Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**Ressonâncias escalares: relações dinâmicas
entre processos de espalhamento e
decaimento**

Diogo Rodrigues Boito

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Carla Göbel Burlamaqui de Mello (PUC-RJ)

Prof. Dr. Rogerio Rosenfeld (IFT-Unesp)

Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta (Orientador-IFUSP)

São Paulo

2007

“(...) claro que quando chegar ao fim do meu passeio saberei mais, mas também é certo que saberei menos, precisamente por mais saber, por outras palavras, a ver se me explico, a consciência de saber mais conduz-me à consciência de saber pouco, aliás, apetece perguntar, que é saber, (...)”

José Saramago, *História do Cerco de Lisboa*

Agradecimentos

- Agradeço muito aos meus pais, Leda e Armando, e à minha irmã Sofia pelo apoio, sempre, e em especial nesta empreitada. Agradeço também ao meu primo Bruno.
- Agradeço muito à Ana que com paciência e amor tem me dado suporte neste caminho.
- Ao Prof. Manoel Robilotta agradeço pela excelente orientação desde os tempos da iniciação científica e pelo longo trabalho com os manuscritos que se transformaram nesta dissertação.
- Agradeço aos colegas da graduação com quem aprendi física e outras coisas. Especialmente aos *monstros* André, Fabio, Fernando, Henrique Alencar, Henrique Xavier, Orli, Ricardo, Roberto e Vinicius, e à Fabiana. Também agradeço ao Bruno e à Mariana que, além de tudo, foram muito solícitos nas ajudas computacionais. Agradeço ainda aos colegas Gabi e Jairo.
- Agradeço a meus amigos músicos com quem passei madrugadas tocando samba Edu, Gabriel e Chico. Pela amizade agradeço às minhas amigas Marina, Vânia e Débora.
- Agradeço a todo o pessoal do Grupo de Hádrons e Física Teórica. Aos professores Celso Lima, Marina Nielsen e Fernando Navarra, aos alunos com quem convivi e trabalhei Arthur, Babi, Daniela, David, Gabriel, Pat, Regina, Ricardo e Simone e também à Olga e ao Paulo.
- Un grand merci à Benoît Loiseau qui a dirigé mon travail de recherche au sein du Groupe Théorie du LPNHE à l'Université P. & M. Curie. Merci aussi à Bruno El-Bennich et Olivier Leitner qui ont énormément contribué à ce travail.
- Agradeço à Fapesp pelo apoio financeiro no Brasil e ao governo da *Région Ile-de-France* pelo apoio durante a estada em Paris.

Resumo

A existência de um méson escalar-isoescalar leve, conhecido como σ , foi proposta pela primeira vez na década de 60. A partícula tinha então um papel importante na construção teórica das interações $\pi\pi$ mas, apesar dos esforços experimentais, ela não foi detectada nos anos que se seguiram. Essa situação foi radicalmente alterada em 2001, quando uma ressonância escalar foi descoberta nos canais $\pi^+\pi^-$ do decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$ e recebeu o rótulo $\sigma(500)$. Sua existência é bem estabelecida hoje em dia. Contudo, no tratamento dos dados dos vários grupos experimentais são empregadas expressões com pouca base teórica e, por isso, os valores de sua massa e largura ainda são mal conhecidos.

Neste tipo de decaimento, a formação da ressonância pode se dar no vértice fraco. Em sua subsequente propagação, ocorrem as chamadas interações de estado final, cuja descrição não é trivial. Normalmente, essas interações não são levadas em conta de maneira criteriosa na análise de dados experimentais. Neste trabalho introduzimos uma função $\Pi(s)$ que descreve a propagação e decaimento da ressonância em presença das interações de estado final. No regime elástico, a fase de $\Pi(s)$ é determinada pelo chamado teorema de Watson, segundo o qual ela deve ser a mesma do espalhamento. Conseguimos estabelecer, sem ambigüidades, como a informação do espalhamento deve ser usada de forma a determinar não somente a fase de $\Pi(s)$, mas também seu módulo. Nosso principal resultado é uma expressão para $\Pi(s)$ em termos da fase elástica e de uma outra fase relacionada a uma integral de *loop* bem controlada. Três casos particulares foram explorados numericamente: os modelos sigma linear e não linear e ainda um modelo fenomenológico que leva em conta o acoplamento de canais pión-pión e káon-káon.

Em consonância com a teoria quântica de campos, nosso resultado incorpora a unitariedade, considera a ressonância como grau de liberdade explícito e representa, ainda, uma generalização do procedimento usual de unitarização pela matriz K . Por permitir uma ligação clara entre espalhamento e produção, a função $\Pi(s)$ pode ser útil na análise de dados experimentais e ajudar na determinação da posição do pólo do σ e de outras ressonâncias escalares.

Abstract

The existence of a light scalar-isoscalar meson, known as σ , was suggested in the 60's. This particle played an important role in the theoretical construction of $\pi\pi$ interactions but, in spite of all experimental effort, it failed to be detected. This scenario changed radically in 2001, when a scalar-isoscalar resonance was discovered in the $\pi^+\pi^-$ channel of the $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$ decay and was called $\sigma(500)$. Nowadays, its existence is rather well established. However, in the analysis of experimental data, expressions loosely based on theory are employed and therefore its mass and width are still not well known.

In this kind of decay, the production of the resonance may occur at the weak vertex. When it propagates, final state interactions take place. Usually these interactions are not properly taken into account in data analysis. In this work, we introduce a function $\Pi(s)$, which describes the propagation and decay of the resonance in the presence of the final state interactions. In the elastic regime, the phase of $\Pi(s)$ is determined by the Watson's theorem, which states that it must be the same as the scattering phase. We were able to establish, unambiguously, how the information from scattering should be used to determine not only the phase of $\Pi(s)$ but also its modulus. Our main result is an expression for $\Pi(s)$ in terms of the elastic phase and another one related to a well controlled loop integral. Three special cases are explored numerically, namely: the linear and non linear sigma models and a phenomenological model that takes into account the coupling between pion-pion and kaon-kaon channels.

In agreement with quantum field theory, our result encompasses unitarity, treats the resonance as an explicit degree of freedom and, moreover, corresponds to a generalisation of the usual K -matrix unitarization procedure. Since it represents a clear way to relate scattering and production, our function $\Pi(s)$ can be useful in data analysis and may be instrumental in the determination of the pole position of the σ as well as other scalar resonances.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
1 Introdução	1
1.1 O méson σ	1
1.2 O renascimento do méson σ	5
2 Ressonâncias	11
2.1 Espalhamento ressonante e a Breit-Wigner	16
2.2 Ressonâncias em teoria de campos	23
3 Modelo isobárico e a análise da E791	33
3.1 Crítica ao modelo isobárico	41
4 Amplitudes de espalhamento e produção	45
4.1 Espalhamento	48
4.2 Produção	56
4.3 Resumo dos resultados	69
5 Modelos quirais	73
5.1 Teorias efetivas	73
5.2 Resumo do capítulo	107
6 Um modelo com dois canais	109
7 Conclusões	115

A	Convenções e notação	121
B	Cinemática	123
B.1	Variáveis de Mandelstam	123
B.2	Dcaimento	124
C	Diagramas de Dalitz	127
D	Integral de loop	133
E	Apêndice sobre a projeção	139
E.1	Projeção no canal isoescalar	139
E.2	Projeção na onda S	140
F	Trabalhos submetidos	143

Capítulo 1

Introdução

1.1 O méson σ

A Cromodinâmica Quântica (QCD, do inglês *Quantum Chromodynamics*) é hoje tida como a teoria fundamental das interações fortes. Ela tem sua origem nos modelos de *quarks*, que se mostraram capazes de prever uma série de propriedades dos hádrons prescindindo de um conhecimento detalhado das suas interações fundamentais. A QCD é mais abrangente e descreve a interação entre os quarks no contexto da teoria quântica de campos.

Os quarks são férmions de spin $1/2$ e carga elétrica fracionária; são elementares e constituem os graus de liberdade associados à matéria. Além da carga elétrica e do spin, possuem um outro número quântico: a “cor”, relacionado a uma simetria interna $SU(3)$. A QCD é uma teoria de calibre, invariante por este grupo de simetria e pertencente a uma classe de teorias ditas de Yang-Mills. Os bósons de calibre responsáveis pela interação são os *glúons*, que também têm cor e, portanto, interagem entre si, devido ao caráter não abeliano do grupo $SU(3)$. Esse número quântico não pode ser detectado diretamente pois, devido a uma propriedade conhecida como confinamento, os quarks nunca se manifestam de maneira isolada. As partículas formadas por quarks, conhecidas como hádrons, são sempre “sacolas brancas”, ou seja, possuem cor total nula.

Além da cor, os quarks possuem o “sabor”. São seis os sabores de quarks conhecidos: u , d , s , c , t e b . Cada um dos seis quarks tem massa não nula, distinta das dos outros cinco. A incorporação da QCD ao modelo padrão das interações fundamentais (SM) permitiu, graças ao mecanismo de Higgs, uma fundamentação teórica da origem das massas dos quarks. Contudo, os valores que elas possuem, variando de 5 MeV a 170 GeV, não podem ser explicados pelo SM e a razão entre as massas dos diferentes

sabores deve ser determinada experimentalmente. Os quarks mais leves, u e d , têm suas massas compreendidas nos intervalos [1] $1,5 \text{ MeV} < m_u < 3 \text{ MeV}$, $3 \text{ MeV} < m_d < 7 \text{ MeV}$, enquanto que para o quark mais massivo temos $m_t = 174 \pm 3 \text{ GeV}$, cerca de cinco ordens de grandeza maior.

A QCD tem tido um grande sucesso experimental. No regime de altas energias, cálculos teóricos podem ser feitos recorrendo-se à teoria de perturbação e estão em excelente acordo com resultados experimentais. O emprego desse procedimento se justifica pelo estudo da constante de acoplamento dinâmica $\alpha_s(q)$, onde q é uma escala de momento. O caráter não abeliando da teoria, aliado ao número de sabores ($N_f = 6$) e de cores ($N_c = 3$), fazem com que α_s diminua consideravelmente para q grande, facilitando a convergência da série perturbativa. Em contrapartida, cálculos a baixa energia são impraticáveis nessa teoria, pois o valor da constante de acoplamento α_s torna inviável a convergência da série perturbativa nesse regime. Há duas abordagens rigorosas para se contornar esse problema: cálculos de QCD na rede e teorias efetivas. Esta última baseia-se na idéia de que o mundo hadrônico deve refletir as simetrias da teoria fundamental subjacente, a QCD [2]. Além das simetrias de Poincaré, conjugação de carga, C , paridade P , reversão temporal, T , e de cor, a QCD também exibe uma simetria aproximada chamada *simetria quiral*. Ela está ligada ao fato das massas dos quarks u e d serem muito pequenas com relação à escala natural da teoria $\Lambda_{QCD} \approx 200 \text{ MeV}$. Em primeira aproximação, portanto, esses quarks podem ser considerados sem massa. Assim, seus espinores passam a ser escritos como espinores de Weyl, pois a helicidade se torna um número quântico bem definido, separando as duas *quiralidades* do campo de Dirac, direita, R , e esquerda, L . A QCD tem, pois, uma simetria quiral $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ quase exata¹, quebrada fracamente pelos termos de massa dos quarks u e d , que acoplam os spinors dos tipos R e L .

Uma simetria pode ser realizada de mais de uma maneira. Caso a simetria seja realizada no chamado *modo de Wigner-Weyl*, o espectro da teoria também é simétrico. A simetria quiral, se assim realizada, levaria à existência de multipletos de mésons escalares degenerados em massa com relação aos pseudoescalares, o que não é observado. Isso indica que sua realização é mais complexa. Uma outra possibilidade para a realização dessa simetria é o *modo de Nambu-Goldstone*. O espectro da teoria, nesse caso, não exibe a simetria subjacente. A simetria é dita *escondida*, ou *quebrada espontaneamente*. Esse caso está em melhor acordo com o fato experimental de não haver multipletos de paridades opostas degenerados em massa.

¹A simetria quiral foi descoberta, nas interações fortes, na década de 60, antes do surgimento da QCD.

Nos anos 60, foi proposto um modelo para a quebra da simetria quiral no mundo hadrônico baseado em uma analogia com a supercondutividade [3, 4], conhecido como σ linear. Nele há a introdução de um campo escalar-isoescalar, o σ . Os cenários de Wigner-Weyl e de Nambu-Goldstone são gerados no modelo pela variação de um parâmetro contínuo, que determina a interação entre os píons e o escalar. No caso Nambu-Goldstone, os píons correspondem a bósons de Goldstone da simetria espontaneamente quebrada e, portanto, têm massa nula. Já o σ passa a ser uma partícula massiva e o vácuo se torna não trivial no mundo hadrônico, pois ele não é vazio. Esse novo vácuo não é mais um invariante quiral. Desta forma, embora a hamiltoniana ainda seja invariante, o espectro do sistema não exibe a simetria. A imagem que esse modelo produz é a de um meio denso no qual os píons evoluem sem resistência, como ondas sonoras. Na QCD, esse resultado é representado pela existência de um condensado de quarks e antiquarks, análogo ao condensado de elétrons no supercondutor [5].

A introdução da simetria quiral como um ingrediente básico da descrição das interações entre píons (π) e núcleons (N) produziu uma série de resultados condizentes com os experimentos. Tornou-se possível, pela primeira vez, que se fizesse física de precisão no setor das interações fortes. A simetria foi primeiramente introduzida através da chamada álgebra de correntes. Essa técnica, embora produza bons resultados, não permite uma compreensão transparente da dinâmica envolvida. O mérito do modelo σ linear, que pode ser estendido para incorporar o dubleto do núcleon formado pelo próton e pelo nêutron, está em reproduzir os resultados da álgebra de correntes e, juntamente, fornecer uma visão clara da dinâmica envolvida. O cálculo do comprimento de espalhamento πN nesse modelo estava em bom acordo com os resultados experimentais da época. Isso acontece, em grande parte, devido ao termo de troca do σ , que produz um enorme cancelamento na amplitude próximo ao limiar [6]. O espalhamento $\pi\pi$ a baixas energias também pode ser calculado e o resultado obtido reproduz os teoremas estabelecidos pela álgebra de correntes. No setor nucleônico, o σ também está presente em um dos primeiros potenciais realísticos para a interação NN , o potencial de Bonn [7]. Além disso, a interação $N\sigma$ gera naturalmente uma massa para o núcleon, advinda da quebra de simetria e que está diretamente ligada ao vácuo não trivial [8]. Em suma, a implementação da simetria quiral por meio do modelo σ linear estabeleceu um arcabouço teórico bem sucedido no estudo da fenomenologia dos sistemas $\pi\pi$, NN e πN . Ademais, o modelo permitiu uma visão da quebra de simetria e das interações envolvidas que ia além da álgebra de correntes.

O sucesso do modelo tornou viável e motivou a busca experimental por uma ressonância escalar-isoescalar que pudesse ser identificada com o σ . A forma mais direta

de identificar o σ seria através do espalhamento $\pi\pi$. Esperava-se, então, que a fase desse espalhamento em onda S exibisse um rápido acréscimo de 180° a baixas energias, o que indicaria a existência de uma ressonância típica. Entretanto, esse movimento da fase não foi observado e as várias análises divergiam quanto à existência ou não de um pólo na amplitude do espalhamento $\pi\pi$ próximo ao limiar. Tal insucesso nas buscas pelo σ motivou a descrença na sua existência como um estado hadrônico. O que os experimentos pareciam indicar era que o σ não passava de um artifício matemático, sem qualquer ligação com a natureza. Foi proposta então uma outra realização da simetria quiral, a qual preserva o sucesso fenomenológico sem a necessidade do méson escalar: o modelo σ não linear [9]. Esse programa culminou no principal desenvolvimento teórico nesse setor das interações hadrônicas, a Teoria de Perturbação Quiral (ChPT), desenvolvida por Weinberg e aprimorada por Gasser e Leutwyler [10], e que não possui uma ressonância escalar-isoescalar leve como grau de liberdade explícito.

Um fato novo veio alterar esse cenário em 2001. O trabalho de um grupo brasileiro do CBPF liderado pelo Dr. Ignacio Bediaga, junto ao experimento E791 no Fermilab, demonstrou a existência de uma ressonância escalar-isoescalar leve e larga no decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$ [11]. Ela foi rotulada $\sigma(500)$ mas também é conhecida como $f_0(600)$ [1]. Essa descoberta foi seguida por uma renovação no interesse pelo setor dos mésons escalares, motivando um intenso debate na comunidade.

A descoberta do $\sigma(500)$ nos decaimentos do méson D fez a balança pender para o lado daqueles que acreditavam na existência dessa ressonância no espalhamento $\pi\pi$. Alguns grupos já defendiam, nos anos 90, a existência de um pólo afastado do eixo real na onda S do espalhamento [12, 13]. Mais recentemente, a posição do pólo do espalhamento foi determinada com bastante precisão [14]. O σ também foi detectado em outros decaimentos como $J/\psi \rightarrow \omega\pi^+\pi^-$ [15], e os resultados da E791 foram confirmados por duas outras colaborações, a saber, a FOCUS [16] e a CLEO-c [17]. Juntando as evidências experimentais e os resultados teóricos é possível hoje afirmar que o $\sigma(500)$ existe.

Apesar desses avanços recentes, sobram ainda várias perguntas, dentre as quais destacam-se: como medir com precisão a posição do pólo dessa ressonância? Podemos identificar esse estado com o escalar do modelo σ linear? Quais as diferenças entre o espalhamento $\pi\pi$ e a produção do σ no decaimento que fazem com que a ressonância apareça tão mais claramente no segundo caso? Além disso, a própria natureza dos escalares, se são estados de dois ou quatro quarks, *glueballs* etc., ainda hoje não é clara [18]. Vale lembrar que a mesma colaboração também descobriu um outro escalar controverso no

decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ [19], o $\kappa(800)$. Tal descoberta também reavivou o interesse pelos escalares no canal πK .

1.2 O renascimento do méson σ

O primeiro experimento a produzir uma forte evidência a favor da existência da ressonância $\sigma(500)$ em decaimentos foi conduzido pela colaboração E791 junto ao Fermilab. Tratou-se de um experimento de alvo fixo onde reações $\pi^- p$ foram observadas a 500 GeV e que coletou cerca de 2×10^{10} eventos. O trabalho de análise referente ao σ foi feito por um grupo brasileiro do CBPF. Nesse experimento foi colecionado um grande número de eventos de decaimentos do D^+ e do D_s em píons e káons. Os resultados da análise dos decaimentos $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$ foram publicados na referência [11], onde foi relatada a descoberta do $\sigma(500)$ no canal $\pi^+ \pi^-$.

Tabela 1.1: Ressonâncias incluídas no ajuste da colaboração E791 [11] e suas propriedades segundo o PDG [1], que não considera o σ como um estado bem estabelecido.

Ressonância	Massa (MeV)	Largura (MeV)	$I^G J^{PC}$
$f_0(980)$	980 ± 10	40 a 100	$0^+ 0^{++}$
$f_0(1370)$	1200 a 1500	200 a 500	$0^+ 0^{++}$
$\rho(770)$	$775,5 \pm 0,4$	$149,4 \pm 1,0$	$1^+ 1^{--}$
$\rho(1450)$	1459 ± 11	147 ± 40	$1^+ 1^{--}$
$f_2(1270)$	$1275,4 \pm 1,1$	$185, 2^{+3,1}_{-2,5}$	$0^+ 2^{++}$
σ ou $f_0(600)$	400 a 1200	600 a 1000	$0^+ 0^{++}$

O presente trabalho de mestrado discute uma parte do aparato teórico utilizado na análise desse tipo de experimento. Por isso, é interessante apresentarmos em algum detalhe o método empregado pelo grupo do CBPF. O estudo de decaimentos em três corpos é feito com o uso de uma técnica conhecida como *diagrama de Dalitz*. Esse tipo de diagrama organiza visualmente os eventos medidos. Por *evento* entendemos a observação de três píons $\pi^+(p_1)\pi^-(p_2)\pi^+(p_3)$ cujos quadrimomentos satisfazem, dentro da resolução

do experimento², a condição

$$(p_1 + p_2 + p_3)^2 = m_{D^+}^2.$$

Os eventos observados são dispostos num diagrama bidimensional cujos eixos são formados por invariantes de Lorentz construídos com os quadrimomentos das partículas. Como o espaço de fase de um tal diagrama é constante, qualquer disposição de eventos que não seja uniforme revela uma dinâmica do processo de decaimento. Em certo sentido, o diagrama de Dalitz é análogo a um experimento de dupla fenda. Os eventos vão sendo coletados e dispostos no diagrama. O agrupamento de pontos em determinadas regiões é resultado da existência de dinâmica não trivial, que pode decorrer da presença de uma ou várias ressonâncias, bem como das inteferências entre elas. Uma discussão detalhada dos diagramas de Dalitz está reservada ao Apêndice C. O diagrama de Dalitz original da colaboração E791 está mostrado na figura 1.1(a).

Para extrair dados como a massa e a largura de ressonâncias de um diagrama de Dalitz, é necessário uma análise dos dados obtidos. Assim como no experimento de dupla fenda, podemos inferir uma densidade de probabilidade que teria gerado aqueles eventos. A estratégia de análise do decaimento consiste em supor uma forma funcional para a amplitude do processo e ajustá-la, através de alguns parâmetros livres, aos dados experimentais. No caso da E791, a amplitude é a dada pelo *modelo isobárico*, que será descrito em detalhes no capítulo 3. Ao analisar o diagrama, a colaboração E791 incluiu, num primeiro momento, apenas as mais consagradas ressonâncias piônicas: $\rho^0(770)$, $f_0(980)$, $f_2(1270)$, $\rho(1440)$ e a $f_0(1370)$, cujas principais propriedades estão na tabela 1.1. Dessas, apenas a última é ainda um pouco controversa. O *Particle Data Group* (PDG) [1] lista duas ressonâncias escalares-isoscalares com massa em torno de 1400 MeV: a $f_0(1370)$ e a $f_0(1500)$. O ajuste dos dados favoreceu apenas o $f_0(1370)$. Os $\rho(770)$ e $\rho(1440)$ são ressonâncias bem estabelecidas, principalmente o $\rho(770)$, de números quânticos $I^G J^{PC} = 1^+ 1^{--}$. Esta última foi utilizada como referência na análise. A qualidade estatística do ajuste dos dados com esse conjunto de ressonâncias foi bastante baixa. Até mesmo visualmente é possível notar que o desvio existente se deveu ao grande número de eventos na parte de baixa energia do espectro ($4m_\pi^2 < m_{\pi\pi}^2 < 0.5 \text{ GeV}^2$). Essa discrepância aparece na parte superior da figura 1.1(b), reproduzida do *preprint* de [11]. Por isso, uma ressonância a mais passou a ser incluída na amplitude, cujas massa e largura foram deixadas livres. Após vários testes, os resultados mostraram que o melhor χ^2 era

²O processo de identificação de partículas e seleção dos eventos é bastante complexo e não será discutido aqui. Remetemos o leitor interessado à referência [20].

obtido com uma ressonância escalar-isoescalar, que foi denominada $\sigma(500)$. A melhora do ajuste pode ser vista na parte inferior da figura 1.1(b). Os valores obtidos com o ajuste para sua massa e largura foram

$$m_\sigma = 478_{-23}^{+24} \pm 17 \text{ MeV}, \quad \Gamma_\sigma = 324_{-40}^{+42} \pm 21 \text{ MeV}.$$

O experimento E791 constitui o marco zero da descoberta do σ em decaimentos. Houve, à época, muita luta em torno deste resultado. No seio da própria colaboração, o grupo brasileiro teve de fazer uma defesa ferrenha da análise para que ela fosse aceita e, finalmente, resultasse no artigo de maior impacto produzido pela colaboração. Mais recentemente, as colaborações Focus [16] e CLEO-c [17] também detectaram o σ no mesmo processo, utilizando para a análise dos dados outros modelos teóricos (matriz K e lagrangianas quirais). Os resultados, de maneira qualitativa, estão todos em acordo e nenhuma grande discrepância é observada. Os experimentos que detectam o $\sigma(500)$ concordam que esse é um dos canais que prevalece nos decaimentos do méson D^+ em píons. A colaboração BES também confirmou a presença da ressonância no decaimento $J/\psi \rightarrow \omega \pi^+ \pi^-$ [15]. Embora todos os experimentos indiquem que se trata de uma ressonância leve e larga, os resultados para a massa e largura do σ variam de acordo com o modelo empregado na análise. Isso dificulta uma comparação fiel com resultados obtidos de análises baseadas na matriz S do espalhamento.

Figura 1.1: Figuras originais da E791 reproduzidas da versão “pre-print” de [11]. (a) Diagrama de Dalitz. (b) Projeções do diagrama sem (superior) e com (inferior) o $\sigma(500)$.

Recentemente, um importante grupo teórico revisitou o espalhamento $\pi\pi$ com o objetivo de produzir uma determinação precisa do pólo do σ . O resultado obtido por Caprini, Colangelo e Leutwyler (CCL) [14] foi

$$\sqrt{s_\sigma} = m_\sigma + i\Gamma_\sigma/2 = 441_{-8}^{+16} - i272_{-12,5}^{+9} \text{ MeV}.$$

Embora os valores difiram dos obtidos pela E791, eles são próximos, o que indica que o σ do decaimento deve ser uma manifestação do pólo presente no espalhamento. Na figura 1.2 mostramos a posição do pólo do σ de alguns trabalhos baseados no espalhamento e o resultado da colaboração E791. Os valores estão tabelados no artigo de revisão sobre escalares do último volume da *Review of Particle Physics*³ do PDG [1], onde as referências originais podem ser encontradas.

Figura 1.2: Posição do pólo do σ de alguns trabalhos teóricos focados no espalhamento $\pi\pi$. As referências originais podem ser encontradas no artigo de revisão do PDG [1]. Mostramos também o ponto experimental da E791.

É bom lembrar que, neste tipo de ajuste, a determinação da massa e largura da ressonância dependem muito do modelo utilizado. Para compreender a análise dos dados feita pela colaboração E791 é necessário entender o modelo isobárico. O modelo tem como principal característica o uso de funções de Breit-Wigner para descrever as ressonâncias. A compreensão do emprego dessa forma funcional passa por uma revisão

³O artigo de revisão é de autoria de S. Spanier e N. A. Törnqvist e tece um panorama do estágio atual do estudo dos mésons escalares.

de resultados da mecânica quântica usual, o que está feito brevemente na seção 2.1. Na seção 2.2 fazemos o equivalente no contexto relativístico para, em seguida, no capítulo 3, descrevermos o modelo isobárico e os dados da E791. Neste trabalho de mestrado, tentamos determinar sem ambigüidades as relações existentes entre o espalhamento $\pi\pi$ na presença do σ e a amplitude do decaimento ressonante $D^+ \rightarrow (\pi^+\pi^-)\pi^-$. Isso está feito, dentro de certas aproximações, no capítulo 4. Nele são discutidas também algumas generalizações do nosso resultado. No capítulo 5, utilizamos dois modelos para a interação $\pi\pi\sigma$ baseados na simetria quiral. Estudamos o espalhamento $\pi\pi$ e a produção de píons no decaimento ressonante com esses dois modelos. O primeiro deles é o modelo σ linear usual, já o segundo corresponde ao modelo σ não linear no qual introduzimos uma ressonância escalar. O capítulo 6 descreve brevemente um outro modelo fenomenológico⁴ para a produção de píons no decaimento. Nele ainda apresentamos comparações com os resultados dos capítulos 4 e 5. As conclusões do trabalho se encontram no capítulo 7.

Aos apêndices reservamos: as convenções e notação utilizadas (Apêndice A), a cinemática empregada (Apêndice B), uma apresentação geral dos diagramas de Dalitz (Apêndice C), o cálculo da integral de *loop* utilizada no trabalho (Apêndice D), a projeção das amplitudes do capítulo 4 (Apêndice E) e os trabalhos submetidos a publicação (Apêndice F).

⁴Essa parte do trabalho se beneficiou da estada em Paris no Groupe Théorie do Laboratoire de Physique Nucléaire et de Hautes Energies - LPNHE na Université Pierre & Marie Curie. Contou com a supervisão do Dr. Benoît Loiseau e com contribuições dos Drs. Bruno El-Bennich e Olivier Leitner.

Capítulo 2

Ressonâncias

Fenômenos de ressonância aparecem em muitas áreas da física. Sistemas tão díspares quanto o oscilador harmônico forçado e a interação e^+e^- a 90 GeV podem ter comportamentos ditos ressonantes. Uma característica que une todas as manifestações desse tipo de processo é a descrição matemática por variações de uma função conhecida como *função de Breit-Wigner* [21], que na sua forma mais simples pode ser escrita como

$$|f_{BW}(x)|^2 = \frac{1}{(x - x_o)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (2.1)$$

O perfil dessa função é muito característico e está representado na figura 2.1. Grosso modo, qualquer fenômeno ressonante está ligado a esse perfil funcional. A função tem um máximo centrado no ponto x_o , que é caracterizado por uma largura à meia altura Γ . Ao sintonizarmos um rádio, por exemplo, alteramos o valor de x_0 de modo que as ondas de uma dada frequência entrem em ressonância com o circuito do aparelho. Essa sintonia, em alguns aspectos, é semelhante à realização do espalhamento e^+e^- perto de 90 GeV no antigo LEP (Large Electron-Positron Collider, colisor e^+e^- do CERN que se encontra hoje desativado). Perto desse valor há, não uma estação de rádio, mas um bóson fundamental da interação fraca: o Z de massa 91 GeV. Perto dessa energia, a seção de choque do espalhamento pode ser descrita de maneira aproximada por uma função como a dada pela Eq. (2.1), onde x_0 é próximo de $m_Z = 91$ GeV e Γ é a largura da partícula $\Gamma_Z = 2,5$ GeV.

Neste trabalho estamos interessados em ressonâncias do espalhamento. Antes de estudarmos esse caso específico, e entendermos como nele aparece a função de Breit-Wigner, vamos utilizar um exemplo da mecânica quântica que ilustra o fenômeno de ressonâncias, no qual, do ponto de vista matemático, a fórmula (2.1) aparece de forma natural. O objetivo é ganhar uma intuição sobre o papel desempenhado pela *interação*

Figura 2.1: Perfil típico de uma função de Breit-Wigner.

no aparecimento de uma largura na função do tipo Breit-Wigner.

Partículas estáveis no tempo são associadas a autoestados do hamiltoniano, tanto na teoria de campos, quanto na mecânica quântica não relativística. Estados desse tipo têm energia bem definida e não mudam com a passagem do tempo. Entretanto, em uma série de fenômenos aparecem estados instáveis, mas que guardam alguma semelhança com os autoestados. É associada a eles uma *largura*, que determina seu tempo de duração, sua taxa de “desaparecimento”. As ressonâncias são objetos desse tipo.

Para ilustrar essa idéia, tomamos como exemplo a mecânica quântica usual, na qual a evolução temporal do estado físico é regida por um operador $\hat{\mathcal{U}}(t)$ tal que

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = e^{-i\hat{H}t}, \quad (2.2)$$

onde o hamiltoniano $\hat{H}$ é independente do tempo. Esse operador leva o estado $|i, t_0 = 0\rangle$, denotado simplesmente por $|i\rangle$, para o estado $|i, t\rangle$. Se o estado inicial $|i\rangle$ for um autoestado do hamiltoniano, isto é,

$$\hat{H} |i\rangle = E_i |i\rangle, \quad (2.3)$$

a sua evolução temporal é trivial e dada por

$$\hat{\mathcal{U}}(t) |i\rangle = |i\rangle e^{-iE_i t}, \quad (2.4)$$

o que permite escrever

$$|i, t\rangle = |i\rangle e^{-iE_i t}. \quad (2.5)$$

Portanto, a evolução no tempo introduz apenas uma fase complexa e a norma do estado $|i, t\rangle$ é constante. Além disso, todo operador $\hat{\mathcal{O}}$ compatível com o hamiltoniano, ou seja,

tal que $[\hat{O}, \hat{H}] = 0$, é uma constante do movimento. Isso mostra que os autoestados do hamiltoniano são, em certo sentido, imunes ao tempo: são completamente estáveis e eternos. Pertencem a essa classe o elétron, o próton e o estado fundamental do átomo de hidrogênio, por exemplo. Ressonâncias pertencem a uma outra classe de objetos da teoria, objetos instáveis.

O exemplo que passamos a discutir mostra como a estabilidade do estado $|i, t\rangle$ pode ser alterada se, de maneira adiabática, introduzirmos um potencial dependente do tempo $V(t) = e^{\eta t} V$. O parâmetro η é pequeno, o que permite “ligarmos” V com o passar do tempo e, no fim dos cálculos, tomamos $\eta \rightarrow 0$. Para entender o efeito que a introdução desse potencial produz no sistema, vamos estudar a evolução do mesmo estado inicial $|i\rangle$ na presença dessa nova perturbação. Os autoestados do hamiltoniano $\hat{H}$ sem o novo potencial formam uma base completa tal que

$$\sum_i |i\rangle \langle i| = \mathbb{1}. \quad (2.6)$$

Nessa base, um estado $|\alpha\rangle$ qualquer pode ser escrito como

$$|\alpha, t\rangle = \sum_j c_j(t) |j\rangle. \quad (2.7)$$

Preparamos o sistema, como anteriormente, num estado inicial tal que $|\alpha, t_0 = 0\rangle = |i\rangle$, o que corresponde a

$$\begin{aligned} c_j(t_0 = 0) &= 1, \text{ para } j = i, \\ c_j(t_0 = 0) &= 0, \text{ para } j \neq i. \end{aligned} \quad (2.8)$$

No caso em que $V = 0$, como já vimos, a evolução de $c_i(t)$ é trivial e dada por

$$c_i(t) = e^{-iE_i t}. \quad (2.9)$$

A introdução adiabática do potencial nos dá um novo hamiltoniano do sistema

$$\hat{H}' = \hat{H} + V e^{\eta t}, \quad (2.10)$$

cujas evolução é dada pela equação de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t\rangle = \hat{H}' |\alpha, t\rangle. \quad (2.11)$$

Como estamos interessados na componente $|i\rangle$, tomamos a projeção nesta componente. O cálculo do lado esquerdo é bastante simples e dá

$$\langle i | \frac{\partial}{\partial t} |\alpha, t\rangle = \frac{\partial}{\partial t} c_i(t). \quad (2.12)$$

Para o lado direito obtemos

$$\langle i|\hat{H}'|\alpha, t\rangle = c_i(t)E_i + \sum_j c_j(t)e^{\eta t}\langle i|V|j\rangle. \quad (2.13)$$

Isso nos fornece uma equação diferencial para $c_i(t)$

$$i\frac{\partial}{\partial t}c_i(t) = c_i(t)E_i + \sum_j c_j(t)e^{\eta t}V_{ij}, \quad (2.14)$$

onde simplificamos a notação dos elementos de matriz do potencial $\langle i|V|j\rangle \equiv V_{ij}$. Essa equação pode ser resolvida se parametrizarmos a solução na forma [22]

$$c_i(t) = e^{-iE_it - i\Delta_it}, \quad (2.15)$$

de modo que a ação do potencial é representada por Δ_i . Se substituirmos essa expressão na equação que queremos resolver Eq. (2.14) obtemos, após fazer $\eta \rightarrow 0$,

$$\Delta_i = V_{ii} + \sum_{j \neq i} V_{ij}c_j(t)e^{i(E_i + \Delta_i)t}. \quad (2.16)$$

Essa equação, embora não represente uma solução fechada do problema, devido ao fato de Δ_i aparecer no segundo termo do lado direito, indica que, em primeira aproximação, $\Delta_i = V_{ii}$. O resultado em ordem mais alta em V tem de ser obtido em teoria de perturbação dependente do tempo. Fazendo esse tratamento mais completo [22], o que vemos é que, em geral, Δ_i é complexo e pode ser escrito $\Delta_i = \Re\Delta_i + i\Im\Delta_i$. Portanto, o efeito do potencial é deslocar a energia de um fator complexo Δ_i tal que

$$E_i \rightarrow E_i + \Delta_i. \quad (2.17)$$

Se escrevermos

$$\Gamma = -2\Im\Delta_i \quad (2.18)$$

temos para a evolução da componente $|i\rangle$

$$|i, t\rangle = c_i(t)|i\rangle = e^{-i\bar{E}_it - (\Gamma_i/2)t}|i\rangle, \quad (2.19)$$

onde

$$\bar{E}_i = E_i + \Re\Delta_i. \quad (2.20)$$

Desta feita, a probabilidade do sistema estar no estado $|i\rangle$ num instante t é

$$|c_i(t)|^2 = e^{-\Gamma_i t}. \quad (2.21)$$

Isso mostra que, pouco a pouco, a componente $|i\rangle$ do estado total do sistema vai desaparecendo, e $1/\Gamma$ representa sua meia vida. Portanto, um estado que era estável não o é mais se introduzirmos paulatinamente o potencial $V(t)$. O potencial perturbativo induz transições no sistema e, pela conservação da probabilidade [22], outras componentes vão surgindo com o passar do tempo, até o total desaparecimento de $|i\rangle$.

Para entender o nome largura que é dado a Γ , tomemos a transformada de Fourier de $c_i(t)$

$$\int f(E) dE = e^{-i\bar{E}_i t - (\Gamma_i/2)t}, \quad (2.22)$$

e temos

$$f(E) \propto \frac{1}{E - \bar{E}_i + i\Gamma/2}, \quad (2.23)$$

cujo módulo ao quadrado corresponde à fórmula de Breit-Wigner Eq. (2.1)

$$|f(E)|^2 \propto \frac{1}{(E - \bar{E}_i)^2 + \Gamma_i^2/4}. \quad (2.24)$$

Vemos, então, que a energia do estado não é mais bem definida e passa, agora, a ter uma dispersão centrada em $\bar{E}_i$, Eq. (2.20), cuja largura à meia altura é determinada por Γ_i , Eq. (2.18).

Embora essa idéia de ressonância baseada na evolução temporal do estado $|\alpha\rangle$ não represente precisamente o fenômeno do espalhamento ressonante, ela introduz um paradigma para o tratamento dado a este problema na teoria quântica de campos. O que mostramos é que o estado inicial, antes de ligarmos o potencial $V(t)$, era estável e eterno. A perturbação introduziu no sistema uma nova possibilidade de interação, cujos efeitos foram dois:

1. A energia é alterada. A parte real de Δ_i desloca a energia do estado inicial.
2. O estado decai. A componente $|i\rangle$ do estado total desaparece pouco a pouco e essa característica está ligada à parte imaginária da função Δ_i que representa a nova interação.

No caso da teoria de campos, o formalismo lagrangiano deve dar conta do caráter instável da ressonância. Assim como os campos de partículas estáveis, o campo associado à ressonância tem um termo cinético e um termo de massa na lagrangiana do sistema. Porém, caso haja uma interação que permita o decaimento da partícula, ela introduz na expressão do propagador um termo análogo ao Δ_i do exemplo acima, cuja parte imaginária determina a largura de decaimento da ressonância, e cuja parte real altera sua massa física.

Na próxima seção, discutiremos a descrição do espalhamento ressonante em mecânica quântica não relativística, enfatizando o papel das propriedades de analiticidade. O interesse em discutir esse efeito no caso não relativístico está em fornecer uma intuição sobre o comportamento da seção de choque e da fase do espalhamento.

O mesmo problema do ponto de vista da teoria de campos será tratado em seguida. Ele serve de base para o modelo isobárico, utilizado na descrição dos dados da E791 e fundamenta o desenvolvimento subsequente que fazemos a partir do capítulo 4.

2.1 Espalhamento ressonante e a Breit-Wigner

Ressonâncias observadas em processos de espalhamento podem ser interpretadas como estados quase ligados, ou quase estacionários, que se formam e, em seguida, decaem. Sua principal manifestação experimental é um pico na seção de choque, acompanhado de uma rápida variação da fase do espalhamento. Elas aparecem em fenômenos que vão desde a física molecular até as partículas elementares. A seguir, examinamos a relação entre esses observáveis e as propriedades analíticas da matriz S .

Na mecânica quântica não relativística (MQ), o problema do espalhamento de duas partículas de massas m_1 e m_2 é regido pela equação de Schrödinger e a interação é representada por um potencial U . Em geral trabalha-se no referencial do centro de massa e o problema pode ser reduzido ao espalhamento de uma partícula de massa reduzida m por um potencial equivalente V . No formalismo da função de onda ψ , o espalhamento é caracterizado por uma *amplitude de espalhamento* $f(\theta)$ [23], onde θ é o ângulo formado pelos momentos inicial $\mathbf{k}$ e final $\mathbf{k}'$. Essa amplitude descreve o comportamento assintótico de ψ para distâncias infinitamente grandes da interação. Se a onda incidente ψ_i for uma onda plana de momento k , tal que $\psi_i = e^{ikz}$, teremos no infinito

$$\psi \rightarrow e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}. \quad (2.25)$$

O efeito do espalhamento está integralmente contido na onda esférica divergente, cujo “peso” é dado pela função $f(\theta)$, conhecida como amplitude de espalhamento. Por isso, a amplitude $f(\theta)$ está diretamente ligada à seção de choque diferencial por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (2.26)$$

e a seção de choque total é

$$\sigma_t = \int d\Omega |f(\theta)|^2. \quad (2.27)$$

Outro resultado importante é o chamado teorema óptico. Segundo esse teorema, a parte imaginária de $f(\theta = 0)$ é proporcional à seção de choque total:

$$\Im f(\theta = 0) = \frac{k}{4\pi} \sigma_t. \quad (2.28)$$

Do ponto de vista formal, o mesmo conteúdo físico e matemático pode ser reorganizado em uma equação para um operador $\hat{T}$ relacionado à amplitude $f(\theta)$ por

$$\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle = -\frac{1}{8\pi m} f(\mathbf{k}', \mathbf{k}), \quad (2.29)$$

onde θ é o ângulo formado entre $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$ [22]. A equação obedecida por $\hat{T}$ é conhecida como *equação de Lippmann-Schwinger* (LS) [24] e pode ser escrita como

$$\hat{T} = V + V \hat{G}^0 \hat{T}, \quad (2.30)$$

onde

$$\hat{G}^0 = \frac{1}{E - H_0 + i\epsilon} \quad (2.31)$$

é o operador de Green relativo ao hamiltoniano livre (sem o potencial V) representado por H_0 . Para entender o conteúdo físico desta equação é conveniente representá-la por meio de diagramas de Feynman, o que está feito na figura 2.2(a). Nela representamos a equação de LS tal qual escrita em (2.30). O lado esquerdo da figura representa a probabilidade total, identificada com T , da partícula de momento $\mathbf{k}$ ser levada a um estado de momento final $\mathbf{k}'$ pela interação V . Do lado direito vemos que essa probabilidade é igual a uma interação com o potencial externo V somada a uma outra interação V seguida de uma propagação livre G^0 e da mesma probabilidade T . Como a partícula é novamente espalhada por T , a equação de LS, se projetada no espaço de momentos, por exemplo, é uma equação integral para os elementos de matriz de $\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle$. Nessa forma temos

$$\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle + \int d^3 p' \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{p}' \rangle \frac{1}{E - E_{p'}} \langle \mathbf{p}' | T | \mathbf{k} \rangle, \quad (2.32)$$

onde agora aparece a *função* de Green $(E - E_{p'})^{-1}$ com $E_{p'} = p'^2/2m$.

É possível obter uma solução para a equação de LS em termos de operadores na forma de uma série de potências em V , escrevendo

$$T^{(1)} = V, \quad (2.33)$$

$$T^{(2)} = V + V \hat{G}^0 T^{(1)}, \quad (2.34)$$

$$T^{(3)} = V + V \hat{G}^0 T^{(2)}, \quad (2.35)$$

o que nos dá uma série infinita

$$\hat{T} = V + V\hat{G}^0V + V\hat{G}^0V\hat{G}^0V + \dots \quad (2.36)$$

Essa série é conhecida como *série de Born* para o espalhamento, e está representada por meio de diagramas na figura 2.2(b). A aproximação de Born corresponde a considerarmos somente o termo de primeira ordem $T \approx T^{(1)} = V$, o que nos dá

$$f^{(1)}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -8m\pi \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle. \quad (2.37)$$

Figura 2.2: (a) Representação diagramática da equação de Lippmann-Schwinger Eq. (2.30) para um potencial externo V , representado pela linha ondulada. (b) Representação em diagramas para a série de Born Eq. (2.36).

Nesse ponto, convém notarmos que a expressão (2.37) é real, devido à hermiticidade de V . Isso mostra que a aproximação de Born viola o teorema óptico, pois

$$\Im f(\theta = 0) = -8m\pi \Im \langle \mathbf{k} | V | \mathbf{k} \rangle = 0, \quad (2.38)$$

embora a seção de choque total seja claramente não nula. Para o teorema ser completamente satisfeito são fundamentais os infinitos termos da série de Born¹.

O tratamento matemático de ressonâncias é feito por meio de amplitudes complexas. Por isso, é importante formular o problema do espalhamento em termos de propriedades analíticas de funções. Nesse contexto, devemos introduzir o operador S , cujos elementos de matriz formam a chamada matriz S , e são escritos

$$\langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle = \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) + \frac{1}{2\pi m} \delta(E_k - E_{k'}) f(\mathbf{k}', \mathbf{k}). \quad (2.39)$$

¹Esse resultado é mais transparente se considerarmos o potencial $V \rightarrow \lambda V$. A série de Born passa a ser uma expansão em potências de λ , cujo termo $f^{(1)}$ é de ordem λ . A parte imaginária de f é de ordem λ^2 pois $\Im f(\theta = 0) \propto \int |f|^2$. Logo, o termo de Born *tem* de ser real.

Nessa expressão, a função delta representa a conservação do momento em um processo em que não há espalhamento, e toda interação está contida em $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$. Devido à conservação da probabilidade, a matriz $\mathbf{S}$ é unitária [25]², isto é $\mathbf{S}\mathbf{S}^\dagger = \mathbb{1}$. Nesse contexto, o teorema óptico é uma consequência direta da unitariedade, e decorre do cálculo de um elemento de matriz diagonal de $\mathbf{S}$. Por isso, violar o teorema óptico equivale a violar a unitariedade e, portanto, a conservação da probabilidade. Daí a importância do teorema.

A relação entre o potencial e amplitude de espalhamento foi bastante estudada e pode ser mapeada nas propriedades de analiticidade da matriz $\mathbf{S}$, vista como função de uma energia complexa E . Algumas características gerais da estrutura analítica de $\mathbf{S}$ no plano E -complexo estão representadas na figura 2.3(a). A matriz é analítica a menos de um corte sobre o eixo real positivo e de alguns pólos. O corte corresponde à região em que as solução da Eq. de LS descreve processos físicos de espalhamento. Já os pólos podem ser de dois tipos: associados a estados ligados ou a ressonâncias. Os do primeiro tipo situam-se sobre o eixo real e abaixo do limiar $E = 0$, devido ao fato de que a energia de ligação é negativa. A manifestação desses pólos no espalhamento é indireta, pois esse processo se define por $E > 0$. Os pólos das ressonâncias se encontram na segunda folha de Riemann, o que corresponde a $\Re E > 0$ e $\Im E < 0$. Por terem parte real positiva, estão abaixo da região física. Dessa forma, ao estudarmos o espalhamento varremos a região $0 < E < \infty$, e passamos perto dos pólos das ressonâncias. Por essa razão, a manifestação deles no espalhamento tende a ser mais visível. Normalmente as ressonâncias são observadas na forma de uma rápida variação da seção de choque.

No contexto da MQ as ressonâncias são estados quase ligados. Por hermiticidade, não são autoestados do hamiltoniano, pois têm energia complexa. Entretanto, correspondem a estados que poderiam ser ligados caso o potencial atrativo fosse mais intenso. Assim, do ponto de vista formal, se um potencial comporta um estado ligado, este pode ser transformado em uma ressonância do espalhamento se a intensidade da atração for pouco a pouco diminuída³. Da maneira inversa, uma ressonância pode ser levada a um estado ligado se aumentarmos a intensidade do potencial atrativo. Isso está representado na figura 2.3(b), na qual vemos o trajeto descrito pelo pólo da ressonância até se tornar um estado ligado. Se a posição do pólo x for descrita por $E_x = R_x - iI_x$, quanto menos atrativo for o potencial que comporta o pólo da ressonância, tanto maiores serão os valores

²O livro de J. R. Taylor [25] é a referência utilizada para as propriedades da matriz $\mathbf{S}$ e não será mais mencionado explicitamente.

³Isso acontece na grande maioria dos casos, embora haja casos patológicos em que essa correspondência não vale.

Figura 2.3: (a) Estrutura analítica da matriz S no plano complexo da energia E . O eixo horizontal representa a parte real de E , o eixo vertical a parte imaginária. (b) Trajeto de um pólo no plano complexo da energia quando o potencial é feito mais atrativo.

de R_x e de I_x .

Na seção anterior, argumentamos que a instabilidade de um estado quântico está associada, no “espaço de energia”⁴, a uma função cujo denominador se anula para um valor complexo de E , mostrada na Eq. (2.23). Se as ressonâncias são estados metaestáveis do espalhamento, elas devem ser descritas por uma expressão semelhante. Neste ponto passamos a discutir de modo mais formal como essa descrição aparece no contexto do espalhamento.

Normalmente, as ressonâncias têm momento angular bem definido e, por isso, a introdução da fórmula do tipo Breit-Wigner para tratar a seção de choque ressonante passa pela decomposição da amplitude de espalhamento em ondas parciais. Devido a princípios gerais de simetria, a amplitude do espalhamento $f(E, \theta)$, que está diretamente ligada à seção de choque pela Eq. (2.26), pode ser escrita como

$$f(E, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(E) P_l(\cos \theta), \quad (2.40)$$

onde l é o valor do momento angular, P_l são os polinômios de Legendre, θ é o ângulo do espalhamento e E a energia. A *amplitude de onda parcial* $f_l(E)$ é dada por

$$f_l(E) = \frac{s_l(E) - 1}{2ip}, \quad (2.41)$$

⁴Em contraposição a descrever o estado como função do tempo t , dado que E e t são grandezas canonicamente conjugadas.

onde $\mathbf{s}_l(E)$ é um elemento da matriz $\mathbf{S}$ e p o momento da partícula. Devido à unitariedade, podemos parametrizar a matriz S em termos de funções reais da energia conhecidas como defasagens do espalhamento, $\delta_l(E)$, uma para cada valor de l . No caso elástico, em que as partículas emergentes do espalhamento são idênticas às incidentes, essa parametrização se escreve

$$\langle E' l' m' | \mathbf{S} | E l m \rangle = \delta(E' - E) \delta_{l'l} \delta_{m'm} e^{2i\delta_l(E)}. \quad (2.42)$$

Garantimos também a unitariedade de cada um dos elementos $\mathbf{s}_l(E) = e^{2i\delta(E)}$, pois $|e^{2i\delta(E)}| = 1$. A parametrização de $\mathbf{S}$ através das defasagens nos dá, na Eq. (2.41)

$$f_l(E) = \frac{e^{2i\delta_l(E)} - 1}{2ip} = \frac{1}{p} \sin \delta_l(E) e^{i\delta_l(E)}. \quad (2.43)$$

Podemos, então, introduzir seções de choque parciais denotadas σ_l , tal que

$$\sigma_t = \sum_l \sigma_l, \quad (2.44)$$

que valem

$$\sigma_l = 4\pi(2l+1)|f_l|^2 = 4\pi(2l+1)\frac{1}{p^2} \sin^2 \delta_l(E). \quad (2.45)$$

Isso nos permite encontrar o comportamento de seção de choque σ_l perto do pólo de uma ressonância. Se a matriz $\mathbf{s}_l(E)$ e, por conseqüência, f_l têm um pólo para $\bar{E} = E_R - i\Gamma/2$, nas vizinhanças do pólo podemos escrever

$$f_l(E) = \frac{\alpha}{E - E_R + i\Gamma/2} + \beta. \quad (2.46)$$

Onde β representa uma componente não ressonante. O fenômeno da ressonância está contido no termo de pólo e, por ora, desprezamos β . Da igualdade

$$f_l(E) = \frac{\alpha}{E - E_R + i\Gamma/2} = \frac{1}{p} \sin \delta_R e^{i\delta_R} \quad (2.47)$$

tiramos diretamente que

$$\tan \delta_R(E) = \frac{\Gamma/2}{E_R - E}. \quad (2.48)$$

A figura 2.4 ilustra a geometria envolvida nesse cálculo. A partir de $\tan \delta_R$ calculamos $\sin \delta_R$ e temos

$$\sin \delta_R = \frac{\Gamma/2}{[(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2]^{1/2}}. \quad (2.49)$$

E, desta forma, para a seção de choque dessa onda parcial, podemos escrever

$$\sigma_l(E) \propto \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_R)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (2.50)$$

que tem um perfil do tipo Breit-Wigner⁵, correspondendo a um pico na seção de choque centrado em E_R . Se considerarmos o termo β na expansão (2.46), o que ele introduz é um termo não ressonante. Restringindo-nos à região próxima do pólo, a dependência em energia desse termo pode ser desprezada. Dessa forma, a defasagem total pode ser expressa $\delta_l(E) \approx \delta_R(E) + \delta_{NR}$, com δ_{NR} sendo apenas uma constante.

Esse desenvolvimento mostra que, quando a energia do espalhamento está próxima de E_R , a fase ressonante varia de π rapidamente. A figura 2.4 ajuda muito na compreensão desse fato como um efeito geométrico. No caso mais simples, em que $\delta_{NR} = 0$, temos uma brusca variação de 0 a π em $\delta_l(E)$, que é acompanhada de um pico do tipo Breit-Wigner na seção de choque para a onda parcial⁶. A figura também mostra que, para ressonâncias próximas do eixo real, os efeitos são mais dramáticos. Ressonâncias muito largas, ou seja com $\Gamma \gg E_R$, tendem a influir pouco no comportamento da fase do espalhamento, e a intuição que desenvolvemos aqui pode se perder. Como a seção de choque parcial σ_l cresce muito nas imediações de uma ressonância estreita, é comum que o efeito ressonante seja dominante na expansão da seção de choque total Eq. (2.44). Por isso, mesmo análises inclusivas da seção de choque podem revelar ressonâncias de um dado momento angular l . Pode ocorrer também do efeito estar mascarado por outros canais de momento angular. Nesse caso, uma análise do espalhamento em ondas parciais é imprescindível para a detecção da ressonância.

O fato das ressonâncias estarem associadas a pólos complexos da energia permite uma ligação direta com a descrição dos estados instáveis que fizemos no início desta seção. Se, como feito por Landau & Lifschitz [23], tomarmos a dependência temporal da função de onda do espalhamento ressonante, vemos que

$$e^{-iEt} = e^{-iE_R t - \frac{\Gamma}{2}t}. \quad (2.51)$$

Esse resultado autoriza a interpretação segundo a qual a ressonância é um estado quase ligado, que se forma e subseqüentemente decai segundo a lei $e^{-\Gamma t}$. Resulta ainda que Γ deve necessariamente ser um número positivo. Na descrição do espalhamento por um potencial esféricamente simétrico, a existência da barreira centrífuga

$$\frac{1}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2},$$

⁵Uma dedução mais rigorosa desse resultado pode ser feita no formalismo da função de Jost j_l , como mostrado em [25]. A matriz $\mathbf{s}_l$ se escreve como $\mathbf{s}_l = j_l^*/j_l$, e a tarefa passa a ser expandir $j_l(\bar{E})$ perto do zero.

⁶Caso tenhamos $\delta_{NR} = \pi/2$, esse pico transforma-se em um vale. Valores intermediários para δ_{NR} fornecem uma rápida variação na seção de choque, que adquire o formato de uma senóide.

Figura 2.4: Determinação geométrica de δ_R .

faz com que seja comum encontrarmos, no potencial efetivo, vales de mínimos locais. A ressonância pode ser vista como a captura da partícula por um desses vales. Como a barreira não é suficientemente profunda, não comporta estados ligados, e a partícula acaba por tunelar através da barreira, e emergir como um estado assintótico usual do espalhamento.

2.2 Ressonâncias em teoria de campos

A descrição do espalhamento em teoria quântica de campos (TQC) e, por conseqüência, das ressonâncias, guarda uma série de semelhanças com aquela feita em MQ usual. Entretanto, do ponto de vista deste trabalho, a primeira apresenta uma grande vantagem. A teoria de campos permite que se tenha uma imagem clara da dinâmica do processo de espalhamento, uma visão microscópica da interação entre as partículas. No caso da MQ essa descrição é baseada num potencial V , cuja origem não é clara e que não permite uma compreensão das causas da interação. A idéia da troca de partículas como origem das interações fundamentais é hoje hegemônica, e serve de apoio para a noção de potencial da MQ.

As ressonâncias, em teoria de campos, também são associadas a estados instáveis. Contudo, agora, esses estados estão presentes na lagrangiana do sistema e podem interagir com outras partículas. O caráter de instabilidade advém da possibilidade desses estados decaírem. Essa visão do problema é fundamental para tratar as ressonâncias escalares em

decaimentos mesônicos.

O tratamento dado ao problema do espalhamento em TQC representa uma extensão relativística do que fizemos na seção anterior. Além disso, incorpora a visão microscópica do conteúdo da interação e, portanto, não comporta a noção de potencial. Também nesse caso define-se uma matriz S unitária, tal que

$$S = \mathbb{1} + i(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_f - \Sigma p_i) T, \quad (2.52)$$

onde p_f são os quadrimomentos das partículas emergentes e p_i os quadrimomentos das partículas incidentes no processo de espalhamento. Novamente, a interação está toda contida na matriz de transição T e o termo $\mathbb{1}$ é trivial. A unitariedade se escreve $SS^\dagger = \mathbb{1}$.

No caso de duas partículas com quadrimomentos p_1 e p_2 , o qual nos interessa diretamente, a variável dinâmica é o invariante de Lorentz

$$s = (p_1 + p_2)^2. \quad (2.53)$$

Esse invariante é uma das três variáveis de Mandelstam, geralmente denotadas s , t e u , que aparecem em detalhes no Apêndice A. Escrevemos a seção de choque diferencial como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{\mathcal{S} 8\pi \sqrt{s}} \right)^2 |T|^2, \quad (2.54)$$

onde $\mathcal{S}$ é um fator estatístico, tal que $\mathcal{S} = 1$ se as partículas espalhadas foram distintas e $\mathcal{S} = 2$ caso sejam idênticas.

A comparação entre as seções de choque da MQ da TQC determina a relação entre a amplitude de espalhamento $f(k, \theta)$ e a matriz T , dada por

$$f(k, \theta) = \frac{T}{\mathcal{S} 8\pi \sqrt{s}}. \quad (2.55)$$

Novamente, devido ao fato das ressonâncias terem *spin* bem definido, é importante introduzirmos uma decomposição em ondas parciais. Para a amplitude não relativística $f(k, \theta)$ vale

$$f(k, \theta) = \frac{1}{|\mathbf{p}|} \sum_l (2l+1) a_l P_l(\cos \theta). \quad (2.56)$$

Assim, usando (2.55), obtemos

$$T(s, \theta) = \sum_l (2l+1) T_l(s) P_l(\cos \theta), \quad (2.57)$$

onde

$$T_l = \frac{\mathcal{S} 16\pi}{\rho(s)} a_l. \quad (2.58)$$

Introduzimos a função $\rho(s)$, conhecida como espaço de fase de dois corpos, e dada por

$$\rho(s) = \frac{2|\mathbf{p}|}{\sqrt{s}}. \quad (2.59)$$

Na expressão (2.58), cada a_l é uma amplitude de onda parcial parametrizada, devido à unitariedade, como

$$a_l = \frac{\eta e^{2i\delta_l(s)} - 1}{2i}, \quad (2.60)$$

que no caso elástico ($\eta \equiv 1$) reduz-se a

$$a_l = \sin \delta_l e^{i\delta_l(s)}. \quad (2.61)$$

Restringimo-nos, no que segue, à descrição do espalhamento elástico de duas partículas de massas μ_a e μ_b . Nesse caso específico⁷, a expressão para T_l é

$$T_l = \frac{\mathcal{S}16\pi}{\rho(s)} \sin \delta_l(s) e^{i\delta_l(s)}, \quad (2.62)$$

onde $\rho(s)$ pode ser escrita como

$$\rho(s) = \sqrt{[1 - (\mu_a + \mu_b)^2/s][1 - (\mu_a - \mu_b)^2/s]}. \quad (2.63)$$

A definição da matriz T_l nos permite obter, graças à relação de fechamento dos polinômios de Legendre, uma expressão para T_l em função de T

$$T_l(s) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz P_l(z) T(s, z), \quad (2.64)$$

onde $z = \cos \theta$ e θ é o ângulo de espalhamento no centro de massa das partículas.

Usando as nossas convenções, no regime elástico, a matriz S em ondas parciais se escreve

$$s_l = 1 + 2ia_l = 1 + 2i \left(\frac{\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi} \right) T_l, \quad (2.65)$$

o que é coerente com a decomposição

$$s_l = e^{2i\delta_l(s)}, \quad (2.66)$$

expressão que garante a unitariedade de cada elemento s_l .

Em TQC também existe uma versão do teorema óptico. Na seção anterior, vimos que, no formalismo da matriz S , o teorema é obtido se calcularmos um elemento de

⁷Com relação aos fatores de π há outras convenções disponíveis na literatura (ver por exemplo a Ref. [26]).

matriz diagonal, o que corresponde ao ângulo de espalhamento $\theta = 0$. O análogo para duas partículas em TQC é considerar a transição $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$. Fazemos uma rápida dedução da versão do teorema óptico em TQC e discutimos algumas das conseqüências do resultado⁸.

Introduzindo uma notação compacta $\mathcal{T} = (2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_f - \Sigma p_i) T$, a unitariedade da matriz S se escreve agora

$$-i(\mathcal{T} - \mathcal{T}^\dagger) = \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}. \quad (2.67)$$

Denotamos o estado de momentos $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$ de maneira simplificada por $a \equiv |\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\rangle$, de modo que

$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 | \mathcal{T} | \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \rangle \equiv \mathcal{T}(a \rightarrow a). \quad (2.68)$$

Para obter o teorema óptico temos de calcular

$$\langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 | -i(\mathcal{T} - \mathcal{T}^\dagger) | \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \rangle = \langle \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 | \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} | \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \rangle. \quad (2.69)$$

Para isso introduzimos uma partição da unidade entre $\mathcal{T}^\dagger$ e $\mathcal{T}$ do lado direito, que se escreve

$$\mathbb{1} = \sum_f \int d\Pi_f |\{q_i\}\rangle \langle \{q_i\}|, \quad (2.70)$$

onde a integral sobre o espaço de fase foi simplificada segundo

$$\sum_f \int d\Pi_f = \sum_n \left(\prod_{i=1}^n \int \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right), \quad (2.71)$$

na qual E_i é a energia do estado de momento q_i e a soma é feita sobre estados de várias partículas. Esse cálculo nos fornece o teorema óptico, que pode ser expresso em termos de T como

$$2\Im T(a \rightarrow a) = \sum_f \int d\Pi_f |T(a \rightarrow f)|^2, \quad (2.72)$$

onde, para simplificar a notação, usamos $|\{q_i\}\rangle \equiv f$. Na última equação comparece a própria matriz de transição T , que está ligada à seção de choque. Portanto, o teorema óptico relaciona a parte imaginária da amplitude do processo de espalhamento ($a \rightarrow a$) com as amplitudes de *todos* os processos permitidos ($a \rightarrow f$). Uma representação pictórica do teorema aparece na figura 2.5. Para entender o conteúdo físico da Eq. (2.72) é importante salientar que nela *todas* as partículas estão na camada de massa. Só contribuem para o lado direito do teorema os estados que conservem energia-momento e os números quânticos necessários. Como um exemplo, tomando o espalhamento $\pi\pi$

⁸Essa breve prova do teorema é baseada na Ref. [5].

para energia $4m_\pi^2 < s < 16m_\pi^2$ somente estados $\pi\pi$ e $K\bar{K}$ contribuem, pois os estados com número ímpar de píons são proibidos por paridade G e o estado $N\bar{N}$ ainda não é energeticamente permitido. Portanto, apenas um número finito de estados contribui ⁹.

Figura 2.5: Teorema óptico representado graficamente.

O lado direito do teorema óptico está relacionado com a seção de choque total σ_t , o que permite escrever a expressão que relaciona a parte imaginária de T com σ_t

$$\Im T(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2) = s\rho(s)\sigma_t(\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2 \rightarrow \text{q.q. estado}). \quad (2.73)$$

Os resultados do teorema óptico envolvem a matriz T exata. Entretanto, no âmbito do formalismo lagrangiano, normalmente o cálculo de T é feito de maneira perturbativa. A série perturbativa surge da expansão da exponencial da lagrangiana de interação dos campos. Se considerarmos o termo de mais baixa ordem da expansão, restringimos o cálculo à chamada matriz T em árvore, denotada T^t (do inglês *tree*). A expressão para T^t pode envolver vértices e propagadores, como os que estão mostrados na figura 2.6, e não contém *loops*. Esse termo também é conhecido como termo de Born de T e, a exemplo da Eq. (2.37), gera um resultado real e que viola a unitariedade (e por consequência o teorema óptico).

Figura 2.6: Exemplos de diagramas para T^t .

Assim como na MQ, existe uma tensão entre a unitariedade e a abordagem perturbativa. No cálculo de alguns tipos de processo, esse problema não se manifesta, e

⁹Como o que foi feito aqui é geral e prescinde de uma descrição da dinâmica, na década de 60 chegou-se a acreditar que esse tipo de expressão era a melhor maneira de se conhecer a amplitude espalhamento [27]. Esse programa foi posteriormente abandonado em favor do formalismo lagrangiano.

a obtenção de T^t pode ser suficiente. Contudo, no estudo de ressonâncias, esse problema tem de ser tratado com cuidado. Em grande parte, isso se deve ao fato de ressonâncias estarem relacionadas a pólos complexos. Dessa forma, a parte imaginária da amplitude, que é regida pela unitariedade, tem um papel preponderante. Além disso, é comum que haja interferências entre as diferentes ressonâncias e, para determiná-las, um conhecimento preciso da fase complexa é necessário.

Ressonâncias em TQC são associadas a partículas instáveis e a fórmula de Breit-Wigner está diretamente ligada ao propagador de Feynman $\Delta(x)$ da ressonância. No entanto, esta instabilidade não está obviamente presente na lagrangiana do sistema e precisa ser construída dinamicamente. Por exemplo, numa teoria livre com apenas um campo escalar ϕ temos¹⁰, no espaço dos momentos,

$$\Delta(s) = \int d^4x e^{ip \cdot x} \langle 0 | \tilde{T} \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle = \frac{i}{s - m^2 + i\epsilon}. \quad (2.74)$$

Na última equação, p é o quadrimomento da partícula tal que $p^2 = s$, $\tilde{T}$ representa a ordenação temporal e m é a massa da partícula. Esse é o chamado propagador nu. Quando a partícula ϕ pode interagir com outras duas de massa μ_a e μ_b tais que $m > (\mu_a + \mu_b)$, o decaimento da figura 2.7 passa a ser permitido. Essa possibilidade altera o propagador da partícula ϕ , que passa a representar uma partícula instável. É esse tipo de partícula que associamos a ressonâncias.

Figura 2.7: Decaimento $\phi \rightarrow AB$ em ordem árvore.

A fórmula de Breit-Wigner nasce, nesse contexto, do estudo do propagador de ϕ na presença da interação. A esse propagador nos referimos como propagador vestido, representado por $\tilde{\Delta}(s)$. Mostramos, a seguir, que para uma ressonância o propagador assume a forma

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{i}{s - \mathcal{M}^2(s) + i m \Gamma(s)}, \quad (2.75)$$

¹⁰Trataremos o caso de campos escalares por simplicidade, mas os resultados podem ser generalizados para outros valores de spin.

onde $\mathcal{M}(s)$ é uma função conhecida como *massa dinâmica* e $\Gamma(s)$ é a *largura dinâmica*. O caminho que seguimos basea-se no capítulo 7 do livro de Peskin & Schröder [5], e utilizamos um modelo simplificado baseado em duas partículas escalares associadas aos campos ϕ e A . O caso de interesse físico relacionado ao experimento E791 será discutido em detalhe no capítulo 4. A interação da partícula ϕ com a outra A de massa μ_a é dada por¹¹

$$\mathcal{L}_{int} = g\phi AA. \quad (2.76)$$

Essa interação permite a transição $\phi \rightarrow AA$. Se supusermos que $m > 2\mu_a$, a transição representa um decaimento. Numa abordagem perturbativa, a primeira correção ao propagador de ϕ é dada pelo processo representado na figura 2.8, que corresponde a

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^{(1)}(s) &\rightarrow \Delta(s) + \Delta(s)[-i\Sigma^2(s)]\Delta(s) \\ &= \frac{i}{s-m^2} + \frac{i}{s-m^2}[-i\Sigma^2(s)]\frac{i}{s-m^2}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde o símbolo $[-i\Sigma^2(s)]$ representa um diagrama com dois vértices e um *loop*.

Figura 2.8: Primeira correção ao propagador livre $\Delta(s)$, lado direito da Eq. (2.77).

Essa série pode ser continuada com inserções de termos com mais *loops* no canal s . Continuando esse procedimento, obtemos uma série infinita¹². O resultado para o propagador vestido até a ordem de um *loop* é

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{i}{s-m^2} + \frac{i}{s-m^2}[-i\Sigma^2(s)]\frac{i}{s-m^2} + \frac{i}{s-m^2}[-i\Sigma^2(s)]\frac{i}{s-m^2}[-i\Sigma^2(s)]\frac{i}{s-m^2} + \dots \quad (2.78)$$

que está representado na figura 2.9. A série para $\tilde{\Delta}(s)$, Eq. (2.78), pode ser somada e obtemos

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{i}{s-m^2-\Sigma^2(s)}. \quad (2.79)$$

¹¹O caso da interação com duas partículas distintas é análogo, tratamos o caso em que há apenas uma por simplicidade.

¹²É interessante observar que o propagador vestido obedece uma equação que, em alguns aspectos, é semelhante à equação de LS. Podemos escrevê-la de maneira simbólica como

$$\tilde{\Delta} = \Delta + \Delta[\Sigma^2]\tilde{\Delta}.$$

Nessa representação, a série infinita advém de uma solução por iteração.

Separando as partes real e imaginária de $\Sigma^2(s) = \Re\Sigma^2 + i\Im\Sigma^2$ e definindo $\Re\Sigma^2 = \Delta M^2(s)$ e $\Im\Sigma^2 = -m\Gamma(s)$ temos

$$\tilde{\Delta}(s) = \frac{i}{s - \mathcal{M}^2(s) + im\Gamma(s)}, \quad (2.80)$$

onde introduzimos a massa dinâmica $\mathcal{M}^2(s)$

$$\mathcal{M}^2(s) = m^2 + \Delta M^2(s). \quad (2.81)$$

Em resumo, a interação introduz uma correção para a massa, que agora depende da energia, e uma largura dinâmica dada por $\Gamma(s)$.

Figura 2.9: Propagador vestido considerando os diagramas de um *loop*.

O denominador da Eq. (2.80) pode se anular para valores complexos de $s = s_p$ e assim, o propagador completo pode ter, como na MQ usual, um pólo complexo dado pela raiz da equação

$$s_p - \mathcal{M}^2(s_p) + im\Im\Gamma^2(s_p) = 0. \quad (2.82)$$

Os pólos de partículas instáveis, que serão identificadas com as ressonâncias, situam-se abaixo do eixo real e têm parte imaginária não nula. Isso os distingue dos pólos de partículas estáveis, que estão localizados sobre o eixo real e abaixo do limiar, como na Eq. (2.74). Essa identificação é muito semelhante à que fizemos em MQ para os pólos de estados ligados e de ressonâncias.

O estudo de $\tilde{\Delta}(s)$ mostra que a partícula ϕ de massa m que antes se manifestava como um pólo no eixo real, passa a ser um pólo complexo. Esse deslocamento é provocado pela interação com a outra partícula mais leve de massa μ_a . A massa da partícula instável tem, pois, um caráter essencial, mas a interação faz com que sua manifestação seja sutil e dependente do conhecimento preciso da interação existente.

Para concluir esta seção, usamos o teorema óptico para mostrar que $\Gamma(s)$ está relacionada à largura de decaimento observável. Usando a fórmula de redução usual obtemos a amplitude do diagrama de loop do tipo bolha

$$T(p \rightarrow p) = -\Sigma^2(s), \quad (2.83)$$

e do teorema óptico temos

$$m\Gamma(m^2) = \frac{1}{2} \sum_f \int d\Pi_f |T(p \rightarrow f)|^2. \quad (2.84)$$

Graficamente, esta equação também pode ser interpretada com base na figura 2.5. O estado inicial, neste caso, corresponde a apenas uma partícula entrando no diagrama. Usando o resultado para a largura de decaimento de uma partícula em duas outras [28] temos

$$\Gamma(m^2) = \frac{1}{2m} \sum_f \int d\Pi_f |T(p \rightarrow f)|^2 = \Gamma_{\text{total}}, \quad (2.85)$$

onde Γ_{total} é a largura total de decaimento da partícula, que é um observável. Mostramos assim que na TQC a existência da interação leva ao aparecimento de uma função do tipo Breit-Wigner para descrever o propagador completo da partícula. Nela aparecem uma massa dinâmica $\mathcal{M}^2(s)$ e, se $m > 2\mu$, uma largura $\Gamma(s)$ tal que $\Gamma(m^2) = \Gamma_{\text{total}}$.

Na prática, como veremos, a correta dependência em s das funções $M^2(s)$ e $\Gamma(s)$ muitas vezes não é levada em conta. A parte real é quase sempre ignorada, o que corresponde, pelas regras de Cutkosky, a colocar as partículas na camada de massa. Além disso, muitas vezes usa-se

$$\Gamma(s) = \Gamma_{\text{total}} \times \left(\begin{array}{c} \text{Correções} \\ \text{cinemáticas} \end{array} \right).$$

Na maioria dos casos, essas aproximações são mal controladas, e não é fácil avaliar o erro que elas introduzem. Para estudar ressonâncias escalares com rigor e em pleno acordo com a TQC, as dependências em s devem ser levadas em conta de maneira clara e coerente.

Capítulo 3

Modelo isobárico e a análise da E791

A análise feita pela colaboração E791 é baseada no chamado modelo isobárico, cuja principal característica é a descrição das ressonâncias por funções do tipo Breit-Wigner. Esse modelo fornece uma amplitude $\mathcal{A}$ que tem alguns parâmetros livres. Os valores numéricos desses parâmetros são obtidos por meio de um ajuste ao diagrama de Dalitz dos dados experimentais. Para tornar o trabalho de ajuste menos árduo, os valores de massa e largura das ressonâncias mais bem estabelecidas são tomados como conhecidos. No caso do σ , entretanto, a massa e largura foram tratadas como parâmetros adicionais a serem determinados pelo ajuste.

Para podermos entender o modelo empregado na análise dos dados, é fundamental definirmos claramente a cinemática com a qual trabalhamos. Os quadrimomentos das partículas são rotulados, no referencial do laboratório da maneira seguinte

$$p_{\pi^-} = p_-, \quad (3.1)$$

$$p_{\pi_1^+} = p_1, \quad (3.2)$$

$$p_{\pi_2^+} = p_2, \quad (3.3)$$

$$p_{D^+} = p_D. \quad (3.4)$$

Para construir o diagrama de Dalitz, temos de tomar dois invariantes de Lorentz formados pelos quadrimomentos do estado final, como mostrado no apêndice C. A largura de decaimento em três corpos pode ser escrita [1]

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M_D^3} |T|^2 ds_{13} ds_{23}, \quad (3.5)$$

com $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$. No nosso caso, em vez de s_{ij} , preferimos trabalhar com as variáveis

s , t e u , em analogia com as variáveis de Mandelstam do espalhamento, tais que

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_D - p_-)^2, \quad (3.6)$$

$$t = (p_- + p_1)^2 = (p_D - p_2)^2, \quad (3.7)$$

$$u = (p_- + p_2)^2 = (p_D - p_1)^2. \quad (3.8)$$

Essas variáveis obedecem à relação

$$s + t + u = m_D^2 + 3m_\pi^2. \quad (3.9)$$

Com essa escolha, as ressonâncias ocorrem sempre nos canais u e t , pois são neutras, e por isso escrevemos

$$d\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{32M_D^3} |T|^2 du dt, \quad (3.10)$$

onde u corresponde a s_{12} do diagrama que mostramos na introdução, figura 1.1(a), e t corresponde a s_{13} .

Na construção do modelo isobárico algumas grandezas calculadas em outros referenciais aparecem. Por exemplo, o trimomento de um dos píons ressonantes no referencial da ressonância é dado por

$$|\mathbf{p}^*| = \sqrt{x/4 - m_\pi^2}, \quad (3.11)$$

onde $x = \{u, t\}$ dependendo do canal de desintegração. Aparece também o ângulo formado entre os píons ressonantes e o pión não ressonante $\theta_{u,t}$, calculado no referencial dos píons ressonantes. Esse ângulo pode ser calculado em termos dos invariantes s , t e u . Para o caso do decaimento no canal u temos

$$\cos \theta_u = \frac{s - t}{4|\mathbf{p}_-^*||\mathbf{p}_1^*|}, \quad (3.12)$$

onde

$$p_1^* \equiv |\mathbf{p}_1^*| = \sqrt{E_1 - m_\pi^2}, \quad (3.13)$$

com a energia da partícula sendo dada por

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{m_D^2 - t - m_\pi^2}{\sqrt{t}}. \quad (3.14)$$

Outra grandeza que entra nos fatores de forma do modelo isobárico é o trimomento do π^+ não ressonante calculado no CM do D^+ . Caso os píons ressonantes estejam no canal u temos

$$|\bar{\mathbf{p}}_1| \equiv \bar{p}_1 = \sqrt{\bar{E}_1^2 - m_\pi^2} \quad (3.15)$$

com

$$\bar{E}_1 = \frac{m_D^2 + m_\pi^2 - u}{2m_D}. \quad (3.16)$$

O caso em que os píons ressoam no canal t é obtido fazendo $u \leftrightarrow t$. Com essa definição da cinemática, podemos passar ao estudo da amplitude de decaimento.

A amplitude do decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$ é escrita, no modelo isobárico, como

$$\mathcal{A} = a_0 e^{i\delta_0} \mathcal{N}_0 + \sum_{n=1}^N a_n e^{i\delta_n} \mathcal{A}_n(u, t) \mathcal{N}_n, \quad (3.17)$$

onde o primeiro termo representa um fundo não ressonante e a soma é feita sobre cada uma das N ressonâncias incluídas no ajuste, $n = \{\sigma, \rho, f_0, f_2, \rho(1440), f_0(1370)\}$. As magnitudes a_n e as fases δ_n são parâmetros livres, que são tomados constantes, isto é, independentes da energia. Com a inclusão do σ , a massa e largura desse escalar foram tratadas como parâmetros adicionais obtidos pelo ajuste.

As ressonâncias têm todas carga zero e ocorrem sempre no canal $\pi^+ \pi^-$. As subamplitudes $\mathcal{A}_n$ que descrevem cada uma das ressonâncias devem ser simetrizadas devido à presença de dois píons idênticos no estado final $\mathcal{A}_n(u, t) = \mathcal{R}_n[u] + \mathcal{R}_n[t]$. Na expressão de $\mathcal{R}_n$ entram os propagadores de Breit-Wigner. Tomando como exemplo o canal u , escrevemos

$$\mathcal{R}_n[u] = BW_n(u) \times F_D^J(u) \times F_n^J(u) \times \mathcal{M}_n^J[u], \quad (3.18)$$

onde BW_n é uma amplitude do tipo Breit-Wigner, dada por

$$BW_n(u) = \frac{1}{u - m_n^2 + im_n \Gamma_n(u)}, \quad (3.19)$$

cujas largura dinâmica se escreve

$$\Gamma_n(u) = \Gamma_n(m_n^2) \frac{m_n}{\sqrt{u}} \left(\frac{p^*}{\tilde{p}^*} \right)^{2J+1} \frac{F_n^J(p^*)^2}{F_n^J(\tilde{p}^*)^2}, \quad (3.20)$$

onde $p^* \equiv |\mathbf{p}^*|$ é o momento de um dos píons ressonantes calculado no CM da ressonância cuja expressão está dada em (3.11) e $\tilde{p}^*$ é o momento desse pión calculado para $u = m_n^2$. O termo $\Gamma_n(m_n^2)$ é a largura total, que, exceção feita ao caso do σ , é tomada como conhecida.

Os outros ingredientes da amplitude total são as funções F_n^J , F_D^J e $\mathcal{M}_n^J$. As funções $\mathcal{M}_n$ dão conta da dependência angular das subamplitudes devido ao spin das diferentes ressonâncias. Temos

$$\mathcal{M}_n^{J=0}[u] = 1, \quad (3.21)$$

$$\mathcal{M}_n^{J=1}[u] = -2p^* p_1^* \cos \theta_u, \quad (3.22)$$

$$\mathcal{M}_n^{J=2}[u] = \frac{4}{3}(p^* p_1^*)(3 \cos^2 \theta_u - 1). \quad (3.23)$$

Os últimos componentes da amplitude, que chamaremos fatores de forma de Blatt-Weisskopf (que em inglês aparecem também como *penetration factors* ou *damping factors*), representam o fato das ressonâncias terem um certo raio finito. Para o méson D são usados

$$F_D^{J=0} = 1, \quad (3.24)$$

$$F_D^{J=1} = 1/\sqrt{1 + (r\bar{p}_1)^2}, \quad (3.25)$$

$$F_D^{J=2} = 1/\sqrt{9 + 3(r\bar{p}_1)^2 + (r\bar{p}_1)^4}, \quad (3.26)$$

onde $\bar{p}_1$ é o momento do pión não ressonante no referencial de repouso do D^+ . Para as ressonâncias são empregadas expressões análogas

$$F_n^{J=0} = 1, \quad (3.27)$$

$$F_n^{J=1} = 1/\sqrt{1 + (rp^*)^2}, \quad (3.28)$$

$$F_n^{J=2} = 1/\sqrt{9 + 3(rp^*)^2 + (rp^*)^4}. \quad (3.29)$$

O parâmetro r deveria refletir o raio efetivo de cada ressonância. Entretanto, a colaboração E791 utilizou para todas elas o valor fixo $r = 3 \text{ GeV}^{-1}$ que havia sido obtido pela colaboração Argus [29]. O emprego desses fatores de forma, um tanto arbitrários, constitui uma fraqueza do modelo.

Por fim, cada subamplitude é normalizada por um fator $\mathcal{N}_n$ dado por

$$\mathcal{N}_n = 1/\left(\int_{\mathcal{D}} du dt |\mathcal{A}_n(u, t)|^2\right), \quad (3.30)$$

cujo significado será discutido mais a diante. O símbolo $\mathcal{D}$ indica que as integrais são feitas sobre todo o diagrama de Dalitz.

A expressão (3.17) serve de base para fazer uma reprodução do diagrama de Dalitz obtido experimentalmente¹. Tomando os valores de a_n e δ_n obtidos do ajuste [11], juntamente com o valor para as massas e larguras das partículas, obtemos a função $|\mathcal{A}|^2$. O diagrama de Dalitz correspondente é mostrado na figura 3.1 e sua projeção aparece na figura 3.2.

¹Fazemos essa reprodução como em [30] e agradecemos J. A. Oller pela troca de correspondência.

Figura 3.1: Diagrama de Dalitz obtido com a reprodução do ajuste da colaboração E791 através da Eq. (3.17).

Figura 3.2: Projeção do diagrama de Dalitz obtido.

O diagrama é inclusivo e, portanto, contém todos os valores de momento angular. Contudo, podemos notar em sua projeção (figura 3.2) a existência de alguns picos. O primeiro deles está na região do σ , o segundo corresponde ao $\rho(770)$ e o terceiro, ao $f_0(980)$. Para entender melhor como cada uma das ressonâncias contribui para o resultado final,

construímos diagramas de Dalitz de cada uma das subamplitudes $\mathcal{A}_n(u, t)$ juntamente com a sua projeção. Os resultados aparecem nas figuras 3.3 a 3.8.

No caso dos escalares, a dependência angular da amplitude é trivial. No modelo, isso é representado pelo fator $\mathcal{M}^{J=0} = 1$. Por isso, formam duas faixas no diagrama Dalitz, uma para a variável u e outra para t . A figura 3.3 mostra o resultado para o σ . Os resultados para os escalares $f_0(980)$ e $f_0(1370)$ estão, respectivamente, nas figuras 3.4 e 3.5. Com o gradual aumento da massa, o pico da projeção se desloca para a direita. Além disso, é possível notar no formato do pico do $f_0(980)$ que essa ressonância é a mais estreita das três.

Figura 3.3: $\sigma(500)$: (a) Dalitz. (b) Projeção.

Figura 3.4: $f_0(980)$: (a) Dalitz. (b) Projeção.

Figura 3.5: $f_0(1370)$: (a) Dalitz. (b) Projeção.

A contribuição das ressonâncias vetoriais $\rho(770)$ e $\rho(1440)$ aparecem nas figuras 3.6 e 3.7. O fato de ambas terem $spin\ J = 1$ introduz uma dependência angular não trivial no decaimento, representada pelo fator $\mathcal{M}^{J=1} = -2p^*p_1^* \cos \theta_u$. Isso explica o fato do $\rho(770)$ popular os cantos do Dalitz. O $\rho(1440)$ tem uma distribuição distinta no diagrama devido a sua massa, pois o pólo dessa ressonância já está muito próximo dos extremos do diagrama.

Figura 3.6: $\rho(770)$: (a) Dalitz. (b) Projeção.

Figura 3.7: $\rho_0(1440)$: (a) Dalitz. (b) Projeção.

A única ressonância tensorial presente no decaimento, o $f_2(1270)$, popula o diagrama de Dalitz de maneira muito diferente das outras. Isso é devido à dependência angular que decorre do *spin* $J = 2$, e que é introduzida no modelo pelo fator $\mathcal{M}^{J=2} = \frac{4}{3}(p^*p_1^*)(3\cos^2\theta_u - 1)$. A contribuição dessa ressonância aparece na figura 3.8.

Figura 3.8: $f_2(1270)$: (a) Dalitz. (b) Projeção.

Na figura 3.9, mostramos todas as projeções das subamplitudes juntamente com o resultado final da projeção, que aparecera na figura 3.2. Essa figura mostra o papel das interferências na composição do resultado final.

A expressão 3.17 também nos permite calcular as chamadas frações de ajuste (em inglês *fit fractions*). Elas dão uma idéia da participação de cada uma das ressonâncias no ajuste final, e, portanto, estão relacionadas com a razão de ramificação para cada modo

Figura 3.9: Contribuição de cada uma das ressonâncias para a amplitude total.

de decaimento. A fração para a n -ésima ressonância f_n é calculada segundo

$$f_n = \frac{\int_{\mathcal{D}} du dt |\mathcal{N}_n a_n e^{i\delta_n} \mathcal{A}_n(u, t)|^2}{\int_{\mathcal{D}} du dt |\mathcal{A}(u, t)|^2}, \quad (3.31)$$

A normalização que fora introduzida por meio da Eq. (3.30) nos permite escrever

$$f_n \propto a_n^2. \quad (3.32)$$

Portanto, a normalização confere um sentido às magnitudes a_n , que passam a ser proporcionais à contribuição da ressonância para o ajuste. É baseando-se nas f_n que a colaboração E791 afirma que cerca de 50% dos decaimentos ocorrem pelo canal $\sigma\pi^+$. Os resultados para as frações de fit obtidas estão na tabela 3.1. Comparando as contribuições para o ajuste, vemos que o $\sigma(500)$ é responsável por uma enorme diminuição do fundo não ressonante. Aparecem na mesma tabela os resultados da análise feita através do modelo isobárico pela colaboração CLEO [17]. Esta última colaboração, num experimento mais recente, também estudou o decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$. Fizaram várias análises dos dados, com diferentes modelos teóricos, dentre eles o isobárico. Dentro das limitações desse modelo, obtiveram resultados compatíveis com os da E791.

3.1 Crítica ao modelo isobárico

O modelo isobárico, tal qual descrito aqui brevemente no caso $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$, contém uma série de aproximações. Muitas dessas aproximações são feitas sem controle, e o

Tabela 3.1: Frações de ajuste obtidas pelas colaborações E791 [11] e CLEO [17]. Na segunda coluna mostramos, para efeito de comparação, os resultados da E791 sem a inclusão do $\sigma(500)$.

Canal	E791 (%) sem σ [11]	E791 (%) [11]	CLEO (%) [17]
σ	-	$46,3 \pm 9,2$	$41,8 \pm 1,4 \pm 2,5$
NR	$38,6 \pm 9,7$	$7,8 \pm 6,6$	$< 3,5$
$f_0(980)$	$7,4 \pm 1,4$	$6,2 \pm 1,4$	$4,1 \pm 0,9 \pm 0,3$
$f_0(1370)$	$10,7 \pm 3,1$	$2,3 \pm 1,7$	$2,6 \pm 1,8 \pm 0,6$
$f_0(1500)$	-	-	$3,4 \pm 1,0 \pm 0,8$
$\rho(770)$	$20,8 \pm 2,4$	$33,6 \pm 3,9$	$20,0 \pm 2,3 \pm 0,9$
$f_2(770)$	$6,3 \pm 1,9$	$19,4 \pm 2,5$	$18,2 \pm 2,6 \pm 0,7$
$\rho(1440)$	$22,6 \pm 3,7$	$0,7 \pm 0,8$	$< 2,4$

erro por elas engendrado não pode ser avaliado. No caso da descoberta do $\sigma(500)$, que nos interessa diretamente, os valores obtidos para m_σ e Γ_σ não podem ser comparados com análises mais precisas dos pólos do espalhamento. Estas últimas, muitas vezes são construídas sobre bases teóricas mais sólidas, que respeitam as principais características da teoria de campos: unitariedade, analiticidade, simetria de “cruzamento” e, no caso específico de píons e káons, os teoremas de baixa energia que advêm da simetria quiral.

Dentre as aproximações mais problemáticas podemos citar

1. O modelo supõe que a amplitude de decaimento em várias ressonâncias é igual à soma das amplitudes correspondentes a cada uma delas. Entretanto, sabe-se do espalhamento [31] que a existência de duas ressonâncias no mesmo canal de spin-isospin introduz complicações que não são compatíveis com a soma de duas funções de Breit-Wigner, mesmo que a façamos com pesos diferentes, dados por números complexos.
2. Existem várias funções de Breit-Wigner na literatura, e muitas delas têm pouco embasamento teórico. Em geral não possuem correção para a massa das ressonâncias, em conflito com a teoria de campos, como fica claro pela Eq. (3.19). No caso específico da E791, a função de Breit-Wigner ainda tem uma outra imperfeição. Como mostrado por Oller em [30], ela apresenta um pólo real abaixo do limiar, o que corresponderia a um estado ligado $\pi\pi$. Esse pólo não é físico e como consequência

gera um aumento do módulo da função na região próxima ao limiar, como aparece na figura 3.10. Conforme estudado pela colaboração BES [15] as diferentes formas funcionais levam a resultados muito díspares e por vezes incompatíveis: a massa do σ pode variar de 380 a 560 MeV, por exemplo. Para o mesmo conjunto de dados experimentais eles obtiveram $[m_\sigma, \Gamma_\sigma] = [384, 458]$ MeV e $[559, 566]$ MeV, apenas variando a função utilizada.

Figura 3.10: Função de Breit-Wigner utilizada pela E791 para descrever o $\sigma(500)$.

3. Os fatores de forma empregados são também pouco justificados e por isso são fonte mal controladas de incertezas. Em alguns casos, os resultados são bastante sensíveis à escolha dos fatores de forma.
4. O fundo não ressonante é, em geral, tomado como constante em todo o diagrama de Dalitz. Essa hipótese não é baseada em um estudo teórico preciso do decaimento e pode alterar os resultados da onda S .
5. As interações das partículas no estado final não são adequadamente levadas em conta. Não aparece uma relação clara entre o espalhamento de píons e a produção de píons no decaimento.

Neste trabalho vamos nos concentrar no último ponto. Nosso objetivo é estabelecer, de forma clara, uma função de produção de píons na presença do $\sigma(500)$, evidenciando o papel do espalhamento nos observáveis da produção. Esse estudo ajuda a remover algumas ambigüidades presentes no modelo isobárico pois assim evita-se o uso de funções de Breit-Wigner como aquela da Eq. (3.19), e de fatores de forma pouco justificados. Permite, também, o uso de informações provenientes do espalhamento no estudo da produção, o que é muito salutar, pois, em geral, o conhecimento que temos do espalhamento é mais sólido.

Capítulo 4

Amplitudes de espalhamento e produção: relações formais

Nos decaimentos hadrônicos de um méson pseudoescalar pesado M , é comum que o estado final seja formado por três pseudoescalares mais leves, denotados de maneira simplificada por P . Os decaimentos $M \rightarrow PPP$ podem ocorrer, basicamente, de duas maneiras. Na primeira delas o méson M , através de uma interação fraca, é levado diretamente, após a hadronização do estado final, em PPP . Esse processo está ilustrado na figura 4.1(a). Outra possibilidade é aquela em que, antes da formação do estado final, uma ressonância R é produzida no vértice fraco, como aparece na figura 4.1(b). Essa ressonância, subsequente, decai em dois pseudoescalares leves e o estado final observado é PPP . Este tipo de decaimento é dito ressonante.

Figura 4.1: (a) Decaimento direto. (b) Decaimento intermediado pela ressonância. A linha verde representa um méson pesado como o D ou B , a linha ondulada uma ressonância escalar. Os pseudoescalares leves como píons e káons estão representados pelas linhas pontilhadas.

Em decaimentos de mésons D , o espaço de fase disponível para o estado final é consideravelmente pequeno. Por isso, o momento das partículas detectadas, na maioria dos casos, não é muito alto. Isso indica que, no estado final, as partículas devem interagir muitas vezes antes de serem finalmente detectadas. Essas interações fortes podem ocorrer

tanto pelo intermédio da ressonância, como pelas próprias interações PP . Existe uma miríade de possibilidades para essas interações e algumas delas estão representadas na figura 4.2. De maneira geral, vamos nos referir a elas pela sigla FSI (do inglês *final state interactions*).

Figura 4.2: Exemplos de diagramas possíveis para o decaimento $M \rightarrow PPP$. Com exceção do diagrama (a), todos representam interações de estado final.

No decorrer do capítulo, nos concentramos nos decaimentos ressonantes, como o exemplificado na figura 4.1(b). Além disso, trabalhamos numa aproximação que chamamos de *quase dois corpos*, pois consideramos que os mésons subprodutos do decaimento da ressonância não interagem com o terceiro méson que fora produzido no vértice fraco. Do ponto de vista experimental, a validade dessa hipótese não está completamente estabelecida, mas há resultados que indicam que ela é suficiente para tratar os dados [16, 17, 32]. Portanto, as interações genuínas de três corpos devem representar uma correção aos resultados aqui obtidos. Assim, processos como aqueles mostrados nas figuras 4.2(e) e 4.2(f) não serão considerados.

Na nossa descrição, a amplitude para o decaimento ressonante $M \rightarrow P_a P_b P_c$ pode ser

escrita

$$\langle P_a P_b P_c | M \rangle = \mathcal{A}(M \rightarrow P_a R) \Pi(R \rightarrow P_b P_c), \quad (4.1)$$

onde a função $\mathcal{A}(M \rightarrow P_a R)$ descreve o decaimento fraco, e é tomada fora da camada de massa. Os efeitos devido às FSI estão contidos na função Π e aparecem representados como uma bolha vermelha no diagrama da figura 4.3. A função $\Pi(R \rightarrow P_b P_c)$, ou simplesmente $\Pi(s)$, interpola entre o estado intermediário RP_a e o estado final $|P_a P_b P_c\rangle$. A essa função damos o nome *amplitude de produção*. Ela congrega, além das FSI, a propagação da ressonância que, em geral, está fora da camada de massa. É importante ressaltar que a dependência em energia da amplitude total de decaimento pode não estar toda contida em $\Pi(s)$, pois, no caso mais geral, $\mathcal{A}$ também pode depender da energia.

Figura 4.3: Decaimento ressonante. As interações de estado final são representadas pela bolha vermelha e estão associadas à função $\Pi(s)$ da Eq. (4.1).

A função de produção $\Pi(s)$ está ligada a matriz T do espalhamento. Em termos de diagramas, ilustramos essa relação na figura 4.4. O que essa figura mostra é que as partículas produzidas no decaimento da ressonância R podem se reespalhar. Esse reespalhamento é descrito pela matriz T , conforme o que aparece no diagrama mais à direita da figura. A descrição das FSI está ligada, através desse diagrama, à unitariedade que, conforme o capítulo 2, é um ingrediente fundamental do espalhamento.

Figura 4.4: Diagramas para o cálculo da amplitude de produção.

A relação entre T e Π já foi bastante estudada e um dos resultados clássicos na área é o chamado teorema de Watson [33]. Como discutimos nas seções seguintes, tanto T

quanto Π são funções complexas que, de modo bastante geral, podem ser escritas como

$$T(s) = |T|e^{i\delta(s)}, \quad (4.2)$$

$$\Pi(s) = |\Pi|e^{i\varphi(s)}. \quad (4.3)$$

O teorema afirma que a fase da amplitude de produção é a mesma fase do espalhamento $\delta(s)$, ou seja, que $\varphi(s) = \delta(s)$. Embora determine a fase da amplitude, não diz nada sobre seu módulo. De maneira resumida, o que ele assegura é que

$$\Pi(s) = |\Pi|e^{i\delta(s)}. \quad (4.4)$$

O teorema de Watson não evidencia a relação existente entre $|T|$ e $|\Pi|$, entretanto, é bastante comum encontrarmos trabalhos em que a produção é descrita com a própria matriz T [34, 35]. O propósito do nosso trabalho é discutir a relação entre produção e espalhamento tomando como base a descrição de T e procurando ressaltar o papel desempenhado pela unitariedade. Nosso desenvolvimento mostra que, embora exista uma relação entre a amplitude de produção e a de espalhamento, elas não são iguais.

Com o objetivo de estabelecer as relações existentes entre T e Π , estudamos a matriz T do espalhamento de dois mésons pseudoescalares na presença de uma ressonância escalar. Em seguida usamos o mesmo método para calcular a amplitude de produção desses mésons num decaimento ressonante. No capítulo seguinte os resultados foram particularizados para o caso $\pi\pi\sigma$, mas se aplicam também a outros sistemas como o $\pi K\kappa$.

4.1 Espalhamento

Nesta seção estudamos a amplitude T do espalhamento elástico de dois mésons pseudoescalares P_a e P_b , de massas μ_a e μ_b . Essa amplitude é necessária na descrição das interações de estado final do decaimento $M \rightarrow P_a P_b P_c$. Na seção 2.2, estudamos em algum detalhe uma amplitude genérica de espalhamento. Para tornar a leitura desse capítulo mais fluída, recaptulamos alguns resultados e, quando necessário, especificamos resultados mais gerais para o caso que nos interessa.

A amplitude de espalhamento T com que trabalhamos está relacionada à matriz S total por

$$S = \mathbb{1} + i(2\pi)^4 \delta^4(\Sigma p_f - \Sigma p_i) T, \quad (4.5)$$

e a seção de choque diferencial se escreve

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{1}{S 8\pi \sqrt{s}} \right)^2 |T|^2. \quad (4.6)$$

Quanto à cinemática, empregamos as variáveis de Mandelstam, das quais temos especial interesse em $s = (p_a + p_b)^2$. Como ressonâncias são objetos que têm *spin* bem definido, é importante decompor a matriz T em ondas parciais de momento angular l . Na nossa convenção, escrevemos

$$T = \sum_l (2l + 1) T_l(s) P_l(\cos \theta), \quad (4.7)$$

onde cada T_l pode ser parametrizada em termos da defasagem do espalhamento $\delta_l(s)$. Além disso, por trabalharmos com píons e káons, empregamos o formalismo de isospin. As ressonâncias, sendo estados de isospin bem definido, se manifestam numa determinada componente de isospin I de T_l , denotada T_l^I . Assim, a decomposição final de T_l^I fica sendo

$$T_l^I(s) = \mathcal{S} \frac{16\pi}{\rho(s)} \sin \delta_l^I(s) e^{i\delta_l^I(s)}. \quad (4.8)$$

A defasagem do espalhamento, $\delta_l^I(s)$, é uma função real¹ que caracteriza $T(s)$. Daqui em diante omitiremos, por simplicidade, os índices l e I . Nessa última expressão, $\mathcal{S}$ é um fator estatístico tal que se $P_a = P_b$ então $\mathcal{S} = 2$ e se $P_a \neq P_b$ então $\mathcal{S} = 1$. A expressão geral da função $\rho(s)$ é

$$\rho(s) = \sqrt{[1 - (\mu_a + \mu_b)^2/s][1 - (\mu_a - \mu_b)^2/s]}. \quad (4.9)$$

No caso de massas iguais, $\mu_a = \mu_b = \mu$, essa expressão se simplifica e temos

$$\rho(s) = \sqrt{1 - 4\mu^2/s}. \quad (4.10)$$

A matriz T do espalhamento em teoria de campos obedece a uma equação conhecida como equação de Bethe-Salpeter (BS) [36]. Trata-se de uma generalização relativística da equação de Lippmann-Schwinger, que introduzimos por meio da Eq. (2.30). Formalmente, a equação de BS se escreve

$$T = \mathcal{K} + \mathcal{K}(-\bar{\Omega})T. \quad (4.11)$$

Nesta equação, $\mathcal{K}$ representa o núcleo, ou *kernel*, da interação. A função $(-\bar{\Omega})$ é uma função de Green livre de dois corpos. O conteúdo da equação de BS pode ser mapeado em diagramas, e isso está feito na figura 4.5. O kernel é um ingrediente básico dessa descrição pois representa a interação fundamental e faz, em alguns aspectos, o papel do potencial da MQ. Contudo, uma diferença importante reside no fato de que $\mathcal{K}$, em princípio, pode ser calculado. Ele é composto pelo conjunto de diagramas próprios² de duas partículas da expansão perturbativa de T .

¹Essa função é definida a menos da soma de um múltiplo ímpar de π . Portanto $\delta(s)$ e $\delta'(s) = \delta \pm \pi$ correspondem a uma mesma matriz T .

²Por diagramas próprios, entendemos diagramas que não podem ser separados em dois outros “pelo corte de duas linhas internas idênticas às externas” [37].

Figura 4.5: Representação em diagramas da equação de Bethe-Salpeter, Eq. (4.11)

De maneira análoga ao que fizemos no caso da equação de LS, a equação de BS também admite uma solução iterativa. Nesse caso, T passa a ser dada por uma série infinita envolvendo $\mathcal{K}$ e Ω . Dessa forma, em primeira aproximação, $T = \mathcal{K}$. A inserção desse resultado no lado direito de (4.11) nos dá a série

$$T(s) = \mathcal{K} + \mathcal{K}(-\bar{\Omega})\mathcal{K} + \mathcal{K}(-\bar{\Omega})\mathcal{K}(-\bar{\Omega})\mathcal{K} + \dots \quad (4.12)$$

que está representada na figura 4.6.

Figura 4.6: Representação em diagramas da série perturbativa para a equação de Bethe-Salpeter, Eq. (4.12).

No capítulo 2, mostramos que a equação de LS é uma equação integral para os elementos de matriz do operador T . De maneira bastante análoga, a equação com a qual lidamos agora também é uma equação integral para elementos da matriz de transição. Entretanto, por agora trabalharmos com o caso relativístico, as integrações são feitas sobre d^4p no espaço de Minkowski. O caráter integral da equação impede, em princípio, que somemos a série da equação (4.12). Contudo, nos casos que nos interessam, a saber os sistemas $\pi\pi$, $K\bar{K}$ e πK , algumas simplificações entram em jogo.

Nesses casos, o kernel da interação tem uma estrutura relativamente simples. A simplicidade do kernel da interação nos autoriza a fatorá-lo para fora das integrais, como mostrado por exemplo por Oller e Oset na Ref. [13]. Portanto, simbolicamente, podemos escrever igualdades do tipo

$$\int d^4p \mathcal{K}\bar{\Omega}\mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}^2 \int d^4p \bar{\Omega}. \quad (4.13)$$

O kernel da equação é, normalmente, identificado com a matriz T em árvore projetada nos canais de spin e isospin corretos. No nosso caso, estamos interessados em descrever

o espalhamento no qual uma ressonância escalar está presente como um grau de liberdade explícito. De maneira geral, e sem nenhum comprometimento com alguma dinâmica específica, o kernel $\mathcal{K}$ sempre pode ser escrito como

$$\mathcal{K} \equiv \frac{\gamma^2(s)}{m_R^2 - s}, \quad (4.14)$$

onde a função $\gamma^2(s)$ contém toda a dependência de modelo e m_R é a massa nominal da ressonância escalar.

Quanto à função de Green $\bar{\Omega}$, ela está ligada ao diagrama da figura 4.7, que tem um *loop* no canal s . A integral a ser resolvida é logaritmicamente divergente. Essa integral divergente identificamos com Ω . Após regularizarmos a integral passamos a escrevê-la $\bar{\Omega}$. A integral que temos de resolver é

$$\Omega = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P/2 + Q)^2 - \mu_a^2} \frac{1}{(P/2 - Q)^2 - \mu_b^2}, \quad (4.15)$$

onde $P = p_a + p_b$ é o momento total fluindo pelo *loop* e Q é apenas uma variável de integração. O cálculo desta integral está feito em detalhes no apêndice D.

Figura 4.7: Diagrama de *loop* no canal s que origina a função de Green $\bar{\Omega}$. A seta curva indica o sentido do momento Q fluindo dentro do *loop*.

Para regularizar a integral adotamos o método usual de regularização dimensional. Além disso, é necessário um procedimento de renormalização, que fixa as constantes envolvidas no cálculo. Aqui adotamos o procedimento empregado na Ref. [31] que, como veremos mais adiante, é inspirado o formalismo de renormalização de BPHZ [38]. A função de Green de dois corpos $\bar{\Omega}$ está relacionada à parte finita da integral de *loop* do tipo bolha e que denotamos $L(s)$, através da relação

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}(s) &= -\frac{1}{\mathcal{S}16\pi^2} \{ \Re [L(s) - L(m_R^2)] + i \Im L(s) \} \\ &\equiv \bar{R}(s) + iI(s). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Dessa forma, introduzimos um ponto de subtração para a parte real de Ω , a saber $s = m_R^2$. Na Eq. (4.16) $\bar{R}(s)$ e $I(s)$ representam respectivamente as partes real e imaginária da

função. A função $L(s)$ tem uma expressão analítica que é dada por

- para $0 < s < (\mu_b - \mu_a)^2$

$$L(s) = \rho(s) \log \left[\frac{\sqrt{(\mu_a + \mu_b)^2 - s} + \sqrt{(\mu_a - \mu_b)^2 - s}}{\sqrt{(\mu_a + \mu_b)^2 - s} - \sqrt{(\mu_a - \mu_b)^2 - s}} \right] - \frac{(\mu_b^2 - \mu_a^2)}{s} \log \left(\frac{\mu_b}{\mu_a} \right), \quad (4.17)$$

- para $(\mu_b - \mu_a)^2 < s < (\mu_b + \mu_a)^2$

$$L(s) = \frac{\sqrt{-\lambda(s)}}{s} \left\{ \tan^{-1} \left[\frac{\mu_a^2 + \mu_b^2 - s}{\sqrt{-\lambda(s)}} \right] - \frac{\pi}{2} \right\} - \frac{(\mu_b^2 - \mu_a^2)}{s} \log \left(\frac{\mu_b}{\mu_a} \right), \quad (4.18)$$

- para $s > (\mu_b + \mu_a)^2$

$$L(s) = \rho(s) \log \left[\frac{\sqrt{s - (\mu_a - \mu_b)^2} - \sqrt{s - (\mu_a + \mu_b)^2}}{\sqrt{s - (\mu_a - \mu_b)^2} + \sqrt{s - (\mu_a + \mu_b)^2}} \right] - \frac{(\mu_b^2 - \mu_a^2)}{s} \log \left(\frac{\mu_b}{\mu_a} \right) + i\pi\rho(s), \quad (4.19)$$

onde $\lambda(s) = (s - \mu_a^2 - \mu_b^2)^2 - 4\mu_a^2\mu_b^2$.

A parte imaginária, que aparece a partir do limiar de produção das partículas $P_a P_b$, é justamente aquela advinda das regras de Cutkosky. É portanto um requisito fundamental das propriedades bastante gerais de analiticidade de diagramas. Sua forma é bastante simples

$$I(s) = -\frac{\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi} \Theta(s - s_0), \quad (4.20)$$

com s_0 sendo o limiar de produção $s_0 = (\mu_a + \mu_b)^2$ e Θ a função degrau de Heaviside.

A propriedade de fatoração da equação de BS, que já evocamos, nos permite somar a série dada pela Eq. (4.12). Essa série é simplesmente a série geométrica usual, e por isso o problema do espalhamento se simplifica consideravelmente. O resultado que obtemos para a matriz T é

$$T(s) = \mathcal{K} + \mathcal{K}(-\bar{\Omega})\mathcal{K} + \mathcal{K}(-\bar{\Omega})\mathcal{K}(-\bar{\Omega})\mathcal{K} + \dots = \frac{\mathcal{K}}{1 + \bar{\Omega}\mathcal{K}}. \quad (4.21)$$

Escrevendo o kernel $\mathcal{K}$ na forma (4.14), e usando a Eq. (4.21), obtemos

$$T = \frac{\gamma^2/(m_R^2 - s)}{1 + (\bar{R} + iI)[\gamma^2/(m_R^2 - s)]}, \quad (4.22)$$

o que nos permite introduzir uma largura e uma massa dinâmicas dadas por

$$\mathcal{M}^2(s) \equiv m_R^2 + \gamma^2(s) \bar{R}(s), \quad (4.23)$$

$$m_R \Gamma(s) \equiv \frac{\gamma^2(s) \rho(s)}{\mathcal{S}16\pi}. \quad (4.24)$$

Daqui em diante omitiremos a dependência em s das funções $\mathcal{M}$ e Γ , de modo a simplificar a notação. A amplitude de espalhamento unitária fica sendo então

$$T = \mathcal{S} \frac{16\pi}{\rho(s)} \frac{m_R \Gamma}{\mathcal{M}^2 - s - i m_R \Gamma}. \quad (4.25)$$

Separando as partes real e imaginária de T temos

$$\Re \bar{T}(s) = \frac{\gamma^2 (\mathcal{M}^2 - s)}{(\mathcal{M}^2 - s)^2 + \left(\frac{\rho \gamma^2}{\mathcal{S} 16\pi} \right)^2}, \quad (4.26)$$

$$\Im \bar{T}(s) = \frac{\gamma^4 \rho / \mathcal{S} 16\pi}{(\mathcal{M}^2 - s)^2 + \left(\frac{\rho \gamma^2}{\mathcal{S} 16\pi} \right)^2}, \quad (4.27)$$

o que nos dá a defasagem do espalhamento

$$\tan \delta(s) = \frac{m_R \Gamma}{\mathcal{M}^2 - s}. \quad (4.28)$$

Será importante também escrevermos $\sin \delta$ e $\cos \delta$

$$\sin \delta(s) = \frac{m_R \Gamma}{\mathcal{E}(s)}, \quad (4.29)$$

$$\cos \delta(s) = \frac{(\mathcal{M}^2 - s)}{\mathcal{E}(s)}, \quad (4.30)$$

onde definimos

$$\mathcal{E}(s) = \sqrt{(\mathcal{M}^2 - s)^2 + (m_R \Gamma)^2}. \quad (4.31)$$

As Eqs. (4.25), (4.28) e (4.29) nos permitem escrever

$$T = \mathcal{S} \frac{16\pi}{\rho(s)} \sin \delta(s) e^{i\delta(s)}, \quad (4.32)$$

o que mostra que nossa expressão para T é condizente com a unitariedade da matriz S .

A construção da função $\bar{\Omega}(s)$ dada na Eq. (4.16) fornece a seguinte relação

$$\mathcal{M}^2(m_R^2) = m_R^2. \quad (4.33)$$

Dessa maneira, na expressão para a tangente da defasagem Eq. (4.28) o denominador se anula quando $s = m_R^2$, fazendo com que a fase passe por 90° nesse ponto. Isso introduz uma definição da massa nominal da ressonância: a massa é o valor $\sqrt{s_r}$ tal que $\delta(s_r) = 90^\circ$. Essa construção é coerente com o formalismo de renormalização de BPHZ, pois a parte real do denominador continua se anulando no ponto $s = m_R^2$.

A posição do pólo da ressonância s_p é determinada pela equação

$$\mathcal{M}^2(s_p) - s_p - i m_R \Gamma(s_p) = 0. \quad (4.34)$$

Vale notar que a parte real de s_p pode estar situada em um valor muito distinto de m_R^2 , devido à forte dependência em energia das funções $\mathcal{M}^2(s)$ e $\Gamma(s)$.

O formalismo apresentado aqui é bastante geral. A expressão que obtivemos para a matriz T é, formalmente, uma solução da equação de BS quando escrita na forma (4.11). De fato temos

$$\begin{aligned} T &= \mathcal{K} + \mathcal{K}(-\bar{\Omega})T \longrightarrow T + \mathcal{K}\bar{\Omega}T = \mathcal{K} \\ (1 + \mathcal{K}\bar{\Omega})T &= \mathcal{K} \end{aligned} \quad (4.35)$$

e portanto

$$T = \frac{\mathcal{K}}{1 + \mathcal{K}\bar{\Omega}}. \quad (4.36)$$

Além disso, a parametrização que introduzimos para o kernel é, no caso de uma ressonância escalar, a mais geral possível. Na prática, às vezes não conseguimos usar o kernel e a função $\bar{\Omega}$ exatos e precisamos recorrer à aproximações. Existem vários tipos de aproximações possíveis para $\mathcal{K}$ e para $\bar{\Omega}$. A vantagem da forma (4.36) é que mesmo que $\mathcal{K}$ e/ou $\bar{\Omega}$ sejam aproximados, o resultado respeita a unitariedade. Nesse sentido, essa equação pode ser considerada um procedimento de unitarização.

O procedimento de unitarização que descrevemos aqui permite estender a validade de amplitudes de espalhamento obtidas em nível árvore, que são, de maneira geral, reais e não unitárias. Sem um tal procedimento, o emprego dessas amplitudes é limitado a regiões muito próximas ao limiar. A unitarização é uma forma de se estudar regiões maiores em energia e representa uma tentativa de se levar em conta todas as ordens de interação forte presentes no processo de espalhamento [31, 39].

No emprego da Eq. (4.36) existem várias aproximações possíveis para $\mathcal{K}$. No capítulo 5 discutimos dois modelos para esse kernel. Isso significa obter uma forma específica para a função $\gamma^2(s)$, o que fazemos para o sistema $\pi\pi$ com simetria quiral $SU(2)$. Discutimos agora, de maneira breve, uma aproximação para $\bar{\Omega}$ e como ela se relaciona com o nosso procedimento.

A principal aproximação de $\bar{\Omega}$ empregada na literatura é conhecida como aproximação de matriz K [39, 40], que representa uma maneira mais simplificada de se obter a amplitude unitária. Nosso tratamento generaliza esse último.

4.1.1 Matriz K

O método da matriz K corresponde a uma aproximação do visto acima. Entretanto, ele também pode ser formulado formalmente. Para isso, definimos uma matriz K_l tal que

para uma dada onda parcial l tenhamos

$$s_l = \frac{1 + i(\rho/\mathcal{S}16\pi)K_l}{1 - i(\rho/\mathcal{S}16\pi)K_l}. \quad (4.37)$$

Esta parametrização de s_l garante a unitariedade por construção. Entretanto, ela não é a mais geral possível, e representa uma aproximação. Vimos no capítulo 2 que a relação entre s_l e T_l é dada por

$$s_l = 1 + 2i \left(\frac{\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi} \right) T_l. \quad (4.38)$$

Usando a parametrização da matriz K podemos escrever

$$s_l = 1 + 2i \frac{(\rho/\mathcal{S}16\pi)K_l}{1 - i(\rho/\mathcal{S}16\pi)K_l} = 1 + 2i \left(\frac{\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi} \right) T_l. \quad (4.39)$$

De onde sai a igualdade

$$T_l = \frac{K_l}{1 - i \left(\frac{\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi} \right) K_l}, \quad (4.40)$$

que pode ser comparada à solução da equação de BS dada em (4.36). Dessa comparação vemos que a matriz K pode ser identificada com o kernel da equação de BS. Já a função de Green $\bar{\Omega}$ corresponde a uma função puramente imaginária, de fato

$$\bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}_K = -i \frac{\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi}. \quad (4.41)$$

É importante notar que essa função de Green é coerente com a função mais geral que introduzimos desde de que fazamos $\bar{R}(s) \rightarrow 0$. Portanto, ela leva em conta somente a parte imaginária do diagrama de *loop*. Nesse sentido, a aproximação de matriz K é uma aproximação para a função de Green $\bar{\Omega}$. Por ignorar a parte real, ela evita o problema da renormalização e prescinde de um ponto de subtração. Fisicamente, esse resultado pode ser interpretado com auxílio das regras de Cutkosky, segundo as quais impor em um cálculo de *loop* que as partículas se propagando estejam na camada de massa equivale a calcular apenas a parte imaginária do diagrama [5]. Por isso, a abordagem de matriz K significa que supomos, no cálculo de $\bar{\Omega}$, que todas as partículas estão na camada de massa, como representado pictoricamente na figura 4.8.

Nessa aproximação a fase da amplitude é dada por

$$\delta(s) = \tan^{-1} \left(\frac{\rho(s)K_l}{\mathcal{S}16\pi} \right) \quad (4.42)$$

e, por isso, vale

$$K_l = \frac{\mathcal{S}16\pi}{\rho(s)} \tan \delta(s). \quad (4.43)$$

Consideramos o caso da ressonância escalar e assim tomamos novamente a parametrização de K_l na forma

$$K_l = \frac{\gamma^2(s)}{m_R^2 - s}. \quad (4.44)$$

Agora, o resultado que obtemos para T_l é

$$T = \mathcal{S} \frac{16\pi}{\rho(s)} \frac{m_R \Gamma(s)}{m_R^2 - s - i m_R \Gamma(s)}, \quad (4.45)$$

onde a largura dinâmica é a mesma que introduzimos antes por meio da Eq. (4.24). Vemos que desaparece a correção dinâmica à massa da ressonância. A aproximação de matriz K é obtida então fazendo, em nossos resultados anteriores, $\mathcal{M}^2 \rightarrow m_R^2$.

Por fim, a fase da amplitude é dada por

$$\tan \delta(s) = \frac{m_R \Gamma}{m_R^2 - s}, \quad (4.46)$$

o que novamente pode ser obtido através da substituição $\mathcal{M}^2 \rightarrow m_R^2$ no resultado (4.28). O ponto em que a fase passa por 90° não é alterado, continua sendo determinado por m_R^2 .

Figura 4.8: Representação em diagramas do processo de unitarização pela matriz K . Os *loops* aparecem cortados para indicar que as partículas que se propagam estão na camada de massa.

Em resumo, a matriz K gera uma largura para a ressonância sem corrigir sua massa. No tratamento mais geral que introduzimos, recuperamos esse resultado fazendo $\bar{R} \rightarrow 0$, o que corresponde, segundo a Eq. (4.23), a fazer $\mathcal{M}^2 \rightarrow m_R^2$.

4.2 Produção

Como discutimos no começo do capítulo, o decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$ contempla a possibilidade de, no vértice fraco, haver a transição $D \rightarrow R \pi^+$, onde R é uma ressonância. Nesses casos, a ressonância se propaga na presença de interações no estado final, as quais envolvem a amplitude $\pi\pi$ elástica. Nesta seção estudamos a propagação da ressonância e a formação do estado final na presença das FSI. Como mostramos na Eq.

(4.1), não tratamos a amplitude total do decaimento, pois ignoramos por ora o vértice fraco. Entretanto, a parte que estudamos é muito importante na construção da amplitude total. A estrutura do vértice fraco não é discutida, e o representamos simplesmente pela amplitude $\mathcal{A}(M \rightarrow RP)$. Há modelos para essas amplitudes, como os das Refs. [41, 42], entretanto, para nosso desenvolvimento presente $\mathcal{A}$ pode ser ignorada. A incorporação da parte fraca do decaimento ao nosso cálculo é simples e multiplicativa.

Uma vez estudada a unitarização da amplitude de espalhamento, podemos determinar sem ambigüidades, dentro das aproximações em que trabalhamos, como a informação obtida deve ser usada no caso da produção de ressonâncias. Para isso temos de calcular a amplitude de produção $\Pi(s)$ definida através da Eq. (4.1). Toda a informação do espalhamento que é relevante para a amplitude de decaimento está contida em $\Pi(s)$, que pode ser representada por meio de diagramas pela figura 4.4.

O cálculo da amplitude de produção dos mésons pseudoescalares é feito de maneira análoga ao cálculo de T , e o resultado pode ser lido diretamente da figura 4.4

$$\begin{aligned}\Pi(s) &= \frac{g}{m_R^2 - s} [1 + (-\bar{\Omega})T] \\ &= \frac{g}{m_R^2 - s} \left[1 + (-\bar{\Omega}) \frac{\mathcal{K}}{1 + \bar{\Omega}\mathcal{K}} \right] = \frac{g}{m_R^2 - s} \left[\frac{1}{1 + \bar{\Omega}\mathcal{K}} \right],\end{aligned}\quad (4.47)$$

onde g é a constante de acoplamento da ressonância aos mésons P_a e P_b e m_R é massa nominal de R . O propagador da ressonância não deve ser amputado da expressão de $\Pi(s)$, pois essa última interpola entre o estado intermediário RP_a fora da camada de massa e o estado final $|P_a P_b P_c\rangle$. O parcela 1 da soma entre colchetes em (4.47) advém do diagrama sem reespalhamento. As interações entre os mésons do estado final são dadas pelo termo $(-\Omega)T$, que contém a propagação, codificada na função de Green, e a interação, que ocorre através de T . É importante ressaltar que no caso mais geral o acoplamento RPP pode depender da energia, ou seja $g \rightarrow g(s)$. Entretanto, a fatoração desse acoplamento para fora da integral de *loop* é perfeitamente coerente com a propriedade de fatoração que empregamos na solução da equação de Bethe-Salpeter, que fora provada na Ref. [13]. O resultado da Eq. (4.47), apesar de simples, tem um papel central nesse trabalho.

Esta última expressão, se comparada a (4.21), deixa claro que $\Pi(s)$ e $T(s)$ são diferentes. Entretanto, em ambos os denominadores aparece o termo $(1 + \bar{\Omega}\mathcal{K})$. Esse termo é responsável pela transmissão dos pólos do espalhamento para a produção [43], além de impor o teorema de Watson [33], segundo o qual a fase da produção e do espalhamento são as mesmas. Citando M. R. Pennington, trata-se de um “denominador universal” [43].

Para tornar mais transparente o fato de que os pólos da produção são os mesmos do espalhamento, é útil escrevermos (4.47) numa forma mais amigável. Usando a

parametrização do kernel Eq. (4.14) e as definições de $\mathcal{M}^2(s)$ e $\Gamma(s)$ temos

$$\Pi(s) = \frac{g}{m_R^2 - s} \left[\frac{s - m_R^2}{s - \mathcal{M}^2 + i \frac{\rho\gamma^2}{S16\pi}} \right] = g \frac{1}{\mathcal{M}^2 - s - im_R\Gamma}. \quad (4.48)$$

Esse resultado mostra que a determinação dos pólos da produção é feita pela mesma equação (4.34). Novamente vale notar que a parte real do pólo pode estar situada em um ponto muito distinto de m_R^2 .

Para verificar que nosso resultado respeita o teorema de Watson, temos de evidenciar a fase de $\Pi(s)$ através de

$$\Pi(s) = |\Pi(s)|e^{i\varphi(s)}.$$

As partes real e imaginária de Π são

$$\begin{aligned} \Re\Pi &= \frac{g(\mathcal{M}^2 - s)}{(\mathcal{M}^2 - s)^2 + \left(\frac{\rho\gamma^2}{S16\pi}\right)^2}, \\ \Im\Pi &= \frac{g\rho\gamma^2/S16\pi}{(\mathcal{M}^2 - s)^2 + \left(\frac{\rho\gamma^2}{S16\pi}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

E assim o cálculo da fase nos dá

$$\varphi(s) = \delta(s) = \tan^{-1} \frac{m_R\Gamma}{\mathcal{M}^2 - s}, \quad (4.50)$$

e portanto a fase de produção é a mesma do espalhamento, resultado que está em acordo com o teorema de Watson. O cálculo de módulo Π nos fornece

$$|\Pi(s)| = g \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{M}^2 - s)^2 + (m_R\Gamma)^2}}, \quad (4.51)$$

logo, obtemos uma expressão final para $\Pi(s)$

$$\Pi(s) = g \frac{1}{\sqrt{(\mathcal{M}^2 - s)^2 + (m_R\Gamma)^2}} e^{i\delta(s)}. \quad (4.52)$$

Na literatura existe um debate sobre a forma de $\Pi(s)$. Em alguns trabalhos a produção é descrita com uso de expressões baseadas em $\sin \delta$ [34, 35]. Em outros, se empregam expressões que utilizam $\cos \delta$ [17, 39]. Investigando a expressão de $\Pi(s)$, vemos que, na realidade, desde de que se tome algum cuidado, é possível escrever $\Pi(s)$ em termos de $\sin \delta$ ou $\cos \delta$. Contudo, é importante ressaltar que, em nenhum caso, $\Pi(s)$ deve ser substituída pela matriz T . Utilizando a expressão de $\mathcal{E}(s)$ Eq. (4.31), temos

$$\textbf{forma 1: } \Pi(s) = g \frac{1}{\mathcal{E}(s)} e^{i\delta(s)} = \frac{g}{\mathcal{M}^2 - s} \cos \delta(s) e^{i\delta(s)}. \quad (4.53)$$

A expressão em termos do $\cos \delta$ tem o mérito de mostrar claramente que o zero do $\cos \delta$, que ocorre para $\delta(m_R^2) = 90^\circ$, é cancelado pelo propagador da ressonância. Esse cancelamento só é obtido num tratamento coerente, em que $\delta(s)$ passa por 90° exatamente em $s = m_R^2$. Caso contrário obteríamos zeros ou infinitos na expressão da produção que não seriam físicos. Além dessa última forma, tomando a Eq. (4.47) e multiplicando-a por $\mathcal{K}^{-1}\mathcal{K}$ obtemos

$$\textbf{forma 2: } \Pi(s) = \frac{g}{\gamma^2(s)} \left[\frac{\mathcal{K}}{1 + \bar{\Omega} \mathcal{K}} \right] = \frac{g T}{\gamma^2(s)} = \frac{g}{m_R \Gamma} \sin \delta(s) e^{i\delta(s)}, \quad (4.54)$$

o que evidencia a relação existente entre T e $\Pi(s)$.

Até o momento, com as Eqs. (4.47-4.54) mostramos que, conhecendo a dinâmica do processo de espalhamento, representada pela função $\gamma^2(s)$ na Eq. (4.14), obtemos a amplitude de produção. Essa função aparece em todas as expressões. Na Eq. (4.53), por exemplo, ela entra através da massa dinâmica $\mathcal{M}^2$, Eq. (4.23). Embora isso represente um avanço, pois estabelecemos sem ambigüidades a amplitude de produção, não temos ainda uma expressão para $\Pi(s)$ que saia diretamente da defasagem $\delta(s)$. É possível obtê-la se eliminarmos $\gamma^2(s)$ das Eqs. (4.23) e (4.24). Da Eq. (4.24) temos

$$\gamma^2(s) = \frac{\mathcal{S}16\pi}{\rho(s)} m_R \Gamma \quad (4.55)$$

e, das expressões para o $\cos \delta$ e para o $\sin \delta$, temos

$$\mathcal{M}^2 - s = \mathcal{E}(s) \cos \delta(s), \quad (4.56)$$

$$m_R \Gamma = \mathcal{E}(s) \sin \delta(s). \quad (4.57)$$

Utilizando esses resultados na Eq. (4.23) para $\mathcal{M}^2$ temos

$$\mathcal{E}(s) \cos \delta(s) = (m_R^2 - s) + \frac{\mathcal{S}16\pi}{\rho(s)} \bar{R} \mathcal{E}(s) \sin \delta(s), \quad (4.58)$$

resolvendo para $\mathcal{E}(s)$ encontramos

$$\frac{1}{\mathcal{E}(s)} = \frac{1}{(m_R^2 - s)} \left[\cos \delta(s) - \frac{\mathcal{S}16\pi}{\rho(s)} \bar{R} \sin \delta(s) \right]. \quad (4.59)$$

Colocando em evidência o $\cos \delta$, e usando a Eq. (4.53), obtemos uma expressão para $\Pi(s)$ que agora só depende da fase e da bem conhecida integral de *loop*

$$\Pi(s) = g \frac{\cos \delta(s)}{(m_R^2 - s)} \left[1 - \frac{\mathcal{S}16\pi}{\rho(s)} \bar{R} \tan \delta(s) \right] e^{i\delta(s)}. \quad (4.60)$$

Se escrevermos a função de Green $-\bar{\Omega}$ como

$$\bar{\Omega} = |\bar{\Omega}| e^{i\omega(s)}, \quad (4.61)$$

teremos

$$\tan \omega(s) = \frac{I}{\bar{R}} = \frac{-\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi\bar{R}}, \quad (4.62)$$

e completamos nosso desenvolvimento com uma fórmula para a amplitude de produção que depende apenas da defasagem do espalhamento $\delta(s)$, da fase da integral de *loop* $\omega(s)$, da massa da ressonância m_R e da constante de acoplamento g

$$\textbf{forma 3: } \Pi(s) = g \frac{\cos \delta(s)}{m_R^2 - s} \left[1 + \frac{\tan \delta(s)}{\tan \omega(s)} \right] e^{i\delta(s)}. \quad (4.63)$$

Escrevemos assim $\Pi(s)$ em termos da fase $\delta(s)$. Essa expressão é um resultado novo na literatura [44]. Sua importância reside nos seguintes fatos

1. $\Pi(s)$ depende, a menos de g , apenas dos observáveis $\delta(s)$ e m_R e de uma fase sem ambigüidades e muito bem controlada teoricamente: $\omega(s)$.
2. A fase das amplitudes de espalhamento e produção são as mesmas, como previsto pelo teorema de Watson. Nosso resultado ainda representa um passo além com relação ao teorema, pois relacionamos o *módulo* de $\Pi(s)$ à sua fase, assim como a expressão (4.8) o faz para a matriz T . A forma específica de $|\Pi(s)|$ é uma consequência da unitariedade; obtemos, pois, uma descrição da produção em acordo com esse princípio básico da teoria de campos.
3. O procedimento descrito generaliza a aproximação de matriz K , que normalmente é usada nesse contexto.
4. Nossa expressão não possui zeros ou infinitos não físicos. O tratamento coerente do espalhamento e da produção evita o aparecimento de falsos zeros. Em alguns trabalhos da literatura, em que a produção e o espalhamento são descritos de maneira incoerente, tais zeros aparecem [42, 45].

Uma outra vantagem da expressão para $\Pi(s)$ tal qual escrita em (4.63) é que nesta forma evidenciamos a diferença do nosso resultado com relação à aproximação de matriz K . Isso pode ser visto se tomarmos o limite correspondente. Fazemos então $\bar{R} \rightarrow 0$ e temos $\cot \omega(s) \rightarrow 0$, logo, para a razão entre as tangentes temos

$$\frac{\tan \delta}{\tan \omega} \rightarrow 0.$$

Assim, o termo entre colchetes em (4.63) quantifica a razão entre nosso resultado e aquele obtido em matriz K .

Um outro resultado interessante, subproduto do cálculo feito até aqui, é uma expressão para o kernel em termos das fase $\delta(s)$ e $\omega(s)$. Uma tal expressão pode ser obtida igualando-se as equações (4.63) e (4.54), o que dá

$$g \mathcal{K} \cos \delta(s) \left[1 + \frac{\tan \delta(s)}{\tan \omega(s)} \right] e^{i\delta(s)} = T. \quad (4.64)$$

Se usarmos a expressão para T da Eq. (4.8) obtemos

$$\mathcal{K} = \mathcal{S} \frac{16\pi}{\rho(s)} \frac{\tan \delta}{(1 + \tan \delta / \tan \omega)}. \quad (4.65)$$

4.2.1 Generalizações

Para estender a validade do nosso procedimento para energias mais elevadas, é necessário incluir os efeitos de inelasticidade e a existência de duas (ou mais) ressonâncias. Nesta seção delineamos duas possíveis generalizações do formalismo da função de produção. Nosso objetivo aqui é traçar, em linhas gerais, a generalização do procedimento para dois canais e para o caso de duas ressonâncias. O caso de dois canais representa basicamente uma generalização da função de Green $\bar{\Omega}$. Duas ressonâncias correspondem a uma alteração na forma do kernel $\mathcal{K}$ da equação de Bethe-Salpeter. Começamos pelo caso de duas ressonâncias.

Duas ressonâncias

A fenomenologia dos sistemas $\pi\pi$ e $K\bar{K}$ é marcada pela existência de várias ressonâncias. A manifestação delas no espalhamento é repleta de interferências pois, por serem estados largos, existe uma sobreposição grande entre ressonâncias como o $\rho(770)$ e o $\sigma(500)$. Esses efeitos de interferência são ainda mais importantes no caso em que duas ressonâncias tem o mesmo *spin*. Esse é o caso, por exemplo, do $\sigma(500)$ e do $f_0(980)$, ambos escalares-isoescalares. Se quisermos descrever o espalhamento, e também a produção, para energias entre 500 e 980 MeV, devemos esperar que a interferência entre esses dois estados intermediários seja importante. Para entender essa interferência, conforme o que fizemos antes, começamos pela matriz T do espalhamento, que é a base para se descrever a produção.

O espalhamento $\pi\pi$ com duas ressonâncias e tratado com unitarização dinâmica foi estudado em [31]. Revisamos, numa linguagem um pouco distinta, os resultados dessa referência e em seguida passamos a estudar a produção.

Tratamos o caso de duas ressonâncias R_α e R_β de massas m_α e m_β . Vamos nos restringir, para evitar o problema da renormalização, à unitarização em matriz K . A

equação de Bethe-Salpeter para esse problema é basicamente a mesma e também pode ser representada pelos diagramas da figura 4.5. A solução da equação é, novamente, dada por

$$T = \frac{\mathcal{K}}{1 + \mathcal{K}\Omega_K}. \quad (4.66)$$

Introduzimos a notação Ω_K para lembrar que trabalhamos em matriz K . Nessa aproximação a função de Green é

$$\Omega_K = -\frac{i\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi}. \quad (4.67)$$

A diferença nesse caso manifesta-se no kernel da interação, que agora é gerado pela troca de duas ressonâncias. Utilizando a notação que já introduzimos, podemos escrevê-lo como a soma de duas parcelas, fatorando a contribuição do canal s

$$\mathcal{K} = \frac{\gamma_\alpha^2(s)}{m_\alpha^2 - s} + \frac{\gamma_\beta^2(s)}{m_\beta^2 - s}. \quad (4.68)$$

É conveniente somarmos as duas e escrevermos

$$\mathcal{K} = \frac{\xi^2(s)}{(m_\alpha^2 - s)(m_\beta^2 - s)}, \quad (4.69)$$

onde introduzimos a função $\xi^2(s)$ dada por

$$\xi^2 = \gamma_\alpha^2(s)(m_\beta^2 - s) + \gamma_\beta^2(s)(m_\alpha^2 - s). \quad (4.70)$$

Prosseguindo de maneira análoga ao que fizemos no caso de uma ressonância, substituímos essa expressão na solução da equação de Bethe-Salpeter e obtemos

$$T = \frac{\mathcal{S}16\pi}{\rho(s)} \frac{(m_\beta^2 - s)m_\alpha\Gamma_\alpha(s) + (m_\alpha^2 - s)m_\beta\Gamma_\beta(s)}{(m_\alpha^2 - s)(m_\beta^2 - s) - i[(m_\beta^2 - s)m_\alpha\Gamma_\alpha(s) + (m_\alpha^2 - s)m_\beta\Gamma_\beta(s)]}. \quad (4.71)$$

Nesse resultado, as larguras são definidas da maneira que fizemos para uma ressonância

$$m_i\Gamma_i = \frac{\gamma_i^2(s)\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi}. \quad (4.72)$$

O resultado que obtivemos para a matriz T , dado pela Eq. (4.71), generaliza aquele da Eq. (4.25), que obtivéramos no caso de uma ressonância. É interessante perceber como as contribuições de R_α e R_β se encontram “misturadas” nesse resultado, não sendo possível separar uma da outra facilmente. A separação das contribuições é em geral assumida nos formalismos que usam funções de Breit-Wigner para o espalhamento. Desse resultado decorre a nova expressão para a fase da matriz T

$$\delta(s) = \tan^{-1} \left[\frac{(m_\beta^2 - s)m_\alpha\Gamma_\alpha(s) + (m_\alpha^2 - s)m_\beta\Gamma_\beta(s)}{(m_\alpha^2 - s)(m_\beta^2 - s)} \right]. \quad (4.73)$$

Há agora dois pontos em que o denominador da expressão entre colchetes diverge: $s = m_\alpha^2$ e $s = m_\beta^2$. Fenomenologicamente, pensando no sistema $\pi\pi$, R_α e R_β corresponderiam ao σ e ao $f_0(980)$. O ponto em que a fase passa por 90° seria $m_\alpha \equiv m_\sigma \approx 0,850$ GeV, enquanto que $m_\beta \equiv m_{f_0} \approx 1,3$ GeV é ponto em que $\delta(s) = 270^\circ$.

As novas expressões para $\cos \delta(s)$ e $\sin \delta(s)$ são

$$\cos \delta(s) = \frac{(m_\alpha^2 - s)(m_\beta^2 - s)}{\mathcal{E}_{2R}(s)}, \quad (4.74)$$

$$\sin \delta(s) = \frac{(m_\beta^2 - s)m_\alpha \Gamma_\alpha(s) + (m_\alpha^2 - s)m_\beta \Gamma_\beta(s)}{\mathcal{E}_{2R}(s)}, \quad (4.75)$$

com

$$\mathcal{E}_{2R}(s) = \sqrt{[(m_\alpha^2 - s)(m_\beta^2 - s)]^2 + [(m_\beta^2 - s)m_\alpha \Gamma_\alpha(s) + (m_\alpha^2 - s)m_\beta \Gamma_\beta(s)]^2}. \quad (4.76)$$

A expressão para $\tan \delta(s)$ nesse caso é

$$\tan \delta(s) = \frac{m_\alpha \Gamma_\alpha}{m_\alpha^2 - s} + \frac{m_\beta \Gamma_\beta}{m_\beta^2 - s} \quad (4.77)$$

Esses resultados nos autorizam a escrever a matriz T unitária como

$$T = \mathcal{S} \frac{16\pi}{\rho(s)} \sin \delta(s) e^{i\delta(s)}. \quad (4.78)$$

É interessante notar que novamente $\mathcal{K}$ está relacionado à $\tan \delta$ por

$$\mathcal{K} = \frac{\mathcal{S}16\pi}{\rho(s)} \left[\frac{m_\alpha \Gamma_\alpha}{m_\alpha^2 - s} + \frac{m_\beta \Gamma_\beta}{m_\beta^2 - s} \right] = \frac{\mathcal{S}16\pi}{\rho(s)} \tan \delta(s). \quad (4.79)$$

Assim concluímos que o que se pode somar é a contribuição de cada ressonância para o kernel e não amplitudes de espalhamento, como o que se faz no caso da soma de funções de Breit-Wigner.

No decaimento ressonante, em princípio, ambas as ressonâncias R_α e R_β podem ser estados intermediários do processo. Por isso, o tratamento da produção necessita de duas funções diferentes $\Pi_\alpha(s)$ e $\Pi_\beta(s)$. Seguindo esse raciocínio, a expressão para o decaimento, nos moldes da Eq. (4.1), se escreve agora

$$\langle P_a P_b P_c | M \rangle = \mathcal{A}(M \rightarrow P_a R_\alpha) \Pi_\alpha(R_\alpha \rightarrow P_b P_c) + \mathcal{A}(M \rightarrow P_a R_\beta) \Pi_\beta(R_\beta \rightarrow P_b P_c). \quad (4.80)$$

A função Π_α interpola entre o estado intermediário $R_\alpha P_a$ e o estado final $|P_a P_b P_c\rangle$, já a função Π_β faz o mesmo para o estado intermediário $R_\beta P_a$. Os diagramas para o cálculo das funções de produção estão na figura 4.9 e, segundo o que já fizemos, as expressões para $\Pi_{\alpha,\beta}(s)$ podem ser obtidas diretamente

Figura 4.9: (a) Diagramas para Π_α . A ressonância R_α é representada pela linha preta ondulada. (b) Diagramas para Π_β . A ressonância R_β é representada pela linha marrom ondulada.

$$\Pi_\alpha(s) = \frac{g_\alpha}{m_\alpha^2 - s} \cos \delta(s) e^{i\delta(s)}, \quad (4.81)$$

$$\Pi_\beta(s) = \frac{g_\beta}{m_\beta^2 - s} \cos \delta(s) e^{i\delta(s)}. \quad (4.82)$$

Usando esses resultados na expressão do decaimento ressonante obtemos

$$\langle P_a P_b P_c | M \rangle = \left[\mathcal{A}(M \rightarrow P_a R_\alpha) \frac{g_\alpha}{m_\alpha^2 - s} + \mathcal{A}(M \rightarrow P_a R_\beta) \frac{g_\beta}{m_\beta^2 - s} \right] \cos \delta(s) e^{i\delta(s)}. \quad (4.83)$$

Novamente os propagadores divergem nos pontos exatos em que $\cos \delta(s) = 0$, o que faz com que essa expressão não contenha infinitos nem zeros que não sejam físicos. Esse resultado é praticamente o mesmo que foi proposto por Schechter na Ref. [17] para o tratamento dos dados do decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$ na presença do σ e do f_0 . Mais uma vez, a contribuição das ressonâncias para a amplitude total aparece misturada de uma maneira não trivial. Na expressão para o $\cos \delta(s)$ comparece o denominador $\mathcal{E}_{2r}(s)$, que depende tanto de m_α quanto de m_β . A Eq. (4.83) também vem desautorizar a soma de duas funções de Breit-Wigner multiplicadas por termos constantes, como a que normalmente é feita no modelo isobárico.

Unitarização com dois canais

Descreveremos brevemente como tratamos um caso com dois canais acoplados na presença de uma ressonância escalar. Estamos, na prática, imaginando uma descrição do espalhamento $\pi\pi$, no qual o canal $K\bar{K}$ se manifesta. A ressonância que liga os dois canais pode ser identificada com o $f_0(980)$. Como essa ressonância se acopla tanto a $\pi\pi$ quanto

a $K\bar{K}$, processos como o mostrado na figura 4.10 são possíveis. Será importante ter em mente o sistema $\pi\pi - K\bar{K}$ pois, devido à paridade G , um estado inicial com número par de píons *nunca* pode ser levado a um estado com número ímpar de píons. Essa conservação introduz uma simplificação considerável no problema, a saber, só aparecem funções de Green de dois píons ou de dois káons. A matriz que descreve a função de Green para esse caso é então diagonal. No que diz respeito ao espalhamento, esse desenvolvimento é, em vários aspectos, similar ao feito por Oller e Oset na Ref. [13].

Figura 4.10: Exemplo de processo em que o acoplamento de canais aparece.

A generalização da função de produção para o caso de dois canais é bastante direta. Entretanto, surgem algumas dificuldades técnicas adicionais. A principal delas é uma mera complicação algébrica, pois agora o espalhamento é descrito por, de fato, uma *matriz* T que é 2×2 . As outras complicações serão discutidas à medida em que aparecerem.

Tendo em mente esse sistema, trataremos o problema do espalhamento e produção de dois canais 1 e 2. Há quatro tipos de reações possíveis: as elásticas $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ e $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$, e as inelásticas $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ e $K\bar{K} \rightarrow \pi\pi$. É importante lembrar que, mesmo para energias abaixo do limiar de produção de um par $K\bar{K}$, processos envolvendo káons virtuais podem acontecer. Usamos a identificação $1 \equiv \pi\pi$ e $2 \equiv K\bar{K}$. Nesse caso a matriz T se escreve

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.84)$$

onde introduzimos a notação $T_{1 \rightarrow 1} = T_{11}$, $T_{1 \rightarrow 2} = T_{12}$ etc. Devido à reversão temporal, o elementos T_{12} e T_{21} são iguais. Logo, a matriz T é simétrica: $T_{ij} = T_{ji}$. O problema da unitarização se resume a solucionar um sistema de equações acopladas do tipo Bethe-Salpeter, um análogo 2×2 da Eq. (4.11). Podemos representar em diagramas, de maneira semelhante ao que aparece na figura 4.5, as quatro equações a serem resolvidas. As representações para os elementos de matriz T_{11} e T_{12} aparecem na figura 4.11. Os diagramas para T_{22} são análogos aos da figura 4.11(a), enquanto que os diagramas para T_{21} são análogos aos da figura 4.11(b). Introduzimos por meio desta última figura o kernel da interação $\mathcal{K}_{ij}$, que passa a ser representado por uma matriz 2×2 , e também simétrica.

Esses diagramas traduzem-se no seguinte sistema de equações acopladas

$$T_{11} = \mathcal{K}_{11} + \mathcal{K}_{11}(-\bar{\Omega}_{11})T_{11} + \mathcal{K}_{12}(-\bar{\Omega}_{22})T_{21}, \quad (4.85)$$

$$T_{22} = \mathcal{K}_{22} + \mathcal{K}_{22}(-\bar{\Omega}_{22})T_{22} + \mathcal{K}_{21}(-\bar{\Omega}_{11})T_{12}, \quad (4.86)$$

$$T_{12} = \mathcal{K}_{12} + \mathcal{K}_{11}(-\bar{\Omega}_{11})T_{12} + \mathcal{K}_{12}(-\bar{\Omega}_{22})T_{22}, \quad (4.87)$$

$$T_{21} = \mathcal{K}_{21} + \mathcal{K}_{22}(-\bar{\Omega}_{22})T_{21} + \mathcal{K}_{21}(-\bar{\Omega}_{11})T_{11}. \quad (4.88)$$

Se introduzirmos uma matriz diagonal para a função de Green de dois corpos $-\bar{\Omega}$ tal que

$$-\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} -\bar{\Omega}_{11} & 0 \\ 0 & -\bar{\Omega}_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.89)$$

podemos reescrever as Eqs. (4.85)-(4.88) usando uma forma matricial

$$T = \mathcal{K} + \mathcal{K}(-\bar{\Omega})T. \quad (4.90)$$

Figura 4.11: (a) Diagramas para T_{11} . (b) Diagramas para T_{12} .

Nessa notação, o sistema de equações passa a ter uma solução formal dada por

$$T = (\mathbb{1} + \mathcal{K}\bar{\Omega})^{-1}\mathcal{K}, \quad (4.91)$$

o que às vezes é representado por

$$T = \frac{\mathcal{K}}{\mathbb{1} + \mathcal{K}\bar{\Omega}}. \quad (4.92)$$

Portanto, para determinarmos a matriz T basta encontrar a matriz inversa de

$$(\mathbb{1} + \mathcal{K}\bar{\Omega}) = \begin{pmatrix} 1 + \mathcal{K}_{11}\bar{\Omega}_{11} & \mathcal{K}_{12}\bar{\Omega}_{22} \\ \mathcal{K}_{21}\bar{\Omega}_{11} & 1 + \mathcal{K}_{22}\bar{\Omega}_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.93)$$

Isso pode ser feito com o auxílio de um computador sem dificuldades. Dessa forma, obtemos os elementos de matriz T_{ij} em função do kernel $\mathcal{K}_{ij}$ e das funções de Green $\bar{\Omega}_{ii}$ (sem soma). Como um exemplo, o resultado que obtemos para T_{11} é

$$T_{11} = \frac{(1 + \mathcal{K}_{22}\bar{\Omega}_{22})\mathcal{K}_{11} - \mathcal{K}_{12}^2\bar{\Omega}_{22}}{1 + \mathcal{K}_{11}\bar{\Omega}_{11}(1 + \mathcal{K}_{22}\bar{\Omega}_{22}) + \bar{\Omega}_{22}(\mathcal{K}_{22} - \mathcal{K}_{12}^2\bar{\Omega}_{22})}, \quad (4.94)$$

que no limite de um só canal se reduz à expressão (4.21).

Uma solução desse tipo encerra o problema do espalhamento. Se quisermos terminar de fazer o paralelo que vimos fazendo com o tratamento em um canal, escrevemos o kernel $\mathcal{K}$ como

$$\mathcal{K}_{ij} = \frac{\gamma_{ij}^2(s)}{m_R^2 - s}. \quad (4.95)$$

Num decaimento envolvendo a ressonância escalar que se acopla com os mésons dos canais 1 e 2, há agora duas possibilidades para o estado final: 1 ou 2. Por isso, a função de produção passa a ser escrita como um vetor

$$\Pi(s) = \begin{pmatrix} \Pi_1 \\ \Pi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.96)$$

Novamente, com diagramas análogos àqueles da figura 4.4, obtemos equações para cada um dos elementos do vetor $\Pi(s)$. Os diagramas aparecem na figura 4.12, e traduzem-se, segundo o já exposto, nas seguintes duas equações

$$\Pi_1(s) = \frac{g_1}{m_R^2 - s} \left[1 + (-\bar{\Omega}_{11}T_{11}) + \frac{g_2}{g_1}(-\bar{\Omega}_{22}T_{21}) \right], \quad (4.97)$$

$$\Pi_2(s) = \frac{g_2}{m_R^2 - s} \left[1 + (-\bar{\Omega}_{22}T_{22}) + \frac{g_1}{g_2}(-\bar{\Omega}_{11}T_{12}) \right]. \quad (4.98)$$

onde g_i representa o acoplamento entre a ressonância e o canal i . Se agora introduzirmos um *vetor de produção* de mésons $P(s)$, como feito por exemplo em [43], tal que

$$P(s) = \frac{1}{m_R^2 - s} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}, \quad (4.99)$$

as equações para Π_i escrevem-se

$$\Pi_1(s) = P_1(s) + P_1(s)(-\bar{\Omega}_{11})T_{11} + P_2(s)(-\bar{\Omega}_{22})T_{21}, \quad (4.100)$$

$$\Pi_2(s) = P_2(s) + P_2(s)(-\bar{\Omega}_{22})T_{22} + P_1(s)(-\bar{\Omega}_{11})T_{12}. \quad (4.101)$$

Novamente recorrendo a uma notação matricial, temos, em termos da matriz T ,

$$\Pi = P(\mathbb{1} - T\bar{\Omega}). \quad (4.102)$$

Figura 4.12: (a) Diagramas para Π_1 . (b) Diagramas para Π_2 .

Como já obtivemos a solução do espalhamento, essa última equação fornece $\Pi(s)$. Entretanto, para completar o desenvolvimento feito aqui é interessante expressar (4.102) numa outra forma. Para isso, notamos que a equação matricial do espalhamento, Eq. (4.90), nos autoriza a escrever

$$T = \mathcal{K}(\mathbb{1} - \bar{\Omega}T). \quad (4.103)$$

Se utilizarmos a simetria de T , $\mathcal{K}$ e Ω podemos escrever

$$\mathcal{K}(-\bar{\Omega})T = T(-\bar{\Omega})\mathcal{K}, \quad (4.104)$$

e então

$$T = (\mathbb{1} - T\bar{\Omega})\mathcal{K}. \quad (4.105)$$

Da comparação dessa equação com a solução (4.91) tiramos

$$(\mathbb{1} - T\bar{\Omega}) = (\mathbb{1} + \mathcal{K}\bar{\Omega})^{-1}. \quad (4.106)$$

A conseqüente inserção dessa igualdade na Eq. (4.102) para $\Pi(s)$ nos dá

$$\Pi = \frac{P}{\mathbb{1} + \mathcal{K}\bar{\Omega}}, \quad (4.107)$$

novamente em total analogia com o caso de um canal. O denominador universal $(\mathbb{1} + \mathcal{K}\bar{\Omega})$, tal qual introduzido por Pennington [43], aparece também em um tratamento de canais acoplados. Essa última expressão reduz-se à Eq. (4.47) no limite de um canal.

Uma dificuldade que surge nesse caso é a de definir o ponto de subtração de cada uma das funções $\bar{\Omega}_{ii}(s)$. No caso de um canal, a escolha que fizemos, $\Re\bar{\Omega}(m_R^2) = 0$, é diretamente inspirada no formalismo de renormalização de BPHZ. A existência de dois canais introduz uma complicação no denominador de T que torna não trivial a escolha desse ponto. Além disso, em princípio, há dois pontos, um para cada uma das funções $\bar{\Omega}_{11}$ e $\bar{\Omega}_{22}$. A abordagem de matriz K contorna esse problema, por assumir $\Re\bar{\Omega}_{ii} = 0$.

4.3 Resumo dos resultados

Este capítulo engloba os principais desenvolvimentos formais do trabalho. Nos capítulos seguintes, exploramos algumas de suas conseqüências fenomenológicas e discutimos aproximações para os casos mais gerais que tratamos aqui. Nesse ponto, convém sumarizar os principais resultados que obtivemos.

O espalhamento em teoria de campos é regido pela equação de Bethe-Salpeter que se escreve

$$T = \mathcal{K} + \mathcal{K}(-\bar{\Omega})T. \quad (4.108)$$

A função de Green $\bar{\Omega}$ está associada à integral de um *loop* no canal s que decompusemos

$$\bar{\Omega} = \bar{R}(s) + iI(s). \quad (4.109)$$

Mostramos que é possível escrevê-la explicitamente como

$$\bar{\Omega} = -\frac{1}{\mathcal{S}16\pi^2} \left\{ \Re [L(s) - L(m_R^2)] + i \Im L(s) \right\}. \quad (4.110)$$

A função $L(s)$ tem uma expressão fechada dada nas Eq. (4.17)-(4.19). A parte imaginária de $\bar{\Omega}$ é especialmente simples e vale

$$I(s) = -\frac{\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi} \Theta(s - s_0). \quad (4.111)$$

De maneira muito geral, o kernel $\mathcal{K}$ pode ser parametrizado, na presença de uma ressonância como,

$$\mathcal{K} \equiv \frac{\gamma^2(s)}{m_R^2 - s}. \quad (4.112)$$

Somando a série perturbativa da Eq. de BS, usando nossa função de Green e a parametrização do kernel, mostramos que a matriz T se escreve

$$T = \mathcal{S} \frac{16\pi}{\rho(s)} \frac{m_R \Gamma(s)}{\mathcal{M}^2(s) - s - i m_R \Gamma(s)}. \quad (4.113)$$

As funções $\mathcal{M}$ e Γ são, respectivamente a massa e a largura dinâmicas dadas por

$$\mathcal{M}^2(s) \equiv m_R^2 + \gamma^2(s) \bar{R}(s), \quad (4.114)$$

$$m_R \Gamma(s) \equiv \frac{\gamma^2(s) \rho(s)}{\mathcal{S}16\pi}. \quad (4.115)$$

Podemos calcular a fase de T e temos

$$\tan \delta(s) = \frac{m_R \Gamma(s)}{\mathcal{M}^2(s) - s}, \quad (4.116)$$

e assim determinamos $\sin \delta$ e $\cos \delta$

$$\sin \delta(s) = \frac{m_R \Gamma(s)}{\mathcal{E}(s)}, \quad (4.117)$$

$$\cos \delta(s) = \frac{(\mathcal{M}^2 - s)}{\mathcal{E}(s)}, \quad (4.118)$$

onde usamos

$$\mathcal{E}(s) = \sqrt{(\mathcal{M}^2 - s)^2 + [m_R \Gamma(s)]^2}. \quad (4.119)$$

Nossa abordagem generaliza a aproximação de matriz K , que é recuperada fazendo

$$\Omega \rightarrow \Omega_K = iI(s) = -i \frac{\rho(s)}{\mathcal{S}16\pi}. \quad (4.120)$$

Ou, de maneira equivalente, substituindo em todos os resultados

$$\mathcal{M}^2 \rightarrow m_R^2. \quad (4.121)$$

Introduzimos a função de produção $\Pi(s)$ para descrever o decaimento ressonante de um méson pesado em três pseudoescalares. Trabalhamos com o caso de uma ressonância escalar de massa m_R . A função Π admite várias formas equivalentes, das quais destacamos

$$\begin{aligned} \textbf{forma 1: } \Pi(s) &= \frac{g}{\mathcal{M}^2 - s} \cos \delta(s) e^{i\delta(s)}. \\ \textbf{forma 2: } \Pi(s) &= \frac{g}{m_R \Gamma} \sin \delta(s) e^{i\delta(s)}, \\ \textbf{forma 3: } \Pi(s) &= g \frac{\cos \delta(s)}{m_R^2 - s} \left[1 + \frac{\tan \delta(s)}{\tan \omega(s)} \right] e^{i\delta(s)}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

A primeira delas tem o mérito de evidenciar o cancelamento existente entre o zero do $\cos \delta(s)$ e o pólo do propagador da ressonância. A segunda exhibe claramente os laços de Π e T . A terceira representa uma forma de relacionar o módulo de Π à sua fase e à fase da integral de *loop* $\bar{\Omega}$, e ainda permite uma quantificação do desvio existente entre nosso resultado e aquele obtido em matriz K .

Nossa função de produção pode ser generalizada de modo a incorporar duas ressonâncias e/ou dois canais. O caso de duas ressonâncias corresponde a uma mudança no kernel da interação. Empregando a mesma solução da equação de BS o resultado que obtemos para T é

$$T = \frac{\mathcal{S}16\pi}{\rho(s)} \frac{(m_\beta^2 - s)m_\alpha \Gamma_\alpha(s) + (m_\alpha^2 - s)m_\beta \Gamma_\beta(s)}{(m_\alpha^2 - s)(m_\beta^2 - s) - i[(m_\beta^2 - s)m_\alpha \Gamma_\alpha(s) + (m_\alpha^2 - s)m_\beta \Gamma_\beta(s)]}. \quad (4.123)$$

É importante notar que a contribuição de cada uma das ressonâncias aparece interligada de maneira nada trivial. O resultado para T é bastante distinto da soma simples

das amplitudes na presença da cada uma das ressonâncias separadamente. A fase do espalhamento agora é dada por

$$\tan \delta(s) = \frac{m_\alpha \Gamma_\alpha}{m_\alpha^2 - s} + \frac{m_\beta \Gamma_\beta}{m_\beta^2 - s}. \quad (4.124)$$

Portanto, no espalhamento com duas ressonâncias, aquilo que se pode somar é a contribuição de cada uma delas para o kernel. A soma de funções de Breit-Wigner independentes não tem fundamentação teórica.

Nesse caso há duas funções de produção, uma para cada ressonância. A amplitude de decaimento se escreve

$$\langle P_a P_b P_c | M \rangle = \mathcal{A}(M \rightarrow P_a R_\alpha) \Pi_\alpha(R_\alpha \rightarrow P_b P_c) + \mathcal{A}(M \rightarrow P_a R_\beta) \Pi_\beta(R_\beta \rightarrow P_b P_c), \quad (4.125)$$

onde

$$\Pi_\alpha(s) = \frac{g_\alpha}{m_\alpha^2 - s} \cos \delta(s) e^{i\delta(s)}, \quad (4.126)$$

$$\Pi_\beta(s) = \frac{g_\beta}{m_\beta^2 - s} \cos \delta(s) e^{i\delta(s)}. \quad (4.127)$$

No caso de dois canais, a matriz T passa a ser 2×2 . As equações de BS acopladas admitem uma forma matricial, cuja solução passa a ser escrita

$$T = \frac{\mathcal{K}}{\mathbb{1} + \mathcal{K} \bar{\Omega}}. \quad (4.128)$$

O kernel $\mathcal{K}$ e a função de Green $\bar{\Omega}$ são matrizes simétricas 2×2 . A função de produção nesse contexto passa a ser um vetor de duas componentes, cada uma delas correspondendo à produção de um dos dois canais. Mostramos que, também na forma matricial, valem as relações

$$\Pi = P(\mathbb{1} - T \bar{\Omega}), \quad (4.129)$$

$$\Pi = \frac{P}{\mathbb{1} + \mathcal{K} \bar{\Omega}}. \quad (4.130)$$

Onde o vetor P é dado por

$$P(s) = \frac{1}{m_R^2 - s} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}. \quad (4.131)$$

Capítulo 5

Modelos quirais

No capítulo anterior, o kernel da equação de Bethe-Salpeter é genérico. Todavia, em problemas concretos é preciso determinar $\mathcal{K}$ e, como sabemos, soluções exatas não existem. Em energias baixas, há duas alternativas para se fazer cálculos realistas: a QCD na rede e teorias efetivas. No caso das interações $\pi\pi$, a primeira delas ainda está muito aquém da segunda. Teorias efetivas com simetria quiral constituem hoje a forma mais confiável de se descrever, a baixas energias, sistemas envolvendo píons, káons e núcleons, bem como os estados ressonantes como o σ , $\rho(770)$ e, no setor nucleônico, o Δ .

No nosso caso, conhecer o kernel da interação equivale a fazermos um modelo para a interação $\pi\pi\sigma$ e assim obtermos uma forma explícita para a função $\gamma^2(s)$ dada na Eq. (4.14). A simetria quiral é um ingrediente fundamental das interações fortes nessa escala de energia, e deve estar presente numa tal descrição.

5.1 Teorias efetivas

O espectro hadrônico acima de 1 GeV apresenta uma miríade de estados. Entretanto, poucas são as partículas cuja massa está abaixo desse limite [46]. As mais leves são os píons ($m_\pi \approx 139$ MeV), káons ($m_K \approx 495$) MeV e o η ($m_\eta = 550$ MeV). A recente inclusão do σ entre os mais leves ainda é debatida, e seu papel no espectro hadrônico ainda não foi totalmente desvendado [14, 47].

Existe hoje uma teoria tida como fundamental para as interações fortes: a QCD. Esta é exatamente simétrica por um grupo de Lie dito de “cor” $SU(3)_c$. O valor da constante de acoplamento e o caráter não abeliano desta teoria impedem, contudo, seu emprego a baixas energias. A tarefa de estabelecer com precisão a relação entre os graus de liberdade fundamentais, que são os *quarks* e *glúons*, e os graus de liberdade do espectro, os mésons e

bárions, é muito complexa. A estratégia para contornar esse problema, é o uso de teorias efetivas.

Segundo uma conjectura de Weinberg [2]

“Quantum field theory has no content besides unitarity, analyticity, cluster decomposition and symmetries.”

Essa idéia norteia o programa de teorias efetivas, pois, se construirmos uma lagrangiana com os graus de liberdade relevantes para uma certa escala, e que *respeite* as simetrias fundamentais, obteremos resultados condizentes com a teoria subjacente.

Em nossa abordagem, os graus de liberdade relevantes são os mésons pseudoescalares e ressonâncias escalares. Em um mesmo tipo de formalismo, é possível também incluir ressonâncias vetoriais, como o $\rho(770)$ [48], entretanto, como estamos interessados na onda S , as ressonâncias de *spin* mais alto não são consideradas.

Portanto, para entender as interações hadrônicas abaixo de 1 GeV, temos de estudar as simetrias da QCD nesse regime. Se quisermos construir um teoria efetiva para os hádrons que seja baseada na teoria fundamental, ela deverá exibir as mesmas simetrias. Com uma tal teoria, a simetria controla as interações e podemos, em alguns casos, até mesmo sondar o espectro da QCD.

A lagrangiana da QCD exibe a simetria de Poincaré, bem como as simetrias de CPT . As demais simetrias da teoria são determinadas por grupos de simetria conhecidos com grupos de Lie unitários, cujos elementos podem sempre ser representados como [8, 49]

$$U(\boldsymbol{\alpha}) = e^{i\alpha_k(x)Q_k}, \quad (5.1)$$

onde os geradores Q_k satisfazem a álgebra do grupo

$$[Q_i, Q_j] = ic_{ijk}Q_k. \quad (5.2)$$

As constantes c_{ijk} são as *constantes de estrutura*, que definem o grupo. A ação infinitesimal de uma transformação desse tipo num campo genérico ϕ_i é dada por

$$\phi_i \rightarrow \phi'_i \simeq \phi_i + i\alpha_k(t_k)_{ij}\phi_j, \quad (5.3)$$

onde t_k é uma realização matricial de Q_k tal que [8]

$$[t_i, t_j] = ic_{ijk}t_k. \quad (5.4)$$

Simetrias são entendidas como transformações que deixam invariante a ação

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)), \quad (5.5)$$

onde $\mathcal{L}$ é uma densidade de lagrangiana. Para entender o efeito da invariância do sistema sob um grupo de transformações, emprega-se, em teoria de campos, o teorema de Noether. Podemos enunciar o teorema como: “todo grupo de simetria que altera a lagrangiana por, no máximo, uma divergência, tem associada a ele uma corrente conservada” [38]. Conhecendo a ação da transformação no campo, podemos calcular a variação da lagrangiana $\mathcal{L}(\phi_i)$. Temos

$$\delta\mathcal{L} = [\alpha_k(x)\partial_\mu j_k^\mu(x) + (\partial_\mu\alpha_k(x))j_k^\mu(x)], \quad (5.6)$$

onde

$$j_k^\mu(x) = -i(t_k)_{ij} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}. \quad (5.7)$$

E assim obtemos uma corrente tal que [50]

$$j_k^\mu = \frac{\partial(\delta\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\alpha_k)}, \quad (5.8)$$

$$\partial_\mu j_k^\mu = \frac{\partial(\delta\mathcal{L})}{\partial\alpha_k}. \quad (5.9)$$

Se considerarmos o caso de transformações globais (isto é, no caso em que os α_k não dependem do ponto do espaço-tempo x), temos $\delta\mathcal{L} = 0$ e

$$\partial_\mu j_k^\mu = 0, \quad (5.10)$$

que exprime a conservação da corrente.

5.1.1 Simetria quiral

Segundo a Eq. (5.5), para estudar as simetrias da QCD, bem como suas correntes conservadas, temos que conhecer a lagrangiana da teoria. A lagrangiana da QCD pode ser escrita [50]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu)q_f - m_f\bar{q}_fq_f - \frac{1}{2}\text{Tr}(G_{\mu\nu}G^{\mu\nu}). \quad (5.11)$$

Nessa equação o campo de cada quark é um tripleto de cor

$$q_f = \begin{pmatrix} q_{f,r} \\ q_{f,g} \\ q_{f,b} \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

onde os índices r , g e b representam as três cores possíveis. Na lagrangiana Eq. (5.11), está subentendida uma soma sobre o índice f que representa cada um dos seis sabores de

quarks: u, d, s, c, b e t . Temos ainda

$$D_\mu q_f = (\partial_\mu - igA_\mu)q_f, \quad (5.13)$$

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu], \quad (5.14)$$

$$A_\mu = \frac{A_\mu^a \lambda^a}{2}. \quad (5.15)$$

A derivada covariante D_μ é decorrente do fato da QCD ser uma teoria de calibre com simetria exata $SU(3)$. Os campos A_μ^a com $a = \{1, \dots, 8\}$, representam os oito glúons, bósons de calibre responsáveis pela interação. O último termo da Eq. (5.11) responde pela autointeração dos glúons, e advém do caráter não abeliano do grupo de simetria $SU(3)$. As matrizes λ^a são as matrizes de Gell-Mann usuais para o grupo $SU(3)$, que podem ser encontradas em [8].

A já referida separação de escala no espectro hadrônico está relacionada ao valor (acidental) da massa dos diferentes quarks. Os três mais leves têm massa bastante menor que 1 GeV, já a massa dos três mais pesados está acima desse valor. Os processos de baixa energia, como os que nos interessam, são amplamente dominados pelos quarks u, d e s de massas: $m_u \approx 5$ MeV. $m_d \approx 9$ MeV e $m_s \approx 175$ MeV. Nesta seção vamos nos restringir apenas a esses três sabores.

Discutimos nessa parte as simetrias da QCD no regime de baixas energias. O que apresentamos aqui é, em grande medida, baseado na dissertação de mestrado de Gabriel Zarnauskas [49] e no livro de Cheng & Li [8]. Como nessa escala de energia os glúons não se manifestam diretamente, a lagrangiana que vamos considerar é

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} \cong \bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu)q_f - m_f \bar{q}_f q_f. \quad (5.16)$$

As simetrias do termo cinético e do termo de massa são distintas, por isso as estudamos separadamente.

Num primeiro momento vamos estudar as simetrias do termo cinético

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{cin}} = \bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu)q_f. \quad (5.17)$$

Esse termo é invariante por transformações do grupo $U(1)_V$, que podem ser escritas como

$$U(\alpha) = e^{i\alpha Q^V}. \quad (5.18)$$

A ação infinitesimal dessas transformações sobre o campo dos quarks é dada por

$$\delta_U^V q_f = -i\alpha q_f, \quad (5.19)$$

$$\delta_U^V \bar{q}_f = i\alpha \bar{q}_f, \quad (5.20)$$

o que nos dá

$$\delta_U^V \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{cin}} = 0. \quad (5.21)$$

Essa simetria será exata mesmo com a inclusão do termo de massa dos quarks. A invariância sobre transformações do tipo $U(1)_V$ é responsável pela conservação do número bariônico na QCD.

As transformações especiais e unitárias do grupo $SU(3)_V$, que podem ser escritas como

$$U(\boldsymbol{\alpha}) = e^{i\alpha_k Q_k^V}, \quad (5.22)$$

também deixam invariantes o termo cinético. As cargas dessas transformações obedecem a álgebra deste grupo

$$[Q_i, Q_j] = if_{ijk} Q_k \quad (5.23)$$

onde f_{ijk} , as constantes de estrutura do grupo $SU(3)$, podem ser encontradas em [28].

Outra classe de transformações são as que alteram a paridade. A transformações desse tipo damos o rótulo A , de axial. Em analogia com a Eq. (5.18) escrevemos as transformações do grupo¹ $U(1)_A$ como

$$U(\boldsymbol{\beta}) = e^{i\beta Q^A \gamma_5}, \quad (5.24)$$

onde a matriz γ_5 implementa a transformação de paridade. Se calcularmos a variação da lagrangiana devido a essas transformações novamente encontraremos [49]

$$\delta_U^A \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{cin}} = 0. \quad (5.25)$$

As transformações do grupo $SU(3)_A$

$$U(\boldsymbol{\beta}) = e^{i\beta_k Q_k^A \gamma_5} \quad (5.26)$$

também deixam invariante $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{cin}}$.

Portanto, o termo cinético da lagrangiana é invariante por transformações $SU(3)_V$, $SU(3)_A$, $U(1)_V$ e $U(1)_A$. As cargas das transformações especiais e unitárias satisfazem a álgebra [8]

$$[Q_i^V, Q_j^V] = if_{ijk} Q_k^V, \quad (5.27)$$

$$[Q_i^V, Q_j^A] = if_{ijk} Q_k^A, \quad (5.28)$$

$$[Q_i^A, Q_j^A] = if_{ijk} Q_k^V. \quad (5.29)$$

¹A rigor as transformações axiais não formam um grupo, pois não respeitam a propriedade de fechamento [49]. Entretanto, vamos empregar esse abuso de linguagem.

Se introduzirmos as combinações

$$Q_i^L = \frac{1}{2} (Q_i^V - Q_i^A), \quad (5.30)$$

$$Q_i^R = \frac{1}{2} (Q_i^V + Q_i^A), \quad (5.31)$$

desacoplamos a álgebra e obtemos

$$[Q_i^L, Q_j^L] = if_{ijk} Q_k^L, \quad (5.32)$$

$$[Q_i^R, Q_j^R] = if_{ijk} Q_k^R, \quad (5.33)$$

$$[Q_i^L, Q_j^R] = 0. \quad (5.34)$$

As cargas Q_i^L geram a álgebra $SU(3)_L$, enquanto que as cargas Q_i^R geram a álgebra $SU(3)_R$. A união das duas é a chamada *álgebra quiral* $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$. Nessa linguagem, o termo cinético da lagrangiana clássica da QCD é invariante sob $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_{L+R} \otimes U(1)_{L-R}$. Entretanto, na teoria quantizada, devido a um efeito conhecido como anomalia quiral [38], a corrente associada à invariância por $U(1)_A$ não se conserva. Por isso, o termo cinético da QCD enquanto teoria quântica de campos é invariante sob $SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_{L+R}$.

Passamos a estudar as simetrias do termo de massa de $\mathcal{L}_{QCD}$ com o objetivo de determinar se a simetria quiral sobrevive após a inclusão deste termo. O termo de massa da lagrangiana Eq. (5.11) é

$$\mathcal{L}_{QCD}^m = m_f \bar{q}_f q_f. \quad (5.35)$$

Se tomarmos as transformações do tipo $U(1)_V$ obtemos

$$\delta_U^V \mathcal{L}_{QCD}^m = (i\alpha \bar{q}_f) m_f q_f + \bar{q}_f m_f (-i\alpha q_f) = 0. \quad (5.36)$$

Isso mostra que a simetria $U(1)_V$ é exata na QCD e a conservação do número bariônico não é afetada pelo termo de massa.

A ação das transformações $SU(3)_V$ sobre o termo de massa fornece a seguinte variação na lagrangiana [49]

$$\delta_{SU}^V \mathcal{L}_{QCD}^m = i\alpha_l (t_l)_{jk} \bar{q}_f q_k (m_k - m_j). \quad (5.37)$$

Essa última equação mostra que a simetria será exata se $m_k = m_j$. Na natureza, ela é realizada no modo conhecido como de Wigner-Weyl. Isso significa que não só a lagrangiana será invariante, também o será o estado de mais baixa energia, que é identificado com o vácuo. Numa teoria em que a lagrangiana (e por conseqüência o hamiltoniano) e o vácuo exibem uma dada simetria, o espectro é degenerado.

O fato de aparecer o termo $(m_k - m_j)$ na Eq. (5.37) mostra que essa simetria é quebrada na prática, pois, em geral, $m_k \neq m_j$. Contudo, existe uma hierarquia nessa quebra de simetria. A simetria é quebrada mais fracamente se considerarmos apenas os dois quarks mais leves. A inclusão da estranheza acentua a quebra e a partir do quark c , a quebra é tão grande que não faz mais sentido falar em simetria.

Se considerarmos a QCD com apenas dois sabores, vemos que m_u e m_d são bastante próximas, portanto, o isospin $SU(2)$ deve ser uma boa simetria. No espectro hadrônico, isso se reflete no multipletto dos três píons e no dubleto do núcleon, por exemplo. Podemos então estimar o quão bem obedecida é a simetria se tomarmos as diferenças de massa dentro de um mesmo multipletto e a dividirmos pela massa média $\hat{m}$. No caso do pión temos $\frac{\Delta m_\pi}{\hat{m}_\pi} \approx 3\%$ e no caso do núcleon temos $\frac{\Delta m_N}{\hat{m}_N} \approx 0,1\%$. Isso indica que, embora quebrada, ainda estamos no limite em que a simetria se manifesta na natureza.

A simetria $SU(3)$ também pode ser explorada, embora ela seja mais fortemente quebrada. Do ponto de vista da QCD, esse fato é devido à massa do quark s , que é sensivelmente maior que m_u e m_d . Se estendermos os multipletos de isospin para $SU(3)$ temos, no caso bariônico por exemplo, $\frac{\Delta m}{\hat{m}} \approx 16\%$. O multipletto dos mésons pseudo escalares passa a incorporar, além do pión, o káon e o η . Nesse caso, a quebra da simetria é muito mais acentuada, mas ainda trabalhamos num regime em que podemos explorar algumas de suas conseqüências.

Já as transformações $SU(3)_A$ resultam em

$$\delta_{SU}^A \mathcal{L}_{\text{QCD}}^m = i\beta_l(t_l)_{jk} \bar{q}_j \gamma_5 q_k (m_k + m_j). \quad (5.38)$$

Por sua vez, a Eq. (5.38) mostra que a simetria por transformações axiais é exata somente se $m_k = m_j = 0$. De fato, os quarks u , d e s têm massa não nula, como já explicitado. Entretanto, frente à escala do espectro hadrônico podemos considerar m_u , m_d e m_s nulas em primeira aproximação. Portanto, a simetria axial é quebrada pelo termo de massa dos quarks u , d e s .

Isso nos permite afirmar que a QCD tem uma simetria quiral $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$ aproximada, quebrada explicitamente pela massa dos quarks mais leves. Novamente, existe uma hierarquia na quebra explícita pois, para m_u e m_d , a aproximação de massa nula é melhor. Portanto, para esses dois sabores a quebra deve ser um pequeno efeito. A inclusão do quark s faz com que a quebra seja mais acentuada. No limite $m_u \rightarrow 0$, $m_d \rightarrow 0$ e $m_s \rightarrow 0$, a simetria é exata.

Nesse ponto intervém novamente a questão da realização da simetria. Caso a simetria quiral aproximada da QCD seja realizada no modo de Wigner-Weyl, como a simetria

$SU(3)_V$, ela colocaria partículas com paridades opostas no mesmo pé de igualdade. Entretanto, não se observam multipletos degenerados mas com paridades opostas. Isso indica que há uma quebra espontânea da simetria quiral. Por quebra espontânea entendemos que a lagrangiana, e portanto a hamiltoniana, são invariantes quirais (aproximados), enquanto que o vácuo da teoria não o será. Isso faz com que, embora presente no hamiltoniano, a simetria não se manifeste na forma de degenerescências adicionais na teoria. Esse é o chamado modo de Nambu-Goldstone de realização da simetria.

No limite de simetria exata, pelo teorema de Goldstone, a quebra espontânea de simetria é acompanhada, sempre, do aparecimento dos *bósons de Goldstone*, que têm massa nula.

Em resumo, a QCD possui uma simetria exata $U(1)_V$ que leva à conservação do número bariônico. Existe uma simetria aproximada $SU(3)_V$ que gera multipletos quase degenerados em massa. Além dela, $\mathcal{L}_{QCD}$ exibe, a baixas energias, uma simetria quiral $SU(3)_R \otimes SU(3)_L$. Na natureza, essa simetria é quebrada espontaneamente ou, em outras palavras, é realizada no modo de Nambu-Goldstone. Por isso ela não leva a uma degenerescência espectral, mas ainda governa as interações. Associados a essa quebra aparecem, no limite de simetria exata, bósons de Goldstone.

No contexto das teorias efetivas quirais, eles são identificados com os oito mésons pseudoescalares leves ($\pi^\pm$, π^0 , $K^\pm$, K^0 e η), que têm massa relativamente pequena. O que queremos então é descrever as interações dos pseudoescalares decorrentes da quebra da simetria quiral. Na prática, eles não serão sem massa e adotaremos a nomenclatura *pseudo bósons de Goldstone*.

A seguir apresentamos dois modelos em que a simetria quiral é realizada. Eles serão usados, na seqüência, no estudo da interação $\pi\pi\sigma$. Como não vamos incluir o acoplamento de canais, não vamos considerar os káons e o η , vamos, pois, nos restringir ao caso $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$.

5.1.2 Modelo σ linear

O méson σ fenomenológico possui os números quânticos do vácuo. Historicamente, o primeiro modelo no qual uma partícula desse tipo apareceu é o chamado *modelo σ linear*, ou simplesmente σ -L, que tornou-se clássico [3, 4]. Hoje, esse modelo é paradigmático em teoria de campos no estudo da quebra espontânea de simetria. Foi seu sucesso que motivou, num primeiro momento, a busca experimental pelo σ . O modelo é, ainda hoje,

uma referência importante e um ponto de partida para se entender o méson σ .

Nele, implementa-se a simetria quiral $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ para a descrição da interação $\pi\pi\sigma$. Esse modelo data da década de 60 e foi desenvolvido, entre outros, por Gell-Mann e Levy. A inclusão de um campo escalar-isoescalar σ é uma forma de construir uma lagrangiana para as interações piônicas que respeite a simetria quiral aproximada da QCD. No nosso caso, esse modelo apresenta como vantagem o fato de incluir naturalmente o σ . Historicamente, embora ele gere resultados coerentes com os experimentos, o modelo foi praticamente abandonado. Seu renascimento veio com a (re)descoberta do σ pela E791, que deu um forte apoio à idéia da realização da simetria quiral com o auxílio de um méson escalar. De fato, alguns autores, como N. Achasov, acreditam que a descoberta do σ indica que o modelo σ -L é a melhor realização efetiva da QCD a baixas energias [51].

O modelo descreve a interação do isotripleto de píons $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ pseudoescalares com um méson escalar-isoescalar σ . O escalar é fundamental para a realização da simetria quiral nesse contexto, e é conhecido como parceiro quiral do pión.

Para as transformações de isospin $SU(2)_V$ temos², usando $Q_i^V = T_i$

$$\delta^V \pi_a = -i\alpha_b [T_b, \pi_a] = -i(\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi})_a, \quad (5.39)$$

$$\delta^V \sigma = -i\alpha_b [T_b, \sigma] = 0, \quad (5.40)$$

pois o σ é um isoescalar.

Como as cargas axiais mudam a paridade dos campos, as transformações $SU(2)_A$ levam os píons em σ em vice-versa. Elas são dadas por

$$\delta^A \pi_a = -i\beta_b [Q_b^A, \pi_a] = (\boldsymbol{\beta} \sigma)_a, \quad (5.41)$$

$$\delta^A \sigma = i\beta_b [Q_b^A, \sigma] = -\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi}. \quad (5.42)$$

Para construir uma lagrangiana invariante por ambas as transformações, podemos explorar o isomorfismo existente entre $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ e o grupo de rotação em quatro dimensões $SO(4)$. Isso permite entender o triplete dos píons mais o σ como um vetor $v = (\boldsymbol{\pi}, \sigma)$ nesse espaço, e o invariante deve corresponder à norma do vetor (ou potências dela). O cálculo de δ^A e δ^V da combinação $(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)$ fornece

$$\delta^A (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) = 2(\sigma \delta^A \sigma + \boldsymbol{\pi} \cdot \delta^A \boldsymbol{\pi}) = 2\sigma(-\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\pi} + \boldsymbol{\pi} \cdot \boldsymbol{\beta}) = 0, \quad (5.43)$$

$$\delta^V (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) = 2(\sigma \delta^V \sigma + \boldsymbol{\pi} \cdot \delta^V \boldsymbol{\pi}) = 2\boldsymbol{\pi} \cdot (\boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\pi}) = 0. \quad (5.44)$$

²É útil lembrar que as constantes de estrutura do grupo $SU(2)$ são dadas pelos elementos do símbolo totalmente antissimétrico ϵ_{ijk} . Daí o aparecimento de produtos vetoriais.

Portanto, qualquer potência de $(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)$ é um invariante quiral. Isso nos permite escrever uma langrangiana de interação geral e invariante na forma

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \sum_n c_n (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^n, \quad (5.45)$$

onde c_n são constantes quaisquer. Se tomarmos a langrangiana com produtos de até quatro campos temos

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = c_1 (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + c_2 (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2. \quad (5.46)$$

O primeiro termo deverá ser responsável pelas massas das partículas, pois é quadrático nos campos do pión e do σ . O segundo será um termo de interação. O tratamento do termo cinético da lagrangiana é análogo se usarmos o vetor em $SO(4)$. O termo cinético é obtido de $\partial_\mu v = (\partial_\mu \boldsymbol{\pi}, \partial_\mu \sigma)$ e o resultado também é um invariante

$$\mathcal{L}_{\text{cin}} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma). \quad (5.47)$$

Com uma escolha específica das constantes c_1 e c_2 , e após a inclusão do termo cinético, a langrangiana simétrica do modelo σ -L fica sendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} m^2 (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2. \quad (5.48)$$

Como essa langragiana é simétrica por construção, as correntes associadas às simetrias são conservadas. As duas correntes de Noether são

$$\mathbf{j}_\mu^V = -\boldsymbol{\pi} \times \partial_\mu \boldsymbol{\pi}, \quad (5.49)$$

$$\mathbf{j}_\mu^A = \boldsymbol{\pi} \partial_\mu \sigma - \sigma \partial_\mu \boldsymbol{\pi}. \quad (5.50)$$

E temos

$$\partial^\mu \mathbf{j}_\mu^V = \partial^\mu \mathbf{j}_\mu^A = 0. \quad (5.51)$$

Realizações da simetria

Na lagrangiana simétrica (5.48) o termo que multiplica $(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)$, dado por $(-1/2)m^2$, é considerado um parâmetro livre do modelo. As duas possibilidades $m^2 > 0$ e $m^2 < 0$ levam a diferentes manifestações da simetria quiral no mundo hadrônico. Cada uma delas acarreta uma descrição do vácuo do modelo.

O vácuo de uma teoria corresponde a seu estado de mais baixa energia. Ele é encontrado quando minimizamos, com relação aos campos, o potencial de interação do

sistema. No caso da lagrangiana (5.48), esse potencial $V(\boldsymbol{\pi}, \sigma) = V(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)$ pode ser identificado com $-\mathcal{L}_{\text{int}}$ dada na Eq. (5.46). Assim temos

$$V(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) = \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + \frac{\lambda}{4}(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2. \quad (5.52)$$

Encontrar os extremos do potencial (5.52) corresponde a resolver o sistema

$$\frac{\partial V}{\partial \pi_i} = \pi_i[m^2 + \lambda(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)] = 0, \quad (5.53)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \sigma[m^2 + \lambda(\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2)] = 0. \quad (5.54)$$

Os casos $m^2 < 0$ e $m^2 > 0$ geram duas soluções qualitativamente diferentes para essas últimas equações³.

Figura 5.1: Potenciais de interação do modelo σ -L. (a) Caso em que $m^2 > 0$. (b) Caso $m^2 < 0$.

- Caso $m^2 > 0$, a solução que encontramos é $\pi = 0$ e $\sigma = 0$. Nesse ponto temos $V = 0$ como o mínimo global. Essa situação está ilustrada na figura 5.1(a), que aparece cortada em $\sqrt{\boldsymbol{\pi}^2} \equiv \pi = 0$ para melhor visualização. O potencial tem, pois, a forma de um poço.

- Caso $m^2 < 0$, o potencial V tem uma forma bastante distinta, ilustrada na figura 5.1(b). A solução para as equações que determinam o mínimo do potencial fornecem, agora,

$$\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = \frac{-m^2}{\lambda} = v_0^2. \quad (5.55)$$

O potencial tem então a forma de um chapéu mexicano. A equação $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = v_0^2$ determina a curva do fundo do chapéu e o ponto $\sigma^2 + \boldsymbol{\pi}^2 = 0$ passa a ser um ponto de instabilidade do sistema.

³A discussão da quebra de simetria feita aqui basea-se principalmente na dissertação de mestrado de Gabriel Zarnauskas [49].

As duas possibilidades para o sinal de m^2 geram duas formas da realização da simetria quiral. A primeira delas, quando $m^2 > 0$ é conhecida como forma de Wigner-Weyl. Nesse caso, o estado de mínima energia potencial é obtido quando os campos são zero. Isso corresponde ao que chamamos um “vácuo vazio”. A lagrangiana (5.48) é simétrica e, nesse caso, também o vácuo o é. Sendo o vácuo um invariante quiral, a simetria se manifesta no mundo hadrônico através da degenerescência em massa dos píons e do σ . Como $m^2 > 0$ identificamos imediatamente

$$m_\pi = m_\sigma = m \quad (5.56)$$

e, portanto, essa forma de realização da simetria leva a existência de um méson escalar que tem a mesma massa do pión. Isso indicaria a existência de partículas com paridade oposta degeneradas em massa, o que não é observado.

A outra possibilidade, $m^2 < 0$, é mais rica, pois existe uma curva dada pela Eq. (5.55) com infinitos pontos de mais baixa energia. Esta curva não determina a “direção” do vácuo, apenas determina o módulo de $(\sigma^2 + \pi^2)$, que deve ser v_0^2 . Além disso, o estado de mais baixa energia não mais corresponde a um ponto onde os campos são iguais a zero. Um tal vácuo chamaremos “vácuo cheio”, e temos

$$V(v_0^2) = -\frac{\lambda v_0^4}{4}. \quad (5.57)$$

Para estudarmos a teoria quântica, e assim determinarmos as massas do pión e do σ , temos de definir um ponto da circunferência $(\sigma^2 + \pi^2)$ como o vácuo. A proporção entre píons e σ do vácuo não é determinada pela teoria, e é conveniente escolher um vácuo de paridade positiva formado por um condensado de sigmas. Isso corresponde, na teoria quântica, a fazermos

$$\langle 0 | \boldsymbol{\pi} | 0 \rangle = 0, \quad (5.58)$$

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = v_0. \quad (5.59)$$

A essa escolha arbitrária dá-se usualmente o nome “quebra espontânea de simetria”. Com ela, a lagrangiana do sistema continua simétrica, embora o agora o vácuo não seja mais invariante. Logo, o espectro da teoria não refletirá a simetria. A escolha do vácuo como um condensado de sigmas, nos permite redefinir o campo do escalar, agora denotado por s , como flutuações em torno do valor v_0 . Fazemos então a substituição

$$s \equiv \sigma - v_0, \quad (5.60)$$

na qual o campo s representa flutuações quânticas em torno do valor de vácuo. Com essa substituição a lagrangiana (5.48) fica sendo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu s \partial^\mu s - m_\sigma^2 s^2) + \frac{1}{2}\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - \frac{\lambda}{4} [4v_0 s(s^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + (s^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2]. \quad (5.61)$$

O modelo determina então as massas dos píons e do σ como sendo

$$m_\sigma^2 = (m^2 + 3\lambda v_0^2) = 2\lambda v_0^2, \quad (5.62)$$

$$m_\pi = 0, \quad (5.63)$$

e o valor das constantes de acoplamento dos vértices trilineares e quadrilineares que aparecem no termo entre colchetes de (5.61). A simetria, embora espontaneamente quebrada, ainda se manifesta no valor das constantes, o que também é conhecido como “simetria escondida”. Um fato muito importante é que os píons da lagrangiana (5.61) são bósons de Goldstone da simetria espontaneamente quebrada, e assim têm massa nula. Na figura 5.1(b), os píons podem ser entendidos como oscilações angulares na superfície do fundo do chapéu, e que não requerem energia nenhuma. O sigma corresponderia a oscilações radiais e custosas em energia.

Essa lagrangiana não prevê mais a degenerescência em massa dos píons e do sigma, o que está em melhor acordo com os experimentos. Porém, nela os píons não têm massa. A massa do pión é bem determinada experimentalmente⁴ e vale, tomando a média entre os carregados e o neutro, $\hat{m}_\pi \approx 138$ MeV. Embora claramente diferente de zero, essa massa é bastante pequena na escala hadrônica: cerca de 4 vezes menor que a massa do káon e 7 vezes menor que a massa do núcleon. Isso indica que o efeito da massa do pión pode ser uma perturbação na lagrangiana (5.61). Isso está em consonância com as simetrias da QCD. Na teoria fundamental a simetria quiral é quebrada fracamente pela massa dos quarks u e d . Devemos incluir um termo que quebre fracamente a simetria quiral da lagrangiana e forneça uma massa para o pión. Essa quebra de simetria é muito distinta daquela que vimos estudando. Trata-se da quebra explícita de simetria. Os píons deixam de ser genuínos bósons de Goldstone e passam a ser o que chamamos pseudo bósons de Goldstone, pois agora terão uma massa, que, embora pequena, será não nula.

Quebra explícita de simetria

O termo de quebra de simetria que normalmente é adicionado à lagrangiana (5.48) é

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = c\sigma, \quad (5.64)$$

⁴A quebra da simetria de isospin gera uma pequena diferença entre a massa dos píons carregados e não carregado: $m_{\pi^\pm} \approx 139,6$ MeV $m_{\pi^0} \approx 135,0$ MeV.

onde c é um parâmetro a ser determinado. A idéia da inclusão desse termo vem da hipótese de PCAC (corrente axial parcialmente conservada) [6]. A lagrangiana (5.48) tem corrente axial conservada, o que proíbe o decaimento do pión. O termo (5.64) quebra a simetria de modo que $\mathbf{j}_\mu^A$ não mais é conservada, e sua não conservação é quantificada pela constante c , que dever ser pequena na escala do problema.

As equações que determinam os extremos do novo potencial

$$\tilde{V}(\sigma, \pi) = V(\sigma^2 + \pi^2) - c\sigma, \quad (5.65)$$

onde $V(\sigma^2 + \pi^2)$ é aquele dado em (5.52), passam a ser

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \pi_i} = \pi_i [m^2 + \lambda(\sigma^2 + \pi^2)] = 0, \quad (5.66)$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \sigma} = \sigma [m^2 + \lambda(\sigma^2 + \pi^2)] - c = 0. \quad (5.67)$$

Da primeira equação vemos que se o termo entre colchetes for igual a zero temos, necessariamente, $c = 0$. Essa solução não nos interessa pois eliminaria o termo de quebra de simetria que queremos incluir. Portanto, nos resta apenas $\pi_i = 0$. Substituindo na segunda equação, temos que resolver a seguinte equação cúbica para σ

$$\sigma^3 + \frac{m^2}{\lambda}\sigma - \frac{c}{\lambda} = 0. \quad (5.68)$$

Como c deve ser uma perturbação pequena no sistema, vamos resolver (5.68) de maneira aproximada⁵, até primeira ordem em c . O caso $c = 0$ nos dá

$$\sigma_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}. \quad (5.69)$$

As raízes da equação (5.68) podem então ser obtidas fazendo-se, por exemplo

$$\sigma \rightarrow \sigma + \delta\sigma,$$

e obtemos até primeira ordem em $\delta\sigma$

$$(\sigma + \delta\sigma) \left[\sigma^2 + 2\sigma\delta\sigma + \frac{m^2}{\lambda} \right] = \frac{c}{\lambda}. \quad (5.70)$$

Para o caso $\sigma_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}}$ obtemos

$$\delta\sigma = -\frac{c}{2m^2}.$$

⁵A equação pode ser resolvida exatamente [49], mas a solução exata não é crucial para os resultados que buscamos obter.

Esse procedimento nos dá três raízes distintas, que fornecem três extremos de $\tilde{V}$:

$$\sigma_1 \simeq \frac{c}{m^2}, \quad (5.71)$$

$$\sigma_2 \simeq \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} - \frac{c}{2m^2}, \quad (5.72)$$

$$\sigma_3 \simeq -\sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} - \frac{c}{2m^2}. \quad (5.73)$$

Se calcularmos o potencial $\tilde{V}$ para cada um desses extremos encontraremos um só ponto de mínimo

$$\tilde{V}(\sigma_2) \simeq -\frac{\lambda v_0^4}{4} - v_0 c. \quad (5.74)$$

O novo perfil do potencial está mostrado na figura 5.2, na qual apenas um ponto de mínimo aparece. A situação anterior é recuperada se fizermos $c \rightarrow 0$. Dessa forma, o sistema passa a ter novamente a circunferência de mínimo que apresentava antes.

Figura 5.2: Potencial com quebra explícita de simetria.

Assim, se pudermos relacionar a constante c a um observável poderemos, sem nenhuma ambigüidade, escrever $s = \sigma - v$ e determinar a langrangiana do sistema como fizemos antes.

Para encontrar c , como adiantado, devemos calcular a corrente axial e sua divergência. A fórmula de j_μ^A determinada no caso simétrico continua valendo, contudo, sua divergência é alterada, dado que não se trata mais de uma corrente conservada. Do teorema de Noether Eq. (5.9) temos

$$\partial_\mu j^{\mu A} = c\pi. \quad (5.75)$$

E do cálculo direto a partir de $\mathbf{j}^{\mu A} = \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \sigma - \sigma \partial^\mu \boldsymbol{\pi}$ temos

$$\partial_\mu \mathbf{j}^{\mu A} = v m_\pi^2 \boldsymbol{\pi}, \quad (5.76)$$

onde usamos $\sigma = s + v$ e desprezamos as flutuações quânticas. Obtemos então

$$c = v m_\pi^2. \quad (5.77)$$

Para identificar v a uma grandeza observável temos de estudar o decaimento fraco dos píons carregados. Nesse decaimento fraco, mediado pelo W , aparece o elemento de matriz hadrônico

$$\langle 0 | j_\mu^A | \pi^b(p) \rangle = i \delta^{ab} f_\pi p_\mu. \quad (5.78)$$

Calcular a divergência de j^A corresponde, no espaço de momentos a multiplicar por p_μ e obtemos

$$\langle 0 | \partial^\mu j_\mu^A | \pi^b(p) \rangle = i \delta^{ab} f_\pi m_\pi^2, \quad (5.79)$$

resultado que nos autoriza a identificar

$$v = f_\pi. \quad (5.80)$$

Isso conclui o estudo do termo de quebra de simetria, que passa a ser escrito

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = f_\pi m_\pi^2 \sigma. \quad (5.81)$$

A lagrangiana com esse termo fica sendo

$$\mathcal{L}_{\sigma-L} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{sb}} \quad (5.82)$$

com $\mathcal{L}$ dada na Eq. (5.48). Fazendo a substituição $s = \sigma - v$ obtemos a lagrangiana final do modelo σ linear

$$\mathcal{L}_{\sigma-L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu s \partial^\mu s - m_\sigma^2 s^2) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - m_\pi^2 \boldsymbol{\pi}^2) - \frac{\lambda}{4} [4 f_\pi s (s^2 + \boldsymbol{\pi}^2) + (s^2 + \boldsymbol{\pi}^2)^2]. \quad (5.83)$$

A simetria determina os parâmetros do modelo, que são dados por

$$m^2 = \frac{1}{2} (3m_\pi^2 - m_\sigma^2), \quad (5.84)$$

$$\lambda = \frac{1}{2f_\pi^2} (m_\sigma^2 - m_\pi^2). \quad (5.85)$$

É interessante notarmos que as constantes de acoplamento são determinadas somente pelas massas da lagrangiana e por f_π . Como $f_\pi = 93$ MeV e $m_\pi \approx 138$ MeV são muito bem determinadas, só há um parâmetro disponível: m_σ .

Esse modelo é, pois, uma realização da simetria quiral em $SU(2)$ e é compatível com PCAC. Ele contém, além dos píons, um méson escalar que pode ser identificado com o $\sigma(500)$, que não é degenerado em massa com o pión. As consequências fenomenológicas dessa descrição serão estudadas na seção 5.1.5.

Vale lembrar que o dubleto do núcleon também pode ser incluído de maneira coerente nesse modelo. Como o setor nucleônico não é explorado nesse trabalho, não descreveremos aqui o modelo σ -L com o núcleon.

5.1.3 Modelo σ não linear

O modelo σ -L tem uma série de características atraentes. Ele inclui a simetria quiral de maneira simples, descreve de maneira clara a quebra dessa simetria e está em razoável acordo com a fenomenologia. O sucesso do modelo reside, em parte, em grandes cancelamentos que a inclusão do σ produz. Por exemplo, se calcularmos a amplitude πN com esse modelo, fica claro que a troca do σ é responsável por um cancelamento que faz com que o comprimento de espalhamento πN esteja em bom acordo com os experimentos. Por isso, e por ser fundamental para a realização da simetria quiral, o méson escalar σ constitui um ingrediente fundamental de toda essa descrição. Com as tentativas fracassadas de se detectar o σ em laboratório, surgiu uma nova proposta para a realização da simetria quiral que prescinde do escalar, o modelo *sigma não linear*, ou σ -nL.

Atualmente, o desenvolvimento de Leutwyler, Gasser e colaboradores, tornou bastante aceita a idéia de que a chamada teoria de perturbação quiral (ChPT) é a QCD a baixas energias [46]. Em ordem mais baixa, a ChPT coincide com o modelo σ -nL e, por isso, esse modelo representa uma ponte entre a QCD e o mundo hadrônico.

Como alternativa ao modelo σ -L, vários autores mostraram ser possível obter uma lagrangiana com simetria quiral e sem o σ se supusermos que as transformações dos campos são *não lineares*. Isso significa, por exemplo, fazer

$$\delta^A \pi_i = -\beta_k f_{ki}(\boldsymbol{\pi}). \quad (5.86)$$

A tarefa consiste em encontrar a função par $f_{ki}(\boldsymbol{\pi})$ que contrabalança a ausência do σ . A construção do modelo seguindo o caminho descrito por Weinberg na Ref. [52] pode ser encontrada em [49].

De maneira menos formal e mais intuitiva, notamos que o potencial do modelo σ -L sem quebra explícita de simetria Eq. (5.52) é proporcional a m_σ . Se tomarmos $m_\sigma \rightarrow \infty$, as paredes do *sombrero* da figura 5.1(b) se tornam cada vez mais verticais, à medida que a

superfície de mínimo se torna mais funda. Isso restringe as excitações radiais, que passam a necessitar de cada vez mais energia. O vínculo do mínimo que obtivemos

$$\sigma^2 + \pi^2 = f_\pi^2$$

indica então que o campo do σ passa a ser uma função não linear do campo do pión. O grau de liberdade associado ao *sigma* é então eliminado. Dessa forma, o modelo σ não linear sem quebra explícita de simetria corresponde a fazermos

$$\sigma = \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2} \quad (5.87)$$

na lagrangiana (5.47). Temos então

$$\mathcal{L}_{\text{sim}} = \partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi + \partial_\mu \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2} \partial^\mu \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2}. \quad (5.88)$$

Nas aplicações que faremos, serão considerados termos até produtos de quatro campos. A expansão deste último resultado até termos com quatro campos do pión fornece

$$\mathcal{L}_{\text{sim}} = \partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi + \frac{1}{2f_\pi^2} (\pi \cdot \partial_\mu \pi) (\pi \cdot \partial^\mu \pi). \quad (5.89)$$

Nesta última lagrangiana o segundo termo é um termo de interação com um vértice de quatro píons.

No limite simétrico, os píons não têm massa. Essa massa vem do termo de quebra explícita de simetria. Se seguirmos a analogia que vimos fazendo, este termo deve ser escrito

$$\mathcal{L}_{\text{sb}} = f_\pi m_\pi^2 \sigma = f_\pi m_\pi^2 \sqrt{f_\pi^2 - \pi^2}. \quad (5.90)$$

Com a inclusão e a expansão deste termo a lagrangiana do modelo σ não linear fica sendo

$$\mathcal{L}_{\sigma\text{-nL}} = (\partial_\mu \pi \cdot \partial^\mu \pi - m_\pi^2 \pi^2) + \frac{1}{2f_\pi^2} (\pi \cdot \partial_\mu \pi) (\pi \cdot \partial^\mu \pi) - \frac{1}{8f_\pi^2} m_\pi^2 (\pi^2)^2. \quad (5.91)$$

Notamos que, além do termo de massa, a quebra de simetria introduz um novo vértice quártico. Esse vértice não tem derivadas e portanto, nas regras de Feynman no espaço de momentos, contribuirá com uma constante de acoplamento. Essa constante é proporcional ao quadrado da massa do pión m_π^2 .

Esse modelo conserva a simetria quiral sem a necessidade do σ . Ele também permite a inclusão do núcleon e de outras partículas como mésons escalares e vetoriais. A lagrangiana que obtivemos na Eq. (5.91) é exatamente a lagrangiana da ChPT com simetria $SU(2) \otimes SU(2)$ em ordem mais baixa [50]. Trata-se, portanto, da teoria efetiva da QCD para baixas energias. Entretanto, para a aplicação que nos interessa,

a interação $\pi\pi\sigma$, ele está incompleto. Temos então de incluir uma ressonância escalar na lagrangiana Eq. (5.91). Uma maneira de fazê-lo foi proposta na Ref. [53] e recentemente complementada em [31]. Esta inclusão do escalar na lagrangiana da ChPT em ordem mais baixa é perfeitamente coerente com o trabalho anterior de Ecker, Gasser, Pich e de Rafael [48].

A inclusão do escalar é feita através de um campo S que tem os números quânticos do vácuo, e é um invariante quiral. Não há nenhum compromisso quanto a sua estrutura e é compatível com a possibilidade do σ ser um *glueball* ou um tetraquark.

Por S ter os números quânticos do vácuo, a lagrangiana de interação $S\pi\pi$ pode ser escrita

$$\mathcal{L}_{S\pi\pi} = \frac{1}{2}c_s \frac{S}{f_\pi} \left[\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2f_\pi^2} (\boldsymbol{\pi} \cdot \partial_\mu \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi}) \right] + \frac{c_b S}{f_\pi} \left(m_\pi^2 f_\pi \sqrt{f_\pi^2 - \boldsymbol{\pi}^2} - f_\pi \right), \quad (5.92)$$

onde c_s é uma constante de acoplamento ligada ao termo simétrico e c_b outra constante ligada ao termo de quebra de simetria, ambas são adimensionais. Fazendo a expansão até termos de quarta ordem, obtemos para a lagrangiana de interação

$$\mathcal{L}_{S\pi\pi} = \frac{1}{2}c_s \frac{S}{f_\pi} \partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} - \frac{m_\pi^2 c_b S}{2f_\pi} \boldsymbol{\pi}^2, \quad (5.93)$$

que gera, portanto, um vértice $S\pi\pi$.

Com a inclusão dos termos cinéticos e de massa para S , a lagrangiana total é

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{\sigma-nL} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu S \partial^\mu S - m_\sigma^2 S^2) + \frac{1}{2} \left(1 + c_s \frac{S}{f_\pi} \right) \left(\partial_\mu \boldsymbol{\pi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\pi} + \partial_\mu \sqrt{f_\pi^2 - \boldsymbol{\pi}^2} \partial^\mu \sqrt{f_\pi^2 - \boldsymbol{\pi}^2} \right) \\ & + m_\pi^2 f_\pi \left(1 + c_b \frac{S}{f_\pi} \right) \left(m_\pi^2 f_\pi \sqrt{f_\pi^2 - \boldsymbol{\pi}^2} - f_\pi \right). \end{aligned} \quad (5.94)$$

5.1.4 Regras de Feynman

A fenomenologia desses modelos é estudada por meio de amplitudes construídas por meio de regras de Feynman. Os vértices que nos interessam diretamente são dois: o vértice de quatro píons, conhecido como diagrama de contato, e o vértice $\pi\pi\sigma$. No que segue, os índices latinos representam o isospin dos píons e as setas indicam o fluxo de momento nas linhas.

- Modelo σ linear

$$= -2i\lambda(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})$$

$$= -2i\lambda f_\pi \delta_{ab}$$

A constante λ está dada em função das massas na Eq. (5.85).

- Modelo σ com uma ressonância escalar

$$= \frac{i}{f_\pi^2} \left\{ \begin{aligned} &[(p_a + p_b) \cdot (p_c + p_d) - m_\pi^2] \delta_{ab} \delta_{cd} \\ &+ [(p_a - p_c) \cdot (p_d - p_b) - m_\pi^2] \delta_{ac} \delta_{bd} \\ &+ [(p_a - p_d) \cdot (p_c - p_b) - m_\pi^2] \delta_{ad} \delta_{bc} \end{aligned} \right\}$$

$$= -i \left(\frac{c_s}{f_\pi} (p_a \cdot p_b) + \frac{m_\pi^2 c_b}{f_\pi} \right) \delta_{ab}$$

5.1.5 Espalhamento $\pi\pi$

No capítulo 4 vimos que a função de produção $\Pi(s)$ depende de $T(s)$ e que ambas dependem de um kernel $\mathcal{K}$. A importância da simetria quiral reside no fato de ela ter um papel preponderante na construção de um modelo para $\mathcal{K}$. Para construir um kernel para essa interação baseado nos modelos que introduzimos, começamos por revisar características bem gerais da amplitude de espalhamento $\pi\pi$.

Uma consequência direta das simetrias de cruzamento, de isospin e do fato dos píons serem bósons é que a amplitude do espalhamento $\pi^a(p)\pi^b(q) \rightarrow \pi^c(p')\pi^d(q')$, $T_{\pi\pi}$, pode ser decomposta de forma muito geral como

$$T_{\pi\pi} = \delta_{ab}\delta_{cd}\mathcal{A}(s, t, u) + \delta_{ac}\delta_{bd}\mathcal{A}(t, u, s) + \delta_{ad}\delta_{bc}\mathcal{A}(u, s, t). \quad (5.95)$$

Onde os índices a, b, c e d indicam o isospin dos píons e foram utilizadas as variáveis de Mandelstam usuais $s = (p + q)^2$, $t = (p - p')^2$ e $u = (p - q')^2$ (para detalhes sobre as convenções ver apêndice A).

Um teorema decorrente da simetria quiral e que foi produzido em 1966 por Weinberg [54] afirma que a baixas energias

$$\mathcal{A}(s, t, u) = \frac{(s - \mu^2)}{f_\pi^2} + \dots \quad (5.96)$$

Qualquer descrição do espalhamento $\pi\pi$ deve respeitar esse comportamento para valores pequenos de s . Esse comportamento da amplitude é suficiente para satisfazer os teoremas de baixa energia, entretanto, é preciso incorporar a ressonância. Discutimos como fazê-lo nos modelos σ -L e σ -nL.

Em ambos os casos, no cálculo da amplitude $T_{\pi\pi}$ em ordem árvore, entram os diagramas da figura 5.3. O primeiro termo é o chamado diagrama de contato, os outros representam a troca da ressonância nos canais s , u e t .

Figura 5.3: Diagramas para o cálculo da amplitude de espalhamento $\pi\pi$ em ordem árvore.

Modelo σ -linear

No contexto do modelo σ -linear, usando as regras de Feynman da seção 5.1.4 e a decomposição (5.95), a função $\mathcal{A}(s, t, u)$ é

$$\mathcal{A}(s, t, u) = -2\lambda - \frac{4\lambda^2 f_\pi^2}{s - m_\sigma^2}, \quad (5.97)$$

onde o primeiro termo é devido ao diagrama de contato e o segundo representa a troca do σ . As outras funções $\mathcal{A}$ podem ser obtidos por permutações de s , t e u . Os vínculos do modelo fornecem $\lambda = \frac{1}{2f_\pi^2}(m_\sigma^2 - \mu^2)$ e podemos expressar esse resultado como

$$\mathcal{A}(s, t, u) = \frac{(s - \mu^2)}{f_\pi^2} - \frac{(s - \mu^2)^2}{f_\pi^2(s - m_\sigma^2)}, \quad (5.98)$$

onde μ é a massa do pión. Essa última forma é a adotada em [31] e é aquela que escolhemos para trabalhar⁶. Uma das vantagens que ela apresenta é o fato de separarmos o termo que assegura o teorema de baixas energias de Weinberg. Se m_σ for suficientemente maior que μ , o segundo termo é desprezível para valores pequenos de s , e assim a inclusão da ressonância nesse modelo preserva o teorema.

Para estudar o canal escalar-isoscalar devemos tomar a projeção da amplitude de espalhamento no estado de spin e isospin zero (o Apêndice E contém os detalhes dessas projeções). Para o canal de isospin I e spin l adotamos a notação T_l^I . A projeção de $T_{\pi\pi}$ no estado $I=0$ é dada por

$$T^0 = 3\mathcal{A}(s, t, u) + \mathcal{A}(t, u, s) + \mathcal{A}(u, s, t). \quad (5.99)$$

Usando essa decomposição e a Eq. (5.98) a amplitude isoscalar é

$$T^0 = 3 \left[\frac{(s - \mu^2)}{f_\pi^2} - \frac{(s - \mu^2)^2}{f_\pi^2(s - m_\sigma^2)} \right] + \frac{(u - \mu^2)}{f_\pi^2} - \frac{(u - \mu^2)^2}{f_\pi^2(u - m_\sigma^2)} + \frac{(t - \mu^2)}{f_\pi^2} - \frac{(t - \mu^2)^2}{f_\pi^2(t - m_\sigma^2)}. \quad (5.100)$$

Essa amplitude ainda contempla todos os valores de spin e por isso devemos projetá-la no canal $l = 0$, o que é feito segundo a fórmula (2.64)

$$[T_0^0]^{(t)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz P_0(z) T^0(s, z), \quad (5.101)$$

⁶Para efeito de comparação vale observar que a nossa função $\mathcal{A}(s, t, u)$ é idêntica à de Achasov e Shestakov [39], embora eles a escrevam numa forma um pouco diferente

$$\mathcal{A}(s, t, u) = \frac{(\mu^2 - m_\sigma^2)}{f_\pi^2} \frac{\mu^2 - s}{m_\sigma^2 - s}.$$

onde $P_0(z) = 1$ é o polinômio de Legendre $P_{l=0}(z)$. Adotamos a notação $[T]^{(t)}$ para indicar que estamos trabalhando em árvore. Com essa equação podemos projetar a amplitude T^0 na onda S de momento angular. Os detalhes dessa projeção também podem ser encontrados no Apêndice E, aqui apresentamos somente o resultado final para $[T_0^0]^{(t)}$:

$$[T_0^0]^{(t)} = \frac{2s - \mu^2}{f_\pi^2} - 3 \frac{(s - \mu^2)^2}{f_\pi^2(s - m_\sigma^2)} + \frac{1}{f_\pi^2} B(s), \quad (5.102)$$

onde

$$B(s) = (s - 2m_\sigma^2) + 2 \frac{(m_\sigma^2 - \mu^2)^2}{s - 4\mu^2} \log \left(1 + \frac{s - 4\mu^2}{m_\sigma^2} \right). \quad (5.103)$$

A expressão (5.102) está organizada de forma a separar o resultado do teorema de Weinberg, a ressonância no canal s e o fundo não ressonante representado pela função $B(s)$.

A amplitude dada pela equação (5.102) é um kernel para o espalhamento $\pi\pi$. Na aproximação $T = \mathcal{K}$ calculada em ordem árvore, reproduzimos o teorema de baixas energias de Weinberg. Todavia, a amplitude cresce muito rapidamente com s , violando rapidamente os limites da unitariedade; seu uso para energias acima do limiar torna-se completamente inviável. O procedimento de unitarização, por limitar o módulo da amplitude, estende a validade da descrição do espalhamento $\pi\pi$ para energias próximas a 800 MeV. É também uma forma de tentar levar em conta no espalhamento todas as ordens de interação forte. Para fazermos a conexão com nosso procedimento de unitarização, vamos identificar $T_0^0(s)$ com o kernel $\mathcal{K}$ do espalhamento Eq. (4.14). Seguindo a parametrização mais conveniente que introduzimos escrevemos

$$[T_0^0]^{(t)} \equiv \mathcal{K} = \frac{\gamma^2(s)}{m_\sigma^2 - s}, \quad (5.104)$$

e agora temos uma forma específica para a função $\gamma^2(s)$ que respeita a simetria quiral

$$\gamma^2(s) = [(2s - \mu^2)(m_\sigma^2 - s) + \eta(s)]/f_\pi^2, \quad (5.105)$$

com

$$\eta(s) = 3(s - \mu^2)^2 + (m_\sigma^2 - s)B(s), \quad (5.106)$$

e $B(s)$ dado pela Eq. (5.103).

Para completar o procedimento de unitarização precisamos da função de Green de dois corpos. Como neste caso trabalhamos com o sistema $\pi\pi$, fazemos nas expressões de $L(s)$ Eq. (4.19) $\mu_a = \mu_b = \mu$. Isso promove uma considerável simplificação e temos

$$L(s) = \begin{cases} -2 \frac{\sqrt{4\mu^2 - s}}{s} \tan^{-1} \left[\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4\mu^2 - s}} \right] & \text{para } s < 4\mu^2, \\ \rho_{\pi\pi}(s) \log \left[\frac{1 - \rho_{\pi\pi}(s)}{1 + \rho_{\pi\pi}(s)} \right] + i\pi \rho_{\pi\pi}(s) & \text{para } s > 4\mu^2. \end{cases} \quad (5.107)$$

Essa função aparece na figura 5.4. Segundo a definição de $\bar{\Omega}$, Eq. (4.16), temos agora

$$\bar{\Omega}(s) = -\frac{1}{32\pi^2} \{ \Re [L(s) - L(m_R^2)] + i \Im L(s) \} = \bar{R} + iI = -\frac{1}{32\pi^2}(L(s) + c), \quad (5.108)$$

onde introduzimos uma constante c tal que

$$c = \bar{R}(m_\sigma^2). \quad (5.109)$$

Figura 5.4: Função $L(s)$ para o caso $\pi\pi$.

Particularizando o procedimento de unitarização que desenvolvemos, obtemos uma matriz $T_0^0(s)$ unitária específica para o nosso caso

$$T_0^0 = \frac{\mathcal{K}}{1 + \bar{\Omega}\mathcal{K}} = \frac{\gamma^2(s)}{\mathcal{M}^2(s) - s - im_\sigma\Gamma(s)}. \quad (5.110)$$

A forma de $\mathcal{M}^2$ no contexto desse modelo é

$$\mathcal{M}^2(s) = m_\sigma^2 + \gamma^2\bar{R} = m_\sigma^2 + \frac{[(2s - \mu^2)(m_\sigma^2 - s) + \eta(s)][\bar{R}(s) - c]}{f_\pi^2}, \quad (5.111)$$

e para $\Gamma(s)$ obtemos

$$\Gamma(s) = -\gamma^2 I(s) = [(2s - \mu^2)(m_\sigma^2 - s) + \eta(s)] \frac{\rho_{\pi\pi}(s)}{32f_\pi^2 m_\sigma \sqrt{s}} \Theta(s - 4\mu^2). \quad (5.112)$$

Podemos evidenciar a fase δ_0^0 para escrever a matriz T na forma (4.8)

$$T_0^0(s) = \frac{32\pi}{\rho(s)} \sin \delta_0^0(s) e^{i\delta_0^0(s)}, \quad (5.113)$$

com a fase do espalhamento $\pi\pi$ no canal escalar-isoescalar $\delta_0^0(s)$ sendo dada por

$$\delta_0^0(s) = \tan^{-1} \left[\frac{m_\sigma \Gamma(s)}{\mathcal{M}^2 - s} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{\gamma^2 \rho(s)}{32\pi(\mathcal{M}^2 - s)} \right]. \quad (5.114)$$

Realização não linear da simetria quiral

O cálculo do espalhamento $\pi\pi$ com o modelo σ não linear que incorpora a ressonância usando as regras de Feynman da seção 5.1.4 fornece

$$\mathcal{A}(s, t, u) = \frac{(s - \mu^2)}{f_\pi^2} - \frac{[c_s s/2 - (c_s - c_b)\mu^2]^2}{f_\pi^2(s - m_\sigma^2)}. \quad (5.115)$$

Novamente o teorema de Weinberg é assegurado pelo primeiro termo. Contudo, como agora estamos na realização não linear da simetria quiral, o teorema advém apenas do diagrama de contato. O segundo termo é devido à troca da ressonância no canal s . Nessa descrição a implementação do teorema acontece de maneira bastante distinta do modelo σ linear, em cujo contexto a troca da ressonância e o valor da constante de acoplamento λ asseguram o comportamento correto de $\mathcal{A}$ a baixas energias. Notamos também que caso tenhamos $c_s = 2$ e $c_b = 1$ obtemos o resultado do modelo σ linear. Portanto, essa descrição, em certo sentido, generaliza o caso anterior. As constantes adimensionais de acoplamento c_s e c_b são, em princípio, parâmetros livres. Para a matriz T_0^0 em árvore obtemos nesse caso

$$[T_0^0]^{(t)} = \frac{2s - \mu^2}{f_\pi^2} - 3 \frac{[c_s s/2 - (c_s - c_b)\mu^2]^2}{f_\pi^2(s - m_\sigma^2)} + \frac{1}{f_\pi^2} B(s), \quad (5.116)$$

onde separamos novamente o teorema de baixa energia, a ressonância no canal s e o fundo não ressonante, que agora passa a ser escrito

$$B(s) = \frac{c_s^2}{4}(s - 2m_\sigma^2) + c_s(c_s - 2c_b)\mu^2 + 2 \frac{[c_s m_\sigma^2/2 - (c_s - c_b)\mu^2]^2}{s - 4\mu^2} \log \left(1 + \frac{s - 4\mu^2}{m_\sigma^2} \right). \quad (5.117)$$

Com essa descrição, a matriz T unitária que obtemos pode ser escrita da mesma forma

$$T_0^0 = \frac{\gamma^2(s)}{\mathcal{M}^2(s) - s - im_\sigma \Gamma(s)}. \quad (5.118)$$

As definições de $\gamma^2(s)$, $\Gamma(s)$ e $\mathcal{M}^2(s)$ continuam as mesmas,

$$\gamma^2(s) = [(2s - \mu^2)(m_\sigma^2 - s) + \eta(s)]/f_\pi^2, \quad (5.119)$$

$$\mathcal{M}^2(s) = m_\sigma^2 + \gamma^2 \bar{R} = m_\sigma^2 + \frac{[(2s - \mu^2)(m_\sigma^2 - s) + \eta(s)][\bar{R}(s) - c]}{f_\pi^2}, \quad (5.120)$$

$$\Gamma(s) = -\gamma^2 I(s) = [(2s - \mu^2)(m_\sigma^2 - s) + \eta(s)] \frac{\rho_{\pi\pi}(s)}{32 f_\pi^2 m_\sigma \sqrt{s}} \Theta(s - 4\mu^2), \quad (5.121)$$

entretanto a função $\eta(s)$ é agora modificada pelos parâmetros c_s e c_b

$$\eta(s) = 3[c_s s/2 - (c_s - c_b)\mu^2]^2 + (m_\sigma^2 - s)B(s), \quad (5.122)$$

e o fundo $B(s)$ é aquele dado em (5.117).

Parâmetros do modelo e fenomenologia

Na seção anterior fizemos um modelo para o kernel da interação $\pi\pi$ na presença de uma ressonância escalar. Esse kernel respeita os teoremas de baixa energia e a inclusão da ressonância é feita de modo a preservá-los. Trabalhamos com a realização linear da simetria quiral, que é mais geral e possui três parâmetros: m_σ , c_s e c_b .

Para estudarmos a adequação fenomenológica dessas amplitudes, e assim determinarmos valores razoáveis para os parâmetros, podemos nos ater basicamente a dois pontos: a fase e os pólos. A fase da amplitude condensa boa parte da informação sobre o espalhamento e pode ser comparada a dados experimentais e também a outras parametrizações consagradas. Três parametrizações para δ_0^0 da literatura serão usadas nessa comparação. A primeira dela é a parametrização de Colangelo, Gasser e Leutwyler (CGL) [26]. Além dela usaremos também as soluções de Kamiński, Leśniak e Loiseau publicadas em 1997 (KLL-1997) [12] e em 2003 (KLL-2003) [55]. Qualquer descrição do espalhamento que pretenda algum compromisso com os dados experimentais não pode diferir muito dessas parametrizações.

A parametrização de CGL é compatível com a simetria quiral e tem uma expressão simples dada por

$$\tan \delta_0^0(s) = \rho(s)[a + bs/\mu^2 + cs^2/\mu^4 + ds^3/\mu^6] \frac{4\mu^2 - s_0}{s - s_0}. \quad (5.123)$$

Os parâmetros a , b , c e d estão na tabela 5.1. O valor de s_0 corresponde ao ponto em que a fase passa por 90° e vale $s_0 = (846\text{MeV})^2$.

Tabela 5.1: Parametros para a reprodução da fase δ_0^0 de CGL [26].

$a = -6,051 \times 10^{-2}$	$b = 7,291 \times 10^{-2}$
$c = -6,08 \times 10^{-4}$	$d = -2,2 \times 10^{-5}$

A solução do espalhamento $\pi\pi$ de KLL-1997 [12] não tem uma parametrização simples. O resultado correspondente é calculado numericamente⁷. Já a parametrização de KLL-2003 é feita através dos chamados aproximantes de Padé. Sua expressão é escrita em termos do momento do pión

$$k = \frac{1}{2}\sqrt{s - 4\mu^2}, \quad (5.124)$$

e o resultado para $\tan \delta_0^0$ é parametrizado como

$$\tan \delta_0^0(s) = \frac{\sum_{i=0}^4 \alpha_{2i+1} k^{2i+1}}{\prod_{i=1}^3 (k^2/\alpha_{2i} - 1)}. \quad (5.125)$$

Os parâmetros α_i ($i=2,\dots,9$) estão tabelados na referência original [55].

Figura 5.5: Fase $\delta_0^0(s)$ de CGL [26] e KLL-2003 [55]. Os pontos experimentais a baixa energia são de [56] e a mais alta energia de [57].

Na figura 5.5 mostramos a fase δ_0^0 de KLL2003 e de CGL. Os resultados experimentais próximos ao limiar $\pi\pi$ que aparecem na figura foram extraídos de [55]. Originalmente eles foram obtidos pela colaboração E865 [56] em um experimento do tipo K_{e4} , no qual a defasagem $\pi\pi$ é medida no decaimento semileptônico $K \rightarrow \pi\pi l\bar{l}$. Nesses decaimentos, a fase é extraída utilizando o teorema de Watson. Esses resultados são muito confiáveis pois os píons formam um sistema isolado do ponto de vista das interações fortes. Os

⁷Agradeço a R. Kamiński por gentilmente me enviar o código que calcula a fase $\pi\pi$.

resultados a partir de 600 MeV vêm principalmente do experimento de CERN-Munich. Nesse experimento, os dados são obtidos da produção de píons em interações fortes do tipo $\pi^- p \rightarrow \pi^+ \pi^- n$. Nesse caso o sistema $\pi\pi$ do estado final não está isolado e a extração da fase é dependente de modelo. Diferentes autores utilizam diferentes conjuntos de dados. No nosso caso tomamos os de Hyams. et. al. [57]. A essa energia, os dados devem ser tomados com ressalvas e aparecem na figura apenas para “guiar o olho”.

No caso do modelo σ linear só temos disponível um parâmetro: m_σ . Sabemos que esse parâmetro deve estar próximo de 850 MeV, pois a fase do espalhamento $\pi\pi$ passa por 90° em torno desse valor. Análises anteriores da fenomenologia desse modelo [39] indicam, contudo, que valores um pouco maiores para m_σ devem ser tomados. Adotamos para estudar a fase o valor $m_\sigma = 980$ MeV. Verificamos ainda que de m_σ no intervalo 850–1000 MeV não produzem uma alteração significativa no gráfico da fase δ_0^0 . Na figura 5.6 mostramos o resultado para a nossa unitarização e para a unitarização em matriz K , que é obtida fazendo $\mathcal{M}^2 \rightarrow m_\sigma^2$. O resultado em matriz K é o mesmo que foi obtido por Achasov e Shestakov em [39]. O cálculo da fase é feito pela Eq. (5.114). Vale lembrar que o modelo σ -L corresponde à realização não linear com parâmetros $c_s = 2$ e $c_b = 1$. No caso deste modelo, o resultado em matriz K está em melhor acordo com a fase de CGL.

Figura 5.6: Modelo σ linear.

No caso da realização não linear da simetria quiral o modelo tem três parâmetros: m_σ , c_s e c_b . Novamente sabemos que o valor de m_σ deve ser próximo de 850 MeV. O valor das constantes de acoplamento, no entanto, não têm nenhuma restrição. Aqueles propostos originalmente em [31] $c_s = 1, 10$, $c_b = 0, 55$ e $m_\sigma = 846$ MeV reproduzem bem a fase de CGL, e o resultado para $\delta_0^0(s)$ aparece da figura 5.7(a). Fizemos também um ajuste desta fase à parametrização de KLL-1997 [12] (utilizando a biblioteca Minuit do CERN) através dos parâmetros c_b e c_s fixando $m_\sigma = 846$ MeV. O ajuste foi feito no intervalo

$0 - 900 \text{ MeV}$. O resultado obtido foi

$$c_s = 1,17, \quad (5.126)$$

$$c_b = -1,57, \quad (5.127)$$

e aparece na figura 5.7(b). A existência de dois parâmetros suplementares faz com que o modelo seja mais versátil e se ajuste muito melhor às descrições consagradas. Quanto à parametrização de CGL vale lembrar que, segundo os autores, ela só é válida até energias próximas de 820 MeV. A vantagem do resultado de KLL-1997 está em sua validade, que se estende até perto de 1600 MeV.

Figura 5.7: (a) Comparação da fase de CGL [26] com aquela calculada pela Eq. (5.114) com o modelo σ -nL para os parâmetros $c_s = 1,10$, $c_b = 0,55$ e $m_\sigma = 846$ MeV. (b) Fase de KLL-1997 [12] comparada ao resultado do modelo σ -nL para os parâmetros $c_s = 1,17$, $c_b = -1,57$ e $m_\sigma = 846$ MeV.

É importante notar que todas as curvas têm o mesmo comportamento perto do limiar,

pois ele é ditado pela simetria quiral. A unitarização entra fortemente em jogo para energias mais altas.

O pólo da amplitude

Outra característica importante da amplitude são seus pólos. Atualmente a existência do pólo do σ é bem estabelecida e assim esperamos que nossas amplitudes também apresentem um pólo largo de baixa massa. Na nossa descrição, os pólos das ressonâncias correspondem a zeros do denominador da Eq. (5.118). Esse problema pode então ser equacionado

$$f(s_\sigma) = s_\sigma - \mathcal{M}^2(s_\sigma) + im_\sigma \Gamma(s_\sigma) = 0, \quad (5.128)$$

onde s_σ é agora tomado com sendo complexo. Um resultado muito importante e que deve ser antecipado é que a parte real de s_σ será muito diferente de m_σ^2 . Isso se deve à forte dependência em energia das funções $\mathcal{M}^2(s)$ e $\Gamma(s)$.

A solução⁸ da Eq. (5.128) no caso do modelo σ linear com $m_\sigma = 980$ MeV fornece

$$\sqrt{s_\sigma} = 483 - i552 \text{ MeV}. \quad (5.129)$$

O modelo comporta um pólo de baixa massa, cujo valor da parte real difere consideravelmente da massa nua m_σ .

Na descrição não linear com parâmetros $c_s = 1.17$, $c_b = -1.57$ e $m_\sigma = 846$ MeV obtemos

$$\sqrt{s_\sigma} = 369 - i392 \text{ MeV}, \quad (5.130)$$

que pode ser identificado com o pólo do σ . Essa descrição também apresenta um outro pólo em

$$\sqrt{s_2} = 1011 - i92 \text{ MeV}. \quad (5.131)$$

A existência do segundo pólo é interessante pois ele se situa muito próximo do pólo do $f_0(980)$: $\sqrt{s_{f_0}} \approx 980 - i(20-50)$ MeV. A versatilidade da amplitude devido aos parâmetros c_s e c_b gera um pólo de mais alta massa de modo a poder descrever a fase experimental. Vale observar que, embora presente, esse segundo pólo está fora da região de validade do nosso modelo. Embora não físico, esse pólo terá conseqüências na amplitude de produção, como será mostrado mais adiante.

Na tabela 5.2 mostramos resultados para os pólos obtidos com estes e com outros conjuntos de parâmetros.

⁸O método que utilizamos para resolver essa equação numericamente consistiu em separarmos as partes real e imaginária de $f(s)$. O zero corresponde a um mínimo de $|f(s)|^2$, esse mínimo foi determinado com a biblioteca MINUIT do CERN.

Tabela 5.2: Resultados para a posição do pólos das amplitudes do modelo σ linear (σ -L) e do modelo não linear. Lembramos que o caso σ -L é obtido quando $c_s = 2,0$ e $c_b = 1,0$.

c_s	c_b	m_σ (MeV)	$\sqrt{s_\sigma}$ (MeV)	$\sqrt{s_2}$ (MeV)
1,17	-1,57	846	369 - i 392	1011 - i 92
1,1	0,55	846	372 - i 346	1028 - i 94
σ -L	σ -L	980	483 - i 552	-
σ -L	σ -L	880	460 - i 467	-

Uma outra abordagem possível é a de encontrar os parâmetros m_σ , c_s e c_b que reproduzem o pólo do σ tal qual dado por CGL [26]. Matematicamente esse problema consiste em calcular o valor da função $f(s_\sigma)$ definida em (5.128) e encontrar⁹ c_s , c_b e m_σ que fornecem $f(s_\sigma; c_s, c_b, m_\sigma) = 0$. O valor de s_σ que consideramos é aquele do trabalho de CGL: $s_\sigma = 454 - i290$ MeV. No que fizemos, fixamos vários valores de c_b para os quais determinamos m_σ e c_s . Alguns resultados dessa abordagem estão na tabela 5.3. Mostramos na figura 5.8 como variam o m_σ e c_s que reproduzem o pólo conforme variamos c_b . Novamente, a versatilidade do modelo não linear permite a reprodução exata do pólo do σ de CGL. Contudo, se examinarmos a figura 5.8(a) veremos que essa reprodução sempre acontece para valores demasiado baixos de m_σ . O maior valor encontrado $m_\sigma = 680$ MeV é ainda muito baixo para reproduzir a fase do espalhamento. Existe, pois, uma tensão entre o pólo e a fase. Optamos pelo conjunto de parâmetros que descreve bem a fase, uma vez que eles também geram um pólo largo de baixa massa, embora distinto daquele de CGL.

Tabela 5.3: Resultados para a reprodução do pólo em $\sqrt{s_\sigma} = 454 - i290$ MeV.

m_σ (MeV)	$\Gamma(m_\sigma^2)$	c_s	c_b
663,42	535,81	1,633	0,5
648,47	407,14	1,425	1,0
597,97	237,94	1,111	2,0

⁹Novamente trata-se de um problema de minimização que foi implementado numericamente com o MINUIT.

Figura 5.8: (a) Variação do valor de m_σ que reproduz o pólo. (b) Variação do valor de c_s que reproduz o pólo.

Para ganhar uma idéia da sobre a importância do procedimento de unitarização na determinação do pólo, podemos calcular s_p na aproximação de matriz K . Se fizermos, como faz a colaboração E791, $\mathcal{M}^2 \rightarrow m_\sigma^2$, ignorando a dependência em s inerente ao processo de unitarização, obtemos (para o modelo σ -nL com os parâmetros da figura 5.7(b))

$$\sqrt{s_\sigma} = 566 - i126 \text{ MeV}. \quad (5.132)$$

Logo, o pólo muda radicalmente com relação ao resultado dado em (5.130), indicando que o efeito da massa dinâmica é bastante importante. Esse resultado evidencia a importância de se conhecer $\mathcal{M}^2$ para a extração de m_σ .

Amplitude de produção

Seguindo o tratamento geral que introduzimos no capítulo 4, passamos agora a estudar a subamplitude de produção de um par $\pi\pi$ na presença do σ . A Eq. (4.53) nos fornece o resultado

$$\Pi(s) = \frac{g}{\mathcal{M}^2 - s} \cos \delta_0^0(s) e^{i\delta_0^0(s)}, \quad (5.133)$$

onde δ_0^0 é dado pela Eq. (5.114). Essa amplitude de produção agora respeita a simetria quiral, além de respeitar a unitariedade. Ela é obtida do cálculo dos diagramas da figura 5.9.

Na figura 5.10 vemos resultados para $\Pi(s)/g$ com parâmetros do modelo não linear que reproduzem a fase $\delta_0^0(s)$. Na figura 5.11(a) estudamos o caso do modelo σ -linear ($c_s = 2, c_b = 1$). O caso do modelo σ -linear em aproximação de matriz K , como feito em [39], aparece na figura 5.11(b). Os resultados obtidos no contexto da unitarização

Figura 5.9: Diagramas para o cálculo de $\Pi(s)$ no caso $\pi\pi\sigma$.

dinâmica, figuras 5.10 e 5.11(a), podem ser estendidos para a região abaixo do limiar. Exatamente sobre este limiar $s = 4\mu^2$, $\Pi(s)$ apresenta a descontinuidade esperada, também conhecida em inglês como *cusp*. Ela ocorre devido ao surgimento da parte imaginária.

Figura 5.10: Resultados para $\Re\Pi/g$, $\Im\Pi/g$ e para $|\Pi|/g$ em GeV^{-2} . (a) Modelo não linear com os parâmetros que descrevem bem a fase δ_0^0 de KLL [12].

Na realização não linear da simetria quiral a existência de um segundo pólo na amplitude, em energias próximas a 1000 MeV, se manifesta no resultado para $\Pi(s)$. Na região de energia onde $s \approx 820$ MeV notamos que $|\Pi(s)|$ começa a subir novamente. Esse comportamento pode ser contrastado à situação do modelo σ -L que não apresenta um segundo pólo. Nesse modelo, como vemos nas figuras 5.11(a) e 5.11(b), $|\Pi(s)|$ cai monotonicamente conforme a energia cresce. O perfil de $\Pi(s)$ apresenta, em todos os casos, um pico largo na região do pólo do σ . A existência desse pico na produção deve ser comparada ao perfil da matriz T_0^0 , figura 5.12. A existência do pólo não produz pico algum no espalhamento, mas, no tratamento que fazemos, mostramos que na produção o

pólo de baixa massa se manifesta como um pico largo.

Figura 5.11: Resultados para $\Re\Pi/g$, $\Im\Pi/g$ e para $|\Pi|/g$ em GeV^{-2} . (a) Modelo σ -linear com $m_\sigma = 980 \text{ MeV}$. (b) Modelo σ -linear em aproximação de matriz K .

Figura 5.12: Perfil da matriz T_0^0 do espalhamento $\pi\pi$ obtido com a fase δ_0^0 de CGL [26].

Mostramos na figura 5.13 o comportamento da massa dinâmica $\mathcal{M}(s)$ para dois casos.

Figura 5.13: (a) $\mathcal{M}(s)$ para os parâmetros ($m_\sigma = 846$ MeV, $c_s = 1,17$ e $c_b = -1,57$) . (b) $\mathcal{M}(s)$ para o modelo σ -linear com unitarização dinâmica.

5.2 Resumo do capítulo

Neste capítulo mostramos que é possível fazer um modelo para o kernel da equação de Bethe-Salpeter respeitando a simetria quiral e com a inclusão de uma ressonância escalar. O modelo tem três parâmetros livres: m_σ e as constantes de acoplamento c_s e c_b . Mostramos que a fenomenologia, em especial o comportamento da fase, restringe bastante os valores possíveis para esses parâmetros. O conjunto de parâmetros $c_s = 1,17$, $c_b = -1,57$ e $m_\sigma = 846$ MeV reproduz bem a fase $\delta_0^0(s)$ observada experimentalmente e parametrizada por CGL e KLL.

Nosso tratamento evidencia a importância de se conhecer $\mathcal{M}^2$ para a extração de m_σ . Isso fica claro se considerarmos a variação da posição do pólo com e sem a dependência em s de $\mathcal{M}^2$.

Além disso, a amplitude de produção mostra que o σ , em decaimentos, deve se manifestar como um pico largo. Portanto, o resultado obtido pela E791 no contexto do modelo isobárico é uma grande evidência da existência do σ e do fato de que ele se manifesta de maneira mais nítida na reação $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$. Entretanto, ele é obtido através de uma função de Breit-Wigner que não é embasada nas simetrias fundamentais, e que contém aproximações mal controladas. Dessa forma, os valores de m_σ e Γ_σ assim obtidos devem ser interpretados como uma indicação, e não uma medida experimental confiável.

A amplitude do espalhamento $\pi\pi$ dada pela Eq. (5.118) tem uma série de características que a tornam confiável, pois:

1. É unitária.
2. Respeita a simetria quiral e por conseguinte o teorema de baixas energias de

Weinberg.

3. Apresenta um pólo largo de baixa massa que pode ser identificado com o pólo do σ .

Essas características dão um forte suporte às nossas conclusões. Entretanto, a amplitude tem alguns problemas fenomenológicos pois não pode, com um mesmo conjunto de parâmetros, reproduzir o pólo do σ e a fase do espalhamento. Os efeitos de acoplamento de canais e de outras ressonâncias podem vir a corrigir esses problemas.

Capítulo 6

Um modelo com dois canais

O intuito deste curto capítulo é comparar brevemente nossos resultados a uma outra abordagem existente na literatura para a função de produção. Esta alternativa foi introduzida por Kamiński, Leśniak, Loiseau e Furman em [42] e foi utilizada na descrição da ressonância $f_0(980)$. Entre os meses de setembro de 2005 e julho de 2006 estive em Paris no Groupe Théorie do Laboratoire de Physique Nucléaire et de Hautes Energies (LPNHE) na Université Pierre & Marie Curie. Durante esta estada¹, fui apresentado ao modelo pelos autores. Apesar de ser descrito no fim da dissertação, meu trabalho com este modelo é anterior ao que foi apresentado nos capítulos precedentes e, de fato, foi através dele que tomei contato com o problema da descrição de ressonâncias escalares em decaimentos hadrônicos.

A principal característica da função de produção em onda S introduzida por KLL é o fato de incorporar o acoplamento com o canal $K\bar{K}$. Ela é denotada $\Pi_{KLL}(s)$ e respeita a unitariedade. Originalmente, a proposta foi desenvolvida segundo as linhas gerais de um trabalho da década de 70 de Babelon et. al. [58] no qual as interações no estado final da fotoprodução de píons eram levadas em conta de maneira unitária. Este havia sido resgatado por Meißner e Oller [59] para construir uma descrição das FSI baseada na teoria de perturbação quiral (ChPT). São esses dois trabalhos que estão na raiz da proposta de KLL. A aproximação de matriz K é utilizada e, assim, considera-se que todas as partículas estão na camada de massa. A idéia geral do modelo consiste em tratar a produção dos píons como feito em ChPT e, em seguida, descrever o reespalhamento no estado final com as matrizes T do trabalho de KLL-1997 [12], cuja fase da amplitude $\pi\pi$ já usamos no capítulo anterior. Passamos a deduzir $\Pi_{KLL}(s)$ de maneira rápida, para depois comparar esse resultado com os nossos.

¹O financiamento da estada no LPNHE contou com apoio do governo da *Région Ile-de-France*.

Com o desenvolvimento que fizemos no capítulo 4, a obtenção da expressão de $\Pi_{KLL}(s)$ pode ser feita de maneira direta. Embora distinta daquela apresentada no trabalho original, é mais intuitiva, por ser baseada em diagramas. A seção 4.2.1, em que apresentamos as generalizações do formalismo da função de produção para dois canais, serve de base para a dedução de $\Pi_{KLL}(s)$ que, a exemplo daquele caso, é agora um vetor

$$\Pi_{KLL}(s) = \begin{pmatrix} \Pi_{KLL}^1(s) \\ \Pi_{KLL}^2(s) \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

onde utilizamos a notação $1 \equiv \pi\pi$ e $2 \equiv K\bar{K}$. O elemento $\Pi_{KLL}^1(s)$ descreve a produção de píons, enquanto que $\Pi_{KLL}^2(s)$ a produção de káons. Uma importante diferença dessa função de produção está no fato de que, por ser inspirada na teoria de perturbação quiral, $\Pi_{KLL}(s)$ não contém ressonâncias como grau de liberdade explícito. Nesse contexto, o vetor de produção que introduzimos na Eq. (4.98) é tomado diretamente da ChPT. Dessa forma, é agora livre de singularidades e será denotado $R(s)$, tal que

$$R(s) = \begin{pmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Essa abordagem sem ressonâncias explícitas é comum em ChPT. Alguns trabalhos argumentam que elas não são necessárias para a descrição das interações fundamentais, e que no espalhamento são geradas *dinamicamente* pela equação de Bethe-Salpeter [13]. As expressões específicas de $R_1(s)$ e $R_2(s)$ serão dadas mais adiante. A aproximação de matriz K determina as funções de Green de dois corpos e podemos escrever

$$-\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} -\bar{\Omega}_{11} & 0 \\ 0 & -\bar{\Omega}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\frac{\rho_1(s)}{32\pi} & 0 \\ 0 & i\frac{\rho_2(s)}{32\pi} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

onde as funções ρ_i são dadas por

$$\rho_1(s) = \frac{2|p_1|}{\sqrt{s}} = \sqrt{1 - 4m_\pi^2/s}, \quad (6.4)$$

$$\rho_2(s) = \frac{2|p_2|}{\sqrt{s}} = \sqrt{1 - 4m_K^2/s}. \quad (6.5)$$

O último ingrediente dessa descrição é a matriz T do espalhamento, que fora estudada por KLL em 1997 com um modelo fenomenológico de canais acoplados [12]. É interessante introduzir uma parametrização para a matriz T na presença do segundo canal. Essa

parametrização é feita, novamente, em função das defasagens $\delta_1(s)$ e $\delta_2(s)$, mas agora também aparece a inelasticidade do espalhamento $\eta(s)$. O elemento diagonal T_{11} é

$$T_{11} = \frac{32\pi}{\rho_1(s)} \frac{\eta(s)e^{2i\delta_1(s)} - 1}{2i}. \quad (6.6)$$

Abaixo do limiar de produção de um par $K\bar{K}$ temos $\eta(s) \equiv 1$, e por isso, nessa região vale

$$T_{11} = \frac{32\pi}{\rho_1(s)} \sin \delta_1(s) e^{i\delta_1(s)}. \quad (6.7)$$

Os elementos não diagonais $T_{12} = T_{21}$ se escrevem

$$T_{12} = -\frac{1}{2} \frac{32\pi\sqrt{s}}{\sqrt{|p_1||p_2|}} \sqrt{1 - \eta^2(s)} e^{i[\delta_1(s) + \delta_2(s)]}. \quad (6.8)$$

As funções $\delta_{1,2}(s)$ e $\eta(s)$ determinam completamente a matriz T , e já haviam sido estudadas em [12].

Devido ao fato de não considerar as ressonâncias como graus de liberdade explícitos do problema, o acoplamento delas com os pseudoescalares é simulado no modelo, de maneira aproximada, por meio de uma constante de normalização χ .

Essas definições permitem que façamos uma dedução de $\Pi_{KLL}(s)$. De acordo com a Eq. (4.102), a equação para $\Pi_{KLL}(s)$ em notação matricial é

$$\Pi_{KLL}(s) = \chi R[1 + T(-\bar{\Omega})] \quad (6.9)$$

que, devido à simetria de T e ao fato de $\bar{\Omega}$ ser diagonal, pode ser escrita

$$\Pi_{KLL}(s) = \chi R + \chi R(-\bar{\Omega})T. \quad (6.10)$$

O elemento responsável pela produção de píons é dado por

$$\Pi_{KLL}^1(s) = \chi R_1 + \chi R_1(-\bar{\Omega}_{11})T_{11} + \chi R_2(-\bar{\Omega}_{22})T_{21}. \quad (6.11)$$

No espírito da nossa descrição, traduzimos essa equação nos diagramas da figura 6.1.

Nessa figura, os propagadores das ressonâncias são agora substituídos por pontos, os quais representam as funções $R_i(s)$. Uma enorme vantagem da parametrização de T em termos de defasagens e da inelasticidade é permitir que se obtenha uma expressão simples para Π_{KLL} . Com a expressão de $\bar{\Omega}$ em termos de $\rho_i(s)$ podemos facilmente escrever

$$\Pi_{KLL}^1(s) = \frac{1}{2}\chi \left[R_1(s)(1 + \eta(s)e^{2i\delta_1(s)}) - iR_2(s)\sqrt{\frac{|p_2|}{|p_1|}}\sqrt{1 - \eta^2(s)}e^{i[\delta_1(s) + \delta_2(s)]} \right]. \quad (6.12)$$

Figura 6.1: Representação em diagramas para Π_{KLL} . Os pontos representam as funções $R_1(s)$ e $R_2(s)$.

Essa expressão foi usada pela colaboração franco-polonesa para descrever as interações de estado final no decaimento $B \rightarrow \pi\pi K$ na região do $f_0(980)$ [42, 45]. Uma outra grande vantagem que ela apresenta, além da simplicidade, é o acoplamento de canais. Esse efeito é muito importante na descrição do $f_0(980)$, cujo pólo está muito próximo da abertura do canal $K\bar{K}$, o que acontece para $s \approx 987$ MeV. O $f_0(980)$ tem uma largura de aproximadamente 40 – 100 MeV e por isso, manifesta-se também depois do limiar deste canal. Além disso, essa ressonância decai muitas vezes em um par $K\bar{K}$. Por todas essas razões, o acoplamento de canais é um ingrediente fundamental na descrições desse estado.

As funções $R_1(s)$ e $R_2(s)$ podem ser encontradas no trabalho de Meissner e Oller [59] e, após algumas simplificações, vemos que elas dependem de s de uma forma muito simples. Por exemplo, para $R_1(s)$ temos

$$R_1(s) = a + bs \quad (6.13)$$

com $a = 0.566$ e $b = 0.414$ GeV⁻². Como as defasagens e a inelasticidade já haviam sido estudadas previamente em [12], temos todos os ingredientes necessários² para se traçar o perfil de Π_{KLL}/χ que aparece na figura 6.2. O pico do $f_0(980)$ é bastante nítido na região próxima de 1 GeV. Na região de baixa energia existe uma estrutura semelhante à que vimos no capítulo anterior, e que identificamos com o σ .

Podemos comparar o resultado de Π_{KLL} com os nossos na região de baixa energia. Para energias inferiores ao limiar do canal $K\bar{K}$, a inelasticidade vale $\eta \equiv 1$ e isso introduz uma grande simplificação na expressão (6.12) que passa a ser

$$\Pi_{KLL}(s) = \chi R_1(s) \cos \delta_0^0 e^{i\delta_0^0}. \quad (6.14)$$

Essa expressão tem uma estrutura semelhante à nossa na aproximação de matriz K

$$\Pi(s) = g \frac{1}{m_\sigma^2 - s} \cos \delta_0^0 e^{i\delta_0^0}. \quad (6.15)$$

²Os resultados de KLL-1997 são reproduzidos com o código enviado por R. Kamiński.

Figura 6.2: Partes real, imaginária e módulo de Π_{KLL} . Vê-se claramente o pico do $f_0(980)$. O resultado está normalizado de maneira arbitrária.

Figura 6.3: Comparação do resultado de $\Pi(s)_{\sigma-L}$ obtido com o modelo σ -linear em aproximação de matriz K com o resultado de KLL. Os resultados estão normalizados no limiar.

Contudo, como já frizamos, a função de produção que introduzimos não possui o zero quando $\delta = 90^\circ$. Esse não é o caso para o modelo de KLL pois, como produção e espalhamento não são tratados concomitantemente, Π_{KLL} tem um zero por volta de 830 MeV, que pode ser visto na figura 6.2.

Levando um pouco mais adiante a comparação entre os modelos, podemos utilizar o resultado do modelo σ -L, por exemplo, em aproximação de matriz K . Nesse caso a constante de acoplamento é determinada pelo modelo e é dada na Eq. (5.85). Próximo ao limiar podemos expandir o resultado em potências de s/m_σ^2 e temos, aproximadamente,

$$\begin{aligned}\Pi(s)_{\sigma-L} &= g \left(\frac{1}{m_\sigma^2} + \frac{s}{m_\sigma^4} \right) \cos \delta_0^0 e^{i\delta_0^0} \\ &= \frac{g_{\sigma\pi\pi}}{m_\sigma^2} (\alpha + \beta s) \cos \delta_0^0 e^{i\delta_0^0}.\end{aligned}\quad (6.16)$$

Essa expressão mostra que, ambos os resultados, na região próxima ao limiar, têm o mesmo tipo de dependência com a energia. Para compará-los de maneira mais direta, na figura 6.3 mostramos as partes real, imaginária e o módulo de $\Pi(s)_{\sigma-L}$ e $\Pi(s)_{KLL}$.

Com uso da eq. (6.16) podemos também encontrar uma estimativa para a normalização χ , numericamente temos

$$\chi \approx g_{\sigma\pi\pi}/m_\sigma^2 = 10,5 \text{ GeV}^{-1}.\quad (6.17)$$

Esse resultado está em razoável acordo com a estimativa de χ feita por Meißner-Gardner [60] e pela colaboração franco-polonesa [42] $\chi \approx 15 - 30 \text{ GeV}^{-1}$.

Um trabalho com o objetivo de empregar esse modelo na descrição da onda S do decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$ está em curso. Alguns resultados preliminares foram apresentados na X Hadron Physics em 2007 [61]. O apêndice F contém o *proceeding* escrito para essa conferência.

Capítulo 7

Conclusões

Nos decaimentos de um méson pesado M , como o D ou B , uma ressonância pode ser produzida no vértice fraco, juntamente com um pseudoescalar leve P . O sistema RP constitui um estado intermediário dos decaimentos em três corpos $M \rightarrow PPP$. Esse tipo de decaimento ressonante tornou-se particularmente importante com a descoberta do $\sigma(500)$ nos decaimentos $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$. Normalmente, a análise desses dados é feita com o chamado modelo isobárico, que tem pouco embasamento teórico. Por isso os valores de massa e largura com ele determinados são pouco confiáveis.

Neste trabalho introduzimos uma função de produção $\Pi(s)$ que descreve a propagação e o decaimento de uma ressonância escalar R oriunda do vértice fraco do decaimento de um méson pesado. Por simplicidade, trabalhamos na aproximação de quase dois corpos, pois consideramos que os dois pseudoescalares subprodutos do decaimento de R não interagem com o terceiro, produzido no vértice fraco. As relações entre a produção e espalhamento já haviam sido estudadas e o teorema de Watson assegura que, no regime elástico, a fase de $\Pi(s)$ é idêntica àquela do espalhamento. Contudo, o teorema não determina o módulo dessa função, que contém a informação sobre a ressonância. Para determinar como as informações do espalhamento se relacionam com o módulo de $\Pi(s)$, começamos por estudar a matriz T . Para isso, utilizamos a equação de Bethe-Salpeter e, assim, introduzimos um esquema de unitarização para o kernel dessa equação. Nesse esquema utilizamos a função de Green de dois corpos $\bar{\Omega}$ que está diretamente relacionada com a integral de um *loop* no canal s . Devido a propriedades bastante gerais de analiticidade, a função de Green $\bar{\Omega}$ tem uma parte real e outra imaginária. Nossos resultados representam uma generalização da aproximação de matriz K , que envolve apenas a parte imaginária e é bastante usual na literatura.

De maneira coerente, determinamos a função $\Pi(s)$ que representa a propagação de

uma ressonância escalar que termina por decair num par PP . Nosso principal resultado é uma expressão para $\Pi(s)$ em termos das fases do espalhamento e da função de Green $\bar{\Omega}$. Esse resultado é novo e representa um aperfeiçoamento do teorema de Watson pois, além da fase de $\Pi(s)$, determinamos seu módulo em função de $\delta(s)$. Assim, no caso de um canal e com uma ressonância escalar, a função de produção $\Pi(s)$ se escreve

$$\Pi(s) = g \frac{\cos \delta(s)}{m_R^2 - s} \left[1 + \frac{\tan \delta(s)}{\tan \omega(s)} \right] e^{i\delta(s)}. \quad (7.1)$$

Esse resultado tem poucas ambigüidades pois depende da fase $\delta(s)$, que pode ser medida, da fase $\omega(s)$, que é bem controlada teoricamente, de m_R , que está ligada à fase do espalhamento por $\delta(m_R^2) = 90^\circ$. A dependência da constante de acoplamento g , que é menos bem determinada, é apenas multiplicativa e não influi na relação com o espalhamento.

Concluimos esta dissertação ilustrando num caso real a importância do nosso resultado. Tomamos a parametrização de Colangelo, Gasser e Leutwyler para a fase $\pi\pi$ no canal escalar-isoescalar $\delta_0^0(s)$. Ela é fruto de um estudo muito criterioso, no qual a simetria de cruzamento é garantida por meio das equações de Roy e a simetria quiral é imposta nas proximidades do limiar. Com essas restrições, a fase é ajustada a dados medidas experimentais da fase e, por isso, representa o estado da arte do estudo da onda S do espalhamento $\pi\pi$. A fase δ_0^0 assume uma forma paramétrica simples, que já introduzimos no capítulo 5, mas que é interessante recordar

$$\tan \delta_0^0(s) = \rho(s) \left[a + bs/\mu^2 + cs^2/\mu^4 + ds^3/\mu^6 \right] \frac{4\mu^2 - s_0}{s - s_0}. \quad (7.2)$$

Os parâmetros a , b , c e d estão na tabela 5.1. A fase δ_0^0 é mostrada na figura 7.3(b). O ponto $s_0 = (846\text{MeV})^2$, para o qual vale $\delta(s_0) = 90^\circ$, pode ser imediatamente identificado com a nossa massa nominal m_R^2 . Portanto, a parametrização da fase de CGL fornece tudo aquilo de que precisamos para estudar a perfil de $\Pi(s)/g$ e o resultado assim obtido aparece na figura 7.1.

Uma das características mais importantes desse perfil reside na estrutura do tipo pico largo que ela apresenta próximo a 470 MeV. Não por acaso, a amplitude de CGL um pólo, identificado com o pólo do σ em

$$\sqrt{s_\sigma} = 454 - i290 \text{ MeV}. \quad (7.3)$$

Portanto, nossa função de produção, que é construída de forma coerente com a equação de Bethe-Salpeter, reproduz naturalmente o fato do σ se manifestar como um pico largo

Figura 7.1: Perfil de $\Pi(s)/g$ obtido com a parametrização da fase de CGL [26].

Figura 7.2: Perfil de $|T_0^0|$ do espalhamento $\pi\pi$ obtido com a fase δ_0^0 de CGL [26].

no decaimento, muito embora não haja pico algum na amplitude de espalhamento, como mostramos novamente na figura 7.2.

Outra característica interessante da equação 7.1 é de permitir uma quantificação do erro introduzido pela aproximação de matriz K . Mostramos, no capítulo 4, que nessa aproximação, para o termo $\tan \delta / \tan \omega$, temos

$$\tan \delta / \tan \omega \rightarrow 0. \quad (7.4)$$

Assim, o termo entre colchetes da Eq. (7.1) representa a razão entre nossa abordagem e aquela em matriz K . O gráfico dessa razão está mostrado na figura 7.3(a), o que

nos permite concluir que o erro da aproximação de matriz K está em torno 20 – 30% no intervalo considerado. As fases $\omega(s)$ e $\delta_0^0(s)$ aparecem, para comparação, na figura 7.3(b). Recentemente submetemos um trabalho no qual apresentamos esses resultados (ver Apêndice F).

Figura 7.3: (a) Razão entre nosso resultado e aquele obtido em aproximação de matriz K . (b) Fases δ_0^0 , Eq. (7.2), e $\omega(s)$ Eq. (4.62), em graus.

As aproximações feitas no nosso tratamento determinam o intervalo de validade de $\Pi(s)$. Das aproximações, duas são predominantes: trabalhamos em um só canal e com apenas uma ressonância escalar. A fenomenologia do espalhamento $\pi\pi$ mostra claramente que há, além do σ , uma segunda ressonância no canal escalar-isoescalar abaixo de 1 GeV a saber, o $f_0(980)$. É de se esperar que os efeitos dessa ressonância sejam muito significativos perto de $\sqrt{s} = 980$ MeV. Esse valor praticamente coincide com a abertura do canal $K\bar{K}$, que ocorre em $\sqrt{s}_{K\bar{K}} = 2m_K \approx 987$ MeV. Isso motiva o fato dos gráficos que mostramos serem feitos apenas até $\sqrt{s} = 0.81$ MeV. A inclusão de outras ressonâncias e de dois canais representa uma extensão possível deste trabalho.

Outra extensão diz respeito a uma nova medida da colaboração E791. Graças a uma análise sugerida por Brian Meadows, esta colaboração determinou de forma quase independente de modelo a amplitude π^+K^- da onda S no decaimento $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ [62]. Essa determinação prescinde de funções de Breit-Wigner. O canal πK é muito semelhante ao nosso caso, pois ele apresenta a controversa ressonância $\kappa(800)$. Embora existam algumas dificuldades adicionais nesse sistema, como por exemplo a inexistência de uma parametrização segura da fase como a de CGL, após algum esforço, a nossa função $\Pi(s)$ poderá ser comparada ao novo resultado experimental da E791. Recentemente iniciamos um trabalho que tem esse objetivo.

Uma outra aplicação possível dos nossos resultados diz respeito às interações de estado final em decaimentos de três corpos do méson B . Elas são um importante ingrediente

para a determinação da violação de CP . O decaimento $B \rightarrow f_0 K^0$, por exemplo, é usado para esse fim [63]. Sem um conhecimento preciso delas, a medida é contaminada pelo erro. Como alguns decaimentos em três corpos têm sido propostos para medir os ângulos da matriz CKM [64], é fundamental limpar as medidas de possíveis incertezas hadrônicas. Somente assim é possível utilizar esses sistemas, de forma confiável, para testar o modelo padrão das interações fundamentais.

Apêndice A

Convenções e notação

Neste trabalho utilizamos o sistema natural de unidades

$$\hbar = c = 1.$$

Quando necessário utilizamos os seguintes valores [1]

$$m_{\pi^\pm} = 139,57018 \text{ MeV}, \quad (\text{A.1})$$

$$m_{\pi^0} = 134,9766 \text{ MeV}, \quad (\text{A.2})$$

$$m_{K^\pm} = 493,677 \text{ MeV}, \quad (\text{A.3})$$

$$m_{K^0} = 497,648 \text{ MeV}, \quad (\text{A.4})$$

$$f_\pi = 93 \text{ MeV}. \quad (\text{A.5})$$

$$(\text{A.6})$$

Como trabalhamos com simetria de isospin $SU(2)$ normalmente tomamos a massa do pión como sendo a média entre os carregados e o neutro

$$\mu = \frac{2m_{\pi^\pm} + m_{\pi^0}}{3}. \quad (\text{A.7})$$

As partes real e imaginária de um número complexo z (ou de uma função complexa) são denotadas por

Parte real: $\Re z$

Parte imaginária: $\Im z$.

Para grandezas relativísticas utilizamos a convenção para métrica segundo a qual

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (\text{A.8})$$

O produto escalar de dois quadrivetores a^μ e b^μ nesse espaço se escreve

$$a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{A.9})$$

Apêndice B

Cinemática

B.1 Variáveis de Mandelstam

Para o espalhamento de duas partículas

$$P_a(p)P_b(q) \rightarrow P_a(p')P_b(q')$$

P_a de massa μ_a e P_b de massa μ_b utilizamos as variáveis de Mandelstam usuais

$$s = (p + q)^2, \tag{B.1}$$

$$t = (p - p')^2, \tag{B.2}$$

$$u = (p - q')^2. \tag{B.3}$$

Que obedecem o seguinte vínculo

$$s + t + u = \sum_i m_i^2 = 2\mu_a^2 + 2\mu_b^2. \tag{B.4}$$

Por estarem vinculadas, o espalhamento pode ser descrito com apenas duas delas. Por isso, podemos escolher trabalhar apenas com s e o ângulo de espalhamento θ calculado no referencial do centro de massa. No caso de duas partículas de mesma massa μ temos

$$s = 4(\mathbf{p}^2 + \mu^2), \tag{B.5}$$

$$t = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta), \tag{B.6}$$

$$u = -2\mathbf{p}^2(1 + \cos \theta). \tag{B.7}$$

onde

$$\mathbf{p}^2 = s/4 - \mu^2. \tag{B.8}$$

B.2 Decaimento

Para o decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$, em especial no capítulo 3 utilizamos a seguinte cinemática. Os quadrimomentos das partículas são rotulados, no referencial do laboratório da maneira seguinte

$$p_{\pi^-} = p_-, \quad (\text{B.9})$$

$$p_{\pi_1^+} = p_1, \quad (\text{B.10})$$

$$p_{\pi_2^+} = p_2, \quad (\text{B.11})$$

$$p_{D^+} = p_D. \quad (\text{B.12})$$

Introduzimos invariantes de Lorentz semelhantes às variáveis de Madelstam do espalhamento. São eles

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_D - p_-)^2, \quad (\text{B.13})$$

$$t = (p_- + p_1)^2 = (p_D - p_2)^2, \quad (\text{B.14})$$

$$u = (p_- + p_2)^2 = (p_D - p_1)^2. \quad (\text{B.15})$$

Essas variáveis obedecem à relação

$$s + t + u = m_D^2 + 3m_\pi^2, \quad (\text{B.16})$$

pois todas as partículas estão na camada massa, em especial, para os píons temos

$$p_1^2 = p_2^2 = p_-^2 = m_\pi^2. \quad (\text{B.17})$$

Com essa escolha, as ressonâncias ocorrem sempre nos canais u e t , pois são neutras.

No contexto do modelo isobárico algumas grandezas calculadas em outros referenciais aparecem. O momento de um dos píons ressonantes no referencial da ressonância é dado por

$$|\mathbf{p}^*| = \sqrt{x/4 - m_\pi^2} \quad (\text{B.18})$$

onde $x = \{u, t\}$ dependendo do canal de desintegração. Nas expressões para $\mathcal{M}^J$ aparece o ângulo formado entre os píons ressonantes e o pión não ressonante $\theta_{u,t}$, calculado no referencial dos píons ressonantes. Para o caso do decaimento no canal u temos

$$\cos \theta_u = \frac{s - t}{4|\mathbf{p}_-^*||\mathbf{p}_1^*|} \quad (\text{B.19})$$

onde

$$p_1^* \equiv |\mathbf{p}_1^*| = \sqrt{E_1 - m_\pi^2} \quad (\text{B.20})$$

com a energia da partícula sendo dada por

$$E_1 = \frac{1}{2} \frac{m_D^2 - t - m_\pi^2}{\sqrt{t}}. \quad (\text{B.21})$$

Outra grandeza que entra nos fatores de forma do modelo isobárico é o momento do π^+ não ressonante calculado no CM do D^+ . Caso os píons ressonantes estejam no canal u temos

$$|\bar{\mathbf{p}}_1| \equiv \bar{p}_1 = \sqrt{\bar{E}_1^2 - m_\pi^2} \quad (\text{B.22})$$

com

$$\bar{E}_1 = \frac{m_D^2 + m_\pi^2 - u}{2m_D}. \quad (\text{B.23})$$

O caso em que os píons ressoam no canal t é obtido fazendo $u \leftrightarrow t$.

Apêndice C

Diagramas de Dalitz

Os *diagramas de Dalitz* são uma ferramenta muito importante na análise de decaimentos em três corpos. Eles foram introduzidos por Richard Dalitz (1925-2006), no estudo dos decaimentos do antigo méson τ [65]. No início, foram empregados na determinação do spin de partículas como o $\omega(782)$. O emprego desses diagramas no estudo de ressonâncias como o $\sigma(500)$ surgiu com a análise dos decaimentos dos mésons D e B . Houve nesse processo uma certa modernização dos diagramas; quem passaram a ser invariantes de Lorentz. Nos antigos diagramas de Dalitz, com o objetivo de explorar simetrias de decaimentos como $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$, empregavam-se as energias cinéticas das partículas do estado final.

Um diagrama de Dalitz é um histograma em 3 dimensões, sendo que dois dos eixos são, normalmente, invariantes de Lorentz formados com os quadrimomentos das partículas do estado final. Existe no espaço de fase uma região cinematicamente permitida para decaimentos em três corpos. Essa região delimita uma fronteira dentro da qual estarão todos os eventos observados. A principal característica do diagrama de Dalitz é que *o espaço de fase é constante dentro da fronteira permitida*. Isso nos diz que qualquer região privilegiada do diagrama nos dá informação sobre a dinâmica do decaimento. Para demonstrar esse fato vamos usar a notação do PDG [1] na qual a largura diferencial de decaimento de uma partícula em n partículas é dada por

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2M} |T|^2 d\phi_n(P; p_1, \dots, p_n). \quad (\text{C.1})$$

Nessa equação T é a matriz- T para o decaimento em questão, e M é a massa da partícula que decai. O elemento de espaço de fase dado por

$$d\phi_n(P; p_1, \dots, p_n) = \delta^4(P - \sum_{i=1}^n p_i) \prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (\text{C.2})$$

onde P é o quadrimomento da partícula que decai, p_i e E_i o quadrimomento e a energia da i -ésima partícula do estado final.

Um ingrediente da prova é a identidade

$$\int d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i^0) f(p_i) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{2E_i} f(E_i, \mathbf{p}), \quad (\text{C.3})$$

onde $f(p_i)$ é uma função teste. É essa identidade que permite escrevermos o elemento de espaço de fase como $d^3 \mathbf{p}/2E_i$, que não é uma forma explicitamente invariante de Lorentz. Para provar essa identidade reescrevemos a função δ que aparece do lado esquerdo da última equação

$$\int d^4 p_i \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i^0) f(p_i) = \int d^3 \mathbf{p}_i dp_i^0 \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2}} \delta(p_i^0 - \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2}) f(p_i), \quad (\text{C.4})$$

nessa última expressão foi usado que a função $\Theta(p_0)$ seleciona as soluções de energia positiva, bem como as conhecidas propriedades da função δ de Dirac. Fazemos então a integral usando a função δ e indentificamos $E_i = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2}$; isso prova a eq. (C.3).

Vamos em seguida provar a afirmação de que o espaço de fase é constante na região cinematicamente permitida para o decaimento seguindo o que foi feito em [66].

Calulemos então explicitamente $d\phi_3$ que aparece na eq. (C.1). Temos

$$d\phi_3 = \delta^4(P - \sum_i^3 p_i) \prod_i^3 \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_i}, \quad (\text{C.5})$$

e portanto

$$\phi_3 = \frac{1}{(2\pi)^9} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2E_1} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{2E_2} \frac{d^3 \mathbf{p}_3}{2E_3} \delta^4(P - p_1 - p_2 - p_3). \quad (\text{C.6})$$

Escrevemos então, usando a identidade dada pela eq. (C.3),

$$\frac{d^3 \mathbf{p}_1}{2E_1} = d^4 p_1 \delta(p_1^2 - m_1^2) \Theta(p_1^0),$$

e em seguida usamos

$$dE_i = \frac{1}{2} d(|\mathbf{p}_i^2|)$$

para reescrevermos os elementos de espaço de fase referentes às partículas 2 e 3 como

$$\frac{d^3 \mathbf{p}_{2,3}}{2E_{2,3}} = \frac{1}{2} |\mathbf{p}_{2,3}| d(\cos \theta_{2,3}) d\varphi_{2,3} dE_{2,3}. \quad (\text{C.7})$$

Escolheremos θ_2 como sendo o ângulo formado pelos momentos $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$, sem perda de generalidade. O resultado para ϕ_3 fica

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \frac{1}{(2\pi)^9} \int d^4 p_1 \delta(p_1^2 - m_1^2) \Theta(p_1^0) \frac{1}{2} |\mathbf{p}_2| d(\cos \theta_2) d\varphi_2 dE_2 \\ &\quad \times \frac{1}{2} |\mathbf{p}_3| d(\cos \theta_3) d\varphi_3 dE_3 \delta^4(P - p_1 - p_2 - p_3). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Passamos então para o referencial da partícula que decai, o que significa termos $P = (M, 0)$, e separamos as partes temporal e espacial da função δ

$$\delta^4(P - p_1 - p_2 - p_3) = \delta(M - E_1 - E_2 - E_3)\delta^3(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3).$$

Em seguida, usando as funções $\delta(M - E_1 - E_2 - E_3)$ e $\delta^3(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)$ fazemos as integrais em p_1 e temos

$$p_1^0 = E_1 = M - (E_2 + E_3), \quad (\text{C.9})$$

o que implica em

$$p_1^2 = (M - E_2 - E_3)^2 - \mathbf{p}_1^2. \quad (\text{C.10})$$

Além disso

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3, \quad (\text{C.11})$$

e portanto

$$\mathbf{p}_1^2 = \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + 2 \cos \theta_2 |\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3|. \quad (\text{C.12})$$

Após a integração em p_1 o argumento da antiga função $\delta(p_1^2 - m_1^2)$ se torna

$$p_1^2 - m_1^2 = M^2 + (E_1 + E_2)^2 - 2M(E_1 + E_2) - \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_3^2 - 2 \cos \theta_2 |\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3| - m_1^2, \quad (\text{C.13})$$

e o resultado para ϕ_3 fica sendo

$$\begin{aligned} \phi_3 = & \frac{1}{(2\pi)^9} \int \delta(M^2 + (E_1 + E_2)^2 - 2M(E_1 + E_2) - \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_3^2 - 2 \cos \theta_2 |\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3| - m_1^2) \\ & \times \theta(M - E_2 - E_3) \frac{1}{2} |\mathbf{p}_2| d(\cos \theta_2) d\varphi_2 dE_2 \frac{1}{2} |\mathbf{p}_3| d(\cos \theta_3) d\varphi_3 dE_3. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Podemos fazer as integrais em φ_3 , φ_2 e $\cos \theta_3$ obtendo um fator de $8\pi^2$. O resultado que obtemos é então

$$\begin{aligned} \phi_3 = & \frac{2\pi^2}{(2\pi)^9} \int \delta(M^2 + (E_1 + E_2)^2 - 2M(E_1 + E_2) - \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_3^2 - 2 \cos \theta_2 |\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3| - m_1^2) \\ & \times \theta(M - E_2 - E_3) |\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3| d(\cos \theta) dE_2 dE_3, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

com θ sendo o ângulo formado por $\mathbf{p}_2$ e $\mathbf{p}_3$. Agora tomamos apenas a integral em θ e, usando as propriedades da função δ de Dirac, temos

$$\begin{aligned} & \int \delta(M^2 + (E_1 + E_2)^2 - 2M(E_1 + E_2) - \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_3^2 - 2 \cos \theta |\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3| - m_1^2) |\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3| d(\cos \theta) \\ & = \frac{1}{2} \int \delta(\cos \theta - r_0) d(\cos \theta), \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

com r_0 sendo a raiz do argumento da função δ que é dada por

$$r_0 = \frac{M^2 + (E_1 + E_2)^2 - 2M(E_1 + E_2) - \mathbf{p}_2^2 - \mathbf{p}_3^2 - m_1^2}{2|\mathbf{p}_2| |\mathbf{p}_3|}. \quad (\text{C.17})$$

Podemos então fazer a integral em θ , que é trivial,

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \delta(\cos \theta - r_0) d(\cos \theta) = \frac{1}{2} \Theta(1 - r_0). \quad (\text{C.18})$$

O argumento da função Θ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} 1 - r_0 &= 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3| - M^2 - (E_1 + E_2)^2 + 2M(E_1 + E_2) + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + m_1^2 \\ &= 2\sqrt{(E_2^2 - m_2^2)(E_3^2 - m_3^2)} + m_1^2 - M^2 - m_2^2 - m_3^2 - 2E_2E_3 + 2M(E_2 + E_3). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

O resultado final obtido para o espaço de fase é

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \frac{2\pi^2}{(2\pi)^9} \int dE_2 dE_3 \theta(M - E_2 - E_3) \\ &\times \theta \left[2\sqrt{(E_2^2 - m_2^2)(E_3^2 - m_3^2)} + m_1^2 - M^2 - m_2^2 - m_3^2 - 2E_2E_3 + 2M(E_2 + E_3) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

As funções Θ presentes nessa equação definem a fronteira do diagrama de Dalitz. Eventos fora dessa fronteira têm espaço de fase nulo, enquanto eventos dentro dela têm espaço de fase constante. O significado físico da fronteira nada mais é do que a conservação da energia e do momento nos casos extremos em que $\cos \theta = \pm 1$. Isso pode ser visto se escrevermos no referencial da partícula que decai as expressões de conservação do momento e da energia

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0, \quad (\text{C.21})$$

$$E_1 + E_2 + E_3 = M. \quad (\text{C.22})$$

Para o momento podemos escrever quando $\cos \theta = 1$

$$\mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{p}_3| = \mathbf{p}_1^2. \quad (\text{C.23})$$

Escrevendo essa expressão em termos das massas e energias vemos que a conservação implica que

$$E_2^2 - m_2^2 + E_3^2 - m_3^2 + 2\sqrt{(E_2^2 - m_2^2)(E_3^2 - m_3^2)} = (M - E_2 - E_3)^2 - m_1^2, \quad (\text{C.24})$$

o que é equivalente à função Θ da eq. (C.20).

Portanto, a fronteira de um diagrama de Dalitz sempre corresponde ao caso em que, no referencial da partícula que decai, duas das partículas no estado final saem com momentos paralelos ou antiparalelos, $\cos \theta = \pm 1$.

Na prática, para fazer um diagrama de Dalitz, costuma-se escolher duas das três variáveis de Mandelstam possíveis para um decaimento em três corpos, que construímos no apêndice anterior. Explorando esse fato, o PDG fornece fórmulas bastante práticas para se calcular a fronteira de um diagrama de Dalitz em que se escolheram as variáveis $m_{12}^2 = (p_1 + p_2)^2$ e $m_{23}^2 = (p_2 + p_3)^2$ como eixos. São elas, para um dado $(m_1 + m_2)^2 < m_{12}^2 < (M - m_3)^2$,

$$(m_{23}^2)_{\max} = (E_1^* + E_2^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} - \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2} \right)^2, \quad (\text{C.25})$$

$$(m_{23}^2)_{\min} = (E_1^* + E_2^*)^2 - \left(\sqrt{E_2^{*2} - m_2^2} + \sqrt{E_3^{*2} - m_3^2} \right)^2. \quad (\text{C.26})$$

Nessas expressões $E_{2,3}^*$ são as energias das partículas 2 e 3 no referencial de 1 e 2, que valem, como deduzido no Apêndice A,

$$E_2^* = \frac{(m_{12}^2 - m_1^2 + m_2^2)}{2m_{12}}, \quad (\text{C.27})$$

$$E_3^* = \frac{(M^2 - m_{12}^2 - m_3^2)}{2m_{12}}. \quad (\text{C.28})$$

Utilizando as eqs. (C.25) e (C.26) podemos calcular facilmente a fronteira de diagramas de Dalitz. Na figura C.1 vemos essa fronteira para o caso do decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$.

Figura C.1: Fronteira do diagrama de Dalitz para o decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$.

Outros dois exemplos estão nas figuras C.2(a) e C.2(b). A primeira mostra a fronteira para o decaimento $\omega(782) \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$. A segunda mostra o exemplo de fronteira que

consta no PDG [1]. Esse caso é interessante pois ilustra o uso de diagramas de Dalitz para espalhamentos em que no estado final há três partículas. Nesse caso, o papel da massa M é feito por $\sqrt{s} = 3 \text{ GeV}$, e temos um estado final composto por $\pi^+ \bar{K}^0 p$.

Figura C.2: (a) Fronteira do diagrama de Dalitz para o decaimento $\omega(782) \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$. (b) Fronteira do diagrama de Dalitz para o estado final $\pi^+ \bar{K}^0 p$ a $\sqrt{s} = 3 \text{ GeV}$.

Apêndice D

Integral de loop

O diagrama de *loop* que é relevante para esse trabalho está representado na figura D.1. Nessa figura, a linha cheia corresponde a um bóson escalar de massa μ_a , a linha pontilhada a um bóson de massa μ_b . O quadrimomento total fluindo no diagrama é P^μ . A distribuição do momento no *loop* está indicada na figura. O momento que flui no *loop* será chamado Q^μ e é sobre esse momento que deverá ser feita a integral.

Figura D.1: Integral de *loop* do tipo bolha. A linha contínua representa um bóson sem spin de massa μ_a , a linha pontilhada representa um bóson escalar de massa μ_b .

Amputados os propagadores e fatorados os vértices, a integral que temos de fazer é

$$I = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P/2 + Q)^2 - \mu_a^2 + i\epsilon} \frac{1}{(P/2 - Q)^2 - \mu_b^2 + i\epsilon}. \quad (\text{D.1})$$

Serão omitidos os $i\epsilon$, trabalharemos então com

$$I = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P/2 + Q)^2 - \mu_a^2} \frac{1}{(P/2 - Q)^2 - \mu_b^2}; \quad (\text{D.2})$$

a tarefa consiste em resolver essa integral divergente. Para fazê-lo introduzimos um parâmetros de Feynman x para reescrever o integrando de (D.2) usando

$$\frac{1}{AB} = \Gamma(2) \int_0^1 dx \frac{1}{[(1-x)A + xB]^2} = \Gamma(2) \int_0^1 dx \frac{1}{\mathcal{D}^2}, \quad (\text{D.3})$$

onde

$$\mathcal{D} = (1-x)A + B. \quad (\text{D.4})$$

Para o caso estudado o resultado para $\mathcal{D}$ é

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (1-x)[(P/2 + Q)^2 - \mu_a^2] + x[(P/2 - Q)^2 - \mu_b^2] \\ &= (1-x)[P^2/4 + Q^2 + P \cdot Q - \mu_a^2] + x[P^2/4 + Q^2 - P \cdot Q - \mu_b^2] \\ &= Q^2 + (1-2x)P \cdot Q - (1-x)\mu_a^2 - x\mu_b^2 \\ &= Q^2 + 2Q \cdot \eta - \Sigma^2, \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

onde introduzimos a seguinte notação

$$\eta = (1-2x)P/2, \quad (\text{D.6})$$

$$\Sigma^2 = (1-x)\mu_a^2 + x\mu_b^2 - P^2/4. \quad (\text{D.7})$$

Para que o denominador $\mathcal{D}$ fique livre de termos de ordem Q^μ completamos o quadrado na Eq. (D.5) escrevendo

$$\mathcal{D} = (Q + \eta)^2 - \eta^2 - \Sigma^2. \quad (\text{D.8})$$

Em seguida fazemos uma translação na variável de integração

$$Q + \eta = l \quad (\text{D.9})$$

e o denominador do integrando fica sendo

$$\mathcal{D} = l^2 - \Delta, \quad (\text{D.10})$$

onde usamos a notação

$$\Delta = \eta^2 + \Sigma^2 = (1-x)\mu_a^2 + x\mu_b^2 - x(1-x)P^2. \quad (\text{D.11})$$

Após essa manipulação, a integral a ser resolvida fica então

$$I = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2}. \quad (\text{D.12})$$

Para fazer essa integral é útil passarmos para o espaço euclidiano, pois isso nos permite recorrer aos métodos usuais de integração. Isso é implementado através da mudança

$$l^0 \equiv i l_E^0 \quad l^i \equiv l_E^i,$$

o que nos dá para o quadrado de l^μ

$$l^2 = l_0^2 - \mathbf{l}^2 = -l_{0E}^2 - \mathbf{l}^2 = (-1)(l_{0E} + \mathbf{l}^2),$$

e para o elemento de integração

$$d^4 l \equiv i d^4 l_E.$$

Aliando essa mudança de variável a uma rotação de Wick, que corresponde a rodar o percurso de integração em l^0 de $+90^\circ$, temos

$$I = \frac{i}{(-1)^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2}. \quad (\text{D.13})$$

À esta última integral podemos aplicar a intuição usual, pois trabalhamos agora num espaço de quatro dimensões porém com métrica euclidiana. Podemos então estudar o comportamento da integral no limite ultravioleta. Para isso escrevemos o elemento de volume na forma usual

$$d^4 l_E = d\Omega_4 |l_E|^3 d|l_E|,$$

onde $d\Omega_4$ é o elemento de ângulo sólido em quatro dimensões. Assim, no limite ultravioleta temos

$$I \propto \int d\Omega_4 \int_0^\infty \frac{d|l_E|}{|l_E|}$$

que diverge logaritmicamente.

Para tratarmos o problema da divergência da integral utilizamos a regularização dimensional. Devemos promover a integral que está sendo feita em quatro dimensões para D dimensões, em seguida, fazemos o limite $D \rightarrow 4$ tomando o cuidado de separar os termos divergentes. Em D dimensões o que temos de calcular é

$$I_D = \frac{i}{(-1)^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{i}{(-1)^2} \int_0^1 dx \mathcal{I}_D, \quad (\text{D.14})$$

com

$$\mathcal{I}_D = \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2}. \quad (\text{D.15})$$

O elemento de volume em D dimensões se escreve

$$\frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} = \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} l_E^{(D-1)} dl_E.$$

A integral sobre o ângulo sólido pode ser feita conhecendo-se a fórmula da área da hipersfera de raio unitário [5]

$$\int d\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}.$$

A integração na parte radial pode ser feita por substituição de variáveis e com auxílio uma tabela de integrais. Primeiramente usamos a identidade

$$\int dl \frac{l^{D-1}}{(l^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int d(l^2) \frac{(l^2)^{(D/2-1)}}{(l^2 + \Delta)^2}$$

e, em seguida, fazemos a mudança de variável

$$\xi = \Delta(l^2 + \Delta)^{-1}, \quad d\xi = -\Delta(l^2 + \Delta)^{-2} dl^2,$$

cujo resultado é

$$\frac{1}{2} \int d(l^2) \frac{(l^2)^{(D/2-1)}}{(l^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{(2-D/2)} \int_0^1 d\xi \xi^{(1-D/2)} (1 - \xi)^{(D/2-1)}.$$

Usando a definição da função $B(\alpha, \beta)$ [67]

$$\int_0^1 dy y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} = B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)},$$

temos

$$\int d(l^2) \frac{(l^2)^{(D/2-1)}}{(l^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{(2-D/2)} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)}.$$

E isso encerra o cálculo da integral em D dimensões, cujo resultado é

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_D &= \int \frac{d^D l_E}{(2\pi)^D} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \int \frac{d\Omega_D}{(2\pi)^D} \int d(l^2) \frac{(l^2)^{(D/2-1)}}{(l^2 + \Delta)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^D} \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{(2-D/2)} \frac{\Gamma(D/2)\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2-D/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{(2-D/2)}. \end{aligned} \tag{D.16}$$

A próxima etapa é tomarmos com cuidado o limite $D \rightarrow 4$. Para isso escrevemos

$$D = 4 - \epsilon, \quad D/2 = 2 - \epsilon/2,$$

e fazemos $\epsilon \rightarrow 0$. Expandimos cada um dos termos

$$\begin{aligned} \Gamma(\epsilon/2) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma, \\ \left(\frac{1}{\Delta} \right)^{\epsilon/2} &= 1 - \frac{\epsilon}{2} \log(\Delta/\Lambda), \\ (4\pi)^{\epsilon/2} &= 1 + \frac{\epsilon}{2} \log(4\pi), \end{aligned}$$

e obtemos como resultado para $\mathcal{I}$ dada na Eq. (D.15) até ordem $\mathcal{O}(\epsilon)$

$$\mathcal{I}_4 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma - \log(\Delta/\Lambda) + \log(4\pi) + \mathcal{O}(\epsilon) \right]. \quad (\text{D.17})$$

Subtraíndo-se o pólo e descontando as constantes obtemos como resultado para a integral da Eq. (D.1) regularizada

$$I^{reg} = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{\Lambda}{(1-x)\mu_a^2 + x\mu_b^2 - x(1-x)P^2} \right), \quad (\text{D.18})$$

onde Λ é uma escala arbitrária introduzida para manter o argumento do logaritmo adimensional.

Para calcular-se a integral no parâmetro de Feynman x é necessário estudar o denominador do logaritmo da última equação. Esse denominador é exatamente Δ tal qual dado na Eq. (D.11). Um problema que aparece é o de saber se o Δ pode tornar-se negativo no intervalo de integração $0 < x < 1$. A resposta a essa questão reside na própria estrutura analítica do propagador completo em teoria de campos, e está contida na função densidade espectral $\rho(p^2)$ da teoria [5]. Se estudarmos as raízes de Δ como função de x encontramos

$$x_1 = \frac{1}{2P^2} \left[(P^2 + \mu_a^2 + \mu_b^2) + \sqrt{\lambda(P^2, \mu_a^2, \mu_b^2)} \right], \quad (\text{D.19})$$

$$x_2 = \frac{1}{2P^2} \left[(P^2 + \mu_a^2 + \mu_b^2) - \sqrt{\lambda(P^2, \mu_a^2, \mu_b^2)} \right]. \quad (\text{D.20})$$

Dado que Δ é uma parábola côncava em x , temos que estudar o comportamento de $\lambda(P^2, \mu_a^2, \mu_b^2)$ para sabermos onde estão as raízes de Δ . Essas duas funções aparecem nas figuras D.2(a) e D.2(b).

O comportamento de Δ e a localização de suas raízes no intervalo $0 < x < 1$ dependem, como pode ser visto, do valor do momento total P^2 fluindo no diagrama. O denominador Δ é sempre positivo neste intervalo a não ser que

$$P^2 > (\mu_a + \mu_b)^2,$$

que é exatamente o limiar de produção de um par de partículas de massas μ_a e μ_b . Portanto, se P estiver acima do limiar, o logaritmo terá uma parte imaginária, e o resultado da integral de *loop* não será puramente real. Além disso a função $\log(z)$ tem um corte ao longo do eixo real negativo, logo, o corte se manifesta também nessa integral para $P^2 > (\mu_a + \mu_b)^2$. Esse corte era esperado de propriedades bastante gerais de analiticidade [5].

Figura D.2: (a) $\lambda(P^2, \mu_a^2, \mu_b^2)$ (b) Δ . Na legenda da figura m_0 corresponde a μ_a e μ corresponde a μ_b .

Para nosso trabalho é fundamental terminarmos o cálculo da integral dada na Eq. (D.18), e para isso, identificamos $P^2 = s$. Introduzimos uma função $L(s)$ tal que

$$I^{reg} = \frac{i}{(4\pi^2)} L(s). \quad (D.21)$$

Depois de uma longa álgebra, e após algumas simplificações, obtemos como resultado

- para $0 < s < (\mu_b - \mu_a)^2$

$$L(s) = \rho(s) \log \left[\frac{\sqrt{(\mu_a - \mu_b)^2 - s} + \sqrt{(\mu_a + \mu_b)^2 - s}}{\sqrt{(\mu_a - \mu_b)^2 - s} - \sqrt{(\mu_a + \mu_b)^2 - s}} \right] - \frac{(\mu_b^2 - \mu_a^2)}{s} \log \left(\frac{\mu_b}{\mu_a} \right), \quad (D.22)$$

- para $(\mu_b - \mu_a)^2 < s < (\mu_b + \mu_a)^2$

$$L(s) = \frac{\sqrt{-\lambda(s)}}{s} \left\{ \tan^{-1} \left[\frac{\mu_a^2 + \mu_b^2 - s}{\sqrt{-\lambda(s)}} \right] - \frac{\pi}{2} \right\} - \frac{(\mu_b^2 - \mu_a^2)}{s} \log \left(\frac{\mu_b}{\mu_a} \right), \quad (D.23)$$

- para $s > (\mu_b + \mu_a)^2$

$$L(s) = \rho(s) \log \left[\frac{\sqrt{s - (\mu_a - \mu_b)^2} - \sqrt{s - (\mu_a + \mu_b)^2}}{\sqrt{s - (\mu_a - \mu_b)^2} + \sqrt{s - (\mu_a + \mu_b)^2}} \right] - \frac{(\mu_b^2 - \mu_a^2)}{s} \log \left(\frac{\mu_b}{\mu_a} \right) + i\pi\rho(s), \quad (D.24)$$

Apêndice E

Apêndice sobre a projeção

E.1 Projeção no canal isoescalar

A amplitude de espalhamento $\pi\pi$ pode ser escrita de maneira bastante geral como sendo

$$T_{\pi\pi} = \delta_{ab}\delta_{cd}\mathcal{A}(s, t, u) + \delta_{ac}\delta_{bd}\mathcal{A}(t, u, s) + \delta_{ad}\delta_{bc}\mathcal{A}(u, s, t). \quad (\text{E.1})$$

Esta amplitude contempla todos os valores de isospin possíveis. Como o pión tem $I = 1$ temos

$$T_{\pi\pi} = T^0 P^0 + T^1 P^1 + T^2 P^2, \quad (\text{E.2})$$

onde P^I é o projetor no canal de isospin I . Temos [31]

$$P^0 = \frac{1}{3}\delta_{ab}\delta_{cd}, \quad (\text{E.3})$$

$$P^1 = \frac{1}{2}(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}), \quad (\text{E.4})$$

$$P^2 = \frac{1}{2}(\delta_{ad}\delta_{bc} + \delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ab}\delta_{cd}). \quad (\text{E.5})$$

Se aplicarmos P^0 em $T_{\pi\pi}$ obtemos

$$T^0 = P^0 T = \frac{1}{3}(\delta_{ab}\delta_{cd})T_{\pi\pi} = 3\mathcal{A}(s, t, u) + \mathcal{A}(t, u, s) + \mathcal{A}(u, s, t). \quad (\text{E.6})$$

Outra maneira de se obter o mesmo resultado sem uso de projetores é o cálculo direto do elemento de matriz

$$\langle 0, 0 | T_{\pi\pi} | 0, 0 \rangle, \quad (\text{E.7})$$

usando a decomposição do estado isoescalar dada pelos coeficientes de Clebsh-Gordan

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^0\pi^0\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle]. \quad (\text{E.8})$$

E.2 Projeção na onda S

O cálculo da projeção da amplitude isoescalar do espalhamento $\pi\pi$, T^0 , no canal S de momento angular resume-se a calcular a seguinte integral

$$T_0^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz P_0(z) T^0(s, z), \quad (\text{E.9})$$

que é um caso particular da Eq. (2.64), onde $T^0(s, z)$ é dada pela Eq. (5.99). Para fazer esse cálculo usamos o fato de que as variáveis de Mandelstam não são independentes pois possuem um vínculo entre elas $s + t + u = 4\mu^2$. Precisamos então de apenas duas variáveis para descrever o espalhamento, e por isso podemos escolher descrevê-lo em termos de s e $\cos \theta$, com θ sendo o ângulo de espalhamento. Para isso reescrevemos as variáveis de Mandelstam

$$s = 4(\mathbf{p}^2 + \mu^2), \quad (\text{E.10})$$

$$t = -2\mathbf{p}^2(1 - \cos \theta), \quad (\text{E.11})$$

$$u = -2\mathbf{p}^2(1 + \cos \theta). \quad (\text{E.12})$$

Com $2\mathbf{p}^2 = (s - 4\mu^2)/2$. Essa decomposição nos permite somar os termos referentes à contribuição do diagrama de contato nos canais t e u e mostrar que essa soma não depende de θ . De fato temos

$$\frac{u - \mu^2}{f_\pi^2} + \frac{t - \mu^2}{f_\pi^2} = \frac{u + t - 2\mu^2}{f_\pi^2} = \frac{2\mu^2 - s}{f_\pi^2}. \quad (\text{E.13})$$

Esse termo não depende de z e portanto pode sair da integral em z . A contribuição não trivial à integração em z advém dos termos da troca de um σ nos canais t e u . Tomando o caso do canal t teremos a seguinte integral

$$\int_{-1}^1 dz \frac{(2\mathbf{p}^2(z - 1) - \mu^2)^2}{f_\pi^2(2\mathbf{p}^2(z - 1) - m_\sigma^2)}.$$

A integral oriunda do canal u é bastante semelhante

$$\int_{-1}^1 dz \frac{(-2\mathbf{p}^2(z - 1) - \mu^2)^2}{f_\pi^2(2\mathbf{p}^2(z + 1) - m_\sigma^2)}.$$

Fazendo algumas mudanças de variável e agrupando termos, vemos que $T_0^0(s)$ pode ser escrita como

$$T_0^0(s) = 3 \left[\frac{(s - \mu^2)}{f_\pi^2} - \frac{(s - \mu^2)^2}{f_\pi^2(s - m_\sigma^2)} \right] + \frac{2\mu^2 - s}{f_\pi^2} - \frac{4\mathbf{p}^4}{f_\pi^2} I_1 - \frac{4\mathbf{p}^2 \mu^2}{f_\pi^2} I_2 - \frac{\mu^4}{f_\pi^2} I_3, \quad (\text{E.14})$$

com as integrais $I_{i=\{1,2,3\}}$ sendo dadas por

$$I_1 = \int_0^2 dx \frac{x^2}{-2\mathbf{p}^2 x - m_\sigma^2}, \quad (\text{E.15})$$

$$I_2 = \int_0^2 dx \frac{x}{-2\mathbf{p}^2 x - m_\sigma^2}, \quad (\text{E.16})$$

$$I_3 = \int_0^2 dx \frac{1}{-2\mathbf{p}^2 x - m_\sigma^2}. \quad (\text{E.17})$$

Essas integrais são bastante simples sendo que a única característica que vale ser ressaltada é o fato de apresentarem sempre um termo

$$\log \left(1 + \frac{s - 4\mu^2}{m_\sigma^2} \right).$$

No caso da realização linear da simetria quiral o resultado final é

$$[T_0^0(s)]_{linear} = \frac{2s - \mu^2}{f_\pi^2} - 3 \frac{(s - \mu^2)^2}{f_\pi^2(s - m_\sigma^2)} + \frac{1}{f_\pi^2} B(s), \quad (\text{E.18})$$

com o fundo $B(s)$ sendo dado por

$$[B(s)]_{linear} = (s - 2m_\sigma^2) + 2 \frac{(m_\sigma^2 - \mu^2)^2}{s - 4\mu^2} \log \left(1 + \frac{s - 4\mu^2}{m_\sigma^2} \right). \quad (\text{E.19})$$

A generalização desse resultado para o caso da realização não linear da simetria quiral é

$$T_0^0(s) = \frac{2s - \mu^2}{f_\pi^2} - 3 \frac{[c_s s/2 - (c_s - c_b)\mu^2]^2}{f_\pi^2(s - m_\sigma^2)} + \frac{1}{f_\pi^2} B(s), \quad (\text{E.20})$$

com o fundo sendo agora

$$B(s) = \frac{c_s^2}{4}(s - 2m_\sigma^2) + c_s(c_s - 2c_b)\mu^2 + 2 \frac{[c_s m_\sigma^2/2 - (c_s - c_b)\mu^2]^2}{s - 4\mu^2} \log \left(1 + \frac{s - 4\mu^2}{m_\sigma^2} \right). \quad (\text{E.21})$$

Apêndice F

Trabalhos submetidos

- **Scalar resonances: scattering and production amplitudes**

autores: D. R. Boito e M. R. Robilotta.

preprint: arXiv:0705.3260 [hep-ph]

status: Aceito para publicação na Physical Review D.

- **Resonances and weak interactions in $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$ decays**

autores: D. R. Boito, B. El-Bennich, B. Loiseau e O. Leitner

preprint: arXiv:0705.4677 [hep-ph]

status: Proceeding da X Hadron Physics. Aceito para publicação no Int. Jour. Mod. Phys. E.

Referências Bibliográficas

- [1] W. M. Yao et al. (Particle Data Group), J. Phys. **G33**, 1 (2006).
- [2] S. Weinberg, Physica **A96**, 327 (1979).
- [3] Y. Nambu, Phys. Rev. Lett. **4**, 380 (1960).
- [4] M. Gell-Mann and M. Levy, Nuovo Cim. **16**, 705 (1960).
- [5] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Reading, USA: Addison-Wesley 842 p, 1995).
- [6] M. R. Robilotta, *Notas de aula do curso Física de Hádrons* (Não publicado, 1990).
- [7] R. Machleidt, K. Holinde, and C. Elster, Phys. Rept. **149**, 1 (1987).
- [8] T. P. Cheng and L. F. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics* (Oxford, Uk: Clarendon (Oxford Science Publications), 1984).
- [9] S. Weinberg, Phys. Rev. **166**, 1568 (1968).
- [10] J. Gasser and H. Leutwyler, Ann. Phys. **158**, 142 (1984).
- [11] E. M. Aitala et al. (E791), Phys. Rev. Lett. **86**, 770 (2001), [hep-ex/0007028](#).
- [12] R. Kaminski, L. Lesniak, and B. Loiseau, Phys. Lett. **B413**, 130 (1997), [hep-ph/9707377](#).
- [13] J. A. Oller and E. Oset, Nucl. Phys. **A620**, 438 (1997), [hep-ph/9702314](#).
- [14] I. Caprini, G. Colangelo, and H. Leutwyler, Phys. Rev. Lett. **96**, 132001 (2006), [hep-ph/0512364](#).
- [15] J.-Z. Bai et al. (BES), High Energy Phys. Nucl. Phys. **28**, 215 (2004), [hep-ex/0404016](#).

- [16] J. M. Link et al. (FOCUS), Phys. Lett. **B585**, 200 (2004), [hep-ex/0312040](#).
- [17] G. Bonvicini et al. (CLEO) (2006), [hep-ex/0607069](#).
- [18] T. V. Brito, F. S. Navarra, M. Nielsen, and M. E. Bracco, Phys. Lett. **B608**, 69 (2005), [hep-ph/0411233](#).
- [19] E. M. Aitala et al. (E791), Phys. Rev. Lett. **89**, 121801 (2002), [hep-ex/0204018](#).
- [20] A. Massafferri, *Medida da Razao de Ramificacao Relativa dos decaimentos $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$ e $D_s^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$ e analise de dalitz Plot do Decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^+$* . (Dissertação de Mestrado CBPF - não publicado, 1999).
- [21] G. Breit and E. Wigner, Phys. Rev. **49**, 519 (1936).
- [22] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 1994).
- [23] L. Landau and E. Lifchitz, *Mécanique Quantique* (Editions MIR - Moscou, 1966).
- [24] B. A. Lippmann and J. Schwinger, Phys. Rev. **79**, 469 (1950).
- [25] J. R. Taylor, *Scattering Theory* (Dover Publications Inc., New York, 2006).
- [26] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler, Nucl. Phys. **B603**, 125 (2001).
- [27] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory* (Wiley, New York, 1969).
- [28] D. J. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles* (New York, USA: Wiley 392p, 1987).
- [29] H. Albrecht et al. (ARGUS), Phys. Lett. **B308**, 435 (1993).
- [30] J. A. Oller, Phys. Rev. **D71**, 054030 (2005), [hep-ph/0411105](#).
- [31] L. O. Arantes and M. R. Robilotta, Phys. Rev. **D73**, 034028 (2006).
- [32] J. M. Link et al. (FOCUS) (2007), [arXiv:0705.2248](#) [[hep-ex](#)].
- [33] K. M. Watson, Phys. Rev. **95**, 228 (1954).
- [34] I. Bediaga and J. M. de Miranda, Phys. Lett. **B633**, 167 (2006).
- [35] B. Aubert (BABAR), Phys. Rev. **D76**, 011102 (2007), [arXiv:0704.3593](#) [[hep-ex](#)].
- [36] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1232 (1951).

-
- [37] R. Higa, *O potencial nucleon-nucleon e a troca de dois póns relativística* (Tese de doutorado IFUSP - não publicado, 2003).
- [38] M. O. C. Gomes, *Teoria Quântica dos Campos* (EDUSP, 2006).
- [39] N. N. Achasov and G. N. Shestakov, Phys. Rev. **D49**, 5779 (1994).
- [40] D. Black, A. H. Fariborz, S. Moussa, S. Nasri, and J. Schechter, Phys. Rev. **D64**, 014031 (2001), [hep-ph/0012278](#).
- [41] C. Dib and R. Rosenfeld, Phys. Rev. **D63**, 117501 (2001), [hep-ph/0006145](#).
- [42] A. Furman, R. Kaminski, L. Lesniak, and B. Loiseau, Phys. Lett. **B622**, 207 (2005), [hep-ph/0504116](#).
- [43] M. R. Pennington (1997), [hep-ph/9710456](#).
- [44] D. R. Boito and M. R. Robilotta, aceito para publicação na Phys. Rev. D (2007), [arXiv:0705.3260](#) [[hep-ph](#)].
- [45] B. El-Bennich, A. Furman, R. Kaminski, L. Lesniak, and B. Loiseau (2006), [hep-ph/0608205](#).
- [46] B. Kubis (2007), [hep-ph/0703274](#).
- [47] M. R. Pennington (2007), [arXiv:0705.3314](#) [[hep-ph](#)].
- [48] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, and E. de Rafael, Nucl. Phys. **B321**, 311 (1989).
- [49] G. Zarnauskas, *Termos σ do núcleon e da Δ* (Dissertação de Mestrado IFUSP - não publicado, 2006).
- [50] S. Scherer, Adv. Nucl. Phys. **27**, 277 (2003), [hep-ph/0210398](#).
- [51] N. N. Achasov and G. N. Shestakov (2007), [arXiv:0704.2368](#) [[hep-ph](#)].
- [52] S. Weinberg, Phys. Rev. **166**, 1568 (1968).
- [53] C. M. Maekawa and M. R. Robilotta, Phys. Rev. **C57**, 2839 (1998), [hep-ph/9803233](#).
- [54] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **17**, 616 (1966).
- [55] R. Kaminski, L. Lesniak, and B. Loiseau, Phys. Lett. **B551**, 241 (2003), [hep-ph/0210334](#).

- [56] S. Pislak et al. (BNL-E865), Phys. Rev. Lett. **87**, 221801 (2001), [hep-ex/0106071](#).
- [57] B. Hyams et al., Nucl. Phys. **B64**, 134 (1973).
- [58] O. Babelon, J. L. Basdevant, D. Caillerie, and G. Mennessier, Nucl. Phys. **B113**, 445 (1976).
- [59] U.-G. Meissner and J. A. Oller, Nucl. Phys. **A679**, 671 (2001), [hep-ph/0005253](#).
- [60] S. Gardner and U.-G. Meissner, Phys. Rev. **D65**, 094004 (2002), [hep-ph/0112281](#).
- [61] D. R. Boito, B. El-Bennich, B. Loiseau, and O. Leitner, aceito para publicação na Int. Jour. Mod. Phys. E (2007), [arXiv:0705.4677 \[hep-ph\]](#).
- [62] E. M. Aitala et al. (E791), Phys. Rev. **D73**, 032004 (2006), [hep-ex/0507099](#).
- [63] B. Aubert et al. (BABAR), Phys. Rev. Lett. **94**, 041802 (2005), [hep-ex/0406040](#).
- [64] I. Bediaga, G. Guerrer, and J. M. de Miranda (2007), [hep-ph/0703131](#).
- [65] R. H. Dalitz, Phil. Mag. **44**, 1068 (1953).
- [66] A. Wuetrich, *Daltiz Plots and Hadron Spectroscopy* (Tese de Mestrado, Universidade de Berna, Suíça [[arXiv:hep-ph/0507058](#)], 2005).
- [67] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of mathematical functions* (Dover Publications Inc., New York, 1972).