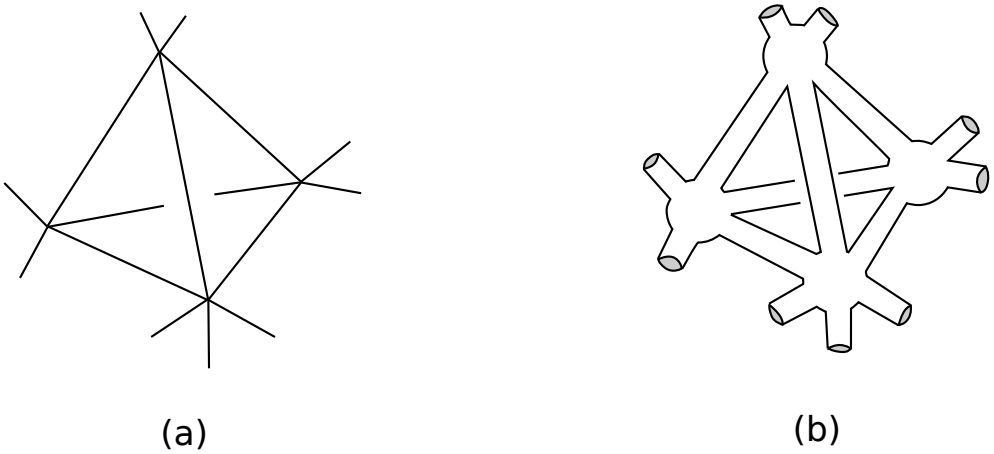


Figura 2.10: em **(a)** o 1-esqueleto (L_1) de $\mathcal{L}$ e em **(b)** vizinhança tubular de L_1.

destes cilindros com essas bolas é a vizinhança tubular de L_1. Na figura 2.10 **(b)** pode-se ver tal vizinhança tubular de L_1. É claro que o espaço topológico H_1 é a vizinhança tubular de todos os links da triangulação, embora na figura 2.10 a ilustração diga respeito a um único tetraedro amostral de $\mathcal{L}$.

Uma vez feito isso para L_1 definimos um outro espaço topológico H_2 que é o complemento de H_1 e é associado a $L_2 = \mathcal{L} - L_1$ da seguinte forma: a cada tetraedro de L_2 associe uma bola sólida em seu interior e quatro cilindros sólidos colados a esta bola de tal forma que cada cilindro intercepta uma das faces do tetraedro. O espaço H_2 é homeomorfo ao espaço desenhado na figura 2.11, pode-se imaginar que o H_2 é o que falta para preencher o espaço vazio entre os tubos de H_1.

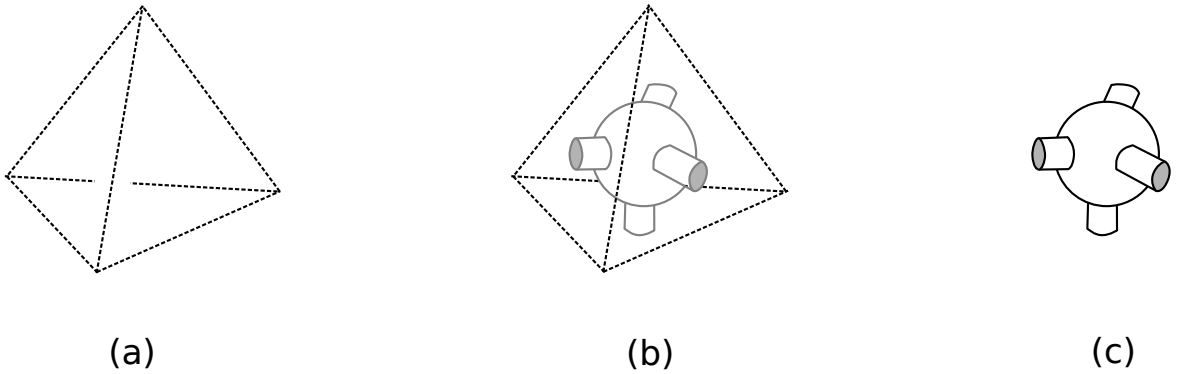


Figura 2.11: em **(a)** um tetraedro amostral de L_2, em **(b)** bola com cilindros colados no interior de cada tetraedro e em **(c)** o espaço obtido a partir de L_2.

Em outras palavras H_1 e H_2 são as vizinhanças tubulares da rede e da rede dual,

respectivamente. O análogo bidimensional de uma rede dual é imaginarmos que trocamos cada face da rede por um vértice e em seguida ligamos estes vértices com links que interceptam os links da rede, o que resulta na rede dual. Na figura 2.12 temos um exemplo de uma rede bidimensional, desenhada em azul, e sua respectiva rede dual, desenhada em vermelho.

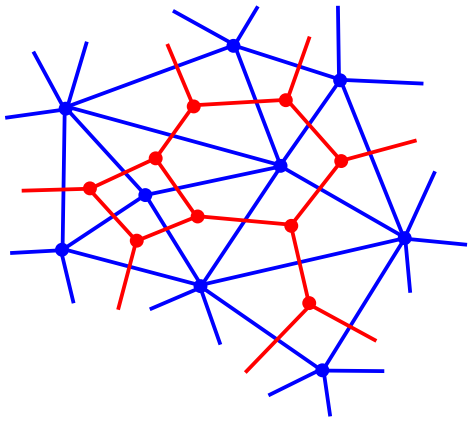


Figura 2.12: em azul uma rede bidimensional e em vermelho sua respectiva rede dual.

No caso tridimensional, dada uma rede, definimos a rede dual associando a cada tetraedro, face, link e vértice da rede um vértice, link, face e tetraedro da rede dual, respectivamente. Na figura 2.13 **(a)** e **(b)** podemos ver um exemplo de uma rede (em azul) e sua respectiva rede dual em vermelho, que podem ser pensados como sendo os espaços H_1 e H_2.

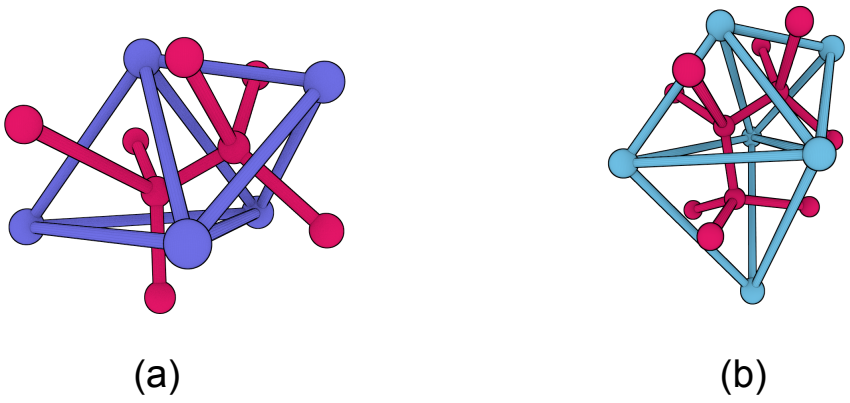


Figura 2.13: em azul uma rede tridimensional e em vermelho sua respectiva rede dual.

Tanto H_1 quanto H_2 são handlebodies. Na figura 2.10 **(b)** isso pode ser percebido facilmente. Já para enxergarmos que H_2 também é um handlebody basta imaginar os

outros tetraedros colados ao tetraedro amostral da figura 2.11 **(c)**. Finalmente associamos a cada tetraedro sólido de $\mathcal{L}$ o espaço topológico $\mathcal{H}$ que é a união disjunta de H_1 e H_2. Intuitivamente isso pode ser feito bastando "inflar" H_1 e H_2 na figura 2.14 (b) até que estes fiquem colados. Tal colagem certamente pode ser feita, uma vez que existe pelo menos um mapa $h : \partial H_1 \to \partial H_2$ que seja um homeomorfismo, pois H_1 e H_2 são handlebodies de mesmo gênero e portanto são homeomorfos.

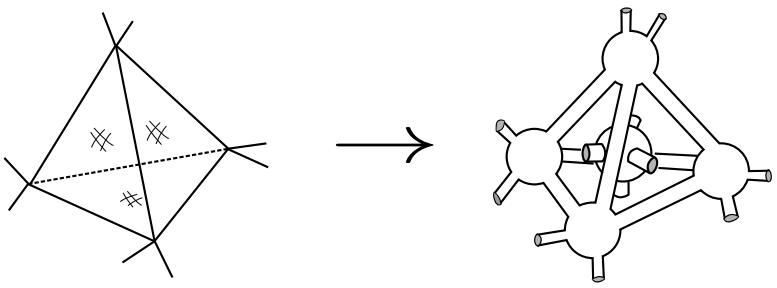


Figura 2.14: à esquerda um tetraedro sólido com aresta de $\mathcal{L}$ e à direita o espaço topológico $\mathcal{H}$ obtido a partir de $\mathcal{L}$.

Note que, como H_1 e H_2 são colados através de suas fronteiras, o resultado é uma variedade sem fronteiras. Este processo de discretizar uma variedade 3D em termos da colagem de handlebodies é chamado de *partição de Heegaard*.

O próximo passo para definir o diagrama de Heegaard é definir dois sistemas de curvas que serão equivalentes às faces e aos links da triangulação. À superfície de cada cilindro de H_1 adicionamos uma curva fechada, orientada e sem auto intersecção como mostrado na figura 2.15 **(a)**. Note que cada curva vermelha equivale a um link da triangulação, assim toda a informação conhecida sobre os links da triangulação está codificada nas curvas vermelhas. O conjunto de todas as curvas na superfície ∂H_1 forma um sistema de curvas $V = \{v_i\}$ o qual chamaremos de *sistema de curvas vermelhas*, sendo v_i cada uma das curvas pertencentes a este sistema, com $i = 1, 2, \cdots, n_v$. As curvas v_i devem satisfazer as seguintes propriedades

1. v_i não tem auto intersecção, $\quad \forall i$.

2. $v_i \cap v_j = \emptyset, \quad \forall i, j$.

3. existem discos $D_i \subset H_1$ tais que $\partial D_i = v_i, \quad \forall i$.

4. Os discos $\{D_i\}$ particionam H_1 em um conjunto $\{k_1, k_2, \cdots, k_n\}$ sendo k_j um espaço homeomorfo a uma bola sólida.

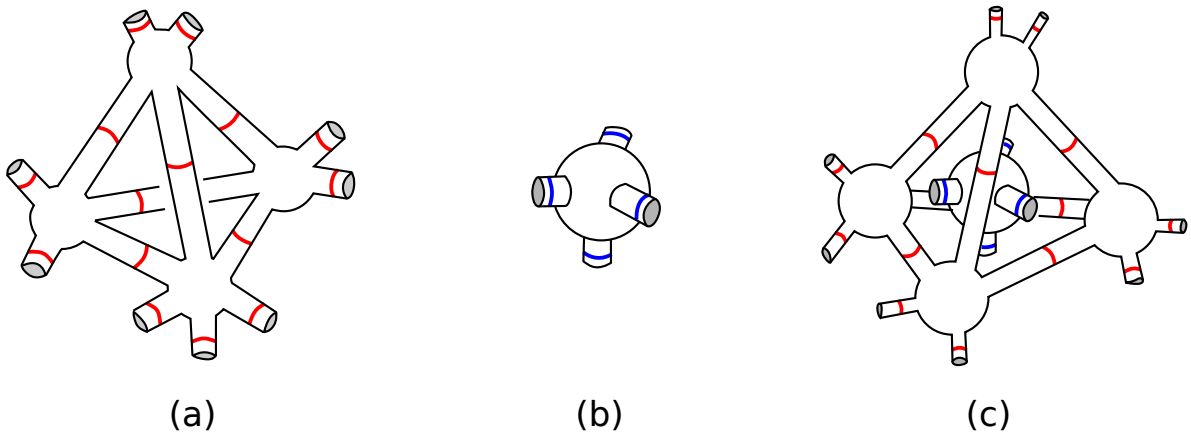


Figura 2.15: em **(a)** o sistema de curvas associado a H_1, em **(b)** o sistema de curvas associados a H_2 e em **(c)** os dois sistemas de curvas associados a $\mathcal{H}$

Definimos, exatamente como foi definido em H_1, um sistema de curvas na superfície de H_2 ao qual damos o nome de *sistema de curvas azuis*, denotado por $A = \{a_i\}$, com $i = 1, 2, \cdots, n_a$. Na figura 2.15 **(b)** temos uma ilustração de como isso é feito. As curvas azuis a_i devem: ser orientadas, ser tais que dividem H_2 em bolas sólidas com buracos em sua superfície, e satisfazer as mesmas condições listadas para curvas vermelhas. Assim como as curvas vermelhas representam os links da triangulação as curvas azuis representam as faces da mesma. Portanto o sistema de curvas azuis e vermelhas estão associados à triangulação $\mathcal{L}$ como mostrado na figura 2.15 **(c)**. Resumindo, tudo o que fizemos foi trocar links e faces da triangulação por curvas azuis e curvas vermelhas.

Embora tenhamos desenhado os handlebodies H_1 e H_2 separadamente, estes estão colados por meio de um homeomorfismo de suas superfícies, portanto um mapa de colagem $h : \partial H_1 \to \partial H_2$ irá mapear as curvas vermelhas, da superfície de H_1, na superfície de H_2 de tal forma que podemos representar os dois sistemas de curvas na superfície de um único handlebody ao invés de dois como tem sido feito até agora. O inverso também pode ser feito, uma vez que h é um mapa inversível, pode-se mapear as curvas azuis, da superfície de H_2, na superfície de H_1 usando-se o mapa $h^{-1} : \partial H_2 \to \partial H_1$. Portanto podemos representar de forma diagramática os dois sistemas de curvas em único handlebody. Definimos o diagrama $\mathcal{D}$ da variedade $\mathcal{M}$ como sendo os dois sistemas de curvas na superfície do mesmo handlebody. Convencionamos o diagrama $\mathcal{D}$ da triangulação $\mathcal{L}$

como sendo o obtido mapeando-se as curvas vermelhas, da superfície ∂H_1, na superfície ∂H_2 (figura 2.16 **(b)**) e damos a ele o nome de *diagrama da triangulação* $\mathcal{L}$. Ao diagrama obtido mapeando-se as curvas azuis de ∂H_2 na superfície ∂H_1 (figura 2.16 **(a)**) damos o nome de *diagrama dual*, $\mathcal{D}^*$, da triangulação $\mathcal{L}$. Note que trabalharmos com a rede ou com a rede dual implica em trabalharmos com o diagrama ou com o diagrama dual, o que pode ser feito facilmente na linguagem de diagramas de Heegaard.

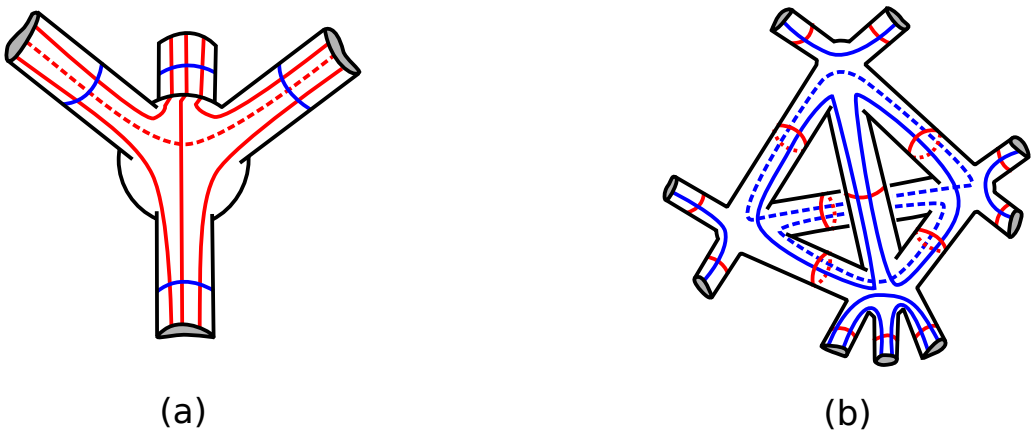


Figura 2.16: em **(a)** o diagrama associado a um tetraedro da triangulação e em **(b)** o seu diagrama dual.

Tanto o diagrama da figura 2.16 **(a)** quanto o diagrama da figura 2.16 **(b)** podem ser deformados contínuamente nos diagramas mostrado na figura 2.17, **(a)** e **(b)** respectivamente, através de algum homeomorfismo de superfície, consequentemente os diagramas da figura 2.16 e 2.17 são diagramas da mesma variedade, ou seja, eles levam a variedades que são homeomorfas. Pode-se notar que o diagrama é muito mais simples que o diagrama dual e por esta razão, usaremos muito mais o diagrama que o diagrama dual.

Na figura 2.17 as regiões pintadas de cinza representam buracos na superfície dos handlebodies. Existe ainda uma maneira mais fácil e elegante de representar esses diagramas. Tal representação consiste em desenharmos as curvas dos sistemas de curvas num plano e não em um handlebody, embora este não seja planar. Damos a este diagrama o nome de *diagrama simplificado de Heegaard*. A seguir, vamos definir tais diagramas simplificados e em seguida definiremos as teorias de gauge sobre tais diagramas.

2.3.4 Diagramas Simplificados de Heegaard

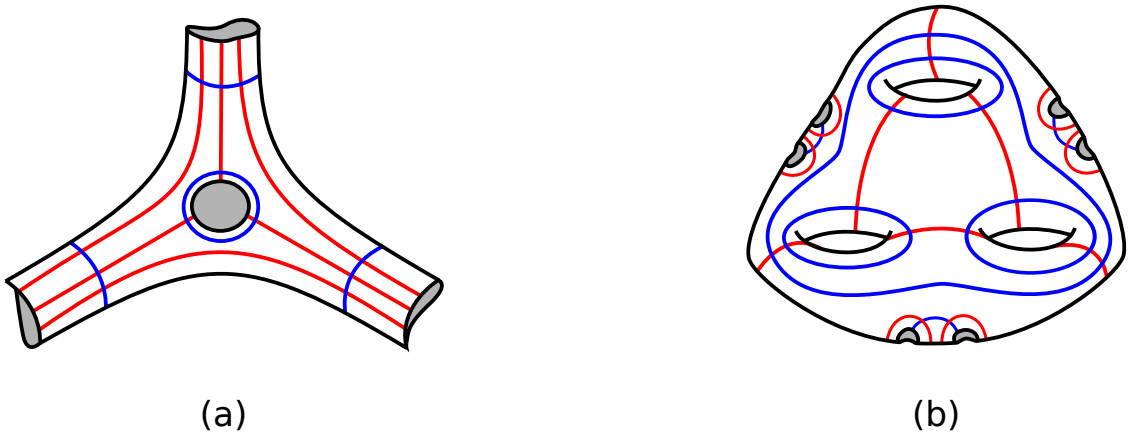


Figura 2.17: em **(a)** o diagrama de Heegaard e em **(b)** o diagrama dual.

Os diagramas simplificados de Heegaard são na verdade os diagramas de Heegaard, mas com a diferença que desenhamos os dois sistemas de curvas no plano e não na superfície do handlebody. Considere um diagrama $\mathcal{D}$ de uma variedade tridimensional $\mathcal{M}$. A cada curva orientada do diagrama da superfície do handlebody desenhamos uma curva fechada e orientada no plano. Os cruzamentos de duas curvas na superfície do handlebody corresponde aos cruzamentos de duas curvas no plano. Isso tudo é feito da seguinte maneira: tome uma vizinhança de cada curva na superfície do handlebody, tal vizinhança determina uma fita. Nos pontos em que duas curvas se cruzam a vizinhança fica determinada por duas fitas sobrepostas em formato de cruz. Agora recorte todas as fitas da superfície do handlebody, de modo a podermos abrir todas elas em um plano. O resultado são várias fitas coladas umas às outras as quais podem ser colocadas em um plano. Veja um exemplo de como isso deve ser feito na figura 2.18.

As bolinhas nas extremidades de cada curva simboliza o ponto onde as fitas foram cortadas e devemos entender que as curvas estão fechadas, pois esses pontos devem ser identificados novamente. Após colocar as fitas no plano estas não são mais necessárias, sendo assim eliminamos tais fitas e ficamos simplesmente com as curvas do diagrama, conforme mostrado na figura 2.18 **(e)**.

No diagrama simplificado os cruzamentos entre as curvas azuis e vermelhas devem acontecer na mesma ordem em que acontecem no diagrama da superfície do handlebody. Na figura 2.19 pode-se ver outro exemplo de como se respeitar a ordem dos cruzamentos entre as curvas.

Outra maneira de indicar que uma curva está fechada no diagrama simplificado é

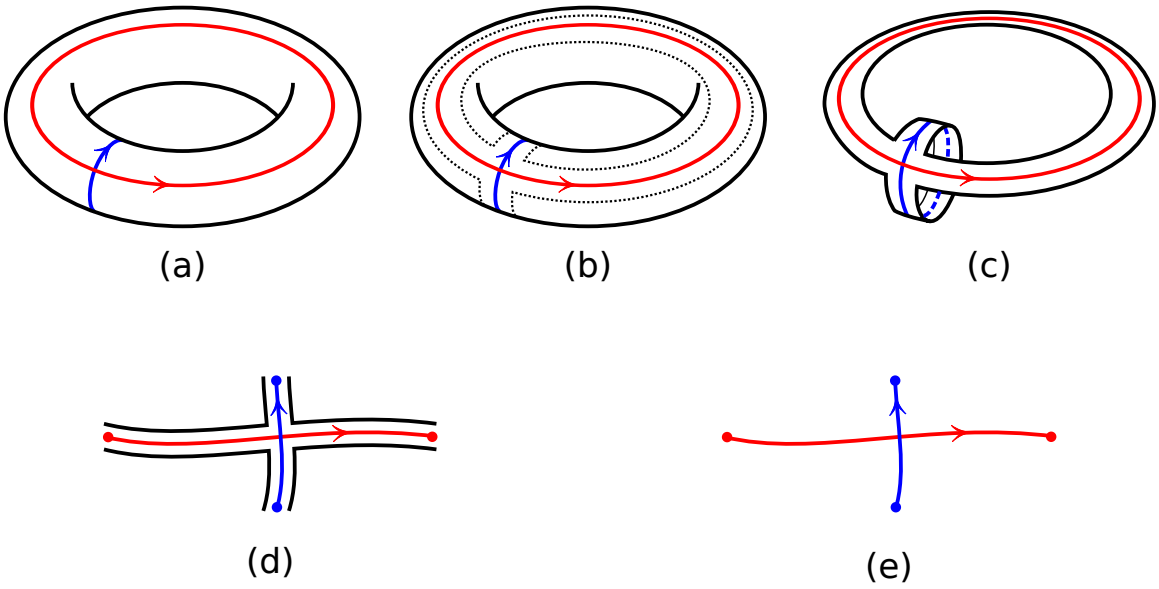


Figura 2.18: em **(a)** um diagrama de Heegaard, em **(d)** seu respectivo diagrama simplificado, em **(b)** e **(c)** temos um ilustração dos passos intermidiários para se passar de um diagrama para o outro e finalmente em **(e)** temos o diagrama simplificado sem as fitas.

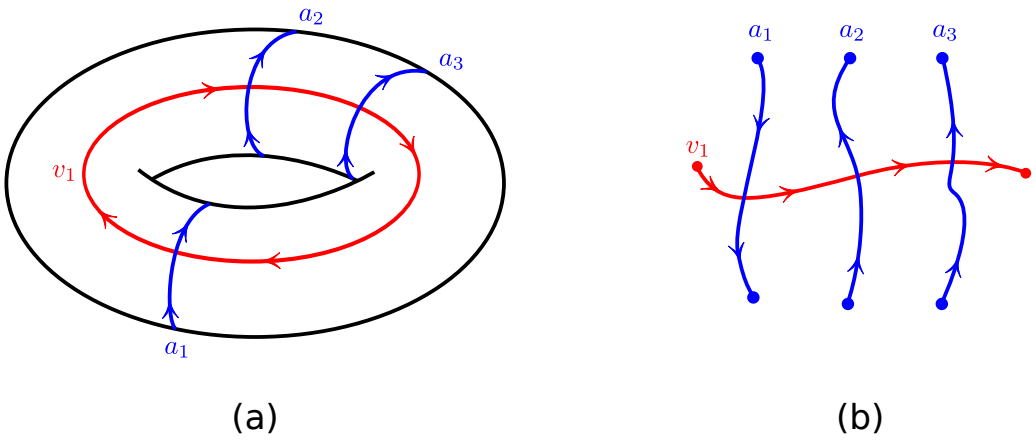


Figura 2.19: em **(a)** o diagrama $\mathcal{D}$ de uma variedade 3D e em **(b)** seu correspondente diagrama simplificado.

desenhar esta curva como mostrado na figura 2.20 **(c)**,

O desenho da figura **(a)** é só um pedaço de um diagrama de Heegaard, pois há um buraco em sua superfície o qual certamente deve ser colado a outro diagrama, sendo assim a curva vermelha v_2 não está fechada.

Os respectivos diagramas simplificados dos diagramas desenhados na figura 2.17 são os mostrados na figura 2.21.

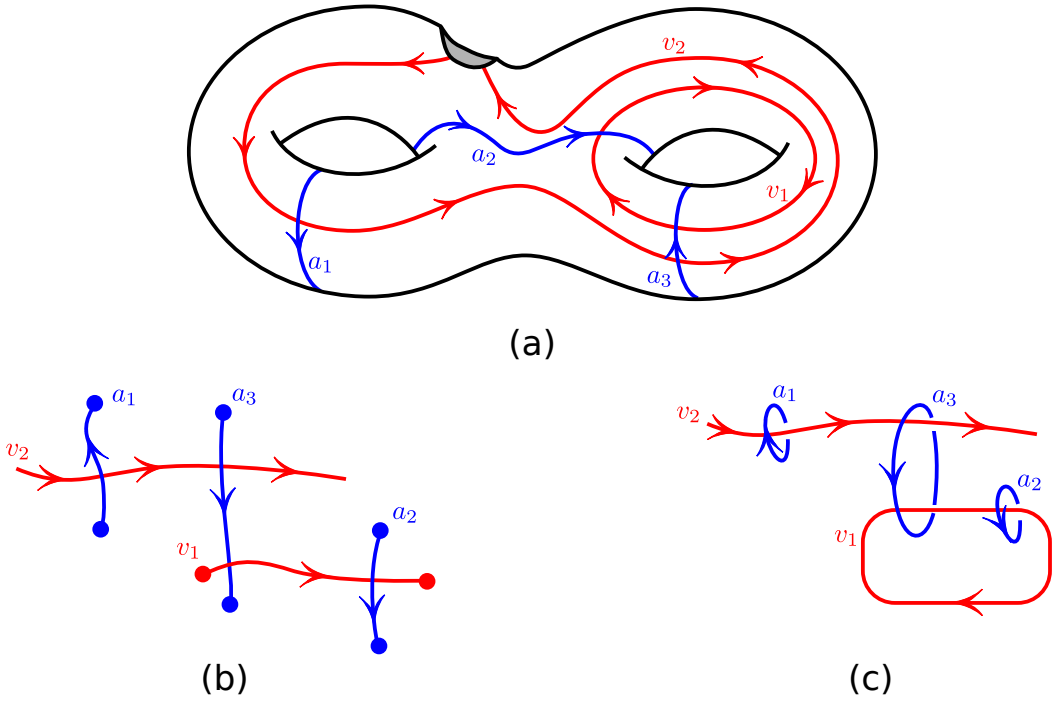


Figura 2.20: em **(a)** um pedaço de um diagrama de Heegaard e em **(b)** e **(c)** o respectivo diagrama simplificado.

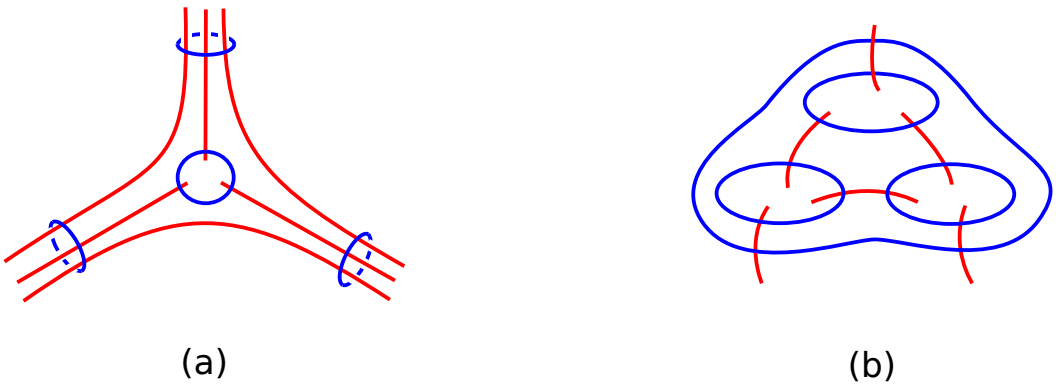


Figura 2.21: em **(a)** o diagrama simplificado de Heegaard de um tetraedro e em **(b)** o diagrama simplificado dual de Heegaard de um tetraedro.

De agora em diante sempre que nos referirmos a diagramas de Heegaard deve-se entender que estamos tratando dos diagramas simplificados de Heegaard, salvo menção contrária. Uma triangulação de uma variedade tridimensional é constituída basicamente pela colagem de vários tetraedros, mas em termos de diagramas de Heegaard isto equivale a dizer que o diagrama de Heegaard proveniente de uma triangulação será composto por uma colagem de vários diagramas iguais ao da figura 2.21. Esse resultado é bastante

interessante, pois significa que podemos construir qualquer variedade tridimensional orientada e sem fronteira por simples colagens de diagramas simples como o da figura 2.21, em outras palavras o diagrama simplificado de Heegaard de um tetraedro é a peça fundamental para construirmos qualquer variedade tridimensional orientada e sem fronteira. No exemplo a seguir vamos mostrar como obter o diagrama simplificado de Heegaard da variedade S^3, que é a esfera tridimensional.

Exemplo 2.1 *Diagrama Simplificado de Heegaard de* S^3

Considere como exemplo a esfera tridimensional S^3, a qual é homeomorfa ao espaço obtido pela colagem de duas bolas sólidas por suas fronteiras [18]. A triangulação mais simples possível de uma bola sólida é a constituída de um único tetraedro, sendo assim, considere dois tetraedros os quais são as triangulações de duas bolas sólidas. Se colarmos estes tetraedros pela identificação das faces de suas fronteiras o resultado será uma variedade tridimensional homeomorfa a uma esfera S^3. Na figura 2.22 temos o esquema de como fazer a identificação das faces dos tetraedros. Primeiro escolhemos arbitrariamente uma face de cada tetraedro e fazemos a identificação destas duas, como mostrada na figura 2.22 **(a)**, as faces em destaque são as que estão sendo coladas. Em seguida colamos as faces que ainda não foram coladas respeitando a seguinte regra: só se pode colar faces que possuam um link em comum e que não fazem parte do mesmo tetraedro. Veja o esquema na figura 2.22 **(b)**.

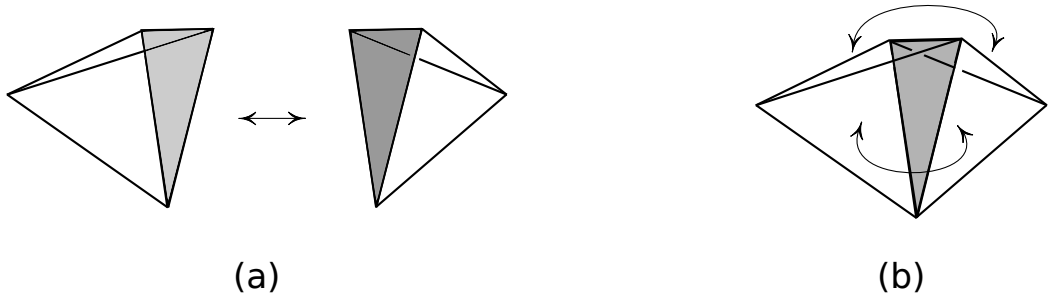


Figura 2.22: exemplo de colagem de tetraedros para obter S^3.

Em termos de diagramas, a colagem descrita na figura 2.22 é simplesmente a colagem de dois diagramas simples como o da figura 2.21 **(a)**, a regra de colagem é a descrita na figura 2.23 **(a)** e o resultado final é o desenhado na figura 2.23 **(b)**.

Portanto o diagrama desenhado na figura 2.23 **(b)** é um diagrama simplificado de Heegaard de uma esfera S^3. Usando-se o mesmo procedimento, mas talvez não tão sim-

ples, pode-se construir um diagrama de Heegaard para qualquer variedade tridimensional proveniente de uma triangulação.

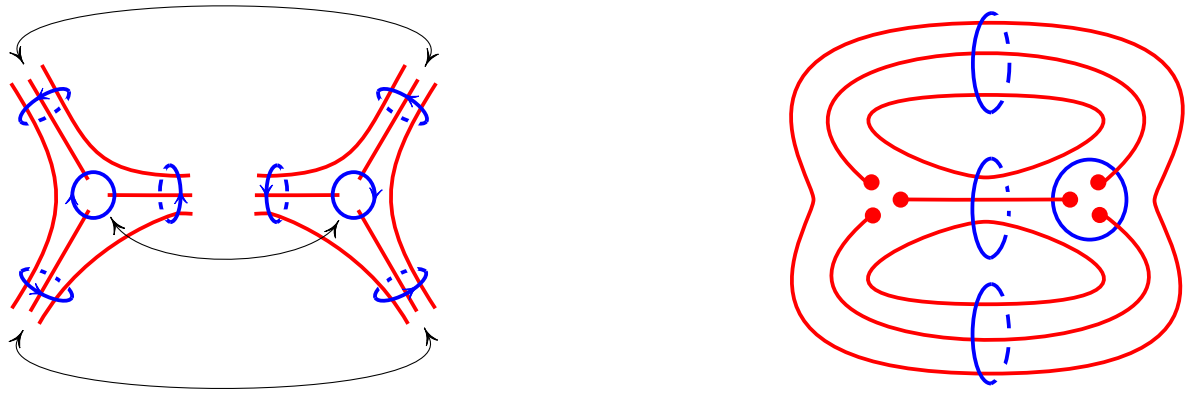


Figura 2.23: em **(a)** a regra de colagem dos diagramas e em **(b)** o diagrama simplificado de Heegaard de uma esfera S^3.

◇◇◇

Agora que já definimos os diagramas de Heegaard e desenvolvemos algumas ferramentas para lidar com esses diagramas, vamos definir as teorias de gauge sobre os diagramas. Na verdade a teoria de gague que iremos definir sobre os diagramas é a mesma que já definimos para redes usuais, tudo o que precisamos fazer é traduzir tudo o que foi feito na rede para a linguagem de diagramas. A maneira como faremos isso é indireta. Começaremos definindo o formalismo de Kuperberg conforme definido em [4], em seguida definiremos uma função de partição para tal modelo, a qual mostraremos ser equivalente à função de partição das teorias de gauge num caso particular. Isto é, o formalismo de Kuperberg é mais geral que o modelo das teorias de gauge na rede e num caso particular pode ser interpretado como sendo equivalente ao modelo das teorias de gauge. É importante frisar que o formalismo definido em [4] não tinha como objetivo estudar as teorias de gauge e sim teorias topológicas. Originalmente, o modelo desenvolvido em [4], o qual aqui chamamos de formalismo de Kuperberg, tinha por obtivo o estudo de invariantes topológicos e não de teorias de gauge.

2.4 O Formalismo de Kuperberg

Nesta seção não usaremos a notação tensorial usual e sim os diagramas de Kuperberg, conforme definidos no apêndice B. Ao leitor que não é familiar com os diagramas de Kuperberg recomendamos a leitura do apêndice B antes de prosseguir com a leitura desta seção.

As teorias de campos em duas e três dimensões são definidas em [7] e [1], respectivamente, além disso, nestas referências, encontram-se uma prova da invariância topológica de tais modelos sobre certas circunstâncias, mas aqui usaremos a definição dada em [4] a qual não é tão intuitiva mas é bastante conveniente para os propósitos deste trabalho, de definir as teorias de gauge sobre os diagramas de Heegaard e não sobre triangulações.

O formalismo de Kuperberg consiste basicamente em atribuirmos pesos locais associados às curvas azuis e vermelhas de um diagrama de Heegaard, isso por si só é equivalente a atribuirmos pesos às faces e aos links de uma triangulação, pois, conforme discutimos na seção anterior, cada curva azul do diagrama de Heegaard corresponde a uma face da triangulação e cada curva vermelha corresponde a um link da mesma. O ingrediente básico para definir pesos associados ao diagrama é uma álgebra e co-álgebra $\langle \mathcal{A}, m, \Delta \rangle$ a qual deve ser (co-)associativa e (co-)semi-simples, sendo os mapas m, Δ os respectivos mapas de multiplicação e co-multiplicação (ver apêndice B). A escolha de diferentes $\langle \mathcal{A}, m, \Delta \rangle$ implica em modelos diferentes.

2.4.1 Os Tensores $M_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \cdots b_k}$

Considere $\langle \mathcal{A}, m, \Delta \rangle$ uma (co-)álgebra, (co-)associativa e (co-)semi-simples e considere uma diagrama de Heegaard $\mathcal{D}$. O primeiro passo para definimos pesos locais associados às curvas do diagrama é definirmos os tensores $M_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \cdots b_k}$. Para isso considere $\{\varphi_i\}$ uma base do espaço vetorial $\mathcal{A}$ e considere $\{\varphi^i\}$ uma base do espaço dual $\mathcal{A}^*$. Definimos então o tensor $M_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ da seguinte maneira

$$M_{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} = tr\left(\varphi_{a_1} \varphi_{a_2} \varphi_{a_3} \cdots \varphi_{a_n}\right),$$

sendo o traço tomado na representação regular (apêndice B).

Visto que o traço é uma transformação linear o tensor $M_{a_1a_2a_3\cdots a_n}$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} M_{a_1a_2a_3\cdots a_n} &= tr\left(\varphi_{a_1}\varphi_{a_2}\varphi_{a_3}\cdots\varphi_{a_n}\right) \\ &= m^{k_1}_{a_1a_2}tr\left(\varphi_{k_1}\varphi_{a_3}\cdots\varphi_{a_n}\right) \\ &= m^{k_1}_{a_1a_2}m^{k_2}_{k_1a_3}tr\left(\varphi_{k_2}\varphi_{a_4}\cdots\varphi_{a_n}\right) \\ &\vdots \\ &= m^{k_1}_{a_1a_2}m^{k_2}_{k_1a_3}m^{k_3}_{k_2a_4}\cdots m^{k_{n-1}}_{k_{n-2}a_n}tr\left(\varphi_{k-1}\right)\ , \end{aligned}$$

onde estamos usando a notação de índices repetidos de Einstein. Conforme pode ser visto no apêndice B o traço na representação regular é dado por $tr\left(\varphi_a\right) = m^i_{ai}$, portanto obtemos

$$M_{a_1a_2a_3\cdots a_n} = m^{k_1}_{a_1a_2}m^{k_2}_{k_1a_3}m^{k_3}_{k_2a_4}\cdots m^{k_{n-1}}_{k_{n-2}a_n}m^{k_n}_{k_{n-1}k_n}.$$

Em termos de diagramas de Kuperberg o tensor $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ é o desenhado na figura 2.24 **(a)**.

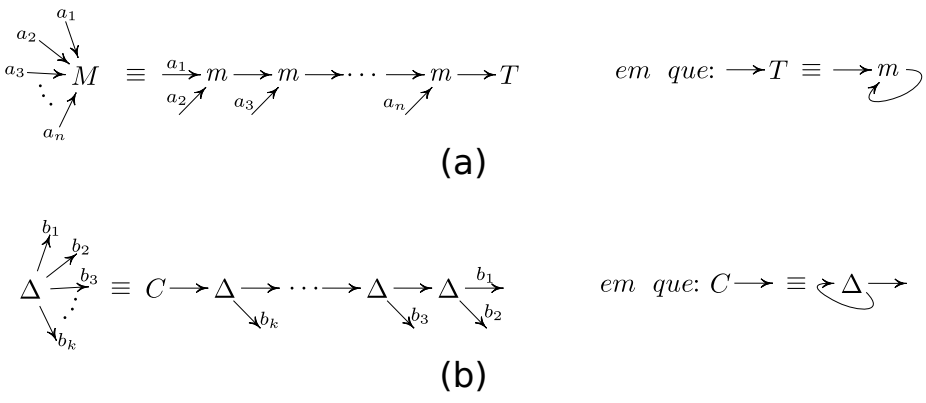


Figura 2.24: em **(a)** tensor $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ e em **(b)** o tensor $\Delta^{b_1b_2\cdots b_k}$.

Podemos ainda usar o fato da álgebra ser associativa e assim obtemos que o tensor $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ pode ser representado como mostrado na figura 2.25 **(a)**, o que deixa clara a invariância do tensor $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ por permutações cíclicas de seus índices.

Analogamente definimos o tensor $\Delta^{b_1b_2b_3\cdots b_k}$ da mesma forma como foi definido o tensor $M_{a_1a_2a_3\cdots a_n}$. Na figura 2.24 **(b)** temos a definição do tensor em termos das constantes de estrutura da co-multiplicação, e o fato de que a co-álgebra é co-associativa permite-nos escrever tal tensor como mostrado na figura 2.25 **(b)**, o que também deixa clara a invariância do tensor $\Delta^{b_1b_2\cdots b_k}$ por permutações cíclicas de seus índices.

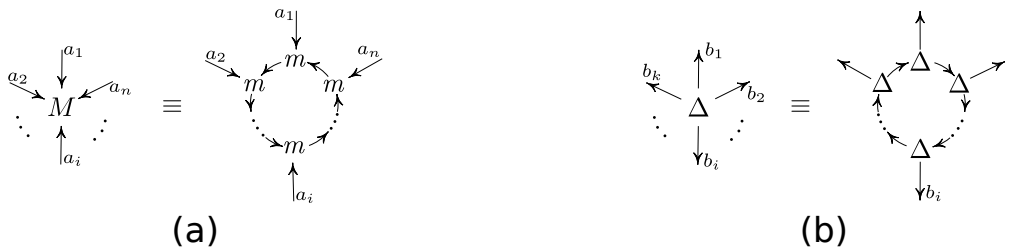


Figura 2.25: em **(a)** tensor $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ e em **(b)** o tensor $\Delta^{b_1b_2\cdots b_k}$ para uma álgebra e co-álgebra associativa e co-associativa.

2.4.2 Atribuição de Pesos às Curvas do Diagrama

Definidos os tensores $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ e $\Delta^{b_1b_2\cdots b_k}$, vamos agora definir como estes estão associados às curvas do diagrama, mas antes, assim como nas teorias de gauge na rede, precisamos que todas as curvas do diagrama estejam orientadas, embora a teoria não possa depender destas orientações. Enfim, considere que todas as curvas estão orientadas e considere uma transformação linear $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, a qual satisfaz a propriedade $S^2 \equiv I_d$, sendo I_d o mapa identidade do espaço vetorial $\mathcal{A}$. Esta transformação desempenhará o papel de inversão de orientação das curvas do diagrama.

Associe a cada curva azul do diagrama um tensor $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ em que os n índices a_1, a_2, ..., a_n representam n intersecções com curvas vermelhas. O fato de $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ ser cíclico significa que não importa qual curva vermelha cruza a curva azul primeiro e sim a ordem em que os cruzamentos ocorrem. Associe um tensor $\Delta^{b_1b_2\cdots b_k}$ para cada curva vermelha do diagrama, onde os k índices b_1, b_2, ..., b_k representam k intersecções com curvas azuis. Cada cruzamento entre uma curva vermelha e uma curva azul corresponde a uma contração entre os tensores correspondentes a cada uma das curvas, contrações essas que são feitas diretamente ou por meio do mapa linear S. A convenção que usaremos é a seguinte: no ponto de cruzamento entre as curvas considere um vetor $\vec{s_a}$ tangente à curva azul (e no mesmo sentido de orientação) e um vetor $\vec{s_v}$ tangente à curva vermelha (também no mesmo sentido de orientação). Se o produto vetorial $\vec{s_a} \times \vec{s_v}$ é paralelo ao vetor normal $\hat{n}$ da superfície $\partial\mathcal{H}$, então a contração é feita diretamente como mostrado na figura 2.26 **(a)**, mas se o produto vetorial é antiparalelo ao vetor normal, a contração deve ser feita indiretamente pelo mapa linear S, como mostrado na figura 2.26 **(b)**. Na figura 2.26 **(c)** temos um exemplo de como deve ser feita a contração dos tensores de

acordo com os cruzamentos das curvas.

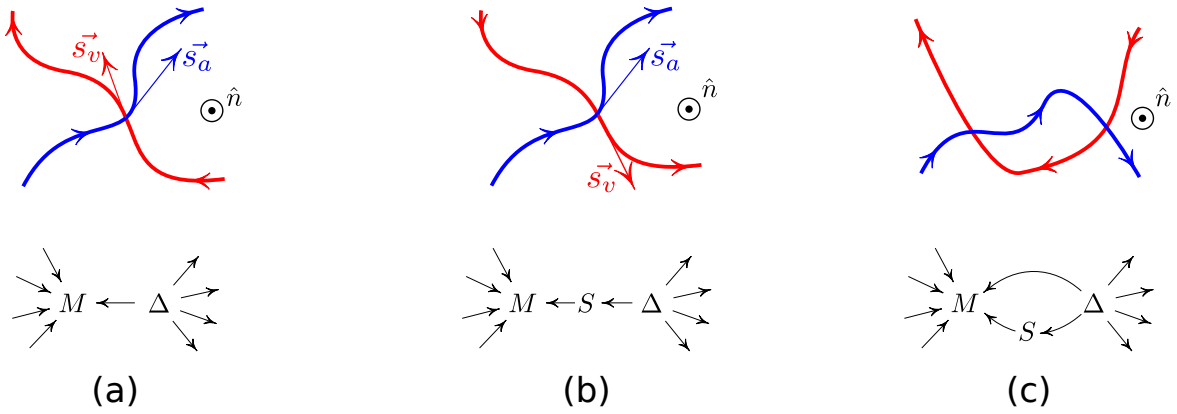


Figura 2.26: econvenção de como deve ser feiro a contração entre os tensores $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ e $\Delta^{b_1b_2\cdots b_k}$.

Os tensores $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ e $\Delta^{b_1b_2\cdots b_k}$ são os pesos atribuídos às curvas azuis e às curvas vermelhas, respectivamente, mas em termos de triangulação isto equivale a atribuir um tensor $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ às faces e um tensor $\Delta^{b_1b_2\cdots b_k}$ aos links da triangulação. Observe que no caso específico em que a rede é uma triangulação não haverá curvas azuis que cruzam mais que três curvas vermelhas. Já as curvas vermelhas podem cortar um número arbitrário de curvas azuis. Portanto os tensores $M_{a_1a_2\cdots a_n}$ possuem apenas três componentes, ou seja, são do tipo M_{abc} (veja a figura 2.27).

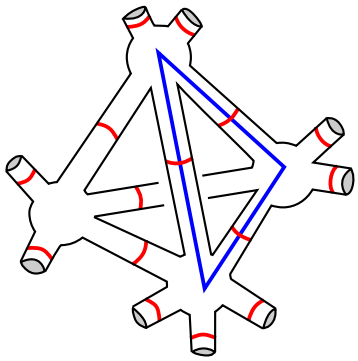


Figura 2.27: cada face (curva azul) do triangulação cruza exatamente três links (curvas vermelhas).

2.4.3 Função de Partição do Formalismo de Kuperberg

A função de partição Z do modelo é definida como sendo o produto dos pesos de todas as faces e todos os links com as devidas contrações, isto é, contraídos com S se necessário. Além do mais Z é uma soma sobre todas as possíveis configurações. Note que a função de partição deve, em princípio, depender da variedade $\mathcal{M}$ e da triangulação $\mathcal{L}$, além, é claro, da escolha de m , Δ e S, portanto escrevemos:

$$Z(\mathcal{M},\mathcal{L}) = \sum_{conf}\prod_{f}\prod_{l}\prod_{o} M_{abc}(f)\ \Delta^{b_1 b_2 \cdots b_k}(l)\ S_x^y(o). \tag{2.5}$$

O produtório sobre f e l significa um produtório sobre todas as faces e links, respectivamente e o produtório sobre o significa um produtório sobre todos cruzamentos que possuem orientação diferente do vetor normal da superfície $\partial\mathcal{M}$. Nas teorias de gauge puras na rede existem pesos associados somente às faces da triangulação e não aos links, enquanto que no formalismo de Kuperberg existem pesos associados às faces e aos links, logo o formalismo de Kuperberg é bem mais geral que as teorias de gauge na rede. No entanto, embora essas duas teoria sejam distintas, é possível tratar de um caso particular do formalismo de Kuperberg em que este fica equivalente ao modelo das teorias de gauge na rede. A seguir mostraremos como isso pode ser feito.

2.5 Teorias de Gauge Puras Sobre Diagramas de Heegaard

Considere um grupo finito e discreto G. Considere uma (co-)álgebra, (co-)associativa e (co-)semi-simples $\langle \mathcal{A}, m, \Delta\rangle$ cuja base do espaço vetorial $\mathcal{A}$ seja indexada pelos elementos do grupo, isto é, $\{\varphi_g\}$ com $g \in G$. Tanto nas teorias de gauge na rede quanto no formalismo de Kuperberg existem pesos associados às faces (curvas azuis) e isso é um forte indício de que, num caso particular da teoria de Kuperberg essa posso ser equivalente à teoria de gauge na rede.

A função de partição das teorias de gauge, conforme discutido anteriormente, é dada por

$$Z = \sum_{conf}\prod_{f\in\mathcal{F}} M(f), \tag{2.6}$$

sendo $M(f) = e^{-\beta\left(f(U)+f\left(U^{-1}\right)\right)}$ o peso associado a cada face da triangulação. Com isso

podemos notar que a função de partição das teorias de gauge é semelhante à função de partição do formalismo de Kuperberg.

Numa teoria de gauge na rede, as variáveis são os elementos $g \in G$ que vivem nos links, e cada link possui uma orientação, mas se trocarmos a orientação de um determinado link devemos trocar g por g^{-1}. Isso significa que uma inversão de orientação equivale a uma troca de g por g^{-1}, conforme já discutimos. No caso dos diagramas, se invertermos a orientação de uma curva vermelha (um link) devemos fazer a contração entre os tensores $M_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \cdots b_k}$ indiretamente com o mapa S, portanto podemos pensar que o mapa S é a transformação que faz a troca de g por g^{-1}, e então definimos o mapa S por

$$S_x^y = \delta_x^{y^{-1}}. \tag{2.7}$$

O produtório sobre links pode ser eliminado se considerarmos o tensor de $\Delta^{a_1 a_2 \cdots a_k}$ da seguinte maneira

$$\Delta^{b_1 b_2 \cdots b_k} = \delta_{b_1}^{b_2} \delta_{b_1}^{b_3} \cdots \delta_{b_1}^{b_k}. \tag{2.8}$$

Sendo assim a função de partição do formalismo de Kuperberg, definida em (2.5), fica

$$Z = \sum_{conf} \prod_{f} M_{abc}(f) \prod_{o} \delta_x^{y^{-1}}(o),$$

e portanto igual à função de partição do modelo das teorias de gauge puras na rede.

Resumindo, dado $\langle \mathcal{A}, m, \Delta, S \rangle$ e um diagrama de Heegaard definimos uma teoria sobre tais diagramas, que é o formalismo de Kuperberg. No entanto, no caso particular em que $M_{a_1 a_2 \cdots a_n} = M(a_1 a_2 \cdots a_n)$[3], $\Delta^{b_1 b_2 \cdots b_k} = \delta_{b_1}^{b_2} \delta_{b_1}^{b_3} \cdots \delta_{b_1}^{b_k}$ e $S_x^y = \delta_x^{y^{-1}}$ o formalismo de Kuperberg é equivalente ao modelo das teorias de gauge na rede. Os tensores $M_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ e $\Delta^{b_1 b_2 \cdots b_k}$ são construídos a partir das constantes de estrutura da álgebra, como mostrado na figura 2.25, a questão que surge é: quais devem ser $\langle \mathcal{A}, m, \Delta \rangle$ tais que os tensores M_{abc} e $\Delta^{b_1 b_2 \cdots b_k}$ satisfaçam as condições acima? Ou, em outras palavras, qual é a solução do sistema de equações (não lineares) abaixo?

$$M(a_1 a_2 \cdots a_n) = m_{a_1 a_2}^i m_{i a_3}^j \cdots m_{ik}^k \tag{2.9}$$

$$\delta_{b_1}^{b_2} \delta_{b_1}^{b_3} \cdots \delta_{b_1}^{b_k} = \Delta_{i_1}^{b_1 i_k} \Delta_{i_2}^{b_2 i_1} \cdots \Delta_{i_k}^{b_k i_{k-1}} \tag{2.10}$$

As constantes de estrutura da álgebra (m_{xy}^z e Δ_a^{bc}) possuem três índices, os quais assumem valores no grupo G, ou seja, cada índice pode assumir $|G|$ valores distintos e

[3]quando o tensor M_{abc} for uma função do produto abc.

consequentemente existem $|G|^3$ constantes de estrutura de (co-)multiplicação. Portanto, o sistema (2.9) é um sistema cúbico de equações e possui $|G|^3$ variáveis, enquanto que o sistema (2.10) é um sistema de ordem k e possui $|G|^3$ variáveis. Embora o sistema (2.10) seja de ordem superior ao do sistema (2.9), este é mais fácil de resolver. Uma solução para este sistema é considerarmos

$$\Delta_x^{yz} = \delta_x^y \delta_x^z,$$

e vê-se facilmente que a escolha Δ_x^{yz} satisfaz o sistema de equações (2.10). Já o sistema (2.9) pode ser resolvido, mas não é tão simples quanto o sistema (2.10). Uma maneira de resolvê-lo é usar a técnica da expansão em caracteres, a qual é discutida em detalhe no apêndice C. Por conveniência vamos tratar do sistema (2.9) no capítulo 4, após provarmos a invariância topológica da função de partição para o caso particular $M_{abc} = M(abc) = tr\,(abc) = \delta\,(abc, e)$.

Um fato importante é que, na verdade, como os pesos das faces são funções do parâmetro β, então as constantes de estrutura também serão. Sendo assim, tais constantes de estrutura não determinam uma única álgebra e sim uma álgebra para cada possível valor de β, ou seja, uma família infinita a um parâmetro de álgebras.

A escolha do mapa S e do mapa Δ faz com que a teoria Kuperberg definida sobre os Diagramas de Heegaard seja equivalente às teorias de gauge na rede e com isso somos capazes de definir uma teoria de campo discreta sobre qualquer variedade tridimensional.

No capítulo seguinte vamos mostrar que quando a álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Hopf, então a teoria torna-se quase topológica. Em uma teoria topológica, por definição, a função de partição não depende da triangulação da variedade. Na verdade existe uma infinidade de triangulações da mesma variedade e, se a teoria for topológica, podemos calcular a função de partição em qualquer uma delas obtendo o mesmo resultado. Neste trabalho estamos interessados em teoria chamadas *quase topológicas*, definidas em [6] que são um pouco mais gerais que teorias topológicas. Teorias quase topológicas são teorias em que a função de partição depende da triangulação da variedade mas de uma forma trivial, que possa ser calculada facilmente. Um exemplo de teoria quase topológica é a teoria de gauge com grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$ e ação spin gauge, a qual é topológica no limite de baixas temperaturas [5]. Como será mostrado no próximo capítulo, quando a álgebra $\mathcal{A}$ for uma álgebra de Hopf a função de partição definida acima pode ser escrita como uma parte que depende somente da topologia $Z_{TOP}(\mathcal{M})$ multiplicado por uma parte que

depende trivialmente da triangulação, que como será visto dependerá somente do número de faces, tetraedros e links da triangulação. Uma característica das teorias de campos topológicas é que, como estas não dependem, ou dependem trivialmente, da triangulação, podemos escolher a triangulação mais simples possível e calcular a função de partição nesta triangulação. A função de partição, para as demais figuras, são facilmente calculadas.

Capítulo 3

Teorias de Campos Topológicas, Quase Topológicas e Prova da Invariância Topológica

Em [4] é apresentada uma prova da invariância topológica da função definida abaixo

$$\sharp(\mathcal{D},\mathcal{A}) = Z(\mathcal{A})\,(dim\ \mathcal{A})^{g-n_a-n_v}\,,$$

sendo $Z(\mathcal{A})$ a função que definimos, para $M_{abc} = \delta(abc, e)$, como sendo a função de partição, $\mathcal{A}$ uma álgebra de Hopf involutória e $\mathcal{D}$ um diagrama de Heegaard de alguma variedade tridimensional. Os parâmetros g, n_a e n_v são o gênero do diagrama de Heegaard, o número de curvas azuis e vermelhas, respectivamente. A prova apresentada por Kuperberg é mais geral que a que apresentaremos aqui, mas com a desvantagem de ser de difícil entendimento. Neste capítulo, apresentaremos uma prova alternativa para a invariância topológica da função de partição para diagramas de Heegaard que são provenientes de triangulações (necessariamente), diferente da apresentada em [4] que é válida para qualquer diagrama de Heegaard.

A técnica que utilizaremos para a prova da invariância topológica da função de partição é mais simples que a de Kuperberg, pois baseia-se simplesmente em alguns resultados de topologia combinatória em três dimensões e algumas identidades de álgebras de Hopf, as quais encontram-se no apêndice B.

3.1 Teorias Topológicas e Quase Topológicas

Conforme visto no final do capítulo anterior a função de partição do formalismo de Kuperberg foi definida por

$$Z(\mathcal{M},\mathcal{L}) = \sum_{conf} \prod_{f} \prod_{l} \prod_{o} M_{abc}(f)\ \Delta^{b_1 b_2 \cdots b_k}(l)\ S_x^y(o)\ , \tag{3.1}$$

sendo $\mathcal{M}$ uma variedade tridimensional orientada e sem fronteira e $\mathcal{L}$ uma triangulação da mesma. Dizer que uma teoria é topológica significa dizer que esta depende somente da topologia da variedade tridimensional $\mathcal{M}$ e portanto independe da triangulação. Em outras palavras, se a teoria é topológica então a função de partição é do tipo $Z^{TOP} = Z(\mathcal{M})$ e sendo assim, podemos considerar a triangulação mais simples possível de $\mathcal{M}$ e calcular a função de partição nesta triangulação.

Neste trabalho estamos interessados em teorias que são chamadas de *quase topológicas*, as quais são um pouco mais gerais que as teorias topológicas, conforme definidas em [6]. Teorias quase topológicas são teorias em que a função de partição depende da topologia da variedade $\mathcal{M}$ e também da triangulação, mas de uma forma específica, dependendo apenas do número de tetraedros, faces e links, ou seja, os detalhes da triangulação não são relevantes. No caso quase topológico, conforme veremos, a função de partição pode ser escrita como uma parte que é topológica multiplicada por uma parte que depende trivialmente da triangulação, isto é, $Z^{QTOP} = Z^{TOP}(\mathcal{M}) f(n_T, n_F, n_L)$, sendo n_T, n_F e n_L os números de tetraedros, faces e links, respectivamente e $f(n_T, n_F, n_L)$ uma função que depende destes parâmetros. Por exemplo, considere uma variedade tridimensional $\mathcal{M}$ e duas triangulações distintas da mesma, $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, considerando ainda que a álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Hopf. Se calcularmos a função de partição na triangulação $\mathcal{L}_1$ teremos: $Z_1^{QTOP} = Z^{TOP}(\mathcal{M}) f(n_{T1}, n_{F1}, n_{L1})$, enquanto que na triangulação $\mathcal{L}_2$ teremos: $Z_2^{QTOP} = Z^{TOP}(\mathcal{M}) f(n_{T2}, n_{F2}, n_{L2})$. Note que a parte que depende da topologia ($Z^{TOP}(\mathcal{M})$) é a mesma em ambas as triangulações e a dependência da triangulação é um fator de escala, que depende dos números de tetraedros, faces e links. Então a função de partição quase topológica pode ser calculada para qualquer triangulação. Suponha que $\mathcal{L}_1$ seja uma triangulação com pouquíssimos triângulos, então

$$Z^{TOP}(\mathcal{M}) = \frac{Z_1^{QTOP}(\mathcal{M},\mathcal{L}_1)}{f(n_{T_1}, n_{F_1}, n_{L_1})},$$

e para uma triangulação $\mathcal{L}_2$, formada por um número arbitrário de triângulos, temos

$$\begin{aligned} Z_2^{QTOP}(\mathcal{M}, \mathcal{L}_2) &= Z^{TOP}(\mathcal{M}) f(n_{T_2}, n_{F_2}, n_{L_2}) \\ &= \frac{f(n_{T_2}, n_{F_2}, n_{L_2})}{f(n_{T_1}, n_{F_1}, n_{L_1})} Z_1^{QTOP}(\mathcal{M}, \mathcal{L}_1). \end{aligned}$$

Para estudar a invariância topológica de um modelo precisamos, antes de mais nada, responder à seguinte pergunta: dados duas triangulações como decidir se elas são triangulações da mesma variedade? A resposta para esta pergunta é que, se for possível transformar uma triangulação em outra, usando-se uma sequência de transformações chamadas de passos de Pachner, então estas triangulações serão equivalentes [14].

3.2 Triangulações Topologicamente Equivalentes

Dizemos que duas triangulações são topologicamente equivalentes se estas são triangulações de variedades homeomorfas, isto é, uma triangulação $\mathcal{L}_1$ é equivalente a uma triangulação $\mathcal{L}_2$ se as variedades obtidas destas triangulações são homeomorfas, ou seja, $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$. Dadas duas triangulações quaisquer devemos ser capazes de dizer se estas são equivalentes ou não. Certamente existem algumas transformações locais que podemos aplicar em uma triangulação de tal forma que a variedade obtida seja a mesma (homeomorfa à anterior). Dizemos nesse caso que a topologia é invariante por tal transformação, a qual chamamos de passo (em inglês, *move*). Um passo é uma transformação que quando aplicada a uma triangulação leva a uma nova triangulação, a qual é equivalente à primeira. Essa definição é muito simples, se aplicamos uma transformação em uma rede e o resultado for uma rede topologicamente equivalente à original, então tal transformação é um passo, por definição. Um resultado de topologia, que está longe de ser trivial, é que se duas triangulações são equivalentes, então existe um passo, ou uma sequência de passos, que transforma uma na outra [14], conforme teorema que será enunciado a seguir.

Mostrar que a função de partição é topológica equivale a mostrar que esta é invariante pela ação de passos que conectam duas triangulações equivalentes quaisquer, no entanto há uma infinidade de passos que deixam uma triangulação topologicamente invariante e, a princípio, não há como mostrar a invariância da função de partição para todos eles. Felizmente existe um teorema que garante que todo e qualquer passo de triangulações pode ser escrito como uma composição de quatro passos fundamentais chamados passos

de Pachner (em inglês, *Pachner's moves*).

Teorema 3.1 *Sejam T_1 e T_2 duas triangulações de variedades tridimensionais, então T_1 é topologicamente equivalente à T_2 se, e somente se, existir uma sequencia de passos de Pachner que conecta T_1 à T_2.*

Os passos de Pachner (em três dimensões) são quatro passos fundamentais, a partir dos quais pode-se gerar qualquer outro passo local de triangulações. Tais passos de Pachner são os seguintes: o primeiro deles é o passo $(1, 4, 6) \rightarrow (4, 10, 10)$, em que a 3-upla ordenada (n_T, n_F, n_L) representa os números de tetraedros, faces e links, nesta ordem. Portanto o passo $(1, 4, 6) \rightarrow (4, 10, 10)$ significa uma transformação em que substituímos um tetraedro (com quatro faces e seis links) em quatro tetraedros (com dez faces e dez links). A transformação inversa, isto é, o passo $(4, 10, 10) \rightarrow (1, 4, 6)$, também é um passo de Pachner. O segundo passo é o $(2, 7, 9) \rightarrow (3, 9, 10)$ em que dois tetraedros (com sete faces e nove links) são substituídos por três tetraedros (com nove faces e dez links), conforme será discutido abaixo. O passo inverso $(3, 9, 10) \rightarrow (2, 7, 9)$ também é um passo de Pachner. Dizemos, de forma resumida, que os passos de Pachner são: $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$ e $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$. Esses passos são locais, uma vez que são transformações realizadas em um único tetraedro ou a uma pequena coleção de tetraedros.

A seguir vamos discutir detalhadamente cada um dos passos de Pachner.

3.2.1 Passo $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$

Considere um tetraedro amostral de uma triangulação $\mathcal{L}$, como mostrado na figura 3.1 **(a)**. O passo $(1, 4, 6) \rightarrow (4, 10, 10)$ consiste em subdividirmos este tetraedro por outros quatro tetraedros da seguinte forma: considere um ponto P no centro do tetraedro e em seguida ligue todos os vértices deste tetraedro com P por meio de links, como mostrado na figura 3.1 **(b)**. O resultado são quatro novos tetraedros colados por suas faces, cada um deles com três faces coladas aos outros três. O número de tetraedros aumenta em três unidades, o número de faces em seis e o número de links em quatro.

Na figura 3.2 todos os tetraedros da figura 3.1 estão evidenciados.

Como já dito antes, os passos de Pachner são inversíveis, portanto $(1, 4, 6) \leftarrow (4, 10, 10)$ também é um passo de Pachner, isto é, quatro tetraedros colados como na figura 3.1 **(b)** podem ser trocados por um único tetraedro (3.1 **(a)**). Representamos o passo $(1, 4, 6) \leftrightarrow$

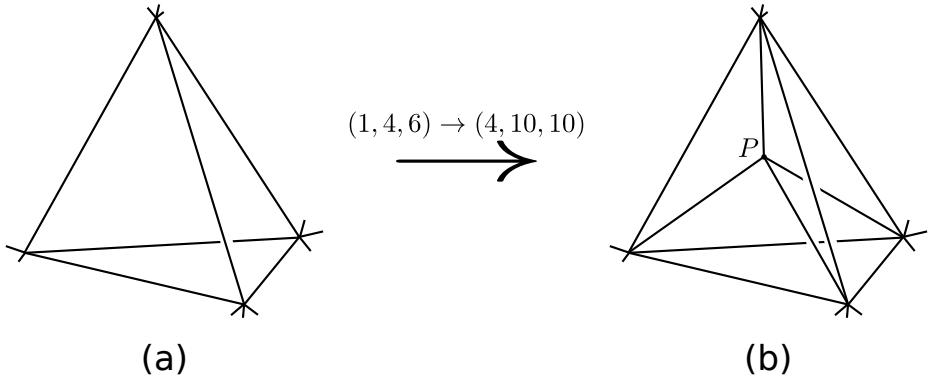


Figura 3.1: passo $(1, 4, 6) \rightarrow (4, 10, 10)$.

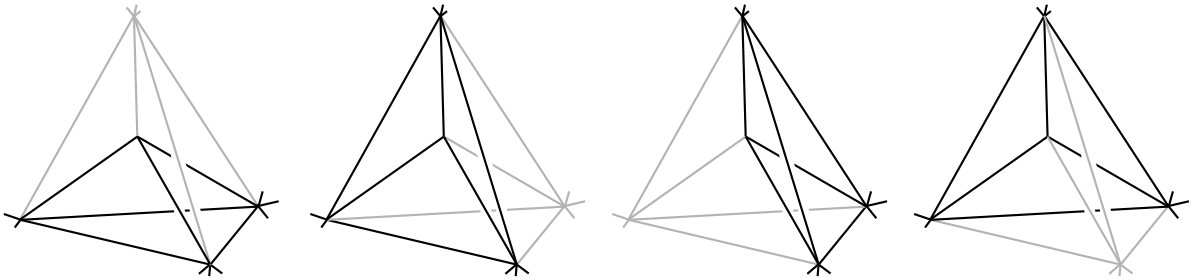


Figura 3.2: tetraedros em evidência em $(4, 10, 10)$.

$(4, 10, 10)$ como mostrado na figura 3.3.

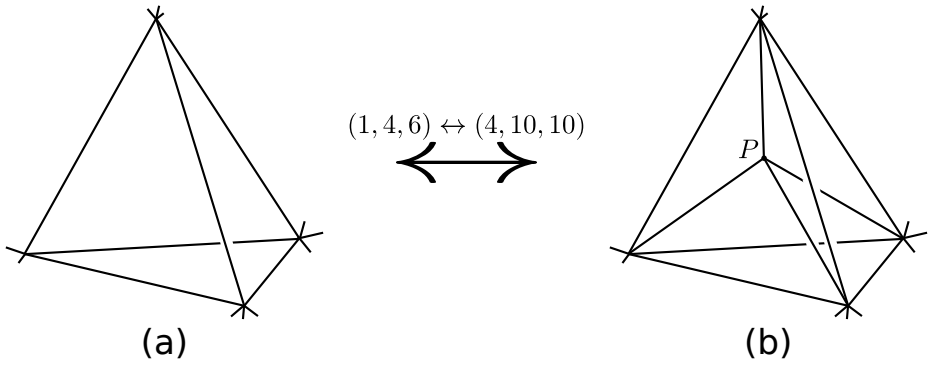


Figura 3.3: passo $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$.

3.2.2 Passo $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$

Quando dois tetraedros compartilham uma face, podemos aplicar o passo $(2, 7, 9) \rightarrow (3, 9, 10)$ de forma a obtermos três tetraedros. Considere dois tetraedros compartilhando

uma face (figura 3.4 **(a)**) e trace um link que liga os dois vértices que não pertencem à face comum. O três tetraedros obtidos são aqueles mostrados na figura 3.4 **(b)**. Note que o número de tetraedros aumenta em uma unidade, o número de faces em duas unidades e o número de links em uma unidade. A face que em $(2, 7, 9)$ era comum aos dois tetraedros não existe mais em $(3, 9, 10)$.

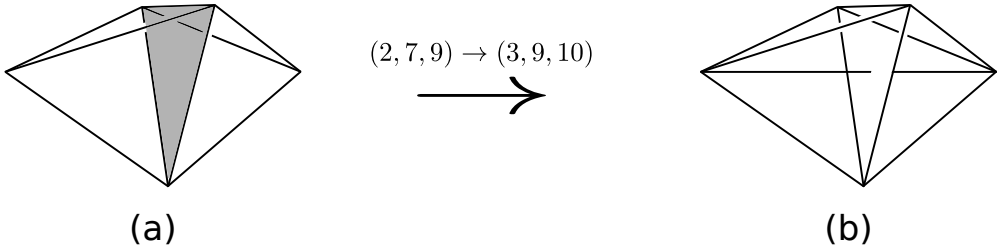


Figura 3.4: passo $(2, 7, 9) \rightarrow (3, 9, 10)$. Em **(a)** a face compartilhada pelos dois tetraedros é a face em destaque na figura.

Os tetraedros obtidos no passo $(2, 7, 9) \rightarrow (3, 9, 10)$ estão evidenciados na figura 3.5.

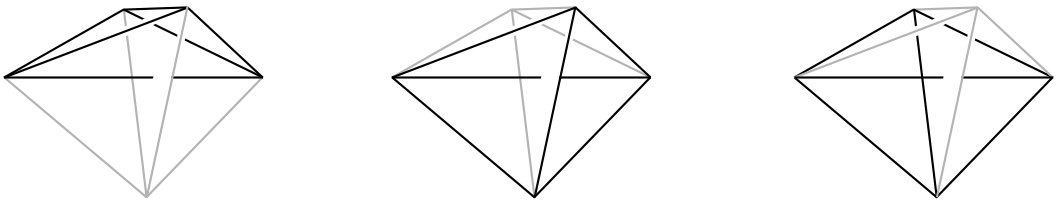


Figura 3.5: tetraedros em evidência em $(3, 9, 10)$.

O passo inverso $(2, 7, 9) \leftarrow (3, 9, 10)$ também é um passo de Pachner, portanto representamos o passo $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$ como mostrado na figura 3.6.

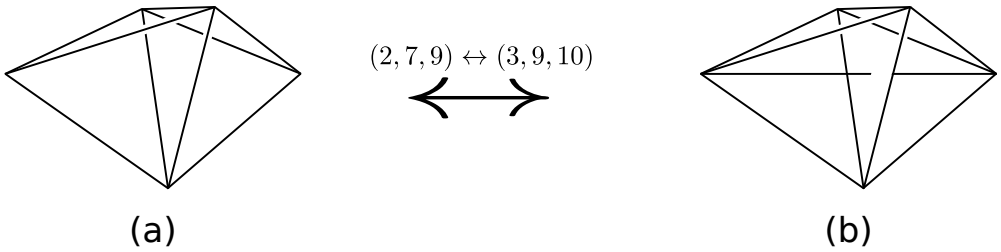


Figura 3.6: passo $(2, 7, 9) \leftrightarrow (3, 9, 10)$.

3.3 Ação dos Passos de Pachner nos Diagramas Simplificados de Heegaard

Nesta seção vamos definir a ação dos passos de Pachner sobre os diagramas simplificados de Heegaard, mas antes vamos desenhar o diagrama correspondente a cada uma das configurações: $(1, 4, 6)$, $(4, 10, 10)$, $(2, 7, 9)$ e $(3, 9, 10)$. Começando por $(1, 4, 6)$ que é formada por um único tetraedro.

3.3.1 Diagrama da Configuração $(1, 4, 6)$

Na figura 3.7 **(a)** os links estão enumerados para simples efeito de identificação. Cada um dos links, enumerados com números de 1 à 6, corresponde a uma curva vermelha no diagrama. Para as faces usaremos a seguinte notação: à face cujos links de sua fronteira sejam os de números a, b e c damos o nome de face $F[a, b, c]$, nesta ordem. As faces são orientadas no sentido do vetor normal a cada face e apontando para fora do tetraedro, sendo assim, a face $F[a, b, c]$ tem orientação contrária da face $F[a, c, b]$, e vale também lembrar que $F[a, b, c] = F[b, c, a] = F[c, a, b]$. Usamos a regra da mão direita para percorrer os links. No tetraedro da figura 3.7 **(a)** as faces são: $A[1, 2, 3]$, $B[1, 6, 4]$, $C[4, 5, 2]$ e $D[6, 3, 5]$, e cada uma delas corresponde a uma curva azul no diagrama, as quais interceptam as curvas vermelhas referentes aos links de sua fronteira na ordem em que os links são percorridos. Com isso em mente desenhamos o diagrama correspondente à $(1, 4, 6)$ na figura 3.7 **(b)** e o diagrama simplificado em **(c)**.

Os diagramas correspondentes às outras configurações $(4, 10, 10)$, $(2, 7, 9)$, $(3, 9, 10)$ são, na verdade, colagens de diagramas simples, como os da figura 3.7 **(b)** e **(c)**, conforme discutimos no capítulo anterior. É importante ter em mente que só podemos colar tetraedros por suas faces se estas possuem orientações opostas.

3.3.2 Diagrama da Configuração $(4, 10, 10)$

Vejamos como é o diagrama da configuração $(4, 10, 10)$. Na figura 3.8 **(a)**, analogamente ao que foi feito feito anteriormente, enumeramos os links somente para efeito de

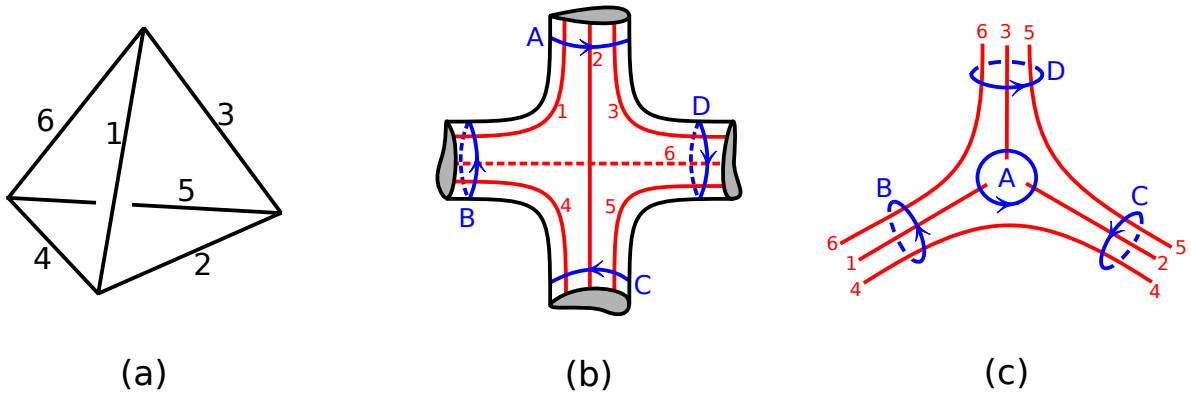


Figura 3.7: em **(a)** um tetraedro e em **(b)** e **(c)** seu correspondente diagrama e diagrama simplificado, respectivamente.

identificação. Enxergar como é o diagrama correspondente à $(4, 10, 10)$ não é tão simples, mas sabemos que este é formado por vários diagramas simples colados, portanto vamos desenhar cada um dos tetraedros separadamente e depois fazemos as colagens. Na figura 3.8 **(b)** temos quatro tetraedros T_1, T_2, T_3 e T_4, que são cada um dos tetraedros de **(a)** desenhados separadamente.

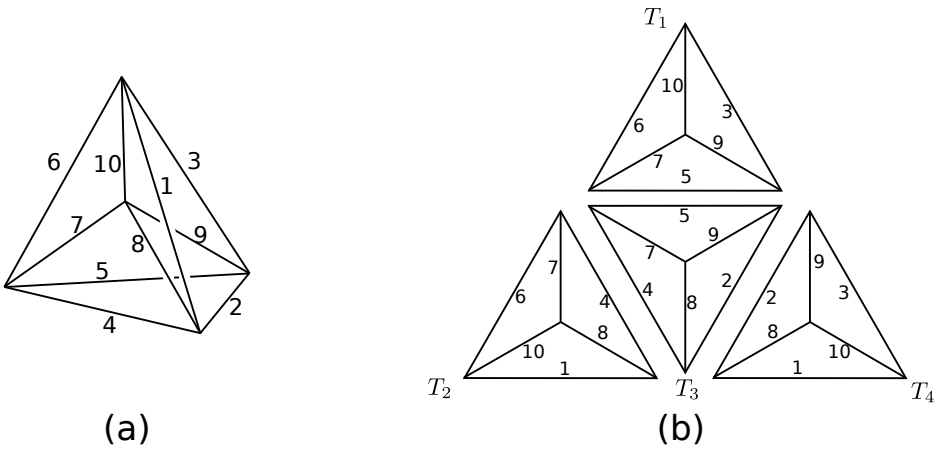


Figura 3.8: em **(a)** a configuração $(4, 10, 10)$ e em **(b)** cada um dos tetraedros desenhados separadamente.

As faces dos tetraedros desenhados na figura 3.8 são as seguintes, para o tetraedro T_1: $D[6, 3, 5]$, $E[5, 9, 7]$, $H[7, 10, 6]$ e $J^{-1}[9, 3, 10]$. Para T_2: $B[1, 6, 4]$, $I[1, 8, 10]$, $F[4, 7, 8]$ e $H^{-1}[10, 7, 6]$. Para T_3: $C[4, 5, 2]$, $F^{-1}[7, 4, 8]$, $G[2, 9, 8]$ e $E^{-1}[9, 5, 7]$. Finalmente para T_4: $A[1, 2, 3]$, $I^{-1}[8, 1, 10]$, $J[3, 9, 10]$ e $G^{-1}[9, 2, 8]$. Sendo que X^{-1} significa a face X com a orientação contrária, ou seja, se $X[a, b, c]$, então $X^{-1}[b, a, c]$.

Usamos a figura 3.8 **(b)** como uma receita de como colar os diagramas simples e obter o diagrama da configuração $(4, 10, 10)$, conforme ilustração na figura 3.9.

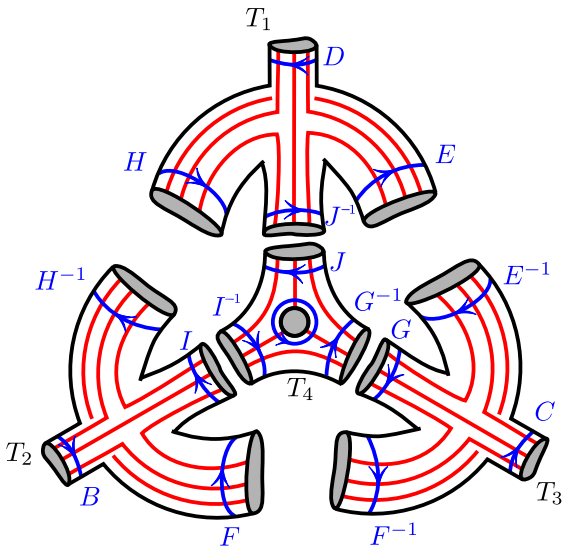


Figura 3.9: colagem de diagramas simples para obter o diagrama da configuração $(4, 10, 10)$.

Olhando o diagrama da figura 3.9 podemos finalmente desenhar o diagrama de Heegaard dual e dual simplificado da configuração $(4, 10, 10)$, como se vê na figura 3.10 **(a)** e **(b)**.

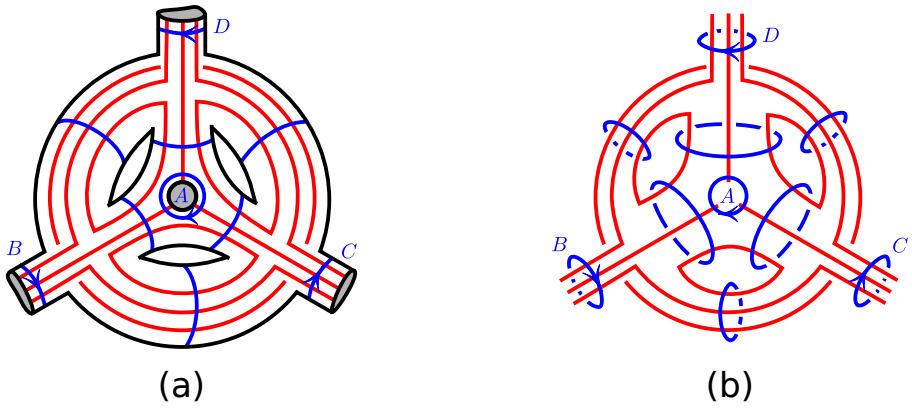


Figura 3.10: em **(a)** o diagrama da configuração $(4, 10, 10)$ e em **(b)** o diagrama simplificado.

Definimos a ação do passo de Pachner $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$ nos diagramas como sendo o passo que transforma o diagrama da figura 3.7 no diagrama da figura 3.10, ou vice-versa, conforme ilustrado na figura 3.11.

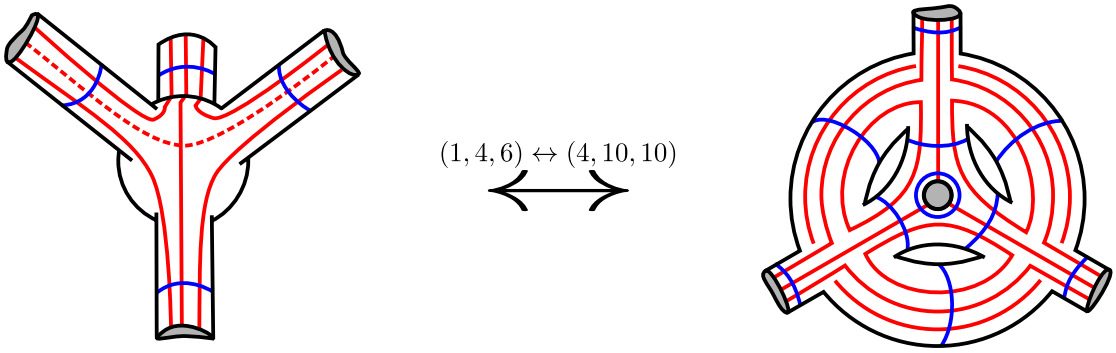


Figura 3.11: ação do passo de Pachner $(1,4,6) \leftrightarrow (4,10,10)$ sobre o diagrama.

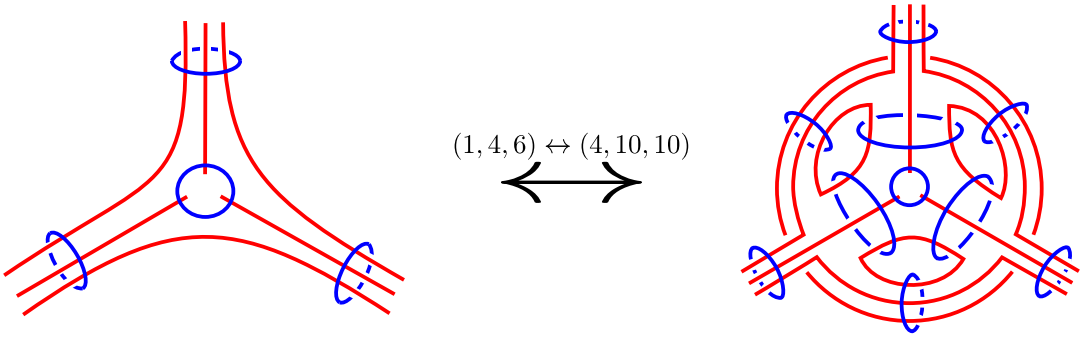


Figura 3.12: a ação do passo de Pachner $(1,4,6) \leftrightarrow (4,10,10)$ sobre o diagrama simplificado.

3.3.3 Diagrama da Configuração $(2,7,9)$

O diagrama da configuração $(2,7,9)$ é relativamente simples, pois é formado por dois diagramas simples colados por uma única face.

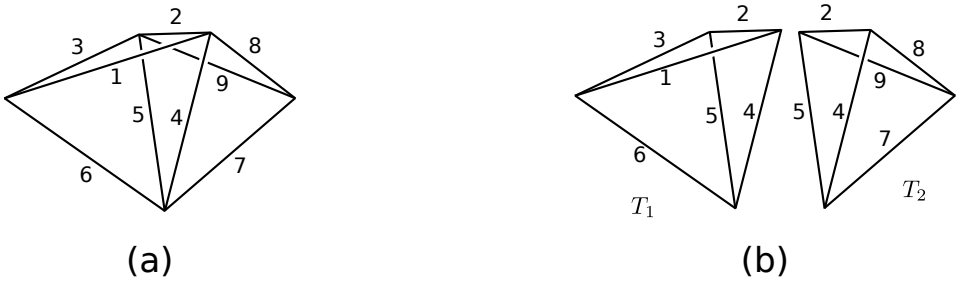


Figura 3.13: em **(a)** a configuração $(2,7,9)$ e em **(b)** cada tetraedro desenhado separadamente.

Na figura 3.13 **(a)** enumeramos os links para identificação em **(b)** desenhamos os

tetraedros de $(2, 7, 9)$ separadamente. Os dois tetraedros T_1 e T_2 possuem as seguintes faces: as faces de T_1 são $A[1, 2, 3]$, $B[1, 6, 4]$, $C[6, 3, 5]$ e $D[4, 5, 2]$ e as de T_2 são $D^{-1}[5, 4, 2]$, $E[9, 2, 8]$, $F[9, 7, 5]$ e $G[8, 4, 7]$. O diagrama correspondente à configuração $(2, 7, 9)$ é formado por dois diagramas simples compartilhando uma única face em comum, conforme mostrado na figura 3.14.

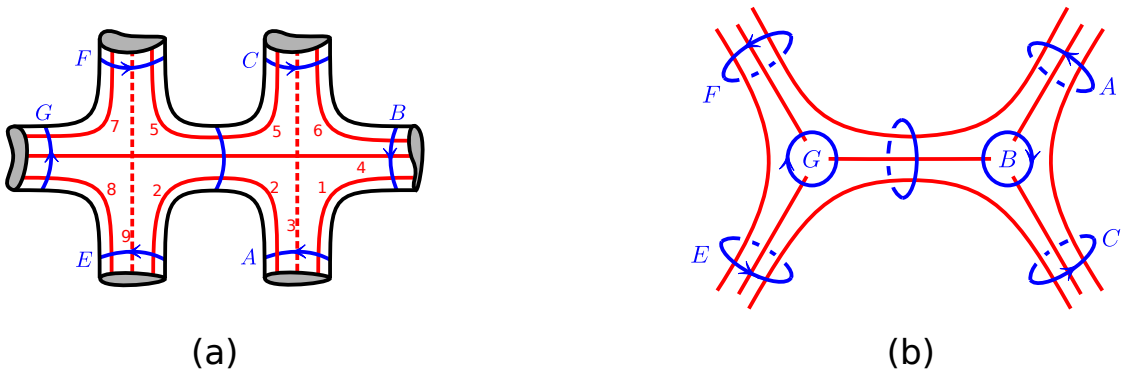


Figura 3.14: em **(a)** e **(b)** os diagramas dual e dual simplificado da configuração $(2, 7, 9)$.

3.3.4 Diagrama da Configuração $(3, 9, 10)$

Falta desenharmos o diagrama correspondente à configuração $(3, 9, 10)$. Para isso enumeramos os links analogamente ao que foi feito na figura 3.13 **(a)**, mas com um link a mais. Sendo assim, o diagrama em que estamos interessados é constituído por três diagramas simples como o da figura 3.7.

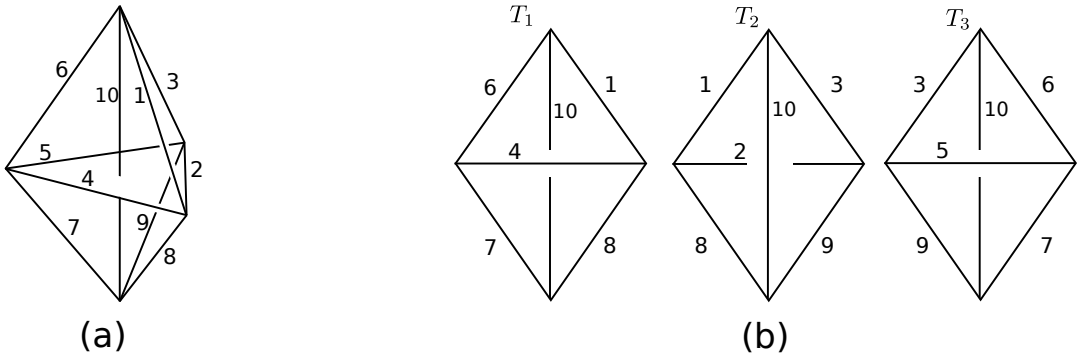


Figura 3.15: em **(a)** a configuração $(3, 9, 10)$ e em **(b)** cada um dos tetraedros desta configuração desenhados separadamente.

Na figura 3.15 **(b)** as faces dos tetraedros T_1 são as faces $A[4,1,6]$, $G^{-1}[1,8,10]$, $I[6,10,7]$ e $D[8,4,7]$, as do tetraedro T_2 são as faces $B[2,3,1]$, $G[1,10,8]$, $H^{-1}[3,9,10]$ e $E[9,2,8]$ e as faces do tetraedro T_3 são as faces $C[3,5,6]$, $H[3,10,9]$, $I^{-1}[10,6,7]$ e $F[9,7,5]$.

Na figura 3.15 temos uma receita de como colar os diagramas simples para obter o diagrama que queremos.

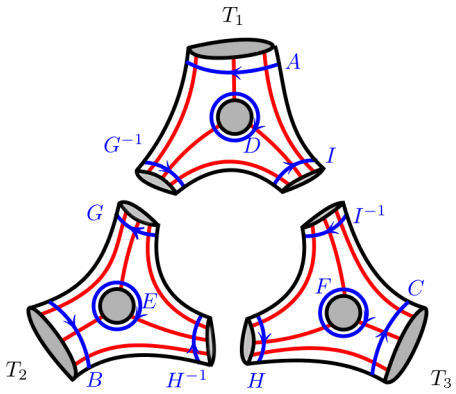


Figura 3.16: ilustração da colagem dos diagramas simples para obter o diagrama do configuração $(3,9,10)$.

Com base na figura 3.16 desenhamos o diagrama correspondente à configuração $(3,9,10)$, como se vê na figura 3.17 **(a)** e **(b)**.

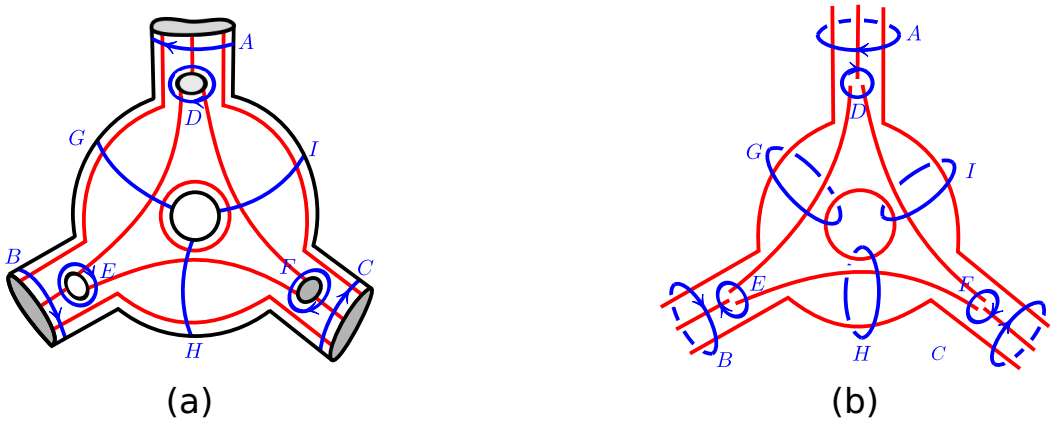


Figura 3.17: em **(b)** o diagrama da configuração $(3,9,10)$ e em **(c)** o diagrama simplificado.

Definimos a ação do passo de Pachner $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$ nos diagramas como sendo uma transformação que mapeia o diagrama da figura 3.14 no diagrama da figura 3.17, ou vice-versa, veja a ilustração na figura 3.18.

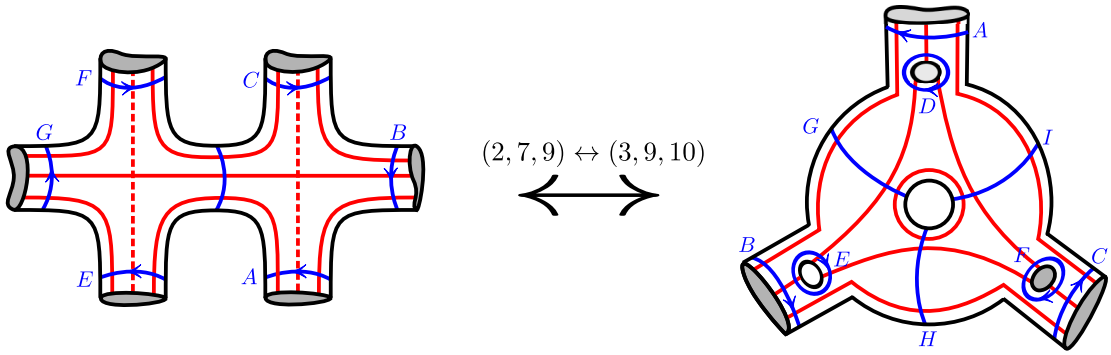


Figura 3.18: ação do passo de Pachner $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$ sobre o diagrama.

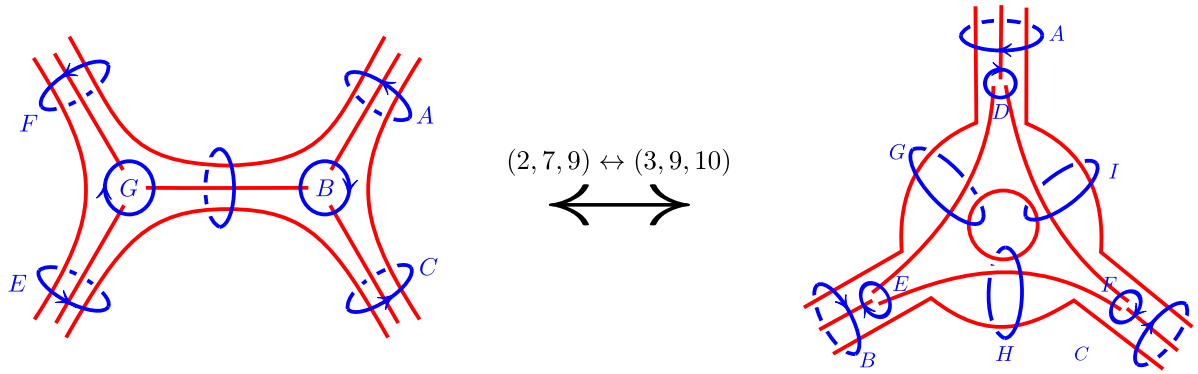


Figura 3.19: ação do passo de Pachner $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$ sobre o diagrama simplificado.

3.4 Álgebras de Hopf e a Invariância Topológica

Agora que conhecemos a ação dos passos de Pachner sobre os diagramas podemos começar a investigar a quase invariância topológica das funções de partição, definida no capítulo 2, para o caso particular $M_{abc} = tr\,(abc)$. Para isso basta mostrar que a a função de partição é invariante pela ação dos passos de Pachner, conforme será discutido na próxima seção.

A função de partição definida em 3.1 pode ou não ser um invariante topológico, dependendo de a álgebra $\mathcal{A}$ ser ou não uma álgebra de Hopf. No restante deste capítulo mostraremos a validade do teorema abaixo.

Teorema 3.2 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Hopf involutória, então a função de partição, definida na equação (3.1), é um invariante topológico.*

A invariância topológica da função de partição, quando $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Hopf,

é demonstrada em [4] para diagramas de Heegaard gerais. Aqui provaremos a quase invariância da função de partição para diagramas de Heegaard específicos, os quais são provenientes de alguma triangulação, sendo assim não precisamos de toda a tecnologia utilizada em [4]. A prova apresentada por Kuperberg é bastante sucinta e usa a teoria de Morse [20]. Como consequência, não é transparente, pois perdemos o contato com as triangulações. A prova que apresentaremos, usando os passos de Pachner, é mais simples, além de permitir um entendimento de como a função de partição muda quando aplicamos um dos passos de Pachner à triangulação, pois os passos de Pachner não criam nem destroem faces, links ou tetraedros, conforme será visto.

Mostrar tal invariância corresponde a mostrar que o peso associado ao diagrama 3.7 é igual (exceto por constantes multiplicativas) ao peso associado ao diagrama da figura 3.10, ou que o peso associado ao diagrama da figura 3.14 é igual a peso associado ao diagrama da figura 3.17, mas para isso precisaremos de alguns resultados auxiliares, os quais serão construídos a seguir. Tais resultados auxiliares são os mesmos que os utilizados em [4], e são pequenas transformações que, quando aplicadas a um diagrama não mudam o peso associado a estes. Usaremos três transformações, que são elas: *sliding*, *two-point move* e *propriedade da co-integral*, as quais não mudam o peso associado ao diagrama quando $\mathcal{A}$ é uma álgebra da Hopf. Conforme será visto, essas transformações não fazem sentido em termos de triangulações, pois levam a diagramas que não são diagramas de nenhuma triangulação, mas isso não é um problema, pois essas transformações serão apenas passos intermediários nas demonstrações.

3.4.1 Sliding

A transformação chamada sliding consiste em deslizar uma curva do diagrama sobre outra curva da mesma cor, de tal forma que a primeira curva engloba a segunda. A regra é simples, considere duas curvas da mesma cor, γ_a e γ_b. Pode-se fazer o sliding de γ_a sobre γ_b se for possível conectar estas duas por um arco imaginário sem que este seja interceptado por nenhuma curva de nenhuma cor. O sliding é feito da seguinte forma: fazemos uma cópia da curva γ_b em torno de si mesma e em seguida ligamos esta cópia com a curva γ_a, conforme ilustrado na figura 3.20.

É necessário mostrar que o peso associado a um diagrama não sofre alteração quando aplicamos um sliding ao mesmo. Para isso considere a configuração da figura 3.21 **(a)**.

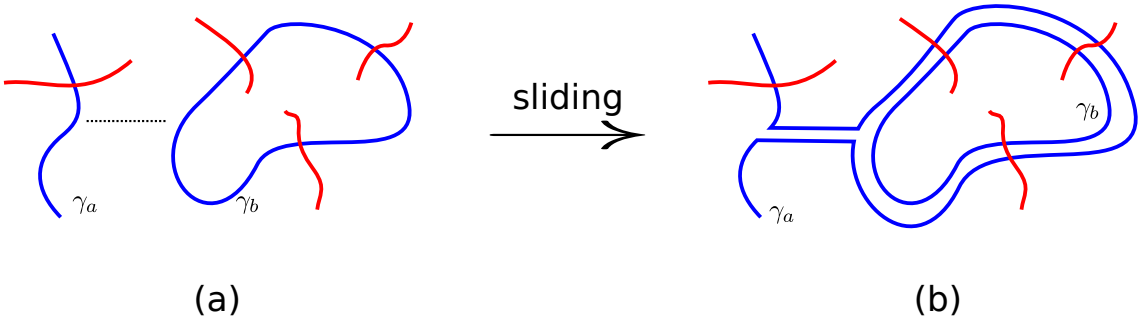


Figura 3.20: em **(a)** um arco (pontilhado) conectando as duas curvas, em **(b)** o sliding de γ_a em γ_b.

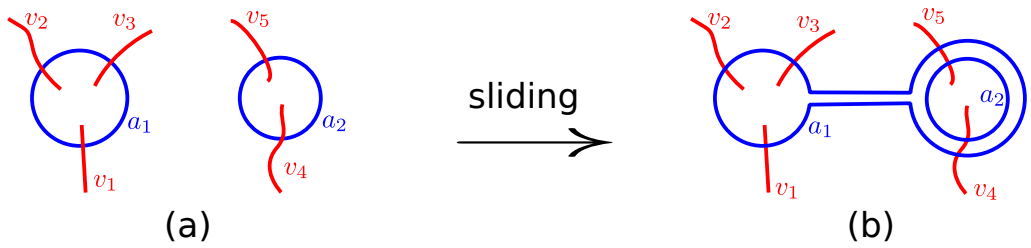


Figura 3.21: sliding de curvas azuis.

Note que os pesos correspondentes das figuras 3.21 **(a)** e **(b)** são os mostrados na figura 3.22.

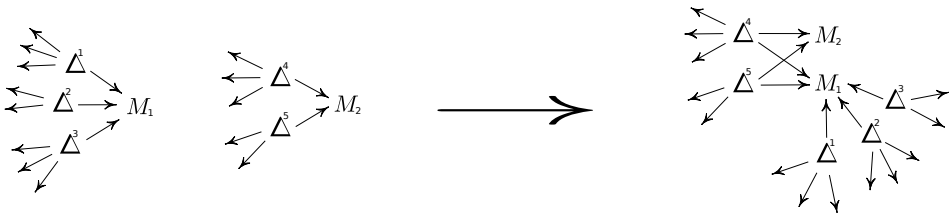


Figura 3.22: os índices são para identificar a qual curva cada tensor se refere.

Tudo o que precisamos mostrar é que podemos transformar um diagrama no outro quando a álgebra for uma álgebra de Hopf. Os detalhes são dados na figura 3.23, os quadrados cinzas nas figuras são apenas para dar destaque à região do diagrama de Kuperberg que estamos manipulando.

Embora a prova de que o sliding não muda o peso associado a um diagrama de Kuperberg tenha sido feita somente para curvas azuis, o mesmo pode ser feita para curvas vermelhas, bastando tomar o diagrama de Kuperberg dual na demonstração, o qual possui as mesmas propriedades do primeiro. Esta dualidade é garantida pelas propriedades das

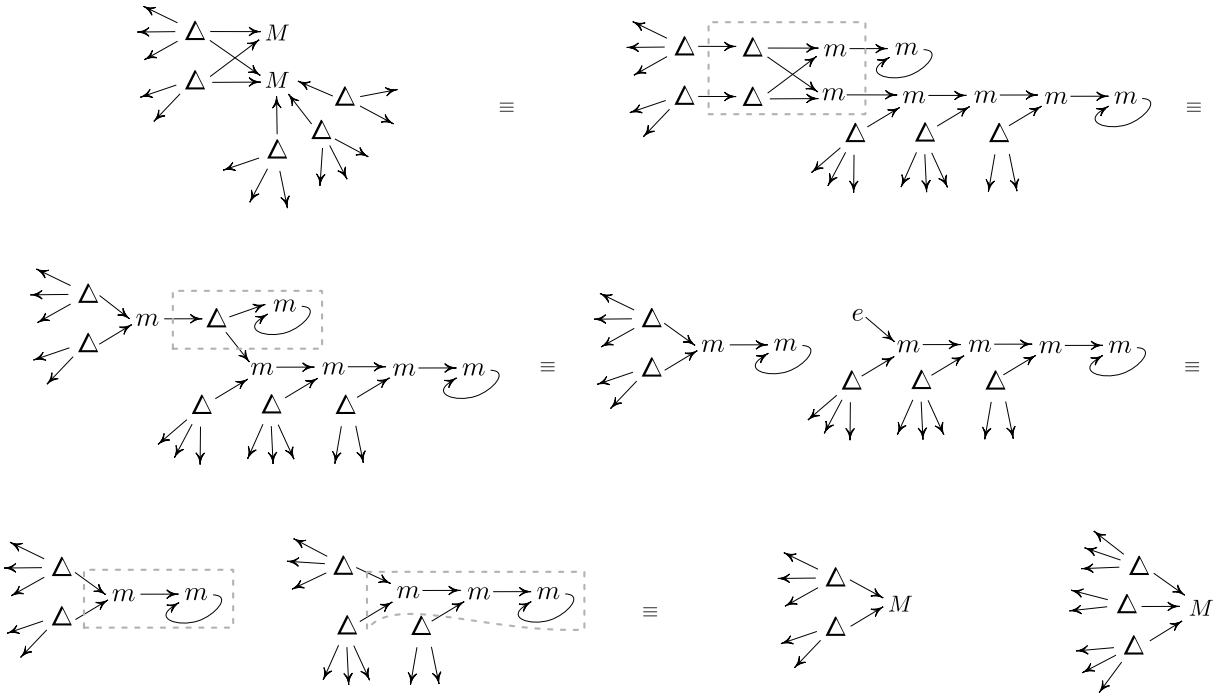


Figura 3.23: cada passo corresponde à utilização de alguma identidade das álgebras de Hopf (apêndice B).

álgebras de Hopf.

3.4.2 Two-Point Move

Outra transformação que será muito importante para mostrar a invariância sobre a ação dos passos de Pachner é o two-point move. O two-point move consiste em eliminar, ou criar, cruzamentos que não contribuem para a função de partição, pois algumas vezes duas curvas se interceptam mais de uma vez e com orientação reversa, e nesse caso o peso associado a um cruzamento anula o peso associado ao outro. Veja a ilustração na figura 3.24.

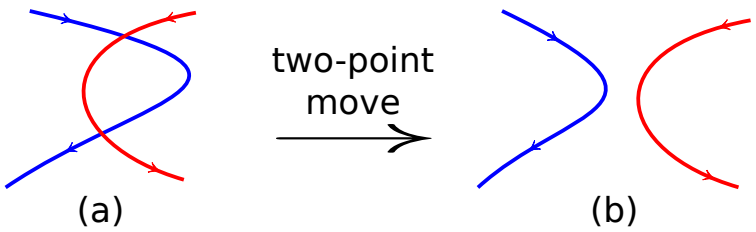


Figura 3.24: Two-Point Move.

O peso associado ao diagrama da figura 3.24 **(a)** e **(b)** são, respectivamente os desenhados na figura 3.25

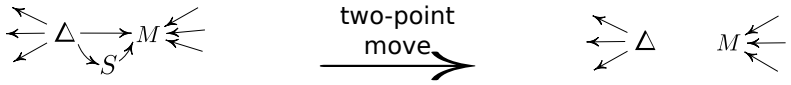


Figura 3.25: cada passo corresponde à utilização de alguma identidade das álgebras de Hopf (apêndice B).

Falta mostrar que quando a álgebra é uma álgebra de Hopf esses diagramas de Kuperberg podem ser transformados um no outro. A demonstração do two-point move é simples e encontra-se feita em detalhes na figura 3.26

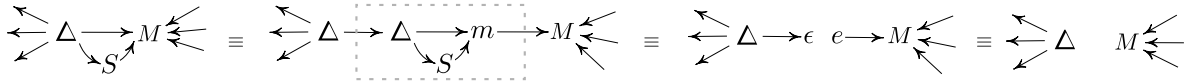


Figura 3.26: prova do two-point move.

É importante notar que o two-point move só poderá ser feito se houver duas curvas que se cruzam em dois pontos e não houver nenhuma outra curva, nem cruzamento, entre esses dois pontos.

3.4.3 Propriedade da Co-Integral

A última transformação é a propriedade da co-integral, que está diretamente ligada ao fato de que em uma álgebra de Hopf sempre existe uma (co-)integral não nula [21]. No apêndice B todas as propriedades sobre integral e co-integral em álgebras de Hopf, relevantes para este trabalho, estão demonstradas. Uma co-integral é um elemento $\lambda \in \mathcal{A}$ que satisfaz a condição da figura 3.27 **(a)**. Usamos a propriedade da co-integral quando há uma curva vermelha que cruza uma única curva azul. Também encontra-se demonstrado no apêndice B que, quando a álgebra é uma álgebra de Hopf involutória, o co-traço na representação regular da constante de estrutura da co-multiplicação é sempre a co-integral, portanto a relação da figura 3.27 **(b)** é satisfeita.

Cada curva azul do diagrama é interceptada por várias curvas vermelhas, mas no caso especial em que há pelo menos uma curva vermelha que não cruza nenhuma outra

(a) (b)

Figura 3.27: definição da co-integral.

curva azul, podemos usar a propriedade da co-integral e eliminar todos os cruzamentos desta curva azul, de modo que reste somente uma curva vermelha e uma azul, conforme ilustrado na figura 3.28.

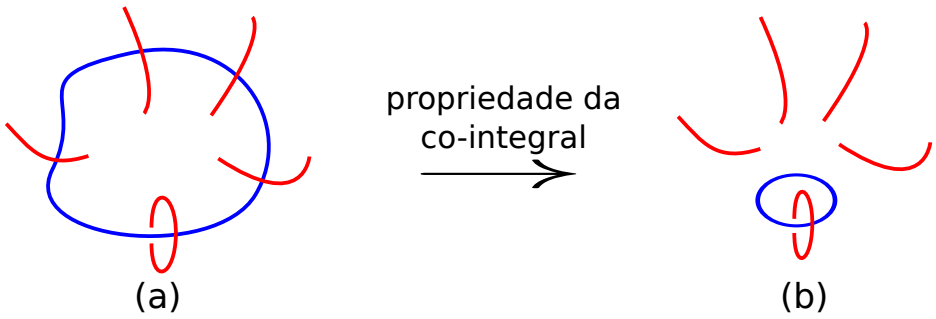


Figura 3.28: propriedade da co-integral.

Os pesos de cada um dos diagramas da figura 3.28 estão desenhados na figura 3.29.

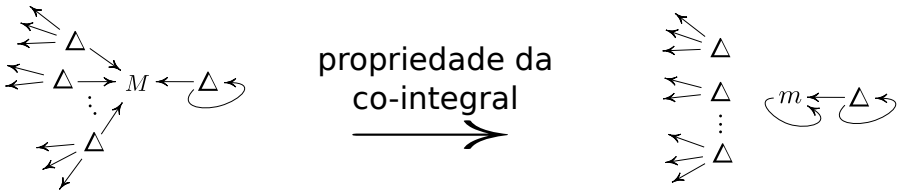


Figura 3.29: peso dos diagramas da figura 3.28.

Antes de mostrar que os dois pesos são iguais vamos mostrar um resultado auxiliar que é a generalização da propriedade da co-integral para o tensor $M_{a_1 a_2 \cdots a_n}$, veja a figura 3.30.

Com esse resultado é trivial mostrar a validade da propriedade da co-integral. A contração da integral com a co-integral, que aparece no resultado mostrado na figura 3.30, é chamada de estabilização. Em termos de diagramas isto equivale a adicionar uma alça a mais no handlebody com um sistema de curvas específico. Acrescentar uma estabilização a um diagrama de Heegaard não altera a variedade obtida deste diagrama [4]. Na figura 3.31 um exemplo de estabilização é dado, no caso um diagrama de Heegaard de gênero dois

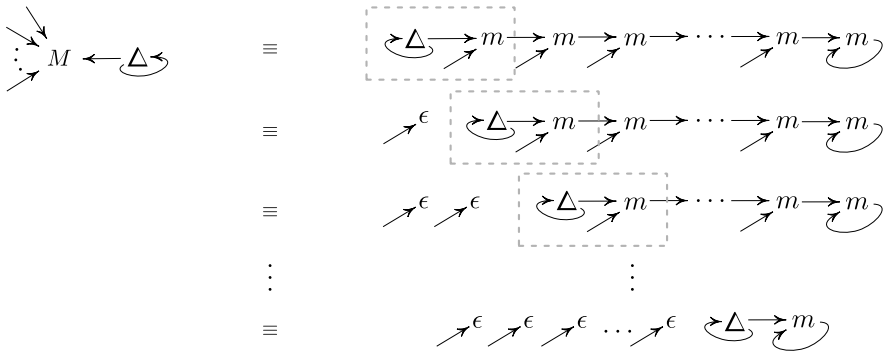


Figura 3.30: resultado auxiliar para a prova da propriedade da co-integral.

é transformado em um diagrama de Heegaard de gênero três e isto não muda a variedade obtida deste diagrama, mas muda a função de partição de forma trivial, conforme veremos mais adiante. A contração da integral com a co-integral é numericamente igual à dimensão da álgebra (ver apêndice B).

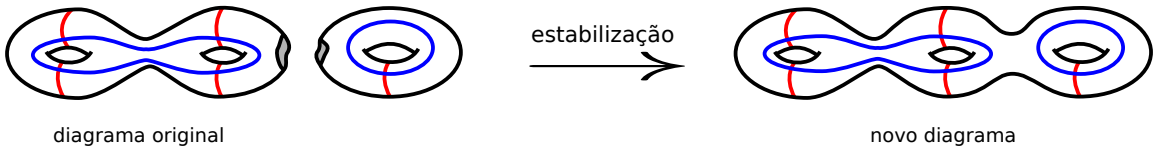


Figura 3.31: exemplo de estabilização, aqui um diagrama de Heegaard de gênero dois é transformado em um de gênero três, sem que a variedade obtida a partir deste seja mudada.

A prova de que a propriedade da co-integral não altera a função de partição é dada na figura 3.32 abaixo, usando a generalização da propriedade da co-integral para o tensor $M_{a_1 a_2 \cdots a_n}$, que foi mostrada na figura 3.30.

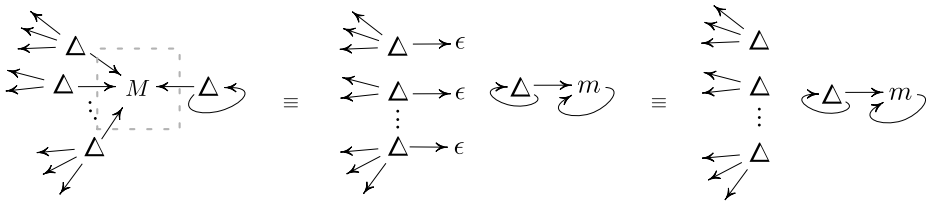


Figura 3.32: prova da propriedade da co-integral.

Conclui-se portanto que essas três transformações, sliding, two-point move e propriedade da co-integral, quando aplicadas em um diagrama deixam o peso associado a

estes invariante. Sendo assim, se mostrarmos que os passos de Pachner podem ser escritos como sendo uma sequência de slidings, two-point moves e a propriedade da co-integral, então mostramos que a função de partição é invariante pela ação dos passos de Pachner a menos de fatores de escala. A seguir vamos mostrar como gerar cada um dos passos de Pachner com uma sequência de slidings, two-points move e a propriedade da co-integral.

3.5 Invariância da Função de Partição pela Ação dos Passos de Pachner

Nessa seção iremos mostrar que os passos de Pachner podem ser gerados por uma sequência de sliding, two-point move e a propriedade da co-integral. Isso é o suficiente para mostrar que a função de partição é quase topológica.

3.5.1 Move $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$

Vamos começar mostrando como gerar o passo $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$ como uma sequência de slidings, two-point moves e a propriedade da co-integral. Considere a configuração $(4, 10, 10)$ cujo diagrama é o desenhado na figura 3.33 **(a)**. Na figura 3.33 **(a)** aplicamos um sliding de duas curvas vermelhas, conforme mostrado na figura 3.33 **(b)**, e em seguida um two-point move para eliminar os cruzamentos desnecessários e desta forma obtemos o diagrama da figura 3.33 **(c)**.

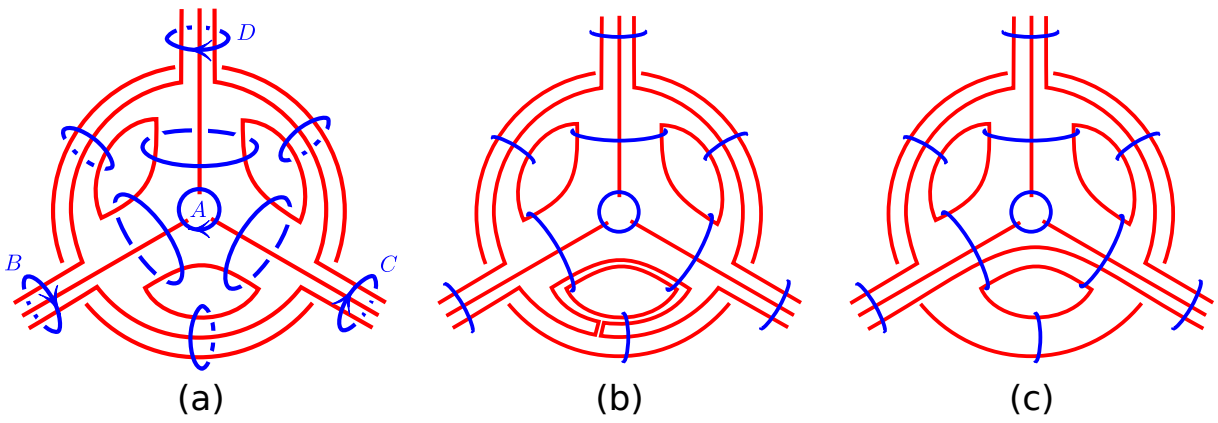


Figura 3.33: prova do passo de Pachner $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$, parte 1.

No diagrama da figura 3.33 **(c)** aplicamos outro sliding, nas duas curvas vermelhas, conforme mostrado na figura 3.34 **(a)**, um two-point move para eliminar os cruzamentos desnecessários e finalmente usamos a propriedade da co-integral no diagrama da figura 3.34 **(b)** e obtemos o diagrama desenhado na figura 3.34 **(c)**.

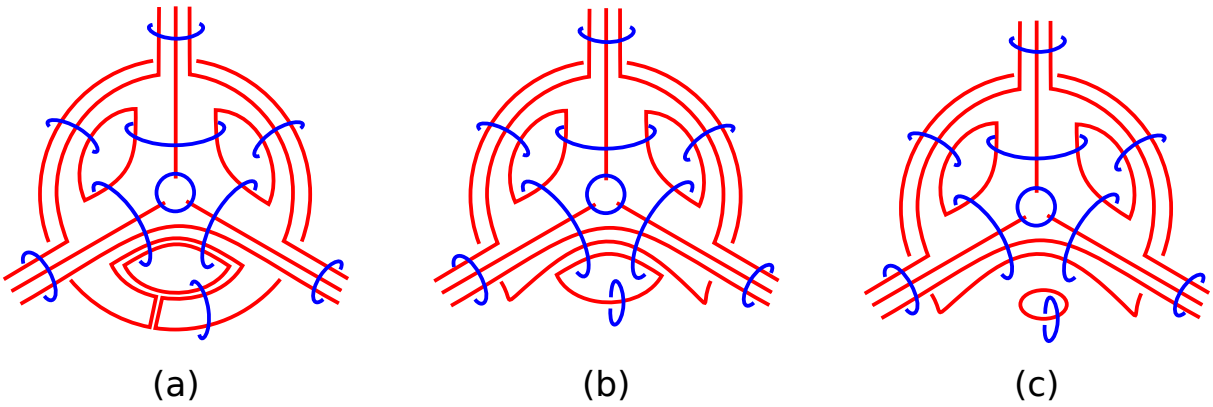


Figura 3.34: prova do passo de Pachner $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$, parte 2.

Note que podemos aplicar exatamente o mesmo procedimento do lado esquerdo e do lado direito da figura de forma a obtermos o diagrama desenhado em 3.35 **(a)**. Usando uma sequência de três two-point passos podemos separar a curva vermelha, que está por trás de todas as outras, do resto do diagrama

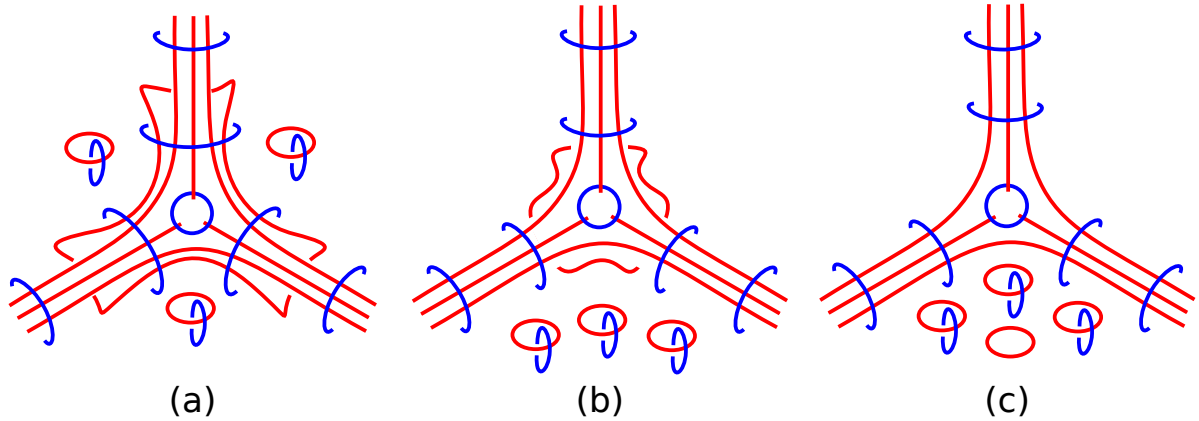


Figura 3.35: prova do passo de Pachner $(1, 4, 6) \leftrightarrow (4, 10, 10)$, parte 3.

As curvas azuis que são paralelas podem facilmente ser removidas do resto do diagrama com um sliding e um two-point move, conforme feito na figura 3.36 **(a)** e **(b)** de modo a obtermos o diagrama da figura 3.36 **(c)**, que equivale ao diagrama da configuração $(1, 4, 6)$ multiplicado por alguns fatores, os quais serão discutidos com detalhes adiante.

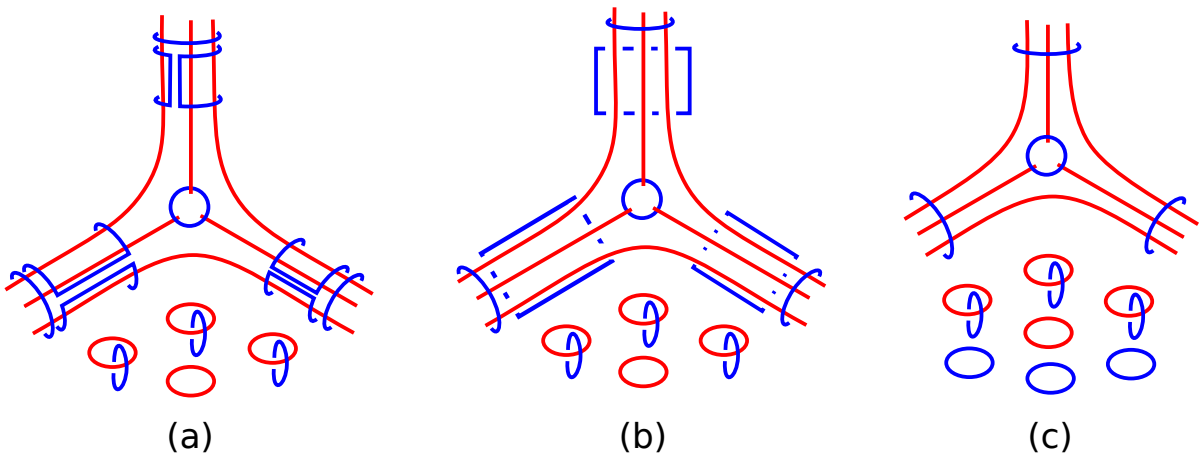


Figura 3.36: prova do passo de Pachner $(1,4,6) \leftrightarrow (4,10,10)$, parte 4.

Portanto o passo de Pachner $(1,4,6) \leftrightarrow (4,10,10)$, quando aplicado em um diagrama, não muda o peso associado a este, exceto por fatores multiplicativos. Embora a demonstração tenha sido feita para o passo $(1,4,6) \rightarrow (4,10,10)$ a mesma coisa pode ser feita para passo $(1,4,6) \leftarrow (4,10,10)$, uma vez que todas as transformações usadas são inversíveis.

3.5.2 Passo $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$

O procedimento que usaremos para mostrar como gerar o passo $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$ com uma sequência de slidings, two-point moves e a propriedade da co-integral, é análogo ao usado para mostrar o passo $(1,4,6) \leftrightarrow (4,10,10)$. Considere o diagrama da configuração $(3,9,10)$ na figura 3.37 **(a)**. Primeiro fazemos um sliding com as curvas vermelhas mostrada na figura 3.37 **(b)** e em seguida um two-point move para eliminar os cruzamentos desnecessários, e assim obtemos o diagrama da figura 3.37 **(c)**.

No diagrama da figura 3.37 **(c)** fazemos um sliding das curvas vermelhas, conforme mostrado em 3.38 **(a)** e um two-point move é usado para eliminar os cruzamentos na figura 3.38 **(b)**. Com a propriedade da co-integral podemos separar do diagrama uma estabilização, conforme mostrado na figura 3.38 **(c)**

Agora usaremos uma sequência de sliding e two-point para eliminar as faces paralelas do diagrama. Na figura 3.39 **(a)** usamos um sliding na curva azul mostrada na figura e em seguida, em **(b)** usamos dois two-point move e obtmemos o diagrama da figura 3.39 **(b)**.

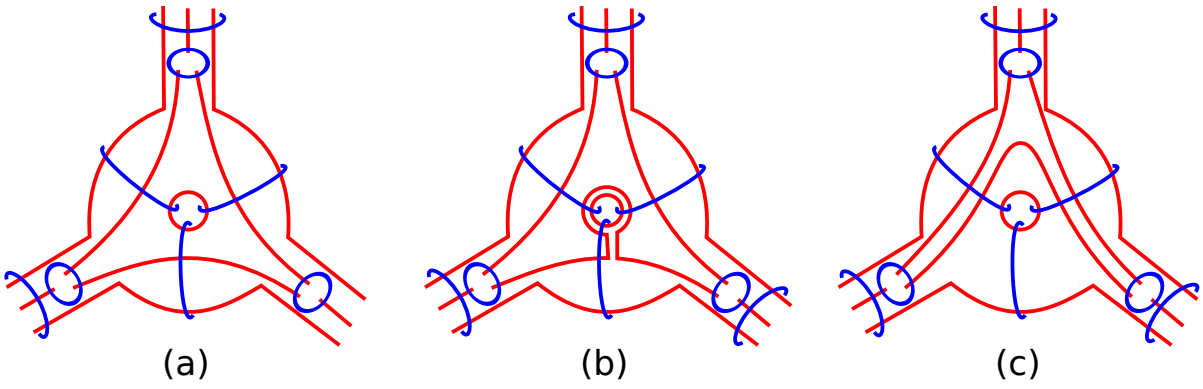


Figura 3.37: prova do passo de Pachner $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$, parte 1.

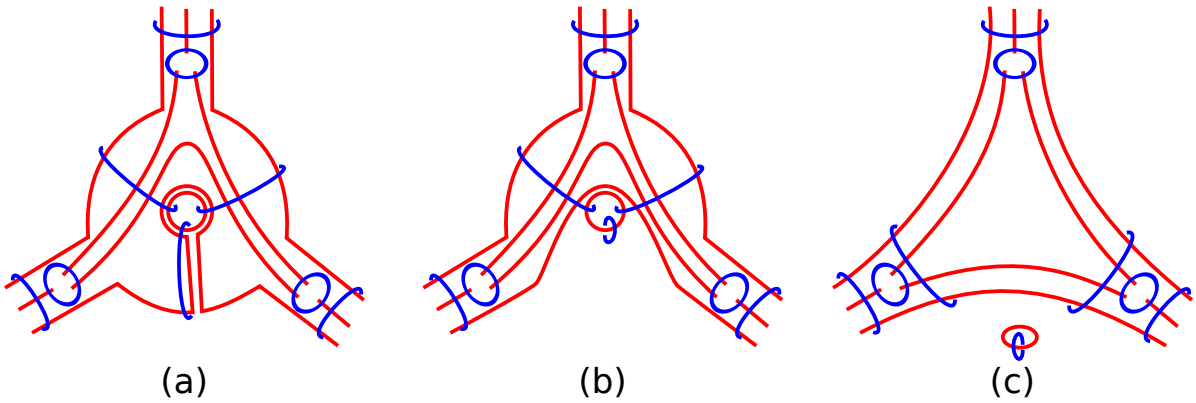


Figura 3.38: prova do passo de Pachner $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$, parte 2.

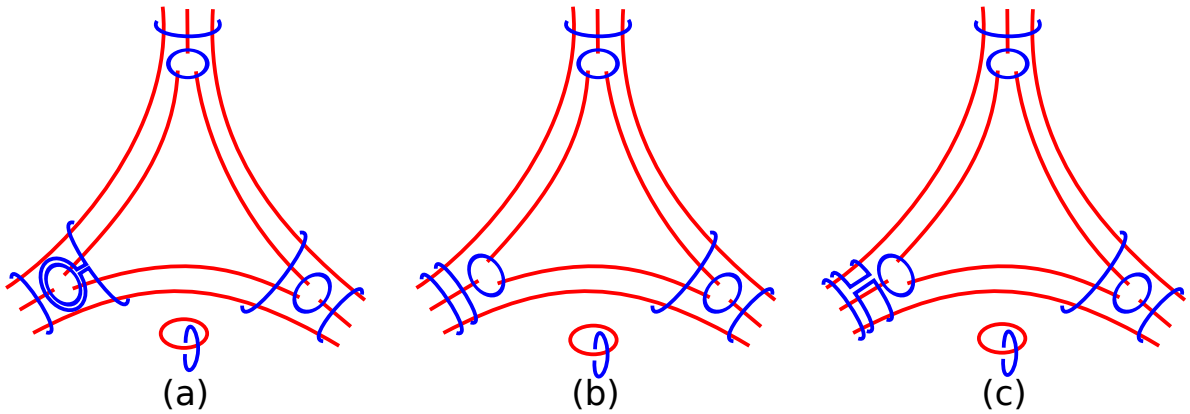


Figura 3.39: prova do passo de Pachner $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$, parte 3.

Aplicamos outro sliding na curva azul e obtemos o diagrama da figura 3.39 **(c)**, e com uma sequência de três sliding pode-se separar uma curva azul do diagrama, como na figura 3.40 **(a)**. Poderíamos fazer o mesmo com a outra curva azul, mas a fim de deixar este igual ao diagrama da configuração $(2,7,9)$ vamos fazer a seguinte coisa: uma sequência

de dois sliding na curva azul conforme mostrado na figura 3.40 **(b)** seguido por vários two-point moves para eliminar os cruzamentos desnecessários, e obtemos desta forma o diagrama da figura 3.40 **(c)**.

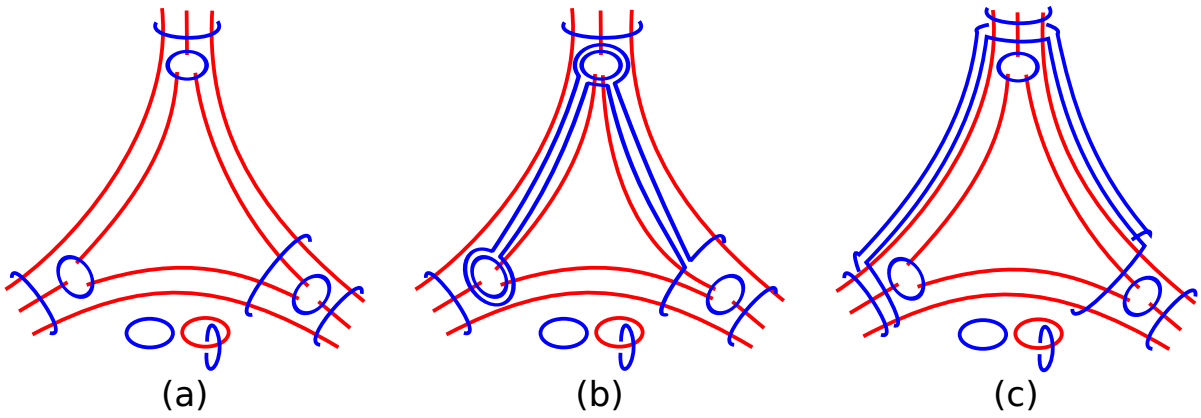


Figura 3.40: prova do passo de Pachner $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$, parte 4.

Não é difícil perceber que o diagrama da figura 3.40 **(c)** possa ser deformada no diagrama mostrado na figura 3.41, e que este, por sua vez, é o diagrama da configuração $(2,7,9)$, como queríamos mostrar.

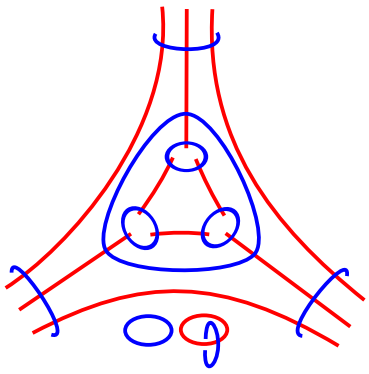


Figura 3.41: prova do passo de Pachner $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$, parte 5.

Portanto, como foi mostrado, é possível gerar o passo de Pachner $(2,7,9) \leftrightarrow (3,9,10)$ através de sliding, two-point move e propriedade da co-integral.

3.5.3 Fatores Numéricos na Função Partição

Quando escrevemos os passos de Pachner como sendo uma sequência de sliding, two-point moves e propriedade da co-integral, notamos que alguns fatores numéricos apareceram no resultado final, tais fatores são os mostrado na figura 3.42.

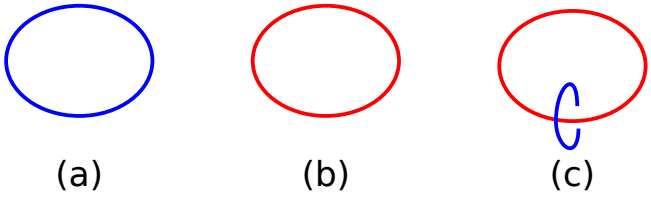


Figura 3.42: os três tipos de fatores numéricos que aparecem na função de partição

Todos os fatores que estão desenhados na figura 3.42 são numéricamente iguais à dimensão da álgebra (apêndice B), porém cada um deles tem um significado diferente. Os círculos fechados na figura 3.42 **(a)** e **(b)** são chamados de círculos triviais, pois não possuem nenhuma intersecção. Note que, quando geramos os passos de Pachner em termos de sliding, two-point move e a propriedade da co-integral, nenhuma curva foi criada nem destruída. No entanto, como já dito antes, o passo de Pachner $(1, 4, 6) \rightarrow (4, 10, 10)$, por exemplo, aumenta o número de faces (curvas azuis) em seis unidades e aumenta o número de links (curvas vermelhas) em quatro unidades e isso parece ser uma contradição. O que acontece é que os passos de Pachner não aumentam nem diminuem os números de faces ou links, eles só separam faces e links do restante do diagrama. Concluímos então que para cada curva azul que é "destruída"pela ação de um passo de Pachner ganha-se um círculo azul separado do restante do diagrama, e o mesmo vale para curvas vermelhas. Existe ainda a questão da estabilização, note que para cada tetraedro que é "destruído", pela ação de um passo de Pachner, ganha-se uma estabilização. Por exemplo, considere o passo de Pachner $(2, 7, 9) \leftarrow (3, 9, 10)$, em que o número de tetraedros diminui em uma unidade, o número de faces em duas unidades e o número de links em uma unidade, veja que quando geramos este passo usando slidings, two-point moves e a propriedade da co-integral, aparecem duas curvas azuis separadas do diagrama, sendo que destas duas curvas azuis uma é um círculo trivial e uma faz parte de uma estabilização; aparece também uma única curva vermelha a qual faz parte desta estabilização; existe uma única estabilização neste caso, que está de acordo com o número de tetraedros que foram "destruídos".

Mas qual é o efeito destes fatores numéricos na função de partição? Considere duas triangulações distintas da mesma variedade, $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$. Como $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ são triangulações da

mesma variedade, essas são conectadas por uma sequência de passos de Pachner. Suponha que a triangulação $\mathcal{L}_i$ tenha n_{Ti} tetraedros, n_{Fi} faces e n_{Li} links, para $i = 1, 2$. Sabendo que $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ estão conectadas por uma sequência de passos de Pachner, podemos dizer que a função de partição $Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}_1)$ é igual à função de partição $Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}_2)$ multiplicada por alguns fatores que dependem das diferenças entre os números de tetraedros, faces e links. Assim, podemos dizer que

$$Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}_1) = Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}_2) e^{n_{T1}-n_{T2}} a^{(n_{F1}-n_{F2})-(n_{T1}-n_{T2})} v^{(n_{L1}-n_{L2})-(n_{T1}-n_{T2})} , \tag{3.2}$$

sendo a, v e e os respectivos pesos das curvas desenhadas na figura 3.42 **(a)**, **(b)** e **(c)**. Entretanto, como já dito anteriormente, todos esses pesos são numericamente iguais à dimensão $d = dim\,(\mathcal{A})$ da álgebra, ou seja, $a = v = e = d$, assim, temos que

$$Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}_1) = Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}_2) \frac{d^{n_{F1}+n_{L1}-n_{T1}}}{d^{n_{F2}+n_{L2}-n_{T2}}} , \tag{3.3}$$

ou podemos simplesmente escrever

$$d^{n_{T1}-n_{F1}-n_{L1}} Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}_1) = d^{n_{T2}-n_{F2}-n_{L2}} Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}_2). \tag{3.4}$$

Note que $Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}_i)$ multiplicado por $d^{n_{Ti}-n_{Fi}-n_{Li}}$ é igual a $Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}_k)$ multiplicado por $d^{n_{Tk}-n_{Fk}-n_{Lk}}$, para todo i e k, portanto essa quantidade é um invariante topológico e definimos como sendo a parte topológica da função de partição

$$Z^{TOP}(\mathcal{M}) = d^{n_T-n_F-n_L} Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}) , \tag{3.5}$$

$$Z(\mathcal{M}, \mathcal{L}) = d^{n_F+n_L-n_T} Z^{TOP}(\mathcal{M}). \tag{3.6}$$

Como isso provamos que, quando a álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Hopf, a função de partição 3.6 é quase topológica, o que significa que esta pode ser escrita como sendo uma parte topológica multiplicado por uma parte que depende apenas dos números de tetraedros, faces e links da triangulação. Sendo assim, se quisermos calcular a função de partição numa ou noutra triangulação basta saber a diferença entre os números de tetraedros, faces e links delas.

Capítulo 4

Modelos Físicos com Grupo de Gauge $\mathbb{Z}_2$

No primeiro capítulo deste trabalho definimos as teorias de gauge sobre os diagramas simplificados de Heegaard e o formalismo de Kuperberg, o qual vimos reduzir-se em casos particulares, equivalentes ao modelo das teorias de gauge. No capítulo 3, apresentamos uma prova da invariância topológica da função de partição do formalismo de Kuperberg para o caso em que a álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Hopf. Neste capítulo vamos estudar em que condições a função de partição pode ser calculada exatamente, sendo $G = \mathbb{Z}_2$ o grupo de gauge.

4.1 Pesos Modificados das Faces

Considere uma variedade tridimensional $\mathcal{M}$ orientável e sem fronteira e considere também um diagrama simplificado de Heegaard $\mathcal{D}$, o qual é proveniente de uma triangulação. Seja $\langle \mathcal{A}, m, \Delta \rangle$ uma álgebra e co-álgebra (co-)associativa, (co-)semi-simples, definidas sobre um corpo $\mathbb{K}$ =($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e cuja base $\{\varphi_g\}$ seja indexada pelos elementos do grupo de gauge. Considere ainda $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ um mapa linear, tal que $S^2 = I_d$. Conforme

vimos, para reproduzir as teorias de gauge na rede é necessário que

$$\begin{aligned} \Delta_a^{bc} &= \delta_a^b\ \delta_a^c, \\ S_x^y &= \delta_x^{y^{-1}}, \\ M_{abc} &= M(abc), \end{aligned}$$

sendo $M(g) = e^{-\beta\left(T[g]+T\left[g^{-1}\right]\right)}$ e $T(g)$ uma função de classe. Observe que nesse caso, em que o grupo de gauge é o grupo $\mathbb{Z}_2$, a antípoda é na verdade a identidade, pois $g = g^{-1}$ nesse grupo, e portanto ficamos com

$$S_x^y = \delta_x^{y^{-1}} = \delta_x^y.$$

No capítulo 3 vimos que quando a álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Hopf a função de partição é quase topológica e portanto pode ser calculada exatamente. No entanto algumas vezes é possível que a álgebra não seja exatamente uma álgebra de Hopf e, mesmo assim, a função de partição possua as mesmas características da função de partição quase topológica, isto é, dependa da topologia da variedade $\mathcal{M}$ e dependa trivialmente da triangulação $\mathcal{L}$.

Seja $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon, S\rangle$ uma álgebra de Hopf. Se trocarmos o mapa de multiplicação m por $\overline{m} = \lambda m$, sendo $\lambda \in \mathbb{K}$, a nova álgebra não será uma álgebra de Hopf, pois conforme pode ser visto na figura 4.1 a relação de bi-álgebra não é satisfeita (a menos que $\lambda = 0, 1$).

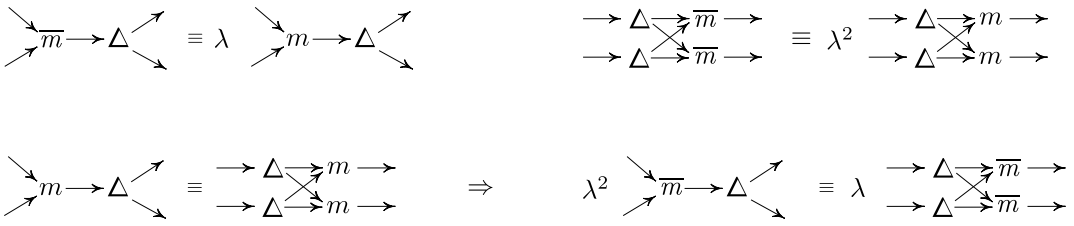


Figura 4.1: a relação de bi-álgebra não é satisfeita, a menos que $\lambda = 0, 1$.

Portanto $\langle \mathcal{A}, \overline{m}, e, \Delta, \epsilon, S\rangle$ não é uma álgebra de Hopf em geral. Com a troca de m por $\overline{m} = \lambda m$ o tensor M_{abc} também sofre uma alteração e fica $\overline{M}_{abc} = \lambda^3 M_{abc}$ e a função de partição por sua vez assume a seguinte forma

$$\overline{Z} = \sum_{conf} \prod_f \overline{M}_{abc} \prod_o S_x^y,$$

mas, mesmo se a álgebra não for uma álgebra de Hopf, a função de partição acima possui as mesmas características da função de partição quase topológica, veja

$$\overline{Z} = \sum_{conf} \prod_{f} \left(\lambda^3 M_{abc}\right) \prod_{o} S_x^y = \lambda^{3n_F} \sum_{conf} \prod_{f} M_{abc} \prod_{o} S_x^y = \lambda^{3n_F} Z^{QTOP},$$

em que n_F é o número de faces da triangulação. Portanto a álgebra não precisa ser necessariamente uma álgebra de Hopf para que a função de partição seja calculável.

Uma vez que o formalismo de Kuperberg será equivalente ao modelo das teorias de gauge se, e somente se, os tensores Δ_a^{bc} e S_x^y forem escolhidos convenientemente, não existe muitas possibilidades de escolha do tensor m_{ab}^c que resulte em uma álgebra de Hopf. Uma possibilidade é fazer $m_{ab}^c = \delta(c, ab)$, pois assim o sexteto $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon, S \rangle$ será o que define a álgebra de grupo (apêndice B), a qual é uma álgebra de Hopf. Assim, se considerarmos que $\mathcal{A} = \mathbb{K}G$, o peso associados às curvas azuis do diagrama fica

$$M_{abc} = tr\left(\varphi_a \varphi_b \varphi_c\right) = tr\left(\varphi_{abc}\right),$$

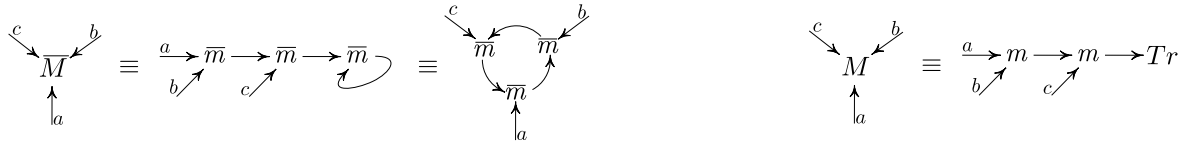
e a teoria será quase topológica.

Alternativamente ao peso definido na figura 4.2 **(a)** podemos considerar o peso definido em 4.2 **(b)**. Note que em **(a)** tem-se uma álgebra arbitrária e o traço tomado na representação regular, já em **(b)** a álgebra é necessariamente a álgebra de grupo e o traço é tomado numa representação qualquer. O peso definido na figura 4.2 **(b)**, embora seja definido em uma álgebra de Hopf, não leva necessariamente a uma teoria quase topológica como pode-se pensar, pois os resultados sobre a invariância topológica da função de partição, mostrados nos capítulos anteriores, dizem respeito ao sistema de peso definido em 4.2 **(a)**. Entretanto, conforme veremos, a função de partição, com M_{abc} definido na figura 4.2 **(b)**, possui as mesmas propriedades da função de partição quase topológica em certas condições. Por conveniência, passaremos a considerar o peso definido em **(b)** e não mais o definido em **(a)** como tem sido feito até agora.

Note que, na definição de tal peso, a propriedade cíclica não fica clara, mas o fato de Tr ser uma função invariante por permutações cíclicas garante essa ciclicidade[1]. No caso particular da álgebra de grupo funções invariantes por permutações cíclicas podem também serem chamadas de função de classe, pois é válida a seguinte propriedade

$$f\left(\varphi_a \varphi_b \varphi_{a^{-1}}\right) = f\left(\varphi_b\right) \qquad \forall a, b \in G.$$

[1]Uma função $f : \mathcal{A} \to X$ é invariante por permutações cíclicas se esta é uma transformação linear tal que $f\left(\varphi_a \varphi_b \varphi_c\right) = f\left(\varphi_b \varphi_c \varphi_a\right) = f\left(\varphi_c \varphi_a \varphi_b\right)$.



(a) (b)

Figura 4.2: em **(a)** o traço tomado na representação regular e a álgebra é arbitrária e em **(b)** o traço tomado numa representação arbitrária e a álgebra é a álgebra de grupo.

O peso definido na figura 4.2 **(b)** pode ser parametrizado por elementos do centro da álgebra, ou seja, pode ser construída uma correspondência um-para-um entre tal peso e os elementos do centro da álgebra, conforme o teorema a seguir garante. Isso significa que o peso definido em 4.2 **(b)** pode ser escrito conforme mostrado na figura 4.3, sendo z um elemento pertencente ao centro da álgebra de grupo.

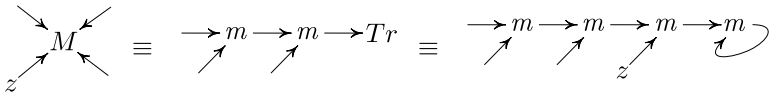


Figura 4.3: parametrização por elementos do centro da álgebra.

Teorema 4.1 *Seja $\mathcal{A} = \mathbb{K}G$. Considere $tr : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ o traço na representação regular e considere também $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ o centro da álgebra $\mathcal{A}$. Então são válidas as seguintes afirmações:*

i) - Seja $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, então a função $g : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$, definida por

$$g(\varphi_a) = tr(z\varphi_a), \qquad \forall a \in G,$$

é uma função de classe.

ii) - Seja $f : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ uma função de classe, então existe $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ tal que

$$f(\varphi_a) = tr(z\varphi_a), \qquad \forall a \in G.$$

PROVA:

A prova da primeira parte deste teorema é trivial, para isso basta notar que a função tr é uma função de classe. Isso, combinado com o fato de z comutar com todos os elementos da álgebra, garante que $g(\varphi_a)$ é uma função de classe.

Já para a segunda parte, precisamos mostrar que existe um elemento $z \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ para o qual a relação enunciada no teorema seja satisfeita. Para isso considere $z = z^k\ \varphi_k$, um elemento mais geral possível do centro da álgebra , assim ficamos com

$$f(\varphi_a) = tr(z\ \varphi_a) = z^k\ \underbrace{tr(\varphi_k \varphi_a)}_{g_{ka}} = z^k\ g_{ka},$$

sendo o tensor g_{ka} a métrica da álgebra, que no caso em que a álgebra é semi-simples é sempre inversível, isto é, existe o tensor g^{ab} tal que $g_{ka}\ g^{ab} = \delta^b_k$, sendo assim concluímos que

$$f(\varphi_a)\, g^{ab} = z^k\ \underbrace{g_{ka}\ g^{ab}}_{\delta^b_k} \quad \Rightarrow \quad z^b = f(\varphi_a)\, g^{ab}.$$

Isso garante a existência de um elemento $z \in \mathcal{Z}$ tal que toda função de classe $f(\varphi_a)$ possa ser escrita como

$$f(\varphi_a) = tr(z\ \varphi_a).$$

□

Considerando o teorema 4.1, podemos dizer que

$$M_{abc} = Tr(\varphi_{abc}) = tr(z\ \varphi_{abc}).$$

Resta agora saber para quais valores de z a função de partição será quase topológica ou pelos menos possui propriedades análogas às da quase topológica. Note que no caso em que $z = \varphi_0$, que é a identidade da álgebra de grupo, ficamos com $M_{abc} = tr(\varphi_{abc})$, que é o caso em que a álgebra é uma álgebra de Hopf e o peso é o mesmo que foi definido no modelo de Kuperber. Portanto, para $z = \varphi_e$ a teoria é quase topológica. No caso de grupos abelianos qualquer elemento da álgebra será um elemento do centro da álgebra, então o elemento z mais geral possível é $z = z^k\varphi_k$ o que significa que podemos parametrizar a teoria pelos coeficientes z^k, como será discutido a seguir.

4.2 Teorias de Gauge com Grupo de Gauge $\mathbb{Z}_2$

Passemos a considerar o caso em que o grupo de gauge é $\mathbb{Z}_2 = \langle (-1)^g :\ g = 0, 1\rangle$[2]. Assim a base da álgebra de grupo é formada por $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ e um elemento geral do centro

[2]Algumas vezes usamos a notação gh para simbolizar o produto de $(-1)^g(-1)^h$, isto é, $gh \equiv (-1)^g(-1)^h = (-1)^{g+h}$.

da álgebra de grupo é dado por $z = \gamma\ \varphi_0 + \eta\ \varphi_1$. Considerando $\varphi_0 = (1,0)$ e $\varphi_1 = (0,1)$, escrevemos $z = (\gamma, \eta)$.

O peso M_{abc} é então dado por

$$M_{abc} = tr\,(z\ \varphi_{abc}) = \gamma\ tr\,(\varphi_{abc}) + \eta\ \ tr\,(\varphi_1\varphi_{abc})\,. \tag{4.1}$$

Conforme já discutimos, a teoria é quase topológica quando $z = (1,0)$, e portanto a teoria será quase topológica quando $z = (\gamma, 0)$, pois a constante γ é só um fator de escala na função de partição. Antes de prosseguirmos em nossa busca por pontos calculáveis da função de partição, vamos calcular explicitamente o valor da mesma para uma teoria de gauge definida sobre duas variedades tridimensionais de interesse em física, que são elas S^3 e $S^1 \times S^1 \times S^1$.

Exemplo 4.1 *Cálculo da Função de Partição sobre S^3, no Caso Quase Topológico $z = (\lambda, 0)$.*

No capítulo 2 construímos um diagrama simplificado de Heegaard para a variedade S^3 no exemplo 2.1, e para este exemplo vamos considerar a mesma triangulação $\mathcal{L}$ usada no exemplo 2.1, que consiste de dois tetraedros com todas as faces coladas. É importante notar que tal diagrama não é único, mas o fato de a função de partição ser quase topológica para $z = (1,0)$ garante que podemos calcular a mesma em uma ou noutra triangulação (diagrama), bastando multiplicar o resultado por um fator de escala que depende dos números de tetraedros, faces e links (estabilizações, curvas azuis e curvas vermelhas). Outro detalhe importante é que nesse caso, $z = (1,0)$, a álgebra é uma álgebra de Hopf e o peso das faces é o traço na representação regular, portanto são válidos sliding, two-point move e a propriedade da co-integral.

A função de partição que queremos calcular é a esquematizada na figura 4.4.

Usando sliding, two-point move e a propriedade da co-integral vamos simplificar o diagrama da figura 4.4. No que segue, as curvas que estão sendo manipuladas estão desenhadas tracejadas para simples efeito de identificação e facilitar na visualização. No diagrama da figura 4.5 **(a)** aplicamos uma sequência de um sliding e um two-point move na curva vermelha em destaque, obtendo assim o diagrama desenhado na figura 4.5 **(b)**. Repetimos o mesmo procedimento no diagrama da figura 4.5 **(b)** e obtemos um novo diagrama, que é o desenhado na figura 4.5 **(c)**.

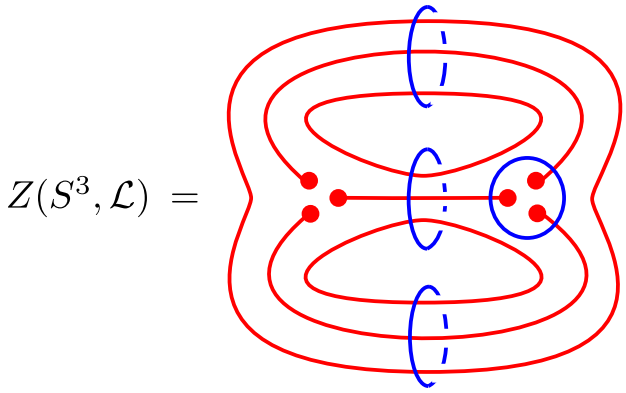


Figura 4.4: diagrama de Heegaard de S^3

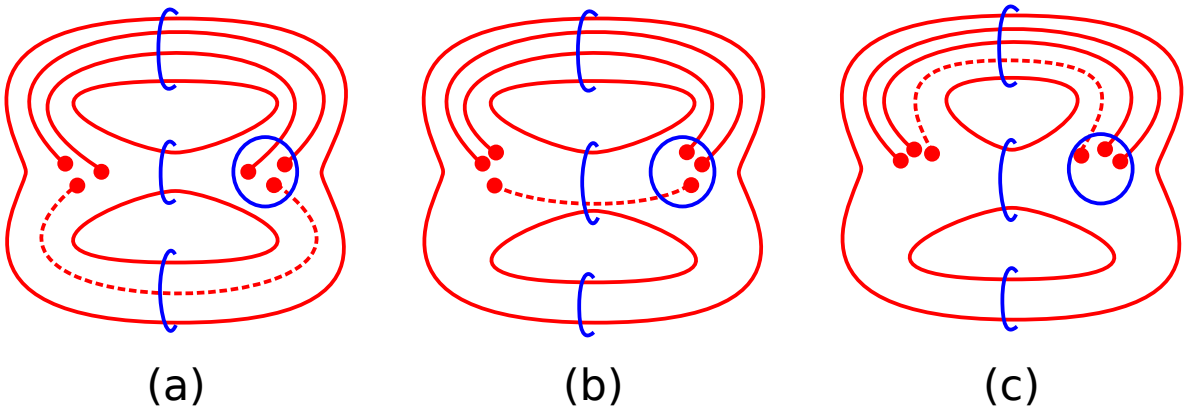


Figura 4.5: cálculo da função de partição para S^3, parte 1.

Note que as três curvas vermelhas, em destaque na figura 4.6 **(a)**, são paralelas e portanto duas delas podem sem retiradas do diagrama, pelo mesmo argumento usado na prova da invariância topológica dos passos de Pachner, no capítulo anterior. Assim, obtemos o diagrama desenhado na figura 4.6 **(b)**, com dois círculos triviais separados do restante do diagrama. Uma outra sequência de slidings e two-point moves transformam o diagrama da figura 4.6 **(b)** no diagrama da figura 4.6 **(c)**, o qual pode ser transformado no diagrama da figura 4.7 **(a)** com o uso da propriedade da co-integral.

Mais uma vez, utilizamos uma sequência de slidings e two-point moves no diagrama da figura 4.7 **(a)** e obtemos o diagrama desenhado em 4.7 **(b)**, o qual pode ser transformado no diagrama 4.7 **(c)** com o uso da propriedade da co-integral.

Não é difícil perceber que o diagrama da figura 4.7 **(c)** pode ser transformado no diagrama 4.8 **(a)**, e esse por sua vez no diagrama 4.8 **(b)**. O restante dos passos esquematizados na figura 4.8 é trivial. O resultado final é o diagrama desenhado na figura

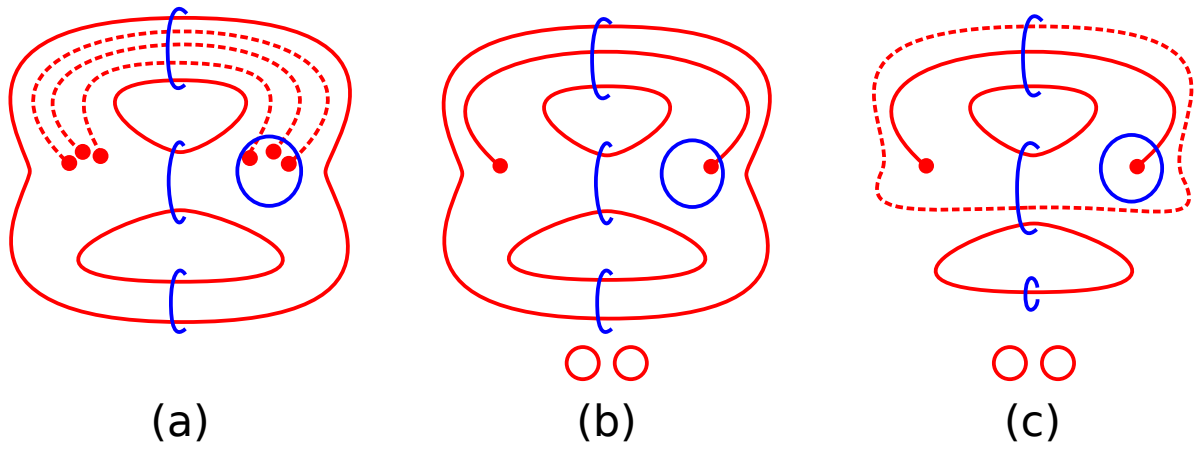


Figura 4.6: cálculo da função de partição para S^3, parte 2.

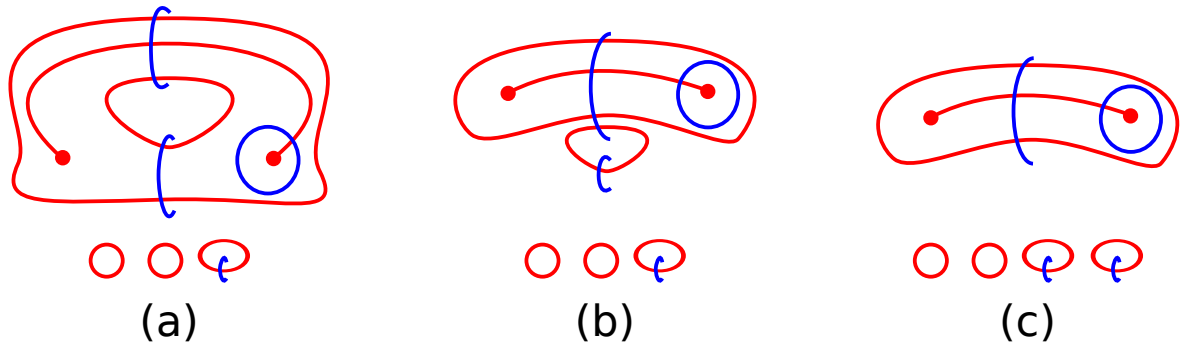


Figura 4.7: cálculo da função de partição para S^3, parte 3.

4.8 **(d)**, que é o produto de ciclos triviais com algumas estabilizações.

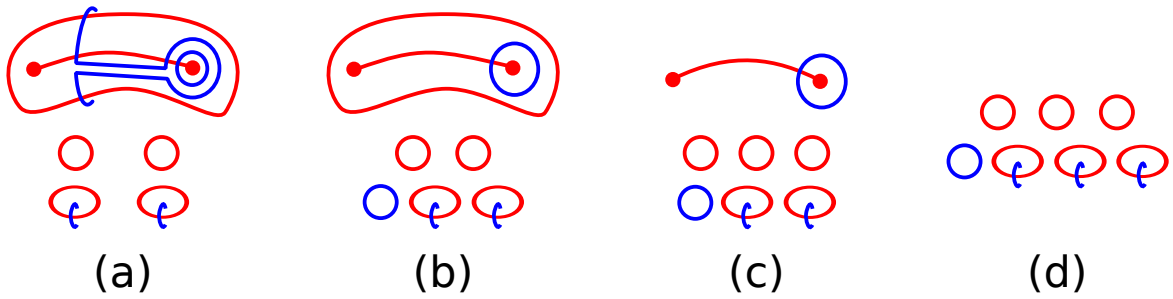


Figura 4.8: cálculo da função de partição para S^3, parte 4.

Este resultado fornece o valor da função de partição. Visto que todos os constituintes do diagrama da figura 4.8 **(d)** são numericamente iguais à dimensão da álgebra (que nesse caso é $d = 2$), obtemos

$$Z(S^3, \mathcal{L}) = d^3\ d^1\ d^3 = 2^7.$$

Pode-se extrair, do resultado acima, o valor da função de partição topológica, para isso basta usar o resultado obtido na equação 3.5, e assim obtemos o termo topológico da função de partição, que é

$$Z^{TOP}(S^3) = d^{2-4-6} Z(S^3, \mathcal{L}) = 2^{-8}\ 2^7 = \frac{1}{2}.$$

Imagine agora que queiramos calcular a função de partição numa nova rede $\mathcal{L}'$, a qual possui n_T, n_F e n_L tetraedros, faces e links, respectivamente. Considere ainda que não queremos saber o valor da função de partição no ponto $z = (1, 0)$ especificamente e sim sobre a reta $z = (\lambda, 0)$. Uma vez que conhecemos o termo topológico da função isto pode ser calculado de forma extremamente simples,

$$\begin{aligned} Z'(S^3, \mathcal{L}') &= \lambda^{n_F}\ Z^{TOP}(S^3)\ d^{n_F + n_L - n_T} \\ &= (2\lambda)^{n_F}\ 2^{n_L - n_T - 1}. \end{aligned}$$

$\diamond \diamond \diamond$

Conforme veremos ao final do capítulo 4, o resultado obtido no exemplo acima corresponde ao limite de baixas temperaturas das teorias de gauge na rede com grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$ e cuja rede é na verdade uma discretização de S^3.

Exemplo 4.2 *Cálculo da Função de Partição sobre $S^1 \times S^1 \times S^1$, no Caso Quase Topológico $z = (\lambda, 0)$.*

Um caso de bastante interesse em física é aquele no qual definimos uma teoria de campos sobre a variedade $S^1 \times S^1 \times S^1$, que corresponde a uma teoria com condições periódicas de contorno. Considere, por simplicidade, uma rede cúbica formada por um único cubo, conforme mostrado na figura 4.9 **(a)**. Vamos primeiramente construir uma rede que seja a discretização de $S^1 \times S^1 \times S^1$, mas que não é uma triangulação, e em seguida vamos triangularizá-la. Para simples efeito de identificação todos os links estão enumerados com números de 1 à 12. As seis faces que constituem este cubo são as seguintes (usando a convenção para nomenclatura das faces definida no capítulo 3): $A[1, 2, 3, 4]$, $B[2, 10, 7, 9]$, $C[1, 11, 8, 10]$, $D[5, 6, 7, 8]$, $E[4, 12, 5, 11]$ e $F[3, 9, 6, 12]$, na figura 4.9 **(a)** as faces A e B estão em destaque por motivos que ficarão claros a seguir.

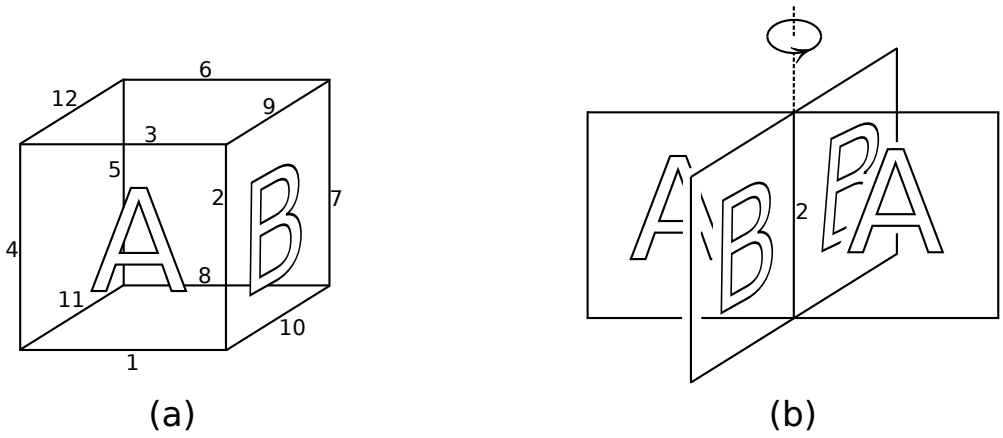


Figura 4.9: rede cúbica com condições periódicas de contorno.

Impor condições periódicas de contorno significa dizer que as faces paralelas deste cubo estão identificadas umas as outras, sendo assim temos que a face A está identificada com a face D, a face B com a face E e a face C com a face F. O resultado é uma rede formada por apenas três faces A, B e C. Os links desta rede também estão identificados, note que os links 2, 4, 7 e 5 formam um mesmo link após a identificação das faces, o mesmo vale para os links 1, 3, 6 e 8 e os links 9, 10, 11 e 12. Portanto o resultado final é uma rede com apenas três links (1, 2 e 3) e três faces (A, B e C).

O diagrama simplificado de Heegaard proveniente desta rede é então formado por três curvas azuis e três curvas vermelhas. Falta agora saber em que ordem tais cruzamentos ocorrem. Na figura 4.9 **(b)** podemos ver um desenho esquemático que ajuda nesta visualização. Veja que se circularmos ao redor do link 2, na ordem sugerida no desenho, a sequência em que as faces são interceptadas é a seguinte: $2[AB^{-1}A^{-1}B]$, portanto esta deve ser a ordem dos cruzamentos no diagrama de Heegaard. Usando o mesmo raciocínio não é difícil perceber que a ordem dos cruzamentos para os links 1 e 3 são as seguintes: $1[CA^{-1}C^{-1}A]$ e $3[BCB^{-1}C^{-1}]$, e com isso o diagrama de Heegaard fica conforme mostrado na figura 4.10

O cálculo da função de partição pode ser feito explicitamente por meio das contrações dos tensores M_{abc} e $\Delta^{a_1 a_2 \cdots a_k}$, no entanto estamos considerando $\mathbb{Z}_2$ como sendo o grupo de gauge, e este por sua vez é um grupo abeliano, o que significa que álgebra de grupo é (co-)comutativa. O fato de tal álgebra ser co-comutativa implica que podemos rearranjar a ordem dos cruzamentos entre as curvas da maneira que nos for mais conveniente, sendo assim a função de partição resume-se no cálculo do diagrama da figura 4.11 **(a)**, que nada

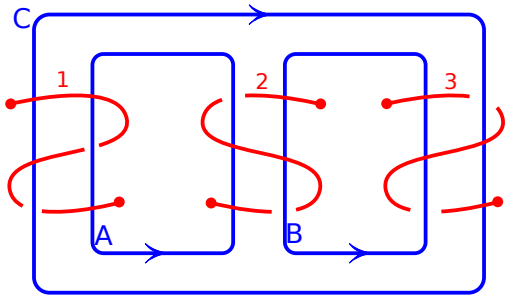


Figura 4.10: diagrama simplificado de Heegaard de $S^1 \times S^1 \times S^1$

mais é que o diagrama da figura 4.10 com a ordem dos cruzamentos alterados.

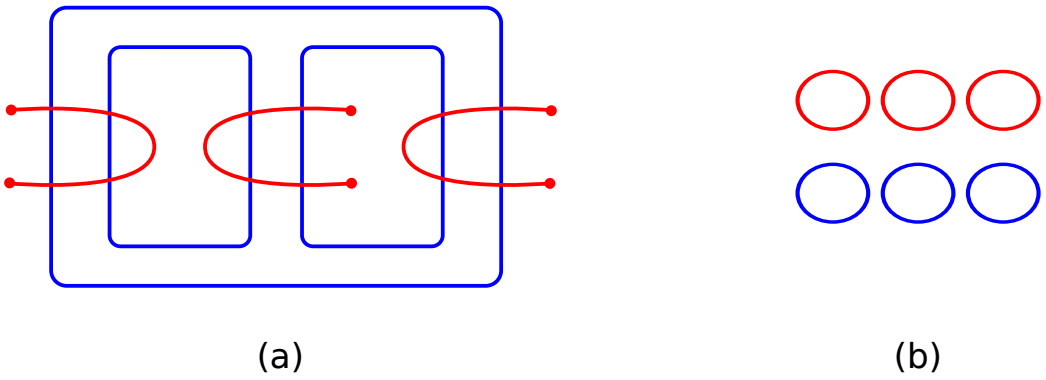


Figura 4.11: cálculo da função de partição para $S^1 \times S^1 \times S^1$.

Trivialmente vemos que, com alguns two-point moves, o diagrama da figura 4.11 **(a)** resume-se ao diagrama da figura **(b)**, o qual é numericamente igual à dimensão da álgebra elevado à sexta potência, portanto

$$Z\left(S^1 \times S^1 \times S^1, \mathcal{L}\right) = d^6 = 2^6,$$

se considerarmos $z = (1, 0)$. No caso mais geral em que $z = (\lambda, 0)$ ficamos com

$$Z\left(S^1 \times S^1 \times S^1, \mathcal{L}\right) = d^6 = 2^6\ \lambda^3.$$

A maneira como procedemos para discretizar a variedade $S^1 \times S^1 \times S^1$ é análoga à forma como construímos o diagrama de Heegaard proveniente de uma triangulação, no entanto a rede que utilizamos é cúbica. A fim de comparar os resultados conhecidos para redes triangulares com o cálculo da função de partição de $S^1 \times S^1 \times S^1$, vamos triangularizar o cubo desenhado na figura 4.9 **(a)**. Certamente que há várias maneira de se fazer isso, mas visto que a teoria é quase topológica para $z = (\lambda, 0)$, todas essas formas devem ser equivalentes.

Primeiramente fazemos uma subdivisão do cubo conforme ilustrado na figura 4.12 **(a)**, que é muito parecido com o passo de Pachner $(1, 4, 6) \to (4, 10, 10)$. Com isso obtemos, não mais um cubo mas sim uma colagem de pirâmides de faces quadradas (figura 4.9 **(b)**). Na figura **(c)** pode-se ver uma das pirâmides evidenciada para efeito de visualização.

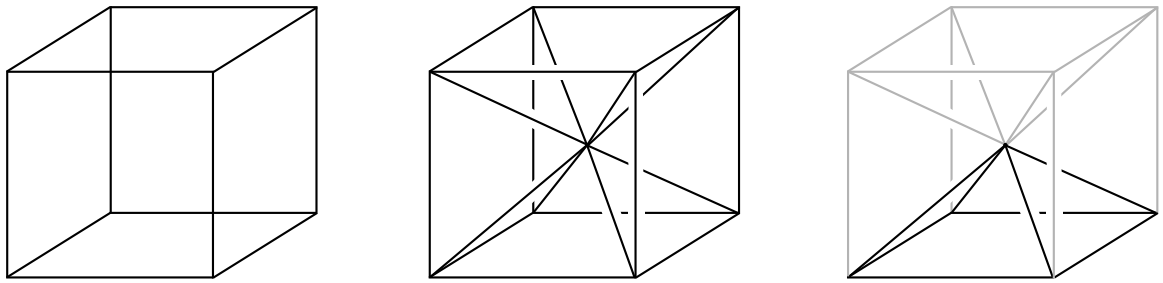


Figura 4.12: Subdivisão de um cubo em pirâmides de base quadrada.

O cubo está agora discretizado em seis pirâmides de faces quadradas e quando impomos as condições periódicas de contorno, na verdade o que estamos fazendo é identificando as bases de duas pirâmides, de modo que o resultado desta identificação são duas pirâmides que compartilham a face quadrada, como mostrado na figura 4.13 **(a)**. Em seguida fazemos uma nova subdivisão traçando-se um novo link que liga os dois vértices de cada uma das pirâmides (figura 4.13 **(b)**) e o resultado são quatro tetraedros colados uns aos outros, semelhante ao passo de Pachner $(2, 7, 9) \to (3, 9, 10)$. Na figura 4.13 **(c)** pode-se ver um dos tetraedros evidenciado.

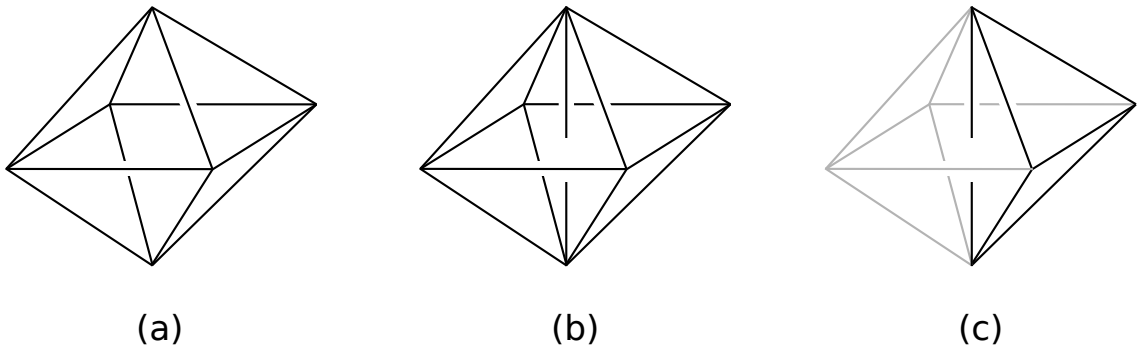


Figura 4.13: em **(a)** duas pirâmides compartilhando uma mesma face e em **(b)** a triangulação desta configuração.

Ao final deste processo o resultado obtido é uma triangulação do cubo. Cada cubo

é subdividido em seis pirâmides, e cada par de pirâmides coladas dão origem a quatro tetraedros, assim para cada cubo da rede ganha-se $4\times\frac{6}{2} = 12$ tetraedros. A triangulação do cubo desenhado na figura 4.9 possui portanto 12 tetraedros. Falta ainda contabilizarmos os números de faces e links desta triangulação. Na figura 4.12 **(b)** pode-se ver que o número de faces e links são, respectivamente, 15 e 11, lembrando que estamos considerando que as faces paralelas estão identificadas assim como os respectivos links. Na colagem subdividimos a colagem de duas pirâmides, conforme ilustrado na figura 4.13, ganhamos 3 novas faces e um novo link. Portanto, visto que para triangularizar o cubo da figura 4.12 são necessárias mais três subdivisões das pirâmides coladas, concluímos que o número de faces aumenta em $3 \times 3 = 9$ unidades e o número de links em $3 \times 1 = 3$ unidade, portanto o resultado final é uma triangulação com 12 tetraedros, 24 faces e 14 links. Mas o que podemos dizer sobre o gênero do diagrama de Heegaard antes e após a triangulação? O handlebody do diagrama de Heegaard de um cubo simples, como o da figura 4.12 **(a)** é a vizinhança tubular do desenhado da figura 4.14 **(a)**, e quando fazemos a identificação das faces paralelas obtemos uma diagrama de gênero três. Já o diagrama de Heegaard do cubo subdividido em pirâmides é um pouco mais complicado de visualizar, o handlebody deste diagrama é a vizinhança tubular do desenho feito na figura 4.14 **(b)**. Não é muito difícil perceber que o gênero desde handlebody é 7, após identificarmos as faces paralelas do cubo o resultado obtido é um handlebody de gênero $7 + 3 = 10$. Na figura 4.13 vê-se que quando subdividimos a colagem de duas pirâmides o gênero aumenta em uma unidade, assim como no passo de Pachner $(2, 7, 9) \to (3, 9, 10)$. Portanto o gênero do diagrama de Heegaard obtido da triangulação de $S^1 \times S^1 \times S^1$ é 13.

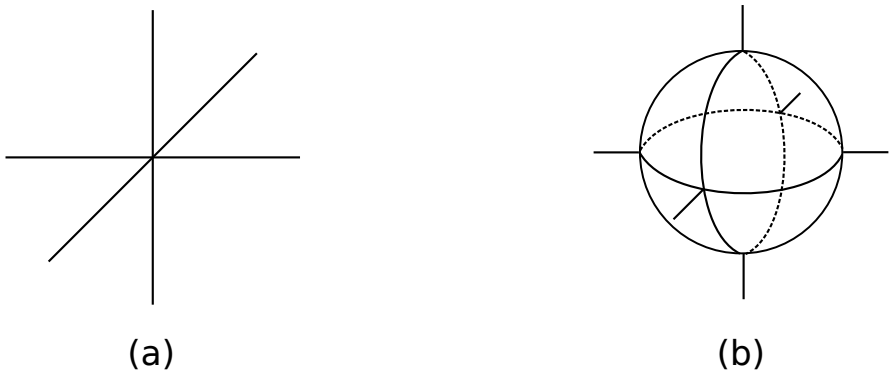


Figura 4.14: em **(a)** o 1−esqueleto da rede dual a uma rede cúbica e em **(b)** o 1−esqueleto da rede dual à subdivisão da rede cúbica.

Resumindo, a discretização de $S^1 \times S^1 \times S^1$ por um cubo com as faces paralelas identificadas possui gênero 3, 3 faces e 3 links. Já a discretização desta mesma variedade em tetraedros possui gênero 13, 24 faces e 14 links. Uma vez que calculamos a função de partição de $S^1 \times S^1 \times S^1$ para redes cúbicas, podemos agora calcular a função de partição para a rede triangular bastando saber a diferença entre o gênero, número de faces e links destas redes. Seja $\mathcal{L}_C$ a rede cúbica e seja $\mathcal{L}_T$ a rede triangular obtida da triangularização da rede cúbica e usando o resultado obtido no final do capítulo 3 obtemos

$$\begin{aligned} Z(S^1 \times S^1 \times S^1, \mathcal{L}_T) &= \underbrace{Z(S^1 \times S^1 \times S^1, \mathcal{L}_C)}_{2^6} d^{3-13} d^{24-3} d^{14-3} \\ &= 2^{28}. \end{aligned}$$

Uma vez que conhecemos a função de partição para uma rede triangular, podemos calcular a parte da função de partição que depende somente da topologia, isto é, podemos calcular $Z^{TOP}(S^1 \times S^1 \times S^1)$ usando

$$\begin{aligned} Z^{TOP}(S^1 \times S^1 \times S^1) &= Z(S^1 \times S^1 \times S^1, \mathcal{L})\ d^{-n_F - n_L + n_g} \\ &= 2^{28}\ 2^{-24-14+13} \\ &= 2^3. \end{aligned}$$

$\diamond \diamond \diamond$

Existem ainda outros valores de z para os quais a função de partição seja calculável, mas antes de encontrá-los discutiremos a invariância da função da partição por transformações de base.

4.2.1 Invariância da Função de Partição por Transformações de Base

A função de partição é invariante por transformações de base pois todos os índices dos tensores estão somados, isto é, não há índices livres, e quando isso ocorre o resultado é invariante por tais tipos de transformação. Isso pode ser visto se considerarmos A_i^j uma matriz a qual é uma transformação de base ($\det A \neq 0$). Um tensor do tipo $T^{b_1 b_2 \cdots b_n}_{a_1 a_2 \cdots a_k}$

transforma-se da seguinte maneira

$$\overline{T}^{b_1 b_2 \cdots b_n}_{a_1 a_2 \cdots a_k} = \{A^{-1}\}^{a_1}_{a'_1}\{A^{-1}\}^{a_2}_{a'_2}\cdots\{A^{-1}\}^{a_k}_{a'_k}\; T^{b_1 b_2 \cdots b_n}_{a_1 a_2 \cdots a_k}\; A^{b'_1}_{b_1} A^{b'_2}_{b_2}\cdots A^{b'_n}_{b_n},$$

conforme pode ser visto na figura 4.15.

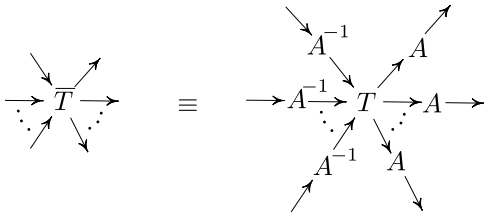
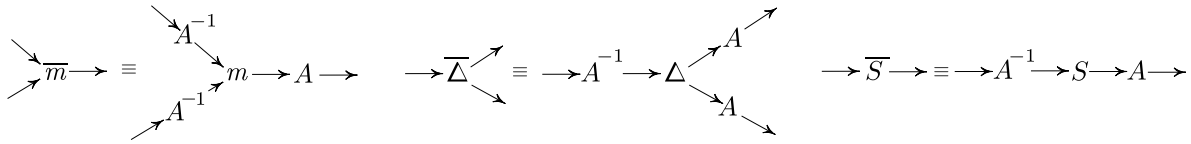
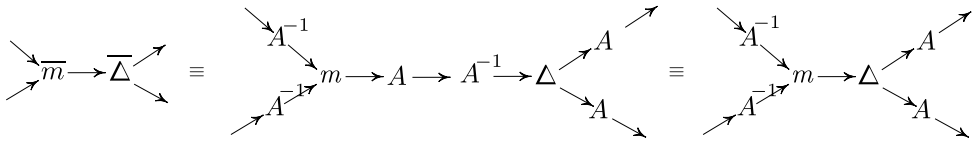


Figura 4.15: mudança de base de um tensor arbitrário.

Sendo assim os tensores Δ^{bc}_a, m^c_{ab} e S^y_x transformam-se como mostrado na figura 4.16 **(a)**. Observe na figura 4.16 **(b)** que, após uma transformação de base, quando há a contração de dois índices há um produto de A com A^{-1}, que é o mapa identidade e portanto nada muda. Como já dito antes, na função de partição do formalismo de Kuperberg todos os índices estão contraídos e isso significa que o resultado final independe da transformação de base.



(a)



(b)

Figura 4.16: mudança de base das contantes de estrutura da (co-)álgebra.

No entanto, se a transformação de base é tal que não deixa invariante o tensor Δ^{bc}_a e S^y_x, o formalismo de Kuperberg não pode mais ser interpretado como uma teoria de gauge, portanto transformações de base não alteram a função de partição, mas mudam a teoria. Um fato bastante relevante que pode ser estudado por meio de mudanças de base são as dualidades entre modelos de teorias de gauge na rede e o modelo e outros modelos

físicos, como o modelo de Ising, por exemplo. Esse fato foi parcialmente explorado para teorias de campos tridimensionais em [10].

Se estivermos interessados em mudanças de base que não mudam a interpretação do modelo, ou seja, transformações de base que levam as teorias de gauge e novas teorias também de gauge, somente pode-se usar tipos específicos de transformações de base que não alteram os tensores Δ_a^{bc} e S_x^y, caso contrário não estaremos mais tratando de teorias de gauge. Mas isso não é um problema, pois do ponto de vista do cálculo da função de partição, podemos usar a transformação de base que for mais conveniente para tal, mesmo que esta transformação não leve a uma teoria de gauge.

Antes de prosseguirmos, vamos descobrir quais mudanças de base deixam Δ_a^{bc} e S_x^y invariantes, em outras palavras queremos encontrar as transformações lineares A_x^y que satisfaçam as seguintes propriedades

$$\Delta = A^{-1}\Delta AA \Rightarrow \Delta_x^{yz} = \{A^{-1}\}_x^a \Delta_a^{bc} A_b^y A_c^z$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned}
\Delta_x^{yz} &= \{A^{-1}\}_x^a \Delta_a^{bc} A_b^y A_c^z, \\
\Delta_x^{yz} A_j^x &= \underbrace{A_j^x \{A^{-1}\}_x^a}_{\delta_j^a} \Delta_a^{bc} A_b^y A_c^z, \\
\delta_x^y \delta_x^z A_j^x &= \delta_j^a \delta_a^b \delta_a^c A_b^y A_c^z, \\
A_j^y \delta_z^y &= A_j^y A_j^z,
\end{aligned}$$

esse resultado nos diz que $A_j^y = 0$ ou $A_j^y = 1$, e se numa determinada linha houver um elemento igual a um, então todos os outros elementos desta linha devem ser nulos. Para o caso em que o grupo de gauge é o grupo $\mathbb{Z}_2$, temos que as duas únicas transformações de base aceitáveis são as transformações A_0 e A_1 dadas por

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, a transformação identidade e a transformação que permuta os elementos da base.

4.2.2 Pontos Calculáveis da Função de Partição

Já sabemos que a função de partição é calculável no caso em que $z = (\gamma, 0)$, pois assim recuperamos o caso, a menos um fator de escala, em que a álgebra é uma álgebra de Hopf

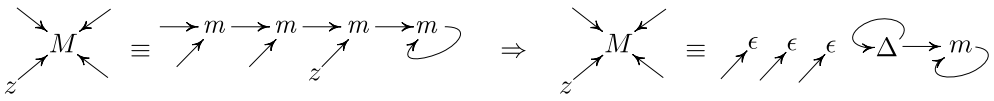
e o peso é o mesmo do definido inicialmente no formalismo de Kuperberg. Conforme mostraremos, outro caso em que a função de partição é calculável é quando $z = (0, 1)$. Nesse caso o peso M_{abc} fica

$$M_{abc} = tr\,(\varphi_1\varphi_{abc}) \quad \Rightarrow \quad M_g = tr\,(\varphi_1\varphi_g),$$

observe que esse caso é equivalente a uma transformação de base do caso em que $z = (1, 0)$, e tal transformação é a transformação A_1, que é uma das transformações que não mudam a interpretação da teoria, então o caso $z = (0, 1)$ é equivalente ao caso em que $z = (1, 0)$ e portanto a função de partição é calculável neste ponto e, pelo mesmo argumento já usado antes, a função de partição é calculável para $z = (0, \eta)$.

Usando um argumento bastante diferente, podemos mostrar que Z também é calculável quando $z = \varphi_0 + \varphi_1 = (1, 1)$, essa demonstração baseia-se no fato de que $z = (1, 1)$ é uma co-integral (co-traço do mapa de co-multiplicação) da álgebra de grupo (apêndice B), portanto é válido a seguinte relação da figura 4.17.

(a)



(b)

Figura 4.17: em **(a)** a co-integral da álgebra de grupo e em **(b)** a parametrização com a co-integral.

O peso M_{abc} fica como mostrado na figura 4.17 **(b)**. Note que cada curva azul contribui com uma estabilização para a função de partição, além disso as outras setas do tensor M_{abc} são na verdade co-unidades, como pode ser visto na figura 4.17 **(b)**. Estas setas estão necessariamente ligadas à tensores $\Delta^{a_1 a_2 \cdots a_k}$ e portanto o resultado são vários ciclos triviais vermelhos e várias estabilizações. Para ser mais preciso teremos n_F estabilizações e n_L ciclos triviais vermelhos, na figura 4.18 temos um exemplo de o que acontece quando M_{abc} é o dado pela figura 4.17 **(b)**.

Concluímos que quando $z = (1, 1)$ a função de partição se trivializa, tudo o que obtemos nesse caso são potências de estabilizações e ciclos triviais vermelhos, mas conforme já

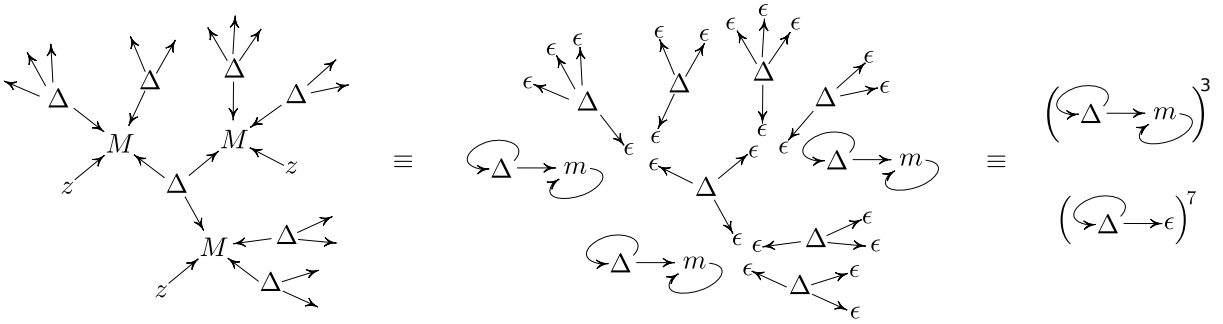


Figura 4.18: o modelo parametrizado com a co-integral é trivialmente fatorável.

discutidos ambos são numericamente iguais à dimensão da álgebra e a função de partição fica

$$Z\left(\mathcal{M},\mathcal{L}\right)=d^{n_F+n_L}.$$

Exemplo 4.3 *Cálculo da Função de Partição para S^3, no Caso $z=(1,1)$.*

Este é de longe o caso mais trivial de todos, pois para qualquer que seja a variedade e a triangulação, a função de partição é a dada acima. No caso particular em que a variedade é S^3 e o diagrama simplificado é o mesmo usado no exemplo 4.1, obtemos

$$Z(S^3,\mathcal{L})=2^{8+6}=2^{14}.$$

Nesse caso a parte topológica da função de partição é

$$Z^{TOP}=1.$$

$\diamond\diamond\diamond$

Resumindo, o que sabemos até agora é que a função de partição Z é calculável em três retas do espaço formado pelos parâmetros γ e η. Tais retas são $(0,\eta)$, $(\gamma,0)$ e (γ,γ). Existe ainda um outro valor de z para o qual Z pode ser calculada, que é o ponto $z=(\gamma,-\gamma)$. Isso pode ser provado simplesmente aplicando a seguinte transformação de base

$$R(\eta)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \eta\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad L(\eta)=R^{-1}(\eta)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \eta^{-1}\end{pmatrix},$$

note que

$$R^b_a=\delta^b_a\ \left(\delta^0_a+\eta\ \delta^1_a\right)\quad\text{e}\quad L^b_a=\delta^b_a\ \left(\delta^0_a+\eta^{-1}\ \delta^1_a\right).$$

O procedimento que usaremos, para mostrar que $z = (1, -1)$ também é um ponto em que a função de partição é calculável, será o seguinte: primeiro mostraremos que o traço $M_g = tr\left((\varphi_0 + \eta\varphi_1)\,\varphi_g\right)$ transforma-se no traço $\overline{M}_g = tr\left((\varphi_0 + \varphi_1)\,\varphi_g\right)$ sobre tal transformação, o que equivale a dizer que este se transforma no traço da co-integral. Em seguida mostraremos que para certos valores do parâmetro η as constantes de estrutura da multiplicação não se alteram e portanto o peso associado às faces ficam exatamente igual ao peso da figura 4.17 **(b)**. Isso é suficiente para o nosso objetivo, pois o peso da figura 4.17, possui a propriedade de separar todo o diagrama, conforme pode ser visto na figura 4.18, o que faz com que a função de partição se trivialize.

Sendo assim, o traço M_g transforma-se, sobre esta mudança de base, da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
\overline{M}_g &= L_g^a\; M_a = \delta_a^b\;\left(\delta_a^0 + \eta^{-1}\;\delta_a^1\right)\;\left(\underbrace{tr(\varphi_a)}_{|G|\delta_a^0} + \eta\;\underbrace{tr(\varphi_1\;\varphi_a)}_{|G|\delta_a^1}\right)\\
&= |G|\;\delta_g^a\left(\delta_a^0 + \delta_a^1\right)\\
&= |G|\;\delta_g^0 + |G|\delta_g^1,
\end{aligned}$$

ou seja, obtemos exatamente o que queríamos

$$\overline{M}_g = tr\left((\varphi_0 + \varphi_1)\;\;\varphi_g\right) = tr\left(z_I\;\varphi_g\right),$$

sendo $z_I = \varphi_0 + \varphi_1$, que é um dos pontos em que a função de partição é calculável.

As constantes de estrutura da álgebra transformam-se da seguinte maneira

$$\overline{m}_{ab}^c = L_a^\alpha\; L_b^\beta\; R_\gamma^c\; m_{\alpha\beta}^{\;\;\gamma},$$

fazendo os cálculos obtemos

$$\begin{aligned}
&\overline{m}_{00}^0 = m_{00}^0 = 1 \qquad , \qquad \overline{m}_{01}^0 = \eta\; m_{00}^1 = 0,\\
&\overline{m}_{00}^1 = \eta\; m_{00}^1 = 0 \qquad , \qquad \overline{m}_{11}^0 = \eta^{-2}\; m_{11}^0 = \eta^{-2},
\end{aligned}$$

portanto para essas constantes de estruturas serão invariantes por essa mudança de base se fizermos

$$\eta^{-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \eta = \pm 1.$$

Para $\eta = 1$ reproduzimos o caso já estudado ($z_I = \varphi_0 + \varphi_1$), por isso $\eta = 1$ não nos interessa. Para $\eta = -1$ obtemos o caso $z = \varphi_0 - \varphi_1$, o qual estamos interessados no momento, passemos então a considerar $\eta = -1$, dessa forma o peso M_{abc} passa a ser o definido na figura 4.18.

Para o cálculo da função de partição resta ainda sabermos o que acontece que os tensores de co-multiplicação sobre tal mudança de base

$$\overline{\Delta}_a^{bc} = R_\beta^b \; R_\gamma^c \; L_a^\alpha \; \Delta_\alpha^{\beta\gamma},$$

assim ficamos com

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_a^{bc} &= R_\beta^b \; R_\gamma^c \; L_a^\alpha \; \delta_\alpha^\beta \; \delta_\alpha^\gamma \\
&= R_0^b \; R_0^c \; L_a^0 + R_1^b \; R_1^c \; L_a^1 \\
&= \delta_a^b \; \delta_a^c \left(\delta_a^0 + \eta \; \delta_a^1\right) \\
&= \Delta_a^{bc} \; \alpha_\eta(a),
\end{aligned}$$

sendo $\alpha_\eta(a) = \delta_a^0 + \eta \; \delta_a^1$, assim o co-traço na nova base fica

$$\overline{\Delta}_a^{ab} = \overline{\Delta}^b = \alpha_\eta(b),$$

note que a função $\alpha_\eta(a)$, recém definida, possui a seguinte propriedade

$$\alpha_\eta(a) \; \alpha_\lambda(a) = \alpha_{\eta\lambda}(a),$$

com isso concluímos que

$$\overline{\Delta}^{a_1 a_2} = \overline{\Delta}_b^{a_1 a_2} \overline{\Delta}^b \;\; \Rightarrow \;\; \overline{\Delta}^{a_1 a_2} = \sum_b \delta_b^{a_1} \; \delta_b^{a_2} \; \alpha_{\eta^2}(b).$$

Tal relação pode ser facilmente generalizada para

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}^{a_1 a_2 \cdots a_n} &= \sum_b \delta_b^{a_1} \; \delta_b^{a_2} \cdots \delta_b^{a_n} \; \alpha_{\eta^n}(b) \\
&= \sum_b \Delta^{a_1 a_2 \cdots a_n} \; \alpha_{\eta^n}(b).
\end{aligned}$$

Resumindo, os tensores $\Delta^{a_1 a_2 \cdots a_n}$ e M_{abc}, sob tal mudança de base, transformam-se da seguinte maneira

$$\begin{cases}
\overline{\Delta}^{a_1 a_2 \cdots a_n} &= \sum_{a_1} \Delta^{a_1 a_2 \cdots a_n} \; \alpha_{\eta^n}(a_1), \\
\overline{M}_{abc} &= tr\left(z_I \; \varphi_{abc}\right) \quad \text{sendo} \quad z_I = \varphi_0 + \varphi_1.
\end{cases}$$

Para o cálculo da função de partição numa rede arbitrária, os tensores $\Delta^{a_1 a_2 \cdots a_n}$ e M_{abc} aparecem com os respectivos índices contraídos uns com os outros, mas o efeito da contração de $M_{abc} = tr\left(z_I \; \varphi_{abc}\right)$ com os tensores $\overline{\Delta}^{a_1 a_2 \cdots a_n}$ é o mesmo que o mostrado na figura 4.18. Isso significa que todos índices do tensor $\Delta^{a_1 a_2 \cdots a_n}$ estarão contraídos com

co-unidades. Além disso, há uma potência de estabilizações correspondente ao número de faces da triangulação, assim o resultado obtido é

$$\epsilon_{a_1}\epsilon_{a_2}\cdots\epsilon_{a_n}\ \overline{\Delta}^{a_1a_2\cdots a_n} = \sum_b \epsilon_{a_1}\epsilon_{a_2}\cdots\epsilon_{a_n}\delta_b^{a_1}\ \delta_b^{a_2}\cdots\delta_b^{a_n}\ \alpha_{\eta^n}(b) = \left(1+\eta^{I(l)}\right),$$

sendo $I(l)$ o número de incidência de faces no link l.

Lembrando que estamos tratando do caso em que $\eta = -1$, logo

$$\epsilon_{a_1}\epsilon_{a_2}\cdots\epsilon_{a_n}\ \overline{\Delta}^{a_1a_2\cdots a_n} = \left(1+(-1)^{I(l)}\right) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad I(l) = \text{ímpar}, \\ 2 & \text{para} \quad I(l) = \text{par}. \end{cases}$$

Finalmente a função de partição, para $z = \varphi_0 - \varphi_1$, fica

$$Z\left(\mathcal{M},\mathcal{L}\right) = 2^{n_F}\prod_l \left(1+(-1)^{I(l)}\right),$$

o que significa que a função de partição em $(1,-1)$ será nula se houver pelo menos um link com incidência de faces ímpar, caso contrário a função de partição fica

$$Z\left(\mathcal{M},\mathcal{L}\right) = 2^{n_F+n_l}.$$

O ponto $(1,-1)$ certamente é um ponto trivialmente topológico da teoria, uma vez que a função de partição depende da triangulação, mas mesmo assim é possível que a função de partição seja trivialmente calculada neste caso.

Obtemos então quatro pontos para os quais a função de partição é calculável, são eles: $z = (1,0)$, $z = (0,1)$, $z = (1,1)$ e $z = (1,-1)$. Considere o espaço formado pelos parâmetros γ e η de z, cada possível valor de z corresponde a um ponto desde espaço definido por $\langle z = (\gamma,\eta) \in \mathbb{K}\times\mathbb{K} : z \in Z\left(\mathcal{A}\right)\rangle$. Visto que o fato de Z ser calculável nos pontos descritos acima implica que Z é calculável nas retas: $z = (\gamma,0)$, $z = (0,\eta)$, $z = (\gamma,\gamma)$ e $z = (\gamma,-\gamma)$. Na figura 4.19 temos um gráfico do espaço formado pelos parâmetros de z e as respectivas retas para as quais Z é calculável.

Destas quatro retas em que a função de partição é calculável somente dois pontos correspondem a uma função de partição topológica, que são os pontos $(0,1)$ e $(1,0)$. Pode-se parametrizar uma teoria de gauge em função dos parâmetros γ e η, assim cada modelo físico corresponde a uma curva no espaço de tais parâmetros. Decidir se uma teoria será quase topológica, ou se a função de partição será calculável, é uma questão de saber se a curva que corresponde a um dado modelo passa por algum dos pontos

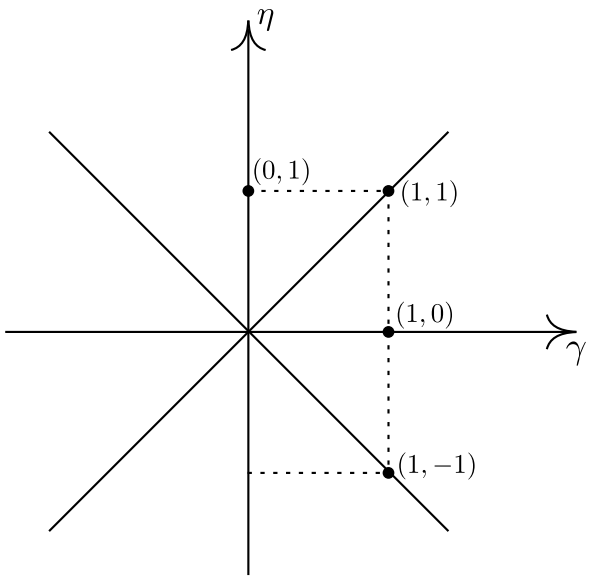


Figura 4.19: pontos calculáveis da função de partição para grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$.

desenhados na figura 4.19, ou mesmo se esta curva intercepta alguma das quatro retas desenhadas na mesma figura. A seguir, vamos tratar de dois modelos específicos, que são os casos em que a ação do sistema é a spin-gauge e a ação de Wilson.

4.3 Modelos Físicos

Os modelos físicos são definidos se definirmos funções $T : G \to \mathbb{K}$ de classe tais que a ação do sistema numa dada configuração seja

$$S\left(conf\right) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \left\{ T\left[U(f)\right] + T\left[U^{-1}(f)\right] \right\},$$

e o peso das faces fica $M(g) = e^{\beta\left\{T[g]+T\left[g^{-1}\right]\right\}}$. Assim, usando 4.1 ficamos com a seguinte igualdade

$$M\left(g\right) = tr\left(z\ \varphi_g\right) = \gamma\ tr\left(\varphi_g\right) + \eta\ tr\left(\varphi_{-g}\right). \tag{4.2}$$

Na equação (4.2) o peso associado às faces da triangulação é parametrizado em termos dos coeficientes γ e η, mas este pode ainda ser parametrizado em termos dos coeficientes M_r $(r = 0, 1)$ da expansão em caracteres da função $M(g)$, então é conveniente que encontremos uma relação entre essas duas parametrizações distintas de $M(g)$. Tal dependência pode ser obtida usando a expansão em caracteres (tratadas no apêndice C). Vale lembrar

que estamos considerando $\mathbb{Z}_2$ como sendo o grupo de gauge, e as duas únicas representações irredutíveis e unitárias de $\mathbb{Z}_2$ são as seguintes (ver apêndice C),

$$\chi_r(g) = g^r, \qquad r = 0, 1,$$

assim qualquer função de classe, por exemplo $M(g)$, pode ser expandida em caracteres da seguinte forma

$$M(g) = \sum_r M_r \chi_r(g),$$

sendo M_r's os os coeficientes da expansão, os quais são dados por

$$M_r = \frac{1}{|G|} \sum_g M(g) \chi_r\left(g^{-1}\right), \tag{4.3}$$

portanto, no caso em que $G = \mathbb{Z}_2$ obtemos

$$M(g) = M_0\chi_0(g) + M_1\chi_1(g) = M_0 + (-1)^r M_1, \tag{4.4}$$

e os coeficientes são do tipo

$$M_r = \frac{1}{2}\left[M(+1) + (-1)^r M(-1)\right].$$

A função tr também é uma função de classe, assim podemos expandi-la em caracteres da seguinte maneira

$$tr(\varphi_g) = \sum_r t_r \chi_r(g),$$

sendo t_r os coeficientes da expansão dados por

$$t_r = \frac{1}{|G|} \sum_g tr(g)\, \chi_r(g^{-1}),$$

e no caso em que o grupo é o grupo $\mathbb{Z}_2$ ficamos com

$$t_r = \frac{1}{2}\left(\underbrace{tr(+1)}_{=2}\chi_r(+1) + \underbrace{tr(-1)}_{=0}\chi_r(-1)\right) = 1, \qquad \forall r,$$

e portanto

$$tr(\varphi_g) = \chi_0(g) + \chi_1(g).$$

Substituindo este resultado na equação (4.2) obtemos

$$\begin{aligned} M_0\chi_0(g) + M_1\chi_1(g) &= \gamma\{\chi_0(g) + \chi_1(g)\} + \eta\left\{\underbrace{\chi_0(-g)}_{\chi_0(g)} + \underbrace{\chi_1(-g)}_{-\chi_1(g)}\right\} \\ &= (\gamma+\eta)\chi_0(g) + (\gamma-\eta)\chi_1(g), \end{aligned}$$

e com isso tiramos as relações entre as duas parametrizações de $M(g)$, que são

$$\begin{cases} M_0 &= \gamma + \eta, \\ M_1 &= \gamma - \eta. \end{cases} \tag{4.5}$$

Agora vamos considerar separadamente o modelo cuja a ação é a spin-gauge e o modelo cuja a ação é a ação de Wilson.

4.3.1 Ação de Wilson

Consideremos o modelo cuja ação é a ação de Wilson, ou seja, $T(g) = \frac{1}{2}tr(g) - \frac{1}{2}$, sendo o traço tomado na representação regular, desta forma a ação do modelo fica definifa por

$$S = \sum_f \left\{ \frac{1}{2}\left[tr(g) + tr(g^{-1})\right] - 1 \right\} = \sum_f \left\{ \frac{1}{2}\left(g + g^{-1}\right) - 1 \right\},$$

assim o peso associado a cada face fica

$$M(g) = e^{\beta\left\{\frac{1}{2}\left(g+g^{-1}\right)-1\right\}}.$$

Os coeficientes M_r da expansão em caracteres de $M(g)$ são dados pela equação 4.3, veja

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{1}{|G|}\sum_{g=0}^{1} M(g)\chi_r(g^{-1}) \\ &= \frac{1}{2}\left[M(0) + M(1)(-1)^r\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^r e^{-2\beta}\right], \end{aligned}$$

e portanto os coeficientes são

$$\begin{cases} M_0(\beta) = \frac{1}{2}\left(1 + e^{-2\beta}\right), \\ M_1(\beta) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2\beta}\right). \end{cases} \tag{4.6}$$

Vê-se que os coeficientes M_0 e M_1 não são independentes, pois estão parametrizados pelo parâmetro β. A fim de desenharmos a curva correspondente a esse modelo no espaço dos parâmetros (γ, η), considere a mudança dos parâmetros (M_0, M_1) para os parâmetros (γ, η), conforme descrito na equação (4.5), assim obtemos

$$\begin{cases} \gamma(\beta) &= \frac{1}{2} \\ \eta(\beta) &= \frac{1}{2}e^{-2\beta} \end{cases} \tag{4.7}$$

a curva descrita em (4.7) é a curva que descreve o modelo de Wilson no espaço dos parâmetros (γ, η) e tal é uma reta vertical. O parâmetro β pertence ao intervalo $-\infty < \beta < +\infty$ portanto temos que $0 < \eta(\beta) < +\infty$. Veja o gráfico desenhado na figura 4.20.

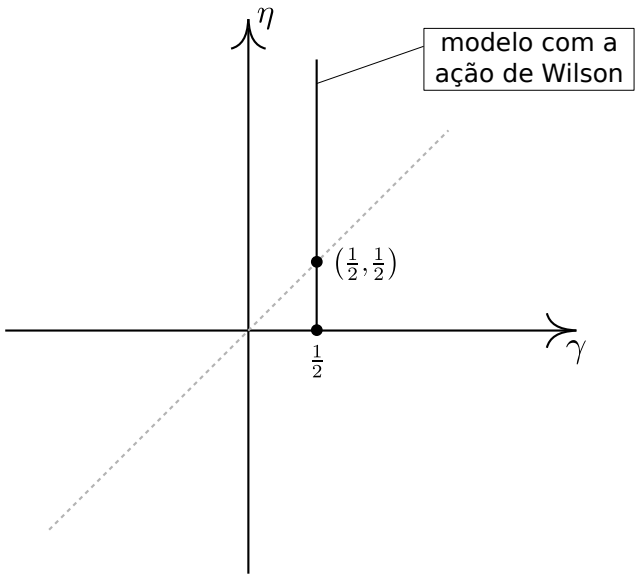


Figura 4.20: curva do modelo com a ação de Wilson.

Note na figura 4.20, que a curva do modelo intercepta duas retas (o eixo coordenado γ e a reta $\eta = \gamma$ desenhada em cinza e pontilhada) para as quais a função de partição é calculável, isso significa que sabemos calcular a função de partição para este modelos pelo menos nos pontos de intersecção entre a curva do modelo e as retas. A questão que devemos responder agora é: para qual(is) valores do parâmetro β o modelo é solúvel? A resposta para esta pergunta é que esse modelo é calculável em dois limites, que são os limite de baixas e altas temperaturas, conforme veremos.

Limite de Baixas e Altas Temperaturas para a Ação de Wilson

O limite de baixas temperaturas corresponde ao limite $\beta \to \pm\infty$, assim o limite de baixas temperaturas do modelo corresponde ao limite $\beta \to \infty$ na rede que descreve o modelo,

$$\lim_{\beta\to\infty} (\gamma(\beta), \eta(\beta)) = \lim_{\beta\to+\infty} \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-2\beta}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

que é justamente o ponto de intersecção entre a curva que descreve o modelo e o eixo coordenado γ, o qual sabemos ser uma reta em que a função de partição é calculável,

conforme discutimos anteriormente.

O limite de altas temperaturas corresponde ao limite $\beta \to 0$, então tal limite de altas temperaturas neste modelo corresponde ao limite $\beta \to 0$ na reta que descreve o modelo de Wilson,

$$\lim_{\beta\to 0}(\gamma(\beta),\eta(\beta)) = \lim_{\beta\to 0}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}e^{-2\beta}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

que corresponde à intersecção da curva que descreve o modelo com a curva $\eta = \gamma$, a qual sabemos ser uma reta em que a função de partição é calculável.

4.3.2 Ação Spin-Gauge

Considere agora o caso em que a ação do sistema é a ação spin-gauge, isto é, $T(g) = \frac{1}{2}tr(g)$, sendo o traço tomado na representação regular, assim a ação do modelo fica definida por

$$S(g) = \sum_f \frac{1}{2}\left[tr(g) + tr(g^{-1})\right] = \sum_f \frac{1}{2}\left(g + g^{-1}\right),$$

e o peso associado a cada curva azul (face) do diagrama é o tensor $M_g = M(g)$ abaixo

$$M(g) = e^{\frac{\beta}{2}tr\left(g+g^{-1}\right)},$$

e portando é válida a seguinte relação

$$e^{\frac{\beta}{2}tr\left(g+g^{-1}\right)} = tr\left(z\varphi_g\right).$$

Assim como feito anteriormente, no caso do modelo da ação de Wilson, podemos parametrizar a função $M(g)$ em termos dos parâmetros (γ,η) de z. A relação entre os parâmetros (γ,η) e os coeficientes da expansão em caracteres da função $M(g)$ é a mesma já calculada anteriormente, ou seja, os coeficientes M_r da expansão em caracteres da função $M(g)$ estão relacioanados com os parâmetros (γ,η) por meio da equação (4.5). Os coeficientes M_r, no caso em que o grupo de gauge é o grupo $\mathbb{Z}_2$, conforme vimos, são dados por

$$M_r = \frac{1}{2}\left(M(+1) + (-1)^r M(-1)\right),$$

e portamos, obtemos para o modelo spin-gauge

$$\begin{cases} M_0(\beta) = \frac{1}{2}\left(e^{\beta} + e^{-\beta}\right) = \cosh\beta, \\ M_1(\beta) = \frac{1}{2}\left(e^{\beta} - e^{-\beta}\right) = \sinh\beta. \end{cases} \tag{4.8}$$

Usando a equação (4.5) obtemos a curva do modelo spin-gauge no espaço dos parâmetros (γ, η), que fica

$$\begin{cases} \gamma(\beta) = \frac{1}{2}e^{\beta}, \\ \eta(\beta) = \frac{1}{2}e^{-\beta}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Observe que como o parâmetro β pertence ao intervalo $-\infty < \beta < \infty$, então teremos que os parâmetros $\gamma(\beta)$ e $\eta(\beta)$ pertence aos intervalos: $0 < \gamma(\beta) < \infty$ e $0 < \eta(\beta) < \infty$. Além disso a curva que descreve o modelo spin-gauge é a curva descrita por $\left(\frac{1}{2}e^{\beta}, \frac{1}{2}e^{-\beta}\right) = \left(\gamma, \frac{1}{4\gamma}\right)$, que corresponde à hipérbole desenhada na figura 4.21.

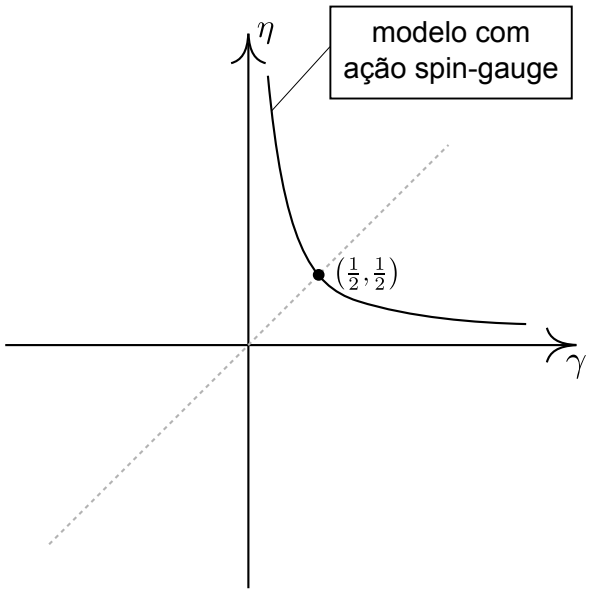


Figura 4.21: curva do modelo com a ação spin-gauge.

Com base na figura 4.21, pode-se ver que o modelo tende assintoticamente a duas retas $\gamma = 0$ e $\eta = 0$ em que a função de partição é calculável, além do ponto de intersecção entre a curva do modelo e a reta $\gamma = \eta$. Esses limites assintóticos e o ponto de intersecção com a reta $\gamma = \eta$ correspondem aos limites de baixas e altas temperaturas, conforme dicutiremos abaixo.

Limite de Baixas e Altas Temperaturas para a Ação Spin-Gauge

O limite de baixas temperaturas, correspondente ao limite $\beta \to \infty$, já foi estudado em [5] no contexto de teorias quase topológicas. O limite de baixas temperaturas corresponde

ao limite $\beta \to \infty$ na rede que descreve o modelo,

$$\lim_{\beta\to+\infty}(\gamma(\beta),\eta(\beta)) = \lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{\beta},\frac{1}{2}e^{-\beta}\right) = (+\infty, 0)\,,$$

ou ainda

$$\lim_{\beta\to-\infty}(\gamma(\beta),\eta(\beta)) = \lim_{\beta\to-\infty}\left(\frac{1}{2}e^{\beta},\frac{1}{2}e^{-\beta}\right) = (0, +\infty)\,.$$

Esses dois limites correspondem ao limite de baixas temperaturas e correspondem às aproximações assintóticas da curva que descreve o modelo spin-gauge e das retas $\gamma = 0$ e $\eta = 0$.

Já o limite de altas temperaturas é obtido tomando o limite $\beta \to 0$, veja

$$\lim_{\beta\to0}(\gamma(\beta),\eta(\beta)) = \lim_{\beta\to0}\left(\frac{1}{2}e^{\beta},\frac{1}{2}e^{-\beta}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),$$

que corresponde à intersecção da curva do modelo spin-gauge com a reta $\gamma = \eta$, a qual sabemos ser uma reta em que a função de partição é calculável.

Portanto, tanto o modelo spin-gauge quanto o modelo de Wilson podem ser calculáveis nos limites de baixas e altas temperaturas. No gráfico da figura 4.22 temos as curvas que descrevem os dois modelos no espaço dos parâmetros (γ, η).

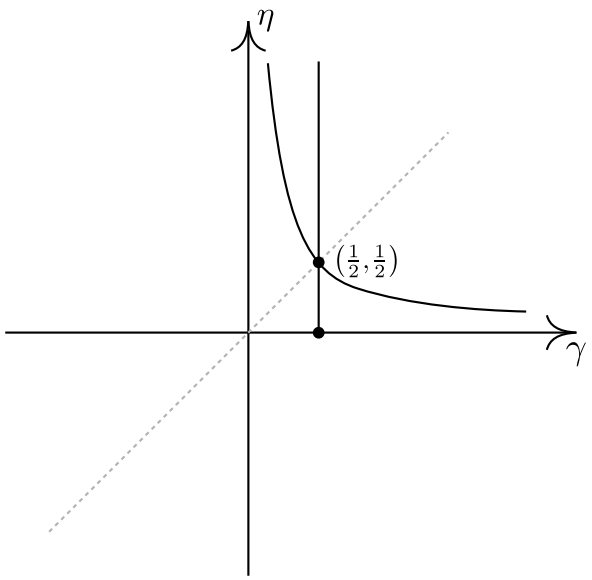


Figura 4.22: curva do modelo com a ação de Wilson e ação spin-gauge.

Neste capítulo vimos como as teorias quase topológicas e as teorias físicas correspondem a subespaços dentro do espaço gerado pelos parâmetros das teorias com simetria $\mathbb{Z}_2$.

Capítulo 5

Considerações Finais

Como alternativa à formulação usual das teorias de gauge na rede, o formalismo de Kuperberg mostrou-se uma poderosa ferramenta na descrição destas teorias, no que diz respeito ao estudo dos limites topológicos e quase topológicos. Embora o formalismo de Kuperberg tenha sido desenvolvido para o estudo de invariantes topológicos de variedades tridimensionais, vimos que este é capaz de descrever a classe de modelos das teorias de gauge na rede, seja este modelo topológico ou não. Estudamos as teorias de gauge puras, sem campo de matéria, por simplicidade. Os diagramas de Heegaard, conforme vimos, são uma boa alternativa às redes, pois estes são muito fáceis de se manipular, fato que pode ser observado no capítulo 3 na prova da invariância topológica da função de partição nos pontos topológicos do espaço dos parâmetros.

Em [1], é apresentada uma prova da invariância topológica da função de partição que é baseada em alguns passos(*moves*) de triagulações, semelhantes aos passos de Pachner, no entanto isso é feito sem diagramas de Heegaard, o que complica consideravelmente as manipulações. A prova da invariância topológica da função de partição apresentada neste trabalho, embora diferente da apresentada em [4, 1] , não tem perda de generalidade, uma vez que toda variedade tridimensional pode ser triangularizada e nossa prova diz respeito a triangulações. Além disso, não apenas fomos capazes de mostrar a invariância topológica da função de partição, mas também de calcular a função de partição numa ou noutra triangulação no caso quase topológico, obtendo

$$Z\left(\mathcal{M},\mathcal{L}\right)=\left(dim\mathcal{A}\right)^{n_F+n_l-n_T}Z^{TOP}\left(\mathcal{M}\right).$$

Vimos que as teorias de gauge podem ser parametrizadas por elementos do centro de

uma álgebra de grupo, e no caso estudado,a saber as teorias de gauge com grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$, esses elementos possuem dimensão dois, o que significa que o espaço dos parâmetros possui esta mesma dimensão. Estas teorias mostraram possuir dois pontos topológicos e outros dois pontos nos quais a função de partição pode ser trivialmente calculada, e em consequência disto, temos duas retas quase topológicas no espaço dos parâmetros. bem como outras duas calculáveis. Foram estudados os modelos de teorias de gauge com grupo de gauge $\mathbb{Z}_2$ com ação de Wilson e spin-gauge. No limite de baixa temperatura, ambos os modelos mostraram tender para teorias quase topológicas, enquanto no limite de alta temperatura mostraram ser calculáveis e trivialmente topológicos, isto é, a função de partição depende apenas do número de constituintes da rede e não depende da topologia. A função de partição, no caso quase topológico, foi calculada explicitamente para o caso da rede ser uma discretização da esfera tridimensional S^3 e uma discretização da variedade $S^1 \times S^1 \times S^1$. Os resultados obtidos foram

$$Z^{TOP}(S^3) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad Z^{TOP}(S^1 \times S^1 \times S^1) = 2^3.$$

Para teorias de gauge com grupo de gauge $\mathbb{Z}_n$, podemos conjecturar que teremos n pontos topológicos, que são: $z = \varphi_i \ , \quad i = 0, 1, \cdots, n-1$, além de mais n pontos trivialmente topológicos.

Embora tenhamos considerado $\mathbb{Z}_2$ como grupo de gauge, o formalismo de Kuperberg permite que tratemos de qualquer grupo compacto. Como pode ser visto, este formalismo trouxe várias vantagens do ponto de vista técnico na descrição das teorias de gauge, como por exemplo a fácil identificação dos limites topológicos das teorias. Este formalismo permite explorar outros aspectos, que não foram exploradas neste trabalho por questões de tempo, mas que estão sendo investigadas. Na construção dos diagramas de Heegaard a partir de uma triangulação (capítulo 2), vimos que cada face da triangulação corresponde a uma curva azul do diagrama, enquanto que cada link corresponde a uma curva vermelha. O fato das curvas azuis e vermelhas serem tratadas em pé de igualdade no formalismo de Kuperberg possibilita um estudo das dualidades das teorias de gauge de uma maneira mais natural, pois no caso de redes tridimensionais cada face da rede corresponde a um link na rede dual e vice-versa. Outra coisa que pode e está sendo investigada é o cálculo do valor esperado de loops de Wilson, que é o cálculo do valor esperado da holonomia quando percorremos uma sequência de links. No formalismo de Kuperberg, existe uma maneira simples de se definir esse valor esperado. Ao que tudo indica, os pontos nos quais

a função de partição é topológica não representam, necessariamente, pontos topológicos no cálculo dos loops de Wilson.

Apêndice A

Handlebodies

Neste apêndice, vamos apresentar uma construção bastante simplificada e intuitiva do espaço topológico o qual chamamos *handlebody*. A grosso modo um handlebody nada mais é que uma bola com várias alças, como mostrado na figura A.1 **(a)**, que por sua vez é homeomorfo ao espaço desenhado na figura A.1 **(b)**. O gênero do handlebody é o número de alças do mesmo.

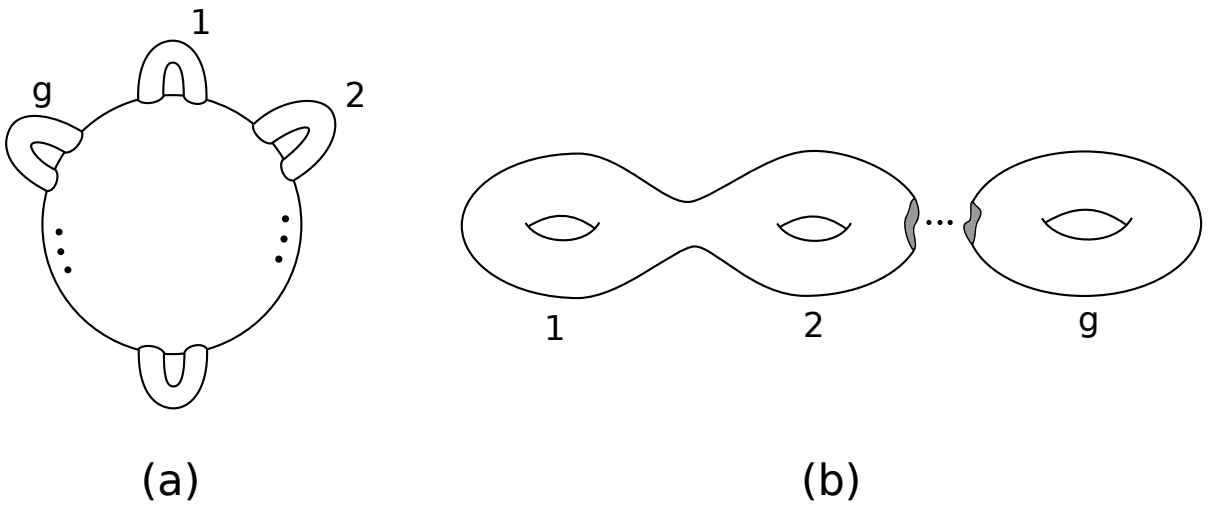


Figura A.1: handlebody de gênero g.

A construção que mostraremos é uma versão simplificada da construção apresentada em [15]. Considere uma bola tridimensional, $B^3 \subset \mathbb{R}^3$, cuja fronteira seja $\partial B^3 = S^2$. Na superfície S^2 de B^3 considere n discos $\{D_1^2, D_2^2, \cdots, D_n^2\}$ disjuntos (tais que $D_i^2 \subset \partial B^3$ e $\partial D_i^2 = S^1$). Em seguida retiramos dois discos $\{D_{i,0}^2, D_{i,1}^2\}$ de cada um dos discos D_i^2 definidos anteriormente. A figura A.2 ilustra o procedimento descrito até agora.

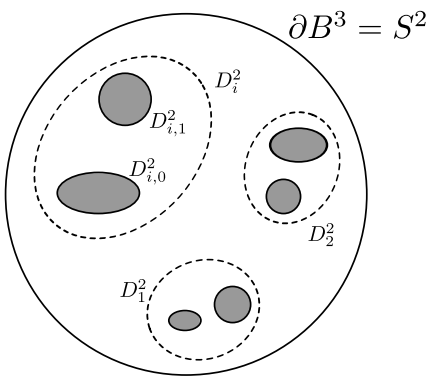


Figura A.2: Discos $D_{i,0}^2$ e $D_{i,1}^2$ retirados da superfície ∂B^3.

Feito isso, considere n espaços topológico $M_i = D^2 \times [0,1]$ (que é homeomorfo a um cilindro) e considere também mapas $h_i : M_i \to \mathbb{R}^3 \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$ tais que

$$h_i\left(D^2 \times \{0\}\right) = D_{i,0}^2 \quad \text{e} \quad h_i\left(D^2 \times \{1\}\right) = D_{i,1}^2,$$

ou seja, h_i são mapas que identificam as fronteiras de M_i com os $2n$ discos retiramos da superfície de B^3, conforme ilustrado na figura A.3.

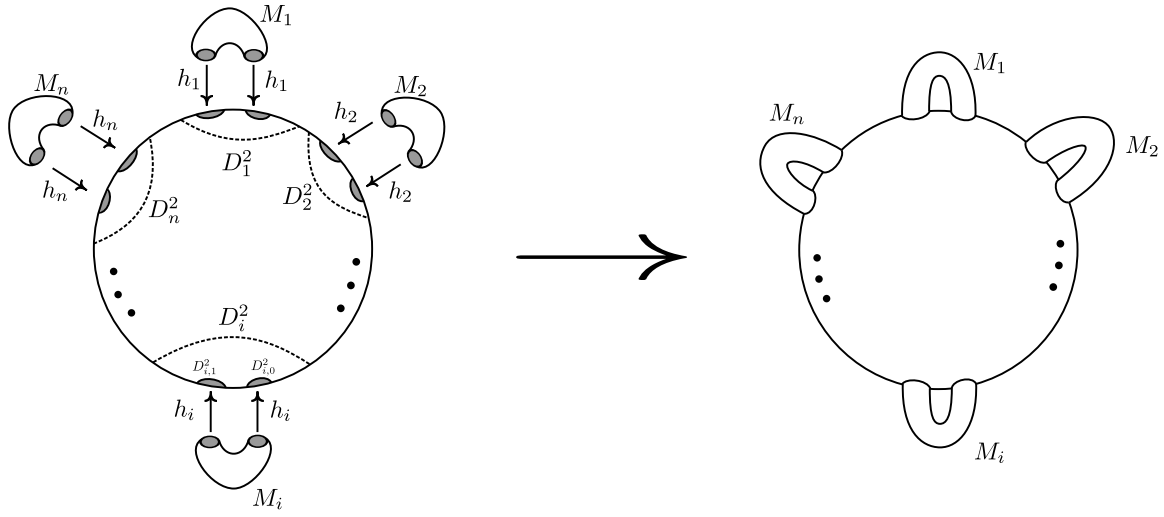


Figura A.3: regra de colagem do espaço M_i com o espaço da figura A.2.

O espaço topológico obtido ao fim deste processo é o que chamamos de handlebody (figura A.1). Não é difícil perceber que o espaço desenhado na figura A.1 **(a)** seja homeomorfo ao desenhado na figura A.1 **(b)**, isto é, que um possa ser deformado continuamente no outro.

Apêndice B

Diagramas de Kuperberg e Álgebras de Hopf

Neste apêndice, definiremos e discutiremos alguns resultados relevantes para este trabalho sobre álgebras de Hopf, mas antes introduziremos uma notação, a qual torna as manipulações algébricas muito mais simples. Tal notação recebe o nome de *diagramas de Kuperberg*, conforme definidos em [4], além disso os diagramas de Kuperberg são bastante utilizados em vários trabalhos, como por exemplo em [21] para a prova da existência da integral em álgebras de Hopf de dimensão finita.

B.1 Diagramas de Kuperberg

Considere V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $K =(\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Um tensor $T^{b_1 b_2 \cdots b_m}_{a_1 a_2 \cdots a_n}$ é um elemento do espaço vetorial $V \otimes V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \otimes \cdots V^*$. Associamos a tal tensor um diagrama de Kuperberg T. Para cada índice inferior do tensor adicionamos uma seta entrando em T e para cada índice superior adicionamos uma seta saindo, de tal forma que as setas que entram são ordenadas no sentido anti-horário e as que saem no sentido horário, como mostrado na figura B.1 **(a)**. Contrações de tensores são feitas bastando ligar as setas correspondentes aos índices repetidos, por exemplo, à quantidade $A^k_{ij} B^{ai}_k$, que possui duas contrações (os índices i e k), associamos o seguinte diagrama de Kuperberg, mostrado na figura B.1 **(b)**.

Se T é uma transformação linear, de um espaço vetorial V nele mesmo, então $T : V \rightarrow$

(a) (b)

Figura B.1: em **(a)** o diagrama de Kuperberg de um tensor arbitrário $T^{b_1 b_2 \cdots b_m}_{a_1 2 a_2 \cdots a_n}$ e em **(b)** como fazer a contração entre dois tensores.

V é da forma $T(v_a) = T^b_a v_b$ sendo $\{v_i\}$ uma base de V, portanto o tensor T^b_a pode ser representado por um diagrama de Kuperberg com uma seta entrando e uma seta saindo como mostrado na figura B.2 **(a)**, o diagrama de Kuperberg do mapa identidade do espaço vetorial é representado por uma única seta como mostrado na figura B.2 **(b)**.

(a) (b)

Figura B.2: em **(a)** o diagrama de Kuperberg de um mapa linear de V em V e em **(b)** o diagrama de Kuperberg do mapa identidade.

O produto tensorial é representado pelo diagrama de Kuperberg de cada tensor desenhados de forma disjuntas. Por exemeplo, o diagrama de Kuperberg de um endomorfismo $f \equiv f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k$ de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}$, sendo f_i um endomorfismo de $\mathcal{A}$, é o mostrado na figura B.3.

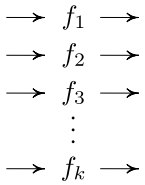


Figura B.3: diagrama de Kuperberg de um endomorfismo de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}$.

Uma quantidade bastante relevante o traço de operadores, que em termos de diagramas de Kuperberg, é representado por uma seta que sai e entrano mesmo diagrama de Kuperberg. Numa transformação linear A^j_i o traço é definido como sendo

$$tr\,(A) = A^i_i = \sum_i A^i_i,$$

e isso significa que o tensor A_i^j está contraído com ele mesmo, portando o traço de um tensor é representado da forma como encontra-se desenhado na figura B.4 **(a)**. O traço do mapa identidade é o representado na figura B.4 **(b)**, e é igual à dimensão da álgebra.

Figura B.4: em **(a)** o traço de uma transformação linear abitrária e em **(b)** o traço do mapa identidade.

Diagramas de Kuperberg em que não há setas sobrando, isto é, em que todas as setas de todos os tensores estão contraídos são números pertencentes ao corpo $\mathbb{K}$, sobre o qual o espaço vetorial está definido. Por exemplo, os diagramas de Kuperberg da figura B.5 são números, pois todos os seus índices estão contraídos.

Figura B.5: em **(a)** e **(b)** dois números representados por diagramas de Kuperberg.

B.2 Álgebras de Hopf

Introduzida a notação de diagramas de Kuperberg, a qual é usada exaustivamente neste trabalho, definiremos agora as álgebras de Hopf e provaremos algumas proposições. Estamos usando [22] como referência base para o desenvolvimento deste apêndice.

B.2.1 Álgebras Associativas e com Unidade

Considere $\mathcal{A}$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$ =($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) cuja base é $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$. Considere ainda $\mathcal{A}^*$ seu espaço vetorial dual, cuja base é $\{\varphi^i\}_{i=1}^n$ tal que $\varphi^i(\varphi_j) = \delta_j^i$.

Dizemos que o espaço vetorial $\mathcal{A}$ é uma álgebra se existem dois mapas lineares

$$m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A} \quad \text{e} \quad e : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$$

tais que m é uma mapa associativo e $e(1)$ é a unidade de m. Os mapas m e e são chamados de mapa multiplicação e mapa unidade, respectivamente, e são definidos em termos das constantes de estrutura m_{ij}^k e e^l

$$\begin{aligned} m &: \varphi_i \otimes \varphi_j \mapsto \varphi_i\varphi_j = m_{ij}^k \varphi_k, \\ e &: 1 \mapsto e(1) = e^l \varphi_l. \end{aligned}$$

As constantes de estrutura definem totalmente os mapas multiplicação e unidade, mas não podem ser quaisquer, pois as constantes de estrutura da multiplicação devem fazer com que esta seja associativa e as da unidade devem fazer com que esta seja, de fato, a unidade da multiplicação. Dizer que a multiplicação é associativa equivale a dize que

$$(\varphi_a\varphi_b)\,\varphi_c = \varphi_a\,(\varphi_b\varphi_c)\,,$$

o que em termos das constantes de estrutura fica

$$m_{ab}^i m_{ic}^l = m_{bc}^i m_{ai}^l. \tag{B.1}$$

O fato de $e(1)$ ser a unidade da multiplicação significa que

$$e(1)\varphi_i = \varphi_i e(1) = \varphi_i, \qquad \forall i,$$

e em termos das constantes de estruturas ficamos com

$$\begin{aligned} e(1)\varphi_i &= \varphi_i = \varphi_i e(1) \\ e^l\varphi_l\varphi_i &= \varphi_i = \varphi_i e^l\varphi_l \\ e^l m_{li}^k \varphi_k &= \varphi_i = e^l m_{il}^k \varphi_k, \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^l m_{li}^k = \delta_i^k = e^l m_{il}^k. \tag{B.2}$$

Como alternativa a trabalhar com os tensores das constantes de estrutura podemos trabalhar com seus respectivos diagramas de Kuperberg, conforme discutido na seção anterior. Em termos de diagramas de Kuperberg a condição B.6 é a desenhada na figura B.6 e a condição B.7, em termos de diagramas de Kuperberg, é a desenhada na figura B.7

Se os diagramas de Kuperberg desenhados na figura B.6 e B.7 são satisfeitos dizemos que o trio $\langle \mathcal{A}, m, e \rangle$ determina uma álgebra associativa e com unidade, a qual chamaremos simplesmente de álgebra.

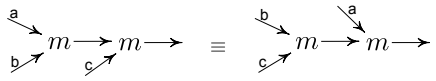


Figura B.6: condição de associatividade da multiplicação.

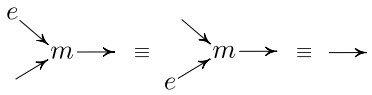


Figura B.7: condição da existência da unidade $e(1)$ da álgebra.

B.2.2 Co-Álgebras Co-Associativas e com Co-Unidade

Pode-se definir no espaço vetorial dual $\mathcal{A}^*$ uma estrutura de álgebra analogamente como foi feito em $\mathcal{A}$, definimos então um de mapa multiplicação associativo e uma unidade. Alternativamente, ao invés de definir uma multiplicação no espaço dual, podemos definir uma co-multiplicação em $\mathcal{A}$ a qual possui uma co-unidade. Para isso considere o trio $\langle \mathcal{A}^*, \Delta, \epsilon \rangle$, sendo Δ um mapa bilinear de multiplicação em $\mathcal{A}^*$ e ϵ a unidade desta multiplicação, ou seja

$$\Delta : \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^* \text{ tal que } \Delta\left(\varphi^i \otimes \varphi^j\right) = \varphi^i \varphi^j = \Delta^{ij}_k \varphi^k,$$

e

$$\epsilon : \mathbb{K} \to \mathcal{A}^* \text{ tal que } \epsilon(1) \text{ seja a unidade de } \Delta.$$

Visto que esses mapas determinam uma álgebra, então certamente esses satisfazem as relações representados nos diagramas de Kuperberg da figura B.8.

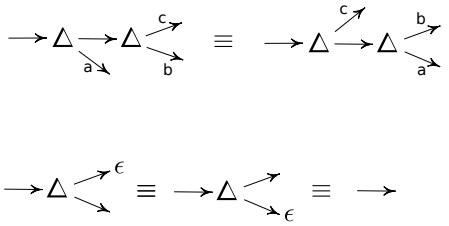


Figura B.8: condição para que o trio $\langle \mathcal{A}^*, \Delta, \epsilon \rangle$ seja uma álgebra.

Definida uma álgebra em $\mathcal{A}^*$ podemos pensar nos mapas Δ e ϵ como sendo uma co-multiplicação em $\mathcal{A}$ e uma co-unidade, respectivamente. Seja então o mapa $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$

o qual é definido como sendo

$$\Delta\left(\varphi_i\right) = \Delta_i^{jk}\left(\varphi_j \otimes \varphi_k\right),$$

e o mapa $\epsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ definido como sendo

$$\epsilon\left(\varphi_i\right) = \epsilon^i$$

tais que o trio $\langle \mathcal{A}^*, \Delta, \epsilon \rangle$ seja uma álgebra em $\mathcal{A}^*$. Dizemos que o quinteto $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon \rangle$ forma uma álgebra e co-álgebra de $\mathcal{A}$. Conforme veremos a seguir, quando há uma certa compatibilidade entre a álgebra e a co-álgebra em $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon \rangle$, dizemos que o quinteto define uma bi-álgebra.

B.2.3 Bi-Álgebras

Como dito anteriormente, o quinteto $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon \rangle$ define uma álgebra e co-álgebra em $\mathcal{A}$ se as condições listadas nas figuras B.6, B.7 e B.8 são satisfeitas, mas no caso especial em que há uma certa compatibilidade entre os mapas dizemos simplesmente que o quinteto define uma bi-álgebra. Isto ocorre quando o mapa de co-multiplicação e co-unidade são homeomorfismos da estrutura da álgebra, isto é, quando as seguintes condições são satisfeitas

$$\begin{aligned} \Delta\left(\varphi_a\varphi_b\right) &= \Delta\left(\varphi_a\right)\Delta\left(\varphi_b\right), \\ \epsilon\left(\varphi_a\varphi_b\right) &= \epsilon\left(\varphi_a\right)\epsilon\left(\varphi_b\right), \end{aligned}$$

sendo que $\Delta\left(\varphi_a\right)\Delta\left(\varphi_b\right)$ representa a multiplicação extendida ao produto tensorial o qual é definido da seguinte maneira

$$\left(a \otimes b\right)\left(x \otimes y\right) = \left(ax \otimes by\right).$$

Em termos de diagramas de Kuperberg, dizer que os mapas Δ e ϵ são homeomorfismos da álgebra equivale aos diagramas de Kuperberg desenhados na figura B.9.

Figura B.9: condição para que Δ e ϵ sejam homeomorfismos da álgebra.

Sendo assim, quando os mapas de (co-)multiplicação e (co-)unidade satisfazem a relação desenhada na figura B.9 o quinteto definido acima é uma bi-álgebra.

Embora tenhamos dito que a condição para que o quinteto seja uma bi-álgebra é que os mapas Δ e ϵ sejam homeomorfismos da álgebra, pode-se mostrar [23] que se os mapas m e e forem co-homeomorfismo de co-álgebra então o quinteto também será uma bi-álgebra, sendo assim, também são válidas as seguintes condições mostrada na figura B.10

Figura B.10: condição para que m e e sejam co-homeomorfismos da co-álgebra.

Observe que a primeira condição da figura B.9 é exatamente igual à primeira condição da figura B.10. Resumidamente dizemos que o quinteto $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon \rangle$ é uma bi-álgebra quando os mapas de (co-)multiplicação e (co-)unidade satisfazem as condições desenhadas na figura B.6, B.7, B.8 e B.11.

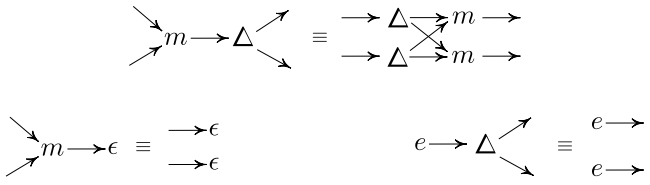


Figura B.11: compatibilidade entre a álgebra e a co-álgebra.

Uma vez definida a estrutura de bi-álgebra, ainda falta mais um ingrediente para esta seja uma álgebra de Hopf. Esse ingrediente é o que chamamos de antípoda, a qual será discutida a seguir.

B.2.4 Álgebras de Hopf

Considere um quinteto $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon \rangle$ o qual é uma bi-álgebra, considere também um endomorfismo de $\mathcal{A}$ o qual chamaremos de S. Se S é uma mapa tal que o axioma da antípoda, figura B.12, se verifica dizemos que S é uma antípoda.

Finalmente definimos a álgebra de Hopf como sendo o sexteto $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon, S \rangle$, em que o quinteto $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon \rangle$ é uma bi-álgebra e S é a antípoda.

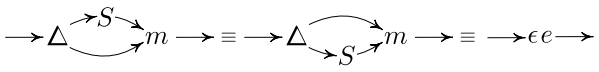


Figura B.12: definição da antípoda.

Antes de provarmos alguns teoremas a respeito de álgebras de Hopf vamos construir um exemplo de álgebra de Hopf, o qual é bastante utilizado no texto, chamado de *álgebra de grupo* e denotamos por $\mathbb{K}G$.

B.3 Álgebra de Grupo $\mathbb{K}G$

A álgebra de grupo é uma álgebra que carrega a estrutura de uma grupo finito e discreto G. Considere então, G um grupo finito e discreto e $\mathbb{K}$ =($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) um corpo. Seja $\{\varphi_g\}$ uma base do espaço vetorial $\mathbb{K}G$ a qual é indexada pelos elementos do grupo, isto é, $g \in G$.

A multiplicação neste espaço vetorial é definida para os elementos da base de forma a imitar o produto do grupo

$$\varphi_g \varphi_h = \varphi_{gh},$$

sendo gh o produto do grupo. A multiplicação para elementos arbitrários do espaço é a simples extensão por linearidade da multiplicação dos elementos da base, sendo assim o mapa de multiplicação é tal que as constantes de estruturas são

$$m_{ab}^{c} = \delta\left(c, ab\right).$$

A recém definida multiplicação é trivialmente associativa, uma vez que o produto do grupo o é, veja

$$\varphi_a\left(\varphi_b\varphi_c\right) = \varphi_a\left(\varphi_{bc}\right) = \varphi_{a(bc)} = \varphi_{(ab)c} = \left(\varphi_{ab}\right)\varphi_c = \left(\varphi_a\varphi_b\right)\varphi_c.$$

Também não é difícil ver que a unidade desta multiplicação é o elemento φ_I, sendo I a identidade do grupo, veja

$$\varphi_I\varphi_a = \varphi_{Ia} = \varphi_a = \varphi_{aI} = \varphi_a\varphi_I,$$

então o mapa da unidade fica determinado por $e(1) = \varphi_I$.

Concluímos que o trio $\langle \mathcal{A}, m, e \rangle$ determina uma álgebra. A fim de mostrarmos que a álgebra de grupo é uma álgebra de Hopf precisamos definir uma estrutura de co-álgebra. Definimos o mapa de co-multiplicação como mostrado na figura B.13

$$\Delta(\varphi_a) = \varphi_a \otimes \varphi_a \qquad \text{ou} \qquad \varphi_a \longrightarrow \Delta \equiv \begin{matrix} \varphi_a \longrightarrow \\ \varphi_a \longrightarrow \end{matrix}$$

Figura B.13: definição do mapa de co-multiplicação de $\mathbb{K}G$.

e o mapa co-unidade por

$$\epsilon(\varphi_g) = 1, \quad \forall g \in G.$$

Observe que, além de satisfazer automaticamente as relações necessárias para que Δ e ϵ defina uma co-álgebra, esses mapas satisfazem as relações necessárias para que o quinteto $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon \rangle$ seja uma bi-álgebra. O mapa de co-multiplicação é um homeomorfismos da álgebra, veja

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_a)\Delta(\varphi_b) &= (\varphi_a \otimes \varphi_a)(\varphi_b \otimes \varphi_b) \\ &= (\varphi_a\varphi_b) \otimes (\varphi_a\varphi_b) \\ &= (\varphi_{ab}) \otimes (\varphi_{ab}) \\ &= \Delta(\varphi_{ab}) \\ &= \Delta(\varphi_a\varphi_b), \end{aligned}$$

e o mapa co-unidade é também um homeomorfismo da álgebra, veja

$$\epsilon(\varphi_a)\epsilon(\varphi_b) = (1)(1) = 1 = \epsilon(\varphi_{ab}) = \epsilon(\varphi_a\varphi_b),$$

portanto o quinteto $\langle \mathcal{A}, m, e, \Delta, \epsilon \rangle$ define uma bi-álgebra.

Ainda precisamos encontrar o mapa linear S que satisfaz a propriedade da antípoda para garantirmos que $\mathbb{K}G$ seja uma álgebra de Hopf. A escolha da antípoda não é arbitrária, pois se ela existe então ela é única [24]. Nesse caso se considerarmos o mapa linear definido por

$$S(\varphi_a) = \varphi_{a^{-1}} \quad \text{ou seja} \quad S_a^b = \delta(a, b^{-1}),$$

pode-se ver facilmente que este satisfaz a propriedade da antípoda, veja a figura B.14

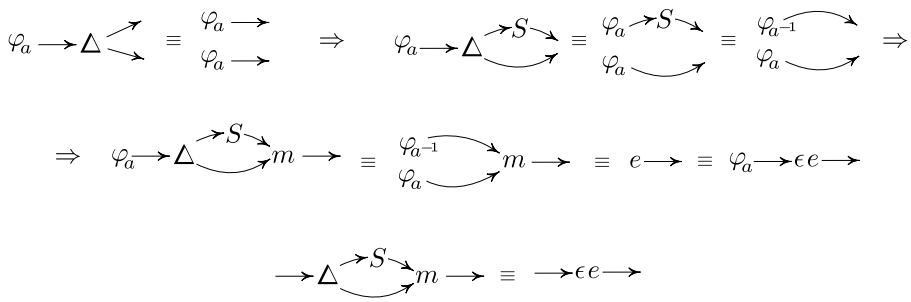


Figura B.14: a álgebra de grupo satisfaz a condição da antípoda.

Finalmente concluímos que $\mathbb{K}G$ é uma álgebra de Hopf, conforme queríamos mostrar. No restante deste apêndice usaremos o exemplo da álgebra de grupo para ilustrar os resultados que serão obtidos na próxima seção.

B.4 Identidades e Propriedades das Álgebras de Hopf

Baseado em [21], nessa e nas seções seguintes deste apêndice discutiremos algumas identidades e propriedades das álgebras de Hopf, as quais foram usadas frequentemente no texto. Comecemos por mostrar alguns resultados auxiliares enunciados na forma de proposições. Estamos considerando neste trabalho somente álgebras de Hopf cuja antípoda possua a propriedade que $S^2 = I_d$. Álgebras de Hopf que atendem a essa exigência são chamadas de *involutórias*, caso contrário são chamadas de *não involutórias*.

Proposição B.1 *O traço de um elemento da álgebra na representação regular é igual ao tensor m^k_{ak} e o co-traço de um elemento da álgebra dual é igual ao tensor Δ^{ka}_k, ou seja,*

PROVA:

Dado uma representação ρ de $\mathcal{A}$, isto é, um homeomorfismo $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{M}_{n\times n}$, o traço de φ_a nesta representação é definido por

$$tr\left(\varphi_a\right)_\rho = tr\left(\rho\left(\varphi_a\right)\right) = \left[\rho\left(\varphi_a\right)\right]_i^i$$

Considere o módulo gerado pela ação de um elemento da álgebra sobre ela mesma, ou seja, definimos a ação de um elemento φ_g da álgebra como sendo

$$\varphi_g \rhd \varphi_a = \varphi_g\varphi_a = \left[\rho\left(\varphi_g\right)\right]_a^j \varphi_j,$$

mas $\varphi_g\varphi_a = m_{ga}^j\varphi_j$, portanto $\left[\rho\left(\varphi_g\right)\right]_a^j = m_{ga}^j$, desta forma o traço fica

$$tr\left(\varphi_g\right) = \left[\rho\left(\varphi_g\right)\right]_a^a = m_{ga}^a.$$

A prova de que o co-traço é dado pelo tensor Δ_k^{ka} é análoga, com a diferença que fazemos tudo no espaço dual.

□

Exemplo B.1 *Traço e Co-Traço da Álgebra de Grupo*

Vamos calcular como exemplo o traço e o co-traço, na representação regular, dos elementos da álgebra de grupo e conforme veremos, o traço será quase sempre nulo, exceto quando o elemento da base for o elemento identidade, enquanto que o co-traço é igual a um para todos os elementos da base dual.

Pela proposição B.1 o traço na representação de uma elemento da base é dado por

$$tr\left(\varphi_g\right) = m_{gj}^j = \sum_j m_{gj}^j,$$

e no caso da álgebra de grupo sabemos que $m_{ij}^k = \delta\left(k, ij\right)$, sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned} tr\left(\varphi_g\right) &= \sum_j \delta\left(j, gj\right) \\ &= \sum_j \delta\left(I, g\right) \\ &= \left(dim\mathcal{A}\right)\delta\left(I, g\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$tr\left(\varphi_g\right) = \begin{cases} \left(dim\mathcal{A}\right) & se \quad g = I, \\ 0 & se \quad g \neq I. \end{cases}$$

O co-traço é dado por

$$cotr\left(\varphi^{g}\right)=\Delta_{j}^{gj}=\sum_{j}\Delta_{j}^{gj},$$

e sabemos que $\Delta_{i}^{jk}=\delta\left(i,j\right)\delta\left(i,k\right)$ para a álgebra de grupo, sendo assim obtemos

$$cotr\left(\varphi^{g}\right)=\sum_{j}\delta\left(j,g\right)\delta\left(j,j\right)=1,\quad\forall g.$$

$\diamond\diamond\diamond$

O próximo resultado servirá como lema nas demonstrações das próximas proposições.

Proposição B.2 *Seja $\langle\mathcal{A},m,e,\Delta,\epsilon,S\rangle$ uma álgebra de Hopf. Então, cada um dos diagramas de Kuperberg abaixo é inversível, isto é, existe um outro diagrama de Kuperberg que quando multiplicado pelo primeiro, dá como resultado o mapa identidade ou o produto tensorial de identidades. Tal diagrama de Kuperberg inverso é obtido trocando-se a seta vertical do diagrama de Kuperberg por uma antípoda.*

PROVA:

Vamos mostrar que o diagrama de Kuperberg **(a)** é inversível e a mesma prova é válida para os outros, tudo o que precisamos fazer é mostrar que ao multiplicarmos o diagrama de Kuperberg **(a)** por um diagrama de Kuperberg semelhante (exceto pela diferença de trocar a seta vertical por uma antípoda) o resultado será uma produto tensorial de mapas identidades. Considere então o diagrama de Kuperberg da figura B.15.

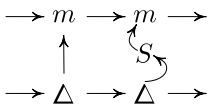


Figura B.15: prova da proposição B.2, parte 1.

Precisamos mostrar que o diagrama de Kuperberg da figura B.15 é equivalente a um produto tensorial de mapas identidades. Na figura B.16, do lado esquerdo, usamos a

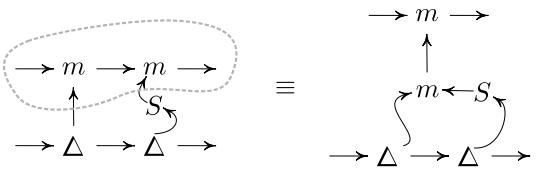


Figura B.16: prova da proposição B.2, parte 2.

a associatividade da multiplicação (na região em destaque) e obtemos o diagrama de Kuperberg do lado direito.

Em seguida usamos a co-associatividade do co-produto (na região em destaque) na figura B.17, do lado esquerdo, e ficamos com o diagrama de Kuperberg do lado direito da mesma figura.

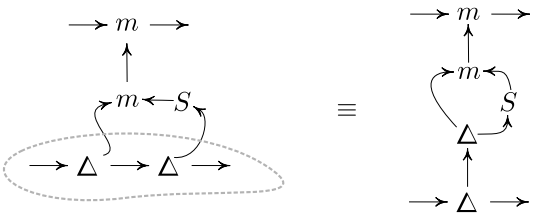


Figura B.17: prova da proposição B.2, parte 3.

Finalmente usamos a propriedade da antípoda e obtemos o segundo diagrama de Kuperberg desenhado na figura B.18 o que trivialmente implica, usando a unidade e a co-unidade, que este diagrama de Kuperberg é de fato um produto tensorial de mapas identidades.

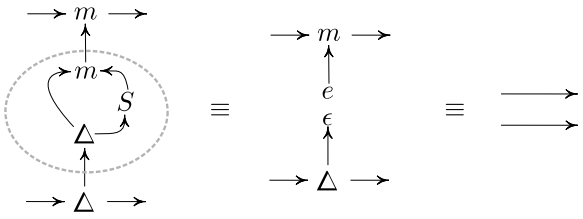


Figura B.18: prova da proposição B.2, parte 4.

Conforme já dito, a prova de que os outros diagramas de Kuperberg também são inversíveis é a mesma que a feita para este diagrama de Kuperberg específico. Outro ponto importante é mostrar que a multiplicação do diagrama de Kuperberg inverso pela esquerda também resulta em um produto tensorial de mapas identidades, mas a prova

também é exatamente a mesma.

□

A proposição B.2 será muito útil para provar outras proposições que dizem respeito a álgebras de Hopf involutórias.

Proposição B.3 *Numa álgebra de Hopf a antípoda é um anti-homeomorfismo de álgebra e um co-anti-homeomorfismo de co-álgebra, ou seja,*

PROVA:

Para mostrar a validade desta proposição começaremos mostrando um resultado auxiliar, ou seja, que os dois diagramas de Kuperberg desenhados na figura B.19 são equivalentes, sendo m_{op} um mapa tal que se $m(\varphi_a \otimes \varphi_b) = \varphi_a\varphi_b$, então $m_{op}(\varphi_a \otimes \varphi_b) = \varphi_b\varphi_a$.

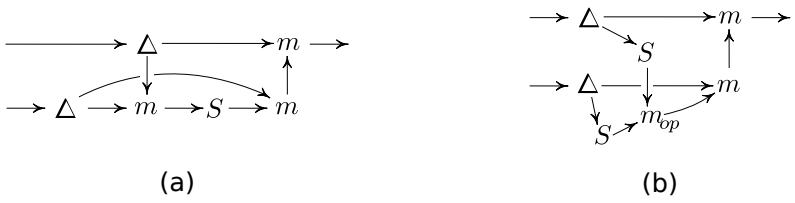


Figura B.19: prova da proposição B.3, parte 1.

Vamos manipular primeiramente o diagrama de Kuperberg da figura B.19 **(a)** até simplificá-lo o máximo possível. Usando a associatividade do produto na região em destaque obtemos o diagrama de Kuperberg desenhado na figura B.20.

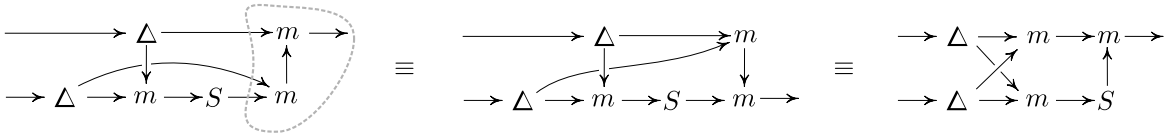


Figura B.20: prova da proposição B.3, parte 2.

Agora usamos a relação de bi-álgebra e em seguida a propriedade da antípoda, conforme mostrado na figura B.21 e concluímos que o diagrama de Kuperberg da figura B.19 **(a)** é equivalente ao produto tensorial da co-unidade ao quadrado com a unidade.

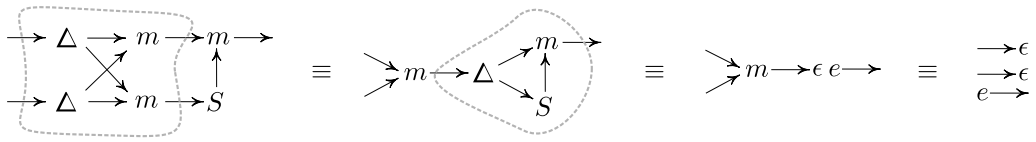


Figura B.21: prova da proposição B.3, parte 3.

Falta agora mostrar que o diagrama de Kuperberg da figura B.19 **(b)** também é equivalente ao produto tensorial da co-unidade ao quadrado com a unidade. Considere então o diagrama de Kuperberg da figura B.22 onde usamos a associatividade do produto na região em destaque.

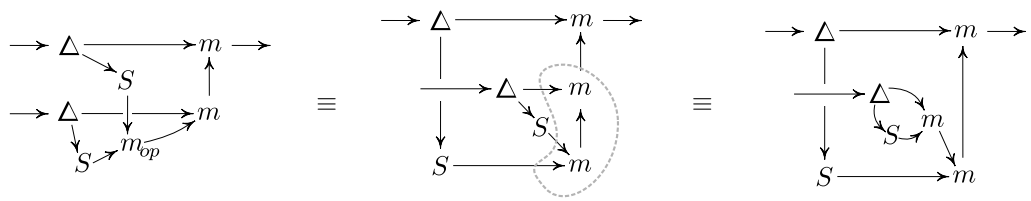


Figura B.22: prova da proposição B.3, parte 4.

Em seguida, na figura B.23 usamos a propriedade da antípoda duas vezes e por fim concluímos que, de fato o diagrama de Kuperberg da figura B.19 **(a)** é equivalente ao diagrama de Kuperberg da figura B.19 **(b)**.

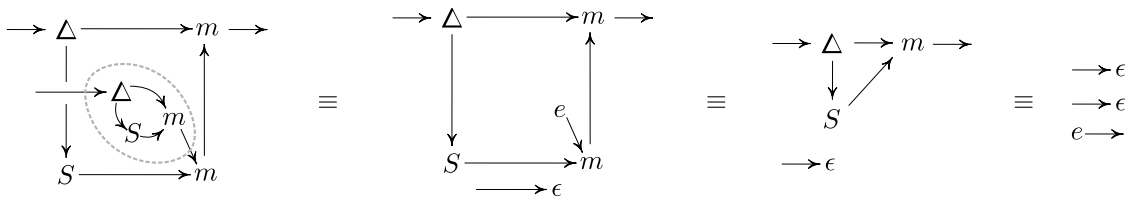


Figura B.23: prova da proposição B.3, parte 5.

O fato dos diagramas de Kuperberg da figura B.19 serem equivalentes mais a proposição B.2 são suficientes para provarmos a proposição B.3. Considere a igualdade da figura B.24, em que multiplicamos ambos os lados desta igualdade pelo diagrama inverso (da proposição B.2) duas vezes consecutivas e finalmente provamos o resultado desejado, veja a figura B.24.

□

A próxima proposição que iremos provar diz respeito à unidade e co-unidade.

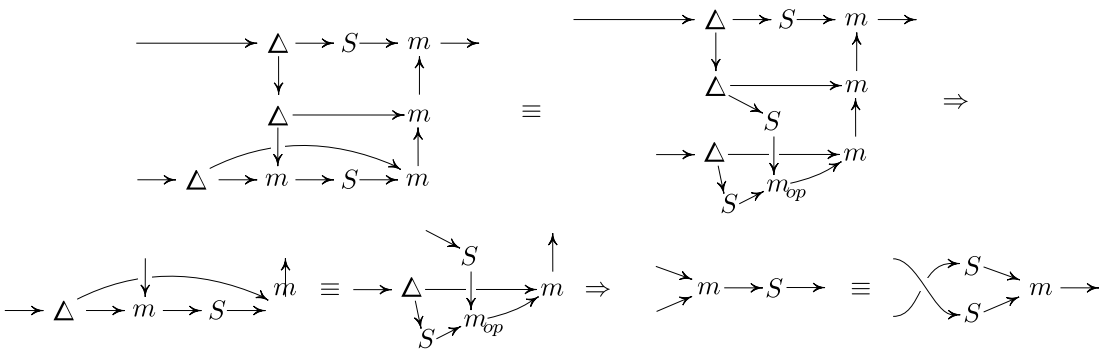


Figura B.24: prova da proposição B.3, parte 6.

Proposição B.4 *Numa álgebra de Hopf a unidade e a co-unidade são invariantes pela ação da antípoda, ou seja*

PROVA:

A prova desta proposição é muito simples, basta considerarmos a proposição B.3. Na figura B.25 encontra-se feita com todos os detalhes a prova de que a primeira relação é verdadeira.

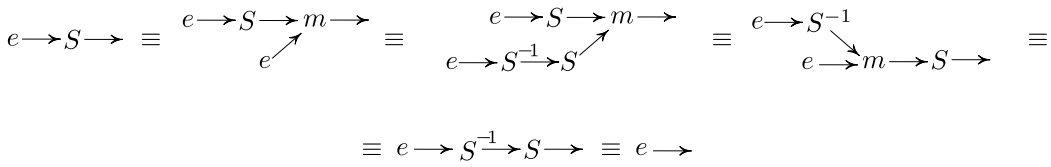


Figura B.25: prova da proposição B.4.

A prova para a segunda relação é idêntica, basta se inverter todas as setas da demostração feita na figura B.25 e trocar a multiplicação e a unidade pela co-multiplicação e a co-unidade, respectivamente.

□

As próximas proposições que iremos mostrar estão ligadas direta ou indiretamente com o fato de que numa álgebra de Hopf sempre existe uma integral e uma co-integral, não nulas, conforme pode ser visto em [21]. Além disso a integral e a co-integral são únicas a menos de multiplicações por constantes. Começaremos por definir a integral e a co-integral para uma álgebra de Hopf.

Definição B.1 *Chamamos de co-integral o elemento $\lambda \in \mathcal{A}$ tal que quando multiplicado por qualquer outro elemento da álgebra o resultado seja ele próprio multiplicado por um número. Uma co-integral pode ser uma co-integral à esquerda ou à direita, dependendo se esta é multiplicada pela esquerda ou pela direita. Mais formalmente uma co-integral à esquerda é um elemento da álgebra que satisfaz a condição desenhada na figura B.26* **(a)**. *Analogamente uma integral é um elemento $\Lambda \in \mathcal{A}^*$ tal que a condição desenhada na figura B.26* **(b)** *seja satisfeita.*

Figura B.26: em **(a)** a definição da co-integral à esquerda e em **(b)** a definição da integral à direita.

Tendo em mente a definição B.1 e a garantia da existência de uma (co-)integral não nula para álgebras de Hopf [21] vamos provar a seguinte proposição.

Proposição B.5 *Em uma álgebra de Hopf o tensor desenhado na figura B.27 é sempre uma integral à direita.*

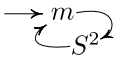


Figura B.27: integral numa álgebra de Hopf.

PROVA:

Considere uma integral à direita Λ e um co-integral à esquerda λ não nulas, as quais certamente existem. A relação da bi-álgebra fornece o diagrama de Kuperberg da figura B.28.

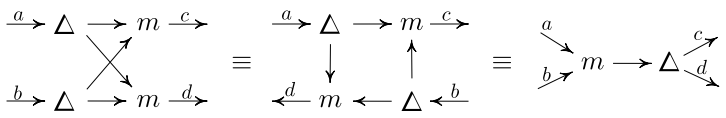


Figura B.28: prova da proposição B.5, parte 1.

Portanto, usando a integral e a co-integral obtemos o diagrama de Kuperberg da figura B.29 **(a)**, que pode ser multiplicado pela direita pelo diagrama de Kuperberg inverso da região em destaque e, usando a proposição B.2, resume-se no diagrama de Kuperberg da figura B.29 **(b)**.

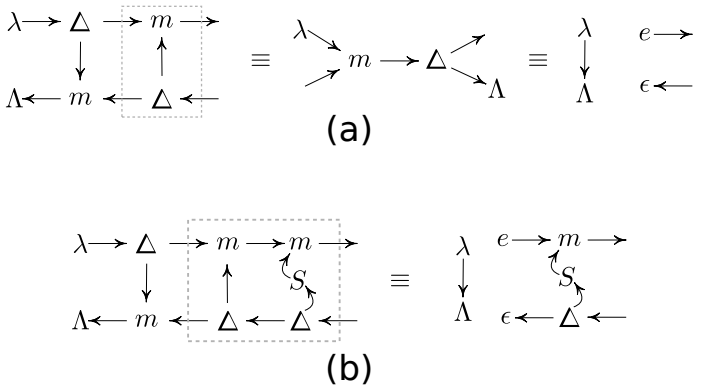


Figura B.29: prova da proposição B.5, parte 2.

Assim obtemos da figura B.30.

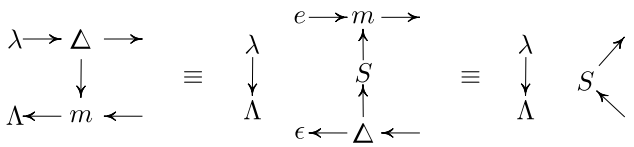


Figura B.30: prova da proposição B.5, parte 3.

Aplicamos novamente o diagrama de Kuperberg inverso da proposição B.2 no diagrama de Kuperberg da figura B.30 e obtemos o diagrama de Kuperberg da figura B.31.

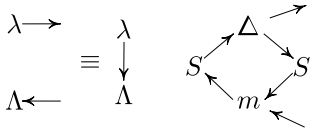


Figura B.31: prova da proposição B.5, parte 4.

Finalmente multiplicamos ambos os lados do diagrama de Kuperberg da figura B.31 por uma co-unidade e chegamos ao resultado que queremos, veja a figura B.32. Note que o que provamos é que a integral Λ é na verdade o tensor, enunciado na proposição, multiplicado por algumas constantes. Mas se multiplicarmos uma (co-)integral por uma

constante esta contínua sendo uma (co-)integral, sendo assim concluímos que o tensor da figura B.27 é uma integral.

Figura B.32: prova da proposição B.5, parte 5.

□

Se multiplicarmos o diagrama de Kuperberg da figura B.31 por uma unidade obtemos que o tensor desenhado na figura B.33 **(a)** é uma co-integral da álgebra. A prova da proposição é geral, isto é, é válida para qualquer álgebra de Hopf, mas no caso especial em que a álgebra de Hopf é involutória, que é o nosso caso de interesse, temos que $S^2 \equiv I_d$, assim a integral e co-integral da álgebra são os respectivos traços da multiplicação e co-multiplicação, respectivamente, veja figura B.33 **(b)** e **(c)**.

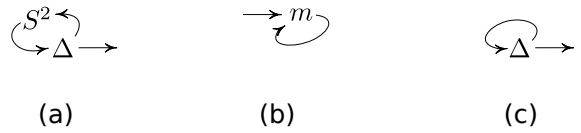


Figura B.33: em **(a)** uma co-integral em qualquer álgebra de Hopf, em **(b)** e **(c)** uma integral e co-integral em uma álgebra de Hopf involutória.

Exemplo B.2 *Integral e Co-Integral na Álgebra de Grupo.*

Vamos calcular a integral e a co-integral para a álgebra de grupo e, conforme veremos, este exemplo possibilita uma interpretação bastante intuitiva sobre o significado de integral e co-integral em uma álgebra. Começaremos calculando a integral Λ, a qual é um elemento da álgebra dual, portanto pode ser escrita da seguinte forma

$$\Lambda = \Lambda_g \varphi^g,$$

sendo os coeficientes Λ_g dados pela proposição B.5, ou seja, $\Lambda_g = m^k_{gk} = tr\left(\varphi_g\right)$. Usando o resultado obtido no exemplo B.1 temos que $\Lambda_g = \left(dim\mathcal{A}\right)\delta\left(g, I\right)$, então segue que

$$\Lambda = \left(dim\mathcal{A}\right)\varphi^I.$$

Falta calcularmos a co-integral λ, a qual é um elemento da álgebra e portanto é escrita como

$$\lambda = \lambda^g \varphi_g,$$

sendo os coeficientes dados por $\lambda^g = \Delta_k^{gk} = cotr\,(\varphi^g)$. Sabemos do exemplo B.1 que $cotr\,(\varphi^g) = 1\ \forall g \in G$, portanto $\lambda^g = 1\ \forall g \in G$. A co-integral é dada então por

$$\lambda = \sum_g \varphi_g.$$

Vemos portanto que a co-integral é a soma de todos os elementos da base, o que é bastante intuitivo, pois normalmente quando pensamos em integral estamos pensando em somas.

◇ ◇ ◇

Conhecidas a integral e co-integral numa álgebra de Hopf, falta agora mostrar mais dois resultados que são bastante relevantes neste trabalho.

Proposição B.6 *Em uma álgebra de Hopf Involutória o tensor desenhado na figura B.34 é numéricamente igual à dimensão da álgebra*

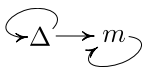


Figura B.34: contração da integral com a co-integral numa álgebra de Hopf involutória.

PROVA:

Essa prova é trivial e é consequência direta do fato de que o traço da multiplicação é uma integral da álgebra, veja a figura B.35.

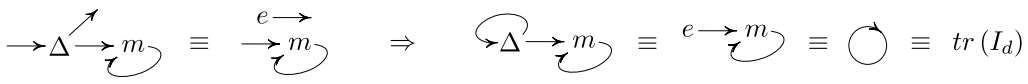


Figura B.35: prova da proposição B.6.

Portanto a contração do traço com o co-traço é igual ao traço do mapa identidade e que por sua vez é igual à dimensão da álgebra.

□

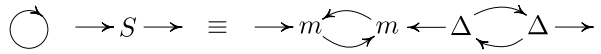


Figura B.36: antípoda numa álgebra de Hopf involutória.

Proposição B.7 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Hopf involutória, então a antípoda é dada pelo diagrama de Kuperberg da figura B.36.*

PROVA: Considere o diagrama de Kuperberg da figura B.30, usando a proposição B.5 e a proposição B.6 obtemos o diagrama de Kuperberg da figura B.37.

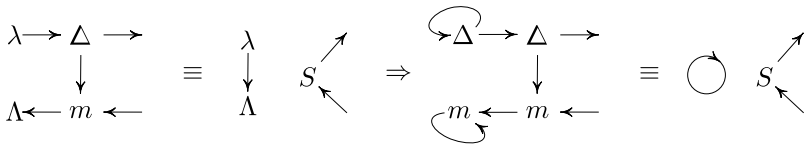


Figura B.37: prova da proposição B.7, parte 1.

Usando a associatividade do produto e a co-associatividade do co-produto obtemos o diagrama de Kuperberg da figura B.38.

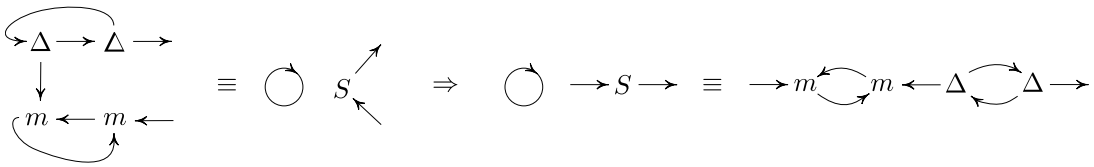


Figura B.38: prova da proposição B.7, parte 2.

□

Apêndice C

Representações e Expansão em Caracteres

A quase todos os resultados sobre representações irredutíveis do grupo $\mathbb{Z}_n$ e a expansão em caracteres de funções de classe encontram-se demonstradas neste apêndice, os que não estão podem ser facilmente encontrado em [16]. Começaremos por discutir um pouco sobre representações e representações irredutíveis de grupos discretos e finitos e com o uso do *Lema de Schur* seremos capazes de encontrar todas as representações irredutíveis do grupo $\mathbb{Z}_n$. Os caracteres das representações e suas relações de ortogonalidades também serão discutidos, e com isso desenvolveremos a técnica da expansão em caracteres de funções de classe.

C.1 Teoria das Representações de Grupos Discretos

Considere G um grupo discreto e finito, neste apêndice sempre que nos referirmos a um grupo deve-se entender que este seja discreto e finito, salvo menção contrária. Uma representação de G é um mapa ρ que mapeia elementos de G no grupo $GL(\mathbb{K}, n)$ de tal forma que o produto seja preservado. O grupo de $GL(\mathbb{K}, n)$ é o grupo formado pelas matrizes $M_{n\times n}$ inversíveis e cujas entradas pertencem ao corpo $\mathbb{K}$ =($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), sendo o produto do grupo o produto usual de matrizes. Formalmente definimos uma representação de um grupo G como segue.

Definição C.1 *Seja G um grupo finito e discreto. Chamamos de representação de G um mapa $\rho : G \to GL(\mathbb{K}, n)$ o qual seja um homeomorfismo, isto é, um mapa que satisfaça a seguinte propriedade*

$$\rho(a * b) = \rho(a).\rho(b) \quad , \quad \forall a, b \in G.$$

O produto denotado por " $*$ " representa o produto de G e o denotado por " . " representa o produto de $GL(\mathbb{K}, n)$.

Segue imediatamente da definição (C.1) que

$$\rho(ea) = \rho(a) = \rho(e)\rho(a) \Rightarrow \rho(e) = I_n, \qquad \forall a \in G,$$

sendo e a identidade de G, ou seja, uma representação deve mapear a identidade de G na identidade de $GL(\mathbb{K}, n)$, que é a matriz identidade de ordem n. Outro resultado que pode ser tirado é que

$$\rho(aa^{-1}) = \rho(e) = \rho(a)\rho(a^{-1}) = I_n \Rightarrow \rho(a^{-1}) = (\rho(a))^{-1}, \quad \forall a \in G.$$

Veja que o mapa $\rho_0 : G \to GL(\mathbb{K}, n)$, o qual é definido por $\rho(a) = I_n \ \forall a \in G$, é sempre uma representação, para qualquer que seja o grupo G. Esta representação é chamada de *representação trivial*.

C.1.1 $\mathbb{K}G$-módulos

Considere V um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Podemos definir a ação de um grupo G sobre tal espaço vetorial e damos a esta ação o nome de $\mathbb{K}G$-módulos. Um $\mathbb{K}G$-módulo pode ser pensado como sendo o espaço vetorial V com uma estrutura extra que é a multiplicação por elemento do grupo. Denotamos essa nova multiplicação por $g \rhd v$ ($g \in G$ e $v \in V$) e essa deve satisfazer as relações listadas abaixo.

Definição C.2 *Um $\mathbb{K}G$-módulo é um espaço vetorial V com uma estrutura extra que é o produto por elementos do grupo, tal que sejam satisfeitas as relações abaixo para todos $\lambda \in \mathbb{K}$, $g, h \in G$ e $u, v \in V$.*

1. $g \rhd v \in V$.
2. $e \rhd v = v$, sendo e a identidade de G .

3. $gh \rhd v = g \rhd (h \rhd v)$.

4. $g \rhd (\lambda v) = \lambda\, (g \rhd v)$.

5. $g \rhd (u + v) = g \rhd u + g \rhd v$.

Uma vez definido o $\mathbb{K}G$-módulo, definimos um $\mathbb{K}G$-submódulo como mostrado na definição (C.3) abaixo.

Definição C.3 *Seja V um $\mathbb{K}G$-módulo, dizemos que U é um $\mathbb{K}G$-submódulo de V se U é um subespaço vetorial de V e se $g \rhd u \in U \quad \forall u \in U$ e $\forall g \in G$.*

Note que, qualquer que seja o $\mathbb{K}G$-módulo V, os subespaços $\{\ 0\ \}$ e V sempre serão $\mathbb{K}G$-submódulos. Na definição (C.2), as relações (1), (4) e (5) garantem que qualquer mapa $v \to g \rhd v$ é um endomorfismo de V, ou ainda podemos dizer que todo $\mathbb{K}G$-módulo é uma transformação linear.

O motivo pelo qual definimos os $\mathbb{K}G$-módulos é que, conforme o teorema que será enunciado a seguir garante, sempre existe uma representação associado a um $\mathbb{K}G$-módulo e vice-versa, sendo assim podemos sempre pensar numa representação como sendo um $\mathbb{K}G$-módulo .

Teorema C.1 (1) *Se $\rho : G \to GL(\mathbb{K}, n)$ é uma representação de G sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $V = \mathbb{K}^n$, então V será um $\mathbb{K}G$-módulo se definirmos o produto por elementos de grupo por*

$$g \rhd v = \rho(g)v, \qquad \forall g \in G, \quad \forall v \in V,$$

e existe uma base β tal que

$$\rho(g) = [\ g\ ]_\beta\,,$$

sendo $[\ g\ ]_\beta$ a matriz que representa a transformação na base β.

(2) *Se V é um $\mathbb{K}G$-módulo e β é uma base de V, então o mapa $\rho : G \to GL(\mathbb{K}, n)$ definido por $g \mapsto [\, g\,]_\beta$ é uma representação de G.*

PROVA:

A prova da parte (1) consiste em mostrar que a multiplicação matricial, da matriz $\rho(g)$ com a matriz coluna v, satisfaz as relações listadas na definição (C.2). Conforme já comentamos, o fato de $\rho(g)$ ser um endomorfismo de V (pois é uma matriz quadrada de

ordem n) garante que as relações (1), (4) e (5) sejam satisfeitas. O fato de $\rho(g)$ ser uma representação garante que as relações (2) e (3) se verifiquem, veja

$$e \rhd v = \rho(e)v = I_n v = v,$$

$$gh \rhd v = \rho(gh)v = \rho(g)\left(\rho(h)v\right) = \rho(g)\left(h \rhd v\right) = g \rhd \left(h \rhd v\right),$$

portanto $g \rhd v = \rho(g)v$ define um $\mathbb{K}G$-módulo.

Sabe-se que uma transformação linear $V \to V$ pode ser associada a uma matriz numa dada base, portanto, visto que $\mathbb{K}G$-módulos são transformações lineares, podemos escrever que $\rho(g) = [\, g \,]_\beta$.

Para a parte (2) precisamos mostrar que todo $\mathbb{K}G$-módulo define uma representação de G. Já sabemos que $\mathbb{K}G$-módulos são transformações lineares, por isso, numa dada base β podemos escrever

$$g \rhd v = [\, g \,]_\beta \, v,$$

a relação (2) da definição (C.2) garante que

$$e \rhd v = v = [\, e \,]_\beta \, v \Rightarrow [\, e \,]_\beta = I_n,$$

enquanto que a relação (3) garante que

$$gh \rhd v = g \rhd (h \rhd v) \Rightarrow [\, gh \,]_\beta \, v = [\, g \,]_\beta \left([\, e \,]_\beta \, v \right),$$

e portanto é válido a seguinte relação

$$[\, gh \,]_\beta = [\, g \,]_\beta \, [\, e \,]_\beta \,,$$

logo o mapa $\rho : G \to GL(\mathbb{K}, n)$ definido por $\rho(g) = [\, g \,]_\beta$ é uma representação de G.

□

Basicamente o teorema (C.1) garante que existe uma correspondência um-para-um entre uma representação e um $\mathbb{K}G$-módulo. Por conveniência passaremos a trabalhar com os $\mathbb{K}G$-módulos e não mais com as representações em si.

Uma vez definidas as representações em termos dos $\mathbb{K}G$-módulos, vamos agora definir as chamadas representações irredutíveis (ou $\mathbb{K}G$-módulos irredutíveis) que são as representações de interesse em física.

C.1.2 Representações Irredutíveis

Agora que já sabemos o que é uma representação de um grupo discreto e finito, vamos definir as representações ditas irredutíveis. Para isso precisaremos do conceito de soma direta de espaços vetoriais a qual denotamos por $U \oplus V$, sendo U e V espaços vetoriais.

Definição C.4 *Dizemos que um espaço vetorial W é a soma direta de outros dois espaço U e V, denotamos por $W = U \oplus V$, se para cada elemento $w \in W$ existirem únicos $u \in U$ e $v \in V$ tais que $w = u + v$.*

Ou podemos dizer que $W = U \oplus V$ se $W = U + V$ e $U \cap V = \emptyset$. Segue desta definição que $dim\, W = dim\, U + dim\, V$. A definição de um $\mathbb{K}G$-módulo irredutível é a dada abaixo.

Definição C.5 *Dizemos que um $\mathbb{K}G$-módulo V é irredutível se os únicos $\mathbb{K}G$-submódulos de V são os $\mathbb{K}G$-submódulos triviais $\{0\}$ e V, caso contrário V é dito ser redutível.*

Assim dizemos que uma representação ρ é irredutível se o $\mathbb{K}G$-módulo associado a esta é irredutível.

$\mathbb{K}G$-homeomorfismos, $\mathbb{K}G$-isomorfismos e o Lema de Schur

Outro conceito bastante relevante para este trabalho é o conceito de $\mathbb{K}G$-(iso)homeomorfismos, os quais serão definidos a seguir.

Definição C.6 *Sejam V e W dois $\mathbb{K}G$-módulos. Um mapa $\vartheta : V \to W$ é dito ser um $\mathbb{K}G$-homeomorfismo se este é linear e*

$$\vartheta(g \rhd v) = g \rhd \vartheta(v),$$

em outras palavras, se v é mapeado em w, então $g \rhd v$ será mapeado em $g \rhd w$.

Se um $\mathbb{K}G$-homeomorfismo ϑ é inversível, então chamamos este de $\mathbb{K}G$-isomorfismo.

É claro que se ϑ é um $\mathbb{K}G$-isomorfismo, então ϑ^{-1} também o será.

Finalmente poderemos enunciar o lema mais importante deste apêndice que é o *Lema de Schur*, o qual não será demonstrado neste trabalho, mas uma demonstração muito bem feita pode ser encontrada em [16].

Lema C.1 *(LEMA DE SCHUR) - Sejam V e W dois $\mathbb{C}G$-módulos irredutíveis.*

(1) Se $\vartheta : V \to W$ é um $\mathbb{C}G$-homeomorfismo, então ϑ é um $\mathbb{C}G$-isomorfismo ou $\vartheta \equiv 0$.

(2) Se ϑ é um $\mathbb{C}G$-isomorfismo, então este é um múltiplo da identidade de V, ou seja,

$$\vartheta \ \equiv \ \lambda \ Id_V \ , \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

O lema de Schur garante que todo $\mathbb{C}G$-homeomorfismo será um $\mathbb{C}G$-isomorfismo que é um múltiplo da identidade de V, caso contrário será identicamente nulo e com isso somos capazes de encontrar todas as representações irredutíveis do grupo $\mathbb{Z}_n$, que é o caso de interesse deste trabalho.

C.2 Representações Irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$

Considere $G = \mathbb{Z}_n = \langle a : a^n = 1 \rangle$, sendo assim um elemento genérico de $\mathbb{Z}_n$ é da forma $a^i \ , \ \ i = 0, 1, \cdots, n-1$. Considere um $\mathbb{C}\mathbb{Z}_n$-módulo irredutível V. Visto que o grupo $\mathbb{Z}_n$ é abeliano é válido a seguinte relação

$$\left(a^i \ a^j\right) \rhd v = \left(a^j \ a^i\right) \rhd v \ , \quad \forall v \in V \quad \text{e} \quad \forall a^i, a^j \in \mathbb{Z}_n.$$

Isso significa que o mapa $\vartheta : V \to V$ que leva $v \mapsto a^i \rhd v$ é um $\mathbb{C}\mathbb{Z}_n$-homeomorfismo, o qual é não nulo. Visto que V é irredutível por construção, o lema de Schur garante que este seja um $\mathbb{C}\mathbb{Z}_n$-isomorfismo da forma

$$f \ \equiv \ \lambda I_v,$$

e ficamos com

$$a^i \rhd v = \lambda_i v \ , \quad \forall v \in V.$$

A relação acima é satisfeita para todo $v \in V$. Se $v \in U$, sendo U um subespaço vetorial de V, certamente que $\lambda_i v \in U$, portanto $a^i \rhd v \in U$ e isso implica que todo subespaço vetorial de V é também um $\mathbb{C}\mathbb{Z}_n$-submódulo, mas V é irredutível por construção e sendo assim devemos ter necessariamente

$$dim \ V = 1,$$

caso contrário cairemos em uma contradição.

O resultado recém obtido é válido para qualquer grupo abeliano. Portanto representações irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$ são mapas $\rho_r : \mathbb{Z}_n \to GL(\mathbb{C}, 1) \sim \mathbb{C}$.

Considere ρ_r uma representação irredutível de $\mathbb{Z}_n$, então $\rho_r(a) = \lambda_r$ e consequentemente

$$\rho_r(a^n) = \rho_r(1) \quad \Rightarrow \quad (\rho_r(a))^n = \lambda_r^n = 1,$$

portanto tiramos que λ_r deve ser uma raiz $n-$ésima da unidade, e como só há n raízes distintas da unidade ficamos com

$$\lambda_r = e^{\frac{i2\pi}{n}r}, \quad r = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Resumindo, existem n representações irredutíveis para o grupo $\mathbb{Z}_n$ que são

$$\rho_r(a^k) = \left(e^{\frac{i2\pi}{n}r}\right)^k, \quad r = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Note que para $r = 0$ obtemos a representação trivial.

No caso particular em que $n = 2$ temos apensas duas representações irredutíveis que são

$$\rho_0(a^k) = 1 \qquad \text{e} \qquad \rho_1(a^k) = (-1)^k \quad , \ k = 0, 1.$$

Um detalhe importante é que todas as representações irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$ são também unitárias.

C.3 Caracteres e Expansão em Caracteres

Nesta seção vamos introduzir a noção de caracteres de uma representação, a qual é bastante simples e, conforme será discutido, esses desempenham um papel importantíssimo na teoria de representações de grupos, em particular na teoria de expansões de funções do grupo que são do tipo classe, que é o nosso caso de interesse. Sabemos que as representações de um grupo são matrizes, os caracteres de uma representação nada mais são que o traço de tais matrizes.

Definição C.7 *Seja G um grupo discreto e finito e seja $\rho : G \to GL(\mathbb{C}, n)$ uma representação de tal. O caracter da representação ρ é uma função $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ definida como sendo o traço da matriz ρ, em outras palavras, é definido por*

$$\chi_\rho(g) = tr\left(\rho(g)\right).$$

O caracter de uma representação é dito ser irredutível e tal representação for irredutível.

Nota-se imediatamente da definição que os caracteres são funções de classe[1], pois o traço de matrizes o é, e portanto são invariantes por permutações cíclicas. Os caracteres possuem várias propriedades interessantes, dentre elas uma será especialmente importante para nossos propósitos que a relação de ortogonalidade dos caracteres [16].

Os espaço de todos os caracteres (de todas as representações de um grupo G) é um espaço vetorial V, uma vez que estão canonicamente definidos a soma de caracteres e o produto por escalar

$$\begin{aligned} (\chi + \Psi)(g) &= \chi(g) + \Psi(g) \quad \forall \chi, \Psi \in V \text{ e } \forall g \in G, \\ (\lambda\chi)(g) &= \lambda\chi(g) \quad \forall \chi \in V \quad , \quad \forall g \in G \text{ e } \forall \lambda \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

os quais satisfazem todas as condições necessárias para que este seja de fato um espaço vetorial. Em tal espaço vetorial pode-se definir um produto interno da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \langle\ ,\ \rangle &: V \otimes V \to \mathbb{C} \\ &: \chi \otimes \Psi \mapsto \langle \chi, \Psi \rangle \end{aligned}$$

sendo $\langle \chi, \Psi \rangle$ definido por

$$\langle \chi, \Psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\Psi(g)} \tag{C.1}$$

em que $\overline{\Psi}$ denota o complexo conjugado de Ψ. Note que este produto de caracteres é de fato um produto interno, pois todas as relações listadas abaixo são satisfeitas.

1. $\langle \chi, \Psi \rangle = \overline{\langle \Psi, \chi \rangle}$.

   $\langle \chi_1 + \chi_2, \Psi \rangle = \langle \chi_1, \Psi \rangle + \langle \chi_2, \Psi \rangle$.

   $\langle \lambda\chi, \Psi \rangle = \lambda\ \langle \chi, \Psi \rangle$.

   $\langle \chi, \chi \rangle \geq 0$.

   Esse produto interno recém definido é válido para qualquer caracter de qualquer representação de G, no entanto quando as representação envolvidas são irredutíveis o teorema a seguir [16] garante que uma relação de ortogonalidade entre esses

[1] Uma função de classe no grupo é tal que $f(g) = f(hgh^{-1}) \quad \forall g, h \in G$

Teorema C.2 *Sejam χ_i e χ_j os caracteres das representações ρ_i e ρ_j, as quais são irredutíveis e unitárias. Então o produto interno $\langle \chi_i, \chi_j \rangle$, definido em C.1, é da forma*

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta\left(i, j\right).$$

Isso significa que o conjunto $\{\chi_i\}$ formado pelas representações irredutíveis e unitárias de um grupo discreto e finito G formam um conjunto ortonormal. Com isso podemos mostrar que toda função de classe pode ser escrita (expandida) em caracteres, isto é, pode ser escrita como sendo uma combinação linear de $\{\chi_i\}$. Considere o teorema a seguir [16]

Teorema C.3 *Seja $f : G \to \mathbb{C}$ uma função do tipo classe, então f pode ser expandida em caracteres, isto é, a função f pode ser escrito, para únicos f_r's, da seguinte maneira*

$$f(g) = \sum_r f_r \chi_r(g),$$

sendo a soma sobre r uma soma sobre todas as representações irredutíveis e unitárias de G.

Os coeficientes f_r podem ser facilmente calculáveis usando-se a relação de ortonormalidade dos caracteres irredutíveis. Considere $f : G \to \mathbb{C}$ uma função de classe e seja χ_i $(i = 0, 1, \cdots, n)$ os caracteres irredutíveis de G, então pelo teorema C.3 temos

$$f(g) = \sum_l f_l \chi_l(g),$$

agora multiplicamos ambos os lados da expressão acima por $\chi_r(g^{-1})$, e somamos sobre todos os elementos do grupo, daí tiramos que

$$\sum_{g\in G} f(g)\chi_l(g^{-1}) = \sum_{g\in G}\sum_l f_l \chi_l(g)\chi_r(g^{-1}) = \sum_l f_l \left(\sum_{g\in G} \chi_l(g)\chi_r(g^{-1})\right) = \sum_l f_l \left(|G| \langle \chi_l, \chi_r \rangle\right),$$

finalmente usando a relação de ortonormalidade dos caracteres obtemos

$$\sum_{g\in G} f(g)\chi_l(g^{-1}) = \sum_l f_l \left(|G|\delta(l, r)\right) \quad \Rightarrow \quad f_r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f(g)\chi_r(g^{-1}).$$

Resumindo, podemos expandir em caracteres qualquer função de classe e o ficamos com

$$f(g) = \frac{1}{|G|}\sum_r \left(\sum_{g\in G} f(g)\chi_r(g^{-1})\right)\chi_r(g).$$

C.3.1 Caracteres Irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$

Conforme visto na seção anterior, as representações irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$ são as seguintes

$$\rho_r(a^k) = e^{\frac{i2\pi}{n}kr} \qquad r = 0, 1, \cdots, n-1,$$

portanto os caracteres irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$ são

$$\chi_r(a^k) = tr(\rho_r(a^k)) = e^{\frac{i2\pi}{n}kr}.$$

Referências Bibliográficas

[1] CHUNG, S. W.; FUKUMA, M.; SHAPERE, A. *Structure of topological field theories in three dimensions*. Int.J.Mod.Phys. **A9**, p. 1305-1360, 1994.

[2] OECKL, R. *Discrete Gauge Theories : from lattices to TQFC*. London: Imperial College Press, 2005.

[3] KOGUT, J. B. *A review of the lattice gauge theory and spin systems*, Rev.Mod.Phys, **No. 4**, vol. 51, p.659-713, 1979.

[4] KUPERBERG, G. *Involutory Hopf Algebras and 3-Manifold invariants*, Int.J.Math., vol. 2, No.1, p.41-66, 1991.

[5] YOKOMIZO, N.; TEOTÔNIO-SOBRINHO, P.; BARATA, J. C. A. *Topological low-temperature limit of $\mathbb{Z}_2$ spin-gauge theory in three dimensions*. Phys.Rev, **D75** 125009, 2007.

[6] CUNHA, B. G. C.; TEOTÔNIO-SOBRINHO, P. *Quasitopological field theories in two dimensions as soluble models*. Int.J.Mod.Phys, vol. 13, **A13**, p.3667-3689, 1998.

[7] FUKUMA, M.; HOSONO, S; KAWAI, H. *Lattice topological field theory in two dimensions*. Commun.Math.Phys, vol. 161, p.157- , 1994.

[8] SALINAS, S. R. A. *Introdução à física estatística*. ed 2. São Paulo: edusp, 2008.

[9] BAXTER, R. J. *Exactly solved models in statistical mechanics*. Canberra: Academic Press, 1982.

[10] YOKOMIZO, N.; TEOTÔNIO-SOBRINHO, P. *GL(2,R) dualities in generalised $\mathbb{Z}_2$ gauge theories and ising models*. JHEP, vol. 03, p.81- ,2007.

[11] REGGE, T. *General relativity without coordinates*. Nuovo Cimento, vol.19, p.558- , 1961.

[12] PONZANO, R.; REGGE, T. *Spectroscopy and group theoretical methods in physics*. Noth Holland: F. Bloch, p.1-58, 1968.

[13] PRASOLOV, V.V.; SOSSINSKY, A. B. *Knots, links, braids and tree-manifolds*. AMS , 1997, vol. 154 (Translations of Mathematical Monographs).

[14] PACHNER, U. *P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings*. European Journal of Combinatorics, vol. 12, No. 2. p.129-145,1991.

[15] SUZUKI, S. *On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody*. Can. J. Math., vol. 29, No. 1. p.111-124,1977.

[16] JAMES, G.; LIEBECK, M. *Representations and characters of groups*. London: Cambridge published, 1995.

[17] WILSON, K. G. *Confinement of quarks*. Phys.Review, **D10**, No. 8, p.2445-2459, 1974.

[18] STILLWELL, J. *Classical topology and combinatorial group theory*. ed. 02. Springer-Verlag, 1993.

[19] YOKOMIZO, N. *Teorias de campo quasetopológicas discretas em dimensão 3*. 2005. 95 págs. (Tese de doutorado em ciências-física) - Instituto de Física da USP - Universidade de São Paulo, São Paulo, São Paulo. 2005.

[20] JOHN, M. *Morse Theory*. Princeton University Press, 1963.

[21] KAUFFMAN, L; RADFORD, D. E. *On two proofs for existence and uniqueness of integrals for finite dimensional Hopf Algebras*. In: ArXiv Math. Disponível em http://arxiv.org/abs/math/9911081. Acessado em 01 de novembro de 2011.

[22] DASCALESCU, S.; NASTASESCU, C.; RAIANU, S. *Hopf Algebras: an introduction*. New York: Marcel Dekker, 2001.

[23] SCHUTZER, W. *Álgebras de Lie, Álgebras de Hopf e grupos quânticos*. 1996. 185 págs. (Dissertação de mestrado em ciências-matemática) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo. 1996.

[24] SWEEDLER, M. E. *Hopf Algebras*. New York: Addison-Wesley, 1969.