UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

Estudo da formação de bolhas em líquidos viscosos
(Uma abordagem usando a Teoria do Caos)

Alberto Tufaile

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Sartorelli

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
3465
INSTITUTO DE FÍSICA

Banca examinadora:
Prof. Dr. José Carlos Sartorelli - IFUSP
Profa. Dra. Coraci Pereira Malta – IFUSP
Prof. Dr. Jorge Manuel Sotomayor Tello – IME/USP
Prof. Dr. Paulo Batista Gonçalves – PUC/RIO
Prof. Dr. Thomas Braun - UFRGS

São Paulo
2000

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

SBI-IFUSP
305M810T3465

530.155352
T914e
D
ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Tufaile, Alberto

Estudo da Formação de Bolhas em Líquidos Viscosos (Uma Abordagem usando a Teoria de Caos).
São Paulo, 2000.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física – Departamento de Física Geral

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Sartorelli
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Caos; 2. Bolhas; 3. Mapa do Círculo; 4. Sistemas Dinâmicos.

USP/IF/SBI-059/2000

À minha amada esposa Adriana.

Agradecimentos

Nos anos em que realizei este trabalho, várias pessoas colaboraram de muitas formas para que ele se realizasse. Expresso aqui meus agradecimentos àlgumas delas:

Ao meu orientador Prof. José Carlos Sartorelli pela orientação e o apoio que me foram dados durante todos esses anos.

Aos meus colegas do LFNL: Whilk, Reynaldo, Marcelo, Thiago e Ciro, pelo companheirismo de todas as horas.

À Comissão de Pós-Graduação do Instituto de Física da USP, na pessoa do Prof. Armando Corbani Ferraz.

Aos funcionários do Departamento de Física Geral, Dirce, Ivone, Alexandre, Jairo, Rubens e Marcelino.

Ao grupo de Mecânica Estatística, nas pessoas do Prof. Salinas e do Prof. Mário José de Oliveira.

Ao Prof. Iberê Luiz Caldas e seu grupo: Murilo Batista, Kai, Renê, Elinei, Anselmo e Tomás.

À secretária Márcia, todo o pessoal da Biblioteca, aos técnicos do Laboratório Didático, como o Cláudio, Fábio, Dionísio, Mané, Marcos e Canela.

A todos do Departamento de Materiais e Mecânica, principalmente ao Iran, Ivete, Eliane, Taeko, Sérgio, Marcelo e Toninho.

Aos meus pais, Jamil e Alaíde, que me conduziram durante boa parte da vida e me educaram com muito carinho, aos meus irmãos: Elysângela, Aristóteles, Linda e Susy, que são muito importantes para mim.

Aos meus sogros, Roberto e Cleusa, que me amparam com o seu apoio carinhoso, amizade e suas preces. Aos meus cunhados, Lincoln e Adriana Midori, pessoas pelas quais tenho profunda admiração, que também me ajudam e ao meu sobrinho Tiago.

Agradeço ao Conselho Nacional de Pesquisa (CNPq) e à FAPESP pelo importantíssimo apoio financeiro.

Finalmente, agradeço apaixonadamente à minha adorada esposa Adriana.

Neste instante gigantesco, vi milhões de atos agradáveis e atrozes; nenhum me assombrou mais que o fato de todos ocuparem o mesmo ponto, sem superposição e sem transparência. O que meus olhos viram foi simultâneo; o que transcreverei será sucessivo, pois a linguagem o é.

Jorge Luís Borges, *O Aleph.*

Abstract

We have constructed an experimental apparatus to study the dynamics of the formation of air bubbles in a nozzle submerged in a water/glycerin solution inside a cylindrical tube. The time delay between successive bubbles was measured with a laser/photodiode system.

The results were interpreted by means of Chaos Theory, and it was observed bifurcations, chaotic behavior, and sudden changes in a periodic regime as a function of decreasing air flow rate issued through the nozzle.

Besides bubbling regime transitions, we also observed dynamical effects by applying a sound wave tuned to the fundamental frequency of the air column above the liquid of the bubble formation. As a function of the sound wave amplitude, we obtained limit cycle, flip bifurcation, chaotic behavior, and synchronization of the bubbling with the sound wave frequency.

Applying metrical as well as topological characterization to some chaotic attractors, we could establish relation with a Hénon-like dynamics. The Hénon-like behavior is a particular case of the dissipative two-dimensional circle-map dynamics, and by varying the amplitude of a sound wave, we have observed features present in the circle map dynamics, such as transition from quasiperiodic to chaotic behavior, period doubling cascade, and Chaos.

Resumo

Construímos um aparato experimental para estudar a dinâmica da formação de bolhas de ar em um bico submerso em uma solução de água/glicerina dentro de um tubo cilíndrico. O tempo entre bolhas sucessivas foi medido com um sistema laser/fotodiodo.

Os resultados experimentais foram interpretados usando a Teoria do Caos. Foram observados bifurcações, comportamento caótico e saltos no regime periódico, em função da diminuição da vazão do ar soprado no bico.

Além das transições dos regimes do borbulhamento, nós também observamos efeitos na dinâmica do borbulhamento quando aplicamos uma onda sonora sintonizada na freqüência fundamental da coluna de ar acima do líquido onde as bolhas eram formadas. Em função da amplitude da onda sonora, nós obtivemos ciclo limite, bifurcação *flip*, comportamento caótico e sincronização do borbulhamento com a freqüência da onda sonora.

Utilizando caracterizações métrica e topológica em alguns atratores, pudemos relacioná-los com uma dinâmica tipo-Hénon cujo comportamento é um caso particular da dinâmica do mapa do círculo bidimensional. Observamos características presentes na dinâmica do mapa do círculo na formação das bolhas variando a amplitude da onda sonora, tais como transição para o Caos via quase-periodicidade, cascata de duplicações de período e Caos.

Índice

1. Introdução 1

2. Aspectos teóricos 6

2.1. Fluxos e recorrências 6

2.2. Mapas de retorno 7

2.3. O Mapa quadrático 8

2.4. Dimensões 12

2.5. Expoentes de Lyapunov 12

2.6. O mapa de Hénon 14

2.7. Redução de ruído 16

2.8. Espectro de Fourier 16

2.9. O Mapa do Círculo 18

2.10. Transformação de ponto fixo 24

2.11. Plano Simbólico 25

3. Aparato experimental 27

3.1. O tubo borbulhador 27

3.2. Sistema de aquisição 28

3.3. Medidor de vazão 29

3.4. Controlador de vazão 30

3.5. Válvula solenóide proporcional 31

3.6. O bico borbulhador 32

3.7. O sistema pneumático 33

3.8. O sistema sonoro 33

3.9. O líquido 37

3.10. Imagens 38

3.11. O Experimento da Torneira Gotejante 40

4. Resultados e Análise 41

4.1. A torneira gotejante 41

4.2. Dinâmica das bolhas 45

4.2.1. Formação quase-estática 45

4.2.2. Formação de bolhas com vazão constante 46

4.2.3. Bifurcações 48

4.2.4. Veias líqüidas 52

4.2.5. A estabilidade de dois fluidos sobrepostos 54

4.2.6. Instabilidade da superfície da bolha 56

4.2.7. Freqüência de borbulhamento 59

4.2.8. Duplicações de período 62

4.2.9. Salto e coalescência 62

4.2.10. Antibolhas 69

4.3. A onda sonora e as bolhas 72

4.3.1. A formação de bolhas perturbadas pelas ondas sonoras 73

4.3.2. Atratores do tipo Hénon 78

4.3.2.A. Caracterização métrica 80

4.3.2.B. Caracterização topológica 81

4.3.2.C. Plano Simbólico 83

4.4. Oscilações forçadas 85

4.5. Comportamento geral 87

4.6. Comparação entre atratores 92

4.7. Modulação do Parâmetro de Controle 94

5. Conclusões 97

6. Referências 100

Apêndices

1. Simulations in a dripping faucet experiment

2. Chaotic behavior in bubble formation dynamics

3. Hénon-like attractor in air bubble formation

1. Introdução

Com o advento da *Teoria do Caos* [Li e Yorke, 1975], foi proposto que certos sistemas não-lineares com poucos graus de liberdade poderiam gerar uma dinâmica muito complexa, como comportamento periódico, quase-periódico e caótico, que dependeriam dos parâmetros de controle do sistema. Tais sistemas no estado caótico se tornam imprevisíveis enquanto o tempo avança, devido a uma propriedade básica dos sistemas caóticos, conhecida como *sensibilidade às condições iniciais*. Podemos encontrar exemplos destes sistemas ao nosso redor, como nas órbitas planetárias, sistemas quânticos [Bertelsen *et al.*, 1999], variações climáticas [Lorenz, 1980], torneiras pingando [Shaw, 1984; Martien *et al.*, 1985, Sartorelli *et al.*,1994; Gonçalves,1996; Pinto *et al.*, 2000], reações químicas, abalos sísmicos e circuitos elétricos [Jackson, 1995]. Podemos também encontrá-los dentro de nós mesmos nos impulsos nervosos [Rapp *et al.*, 1990], pulsações cardíacas, reprodução celular e muitos outros ritmos biológicos [Jackson, 1995].

Seguindo uma sugestão de Rösller [Rössler, 1977] de que uma torneira pingando poderia ser um exemplo do sistema de equações diferenciais que exibe comportamento caótico, Shaw [Shaw, 1984] desenvolveu o *experimento da torneira gotejante* que se mostrou mais complexo que o sistema proposto por Rösller. No Laboratório de Fenômenos Não-Lineares (LFNL) do Instituto de Física da Universidade de São Paulo foi construído um experimento semelhante ao experimento da torneira gotejante de Shaw [Sartorelli *et al.*, 1994], e esta experiência permitiu observar uma enorme variedade de comportamentos dinâmicos, tais como *Crises* [Grebogi *et al.*, 1982], intermitências, duplicações de período e órbitas homoclínicas. Para explicar tais comportamentos, foram desenvolvidas algumas técnicas para análise das séries temporais [Gonçalves, 1996; Pinto, 1999].

Desta forma o conhecimento adquirido com o experimento da torneira gotejante nos permitiu propor e desenvolver um experimento, para estudar a dinâmica da formação de bolhas em um líquido, onde medimos o tempo da formação de bolhas de ar sopradas em uma mistura de água e glicerina, utilizando as técnicas semelhantes às utilizadas no experimento da torneira gotejante. Este experimento, que chamamos de *tubo borbulhador* [Tufaile e Sartorelli, 2000a, Apêndice 2; Tufaile e Sartorelli, 2000b, Apêndice 3], é de interesse tanto no estudo dos sistemas dinâmicos, quanto nas aplicações em fluxos com duas fases [Ruzicka *et al.*, 2000]. Além dos efeitos da vazão

do ar na formação de bolhas, estudamos os efeitos de uma onda sonora nos intervalos de tempo da formação de bolhas.

A geração de bolhas é importante em uma vasta gama de fenômenos onde temos a dispersão de um gás num líquido, desde ocasiões corriqueiras como no preparo de uma maionese, até em Engenharia Química nos chamados equipamentos de mistura de fases. Para citar apenas algumas situações, temos a criação de bolhas em colunas de borbulhamento, vasos de fermentação, equipamentos de limpeza e extração, cavitação acústica em bombas hidráulicas e válvulas de controle, reatores, caldeiras e ruído em transmissões de ondas sonoras no oceano [Clift *et al.*, 1978].

Basicamente, podemos ter quatro formas de formação de bolhas em líquidos:

a) Soprando um gás através de um líquido;
b) Quando a alta velocidade do líquido diminui a pressão de forma drástica, (abaixo da pressão de vapor do líquido), e uma cavidade preenchida com vapor do líquido se forma, ocorrendo o processo que é conhecido como cavitação;
c) Quando um aquecimento local faz com que a pressão de vapor do líquido ultrapasse a pressão local do líquido, e uma cavidade de vapor se forma por ebulição;
d) A diminuição brusca da pressão no líquido faz com que gases dissolvidos formem bolhas no seu interior, que ocorre quando abrimos uma garrafa de refrigerante, ou em situações mais letais, como as bolhas que causam embolia em mergulhadores que sofrem descompressão.

Neste trabalho focalizaremos o primeiro caso da formação de bolhas principalmente em líquidos viscosos, usando uma abordagem da Teoria do Caos.

O estudo da formação de bolhas é interdisciplinar devido às aplicações encontradas em Engenharia, Física, Química, Geofísica, Matemática Aplicada e Medicina. Clift e colaboradores [Clift *et al.*, 1978] publicaram o livro intitulado *Bubble, Drops, and Particles,* no qual eles procuram dar uma revisão dos trabalhos envolvendo o movimento de partículas em fluidos, e a criação e movimento de bolhas e gotas em fluidos. Esta é uma referência muito comum nos trabalhos envolvendo formação de bolhas. Nesta obra sobre bolhas, gotas e partículas, podemos ver que os principais obstáculos, no estudo dos fenômenos que envolvem a interação do estado líquido com o estado gasoso, são a compressibilidade dos gases e a não-linearidade intrínseca dos fluidos, que levam muitas vezes a modelos empíricos e com validade de aplicação limitada. A idéia central quando se aplica a Hidrodinâmica tradicional é a de se caracterizar diferentes regimes de gotejamento ou borbulhamento, como transições de

instabilidades [Chandrasekhar, 1981]. Tais transições ocorrem com o aumento de um parâmetro característico do sistema, como por exemplo o *número de Reynolds*. Utilizando *princípios variacionais* procura-se explicar como ocorre um tipo particular de mudança de regime, como a transição do regime laminar para a turbulência.

A aplicação da Teoria do Caos a estes sistemas nos dá novas perspectivas de análise e aumenta nossa intuição com relação aos fenômenos complexos observados. A formação de bolhas em líquidos viscosos e sua relação com comportamento caótico, já foram relatados em trabalhos de Tritton [Tritton *et al.*, 1993] e Mittoni [Mittoni *et al.*, 1995]. No primeiro trabalho, um medidor de fluxo anemométrico, que consiste de um resistor sensível ao fluxo de um fluido que passa sobre ele, foi colocado próximo do bico onde as bolhas eram formadas, e informava sobre a formação das mesmas através da variação da tensão sobre o resistor. Com este sinal de tensão, Tritton construiu seções de Poincaré, e através delas ele observou duplicação de período no tempo entre bolhas, e também obteve algumas séries de sinais com padrões não-periódicos. Tritton classificou os padrões de comportamento mais simples como *Caos Fraco*, e os de comportamento mais complexo como *Caos Forte*. O trabalho é inovador no sentido de que é a primeira vez que técnicas deste tipo são utilizadas para o estudo da formação de bolhas. Mas as críticas com relação a este trabalho levam em conta que o método de medição é invasivo, isto é, a formação das bolhas é afetada pelo medidor, pois, a caracterização do comportamento caótico foi feita de modo subjetivo. No segundo trabalho, Mittoni e colaboradores [Mittoni *et al.*, 1995] utilizaram como elemento sensor da formação de bolhas num tubo borbulhador um transdutor de pressão, obteve séries de sinais caóticos através de técnicas não-invasivas e aplicou a caracterização métrica sobre elas, obtendo *expoentes de Lyapunov* positivos (algoritmo de Wolf [Wolf *et al.*, 1985]).

Como exemplo do interesse da Engenharia Química pela formação de bolhas temos o grupo da Universidade do Tenessee [Finney, 2000], nos Estados Unidos, denominado *CRG*, abreviatura de *Chaos Research Group* que estuda desde 1992, entre outros sistemas, a dinâmica de uma coluna de bolhas ascendente formada por um bico. Segundo eles, o principal foco da pesquisa é explorar a rota de duplicação de período até o Caos, e a natureza espaço-temporal das interações entre as bolhas, além de focalizar as aplicações de técnicas de controle de Caos.

Além deste grupo, foram encontrados outros trabalhos envolvendo engenheiros químicos estudando formação de bolhas através análise de séries temporais. Li e

colaboradores [Li *et al.*, 1997], estudaram a coalescência entre bolhas através do espectro de potências dos dados obtidos experimentalmente. Ruzicka e colaboradores [Ruzicka *et al.*, 1997], focalizaram sua pesquisa na transição do estado de borbulhamento para o jateamento do ar em líquidos. Eles encontraram um movimento complexo das bolhas envolvendo disparos da vazão do ar mudando do regime de borbulhamento para o jateamento do ar no líquido. Eles classificaram os disparos utilizando a terminologia da Teoria do Caos como uma *intermitência do tipo III*.

Os métodos de análise das séries temporais são baseados na técnica de reconstrução do espaço de fases, a partir de uma coleção de dados conhecida como série temporal e podemos classificá-los como métodos *métricos* e *topológicos*. Basicamente temos uma análise das propriedades métricas desta reconstrução devido aos estudos desenvolvidos por Packard [Packard *et al.*, 1980], Mañe [Mañe, 1981] e Takens [Takens, 1981]. Além disso temos a caracterização através de *expoentes de Lyapunov*, com um algoritmo muito popular desenvolvido por Wolf [Wolf *et al.*, 1985] para o cálculo destes expoentes para estas séries. Além do estudo da estabilidade das séries temporais, também é associado a elas o conceito de *dimensão*. Femat e colaboradores [Femat *et al.*, 1998] acompanharam a evolução de séries temporais provenientes de sensores capacitivos em um experimento de borbulhamento em uma coluna vertical, eles obtiveram os expoentes de Lyapunov e fizeram análises espectrais dos dados referentes à bolhas que se elevavam na coluna. A caracterização topológica de dados experimentais de sistemas não-lineares usando *dinâmica simbólica* foi feita por Gonçalves e colaboradores para o experimento da torneira gotejante [Gonçalves *et al.*, 1998]. Pinto [Pinto *et al.*, 2000] aplicou o estudo das *variedades invariantes* para caracterização da *Catástrofe do Céu Azul*, também no experimento da torneira gotejante, assim como algoritmos de localização de *Órbitas Periódicas Instáveis* (OPI) de So [So *et al.*, 1996].

Neste trabalho observamos as condições que levam aos diferentes regimes de borbulhamento e classificamos estes regimes de acordo com as teorias dos sistemas dinâmicos, assim como registramos algumas observações intrigantes na evolução destes sistemas, como por exemplo o aparecimento de *antibolhas* [Stong, 1986], que são basicamente cascas esféricas de ar aprisionadas dentro do líquido. Colocando óleo junto com água no sistema do tubo borbulhador, também registramos a existência de *veias líquidas*, que são colunas d'água sustentadas por bolhas dentro do óleo.

Veremos também o tubo borbulhador como um novo exemplo da classe dos sistemas caóticos, devido à sua relação com o *mapa bidimensional do círculo* [Argyris *et al.*, 1994]. Muitos sistemas físicos caracterizados por pelo menos duas freqüências exibem um comportamento chamado de *sincronização*, ou também chamado de *travamento de freqüências*. Outro comportamento muito freqüente na associação de osciladores é o comportamento *quase-periódico*, que pode ser representado pela associação de dois osciladores funcionando com a relação entre as freqüências dada por um número irracional. Todos esses comportamentos aparecem naturalmente no experimento do tubo borbulhador e, além disso, este experimento nos permite explorar a interação entre os sistemas não-lineares, e como ocorrem as transições entre os regimes periódico e caótico na emissão de bolhas sujeitas à uma onda sonora.

2. Aspectos teóricos

Séries temporais não-lineares podem ser analisadas com métodos métricos e métodos topológicos. O método métrico é muito próximo das noções intuitivas de distância, área, volume e dimensão que temos. Por este método podemos dimensionar e comparar objetos, num determinado espaço. Também podemos analisar a estabilidade de um sistema com base no valor de médias temporais da convergência ou divergência da vizinhança de um ponto destes objetos, chamados de *atratores.*

O método de análise e caracterização topológica é um dos meios mais importantes de investigar problemas não lineares. Este método, considera a série temporal não como uma função explícita do tempo, mas como curvas no espaço de fases que são soluções do sistema dinâmico. Descobertas consideráveis nos aspectos qualitativos e algumas informações quantitativas, podem ser obtidas através dos *atratores reconstruídos.*

Os métodos empregados neste trabalho foram obtidos da literatura, ou desenvolvidos no LFNL. A finalidade da utilização de tais métodos é testar e justificar algumas hipóteses feitas para os dados obtidos com tubo borbulhador e para a torneira gotejante. Para evitar redundância da derivação dos métodos amplamente encontrados em livros/texto e artigos, as derivações dos métodos serão simplificadas. Para maiores informações dos algoritmos empregados poderão ser consultados os trabalhos de Hegger, Kantz e Schreiber [Hegger *et al.*, 1999], Ellner [Ellner *et al.*, 1992], So [So *et al.*, 1996] e Gonçalves [Gonçalves *et al.*, 1998].

2.1. Fluxos e recorrências

Os sistemas dinâmicos determinísticos são descritos pela evolução temporal de um subconjunto **A** em um espaço euclidiano d-dimensional. Eles podem ser expressos, por exemplo, por equações diferenciais ordinárias [Sotomayor, 1979]:

$$\dot{x} = \mathrm{f}(t)\,, \tag{2.1}$$

ou com um tempo discreto $t = n\,\Delta\,t$, por mapas [Collet e Eckmann, 1980]:

$$x_{n+1} = \mathrm{f}(x_n)\,. \tag{2.2}$$

Uma série temporal é uma seqüência de observações igualmente espaçadas no tempo. Uma série de eventos é uma seqüência de intervalos de tempos, entre os quais ocorreu um determinado evento.

2.2. Mapas de retorno

Uma série de eventos da forma $\{x\}=(x_1, x_2, x_3, ...,x_n)$, não é exatamente o espaço de fases do sistema dinâmico, sendo necessário empregar alguma técnica de reconstrução para revelar a estrutura multi-dimensional desta série. Um dos mais importantes tipos de técnica de reconstrução do espaço de fases é o mapa de retorno, ou também chamado de *coordenadas de atraso*. Vetores no *espaço de imersão* são criados a partir de atrasos na série. O conjunto das duplas (x_j, x_{j+1}) forma o mapa de primeiro retorno, e o conjunto das duplas (x_j, x_{j+2}) forma o mapa de segundo retorno e assim por diante. O número de elementos destes vetores dá a dimensão de espaço de imersão. O *teorema de imersão* de Takens [Takens, 1981], estabelece que se uma medida é dinamicamente importante para o sistema, ela contém toda informação contida neste sistema dinâmico.

Em modelos matemáticos de sistemas dinâmicos, a evolução do processo é visualizada no espaço de fases, cuja dimensão é dada pelo número de variáveis independentes. Em experimentos, o espaço de fases é usualmente desconhecido a princípio e freqüentemente uma única variável escalar do sistema pode ser medida. O método mais comum de reconstrução do espaço de fase, a partir de uma série temporal, foi proposto por Packard, Crutchfield, Farmer e Shaw [Packard *et al.*, 1980], para se analisar os dados do experimento da torneira gotejante. A dinâmica de uma série temporal $\{x\}$ em sistemas dissipativos é completamente descrita pelo atrator em um espaço de fases d-dimensional, $\mathbb{R}^d$, com **D** sendo a dimensão do atrator. Genericamente, qualquer atrator é completamente envolvido no espaço de fases por sua própria *bacia de atração*, consequentemente, todos os movimentos transientes inicializados em uma pequena vizinhança do atrator, movem-se assintoticamente na direção do atrator. Os atratores podem ser periódicos, quase-periódicos e caóticos.

Neste trabalho os dados experimentais obtidos são apresentados em mapas de primeiro retorno bidimensionais, cujos elementos das duplas (T_n, T_{n+1}) são intervalos de tempo entre duas bolhas consecutivas. Também serão apresentados mapas de primeiro retorno tridimensionais, através das tripla (T_n, T_{n+1}, T_{n+2}). Outras representações necessárias serão especificadas no local onde estas forem utilizadas.

2.3. O Mapa quadrático

As principais características dos sistemas dinâmicos são observados e analisados em mapas unidimensionais, como no mapa quadrático do tipo:

$$f(x_n) = x_n^2 - a, \tag{2.3}$$

onde x_n é a variável iterada do mapa e a é o parâmetro de controle. O diagrama de bifurcações deste mapa pode ser visto na Fig. 2.1.

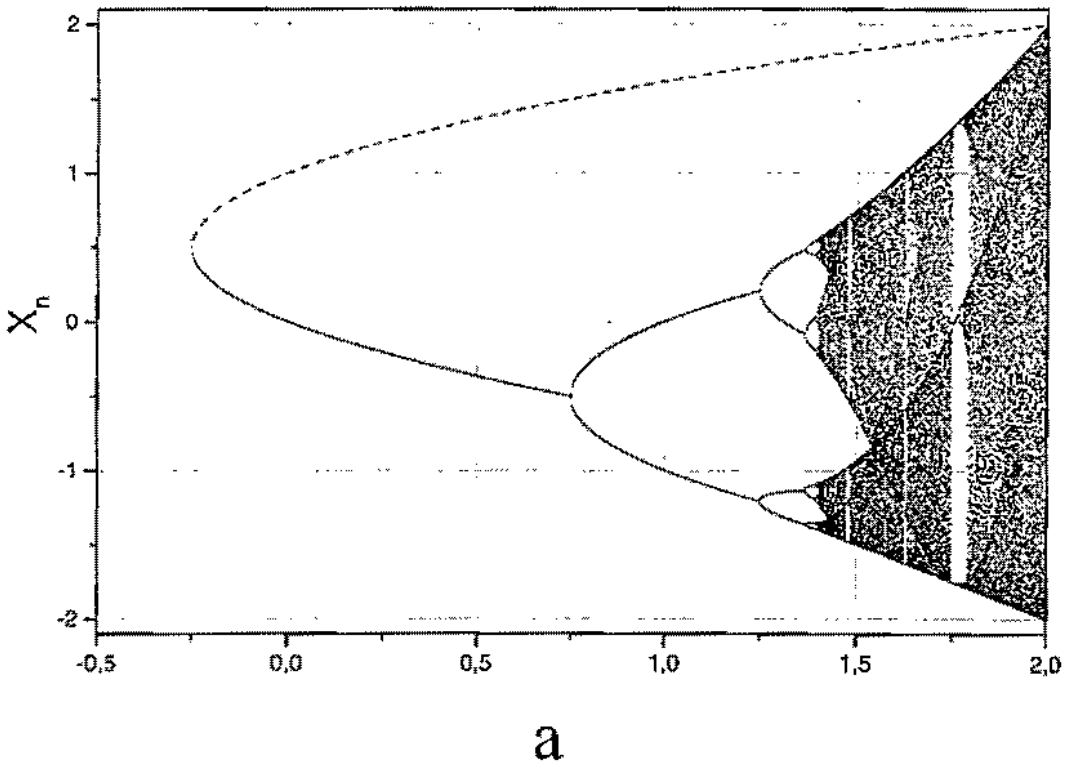


Figura 2.1 Bifurcação obtida com uma função convexa , a linha tracejada é o primeiro ponto fixo instável que surge numa bifurcação tipo sela-nó.

Neste diagrama vemos os valores possíveis de x para uma variação do parâmetro de controle a entre –0,25 e 2,0. Os valores do mapa para a entre –0,25 e 1,25 podem ser calculados analiticamente, impondo a condição de que o valor da variável iterada anterior seja igual ao valor da variável iterada seguinte:

$$x = x^2 - a, \tag{2.4}$$

que nos fornece dois pontos fixos, x_f:

$$x_{f1} = [1 + (1 + 4a)^{1/2}]/2, \tag{2.5a}$$

$$x_{f2} = [1 - (1 + 4a)^{1/2}]/2. \tag{2.5b}$$

A estabilidade dos pontos fixos de qualquer mapa unidimensional é obtida com as condições:

$$|f'(x_f)| < 1 \Rightarrow x_f \text{ é um ponto fixo estável;} \tag{2.6a}$$

$$|f'(x_f)| > 1 \Rightarrow x_f \text{ é um ponto fixo instável.} \tag{2.6b}$$

Deste modo, para valores de a acima de –0,25 obtemos x_{f1} instável, enquanto x_{f2} é estável até o parâmetro a chegar a 0,75. Para a igual a -0,25 no mapa da equação (2.3) experimenta uma *bifurcação sela-nó*. A linha tracejada na Fig. (2.1) é a trajetória instável x_{f1} e o ramo estável x_{f2} está simetricamente abaixo até o valor de a igual a 0,75.

Quando o parâmetro de controle a atinge 0,75, as trajetórias do mapa sofrem uma mudança de comportamento. Nesse caso, a partir deste valor do parâmetro de controle a órbita oscila entre dois valores de x:

$$x_{f3} = f(x_{f4}), \tag{2.7a}$$

$$x_{f4} = f(x_{f3}). \tag{2.7b}$$

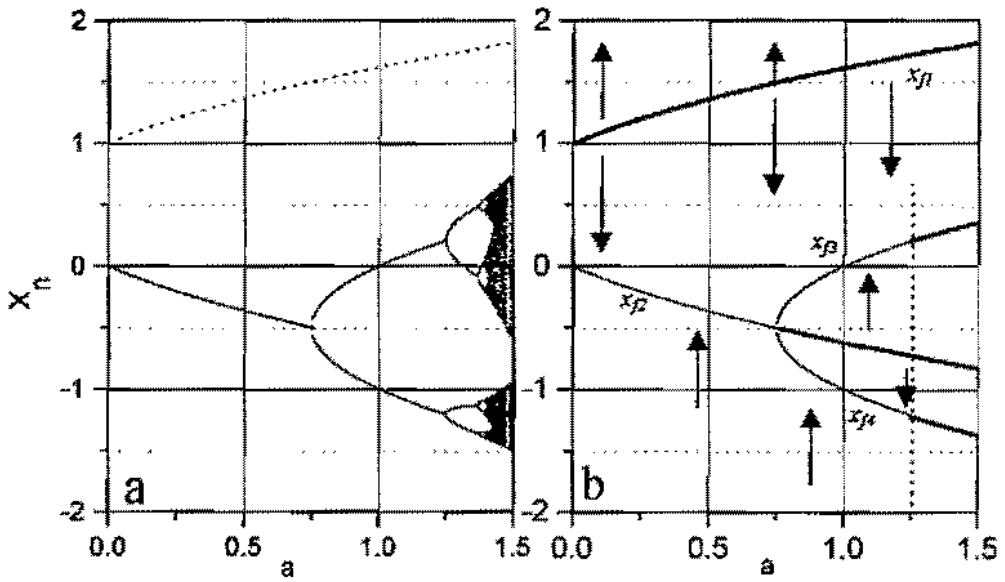


Figura 2.2 (a) Detalhe do diagrama de bifurcações do mapa quadrático, a linha tracejada representa o ponto fixo instável da bifurcação sela-nó. **(b)** Bacia de atração mostrando a estabilidade de algumas regiões mostradas em (a), neste gráfico as linhas vermelhas representam os pontos fixos instáveis, enquanto que as linhas pretas os pontos fixos estáveis. Podemos comparar a troca de estabilidade de x_{f2} mostrado em (b) para a = 0,75 com o diagrama mostrado em (a), assim como o mesmo tipo de troca para x_{f3} e x_{f4} para a = 1,25 (linha pontilhada).

Para compreendermos o que ocorre, agora utilizando os critérios de estabilidade (2.6) e para calcular os novos pontos fixos, temos que recorrer a uma composição do mapa com ele mesmo, da seguinte forma:

$$g(x) = f(f(x)) = x^4 - 2ax^2 + a^2 - a, \tag{2.8}$$

que possui quatro pontos fixos, sendo dois deles os pontos fixos das equações 2.7(a)-(b), agora ambos instáveis, e dois outros estáveis dados por:

$$x_{f3} = \{1 + [1 + 4(a-1)^{1/2}\} / 2, \tag{2.9a}$$

$$x_{f4} = \{1 - [1 + 4(a-1)^{1/2}\} / 2. \tag{2.9b}$$

Na Fig. 2.2(a), vemos o diagrama de bifurcações no período 2 e no gráfico ao lado (b), representamos as órbitas instáveis (ramos vermelhos), e os ramos estáveis (ramos pretos). As setas indicam a atração ou a repulsão dos pontos fixos. Na Fig. 2.2(a) quando a=1,25, podemos notar que na seqüência de bifurcações aparece o período 4. Quando estes quatro pontos fixos se tornam instáveis, um período 8 aparece, e o processo de duplicação de período se repete indefinidamente para faixas de a cada vez mais estreitas, até chegar no valor limite a_∞ = 1,40113.., que pode ser visto na Fig. 2.3. A partir deste valor do parâmetro de controle, os pontos no mapa visitam bandas periódicas, que se alargam e se sobrepõem aos pares, diminuindo o número de bandas num processo chamado de *bifurcação reversa*. Nesta sobreposição, os valores de x evoluem periodicamente com relação às bandas, mas de modo errático dentro de cada uma delas, e tal movimento é chamado de *caótico*.

No diagrama da Fig. 2.3, após o encontro das duas bandas caóticas, temos a ocorrência de janelas periódicas de períodos ímpares, com uma janela maior de período 3 ($a \cong 1{,}75$), e outra menor de período 5, relacionadas com *bifurcações tangentes*. A existência do período 3 é o principal argumento para se utilizar um teorema que estabelece a existência de todos os outros períodos maiores. O *Teorema de Sharkovskii* [Jackson, 1995] nos dá um esquema não usual de ordenação para os números naturais tal que, para cada número natural n, a existência de um ponto de período n implica na existência de órbitas periódicas de todos os períodos maiores na ordenação do que n. Pelo teorema de Sharkovskii, a existência de uma órbita de período 3 num mapa unidimensional não-monotônico com apenas um máximo, implica na existência de todos os períodos.

O teorema de Sharkovskii explicitamente é [Jackson, 1995]:

Seja T o conjunto ordenado $\{3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd \ldots \lhd 2.3 \lhd 2.5 \lhd 2.7 \lhd \ldots \lhd 2^2.3 \lhd 2^2.5 \lhd 2^2.7 \lhd \ldots \lhd 8 \lhd 4 \lhd 2 \lhd 1\}$ Seja f: uma aplicação suave do intervalo unitário nele mesmo, tal que $f(0)=f(1)=0$ que possui apenas um ponto crítico. Se $m \lhd n$ relativo à ordem no conjunto T, e f tem a menor órbita de período m, então f tem uma órbita de período n.

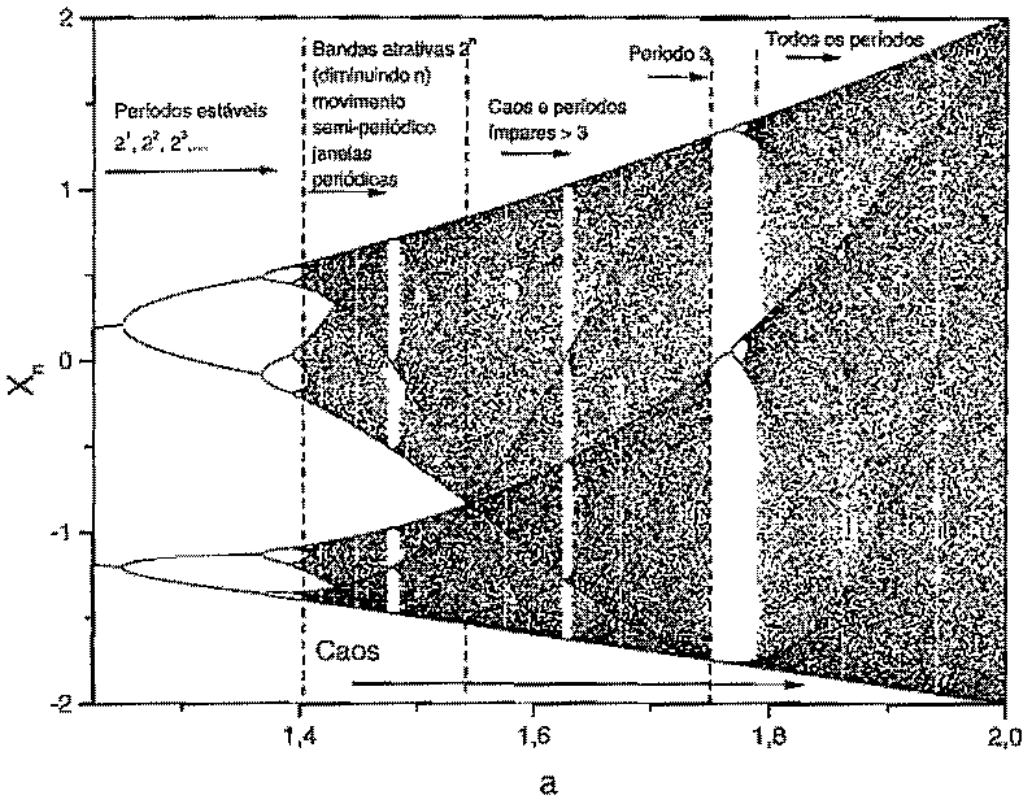


Figura 2.3 O comportamento dinâmico geral do mapa quadrático, com a cascata de duplicações de período (a<1,4). Para a > 1,4011..., ocorre Caos com a diminuição das bandas atrativas. Após a janela de período 3 temos todos os períodos, como propõe o teorema de Sharkovskii.

2.4. Dimensões

Um aspecto básico de um atrator obtido a partir de um sistema dinâmico é a sua dimensão, pois o comportamento do sistema é caracterizado pelo atrator. Após um transiente, alguns tipos de movimento desaparecem devido ao amortecimento, e o estado do sistema se aproxima de um atrator no qual o número de variáveis independentes, que determinam a dimensão do atrator, é reduzido consideravelmente. Os atratores podem ter a dimensão de um ponto, linha ou plano, ou podem ser extremamente complicados, e freqüentemente possuem estrutura *fractal* [Alligood *et al.*, 1997]. Podemos medir essa *fractalidade* através de dimensões generalizadas.

Associamos a dimensão de um objeto com o número de vetores ortonormais que podem ser sobrepostos ao objeto. Embora seja muito importante, esta associação de vetores nos restringe sempre a dimensões inteiras, mas existem outros conceitos de dimensão, entre eles a dimensão de *Hausdorf* (D_f) [Alligood *et al.*, 1997], que é baseada na idéia de um comprimento característico R em um conjunto de N elementos.

$$D_f = \frac{\log N}{\log R} \Leftrightarrow N \sim R^{D_f}, \tag{2.10}$$

A dimensão de *Informação* (D_I) [Alligood *et al.*, 1997] leva em conta as freqüências de visitação relativas e por isto é mais interessante para sistemas físicos. Muitas outras definições de dimensão existem, mas para os objetivos deste trabalho, utilizaremos apenas as dimensões citadas anteriormente e a dimensão de *Kaplan-Yorke* (D_{KY}), [Argyris *et al.*, 1994]

Além disso, a determinação do valor de uma dimensão, a partir dos dados experimentais de um processo dinâmico, indica qual é a dimensionalidade do espaço de fases do sistema dinâmico matemático que deve ser usada para modelar o sistema.

2.5. Expoentes de Lyapunov

Os sistemas caóticos exibem sensibilidade às condições iniciais. Esta afirmação tem sido utilizada para resumir uma das principais propriedades dos sistemas caóticos, que pequenas diferenças nas condições iniciais, são magnificadas devido à dinâmica do

sistema, de tal modo que em um tempo finito o sistema percorre estados totalmente diferentes. A noção de sensibilidade às condições iniciais é feita de modo mais acurado através do expoente de Lyapunov ε [Alligood *et al.*, 1997]. Normalmente sistemas contendo pelo menos um expoente de Lyapunov positivo são considerados caóticos. Isto significa que trajetórias partindo de dois pontos muito próximos, não importando quão pequena seja a distância entre elas, irão evoluir de modo diferente e se afastarão exponencialmente uma da outra com o tempo.

Podemos obter o expoente de Lyapunov máximo [Wolf *et al.*, 1985] sem a construção explícita de um modelo para a série temporal. Uma caracterização confiável com expoente positivo exige que sejam garantidas a independência dos parâmetros de imersão e uma lei de crescimento exponencial.

Existe também o cálculo do *espectro de expoentes de Lyapunov* [Hegger e Kantz, 1999], onde o ingrediente essencial é a estimativa de *Jacobianas* locais, ou seja, uma dinâmica linearizada que regula o crescimento das perturbações infinitesimais.

Para uma melhor compreensão dos sistemas dinâmicos, uma conciliação entre características relativas às médias temporais e espaciais dos atratores foi feita através da *teoria ergódica* [Argyris *et al.* 1994]. Como o expoente de Lyapunov caracteriza a dinâmica do atrator, através de médias temporais da divergência ou convergência de uma vizinhança com relação a um ponto da órbita, o cálculo dos expoentes de Lyapunov permite certas comparações, como a *conjectura de Kaplan-Yorke* [Argyris *et al.*, 1994] que estabelece que a dimensão de Informação deve coincidir com dimensão de *Kaplan-Yorke*, D_{KY}, dada por:

$$D_{KY} = k + \frac{\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i}{|\varepsilon_{i+1}|}, \tag{2.11}$$

onde k é um inteiro máximo, tal que a soma dos k expoentes máximos seja não-negativa e ε_i é o i- ésimo expoente de Lyapunov. Tal conjectura foi verificada para uma boa parte dos sistemas dinâmicos dissipativos de baixa dimensão [Hegger e Kantz, 1999].

2.6 O mapa de Hénon

O mapa de Hénon, é um mapa bidimensional do tipo:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} &= bx_n \end{aligned} \tag{2.12}$$

Os pontos fixos do mapa são dois e podem ser obtidos por:

$$x^* = [(b-1) \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}]/2a, \quad y^* = bx^* \tag{2.13}$$

e para cada um desses pontos fixos temos dois autovalores associados λ:

$$\lambda_{\pm} = -ax^* \pm \sqrt{(ax^*)^2 + b}, \tag{2.14}$$

desta forma, com esses dois autovalores, podemos estudar a estabilidade de cada ponto fixo, como foi feito para os mapas unidimensionais. Um atrator de Hénon caótico bem conhecido é mostrado na Fig. 2.4. O coeficiente *a* está relacionado com o estiramento do mapa, e coeficiente *b* está relacionado com a contração da área do mapa de Hénon e este coeficiente é o determinante da matriz *jacobiana J* do atrator de Hénon com o sinal negativo:

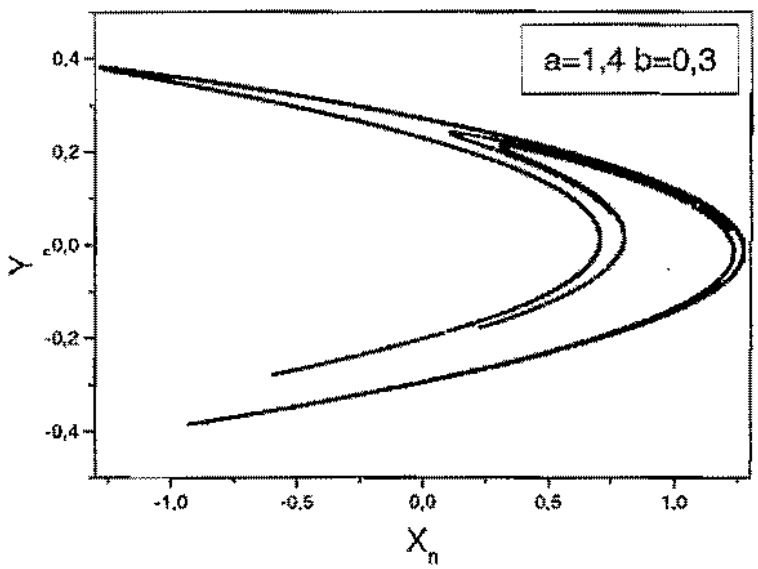


Figura 2.4 Atrator de Hénon caótico reconstruído nas variáveis x_n e y_n, para a=1,4 e b=0,3.

$$\det J = \begin{vmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{vmatrix} = -b. \tag{2.15}$$

Na Fig. 2.5 vemos as duas variáveis do mapa nos gráficos de x *vs.* a e y *vs.* a, onde podemos notar a contração da variável y por b na Fig. 2.5(b) em relação à variável x que aparece na Fig. 2.5(a), onde temos também os pontos fixos $x_{1,2}$ da equação (2.13).

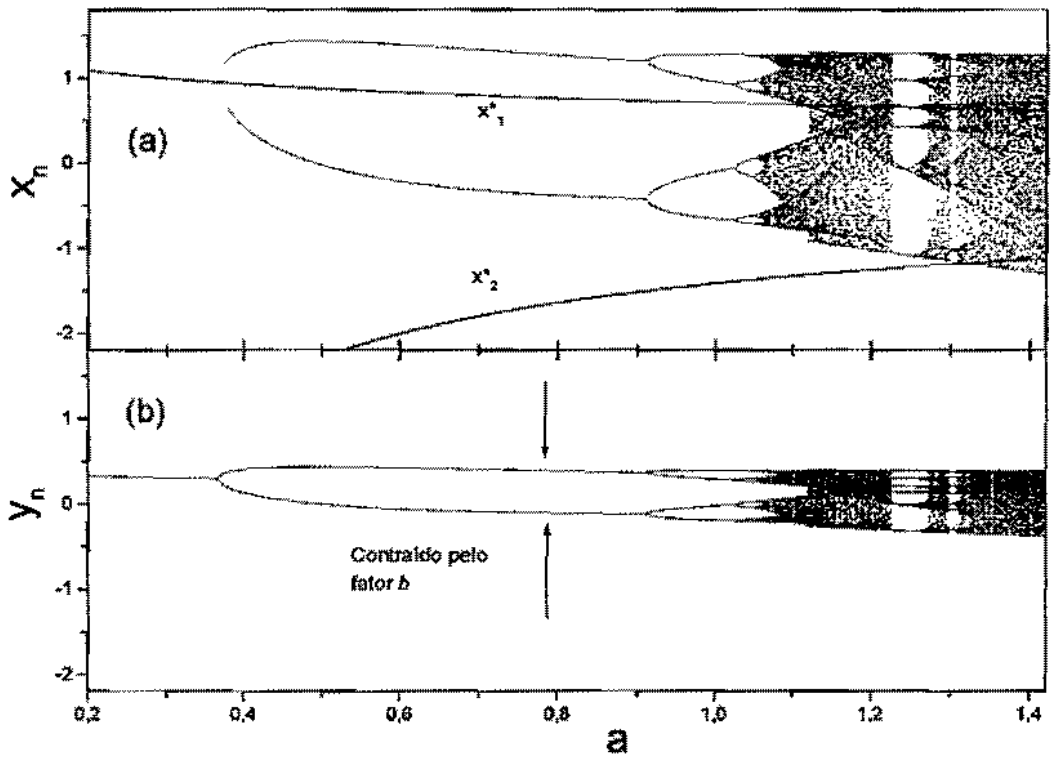


Figura 2.5 Diagramas de bifurcações do atrator de Hénon para $b=0.3$, em (a) a variável x e seus dois pontos fixos, x^*_1 na cor verde e x^*_2 na cor vermelha, calculados pela equação (2.13) sobre a série, e em (b) a variável y contraída pelo fator b.

Para o caso do diagrama de bifurcações da Fig. 2.5 o determinante de J é constante e negativo, det $J = -0{,}3$, para todos os valores de a.

Os expoentes de Lyapunov do mapa de Hénon, ε_1 e ε_2, estão relacionados com a matriz jacobiana pela relação de contração [Argyris *et al.*, 1994]:

$$\varepsilon_1+\varepsilon_2 = \ln|\det(J)| = \ln 0{,}3 \approx -1{,}2. \qquad (2.16)$$

Esta relação representa as propriedade de estiramento, ε_1, e dobra, ε_2, atuando uniformemente, $|\det(J)| = 0{,}3$, dentro do espaço de fases para estabelecer o atrator. Para a=1,4 e b=0,3, temos $\varepsilon_1 \approx 0{,}42$ e $\varepsilon_2 \approx -1{,}62$. O valor $\varepsilon_1>0$ nos dá um atrator caótico.

2.7. Redução de ruído

A filtragem de sinais obtidos a partir de sistemas não-lineares exige o uso de métodos especiais [Hegger e Kantz, 1999], já que os filtros lineares podem interagir desfavoravelmente com a estrutura não-linear. Sinais irregulares de fontes não-lineares exibem bandas de espectro realmente largas e não existe justificativa para identificar qualquer componente no espectro de freqüências como ruído. Entretanto, existem certas dependências genéricas entre as medidas $\{x\}$ que criarão vetores $\{\mathbf{x}\}$ para preencher o espaço de imersão d-dimensional de um modo não homogêneo. Métodos de filtragem linear procuram identificar as direções principais da distribuição no espaço de fases e fazer projeções sobre elas. A redução de ruído não-linear leva em conta que sinais não-lineares formarão estruturas curvas no mapa de retorno. A principal suposição do algoritmo utilizado é que ele deve ser aplicado para sistemas de baixa dimensão (D~3).

2.8. Espectro de Fourier

Outro critério para se analisar séries temporais é através da decomposição da série numa *integral de Fourier* [Argyris et al., 1994]. Considerando um sinal $f(t)$, a expressão pode ser expressa na forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \tag{2.17}$$

onde

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt, \tag{2.18}$$

é definida como a *transformada de Fourier* do sinal $f(t)$.

O *espectro de potência* $P(\omega)$ do sinal é dado a partir de $F(\omega)$:

$$P(\omega) = |F(\omega)|^2 = F(\omega)F^*(\omega), \tag{2.19}$$

com $F^*(\omega)$ sendo o complexo conjugado de $F(\omega)$.

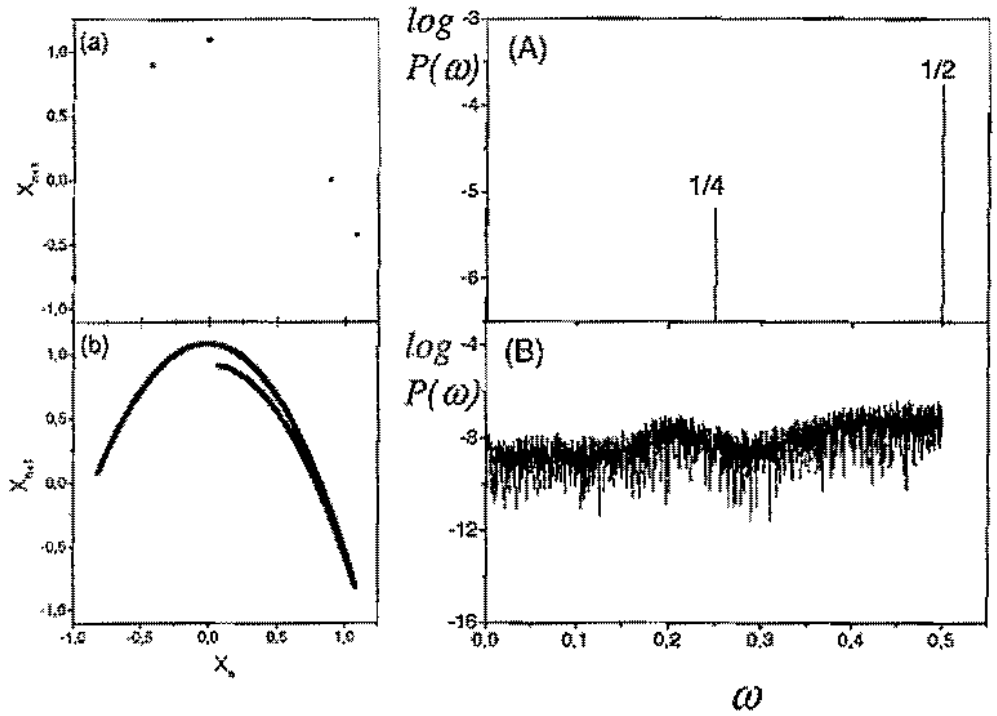


Figura 2.6 –(a) Período 4 do mapa de Hénon e em (A) o seu espectro de potências, (b) atrator de Hénon na região caótica e em (B), seu respectivo espectro de potências mostrando uma *banda larga*.

Na Fig. 2.6 temos dois atratores obtidos a partir do mapa de Hénon, em (a) o comportamento de período 4, e em (A) o espectro que nos mostra o comportamento periódico com os dois picos indicando uma duplicação de período característica do atrator de Hénon. Para os parâmetros $a=1,55$ e $b=0,1$, temos um atrator de Hénon no regime caótico em (b), e seu espectro de banda larga em (B).

Freqüentemente atratores caóticos apresentam banda larga, por isso este é um método muito comum na identificação do comportamento caótico. Além disso, a análise da evolução dos sistemas dinâmicos através de seus espectros permite definir a *rota* [Argyris *et al.*, 1994] que leva o sistema ao Caos, pois, a evolução das duplicações de período vista no mapa quadrático, e que também acontece no mapa de Hénon, é apenas uma dessas rotas. Na próxima seção veremos um outro mapa que nos mostra esta e outras rotas para o Caos.

2.9. O Mapa do Círculo

O mapa do círculo modela a interação entre um oscilador "mestre" quando aplicado a um segundo oscilador não-linear [Argyris *et al.*, 1994; Jackson, 1995]. A dinâmica é governada por dois parâmetros de controle, a razão entre as freqüências dos osciladores desacoplados Ω, e a intensidade de acoplamento K:

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi\theta_n + br_n \qquad (\text{mod } 1) \\ r_{n+1} &= br_n - \frac{K}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi\theta_n . \end{aligned} \tag{2.20}$$

Aqui, θ_n é o ângulo de um rotor rígido logo após o enésimo impulso, e r_n é proporcional à velocidade angular deste rotor sujeito a um impulso externo, do oscilador mestre e b está relacionado com o amortecimento.

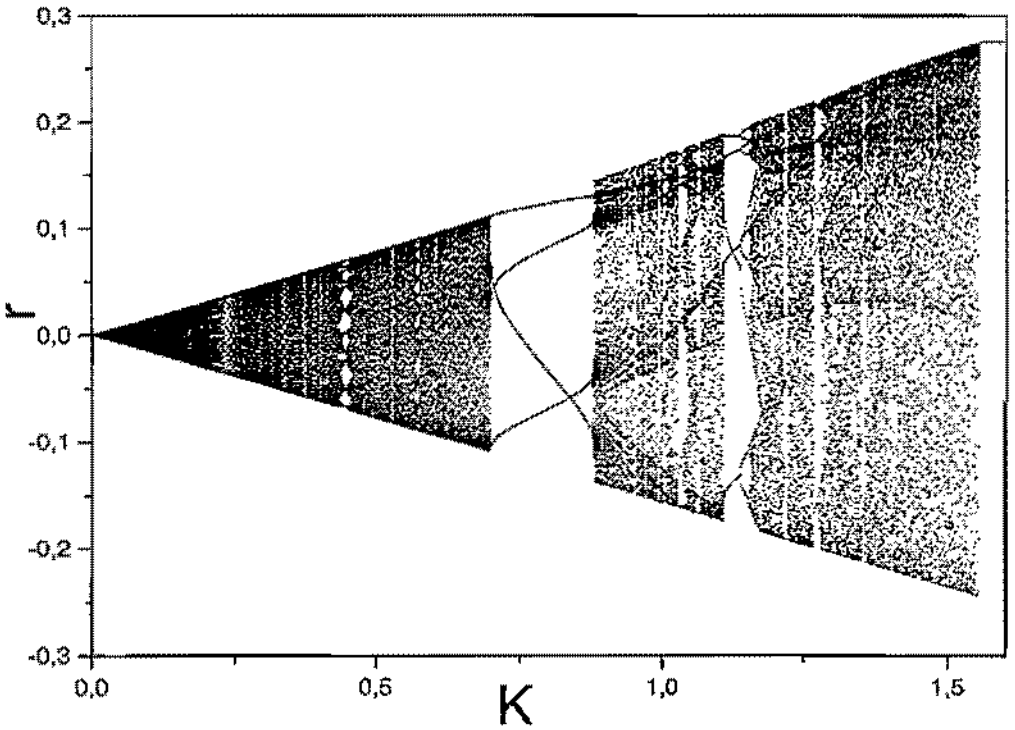


Figura 2.7 Diagrama de bifurcação do mapa do círculo para b=0,1 e Ω=0,725

Na figura 2.7 podemos ver a série temporal do mapa do círculo. Este tipo de mapa nos dá outro tipo de rota para o caos denominada de rota para o caos *via quase-periodicidade*. Temos basicamente o aumento do raio de um ciclo limite quase-periódico intercalados com travamentos de freqüência, e comportamento caótico.

Para sistemas altamente dissipativos o termo b se anula e o mapa pode ser estudado na forma puramente angular:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\text{sen}(2\pi\theta_n). \tag{2.21}$$

Um conceito importante para a análise do mapa do círculo que foi introduzido por Poincaré [Argyris *et al.*, 1994; Alligood *et al.*, 1997] é número de rotação W:

$$W(K,\Omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n}, \tag{2.22}$$

que é a média da rotação do oscilador forçado por ciclo.

As propriedades de estabilidade para valores de $K<1$, para a equação (2.21), seguem a partir da teoria de estabilidade linear para mapas, como foi feito para o mapa quadrático:

$$\frac{d}{d\theta} f(\theta,\Omega,K) = \left|1 - K\cos(2\pi\theta)\right|, \tag{2.23}$$

que é menor do que um se $\theta<1/4$ e é maior do que 1 se $\theta>1/4$, ou se $\theta>3/4$. Para um ponto fixo estável θ_s temos:

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta_s \Rightarrow W = 0. \tag{2.21}$$

Substituindo na equação 2.21 obtemos a relação entre K e Ω, dada por :

$$\Omega = \pm\frac{K}{2\pi}. \tag{2.22}$$

Estas relação entre K e Ω nos dá o espaço de parâmetros do mapa do círculo, onde podemos ver para quais valores podem ocorrer a sincronização do oscilador forçado, conhecida como *língua de Arnold* [Bai-lin, 1989] para o número de rotação $W=0/1$.

Na figura 2.8(a) temos o mapa de primeira iteração da função senoidal do mapa do círculo na região onde ocorre uma bifurcação do tipo *sela-nó*. Para um valor fixo de K entre 0 e 1, três valores de Ω foram escolhidos. Para $\Omega > \Omega_{K_0}$ o ponto fixo ainda não existe. Para $\Omega = \Omega_{K_0}$ a função tangencia a bissetriz e um ponto fixo aparece. Diminuindo ainda mais o valor de Ω, o ponto fixo se divide em dois, um estável e outro instável, situação

característica de uma bifurcação sela-nó. A figura 2.8(b) dá o diagrama de bifurcação para $W=0/1$, para os valores positivos de Ω da equação 2.25.

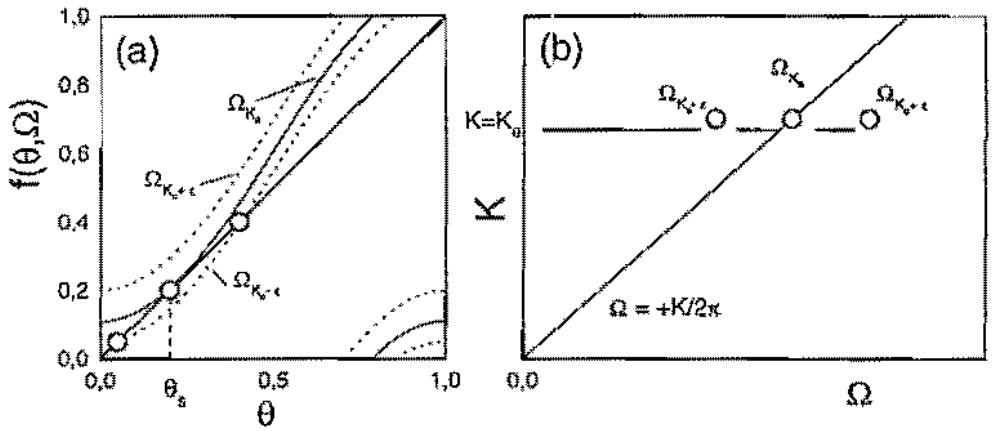


Figura 2.8 (a) Gráficos do mapa do círculo em função do parâmetro Ω na região do ponto de bifurcação sela-nó. Em (b) a representação no espaço de parâmetros da língua de Arnold correspondente a $W=0/1$, que ocorre para valores de Ω menores que Ω_{K_0}.

Para diferentes valores de W, quando $K<1$, ocorrem outras regiões de travamento de freqüências sem ocorrer sobreposição entre elas, como está apresentado na Fig. 2.9, que mostra os limites de estabilidade dos domínios periódicos no plano (K,Ω), para alguns números de rotação. Para as regiões onde ocorrem a sincronização das freqüências entre os dois osciladores, o número de rotação W é um número racional p/q. Deste modo para cada valor racional do eixo Ω, uma janela periódica surge e se expande quando aumentamos o valor de K. Com o aumento da não-linearidade através do parâmetro K, a sincronização das freqüências a se tornam mais dominantes.

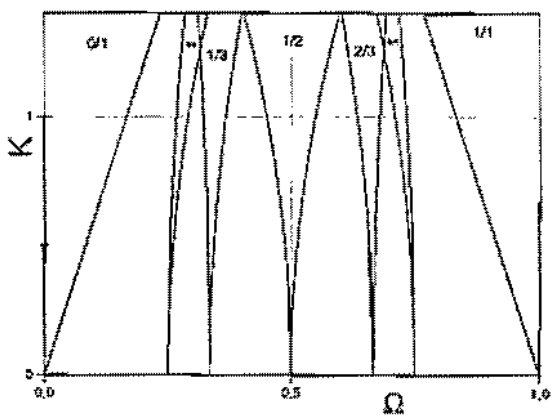


Figura 2.9 Diagrama das Línguas de Arnold para o mapa do Círculo.

Para valores de $K>1$, as línguas de Arnold passam a se sobrepor, e o número de rotação não é mais unicamente determinado, mas trocado por um intervalo de rotação $[W_1, W_2]$, e este embaralhamento torna o comportamento aperiódico.

Para mostrar algumas das características gerais do mapa no círculo, utilizaremos o conceito de expoente de Lyapunov. Lyapunov estudou uma vizinhança abstrata $\{\bar{x}\}$ de uma trajetória $\{x\}$, com N pontos, com o objetivo de verificar se estes pontos se afastavam ou convergiam para a trajetória. Tomando uma trajetória infinita e uma vizinhança tão pequena quanto se possa imaginar, ele associou um expoente que caracteriza se a trajetória é periódica, indiferente ou caótica. Para o mapa do círculo na sua forma angular da equação (2.21) com $\Omega = 0{,}25$, o expoente foi calculado numericamente com a expressão:

$$\varepsilon = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} \ln\left|1 - K\cos(2\pi\theta_i)\right|, \tag{2.26}$$

que está representado na Fig. 2.10(a) e seu respectivo diagrama de bifurcações na Fig. 2.10(b). Inicialmente, os expoentes são ligeiramente negativos, da ordem de -10^{-6}, até o valor de $K=1$, onde divergem para menos infinito. Órbitas com expoentes deste tipo, divergindo para menos infinito, são conhecidas como *órbitas super-estáveis*. Ao término desta janela, o sistema já possui comportamento caótico, e esta rota para o Caos é classificada de *rota via quase-periodicidade* [Bai-lin, 1989; Argyris *et al.*, 1994; Jackson, 1995, Alligood *et al.*, 1997], onde os expoentes de Lyapunov positivos não ultrapassam o valor de 0,3. Aumentando K, o sistema trava em um período 1, e inicia outra rota para o Caos, a rota via duplicações de período ou rota de Feigenbaum, já discutida para o caso do mapa quadrático, na qual os expoentes se anulam nos pontos onde ocorrem as bifurcações, neste caso temos o comportamento indiferente. Para $K\sim3{,}4$, o sistema experimenta um alargamento abrupto do atrator e este alargamento é classificado como uma *crise*. Após a crise, os expoentes de Lyapunov máximos param de crescer e têm valores na faixa entre 0,7 e 0,93. Quando K atinge aproximadamente 4,7, o sistema volta a sofrer um travamento de freqüência em período 1.

Do mesmo modo que o atrator de Hénon, o mapa do círculo bidimensional da equação (2.20) contrai o espaço de fases uniformemente, como podemos ver através do determinante da matriz jacobiana do mapa:

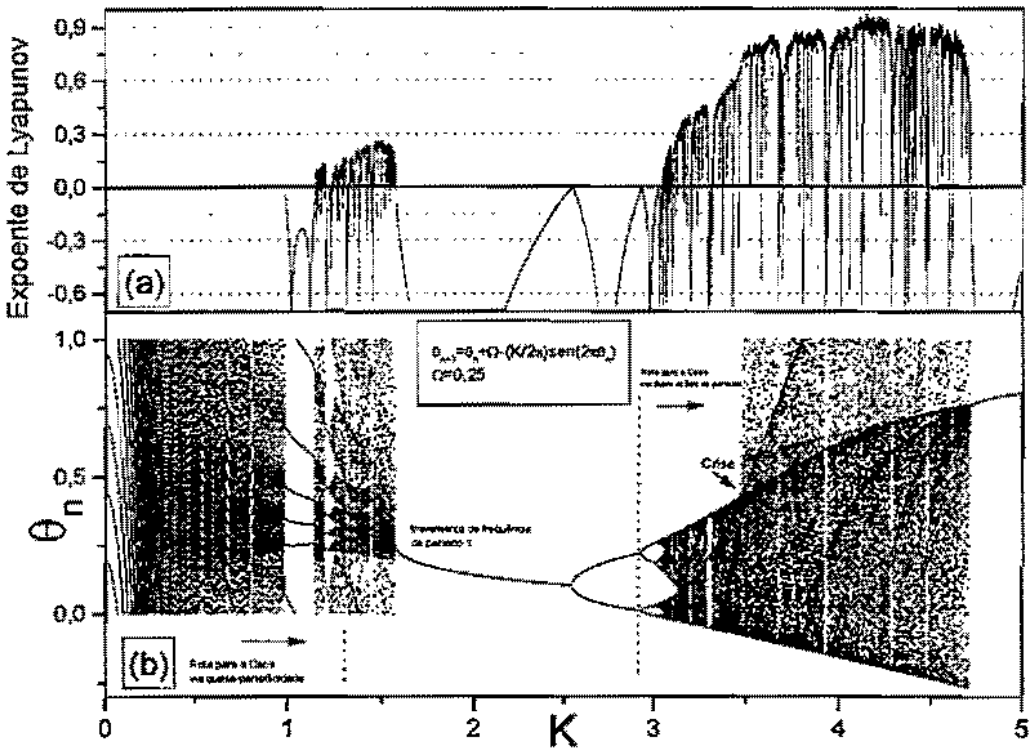


Figura 2.10 (a) Expoentes de Lyapunov do mapa do círculo com Ω =0,25. Em **(b)** o diagrama de bifurcações para o mesmo mapa. Podemos obter a seqüência de duas rotas para o Caos com este sistema dinâmico, a rota de quase-periodicidade e a rota de duplicações de período.

$$\det J = \begin{vmatrix} 1 - K\cos 2\pi\theta & b \\ -K\cos 2\pi\theta & b \end{vmatrix} = b. \tag{2.27}$$

Os pontos fixos r^* e θ^* de período 1, logo após a região quase-periódica para K>1,55 da Fig. 2.7, são dados por:

$$r^* = -\Omega(\text{mod } 1) \text{ se } \Omega(\text{mod} 1) < 0{,}5 \text{ ou } r^* = 1 - \Omega(\text{mod } 1) \text{ se } \Omega(\text{mod} 1) > 0{,}5,$$

$$\theta^* = \frac{1}{2\pi}\text{arcsen}\left[\frac{2\pi r^*}{K}(b-1)\right], \tag{2.28}$$

assim podemos determinar o ponto onde ocorre a primeira bifurcação do tipo *flip* usando os critérios de estabilidade para a seguinte equação característica:

$$\begin{vmatrix} 1 - K\cos 2\pi\theta^* - \lambda & b \\ -K\cos 2\pi\theta^* & b - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{2.29}$$

que nos dá dois autovalores para cada ponto fixo. Para o ponto fixo r^* os autovalores valem explicitamente:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\left\{K\cos 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2\pi r^*}{K}(b-1)\right)\right]+1+b\right\}}{2} \pm \frac{\sqrt{\left\{K\cos 2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\operatorname{arcsen}\left(\frac{2\pi r^*}{K}(b-1)\right)\right]+1+b\right\}^2-4b}}{2}, \tag{2.30}$$

como r^* é calculado pela equação (2.28) para os pontos fixos, a bifurcação *flip* ocorrerá quando um dos valores de λ alcança o valor -1.

Para valores da constante b próximos de zero, deve ser feita uma correção em primeira aproximação nos valores das línguas de Arnold. Para as línguas correspondentes ao travamento de freqüências de período 1, como a equação (2.25), as línguas podem ser calculadas através de:

$$\Omega = \frac{K}{2\pi(1-b)}. \tag{2.31}$$

O mapa do círculo é um sistema dinâmico que parte de um sistema físico bem definido [Argyris *et al.*, 1994], que apresenta um comportamento muito rico, com relação aos elementos da Teoria do Caos.

Além do comportamento individual dos mapas vistos anteriormente, como o mapa quadrático, o mapa de Hénon e o mapa do círculo, também é desenvolvida a pesquisa na área de sistemas dinâmicos *espaço-temporais* [Kaneko, 1992; Viana, 2000] através do acoplamento destes mapas formando uma rede. Com estes estudos pretende-se explicar rotas típicas para turbulência, como, por exemplo, a seqüência obtida com o acoplamento de mapas quadráticos: duplicações de período, formação de padrões aleatórios na rede de mapas, seleção de alguns destes padrões, intermitência espaço-temporal e no final observa-se turbulência plenamente desenvolvida. Um exemplo de modelo de fluxo de um fluido usando mapas acoplados é dado por Willeboordse [Willeboordse, 1992].

2.10. Transformação de ponto fixo

Para extrair as órbitas periódicas instáveis (OPI) imersas em um atrator com uma quantidade finita de dados ruidosos de um sistema unidimensional, So e colaboradores [So *et al.*, 1996] fizeram a suposição de que todos os pontos que estão em uma região ao redor do ponto fixo $x^*=f(x^*)$ podem ser transformados para $\{\tilde{x}\}$ na vizinhança de x^*. A função densidade $\tilde{\rho}(\tilde{x})$ possui singularidades do tipo inverso da raiz quadrada nos pontos fixos, e um histograma para $\tilde{\rho}(\tilde{x})$ terá um pico definido em $\tilde{x} = x^*$. Alguns picos espúrios podem aparecer em $\tilde{\rho}(\tilde{x})$ tanto devido à singularidades não relacionadas aos pontos fixos, quanto a zeros da derivada da função de transformação $\tilde{x} = g(x,k)$. Os autores generalizaram este método para um sistema com dimensão de imersão d para obter as órbitas periódicas instáveis através da transformação:

$$\tilde{\mathbf{z}}_n = (\mathbf{1} - \mathbf{S}_n)^{-1}(\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{S}_n \mathbf{z}_n), \tag{2.32}$$

onde

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} a_n^1 a_n^2 \ldots a_n^{(d-1)} a_n^d \\ \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \end{pmatrix} + k\mathbf{R}\|\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_n\|, \tag{2.33}$$

$$\begin{pmatrix} a_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{z}_n - \mathbf{z}_{n-1})^\dagger \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (\mathbf{z}_{n-(d-1)} - \mathbf{z}_{n-d})^\dagger \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (z_{n+1}^1 - z_n^1)^\dagger \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (z_{n-(d-2)}^1 - z_{n-(d-1)}^1)^\dagger \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

e os vetores $\{\mathbf{z}_n\}$ foram reconstruídos a partir da série temporal $\{x\}$,

$$\mathbf{z}_n = (z_n^1, z_n^2, z_n^3, \ldots, z_n^d)^\dagger = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-d-1})^\dagger, \tag{2.35}$$

R é uma matriz aleatória $d \times d$ no intervalo [-1,1] e k está relacionado com a intensidade da geração de números aletórios. Os pontos fixos são dados por posições dos picos de $\tilde{\rho}(\tilde{x})$. Como a localização dos picos espúrios dependem do parâmetro k, eles são eliminados levando em conta a média $\langle\tilde{\rho}(\tilde{\mathbf{z}})\rangle$ para vários valores tomados aleatoriamente.

Um ponto fixo instável do atrator do mapa do círculo com Ω=0, é o ponto (0, 0), mostrado na Fig. 2.11(a), que foi determinado com este algoritmo, como está mostrado na Fig. 2.11(b). Outras aplicações desta técnica podem ser encontradas no experimento da torneira gotejante [Pinto, 1999], para se mostrar a existência de órbitas homoclínicas.

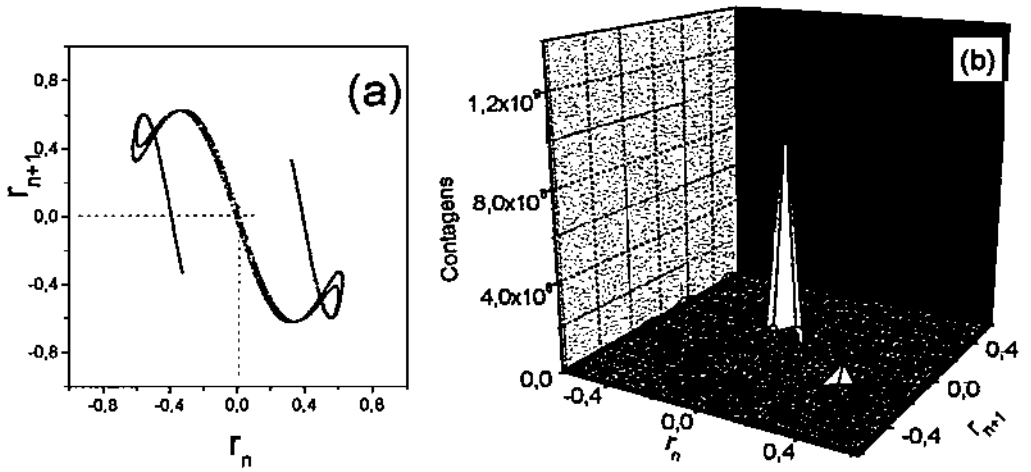


Figura 2.11 Atrator caótico simétrico em (a) do mapa bidimensional do círculo, que possui um ponto de sela na origem. Em (b) a órbita periódica instável foi obtida numericamente utilizando-se o método de detecção de órbitas periódicas instáveis de So *et al.*

Como a reconstrução dos atratores em espaços de imersão bidimensionais é suficiente, nós aplicamos esta técnica para d=2, com k=5, e 1000 matrizes aleatórias. Mais informações sobre este método pode ser encontradas também no trabalho de Schemelcher e Diakonos [Schemelcher e Diakonos, 1998].

2.11. Plano simbólico

A obtenção de planos simbólicos, para a construção de máquinas topológicas mínimas no experimento da torneira gotejante, foi feita por Gonçalves [Gonçalves, 1996], no experimento da torneira gotejante. No experimento do tubo borbulhador, a geração de planos simbólicos foi utilizada principalmente para se comparar modelos com os dados experimentais.

Para estudarmos o plano simbólico particionamos um atrator em duas regiões da Fig. 2.12 (L e R) e atribuímos o valor 1(ou -1) quando o sistema visita L (ou R), obtendo um vetor $...s'_m,...,s'_2,s'_1,S,s_1,s_2,s_m,...$.Deste modo um plano simbólico $\alpha\beta$, característico de um atrator, é definido através do cálculo de α e β como:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i 2^{-i}, \tag{2.36}$$

onde μ_i é um valor binário:

$$\mu_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ se } (-1)^i \prod_{j=1}^{i} s_j = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}; \tag{2.37}$$

e

$$\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \upsilon_i 2^{-i}, \tag{2.38}$$

onde ν_i é o valor binário:

$$\upsilon_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ se } \prod_{j=1}^{i} s'_j = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases}. \tag{2.39}$$

Na Fig. 2.12 exemplificamos a obtenção do plano simbólico (b) para o atrator do mapa do círculo bidimensional (a), com suas respectivas partições L e R. O parâmetro b é igual a 0,1. As regiões em branco no plano simbólico são chamadas de regiões proibidas.

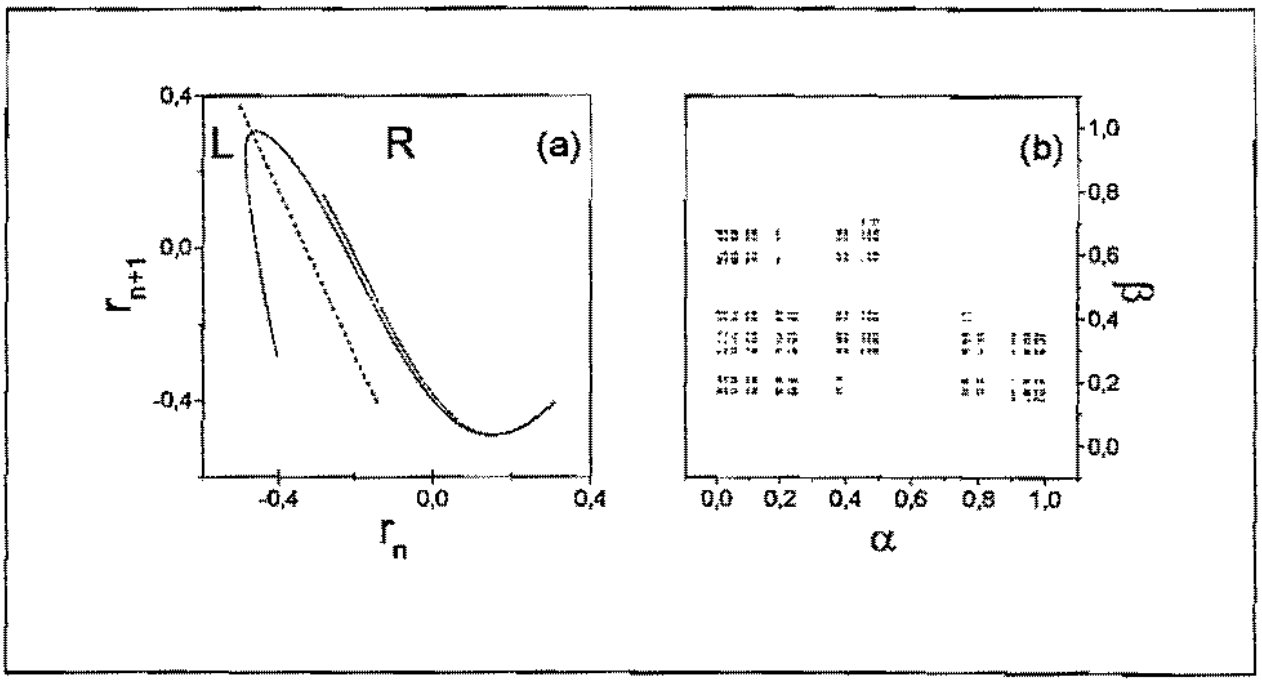


Figura 2.12 (a) O atrator do mapa do círculo reconstruído com o mapa de primeiro retorno na variável r e sua partição, e em (b) seu respectivo plano simbólico.

3. Aparato experimental

Neste capítulo descrevemos os aparatos do tubo borbulhador e da torneira gotejante. Tanto o experimento do tubo borbulhador, assim como o experimento da torneira gotejante, foram inteiramente desenvolvidos no LFNL-USP. Algumas das principais atividades experimentais deste trabalho foram o desenvolvimento e construção do tubo borbulhador, a aquisição e a análise dos dados.

3.1. O tubo borbulhador

Na Fig. 3.1 temos a representação esquemática do aparato do experimento do tubo borbulhador, que consiste de um tubo acrílico transparente, com uma tampa (superior) e uma base de PVC, onde está conectada uma seringa hipodérmica pela qual é soprado ar numa solução de água com glicerina. Dentro deste tubo ocorre a formação de bolhas que são estudadas neste trabalho. O experimento pode ser dividido em quatro partes principais: o tubo borbulhador, o circuito pneumático, o sistema de aquisição, e o sistema sonoro.

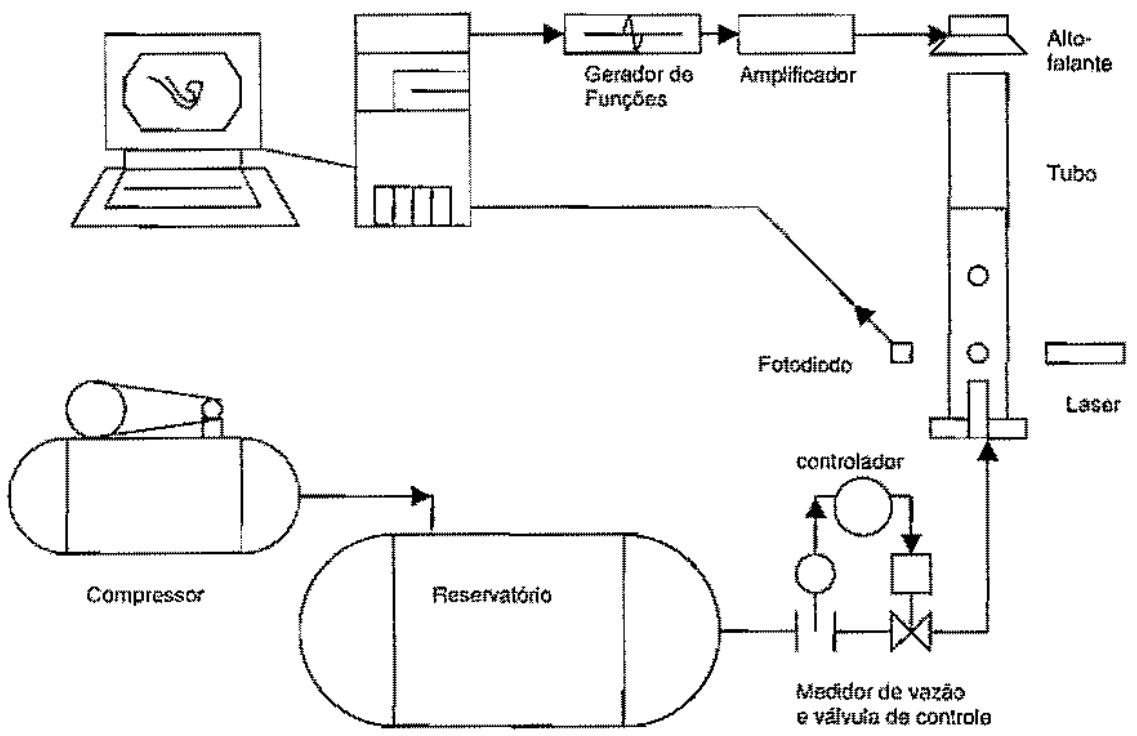


Figura 3.1 Diagrama geral do aparato experimental do tubo borbulhador

Na Fig. 3.2, podemos ver o tubo borbulhador, que foi construído com tubo de acrílico transparente de diâmetro interno de 10,5 cm e 70 cm de altura. Na base estão fixados o bico borbulhador e um termopar para monitorar a temperatura do líquido. A entrada e saída do líquido ocorrem através de duas válvulas do tipo esfera.

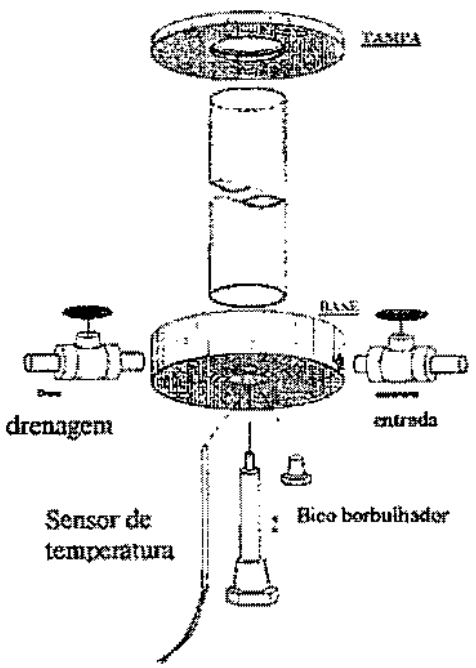


Figura 3.2 O tubo borbulhador, suportes, o bico injetor, sensor de temperatura e válvulas de drenagem e preenchimento do líquido.

Este arranjo permite o preenchimento do tubo e o seu esvaziamento através das válvulas nas laterais da base. Todo o conjunto é preso ao suporte através de quatro parafusos na base e quatro parafusos na tampa. Um sistema de iluminação constituído de uma lâmpada fluorescente e uma placa difusora de luz foi colocada atrás do tubo borbulhador, para obtermos imagens das bolhas utilizando uma câmara de vídeo VHS.

O tubo está montado em uma bancada sobre quatro blocos de espuma para amortecer vibrações externas.

3.2. Sistema de aquisição

O sistema de detecção consiste de um laser He-Ne e um fotodiodo. Quando uma bolha atravessa o feixe laser, induz no fotodiodo um sinal analógico, e um pulso é enviado a uma placa contadora de tempo inserida em um microcomputador. O início e o fim do desvio do feixe laser induzidos pela passagem de uma bolha, criam o sinal de entrada da placa através de pulsos de tensão TTL gerados pelo fotodiodo. Na Fig. 3.3 temos o gráfico que mostra o sinal δt_n, devido a passagem de uma bolha, e o sinal t_n relativo ao tempo entre bolhas. Assim um par de dados constituído do tempo entre as bolhas e o tempo de passagem da bolha é coletado pelo computador. O intervalo de tempo total entre a n-ésima e a (n+1)-ésima gota é T_n, que é a soma destes dos dois intervalos de tempo.

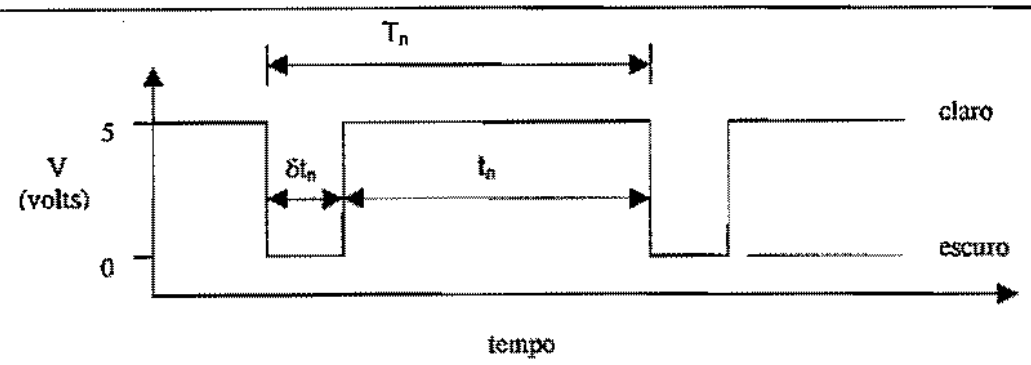


Figura 3.3 Sinal gerado pelo fotodiodo e induzido na placa contadora de tempo pela passagem das bolhas que desviam o feixe laser. O feixe está posicionado ~5 mm acima da extremidade do bico soprador.

O sinal de vazão obtido pelo medidor de vazão é convertido em um sinal proporcional de tensão em milivolts e digitilizado em um osciloscópio digital Tektronix, depois é transferido para o computador através de uma interface *General Purpose Interface Board* (GPIB).

3.3. Medidor de vazão

O medidor de vazão utilizado é o modelo GFM47, fabricado pela AALBORG *Instruments & Controls*. Neste equipamento o fluxo do ar entra em um transdutor de vazão, e dentro dele uma pequena parte do fluxo do ar é separada por um sensor do tipo *tubo capilar* de aço inoxidável. O restante do ar flui através de um condutor de fluxo primário. A geometria do tubo primário e do tubo sensor foi projetada de modo a garantir um fluxo laminar em cada ramo. De acordo com os princípios da Fluidodinâmica as vazões do ar nos dois condutores são proporcionais entre si. Deste modo a vazão medida no tubo sensor é diretamente proporcional à vazão total através do transdutor.

Para obter a vazão no tubo sensor, é feito um aquecimento do fluxo em duas partes do tubo sensor através de resistências sensoras de precisão. O calor é transferido através de uma parede fina para o ar. O ar aquecido é levado pelo fluxo desde um aquecedor à jusante, até um aquecedor à montante do tubo sensor. O sinal elétrico de uma resistência dependente de temperatura diferencial é detectada através de um circuito eletrônico de controle. O gradiente de temperatura medido no sensor é linearmente proporcional à vazão através do sensor.

O valor da vazão é mostrado diretamente em um indicador digital, e simultaneamente em dois sinais elétricos, um de tensão proporcional ao valor da vazão entre 0 e 5 V, e outro de corrente proporcional à vazão entre 4 e 20 mA.

3.4. Controlador de vazão

O controlador de vazão é da marca BTC, modelo BTC-2220, e é um controlador do tipo proporcional, integral e diferencial (PID). Ele recebe o sinal de corrente do medidor de vazão (4-20 mA), com módulo de saída linear (OM92-3), com a tensão de saída variando entre 0 e 10 V, com uma impedância de saída de 500 kΩ. Devido à alta impedância de saída, um circuito amplificador de corrente foi adaptado na saída do controlador, para que ele pudesse enviar o sinal de controle para a válvula solenóide, como está mostrado na Fig. 3.4.

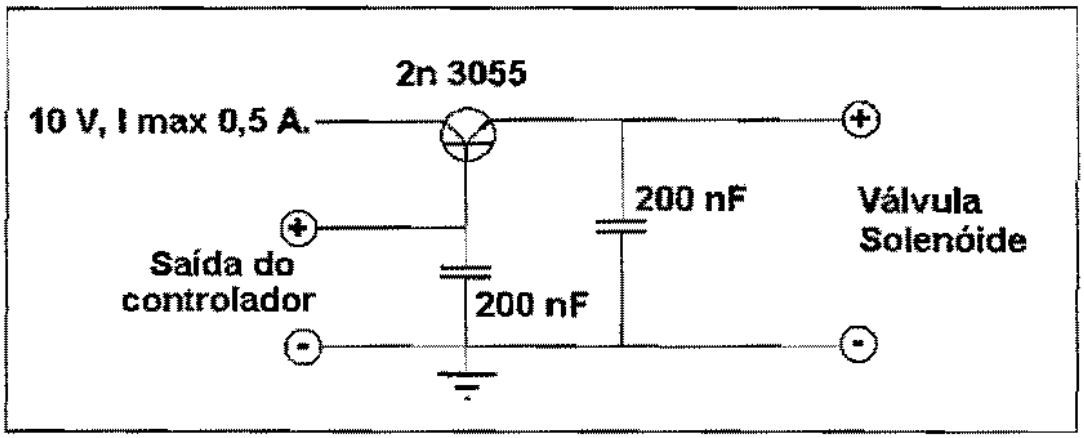


Figura 3.4 O Circuito que amplifica o sinal do controlador para a válvula

O controlador possui dois modos de operação. No primeiro modo, ele mantém uma vazão fixa preestabelecida. No segundo modo, o controlador aumenta ou diminui a vazão linearmente entre dois valores distintos, com uma velocidade preestabelecida pelo usuário.

3.5. Válvula solenóide proporcional

O fabricante da válvula utilizada no experimento do tubo borbulhador é *AALBORG Instruments & Controls*, e o seu modelo é o PSV-5. Basicamente a válvula é uma bobina que posiciona o atuador da válvula de modo contínuo, variando a vazão suavemente. A válvula solenóide proporcional foi projetada para responder a um sinal de tensão contínua de entrada, entre 0 e 30 volts, para regular proporcionalmente ao sinal de tensão o fluxo de líquidos e gases. Por medida de segurança as válvulas são normalmente fechadas quando desernegizadas. Na Fig. 3.4 temos um diagrama desta válvula.

Devido à corrente na bobina da válvula, o corpo da mesma sofre um pequeno aquecimento, que é dissipado por aletas de alumínio colocadas na válvula.

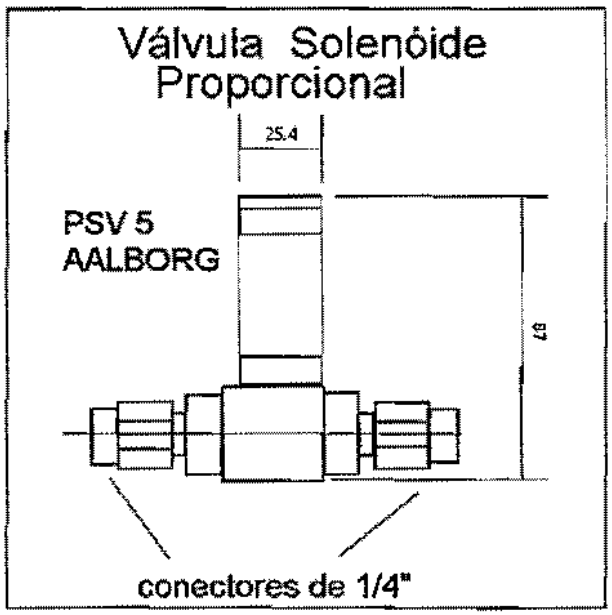


Figura 3.5 Diagrama mostrando as dimensões características da válvula de controle PSV5 da AALBORG

3.6. O bico borbulhador

Na Fig. 3.6, vemos o conjunto de agulhas e o cilindro de uma seringa hipodérmica que foram utilizados como bicos sopradores no experimento do tubo borbulhador. As bolhas são formadas diretamente no cilindro da seringa ou nas agulhas hipodérmicas que são colocadas na seringa que está ligada ao sistema de alimentação de ar.

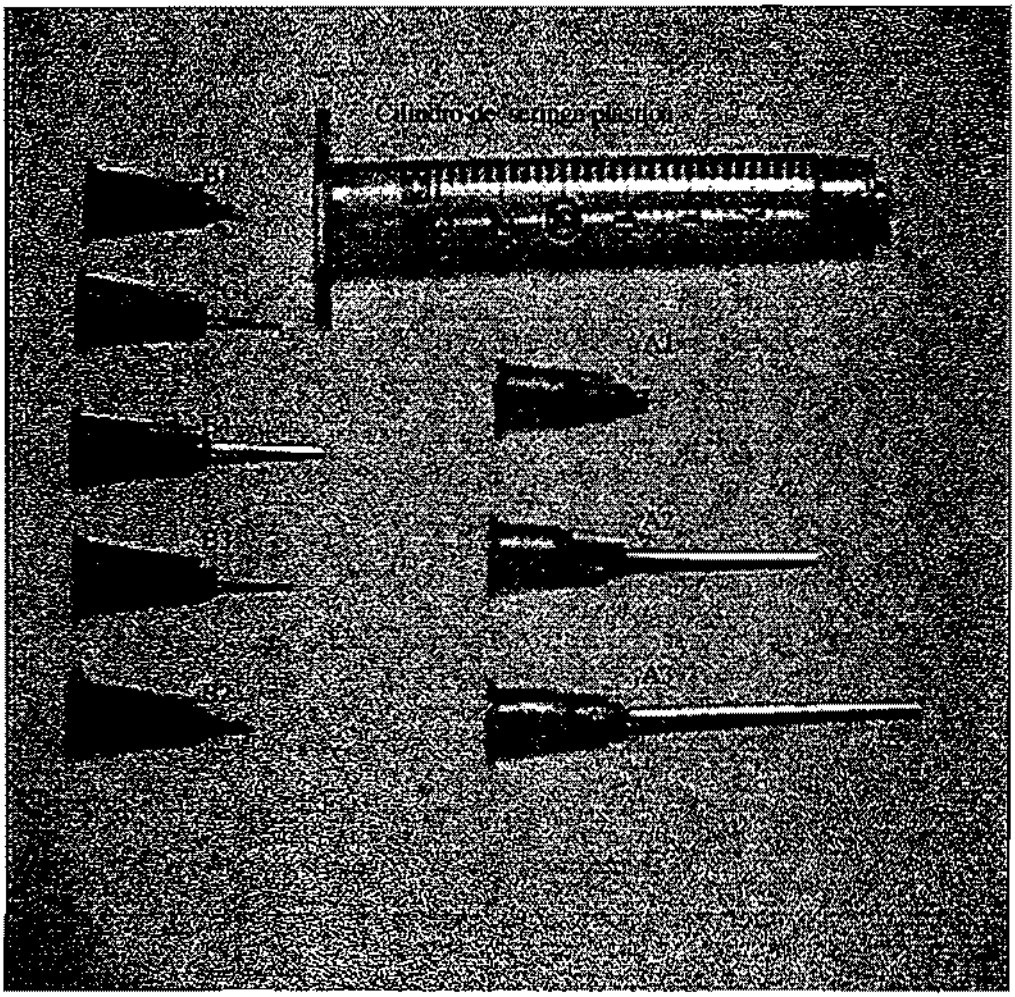


Figura 3.6 Bicos sopradores utilizados no experimento do tubo borbulhador

Na tabela 3.1, temos as dimensões dos bicos mostrados na Fig. 3.6. Para verificarmos os efeitos do comprimento das agulhas, utilizamos agulhas com o mesmo diâmetro, mas que foram cortadas em comprimentos diferentes com uma serra diamante, como para as agulhas do grupo A e B. A seringa e algumas agulhas possuem dois valores na coluna relacionada com o diâmetro, o primeiro valor corresponde ao

Bico	Diâmetro (mm) Interno/externo	Comprimento(mm)
Seringa Plástica	0,8/1,3	2
A1	0,72 / 1,28	2
A2	0,72 / 1,28	24,6
A3	0,72 / 1,28	37,7
B1	0,72	2
B2	0,72	14,5
B3	0,72	10,2
B4	0,72	5,1
C1	0,5	2

Tabela 3.1 Dimensões da seringa e das agulhas utilizadas como bicos sopradores no experimento do tubo borbulhador.

diâmetro interno e o segundo valor está relacionado com o diâmetro externo. Para as demais agulhas temos apenas um valor corresponde apenas ao diâmetro externo.

3.7. O sistema pneumático

O objetivo do sistema pneumático é fornecer o ar numa vazão estabilizada para ser soprado no líquido viscoso. O ar é comprimido por um compressor com um reservatório de 75 litros, no qual um pressostato foi calibrado para manter o ar na faixa de pressão entre 70 e 100 psi (libra por polegada quadrada). A pressão do ar é reduzida para 60 psi em um segundo reservatório de 200 litros, através de uma válvula reguladora de pressão. Uma segunda reguladora, próxima do bico soprador, reduz a pressão do ar para 10 psi e a vazão é controlada pelo conjunto controlador, formado pelo medidor de vazão, controlador e válvula solenóide. Deste modo uma vazão estável chega até o bico borbulhador.

3.8. O sistema sonoro

A onda sonora é gerada no topo do tubo por um alto-falante de bobina móvel. O sinal elétrico para o alto-falante é gerado num gerador de funções Tektronix modelo AFG 320 e amplificado em um amplificador de áudio Aiwa. O gerador de funções

possui uma placa GPIB que permite o controle de todas as suas funções através do microcomputador.

A equação de onda [Fletcher e Rossing, 1991] dentro do tubo em coordenadas cilíndricas é:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2}\right)+\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}=\frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \tag{3.1}$$

onde p é a onda de pressão na direção x e v_s é a velocidade do som no ar. A solução desta equação é:

$$p_{mn}(r,\varphi,x)=p_{\cos}^{\cos}(m\varphi)J_m\left(\frac{\pi q_{mn}r}{a}\right)\exp[i(-k_{mn}x+\omega t)], \tag{3.2}$$

onde J_m é uma função de Bessel e q_{mn} é definido pela condição de contorno $\partial p/\partial r=0$ e $r = a$ (a é o raio do tubo), tal que a derivada $J_m'(\pi q_{mn})$ é zero. Se considerarmos em primeira aproximação o tubo borbulhador como um tubo com uma extremidade fechada, podemos estimar a freqüência de uma onda em seu interior. Uma propriedade geral de ondas sonoras confinadas em tubos é que os valores de amplitude máxima ocorrem em valores discretos da freqüência da onda. Na Fig. 3.7,

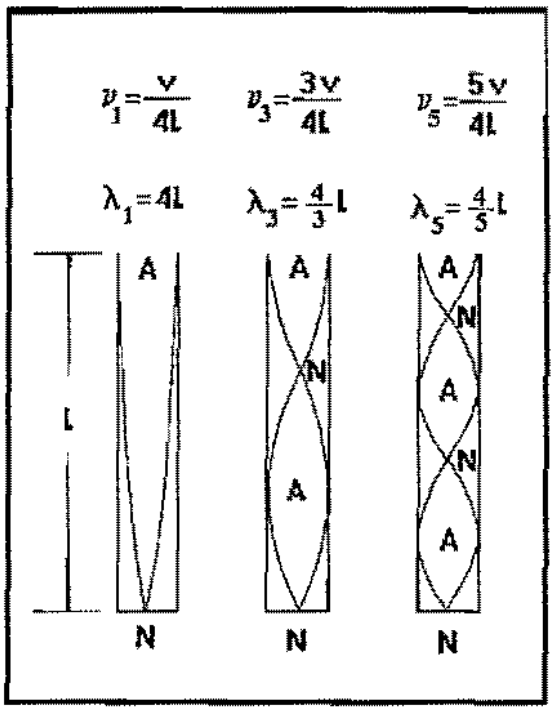


Figura 3.7 Os três primeiros modos de um tubo com uma extremidade fechada

podemos ver os três primeiros modos de um tubo com a extremidade inferior fechada.

A distância do centro do tubo às linhas finas desenhadas dentro deste representa a amplitude de deslocamento da onda em cada ponto. **N** e **A** designam as posições dos nodos e antinodos de deslocamento. As freqüências ν_n de ressonância do tubo são dadas por:

$$\nu_n = (2k+1)\frac{v_s}{4l}, \tag{3.3}$$

onde l é o comprimento do tubo e $k = 0,1,2,3,...$, o que nos fornece apenas os harmônicos ímpares.

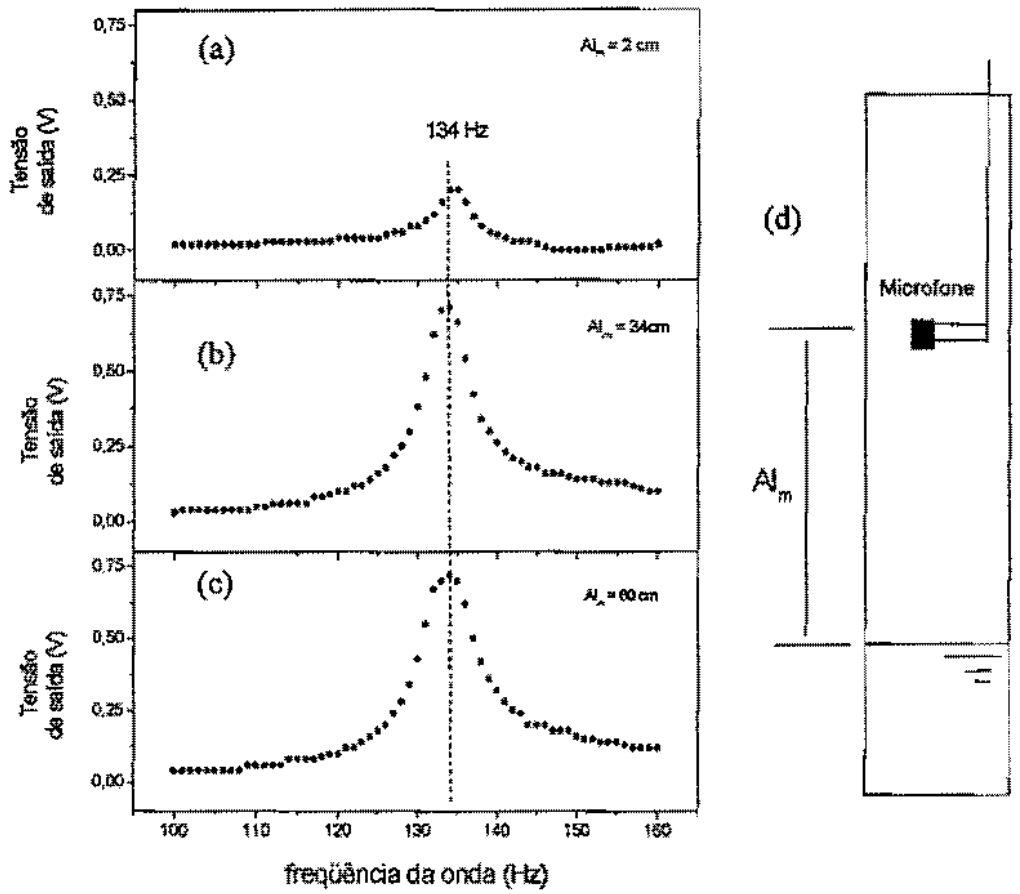


Figura 3.8 Resposta do microfone colocado à uma distância Al_m dentro do tubo borbulhador na sua parte superior, para uma onda sonora senoidal gerada pelo alto-falante. Em (a) o microfone foi colocado a 2 cm da superfície do líquido, (b) 34 cm e (c) 60 cm. Em (d) vemos um diagrama que mostra a distância Al_m

Foi verificada a freqüência de ressonância do tubo borbulhador, obtendo um sinal proporcional ao deslocamento da onda sonora, colocando um microfone dentro do tubo. A distância entre o microfone e a superfície do líquido é Al_m. O sinal obtido pelo microfone, colocado em três alturas distintas dentro do tubo borbulhador, está mostrado na Fig. 3.8, onde temos os valores obtidos para as alturas de 2 cm, 34 cm e 60 cm em relação ao nível do líquido, com um comprimento de coluna de ar total de 60 cm. Variando a freqüência da onda entre 100Hz e 160 Hz, obteve-se que a freqüência de ressonância do tubo é de aproximadamente 134 Hz. O sinal do microfone tem a mesma forma que o sinal senoidal injetado no alto-falante.

Depois de determinada a freqüência de ressonância do tubo nas condições do parágrafo anterior, obtivemos o sinal do microfone colocado em vários pontos do tubo, para os três primeiros harmônicos 134, 402 e 670 Hz, como está mostrado na Fig. 3.9, de modo a verificar experimentalmente as posições dos nodos e antinodos de deslocamento. Na Fig. 3.9, podemos ver que a tensão não se anula na origem, portanto a onda não forma um nodo exatamente na superfície do líquido para os três harmônicos, mas parte da onda refrata no líquido.

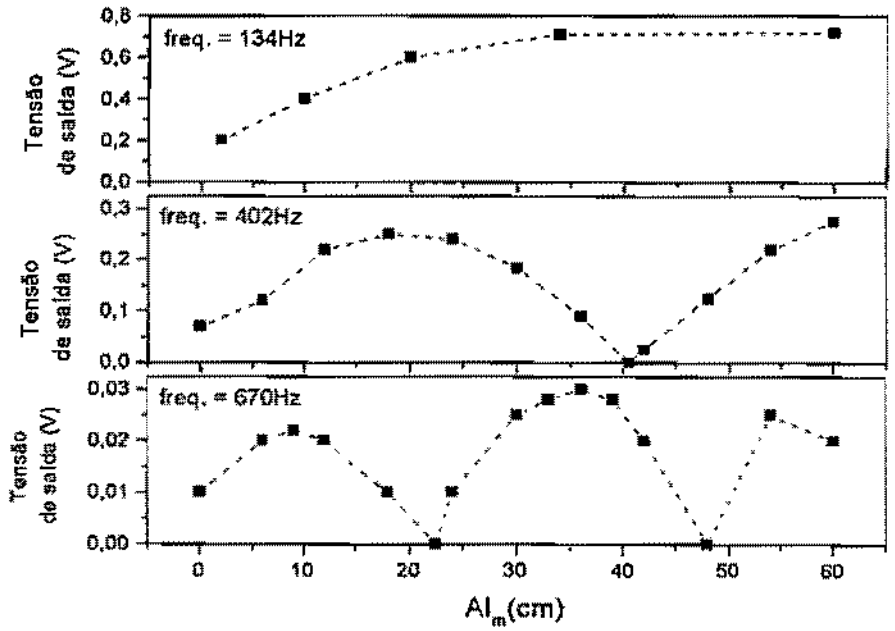


Figura 3.9 Nodos e antinodos dentro do tubo para os três primeiros harmônicos medidos em diferentes posições na parte de ar, com as freqüências de 134 Hz, 402 Hz e 670 Hz. Podemos notar nos três gráficos que a onda sonora não forma exatamente um nodo na superfície do líquido.

3.9 O líquido

O líquido utilizado foi preparado em soluções utilizando-se diferentes concentrações de água e glicerina.

A tensão superficial foi obtida através do método do tensiômetro de anel [Ueta e Tabacniks, 1989], que consiste em se determinar a força para se elevar um anel delgado do líquido e relacionando-a com a tensão superficial, numa temperatura de 25°C. Na tabela 3.2 temos a tensão superficial de alguns líquidos comuns obtidos com este método. Para as diferentes concentrações de glicerina obtivemos os valores da Fig. 3.10.

Líquido	Tensão superficial (dina/cm)
Água destilada	72
Água de torneira	66
Óleo 20W-50 (Mobil)	35
Glicerina	58
Álcool hidratado	30
Água com detergente	36
Detergente	23
Café (solução)	42

Tabela 3.2 Tensão superficial de alguns líquidos comuns medidos pelo método do tensiômetro de anel.

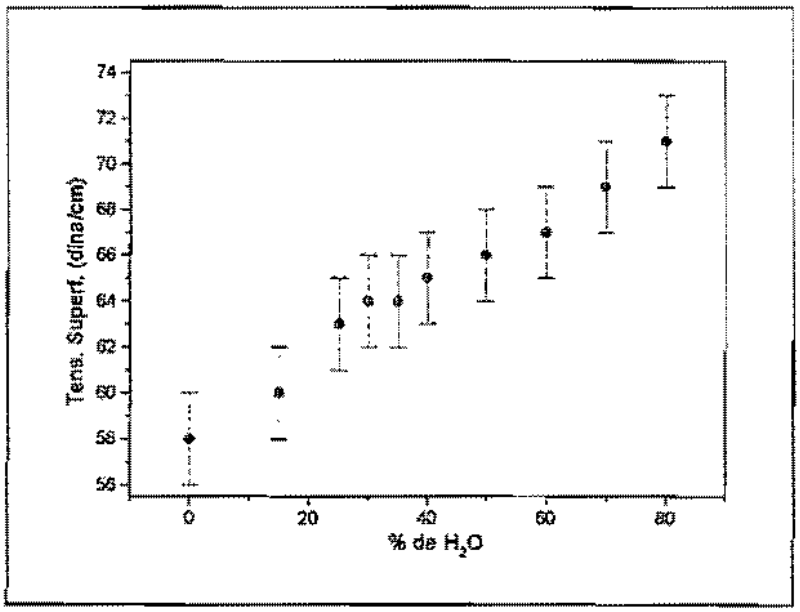


Figura 3.10 Tensão superficial medida com o método do tensiômetro do anel para diferentes concentrações de água e glicerina.

A viscosidade das soluções de água e glicerina foi estimada através do método de Stokes [Ueta e Tabacniks, 1989] e a viscosidade varia como a função exponencial mostrada na Fig. 3.11 para 25° C. Para os valores da viscosidade da água pura e da glicerina para diferentes temperaturas foi consultada uma tabela de viscosidades [Perry e Clinton, 1972; Weast e Selby, 1996].

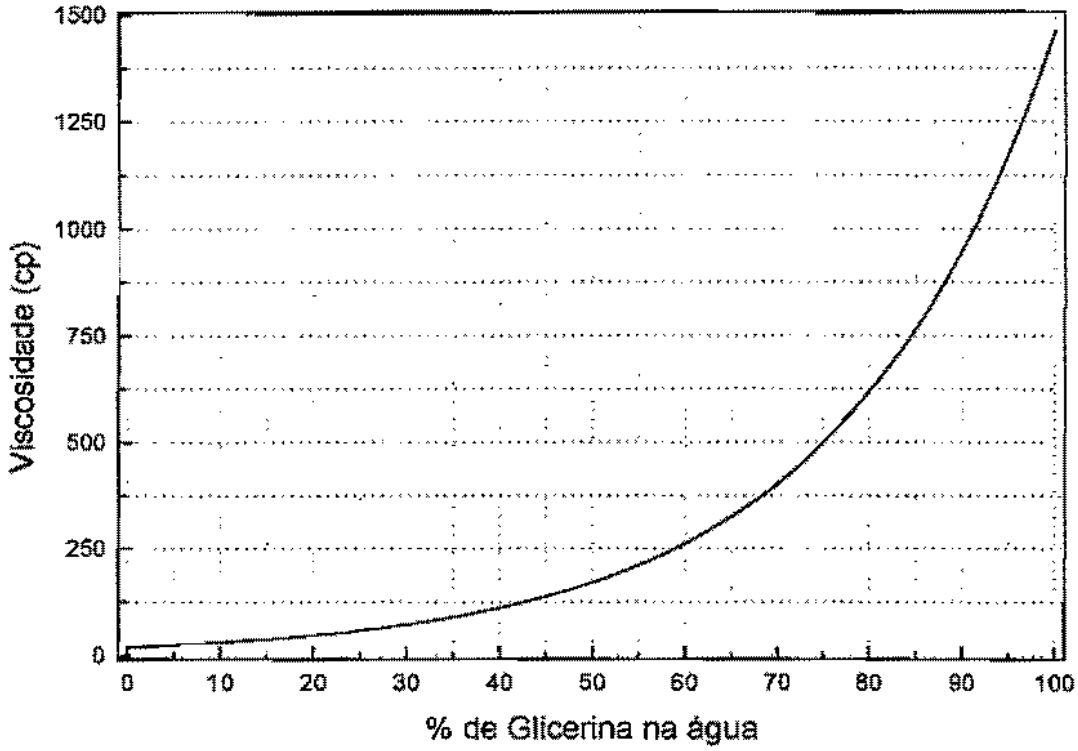


Figura 3.11 Variação da viscosidade com a concentração de glicerina na solução

3.10. Imagens

Algumas imagens foram obtidas para esclarecer alguns aspectos da formação das bolhas. As imagens da formação das bolhas foram feitas através de uma câmera VHS. Para iluminar o tubo borbulhador, utilizou-se a técnica de iluminação traseira, com uma placa translúcida para difundir a luz proveniente de uma lâmpada fluorescente, e o tubo borbulhador foi colocado entre a placa difusora de luz e a câmera. As imagens obtidas foram digitalizadas e armazenadas.

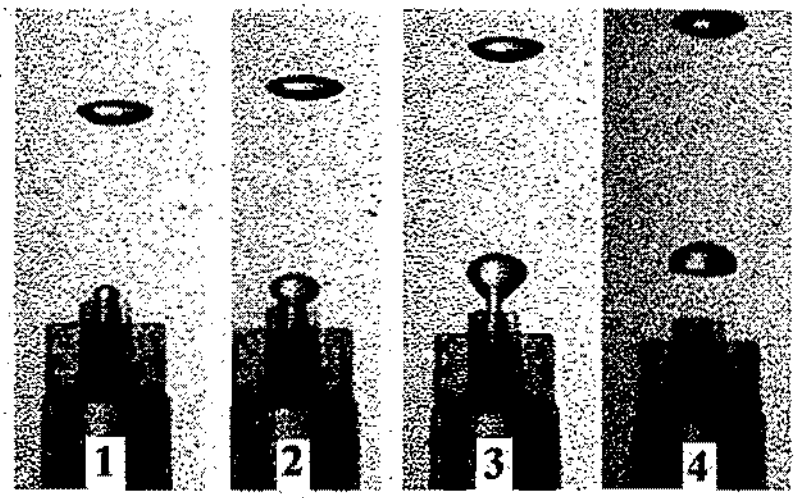


Figura 3.12 Imagens obtidas a partir do experimento do tubo borbulhador. Em (1) vemos uma bolha se formando junto à seringa, enquanto a bolha anterior emerge no líquido; (2) a bolha aumenta de volume, mas o empuxo não é suficiente para retirá-la do bico; (3) a bolha se *descola* do bico, mas é alimentada por um pescoço; (4) a bolha se destaca do bico e o perfil evolui para a forma elipsoidal.

Na Fig. 3.12 temos a evolução de uma bolha se formando junto ao bico soprador, numa solução viscosa de água com glicerina, em quatro instantes distintos. A forma final das bolhas depende de vários fatores, entre eles o seu volume, e isto pode ser observado nas cinco imagens da Fig. 3.13.

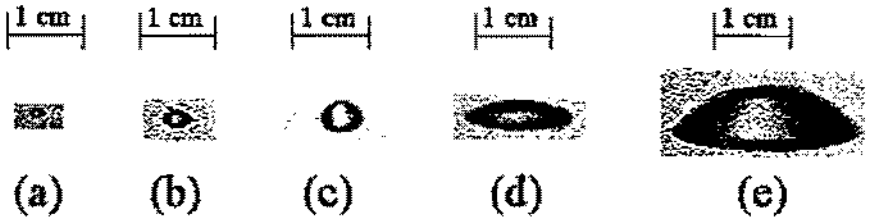


Figura 3.13 Exemplo do perfil das bolhas em relação ao seu tamanho

3.11. O Experimento da Torneira Gotejante

O experimento da torneira gotejante foi uma das primeiras tentativas de se criar um sistema com o propósito de se observar o Caos determinístico. Este experimento possui um extenso material produzido pelo LFNL, que pode ser encontrado na forma de dissertações de mestrado e teses de doutorado [da Rocha, 1995; da Silva, 1996, Tufaile, 1996; Gonçalves, 1996; Pinto, 1999].

O experimento consiste basicamente de um bico gotejador que é alimentado por um grande reservatório, como pode ser visto no diagrama do aparato experimental da Fig. 3.14. O tempo associado para cada gota é medido do mesmo modo que o descrito na seção 3.3 para o tempo entre as bolhas, mas para o experimento da torneira gotejante, o feixe laser está posicionado ~ 9 cm abaixo do bico.

Nós controlamos a taxa de gotejamento (f_{got}=<1/T>) mantendo o nível do reservatório intermediário constante e selecionando a freqüência de gotejamento através da abertura da válvula acionada por um motor de passo e controlada por um microcomputador. Para uma dada taxa de gotejamento, nós construímos os mapas de primeiro retorno.

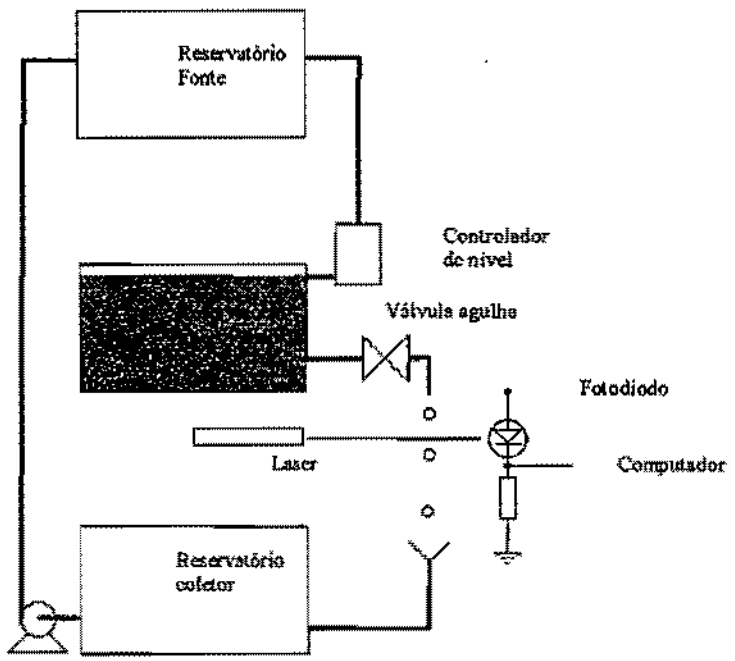


Figura 3.14 Diagrama do experimento da torneira gotejante

4. Resultados e Análise

A formação das bolhas é freqüentemente imaginada como o experimento da torneira gotejante invertido. Esta analogia é fraca e para podermos verificá-la, estudaremos inicialmente a formação de gotas e depois estudaremos a formação das bolhas.

4.1. A torneira gotejante

As equações diferenciais de primeira ordem, para a torneira gotejante, propostas no modelo de Shaw [Shaw, 1984], com as modificações de D'Innocenzo e Renna [D'Innocenzo e Renna, 1996] são:

$$\begin{aligned} &dx/dt = v, \\ &d(Mv)/dt = Mg - kx - bv, \\ &dM/dt = Q, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde x é a coordenada do centro de massa da gota, Q é o fluxo de água. A tensão superficial e o atrito entre a água e a torneira são dados pela constante de mola k e por b, respectivamente. Uma gota ΔM, se desprende do bico com velocidade v_c, com o fator de redução α quando o centro de massa alcança o limiar x_c:

$$\Delta M = \alpha M_c v_c. \tag{4.2}$$

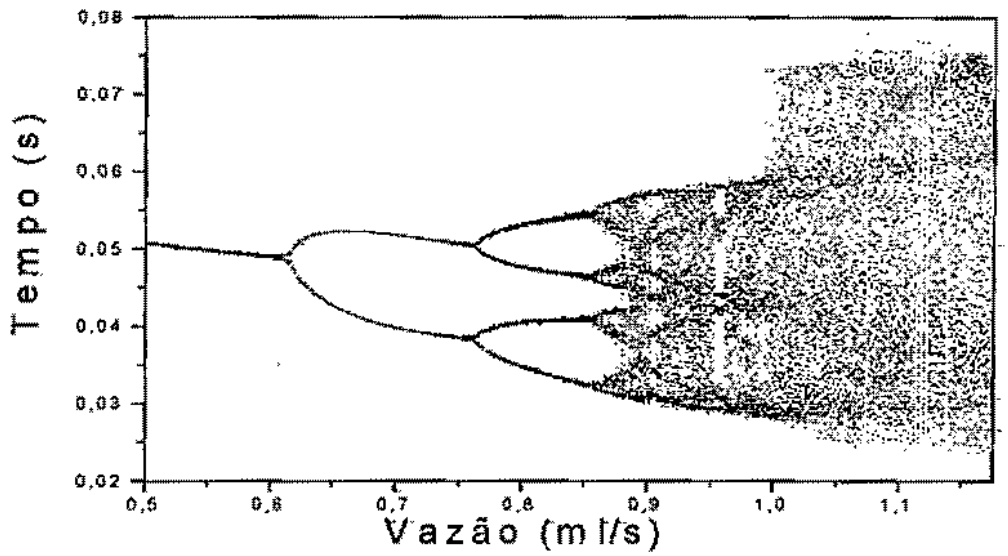


Figura 4.1 Série temporal obtida com o modelo da torneira gotejante variando-se a vazão Q. k=475 dina/cm, g=980 cm/s, b=1 g/s, x_c=0,14 cm, α=0,19 s/m.

Na Fig. 4.1 mostramos uma série temporal obtida a partir do modelo das equações (4.1), com os parâmetros k=475 dina/cm, g=980 cm/s, b=1,0 g/s, x_c=0,14 cm e α=0,19 s/m. Na integração do modelo foi utilizado um integrador Runge-Kutta de quarta ordem, com passo de integração de 10^{-6} e condições iniciais $x(0)$=0.0 cm e $y(0)$=0.1 cm/s. Nesta série temos uma seqüência de duplicações de período para 0,5<Q<0,87 ml/s, caos e janelas periódicas para Q acima de 0,87 ml/s, e um alargamento abrupto do atrator próximo de Q=1,02 ml/s.

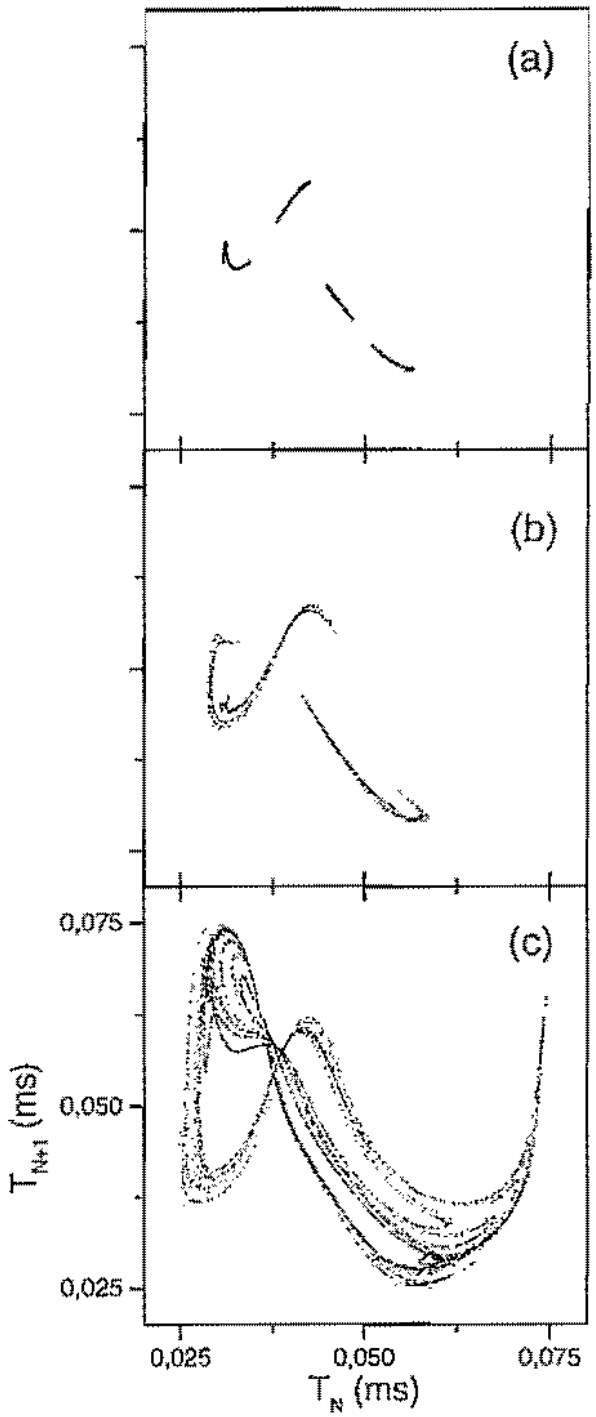


Figura 4.2 Atratores caóticos reconstruídos fixando-se a vazão em três valores distintos de vazão Q. A dimensão de Kaplan-Yorke D_{KY} foi calculada para cada um destes atratores:
(a) D_{KY}= 1,2(1); (b) D_{KY}= 1,39(1); (c) D_{KY}=1,73(2).

Na Fig. 4.2 vemos três atratores para três diferentes valores de vazão Q do modelo. Para cada um destes atratores foi calculado os expoentes de Lyapunov e sua respectiva dimensão de Lyapunov, que os caracterizaram como caóticos devido a existência de expoentes de Lyapunov positivos. Na Fig. 4.2(a) temos um atrator formado por quatro bandas caóticas, com vazão Q= 0,885 ml/s. Para uma vazão maior de 0,95 ml/s, Fig. 4.2(b), temos um atrator caótico com duas bandas caóticas. Na Fig. 4.2(c) um atrator caótico mis "largo" após a crise, para Q=1,05 ml/s.

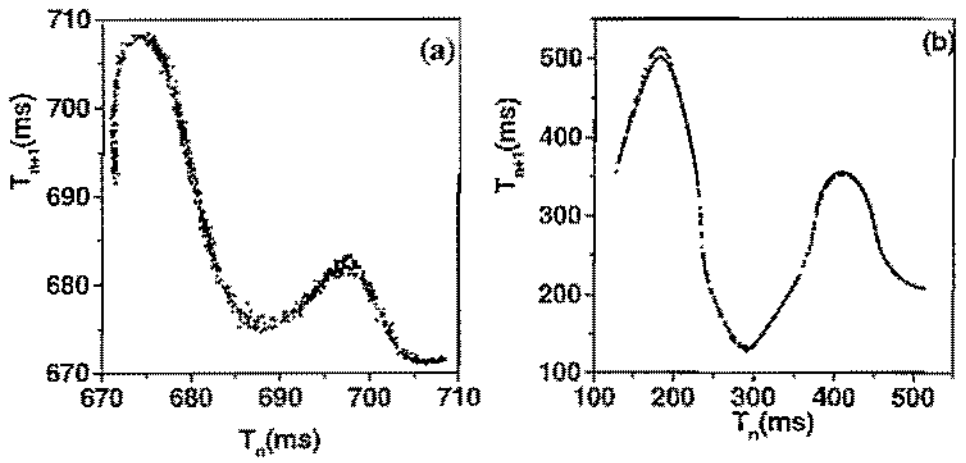


Figura 4.3 (a) dados experimentais para uma freqüência de gotejamento de 1,46 gotas/s. (b) atrator obtido com o modelo com de oscilador com relaxação com uma freqüência de 3,15 gotas/s.

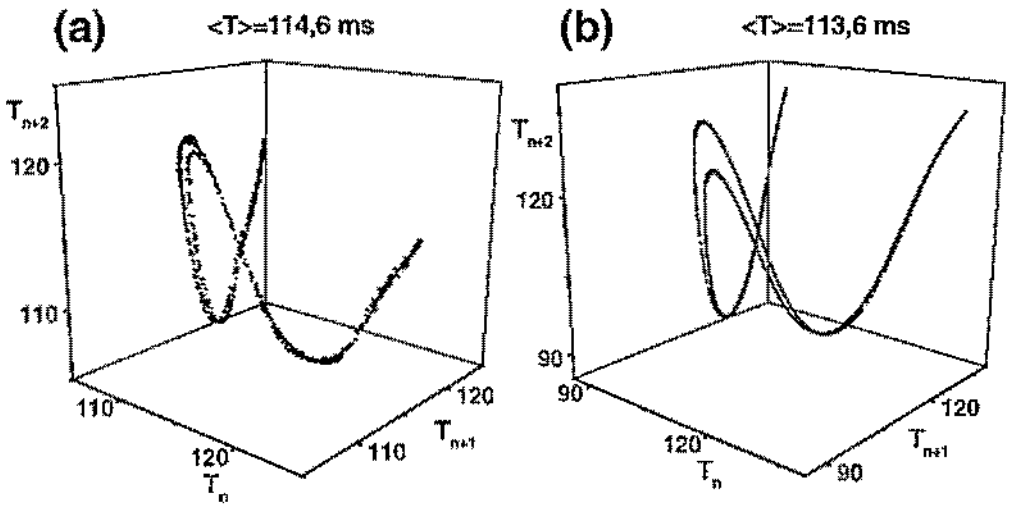


Figura 4.4 (a) atrator experimental com um freqüência média de 8,726 gotas /s. (b) atrator obtido a partir da simulação com uma freqüência média de 8,80 gotas/s.

Fizemos duas comparações entre os dados experimentais e o modelo. [*Tufaile et al.*, 1999, Apêndice 1]. Na Fig. 4.3(a) está mostrado o mapa de primeiro retorno experimental mantendo-se constante o nível do reservatório intermediário, com uma freqüência de gotejamento de 1,46 gotas/s, com o bico de vidro. Uma estimativa para os valores experimentais é dada por: k=365 dina/cm, x_c~0,6 cm, e Q no intervalo 0,12-0,15 g/s. As simulações do atrator usando estes valores para os parâmetros não convergiram para vários valores de α e b. Desta forma outro conjunto de valores foi procurado para a reprodução do atrator experimental. Os valores escolhidos foram k = 475 dina/cm, x_c = 1,3 cm, Q =0,15 g/s, α = 0,2 s/cm, e b = 10 s^{-1}, como está mostrado na Fig. 4.3(b), com uma freqüência de gotejamento de 3,15 gotas/s.

Na Fig. 4.4(a) está mostrado um atrator reconstruído em um mapa tridimensional: T_{n+2} vs. T_{n+1} vs. T_n, com a freqüência de gotejamento de 8,726 gotas/s. O perfil do atrator foi simulado com os parâmetros com os seguintes parâmetros: Q=0,141 g/s, x_c = 0,251 cm, α=0,51 s/cm, b=0,943 s^{-1}, e k=120 dina/cm, como está mostrado na Fig. 4.4(b). A freqüência média de gotejamento é de 8,80 gotas/s, próxima do valor experimental. Os dois atratores da Fig. 4.4 apresentam expoentes de Lyapunov positivos e dimensões de Kaplan-Yorke 1,0±0,1 (atrator experimental) e 1,1±0,1 (modelo).

Outros atratores obtidos a partir de mapas criados baseados neste modelo podem ser encontrados na literatura [Renna, 1999], assim como comparações entre atratores experimentais e simulados na mesma região de vazões das Figs. 4.3 e 4.4 [D'Innocenzo e Renna, 1997]. Em todas estas referências o modelo apresenta problemas quando os valores escolhidos para os parâmetros são os mesmos do experimento, que normalmente causam divergência das soluções durante a integração. Uma possível causa destes problemas é fato de que a gota não se rompe exatamente sempre na mesma posição, mas em alturas diferentes com relação ao bico. Concluímos que este modelo apresenta características qualitativas interessantes, mas que não pode ser utilizado para comparações quantitativas com a experiência. Modificações neste modelo estão sendo feitas por Fuchikami [Fuchikami *et al.*, 1999], que compara este modelo com outro modelo mais elaborado, que utiliza por princípio físico a minimização da energia com relação ao perfil da gota que cresce junto ao bico. O modelo de Fuchikami utiliza uma descrição Lagrangeana para calcular numericamente a evolução da formação da gota.

4.2. Dinâmica das bolhas

Veremos nesta seção os diferentes regimes de borbulhamento causados pelo aumento da vazão do ar, e como podemos esclarecer as transições destes regimes através de alguns modelos.

4.2.1. Formação quase-estática

Devido à complexidade do processo da formação de bolhas, os modelos existentes são adequados apenas em casos particulares [Clift *et al.*, 1978]. Para uma bolha se formando em condições quase-estáticas, o equilíbrio de forças na bolha é dado por:

$$f_g = f_\sigma , \tag{4.3}$$

onde f_g é a força da gravidade e f_σ é a força devido à tensão superficial. Para um orifício do tipo *bico circular*, a equação (4.3) tem a forma:

$$mg = 2R_b \pi\sigma , \tag{4.4}$$

onde m é a massa do líquido deslocado pelo volume da bolha, g é aceleração da gravidade, R é o raio do bico soprador e σ é a tensão superficial entre o ar e o líquido.

Tomando um bico com R_b = 0,4 mm, e criando-se uma bolha de ar na água nas condições quase-estáticas, quando a tensão superficial do sistema é igual a 0,07 N/m e g é igual a 9,8 m/s, teremos uma massa de líquido deslocado de:

$$m = 1{,}8.10^{-5} kg . \tag{4.5}$$

Como temos a densidade da água igual a 1 g/cm^3, o volume máximo da bolha será dado por:

$$V = \frac{m}{\rho_l} = 18mm^3 . \tag{4.6}$$

Se considerarmos uma esfera de volume equivalente, teremos um raio para a bolha, r_b :

$$r_b \cong 1{,}6mm . \tag{4.7}$$

Podemos também estimar a pressão do ar dentro de uma bolha através da relação:

$$p_2 - p_1 = \frac{2\sigma}{r_b} . \tag{4.8}$$

Se a interface não é esférica, mas possui como raios principais de curvatura r_a e r_b, então a equação (4.8) terá a forma:

$$p_2 - p_1 = 2\sigma\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}\right). \tag{4.9}$$

As diferenças de pressão das equações (4.8) e (4.9) fornece-nos a pressão *laplaciana* devido à tensão superficial[Clift *et al.*, 1978].

Para uma bolha com o raio de 1,6 mm, como calculado na equação (4.7), a diferença de pressão entre o ar dentro da bolha e a água é

$$p_2 - p_1 = 175Pa\,. \tag{4.10}$$

Para uma bolha a 5 cm da superfície teremos p_1 = 500 Pa, então, de acordo com a equação (4.10), a pressão dentro da bolha será de 675 Pa, ou seja, a pressão dentro da bolha é equivalente a uma coluna de água de 67,5 mm.

Esta análise só é válida para sistemas em equilíbrio, fora do equilíbrio outros métodos de análise são empregados e serão discutidos na próxima seção.

4.2.2. Formação de bolhas com vazão constante

Podemos obter um modelo para baixas vazões, fazendo algumas suposições sobre a geometria da bolha [Davidson e Schüler, 1960]. O modelo segue as seguintes considerações:

1. A bolha é esférica durante sua formação.
2. Não há circulação do líquido ao redor da bolha que está se formando, de tal modo que o líquido está em repouso quando a bolha começa a se formar.
3. O movimento de uma bolha não é afetado pela presença de uma bolha acima ela.
4. A bolha está a todo instante movendo-se na velocidade de *Stokes* apropriada para o seu tamanho.
5. Quando a bolha atinge o raio máximo R ela se destaca.

Considerando o movimento de uma bolha que se forma em um ponto longe das paredes de um reservatório infinito nas condições acima, a velocidade do centro da bolha, v, no tempo t após o começo da sua formação, será dada pela velocidade de Stokes:

$$\mathrm{v} = \frac{2r^2 g}{9\nu}, \tag{4.11}$$

onde ν é a viscosidade cinemática do líquido, dada pela razão entre a viscosidade e a densidade do líquido. Além disso, se Q é o fluxo do gás, então o volume da bolha V é:

$$V = Qt = \frac{4\pi r^3}{3}. \tag{4.12}$$

Deste modo, definindo x como a distância entre o centro da bolha e o ponto de suprimento do gás, obtemos a equação que define o movimento do centro da bolha, através do seu raio r, como uma função de Q e t, dados pela equação (4.12). Substituindo r na equação da velocidade de Stokes:

$$v = \frac{2g}{9\nu}\left(\frac{3Q}{4\pi}\right)^{2/3} t^{2/3}, \tag{4.13}$$

e integrando a equação (4.11) em relação a t, nós obtemos o deslocamento do centro da bolha em função do tempo:

$$x = \frac{2g}{15\nu}\left(\frac{3Q}{4\pi}\right)^{2/3} t^{5/3}. \tag{4.14}$$

A bolha irá se destacar quando $x = R$, o raio máximo da bolha, com o tempo para a formação completa da bolha T obtido a partir da equação (4.14):

$$T = \left(\frac{15\nu R}{2g}\right)^{3/5}\left(\frac{4\pi}{3Q}\right)^{3/5}, \tag{4.15}$$

que nos dá uma relação hiperbólica entre o tempo T da formação da bolha e a vazão Q, como mostrado no gráfico da Fig. 4.5. Com isto obtemos que a relação entre a freqüência de borbulhamento $F_b = (1/T)$ e a vazão volumétrica do ar Q é:

$$F_b \propto Q^{0.4}. \tag{4.16}$$

Este é um modelo razoável para baixas vazões, pois explica de modo simples as principais características da variação da freqüência do borbulhamento com a vazão do ar. Entretanto, as cinco condições para formação das bolhas no início desta seção não são rigidamente observadas, isto faz a equação (4.16) ter um caráter principalmente qualitativo. O trabalho de Ponter e Surati [Ponter e Surati, 1997] faz um estudo comparativo entre vários trabalhos que investigam a emissão de bolhas a partir de orifícios submersos, e apontam como principal causa da discrepância entre os diferentes resultados experimentais, a influência da superfície do bico soprador e a falta de padronização da geometria do equipamento. Mesmo com as discrepâncias, o comportamento hiperbólico com as bolhas se formando sequencialmente é observado quando se aumenta a vazão [Sullivan *et al.*, 1964]. No nosso trabalho soprando ar diretamente na seringa, para vazões acima de 200 ml/min ocorrem bifurcações no tempo entre bolhas, e isto é o tema da próxima seção.

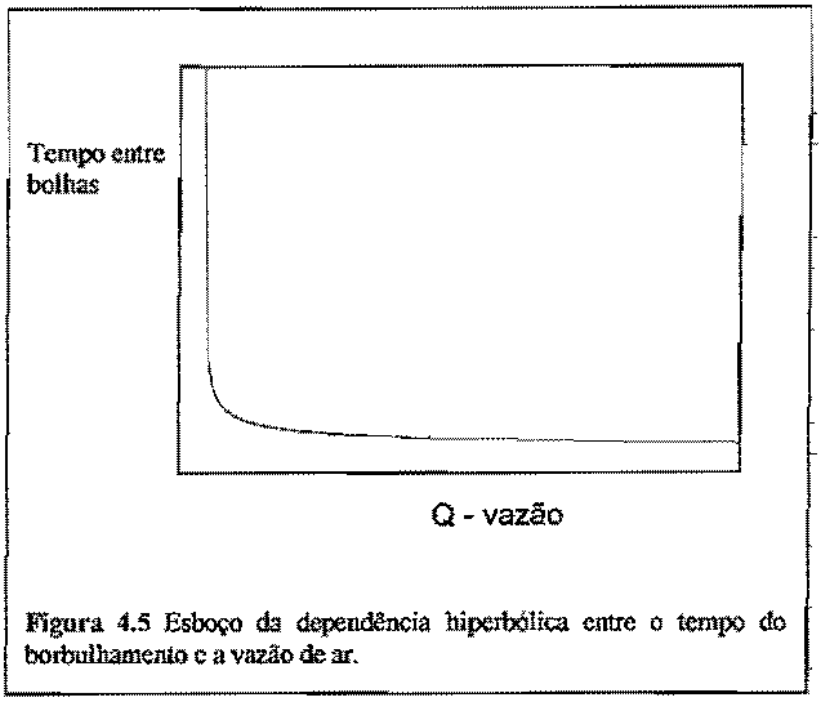


Figura 4.5 Esboço da dependência hiperbólica entre o tempo do borbulhamento e a vazão de ar.

4.2.3. Bifurcações

Dependendo principalmente da geometria do bico soprador, para vazões acima de um determinado valor ocorre uma transição de um regime de borbulhamento igualmente espaçado no tempo, para um regime no qual as bolhas se formam com dois tempos distintos e emergem aos pares, formando um dubleto [Davidson e Schüler, 1960; Marmur e Rubin, 1975; Miyhara *et al.*, 1983; Tritton e Egdell, 1993; Mitoni et al., 1995; Kyriaides *et al.*, 1997]. Este fato pode ser atribuído à transferência de momento do gás, pois, uma parte do líquido fica agregada à superfície da bolha, formando uma casca esférica líquida, que é chamada de *massa virtual* β [Davidson e Schüler, 1960; Miyhara *et al.*, 1983] reduzindo o empuxo da bolha para 11/16. Além disso, nós podemos fazer um modelo simplificado para a formação das bolhas. Se considerarmos a presença de uma força restauradora de coeficiente k devido à tensão superficial, usando as considerações 1, 4 e 5 da seção 4.2.2 e considerando que existe uma força dissipativa na formação da bolha (que é proporcional à velocidade, bv). Utilizando a segunda lei de Newton chegamos às equações diferenciais de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mathrm{v}, \\ \frac{d(M\mathrm{v})}{dt} &= (\beta M g - kx - b\mathrm{v}), \\ \frac{dM}{dt} &= Q, \end{aligned} \tag{4.17}$$

onde x é a posição do centro da bolha, M é a massa de líquido deslocada pela bolha ($\beta M = V\rho$). Além destas equações, uma quarta equação define quando a bolha deve se destacar. No momento que a ela atinge o ponto crítico x_c, a bolha se desprende do bico soprador com a massa:

$$\Delta M = \alpha M_c v_c, \tag{4.18}$$

com M_c e v_c sendo a massa e a velocidade no ponto de rompimento x_c, respectivamente. A constante de proporcionalidade de massa é α. O diagrama do modelo pode ser visto na Fig. 4.6.

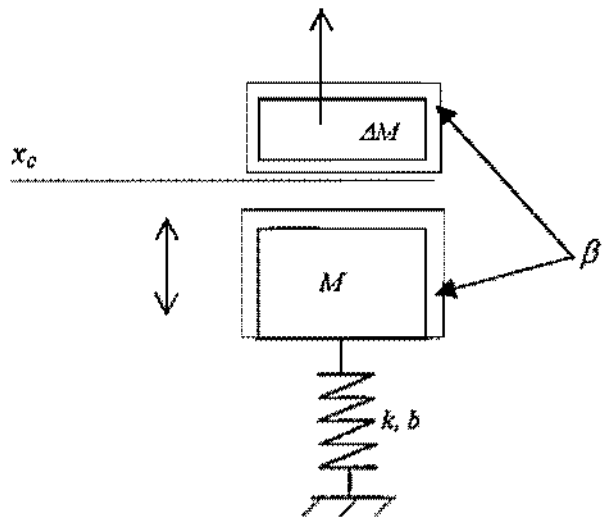


Figura 4.6 O modelo de oscilador de massa variável para a formação de bolhas.

Estas equações foram inspiradas em equações do mesmo tipo para o experimento da torneira gotejante [Tufaile *et al.*, 1999, Apêndice1] mostradas na seção 4.1. Shaw [Shaw, 1984] propôs o primeiro modelo para a torneira gotejante inspirado nas idéias de Rayleigh. O modelo foi atualizado por Sánches-Ortiz e Salas-Brito [Sánches-Ortiz e Salas-Brito, 1995a; Sánches-Ortiz e Salas-Brito, 1995b] e independentemente por D'Innoncenzo e Renna [D'Innoncenzo e Renna, 1996], que, através da mudança do mecanismo de rompimento, mostraram uma vasta gama de comportamento caótico usando o modelo, e o quanto ele pode ser comparado com dados experimentais. É importante salientar que, apesar da enorme simplificação que se faz quando se reduz um sistema fluido com muitos graus de liberdade para um modelo unidimensional, existem muitos resultados que podem ser compreendidos usando o modelo de oscilador de massa variável, como bifurcações, comportamento caótico e janelas periódicas. Seguindo esta linha, Kiyono e Fuchikami trabalham na construção de modelos de oscilador de massa variável, utilizando resultados obtidos a partir de seu modelo hidrodinâmico [Kyono e Fuchikami, 1999].

Na Fig. 4.7 vemos espaços de fase para a formação de bolhas para diferentes vazões, numa seqüência que evolui desde o periodo 1 até o comportamento caótico. Para a vazão de 1,0 ml/s obtivemos um ciclo limite, com a velocidade crescendo, atingindo um valor máximo e depois diminuindo retornando próximo ao valor inicial. Neste instante ocorre o rompimento e a próxima bolha inicia o ciclo com a mesma posição da bolha anterior, deste modo o sistema retorna abruptamente ao ponto inicial (x~0,1 cm e v~1,4 cm/s). Para a vazão de 1,8 ml/s o sistema atinge o ponto de rompimento com duas condições de rompimento distintas, a primeira com uma velocidade ascendente e uma segunda com uma velocidade descendente. Para 2,0 ml/s temos uma outra duplicação de período, levando a um período quatro, e finalmente para uma vazão de 2,15 ml/s vemos o espaço de fase do comportamento caótico.

A série temporal deste modelo está na Fig. 4.8, e mostra as variações da dinâmica com a variação da vazão, na faixa de vazão $0,8 < Q < 2,2$ ml/s. Para uma vazão por volta de 1,55 ml/s ocorre uma duplicação de período. Para 1,97 ml/s uma descontinuidade na série, seguida de novas duplicações e caos.

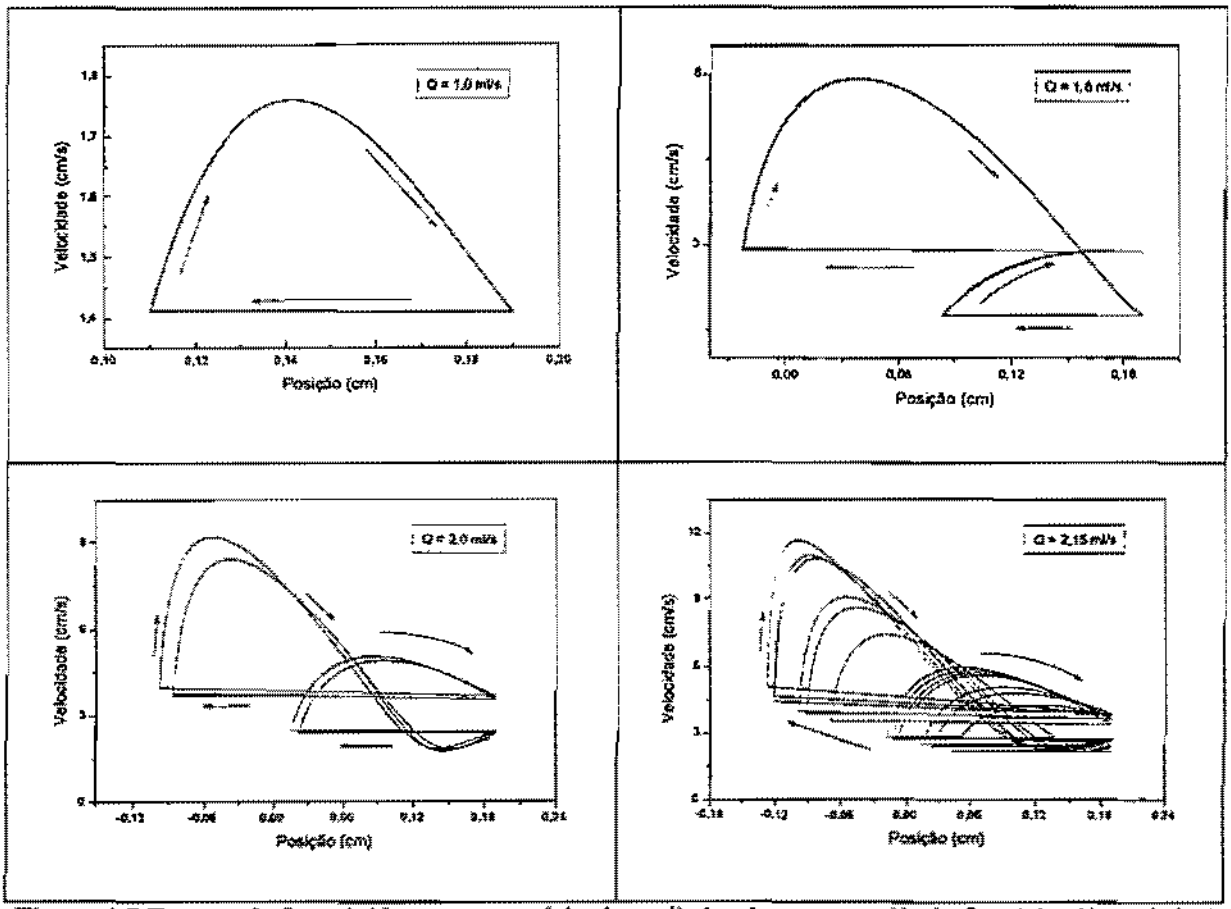


Figura 4.7 Espaços de fase obtidos com o modelo de oscilador de massa variável. Q = 1,0 ml/s período 1, Q=1,8 ml/s duplicação de período, período 4 para 2,0 ml/s e comportamento caótico para 2,15 ml/s. Os parâmetros do sistema são x_e=0,19 cm, α=0,25, b=2,5 cm/s, g=980 cm/s, k=480 dina/cm.

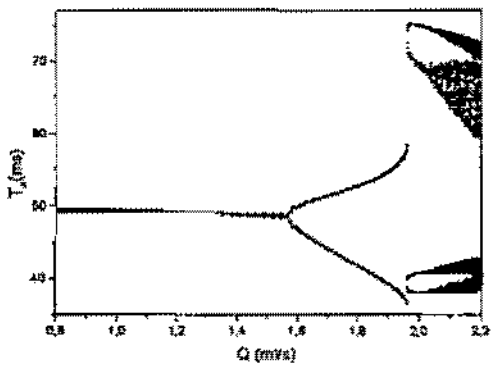


Figura 4.8 Série temporal do modelo de oscilador de massa variável para o tubo borbulhador.

Deste modo podemos ter uma visão geral de como ocorre uma duplicação de período, do espaço de fases da formação de bolhas, além da região da formação quase-estática, baseada em um modelo mecânico simplificado. Outro modelo para a formação de bolhas pode ser encontrado no trabalho de Marmur e Rubin [Marmur e Rubin, 1975], que do mesmo modo que Fuchikami [Fuchikami et al., 1998], utiliza o formalismo Lagrangeano.

4.2.4. Veias líquidas

Verificamos experimentalmente a ocorrência da agregação de líquido junto à bolha, que causa a redução do empuxo sobre a bolha. Utilizando um sistema de três fases (ar, água e óleo), observamos a formação de veias líquidas. Uma veia líquida ocorre quando temos um canal de água dentro do óleo, que é sustentado pela emergência das bolhas, como pode ser visto no diagrama da Fig. 4.9. Na literatura existem classificações para padrões de fluxos de duas fases como o padrão de borbulhamento, padrão de jateamento e padrão anular [Sharpe, 1994]. O primeiro caso, borbulhamento, é o caso tratado neste trabalho; o padrão de jateamento [Ruzicka, 1997] ocorre quando o gás possui velocidades maiores do que a do borbulhamento e é espargido dentro do líquido; o terceiro caso, o padrão anular, ocorre para velocidades ainda maiores do gás, que passa pelo centro do líquido, formando um tubo gasoso, com gotículas do líquido subindo pelo centro junto com o gás. Devido a propriedades viscoelásticas do óleo, diferença de cor entre o óleo e a água, e a refração do sistema água-ar, podemos ver a formação desse padrão anular, a veia líquida, num sistema de três fases, ar, água e óleo, e deste modo verificar o arrasto da água junto com as bolhas.

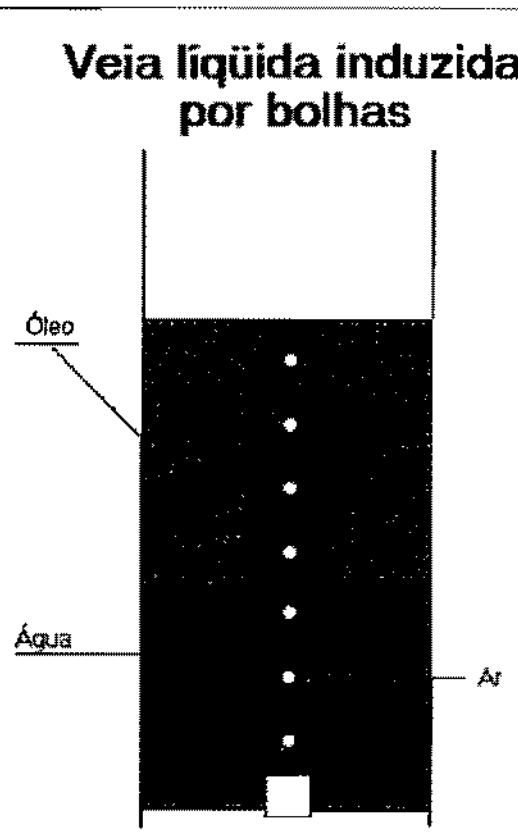


Figura 4.9 Um sistema de três fases imiscíveis formado por água, ar e óleo, criando uma veia líquida. A água forma uma coluna dentro do óleo, com um fluxo ascendente próximo do centro e um fluxo descendente na parte externa.

O líquido que envolve a bolha deve ter a mesma velocidade da superfície da bolha, formando uma casca esférica de líquido. A casca esférica de água acompanha a bolha até o ponto em que ela atinge a superfície do sistema líquido, a partir deste ponto, este volume de água é afastado lateralmente e inicia a descida para a base da coluna. Na Fig. 4.10, podemos ver uma imagem obtida no LFNL de uma veia líquida.

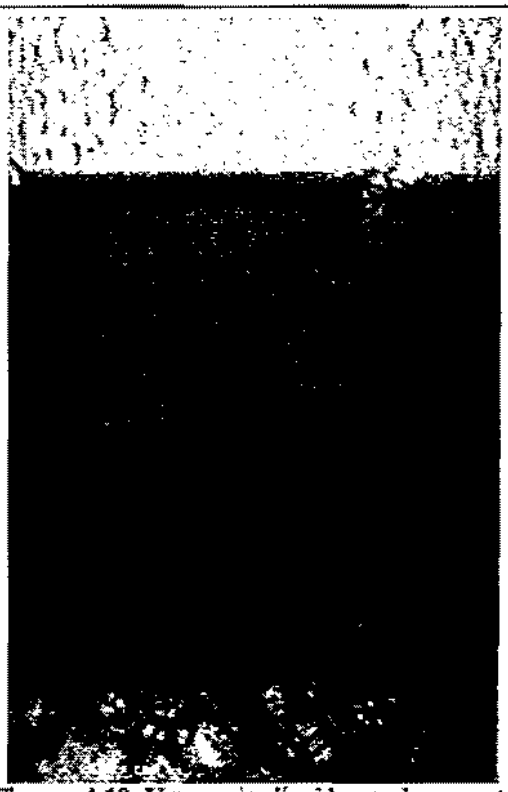


Figura 4.10 Uma veia líquida, onde a parte avermelhada é óleo, a coluna central é constituída de água com bolhas no seu interior.

A existência da massa de líquido agregada junto à bolha é um fato que mostra que, a experiência do tubo borbulhador não é o experimento da torneira gotejante invertido.

Se aumentarmos a vazão de ar, inicialmente ocorre uma acumulação de água sobre o óleo, que depois se precipita, na forma de uma bolsa de água, como podemos ver na seqüência de imagens da Fig. 4.11. Deste modo o fator de massa agregada, β, das equações (4.17) é uma das principais diferenças entre os modelos de oscilador para bolhas e gotas.

Figura 4.11 Aumentando-se a freqüência de bolhas, a água se acumula no topo da coluna (a), o acúmulo de água se desestabiliza e começa a descer agarrada à veia (b), e em (c) temos a "bolsa" de água já na base da veia líquida.

4.2.5. A estabilidade de dois fluidos sobrepostos

O problema físico fundamental na formação de bolhas em líquidos é a superposição de dois fluidos de densidades muito diferentes. O estudo de instabilidades hidrodinâmicas aborda tal problema, além de outras instabilidades que também são tratadas de um ponto de vista matemático muito interessante, no livro *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, de Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1981]; onde foram estudadas as soluções das equações hidrodinâmicas para dois casos nos quais ocorre a superposição de fluidos:

a) A instabilidade de *Rayleigh-Taylor*, que trata da instabilidade da interface plana entre dois fluidos;
b) A instabilidade de *Kelvin-Helmholtz*, que surge quando camadas diferentes de fluidos heterogêneos estratificados estão em movimento horizontal relativo.

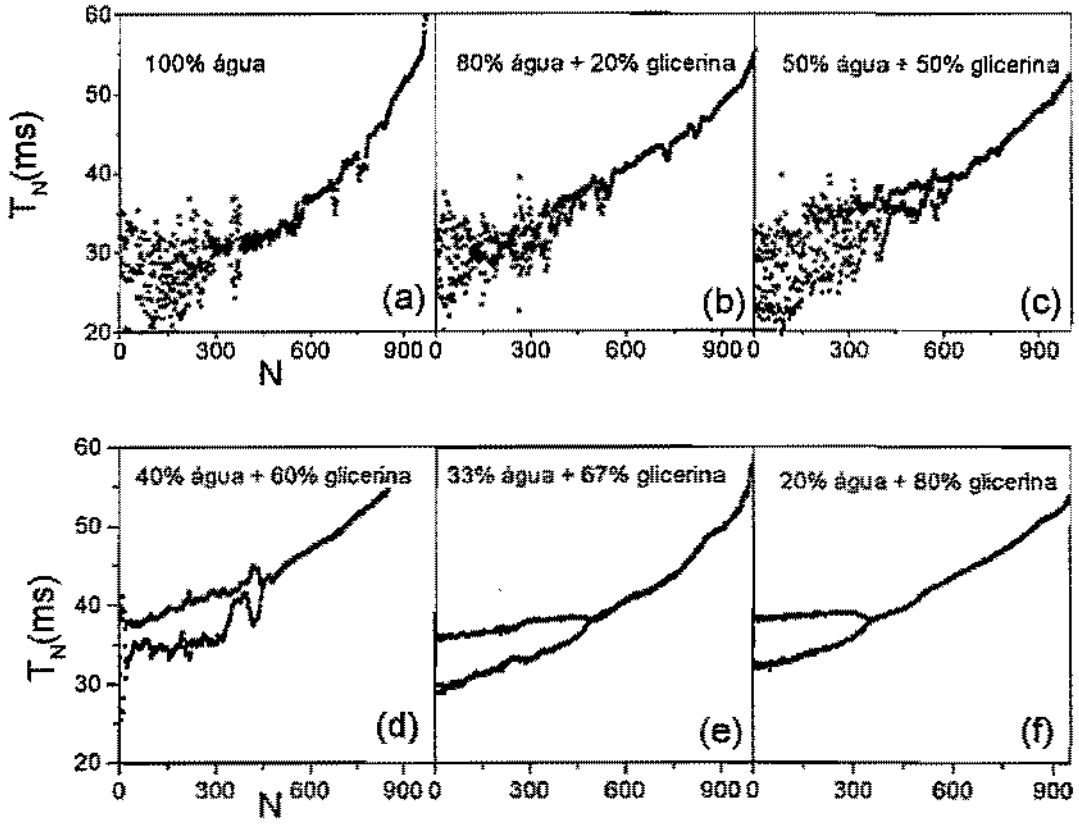
Os problemas de instabilidade hidrodinâmica envolvem o reconhecimento de fluxos estáveis e instáveis, que são obtidos para determinados valores dos parâmetros que governam o sistema. Como exemplos temos o número de *Rayleigh*, para a convecção de calor num fluido entre duas pacas, uma acima e outra abaixo do fluido; ou o número de Taylor para o comportamento do fluido entre dois cilindros coaxiais girantes. Restringindo-se à instabilidade de Rayleigh-Taylor, temos um arranjo com dois fluidos de densidade uniforme, um com a densidade ρ_1 sob outro com densidade ρ_2, sendo que ρ_2 é maior que ρ_1, num campo gravitacional g. A superfície horizontal que separa os dois fluidos tem a tensão superficial σ. Este sistema possui um número de onda crítico k_c, para as oscilações entre os fluidos, dado por:

$$k_c = \sqrt{(\rho_2 - \rho_1)g/\sigma}\,. \tag{4.19}$$

Os sistemas com números de onda no intervalo $0<k<k_c$ são instáveis; quando $k>k_c$, temos um estado marginal ou limite. De um modo geral, a tensão superficial estabiliza arranjos potencialmente instáveis. Levando em conta que a unidade de medida de k_c é 1/m, obtemos um número puro, conhecido como número de *Rayleigh-Taylor*, *RT*, que determina a estabilidade do sistema de fluidos sobrepostos:

$$RT = \frac{gl^2\Delta\rho}{\sigma}, \tag{4.20}$$

onde l é um comprimento característico do sistema. Este número está relacionado diretamente com o número de Eötvös (Eo) [Clift *et al.*, 1978] para partículas, gotas e bolhas, dado por:



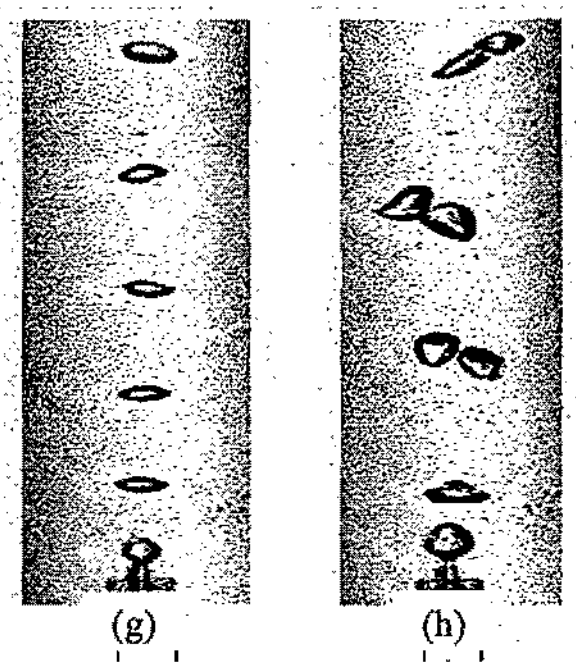


Figura 4.12 Gráficos da transição de regime do borbulhamento, diminuindo-se a vazão do ar. O aumento da viscosidade causa uma definição da duplicação de período no experimento do tubo borbulhador, como pode ser visto nos gráficos mostrados de (a) até (f). A duplicação de período também é visível espacialmente, como está mostrado em (g) que temos o período 1 com as bolhas se elevando igualmente espaçadas, e em (h) onde temos o período 2, vemos a formação dos *dubletos* de bolhas (33% água + 67% glicerina).

$$Eo = \frac{g d_e^2 \Delta\rho}{\sigma}, \tag{4.21}$$

onde d_e é o diâmetro de uma esfera de volume V equivalente, $d_e = (6V/\pi)^{1/3}$, da partícula, gota, ou bolha, obtido pela média de seus raios principais.

Medimos o número Eo juntamente com o número de Reynolds, Re, das bolhas [Clift *et al.*, 1978], ($\mathrm{Re} = u d_e \rho / \mu$, onde u é a velocidade da formação da bolha, μ é a viscosidade, e ρ é a densidade do líquido). Quando o sistema passa do regime de período 1 para uma bifurcação ou alargamento abrupto do tempo entre bolhas, obtivemos que o número de Eötvös vale aproximadamente $2{,}6 \pm 1$ para números de Reynolds entre 200 e 1500. Este resultado foi verificado para todos os bicos utilizados neste trabalho.

4.2.6. Instabilidade da superfície da bolha

Utilizando algumas concentrações diferentes de glicerina e o bico de seringa, verificamos, no experimento do tubo borbulhador, que os tempos entre bolhas ocorrem em período 1 para baixas vazões (0 a 100 ml/min) e que para faixas maiores de vazão, os tempos entre bolhas ocorrem dentro de uma faixa de valores para baixas concentrações de glicerina, ou em dois valores de tempo, caracterizando um período 2 para concentrações maiores que 50 %, como pode ser visto na Fig. 4.12. Podemos ver que com o aumento da viscosidade do líquido, os ramos que ocorrem no período 1, assim como os ramos do período 2 ficam com valores mais estáveis. Segundo Mittoni [Mittoni *et al.*, 1993] o aumento da viscosidade através da glicerina produz atratores mais estruturados e reprodutíveis, pois o aumento da viscosidade aumenta também a estabilidade do envelope da bolha e atenua a circulação do líquido próximo do bico. Este fato pode ser visto nas imagens da Fig. 4.13, onde temos um conjunto de imagens antes (a) e depois (b) da duplicação para a água, e duplicação de período para a glicerina (c, d). Deste modo a viscosidade suprime instabilidades que podem levar à variações no tempo de formação da bolha.

A instabilidade na formação devido à baixa viscosidade pode ser vista na Fig. 4.14, onde temos uma comparação entre a água e a solução com 80% de glicerina e 20% de água. Na Fig. 4.14(a) temos o mapa de primeiro retorno com 10.000 pontos, para o

bico de seringa, com uma altura de coluna de 3 cm e uma vazão de ar mantida constante em 50 ml/min.

Este regime de borbulhamento corresponde a um período 1 para a água com os pontos se espalhando num intervalo entre 75 a 92,5 ms e na Fig. 4.14(A), vemos o histograma correspondente à freqüência de visitação dos tempos entre bolhas, com um valor médio de 87 ms. Para o líquido com 80% de glicerina e 20% de água, temos o atrator da Fig. 4.14(b), com as demais condições semelhantes ao caso anterior, também com 10.000 tempos entre bolhas e na Fig. 4.14(B) temos o histograma para este atrator. Os pontos neste atrator estão entre 82,7 e 83,5 ms, muito mais concentrados do que o caso anterior.

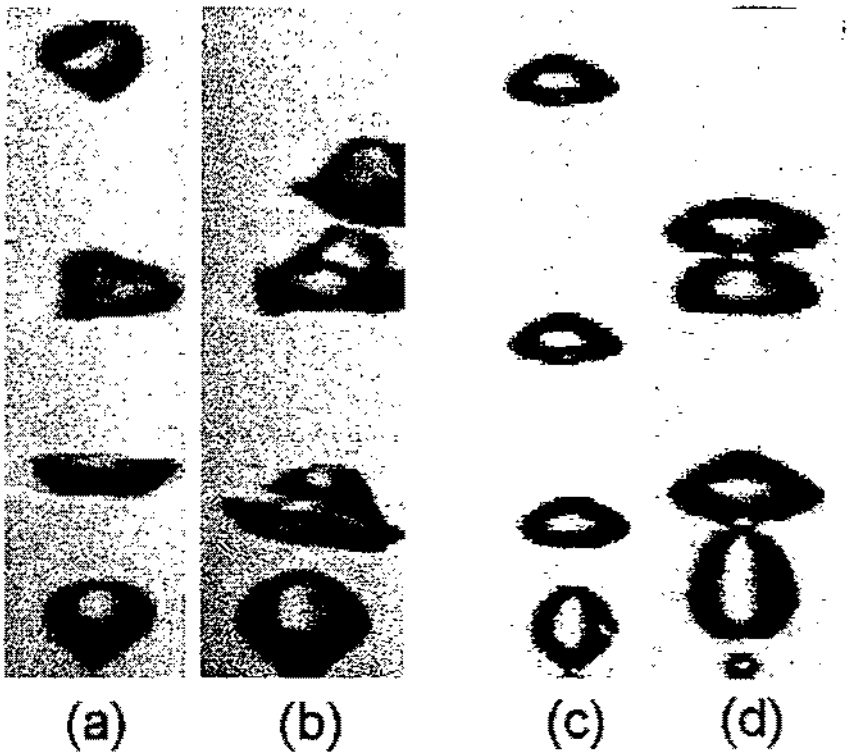
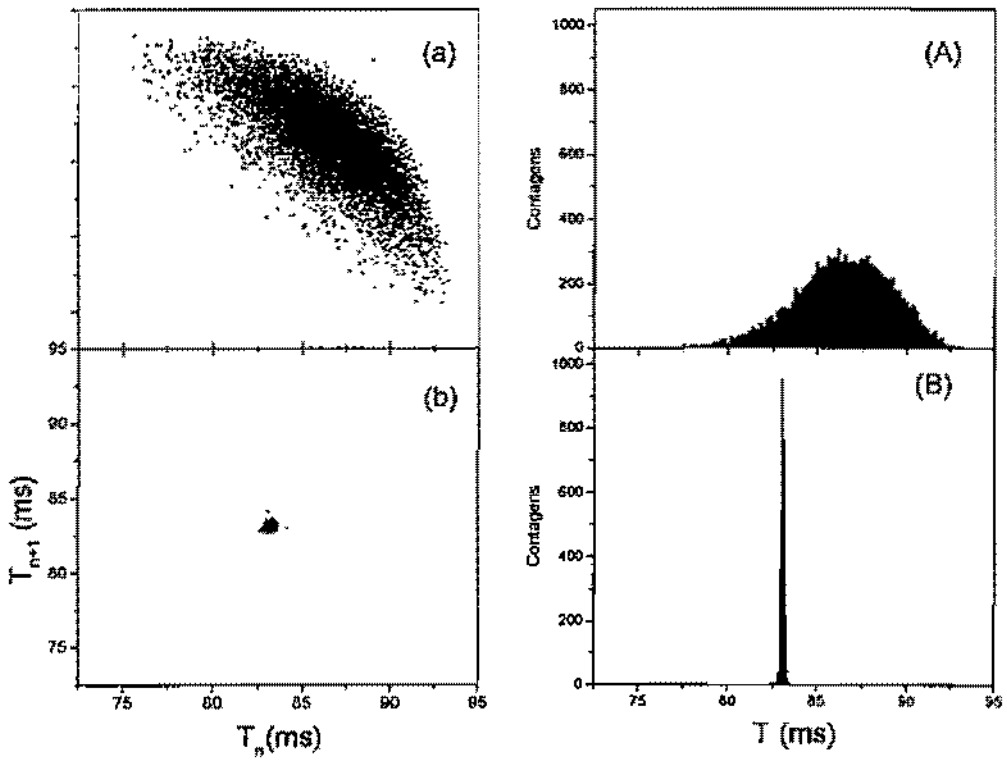


Fig. 4.13 Imagens para a duplicação de período para a água, **(a)** período 1 e **(b)** alargamento de período, e no líquido viscoso 20% água + 80% glicerina com período 1 em **(c)** e período 2 em **(d)**. Nestas imagens podemos notar que a superfície das bolhas emergentes são mais estáveis para o líquido mais viscoso do que para a água.



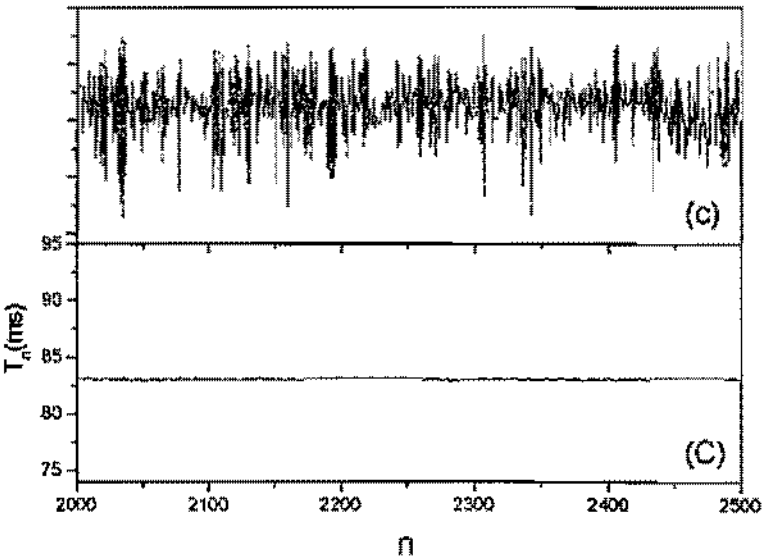


Figura 4.14 Mapas de primeiro retorno (a) para a água e em (b) para a solução 80% glicerina e 20% água. Em (A) temos o histograma para os 10.000 tempos obtidos para a água e em (B) o mesmo para o líquido mais viscoso. A baixa viscosidade da água torna o sinal muito mais irregular, como pode ser comparado em 500 pontos da série (c) da água e (C) da solução viscosa.

4.2.7. Freqüência de borbulhamento

A freqüência das bolhas dada pela equação 4.16 tem uma validade limitada pelas condições geométricas e dinâmicas já citadas anteriormente. Fazendo outras medidas com diferentes alturas de coluna, observamos uma variação na freqüência de borbulhamento. Basicamente o aumento da altura da coluna líquida causa a diminuição da freqüência de borbulhamento para a mesma vazão. Na Fig. 4.15 é apresentada a freqüência de borbulhamento em função do logaritmo da vazão, com o sistema predominantemente emitindo bolhas em período I, onde se utilizou a solução 80% de glicerina e 20% água, o bico de seringa e três alturas da coluna líquida: 5cm, 12 cm e 26 cm. Fazendo um ajuste linear para calcular os expoentes da freqüência de borbulhamento em função da vazão, observamos um aumento no valor do expoente com o aumento da altura da coluna, e simultaneamente a diminuição do coeficiente linear do ajuste. Deste modo a freqüência em bolhas diminui com o aumento da altura da coluna, mas temos um aumento na sua inclinação com a vazão volumétrica. O mesmo efeito ocorre com um líquido menos viscoso (66% glicerina e 34% água) mostrado na Fig. 4.16. Podemos ter uma variação ainda maior, quando usamos o bico A1, isto é diminuímos o orifício do bico borbulhador, como está mostrado na Fig. 4.17, com a solução 80% glicerina e 20% água, com altura de coluna de 3 cm acima do bico.

Existem alguns fatores que podem causar estes efeitos. Ruzicka que estudou experimentalmente a transição intermitente entre os regimes de borbulhamento e de jateamento em um sistema água e nitrogênio, mediu a velocidade da circulação do líquido com um anemômetro *Dantec* e observou que a circulação do líquido aumenta com a altura da coluna [Ruzicka et al., 1997]. Para a construção do modelo da equação (4.16), a segunda condição é que não haja circulação do líquido próximo do bico e deste modo o aumento da coluna poderia afastar o sistema das condições de validade da lei de freqüência de borbulhamento.

Outros autores [Davidson et al. 1960; Marmur e Rubin, 1976; Clift et al., 1978] afirmam que a diminuição do diâmetro do bico afeta a freqüência de borbulhamento, causando o *emparelhamento* das bolhas (duplicação de período) devido ao aumento do número de capacitância N_c dado por:

$$N_c = \frac{4V_c(\rho_l - \rho_g)}{\pi d_o^2 P}, \qquad (4.22)$$

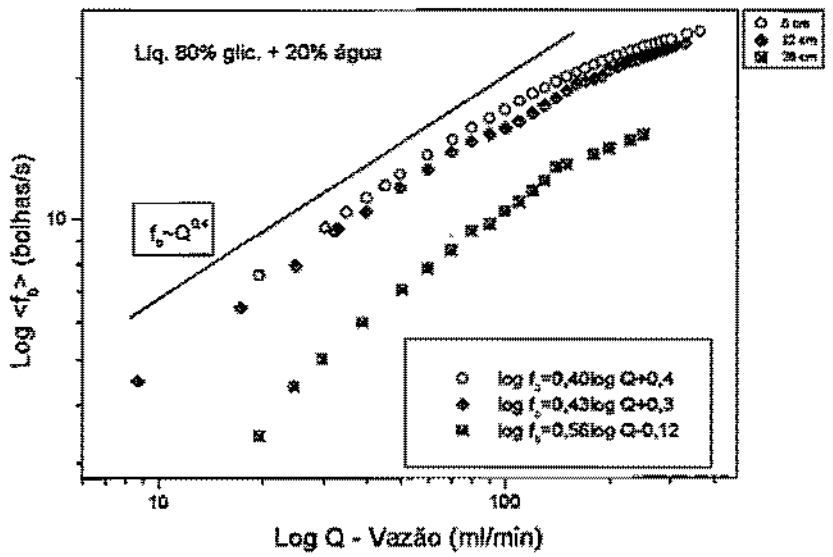


Figura 4.15 Freqüência de borbulhamento em função da vazão e altura da coluna líquida

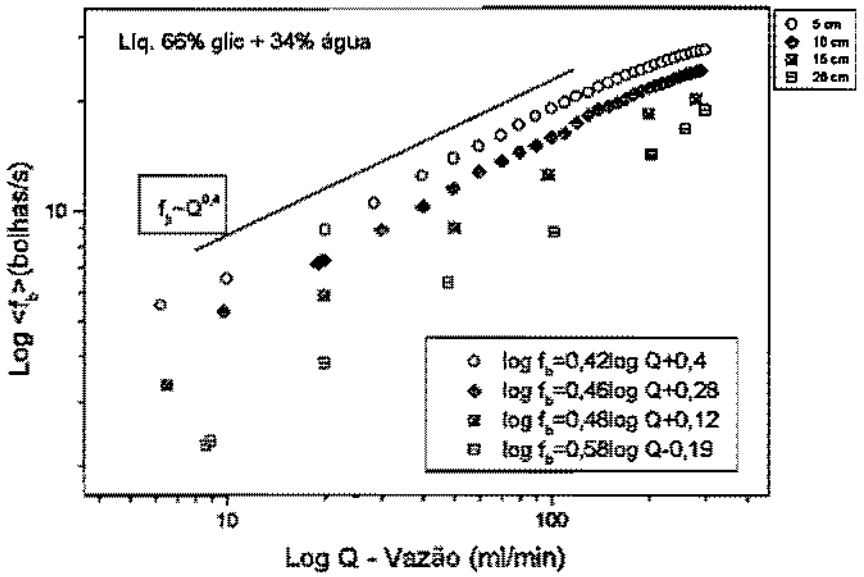


Figura 4.16 O mesmo que a figura anterior, porém com um líquido menos viscoso

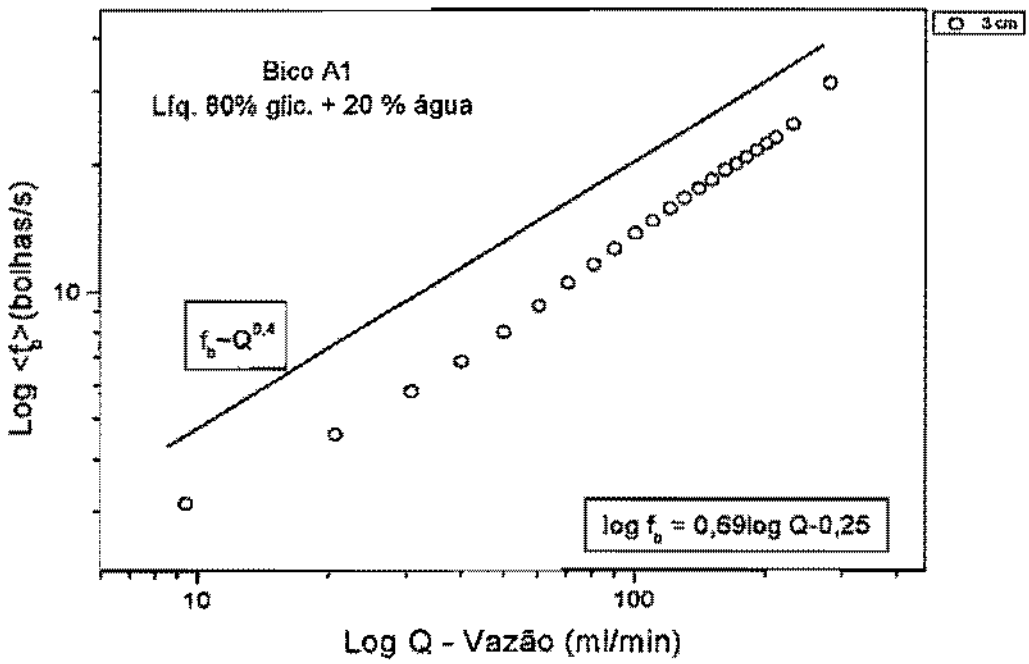


Figura 4.17 O mesmo líquido que foi utilizado para os dados da Fig. 4.16, mas agora com o bico A1 e uma altura de coluna acima do bico de 3 cm.

onde V_c é o volume da câmara que contém o ar entre a válvula de controle de vazão e o bico, ρ_l e ρ_g são as densidades do líquido e do gás (ar) respectivamente, d_o é o diâmetro do orifício (bico) e P a pressão absoluta na bolha.

Segundo Marmur e Rubin, orifícios grandes (d_o~1 mm) implicam em baixa resistência ao fluxo do gás entre a câmara e a bolha e devido a isto, a bolha e a câmara funcionam como um sistema unitário para o ar. Já com orifícios menores, o número de capacitância aumenta e a velocidade do ar no bico aumenta, causando pequenas variações de pressão na câmara, que causam diferentes tempos de formação para as bolhas.

Além destes fatores, a temperatura é um parâmetro fundamental a ser monitorado. Todas as medidas anteriores foram realizadas a 24° C.

4.2.8. Duplicações de período

Com uma solução de quatro partes de glicerina e uma parte de água, e usando a seringa plástica como bico, obtivemos a série temporal da Fig. 4.18, que mostra a clássica seqüência de duplicação de período para o sistema do tubo borbulhador. Nesta figura temos uma diminuição gradual da vazão de ar através do bico, com uma evolução desde a região caótica (a), passando por comportamento de borbulhamento de período 2 na parte (b), que passa a um período 4 na região (c), que passa para um novo comportamento de período 2, região (d), seguido por uma região de formação de bolhas em período1 na região (e). Na Fig. 4.19(e), apresentamos uma imagem das bolhas se formando periodicamente uma a uma, e na Fig. 4.19(d) é mostrado o comportamento de período 2, sem o efeito de coalescência entre as bolhas. Na Fig. 4.19(c) temos a imagem para o período 4, enquanto que na Fig. 4.19(b) temos um período 2 devido à coalescência de pares de bolhas, que anteriormente formavam o período 4. Finalmente, na Fig. 4.19(a), temos a imagem das bolhas em regime caótico.

4.2.9. Salto e coalescência

Obtivemos uma série temporal diferente com o mesmo aparato anterior, mas utilizando o bico A3, um capilar metálico longo, deixando a pressão do reservatório diminuir naturalmente através do borbulhamento. Esta série temporal é mostrada na Fig. 4.20. O sistema está evoluindo em um movimento de período 2, região (a) na Fig. 4.20, onde a diferença entre os dois ramos do atrator é de 5,5 ms. A medida que a vazão do ar diminui, ocorre um encolhimento abrupto do atrator para outro período 2, onde a diferença entre os ramos passa o ser 1 ms, mostrando um salto na dinâmica da formação de bolhas, na região (b) da Fig. 4.20. Depois disto, o sistema evolui para um período 1, mostrado na região (c). Na Fig. 4.21 estão ilustrados cada perfil de borbulhamento nas três regiões. Na Fig. 4.21(a) temos duas imagens que mostram a formação de uma grande bolha em dois estágios. No primeiro estágio a bolha se forma com o tempo do ramo superior do período 2 da série temporal da Fig. 4.20 (~25 ms). Logo que esta bolha se destaca, uma segunda bolha é criada, durante a sua formação esta segunda bolha toca a bolha anterior e o fluxo de ar ascendente soprado dentro da bolha em formação vence a tensão superficial, fazendo a coalescência do par que é alimentado

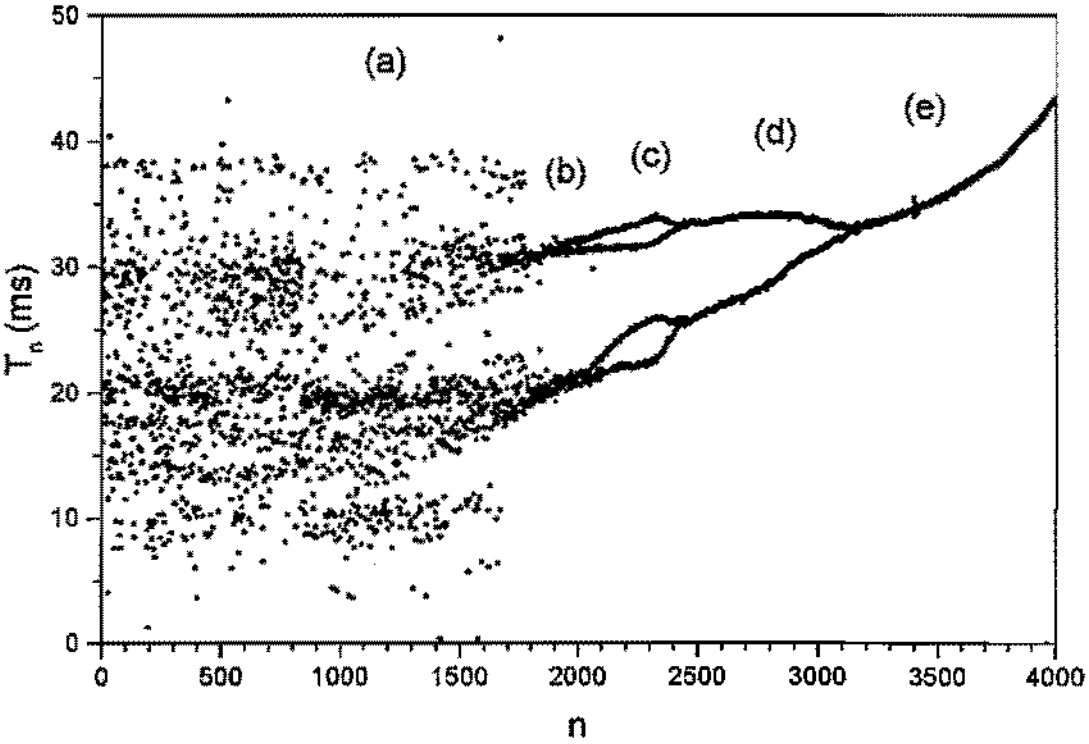


Figura 4.18 Série temporal a partir do comportamento caótico até o período 1, T_n é o tempo entre bolhas e n é a ordem da bolha coletada.

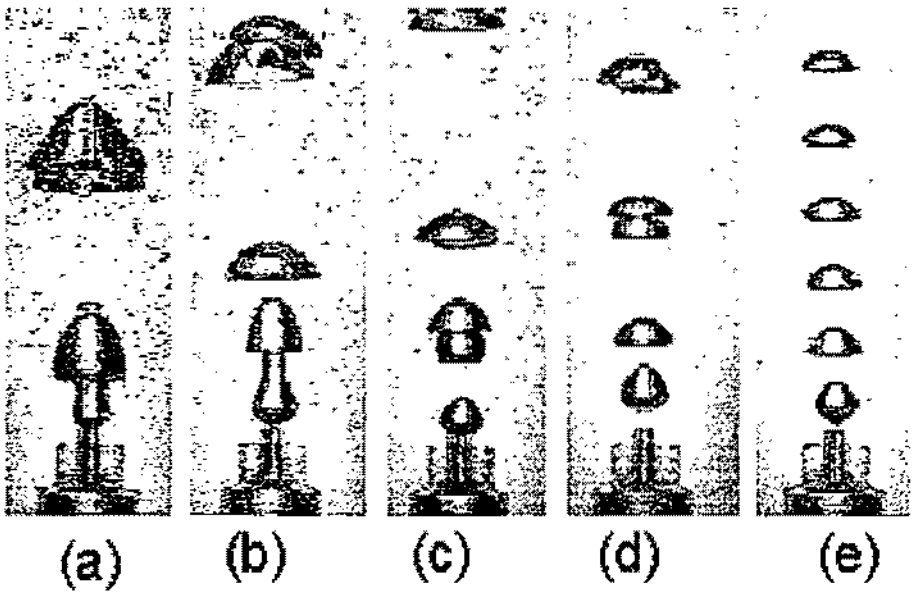


Figura 4.19 Perfil das bolhas emitidas em cada um dos regimes mostrados na série da Fig. 5.15. Em (a) vemos o comportamento caótico, (b) período 2 com coalescência, (c) período 4, (d) período 2 e em (e) período (1).

pelo bico soprador e se torna uma única grande bolha. Com a diminuição da vazão de ar, o toque entre as bolhas deixa de ocorrer, e o atrator diminui abruptamente.

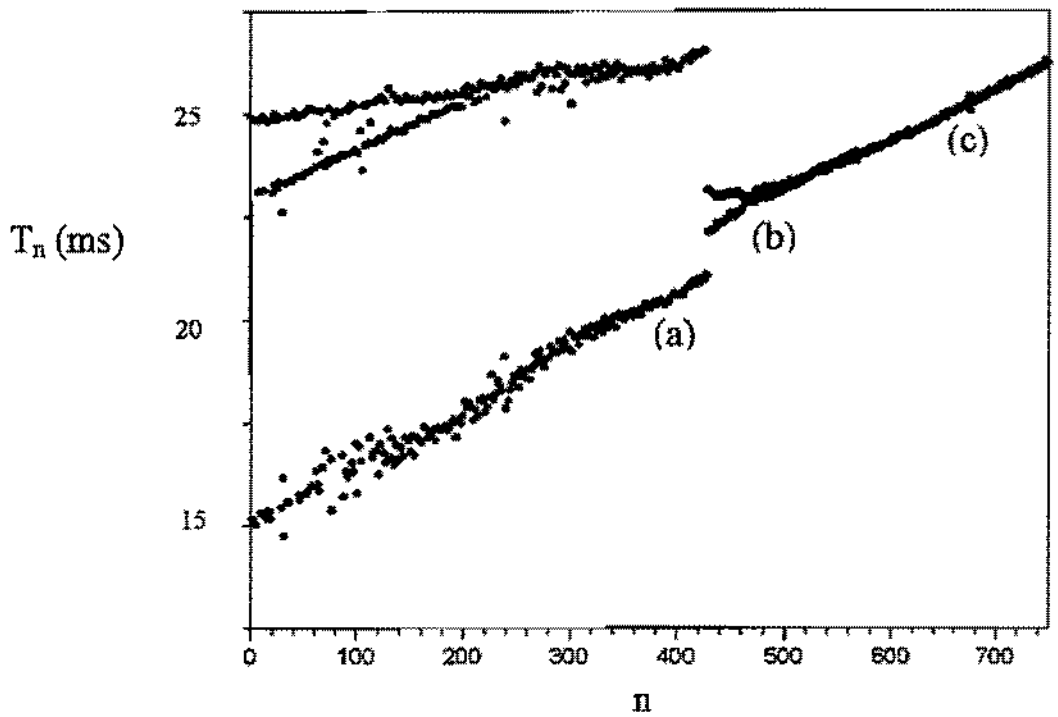


Figura 4.20 Série temporal mostrando um salto na dinâmica da formação das bolhas, o período 2 se contrai abruptamente em um período 2, diminuindo o período do borbulhamento.

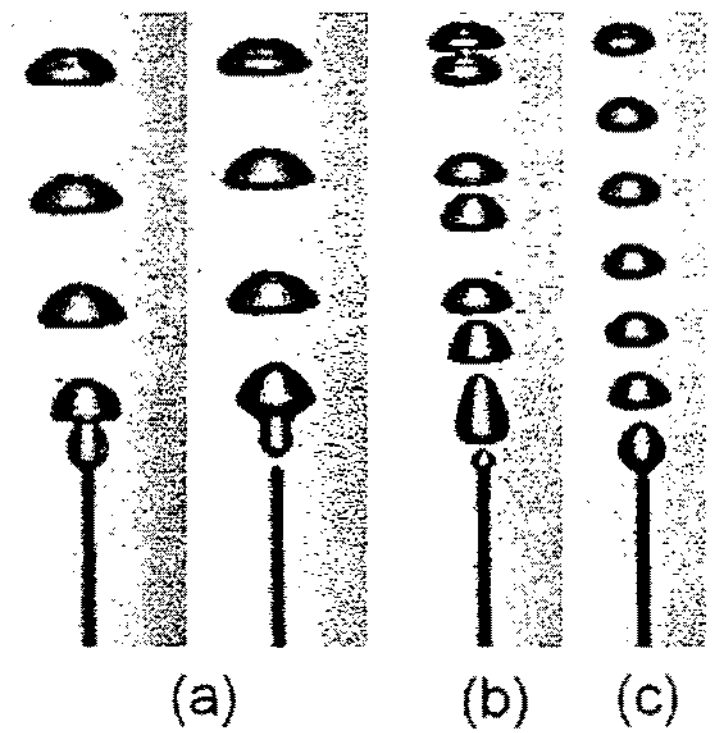


Figura 4.21 Imagens das bolhas: **(a)** antes do salto, onde podemos ver as bolhas se tocando e coalescendo, **(b)** o período 2 após o salto, onde as bolhas são emitidas aos pares sem coalescência e **(c)** o período 1.

Uma mudança abrupta de comportamento nos sistemas físicos pode ser explicada através de mapas com descontinuidades, como foi proposto por de Sousa Vieira *et al.* [Souza Vieira *et al.*, 1987]. Para estudar assimetrias e descontinuidades eles utilizaram o mapa:

$$x_{n+1} = f(x_n) \equiv \begin{cases} 1-\varepsilon_1 - a_1|x_n|^{z1} \text{ se } x_n > 0, \\ 1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2) \text{ se } x_n = 0, \\ 1-\varepsilon_2 - a_2|x_n|^{z2} \text{ se } x_n < 0, \end{cases} \tag{4.23}$$

onde ε_1 e ε_2 são os coeficientes de descontinuidade, z_1 e z_2 são os expoentes de assimetria, a_1 e a_2 são os parâmetros de controle do mapa x.

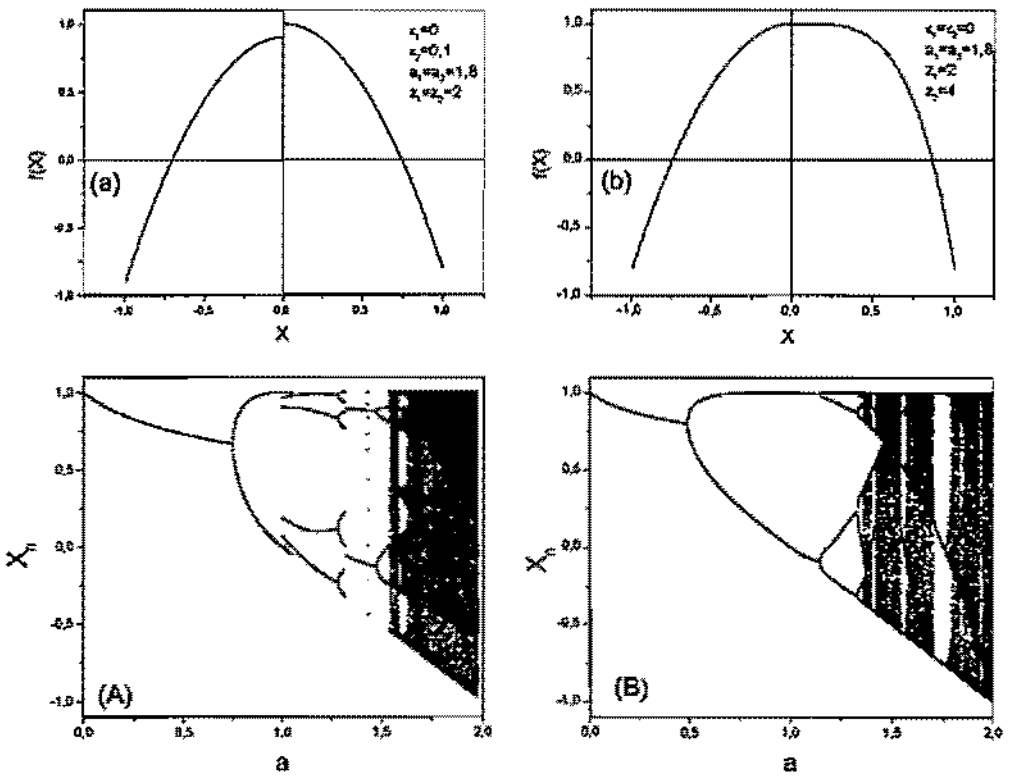


Figura 4.22 Dois exemplos de mapas assimétricos. **(a)** O mapa descontínuo das equações 4.22 e os valores de cada parâmetro, em **(A)** temos o seu diagrama de bifurcações. Em **(b)**, os parâmetros do mapa contínuo e em **(B)** o respectivo diagrama de bifurcações.

Outro caso onde ocorre descontinuidades é através do modelo de mapas combinados em série [Tufaile, 1996, Tufaile *et al.*, 1999], no qual os sistemas interagem alternadamente. Este modelo pode ser exemplificado com os mapas unidimensionais:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(\xi, y_n), \\ y_{n+1} &= g(\xi, x_{n+1}), \end{aligned} \tag{4.24}$$

cuja combinação é a união dos resultados dos dois mapas:

$$S_n = f \cup g\,. \tag{4.25}$$

Se considerarmos o mapa logístico com o parâmetro de controle p_{xy} :

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= p_{xy} z_n (1 - z_n), \text{ com} \\ p_{xy} &= \frac{[1+(-1)^{n+1}]p_x + [1+(-1)^n]p_y}{2}. \end{aligned} \tag{4.26a}$$

A recorrência z_n pode ser rescrita em dois subsistemas independentes, associados com a paridade de n:

$$x_{n+2} = 16 p_x p_y x_n (1 - x_n)[1 - 4 p_y x_n (1 - x_n)]. \tag{4.26b}$$

$$y_{n+2} = 16 p_x p_y y_n (1 - y_n)[1 - 4 p_x y_n (1 - y_n)]. \tag{4.26c}$$

Além disso os parâmetros p_x e p_y podem ser simultaneamente funções de um parâmetro ξ, que acopla o sistema. Devido à propriedade da formação de bolhas de diminuição do tempo em função do parâmetro de controle, pode-se utilizar uma função convexa do tipo:

$$z_{n+1} = z_n^2 - a, \tag{4.27}$$

e fazer a combinação em série deste mapa, com o parâmetro de controle assumindo dois valores para $a > 0{,}8$:

$$\begin{aligned} a_x &= a, \\ a_y &= a + 0{,}1 \end{aligned} \tag{4.28}$$

O diagrama de bifurcação desta combinação está mostrado na Fig. 4.23.

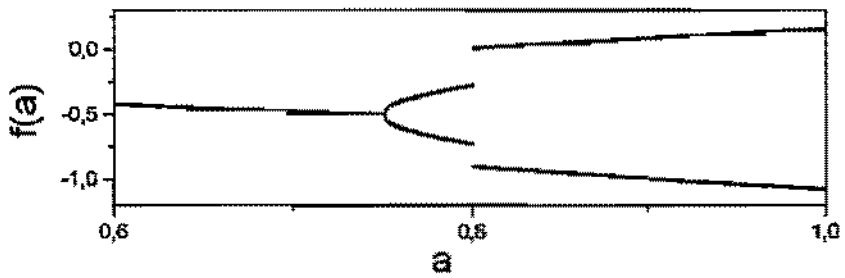


Figura 4.23
A descontinuidade obtida pela combinação em série de dois mapas quadráticos.

Interpretando o salto sob o ponto de vista dos mapas combinados em série, podemos considerar que antes do salto, logo após a duplicação de período as duas bolhas são formadas através da mesma função de formação. Quando ocorre o toque, a primeira bolha do par possui uma função de formação distinta da segunda bolha, pois, a segunda bolha coalesce durante sua formação com a primeira, e o bico soprador passa a encher o conjunto com quase o dobro do volume uma bolha.

Outro tipo de combinação de mapas é a combinação paralela de dois mapas $f(x_n)$ e $g(y_n)$ que resultam no mapa combinado S_n:

$$x_{n+1} = x_2 - p_x(\xi), \qquad y_{n+1} = y_n^2 - p_y(\xi),$$
$$S_n = x_n + y_n, \tag{4.29}$$

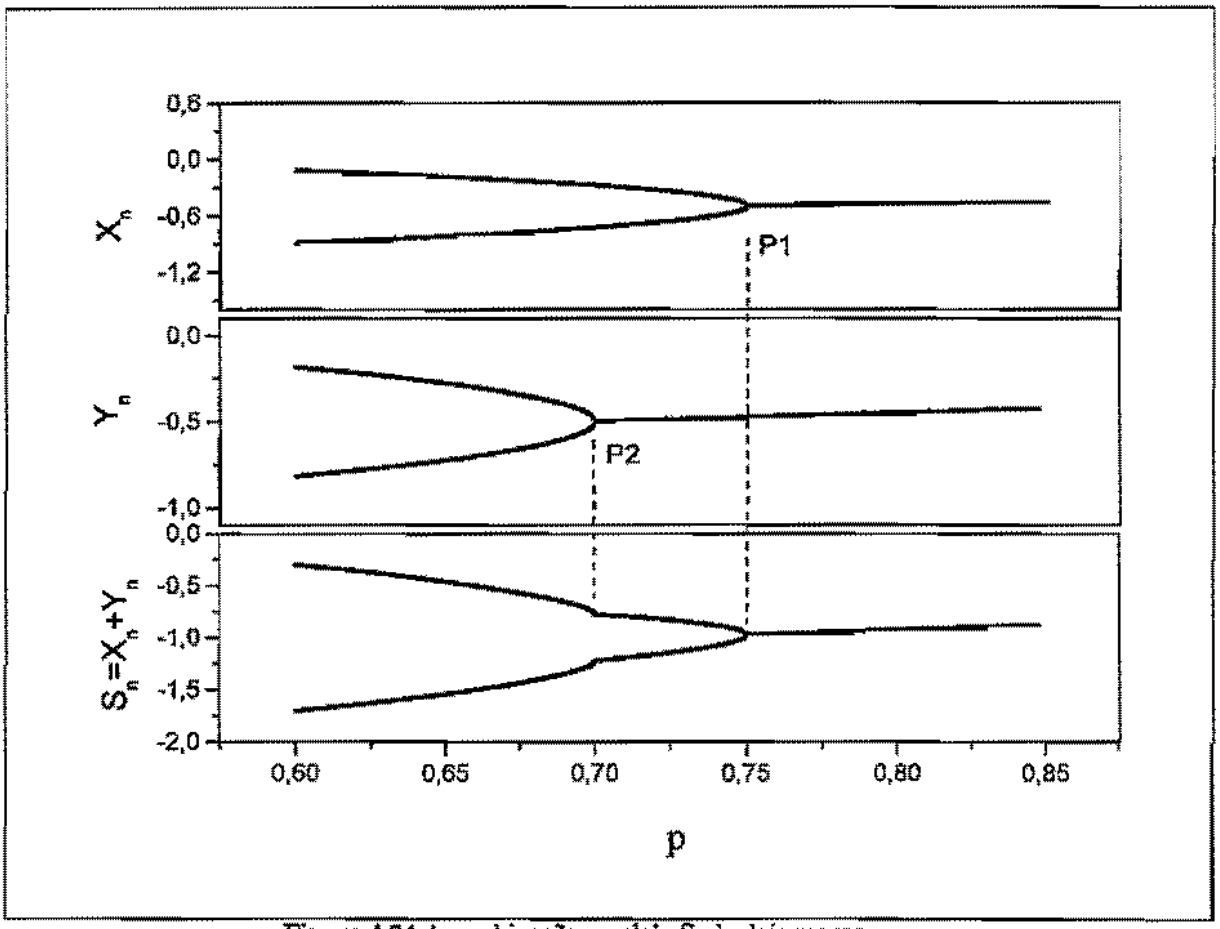


Figura 4.24 A combinação paralela S_n de dois mapas.

onde $p_x(\xi)$ e $p_y(\xi)$ são parâmetros de controle em função de um parâmetro comum ξ, com cada mapa sendo iterado separadamente. Na Fig. 4.24 temos dois mapas bifurcando inversamente para diferentes valores do parâmetro de controle p, enquanto que a sua combinação paralela possui uma bifurcação *flip* do mapa da variável x_n no

ponto P1 e que equivale a uma alteração no período dois do mapa S_n, no ponto P2 devido à segunda bifurcação *flip* do mapa y_n.

A série da Fig. 4.25(a) foi obtida utilizando-se o bico A1, o mais curto dos bicos da série A. Nesta figura podemos ver que o salto foi minimizado. Na Fig. 4.25(b) apresentamos a simulação correspondente, na qual utilizamos dois mapas combinados em série.

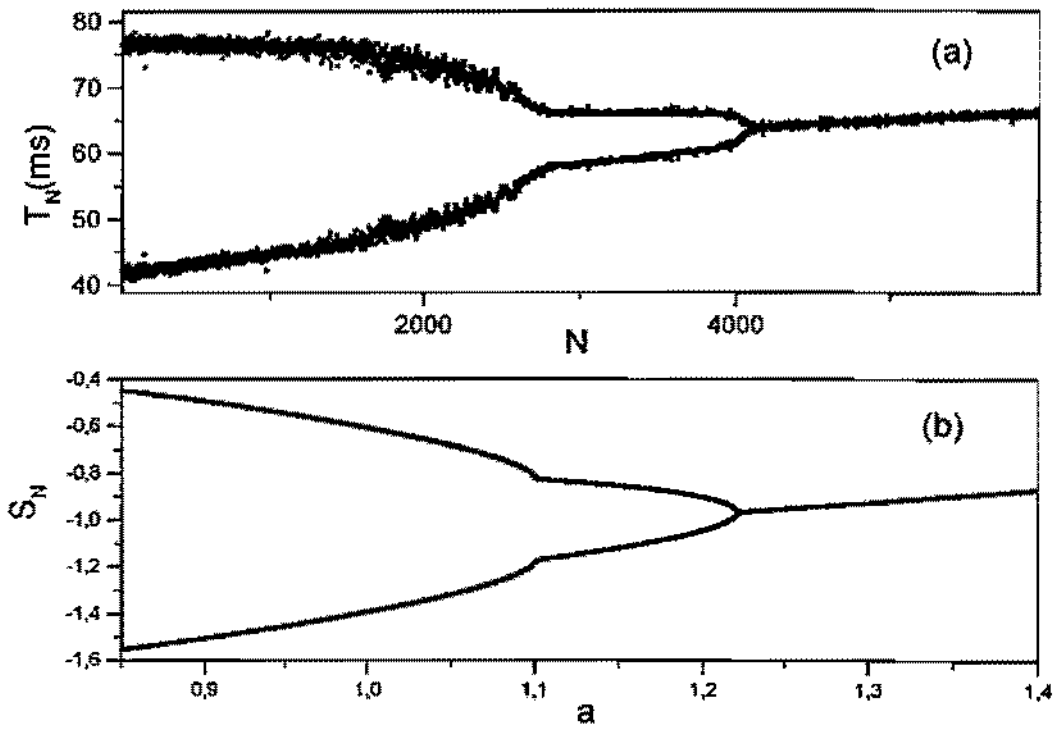


Figura 4.25 Em (a) podemos ver uma série temporal obtida com a diminuição da vazão com o bico A1 e uma solução viscosa 80% glicerina e 20% água. Em (b) a combinação paralela de dois mapas. A bifurcação *flip* que ocorre no mapa y_n, quando levada à combinação paralela S_N, causa a diminuição do período 2.

4.2.10. Antibolhas

Uma casca aproximadamente esférica de ar dentro de um líquido forma o que foi chamado por J. E. Connett de *antibolha*, segundo C. L. Stong [Stong, 1974]. Na Fig. 4.26 está esquematizada uma antibolha.

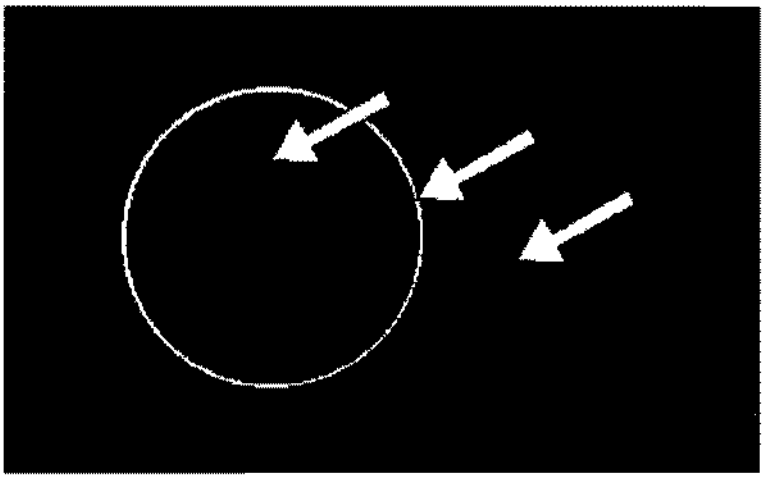


Figura 4.26 Uma antibolha é uma gota de um líquido envolvida por uma fina camada de ar dentro do líquido.

Como o seu interior é preenchido pelo o mesmo líquido da parte externa, as antibolhas são ligeiramente mais leves que o fluido à sua volta, mas são mais pesadas que as bolhas. Deste modo correntes próximas à antibolha podem deslocá-la facilmente, superando o seu empuxo. Quando a casca esférica se desestabiliza, a antibolha colapsa em uma pequena bolha de ar esférica, que emerge no líquido. O tempo de existência de uma antibolha antes de sua desetabilização em uma pequena bolha de ar pode chegar a ordem de minutos.

No experimento do tubo borbulhador, ocorre também a formação de antibolhas, para determinados regimes da formação de bolhas. As antibolhas seguem as correntes do líquido dentro do tubo, em movimentos ascendente e descendente. Na Fig. 4.27 podemos ver antibolhas ao redor de bolhas sendo sopradas no bico borbulhador. Para o líquido utilizado (2 partes de glicerina para 1 de água), a ocorrência de antibolhas acontece a partir do estágio onde aparece a coalescência do par de bolhas, chamado de período 2 antes do salto, da Fig. 4.21(a). A formação das antibolhas é precedida pela formação de gotículas. A formação de gotículas está esquematizada na Fig. 4.28, onde vemos em (a), que parte do líquido em movimento ascendente forma posteriormente um capilar em (b), e uma gotícula se desprende. Nas imagens da Fig. 4.28, podemos ver

algumas imagens que mostram a formação de gotículas dentro da bolha, assim como invaginações que podem levar a criação de antibolhas.

Assim como as bolhas, as antibolhas desviam o feixe laser e podem ser detectadas. Verificamos isto colocando o sistema no regime de formação de antibolhas, que corresponde a um período 4 para as bolhas, mostrado no mapa de retorno da Fig. 4.29(a). O seu espectro de potências está na Fig. 4.29(b). As antibolhas se deslocavam dentro do tubo borbulhador seguindo as correntes internas do fluido, com deslocamentos preferencialmente descendente próximo à parede do tubo e ascendente e acelerado próximo do bico soprador. A quantidade de antibolhas dentro do tubo era aproximadamente 30 e o feixe laser foi colocado num ponto em que as bolhas não passavam por ele, num ponto 2 cm acima do bico e 2 cm deslocado do eixo do tubo, como o ponto P1 da Fig. 4.27. Nesta região apenas as antibolhas passavam pelo feixe laser e nós obtivemos os dados mostrados no mapa de retorno da Fig. 4.29(c). Nestes dados são apresentados 500 pontos correspondendo a 50 minutos de aquisição, com intervalos de tempo entre 17 milissegundos até 85 segundos.

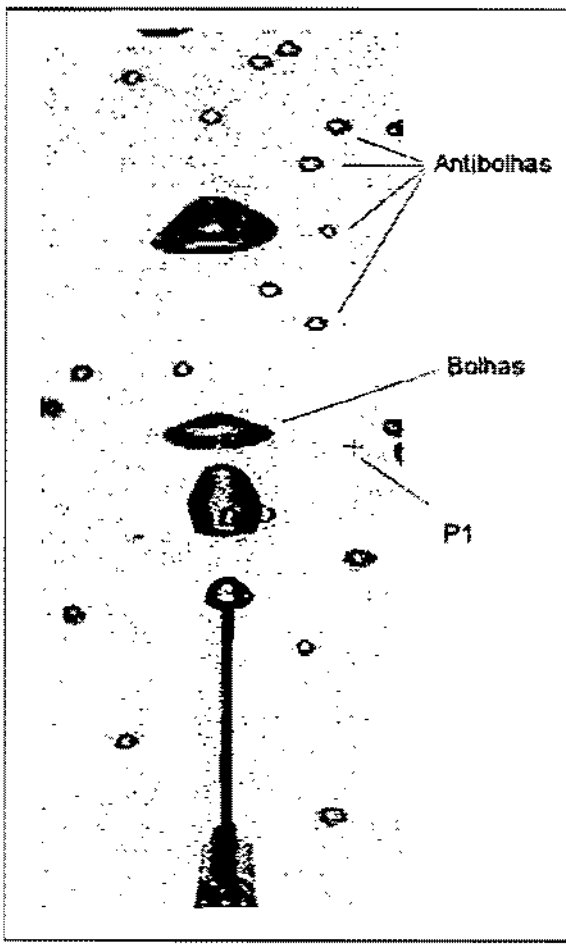


Figura 4.27 imagem das antibolhas ao redor das bolhas que se formam no bico soprador. Fazendo o laser incidir perpendicularmente ao plano da imagem no ponto P1, foi possível detectar algumas antibolhas se deslocando aleatoriamente dentro do tubo borbulhador

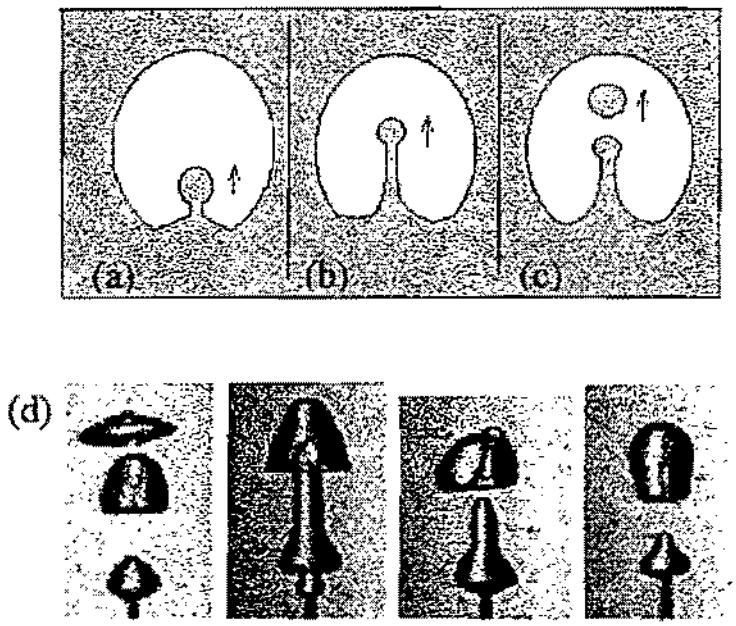


Figura 4.28 Formação de gotículas esquematizada em (a), (b) e (c). (d) Nas imagens podemos ver padrões semelhantes nas bolhas.

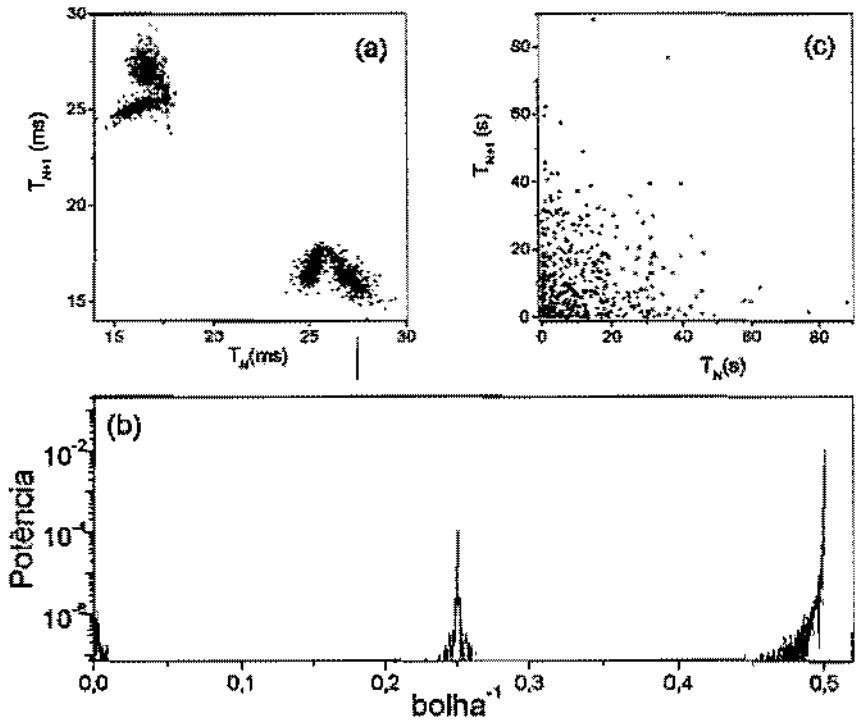


Figura 4.29 **(a)** Mapa de primeiro retorno do período 4, e em **(b)** o seu espectro de potências. O mapa de retorno em **(c)** foi obtido com o sistema nas mesmas condições da formação das antibolhas, mas posicionando o feixe laser e o fotodiodo de modo a detectar as antibolhas que passavam pelo ponto P1 da Fig. 4.27.

4.3. A onda sonora e as bolhas

Os efeitos de uma perturbação externa, a onda sonora, na formação das bolhas, são apresentados e analisados neste capítulo. O problema das bolhas perturbadas por ondas sonoras apresenta desafios muito interessantes do ponto de vista matemático, com relação a proposição das equações que controlam o sistema e suas condições de contorno, pois, além de um sistema de duas fases, com uma das fases compressível, temos a ação de uma onda sonora. Do ponto de vista experimental, o tubo borbulhador possui uma geometria que facilita a utilização da onda sonora, devido à propriedade de confinamento de ondas sonoras em tubos.

Existem trabalhos que envolvem a ação de ondas sonoras em bolhas ou gotas já formadas [Marston, 1980], ou quando bolhas ou cavidades são criadas dentro de um líquido devido a uma onda sonora de alta intensidade[Lauterborn, 1986; Prosperetti, 1986], a chamada *cavitação acústica*. Há ainda um caso, conhecido como cavitação transiente, no qual a temperatura no interior da bolha atinge milhares de graus e a pressão chega a milhares de atmosferas. Nestas condições ocorre o fenômeno conhecido como *sonoluminescência*, que é a emissão de luz por bolhas em um líquido excitado por ondas sonoras [Putterman, 1995; Moran *et al.*, 2000]. As freqüências das ondas sonoras envolvidas com cavitação são da ordem de centenas de kHz. Nestes trabalhos também se estuda como o campo sonoro emitido pelas bolhas, devido aos efeitos da cavitação, afeta as próprias bolhas. Neste capítulo veremos condições mais *clássicas* de interação entre bolhas e ondas sonoras do que as que ocorrem na sonoluminescência. Aqui, neste capítulo, a bolha é afetada pela onda sonora durante a sua formação no bico soprador, com freqüências da onda sonora variando no intervalo entre dezenas e centenas de hertz. O tamanho das bolhas estudadas é da ordem de centímetros, o que permitiu registrar suas imagens através de uma câmara VHS comum. Veremos também como o sistema onda sonora – bolhas nos levou ao estudo do mapa do círculo bidimensional, onde temos um oscilador sofrendo impulsos periódicos de uma força externa.

4.3.1. A formação de bolhas perturbadas pelas ondas sonoras

Nesta seção veremos os resultados que mostram a mudança do tempo entre as bolhas para uma onda sonora de freqüência fixa e valores de amplitude crescentes [Tufaile e Sartorelli, 2000a, Apêndice 2].

Mantendo fixa a vazão do ar através da válvula controladora e utilizando a solução de 66% de glicerina e 34% de água, nós mudamos a dinâmica da formação de bolhas aplicando ondas sonoras sintonizadas na freqüência fundamental da coluna de ar acima do líquido (138 Hz).

Na Fig. 4.30 mostramos os mapas de primeiro retorno em função da amplitude da onda sonora, em regime de vazão constante. Estão em destaque no canto superior esquerdo de cada gráfico a amplitude do sinal senoidal e a freqüência média das bolhas. O sistema é colocado inicialmente borbulhando em periodo 1, com uma freqüência em bolhas f_b de 11,282 bolhas/s, como está mostrado na Fig. 4.30(a). Aplicando a onda sonora, o ponto fixo perde sua estabilidade e um ciclo limite aparece, como pode ser visto na Fig. 4.30(b) e 4.30(c), com um pequeno aumento da taxa de borbulhamento médio.

Na Fig. 4.30(c), o ciclo limite perde sua estabilidade e um ponto fixo, próximo de (87ms, 87ms), é visitado intermitentemente. Este ponto fixo foi determinado através de um histograma do gráfico de T_n. As transformadas de Fourier dos dados relacionados às Figs. 4.30(d-g) mostram um período 2 ruidoso. Mostramos na Fig. 4.31, o espectro de Fourier dos dados do atrator da Fig. 4.30(f). Neste espectro, vemos um grande pico em 0,5, o que corresponde ao período 2.

Isto mostra que está ocorrendo uma bifurcação *flip* em função da amplitude da onda sonora. Em uma bifurcação *flip*, existe um ponto fixo instável entre os dois pontos fixos estáveis. Nossos dados mostram que a vizinhança do ponto médio entre os dois pontos fixos é visitada devido ao ruído, e consequentemente, nossos dados são adequados para se aplicar a técnica de transformação de ponto fixo desenvolvida por So *et al.* [So *et al.*, 1996] para se encontrar órbitas periódicas instáveis em séries de eventos.

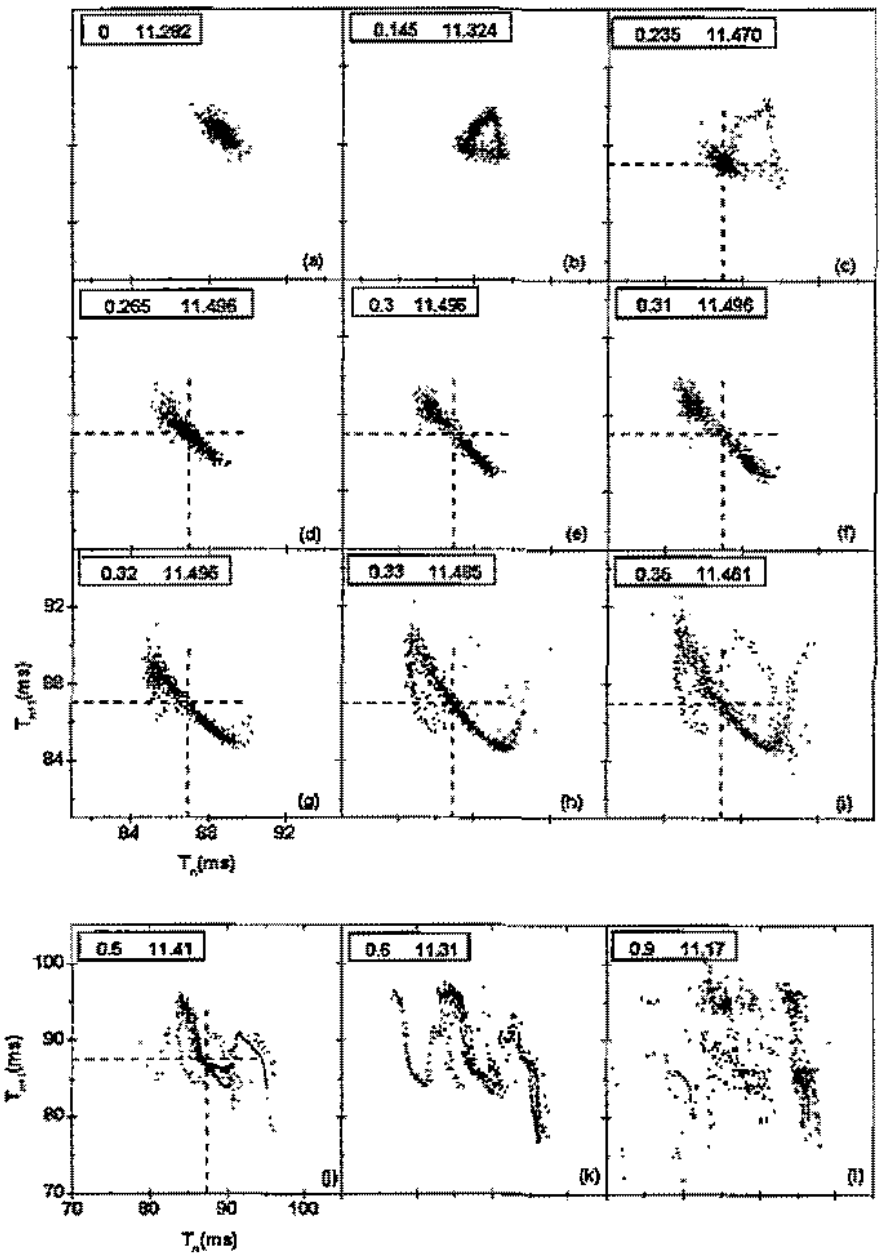


Figura 4.30 Mapas de retorno do experimento do tubo borbulhador. Em cada gráfico temos, no canto superior esquerdo, o valor da tensão aplicada no alto-falante e o valor da freqüência de borbulhamento média. O líqüido utilizado é uma solução de 66% glicerina e 34% água, e as bolhas foram sopradas diretamente na seringa plástica.

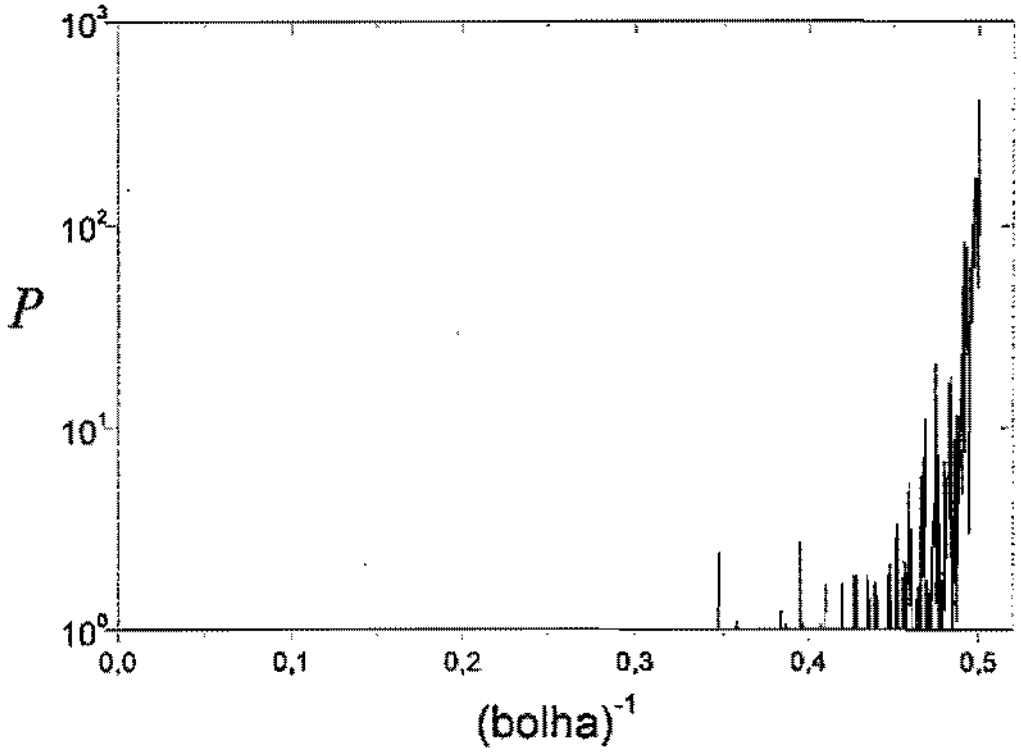


Figura 4.31 Espectro de Fourier dos dados da Fig. 4.30(f) indicando a existência de um período 2 ruidoso.

Um exemplo dos nossos resultados está mostrado na Fig. 4.32(a), onde está representado o histograma para o cálculo do ponto fixo usando os dados mostrados na Fig. 4.30(h). Para uma melhor visualização da posição da órbita periódica instável, um gráfico de intensidade para os mesmos dados é mostrado na Fig.4.32(b). O maior pico define um período 1 instável em (86,99 ms; 86,99 ms), próximo do ponto fixo estável mostrado na Fig.4.30(c).

Aumentando ainda mais a amplitude, nós observamos o aparecimento da região caótica, com as características da dinâmica de estiramento e dobra, como está mostrado nas Figs. 4.30(h-i), e com pequena mudança na freqüência média de borbulhamento. Os atratores na região caótica foram caracterizados pelo expoente de Lyapunov dominante [Ellner *et al.*, 1992], e estes expoentes podem ser vistos na Fig. 4.33.

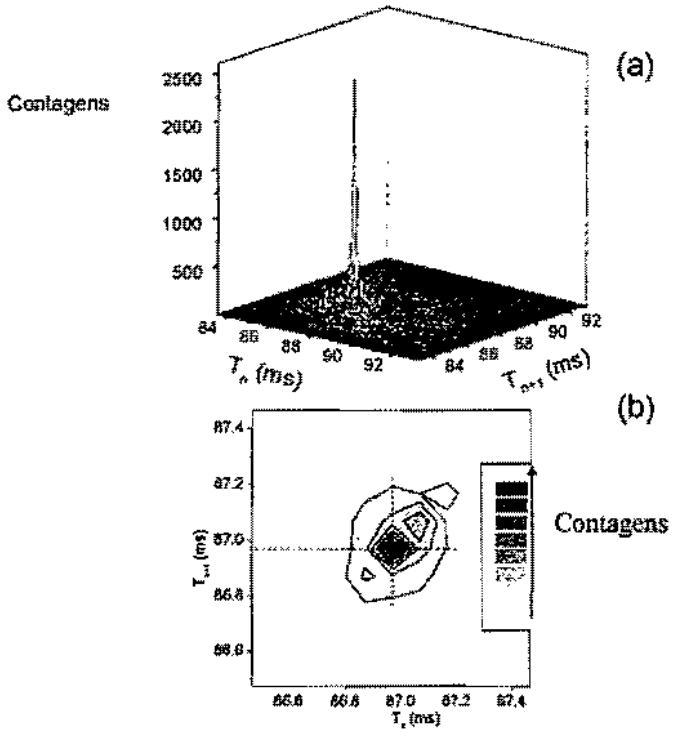


Figura 4.32 Histograma para a determinação da órbita periódica instável (a) e gráfico de contorno para os mesmos dados (b), localizando o ponto fixo instável um pouco abaixo de 87 ms.

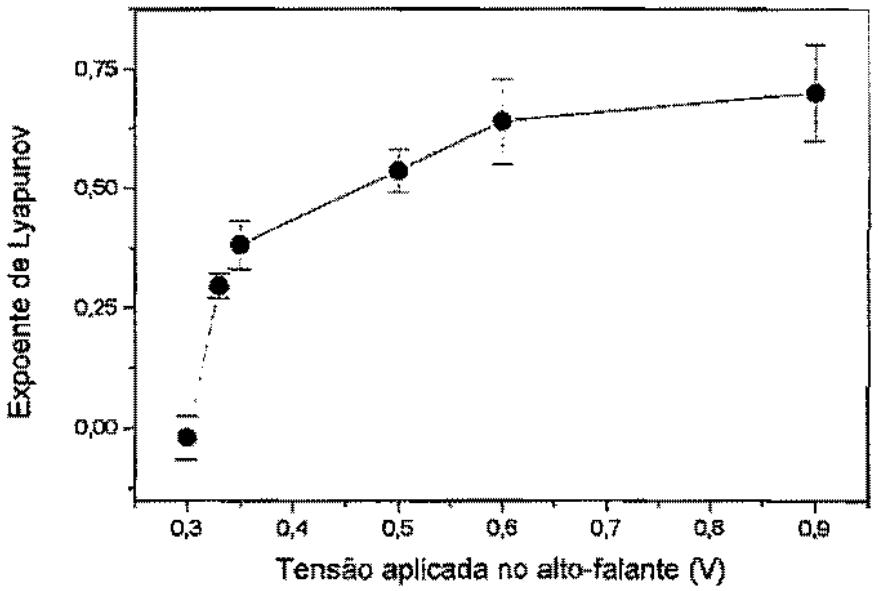


Figura 4.33 Expoentes de Lyapunov dos atratores mostrados em 4.30(e) a (j) em função da tensão aplicada no alto-falante.

Continuando a aumentar a amplitude da onda sonora, com incrementos maiores do que antes, nós obtivemos os atratores mostrados na Fig. 4.34. Na Fig. 4.34(m) a taxa de borbulhamento média é de 20,5 bolhas/s para uma onda sonora gerada com uma tensão de 3.14 V no alto-falante. A posição ~ (7,25 ms; 7,25 ms) é visitada com um comportamento intermitente. O tempo de visitação aumenta quando a amplitude do som aumenta, até que o ponto ~ (7,25ms; 7,25ms) torna-se um ponto fixo estável, como mostrado na Fig. 4.34(n). Nesta situação, a freqüência média de borbulhamento é F_b=137,97±9 bolhas/s tem o mesmo valor da freqüência da onda sonora. Na Fig. 4.35 podemos ver a diferença entre as imagens das bolhas para o primeiro ponto fixo dos dados mostrados na Fig. 4.34(a), e o ponto fixo na ressonância do atrator da Fig. 4.34(n).

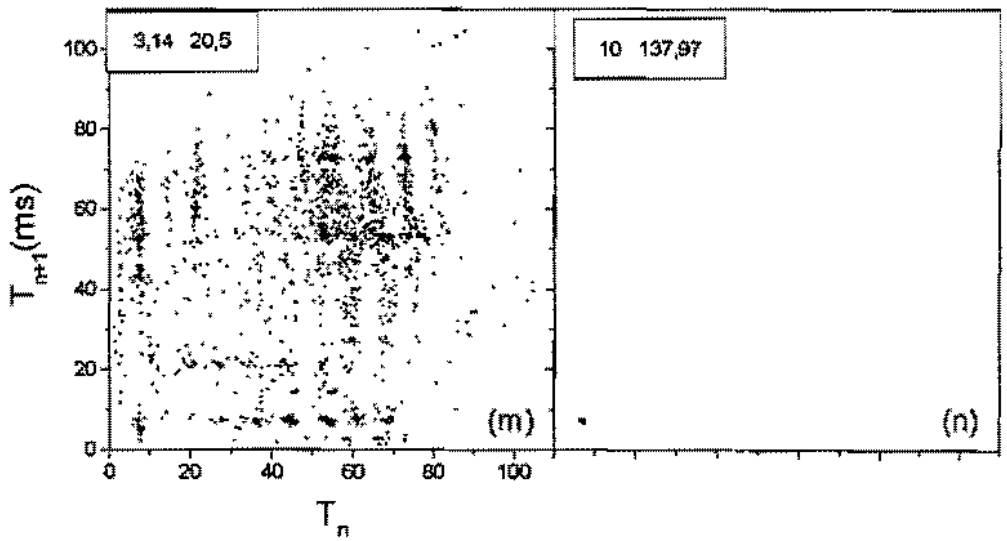


Figura 4.34 (m) O ponto ~ (7,25 ms; 7,25 ms) é visitado em um comportamento intermitente com os outros pontos espalhados pelo espaço de fases. Em (n) a formação das bolhas sincroniza-se com a freqüência fundamental do tubo, e temos apenas o ponto ~ (7,25 ms; 7,25 ms).

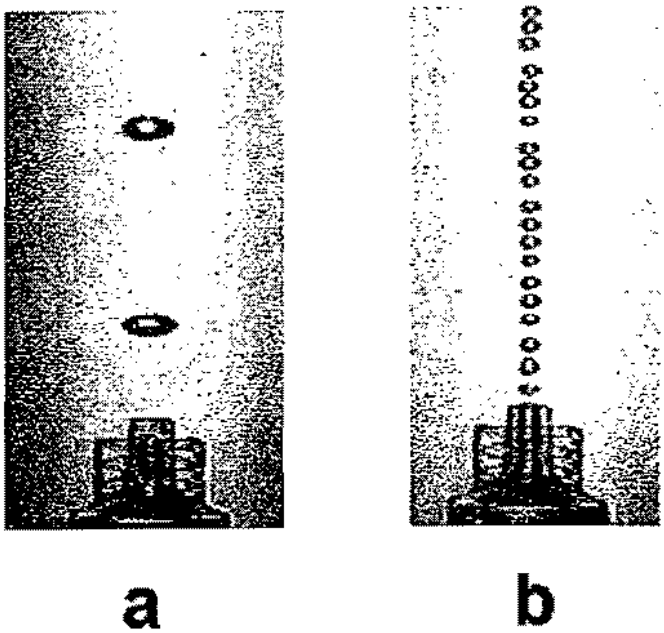


Figura 4.35 Imagem da sincronização das bolhas com a onda sonora no tubo borbulhador. Em (a) temos a imagem para o ponto fixo mostrado na Fig. 4.30(a) com F_b=11,282 bolhas/s. (b) O último ponto fixo mostrado na Fig. 4.34(n), quando as bolhas estão sincronizadas com a freqüência da onda sonora (138 Hz). Nos dois casos temos a mesma vazão de ar.

4.3.2. Atratores do tipo Hénon

Os resultados da seção 4.3.1 nos mostraram uma grande evolução da dinâmica da formação das bolhas com o aumento da tensão aplicada no alto-falante. A região da dinâmica que apresenta a bifurcação *flip*, seguida por atratores caóticos, é semelhante aos sistemas dinâmicos que apresentam propriedades de estiramento e dobra, como o mapa de Hénon discutido na seção 2.7. Por este motivo veremos a comparação entre atratores experimentais nessa região e o mapa de Hénon na tentativa de compreender a dinâmica da formação das bolhas para uma região do parâmetro de controle.

De modo a reduzir o ruído nos dados utilizamos uma solução mais viscosa, 80 % glicerina e 20 % água, e utilizamos o bico A2. Para termos uma variação mais fina do parâmetro de controle, alteramos o fator de amplificação do gerador de funções, cujo sinal alimenta o alto-falante. A vazão de ar e a freqüência da onda sonora foram mantidas constantes, em ~36,6 bolhas/s e 150 Hz, respectivamente. Nós alteramos a dinâmica da formação das bolhas, aumentando a tensão no alto-falante como mostrado

pelo diagrama de bifurcação na Fig. 4.36, num regime de vazão constante. Nesta figura vemos uma duplicação de período ocorrendo ao redor de 2,0 V, com as bolhas sendo emitidas aos pares até aproximadamente 3,0 V, quando um período 4 ruidoso aparece. Após isto, duas bandas caóticas aparecem. Para ~3,5 V as duas bandas caóticas se encontram e se sobrepõem, com o aparecimento de um atrator caótico maior.

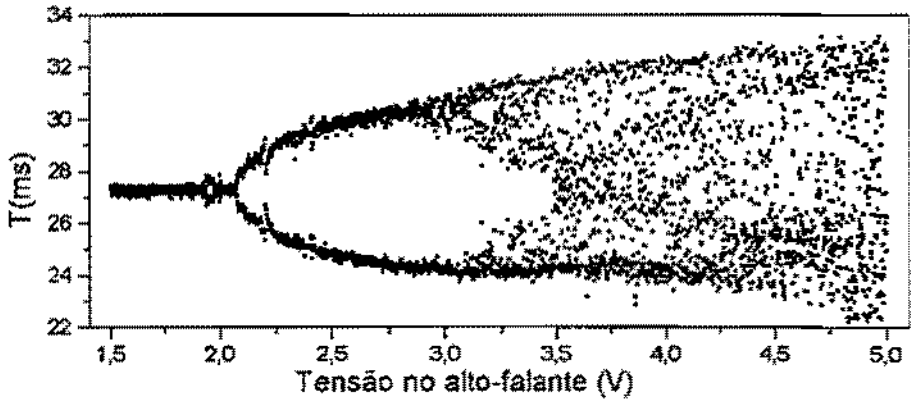


Figura 4.36 Duplicação de período em função da amplitude da onda sonora. A freqüência da onda sonora é 150 Hz e a freqüência de borbulhamento inicial é por volta de 37 bolhas/s.

Para realizar a caracterização métrica e topológica da dinâmica da formação de bolhas sob a ação da onda sonora, nós coletamos seis séries de eventos, fixando a tensão em seis valores distintos, cujos mapas de retorno (T_{n+1} vs. T_n) são mostrados na Fig. 4.37.

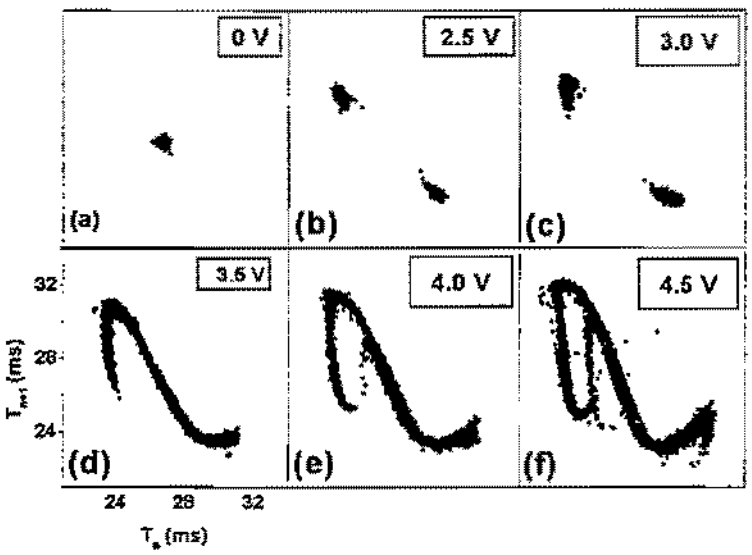


Figura 4.37 Uma seqüência de atratores reconstruídos mostrando uma rota para o Caos através de duplicações de período. O valor em volts corresponde à tensão mantida constante no alto-falante durante a obtenção do atrator.

4.3.2.A. Caracterização métrica

Os atratores caóticos reconstruídos, Figs. 4.37(d) até 4.37(f), foram caracterizados através dos expoentes de Lyapunov, pela dimensão de Kaplan-Yorke, além da dimensão de Informação, obtidos pelo pacote de programas TISEAN [Hegger *et al.*, 1999]. A conjectura de Kaplan-Yorke [Argyris *et al.*, 1994], que relaciona a dimensão de Informação e a dimensão de Kaplan-Yorke (equação (2.11)), mostra que elas se igualam para atratores do tipo Hénon. As dimensões foram obtidas para as tensões de 3,5 V, 4,0 V e 4,5 V, como está mostrado na tabela 4.1. As dimensões de Informação e Kaplan-Yorke coincidem para os três atratores caóticos.

Figura número	Tensão	Espectro de Lyapunov	Dimensão de Kaplan-Yorke	Dimensão de Informação
3(d)	3,5	+ 0,11; - 0,8	1,15(1)	1,3(3)
3(e)	4,0	+ 0,12; - 0,6	1,23(1)	1,4(3)
3(f)	4,5	+ 0,2; - 0,3; - 0,9	1,68(1)	1,8(3)
	Atrator de Hénon *a; b*			
	1,55; 0,1	+ 0,38; - 2,38	1,16	1,16(9)
	1,4; 0,3	+ 0,42; -1,62	1,17	1,19(9)

Tabela 4.1 Expoentes de Lyapunov e dimensões dos atratores caóticos experimentais e de dois pares de valores do mapa de Hénon.

Cada um dos dois primeiros atratores caóticos possui espectro de Lyapunov com um expoente positivo e o outro negativo, enquanto que o último atrator, Fig. 4.37(f), possui um expoente positivo e dois expoentes negativos. Na tabela 4.1 são apresentados os resultados para mapa de Hénon, mostrado na equação (2.12), para dois conjuntos de valores dos parâmetros (a, b), e os atratores experimentais reconstruídos.

Os valores das dimensões dos atratores para amplitudes de 3,5 V e 4,0 V são próximos dos valores das dimensões do mapa de Hénon, sugerindo que eles podem ter dinâmica similar. O atrator reconstruído para 4,5 V mostrado na Fig. 4.37(f), tem a forma semelhante aos dois outros atratores anteriores. Entretanto, comparando-se as dimensões deste atrator com as dimensões dos atratores das Figs. 4.37(d) e 4.37(e), vemos que o valor da sua dimensão de Informação é maior que a dimensão dos dois outros atratores experimentais, assim como dos valores de dimensão para o mapa de Hénon, como pode ser

visto na tabela 4.1. Junto com o fato de que o atrator da Fig. 4.37(f) tem três componentes no espectro de Lyapunov, a dimensão de Informação próxima de dois é uma indicação que este atrator não pode ser totalmente desdobrado em duas dimensões.

4.3.2.B. Caracterização topológica

Para o mapa de Hénon, com os parâmetros a =1,55 e b = 0,1, utilizando a equação (2.12) para calcular a posição dos pontos fixos para a variável x do mapa de Hénon, encontra-se que o ponto fixo x^* está localizado em aproximadamente 0,56. Este ponto corresponde a um dos pontos de cruzamento da linha diagonal pontilhada com o atrator reconstruído X_{n+1} *vs.* X_n, como pode ser visto na Fig. 4.38(a). Neste atrator o ponto fixo possui dois autovalores, dados pela equação (2.14), λ_1 = 0,06 e λ_2 = -1,79, que caracterizam este ponto fixo como um ponto de sela. A variedade estável é tangente à direção do autovetor contraente relacionado ao autovalor positivo λ_1, menor do que 1, e a variedade instável é tangente ao autovetor de estiramento relacionado com o autovetor λ_2, com valor absoluto maior do que 1. Isto estabelece que o ponto fixo é uma sela *flip* [Alligood *et al.*, 1997].

Na Fig. 4.38(a) podemos ver também um exemplo da evolução dos pontos no atrator, através da alternância dos pontos ao longo da direção instável, até a trajetória alcançar as extremidades do atrator. Partindo de uma região próxima do ponto de sela do atrator de Hénon, nós vemos os pontos ímpares iniciais acima da linha diagonal pontilhada (1, 3, 5 e 7), a os pontos pares abaixo desta linha (2, 4 e 6), caracterizando a variedade instável. Nos mapas de primeiro retorno experimentais, mostrados nas Figs. 4.37(d), (e) e (f), nós dividimos o atrator em duas partes com uma linha diagonal para determinar os pontos que cruzam com o atrator. Ocorreu o comportamento de alternância da trajetória para os três casos, do mesmo modo que o observado no atrator de Hénon, como está exemplificado na Fig. 4.38(b) para o atrator obtido com uma tensão no alto-falante de 4,0 V. Do mesmo modo que no atrator de Hénon, nós começamos num ponto próximo da interseção do atrator com a linha diagonal (T_N = T_{N+1} aproximadamente igual a 27 ms), com as extremidades do atrator sendo visitadas pela órbita. Deste modo, devido as semelhanças de evolução dos atratores experimentais com a evolução do atrator de Hénon,

nós podemos inferir a existência de um ponto de sela *flip* nos atratores experimentais, mesmo para o caso da tensão de controle de 4,5 V, cujo espectro de Lyapunov tem três componentes e dimensão próxima de dois.

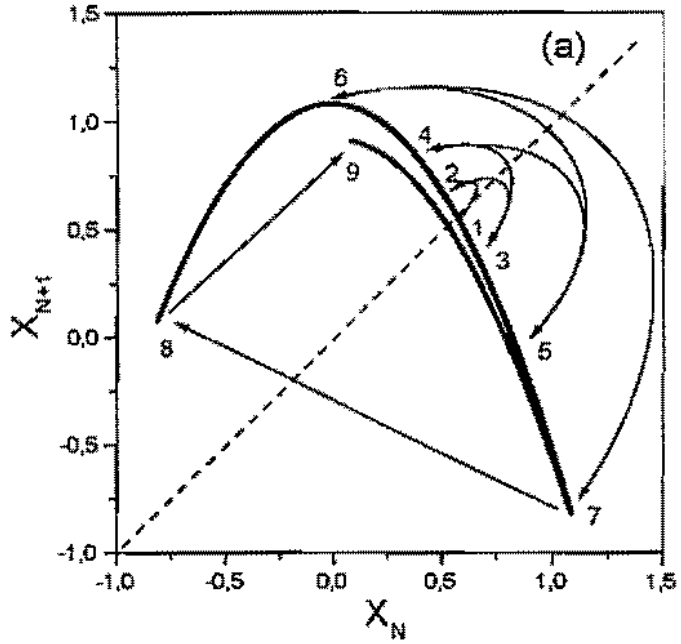
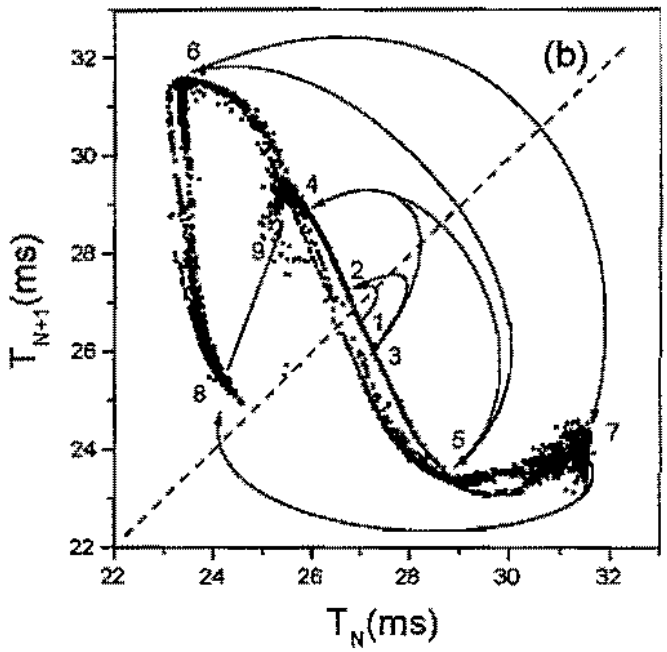


Figura 4.38 (a) Vemos ao lado a trajetória sobre nove pontos do atrator de Hénon para exemplificar o comportamento de um ponto de sela *flip*, localizada próxima do ponto 1 ($x^* = 0{,}56$).



(b) O mesmo comportamento de um ponto fixo tipo sela *flip* pode ser observado para o atrator experimental, com os pontos pares iniciais (2, 4 e 6) acima da diagonal, e os pontos ímpares iniciais (1, 3, 5 e 7) abaixo.

4.3.2.C. Plano simbólico

Como os planos simbólicos são representações gráficas da dinâmica e uma poderosa ferramenta para se comparar sistemas dinâmicos, nós aplicamos a técnica de dinâmica simbólica para os atratores mostrados nas Figs. 4.37(d) até 4.37(f), assim como no atrator de Hénon (a=1,55 e b=0,1) para podermos comparar as semelhanças e diferenças entre eles. Definimos as partições L(R) através da linha tracejada. Na Fig. 4.39(a) mostramos o atrator de Hénon para a=1.55 e b=0.1 com a sua respectiva partição, que separa a região formada por uma linha (L), da região com uma dobra (R) que contém o ponto fixo instável. O plano simbólico $\alpha\beta$ deste atrator está mostrado na Fig. 4.39(A). Nas Figs. 4.40(b) até 4.40(d) temos os atratores experimentais, cujas partições são as linhas tracejadas, que separam uma região com um ramo (L), de uma região com dobra (R). Os respectivos planos simbólicos $\alpha\beta$ estão mostrados nas Figs. 4.40(B), (C) e (D).

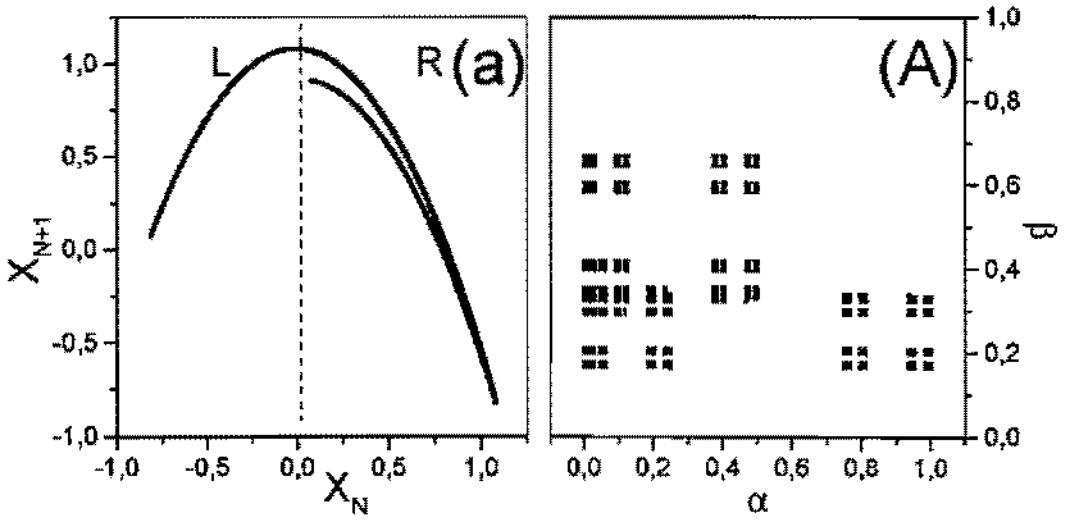


Figura 4.39 A partição sobre o atrator de Hénon (a=1,55; b=0,1) e seu respectivo plano simbólico.

Comparando-se a Fig. 4.39(A) com as Figs. 4.40(B), (C) e (D) percebe-se o padrão de cada plano simbólico é semelhante ao plano simbólico do mapa de Hénon. A maior

semelhança ocorre entre o atrator de Hénon e o atrator experimental com a tensão de controle de 3,5 V da Fig. 4.40(B), cujo plano simbólico possui as mesmas regiões permitida e proibida. Para valores maiores de amplitude da onda sonora, algumas zonas deixam de ser proibidas , ocorrendo uma *invasão* nestas regiões, como por exemplo α=0,8 e β=0,4 na Fig. 4.40(D), mostrando que a formação de bolhas está se afastando da dinâmica do tipo Hénon, e ficando muito semelhante ao plano simbólico do mapa do círculo, como pode ser visto na comparação entre a Fig. 4.40(C) e a Fig. 2.12(A).

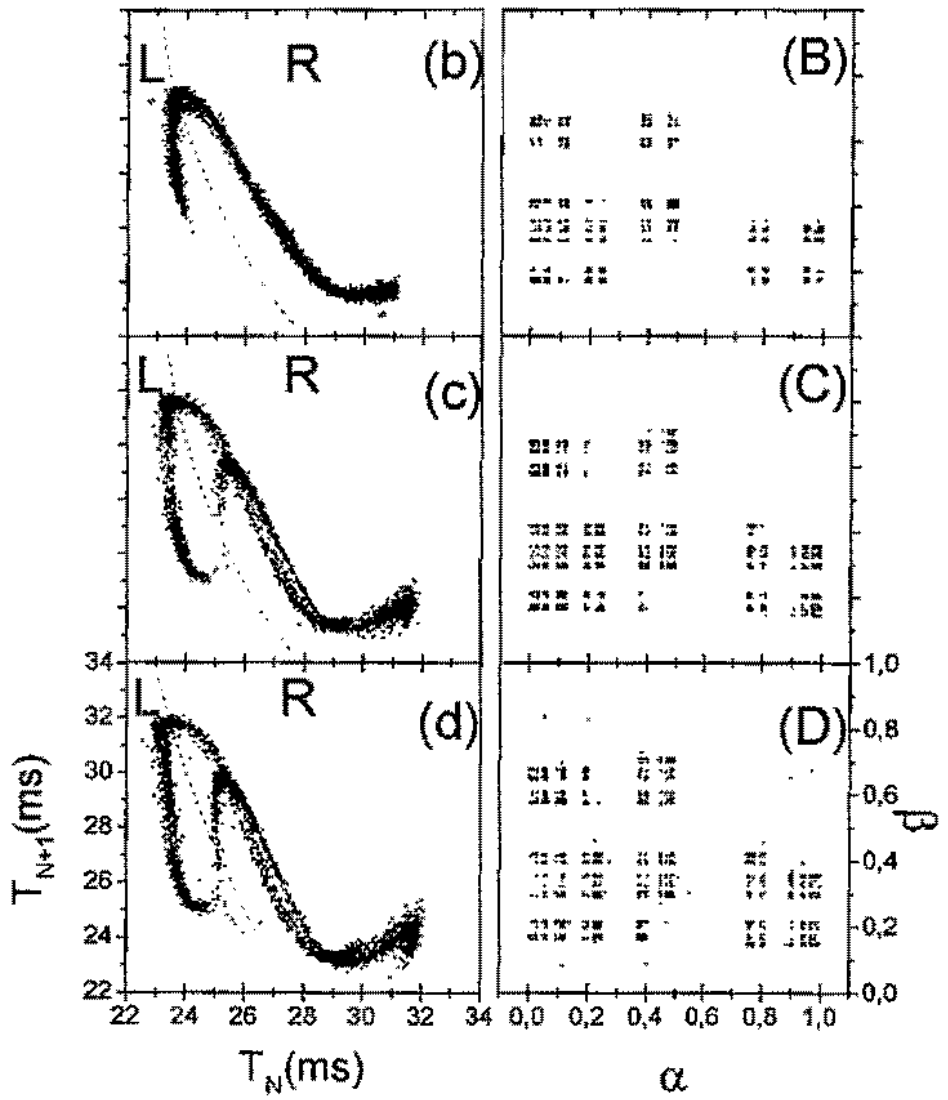


Figura 4.40 Mapas de retorno experimentais com partições e respectivos planos simbólicos.

4.4. Oscilações forçadas

Mapeamentos bidimensionais, como o mapa de Hénon, normalmente são usados como seções de Poincaré de osciladores forçados [Thompson e Stewart, 1986]. Se considerarmos a existência de um movimento oscilatório na formação de bolhas, e a onda sonora como uma força periódica externa, podemos compreender o sistema *bolhas/onda sonora* como um oscilador forçado, como está diagramado na Fig. 4.41.

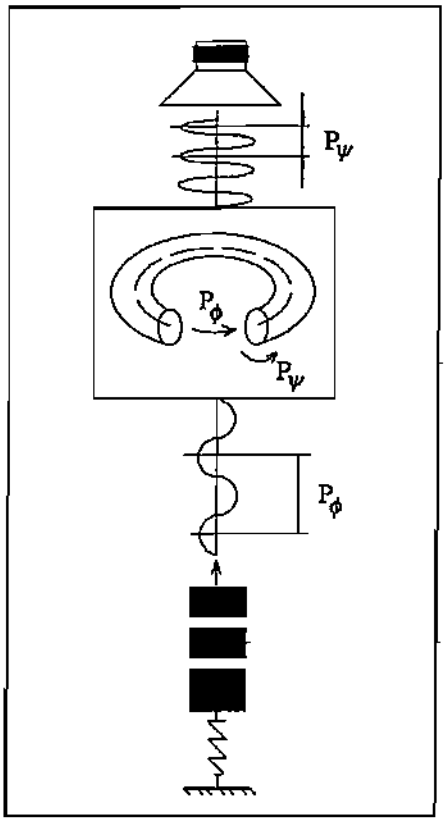


Figura 4.41 Representação esquemática do sistema *bolhas/onda sonora* como um oscilador forçado, onde P_ϕ é o período de oscilação associado às bolhas e P_ψ é o período da onda sonora.

Deste modo podemos interpretar os mapas de primeiro retorno observados experimentalmente como seções de Poincaré de um oscilador forçado. Outro sistema dinâmico que representa um oscilador forçado é o mapa bidimensional do círculo, discutido na seção 2.9:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi\theta_n + br_n, \qquad (\text{mod } 1)$$
$$r_{n+1} = br_n - \frac{K}{2\pi}\operatorname{sen} 2\pi\theta_n \qquad (4.30)$$

As duas freqüências envolvidas no experimento cuja razão nos dá Ω, para o tubo borbulhador, são a freqüência da onda sonora e a freqüência de borbulhamento. O tempo entre bolhas está relacionado com a variável r_n do mapa. O parâmetro K está relacionado com o experimento com a tensão que é aplicada no alto-falante. Para explorarmos a região inicial do mapa do círculo, diminuímos o fator de amplificação do sinal do gerador de funções para o alto-falante. Utilizamos o líquido 80% glicerina e 20% água e o bico A2.

Na Fig. 4.42(a) temos os dados obtidos para um valor de Ω_{EX} = 3,7, e na Fig. 4.42(b) o resultado da simulação utilizando o mapa do círculo com b = - 0,1. Os dados mostram que com o aumento da amplitude da onda sonora o ponto fixo inicial dá lugar a um ciclo limite, cujo raio aumenta de maneira aproximadamente linear até a tensão de 4,4 V. Após este valor de tensão uma janela periódica ocorre e o sistema entra numa região caótica, para valores de tensão entre 5,4 V e 8,7 V. A região caótica é substituída por um travamento freqüência de período 1.

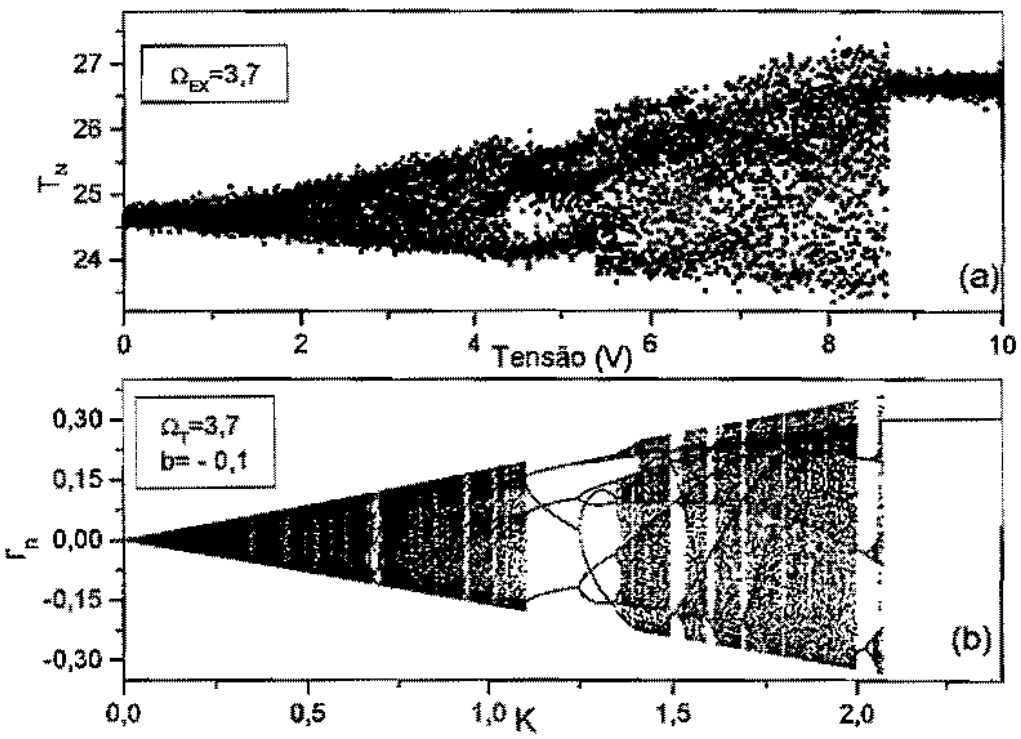


Figura 4.42 Em (a) vemos os dados obtidos com o experimento do tubo borbulhador, com a razão entre a freqüência da onda sonora e a freqüência de borbulhamento igual a 3,7. Em (b) simulação com o mapa do círculo bidimensional.

A comparação com o mapa do círculo da Fig. 4.42(b) mostra as mesmas características. O ruído experimental tem a tendência de mascarar as janelas periódicas, mas a janela periódica central é bem visível nos dois casos.

Diminuindo a freqüência de borbulhamento e repetindo o aumento da amplitude a partir do zero, temos os dados da Fig. 4.43(a), com um valor de Ω_{EX} = 4,27. Na Fig. 4.43(b)

a simulação com o mesmo valor de Ω e b = - 0,1. Esta região triangular inicial, para baixas amplitudes da onda sonora e para estes valores de Ω_{EX}, é uma rota para o Caos via quase-periodicidade.

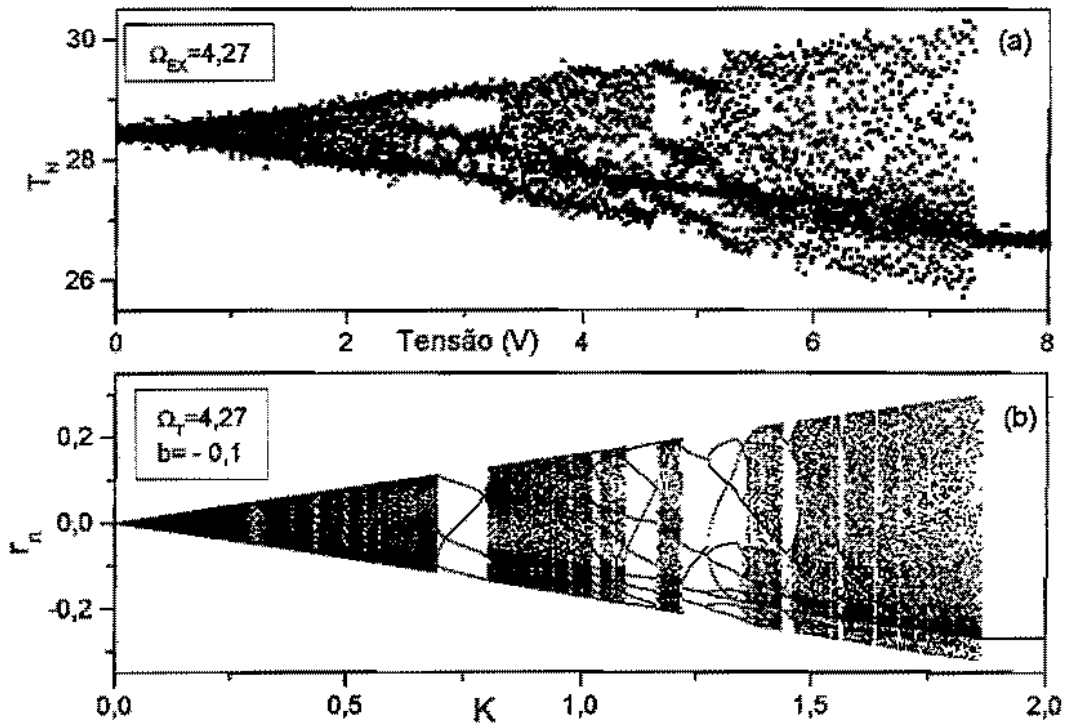


Figura 4.43 (a) Dados experimentais com a razão entre as freqüências da onda sonora e do borbulhamento igual a 4,27. (b) Série obtida com o mapa do círculo com Ω_T=4,27 e b= - 0,1.

4.4.1 Comportamento geral

Agora veremos o travamento em período 1 após a região quase-periódica triangular, seguida de duplicação de período e Caos.

Para obter a série temporal, nós escolhemos um ponto fixo sem a onda sonora, com a taxa de borbulhamento $F_b = 1/T_0$, onde T_0 é o tempo médio entre bolhas sucessivas, e após isto, nós aumentamos a amplitude A do som continuamente.

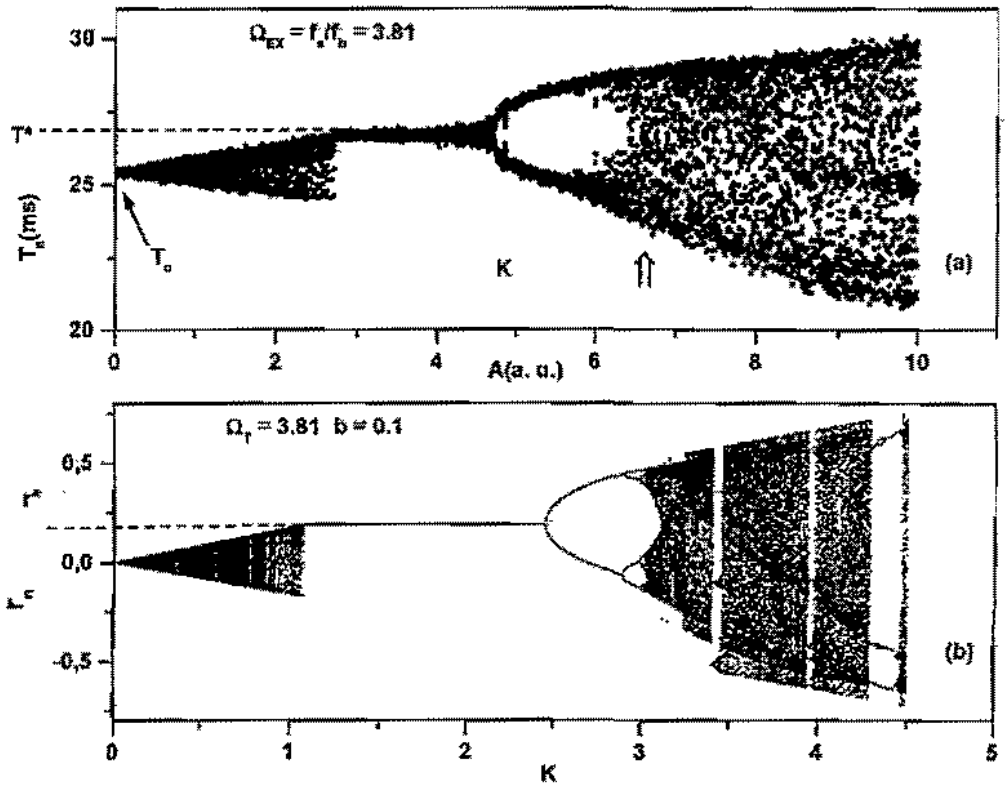


Figura 4.44 (a) Diagrama de bifurcação experimental. O ponto fixo experimental T^* corresponde a 26,7 ms, (b) diagrama obtido com o mapa do círculo, com $r^* = 0,19$.

Na Fig. 4.44(a), pode ser vista a série experimental, T_n *vs.* A, para uma taxa de borbulhamento de F_b = 39,37 bolhas/s e $\Omega_{EX} = F_s/F_b$ = 3,81. Na Fig. 4.44(b) temos o diagrama de bifurcação do mapa do círculo, r_n *vs.* K, calculado com b = 0,1 e o mesmo valor de razão de freqüências Ω_T =3,81.

Temos algumas similaridades entre os dois diagramas. Partindo de K=0 e A=0, cada ponto fixo perde sua estabilidade quando aumentamos o respectivo parâmetro de controle, e ocorre uma região quase-periódica. Os pontos fixos, T^* e r^* tornam-se estáveis para A por volta de 2,7 e K aproximadamente igual a 1,07. O ponto fixo $T^*(r^*)$ é estável até $A \cong 4,7$ ($K \cong 2,44$), quando inicia-se uma cascata de duplicações de período. Deve ser notado que as posições destes pontos fixos estão na região superior da banda triangular ($r^*>0$ e $T^*>T_0$).

As propriedades dos diagramas são facilmente explicadas, se analisarmos as propriedades do mapa do círculo. Segundo as equações (2.28), o ponto fixo r^* após a região quase-periódica no mapa do círculo é dado por:

$$r^* = \begin{cases} -\Omega \pmod 1 \text{ se } \Omega \pmod 1 < 0{,}5; \\ 1 - \Omega \pmod 1 \text{ se } \Omega \pmod 1 > 0{,}5. \end{cases} \tag{4.31}$$

No atrator experimental, o ponto fixo T* ocorre quando a região quase-periódica atinge uma freqüência de borbulhamento igual a um submúltiplo da freqüência da onda sonora de 150 Hz:

$$T^* = 4 / 150 \cong 26{,}7ms, \tag{4.32}$$

onde o número 4 é o inteiro mais próximo do valor de Ω_{EX} = 3,81. Este fenômeno é conhecido com travamento sub-harmônico (*subharmonic entrainment*) [Hayashi, 1985] e ocorre em um oscilador forçado quando a razão entre a freqüência da força externa e a freqüência natural do oscilador está na vizinhança de um inteiro diferente de 1.

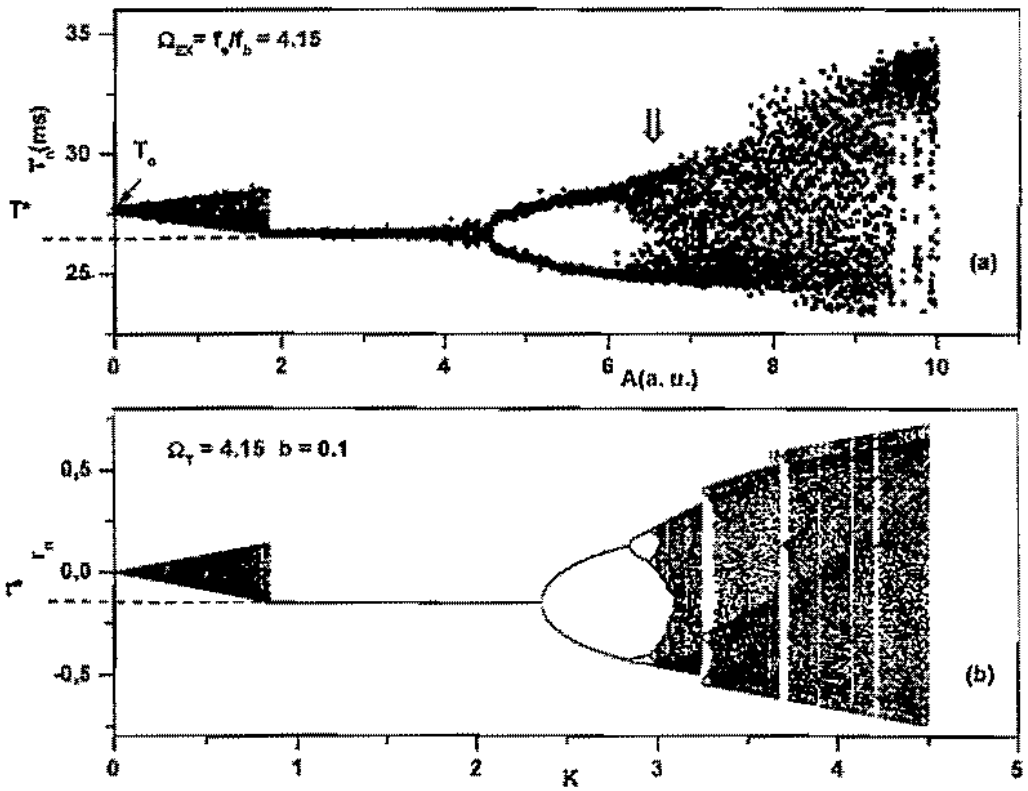


Figura 4.45 (a) Diagrama de bifurcação experimental com T_0 ~27,7 ms. O ponto fixo experimental T* corresponde a 26,7 ms, (b) diagrama obtido com o mapa do círculo, com r^* = - 0,15.

Com outra freqüência de borbulhamento, F_b=36,14 bolhas/s, mas com a mesma freqüência da onda sonora de 150 Hz, obtivemos o diagrama experimental que está mostrado na Fig. 4.45(a) com Ω_{EX} = 4,15. Podemos notar as mesmas similaridades descritas anteriormente, como o travamento sub-harmônico do borbulhamento dado pela equação (4.32), porém o ponto fixo experimental ($T^*<T_0$) está agora no limite inferior da região quase-periódica triangular. Na Fig. 4.45(b), temos o diagrama de bifurcação do mapa do círculo com Ω_T = 4,15 e b = 0,1. O ponto fixo $T^*(r^*)$ torna-se instável em A aproximadamente igual a 4,5 ($K \cong 2{,}36$).

Nós podemos dividir a evolução do borbulhamento em duas regiões: uma região inicial, relacionada com o comportamento quase-periódico ($A \leq 2{,}5$) e a rota de duplicação de período ($A \geq 4$).

Para valores inteiros de Ω_T, não observamos a região quase-periódica. Ajustando a

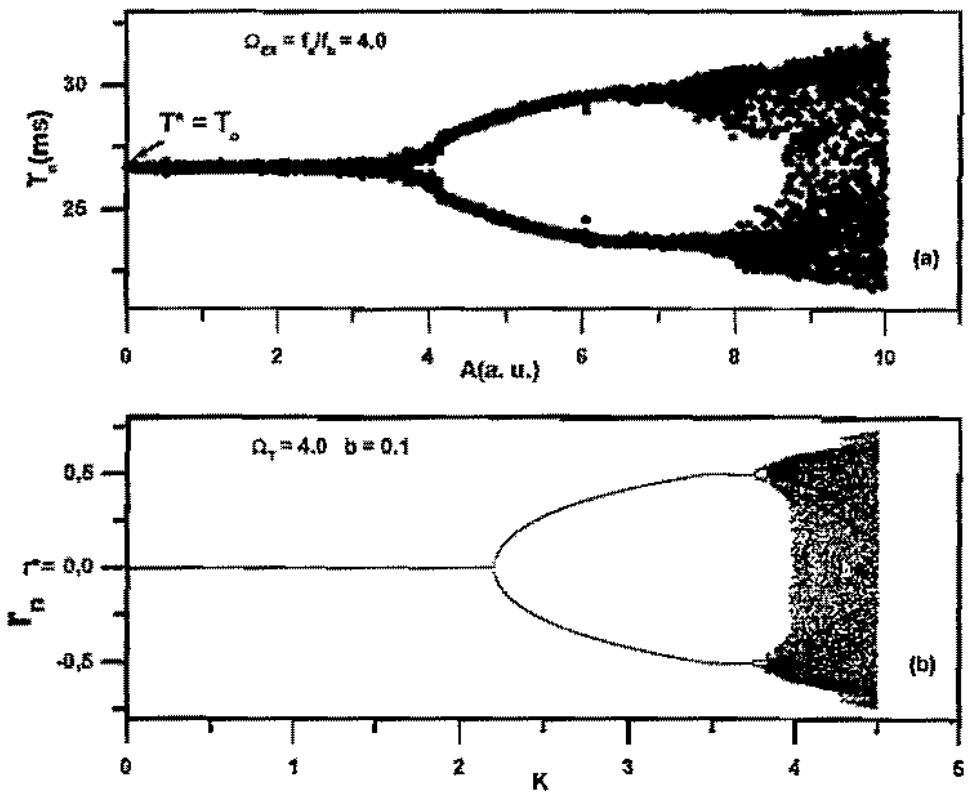


Figura 4.46 (a) Borbulhamento com Ω_{EX} = 4,0. Nas condições acima não há a região quase-periódica e $T^*=T_0$ é estável na região incial de A. (b) O mesmo é observado para o mapa do círculo com Ω_T=4,0 e b=0,1.

freqüência de borbulhamento para 37,5 bolhas/s, tal que $\Omega_{EX} = 4{,}0$, não ocorre a região quase-periódica, como pode ser visto nos dois diagramas da Fig. 4.46. O ponto fixo $T^* = T_0$ ($r^* = 0$) é estável até A^* aproximadamente igual a 3,7 ($K^* \cong 2{,}2$) e o sistema evolui diretamente para a cascata de duplicações de período.

Na Fig. 4.47, temos algumas línguas de Arnold para o mapa do círculo unidimensional ($b = 0$) como uma aproximação do mapa do círculo bidimensional com $b=\pm 0{,}1$. Para um valor de Ω (mod 1) diferente de 0, o sistema inicialmente evolui na região quase-periódica, mostrado pelas setas pontilhadas, até que o sistema alcança o ponto fixo estável, dado pelos círculos cheios. Mesmo para os casos dos dados mostrados nas Figs. 4.42 e 4.43, podemos ver quando o sistema atinge as regiões das línguas de Arnold relativas ao período 4, marcado pelas pequenas linhas horizontais pontilhadas. Para $\Omega = 0$, o sistema percorre a região inicial de K no período 1 relativo ao número de rotação $W = 0/1$.

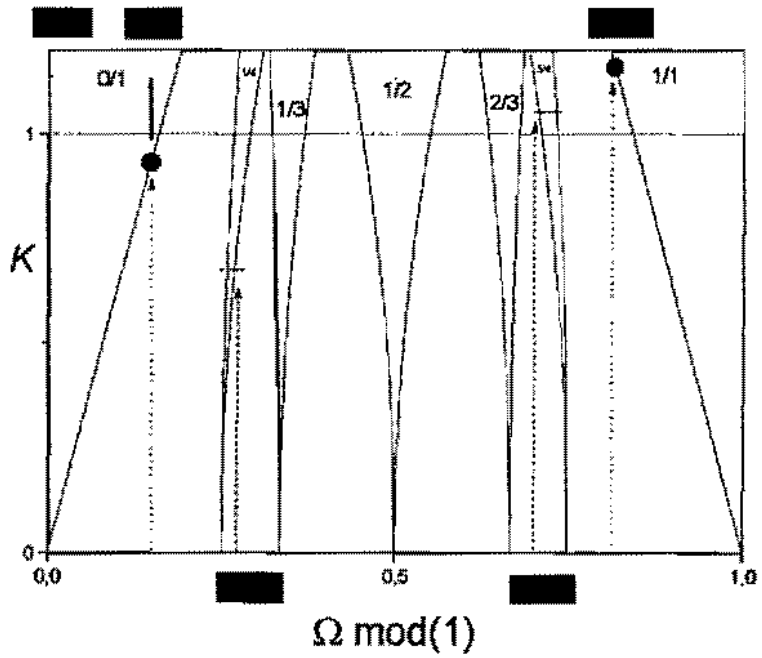


Figura 4.47 As sete línguas de Arnold mais largas com seus respectivos números de rotação. Os números entre parênteses coloridos no topo e na base correspondem aos números das figuras mostradas neste capítulo.

4.4.2. Comparação dos atratores

Os atratores caóticos do tipo Hénon, que aparecem no mapa do círculo, sofrem uma rotação ao redor do ponto do ponto de sela *flip*, como pode ser visto nas comparações entre atratores experimentais reconstruídos das Figs. 4.48(A) e 4.48(C), e entre os atratores obtidos numericamente das Figs. 4.48(a), (b) e (c). Usaremos o termo *saxofone*, que foi utilizado por R. Shaw [Shaw, 1984] para atratores obtidos no experimento da torneira gotejante, para designar os atratores das Figs. 4.48(a)-(A). Experimentalmente e numericamente, as condições de orientação dos atratores saxofone são as seguintes:

$$\Omega \text{ (mod 1)} > 0{,}5 \text{ formato de } saxofone, \tag{4.33a}$$

$$\Omega \text{ (mod 1)} < 0{,}5 \text{ formato de } saxofone\ invertido. \tag{4.33b}$$

Quando a parte fracionária de Ω se anula temos a formação de um atrator do tipo *duplo gancho*, como está mostrado na Fig. 4.48(b) e 4.48(B). Como foi discutido na seção 4.3.2.2, todos os atratores experimentais apresentam um ponto de sela *flip*, que está localizado na interseção de cada linha diagonal com cada atrator das Figs. 4.48. Em todos os casos, este ponto de sela substituiu o ponto fixo estável, T^*, do travamento sub-harmônico (equação 4.32). Por isso, no atrator experimental o ponto de sela *flip*, T_f, é calculado do mesmo modo que o ponto fixo estável T^*:

$$T_f = 4 / 150 \cong 26{,}7 \text{ ms}. \tag{4.34}$$

onde o número 4 é o inteiro mais próximo do valores das razões de freqüências Ω_{EX} (3,81, 4,0 e 4,15), com a freqüência da onda sonora sendo de 150 Hz. Para os atratores obtidos numericamente, a posição do ponto de sela *flip*, r_f, também é calculada com equação (4.31). Em particular, os três pontos de sela *flip* dos atratores mostrado nas Figs. 4.48 são:

$$\begin{aligned} r_f(A) &= 0{,}19; \\ r_f(B) &= 0{,}0; \\ r_f(C) &= -0{,}15. \end{aligned} \tag{4.35}$$

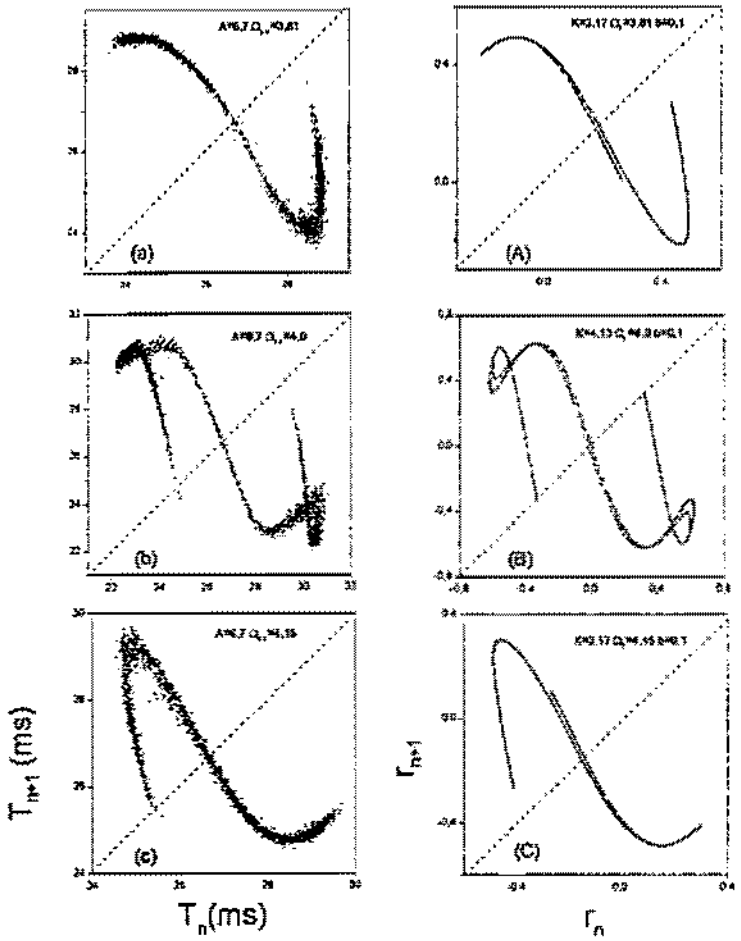


Figura 4.48 (a) O atrator *saxofone* obtido com o experimento do tubo borbulhador no ponto indicado por uma seta na série mostrada na Fig. 4.44(a). (A) A simulação com o mapa do círculo.

(b) Atrator experimental do tipo *gancho duplo*, obtido nas mesmas condições indicadas pela seta sobre a série da Fig. 4.46(a). (B) Atrator obtido com o mapa do círculo.

(c) Rotação do atrator experimental, obtido no ponto indicado pela seta na série da Fig. 4.45(a). (C) A mesma rotação na simulação feita com o mapa do círculo.

Quando a parte fracionária de Ω_{EX} vale 0,5, aumentando-se a amplitude, temos também o ponto fixo de período 1 que se torna instável, surge um período quatro e depois disso surge um atrator caótico com a forma de uma *cruz*, que está mostrado na Fig. 4.49.

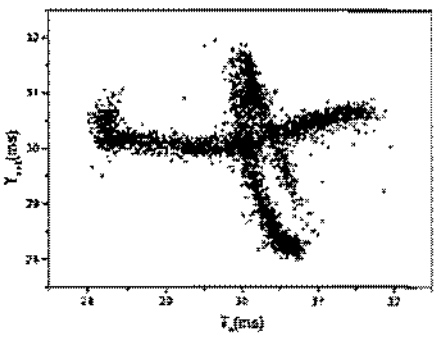


Figura 4.49 Atrator caótico obtido com Ω_{EX} igual a 0,5.

Além disso, outros mais atratores experimentais mais complexos também podem ser simulados com o mapa do círculo, como pode ser visto na Fig. 4.50(a), onde temos uma freqüência de borbulhamento de 8 bolhas/s,

com uma freqüência da onda sonora de 150 Hz. A simulação com o mapa do círculo, como está mostrada na Fig. 4.50(b), foi feita com $\Omega_T = 18{,}85$, $b = 0{,}1$ e $K = 8{,}3$.

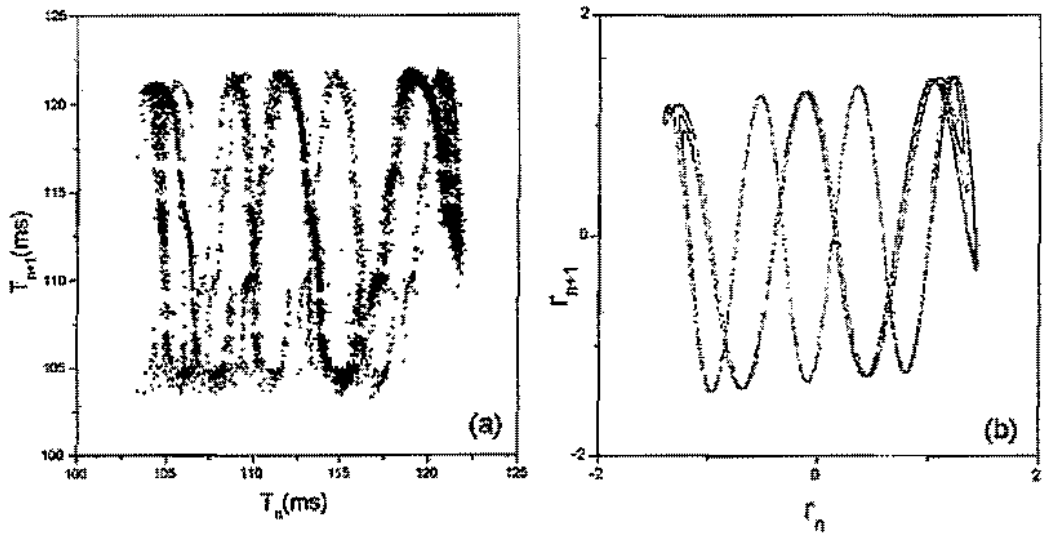


Figura 4.50 Atrator experimental em (a) $\Omega_{EX} = 18{,}75$, $b = 0{,}1$. Em (b) a simulação com o mapa do círculo, $\Omega_T = 18{,}85$, $b = 0{,}1$ e $K = 8{,}3$.

4.4.3. Modulação do Parâmetro de Controle

Quando utilizamos a Teoria do Caos para analisar resultados experimentais, uma das mais difíceis tarefas é associar os parâmetros experimentais aos parâmetros dos modelos existentes, como o mapa logístico, ou o sistema de equações de Rössler e outras equações dos sistemas caóticos. Algumas vezes, o parâmetro de controle escolhido é modulado por uma função que não permite a observação direta dos sistemas caóticos clássicos através da variável de medida [Tufaile, 1996]. Isto acontece no experimento do tubo borbulhador, caso utilizemos, por exemplo, a vazão do ar como parâmetro de controle, como está mostrado na Fig. 4.51, onde utilizamos a solução de 66% glicerina e 34% água e o bico de seringa. A vazão do ar, o parâmetro de controle, está relacionado de uma forma hiperbólica com o tempo de borbulhamento, a variável de medida, representada pela linha

pontilhada. Quando sintonizamos uma onda sonora no sistema com uma freqüência de 126 Hz e uma amplitude constante, ocorre uma composição entre a função hiperbólica e o mapa do círculo. Os tempos associados aos patamares, T_p, são bem definidos e podem ser calculados com a equação (4.36). Os patamares se alargam com o aumento da vazão e o valor do tempo associado a cada um deles é calculado através dos travamentos sub-harmônicos :

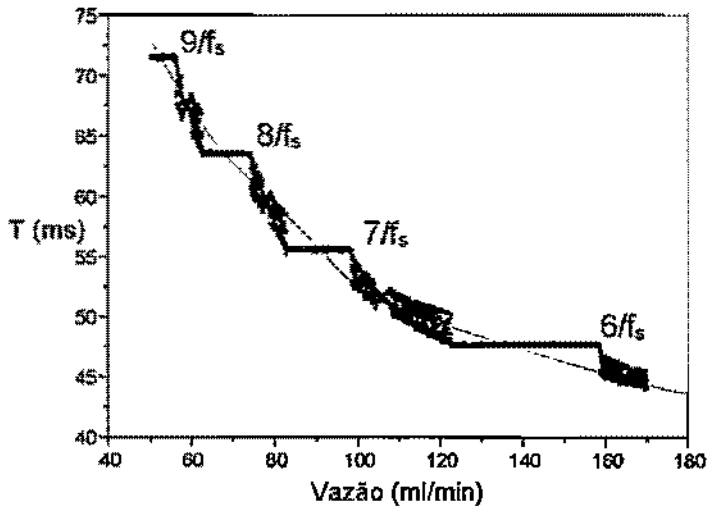


Figura 4.51 A composição de uma função hiperbólica de borbulhamento com o mapa do círculo, as frações ao lado de cada patamar dão o valor do tempo do ponto fixo, T_p , devido ao travamento sub-harmônico

$$T_p = j / f_s, \tag{4.36}$$

onde j é o inteiro mais próximo da razão entre a freqüência da onda sonora e a freqüência de borbulhamento.

Outra situação na qual ocorre a modulação do parâmetro de controle é quando

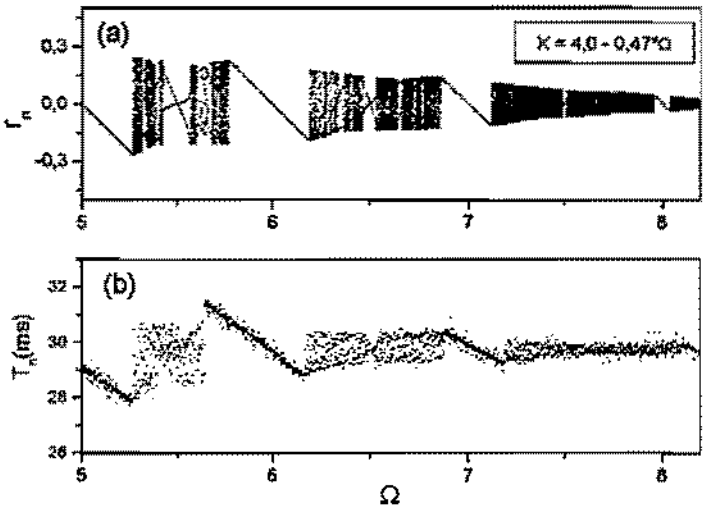


Figura 4.52 (a) Composição do mapa do círculo com uma função linear decrescente. O parâmetro de acoplamento não-linear K é uma função decrescente do valor de Ω.

(b) Dados do tempo de borbulhamento em função de Ω. A variação de Ω é obtida mantendo os demais parâmetros constantes e aumentando linearmente a freqüência da onda sonora.

variamos a freqüência da onda sonora, mantendo constante a sua amplitude. Medindo o tempo de borbulhamento obtivemos os dados da Fig. 4.51(b) do tempo de borbulhamento contra a razão entre as freqüências Ω, para uma freqüência de borbulhamento inicial de 33 bolhas/s. Devido às propriedades da acústica do tubo, a variação da freqüência da onda sonora afeta simultaneamente a amplitude da onda. Isto pode ser simulado com o mapa do círculo, com $b = 0{,}1$, supondo que o parâmetro de acoplamento não-linear, K, do mapa do círculo seja uma função linear decrescente com relação à razão de freqüências Ω que, na Fig. 4.52(a), é o parâmetro de controle:

$$K(\Omega) = 4{,}0 - 0{,}47\,\Omega. \tag{4.37}$$

Os patamares da Fig. 4.51, assim como as linhas diagonais da Fig. 4.52(a) correspondem à composições da freqüências de borbulhamento e da onda sonora que levam o sistema dinâmico nas regiões de língua de Arnold com número de rotação W igual a 1.

5. Conclusões

Construímos o aparato do tubo borbulhador e observamos que o principal aspecto da formação de bolhas em líquidos viscosos é que este sistema é equivalente a um oscilador não-linear. Esta afirmação foi baseada inicialmente nos intervalos de tempo da formação das bolhas no experimento do tubo borbulhador, quando a vazão de ar aumenta, e na comparação deste experimento com o experimento da torneira gotejante. A comparação dos dados experimentais da formação das bolhas influenciadas pela onda sonora com os resultados teóricos do mapa bidimensional do círculo, confirmou que o borbulhamento está associado a um movimento oscilatório. Na comparação do sistema bolhas/onda sonora e o mapa do círculo, o ponto mais importante foi associar o tempo da formação das bolhas T_n, com a variável r_n do mapa do círculo.

A interpretação da oscilação na formação das bolhas pode ser feita observando-se o deslocamento do líquido. Durante a subida da bolha no líquido, este é afastado para dar passagem à bolha, até que a bolha passe e o líquido volta a preencher o espaço que antes era ocupado pela bolha. Este processo se repete e assim temos o comportamento oscilatório. Então podemos entender o movimento do líquido induzido pela passagem da bolha como um oscilador não-linear. O sistema de detecção mede apenas valores máximos deste comportamento oscilatório, por isso temos as seções de Poincaré do borbulhamento e não curvas contínuas do espaço de fases.

A duplicação de período, que ocorre quando variamos a vazão, foi a primeira observação que indicou que uma abordagem utilizando a Teoria do Caos seria um método possível para a compreensão do fenômeno da formação das bolhas. Mesmo assim, uma abordagem utilizando os conceitos da Mecânica dos Fluidos foi feita e, com este ponto de vista, observamos que a duplicação de período com a vazão está associada com a instabilidade de Rayleigh-Taylor, que representa a instabilidade da interface de dois fluidos que não se misturam. A duplicação de período só é evidente em fluidos viscosos, pois, em líquidos pouco viscosos como a água, a dinâmica observada vai diretamente do comportamento regular, para um comportamento irregular. Verificamos que a instabilidade da superfície da bolha nos fluidos com baixa viscosidade é a resposta para a questão da transição do movimento regular para o movimento irregular na formação das bolhas. Esta instabilidade é causada pela interação entre as bolhas que se elevam dentro do líquido e a bolha que está se formando junto ao bico. Em fluidos

viscosos e com baixas vazões do ar, o deslocamento das bolhas que estão emergindo não afeta a bolha que está se formando, pois não há uma perturbação significativa criada pela circulação do líquido e esta circulação permanece laminar junto ao bico. Porém, para vazões mais elevadas, mesmos nos líquidos viscosos, teremos todo o conjunto das bolhas emergentes e da bolha que está se formando interagindo, pois, as perturbações na circulação do líquido se propagam em todas as direções dentro do tubo borbulhador. Deste modo a formação das bolhas apresenta uma dependência tanto do tempo, quanto das condições de contorno. Neste aspecto, o experimento do tubo borbulhador é diferente do experimento da torneira gotejante, pois o deslocamento das gotas que estão caindo não tem efeito significativo na gota que cresce junto ao bico.

Utilizando diferentes tipos de bicos, verificamos algumas das influências da geometria do bico na formação das bolhas. Emulamos as séries temporais através da combinação de mapas. Isto permitiu o desenvolvimento de idéias para tentar entender e explicar os fenômenos observados, como alargamentos suaves e abruptos nos tempos entre as bolhas. A combinação de mapas já havia sido utilizada no experimento da torneira gotejante, o que mostra a sua importância como ferramenta na compreensão de sistemas caóticos.

Do mesmo modo, as simulações com modelo unidimensional massa-mola, permitiram melhorar a nossa interpretação dos dados tanto da torneira gotejante, quanto do tubo borbulhador. O modelo não é adequado para observações quantitativas, mas pode ser usado para a obtenção de resultados qualitativos. Durante a verificação da hipótese do fator de massa agregada, β, do modelo massa-mola para a formação das bolhas, encontramos as estruturas das veias líquidas, que são colunas de água dentro do óleo sustentadas pela subida de bolhas de ar.

Além disso, durante a realização da experiência, foram encontradas algumas das condições que fazem o aparecimento de antibolhas, que são gotas envolvidas por uma fina camada de ar dentro do líquido e que ficam aprisionadas na circulação dentro do líquido.

Verificamos as condições de validade para a relação entre a freqüência da formação das bolhas e a vazão do ar, para um modelo simplificado que estabelece uma freqüência para a formação das bolhas proporcional à vazão elevada a 0,4.

Através da associação com o mapa do círculo, verificamos algumas similaridades entre o mapa e o experimento, como por exemplo, a comparação da variação da razão entre as freqüências da onda sonora e do borbulhamento, Ω_{EX}, com a

variação do parâmetro Ω_T do mapa, assim como fizemos a comparação entre as formas dos atratores reconstruídos. Deste modo encontramos algumas rotas para o Caos, quando é feita a variação da amplitude da onda sonora. A formação das bolhas pode evoluir inicialmente através da rota de quase-periodicidade, quando a amplitude do som é aumentada linearmente, que pode ser reconhecida no início das séries temporais devido à sua forma triangular, para alguns valores da razão entre as freqüências, Ω_{EX}. Outra rota observada foi a rota de duplicação de período com a formação de atratores do tipo-Hénon, devido aos processos de estiramento e dobra.

A dinâmica do mapa do círculo ainda permitiu interpretar o comportamento mais global da existência de patamares no tempo da formação das bolhas nas séries temporais, sujeitas a uma onda sonora de freqüência bem definida. Os patamares ocorrem quando a freqüência do borbulhamento está próximo a um submúltiplo da freqüência da onda sonora, o que caracteriza um travamento sub-harmônico. O travamento sub-harmônico ocorre quando a freqüência de um oscilador fica travada em um submúltiplo da freqüência de uma força externa aplicada. O caso limite da sincronização entre a formação das bolhas e a onda sonora é o travamento harmônico, quando as bolhas se formam com a mesma freqüência da onda sonora.

6. Referências

Argyris, J., Faust, G. e Haase, M. (1994): *An Exploration of Chaos*, North-Holland, Amsterdam.

Alligood, K. T., Sauer, T. D. e Yorke J. A. (1997): *Chaos – an introduction to dynamical systems*, Springer, New York.

Bai-lin, H. (1989): *Elementary symbolic dynamics and Chaos in Dissipative Systems*, World Scientific, Singapura.

Bertelsen, P., Ellegaard, C., Guhr, T., Oxborrow, M. e Schaadt, K. (1999): *Measurement of Parametric Correlations in Spectra of Resonating Quartz Blocks*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2171-2174.

Chandrasekhar, S. (1981): *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*, Dover, New York.

Clift, R., Grace, J. R. e Weber, M. E. (1978): *Bubbles, Drops, and Particles*, Academic Press, New York.

Collet, P. e Eckmann, J. (1980): *Iterated maps on the interval as dynamical systems*, Birkhäuser, New York.

Davidson, J. F. e Schüler, B. O. G. (1960): *Bubble formation at an orifice in a viscous liquid*, Trans. Inst. Chem. Eng. **38**, 144-154.

D'Innocenzo A. e Renna, L. (1996): *Dripping Faucet*, Int. J. Theor. Phys. **35**, 941-973.

D'Innocenzo A. e Renna, L. (1997): *Modeling leaky faucet dynamics*, Phys. Rev. E **55**, 6776-6787.

Ellner, S., Nychka, D. W. e Gallant A. R. (1992): *LENNS, a program to estimate the dominant Lyapunov exponent of noisy nonlinear systems from time series data* (Institute of Statistics Mimeo Series n. 2235 (BMA series n. 39), Statistics Department, North Carolina State University, Raleigh.

Femat, R., Alvarez-Ramírez e Soria, A., (1998): *Chaotic flow structure in a vertical bubble column*, Phys. Let. A **248**, 67-79.

Finney, C. E. A., (2000): *Bibliography of chaos & bubbling*, http://www-chaos.engr.utk.edu/bibBubbling.html

Fletcher, N. H. e Rossing, T. D. (1991): *The Physics of Musical Instruments*, Springer, New York.

Fuchikami, N., Ishioka, S., Kiyono K. (1999): *Simulations of a Dripping Faucet*, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 1185-1196.

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 3465
ex. 1

Gonçalves, W. M. (1996): *A experiência da Torneira Gotejante*, Tese de doutorado, IFUSP.

Gonçalves, W. M., Pinto, R. D., Sartorelli, J. C. e de Oliveira, M. J. (1998): *Inferring statiscal complexity in the dripping faucet experiment*, Physica A **257**, 385-389.

Grebogi, C., Ott, E. e Yorke, J. A.(1982): *Chaotic attractors in crisis*, Phys. Rev. Lett **48**, 1507-1510.

Hayashy, C. (1985): *Nonlinear Oscilations in Physical Systems*, p. 285, Princeton University Press, Princeton.

Hegger, R., Kantz, H., Schreiber, T. (1999): *Pratical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*, Chaos **9**, 413-435.

Jackson, E. A. (1995): *Perspectives of nonlinear dynamics*, Cambridge University, Cambridge.

Kaneko, K. (1992): *Overview of coupled map lattices*, Chaos **2**, 279.

Kiyono, K. e Fuchikami, N. (1999): *Dripping Faucet Dynamics Clarified by an Improved Mass-Spring Model*, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 3259-3270.

Kyriakides, N. K., Kastrinakis, E. G., Nychas, S. G. e Goulas, A. (1997): *Bubbling from Nozzles Submerged in Water: Transitions Between Bubbling Regimes*, Can. J. Chem. Eng. **75**, 684-691.

Lauterborn, W. (1986): *Acoustic Turbulence em Frontiers in Physical Acoustics*, p. 124-144, North-Holland, Amsterdam

Li, H. Z., Mouline, Y., Choplin, L. e Midoux, N.(1997): *Chaotic bubble coalescence in non-newtonian fluids*, Int. J. Multiphase Flow **23**, 713-723.

Li, T. Y. e Yorke, J. A. (1975): *Period 3 implies chaos*, Am. Math. Month. **82**, 985-992.

Lorenz, E. N. (1980): *Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium*, J. Atmos. Sci. **37**, 1685-1699.

Mañe, R. (1981): *On the dimension of compact invariant set of certain non-linear maps*, em Dynamical Systems and Turbulence, ed. D. A. Rand e L. S. Young, Springer, Berlim.

Marmur, A. e Rubin, E. (1975): *A theoretical model for bubble formation at an orifice submerged in an inviscid liquid*, Chem. Eng. Sci. **31**, 453-463.

Marston, P. L. (1980): *Shape oscillation and static deformation of drops and bubbles driven by modulated radiation stresses-Theory*, J. Acoust. Soc. Am **67**, 15-26.

Martien, P., Pope, S. C., Scott, P. L. e Shaw, R. S. (1985): *The chaotic behavior of a leaky faucet*, Phys. Lett. A **110**, 399-404.

Mitoni L. J., Schwartz, M. P. e La Nauze, R. J. (1995): *Deterministic chaos in the gas inlet pressure of gas-liquid bubbling systems*, Phys. Fluids **7**, 891-893.

Moran, M. J., Haigh, R. E., Lowry M. E. e Sweider, D. R. (2000): *Observations of Single-Pulse Sonoluminescence*, http://www-phys.llnl.gov/N_Div/sonolum/sonolum_paper.html.

Miyahara, T., Haga, N., Takahashi, T. (1983): *Bubble formation from an orifice at high gas flow rates*, Int. Chem. Eng. **23**, 524-531.

Nguyen, K., Daw, C. S., Cheng, M., Bruns, D. D., Finney, C. E. A. e Kennel, M. B. (1996): *Spatio-temporal dynamics in a train of rising bubbles*, Chem. Eng. J. **64**, 191-197.

Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D. e Shaw, R. S. (1980): *Geometry from a time series*, Phys. Rev. Lett. **45**, 712-716.

Perry, R. H. e Clinton, C. H. (1972): *Chemical Engineers' Handbook*, McGraw-Hill, New York.

Pinto, R. D. (1999): *Comportamento Complexo na Experiência da Torneira Gotejante*, Tese de Doutorado, IFUSP.

Pinto, R. D. e Sartorelli, J. C. (2000): *Homoclinc tangency and chaotic attractor disappearance in a dripping faucet experiment*, Phys. Rev. E **61**, 342-347.

Prosperetti, A. (1986): *Physics of Acoustic Cavitation* em *Frontiers in Physical Acoustics*, p. 145-188, North-Holland, Amsterdam

Ponter, A. B. e Surati, A. I. (1997): *Bubble Emissions from Submerged Orifices – A critical Review*, Chem. Eng. Technol. **20**, 85-89.

Putterman, S. J. (1995): Sonoluminescence: *Sound into light*, Sci. Am., Fevereiro, 33-37

Rapp, P. E., Bashore, T. R., Zimmermean, I. D., Martinerie, J. M., Albano, A. M. e Mees, A. I. (1990): *Dynamical Characterization of Brain Electrical Activity*, em *The Ubiquity of Chaos*, AAAS, Washington, D.C.

Renna, L. (1999): *A discrete map for dripping faucet dynamics*, Phys. Let. A **261**, 162-168.

da Rocha, M. S. (1995): *Determinação da evolução temporal da formação de gotas*, Dissertação de mestrado, IFUSP.

Rössler, O. E. (1977): *Synergetics: a workshop*, Haken, H., Springer, Berlim, 174-183.

Ruzicka, M. C., Drahos, J., Zahradnik, J. e Thomas, N. H. (1997): *Intermittent transition from bubbling to jetting regime in gas-liquid two phase flows*, Int. J. Multiphase Flow **23**, 671-682.

Sánches-Ortiz, G. I. e Salas-Brito A. L. (1995a): *Strange attractor in a relaxation oscillator model for the dripping faucet*, Phys. Let. A **203**, 300.

Sánches-Ortiz, G. I. e Salas-Brito A. L. (1995b): *Chaos in a variable mass relaxation oscillator model for the leaky tap*, Physica D **89**, 151.

Sartorelli, J. C., Gonçalves, W. M. e Pinto, R. D. (1994): Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment, Phys. Rev. E **49**, 3963-3975.

Schemelcher, P., Diakonos, F. K. (1998): *A general approach to the finding of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems*, Phys. Rev. E **57**, 2739.

Sharpe, G. J. (1994): *Solving Problems in Fluid Dynamics*, p. 203, Longman, Essex.

Shaw, R. (1984): *The dripping faucet as a model chaotic system*, Aerial Press: Santa Cruz.

da Silva, J. G. M. (1996): *Caracterização da Dinâmica da Formação de Gotas*, Dissertação de mestrado, IFUSP.

So, P., Ott, E., Schiff, S. F., Kaplan, D. T., Sauer, T. e Grebogi, C. (1996): *Detecting unstable periodic orbits in chaotic experimental data*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4705-4708.

Sotomayor, J. (1979): *Lições de equações diferenciais ordinárias*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro.

de Souza Vieira, M. C., Lazo, E. e Tsallis, C. (1987): *New road to chaos*, Phys. Rev. A **35**, 945-948.

Stong, C. L. (1974): *The amateur scientist*, Sci. Am., Abril, 116-121.

Sulivan, S. L., Hardy, B. W. e Holland, C. D. (1964): *Formation of Air Bubbles at Orifices Submerged Beneath Liquids*, A. I. Ch. E. Journal **10**, 848-854.

Takens, F. (1981): *Detecting strange attractors in turbulence em Dynamical Systems and Turbulence*, ed. D. A. Rand e L. S. Young, Springer, Berlim.

Thompson, J. M. T. e Stewart, H. B. (1986): *Nonlinear Dynamics and Chaos, Geometrical Methods for Engineers and Scientists*, p.162, John Wiley and Sons, Chichester.

Tritton, D. J., Egdell, C. (1993): *Chaotic bubbling*, Phys. Fluids A **5**, 503-505.

Tufaile, A. (1996): *Mapas combinados e o experimento da torneira gotejante*, Dissertação de mestrado, IFUSP.

Tufaile, A., Pinto, R. D., Gonçalves, W. M. e Sartorelli, J. C. (1999): *Simulations in a dripping faucet experiment*, Phys. Let. A **255**, 58-64, (Apêndice 1).

Tufaile, A. e Sartorelli, J. C., (2000a): *Chaotic behavior in bubble formation dynamics*, Physica A, **275**, 336-346, (Apêndice 2).

Tufaile, A. e Sartorelli, J. C. (2000b): *Hénon-like attractor in air bubble formation*, Phys. Let. A, **275**, 211-217, (Apêndice 3).

Ueta, N. e Tabacniks, M.H. (1994): *Laboratório de Física para Ciências Biológicas*, IFUSP.

Viana, R. L. (2000): *Introdução às Redes de Mapas Acoplados – Modelos para o estudo de Caos Espaço-Temporal*, Notas de Aula, IFUSP.

Weast, R.C., Selby, S. M. (1996): *Handbook of Chemistry and Physics*, p. F33-F42, The Chemical Rubber, Cleveland.

Willeboordse, F. (1992): *Time-delayed map as a model for open fluid flow*, Chaos **2**, 423-426.

Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. e Vastano, J. A. (1985): *Determining Lyapunov exponents from a time series*, Physica D **16**, 285-317.

Apêndice 1

Simulations in a dripping faucet experiment

A. Tufaile, R.D. Pinto, W.M. Gonçalves e J.C. Sartorelli

Physics Letters A 255 (1999) 58-64

3 May 1999

PHYSICS LETTERS A

ELSEVIER

Physics Letters A 255 (1999) 58–64

Simulations in a dripping faucet experiment

A. Tufaile, R.D. Pinto, W.M. Gonçalves, J.C. Sartorelli [1]

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, Brazil

Received 29 September 1998; received in revised form 10 February 1999; accepted 10 February 1999
Communicated by C.R. Doering

Abstract

The profiles of two experimental attractors were simulated by using a simple one-dimensional spring-mass model. Some peculiar behaviors observed in experimental bifurcation diagrams (in short ranges of dripping rate variation) were emulated by combining two quadratic maps (a kind of coupling) in two different ways: parallel combination with non-interacting maps; and series combination with strongly interacting maps. The choice of each kind of combination was suggested by the own characteristics of each experimental bifurcation diagram. © 1999 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

PACS: 05.45.+b

1. Introduction

The leaky faucet dynamics has been used as a paradigm of a chaotic system [1,2] since the suggestion made by Rössler [3] in 1977 that the formation of water drops in a tap nipple could show chaotic behavior, what was later confirmed by Shaw and Martien et al. [4,5]. Period doubling was observed by Martien et al. [4,5], Yépez et al. [6], Cahalan et al. [7], Wu and Schelly [8,9], Dreyer et al. [10], Sartorelli et al. [11]. Tangent intermittencies are reported in Refs. [7,11], quasi-periodicity and boundary crisis in Ref. [11], and a Hopf bifurcation in Refs. [12,13]. Other studies about the formation of drops or droplets of water can be found in Refs. [14–23]

Shaw and collaborators supposed that the water column hanging in a nipple faucet should oscillate as a mass-spring system, with the mass increasing linearly until it reaches a critical point, when a drop is ejected, imposing the initial conditions on the remaining water column. This model was modified by Sánches-Ortiz and Salas-Brito [24] supposing that the mass of the ejected drop must depend on the current value of the water column mass. D'Innocenzo and Renna [25] have also carried out their calculations assuming that the remaining water column shape can be either a sphere or a material point.

Inspired by an Ising-like model to find the water drop profile hanging in a vertical wall, Oliveira and Penna [26] studied the dynamics of the drop formation applying Monte Carlo techniques. Penna et al. [27] showed that the time delays between successive drops display long-range anticorrelations characterized by the same exponents of the heartbeat-to-heartbeat intervals of healthy subjects [28].

[1] E-mail: sartorelli@if.usp.br

0375-9601/99/$ - see front matter © 1999 Elsevier Science B.V. All rights reserved.
PII: S0375-9601(99)00119-X

None of these models are adequate to explain all the behaviors observed in the range from ~0 up to ~40 drops/s. In this paper we present two simulations of experimental attractors which are the best emulations yet obtained by the one-dimensional spring-mass model. It is also presented two experimental bifurcation diagrams, in short ranges of dripping rate, with new peculiar behaviors never seen before. Inspired by the behavior of each experimental diagram, we did a kind of simple coupling of maps [29–32] by combining two quadratic maps to emulate these experimental bifurcations. Two ways of combination are proposed. In the first case, two non-interacting quadratic maps are added (parallel combination), while in the second one, two strongly interacting logistic maps (series combination) are combined in a feedback way.

2. Experimental apparatus

The measurements were done with the faucet attached to a large reservoir, see Refs. [11,21] for details. The time delays between successive drops are measured with a time counter circuitry, with a resolution of 1 μs, inserted in a PC slot. The input signals are voltage pulses, induced in a resistor, defined by the beginning (ending) of the scattering of a laser beam focused on a photo-transistor (in series with the resistor) when the drop starts (ends) to cross the laser beam. The width of the pulse is the time interval t_n (where n is the drop number), and the time delay between two pulses is the crossing time (δt_n), of a drop through the laser beam, so that the total time interval is $T_n = t_n + \delta t_n$.

We can setup the drop rate ($f = 1/\langle T \rangle$) in two ways: (a) by feeding back the water reservoir to keep the height h of the water level and selecting the drop rate by opening (closing) a needle valve driven by a step motor which is controlled by a microcomputer.

For a given drop rate we have constructed first return maps T_{n+1} vs T_n; (b) by fixing the opening of the needle valve, turning off the water supply, letting the water level decrease naturally, and so the dripping rate. Therefore, the control parameter, the height h of the water level, varies as $h \approx h_0 - n\delta V/A$, where $\delta V/A \approx 2 \times 10^{-3}$ mm, h_0 is the initial height, δV the mean volume of the drops, and A is the area of the water reservoir surface. In this case, bifurcation diagrams T_n vs n were constructed. We

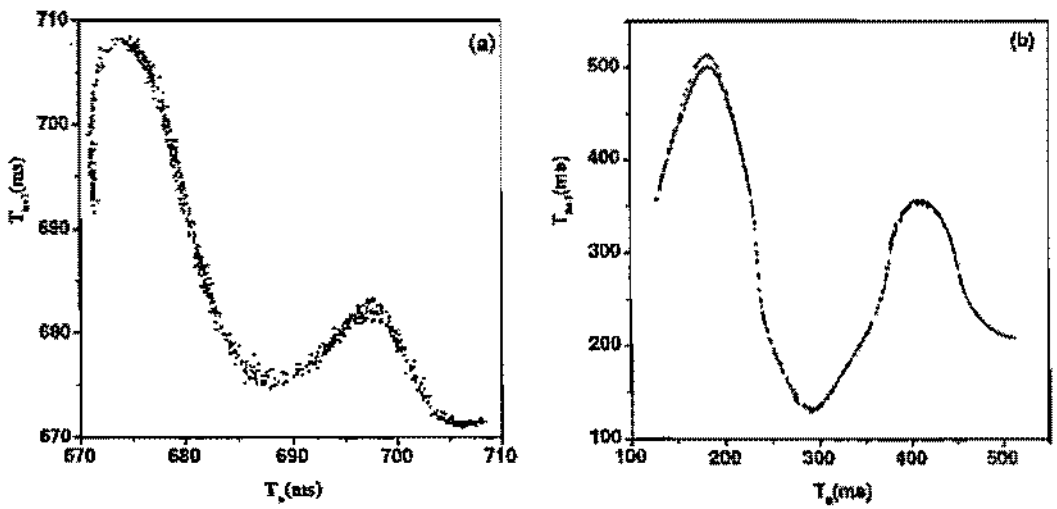


Fig. 1. (a) experimental data for $f = 1.46$ drops/s. Experimental parameter values are $k = 365$ dyn/cm, $x_c = 0.6$ cm, $R = 0.12$–0.15 g/s, and $\alpha = 0.1$–0.14 s/cm. (b) the attractor profile obtained with $R = 0.15$ g/s, $b = 10$ s^{-1}, $k = 475$ dyn/cm, $x_c = 1.3$ cm, and $\alpha = 0.2$ s/cm. The calculated drop rate is $f = 3.15$ drops/s, which is two times the experimental value, approximately. Glass nipple.

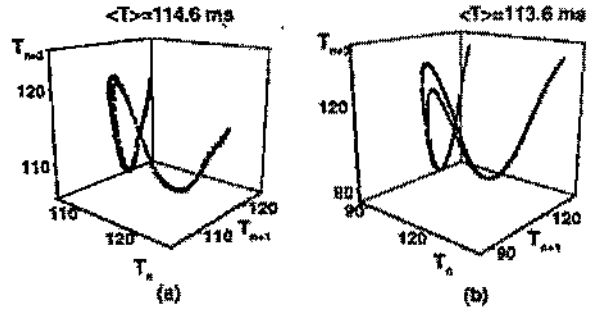


Fig. 2. (a) experimental T_{n+2} vs T_{n+1} vs T_n (ms) map. (b) simulated map with $R = 0.141$ g/s, $x_c = 0.251$ cm, $\alpha = 0.51$ s/cm, $b = 0.94$ s^{-1} and $k = 120$ dyn/cm. The two maps were constructed from the same angle of vision. The calculated drop rate is close to the experimental value. The similarity between the two maps suggests the same attractor with different sizes of the basins of attraction. Brass nipple.

have used one glass nipple and other one of brass, with both having the same internal diameter.

3. Results

3.1. Mass-spring model

Following D'Innocenzo and Renna [25] notation, the set of autonomous differential equations for the mass-spring model is [4,5]

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{d(Mv)}{dt} = Mg - kx - bv, \quad \frac{dM}{dt} = R, \tag{1}$$

where x is the coordinate of the center of mass of the hanging water, and R the flow rate.

The surface tension and friction between the water and the faucet are respectively represented by the spring constant k and by b. A drop with mass

$$\Delta M = \alpha M_c v_c, \tag{2}$$

is shot when the center of mass x exceeds a threshold x_c where M_c and v_c are respectively the hanging water mass and the speed at the threshold point, $g = 980$ cm/s^2, and α is a parameter.

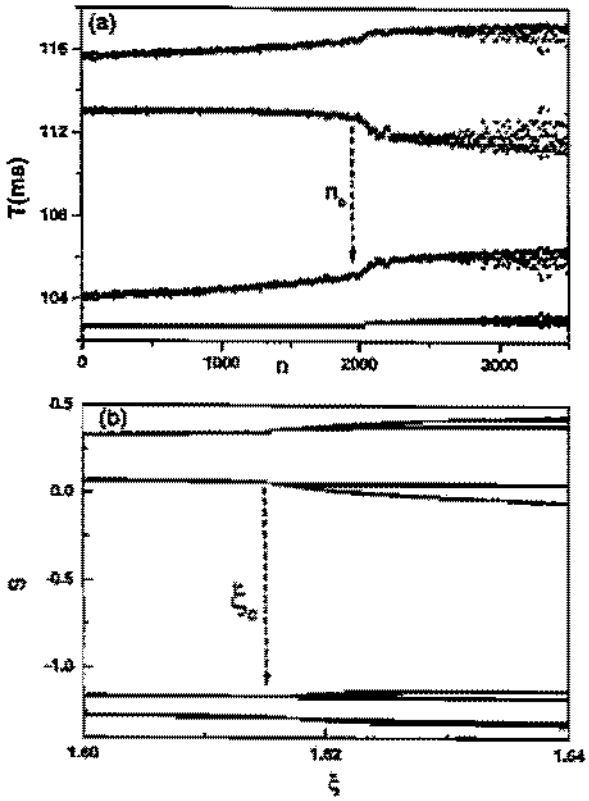
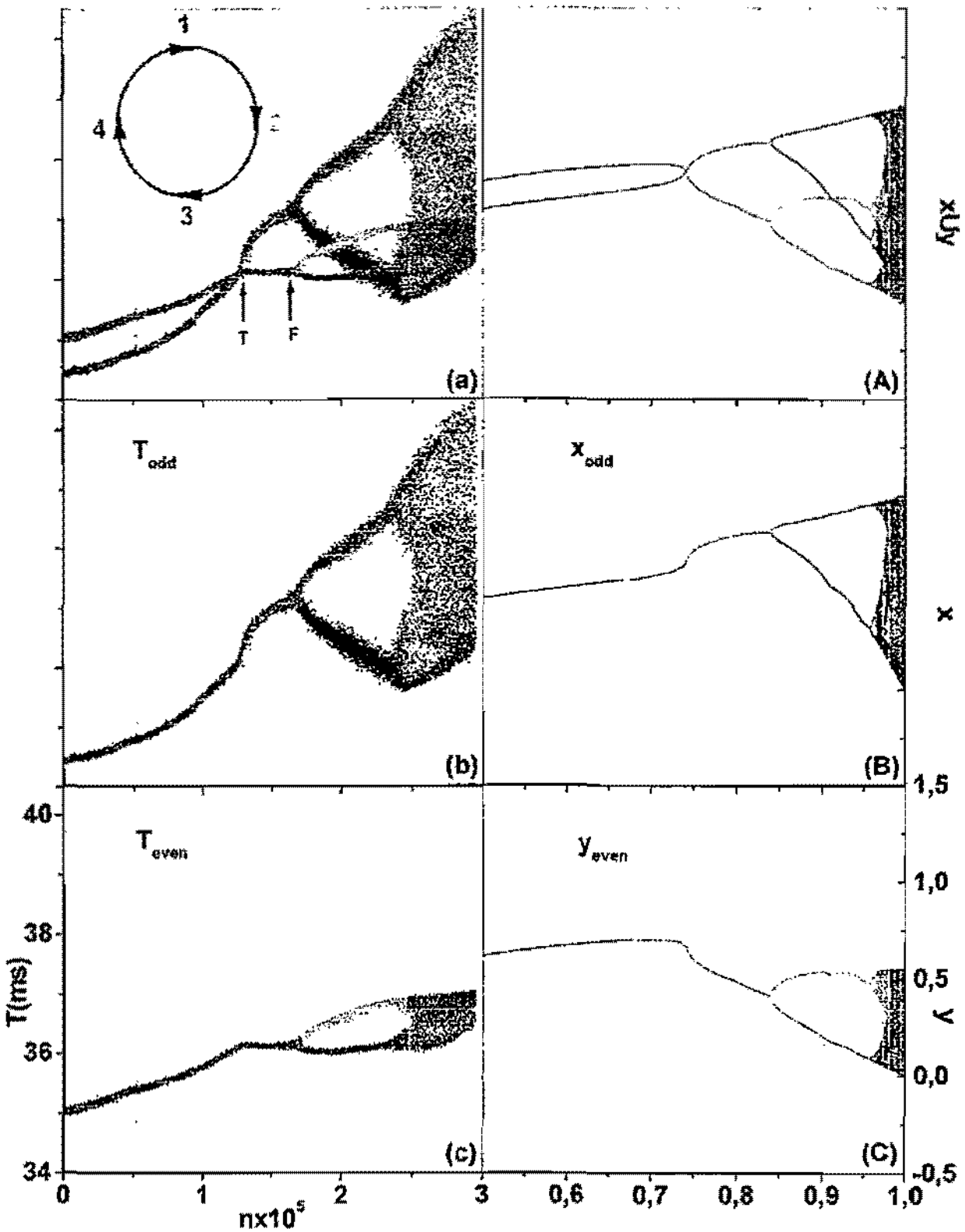


Fig. 3. (a) experimental bifurcation diagram, with the drop rate ranging from ~9.18 down to ~9.13 drops/s. (b) parallel combination of two non-interacting logistic maps with $p_x(\xi) = \xi + \frac{1}{3}$ and $p_y(\xi) = p_x(\xi) - 0.115$. Brass nipple.

For the remaining water, D'Innocenzo and Renna proposed two models: (PS) the point-sphere one, the drop is spherical of radius r and the water residue is a point situated at $x_0 = x_c - r\Delta M/M_c$; (TS) two-sphere model, the drop is spherical of radius r and the water residue is a sphere of radius $r' = [3(M_c - \Delta M)/(4\pi\rho)]^{1/3}$ centered at $x_0 = x_c - (r + r')\Delta M/M_c$. Therefore the simulations require the adjustment of five parameters (k, x_c, R, α and b), but with an unknown dependence between them.

Fig. 4. (a) experimental bifurcation diagram, with the drop rate ranging from 28.8 down to 26.8 drops/s. The circle shows the sequence of the plotting colors. It should be noticed that in the regions of period-2 the colors are superimposed. In (b) and (c) are respectively shown the odd and even branches. On the right, in (A) the emulation of the experimental data using a series combination of two interacting logistic maps. In (B) and (C) are respectively shown the emulated separation of the odd and even branches. The parameters of control $p_x(\xi)$ and $p_y(\xi)$ are shown in Fig. 5. Brass nipple.


1
2
3
4
T
F
(a)
(A)
xUy
T_{odd}
x_{odd}
(b)
(B)
x
T_{even}
y_{even}
(c)
(C)
y
T(ms)
40
38
36
34
0
1
2
3
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,5
1,0
0,5
0,0
-0,5
$nx10^5$

In Fig. 1(a) is shown the experimental first return map obtained by keeping fixed the water level height, at $f = 1.46$ drops/s (glass nipple). An experimental estimation for the parameter values are [21]: $k = 365$ dyn/cm, $x_e \approx 0.6$ cm, $R \approx 0.12$–0.15 g/s. The simulations of the attractor using these parameter values did not converge for wide ranges of α and b values. We could emulate the attractor profile, using the PS model, by adjusting all the parameter values. The emulation, with $k = 475$ dyn/cm, $x_e = 1.3$ cm, $R = 0.15$ g/s, $\alpha = 0.2$ s/cm, and $b = 10$ s^{-1}, is shown in Fig. 1(b), but the mean drop rate obtained ($f = 3.15$ drops/s) is about two times the experimental value.

In Fig. 2(a) is shown an attractor reconstructed in a three-dimensional map T_{n+2} vs T_{n+1} vs T_n, at $f = 8.726$ drops/s. The attractor profile was simulated by the PS model with the parameter values: $R = 0.141$ g/s, $x_e = 0.251$ cm, $\alpha = 0.51$ s/cm, $b = 0.94$ s^{-1}, and $k = 120$ dyn/cm, as shown in Fig. 2(b). Despite the fact that these values are quite different from the experimental ones, we obtained, by coincidence, a drop rate of $f = 8.80$ drops/s, close to the experimental value. The similarity between the two maps suggests that we have the same attractor while the different time scales point out to different sizes of the basins of attractions, with approximately the same mean time $\langle T \rangle$.

We could not find in the literature better simulations of dripping faucet attractors than the examples above. This model is not enough to explain all the details of the experimental data, but it can be useful to give a first sight (or the general properties) of the drop formation dynamics [4] since the classical hydrodynamical models are too complicated to obtain large time series.

We observed some peculiar behaviors in the experimental bifurcation diagrams, and we attempted to construct empirical models to emulate such behaviors in a simple way, looking for relations between two quadratic maps.

3.2. Combined maps

3.2.1. Parallel combination

In Fig. 3(a) is shown an experimental bifurcation diagram, T_n vs n, which was obtained by letting the water level go down naturally, and the dripping rate ranging from ~ 9.18 down to ~ 9.13 drops/s. Below n_c, as the water level height goes down, the dynamical system evolves in a period four movement. When the system reaches the critical point n_c (or h_c) the initial four stable fixed points are replaced by new four fixed points.

We simulated this peculiar change of fixed points by adding two non-interacting quadratic maps (parallel combination), so the global map S is given by

$$x_{n+1} = x_n^2 - p_x(\xi), \quad y_{n+1} = y_n^2 - p_y(\xi),$$
$$S_n = \frac{x_n + y_n}{2}, \tag{3}$$

where $p_x(\xi)$ and $p_y(\xi)$ are the control parameters as functions of a common parameter ξ, and each map is iterated separately [2]. We observed that the choice of $p_x(\xi) = \xi - 1/4$, $p_y(\xi) = p_x(\xi) - 0.115$, $\xi \in (1.6, 1.64)$, can emulate the experimental change of the fixed points as shown in Fig. 3(b). The transition point, $\xi_c = 1.615$, corresponds to the second flip bifurcation in the y map and a period-4 movement in the x map, but the global map S corresponds to a four fixed points until the next flip bifurcation which occurs in the x map at $\xi = 1.618$.

Different from an interior crisis [33], in which occurs a sudden change in the size of the attractor, in Fig. 3(a) we have a smooth increasing in the size of the period-4 attractor. Regarding the oscillatory character of the hanging water, these two period-4 behaviors suggests that we have the same oscillation mode below and above (n_c), but with a little difference between their boundary conditions.

3.2.2. Series combination

For a higher drop rate another experimental bifurcation diagram was observed, with the dripping rate ranging from 28.8 down to 26.8 drops/s. In Fig. 4(a) is shown the bifurcation diagram, T_n vs n, obtained by plotting the points alternately in black ($n = 1,5,9\ldots$), in green ($n = 2,6,10,\ldots$), in red ($n = 3,7,11,\ldots$), and in blue ($n = 4,8,12,\ldots$).

Initially, the system evolves in a period-2 attractor until the branches red + black and green + blue col-

[2] For a given value of the control parameter ξ, the series $\{x\}$ and $\{y\}$ were numerically obtained after a transient of 10000 iterations, from the same initial conditions ($x_0 = y_0 = 0.6$).

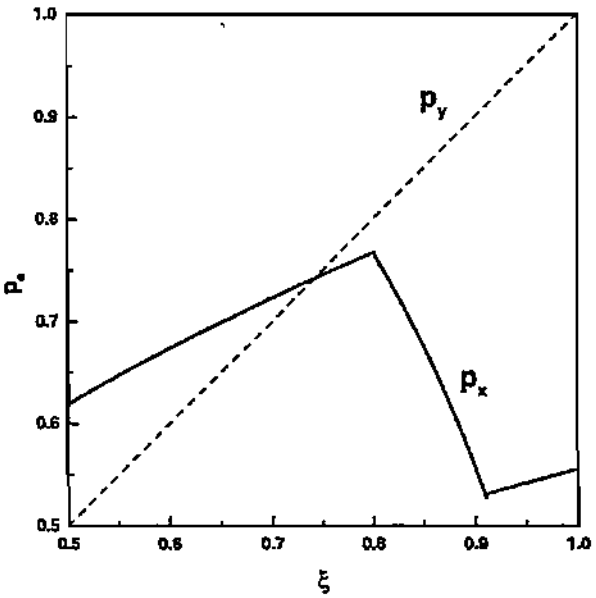


Fig. 5. p_x (continuous line) and p_y (dashed line) as functions of ξ.

lapses at point T. After that, the system continues to evolve in a period-2 movement, but showing inversion of phases (see the colors exchange) until point F, where another bifurcation occurs on each branch. Therefore, this diagram can be split in an odd diagram (black + red) as shown in Fig. 4(b), and in an even diagram (green + blue) as shown in Fig. 4(c). The skeleton of each branch is preserved even in the regions of superposition of the branches, as in the chaotic region ($n \geq 2.5 \times 10^5$ and $\xi \geq 0.97$ in Fig. 4). The branches in Fig. 4(b) and 4(c) have similar behavior and structures (common bifurcation points and chaotic regions), but different sizes.

The similarity between each branch and the logistic map suggests that this peculiar behavior could be interpreted by the combination of two strongly interacting logistic maps (series combination) as to say, the feedback of one logistic map into another one

$$x_{n+1} = 4p_x(\xi)y_n(1-y_n), \quad \text{odd branch},$$
$$y_{n+1} = 4p_y(\xi)x_n(1-x_n), \quad \text{even branch}, \qquad (4)$$

where $p_x(\xi)$ and $p_y(\xi)$ are the control parameter functions. The choice of $p_x(\xi)$ and $p_y(\xi)$ shown in Fig. 5 leads to a reasonable emulation of the experimental diagram, as shown in Fig. 4(A), (B) and (C).

Considering that each branch is visited alternately, and associating each branch to an oscillating mode of the water column, it seems that the initial conditions imposed by one drop to the next one switches from one oscillating mode to another one.Therefore, the combined maps models can give us a first sight about some local behaviors of the experimental diagram.

4. Conclusions

We could reproduce the profile of some attractors by using the one-dimensional mass-spring model. The parameters values obtained by this model are not realistic due to the drastic simplification of the water drop formation dynamics.

To interpret some peculiar behaviors observed locally in bifurcation diagrams we proposed the empirical model of combined maps. With the parallel combination we could emulate the peculiar replacing of four fixed points by four new ones. The feedback of one quadratic map into another one, in the series combination, allowed us to realize the collapse of branches and their further separation, as well as the preservation of the skeleton of each branch in the chaotic region.

Acknowledgements

This work was partially financed by the Brazilian agencies FAPESP, CNPq, and FINEP.

References

[1] F.C. Moon, Chaotic Vibrations, Wiley, New York, 1987.
[2] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke, Chaos: An Introduction to Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York, 1997.
[3] O.E. Rössler, Synergetics: A Workshop, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
[4] R. Shaw, The dripping faucet as a model chaotic system, Aerial Press, Santa Cruz, 1984.
[5] P. Martien, S.C. Pope, P.L. Scott, R.S. Shaw, Phys. Lett. A 110 (1985) 399.

[6] H.N.N. Yépez, A.L.S. Brito, C.A. Vargas, L.A. Vicente, Eur. J. Phys. 10 (1989) 99.
[7] R.F. Cahalan, H. Leider-her, G.D. Cahalan, Comp. Phys. July/August, 1990, p. 368.
[8] X. Wu, Z.A. Schelly, Physica D 40 (1989) 433.
[9] X. Wu, E. Tekle, Z.A. Schelly, Rev. Sci. Instr. 60 (1989) 3779.
[10] K. Dreyer, F.R. Hickey, Am. J. Phys. 59 (1991) 619.
[11] J.C. Sartorelli, W.M. Gonçalves, R.D. Pinto, Phys. Rev. E 49 (1994) 3963.
[12] R.D. Pinto, W.M. Gonçalves, J.C. Sartorelli, M.J. de Oliveira, Phys. Rev. E 52 (1995) 6892.
[13] J.G.M. da Silva, J.C. Sartorelli, W.M. Gonçalves, R.D. Pinto, Phys. Lett. A 226 (1997) 269.
[14] X.D. Shi, M.P. Brenner, S.R. Nagel, Science 265 (1994) 219.
[15] S.D.R. Wilson, J. Fluid Mech. 190 (1988) 561.
[16] D.H. Peregrine, G. Shoker, A. Symon, J. Fluid Mech. 212 (1990) 25.
[17] D.W. DePaoli, J.Q. Feng, O.A. Basaran, T.C. Scott, Phys. Fluids 7 (1995) 1181.
[18] X. Zhang, O.A. Basaran, Phys. Fluids 7 (1995) 1184.
[19] A. Laverón-Simavilla, J.M. Perales, Phys. Fluids 7 (1995) 1204.
[20] Y. Watanabe, Jpn. J. Appl. Phys. 24 (1985) 351.
[21] M.S.F. da Rocha, J.C. Sartorelli, W.M. Gonçalves, R.D. Pinto, Phys. Rev. E 54 (1996) 2378.
[22] J. Austin, Phys. Lett. A 155 (1991) 148.
[23] J.A. Fornés, J. Procópio, J.C. Sartorelli, J. App. Phys. 80 (1996) 6021.
[24] G.I. Sánches-Ortiz, A.L. Salas-Brito, Phys. Lett. A 203 (1995) 300; Physica D 89 (1995) 151.
[25] A. D'Innocenzo, L. Renna, Phys. Lett. A 220 (1996) 75; Int. J. Theor. Phys. 35 (1996) 941; Phys. Rev. E 55 (1997) 6776.
[26] P.M.C. de Oliveira, T.J.P. Penna, J. Stat. Phys. 73 (1993) 789; Int. J. Mod. Phys. C 5 (1994) 997.
[27] T.J.P. Penna, P.M.C. de Oliveira, J.C. Sartorelli, W.M. Gonçalves, R.D. Pinto, Phys. Rev. E 52 (1995) R2168.
[28] H.E. Stanley, S.V. Buldyrev, A.L. Goldeberger, Z.D. Goldeberger, S. Havlin, R.N. Mantegna, S.M. Ossadnik, C.K. Peng, M. Simons, Physica A 205 (1994) 214.
[29] K. Kaneko, Progr. Theor. Phys. 69 (1983) 1427; Progr. Theor. Phys. 72 (1984) 202.
[30] Y. Gu, M. Tung, J. Yuan, D. Feng, L.M. Narducci, Phys. Rev. Lett. 52 (1984) 701.
[31] T. Hogg, B.A. Huberman, Phys. Rev. A 29 (1984) 275.
[32] L.A. Bunimovich, Physica D 86 (1995) 248.
[33] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, Phys. Rev. Lett. 48 (1982) 1507; Physica D 7 (1983) 181.

Apêndice 2

Chaotic behavior in bubble formation dynamics

A. Tufaile e J.C. Sartorelli

Physica A 275 (2000) 336-346

ELSEVIER

Physica A 275 (2000) 336–346

PHYSICA A

www.elsevier.com/locate/physa

Chaotic behavior in bubble formation dynamics

A. Tufaile, J.C. Sartorelli*

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil

Received 25 June 1999; revised 19 August 1999

Abstract

We constructed an experimental apparatus to study the dynamics of the formation of air bubbles in a submerged nozzle in a water/glycerin solution inside a cylindrical tube. The delay time between successive bubbles was measured with a laser-photodiode system. It was observed bifurcations, chaotic behavior, and sudden changes in a periodic regime as a function of the decreasing air pressure in a reservoir. We also observed dynamical effects by applying a sound wave tuned to the fundamental frequency of the air column above the solution. As a function of the sound wave amplitude, we obtained a limit cycle, a flip bifurcation, chaotic behavior, and the synchronization of the bubbling with sound wave frequency. We related some of the different dynamical behaviors to coalescent effects and bubble sizes. © 2000 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

PACS: 05.45.+b

Keywords: Chaos; Bubble dynamics; Unstable periodic orbit; Synchronization

1. Introduction

The formation of gas bubbles in a nozzle submerged in a liquid column has been studied by Davidson and Schüler [1], Buyevich and Webbon [2], and Kyriakides et al. [3]. A critical review about the experimental and theoretical results is presented by Ponter and Surati in Ref. [4]. Results of simulations of the motion of gas bubbles in a liquid are presented by Krishna and van Baten in Ref. [5]. The bubbling dynamics presents some features that resemble chaotic systems [6–8]. Triton and Edgell [7] observed some attractors by detecting the bubble passage by a transducer (hot-film anemometer) placed close to the nozzle.

The aim of this paper is to report the existence of dynamical properties of bubble formation with non-invasive techniques, and report the effects of a sound wave on the

* Corresponding author.
E-mail address: sartorelli@if.usp.br (J.C. Sartorelli)

0378-4371/00/$ - see front matter © 2000 Elsevier Science B.V. All rights reserved.
PII : S0378-4371(99)00440-9

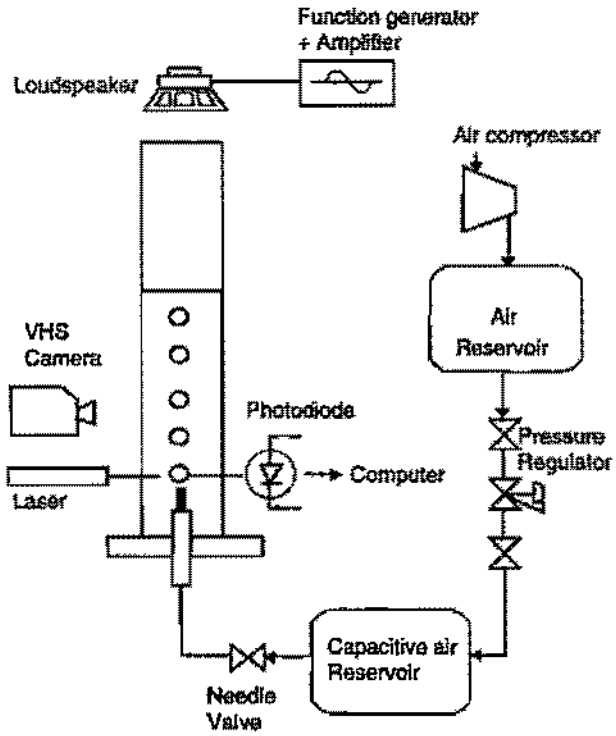


Fig. 1. Diagram of the experimental apparatus.

bubble formation dynamics. The delay time between successive bubbles was measured by using the same techniques as in the dripping faucet experiments [9]. Besides a route to chaos via period doubling, we related some peculiar behaviors observed in bifurcation diagrams to the coalescent effects (for a bubble penetrating into another just above the nozzle, and forming a single-larger bubble; or when one bubble touches the previous one forming a doublet).

2. The bubble gun apparatus

The experimental apparatus consists of a glass tube partially filled with a viscous solution (water+glycerol), as schematically shown in Fig. 1. The air bubbles are formed blowing air through a nozzle at the bottom of the tube. The air is supplied by an air compressor whose reservoir is connected to another one (a capacitive reservoir) through a pressure reducer. The detection system is the same as in the dripping faucet experiment [9]. A horizontal He–Ne laser beam, focused in a photodiode, is placed a little above the nozzle. The input signals are voltage pulses, induced in a resistor, defined by the beginning (ending) of the scattering of a laser beam focused on the photodiode (in series with the resistor) when the bubble starts (ends) to cross the laser beam. The delay time between successive bubbles was measured with a time counter circuitry inserted in a PC slot (time resolution $=1$ μs). The width of the pulse is the

time interval t_n (where n is the bubble number), and the delay time between two pulses is the crossing time (δt_n), of a bubble through the laser beam, so that the total time interval is $T_n = t_n + \delta t_n$. We can setup the bubble rate ($f = 1/\langle T \rangle$) in two ways: (a) by fixing the opening of the needle valve, turning off the air supply to the capacitive reservoir, and letting the air pressure to decrease naturally, so the bubbling rate. In this case, we have analyzed the data constructing bifurcation diagrams (T_n vs. n), that are functions of the air pressure decreasing; (b) by keeping fix the air pressure in the capacitive reservoir and selecting the bubble rate by opening (closing) the needle valve. In this case, for a given bubbling rate we have constructed first return maps T_{n+1} vs. T_n. We also studied the changing of the bubbles formation dynamics with a sound wave tuned to the fundamental frequency of the air column above the solution. The sound waves are generated by a loudspeaker, placed at the top of the tube (see Fig. 1), which is driven by an arbitrary function generator. The sound wave amplitude was used as a control parameter.

We also recorded the bubble formation with a VHS camera to illustrate how the profiles of the bubbles are in different dynamical behaviors.

3. Results and discussion

3.1. Air pressure as a control parameter

Using a solution of four parts of glycerol and one part of water, and a plastic hypodermic syringe, without the metallic needle, as a nozzle, a bifurcation diagram was obtained letting the air pressure in the capacitive reservoir go down naturally with the bubbling, as shown in Fig. 2. The diagram shows the evolution from a chaotic behavior in region (a) to a periodic window. The periodic behavior starts with a period-2, region (b), thereafter a bifurcation occurs giving rise to a period-4, region (c), which again evolves to another period-2, region (d), followed by a period-1 movement region (e). In Fig. 3 the illustrations of the bubbles profile in each region, as labeled above are shown. In Fig. 3(e), the bubbles are formed without the coalescent effect; in the period-2 behavior shown in Fig. 3(d) there is no coalescence near the nozzle, but a little far above it; in Fig. 3(c), the coalescence occurs close to the nozzle, but bubbles do not touch each other, and a period-4 is observed; in Fig. 3(b) two successive bubbles coalesce completely giving rise to a large single bubble in a period-2 behavior; and in Fig. 3(a) the coalescent effect in the chaotic region.

A different bifurcation diagram was obtained, in the same way as above, using a long metallic hypodermic needle as a nozzle, as shown in Fig. 4. The system is evolving in a period-2 movement, region (a) in the Fig. 4, with an attractors size $\approx |T_{n+1} - T_n| \sim 5.5$ ms. As the air pressure in the capacitive reservoir goes down, suddenly a shortening of the period-2 occurs, and a new period-2 starts with the attractors size $\approx |T_{n+1} - T_n| \sim 1$ ms, region (b) in the Fig. 4. Thereafter, the system evolves to a period-1 movement. Illustrations of the bubbles profile, obtained in each region described in Fig. 4, are

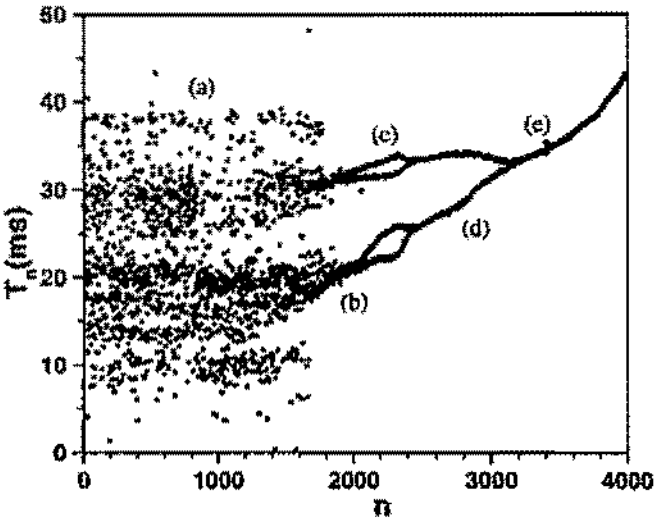


Fig. 2. Bifurcation diagram obtained with the air pressure decreasing in the capacitive reservoir. Region (a) chaotic behavior, (b) period-2, (c) period-4, (d) period-2, and (e) period-1. The same behavior is obtained by increasing the air pressure. Hypodermic syringe nozzle.

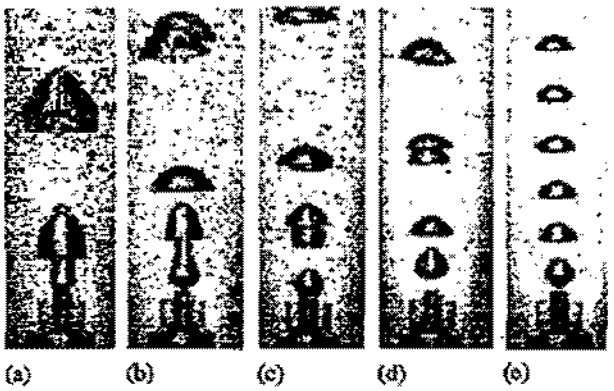


Fig. 3. Illustrations of the bubbles profile and the coalescent effects: in (a) chaotic behavior, (b) period-2, with complete coalescence, (c) period-4, with single coalescence, (d) period-2 without coalescence near the nozzle, but a little far above it, and (e) period-1.

shown in Fig. 5. The shortening of the size of the attractor is accomplished by the shortening of the size of the bubbles, as it is shown in Fig. 5(a) and (b). In the larger period-2 region, close to the nozzle, two bubbles coalesce completely forming a large single bubble, as described in Refs. [1,3].

3.2. Sound wave amplitude as a control parameter

By keeping fixed the air pressure in the capacitive reservoir, we changed the bubble dynamics formation by applying sound waves tuned to the fundamental frequency, $f_s = 138$ Hz, of the air column above the liquid solution (two parts of glycerol/one part of water).

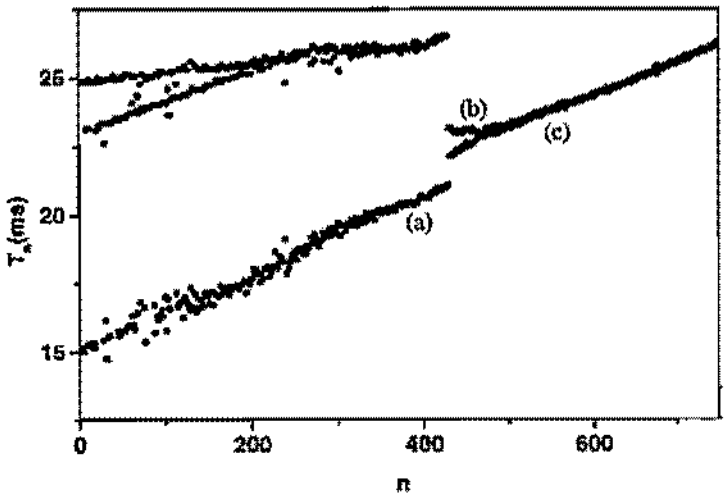


Fig. 4. Diagram bifurcation as a function of air pressure decreasing in the capacitive reservoir obtained with a metallic needle. Around the region (a) the movement is the large period-2 due to the coalescent effect, around the region (b) is shown a shorter period-2, and in the region (c) is shown a fixed point.

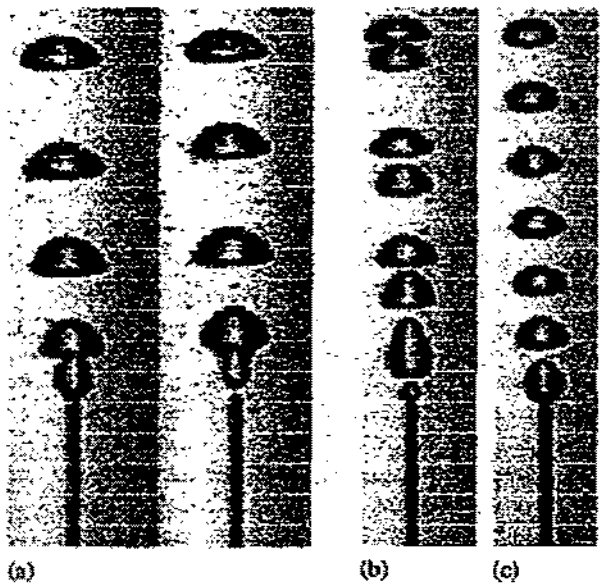


Fig. 5. (a) Large period-2 and large bubbles due to a coalescent effect in a period-4; (b) period-2 without the coalescent effect; and (c) the fixed point.

In Fig. 6 the first return maps as a function of the sound wave amplitude are shown. In each frame, the top inset shows at the left the sound wave amplitude and at the right the bubbling rate. We started at a fixed point at $f = 11.282$ bubbles/s as shown in Fig. 6(a). By applying the sound wave, the fixed point looses its stability and a limit cycle appears, as shown in Fig. 6(b) and (c), with a little increasing of the mean bubbling rate as the amplitude is raised.

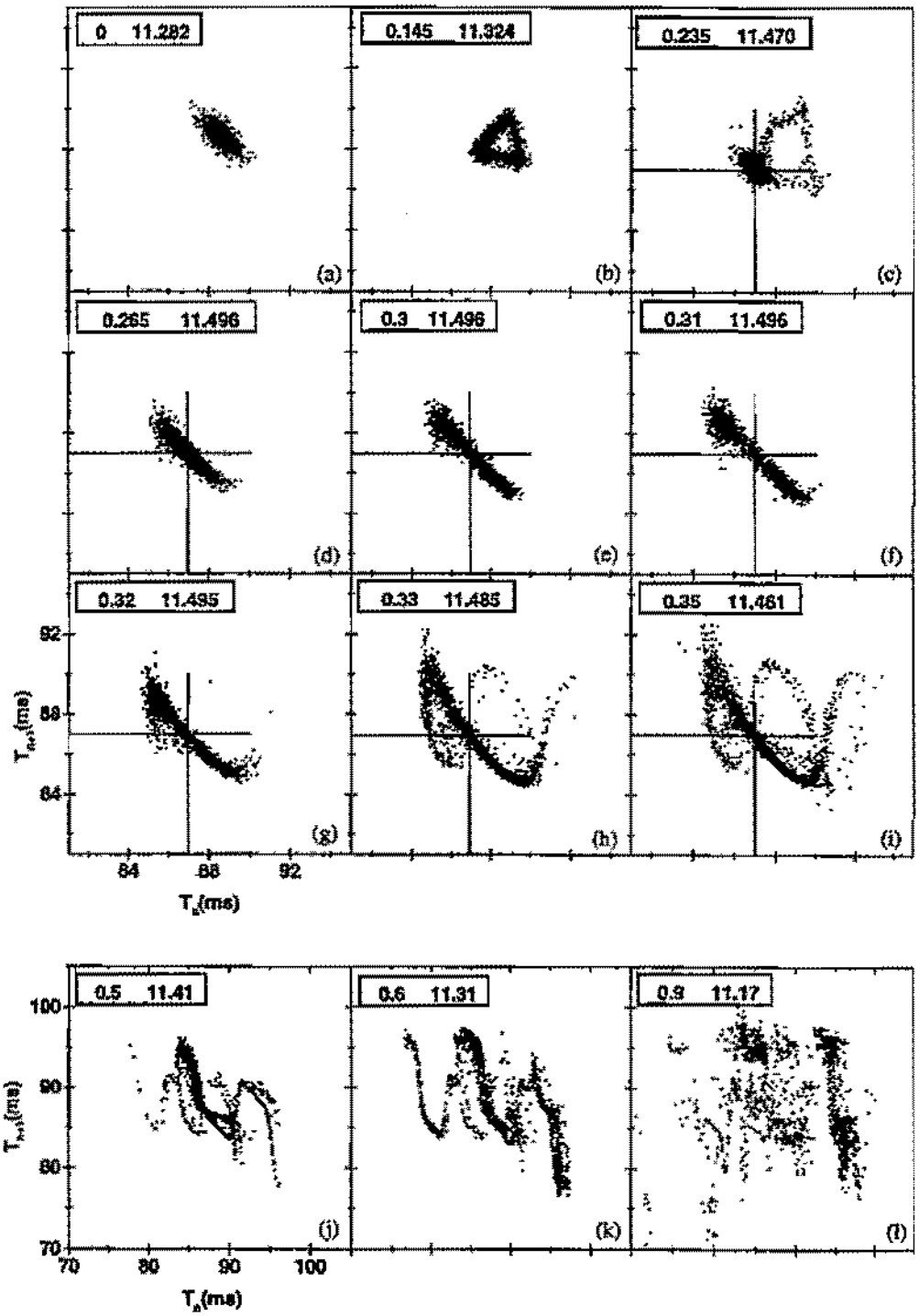


Fig. 6. First return maps T_{n+1} vs. T_n as a function of the sound wave amplitude (keeping fix the air pressure in the capacitive reservoir). In each frame, the insets show at the left the amplitude and at the right the bubbling rate. (a) The initial fixed point; (b) a limit cycle; (c) an unstable limit cycle; from (d) up to (g) a flip bifurcation at constant bubbling rate; from (h) up to (l) chaotic attractors. In each frame, the intersection of the dashed lines defines the position of an unstable period-1 orbit (UPO).

In Fig. 6(c) the limit cycle looses its stability and a fixed point, near (87, 87 ms), is visited in an intermittent behavior. This fixed point position was established by a histogram plot of T_n. The Fourier transform applied to the data related to Figs. 6(d)–(g) showed a noisy period-2 behavior, and without any bubbling rate variation. Therefore, as we are observing a bifurcation period-1 $\rightarrow$ period-2 (see in Fig. 6(c)–(g)), as a function of the sound wave amplitude, a period doubling is being hidden by the noise. In a flip bifurcation there is an unstable fixed point between the two stable fixed. Our data shows that the vicinity of the middle point between the stable fixed points is been visited due to noise. Consequently, our data are adequate to apply the fixed point transformation technique developed by So et al. [10–12] to find unstable periodic orbits (UPO) in short series of events with unstable control parameter, briefly described below.

To extract the unstable periodic orbit with a finite amount of noisy data of a one-dimensional system, So et al. supposed that all points lying in a region around the fixed point $x^* = f(x^*)$ can be transformed to $\{\hat{x}_n\}$ in the vicinity of x^*. The density function $\hat{\rho}(\hat{x})$ has inverse square-root-type singularities at the fixed points, and a histogram approximation to $\hat{\rho}(\hat{x})$ will have a sharp peak at $\hat{x} = x^*$. Some spurious peaks appear in $\hat{\rho}(\hat{x})$ either due to singularities not related to fixed points, or to zeros of the derivative of the transformation function $\hat{x} = g(x,k)$. They generalized the method for a system with an arbitrary embedded dimension (d) to obtain the unstable periodic orbits by doing the transformation

$$\hat{\mathbf{z}}_n = (\mathbf{1} - \mathbf{S}_n)^{-1}(\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{S}_n \mathbf{z}_n)\,, \tag{1}$$

where

$$\mathbf{S}_n = \begin{pmatrix} a_n^1\, a_n^2 \ldots a_n^{(d-1)} & a_n^d \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \kappa \mathbf{R} \|\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_n\|\,, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} a_n^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n^d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_n - z_{n-1})^\dagger \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (z_{n-(d-1)} - z_{n-d})^\dagger \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (z_{n+1}^1 - z_n^1)^\dagger \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (z_{n-(d-2)}^1 - z_{n-(d-1)}^1)^\dagger \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$\{\mathbf{z}_n\}$ are the reconstructed vectors from scalar time series $\{x_n\}$,

$$\mathbf{z}_n = (z_n^1, z_n^2, z_n^2, \ldots, z_n^d)^\dagger = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-d-1})^\dagger\,, \tag{4}$$

$\mathbf{R}$ is a $d \times d$ random matrix in the range $[-1, 1]$, and κ is the magnitude of the randomization. The fixed points are given by the peak positions of $\hat{\rho}(\hat{\mathbf{z}})$. As the locations of the spurious peaks depend on the parameter, they are eliminated by taking the average $\langle \hat{\rho}(\hat{\mathbf{z}}) \rangle$ for many different values picked up randomly. As the attractors reconstruction in a two-dimensional embedded space are enough unfolded, we applied this technique for $d = 2$. We also chose $\kappa = 5$, and 1000 random matrices.

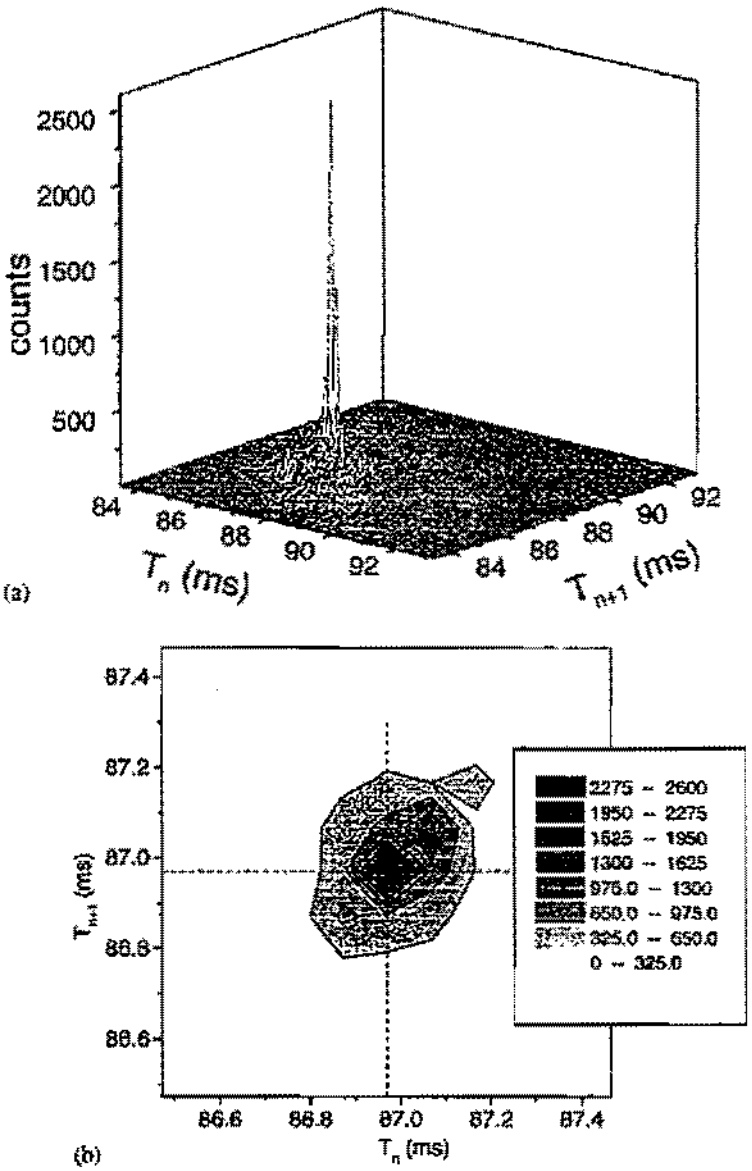


Fig. 7. (a) The histogram approximation to $\hat{\rho}(\hat{x})$ obtained with the fixed point transformation technique using the data shown in Fig. 6(h); (b) the contour graph around the unstable period-1 orbit (86.97, 86.97 ms).

An example of our results is shown in Fig. 7(a), where is drawn the histogram approximation to $\hat{\rho}(\hat{x})$ using the data shown in Fig. 6(h). For better visualization of the unstable period orbit position a contour graph of the same data is shown in Fig. 7(b). The highest peak defines an unstable period-1 orbit at (86.99, 86.99 ms), close to the stable fixed point shown in Fig. 6(c). In this way, we found an unstable period-1 orbit, as shown by the intersection of the dashed lines in Fig. 6.

With further amplitude increasing, we observed the appearance of a chaotic region, with stretching and folding dynamics features, as shown in Fig. 6(h)–(i), and with

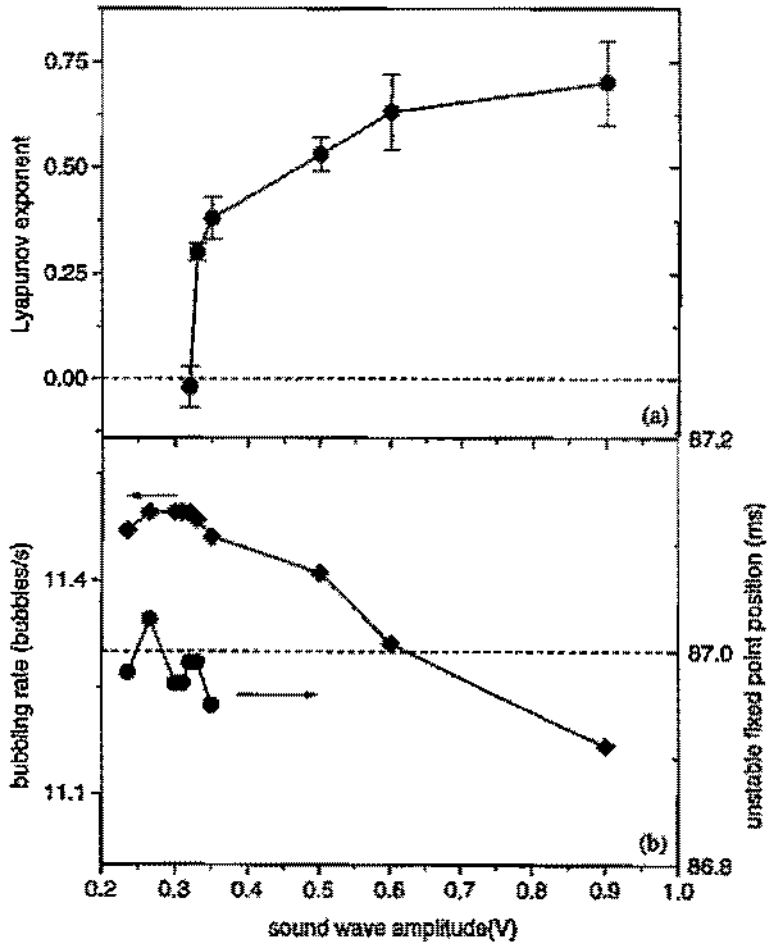


Fig. 8. As a function of the sound wave amplitude: (a) the dominant Lyapunov exponent; (b) the mean bubbling rate (left scale) and the unstable periodic orbit (right scale). The continuous lines are guides to eyes.

little change in the bubbling frequency. The reconstructed attractors in the chaotic region were characterized by the dominant Lyapunov exponent [13], as shown in Fig. 8(a). However, the unstable period-1 orbit remains in the chaotic region, with a little change on its position, as shown in Fig. 8(b) (right scale).

Continuing to increase the sound wave amplitude, with larger amplitude increments than before, we obtained the attractors shown in Fig. 9. In Fig. 9(m) the mean bubbling rate is 20.5 bubbles/s for a sound wave amplitude of 3.14 V, and the position ($\sim$7.25, $\sim$7.25 ms), is visited in an intermittent behavior. The visitation time increases as we increase the sound wave amplitude, until the point ($\sim$7.25, $\sim$7.25 ms) becomes a stable fixed point, as shown in Fig. 9(n). In this situation, the mean bubbling frequency is $f = 137.97 \pm 0.09$ bubbles/s, which is the sound wave frequency value. Therefore, the bubbling becomes synchronized with the sound wave. In Fig. 10 we can see the difference between the bubbles profile in the first fixed point, as shown in Fig. 6(a), and the synchronized fixed point, shown in Fig. 9(n).

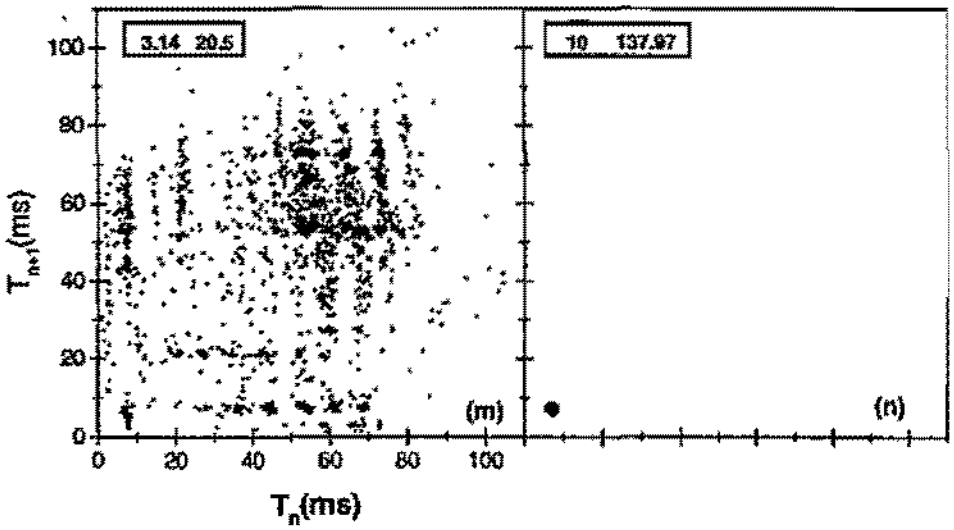


Fig. 9. (m) The point ($\sim 7.25, \sim 7.25$ ms) is visited in an intermittent behavior. (n) the bubble formation synchronized with the fundamental frequency of the sound wave.

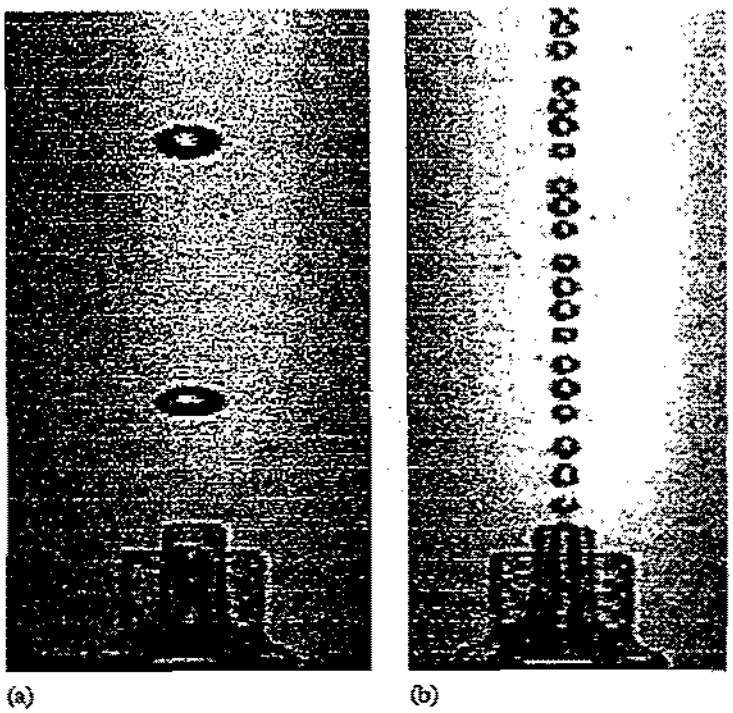


Fig. 10. (a) The bubbles profile of the first fixed point shown in Fig. 6(a) ($f = 11.282$ bubbles/s); (b) the last fixed point, when the bubbles ($f = 137.97$ bubbles/s) are synchronized with the sound wave frequency ($f_s = 138$ Hz).

4. Conclusion

We observed bifurcations in a bubble gun experiment as a function of the air pressure. In one case, we observed in a period-2 movement a sudden change in the attractors size related to the bubbles size. In other case, with a different nozzle geometry, we observed a period-doubling cascade, $1 \to 2 \to 4$, followed by a chaotic behavior. In both cases, we related some different dynamical behaviors to coalescent effects.

For a fixed air pressure, we used as a second control parameter the amplitude of a sound wave tuned to the fundamental frequency of the air tube above the solution. We observed as a function of increasing sound wave amplitudes, the appearance of a fixed point; a limit cycle, which looses its stability and a new fixed point appears; a flip bifurcation followed by a chaotic region with stretching and folding features. Thereafter, a new fixed point starts to be visited in an intermittent behavior, until the bubbling synchronizes with the sound wave frequency.

We applied the technique of the transformation of the fixed points to extract an unstable period-1 orbit embedded in noisy reconstructed attractors in the flip bifurcation region. This unstable period-1 orbit remains in the chaotic regime, which was characterized by the dominant Lyapunov exponent.

Acknowledgements

We are grateful to Professor A.J. Lichtenberg, R.D. Pinto and M.S. Baptista for their suggestions. Financial support from the Brazilian Agencies FAPESP, CNPq, and FINEP is gratefully acknowledged.

References

[1] J.F. Davidson, B.O.G. Shüler, Trans. Inst. Chem. Eng. 38 (1960) 144.
[2] Y.A. Buyevich, B.W. Webbon, Chem. Eng. Sci. 51 (1996) 4843.
[3] N.K. Kyriakides, E.G. Kastrinakis, S.G. Nychas, Can. J. Chem. Eng. 75 (1997) 684.
[4] A.B. Ponter, A.I. Surati, Chem. Eng. Technol. 20 (1997) 85.
[5] R. Krishna, J.M. van Baten, Nature 398 (1999) 208.
[6] R. Femat, J.A. Ramirez, A. Soria, Phys. Lett. A 248 (1998) 67.
[7] D.J. Tritton, C. Egdell, Phys. Fluids A 5 (1993) 503.
[8] L.J. Mittoni, M.P. Schwarz, R.D. La Nauze, Phys. Fluids 7 (1995) 891.
[9] J.C. Sartorelli, W.M. Gonçalves, R.D. Pinto, Phys. Rev. E 49 (1994) 3963.
[10] P. So et al., Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 4705.
[11] P. So et al., Phys. Rev. E 55 (1997) 5398.
[12] P. So et al., Biophys. J. 74 (2776) 1998.
[13] S. Ellner, D.W. Nychka, A.R. Gallant, LENNS, a program to estimate the dominant Lyapunov exponent of noisy nonlinear systems from time series data (Institute of Statistics Mimeo Series no. 2235 (BMA series no. 39), Statistics Department, North Carolina State University, Raleigh, 1992).

Apêndice 3

Hénon-like attractor in air bubble formation

A. Tufaile e J.C. Sartorelli

Physics Letters A 275 (2000) 211-217

ELSEVIER

Physics Letters A 10152 (2000) xxx

PHYSICS LETTERS A

www.elsevier.nl/locate/pla

Hénon-like attractor in air bubble formation

A. Tufaile, J.C. Sartorelli *

Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil

Received 6 June 2000; received in revised form 29 August 2000; accepted 29 August 2000
Communicated by C.R. Doering

Abstract

We studied the formation of air bubbles in a submerged nozzle in a water/glycerol solution inside a cylindrical tube, submitted to a sound wave perturbation. It was observed a route to chaos via period doubling as a function of the sound wave amplitude. We applied metrical as well as topological characterization to some chaotic attractors. We localized a flip saddle, and we also could establish relations to a Hénon-like dynamics with the construction of symbolic planes. © 2000 Published by Elsevier Science B.V.

PACS: 05.45.+b
Keywords: Chaos; Bubble dynamics; Hénon map

1. Introduction

We reported [1] some dynamical effects of a sound wave in a bubble formation dynamics, such as a flip bifurcation as a function of the increasing sound wave amplitude. Lauterborn and Parlitz [2] studied the main features of bubble oscillator, in which the size of a small bubble in water oscillates due to a sound field. Tritton and Edgell [3] observed some attractors by detecting the bubble passage nearby a transducer (hot-film anemometer) placed close to a nozzle where the bubbles were issued, and they reported the existence of a chaotic bubbling verified by visual inspections, but without any kind of characterization of the chaotic dynamics. Mittoni et al. [4] observed chaotic behavior with positive Lyapunov exponents in bubbling systems using a pressure transducer. Li et al. [5] studied the chaotic behavior of bubble coalescence in non-newtonian fluids. Ruzicka *et al.* [6] observed type III intermittency in the transition from bubbling to jetting regime in a nitrogen-water system.

Characterization of experimental data of nonlinear systems using symbolic dynamics has been reported by Gonçalves et al. [7], in which chaotic attractors from the dripping faucet experiment were approximated to minimal machines, and the topological analysis application, by using symbolic dynamics, was more suitable to characterize experimental data due to its robustness to noise. Letellier et al. [8] applied topological characterization to irregular pul-

* Corresponding author. Tel.: +55 11 818 6915; fax: +55 11 813 4334.

0375-9601/00/$ - see front matter © 2000 Published by Elsevier Science B.V.
PII: S0375-9601(00)00585-5

sations of a hydrodynamical model of an pulsating star by constructing symbolic planes.

We have studied the air bubble formation dynamics, in a submerged nozzle in a water/glycerol solution inside a cylindrical tube (see Ref. [1] for details), as a function of a sound wave amplitude tuned in the air column above the solution. Using metrical and topological characterization we observed a flip bifurcation which is followed by a chaotic region where some reconstructed attractors resemble Hénon-like attractors, which establish a possible route to chaos in bubbling dynamics.

2. Experimental apparatus

The experimental apparatus of the bubble gun experiment is shown in Fig. 1. The bubbles were generated by injecting air under constant flow rate conditions through a metallic nozzle immersed at the bottom of a viscous fluid column (20% water plus 80% glycerol) maintained at a level of 12 cm. The inner diameter of the cylindrical container is 53 mm and 70 cm in height, and the inner diameter of the nozzle is 1.3 mm. The nozzle is attached to a capacitive air reservoir, and the air flux can be set up by a needle valve; and the capacitive air reservoir is supplied by an air compressor through a pressure reducer.

The detection system is the same as the dripping faucet experiment's [9,10]. A horizontal He–Ne laser beam, focused on a photodiode, is placed a little above the nozzle. The delay times between successive bubbles were measured with a time circuitry inserted in a PC slot, with a time resolution equals to 1 μs. The input signals are voltage pulses, induced in a resistor, defined by the beginning (ending) of scattering of a laser beam focused on the photodiode (in series with the resistor) when the bubble starts (ends) to cross the laser beam. The width of pulse is the time interval t_n (n is the bubble number), and the time delay between two pulses is the crossing time (dt_n) of a bubble through the laser beam, so that the total time interval is $T_n = t_n + dt_n$.

Setting up the bubble rate ($f = 1/\langle T \rangle$), keeping fix the air pressure in the capacitive reservoir and selecting the bubble rating by opening (closing) the needle valve, we changed the bubble formation dynamics applying a sound wave with a loudspeaker placed at the top of the tube. The sound wave was tuned to the fundamental frequency of the air column above the liquid and its amplitude was driven by a

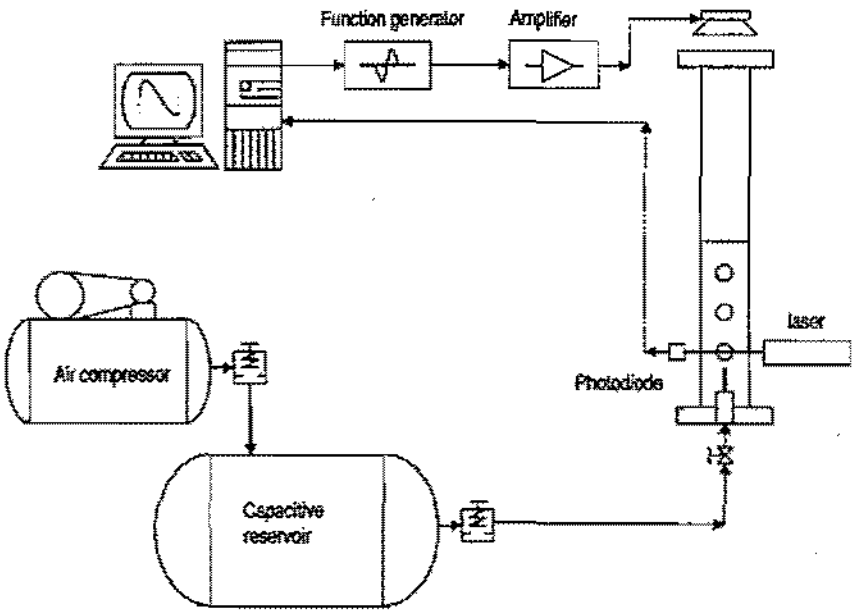


Fig. 1. Diagram of the experimental apparatus.

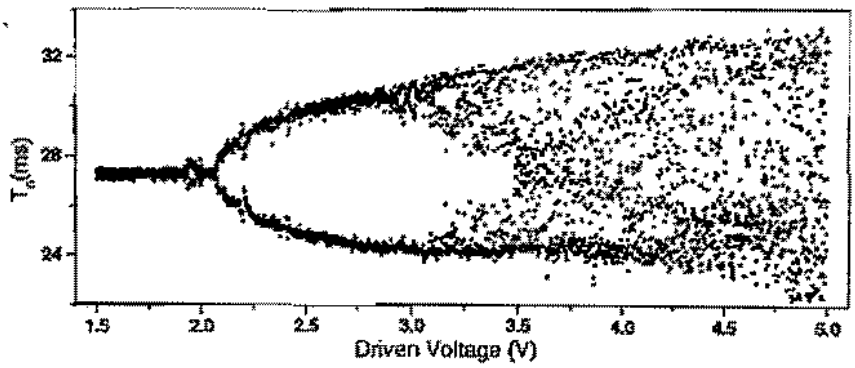


Fig. 2. Bifurcation diagram of the interbubble intervals as a function of the loudspeaker driven voltage. We estimated the experimental noise as $\sim 100\,\mu s$ in the period 1 behavior.

function generator. All the measurements were done at room temperature.

3. Results and discussion

The air flow rate and the sound wave frequency were kept constant, at ~ 36.6 bubble/s and 150 Hz, respectively. We changed the bubble dynamics formation increasing the driven voltage in the loudspeaker as shown by the bifurcation diagram in Fig. 2. A period doubling occurs around 2.0 V, and the bubbles are issued in pairs until ~ 3.0 V, when a noisily period four appears. After then, two-band behavior takes place and each band presents chaotic behavior. At ~ 3.5 V the chaotic bands start to overlap and a large chaotic attractors emerges.

To perform metrical and topological characterization of the bubble formation dynamics we collected six time series keeping fix six driven voltages, whose respective return maps (T_{n+1} versus T_n) are shown in Fig. 3.

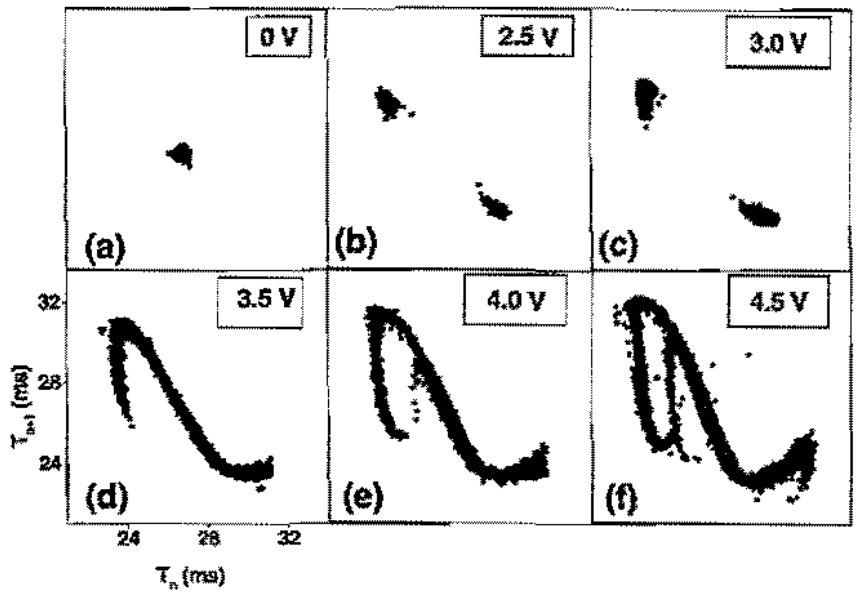


Fig. 3. A sequence of reconstructed attractors showing a period-doubling route to chaos. In each frame, the inset shows the driven voltage: (a) period 1; (b) period (2); (c) a two-band attractor; (d), (e), and (f) are chaotic attractors characterized by the largest Lyapunov exponent 0.18, 0.19, and 0.24, respectively, obtained with the LENNS package [11]. Each time series is 4,000 bubbles long.

3.1. Metrical characterization

The reconstructed attractors in the chaotic region (from Fig. 3(d) through 3(f)) were characterized by the Lyapunov exponents, by the Kaplan–Yorke dimension, and by the information dimension obtained by the TISEAN package [12]. A conjecture [13] relates the Lyapunov spectrum (λ_n) and the information dimension by the Kaplan–Yorke dimension D_{KY}:

$$D_{KY} = k + \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{|\lambda_{k+1}|}, \qquad (1)$$

where k is the maximum integer so that sum of the k-largest exponents is still non-negative. This conjecture is valid for Hénon attractor and it is checked on reconstructed attractors. The parameter values obtained for the driven voltages $V = 3.5$, 4.0 and 4.5V are shown in Table 1 (see Figs. 3(d), 3(e) and 3(f)). The Kaplan–Yorke dimensions agree with information dimensions. The two first chaotic attractors have a Lyapunov spectrum with one positive exponent and one negative exponent, while the last one, Fig. 3(f), has one positive and two negative exponents. In Table 1 we also present the results of Hénon maps ($f(x,y) = (y + 1 - ax^2, bx)$), reconstructed as first return maps X_{n+1} versus X_n (see Fig. 4(a)).

The attractor dimensions for driven voltages of 3.5 V and 4.0 V are close to the dimensions of the Hénon map, suggesting that they could have similar dynamics. The reconstructed attractor for 4.5 V, see Fig. 3(f), has similar profile of the other two, as shown in Fig. 3(d) and 3(e). However, its information dimension value is quite different from the other two attractors (3(d) and 3(e)) as well as different from the Hénon map values, as shown in Table 1. In addition to the three exponents of the Lyapunov spectra, the dimension information close to two is a cue that the attractor 3(f) could not be untangled in two dimensions.

Table 1
Lyapunov exponents and dimensions for experimental chaotic attractors and for two pairs of values of Hénon map parameters.

Fig. #	Driven voltage (V)	Lyapunov spectra	Kaplan–Yorke dimension (error)	Information dimension (error)
3(d)	3.5	+0.11, −0.8	1.15(1)	1.3(3)
3(e)	4.0	+0.12, −0.6	1.23(1)	1.4(3)
3(f)	4.5	+0.2, −0.3, −0.9	1.68(1)	1.8(3)
	Hénon a, b			
	1.55, 0.1	+0.38, −2.38	1.16[a)]	1.16(9)
	1.4, 0.3	+0.42, −1.62	1.27[a)]	1.19(9)

[a)] Calculated with Eq. (1)

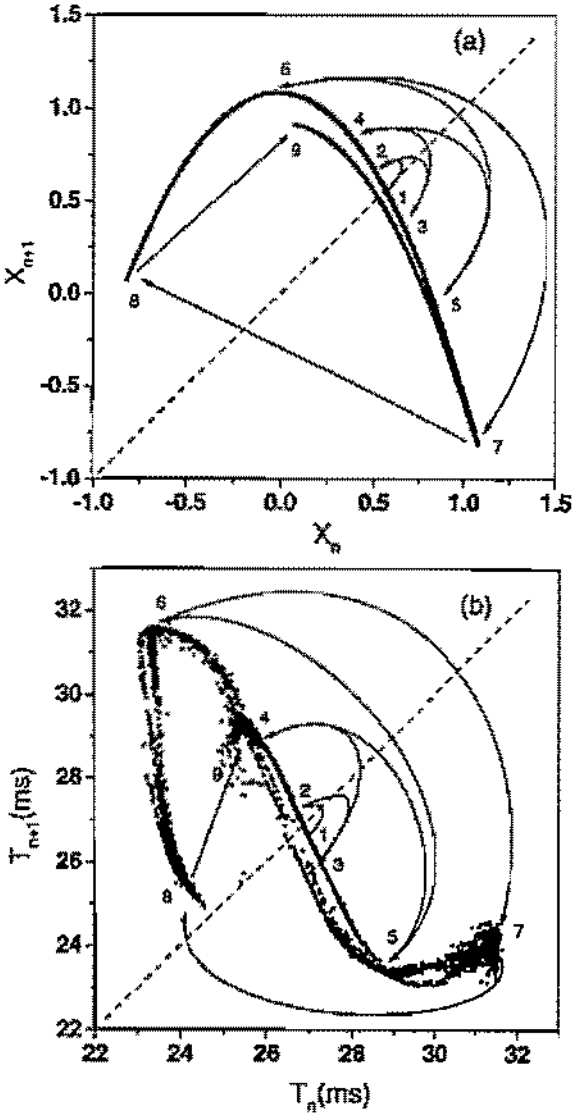


Fig. 4. (a) A flipping example in the Hénon attractor. The flip saddle is the crossing point of the dashed line and the attractor (0.56, 0.56). (b) A flipping example in an experimental attractor for a driven voltage of 4.0 V.

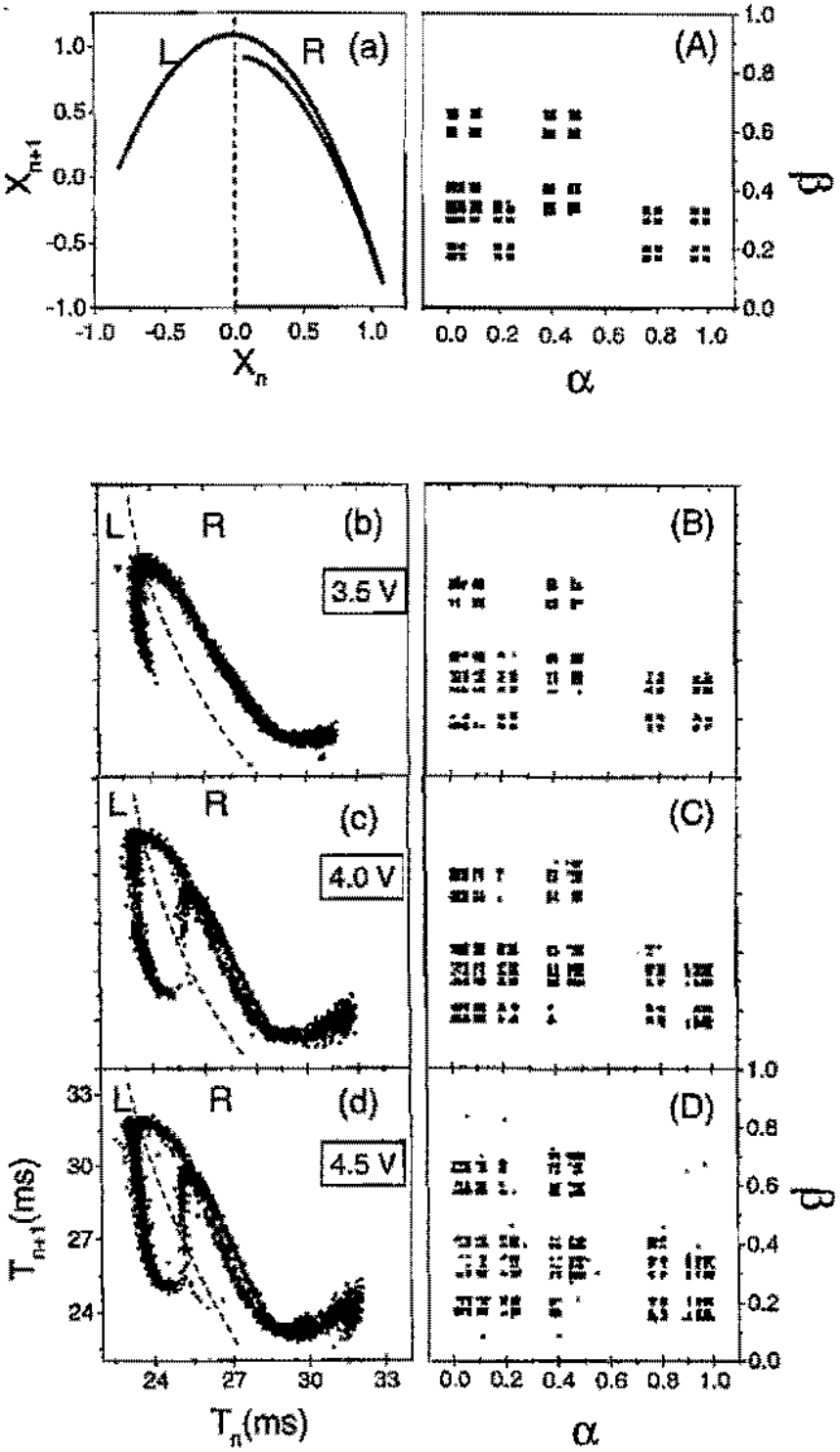


Fig. 5. First return map (a) for the Hénon attractor (a = 1.55 and b = 0.1) with 14,000 data and (A) its respective symbolic plane. In (b), (c), and (d) chaotic attractors (4,000 data each) and in (B), (C), and (D) their respective symbolic planes. Plane (B) is quite similar to the symbolic plane of Hénon attractor (A), while in (C) and (D) the visitation to the forbidden regions indicates the deviation from the Hénon-like dynamics.

The partition is represented on each map by dashed lines. In Fig. 5(a) is shown the Hénon map for $a = 1.55$ and $b = 0.1$; the partition used is a vertical line that separates the single branch (L) from the folded one (R) that contains an unstable fixed point; and the Hénon symbolic plane $\alpha\beta$ is shown in Fig. 5(A). From Fig. 5(b) through 5(d) the experimental attractors are shown. In those cases, the partition can not be done with a vertical line, so we looked for curves that could separate the single branch (L) from the folded one (R). The respective symbolic planes $\alpha\beta$ are shown in Figs. 5(B), 5(C) and 5(D).

The pattern of the three experimental symbolic planes resembles the Hénon symbolic plane. The best similarity occurs for the driven voltage of 3.5 V whose symbolic plane has the same allowed and forbidden zones as the Hénon ones. For higher wave amplitude some forbidden regions in the symbolic planes start to be visited (for example $\alpha = 0.8$ and $\beta = 0.4$ in Fig. 5(D)), showing that the bubble formation dynamics is running away from the Hénon-like dynamics. In Fig. 6 it is shown the bubble trains raising through the fluid to illustrate the difference between the bubble profiles in the periodic regimes and the Hénon-like one shown in Fig. 3.

4. Conclusion

We have used metrical and topological methods to characterize the dynamics of air bubble formation. We have observed that a gradual increase in the sound wave amplitude results in a route to chaos via period doubling. We characterized some chaotic behavior with the Lyapunov spectra, the Kaplan–Yorke dimension and the information dimension which led us to relate some results to a Hénon-like dynamics, a low dimensional dissipative system with stretching and folding mechanism. The Hénon map parameter values, $a = 1.55$ and $b = 0.1$, correspond to a more dissipative system than the classical values $a = 1.4$ and $b = 0.3$, coherently with the high liquid viscosity, that generates a less structured attractor. The establishment of a flip saddle and the construction of symbolic planes reinforced our assumptions. Usually, two dimensional mappings are used as models of forced oscillators, therefore the bubble formation can be seen as an oscillator driven by a sound wave.

Acknowledgements

This work was partially supported by Brazilian agencies FAPESP, CNPq, and FINEP.

References

[1] A. Tufaile, J.C. Sartorelli, Physica A 275 (2000) 336.
[2] W. Lauterborn, U. Parlitz, J. Acoust. Soc. Am. 84 (1988) 1975.
[3] D.J. Tritton, C. Edgell, Phys. Fluids A 5 (1993) 503.
[4] L.J. Mittoni, M.P. Schwarz, R.D. La Nauze, Phys. Fluids 7 (1995) 891.
[5] H.Z. Li, Y. Mouline, L. Choplin, N. Midoux, Int. J. Muliphase Flow 23 (1997) 173.
[6] M.C. Ruzicka, J. Drahos, J. Zahradnik, N. Thomas, Int. J. Muliphase Flow 23 (1997) 671.
[7] W.M. Gonçalves, R.D. Pinto, J.C. Sartorelli, Physica D 257 (1998) 385.
[8] C. Letellier, G. Gouesbet, F. Soufi, J.R. Buchler, Z. Kollàth, Chaos 6 (1996) 466.
[9] J.C. Sartorelli, W.M. Gonçalves, R.D. Pinto, Phys. Rev. E 49 (1994) 3963.
[10] A. Tufaile, R.D. Pinto, W.M. Gonçalves, J.C. Sartorelli, Phys. Let. A 255 (1999) 58.
[11] S. Ellner, D.W. Nychka, A.R. Gallant, LENNS, a program to estimate the dominant Lyapunov exponent of noisy nonlinear systems from time series data (Institute of Statistics Mimeo Series n. 2235 (BMA series n. 39), Statistics Department, North Carolina State University, Raleigh, 1992).
[12] R. Hegger, H. Kantz, T. Schreiber, Chaos 9 (1999) 413.
[13] P. Frederickson, J.L. Kaplan, E.D. Yorke, J.A. Yorke, J. Diff. Equat. 49 (1983) 185.
[14] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke, Chaos an introduction to dynamical systems, Springer, Berlin, 1997.
[15] H. Zhao, W.M. Zheng, Comm. Theor. Phys. 19 (1993) 21.