

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

**Descrição hidrodinâmica de colisões nucleares
relativísticas utilizando uma equação de estado com
massas modificadas pelo meio**

Sandro Marcio Rodrigues Micheletti

Orientadora: Profa. Dra. Frédérique Marie Brigitte Sylvie Grassi

Banca Examinadora

Profa. Dra. Frédérique Marie Brigitte Sylvie Grassi (orientadora - IFUSP)

Profa. Dra. Sandra dos Santos Padula (IFT/UNESP)

Prof. Dr. Yojiro Hama (IFUSP)

*Dissertação de mestrado apresentada
ao Instituto de Física para a obtenção
do título de Mestre em Ciências*

São Paulo

2004

Conteúdo

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Hidrodinâmica relativística	5
1.1 Fluidos ideais	5
1.1.1 Decomposição tensorial	7
1.2 Modelo de Bjorken	11
1.3 Modelo hidrodinâmico com invariância de boost e simetria cilíndrica	13
1.3.1 Condições iniciais	19
1.4 Freeze-out	21
2 Equações de estado	25
2.1 Gás de nucleons interagentes com píons livres	25
2.2 Gás não interagente com volume excluído	41
2.3 Plasma de Quarks e Glúons	45
2.4 Construção do diagrama de fases	50
3 Procedimentos numéricos	54

3.1	Cálculo numérico das equações de estado	54
3.2	Solução numérica das equações da hidrodinâmica	58
3.2.1	O algoritmo RHLLE	58
3.2.2	Correção de Sod	66
4	Resultados	68
4.1	AGS	71
4.2	SPS	77
4.3	RHIC	81
4.4	Considerações finais e conclusões	85
	Bibliografia	90
A	Alguns resultados do modelo de Walecka	94

Agradecimentos

À Profa. Dra. Frederique Grassi, por ter me orientado na realização deste trabalho;

Ao Dr. Otávio Socolowski Jr., pela valiosa ajuda com os procedimentos numéricos;

À Maria Cecília Ribeiro, pelo apoio e compreensão durante a realização deste trabalho;

Aos meus pais;

À CAPES, pelo apoio financeiro;

Resumo

Neste trabalho foi realizado um estudo de colisões de íons pesados relativísticos usando um modelo hidrodinâmico com simetria cilíndrica e invariância de boost longitudinal. Foram utilizadas duas equações de estado, uma com píons livres e nucleons interagentes com massas modificadas pelo meio e outra com píons e nucleons livres e exclusão de volume. Para contemplar a possível formação do Plasma de Quarks e Glúons numa colisão nuclear relativística, em ambos os modelos foi incluída uma transição para uma fase de quarks e glúons livres. Foram calculadas distribuições de momento transversal para prótons e píons produzidos em colisões no AGS, no SPS e no RHIC. Os resultados obtidos com os dois modelos foram comparados entre si e com os dados experimentais, e concluímos que a modificação das massas das partículas devido ao efeito das interações na matéria altamente densa e quente como a que é formada numa colisão nuclear é uma possibilidade que não pode ser descartada.

Abstract

In this work a study on relativistic heavy ion collisions was performed using a hydrodynamical model with cylindrical symmetry and longitudinal boost invariance. Two equations of state were used, one with free pions and interacting nucleons with medium modified masses and another with free pions and nucleons and volume exclusion. To implement the possible formation of the Quark-Gluon Plasma in a relativistic nuclear collision, in both models a transition to a phase of free quarks and gluons was included. Distributions for transverse momentum were computed for protons and pions produced in collisions at the AGS, SPS and RHIC. The results obtained with the two models were compared with each other and with the experimental data, and we concluded that the modification in the masses of the particles due to the interaction effects in the highly dense and hot matter, as the one formed in a nuclear collision, is a possibility that cannot be dismissed.

Introdução

A moderna teoria das interações fortes é a Cromodinâmica Quântica (QCD). Essa é uma teoria não-Abeliana de gauge que descreve a matéria fortemente interagente em termos de quarks interagindo através da troca de glúons. A grandes distâncias (ou pequenos momentos transferidos) a intensidade da interação é grande, enquanto que a pequenas distâncias (ou altos momentos transferidos) a interação torna-se pouco intensa. Em outras palavras, a energia da interação aumenta com a distância e como consequência os quarks não aparecem livres na natureza, mas em estados ligados de três quarks (bárions) ou em estados ligados de um quark e um antiquark (mésons). Quando se tenta afastar dois quarks (ou um par quark-antiquark), a intensidade da interação cresce, até que sua energia se torna suficiente para formar um novo par quark-antiquark. As equações da QCD são difíceis de serem resolvidas mesmo numericamente. No entanto, em pequenas distâncias, a baixa intensidade da constante de acoplamento permite aproximações baseadas em métodos de teoria das perturbações, constituindo a chamada QCD perturbativa. Por outro lado, em grandes distâncias a constante de acoplamento se torna grande e os métodos perturbativos não são mais aplicáveis. Por essa razão, torna-se necessário o uso de modelos fenomenológicos. O uso desses modelos permite uma compreensão das propriedades gerais da matéria fortemente interagente. Resultados quantitativos mais precisos tem sido obtidos através da QCD na rede, uma técnica computacional desenvolvida para estudar sistemas no regime de grandes distâncias da QCD. No entanto, ainda não é possível obter resultados a partir da QCD na rede para todas as temperaturas e densidades, por isso, os modelos fenomenológicos ainda são bastante empregados.

Resultados de QCD na rede predizem que quando um gás de hádrons atinge altas temperaturas ou densidades o sistema deve se diluir em um estado no qual os quarks aparecem desconfinados. Esse estado da matéria é chamado de Plasma de Quarks e Glúons [1]. O plasma pode ter existido no universo primordial alguns microssegundos logo após o Big Bang, quando a matéria estava em condições extremas de temperatura e densidade, e pode existir ainda hoje no núcleo de estrelas de nêutrons, onde a pressão exercida pela interação gravitacional conduz a altas densidades no núcleo da estrela. Existe também a possibilidade de que o plasma seja criado em laboratório em experiências de colisões de núcleos pesados (como núcleos de ouro ou chumbo) a altas energias.

Nas duas últimas décadas, colisões relativísticas de núcleos pesados em energias sucessivamente mais altas tem sido intensamente estudadas. Essas colisões são realizadas em grandes aceleradores, como o SPS (Super Proton Synchroton), em Genebra, e o RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider), em Brookhaven. No SPS ¹, um núcleo (projétil) era acelerado e arremessado contra um segundo núcleo fixo (alvo). No RHIC ambos os núcleos são acelerados um em direção ao outro. O número de partículas gerado nessas colisões, principalmente em colisões frontais (parâmetro de impacto zero) é bastante grande e ocupam inicialmente um volume pequeno, de modo que espera-se que a matéria esteja inicialmente no estado de plasma. Criar o Plasma de Quarks e Glúons em laboratório e estudar suas propriedades, além de reproduzir as condições existentes nos primeiros microssegundos no universo primordial constituem os principais objetivos das experiências envolvendo colisões de núcleos pesados a altas energias. Diversas evidências da formação do plasma nos estágios iniciais após uma colisão já foram encontradas, como por exemplo a supressão do J/Ψ e a produção aumentada de estranheza [1]. Na tabela a seguir, apresentamos as escalas de energia que são atingidas em colisões nucleares nos principais aceleradores.

¹ Atualmente não são mais realizadas experiências envolvendo colisões de núcleos pesados no SPS.

Tabela 1: energias atingidas em colisões nucleares nos principais aceleradores.

\sqrt{s} denota a energia da colisão no referencial de centro de massa.

Acelerador	Colisão	Energia do feixe ($A \cdot GeV$)	\sqrt{s} ($A \cdot GeV$)
AGS (BNL)	Au	$\sim 10 - 14$	~ 5
SPS (CERN) ¹	Pb	158	17
RHIC (BNL)	Au	100	200
LHC (CERN) ²	Pb	~ 3000	~ 6000

¹ No SPS não se realizam mais colisões de íons pesados.

² O LHC ainda não está em funcionamento.

Uma classe de modelos fenomenológicos amplamente empregados no estudo de colisões nucleares relativísticas são os modelos hidrodinâmicos. A principal motivação para o uso desses modelos é que, como já foi mencionado, o número de partículas gerado numa colisão nuclear é grande. Além disso, a descrição hidrodinâmica exige um número pequeno de hipóteses. Deve-se no entanto frizar que a validade de certas hipóteses ainda não está estabelecida. Por exemplo, em [2] é mostrado que os dados experimentais ainda não permitem concluir se o sistema entra ou não em equilíbrio termodinâmico. Apesar disso, o uso de hidrodinâmica tem fornecido uma boa descrição de algumas quantidades observáveis, tais como distribuições de momento transversal e de rapidez, razões de partículas produzidas, etc.

Na descrição hidrodinâmica as propriedades físicas da matéria nuclear são representadas pela sua equação de estado. A equação de estado mais frequentemente usada é “do tipo Van-der- Walls”: as partículas são aproximadas como não interagentes e o efeito da interação forte é simulado atribuindo-se aos hádrons um volume finito. No entanto, como as partículas estão de fato interagindo, uma descrição mais realista seria feita adotando-se uma equação de estado para um fluido interagente. Por outro lado, em altas temperaturas e densidades é possível que a massa dos hádrons mude devido aos efeitos do meio.

Vários estudos de colisões nucleares usando equações de estado com massas modificadas pelo meio já foram realizados, como por exemplo em [3] e mais recentemente em [4] e [5].

Neste trabalho foi adotada a equação de estado de um modelo efetivo, no qual a interação entre os hádrons é implementada através do acoplamento com um méson escalar e com um méson vetorial. O acoplamento com o campo escalar modifica o termo de massa da lagrangiana, o que leva a um aspecto interessante do modelo: devido ao efeito das interações, a massa dos hádrons sofre um deslocamento, que será tanto mais pronunciado quanto maiores forem a temperatura e a densidade de partículas do sistema. A modificação das massas devido ao efeito das interações deve ter reflexos nas distribuições observadas de partículas. Investigar a possível ocorrência de efeitos do meio nas quantidades observáveis constitui o principal objetivo deste trabalho. Para concretizar esse objetivo, foram calculadas distribuições de momento transversal usando hidrodinâmica relativística com uma equação de estado com massas efetivas e também com uma equação de estado de fluido não interagente com exclusão de volume, e em seguida comparamos os resultados, analisando as diferenças encontradas.

No capítulo 1 apresentamos alguns conceitos básicos de hidrodinâmica relativística e também alguns aspectos de sua aplicação na descrição de colisões nucleares. No capítulo 2 são apresentadas as equações de estado usadas neste trabalho. A descrição dos métodos numéricos empregados na solução das equações da hidrodinâmica é feita no capítulo 3. Os resultados obtidos e as conclusões são apresentados no capítulo 4.

Os cálculos foram feitos no sistema de unidades naturais, no qual $\hbar = c = k_B = 1$.

Capítulo 1

Hidrodinâmica relativística

1.1 Fluidos ideais

Um fluido é caracterizado localmente por seu tensor energia-momento, $T^{\mu\nu}(x)$, e n correntes conservadas, $N_i^\mu(x)$, onde $i = 1, \dots, n$ [6] [7]. Essas cargas conservadas podem ser por exemplo o número bariônico, a estranheza, o isospin, etc. Consideremos agora um quadrivolume V , delimitado por uma quadrisuperfície Σ , e seja $\Sigma^\mu(x)$ um quadrivetor tangente a Σ no ponto x . O quadrivetor normal a um elemento da hipersuperfície $d\Sigma$ é escrito como $d\Sigma_\mu(x)$. Por definição, $d\Sigma \cdot \Sigma = 0$. Um certo fluxo de energia-momento dP^ν e de carga i , dN_i^μ , fluindo através de um elemento de hipersuperfície $d\Sigma$ são dados por

$$\begin{aligned}dP^\nu &= T^{\mu\nu}(x)d\Sigma_\mu(x) , \\dN_i &= N_i^\mu(x)d\Sigma_\mu(x) .\end{aligned}\tag{1.1}$$

O fluxo total de energia-momento e de carga i fluindo através de Σ , supondo não haver fontes nem “escoadouros” no quadrivolume V , são dados por

$$\begin{aligned}\oint_{\Sigma} T^{\mu\nu}(x)d\Sigma_{\mu}(x) &= 0 , \\ \oint_{\Sigma} N_i^{\mu}(x)d\Sigma_{\mu}(x) &= 0 .\end{aligned}\tag{1.2}$$

Aplicando o teorema de Gauss, obtemos as expressões para conservação global de energia-momento e carga i no quadrivolume V

$$\begin{aligned}\int_V \partial_{\mu}T^{\mu\nu}(x)d^4x &= 0 , \\ \int_V \partial_{\mu}N_i^{\mu}(x)d^4x &= 0 .\end{aligned}\tag{1.3}$$

Como o quadrivolume V é arbitrário, segue que

$$\partial_{\mu}T^{\mu\nu}(x) = 0 ,\tag{1.4}$$

$$\partial_{\mu}N_i^{\mu}(x) = 0 .\tag{1.5}$$

As equações acima representam a conservação local de energia-momento e de carga i no fluido. No entanto, existem $4 + n$ equações para $10 + 4n$ variáveis. Por essa razão, é necessário fazer aproximações para reduzir o número de quantidades desconhecidas. A aproximação mais comumente usada em colisões nucleares ultra-relativísticas e a que foi adotada neste trabalho é a aproximação de fluido ideal. Antes de explicarmos melhor essa aproximação, vamos escrever $T^{\mu\nu}(x)$ e $N_i^{\mu}(x)$ numa forma mais conveniente.

1.1.1 Decomposição tensorial

Seja u^μ um quadrivetor normalizado e do tipo tempo, $u^\mu u_\mu = 1$. O operador de projeção no sub-espaço tridimensional ortogonal a u^μ é definido como

$$\begin{aligned}\Delta^{\mu\nu} u_\nu &= 0, \\ \Delta^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu.\end{aligned}\tag{1.6}$$

O quadrivetor N_i^μ pode ser decomposto em termos de u^μ como

$$N_i^\mu = (N_i^\alpha u_\alpha) u^\mu + \Delta_\alpha^\mu N_i^\alpha \equiv n_i u^\mu + \nu_i^\mu.\tag{1.7}$$

Podemos também fazer uma decomposição tensorial de $T^{\mu\nu}$ em termos de u^μ como

$$\begin{aligned}T^{\mu\nu} &= (u^\alpha T_{\alpha\beta} u^\beta) u^\mu u^\nu + (u^\alpha T_{\alpha\beta} \Delta^{\beta\nu}) u^\mu + (u^\beta T_{\beta\alpha} \Delta^{\alpha\mu}) u^\nu + \Delta^{\alpha\mu} T_{\alpha\beta} \Delta^{\beta\nu} \\ &= (u^\alpha T_{\alpha\beta} u^\beta) u^\mu u^\nu + (u^\alpha T_{\alpha\beta} \Delta^{\beta\nu}) u^\mu + (u^\beta T_{\beta\alpha} \Delta^{\alpha\mu}) u^\nu \\ &\quad + \frac{1}{2} (\Delta^{\alpha\mu} \Delta^{\beta\nu} + \Delta^{\beta\mu} \Delta^{\alpha\nu}) T_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{1.8}$$

Na última passagem usamos o fato de que $T^{\mu\nu}$ é simétrico. Somando, por conveniência, o termo $[\frac{1}{3} (T_{\alpha\beta} \Delta^{\alpha\beta}) \Delta^{\mu\nu} - \frac{1}{3} (T_{\alpha\beta} \Delta^{\alpha\beta}) \Delta^{\mu\nu}]$ no segundo membro, que naturalmente equivale a somar zero, obtemos

$$T^{\mu\nu} = (u^\alpha T_{\alpha\beta} u^\beta) u^\mu u^\nu + \frac{1}{3} (T_{\alpha\beta} \Delta^{\alpha\beta}) \Delta^{\mu\nu} + (u^\alpha T_{\alpha\beta} \Delta^{\beta\nu}) u^\mu$$

$$\begin{aligned}
& + (u^\beta T_{\beta\alpha} \Delta^{\alpha\mu}) u^\nu + \left[\frac{1}{2} (\Delta^{\alpha\mu} \Delta^{\beta\nu} + \Delta^{\beta\mu} \Delta^{\alpha\nu}) - \frac{1}{3} \Delta^{\alpha\beta} \Delta^{\mu\nu} \right] T_{\alpha\beta} \\
& \equiv \epsilon u^\mu u^\nu - p \Delta^{\mu\nu} + q^\nu u^\mu + q^\mu u^\nu + \pi^{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Aqui cabe enfatizar que as decomposições acima são completamente gerais: dado um quadrivetor u^μ normalizado e do tipo tempo, um quadrivetor *qualquer* denotado por N_i^μ pode ser decomposto em termos de u^μ de acordo com a expressão (1.7). Da mesma maneira, um tensor *qualquer* $T^{\mu\nu}$, simétrico, pode ser decomposto em termos de u^μ de acordo com a expressão (1.9). Em nosso caso especificamente, o quadrivetor N_i^μ denota a corrente de carga conservada de espécie i num fluido, e $T^{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento desse fluido. Escolhendo então u^μ como sendo a quadrivelocidade local do fluido, cada termo das decomposições (1.7) e (1.9) ganha o seu significado físico (logo adiante veremos duas maneiras usuais de definir mais precisamente a quadrivelocidade u^μ) :

$$n_i \equiv N_i \cdot u \tag{1.10}$$

é a densidade “líquida” de carga do tipo i no referencial onde $u^\mu = (1, \mathbf{0})$, que é o referencial de repouso do elemento de fluido localizado na posição x , o qual denotaremos por R .

$$\nu_i^\mu \equiv \Delta_\nu^\mu N_i^\nu \tag{1.11}$$

é o fluxo “líquido” de carga do tipo i em R ,

$$\epsilon \equiv u_\mu T^{\mu\nu} u_\nu \tag{1.12}$$

é a densidade de energia em R,

$$p \equiv -\frac{1}{3}T^{\mu\nu}\Delta_{\mu\nu} \quad (1.13)$$

é a pressão isotrópica em R,

$$q^\mu \equiv \Delta^{\mu\alpha}T_{\alpha\beta}u^\beta \quad (1.14)$$

é o fluxo de energia em R, e

$$\pi^{\mu\nu} \equiv \left[\frac{1}{2} (\Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu + \Delta_\beta^\mu \Delta_\alpha^\nu) - \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta} \right] T^{\alpha\beta} \quad (1.15)$$

é o “stress tensor” em R. Com essa decomposição tensorial, as $10 + 4n$ quantidades desconhecidas são agora dadas por n_i , ν_i^μ , ϵ , p , q^μ e $\pi^{\mu\nu}$.

Como já mencionado acima, existem duas definições comumente usadas para u^μ :

$$u_E^\mu \equiv \frac{N_i^\mu}{\sqrt{N_i \cdot N_i}} \quad (1.16)$$

e

$$u_L^\mu \equiv \frac{T_\nu^\mu u_L^\nu}{\sqrt{u_L^\alpha T_\alpha^\beta T_{\beta\gamma} u_L^\gamma}} . \quad (1.17)$$

A primeira escolha define u^μ como a quadrivelocidade do fluxo de cargas do tipo i e o referencial onde $u_E^\mu = (1, \mathbf{0})$ é chamado de referencial de Eckart. A segunda escolha

define u^μ como a quadrivelocidade do fluxo de energia e o referencial onde $u_L^\mu = (1, \mathbf{0})$ é chamado de referencial de Landau.

A aproximação de fluido ideal consiste em assumir que a corrente de carga N_i^μ e o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ são da forma

$$\begin{aligned} N_i^\mu &= n_i u^\mu , \\ T^{\mu\nu} &= \epsilon u^\mu u^\nu - p \Delta^{\mu\nu} \\ &= (\epsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} , \end{aligned} \tag{1.18}$$

ou seja, assume-se que $q^\mu = \pi^{\mu\nu} = \nu_i^\mu = 0$. Isso corresponde a dizer que o fluido não possui condutividade térmica nem viscosidade, e também não há fluxo de cargas. Pode ser facilmente verificado que, nesse caso, os referenciais de Landau e Eckart se tornam equivalentes, $u_L^\mu \equiv u_E^\mu$. Assim sendo, no referencial de repouso de um dado ponto do fluido não haverá fluxo de energia nem de cargas.

As quantidades desconhecidas agora se reduzem para $5 + n$. Precisamos portanto especificar mais uma equação para fechar o sistema de equações (1.4)-(1.5). Por outro lado, como as equações de movimento da hidrodinâmica relativística descrevem um fluido geral, precisamos complementar esse sistema de equações com informações sobre as propriedades físicas do fluido a ser considerado. Isso é feito através da escolha de uma equação de estado. Um exemplo é a equação de estado de um gás ideal em equilíbrio termodinâmico. Se as temperaturas forem muito maiores que a massa das partículas, temos o chamado limite ultrarelativístico, e a equação de estado do gás ideal adquire a forma simples $p = \frac{\epsilon}{3}$.

Neste trabalho, as equações da hidrodinâmica relativística foram resolvidas usando uma equação de estado que inclui efeitos do meio e os resultados obtidos foram comparados com os que se obtiveram ao usar uma equação de estado de gás livre. As equações de estado usadas neste trabalho serão discutidas no próximo capítulo.

As equações de conservação de um fluido ideal são em geral muito difíceis de ser

resolvidas e os procedimentos numéricos de solução são bastante trabalhosos. Por essa razão, é conveniente fazer algumas aproximações para simplificar essas equações. Na seção a seguir será apresentado um modelo simplificado para o fluido formado numa colisão nuclear relativística.

1.2 Modelo de Bjorken[8]

Um cenário bastante simples foi proposto por Bjorken para a expansão do fluido formado numa colisão nuclear relativística. Primeiro, foi assumido que as distribuições de partículas produzidas numa colisão núcleo-núcleo em função da variável de rapidez deveriam apresentar um largo “plateau” em torno da região central de rapidez, quando a energia da colisão for suficientemente alta. Essa suposição foi motivada pelo fato de que, em colisões nucleon-nucleon as distribuições de rapidez observadas apresentam um pico bastante largo em torno da região central, de modo que nessa região a multiplicidade de partículas produzidas é aproximadamente constante. Bjorken supôs então que essa característica deveria ser observada também em distribuições de rapidez de uma colisão núcleo-núcleo. Além disso, foi considerada a expansão do fluido somente em pontos próximos do eixo longitudinal da colisão, ou seja, longe das bordas do fluido, e para tempos pequenos comparados com o raio do núcleo. Em outras palavras, foi desconsiderada a expansão na direção transversal.

A suposição de um “plateau” em torno da região central nas distribuições de partículas produzidas em função da variável de rapidez significa que, nessa região, o número de partículas produzidas é independente dessa variável. Foram então adotadas condições iniciais independentes da rapidez, ou seja, invariantes por boost. Essa simetria é preservada pelas equações de movimento. Nesse mesmo cenário, a velocidade inicial do fluido é zero. Além disso, no ponto de colisão dos núcleos ($z = 0$) o fluido permanece em repouso, enquanto que numa distância longitudinal z do ponto da colisão o fluido se move com velocidade z/t . As equações de conservação se tornam então bastante simples. Consider-

emos a equação de conservação de energia-momento (1.4). Contraíndo essa equação com u^ν , temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} u^\nu &= \frac{\partial [(\epsilon + p)u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu}p]}{\partial x_\mu} u^\nu \\
&= \left[\frac{\partial(\epsilon + p)}{\partial\tau} \frac{\partial\tau}{\partial x_\mu} u_\mu u_\nu + (\epsilon + p) \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\mu} u_\nu + (\epsilon + p) u_\mu \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} - g_{\mu\nu} \frac{\partial p}{\partial\tau} \frac{\partial\tau}{\partial x_\mu} \right] u^\nu \\
&= 0 , \tag{1.19}
\end{aligned}$$

onde $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$. No caso de expansão unidimensional na direção z com velocidade $v = z/t$, temos $u^\mu = \frac{1}{\tau}(t, 0, 0, z)$. Usando as relações

$$\frac{\partial\tau}{\partial x_\mu} u^\mu = 1 ,$$

$$\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} u^\nu = 0 ,$$

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\mu} = \frac{1}{\tau} , \tag{1.20}$$

obtemos

$$\frac{d\epsilon}{d\tau} + \frac{\epsilon + p}{\tau} = 0 . \tag{1.21}$$

No modelo originalmente proposto por Bjorken, considerava-se que a colisão deveria ser transparente, de modo que a densidade bariônica (líquida) da matéria nuclear formada na região central de rapidez deveria ser zero. No entanto, podemos facilmente considerar

densidade bariônica finita. Da equação (1.5), obtemos

$$\frac{dn_B}{d\tau} + \frac{n_B}{\tau} = 0. \quad (1.22)$$

No próprio artigo original de Bjorken, como já dissemos, foi enfatizado que a aproximação de expansão unidimensional na direção longitudinal seria válida somente para tempos pequenos quando comparados com o raio transversal do núcleo. Para tempos posteriores, a expansão na direção transversal deve ser considerada. Na seção a seguir, apresentamos uma generalização do modelo de Bjorken para incluir a expansão transversal.

1.3 Modelo hidrodinâmico com invariância de boost e simetria cilíndrica

Neste trabalho são estudadas apenas colisões centrais (parâmetro de impacto zero) de núcleos do mesmo tipo (por exemplo, colisões Pb + Pb). No referencial de centro de massa (CM), os núcleos apresentam um aspecto achatado na direção longitudinal devido à forte contração de Lorentz. Se a energia da colisão for suficientemente alta, podemos desprezar a espessura do núcleo na direção longitudinal. Em outras palavras, podemos idealizar os núcleos como “panquecas” de espessura zero. Definindo o eixo z como sendo o eixo da colisão, podemos denotar $z = 0$ e $t = 0$ como a posição e o instante, respectivamente, em que a colisão ocorre. A colisão produz um conjunto bastante denso de partículas, e é esse conjunto de partículas que é modelado como um fluido. Consideremos agora um ponto P qualquer do fluido, conforme mostrado na figura a seguir.

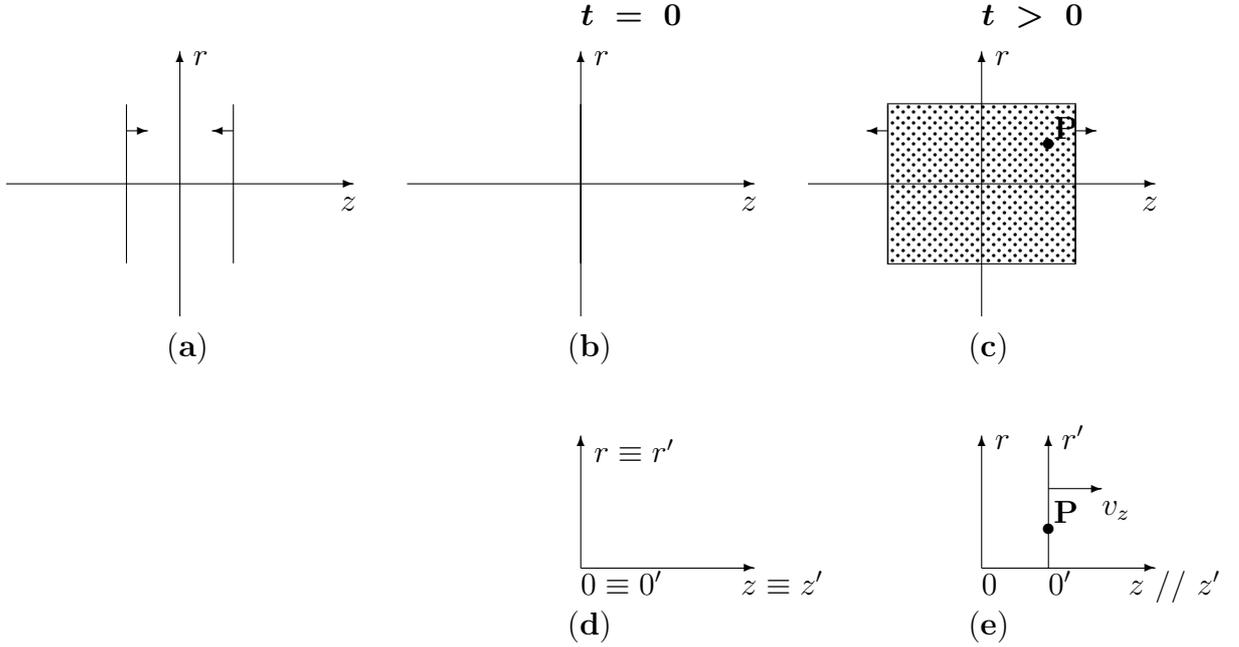


Fig.1.1: representação da geometria de uma colisão nuclear relativística. **a)** Os núcleos se aproximando, quando vistos do referencial de centro de massa. **b)** Os dois núcleos colidem. **c)** Após a colisão os núcleos se afastam deixando para trás um rastro de partículas. **d)** Os referenciais de repouso do fluido (centro de massa) e de um ponto qualquer P do fluido no instante inicial $t = 0$ (instante da colisão). **e)** O ponto P se movendo com velocidade longitudinal v_z num instante qualquer $t > 0$.

A origem do referencial de repouso do fluido foi denotada por 0 e a origem do referencial de repouso do ponto P foi denotada por $0'$. Conforme discutido em [9], uma particular solução das equações da hidrodinâmica pode ser obtida supondo que a rapidez do fluido na direção longitudinal coincide com a rapidez do espaço-tempo, isto é, supondo uma velocidade longitudinal do tipo “scaling”: $v_z = z/t$. Esta forma para a velocidade longitudinal simplifica consideravelmente as equações de conservação. A seguir vamos reescrever essas equações num sistema de coordenadas mais conveniente.

Seja $x^\mu \equiv (t, x, y, z)$ o quadrivetor posição de um ponto qualquer do fluido. Quando $v_z = z/t$, o tempo próprio τ e a rapidez na direção longitudinal η são dados, respectivamente, por $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$ e $\eta = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{t+z}{t-z}\right)$. Invertendo essas expressões, podemos escrever

t e z em termos de τ e η , $t = \tau \cosh \eta$ e $z = \tau \sinh \eta$. Por outro lado, podemos escrever x e y em termos do raio transversal $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e do ângulo azimutal $\phi = \arctan y/x$, $x = r \cos \phi$ e $y = r \sin \phi$. O quadrivetor x^μ fica então escrito como

$$x^\mu = (\tau \cosh \eta, r \cos \phi, r \sin \phi, \tau \sinh \eta) , \quad (1.23)$$

A quadrivelocidade u^μ de um elemento do fluido localizado no ponto x^μ , por sua vez, pode ser decomposta em suas partes longitudinal e transversal da seguinte maneira [10] (e referência neste artigo)

$$u^\mu = \gamma_T (\cosh \eta, v_T \cos \phi_\beta, v_T \sin \phi_\beta, \sinh \eta) , \quad (1.24)$$

onde $\gamma_T = \frac{1}{\sqrt{1-v_T^2}}$, v_T é a velocidade transversal de um elemento do fluido situado no ponto (r, z) , quando medida em um referencial localizado no ponto z sobre o eixo z e se movendo com a velocidade do fluxo local e ϕ_β é o ângulo azimutal da quadrivelocidade. Orientando convenientemente o sistema de coordenadas, podemos fazer com que $\phi_\beta \equiv \phi$.

As equações (1.4) e (1.5) podem ser reescritas em termos das coordenadas (τ, r, ϕ, η) . As equações (1.4), para $\nu = 0$ e $\nu = i$, $i = 1, 2$ e 3 , se escrevem, respectivamente, como

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu 0} &= \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} + \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^\mu} + \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial T^{\mu 0}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x^\mu} \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu i} &= \frac{\partial T^{\mu i}}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} + \frac{\partial T^{\mu i}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^\mu} + \frac{\partial T^{\mu i}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial T^{\mu i}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x^\mu} \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (1.26)$$

Para a conservação de corrente bariônica (neste trabalho consideramos explicitamente

apenas a conservação de número bariônico) temos, de (1.5)

$$\begin{aligned}\partial_\mu N_B^\mu &= \frac{\partial N_B^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x^\mu} + \frac{\partial N_B^\mu}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^\mu} + \frac{\partial N_B^\mu}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} + \frac{\partial N_B^\mu}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x^\mu} \\ &= 0.\end{aligned}\tag{1.27}$$

Substituindo (1.23) e (1.24) em (1.25)-(1.27) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cosh \eta} \left\{ \frac{\partial E}{\partial \tau} + (E + p) \left(\frac{v_T}{r} + \frac{1}{\tau} \right) + \frac{\partial [(E + p)v_T]}{\partial r} - \sinh^2 \eta \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\} \\ + \frac{\sinh \eta}{\tau} \frac{\partial p}{\partial \eta} \equiv A \cosh \eta + B \sinh \eta = 0,\end{aligned}\tag{1.28}$$

$$\begin{aligned}\frac{\cos \phi}{\cosh^2 \eta} \left\{ \frac{\partial M}{\partial \tau} + M \left(\frac{v_T}{r} + \frac{1}{\tau} \right) + \frac{\partial (Mv_T)}{\partial r} + \cosh^2 \eta \frac{\partial p}{\partial r} \right\} - \frac{\sin \phi}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ \equiv C \cos \phi - D \sin \phi = 0,\end{aligned}\tag{1.29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin \phi}{\cosh^2 \eta} \left\{ \frac{\partial M}{\partial \tau} + M \left(\frac{v_T}{r} + \frac{1}{\tau} \right) + \frac{\partial (Mv_T)}{\partial r} + \cosh^2 \eta \frac{\partial p}{\partial r} \right\} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial p}{\partial \phi} \\ \equiv C \sin \phi + D \cos \phi = 0,\end{aligned}\tag{1.30}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sinh \eta}{\cosh^2 \eta} \left\{ \frac{\partial E}{\partial \tau} + (E + p) \left(\frac{v_T}{r} + \frac{1}{\tau} \right) + \frac{\partial [(E + p)v_T]}{\partial r} - \sinh^2 \eta \frac{\partial p}{\partial \tau} \right\} \\ + \frac{\cosh \eta}{\tau} \frac{\partial p}{\partial \eta} \equiv A \sinh \eta + B \cosh \eta = 0,\end{aligned}\tag{1.31}$$

$$\frac{1}{\cosh \eta} \left[\frac{\partial R}{\partial \tau} + \frac{\partial (Rv_T)}{\partial r} + R \left(\frac{v_T}{r} + \frac{1}{\tau} \right) \right] = 0,\tag{1.32}$$

onde $E \equiv T^{00} = (\epsilon + p)\gamma_T^2 \cosh^2 \eta - p$, $M \equiv (E + p)v_T$ e $R \equiv N_B^0 = n_B\gamma_T \cosh \eta$.

As equações (1.29) e (1.30) só se tornam verdadeiras se $C = D = 0$, o que implica que

$$\frac{\partial p}{\partial \phi_{\tau,r,\eta}} = 0 . \quad (1.33)$$

As equações (1.28) e (1.31) só serão verdadeiras se $A = B = 0$, o que implica, juntamente com a expressão acima, que

$$\frac{\partial p}{\partial \eta_{\tau,r,\phi}} = \frac{\partial p}{\partial \eta_{\tau,r}} = 0 . \quad (1.34)$$

No caso de $n_B = 0$, (1.33) implica que o sistema apresenta simetria cilíndrica, enquanto que (1.34) expressa invariância de boost. No entanto, usando a relação de Gibbs-Duhem, obtemos que para o caso geral $n_B \neq 0$ essas equações exigem somente que

$$s \frac{\partial T}{\partial \phi_{\tau,r}} + n_B \frac{\partial \mu_B}{\partial \phi_{\tau,r}} = 0 \quad (1.35)$$

e

$$s \frac{\partial T}{\partial \eta_{\tau,r}} + n_B \frac{\partial \mu_B}{\partial \eta_{\tau,r}} = 0 , \quad (1.36)$$

onde s é a densidade de entropia e μ_B é o potencial químico bariônico. Qualquer dependência funcional de T e μ_B com ϕ e η que satisfaça (1.35) e (1.36) estará de acordo com a conservação de energia-momento e de número bariônico. Porém, como estamos estudando apenas colisões centrais, é razoável assumir que o fluido apresenta simetria cilíndrica. Por outro lado, podemos estudar efeitos do meio analisando apenas distribuições de momento transversal. Assim sendo vamos assumir que as quantidades termodinâmicas são independentes da rapidez, ou seja, que o sistema apresenta invariância

de boost ¹ [11]. Escolhendo então $\phi = \eta = 0$, o sistema de equações de movimento resultante será

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [(E + p)v_T]}{\partial r} = - \left(\frac{v_T}{r} + \frac{1}{t} \right) (E + p) , \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial (Mv_T + p)}{\partial r} = - \left(\frac{v_T}{r} + \frac{1}{t} \right) M \quad e \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial (Rv_T)}{\partial r} = - \left(\frac{v_T}{r} + \frac{1}{t} \right) R . \quad (1.39)$$

É interessante notar que, se $v_T = 0$,

$$\Rightarrow E = \epsilon + p - p = \epsilon , M = 0 , R = n_B ,$$

e obtemos

$$\frac{d\epsilon}{dt} + \frac{\epsilon + p}{t} = 0 , \quad (1.40)$$

$$\frac{dp}{dr} = 0 \quad e \quad (1.41)$$

¹ Um ponto a ser mencionado aqui é que os dados disponíveis atualmente para colisões nucleares relativísticas revelam que nem sempre é verdade que as distribuições de rapidez apresentam um pico largo na região central, conforme pode ser visto por exemplo nas distribuições de rapidez obtidas no SPS [12]. Mesmo nas energias do RHIC, embora as distribuições de rapidez para prótons (líquidos) apresente uma região larga onde a multiplicidade das partículas é quase constante, as distribuições de rapidez dos píons não apresentam essa característica, como pode ser visto em [13]. No entanto, como não pretendemos reproduzir rigorosamente os dados, o objetivo deste trabalho é comparar dois modelos, assumimos invariância de boost no modelo hidrodinâmico adotado.

$$\frac{dn_B}{dt} + \frac{n_B}{t} = 0, \quad (1.42)$$

que são as equações do modelo de Bjorken [8]. As equações (1.37) - (1.39) correspondem, portanto, a uma generalização do modelo de Bjorken para incluir a expansão na direção transversal, e foi primeiramente desenvolvida em [14]².

1.3.1 Condições iniciais

A matéria nuclear gerada numa colisão não termaliza imediatamente. Esta leva certo tempo para entrar em equilíbrio térmico. Este tempo foi primeiramente estimado por Bjorken como sendo $\tau_0 \approx 1fm$ [8], e foi este o valor que adotamos (em artigos de hidrodinâmica, encontramos τ_0 tipicamente entre $0.6fm$ e $1.3fm$). Como supomos invariância por boost, é conveniente escrever as condições iniciais em termos de τ_0 .

Sendo o número bariônico uma quantidade conservada, podemos fazer uma estimativa da densidade bariônica inicial $n_B(\tau_0)$ a partir da multiplicidade de bárions na região central de rapidez, $(\frac{dN_B}{dy} \Big|_{y=0})\Delta y$, e do volume inicial V_0 do fluido, que por sua vez podemos estimar como $V_0 \approx A\Delta z = A\tau \cosh y|_{y=0}\Delta y = A\tau_0\Delta y$, sendo A a área da seção transversal do núcleo. Na verdade, em nosso caso a multiplicidade de bárions é dada simplesmente pelo número líquido de nucleons na região central de rapidez, pois desconsideramos o produto do decaimento das ressonâncias (mais detalhes serão apresentados no capítulo 4). A estimativa de $n_B(\tau_0)$ segue então como

$$n_B(\tau_0) = \frac{1}{A\tau_0} \frac{dN_B}{dy} \Big|_{y=0}. \quad (1.43)$$

Vale mencionar que se multiplicarmos a expressão acima pela energia transversal

² As equações da hidrodinâmica com expansão transversal e invariância de boost também são derivadas em [15].

média dos nucleons, $\langle E_T \rangle$, obtemos uma estimativa, como a que foi feita por Bjorken [8], para a densidade de energia inicial:

$$\epsilon(\tau_0) = \frac{\langle E_T \rangle}{A\tau_0} \frac{dN_B}{dy} \Big|_{y=0} .$$

No entanto, a fórmula acima não leva em conta o trabalho de expansão do fluido, pois considera que a energia média $\langle E_T \rangle$ é constante. Por essa razão, estimamos as condições iniciais de outra maneira, a partir de estimativas teóricas da entropia própria, s/n_B , feitas usando modelos microscópicos, como por exemplo o UrQMD [16]. Fixando um valor para s/n_B e usando (1.43) para calcular a densidade bariônica inicial podemos, através da equação de estado, determinar a densidade de energia inicial $\epsilon(\tau_0)$ (as equações de estado que foram usadas neste trabalho serão apresentadas no capítulo 2). Supondo que as densidades de energia e bariônica iniciais são uniformes na direção radial, as condições iniciais se escrevem então como

$$\begin{aligned} \epsilon(\tau_0, r) &= \epsilon(\tau_0)\Theta(R - r) \\ n_B(\tau_0, r) &= n_B(\tau_0)\Theta(R - r) , \end{aligned} \tag{1.44}$$

sendo R o raio do núcleo.

A primeira vista, condições iniciais da forma acima não parecem ser realistas. Porém em [11] foi mostrado que o uso de condições iniciais do tipo “wounded nucleon”³, mais

3

$$\begin{aligned} \epsilon(\tau_0, r) &= \epsilon(\tau_0)f(r) \quad , \\ n_B(\tau_0, r) &= n_B(\tau_0)f(r) \quad , \quad \text{onde} \\ f(r) &= \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \quad . \end{aligned}$$

realistas, não produz alterações quantitativas significativas nos resultados. Mais especificamente, foi usado o mesmo modelo hidrodinâmico que estamos usando, diferindo apenas pela equação de estado, e obteve-se que a diferença em $\langle p_T \rangle$ entre os resultados obtidos com esses dois tipos de condições iniciais foi menor que 10%. Assim sendo, usamos as condições iniciais na forma (1.44), que simplificam o cálculo numérico.

1.4 Freeze-out

Uma das condições necessárias para que um sistema com muitas partículas possa ser modelado como um fluido é que o livre caminho médio das partículas seja desprezível em comparação com as dimensões do sistema[6] [10]. Na matéria hadrônica formada numa colisão nuclear relativística, o livre caminho médio das partículas, $\langle l \rangle$, é inversamente proporcional à taxa de espalhamento Γ , ou seja, $\Gamma \propto 1/\langle l \rangle$. A taxa de espalhamento, por sua vez, depende da seção de choque σ e da densidade de partículas, $\Gamma \propto \sigma n$. A medida que o fluido se resfria e se expande, a densidade de partículas vai diminuindo, o que implica que o livre caminho médio das partículas vai aumentando.

Quando o livre caminho médio se torna comparável com as dimensões do sistema, as partículas deixam de interagir, e a hidrodinâmica deixa de ser aplicável. Dizemos então que as partículas se “desacoplaram” do fluido. Estas então fluem livremente (sem sofrer interações) para o detector. Existem, assim, três regiões do espaço-tempo a ser consideradas: o quadrevolume onde a matéria nuclear é tratada como um fluido, a região onde as partículas se movem sem sofrer interações, e uma terceira região onde as partículas se desacoplam do fluido. Essa transição da região de fluido para a região de movimento livre é chamada de *freeze-out*. Uma maneira rigorosa de determinar a região de freeze-out, que denotaremos por Σ_{fo} , seria calcular os pontos de freeze-out *dinamicamente*, ou seja, resolver as equações da hidrodinâmica em conjunto com as equações da teoria cinética dos gases. Isso, naturalmente, seria muito complicado de ser feito.

Uma aproximação amplamente utilizada consiste em resolver as equações da hidrodinâ-

mica como se esta fosse aplicável em todo o cone de luz, e depois calcular os pontos de freeze-out. A região Σ_{fo} é determinada encontrando todos os pontos do espaço-tempo para os quais a temperatura já diminuiu até um certo valor, T_{fo} , para o qual supõe-se que o fluido já esteja muito diluído para que a hidrodinâmica continue a ser válida. Em outras palavras, a região Σ_{fo} é determinada a partir do *vínculo* $T(t, x, y, z) = T_{fo}$, sendo portanto uma região tridimensional. A temperatura de freeze-out, T_{fo} , foi primeiro estimada por Landau como sendo da ordem da massa do pión⁴.

Partículas próximas da hipersuperfície Σ_{fo} mas que estejam ainda contidas na região de fluido são governadas pela função de distribuição térmica $f(p, x)$. Se essas partículas realizarem um deslocamento infinitesimal, cruzando Σ_{fo} e passando para a região de fluxo livre, elas então passarão a ser governadas pela função de distribuição da teoria cinética dos gases. No entanto, como na hipersuperfície Σ_{fo} o fluido está bastante diluído, a função de distribuição de equilíbrio deve ser aproximadamente igual à da teoria cinética. Nessas condições, o número de partículas cruzando um elemento infinitesimal de Σ_{fo} , cujo vetor normal é $d\Sigma_\mu(x)_{fo}$, é dado por

$$dN = \int \frac{d^3p}{E} d\Sigma_\mu(x)_{fo} p^\mu f(p, x) . \quad (1.45)$$

A distribuição invariante de momento das partículas fluindo através de toda a hipersuperfície será então dada por

$$E \frac{dN}{d^3p} = \int_{\Sigma_{fo}} d\Sigma_\mu(x)_{fo} p^\mu f(p, x) . \quad (1.46)$$

⁴ No trabalho original de Landau foi considerada para esta estimativa a equação de estado de um gás ideal de pions [6], pois sua densidade é bem maior que a de nucleons. Na literatura encontra-se, para ajustar dados, $T_{fo} \sim 100 - 140 MeV$.

A equação acima é a chamada Fórmula de Cooper-Frye [17]⁵.

Vamos agora escrever (1.46) explicitamente em termos de (τ, r, ϕ, η) . Uma hipersuperfície no espaço-tempo, como por exemplo a hipersuperfície de freeze-out Σ_{fo} , é uma região tridimensional, podendo ser representada por uma função de três parâmetros. Como estudamos a evolução espaço-temporal de um fluido com simetria cilíndrica e invariância de boost longitudinal, é conveniente escolher dois dos parâmetros como sendo o ângulo azimutal ϕ e a rapidez longitudinal η . Deste modo, as coordenadas τ e r dependem apenas do terceiro parâmetro, que denotamos por ζ , e o definimos de maneira que $\zeta \in [0, 1]$. ζ parametriza Σ_{fo} no sentido anti-horário⁶. Nessas condições, o versor normal a um elemento de área infinitesimal localizado num ponto x da hipersuperfície se escreve como [18] (e referência neste artigo)

$$\begin{aligned} d\Sigma_\mu &= \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} \frac{\partial\Sigma^\alpha}{\partial\zeta} \frac{\partial\Sigma^\beta}{\partial\eta} \frac{\partial\Sigma^\gamma}{\partial\phi} d\zeta d\eta d\phi \\ &= \left(-\frac{dr_T}{d\zeta} \cosh\eta, \frac{d\tau}{d\zeta} \cos\phi, \frac{d\tau}{d\zeta} \sin\phi, \frac{dr_T}{d\zeta} \sinh\eta \right) r_T \tau d\zeta d\eta d\phi, \end{aligned} \quad (1.47)$$

⁵ Na realidade, uma versão mais correta da Fórmula de Cooper-Frye seria

$$E \frac{dN}{d^3p} = \int_{\Sigma_{fo}} d\Sigma_\mu(x)_{fo} p^\mu f(p, x) \Theta(d\Sigma_\mu(x)_{fo} p^\mu),$$

onde a função degrau foi incluída no integrando para eliminar as contribuições negativas em (1.46) [6]. Porém, neste trabalho utilizamos a expressão (1.46), pois a introdução da função degrau no integrando pode produzir violação na conservação de número bariônico, o que poderia prejudicar a comparação dos modelos que foram usados, pois eventuais diferenças nas funções de distribuição poderiam ocorrer devido a diferenças de normalização.

⁶ Mais precisamente, consideremos uma região da hipersuperfície Σ_{fo} definida por valores fixados de ϕ e η . Essa região pode ser representada como uma curva num gráfico $\tau \times r$ (ver, por exemplo, as figuras 4.3, 4.6 e 4.9 do capítulo 4). Essa curva é parametrizada por ζ no sentido anti-horário. Notemos que, devido às simetrias cilíndrica e de boost, a forma da curva não depende dos valores de ϕ e η que foram fixados.

sendo $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ o tensor completamente anti-simétrico de Levi-Civita (na expressão acima omitimos o subscrito “fo” para não saturar a notação).

Escrevendo o quadrimomento das partículas como

$$p^\mu \equiv (m_T \cosh y, p_T \cos \phi_p, p_T \sin \phi_p, m_T \sinh y) , \quad (1.48)$$

obtemos

$$\frac{dN}{d^2p_T dy} = \int_0^1 d\zeta \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta r \tau \left(p_T \cos(\phi - \phi_p) \frac{d\tau}{d\zeta} - m_T \cosh(y - \eta) \frac{dr}{d\zeta} \right) f(p_\mu u^\mu) , \quad (1.49)$$

onde p_T e m_T são o momento transversal e a massa transversal das partículas, respectivamente. Usando (1.24) e (1.48) podemos escrever explicitamente o argumento da função de distribuição como

$$p_\mu u^\mu = \gamma_T [m_T \cosh(y - \eta) - p_T v_T \cos(\phi - \phi_p)] . \quad (1.50)$$

As funções de distribuição que foram usadas serão apresentadas no próximo capítulo, onde faremos a derivação das equações de estado empregadas neste trabalho.

Capítulo 2

Equações de estado

Neste capítulo descrevemos a construção das equações de estado usadas para estudar a matéria nuclear produzida numa colisão nuclear relativística. Como estamos interessados em estudar os efeitos do meio nos dados de colisões nucleares, utilizamos uma equação de estado que corresponde a um modelo interagente para a matéria nuclear e outra que corresponde a um modelo não interagente. Para contemplar a possível formação do plasma de quarks e glúons no estágio inicial de uma colisão nuclear, ambas as equações de estado apresentam uma transição para uma fase desconfiada de quarks e glúons. No momento, não foi bem estabelecido se a transição de fase é de primeira ordem, de segunda ordem, ou é um “cross-over” [6]. Neste trabalho, assumimos que a transição de fase é de primeira ordem. Foram escolhidos modelos simples para a descrição da fase hadrônica, constituídos de um gás de nucleons (interagentes ou não) e de um gás de píons livres.

2.1 Gás de nucleons interagentes com píons livres

Uma descrição simplificada da interação nucleon-nucleon pode ser feita através do Modelo de Walecka [19] [20] [21] [22]. Nesse modelo, a interação é implementada através do acoplamento do campo bariônico com um campo mesônico escalar e com um campo mesônico vetorial. O acoplamento com o méson vetorial torna a interação repulsiva a

curtas distâncias e, se as constantes de acoplamento forem escolhidas adequadamente, o acoplamento com o méson escalar torna a interação atrativa a longas distâncias [19] [22]. Em outras palavras, quando as constantes de acoplamento são escolhidas adequadamente, esse modelo apresenta corretamente as propriedades da interação nucleon-nucleon.

A densidade de lagrangiana do modelo é

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Walecka} = & \bar{\Psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_v V^\mu) - (m_b - g_s \phi)] \Psi + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_s^2 \phi^2) \\ & - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_v^2 V_\mu V^\mu, \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu,$$

Ψ é o campo bariônico, $\bar{\Psi}$ é o seu adjunto, V_μ é o campo mesônico vetorial e ϕ é o campo mesônico escalar. m_b , m_v e m_s são as massas dos campos bariônico, mesônico vetorial e mesônico escalar, respectivamente. g_v e g_s são as constantes de acoplamento com a corrente vetorial e a densidade escalar, respectivamente. γ^μ são as matrizes de Dirac.

Para obter uma equação de estado que apresente explicitamente graus de liberdade referentes a píons, à densidade de lagrangiana acima vamos acrescentar o termo [22]

$$\mathcal{L}_\pi = \frac{1}{2} [\partial_\mu \pi^i \partial^\mu \pi^i - m_\pi^2 \pi^i \pi^i], \quad (2.2)$$

onde π^i , $i = 1, 2$ e 3 , são os campos dos píons π^+ , π^- e π^0 , respectivamente. Estamos desprezando as pequenas diferenças de massa entre os três píons, ou seja, estamos considerando que $m_{\pi^+} = m_{\pi^-} = m_{\pi^0} \equiv m_\pi$.

A densidade de lagrangiana total será então dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Walecka} + \mathcal{L}_\pi . \quad (2.3)$$

Pode-se perguntar porque não incluímos um termo de interação pión-nucleon na densidade de lagrangiana acima. Nas referências [19] e [22] (e referências nestes textos) argumenta-se que a contribuição da interação pión-nucleon para as propriedades da matéria nuclear densa é, em média, zero.

Inserindo a densidade de lagrangiana (2.3) nas equações de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \alpha^i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha^i} = 0 , \quad (2.4)$$

onde α^i são os campos, obtemos as equações de movimento

$$[\gamma_\mu(i\partial^\mu - g_v V^\mu) - (m_b - g_s \phi)] \Psi = 0 , \quad (2.5)$$

$$\bar{\Psi} \left[\gamma_\mu(i\overleftarrow{\partial}^\mu + g_v V^\mu) + (m_b - g_s \phi) \right] = 0 , \quad (2.6)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_v^2 V^\nu = g_v \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi , \quad (2.7)$$

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m_s^2] \phi = g_s \bar{\Psi} \Psi , \quad (2.8)$$

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m_\pi^2] \vec{\pi} = 0 . \quad (2.9)$$

A equação (2.5) é a equação de Dirac modificada, e poderia ter sido obtida via substituições mínimas, $i\partial^\mu \rightarrow (i\partial^\mu - g_v V^\mu)$ e $m_b \rightarrow (m_b - g_s \phi)$, e (2.6) é a sua adjunta. (2.7)

é semelhante a equação da Eletrodinâmica Quântica Massiva, com a corrente bariônica $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ como fonte, no lugar da corrente eletromagnética. (2.8) é a equação de Klein-Gordon com uma fonte escalar, $\bar{\Psi}\Psi$.

A partir de (2.5) e (2.6) verificamos facilmente que

$$\partial_\mu B^\mu = 0, \quad (2.10)$$

onde $B^\mu \equiv \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$. O resultado acima implica que o número bariônico total,

$$B \equiv \int d^3x \rho_B = \int d^3x \Psi^\dagger\Psi, \quad (2.11)$$

é uma constante do movimento.

As equações acima são de difícil solução. Existe, no entanto, uma aproximação possível que se torna tanto melhor quanto maior for a densidade bariônica da matéria nuclear. Consideremos que o sistema se constitui de matéria nuclear estática e uniforme. Ao efetuarmos a quantização, os campos clássicos são substituídos por operadores de campo, $\Psi \rightarrow \hat{\Psi}$, $V^\mu \rightarrow \hat{V}^\mu$ e $\phi \rightarrow \hat{\phi}$. Para valores crescentes da densidade bariônica, os valores esperados dos campos mesônicos se tornam cada vez maiores, pois os termos de fonte das equações (2.7) e (2.8) aumentam à medida que a densidade bariônica aumenta. No limite de $\rho_B \rightarrow \infty$, podemos substituir os campos mesônicos por seus respectivos valores médios,

$$\begin{aligned} \hat{\phi} &\rightarrow \langle \hat{\phi} \rangle \equiv \phi_0, \\ \hat{V}_0 &\rightarrow \langle \hat{V}_0 \rangle \equiv V_0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Da invariância rotacional segue que $\langle \hat{\vec{V}} \rangle = 0$.

Com a aproximação de campos médios, as equações de movimento (2.5)-(2.8) se tornam

$$[\gamma_\mu i \partial^\mu - g_v \gamma_0 V^0 - (m_b - g_s \phi_0)] \hat{\Psi} = 0, \quad (2.13)$$

$$\hat{\Psi} [\gamma_\mu i \overleftarrow{\partial}^\mu + g_v \gamma_0 V^0 + (m_b - g_s \phi_0)] = 0, \quad (2.14)$$

$$\phi_0 = \frac{g_s}{m_s^2} \langle \hat{\Psi} \hat{\Psi} \rangle \equiv \frac{g_s}{m_s^2} \rho_s, \quad (2.15)$$

$$V_0 = \frac{g_v}{m_v^2} \langle \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} \rangle \equiv \frac{g_v}{m_v^2} \rho_B. \quad (2.16)$$

A densidade de lagrangiana do modelo fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0 = & \hat{\Psi} [\gamma_\mu i \partial^\mu - g_v \gamma_0 V^0 - (m_b - g_s \phi_0)] \hat{\Psi} - \frac{m_s^2}{2} \phi_0^2 + \frac{m_v^2}{2} V_0^2 \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \hat{\pi}^i \partial^\mu \hat{\pi}^i - m_\pi^2 \hat{\pi}^i \hat{\pi}^i). \end{aligned} \quad (2.17)$$

A solução da equação de movimento para cada um dos píons livres é a bem conhecida solução da equação de Klein-Gordon, que no espaço dos momentos pode ser escrita como

$$\hat{\pi}^i = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(e^{-ik \cdot x} \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^i + e^{ik \cdot x} \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^{i\dagger} \right), \quad (2.18)$$

onde $\omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m_\pi^2}$, V é o volume de quantização e $\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^i$, $i = 1, 2$ e 3 , são os coeficientes de Fourier da expansão, que após efetuarmos a quantização serão interpretados como operadores de aniquilação de píons ¹. π^+ , π^- e π^0 constituem um tripleto de isospin. λ

¹ Note que a antipartícula de π^+ é π^- e vice-versa. π^0 é a sua própria antipartícula.

denota os demais números quânticos.

Por outro lado, supondo soluções de (2.13) da forma $\Psi = U(\vec{k}\lambda)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}}$, (2.13) adquire a forma

$$\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{k} + \beta m_b^*\right)U(\vec{k}\lambda) = (E_{|\vec{k}|} - g_v V_0)U(\vec{k}\lambda). \quad (2.19)$$

Na expressão acima, $m_b^* \equiv m_b - g_s\phi_0$ é a massa efetiva dos bárions.

Os autovalores de (2.19) são dados por

$$E_{|\vec{k}|}^\pm = g_v V_0 \pm \sqrt{(\vec{k})^2 + (m_b^*)^2}, \quad (2.20)$$

e os correspondentes autovetores, $U(\vec{k}\lambda)$ e $V(\vec{k}\lambda)$, são normalizados:

$$U(\vec{k}\lambda)^\dagger U(\vec{k}\lambda) = V(\vec{k}\lambda)^\dagger V(\vec{k}\lambda) = 1. \quad (2.21)$$

Podemos expandir o campo $\hat{\Psi}$ como

$$\hat{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}\lambda} \left[\hat{A}_{\vec{k}\lambda} U(\vec{k}\lambda) e^{-ik\cdot x} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger V(\vec{k}\lambda) e^{ik\cdot x} \right]. \quad (2.22)$$

Os operadores $\hat{A}_{\vec{k}\lambda}$ e $\hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger$ são os coeficientes de Fourier da expansão.

Para quantizar o sistema, devemos impor relações de comutação para os campos dos pions e relações de anticomutação para o campo bariônico:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^i, \hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}^{\dagger j} \right] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{ij} , \\
\left[\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^i, \hat{a}_{\vec{k}'\lambda'}^j \right] &= 0 , \text{ etc .} \\
\{ \hat{A}_{\vec{k}\lambda}, \hat{A}_{\vec{k}'\lambda'}^{\dagger} \} &= \{ \hat{B}_{\vec{k}\lambda}, \hat{B}_{\vec{k}'\lambda'}^{\dagger} \} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} , \\
\{ \hat{A}_{\vec{k}\lambda}, \hat{A}_{\vec{k}'\lambda'} \} &= \{ \hat{B}_{\vec{k}\lambda}, \hat{B}_{\vec{k}'\lambda'} \} = 0 , \text{ etc .}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Após a quantização, os operadores $\hat{A}_{\vec{k}\lambda}$, $\hat{B}_{\vec{k}\lambda}$ e $\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^i$ passam a ser interpretados como operadores de aniquilação de nucleons, anti-nucleons e pions, respectivamente, e $\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^{\dagger}$, $\hat{B}_{\vec{k}\lambda}^{\dagger}$ e $\hat{a}_{\vec{k}\lambda}^{\dagger j}$ são os correspondentes operadores de criação.

O tensor energia-momento para a densidade de lagrangiana de campos médios, (2.17), é dado pela expressão

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \alpha^i}{\partial x_\mu} \right)} \frac{\partial \alpha^i}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \\
&= i \hat{\Psi} \gamma_\mu \partial_\nu \hat{\Psi} + \partial_\mu \hat{\pi}^i \partial_\nu \hat{\pi}^i \\
&- g_{\mu\nu} \left[\hat{\Psi} (i \gamma^\alpha \partial_\alpha - g_v \gamma^0 V_0 - m_b^*) \hat{\Psi} + \frac{m_v^2 V_0^2}{2} - \frac{m_s^2 \phi_0^2}{2} + \frac{1}{2} (\partial_\alpha \hat{\pi} \partial^\alpha \hat{\pi} - m_\pi^2 \hat{\pi} \hat{\pi}) \right]
\end{aligned} \tag{2.24}$$

A partir da expressão acima, obtemos o operador densidade de energia

$$\hat{\epsilon} = \hat{T}_{00} = \hat{\Psi}^\dagger (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m_b^* + g_v V_0) \hat{\Psi} - \frac{1}{2} (m_v^2 V_0^2 - m_s^2 \phi_0^2)$$

$$+ \frac{1}{2} (\partial_0 \hat{\pi} \partial_0 \hat{\pi} + \partial_j \hat{\pi} \partial_j \hat{\pi} + m_\pi^2 \hat{\pi} \hat{\pi}) , \quad (2.25)$$

O operador hamiltoniano para o modelo é obtido simplesmente integrando o operador densidade de energia sobre o volume de quantização

$$\hat{H}^0 = \int_V d^3x \hat{\epsilon} . \quad (2.26)$$

Substituindo as soluções quantizadas dos campos na expressão acima e em (2.11) e lembrando que estamos considerando matéria nuclear uniforme, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{H}^0 &= \int_V d^3x : \hat{\epsilon} : = \frac{V}{2} (m_s^2 \phi_0^2 - m_v^2 V_0^2) + g_v V_0 \hat{B} \\ &+ \sum_{\vec{k}\lambda} \left[\sqrt{\vec{k}^2 + m_b^{*2}} (\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} + \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda}) + \sqrt{\vec{k}^2 + m_\pi^2} \hat{a}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}\lambda} \right] , \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\hat{B} = \int_V d^3x : \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi} : = \sum_{\vec{k}\lambda} (\hat{A}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{A}_{\vec{k}\lambda} - \hat{B}_{\vec{k}\lambda}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\lambda}) . \quad (2.28)$$

O símbolo “ : ” em ambos os lados dos operadores acima indica ordenamento normal dos operadores de criação e aniquilação, ou seja, os operadores de criação são colocados a esquerda dos operadores de aniquilação.

Para obter a equação de estado do modelo, vamos calcular o grande potencial termodinâmico [21] [22]

$$\Omega(\mu_B, V, T; \phi_0, V_0) = -T \ln Z_G , \quad (2.29)$$

onde Z_G é a função de partição no formalismo grande canônico, e é dada por [23]

$$Z_G = \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_\infty} \langle n_1 \cdots n_\infty | \exp\left(\frac{\mu_B \hat{B} - \hat{H}^0}{T}\right) | n_1 \cdots n_\infty \rangle . \quad (2.30)$$

O potencial químico dos píons foi tomado como nulo, pois não queremos conservar o número de píons.

O grande potencial termodinâmico é dado por

$$\begin{aligned} \Omega &= -T \ln \left[\exp\left(\frac{-Vm_s^2 \phi_0^2 + Vm_b^2 V_0^2}{2T}\right) \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + e^{-\frac{\epsilon_i - \nu}{T}}\right) \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + e^{-\frac{\epsilon_i + \nu}{T}}\right) \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - e^{-\frac{\epsilon_i^\pi}{T}}\right)^{-3} \right] \\ &= -\frac{V}{2} (-m_s^2 \phi_0^2 + m_b^2 V_0^2) \\ &\quad -T \left[\sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 + e^{-\frac{\epsilon_i - \nu}{T}}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 + e^{-\frac{\epsilon_i + \nu}{T}}\right) - 3 \sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\frac{\epsilon_i^\pi}{T}}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.31)$$

onde $\nu \equiv \mu_B - g_v V_0$ é o potencial químico efetivo, $\epsilon_i \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m_b^2}$ é a energia de um nucleon e $\epsilon_i^\pi \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m_\pi^2}$ é a energia de um pión. O potencial químico efetivo dos anti-nucleons foi tomado como $-\nu$.

Transformando as somas em integrais da forma usual :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 + e^{-\frac{\epsilon_i \pm \nu}{T}}\right) \rightarrow \frac{\gamma V}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left(1 + e^{-\frac{\epsilon \pm \nu}{T}}\right) \quad (2.32)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \ln \left(1 - e^{-\frac{\epsilon_i^\pi}{T}}\right) \rightarrow \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left(1 - e^{-\frac{\epsilon^\pi}{T}}\right), \quad (2.33)$$

onde γ é o fator de degenerescência dos nucleons em relação ao spin e isospin, obtemos

$$\begin{aligned} \Omega = V \left\{ \frac{m_s^2}{2} \phi_0^2 - \frac{m_v^2}{2} V_0^2 - \frac{T\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \left[\ln \left(1 + e^{-\frac{\epsilon - \nu}{T}} \right) + \ln \left(1 + e^{-\frac{\epsilon + \nu}{T}} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{3T}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{T}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Usando (2.16) podemos mostrar que

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial V_0} \right)_{\mu_B, V, T, \phi_0} = 0. \quad (2.35)$$

Por outro lado, de um princípio geral da Termodinâmica, quando μ_B , V e T estão fixos, o grande potencial termodinâmico deve ser minimizado [23], e isso implica que

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \phi_0} \right)_{\mu_B, V, T, V_0} = 0. \quad (2.36)$$

As relações acima simplificam consideravelmente o cálculo das quantidades termodinâmicas.

A pressão e as densidades de energia e bariônica podem ser obtidas a partir do grande potencial termodinâmico através das relações

$$\begin{aligned} \Omega &= -PV, \\ \epsilon \equiv \frac{E}{V} &= -\frac{T}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right)_{V, \mu_B} - P - \frac{\mu_B}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_B} \right)_{V, T} \\ n_B &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu_B} \right)_{V, T}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Usando integração por partes e lembrando que a massa efetiva é função de ϕ_0 , obtemos

$$\begin{aligned}
P &= \frac{g_v^2}{2m_v^2} n_B^2 - \frac{m_s^2}{2g_s^2} (m_b - m_b^*)^2 \\
&+ \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_b^{*2}}} [n(T) + \bar{n}(T)] \\
&+ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_\pi^2}} n_\pi(T) , \tag{2.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \frac{g_v^2}{2m_v^2} n_B^2 + \frac{m_s^2}{2g_s^2} (m_b - m_b^*)^2 \\
&+ \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + m_b^{*2}} [n(T) + \bar{n}(T)] \\
&+ \frac{3}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + m_\pi^2} n_\pi(T) , \tag{2.39}
\end{aligned}$$

$$n_B = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 [n(T) - \bar{n}(T)] , \tag{2.40}$$

onde

$$n(T) \equiv \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon - \nu}{T}\right) + 1} , \tag{2.41}$$

$$\bar{n}(T) \equiv \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon + \nu}{T}\right) + 1} \quad e \tag{2.42}$$

$$n_\pi(T) \equiv \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_\pi}{T}\right) - 1} \tag{2.43}$$

são as distribuições de nucleons, antinucleons e píons, respectivamente e γ é o fator de degenerescência dos nucleons. Nas expressões acima foi usada a média termodinâmica de (2.16) para eliminar V_0 .

Substituindo (2.34) em (2.36) obtemos uma relação de auto-consistência para a massa efetiva dos nucleons

$$m_b^* = \frac{m_b}{1 + \frac{\gamma g_s^2}{(2\pi)^3 m_s^2} \int dk^3 \frac{1}{\sqrt{m_b^{*2} + k^2}} [n(T) + \bar{n}(T)]} . \quad (2.44)$$

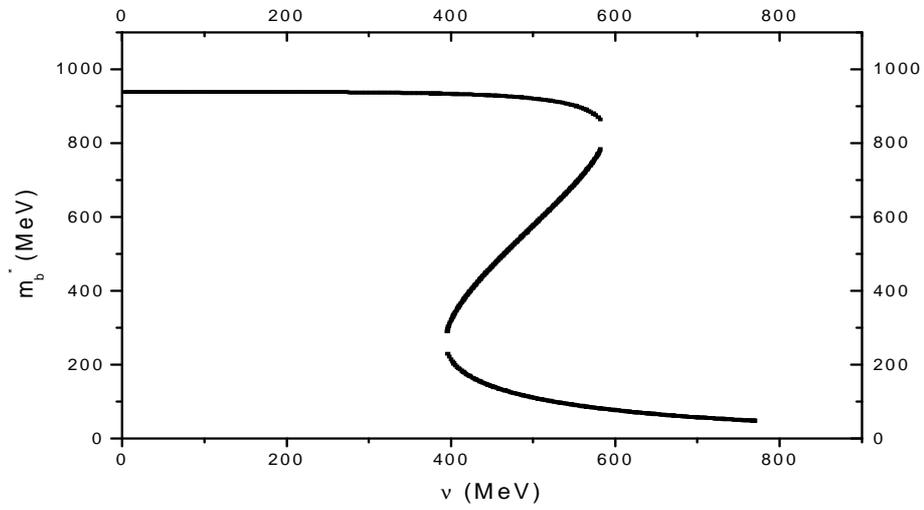
As constantes de acoplamento são as mesmas apresentadas em [24], e seus valores são dados por $C_S^2 = \frac{g_s^2 m_b^2}{m_s^2} = 357.4$ e $C_V^2 = \frac{g_v^2 m_b^2}{m_v^2} = 273.8$. Esses valores foram ajustados para reproduzir os valores do momento de Fermi $k_F = 1.30 fm^{-1}$ e da energia de ligação $15.75 MeV$ da matéria nuclear à temperatura nula.

Esses parâmetros foram ajustados à mais de dez anos atrás, mas em [25] é mostrado que para valores de C_V^2 contido em $[200, 300]$ e C_S^2 contido em $[262, 384]$, o valor da massa efetiva varia menos de 1%. Por outro lado, o momento de Fermi $k_F = 1.30 fm^{-1}$ corresponde a uma densidade nuclear $\rho_0 = \gamma k_F^3 / 6\pi^2 \cong 0.15 fm^{-3}$ em $T = 0$, que por sua vez é compatível com os valores usualmente encontrados na literatura ($\rho_0 \sim 0.14 - 0.17 fm^{-3}$).

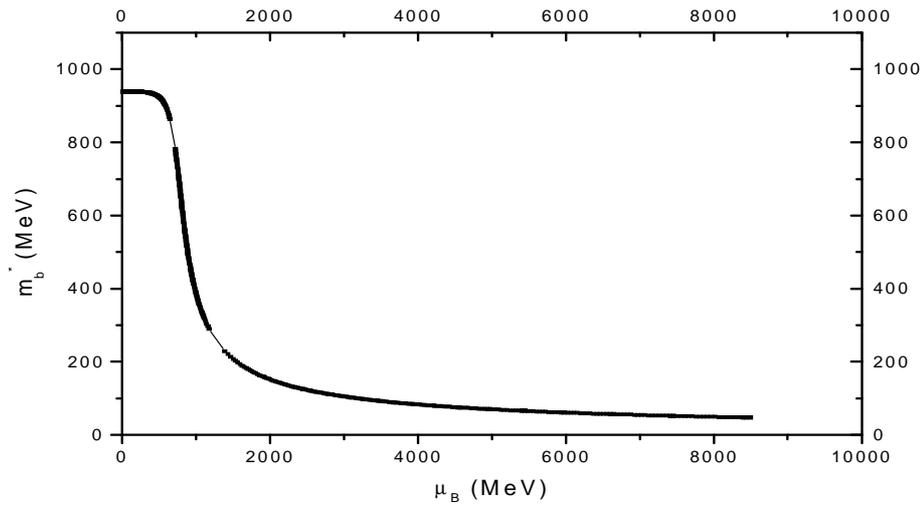
A figura 2.1 mostra um exemplo do comportamento da massa efetiva em função do potencial químico efetivo e do potencial químico total μ_B . No caso, está sendo mostrado o isoterma $T = 90 MeV$. Em determinadas regiões do gráfico, para ν fixado, existem três soluções m_b^* de (2.44). No entanto, como é mostrado na figura 2.1b, existe apenas um valor de m_b^* para cada valor do potencial químico μ_B para essa temperatura. Em baixas temperaturas, ($\sim 10 MeV$ ou menos) podem haver três valores de m_b^* para um mesmo valor de μ_B . O sistema sofre então uma transição de fase “gás-líquido” [19]-[22] (ver Apêndice A). A variação da massa efetiva é um efeito do meio: quanto maior o potencial químico (maior densidade bariônica), maior será a alteração no valor da massa

dos nucleons. Se fixarmos o potencial químico e variarmos a temperatura, obteremos o mesmo comportamento para a massa efetiva, ou seja, a massa irá decrescer com o aumento da temperatura, podendo haver três valores de m_b^* para um mesmo valor de T . O decréscimo da massa efetiva ocorre com o aumento da temperatura até mesmo quando a densidade bariônica é nula. Isso ocorre porque a variação da massa efetiva é causada pelo acoplamento com a densidade escalar, que por sua vez pode ser grande mesmo quando a densidade bariônica é nula.

Os gráficos da figura 2.2 mostram curvas de densidade bariônica n_B constante da equação de estado. A fig. 2.2a exibe a massa efetiva em função da temperatura para várias densidades bariônicas. Notemos que a massa efetiva diminui a altas temperaturas quando a densidade bariônica é nula, conforme já comentamos no parágrafo anterior. As figuras 2.2b e 2.2c mostram a variação da pressão nas mesmas curvas de n_B constante. Notemos que o limite de causalidade é respeitado, ou seja, temos sempre $p < \epsilon$.

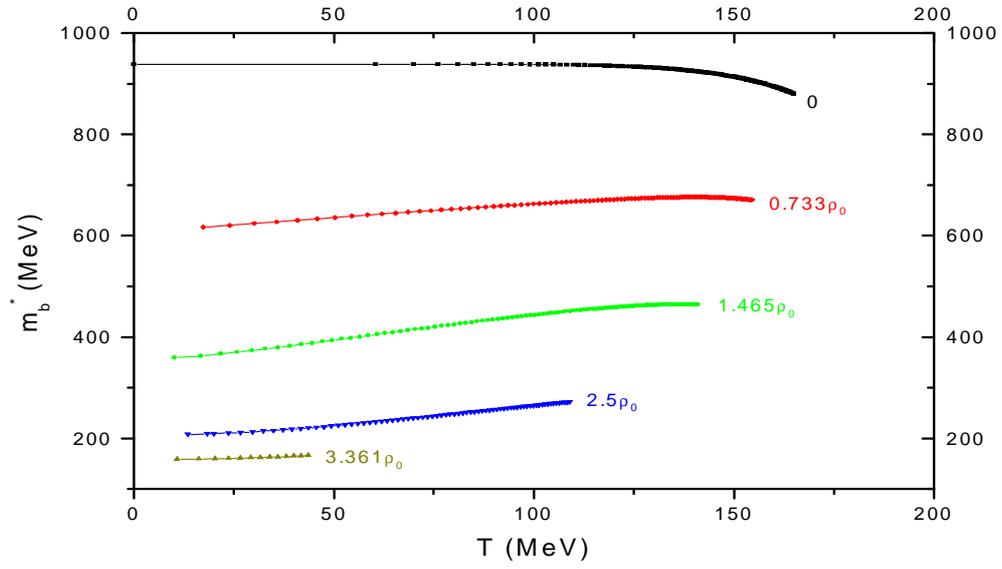


(a)

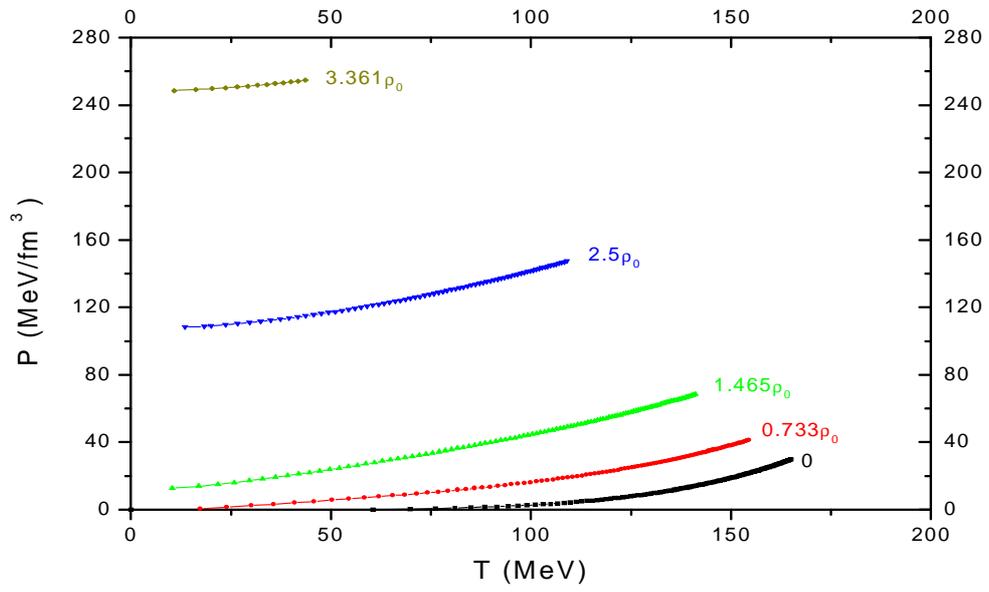


(b)

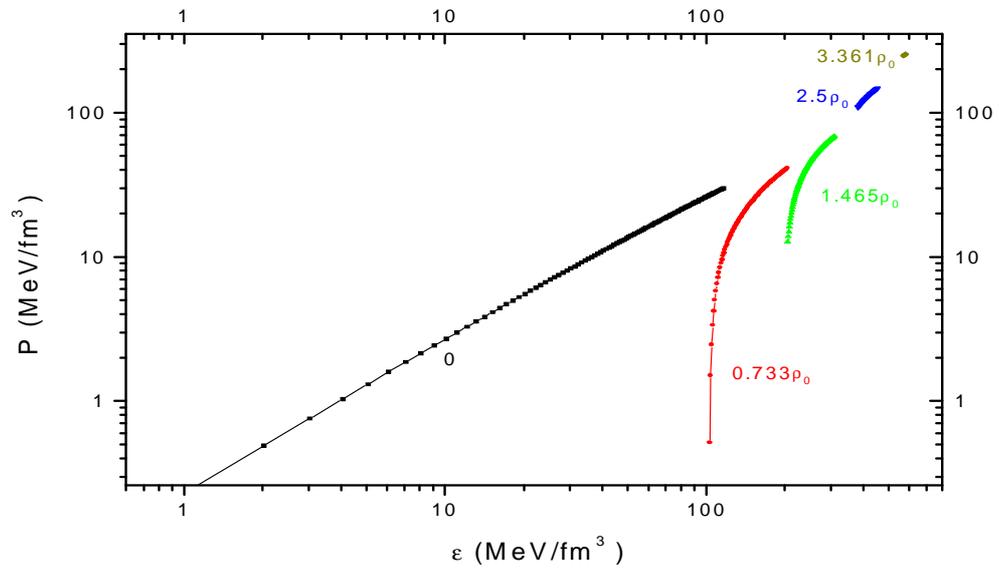
Fig. 2.1. Massas efetivas para $T=90$ MeV.
a) Massa efetiva em função do potencial químico efetivo.
b) Massa efetiva em função do potencial químico total.



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.2. Equação de estado do gás interagente para diversos valores de n_B constante.
a) Massas efetivas em função da temperatura. b) Pressão em função da temperatura .
c) Pressão em função da densidade de energia.

2.2 Gás não interagente com volume excluído

Se tomarmos $g_s = g_v = 0$ nas expressões (2.38)-(2.40), obtemos a equação de estado de um gás livre de nucleons e píons [26]:

$$n_B^0 = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 [n^0(T) - \bar{n}^0(T)] , \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} \epsilon^0 &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + m_b^2} [n^0(T) + \bar{n}^0(T)] \\ &+ \frac{3}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + m_\pi^2} n_\pi(T) , \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$\begin{aligned} p^0 &= \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_b^2}} [n^0(T) + \bar{n}^0(T)] \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_\pi^2}} n_\pi(T) , \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde

$$n^0(T) \equiv \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon - \mu_B}{T}\right) + 1} \quad e \quad (2.48)$$

$$\bar{n}^0(T) \equiv \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon + \mu_B}{T}\right) + 1} \quad . \quad (2.49)$$

Para que seja possível construirmos uma transição para uma fase de quarks desconfiados, é necessário que a equação de estado usada para descrever a matéria nuclear leve em conta as propriedades da interação forte [26]. Em particular, é preciso que o caráter fortemente repulsivo que essa interação adquire quando a matéria nuclear atinge altas densidades seja levado em conta. Consequentemente, uma equação de estado de partículas

livres puntiformes como a que foi escrita acima não seria uma escolha adequada, pois permite que, em princípio, a matéria nuclear seja comprimida até atingir densidades arbitrariamente altas. Uma maneira de obter uma aproximação mais razoável é atribuir aos nucleons um volume finito, resultando numa equação de estado “do tipo Van-der-Waals”:

$$n_B^{VE} = \frac{n_B^0}{1 + n_B^0 V_N}, \quad (2.50)$$

$$\epsilon^{VE} = \frac{\epsilon^0}{1 + n_B^0 V_N}, \quad (2.51)$$

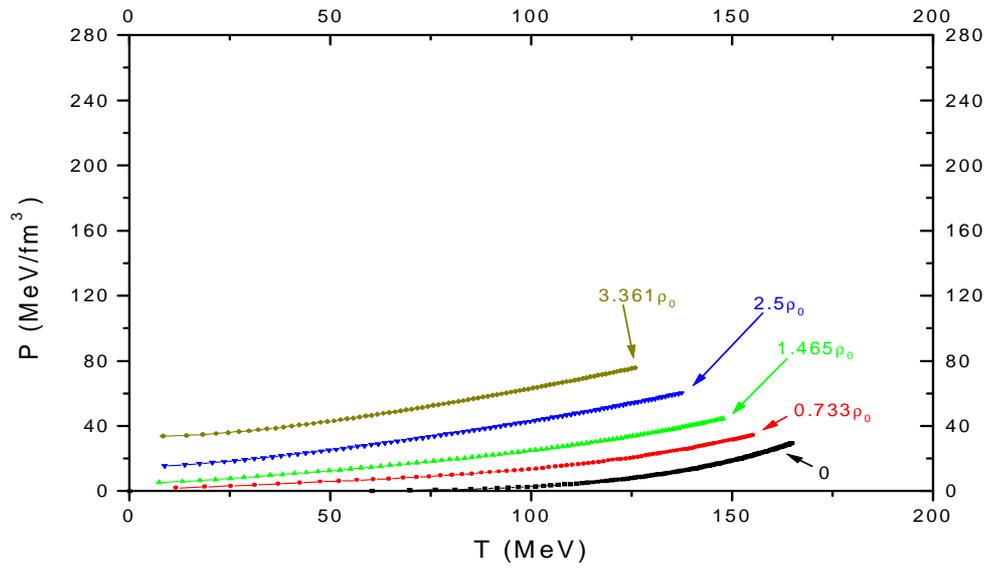
$$p^{VE} = \frac{p^0}{1 + n_B^0 V_N}. \quad (2.52)$$

Nas expressões acima, n_B^0 , ϵ^0 e p^0 são dadas pelas equações (2.45)-(2.47). O volume V_N atribuído aos nucleons é esférico de raio $R_N = 0.7 \text{ fm}$ ².

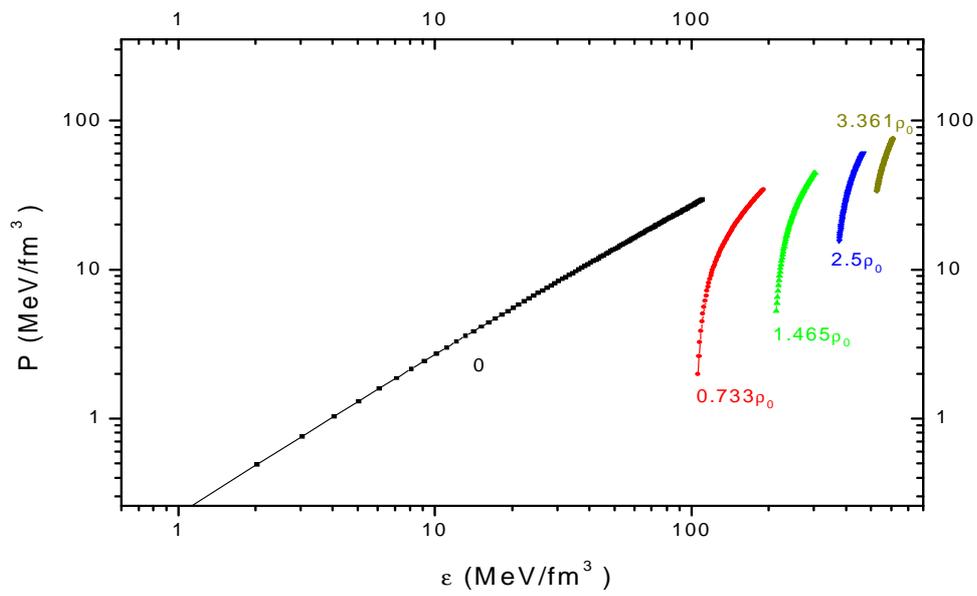
As figuras a seguir mostram a equação de estado do gás não interagente com exclusão de volume. As curvas que são mostradas são curvas de n_B constante, assim como para o gás interagente. Ao olhar a figura 2.3a a escala pode parecer algo inadequada, mas foram mantidas as mesmas escalas usadas para os gráficos do gás interagente, para facilitar a comparação. As figuras, principalmente a 2.3a mostram claramente as diferenças entre as equações de estado dos dois modelos adotados. Para densidade bariônica nula as curvas $p \times T$ e $p \times \epsilon$ são praticamente idênticas entre os dois modelos e apresentam uma certa diferença à densidade bariônica $0.733\rho_0$, mas ainda não muito pronunciada. Porém em altas densidades as equações de estado são drasticamente diferentes. Olhando as correspondentes curvas de massa efetiva em função da temperatura para densidade bariônica constante, vemos que as maiores diferenças entre as equações de estado surgem onde existe maior diferença entre a massa efetiva e a massa de vácuo do nucleon. As curvas de maior densidade, no entanto, correspondem a temperaturas mais baixas, uma

² O raio R_N não é o valor medido do raio de um nucleon, mas um valor efetivo incluído na equação de estado para simular o caráter fortemente repulsivo da interação forte a altas densidades. Na literatura, são encontrados valores de R_N entre 0.5 e 1 fm [26].

vez que elas “terminam” em temperaturas menores. As temperaturas máximas em cada curva de n_B constante correspondem a temperatura de transição para a fase de plasma de quarks e glúons. Este ponto ficará mais claro nas seções seguintes, quando apresentaremos os diagramas de fase para as duas equações de estado. De qualquer maneira, os gráficos apresentados até aqui já sugerem que devemos ter mais efeitos de meio nos dados de colisões com temperaturas iniciais mais baixas.



(a)



(b)

Fig. 2.3. Equação de estado do gás livre para diversos valores de n_B constante. a) Pressão em função da temperatura. b) Pressão em função da densidade de energia.

2.3 Plasma de Quarks e Glúons

Adotamos para a fase de quarks e glúons a equação de estado do modelo de sacola do MIT [27]. Apresentaremos a seguir uma derivação dessa equação de estado.

Consideremos quarks sem massa numa cavidade esférica. A equação de Dirac para férmions sem massa segue como

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \Psi = 0, \quad (2.53)$$

sendo γ^μ as matrizes de Dirac, que em sua representação padrão se escrevem como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

sendo I a matriz identidade 2×2 e σ^i as matrizes de Pauli. Substituindo a solução para partículas livres, $\Psi = e^{-ipx}\omega(p)$ na equação de Dirac, obtemos

$$\gamma^\mu p_\mu \Psi = 0. \quad (2.54)$$

Escrevendo explicitamente Ψ em termos dos componentes de energia positiva, Ψ^+ , e energia negativa, Ψ^- ,

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{pmatrix}$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} p^0 & -\vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -p^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^+ \\ \Psi^- \end{pmatrix} = 0 .$$

Como estamos considerando quarks numa cavidade esférica, é conveniente escrever a solução da equação acima em termos de uma expansão em funções esféricas. Retendo apenas o termo de menor energia, obtemos assim

$$\Psi = N e^{-ip^0 t} \begin{pmatrix} j_0(p^0 r) \chi^+ \\ \vec{\sigma} \cdot \hat{r} j_1(p^0 r) \chi^- \end{pmatrix} ,$$

onde j_0 e j_1 são as funções de Bessel de ordem zero e ordem um, respectivamente.

Para que os quarks estejam confinados dentro da cavidade esférica, a componente normal da corrente $J^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ deve ser zero no raio R da cavidade, ou seja,

$$n_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = 0 , \quad (2.55)$$

sendo que n_μ é o versor normal a superfície da esfera e direcionado para fora. Essa condição é equivalente a [28]

$$\bar{\Psi} \Psi|_{r=R} = 0 \Rightarrow [j_0(p^0 R)]^2 - [j_1(p^0 R)]^2 = 0 . \quad (2.56)$$

Se substituirmos as funções de Bessel na expressão acima obtemos uma equação transcendental,

$$\tan p^0 R = \frac{p^0 R}{1 \pm p^0 R} , \quad (2.57)$$

cuja solução de menor energia é dada por [1]

$$p^0 = \frac{2.04}{R} . \quad (2.58)$$

A energia de N quarks contidos na cavidade é então $2.04N/R$. Porém, esse sistema não é estável, pois a energia diminui com o aumento do raio R . Para garantir o confinamento dos quarks numa região de raio finito, foi introduzida uma pressão fenomenológica B [27] [28]. Essa pressão pode ser interpretada como a diferença entre a densidade de energia do vácuo dentro da cavidade e do vácuo fora da cavidade [1]. A energia dos N quarks confinados na cavidade de raio R é escrita então como

$$E = \frac{2.04N}{R} + \frac{4\pi}{3}R^3B . \quad (2.59)$$

Notemos que o primeiro termo decresce com o aumento do raio R , enquanto que o segundo termo aumenta. Se R diminui, o primeiro termo aumenta e o segundo diminui. O raio de equilíbrio é determinado pela condição $dE/dR = 0$, que resulta³

$$R = \left(\frac{2.04N}{4\pi B} \right)^{1/4} . \quad (2.61)$$

³ Poderíamos em princípio ter usado essa expressão para calcular a pressão de sacola B a partir do valor medido do raio de um nucleon. No entanto, é também possível relacionar B com a massa M do nucleon, através da expressão [28]

$$M = \frac{4}{3}(2.04N)^{3/4}(4\pi B)^{1/4} . \quad (2.60)$$

Se fixamos corretamente o raio R do nucleon, obtemos um valor muito grande para a massa M e vice-versa, se fixamos corretamente a massa M obtemos um valor muito grande para o raio R . O critério usado para fixar o valor da pressão B em nosso trabalho será apresentado na seção seguinte.

Dividindo (2.59) pelo volume da cavidade , $V = \frac{4\pi}{3}R^3$, e reescrevendo, obtemos uma expressão para a densidade de energia,

$$\epsilon = \frac{E}{V} \equiv An^{4/3} + B , \quad (2.62)$$

onde $n = \frac{N}{\frac{4\pi R^3}{3}}$ é a densidade de quarks no interior da cavidade. Podemos também calcular a pressão P dos quarks no interior da cavidade a partir de (2.59) e usando a relação $P = -\frac{\partial E}{\partial V}$, obtendo

$$P = \frac{A}{3}n^{4/3} - B . \quad (2.63)$$

As equações acima expressam respectivamente a densidade de energia e a pressão dos quarks confinados no interior de um hádron, quando este é modelado como uma “sacola” de quarks. Podemos usar o modelo de sacola para obter uma equação de estado fenomenológica para o plasma de quarks e glúons, concebendo a matéria de quarks livres como uma “sacola grande”, contendo um grande número de quarks e glúons. Nesse caso substituímos o primeiro termo de (2.62) pela densidade de energia de um gás livre de quarks e glúons em equilíbrio térmico ⁴. Quarks em equilíbrio são governados pela distribuição de Fermi-Dirac, enquanto que os glúons são governados pela distribuição de Bose-Einstein. Podemos então calcular as densidades de energia e bariônica do gás a partir de (2.45) e (2.46), bastando substituir γ no primeiro termo pelo fator de degenerescência

⁴ Essa idéia foi usada por Baym e Chin em [29] para estudar a transição de fase da matéria nuclear para o plasma de quarks e glúons a temperatura nula, com a diferença de que naquele trabalho a densidade de energia continha também um termo de interação entre os quarks. Um pouco depois, Chin construiu um diagrama de fases para a matéria nuclear usando a equação de estado do modelo de Walecka com um termo adicional correspondente a píons interagentes, com o objetivo de aplicar no estudo de colisões de íons pesados relativísticos [30].

dos quarks e anti-quarks e colocar o fator de degenerescência dos glúons no segundo termo. Devemos também substituir *zero* no lugar de m_b e m_π , e o potencial químico dos quarks, μ_q , no lugar de μ_B . A expressão assim obtida pode ser integrada analiticamente. Como na fase hadrônica não incluímos partículas estranhas, por consistência também não incluiremos quarks s na equação de estado do plasma de quarks e glúons. Considerando então somente quarks u e d e tratando os glúons como partículas virtuais, obtemos

$$\epsilon^{pl} = \frac{37\pi^2}{30}T^4 + \frac{1}{3}T^2\mu_B^2 + \frac{1}{54\pi^2}\mu_B^4 + B, \quad (2.64)$$

$$n_B^{pl} = \frac{2}{9} \left(\mu_B T^2 + \frac{\mu_B^3}{9\pi^2} \right). \quad (2.65)$$

Nas expressões acima, usamos a relação $\mu_B = 3\mu_q$, que resulta do fato de que cada bárion é constituído de três quarks. Para ver isso basta lembrar da definição de potencial químico, $\mu_B \equiv \left(\frac{\partial E}{\partial B} \right)_{S,V} = 3 \left(\frac{\partial E}{\partial N_q} \right)_{S,V} \equiv 3\mu_q$.

É interessante notar que no caso de $T = 0$, podemos usar (2.65) para reescrever a densidade de energia como

$$\epsilon \equiv A' n_B^{4/3} + B, \quad (2.66)$$

que é da mesma forma que (2.62).

Podemos calcular a pressão a partir de (2.47), obtendo

$$p^{pl} = \frac{37\pi^2}{90}T^4 + \frac{1}{9}T^2\mu_B^2 + \frac{1}{162\pi^2}\mu_B^4 - B. \quad (2.67)$$

Das expressões (2.64) e (2.67), obtemos facilmente que

$$p^{pl} = \frac{\epsilon^{pl} - 4B}{3}. \quad (2.68)$$

2.4 Construção do diagrama de fases

No momento, a natureza da transição de fase entre o plasma de quarks e glúons e a matéria hadrônica ainda não está bem estabelecida. Neste trabalho, assumimos que a transição de fase é de primeira ordem. Na transição de fase deve-se manter os equilíbrios térmico, químico e mecânico [31], o que significa que devemos ter

$$p^H = p^{pl}, T^H = T^{pl}, \mu_B^H = \mu_B^{pl}. \quad (2.69)$$

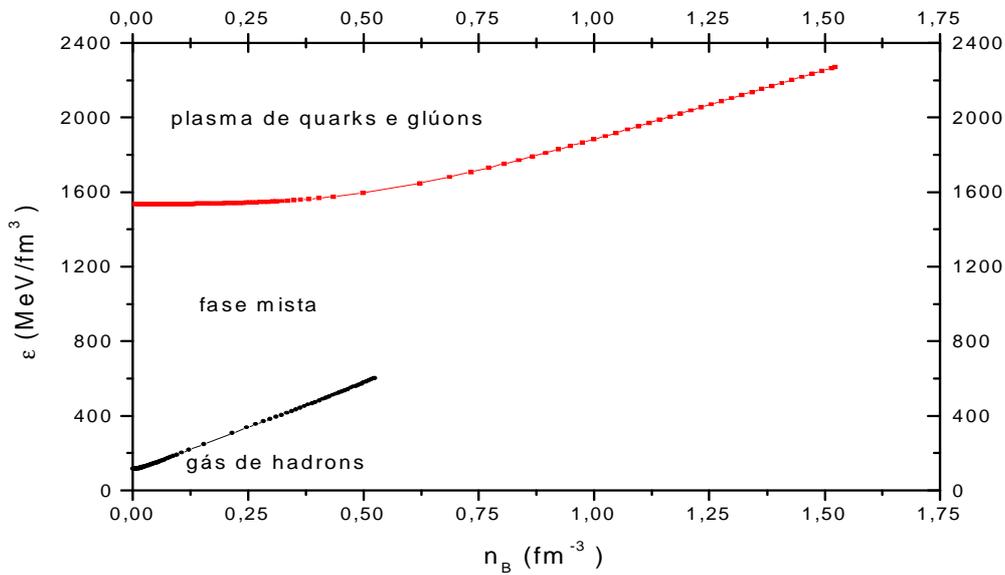
Aqui, o superescrito “H” denota a fase hadrônica.

Numericamente, a transição de fase foi calculada determinando-se o ponto de cruzamento das curvas de pressão em função do potencial químico para temperatura fixada. Variando a temperatura e repetindo o procedimento para cada temperatura, construímos os diagramas de fases para as duas equações de estado apresentadas neste capítulo.

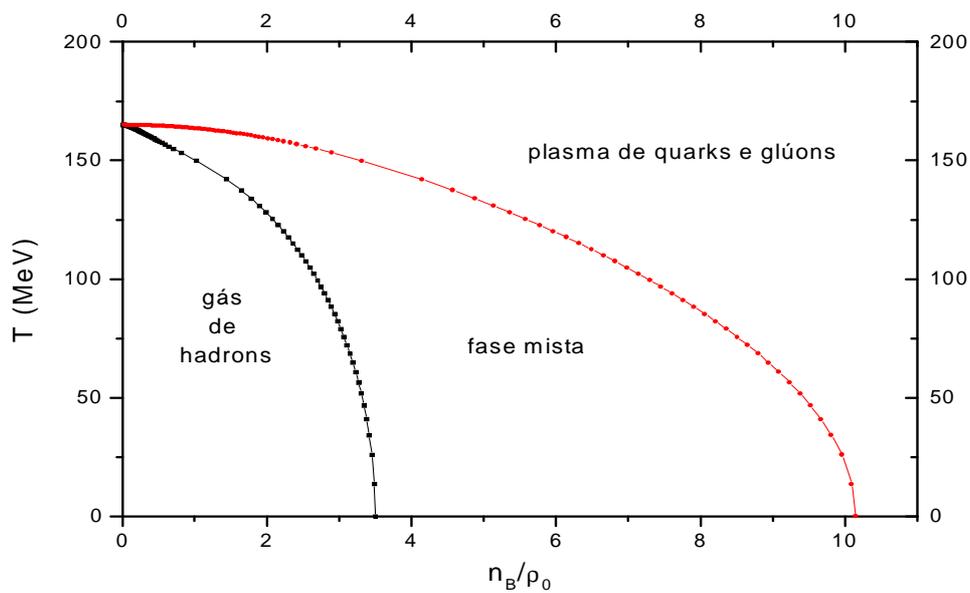
Cálculos de QCD na rede predizem que, para densidade bariônica nula, a transição de fase ocorre em $T \approx 165 MeV$ [1]. Os valores da pressão de sacola foram escolhidos para reproduzir essa temperatura. Para a transição com o gás interagente, o valor escolhido foi $B_{GI} = 361.5 MeV/fm^3$. Para o gás não interagente o valor difere sutilmente, $B_{GL} = 361.9 MeV/fm^3$. Na literatura, os valores usuais da pressão de sacola estão entre $60 MeV/fm^3$ e $400 MeV/fm^3$ [1].

As figuras 2.4 e 2.5 representam os diagramas de fases dos gases de nucleons interagentes e não interagentes, respectivamente. Conforme já mencionamos, as maiores diferenças aparecem na região de altas densidades, que corresponde a temperaturas baixas de transição de fase.

Daqui por diante, nos referiremos ao *gás de nucleons interagentes com píons livres* simplesmente como *gás interagente* e ao *gás de nucleons não interagentes com píons livres e exclusão de volume* como *gás livre*.



(a)

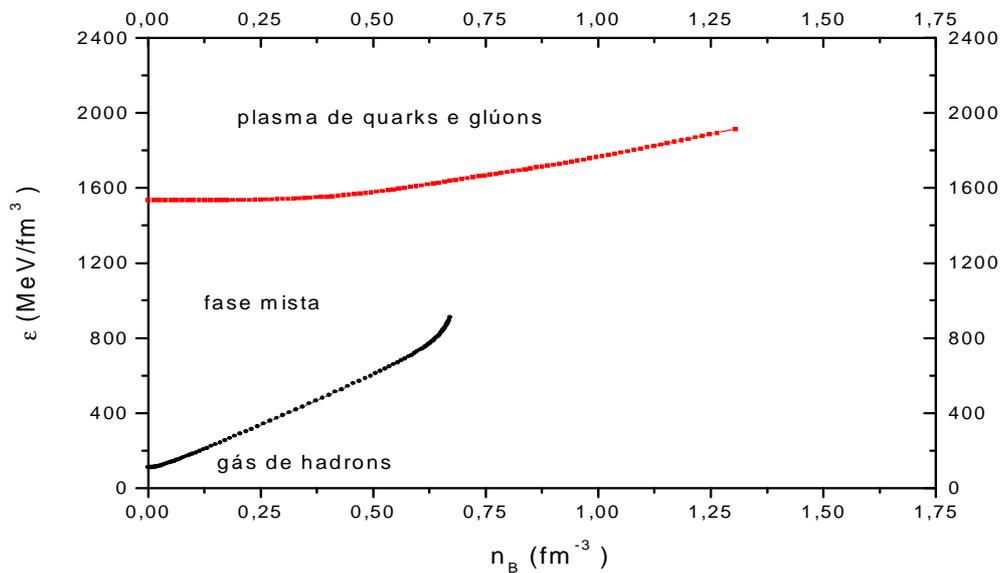


(b)

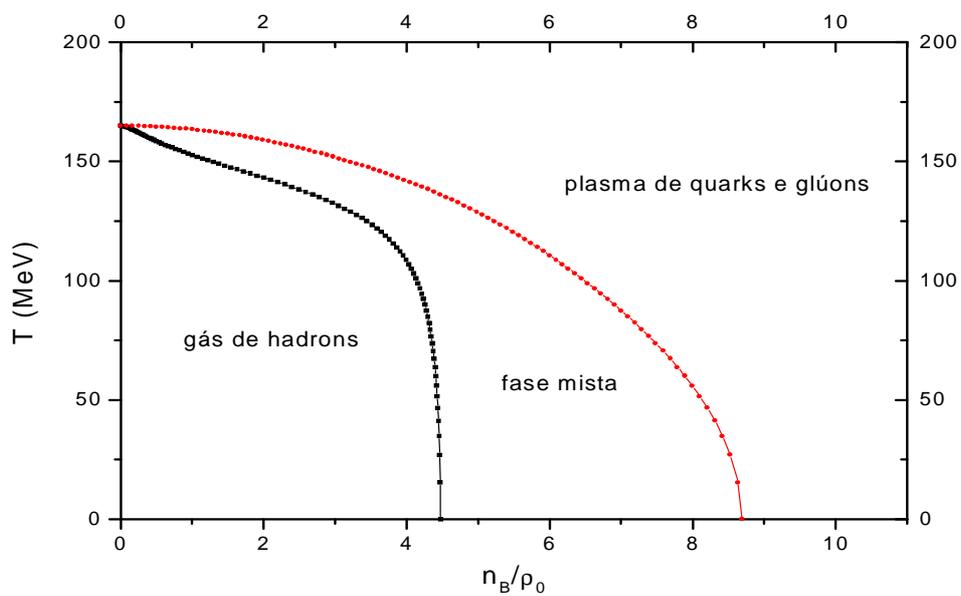
Fig. 2.4. Diagramas de fase do gás interagente.

a) Diagrama da densidade de energia em função da densidade bariônica.

b) Diagrama da temperatura em função da densidade bariônica.



(a)



(b)

Fig. 2.5. Diagramas de fase do gás livre.

a) Diagrama da densidade de energia em função da densidade bariônica.

b) Diagrama da temperatura em função da densidade bariônica.

Capítulo 3

Procedimentos numéricos

Como já foi mencionado no capítulo 1, as equações da hidrodinâmica relativística só podem ser resolvidas numericamente. Neste capítulo descreveremos o procedimento numérico usado para resolver essas equações. No método usado, a equação de estado deve estar na forma $p \equiv p(\epsilon, n_B)$. Como as equações de estado apresentadas no capítulo anterior para a fase hadrônica não possuem uma expressão analítica nessa forma, precisamos também adotar um procedimento numérico para introduzir as equações de estado nas equações da hidrodinâmica. Na seção a seguir descrevemos o procedimento numérico para as equações de estado.

3.1 Cálculo numérico das equações de estado

Tanto a equação de estado do gás interagente quanto a do gás livre foram apresentadas em forma parametrizada em termos de integrais numéricas da temperatura e da pressão. A equação de estado do gás interagente é substancialmente mais difícil de ser calculada devido à relação de auto-consistência para a determinação da massa efetiva do nucleon (2.44). Por essa razão descreveremos o método empregado para o gás interagente. Para o caso não interagente o método é o mesmo, porém relativamente muito mais simples, pois não temos a complicação que é gerada pela relação de auto-consistência.

Uma primeira idéia (ingênua) para relacionar ϵ e n_B com p através da equação de estado seria calcular os valores de ϵ , n_B e p para diversos valores de ν e T , obtendo assim uma tabela a partir da qual, dados os valores de ϵ e n_B , podemos obter p por interpolação. No entanto uma tabela assim construída teria espaçamento irregular nos valores das densidades de energia e bariônica, o que dificultaria a determinação da pressão a partir de ϵ e n_B dados. O procedimento que foi utilizado seria, num certo sentido, o inverso deste: dados os valores de ϵ e n_B , invertemos as expressões (2.40) e (2.39) para obtermos os valores correspondentes de T e ν e em seguida, introduzindo esses valores em (2.38), calculamos a pressão. Repetindo esse procedimento para um conjunto grande de pares (ϵ, n_B) , construímos uma tabela para as quantidades termodinâmicas na fase hadrônica,¹ com a desejada propriedade de espaçamento regular entre os valores de ϵ e n_B .

O método numérico empregado para a inversão das expressões (2.40) e (2.39) é o chamado *método de Newton-Raphson para sistemas não-lineares* [32]. Esse método é talvez o mais intuitivo para resolver esse tipo de problema, além de ter a vantagem de convergir quadraticamente, e consiste em linearizar o sistema formado por (2.40) e (2.39) e em seguida resolver esse sistema iterativamente a partir de uma estimativa inicial (T^0, ν^0) . Mais especificamente, consiste em resolver o sistema 2×2

$$\begin{aligned}\delta\epsilon^{N+1} &= \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T}\right)_{\nu}(T^N, \nu^N)\delta T^{N+1} + \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\nu}\right)_T(T^N, \nu^N)\delta\nu^{N+1}, \\ \delta n^{N+1} &= \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{\nu}(T^N, \nu^N)\delta T^{N+1} + \left(\frac{\partial n}{\partial\nu}\right)_T(T^N, \nu^N)\delta\nu^{N+1},\end{aligned}\quad (3.1)$$

onde $\delta\epsilon^{N+1} \equiv \epsilon - \epsilon(T^N, \nu^N)$, $\delta n^{N+1} \equiv n - n(T^N, \nu^N)$ e o superescrito indica a N-ésima

¹ Na fase mista as quantidades termodinâmicas são dadas pela expressão

$$q = \lambda q_H + (1 - \lambda)q_{pl},$$

sendo q uma denominação genérica para n_B , ϵ , etc., e λ é a fração de matéria na fase hadrônica.

Dado um par (ϵ, n_B) , faz-se uma primeira interpolação para determinar λ . Em seguida é feita uma segunda interpolação para determinar q_H e q_{pl} .

iteração, e omitimos o subscrito “B” na densidade bariônica para não saturar a notação.

A solução do sistema acima é dada por

$$\begin{aligned}\delta T^{N+1} &= \frac{D\delta\epsilon^{N+1} - B\delta n^{N+1}}{AD - BC} \\ \delta\nu^{N+1} &= \frac{A\delta n^{N+1} - C\delta\epsilon^{N+1}}{AD - BC},\end{aligned}\tag{3.2}$$

$$A \equiv \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial T}\right)_{\nu}(T^N, \nu^N), B \equiv \left(\frac{\partial\epsilon}{\partial\nu}\right)_T(T^N, \nu^N),$$

$$C \equiv \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_{\nu}(T^N, \nu^N), D \equiv \left(\frac{\partial n}{\partial\nu}\right)_T(T^N, \nu^N).$$

Dada uma estimativa (T^N, ν^N) , calculamos a partir da expressão acima as correções δT^{N+1} e $\delta\nu^{N+1}$ em T^N e ν^N , respectivamente, obtendo assim a estimativa (T^{N+1}, ν^{N+1}) , sendo $T^{N+1} = T^N + \delta T^{N+1}$ e $\nu^{N+1} = \nu^N + \delta\nu^{N+1}$. Em seguida, introduzimos essas estimativas de ordem $N + 1$ da solução (T, ν) novamente em (3.2) para obter a estimativa de ordem $N + 2$, e assim sucessivamente, até que o erro total no par (ϵ, n_B) , estimado como $E^N = \sqrt{(\delta\epsilon^N)^2 + (\delta n^N)^2}$, seja menor que uma certa tolerância E_{tol} .

Devido à relação de auto-consistência para a massa efetiva, as derivadas parciais acima tiveram de ser calculadas numericamente².

O erro relativo nos pontos $(\epsilon, n_B)^{ij}$ da tabela foi estimado como sendo $< 10^{-7}$ para a tabela do gás interagente e $< 10^{-9}$ para o gás livre.

Devemos mencionar ainda que, devido à possibilidade de ocorrência de três soluções para a massa efetiva para um determinado par de valores (T, ν) , o algoritmo de inversão da equação de estado divergiu em algumas regiões do diagrama de fases. Mais especificamente, existem valores de T e ν para os quais dois valores da massa efetiva se tornam

² A derivação numérica pode a princípio parecer muito simples, mas alguns cuidados com erros de arredondamento precisam ser tomados. Um método eficiente de se calcular derivadas numéricas é apresentado em [32].

infinitamente próximos (ver figura 2.1a no capítulo 2). Nessas regiões o algoritmo diverge devido a dificuldade de se delimitar um intervalo que contenha apenas uma solução para a massa. Essa dificuldade foi contornada fazendo interpolação de terceira ordem a partir dos pontos da tabela adjacentes à lacuna gerada por uma divergência. O erro relativo cometido nesses pontos assim calculados foi estimado como sendo $< 10^{-6}$.

As tabelas dos dois gases foram, então, empregadas na solução das equações da hidrodinâmica. Para um dado par de valores (ϵ, n_B) , os correspondentes valores das quantidades termodinâmicas T , ν , m_b^* ou p podem ser calculados por interpolação de primeira ordem em duas variáveis a partir dos vértices $(\epsilon, n_B)^{ij}$ do quadrado no qual o ponto (ϵ, n_B) está inserido³, conforme mostra a figura.

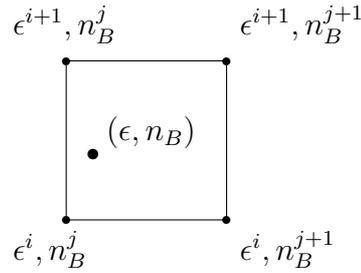


Fig. 3.1: interpolação de um ponto (ϵ, n_B) num quadrado da tabela da equação de estado.

O erro relativo cometido nessa interpolação foi estimado como $< 10^{-4}$ na pressão. Para a temperatura e o potencial químico, exceto na região de baixas temperaturas, o erro foi bem menor, o que já era esperado, pois $\epsilon, p \sim T^4, \nu^4$. Quando a temperatura se tornava baixa, as derivadas parciais de ϵ e n_B em relação a T , $(\frac{\partial \epsilon}{\partial T})_\nu$ e $(\frac{\partial n}{\partial T})_\nu$, se aproximavam gradativamente de zero. Consequentemente, como a tabela foi construída com espaçamentos $d\epsilon$ e dn constantes, na região de baixas temperaturas uma variação $d\epsilon$ na densidade de energia, por exemplo, correspondia a uma grande variação da temperatura. Isso comprometia a convergência do algoritmo de Newton Raphson, pois este depende de

³ Os métodos de interpolação de ordem n em uma ou mais variáveis podem ser encontrados em qualquer livro de cálculo numérico, como por exemplo em [32]. Explicações mais simples e mais didáticas de métodos de interpolação em uma variável podem ser encontradas em [33].

estimativas iniciais suficientemente próximas da solução (T, ν) para convergir. Além disso o erro relativo na temperatura se tornou maior nessa região devido ao maior espaçamento nessa quantidade. Mais especificamente, o erro relativo em T chegou a atingir 10% na região de baixas temperaturas. No entanto, esse valor alto para o erro não foi problemático em nossos cálculos, pois de fato somente a pressão é relevante na solução das equações de movimento do fluido. Além disso, o freeze-out foi feito para $T \geq 90 \text{ MeV}$.

3.2 Solução numérica das equações da hidrodinâmica

A seguir descreveremos um método eficiente que pode ser usado para resolver equações da forma

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0$$

e, em seguida, como aplicar este método para resolver as equações de conservação do fluido.

3.2.1 O algoritmo RHLLE

A idéia essencial do chamado algoritmo RHLLE (*Relativistic Harten-Lax-van Leer-Einfeldt*) consiste em aproximar a distribuição espacial inicial da quantidade U no fluido por uma grade de células em cujo interior a quantidade U tem valor constante (ver figura 3.2), ou seja, em aproximar a distribuição inicial de U em uma sequência de descontinuidades e em seguida resolver o problema do decaimento da descontinuidade em cada célula.

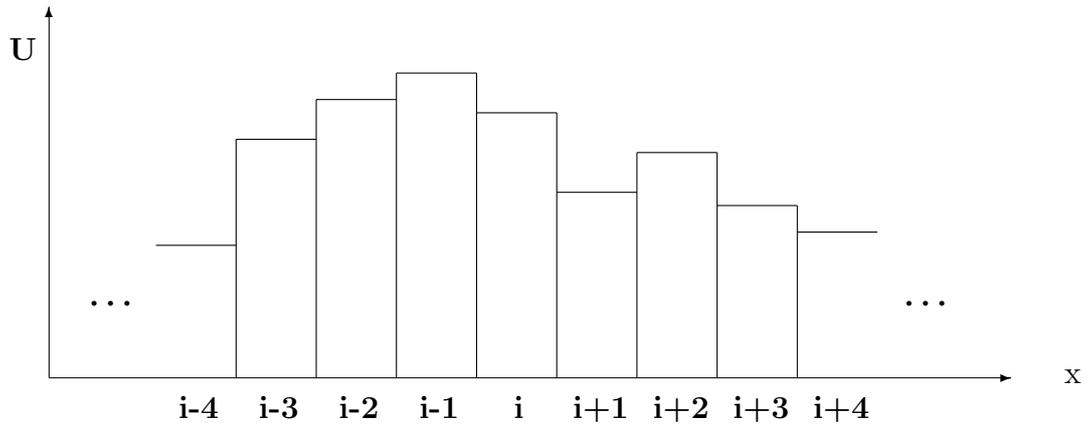


Fig. 3.2. Aproximação da distribuição inicial da grandeza \mathbf{U} como uma grade discreta.

Consideremos uma descontinuidade numa determinada quantidade termodinâmica U do fluido no referencial do laboratório, em $t = 0$. Denotando o valor de U a esquerda da descontinuidade como U_l e o valor a direita como U_r e supondo que a evolução temporal do fluido ocorre apenas em uma dimensão espacial, o aspecto que essa descontinuidade adquire após decorrido um tempo $t > 0$ é mostrado na figura abaixo. Por definição, $U_l > U_r$.

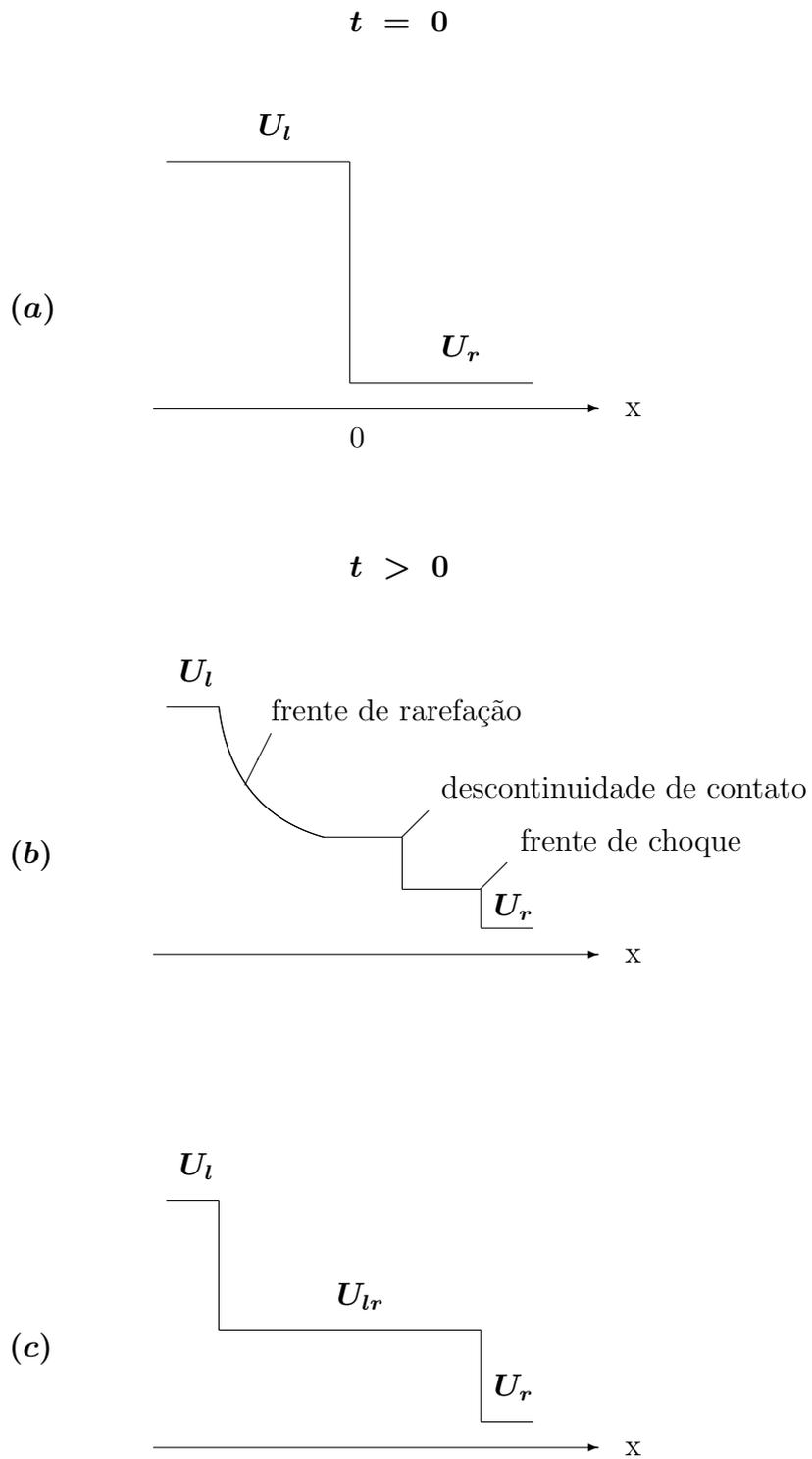


Fig. 3.3. (a) Condição inicial do problema de Riemann em $t = 0$. (b) Solução do problema de Riemann em $t > 0$. (c) Aproximação da solução feita por um algoritmo do tipo Godunov.

Na figura 3.3b é representada uma onda de rarefação que se propaga na direção da densidade mais alta e uma frente de choque que se propaga na direção da menor densidade. Conectando essas duas regiões existe uma descontinuidade de contato⁴. A descrição do decaimento de uma descontinuidade no fluido, que esboçamos qualitativamente, constitui o chamado *problema de Riemann* [6] [34]. Um algoritmo que resolve esse problema é conhecido como um *algoritmo de Godunov*. Na realidade, o algoritmo RHLLE não resolve o problema de Riemann propriamente dito, cuja solução está qualitativamente representada na figura 3.3b, mas fornece uma solução aproximada, representada na figura 3.3c. Por essa razão, é conhecido como um algoritmo *do tipo Godunov*.

O RHLLE está descrito em [34]. Na mesma referência é apresentado e discutido um teste desse algoritmo, que se mostrou eficiente para resolver as equações de conservação da hidrodinâmica tanto nas regiões termodinamicamente normais (fases de plasma e hadrônica), como na região termodinamicamente anômala (fase mista)⁵.

⁴ Ondas de choque e descontinuidades de contato são soluções descontínuas das equações de movimento do fluido. Fisicamente, uma onda de choque pode ser entendida como a superposição de um grande número de perturbações sônicas infinitesimais [6]. Uma descontinuidade de contato é uma descontinuidade com pressões iguais dos dois lados da superfície de descontinuidade [6]. Uma discussão detalhada sobre ondas de choque e descontinuidades de contato pode também ser encontrada em [9].

⁵ O fluido pode ser classificado como matéria *termodinamicamente normal* ou *termodinamicamente anômala* de acordo com o sinal da quantidade

$$\Sigma \equiv \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \epsilon^2} \right)_{s/n} + 2c_s^2 \frac{1 - c_s^2}{\epsilon + p},$$

onde c_s^2 é a velocidade do som no fluido. Se $\Sigma > 0$ a matéria é termodinamicamente normal e, para um fluido em expansão, as soluções estáveis das equações da hidrodinâmica são ondas simples de rarefação. Por outro lado, quando $\Sigma < 0$, a matéria é chamada de termodinamicamente anômala, e as soluções estáveis são ondas de choque de rarefação [6]. Mais precisamente, quando ocorre uma transição de fase de primeira ordem, na fase mista tem-se $\Sigma = 0$. No entanto, conforme foi discutido em [34], condições iniciais descontínuas como as que apresentamos no capítulo 1 levarão a formação de ondas de choque de rarefação na fase mista.

Consideremos uma equação na forma

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0, \quad (3.3)$$

onde $F(U) \equiv Uv + f$. A distribuição inicial de $U(x, 0)$ é dada por

$$U(x, 0) \equiv \begin{cases} U_l & , x < 0 \\ U_r & , x \geq 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

com $U_l \neq U_r$. Para $t > 0$, $U(x, t)$ é

$$U(x, t) \equiv \begin{cases} U_l & , x < b_l t \\ U_{lr} & , b_l t \leq x < b_r t \\ U_r & , x \geq b_r t. \end{cases} \quad (3.5)$$

b_l e b_r são as velocidades do decaimento para a esquerda ou para a direita, respectivamente. Para que o decaimento de uma célula não ultrapasse os limites da respectiva célula, devemos considerar tempos tais que $t < \Delta x / |b_{l,r}|$. No entanto esse problema é automaticamente evitado se o algoritmo satisfaz o critério de que $\lambda \equiv \Delta t / \Delta x < 1$, e esse critério é sempre satisfeito se $|b_{l,r}| < 1$.

Substituindo $U(x, t)$ dado por (3.5) em (3.3) e em seguida integrando no intervalo $[x_{min}, x_{max}]$, com $x_{min} < b_l t$ e $x_{max} > b_r t$, obtemos

$$U_{lr} \equiv \frac{b_r U_r - b_l U_l - F(U_r) + F(U_l)}{b_r - b_l}. \quad (3.6)$$

Integrando (3.3) no intervalo $[x_{min}, 0]$ ou $[0, x_{max}]$, obtemos

$$F(U_{lr}) = \frac{b_r F(U_l) - b_l F(U_r) + b_l b_r (U_r - U_l)}{b_r - b_l} . \quad (3.7)$$

Reescrevendo (3.3) na forma de uma equação de diferenças finitas,

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \lambda(G_{j+1/2} - G_{j-1/2}) , \quad (3.8)$$

onde j é a posição da célula e n denota o passo de tempo, e tomando $G_{j+1/2} \equiv F(U_{j+1/2})$, obtemos um esquema de 1ª ordem para calcular a evolução temporal.

Queremos no entanto um algoritmo de 2ª ordem. Uma maneira de conseguir isto consiste em primeiro trocar o valor constante de U_j^n em cada célula por uma “distribuição linear” da forma

$$U_{j\pm}^n \equiv U_j^n \pm \frac{1}{2} S(\Delta_{j-1}, \Delta_j) , \quad (3.9)$$

onde $\Delta_j \equiv (U_{j+1}^n - U_j^n)$ e $S(\Delta_{j-1}, \Delta_j)$ é definido como

$$S(\Delta_{j-1}, \Delta_j) \equiv \begin{cases} \Delta_{j-1} & \text{se } |\Delta_{j-1}| \leq |\Delta_j| , \Delta_{j-1} \cdot \Delta_j > 0 \\ \Delta_j & \text{se } |\Delta_{j-1}| > |\Delta_j| , \Delta_{j-1} \cdot \Delta_j > 0 \\ 0 & \text{para os demais casos .} \end{cases} \quad (3.10)$$

Ao efetuarmos a etapa correspondente à equação (3.8) no algoritmo, devemos checar se $E \leq |\vec{M}|$, para que a causalidade seja localmente verificada no fluido.

Determinamos então valores de U a meio passo de tempo através da equação de

diferenças

$$U_{j\pm}^{n+1/2} = U_{j\pm}^n - \frac{\lambda}{2}(F(U_{j+}^n) - F(U_{j-}^n)). \quad (3.11)$$

Após esta etapa, deve-se novamente checar se $E \leq |\vec{M}|$. Substituindo (3.11) em (3.7) obtemos $G_{j+1/2}$

$$G_{j+1/2} = \frac{b_{j+1/2}^r F(U_{j+}^{n+1/2}) - b_{j+1/2}^l F(U_{(j+1)-}^{n+1/2}) + b_{j+1/2}^l b_{j+1/2}^r (U_{(j+1)-}^{n+1/2} - U_{j+}^{n+1/2})}{b_{j+1/2}^r - b_{j+1/2}^l}. \quad (3.12)$$

Deve-se notar que $G_{j-1/2} \equiv G_{(j-1)+1/2}$.

Fisicamente, a velocidade de propagação de um sinal no fluido é a soma relativística da velocidade do elemento de fluido no referencial do laboratório com a velocidade do som no fluido: um sinal viajando para a direita ou para a esquerda tem velocidade $(v + c_S)/(1 + vc_S)$ ou $(v - c_S)/(1 - vc_S)$, respectivamente.

Numericamente, as velocidades $b_{j+1/2}^r$ e $b_{j+1/2}^l$ são escolhidas como

$$\begin{aligned} b_{j+1/2}^r &= \max\left\{0, \frac{\bar{v} + \bar{c}_S}{1 + \bar{v}\bar{c}_S}, \frac{v_{(j+1)-}^{n+1/2} + c_{S,(j+1)-}^{n+1/2}}{1 + v_{(j+1)-}^{n+1/2} c_{S,(j+1)-}^{n+1/2}}\right\}, \\ b_{j+1/2}^l &= \min\left\{0, \frac{\bar{v} - \bar{c}_S}{1 - \bar{v}\bar{c}_S}, \frac{v_{(j+1)-}^{n+1/2} - c_{S,(j+1)-}^{n+1/2}}{1 - v_{(j+1)-}^{n+1/2} c_{S,(j+1)-}^{n+1/2}}\right\}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde

$$\bar{v} \equiv \frac{\sqrt{E_{(j+1)-}^{n+1/2}} v_{(j+1)-}^{n+1/2} + \sqrt{E_{j+}^{n+1/2}} v_{j+}^{n+1/2}}{\sqrt{E_{(j+1)-}^{n+1/2}} + \sqrt{E_{j+}^{n+1/2}}}, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
\bar{c}_S^2 &\equiv \frac{\sqrt{E_{(j+1)-}^{n+1/2}} (c_{S,(j+1)-}^{n+1/2})^2 + \sqrt{E_{j+}^{n+1/2}} (c_{S,j+}^{n+1/2})^2}{\sqrt{E_{(j+1)-}^{n+1/2}} + \sqrt{E_{j+}^{n+1/2}}} \\
&+ \eta \frac{\sqrt{E_{(j+1)-}^{n+1/2}} E_{j+}^{n+1/2}}{(\sqrt{E_{(j+1)-}^{n+1/2}} + \sqrt{E_{j+}^{n+1/2}})^2} \left(v_{(j+1)-}^{n+1/2} - v_{j+}^{n+1/2} \right)^2 . \tag{3.15}
\end{aligned}$$

O uso de funções máximo e mínimo serve para garantir o sinal correto para as velocidades de sinal. As fórmulas acima são as chamadas médias de Roe. Usamos o mesmo valor de η sugerido em [34], $\eta = 0.5$.

No vácuo, tomamos $b_{j+1/2}^r = 1$ e $b_{j+1/2}^l = -1$. Deve-se fazer um último teste se $E \leq |\vec{M}|$. Quando esta condição não é satisfeita, tomamos simplesmente $E = |\vec{M}|$. O efeito sobre a conservação global de energia é desprezível.

Finalmente, precisamos determinar a velocidade v para completar o cálculo. As quantidades E , \vec{M} e R se relacionam com as quantidades no referencial de repouso através das transformações

$$E = (\epsilon + p)\gamma^2 - p , \tag{3.16}$$

$$\vec{M} = (\epsilon + p)\gamma^2 \vec{v} , \tag{3.17}$$

$$R = n\gamma . \tag{3.18}$$

Podemos facilmente isolar ϵ a partir das expressões acima e é imediato isolar n a partir de (3.18). Obtemos assim

$$\epsilon = E - |\vec{M}| |\vec{v}| , n = R\sqrt{1 - v^2} . \tag{3.19}$$

Notando que $M = (E + p)v$, segue que

$$v = \frac{M}{E + p(E - Mv, R\sqrt{1 - v^2})}. \quad (3.20)$$

Numa dada iteração, a partir de E , \vec{M} e R e partindo de uma estimativa inicial para v calculamos ϵ e n usando (3.19). Conhecendo ϵ e n interpolamos p na tabela da equação de estado, como já explicado na seção 3.1 e, usando (3.20), obtemos uma nova estimativa para v . Repetindo o processo obtemos então uma terceira estimativa e assim sucessivamente até que o erro cometido seja menor que uma determinada tolerância.

Na região da tabela onde $T \leq 80MeV$, devido à dificuldade já explicada com as baixas temperaturas, o erro relativo na velocidade v foi de 10^{-3} . Fora dessa região, o erro relativo em v foi $< 10^{-15}$.

3.2.2 Correção de Sod

O algoritmo RHLLE serve para resolver problemas de transporte da forma (3.3). No entanto, as equações de conservação da hidrodinâmica (1.37) a (1.39) são da forma

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = -H(U), \quad (3.21)$$

com $U \equiv R$, E ou M , $F(U) \equiv Rv_T$, $(E + p)v$ ou $Mv_T + p$ e $H(U) \equiv (\frac{v_T}{r} + \frac{1}{t})(E + p)$, $(\frac{v_T}{r} + \frac{1}{t})M$ ou $(\frac{v_T}{r} + \frac{1}{t})R$.

Uma forma de poder aplicar o RHLLE para resolver as equações de conservação consiste em primeiro resolver o problema (3.3) e em seguida corrigir o resultado resolvendo a equação ordinária

$$\frac{dU}{dt} = -H(U) \quad (3.22)$$

na forma de uma equação de diferenças:

$$U = \bar{U} - \Delta t G(\bar{U}) . \quad (3.23)$$

Mais precisamente, em um dado passo de tempo do RHLLE obtemos uma estimativa \bar{U}^n da solução e então aplica-se a correção acima para obter a solução U^n . Efetuamos então mais uma iteração do RHLLE para obtermos \bar{U}^{n+1} e assim sucessivamente. Esse esquema de correção é conhecido como método de Sod [6].

Em [34] foi mostrado que o RHLLE necessita de um certo número de passos de tempo para começar a convergir para a solução correta. Em particular, nessa referência o RHLLE foi usado para resolver um problema solúvel analiticamente, e foi constatado que a solução numérica obtida com o RHLLE começava a convergir para a solução analítica após 20 passos de tempo. Neste trabalho, adotou-se $\lambda \equiv \Delta t / \Delta x = 0.99$ e $\Delta x = 0.01R$, o que implica que $\Delta t = \lambda \Delta x = 0.0099R$. Conforme explicaremos no capítulo a seguir, escolhemos $R = 6fm$, então em nossos cálculos a solução numérica começava a convergir para a solução correta após um intervalo de tempo físico de $20 \times \Delta t \cong 1.2fm$. Foi usada uma grade com 1000 células para um sistema com diâmetro inicial $2R = 12fm$, e a expansão do sistema foi calculada para 500 passos de tempo, o que significa que a evolução espaço-temporal do fluido foi calculada até um tempo físico de $t_0 + 500\Delta t = 30.7fm$, sendo $t_0 = 1fm$ o instante inicial adotado, conforme já mencionado no capítulo 1.

O cálculo das distribuições de momento transversal através da Fórmula de Cooper-Frye exige apenas uma integração tripla. Como os métodos de integração numérica costumam ser bastante eficientes, a dispersão gerada por eles é desprezível. Dessa forma, o erro que é acrescentado nessa etapa do cálculo é oriundo essencialmente da determinação dos pontos de freeze-out, que por sua vez é feita a partir da solução da hidrodinâmica usando interpolação de 1ª ordem. O erro máximo estimado nas distribuições de p_T não ultrapassou 1%.

Capítulo 4

Resultados

As equações da hidrodinâmica apresentadas no capítulo 1 foram resolvidas usando três conjuntos de condições iniciais, fixados para reproduzir dados do AGS, do SPS e do RHIC ¹. Conforme já explicado no capítulo 1, a partir do número de nucleons líquidos na região central estimamos a densidade bariônica inicial $n_B(\tau_0)$. Partindo de estimativas teóricas para a entropia própria $\frac{s}{n_B}$, feitas usando modelos microscópicos e usando a equação de estado da fase de plasma, apresentada no capítulo 2, obtemos a densidade de energia inicial ϵ_0 .

Existem diversos trabalhos publicados onde se usam modelos microscópicos para estudar colisões nucleares e onde podemos encontrar estimativas da entropia própria produzida $\frac{s}{n_B}$. Por exemplo, em [16] utilizou-se o UrQMD (*Ultrarelativistic Quantum Molecular Dynamics model*, um modelo de transporte microscópico de N corpos desenvolvido para estudar colisões de íons pesados) para calcular a densidade de energia e as densidades bariônica e de estranheza em vários instantes de tempo entre $t = 0fm$ e $t = 18fm$ na

¹ Em colisões no AGS, a imagem dos núcleos se aproximando no referencial de centro de massa como “panquecas” de espessura zero não é, a rigor, uma aproximação muito razoável, uma vez que a energia da colisão não é assim tão alta. Porém, usamos esse modelo também para as condições iniciais do AGS, uma vez que o foco deste trabalho é na comparação das equações de estado que adotamos. De qualquer maneira, essa idealização influi apenas indiretamente na estimativa das condições iniciais. De fato, como veremos logo adiante, os resultados obtidos, inclusive para o AGS, foram bastante satisfatórios.

matéria nuclear produzida em colisões $Au + Au$ a $10.7 GeV$ por nucleon no AGS. Usando a equação de estado de um modelo de gás ideal de hádrons com estatística de Boltzmann e igualando-se as expressões das densidades bariônica, de estranheza e de energia do gás ideal de hádrons com os respectivos valores obtidos para essas quantidades a partir do UrQMD, em cada instante considerado, foram extraídos os valores da temperatura e dos potenciais químicos bariônico e de estranheza e, dessa maneira, foi possível calcular os valores da entropia própria para vários instantes de tempo. Concluiu-se a partir dos resultados que a expansão é aproximadamente isentrópica para $t > 10 fm$ e que o valor da entropia própria a partir desse instante é $\frac{s}{n_B} \cong 12$.

Cálculos com modelos microscópicos feitos para energias do SPS e do RHIC fornecem $\frac{s}{n_B} \approx 45$ e $\frac{s}{n_B} \approx 200$, respectivamente, para colisões nesses aceleradores (cf. por exemplo [11] e referências neste artigo). É interessante mencionar que em [35] é apresentado um estudo da produção de entropia em colisões de íons pesados no AGS e no SPS usando três modelos macroscópicos diferentes (RHTA generalizado, geometrical overlap model e three-fluid hydrodynamics), onde se obteve $\frac{s}{n_B} = 11$ para colisões no AGS e $\frac{s}{n_B} = 38$ para colisões no SPS (resultados obtidos com o modelo de três fluidos). Neste trabalho adotamos $\frac{s}{n_B} = 12$ para o AGS, $\frac{s}{n_B} = 45$ para o SPS e $\frac{s}{n_B} = 200$ para o RHIC.

No caso do AGS, o número líquido de prótons na região central de rapidez produzido numa colisão central de dois núcleos de ouro com energia de $10.8 GeV$ por nucleon é $\frac{dN}{dy} = 60$, de acordo com dados da colaboração E866 [36] [37]. Como ambas as equações de estado que utilizamos correspondem a matéria nuclear simétrica (nº de prótons = nº de nêutrons), calculamos o número bariônico inicial como $(p - \bar{p}) \times 2 = 120$. Estimando o raio do ouro como sendo $R = 6 fm$ e o tempo necessário para o sistema termalizar e entrar em equilíbrio como $\tau_0 = 1 fm$, obtemos que o volume inicial do sistema é $\pi R^2 \tau_0 \cong 113.1 fm^3$, o que implica que a densidade bariônica inicial é $n_B(\tau_0) \cong 7.07 \rho_0$, sendo $\rho_0 = 0.15 fm^{-3}$ a densidade da matéria nuclear no estado fundamental. A partir desse valor de $n_B(\tau_0)$, juntamente com o valor da entropia própria adotada para o AGS, $\frac{s}{n_B} = 12$, e usando a equação de estado do plasma, apresentada no capítulo 2, obtivemos a temperatura e

o potencial químico bariônico iniciais para o AGS, $T_0 = 156.2MeV$ e $\mu_{B0} = 1017MeV$, respectivamente, e a correspondente densidade de energia inicial, $\epsilon(\tau_0) \cong 2.66 \frac{GeV}{fm^3}$.

Em colisões centrais $Pb+Pb$ a $158GeV$ por nucleon no SPS, a multiplicidade líquida de prótons na região central de rapidez é $\frac{dN}{dy} = 26.6 \pm 3.7$, segundo dados da colaboração NA49 [12] [38]. Estimando o raio do chumbo também como $R = 6fm$ e tomando novamente $\tau_0 = 1fm$, obtemos, da maneira já explicada no parágrafo anterior, $n_B(\tau_0) \cong 3.14\rho_0$ para o SPS. Com esse valor para a densidade bariônica inicial juntamente com o valor adotado para a entropia própria no SPS, $\frac{s}{n_B} = 45$, obtemos $T_0 = 213.2MeV$ e $\mu_{B0} = 347.8MeV$, o que implica que $\epsilon(\tau_0) \cong 3.88 \frac{GeV}{fm^3}$.

No RHIC, a multiplicidade líquida de prótons na região central de rapidez para colisões $Au + Au$ a $\sqrt{s_{NN}} = 200GeV$ é $\frac{dN}{dy} = 6.4 \pm 0.4(\text{estatístico}) \pm 1.0(\text{sistemático})$, segundo dados da colaboração BRAHMS [13] [39]. A densidade bariônica inicial é $n_B(\tau_0) \cong 0.755\rho_0$, e os correspondentes valores da temperatura e do potencial químico bariônico iniciais são $T_0 = 220.4MeV$ e $\mu_{B0} = 80.5MeV$, e a densidade de energia inicial é $\epsilon(\tau_0) \cong 4.11 \frac{GeV}{fm^3}$.

As equações (1.37)-(1.39) foram resolvidas usando os três conjuntos de condições iniciais apresentados acima. Em seguida, usando a expressão (1.49), foram calculadas as distribuições de p_T , momento transversal médio e multiplicidade de píons. Para verificar se as distribuições de p_T obtidas usando ambos os modelos tinham a mesma normalização, foram calculadas também as multiplicidades de nucleons, e verificou-se que a menos de dispersões numéricas ($< 0.2\%$) as distribuições possuem a mesma normalização, e também que esta é igual ao valor escolhido de $\frac{dN_B}{dy}$. Com a finalidade de procurar por efeitos do meio, foram consideradas diversas temperaturas de freeze-out, além do valor mais usual, $T_{fo} \approx m_\pi$.

Nas seções a seguir são apresentados os resultados obtidos e comparações com dados experimentais. Lembremos que, como já foi dito no final do capítulo 2, estamos chamando, por economia, o *gás de nucleons interagentes com píons livres* simplesmente de *gás interagente*, e o *gás de nucleons não interagentes com píons livres e exclusão de volume* é referido simplesmente como *gás livre*.

4.1 AGS

As distribuições de momento transversal foram calculadas para quatro temperaturas de freeze-out: $138MeV$, $120MeV$, $100MeV$ e $90MeV$. Os resultados foram comparados com dados da E866 [36] [37]. Primeiramente foram calculadas as distribuições de p_T para os gases interagente e livre usando $T_{fo} = 138MeV$. Em seguida o cálculo das distribuições foi refeito para temperaturas de freeze-out sucessivamente mais baixas, até encontrar a temperatura para a qual as distribuições teóricas mais se aproximaram dos dados. Essa temperatura foi $T_{fo} = 100MeV$, tanto para o gás livre como para o gás interagente. As figuras 4.1 e 4.2 apresentam as distribuições para $T_{fo} = 138MeV$ e $T_{fo} = 100MeV$, respectivamente, e a tabela 4.1 sumariza os resultados para os dois modelos, para essas duas temperaturas de freeze-out.

Tabela 4.1: resultados para colisões $Au + Au$ a $10.8AGeV$.

Modelo	$\langle p_T \rangle_{nucleons}$ (MeV)	$\langle p_T \rangle_{pions}$ (MeV)	n° de píons
$T_{fo} = 138MeV$			
Gás livre	654	402	66
Gás interagente	612	399	64
$T_{fo} = 100MeV$			
Gás livre	833	404	60
Gás interagente	815	407	57
Dados	827	327	50

As distribuições apresentaram maior diferença em $T_{fo} = 138MeV$. Nessa temperatura, a massa efetiva do nucleon foi $m_b^* \approx 800MeV$ ($\simeq 15\%$ menor que a massa de vácuo) em toda a hipersuperfície de freeze-out, e os valores de p_T médio foram $\langle p_T \rangle \simeq 654MeV$ e $\langle p_T \rangle \simeq 612MeV$ para o gás livre e para o gás interagente, respectivamente. A diferença

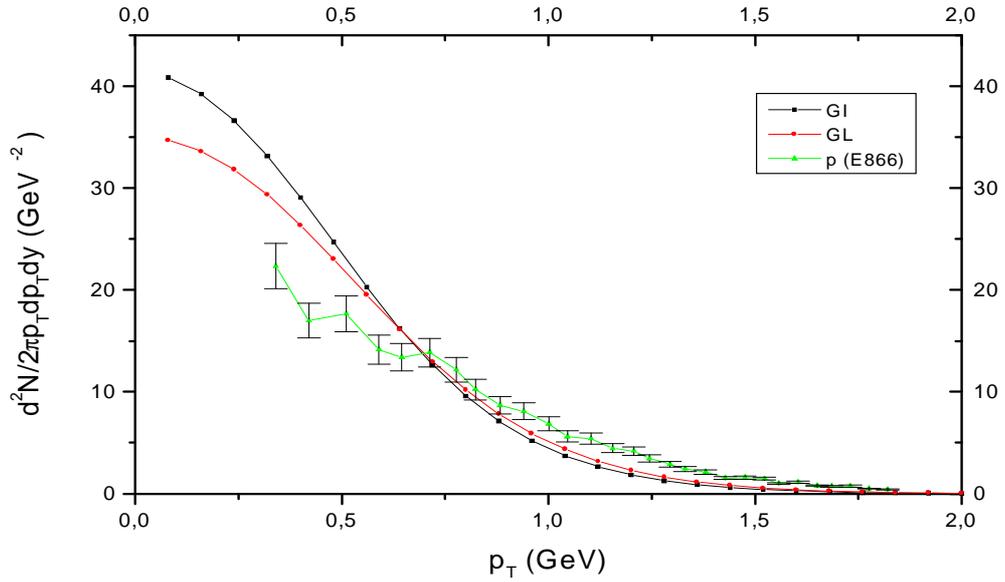
entre as distribuições de p_T foi se reduzindo a medida que se reduzia T_{fo} , até que estas se tornaram praticamente idênticas em $T_{fo} = 90 MeV$.

A figura 4.3 mostra as hipersuperfícies de freeze-out $T_{fo} = 138 MeV$ correspondentes aos dois modelos. A diferença nas hipersuperfícies indica que a evolução espaço-temporal dos fluidos correspondentes aos modelos interagente e não-interagente apresentaram diferenças entre si. Essas diferenças por sua vez são consequência de que os diagramas de fase dos dois modelos diferem mais na região de altas densidades. Em outras palavras, como a densidade bariônica inicial adotada para o AGS é alta, a expansão dos fluidos correspondentes aos gases interagente e livre percorreu regiões dos diagramas de fase dos dois modelos onde estes apresentam maiores diferenças entre si. Por outro lado, em temperaturas de freeze-out mais baixas, o sistema vai se tornando mais diluído (menos denso). Em $T_{fo} = 100 MeV$, a densidade bariônica é da ordem de $0.14\rho_0$, de modo que o primeiro termo da expressão da densidade de energia do gás interagente, (2.39) do capítulo 2, é $\simeq 0.53 \frac{MeV}{fm^3}$, a massa efetiva do nucleon difere apenas 6% da massa de vácuo e a densidade de energia é $\simeq 32.5 \frac{MeV}{fm^3}$, de modo que a eq. (2.39) passa a ser dominada pelos dois últimos termos (esses comentários também valem para a pressão, pois os dois primeiros termos da pressão, eq. (2.38), são idênticos aos da densidade de energia, a menos do sinal negativo no segundo termo). Além disso, $\mu_B \approx \nu$, de modo que a equação de estado do gás interagente se torna aproximadamente idêntica à do gás livre. Com isso, as hipersuperfícies de freeze-out $T_{fo} = 100 MeV$ praticamente se superpõem.

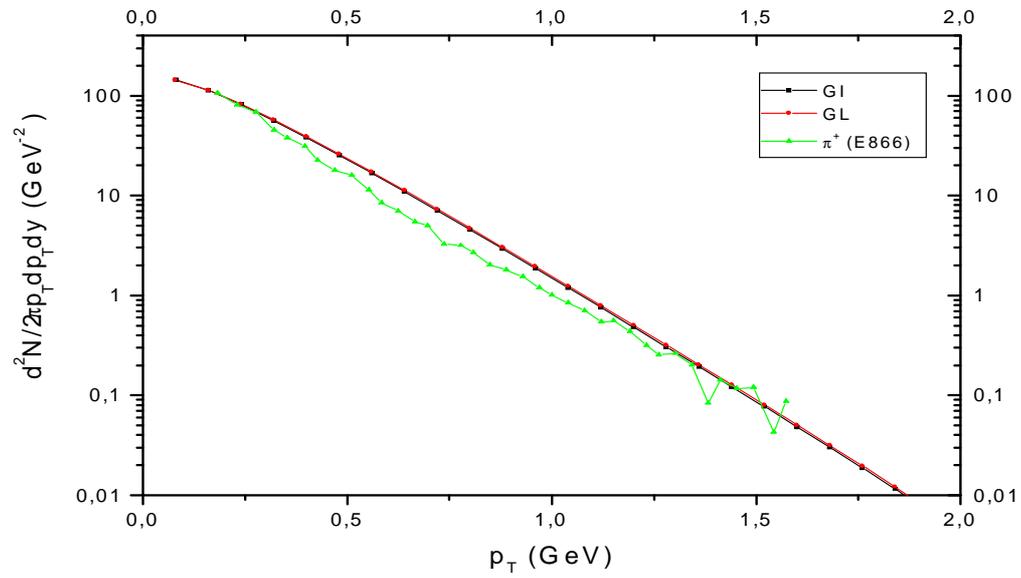
Finalmente, devemos mencionar que as distribuições de píons obtidas a partir dos dois modelos são idênticas em qualquer temperatura de freeze-out considerada, o que é natural, pois o termo de píons nas equações de estado dos dois modelos são iguais. As distribuições teóricas obtidas para os píons subestimaram os dados experimentais na região de baixos valores de p_T . Mais precisamente, em $p_T \cong 0,18 GeV$, a multiplicidade medida de π^+ é $\cong 107$ enquanto que os valores teóricos dos dois gases são $\simeq 93$. A provável explicação para isso é que nas referências adotadas neste trabalho os dados para píons incluem o produto do decaimento das ressonâncias, o que aumenta a multiplicidade de

píons em baixos valores de p_T .

Essas observações a respeito das distribuições de píons valem também para os resultados correspondentes ao SPS e ao RHIC, porém existem algumas especificidades. No caso do AGS, exceto na região de baixos p_T , os dados foram, de um modo geral, superestimados, enquanto que no caso do RHIC os dados foram globalmente subestimados, e não somente na região de baixos p_T . No caso do SPS os dados foram, de maneira geral, bem reproduzidos.



(a)

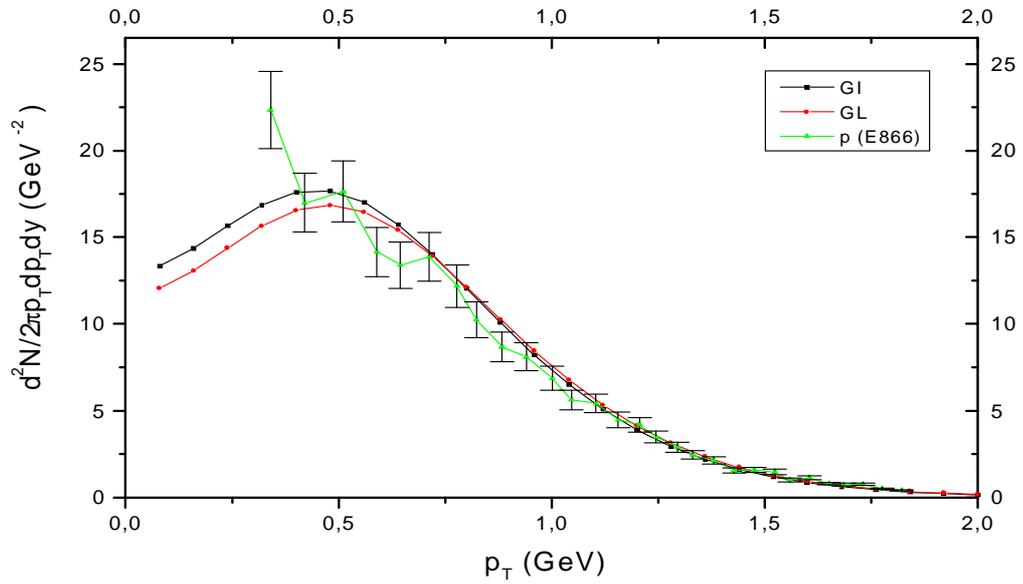


(b)

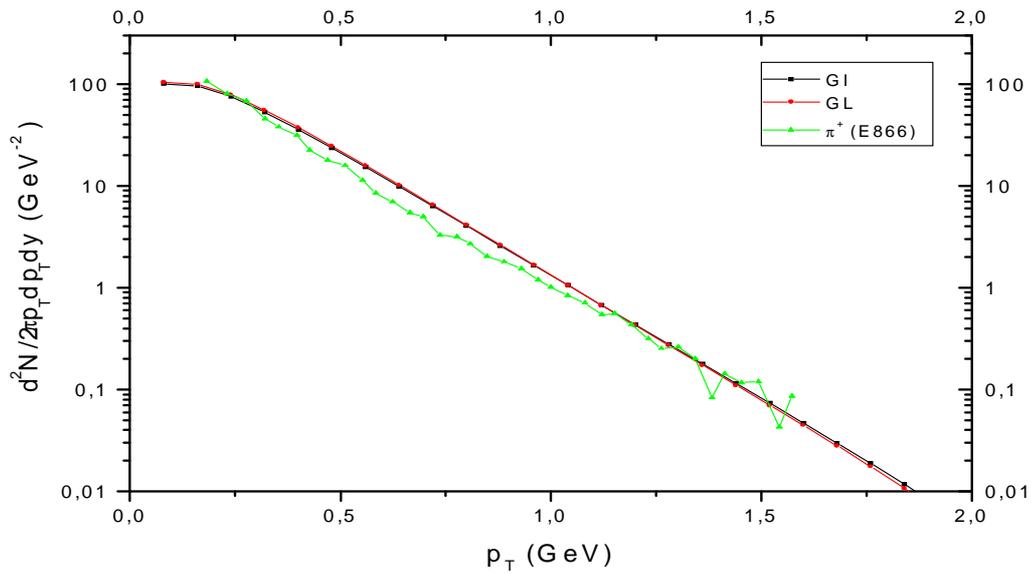
Fig. 4.1. Distribuições de momento transversal para o gás interagente (GI) e para o gás livre (GL) para $T_{fo} = 138$ MeV.

a) Distribuições de prótons.

b) Distribuições de píons.



(a)



(b)

Fig. 4.2. Distribuições de momento transversal para o gás interagente (GI) e para o gás livre (GL) para $T_{fo} = 100$ MeV.

a) Distribuições de prótons.

b) Distribuições de píons.

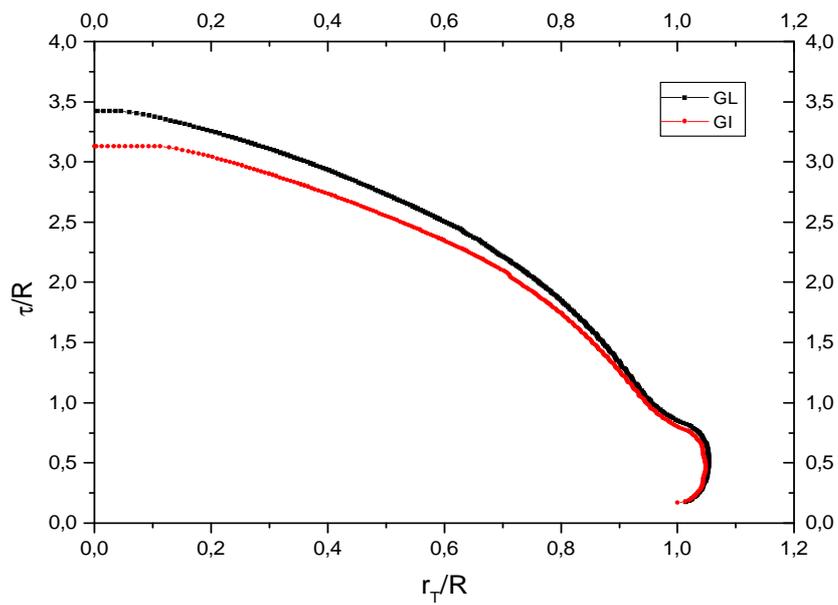


Fig. 4.3. Hipersuperfícies de freeze-out $T_{fo} = 138$ MeV obtidas a partir das condições iniciais para o AGS e usando os modelos de gás interagente (GI) e de gás livre (GL).

4.2 SPS

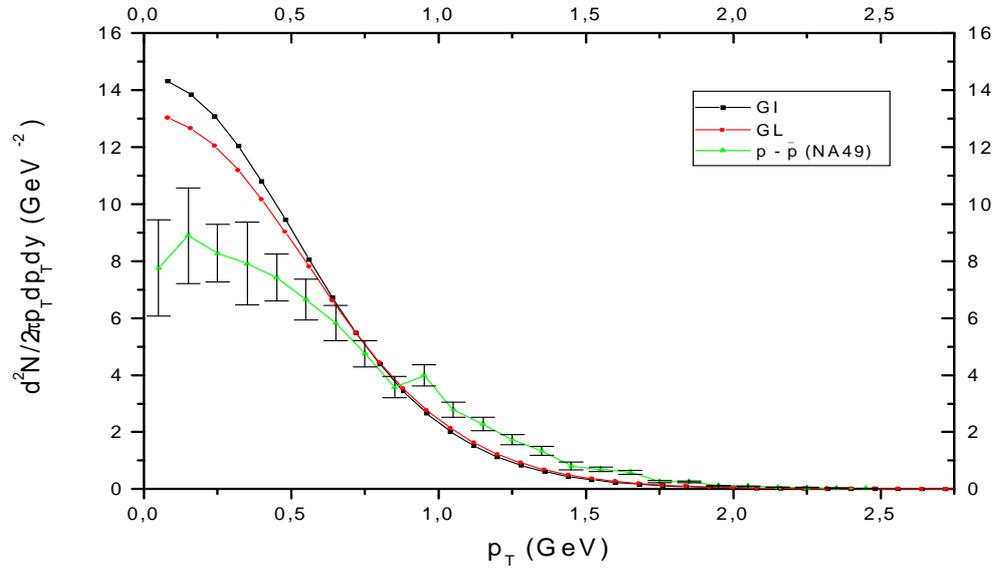
Os cálculos foram feitos para quatro temperaturas de freeze-out. Primeiro, $T_{fo} = 138MeV$, e em seguida para $T_{fo} = 130MeV$ e $120MeV$. A comparação entre os resultados obtidos e os dados da NA49 [38] [12] mostrou que a melhor concordância é obtida para $T_{fo} = 138MeV$, tanto para o gás livre quanto para o gás interagente. Também foram calculadas distribuições para $T_{fo} = 160MeV$, com o intuito de maximizar os efeitos do meio. Novamente, as maiores diferenças apareceram nas distribuições correspondentes à maior temperatura de freeze-out, $T_{fo} = 160MeV$, e nessa hipersuperfície as massas efetivas diferiram em torno de 7% das massas de vácuo dos nucleons ($m_b^* \approx 870MeV$). Na temperatura de freeze-out para a qual os dados são melhor reproduzidos as massas efetivas praticamente recuperam o valor de vácuo: $m_b^* \approx 909MeV$ (97% do valor de vácuo). As figuras 4.4 e 4.5 mostram as distribuições de p_T para $T_{fo} = 160MeV$ e para $T_{fo} = 138MeV$, respectivamente, e a figura 4.6 mostra as hipersuperfícies de freeze-out $T_{fo} = 160MeV$. Mesmo nessa temperatura de freeze-out as hipersuperfícies apresentam diferenças muito pequenas. A tabela 4.2 sumariza os resultados para $T_{fo} = 160MeV$ e $T_{fo} = 138MeV$.

Tabela 4.2: resultados para colisões $Pb + Pb$ a $158AGeV$.

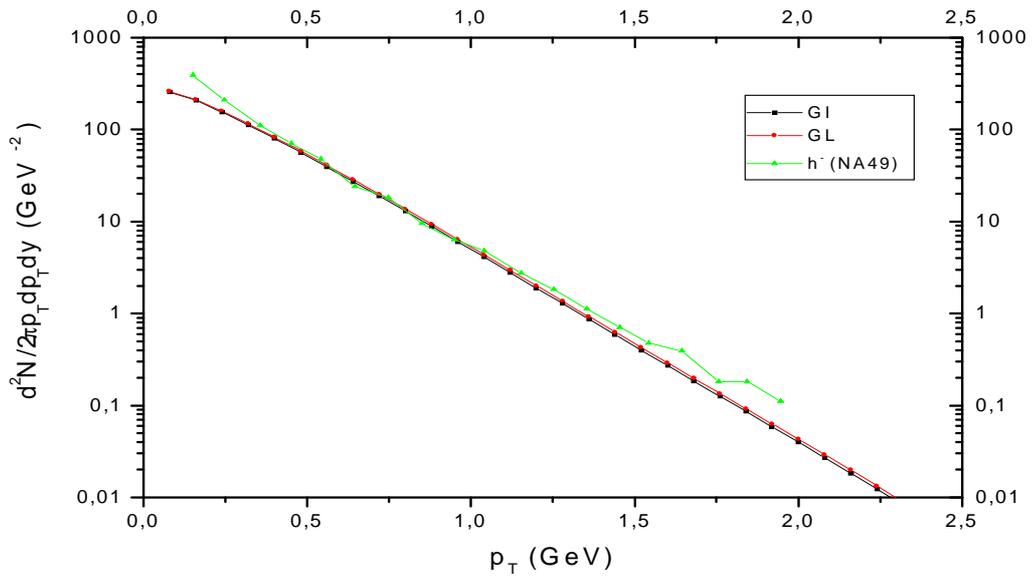
Modelo	$\langle p_T \rangle_{nucleons}$ (MeV)	$\langle p_T \rangle_{pions}$ (MeV)	nº de píons
$T_{fo} = 160MeV$			
Gás livre	715	457	146
Gás interagente	690	453	141
$T_{fo} = 138MeV$			
Gás livre	830	479	155
Gás interagente	821	480	153
Dados	825 ± 37	385 ± 18^1	196 ± 10^2

1 momento transversal médio para partículas negativamente carregadas.

2 multiplicidade de partículas negativamente carregadas no intervalo de rapidez $2.9 < y < 3.1$ [38].



(a)

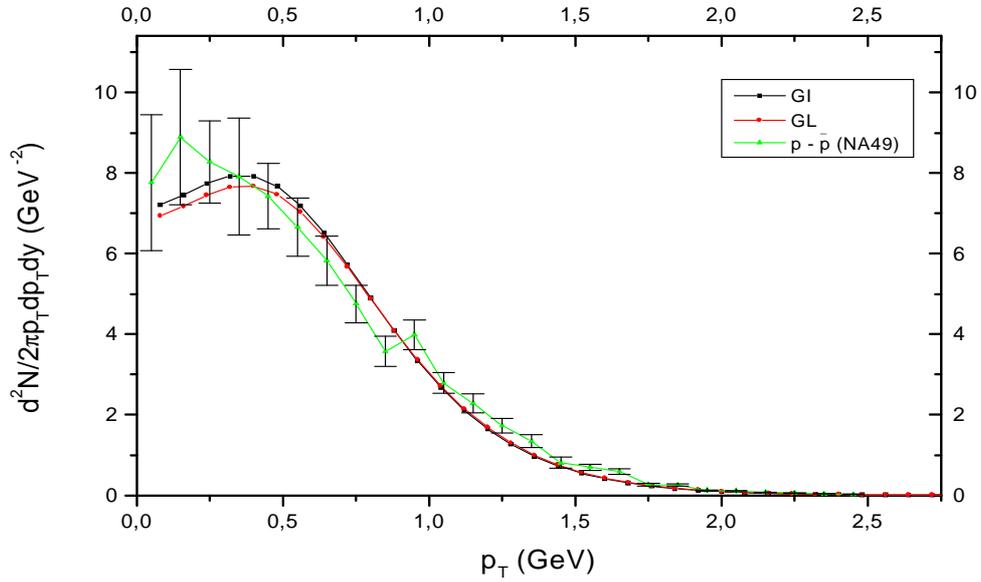


(b)

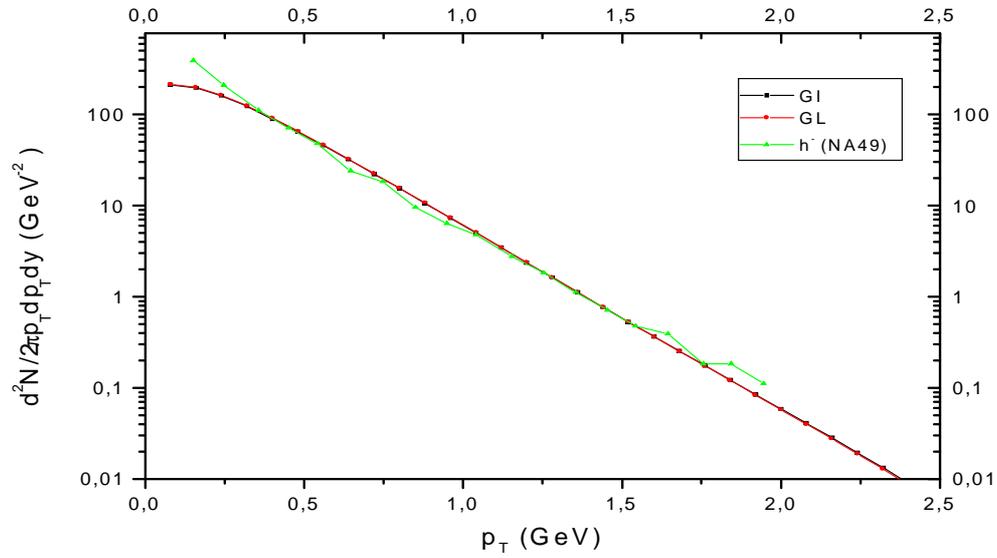
Fig. 4.4. Distribuições de momento transversal para o gás interagente (GI) e para o gás livre (GL) para $T_{fo} = 160$ MeV.

a) Distribuições de prótons líquidos.

b) Distribuições de píons.



(a)



(b)

Fig. 4.5. Distribuições de momento transversal para o gás interagente (GI) e para o gás livre (GL) para $T_{f0} = 138$ MeV.

a) Distribuições de prótons líquidos.

b) Distribuições de píons .

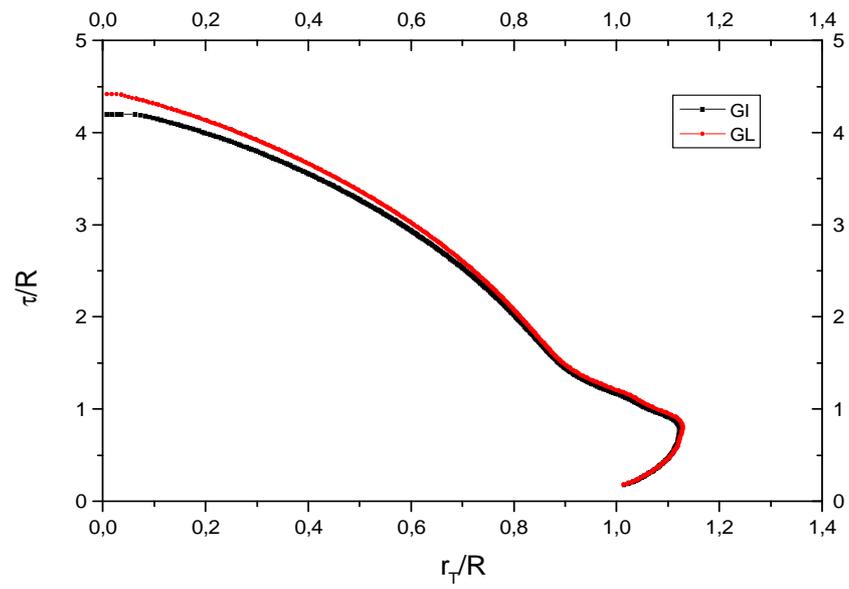


Fig. 4.6. Hipersuperfícies de freeze-out $T_{fo} = 160$ MeV obtidas a partir das condições iniciais para o SPS e usando os modelos de gás interagente (GI) e de gás livre (GL).

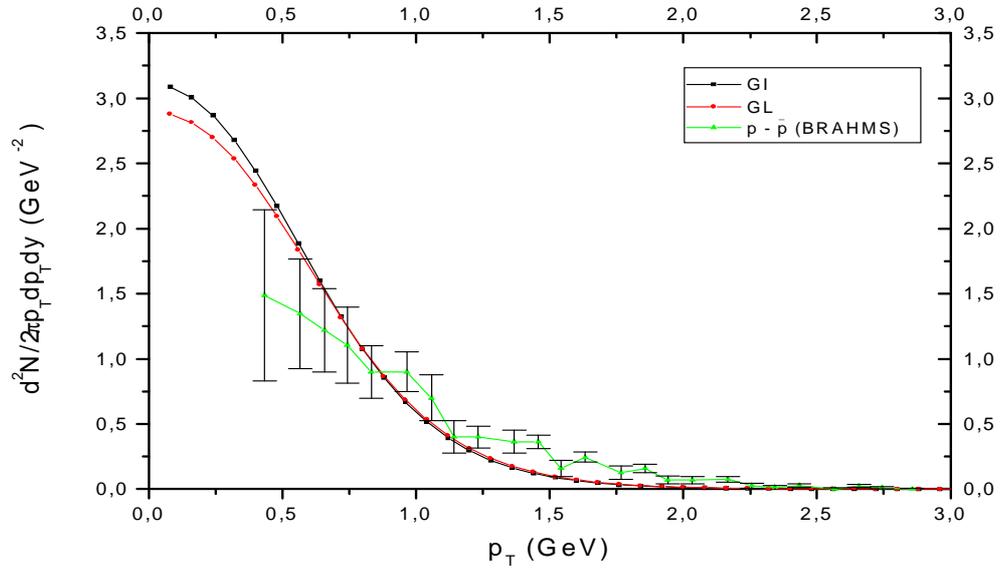
4.3 RHIC

Os resultados teóricos obtidos a partir dos modelos interagente e não interagente apresentaram diferenças muito pequenas no regime de energias do RHIC, mesmo quando calculamos as distribuições de p_T usando $T_{fo} = 160MeV$. As figuras 4.7 e 4.8 apresentam as distribuições de p_T para $T_{fo} = 160MeV$ e para $T_{fo} = 138MeV$, temperatura para a qual os dados foram melhor reproduzidos. Os dados apresentados são da colaboração BRAHMS [39] [13]. A figura 4.9 mostra as hipersuperfícies de freeze-out $T_{fo} = 160MeV$. Nessa temperatura as massas efetivas dos nucleons foram aproximadamente 5% menores que a massa de vácuo ($m_b^* \approx 893MeV$), enquanto que para $T_{fo} = 138MeV$ $m_b^* \simeq 924MeV$ ($\simeq 1.6\%$ menor que o valor de vácuo).

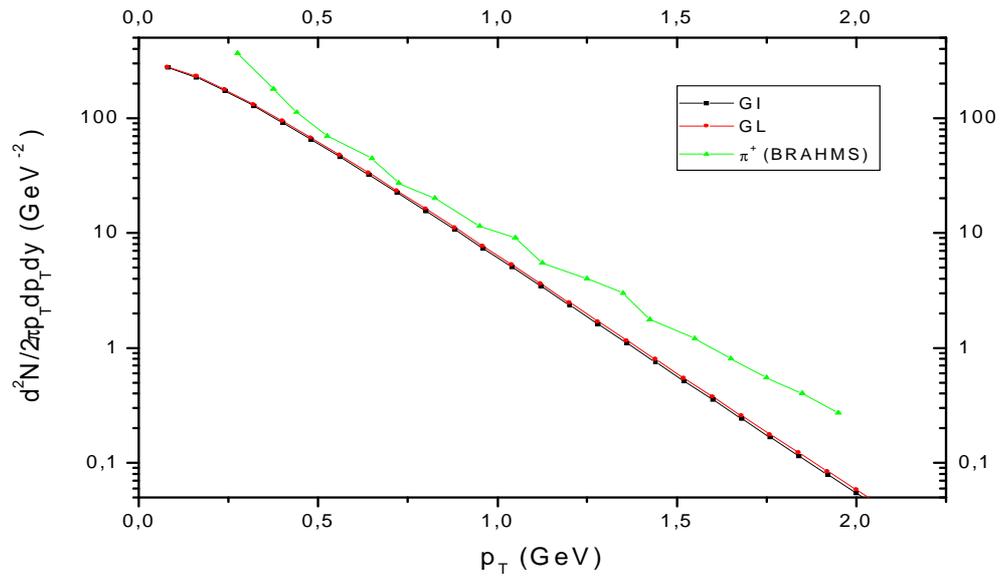
Esse resultado já era esperado, uma vez que em colisões no RHIC a matéria nuclear produzida apresenta baixas densidades bariônicas. A tabela 4.3 sumariza os resultados para $T_{fo} = 160MeV$ e $T_{fo} = 138MeV$.

Tabela 4.3: resultados para colisões $Au + Au$ a $\sqrt{s_{NN}} = 200GeV$.

Modelo	$\langle p_T \rangle_{nucleons}$ (MeV)	$\langle p_T \rangle_{pions}$ (MeV)	nº de píons
$T_{fo} = 160MeV$			
Gás livre	736	469	163
Gás interagente	718	465	160
$T_{fo} = 138MeV$			
Gás livre	873	496	179
Gás interagente	869	497	178
Dados	1010 ± 10(estatístico)	$\cong 500$	≈ 300



(a)

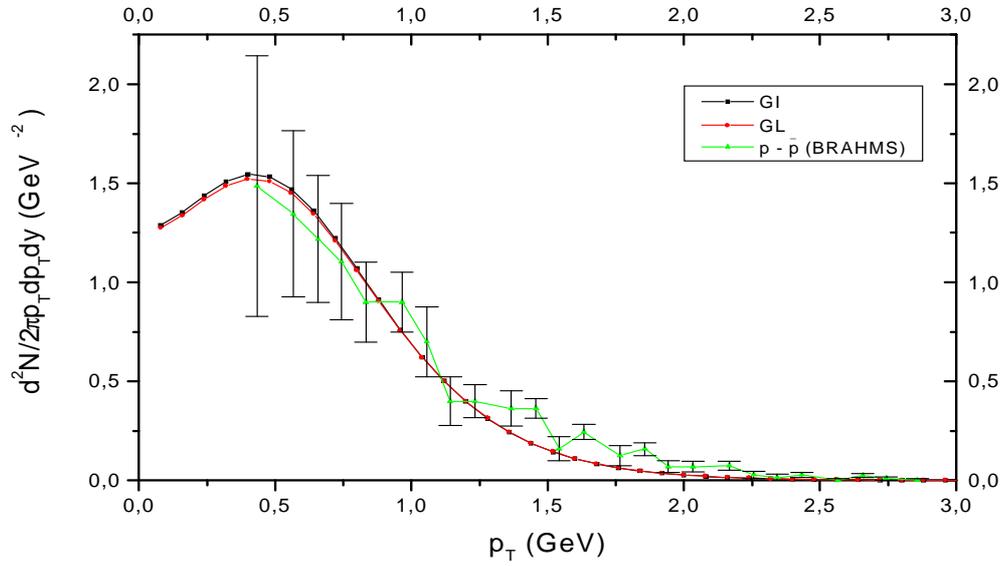


(b)

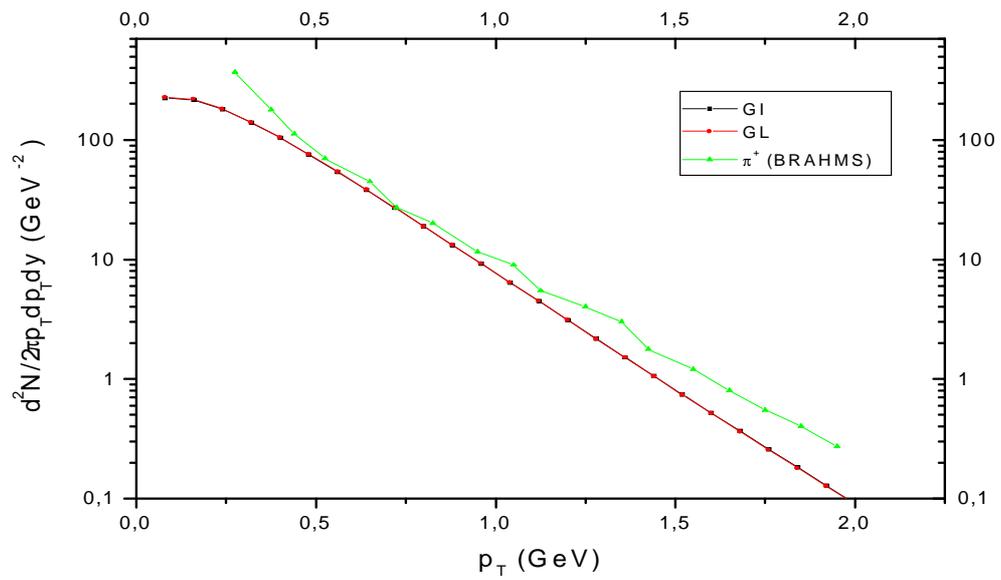
Fig. 4.7. Distribuições de momento transversal para o gás interagente (GI) e para o gás livre (GL) para $T_{fo} = 160$ MeV.

a) Distribuições de prótons líquidos.

b) Distribuições de píons.



(a)



(b)

Fig. 4.8. Distribuições de momento transversal para o gás interagente (GI) e para o gás livre (GL) para $T_{f0} = 138$ MeV.

a) Distribuições de prótons líquidos.

b) Distribuições de píons.

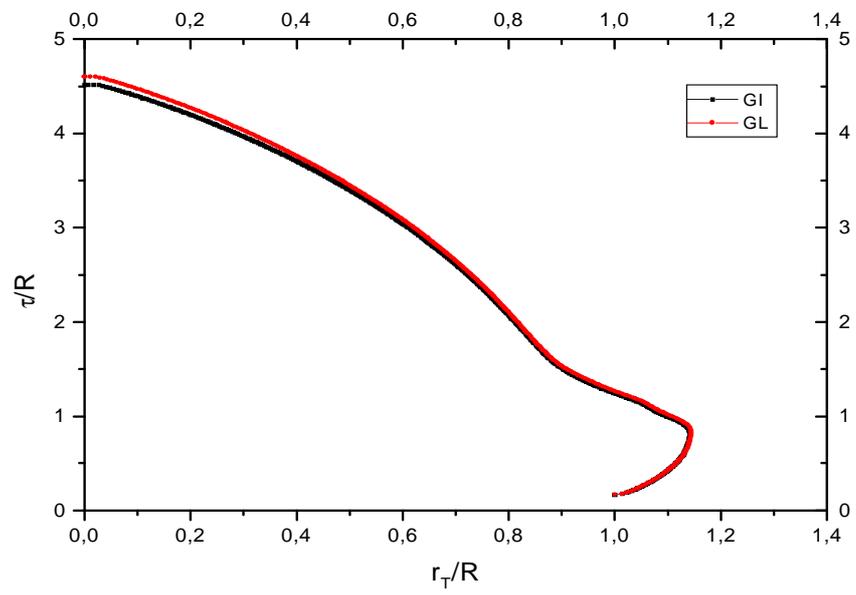


Fig. 4.9 Hipersuperfícies de freeze-out $T_{f_0} = 160$ MeV obtidas a partir das condições iniciais para o RHIC e usando os modelos de gás interagente (GI) e de gás livre (GL) .

4.4 Considerações finais e conclusões

As distribuições de momento transversal calculadas usando as equações de estado dos modelos interagente e não interagente adotados neste trabalho não revelaram, de um modo geral, diferenças muito pronunciadas. Os resultados que correspondem às condições iniciais do RHIC foram bastante parecidos, os resultados correspondentes ao regime de energias do SPS apresentaram uma diferença pequena, mas apreciável e as maiores diferenças entre os resultados dos dois modelos apareceram no regime de energias do AGS. Esse resultado está de acordo com as propriedades termodinâmicas dos dois modelos adotados. De fato, observando as figuras 2.4 e 2.5, vemos que as maiores diferenças entre os diagramas de fases do gás interagente e do gás livre aparecem na região de altas densidades. É razoável, portanto, que as diferenças nas distribuições tenham aparecido com maior nitidez nos resultados correspondentes às condições iniciais do AGS.

As maiores diferenças nas distribuições de p_T aparecem para as temperaturas de freeze-out mais altas. No entanto, os resultados obtidos com altas temperaturas de freeze-out estão em desacordo com os dados. Isso pode ser um indício de que nessas temperaturas o sistema ainda não está suficientemente diluído para que possamos fazer o desacoplamento das partículas. Nas temperaturas de freeze-out para as quais os resultados teóricos melhor se aproximam dos dados experimentais, os valores das massas efetivas praticamente retornam ao valor da massa de vácuo. Além disso, essas temperaturas de freeze-out para as quais os dados foram melhor reproduzidos foram sempre iguais para os dois modelos. Assim sendo, os resultados obtidos neste trabalho não favorecem nenhum dos dois modelos adotados, de modo que a possibilidade de modificação das massas das partículas em decorrência de efeitos do meio não pode ser descartada. A seguir comentaremos outros aspectos dos resultados obtidos.

A boa concordância entre os valores teóricos de $\langle p_T \rangle$ dos nucleons obtidos para o AGS e o SPS e os correspondentes valores experimentais deve ser vista com cuidado, pois os valores experimentais de $\langle p_T \rangle$ são em geral calculados por métodos diferentes do que foi usado aqui. Por exemplo, em [37] o valor experimental de $\langle p_T \rangle$ é calculado

a partir do ajuste de uma função exponencial dupla aos dados.

Os resultados teóricos obtidos para os píons subestimaram os dados experimentais dos três aceleradores na região de baixos valores de p_T , o que provavelmente é devido ao fato de que os dados para píons (h^- no caso do SPS) incluem também o produto do decaimento das ressonâncias.

Quando se usa uma equação de estado com massas modificadas pelo meio, as partículas devem recuperar a massa de vácuo ao se desacoplarem do fluido. Se as partículas na hipersuperfície de freeze-out apresentam ainda um deslocamento apreciável em suas massas, então deve haver algum mecanismo através do qual as massas retornam ao valor de vácuo. Para altos valores de p_T , $p_T \gg m_b$, espera-se que os espectros sejam distorcidos quando as massas das partículas recuperam os seus valores de vácuo [40]. De fato, impondo conservação de energia, temos $(m^*)^2 + p'^2 \equiv (m + \Delta m)^2 + (p + \Delta p)^2 = m^2 + p^2 \Rightarrow \frac{\Delta p}{p} \simeq \frac{m\Delta m}{p^2}$. Essa relação implica que uma variação Δm na massa deve corresponder a uma variação Δp no momento do nucleon, levando a uma distorção do espectro na região de altos valores de p_T . Especificamente, em modelos para os quais $m^* < m$, como o que foi usado aqui, quando uma partícula se desacopla do fluido sua massa aumenta até o valor de vácuo e, por conservação de energia, seu momento diminui. Em outras palavras, nesse caso a partícula sofre um freiamento ao se desacoplar do fluido, levando a um estreitamento da distribuição de p_T na região de altos momentos. Nos resultados apresentados neste trabalho, as distribuições de p_T correspondentes ao gás interagente são mais estreitas que as obtidas com o modelo de gás livre. Se tomássemos em conta esse efeito de distorção do espectro, haveria em princípio um estreitamento adicional nas distribuições do modelo de gás interagente, o que acentuaria, portanto, a diferença entre os espectros na região de altos valores de p_T . No entanto, em nosso caso a distorção no espectro de p_T seria pequena. Por exemplo, no caso do SPS teríamos uma distorção $\frac{\Delta p}{p} \approx 4\%$.

Por outro lado, para pequenos valores de p_T , $p_T \ll m_b$, o nucleon pode ser pensado como estando essencialmente em repouso enquanto o meio ao redor vai se tornando mais diluído. Nessas condições, o nucleon pode recuperar sua massa de vácuo através da troca

de energia com o meio um pouco antes de se desacoplar do fluido, de modo que não haveria distorções no espectro para baixos valores de p_T .

Nossos resultados foram de um modo geral bastante satisfatórios, dada a simplicidade das equações de estado usadas nesse trabalho. Consideremos, por exemplo, o trabalho apresentado em [11]. Foi adotado o mesmo modelo hidrodinâmico, porém com uma equação de estado bem mais realista, mas os resultados obtidos não foram melhores (ver figura 4.10).

Cabe aqui fazer uma conexão de nosso trabalho com outros envolvendo o uso de equações de estado com massas modificadas para analisar dados de colisões nucleares.

Em 1993 Menezes, Navarra, etc. [3] usaram a equação de estado do modelo de Walecka (a mesma equação que usamos para a fase hadrônica, a menos do termo de píons) para estudar colisões nucleares relativísticas. Esse trabalho foi um dos primeiros a explorar a possibilidade de estudar colisões nucleares usando uma equação de estado com efeitos do meio.

Mais recentemente, em [5] foram analisadas razões de partículas produzidas em colisões $Pb+Pb$ no SPS usando um modelo térmico com modificações nas massas e larguras de decaimento dos hádrons devido a efeitos do meio. Concluiu-se que quando as massas dos hádrons sofrem modificações moderadas (até 20%), o modelo térmico com modificação nas massas é capaz de ajustar os dados com a mesma qualidade que é obtida sem modificação nas massas. Um resultado interessante é que o uso de massas modificadas leva a uma redução na temperatura de freeze-out químico (temperatura para a qual se assume que as partículas param de interagir inelasticamente).

Em [4] é apresentada uma análise dos dados de razões de partículas produzidas em colisões no RHIC usando a equação de estado de um modelo $SU(3) \otimes SU(3)$ quiral, e os resultados são comparados com os que foram obtidos usando uma equação de estado de gás não-interagente. Aqui também se concluiu que as razões de partículas produzidas podem ser reproduzidas com a mesma qualidade tanto pelo modelo com massas modificadas ($SU(3) \otimes SU(3)$ quiral) quanto pelo modelo sem modificação de massas (gás

não-interagente), e que o uso de massas modificadas reduz a temperatura de freeze-out químico. No entanto, não é mostrado como seriam os espectros de p_T obtidos usando a equação de estado com massas modificadas, o que seria interessante de ver.

Finalmente, é importante mencionar que a maneira correta de se efetuar o desacoplamento das partículas é uma questão que ainda está em aberto [6]. Existem trabalhos recentes (ver, por exemplo [18] e [41] e referências neste texto) onde o freeze-out é feito não numa hipersuperfície, mas num quadrivolume do espaço-tempo. Um aspecto interessante do chamado Mecanismo de Emissão Contínua [41] é que este leva em conta o “histórico” da evolução espaço-temporal do fluido, e não apenas os valores assumidos pelas quantidades termodinâmicas na hipersuperfície de freeze-out. É bem possível que este método de se efetuar o desacoplamento das partículas leve ao aparecimento de efeitos do meio mais nítidos, uma vez que guarda informação de etapas da evolução do fluido quando este estava mais quente e mais denso, e portanto quando as massas sofriam uma maior influência do meio.

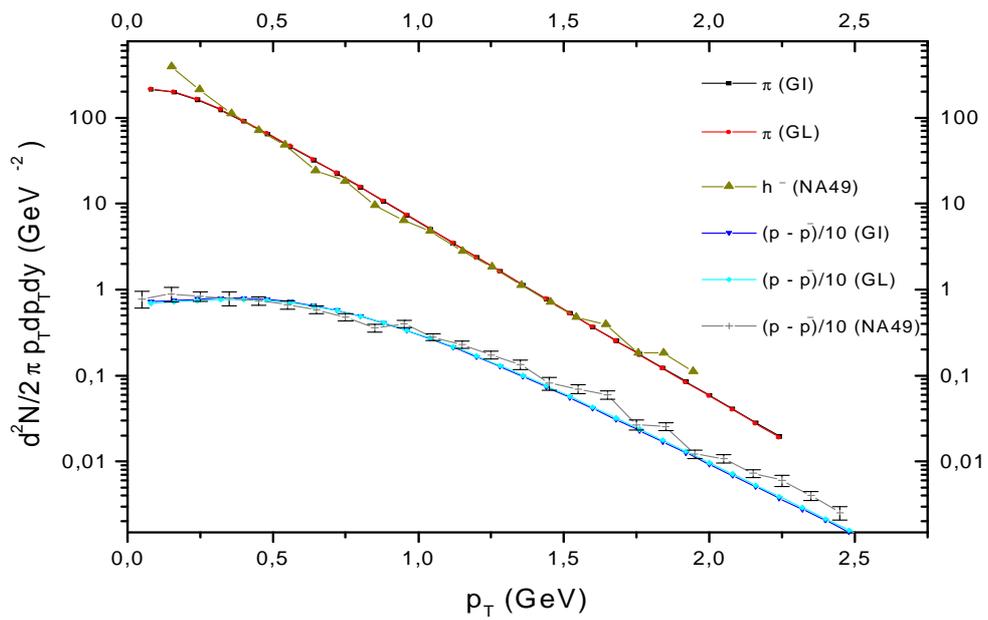


Fig. 4.10. Reprodução da figura 3 de [11] (no alto) e distribuições de momento transversal para prótons líquidos e pions obtidas com os gases interagente e livre para o SPS com $T_{fo} = 138$ MeV (embaixo).

Bibliografia

- [1] C. H. Wong, *Introduction to high-energy heavy-ion collisions*, World Scientific (1994).
- [2] D. H. Rischke, *Remarks on the extraction of freeze-out parameters*, Nucl Phys **A698**, 153 (2002).
- [3] D. P. Menezes, F. S. Navarra, M. Nielsen e U. Ornik, *Relativistic hydrodynamics with quantum hadrodynamics equation of state*, Phys. Rev. C **47**, n° 6, 2635 (1993).
- [4] D. Zschesche, S. Schramm, J. Schaffner-Bielich, H. Stöcker e W. Greiner, *Particle ratios at RHIC: effective hadron masses and chemical freeze-out*, Phys Lett **B547**, 7 (2002).
- [5] M. Michalec, W. Florkowski e W. Broniowski, *Scaling of hadron masses and widths in thermal models for ultra-relativistic heavy-ion collisions*, nucl-th/0103029 (2001).
- [6] D. H. Rischke, *Fluid Dynamics for relativistic nuclear collisions*, Proceedings of the 11 th Chris Engelbrecht Summer School in Theoretical Physics, Cape Town (1998).
- [7] Landau ,L. D. e Lifshitz, E. M.,*Fluid Mechanics*, Pergamon, New York, (1959).
- [8] R. C. Hwa, *Statistical description of hadron constituents as a basis for the fluid model of high-energy collisions*, Phys Rev **D10**, 2260 (1974); C. B. Chiu e K.-H. Wang, *Hydrodynamical model with massless constituents*, Phys Rev **D12**, 272 (1975); C. B. Chiu, E. C. G. Sudarshan e K.-H. Wang, *Hydrodynamical expansion with frame-independence symmetry in high-energy multiparticle production*, Phys Rev **D10**, 902

- (1975); J. D. Bjorken, *Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region*, Phys. Rev. D **27**, 140 (1983).
- [9] J. P. Blayzot e J. Y. Ollitrault, *Hydrodynamics of quark-gluon plasmas*, “Quark-Gluon Plasma”, Advanced Series on Directions in High-Energy Physics, vol **6**, pag. 393, World Scientific (1990).
- [10] U. Heinz, K. S. Lee e E. Schnedermann, *Hadronization of a quark-gluon plasma*, “Quark-Gluon Plasma”, Advanced Series on Directions in High-Energy Physics, vol **6**, pag. 471, World Scientific (1990).
- [11] A. Dumitru e D. H. Rischke, *Collective dynamics in highly relativistic heavy-ion collisions*, Phys Rev **C59**, 354 (1999).
- [12] H. Appelshäuser et al., *Baryon stopping and charged particle distributions in central Pb + Pb collisions at 158 GeV per nucleon*, Phys. Rev. Lett. **82**, 2471 (1999).
- [13] R. Debbe, *Particle production at RHIC energies*, nucl-ex/0308004 (2003).
- [14] G. Baym, B. L. Friman, J. P. Blayzot, M. Soyeur e W. Czyz, *Hydrodynamics of ultra-relativistic heavy ion collisions*, Nucl Phys **A407**, 541 (1983).
- [15] Y. Hama e F. W. Pottag, *Resolution of hydrodynamical equations for transverse expansions*, Rev Bras Fis **15**, 289 (1985).
- [16] L. V. Bravina et al., *Local thermodynamical equilibrium and the equation of state of hot, dense matter created in Au + Au collisions at AGS*, Phys Lett **B434**, 379 (1998).
- [17] F. Cooper e G. Frye, *Single-particle distribution in the hydrodynamic and statistical thermodynamic models of multiparticle production*, Phys Rev **D10**, n° 1, 186 (1974).
- [18] S. A. Bass e A. Dumitru, *Dynamics of hot bulk QCD matter: from the quark-gluon plasma to hadronic freeze-out*, Phys Rev **C61**, 064909 (2000).

- [19] J. D. Walecka, *A theory of highly condensed matter*, Annals of Phys. **83**, 491 (1974).
- [20] S. A. Chin e J. D. Walecka, *An equation of state for nuclear and higher-density matter based on a relativistic mean-field theory*, Phys. Lett. **52B**, n° 1, 24 , (1974).
- [21] J. D. Walecka, *Equation of state for neutron matter at finite T in a relativistic mean-field theory*, Phys. Lett. , **59B**, n° 2, 109, (1975).
- [22] Serot, B. D. e Walecka, J. D. , *The relativistic nuclear many-body problem*, Advances in Nuclear Physics, 16 (1986).
- [23] A. L. Fetter e J. D. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*, McGraw-Hill (1971).
- [24] R. J. Furnstahl e B. D. Serot, *Covariant mean-field calculations of finite-temperature nuclear matter*, Phys Rev **C41**, n°1, 262 (1990).
- [25] J. Theis, G. Graebner, G. Buchwald, J. Maruhn, W. Greiner, H. Stöcker e J. Polonyi *Phase transition of the nucleon-antinucleon plasma in a relativistic mean-field theory*, Phys. Rev. D, **28**, n° 9, 2286 (1983).
- [26] J. Cleymans, K. Redlich, H. Satz e E. Suhonen, *On the phenomenology of deconfinement and chiral symmetry restoration*, Z. Phys. C, **33**, 151, (1986).
- [27] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn e V. F. Weisskopf, *New extended model of hadrons*, Phys. Rev. D, **9**, n° 12, 3471 (1974).
- [28] F. E. Close, *An introduction to quarks and partons*, Academic (1979).
- [29] G. Baym e S. A. Chin, Phys Lett B **62**, n°2, 241 (1976).
- [30] S. A. Chin, *Transition to hot quark matter in relativistic heavy-ion collision*, Phys Lett B **78**, n° 5, 552 (1978).
- [31] H. B. Callen, *Thermodynamics*, John Wiley & Sons (1960).

- [32] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery, *Numerical recipes in C: The art of scientific computing*, 2^o ed., Cambridge University (1992).
- [33] F. G. C. Humes, I. S. H. de Melo, L. K. Yoshida e W. T. Martins, *Noções de cálculo numérico*, McGrall-Hill (1984).
- [34] D. H. Rischke, S. Bernard e J. A. Maruhn, *Relativistic hydrodynamics for heavy-ion collisions I. General aspects and expansion into vacuum*, Nucl Phys **A595**, 346 (1995).
- [35] M. Reiter, A. Dumitru, J. Brachmann, J. A. Maruhn, H. Stöcker e W. Greiner, *Entropy production in collisions of relativistic heavy-ions - a signal for quark-gluon plasma phase transition?*, Nucl Phys **A643**, 99 (1998).
- [36] C. Müntz, *Recent results from E866 at BNL*, GSI, ISSN 0720 (1998).
- [37] Y. Akiba, *Particle production in Au + Au collisions from BNL E866*, Nucl Phys. **A610**, 139c (1996).
- [38] M. Toy, *Baryon stopping and charged particle production from lead-lead collisions at 158 GeV per nucleon*, Ph.D. thesis, UCLA (1999).
- [39] I. G. Bearden et al., *Nuclear stopping in Au + Au collisions at $\sqrt{s_{NN}} = 200\text{GeV}$* , nucl-ex/0312023 (2003).
- [40] F. Grassi e G. Baym, *Modification of the J/Ψ momentum distribution in heavy-ion collisions through dispersion by the nuclear medium*, Nucl Phys **A525**, 483c (1991).
- [41] F. Grassi, *Particle emission in hydrodynamics: a problem not yet solved*, Relatório da XV Reunião de Trabalho sobre Interações Hadrônicas (2003).

Apêndice A

Alguns resultados do modelo de Walecka

Com o objetivo de melhor compreender as propriedades do modelo de Walecka, além de testar os programas feitos para calcular a equação de estado do modelo, foram reproduzidos vários resultados numéricos apresentados em [19] [20] [21] e [22]. A equação de estado do modelo de Walecka corresponde as equações (2.38) e (2.39) sem os termos de píons livres, além da equação (2.40). Os resultados que serão apresentados neste apêndice foram calculados usando as mesmas constantes de acoplamento originalmente apresentadas em [19], $C_v^2 = 195.7$ e $C_s^2 = 266.9$, e que foram ajustadas para reproduzir os valores da energia de ligação e do momento de Fermi da matéria nuclear ($\gamma = 4$) à temperatura nula, $\epsilon/\rho_B - m_b = -15,75MeV$ e $k_F = 1.42fm^{-1}$, respectivamente.

Quando $T \rightarrow 0$, (2.38)-(2.40) se tornam [22]

$$P = \frac{g_v^2}{2m_v^2}\rho_B^2 - \frac{m_s^2}{2g_s^2}(m_b - m_b^*)^2 + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_b^{*2}}}, \quad (A.1)$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{g_v^2}{2m_v^2} \rho_B^2 + \frac{m_s^2}{2g_s^2} (m_b - m_b^*)^2 \\ &+ \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 \sqrt{k^2 + m_b^{*2}} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\rho_B = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} dk k^2 = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \quad , \quad (\text{A.3})$$

$$m_b^* = \frac{m_b}{1 + \frac{\gamma g_s^2}{(2\pi)^3 m_s^2} \int_0^{k_F} dk k^3 \frac{1}{\sqrt{m_b^{*2} + k^2}}} \quad . \quad (\text{A.4})$$

As expressões acima representam a equação de estado do modelo de Walecka para temperatura nula. A matéria nuclear no estado fundamental corresponde ao fator de degenerescência $\gamma = 4$ (dois estados de isospin, correspondentes ao próton e ao nêutron, cada um com dois estados possíveis de spin). Para matéria de nêutrons, o fator de degenerescência $\gamma = 2$ corresponde simplesmente às projeções $\pm 1/2$ do spin do nêutron. Ajustando adequadamente as constantes de acoplamento do modelo, as propriedades conhecidas da interação nucleon-nucleon são reproduzidas, ou seja, a interação se torna atrativa à baixas densidades e repulsiva à altas densidades (ver figura A1). Além disso, o mínimo da energia de ligação pode ser ajustado para reproduzir os valores conhecidos da energia de ligação e do momento de Fermi da matéria nuclear no estado fundamental ($T = 0$). No gráfico abaixo, o valor mínimo da energia de ligação é $\simeq -15.75 \text{ MeV}$, correspondendo a um momento de Fermi $\simeq 1.42 \text{ fm}^{-1}$. Para os mesmos valores das constantes de acoplamento C_v^2 e C_s^2 , a matéria de nêutrons apresenta o comportamento representado na mesma figura. O gráfico a seguir está de acordo com a figura 1 de [19].

As constantes de acoplamento que usamos, $C_v^2 = 273.8$ e $C_s^2 = 357.4$ foram apresentadas em [24] e foram calculadas para ajustar o mínimo do gráfico acima em $\epsilon/\rho_B - m_b = -15.75 MeV$ e $k_F = 1.30 fm^{-1}$.

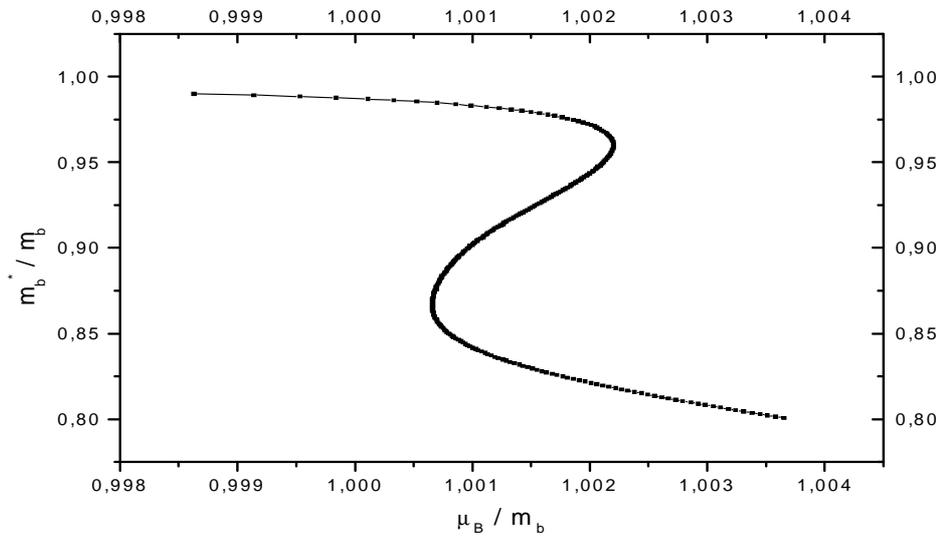
A equação A.4 mostra que a massa efetiva de um nucleon decresce a medida que a densidade bariônica da matéria nuclear aumenta. A figura A.2 mostra o gráfico da massa efetiva em função do momento de Fermi para matéria nuclear a temperatura nula. Esse gráfico está de acordo com a figura 2 de [22].

O gráfico da massa efetiva em função do momento de Fermi para matéria de nêutrons apresenta qualitativamente o mesmo comportamento acima. Apresentamos a seguir a equação de estado da matéria de nêutrons a temperatura nula. Em torno do mínimo de energia que aparece na figura A1, o sistema sofre uma transição de fase gás-líquido, e uma construção de Maxwell é necessária para garantir a estabilidade termodinâmica do sistema [20] [22].

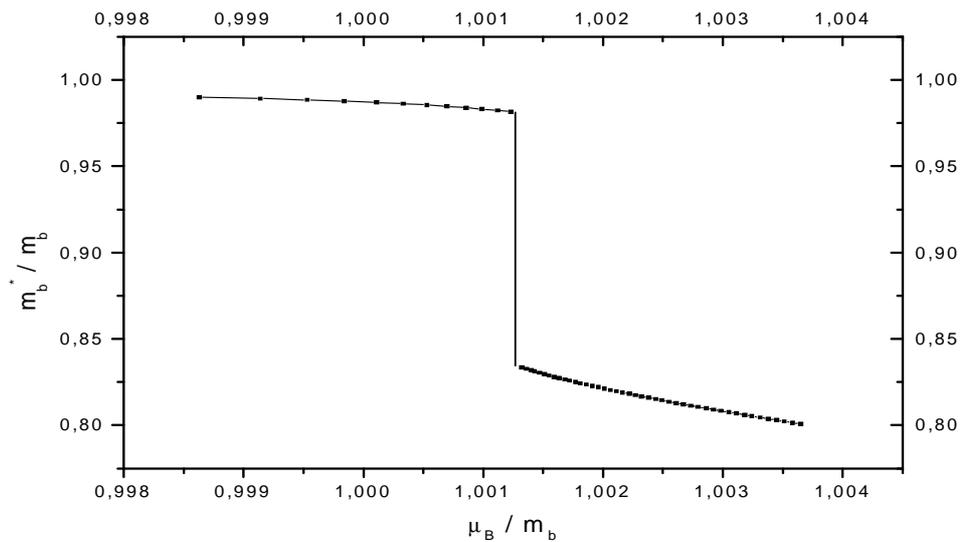
A temperatura finita, tanto a matéria de nêutrons como a matéria nuclear podem também apresentar transições de fase “gás-líquido”. Como exemplo, apresentamos a equação de estado para matéria de nêutrons a temperatura $\theta \equiv T/m_b = 0.005$.

A figura acima está de acordo com a figura 1 de [21]. A pressão e o potencial químico na transição de fase são determinados, de acordo com o critério de Gibbs [31], determinando o ponto onde a curva $\mu_B \times p$ a temperatura constante se cruza consigo mesma, de acordo com o gráfico mostrado abaixo. A pressão de transição de fase é dada por $p_{TF}/m_b^4 = 3.72 \times 10^{-7}$ e o potencial químico na transição de fase é dado por $\mu_B/m_b = 1.00$.

É interessante analisar o gráfico da massa efetiva em função do potencial químico μ_B para temperatura fixa $\theta = 0.005$. A figura abaixo mostra esse gráfico na parte a), enquanto que a parte b) mostra o mesmo gráfico após a aplicação do critério de Gibbs.



(a)



(b)

Fig. A.6 .a) Massa efetiva em função do potencial químico a temperatura constante $\theta = 0.005$. b) O mesmo que em a), porém com os valores não-físicos das massas eliminados após aplicação do critério de Gibbs

Para os valores da constante de acoplamento usados neste apêndice, $C_v^2 = 195.7$ e $C_s^2 = 266.9$, a temperatura crítica de transição de fase “gás-líquido” para matéria de nêutrons é $T_c = 9.1 \pm 0.2 MeV$ [22]. Para matéria nuclear com constantes de acoplamento $C_v^2 = 273.8$ e $C_s^2 = 357.4$, a temperatura crítica de transição de fase “gás-líquido” é $\approx 18.3 MeV$ [24]. Como neste trabalho estudamos a matéria formada em colisões nucleares, cujas temperaturas estão tipicamente a uma ordem de grandeza acima ($\sim 100 - 200 MeV$ ou acima), a matéria hadrônica descrita pela equação de estado (2.38)-(2.40) estará sempre na fase de gás de hádrons.

Um último resultado que é interessante apresentarmos é o gráfico da massa efetiva em função da temperatura para densidade bariônica nula. Essa curva mostra que mesmo quando $\nu = \mu_B = n_B = 0$ ocorre um súbito decréscimo da massa efetiva a partir de um certo valor da temperatura. Mesmo quando a densidade bariônica é nula, a massa efetiva irá se reduzir a medida que a temperatura aumenta, pois a integral que aparece no denominador da relação de auto-consistência (2.44) *não se anula* quando $\nu = 0$, uma vez que o integrando é proporcional a soma das densidades de probabilidade de nucleons $n(T)$ e de anti-nucleons $\bar{n}(T)$. O gráfico que segue está de acordo com a figura 2 de [21].

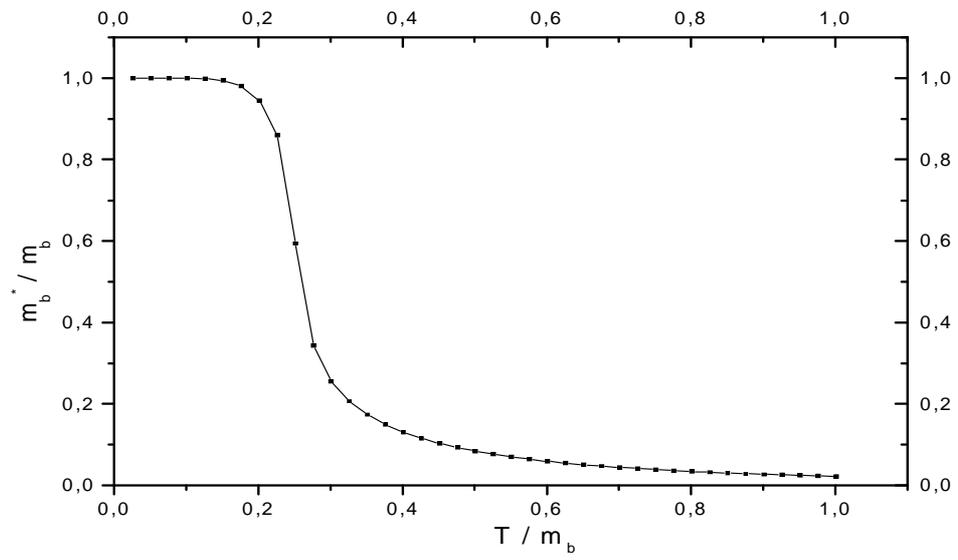


Fig. A.7 .Massa efetiva em função da temperatura para $\nu = 0$.