EQUAÇÕES DE ONDA RELATIVÍSTICAS

SBI-IFUSP
305M810T0074

Marcelo Otávio Caminha Gomes

INSTITUTO DE FÍSICA
BIBLIOTECA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
74
INSTITUTO DE FÍSICA

1969

Tese submetida ao Departamento de Física da F. F. C. L. da U. S. P., como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

APRESENTAÇÃO

Após o sucesso da equação de Dirac para a descrição de partículas com spin 1/2, várias tentativas foram feitas no sentido da construção de equações adequadas para spin arbitrário.

Històricamente, a teoria mais antiga é a de Pauli-Fierz-Dirac. Na sua formulação inicial, devido a existência de condições subsidiárias, esta teoria apresentava inconsistências no caso de interações e êste foi o ponto de partida para as formulações de Bhabha e Harish-Chandra. Entretanto os campos de Bhabha e Harish-Chandra apresentam o inconveniente de terem vários estados de massas e spin diferentes. Assim nós procuramos reter as condições subsidiárias e a inconsistência no caso de interações é afastada escrevendo a equação de campo de tal forma que as condições subsidiárias estejam contidas nela.

A existência de vários problemas na construção de teorias de equações relativísticas em presença de interações, entre os quais o aparecimento de auto valores complexos para a energia e inconsistências na quantização tem renovado o interêsse dos físicos pela matéria.

Nêste trabalho, a título de introdução, é revisto de maneira sucinta, no capítulo I, várias formulações de equações relativísticas. Iniciando com o grupo de Lorentz nós analisamos as teorias de Fierz-Pauli, Rarita-Schwinger, Bhabha e Harish-Chandra. Referência é feita também a inconsistências na formulação original de Pauli-Fierz no caso de interações eletromagnéticas.

No capítulo II é analisado o problema de auto valores complexos para a energia no caso de um acoplamento escalar, para vários valores do spin. Além disso, no caso de spin 3/2, soluções da equação de Rarita-Schwinger são obtidas e a quantização é procedida, consistentemente, na ausência de interações. É feito referência a dificuldades na quantização quando interações são introduzidas.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor J. Swieca pelas inúmeras sugestões e incentivo.

À CAPES e à FAPESP pelo apôio financeiro durante os cursos de pós-graduação.

À Srta. Eni E. Oliveira pelo trabalho de datilografia e ao pessoal da Gráfica do Departamento de Física da F.F.C.L. da U.S.P.

M. Gomes

Oferecimento

Aos meus Professores

Jayme Tiomno e Elisa Frota Pessôa

Í N D I C E

Capítulo I

Representações Finitas do Grupo de Lorentz 1

Teoria de Dirac-Pauli-Fierz 9

Teorias de Bhabha e Harish-Chandra 18

Capítulo II

Autos valores complexos para a energia nos casos de spin 0 e 1 24

Spin 3/2 no formalismo de Rarita-Schwinger

I) Soluções da equação livre 30

II) Existência de auto valores complexos para a energia 33

III) Quantização do campo livre 38

Capítulo I

Introdução

Um fator comum a tôdas teorias de equações relativísticas é a covariança das equações de movimento sôbre o grupo de Lorentz. Como é sabido, êste requisito fundamental traduz as propriedades de isotropia do espaço e que as leis da física são as mesmas quando verificadas em diferentes referenciais inerciais em movimento relativo retilíneo e uniforme. O passo inicial deve ser portanto o estudo dos mapeamentos no espaço tempo que deixam invariante a forma quadrática

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu \qquad g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Nós escrevemos

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

Estas transformações satisfazem $\Lambda^{tr} g \Lambda = g \Rightarrow \det\Lambda = \pm 1$ e $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ ou $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. A peça caracterizada por $\det\Lambda = 1$ e $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ é a única que constitui um sub-grupo, o grupo de Lorentz próprio, L_p. Os elementos da peça com $\det\Lambda = -1$ e $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ são obtidos pela multiplicação da inversão espacial $s = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ com os elementos de L_p; o grupo formado por L_p e esta última peça é denominado grupo de Lorentz impróprio[++].

Em seguida introduzimos no espaço tempo objetos geométricos que caracterizam-se por constituirem bases de representações do grupo de mapeamentos acima. Obtemos assim escalares, vetores e tensores de um modo geral. Uma análise maior nos revela, entretanto, à existência de outros tipos de objetos geométricos, ou seja, nós verificamos que existe um homomorfismo entre o L_p e o grupo de matrizes unimodulares 2 x 2, complexas; assim, através das representações dêste grupo nós podemos enlargar o conjunto de objetos geométricos. A vantagem dêsses objetos geométricos está no fato que relações entre objetos geométricos do mesmo tipo são equações claramente covariantes.

+ A matéria das representações do grupo de Lorentz tem sido extensivamente estudada em excelentes livros (ref.1,2). Nêste capítulo iremos dar um resumo dos elementos essenciais envolvidos.

++ As partes com $\det\Lambda = -1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$ e $\det\Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \leq -1$ podem ser obtidas, respectivamente, pela multiplicação da inversão temporal $t = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ e inversão espaço temporal $j = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$ com os elementos de L_p.

Definindo $$x = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - i x^2 \\ x^1 + i x^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

nós vemos que a cada transformação

$$x \to x' = x'^\mu \sigma_\mu = \alpha x \alpha^+ \quad \text{com} \quad \det \alpha = 1 \qquad (2')$$

está associada uma transformação de L_p

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

com

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} tr\,(\alpha \sigma_\mu \alpha^+ \sigma_\nu) \qquad (3)$$

Realmente

$$\det x' = \det x = x_0^2 - \sum_i (x^i)^2 = \text{invariante}$$

e

$$\Lambda^0{}_0 = \frac{1}{2} tr\,(\alpha \sigma_0 \alpha^+ \sigma_0) = \frac{1}{2} tr\, \alpha\alpha^+ = \frac{1}{2}(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2) =$$

~~onde~~ $= \frac{1}{2}(2 + |a - d^*|^2 + |b + c^*|^2) \geq 1$ onde $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $ad - bc = 1$

A (3) nos mostra que a correspondência é um homomorfismo pois a cada Λ pertencente a L_p^+ correspondem duas matrizes α e $-\alpha$. As matrizes α constituem, portanto, uma representação do grupo L_p num espaço bi-dimensional. Os objetos a duas componentes que por L_p transformam-se como

$$\varphi'_r = \alpha_r{}^s \varphi_s \qquad (4) \qquad r, s = 1, 2$$

são chamados espinores sem ponto (undotted).

As matrizes $\bar{\alpha}$ (complexa conjugada de α) tambem constituem uma representação de L_p, inequivalente a α. Os elementos do espaço bi-dimensional que se tranformam com $\bar{\alpha}$, sôbre L_p, nós chamaremos de espinores com ponto (dotted) $(\varphi_{\dot{1}}, \varphi_{\dot{2}})$

$$\varphi'_{\dot{r}} = \bar{\alpha}_{\dot{r}}{}^{\dot{s}} \varphi_{\dot{s}} \qquad (5)$$

O fato que as representações α e $\bar{\alpha}$ são inequivalentes pode ser mostrado por absurdo; de fato suponha que exista B, não singular tal que $\bar{\alpha} = B\alpha B^{-1}$. Vamos supor que $\alpha = 1 + \varepsilon \vec{\xi} \cdot \vec{\sigma}$, com ε infinitesimal. Daí resulta $B \xi_i \sigma_i B^{-1} = \xi_i^* \sigma_i^*$ para todo complexo ξ_i, o que é impossivel, logo ...

Através de $\beta = (\alpha^{tr})^{-1}$ nós podemos definir as representações contragradientes a α e $\bar{\alpha}$. Entretanto estas são equivalentes a α e $\bar{\alpha}$, respectivamente.

+Que $\det \Lambda = 1$ pode ser estabelecido diretamente ou notando-se que a matriz unimodular $\alpha = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ corresponde a matriz $\Lambda = I$ cujo determinante é 1; mudanças para a região com $\det \Lambda = -1$ são proibidas pois o / grupo unimodular 2 x2 é continuo.

De fato $\varepsilon \alpha \varepsilon^{-1} = \det\alpha\,(\alpha^{-1})^{tr} = (\alpha^{-1})^{tr}$ com $\varepsilon = i\sigma_2$ (6)
É possível colocar o cálculo espinorial em uma fórma semelhante ao tensorial introduzindo a "métrica"

$$\varepsilon^{\dot r \dot s} = \varepsilon^{rs} = -\varepsilon_{\dot r \dot s} = -\varepsilon_{rs} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

através da qual as componentes contragradientes são relacionadas:

$$\varphi^{\dot r} = \varepsilon^{\dot r \dot s}\varphi_{\dot s}\ , \quad \varphi^{r} = \varepsilon^{rs}\varphi_{s}\ , \quad etc \qquad (8)^{+}$$

Em geral nós definimos um espinor de ordem n + m como um objeto com n índices com ponto e m índices sem ponto cuja lei de / transformação é

$$T'_{r_1 \dots r_n;\, \dot s_1 \dots \dot s_m} = \alpha_{r_1}^{\ r_1'}\alpha_{r_2}^{\ r_2'} \dots \alpha_{r_n}^{\ r_n'}\,\bar\alpha_{\dot s_1}^{\ \dot s_1'} \dots \alpha_{\dot s_m}^{\ \dot s_m'}\, T_{r_1' r_2' \dots r_n';\, \dot s_1' \dots \dot s_m'} \qquad (9)$$

Êstes objetos quando convenientemente simetrizados constituem uma / base de uma representação irredutível do $SL(2,C)$

O espaço de uma representação irredutível de dimensão $(v+1)(v'+1)$ / é obtido através dos monômios

$$P_{kk'} = u_1^{v-k}\, u_{\dot 1}^{v'-k'}\, u_2^{k}\, u_{\dot 2}^{k'} \qquad (10)$$

$$0 \le k \le v\ ; \quad 0 \le k' \le v'$$

As matrizes dessa representação designaremos por $D^{jj'}(\alpha,\bar\alpha)$ onde $j = \frac{1}{2}v$ e $j' = \frac{1}{2}v'$. Claramente

$$D^{jj'}(\alpha,\bar\alpha) = D^{j}(\alpha) \otimes D^{j'}(\bar\alpha)$$

Realmente, escrevendo $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ nós vemos que

$$P_{kk'} = \sum_{\ell,m} D^{j}_{k\ell}(\alpha)\, D^{j'}_{k'm}(\bar\alpha)\, P_{\ell m}$$

com $$D^{j}_{kk'}(\alpha) = \sum_{s} (-1)^{k+k'} \frac{a^{k'-s}\, b^{s}\, c^{k-k'+s}\, d^{v-k-s}\, k!\,(v-k)!}{s!\,(k'-s)!\,(k-k'+s)!\,(v-k-s)!}$$

Quando nos restringimos ao sub grupo de rotações tri - dimensionais $\bar\alpha$ torna-se uma função analítica de α e pelo teorema de / Clebsch Gordan $D^{jj'}(\alpha,\bar\alpha)$ admite a decomposição

$$D^{jj'}(\alpha,\bar\alpha) = D^{j+j'}(\alpha) \oplus D^{j+j'-1}(\alpha) \oplus \dots\dots D^{|j-j'|}(\alpha)$$

+ O grupo U_2, o grupo de matrizes unimodulares 2 x 2, contém como sub grupo de matrizes unimodulares e unitárias 2 x 2, SU_2. Êste grupo é homorfo ao grupo de rotações a 3 dimensoãs, R_3 (note que se $\alpha^{+} = \alpha^{-1}$ então $tr\,x = tr\,x' \Rightarrow x'^{0} = x^{0}$). Nêste caso $\bar\alpha = (\alpha^{-1})^{tr}$ e as duas repre-

isto é, a representação $D^{jj'}(\alpha,\bar{\alpha})$ tem um conteúdo de spin que exten de-se desde $j + j'$ até $|j - j'|$.

Consideremos a representação $D^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\alpha,\bar{\alpha})$. Esta representação é obtida através da lei de transformação dos monomios

$$P_{00} = u_1 u_{\dot{1}} \; ; \; P_{10} = u_{\dot{1}} u_2 \; ; \; P_{01} = u_1 u_{\dot{2}} \; , \; P_{11} = u_2 u_{\dot{2}}$$

ou seja através de $P'_{kk'} = D^{\frac{1}{2}}_{k p_1}(\alpha) D^{\frac{1}{2}}_{k' p_2} P_{p_1 p_2}$ que pode tambem ser escrita

$$P' = D^{\frac{1}{2}}(\alpha)\, P\, D^{\frac{1}{2}+}(\alpha) = \alpha P \alpha^+$$

Escrevendo $P = P_\mu \sigma^\mu$ nós vemos que P^μ é um quadrivetor. Portanto, a menos de uma equivalência a representação $D^{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(\alpha,\bar{\alpha})$ é idêntica a representação tensorial de ordem 1, de L_p. Como decorrência segue-se a equivalência das representações tensoriais irredutiveis com as espinoriais para as quais $j + j'$ = inteiro. Nós observamos ainda que

$$\left.\begin{array}{ll} P^0 = \frac{1}{2}(P_{00} + P_{11}) \; ; & P^1 = \frac{i}{2}(P_{10} + P_{01}) \\ P^2 = \frac{i}{2}(P_{01} - P_{10}) \; ; & P^3 = \frac{1}{2}(P_{00} - P_{11}) \end{array}\right\} \quad (11)$$

Então partindo de $A = A^\mu \sigma_\mu$ podemos definir os operadores

$$\partial_{r\dot{s}} = \partial^\mu (\sigma_\mu)_{r\dot{s}} \quad e \quad \partial^{r\dot{s}} = \partial^\mu (\sigma_\mu)^{r\dot{s}} \qquad (12)$$

onde $(\sigma_\mu)^{r\dot{s}} = \varepsilon\, \sigma_\mu\, \varepsilon^{-1} = \det \sigma_\mu \; (\sigma_\mu)^{-1\,\dot{s}r}$ (12')

$$\left.\begin{array}{l} (\sigma_0)^{r\dot{s}} = (\sigma_0)_{r\dot{s}} = (\sigma^0)_{r\dot{s}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (\sigma_1)^{r\dot{s}} = -(\sigma_1)_{r\dot{s}} = (\sigma^1)_{r\dot{s}} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ (\sigma_2)^{r\dot{s}} = (\sigma_2)_{r\dot{s}} = -(\sigma^2)_{r\dot{s}} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ (\sigma_3)^{r\dot{s}} = -(\sigma_3)_{r\dot{s}} = (\sigma^3)_{r\dot{s}} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad (13)$$

Utilisando-se (12') ou (13) pode-se mostrar

$$(\sigma^{k'})_{\lambda\dot{\mu}} (\sigma_k)^{\lambda\dot{\mu}} = 2\delta^{k'}_{k} \qquad (14)$$

$$(\sigma^\mu)^{\lambda\dot{m}} (\sigma_{\mu'})_{\lambda\dot{m}'} + (\sigma_{\mu'})^{\lambda\dot{m}} (\sigma^\mu)_{\lambda\dot{m}'} = 2\delta^\mu_{\mu'} \delta^m_{m'} \qquad (14')$$

---

sentações α e $\bar{\alpha}$ são equivalentes. Portanto, no que concerne ao sub grupo de rotações não existe distinção entre espinores com ponto e /

Com ajuda dêsses resultados verifica-se que

$$\partial_{\dot{u}r}\,\partial^{\dot{w}r} = \Box\,\delta^{\dot{w}}_{\dot{u}} \qquad \text{onde} \qquad \Box = \partial\,\partial^{\mu} \qquad (15)$$

De fato

$$\partial_{\dot{u}r}\,\partial^{\dot{w}r} = \partial_{\mu}\,\partial_{\nu}\,(\sigma^{\mu})_{\dot{u}r}\,(\sigma^{\nu})^{\dot{w}r} = \frac{\partial_{\mu}\partial_{\nu}}{2}\,[(\sigma^{\mu})_{\dot{u}r}(\sigma^{\nu})^{\dot{w}r} +$$

$$+ \;(\sigma^{\nu})_{\dot{u}r}\,(\sigma^{\mu})^{\dot{w}r} = \partial_{\mu}\,\partial_{\nu}\,g^{\mu\nu}\,\delta^{\dot{w}}_{\dot{u}} = \Box\,\delta^{\dot{w}}_{\dot{u}}$$

As expressões (9) relacional de uma forma unívoca um espinor de ordem 2 com um vetor. Em geral tensores de grau n podem ser relacionados com espinores de grau 2n através de

$$a_{\mu_1 \ldots\ldots \mu_n} = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{2}(\sigma_{\mu_i})_{s_i}^{\;\dot{r}_i}\right] a^{s_1 \ldots s_n}_{\dot{r}_1 \ldots\ldots \dot{r}_n} \qquad (16)$$

ou sua inversa

$$a^{s_1 \ldots s_n}_{\dot{r}_1 \ldots \dot{r}_n} = \prod_{i=1}^{n} (\sigma_{\mu_i})_{\dot{r}_i}^{\;s_i}\, a^{\mu_1 \ldots \mu_n}$$

É também possível relacionar espinores de grau par com tensores impondo maior simetria. Em particular, através de

$$S_{\mu\nu}{}^{r}{}_{t} = \frac{1}{8}\,(\sigma_{\mu}{}^{\dot{s}r}\,\sigma_{\nu\,\dot{s}t} - (\sigma_{\nu})^{\dot{s}r}\,\sigma_{\mu\,\dot{s}t}) = \frac{1}{4}\,(\sigma_{\mu}{}^{\dot{s}r}(\sigma_{\nu})_{\dot{s}t} -$$

$$- \;g_{\nu\mu}\,\delta^{r}{}_{t}) \qquad e \qquad S_{\mu\nu}{}^{\dot{r}}{}_{\dot{t}} = (S_{\mu\nu}{}^{r}{}_{t})^{*} \qquad (17)$$

é possível obter-se tensores $a_{\mu\nu}$ e $b_{\mu\nu}$ anti-simétricos a partir dos espinores simétricos a^{rt} e $a^{\dot{r}\dot{t}}$

$$a_{\mu\nu} = S_{\mu\nu\,rt}\,a^{rt} = \frac{1}{4}\,(\sigma_{\mu})^{\dot{s}}{}_{r}\,(\sigma_{\nu})_{\dot{s}t}\,a^{rt} \qquad (18)$$

$$b_{\mu\nu} = S_{\mu\nu\,\dot{r}\dot{t}}\,a^{\dot{r}\dot{t}} = \frac{1}{4}\,(\sigma_{\mu})^{s}{}_{\dot{r}}\,(\sigma_{\nu})_{s\dot{t}}\,a^{\dot{r}\dot{t}} \qquad (18')$$

Note que $a_{\mu\nu}$ é auto dual e $b_{\mu\nu}$ anti-auto dual[+]. Assim os equivalentes tensoriais das representações (1,0) e (0,1) são tensores anti-simétricos auto duais e anti auto duais, respectivamente, de ordem 2.

Em geral com os espinores simétricos a^{rt} e $a^{\dot{r}\dot{t}}$ nós podemos construir o tensor anti-simétrico

$$C_{\mu\nu} = S_{\mu\nu rt}\, a^{rt} - S_{\mu\nu}{}^{\dot{r}\dot{t}}\, a_{\dot{r}\dot{t}} = \frac{1}{4}\left(\sigma_\mu{}^{\dot{s}}{}_r\, \sigma_{\nu\,\dot{s}t}\, a^{rt} - \sigma_\mu{}^{\dot{s}\dot{r}}\, \sigma_{\nu s}{}^{\dot{t}}\, a_{\dot{r}\dot{t}}\right) \qquad (19)$$

Os espinores a^{rt} e $a_{\dot{r}\dot{t}}$ são dados em têrmos de $C_{\mu\nu}$ por

$$\left.\begin{aligned} a^{rt} &= 2\, S^{rt}_{\mu\nu}\, C^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \sigma_\mu{}^{\dot{s}r}\, \sigma_{\nu\dot{s}}{}^{t}\, C^{\mu\nu} \;; \\ a_{\dot{r}\dot{t}} &= 2\, S_{\mu\nu\,\dot{r}\dot{t}}\, C^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\, \sigma_\mu{}^{s}{}_{\dot{r}}\, \sigma_{\nu s\dot{t}}\, C^{\mu\nu} \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

Se, por exemplo, $C_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu$ (21) então

$$a^{rt} = \frac{1}{2}\left(\partial^{r\dot{s}}\, a_{\dot{s}}{}^{t} + \partial^{t\dot{s}}\, a_{\dot{s}}{}^{r}\right) \qquad (22)$$

$$a_{\dot{r}\dot{t}} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\dot{r}s}\, a^{s}{}_{\dot{t}} + \partial_{\dot{t}s}\, a^{s}{}_{\dot{r}}\right) \qquad (22')$$

e se além $\partial_\mu a^\mu = 0$ (23) $\Longrightarrow$ $\partial_\mu C^{\mu\nu} = \Box a^\nu$ (23') então

$$\partial_{\dot{r}s}\, a^{\dot{r}s} = 0 \qquad (24)$$

+ Definida a densidade tensorial $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ da maneira usual, o dual de um tensor $F_{\mu\nu}$ é o pseudo tensor $F^{\mu\nu}_{D} = \frac{i}{2}\, \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\, F_{\rho\sigma}$. Um tensor é dito auto dual ou anti auto dual se $F^{\mu\nu}_{D} = F^{\mu\nu}$ ou $F^{\mu\nu}_{D} = -F^{\mu\nu}$, respectivamente.

Isto implica que

$$\partial_{\dot{r}\dot{t}}\, a^{\dot{t}}{}_{\dot{u}} = \partial_{\dot{u}\dot{t}}\, a^{\dot{t}}{}_{\dot{r}} \,.$$

$$\partial^{v\dot{r}}\, a_{\dot{r}}{}^{t} = \partial^{t\dot{r}}\, a_{\dot{r}}{}^{v}$$

e portanto

$$a^{rt} = \partial^{r\dot{s}}\, a_{\dot{s}}{}^{t} \,.$$

$$a_{\dot{r}\dot{t}} = \partial_{\dot{r}s}\, a^{s}{}_{\dot{t}} \qquad (25)$$

Daí $\partial^{v\dot{r}}\, a_{\dot{r}\dot{t}} = \Box\, a^{v}{}_{\dot{t}}$; $\partial_{\dot{r}\dot{t}}\, a^{vt} = \Box\, a^{v}{}_{\dot{r}}$ (26)

Equações (24) e (25) são equivalentes às (23) e (23')

Finalisando esta breve revisão nós queremos dizer algo a respeito da operação de inversão espacial. Em primeiro lugar, como vimos no início, a inversão espacial não admite uma representação bi-dimensional, pois det s = - 1. Como s = g nós vemos que esta operação gera o automorfismo

$$s\, \Lambda\, s^{-1} = (\Lambda^{tr})^{-1} = (\Lambda^{+})^{-1} \qquad (\Lambda \text{ é real})$$

Numa representação do grupo impróprio deve-se ter portanto

$$S\, A\, S^{-1} = (A^{+})^{-1} \qquad (26)$$

Equação (26) mostra explicitamente que s não admite representação bi-dimensional. De fato $(A^{+})^{-1}$ é a representação contragradiente a $\bar{A}$, equivalente a esta última. Ora vimos que A e $\bar{A}$ são inequivalentes se estas pertencem ao U_2, portanto, nêste caso, não é possível satisfazer (26). Um resultado imediato de (26) é que S é unitária.

Consideremos a representação 4- dimensional de L_p obtida pela lei de transformação dos objetos do tipo :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi^{\dot{1}} \\ \psi^{\dot{2}} \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Escrevemos $\psi' = A\psi$ com $\qquad A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & (\alpha^+)^{-1} \end{pmatrix}$

Claramente o conjunto $\{A\}$ é redutível sôbre L_p. Queremos achar $S = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix}$ tal que (26) acontece. Um cálculo direto mostra que

$$B\alpha = (\alpha^+)^{-1}B \;;\; C(\alpha^+)^{-1} = (\alpha^+)^{-1}C \;;\; D(\alpha^+)^{-1} = \alpha D \;;\; E\alpha = \alpha E \qquad (28)$$

As equações (28) nos mostram que B,D = 0 (pois as representações α e $(\alpha^+)^{-1}$ são inequivalentes e que C, E $\sim \lambda I$ (pois as representações α e $(\alpha^+)^{-1}$ são irredutíveis). Utilisando o fato que S é unitária obtemos $\lambda^4 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1, \pm i$. Existem portanto 4 fórmas para a matriz S. Note que em qualquer caso o conjunto S, A é irredutível, pois S e A são não comutantes. A diferença fundamental está no fato de que objetos ψ e ψ' onde ψ' denota o "conjugado na carga" de ψ terem diferentes leis de transformação se $\lambda = \pm 1$. Nós daí escolhemos $\lambda = +i$ e escrevemos

$$S = i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (29)$$

Note que por s, no sentido acima

$$\psi^{\dot{r}} \longrightarrow \psi_r \qquad (30)$$

Uma consequência imediata é que em tôdas teorias tendo como grupo de simetria subjacente o grupo de Lorentz impróprio as representações de L_p devem ocorrer em pares conjugados, por exemplo $(k, \ell) \oplus (\ell, k)$.

Para construção do operador correspondente a inversão temporal lembremos que como st = ts nós devemos ter ST = ± TS, pois a representação em questão é bi-valente. Como, além t é gerador do mesmo automorfismo que s, nós obtemos análogamente ao que fizemos para inversão espacial.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (30') \quad (ST = -TS)$$

L

1.2 - <u>Formalismo de Pauli-Dirac-Fierz para descrição de partículas com spin arbitrário.</u> - Sem dúvida a teoria de equações relativísticas mais antiga é a de Pauli-Dirac-Fierz (ref. 3). Vista sob uma prisma histórico, ela constitui uma decorrência natural da teoria de Dirac para partículas de spin 1/2 . Como veremos esta teoria satisfaz as seguintes condições : 1) o requisito de uma única massa; 2) o requisito de um único spin; 3) o requisito de que ou a carga total ou a enegia total é positivamente definida. A pesar da elegância formal da teoria sérias dificuldades foram encontradas quando se procurou introduzir interações. Isto conduziu Fierz e Pauli a uma reformulação da teoria e, possìvelmente mais tarde foi o ponto de partida das teorias de Bhabha e Harish-Chandra onde as condições (1) e (2) foram abandonadas.

Nós iniciamos o estudo das equações de Pauli-Fierz com alguns exemplos:

a) <u>Forma Espinorial da equação de Dirac.</u> Considere as equações

$$\partial_{\dot{r}s}\, \varphi^s = im\, \chi_{\dot{r}} \quad ; \quad \partial^{v\dot{s}}\, \chi_{\dot{s}} = im\, \varphi^v \qquad (31)$$

Estas equações constituem a fórma espinorial da equação de Dirac . Para colocá-las na fórma usual nós as escrevemos da seguinte maneira:

$$\partial^{\mu}(\sigma_{\mu})_{\dot{r}s}\, \varphi^s = im\, \chi_{\dot{r}} \quad ; \quad \partial^{\mu}(\sigma_{\mu})^{v\dot{s}}\, \chi_{\dot{s}} = im\, \varphi^v$$

Utilisando $\varphi^s = \varepsilon^{sm}\varphi_m$; $\chi_r = \varepsilon_{r\dot{n}}\chi^{\dot{n}}$ então

$$\partial^\mu (\sigma_\mu)_{t\dot{n}}\chi^{\dot{n}} = -im\,\varphi_t \quad ; \quad \partial^\mu(\sigma_\mu)^{\dot{t}m}\varphi_m = -im\,\chi^{\dot{t}}$$

Definindo $\dot{\chi} = \begin{pmatrix}\chi^{\dot{1}}\\ \chi^{\dot{2}}\end{pmatrix}$ e $\varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$

estas equações podem ser escritas

$$(\partial^0\sigma_0 + \partial^1\sigma_1 + \partial^2\sigma_2 + \partial^3\sigma_3)\,\dot{\chi} = -im\,\varphi$$

$$(\partial^0\sigma_0 - \partial^1\sigma_1 - \partial^2\sigma_2 - \partial^3\sigma_3)\,\varphi = -im\,\dot{\chi}$$

multiplicando por i e introduzindo $\Phi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \dot{\chi}\end{pmatrix}$ vem

$$\begin{pmatrix} 0 & i\partial^0\sigma_0 + i\partial^1\sigma_1 + i\partial^2\sigma_2 + i\partial^3\sigma_3 \\ i\partial^0\sigma_0 - i\partial^1\sigma_1 - i\partial^2\sigma_2 - i\partial^3\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}\Phi = m$$

ou $i\,\gamma_\mu\partial^\mu\Phi = m\Phi$ (32) onde $\gamma_0 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_0\\ \sigma_0 & 0\end{pmatrix}$;

$\gamma_i = \begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ -\sigma_i & 0\end{pmatrix}$ Como pode se observar $[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = 2g$

As equações complexa conjugadas das (31)

$$\partial^\mu(\sigma_\mu)_{r\dot{s}}\,\varphi^{\dot{s}} = -im\,\chi_r \quad ; \quad \partial^\mu(\sigma_\mu)^{\dot{v}s}\chi_s = -im\,\varphi^{\dot{v}}$$

levam a

$$(\partial^0\sigma_0 + \partial^1\sigma_1 - \partial^2\sigma_2 + \partial^3\sigma_3)\,\chi^* = im\,\varphi^*$$

$$(\partial^0\sigma_0 - \partial^1\sigma_1 + \partial^2\sigma_2 - \partial^3\sigma_3)\,\varphi^* = im\,\chi^*$$

que podem ser escritas

$$i\,\partial^\mu\bar{\Phi}\gamma_\mu + m\bar{\Phi} = 0 \quad (33) \quad \text{onde} \quad \bar{\Phi} = \Phi^+\gamma_0$$

Equação (33) é a equação de Dirac adjunta. É aparente de (33) que o espinor $\Phi' = C\bar{\Phi}^{tr}$, com C tal que

$$C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^{tr} \quad ; \quad C^{tr} = -C$$

satisfaz (32); entretanto quando interações eletromagnéticas são introduzidas, através do acoplamento mínimo $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu$, nós vemos que Φ e Φ' procedem como campos de diferentes cargas $\pm e$. Como C anti-comuta com γ^0 segue que Φ e Φ' terão a mesma lei de transformação por $S = \lambda\gamma^0$ sòmente se $\lambda = \pm i$.+

b) <u>Equações de Proca</u> - Como segundo exemplo considere as equações

$$\partial_{\dot{r}s}\, a^s{}_{\dot{u}} = m\, a_{\dot{r}\dot{u}} \quad ; \quad \partial^{\dot{r}\dot{s}}\, a_{\dot{s}\dot{u}} = -m\, a^{\dot{r}}{}_{\dot{u}} \qquad (34)$$

onde $a_{\dot{r}\dot{u}}$ é simétrico. Por (15) e como $\varepsilon^{\dot{r}\dot{u}} a_{\dot{r}\dot{u}} = 0$ segue-se que

$$(\Box + m^2)\, a^s{}_{\dot{u}} = (\Box + m^2)\, a_{\dot{s}\dot{u}} = 0 \; ; \; \partial_{\dot{r}s}\, a^{\dot{r}s} = 0$$

Escrevendo $a^{\dot{r}s} = a^\mu \sigma_\mu^{\dot{r}s}$ obtemos

$$(\Box + m^2)\, a_\mu = 0 \qquad e \quad \partial_\mu a^\mu = 0 \qquad (35)$$

Estas são as equações de Proca; uma outra fórma equivalente a (35) é dada por

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} + m^2 a_\nu = 0$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu \qquad (36)$$

De passagem nós fazemos referência ao fato que as fórmas (34), (35) e (36) são em geral inequivalentes para campos em interação.

+ - Espinores que se transformam com $\lambda = -i$ ou $\lambda = \pm 1$ são chamados pseudo espinores e aquêles com $\lambda = i$ são chamados espinores (Yang e Tiomno - ref. 4).

Um ponto a ser notado é que na fórma (35) as equações tornam-se, em geral, incompatíveis quando interações são introduzidas. De fato isto pode ser visto quer no caso de um acoplamento escalar ($\partial_\mu a^\mu = 0$ é incompatível com $[\Box + m(m - V(x))]\, a_\nu = 0$) quer no caso de acoplamento eletromagnético (pois $[D^2, D_\mu] \neq 0$ em geral); êstes fatos levam-nos a abandonar a fórma (35) . Como veremos as dificuldades acima constituem um prenúncio daquelas que iremos encontrar na formulação de equações relativísticas para spin > 1 .

<u>Equações de Fierz-Pauli</u> - Como generalização da equação de Dirac para partículas de spin 1/2, Fierz e Pauli propuzeram como equações para partículas de spin arbitrário o seguinte conjunto:

$$\partial_{\dot r s}\, \varphi^{st\cdots}_{\dot u\cdots} = im\, \chi^{t\cdots}_{\dot r \dot u\cdots} \quad ; \quad \partial^{\nu \dot s}\, \chi^{t\cdots}_{\dot s \dot u\cdots} = im\, \varphi^{\nu t\cdots}_{\dot u\cdots} \qquad (38)$$

Nestas equações tanto $\varphi^{st\cdots}_{\dot u\cdots}$ como $\chi^{t\cdots}_{\dot r \dot u\cdots}$ são espinores simétricos do grau n . Nós notamos inicialmente que as (38) implicam que

$$(\Box + m^2)\, \varphi^{st\cdots}_{\dot u\cdots} = (\Box + m^2)\, \chi^{t\cdots}_{\dot s \dot u\cdots} = 0 \qquad (39)$$

e

$$\partial_{\dot r s}\, \varphi^{\dot r s t\cdots}_{\dot u\cdots} = \partial^{\nu \dot s}\, \chi^{t\cdots}_{\nu \dot s \dot u\cdots} = 0 \qquad (40)$$

Equação (39) mostra explicitamente que as (38) são candidatas para a discrição com um único valor da massa m. Nós vamos considerar o caso em que $m \neq 0$ e vamos mostrar que o spin associado a $\varphi^{st\cdots}_{\dot u\cdots}$ é n/2. Realmente, no referencial de repouso

$$\varphi^{\dot r t}_{\dot u} = -\chi^{t}_{\dot r \dot u}$$

e assim

$$\varphi^{st\cdots}_{\dot u\cdots} = -\chi^{t\cdots}_{\dot s \dot u\cdots} = -\chi^{t\cdots}_{\dot u \dot s\cdots} = \varphi^{ut\cdots}_{\dot s}$$

Como no referencial de repouso transformações de L_p são rotações tri-dimensionais segue-se que o objeto $\varphi^{st\cdots}_{\dot u\cdots}$ é simétrico em todos seus índices. Assim o número de componentes independentes é $C^{n+2-1}_{2-1} = 2(\frac{n}{2}) + 1$, o que mostra o que desejávamos.

Seja $\varphi^{st\ldots}_{\dot{u}\ldots}$ com k-1 e ℓ - 1 índices com ponto e sem ponto, respectivamente; $\chi^{t\ldots}_{\dot{r}\dot{u}\ldots}$ tem k e ℓ - 2, respectivamente. Então a representação subjacente as (38) é

$$D^{\frac{1}{2}(\ell-1),\frac{1}{2}(k-1)} \oplus D^{\frac{1}{2}(\ell-2),\frac{1}{2}k}$$

Nós temos $n = k + \ell - 2$ de maneira que fazendo $k = 1, \ldots n$ nós vemos que existem $n = 2s$ possíveis teorias para spin s, construidas a partir de espinores de grau n. Claramente estas teorias são equivalentes, pois os objetos φ são bases de realizações irredutíveis de L_p no mesmo espaço de dimensão n + 1.

Vamos extender estas considerações para o caso em que reflexões espaciais são envolvidas. Sejam $(\overset{(q)}{\varphi}, \overset{(q)}{\chi})$ objetos satisfazendo (38) com

$$k = n - q + 1 \qquad ; \qquad q = 1, \ldots n$$
$$\ell = q + 1$$

então, por s, $(\overset{(q)}{\varphi}, \overset{(q)}{\chi}) \longrightarrow (\overset{(n-q+1)}{\chi}, \overset{(n-q+1)}{\varphi})$; assim devemos considerar o conjunto $(\overset{(q)}{\varphi}, \overset{(n-q+1)}{\chi}, \overset{(q)}{\chi}, \overset{(n-q+1)}{\varphi})$. Fazendo então $q = 1, \ldots n$ nós vemos que existem s (para spin s inteiro) ou s + 1/2 (s semi inteiro) teorias. Em cada caso a representação subjacente é dada por

$$D^{\frac{1}{2}(\ell-1),\frac{1}{2}(k-1)} \oplus D^{\frac{1}{2}(\ell-2),\frac{k}{2}} \oplus D^{\frac{k}{2},\frac{1}{2}(\ell-2)} \oplus D^{\frac{1}{2}(k-1),\frac{1}{2}(\ell-1)} \qquad (41)$$

No caso de spin inteiro nós podemos escolher

$$k = s + 1, \quad \ell = s + 1 \qquad q = s \qquad (41')$$

e usar

$$\overset{(s)}{\varphi} = \varphi^{t_1 \cdots t_s}_{\dot{u}_1 \cdots \dot{u}_s} \qquad \overset{(s+1)}{\varphi} = \varphi^{t_1 \cdots t_{s-1}, vt}_{\dot{u}_1 \cdots \dot{u}_{s-1}} \qquad (42)$$

$$\overset{(s)}{\chi} = \chi^{t_2 \cdots t_s}_{\dot{r}\dot{u}\,\dot{u}_2 \cdots \dot{u}_s} \qquad \overset{(s+1)}{\chi} = \overset{(s)}{\varphi}$$

Como $\overset{(s)}{\chi}{}^{\ldots}_{\dot{r}\dot{u}\ldots}$ e $\overset{(s+1)}{\varphi}{}^{\ldots vt}_{\ldots}$ são simétricos em $\dot{r}\dot{u}$ e vt êles podem ser combinados, segundo (19) para formar um tensor anti-simétrico $F_{[\mu,\nu]\mu_2 \cdots \mu_s}$. Da discussão da pagina (6) é claro que

$$\partial_\nu U_{\mu\mu_2\cdots\mu_s} - \partial_\mu U_{\nu\mu_2\cdots\mu_s} = F_{[\nu\mu]\mu_2\cdots\mu_s}$$

$$\partial^\mu U_{\mu\mu_2\cdots\mu_s} = 0$$

Por outro lado, como $(\Box + m^2)\,\varphi^{(s)\,t_1\cdots t_p}_{\dot u_1\cdots\dot u_s} = 0$ então

$$\partial^\nu F_{[\nu,\mu]\mu_2\cdots\mu_s} = -m^2 U_{\mu\mu_2\cdots\mu_s}$$

O objeto $U_{\mu_1\cdots\mu_s}$ é um tensor simétrico pois $\varphi^{t_1\cdots t_s}_{\dot u_1\cdots\dot u_s}$ é um espinor simétrico. Além disso

$$U^\mu{}_{\mu\mu_2\cdots\mu_s} = \frac{1}{4}\prod_{i=3}^{p}\frac{1}{2}(\sigma_{\mu_i})_{s_i}{}^{\dot r_i}\,(\sigma_\mu)_{s_1}{}^{\dot r_1}\,(\sigma^\mu)_{s_2}{}^{\dot r_2}\,\varphi^{s_1 s_2\cdots s_p}_{\dot r_1\cdots\dot r_r} = 0$$

Resumindo, as equações para spin s inteiro, equivalentes as (38), podem ser escritas como

$$(\Box + m^2)\,U_{\mu_1\cdots\mu_s} = 0 \quad ; \quad \partial^\mu U_{\mu\mu_2\cdots\mu_s} = 0 \; ; \quad U^\mu{}_{\mu\mu_2\cdots\mu_3} = 0 \qquad (43)$$

No caso de spin semi-inteiro s = k + 1/2 existe o <u>formalismo de Rarita-Schwinger</u> (ref. 5) que dá uma fórma espinor-tensorial às equações de Pauli-Fierz. Utilizando $\varphi^{s t_1\cdots t_k}_{\dot u_1\cdots\dot u_k}$ e $\chi^{t_1\cdots t_k}_{\dot r\,\dot u_1\cdots\dot u_k}$ construimos

$$\varphi^s{}_{\mu_1\cdots\mu_k} = \prod_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{2}(\sigma_{\mu_i})_{t_i}{}^{\dot u_i}\right]\varphi^{s t_1\cdots t_k}_{\dot u_1\cdots\dot u_k}$$

$$\chi_{\dot r\,\mu_1\cdots\mu_k} = \prod_{i=1}^{k}\left[\frac{1}{2}(\sigma_{\mu_i})_{t_i}{}^{\dot u_i}\right]\chi^{t_1\cdots t_k}_{\dot r\,\dot u_1\cdots\dot u_k}$$

Definindo

$$\psi_{\mu_1\cdots\mu_k} = \begin{vmatrix} \varphi_{1\,\mu_1\cdots\mu_k} \\ \varphi_{2\,\mu_1\cdots\mu_k} \\ \chi^1{}_{\mu_1\cdots\mu_k} \\ \chi^2{}_{\mu_1\cdots\mu_k} \end{vmatrix} \qquad (44)$$

então, é possível mostrar, anàlogamente como fizemos para spin 1/2, que

$$i\partial\!\!\!/\,\partial^\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_k} = m\,\psi_{\mu_1\cdots\mu_k} \qquad (45)$$

O espinor-tensor $\psi_{\mu_1\cdots\mu_k}$ é simétrico, de traço nulo, com relação aos índices $\mu_1\cdots\mu_k$. Nós vamos mostrar que

$$\partial\!\!\!/\,\psi^\mu{}_{\mu_2\cdots\mu_k} = 0 \qquad (46)$$

+ Nós observamos que $\sigma_\mu{}^{s_1\dot r_1}\sigma^\mu{}_{s_2}{}^{\dot r_2}$ deve ser anti-simétrico nos índices $\dot r_1\,\dot r_2$, pois por (14') $\sigma_\mu{}^{s_1\dot r_1}\sigma^\mu{}_{s_1}{}^{\dot r_2} = 2\varepsilon^{\dot r_1\dot r_2}$ é.

Realmente

$$\gamma_\mu \psi^\mu{}_{\mu_2 \cdots \mu_k} = \begin{pmatrix} \sigma_0 \dot{\chi}_{0\mu_2 \cdots \mu_k} - \sigma_i \chi_{i\mu_2 \cdots \mu_k} \\ \sigma_0 \varphi_{0\mu_2 \cdots \mu_k} + \sigma_i \varphi_{i\mu_2 \cdots \mu_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^\mu_{\dot{t}\dot{n}} \chi^{\dot{n}}{}_{\mu\mu_2 \cdots \mu_k} \\ \sigma_\mu{}^{\dot{t}\dot{m}} \varphi^\mu{}_{m\mu_2 \cdots \mu_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi^{\dot{n}}{}_{\dot{n}\dot{t}\mu_2 \cdots \mu_k} \\ \varphi^{\dot{t}\dot{m}}{}_{m\mu_2 \cdots \mu_k} \end{pmatrix} = 0$$

pois tanto χ como φ são espinores simétricos. Multiplicando a (45) por $i\gamma_\nu \partial^\nu$ vem

$$i\gamma_\nu \partial^\nu m \psi = m^2 \psi = -\gamma_\nu \gamma_\mu \partial^\nu \partial^\mu \psi = -g_{\nu\mu} \partial^\mu \psi = -\Box \psi$$

ou seja

$$(\Box + m^2)\psi = 0 \qquad (47)$$

Nos obtemos ainda

$$0 = m \gamma_{\mu_1} \psi^{\mu_1}{}_{\mu_2 \cdots \mu_k} = i \gamma_{\mu_1} \gamma_\mu \partial^\mu \psi^{\mu_1}{}_{\mu_2 \cdots \mu_k} = 2 g_{\mu_1 \mu} \partial^\mu \psi^{\mu_1}{}_{\mu_2 \cdots \mu_k}$$

ou seja

$$\partial^\mu \psi_{\mu\mu_2 \cdots \mu_k} = 0 \qquad (48)$$

Em resumo, no formalismo de Rarita Schwinger, no caso de spin $s = k + 1/2$, os objetos que descrevem o campo são espinores-tensores (de grau k), simétricos e de traço nulo em seus índices tensoriais, satisfazendo (45), (46) e (48)

No caso de partículas com massa 0, $m = 0$, nós obtemos para spin inteiro

$$\Box A_{\mu_1 \cdots \mu_s} = 0 ; \quad \partial^\mu A_{\mu\mu_2 \cdots \mu_s} = 0 \qquad A^\mu{}_{\mu\mu_2 \cdots \mu_s} = 0 \qquad (49)$$

que são equivalentes a

$$F_{[\nu,\mu]\mu_2 \cdots \mu_s} = \partial_\nu A_{\mu\mu_2 \cdots \mu_s} - \partial_\mu A_{\nu\mu_2 \cdots \mu_s}$$

$$\partial^\nu F_{[\nu\mu]\mu_2 \cdots \mu_s} = 0 \quad ; \quad A^\mu{}_{\mu\mu_2 \cdots \mu_s} = 0 \quad ; \quad \partial^\mu A_{\mu\mu_2 \cdots \mu_s} = 0 \qquad (50)$$

Introduzindo o tensor

$$N_{\mu_1 \ldots \mu_s} = \partial_{\mu_1} C_{\mu_2 \ldots \mu_s} + \partial_{\mu_2} C_{\mu_1 \mu_3 \ldots \mu_s} + \ldots + \partial_{\mu_s} C_{\mu_1 \ldots \mu_{s-1}}$$

onde $C_{\mu_1 \ldots \mu_s}$ é um tensor simétrico satisfazendo (49) ; nós vemos então que estas equações são invariantes com relação à transformação de calibre

$$A_{\mu_1 \ldots \mu_s} \longrightarrow A'_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_s} = A_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_s} + N_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_s} \qquad (51)$$

Para calcularmos o número de componentes independentes da função de onda nós devemos, portanto, diminuir o número de componentes independentes de $C_{\mu_1 \ldots \mu_{s-1}}$. Para fazermos isto consideremos uma onda plana de vetor de onda $k^\mu = (k_0, 0, 0, k_0)$; em primeiro lugar um tensor de grau s, em quatro dimensões têm

$$C^{s+4-1}_{4-1} = C^{s+3}_{3} \qquad \text{componentes independentes.}$$

A condição $A^\mu{}_{\mu \mu_2 \ldots \mu_s} = 0 \Rightarrow$ que existem sòmente $C^{s+3}_{3} - C^{s+1}_{3} = (s+1)^2$ componentes independentes. Finalmente $\partial^\mu A_{\mu \mu_2 \ldots \mu_s} = 0 \Rightarrow A_{0 \mu_2 \ldots \mu_s} = -A_{3 \mu_2 \ldots \mu_s}$ restringe-nos ao espaço tri-dimensional. Repetindo o cálculo nós achamos

$$C^{s+2}_{2} - C^{s}_{2} = 2s+1 \qquad \text{componentes independentes}$$

portanto $C_{\mu_1 \ldots \mu_{s-1}}$ tem $2(s-1)+1$ e daí o número de estados independentes é

$$(2s+1) - (2s-1) = \underline{2}$$

Um exemplo é o caso do campo eletromagnético que, como sabemos, possui sòmente dois estados de helicidade independentes. Esta é uma diferença essencial com relação às teorias com $m \neq 0$.

Nós fazemos referência também a um teorema devido a Pauli que mostra que, no formalismo de Pauli-Fierz ou seu equivalente, para spin inteiro a densidade de carga é indefinida e para spin semi-inteiro a densidade de energia é indefinida. Como conseqüência, a fim de ter-se na teoria quantizada que a energia total é positiva, campos de spin semi-inteiro devem ser quantizados de acôrdo com a estatística de Fermi-Dirac.

Nós queremos ainda observar que, embora a representação subjacente as (38) e conjugadas seja dada de uma maneira geral por (41), o esquema (42) mostra que na formulação tensorial com spin inteiro a representação subjacente é $(\frac{s}{2}, \frac{s}{2})$. No caso do formalismo de Rarita-Schwinger nós podemos verificar que a representação subjacente é

$$[(0,\tfrac{1}{2}) \oplus (\tfrac{1}{2},0)] \otimes [\tfrac{2s-1}{4}, \tfrac{2s-1}{4}]$$

Daí é claro que é inerente em tôdas estas teorias a presença de condições subsidiárias, para spin ≥ 1, que visam eliminar as componentes redundantes. Por exemplo, no caso de $s = 1$, a representação subjacente sendo (1/2, 1/2), nós vemos, quando nos restringimos ao sub-grupo de rotações, que os elementos do espaço dessa representação contém componentes de spin 1 e 0. As equações são

$$(\Box + m^2)\varphi_\mu = 0 \quad e \quad \partial^\mu \varphi_\mu = 0$$

onde a segunda dessas equações visa eliminar a componente de spin 0. Entretanto a existência dessas condições subsidiárias leva a sérios problemas quando interações são introduzidas, quer no nível não quantizado como no quantizado. Em particular Fierz-Pauli notaram que as (38) são inconsistentes, para $s \geq 3/2$, quando interações eletromagnéticas são introduzidas, via acoplamento mínimo

$$\partial_{r\dot{s}} \longrightarrow D_{r\dot{s}} = D_\mu (\sigma^\mu)_{r\dot{s}}$$

Fierz-Pauli procuraram reter a fórma (38) para os campos livres introduzindo espinores auxiliares de grau menor que os originais e obtendo as equações a partir de um princípio variacional. Êste procedimento conduz a equações de complexidade crescente com o spin, quebrando a simplicidade original da teoria.

Esta foi a motivação original para as chamadas teorias sem condições subsidiárias as mais antigas sendo as de Bhabha (ref. 6) e de Harish-Chandra (ref. 7). Entre as teorias dêste tipo mais rescentes temos a formulação de Weinberg (ref. 8), que adota um ponto de vista algo intermediário entre o formalismo lagrangeano e a filosofia da matriz S. Êle abandona, quase que completamente, a

tentativa de construção de equações relativísticas pois, a seu ver, estas equações nada mais são que uma afirmativa invariante de quais componentes são essênciais e quais são redundantes. Entretanto, antes de entrar na análise destas teorias mais recentes vamos examinar as de Bhabha e Harish-Chandra.

Teorias de Bhabha e Harish-Chandra - A equação básica é escrita na fórma linear +

$$(i\,\beta_\mu \partial^\mu - m)\,\Psi = 0 \qquad (52)$$

O objeto $\Psi(x_0, \vec{x})$ toma valores em algum espaço R, onde atua uma representação (em geral redutível) do grupo de Lorentz

$$x' = \Lambda x \quad , \quad \Psi'(x') = \mathcal{T}(\Lambda)\,\Psi(x) \qquad (53)$$

Seja $D^{jj'}(\Lambda)$ a representação irredutível de mais alto peso contida em $\mathcal{T}(\Lambda)$. Considerando o sub-grupo de rotações nós vemos que o objeto Ψ possui um conteudo de spin que se estende desde $j + j'$ até $|\, j - j' \,|$.

Suponhamos que exista uma matriz η hermitiana e não singular satisfazendo

$$\eta\beta_\mu = \beta_\mu^+ \eta \qquad (54)$$

então, tomando o complexo conjugado e transpondo (52) obtemos

$$i\,\partial^\mu \bar{\Psi}\beta_\mu + m\bar{\Psi} = 0 \qquad \text{com} \qquad \bar{\Psi} = \Psi^+\eta \qquad (55)$$

Tanto (52) como (55) podem ser obtidas de um princípio variacional através da densidade de lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2i}\left(\bar{\Psi}\beta_\mu\partial^\mu\Psi - \partial^\mu\bar{\Psi}\beta_\mu\Psi\right) + m\bar{\Psi}\Psi \qquad (55')$$

que conduz as seguintes expressões para a corrente e tensor energia momento

+ Note que tôdas equções precedentes podem ser escritas na forma (52) com matrizes β_μ adequadas.

$$J^\mu = \bar{\Psi} \beta^\mu \psi \qquad (56)$$

$$U_{\mu\nu} = +\frac{i}{2} (\bar{\Psi} \beta_\nu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\Psi} \beta_\nu \psi) \qquad (56')$$

A invariança relativistica de (52) é assegurada se as matrizes satisfazem

$$T^{-1} \beta_\mu T \Lambda^\mu{}_\nu = \beta_\nu \qquad (57)$$

enquanto a invariança relativistica de (55') é assegurada com

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} T^{-1} \qquad (58)$$

Portanto $T^+ \eta T = \eta$ e $T^+ \eta \beta_\mu T \Lambda^\mu{}_\nu = \eta \beta_\nu$ (59)

A matriz $L_0 = \eta \beta_0$ não é em geral não negativa podendo assim existirem estados com métrica indefinida; isto pode em particular, possibilitar o aparecimento de autos valores complexos para a energia+. Êste fato será objeto de um estudo posterior e no momento queremos apenas mostrar que L_0 é indefinida, em geral++. Para vermos isto consideremos transformações infinitesimais:

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \delta^\nu_\mu + \varepsilon^\nu_\mu \quad ; \quad \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu} \qquad (60)$$

$$T = I + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad ; \quad M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu} \qquad (61)$$

$L_\mu = \eta \beta_\mu$

Então, utilizando (59) obtemos:

$$L_\rho M^{\mu\nu} + M^{\mu\nu tr} L_\rho = i (\delta^\nu_\rho L^\mu - \delta^\mu_\rho L^\nu) \qquad (62)^{+++}$$

Especializando para transformações de Lorentz puras vêm

$\mu = k$, $\rho = \nu = 0$

$$L^k = L_0 M^{4k} + M^{4k tr} L_0 \qquad (63)$$

$$L^0 = L^k M^{4k} + M^{4k tr} L^k \qquad (63')$$

Substituindo (63) em (63') temos

$$(M^{4k})^2 L^0 + L^0 (M^{4k})^2 + 2 M^{4k} L^0 M^{4k} - L^0 = 0 \qquad (64)$$

Nós vamos considerar que o conjunto L^μ é irredutível++++ e supor que o menor auto valor de L^0 é $\lambda \geq 0$. Seja P_λ o projetor sôbre o espaço nulo da matriz $L^0 - \lambda$, isto é:

+ Salvo no caso de spin 1/2, onde com a identificação $\beta_\mu = J_\mu$, $\eta = J_0$ nós vemos que $J_0 = \Psi^+ \Psi$ é estritamente positiva.

++ Johnson e Sudarshan (ref. 9)

+++ As matrizes $i M^{\mu\nu}$ são reais ; $i M^{0k} = M^{4k}$ é simétrica e M^{kl} anti-simétrica.

++++ Se tal não acontecer nós podemos repetir a discussão para cada parte irredutível de L^μ

$$P_\lambda (L^0 - \lambda) = (L^0 - \lambda) P_\lambda = 0$$

Utilizando (64) obtemos

$$2 P_\lambda M^{4k} (L_0 - \lambda) M^{4k} P_\lambda = -\lambda P_\lambda ((2M^{4k})^2 - 1) P_\lambda \quad (65)$$

Como M^{4k} é hermitiano o primeiro membro de (65) é semi-positivo definido enquanto que o segundo membro é semi-negativo ($(2M^{4k})^2 \geq 1$). O anulamento do primeiro membro implica que

$$P_\lambda M^{4k} (1 - P_\lambda) = 0 \quad (65')$$

entretanto se $P_\lambda \neq 1$ isto conduz a $P_\lambda L^\mu (1 - P_\lambda) = 0$ (para L_0 isto é uma identidade e o resultado para L^k segue-se pela utilização de (63)) o que significa que L^μ é redutível, contrário ao que supomos. Assim devemos ter $P_\lambda = 1$ e do segundo membro de (65) obtemos

$$(2 M^{4k})^2 = 1$$

e o correspondente spin é 1/2. Portanto L_0 é indefinida para $s \neq \frac{1}{2}$.

Voltando à equação (52), nós desejamos estabelecer algumas propriedades das matrizes β_μ. Em primeiro lugar a equação (57) nos mostra (considere transformações infinitesimais)

$$[\beta_m, M^{\mu\nu}] = i [\beta^\mu \delta^\nu_m - \beta^\nu \delta^\mu_m] \quad (66)$$

e daí $\beta^k = i [\beta_0, M^{0k}]$ (fato já obtido anteriormente)

Assim dada a representação $\Lambda \to T(\Lambda)$ nós podemos construir o conjunto β_μ a partir do conhecimento de β_0. A (66) mostra ainda que $tr\, \beta_m = 0$.+ Seja $P = \beta_\mu k^\mu$; por Lorentz então o objeto

$$P \longrightarrow P' = T P T^{-1} = \Lambda^\mu{}_\nu \beta_\mu k^\nu$$

A equação mínima satisfeita por P daí é Lorentz invariantes e como deve ser homogênea em k_μ segue-se que sua fórma é

+ Pode ser mostr e uma maneira geral que $tr\, \beta_{\mu_1} \ldots \beta_{\mu_{2n+1}} = 0$

$$(P^2 - a_1^2 k^2)(P^2 - a_2^2 k^2) \ldots\ldots = 0 \qquad (67)$$

se seu grau é par ou P vezes (67) se seu grau é impar. Como

$$P\psi = m\psi \quad ; \quad P^2\psi = m^2\psi$$

a (67) mostra que em geral a (52) descreve partículas com vários estados de massas diferentes. Ela mostra que ψ satisfaz uma equação de grau superior ao segundo em ∂_μ a não ser que todos a_i a exceção de um e sòmente um sejam nulos. Para vermos o siguinificado dos a_i escrevamos (67) no referencial de repouso ($k_i = 0$). Obtemos

$$((\beta_0)^2 - a_1^2)((\beta_0)^2 - a_2^2) \ldots\ldots = 0 \qquad (68)$$

ou β_0 vezes isto se seu grau for impar. Assim vemos que $\pm a_1, \ldots \pm a_n$ são os auto valores, distintos de zero, da matriz β_0. No caso de uma única massa de repouso é suficiente que(+)

$$\beta_0^{2f-1}(\beta_0^2 - 1) = 0 \qquad (69)$$

onde f é o valor do maior spin na representação $T(\Lambda)$. Notemos ainda que no caso de um único valor para a massa a equação (69) mostra que β_0 não é diagonalizável para $f > 1$ pois, se o fôsse, então sua equação mínima seria

$$\beta_0(\beta_0^2 - 1) = 0 \qquad \text{em contradição com (69)}$$

A teoria de Harish-Chandra caracteriza-se pelo fato que β_0 satisfaz (69) e portanto descreve equações com uma única massa de repouso.

Consideromos novamente transformações infinitesimais. A lei de composição de grupo

$$T(\Lambda)\,T(\Lambda')\,T^{-1}(\Lambda) = T(\Lambda\Lambda'\Lambda^{-1})$$

(+) - Por exemplo Umezawa (ref. 10) ou Harish-Chandra (ref. 7).

fornece

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\{M^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + M^{\nu\sigma}g^{\mu\rho} - M^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} - M^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\} \quad (70)$$

As equações (66) e (70) não são suficientes para a determinação da álgebra das matrizes β_μ. Por outro lado, observando que

$$[[\beta^\mu, \beta^\nu], M^{\rho\sigma}] = i\{[\beta^\mu, \beta^\rho]g^{\nu\sigma} + [\beta^\nu, \beta^\sigma]g^{\mu\rho} - [\beta^\nu, \beta^\rho]g^{\mu\sigma} - [\beta^\mu, \beta^\sigma]g^{\nu\rho}\}$$

Bhabha notou que (66) e (70) não são incompátiveis com

$$M^{\mu\nu} = c[\beta^\mu, \beta^\nu] \quad (71)$$

Supondo que (71) é verdadeira, é sempre possível escolher o conjunto β^μ tal que

$$i M^{\mu\nu} = [\beta^\mu, \beta^\nu]$$

Agora, se escrevermos $J_i = -\frac{1}{2}\varepsilon_{imn}M^{mn}$, $K_i = M_{io}$ então

$$\left.\begin{aligned} [J_m, J_n] &= i\varepsilon_{mnk}J_k \\ [K_m, K_n] &= -i\varepsilon_{mnk}K_k \\ [J_m, K_n] &= i\varepsilon_{mnk}K_k \end{aligned}\right\} \quad (72)$$

As relações acima mostram que quaisquer dos conjuntos (J_m, J_n, J_k) e $(iK_m, J_m, -iK_s)$ + satisfazem relações semelhantes às das componentes do momento angular. Utilizando (66) vê-se também que é sempre possível selecionar dois β^μ e um M^{mn} satisfazendo relações de comutação de momento angular. Denotando um elemento genérico dêsses conjuntos por X, então X deve satisfazer

$$(X^2 - f^2)(X^2 - (f-1)^2)\ldots\ldots = 0 \quad (73)$$

onde o último fator é X^2 ou $X^2 - \frac{1}{4}$ dependendo se f é inteiro ou semi-inteiro. Em particular para $X = \beta_0$ temos

$$(\beta_0^2 - f^2)(\beta_0^2 - (f-1)^2)\ldots\ldots = 0$$

e portanto, com a identificação $f^2 = a_1^2$, $a_2^2 = (f-1)^2$ etc. a (67) fornece

$$(m^2 - f^2k^2)(m^2 - (f-1)^2k^2)\ldots\ldots(m^2 - k^2)m\psi = 0$$

se f é inteiro ou

$$(m^2 - f^2k^2)(m^2 - (f-1)^2k^2)\ldots\ldots(m^2 - \tfrac{1}{4}k^2)\psi = 0$$

+ Índices correspondendo a permutações cíclicas de 1, 2, 3.

se f é semi-inteiro. Assim, a não ser nos casos de spin 0, 1/2 ou 1, ψ satisfaz uma equação de grau superior ao segundo em ∂_μ e descreve partículas com vários estados de spin e de massas diferentes. Por exemplo no caso de spin f = 3/2 a massa de repouso tem os valores $m_0 = 2m$ e $m_0 = \frac{2}{3} m$

Definindo $M^{4m} = - M^{m4} = i \beta^m$

$$g^{44} = -1 \quad ; \quad g^{m4} = 0 \quad \text{se } m \neq 4$$

pode-se escrever a (66) na fórma (70) com os índices variando agora de 0 até 4 . Assim o estudo das representações irredutíveis da álgebra das matrizes β^μ , $M^{\mu\nu}$ reduz-se ao estudo das representações do grupo de Lorentz em cinco dimensões e êste foi o passo seguinte do trabalho de Bhabha. Entretanto, a nosso ver, os elementos essenciais já estão delineados e não vamos prosseguir no estudo da teoria de Bhabha.

Em tempos mais recentes algumas tentativas tem sido feitas no sentido da construção de teorias de equações relativísticas sem componentes redundantes. Nêste contexto nós fazemos referência ao trabalho de Weinberg (ref. 8) que adota como entidades básicas os objetos das representações (s, 0) e (0, s). Nêste formalismo as componentes $\psi^{s,0}$ e $\psi^{0,s}$ são relacionadas através de certos projetores $\Pi^{s,0;0,s}_{(p)}$ que são polinômios de grau 2s em $q = (p^2)^{-\frac{1}{2}}$. Apesar de êste ser, sem dúvida um ponto de partida agradável, as equações de Weinberg levam a uma equação de massa que admite soluções complexas para $s > 1$. Embora êstes estados possam ser abandonados por definição na teoria livre, tal não é possível fazer na teoria com interação (completicidade dos estados assintóticos) implicando entre outras coisas, na existência de soluções instáveis.

Capítulo II

No capítulo precedente, vimos que nas formulações usuais a existência de condições subsidiárias, que visam eliminar as componentes redundantes, levam a um sistema de equações em geral incompátível quando interações são introduzidas. No nível não quantizado êste problema pode ser afastado escrevendo a equação de campo de tal forma que a consição subisidiária esteja contida nela. Assim, nós escrevemos, por exemplo, as equações livres:

a) spin s = 0 : $(\Box + m^2)\,\Phi(x) = 0$ (1)

b) spin s = 1/2 : $(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\,\psi(x) = 0$ (2)

c) spin s = 1 : $(\Box + m^2)\,\Phi^\mu - \partial^\mu \partial_\nu \Phi^\nu = 0$ 9 (3) que contém a condição subisidiária $\partial_\mu \Phi^\mu = 0$

d) spin s = 3/2 : $(i\gamma_\sigma \partial^\sigma - m)\,\psi_\Lambda - \frac{1}{3}(\gamma_\Lambda \partial^\sigma + \gamma^\sigma \partial_\Lambda)\,\psi_\sigma + \frac{m}{3}(i\gamma_\sigma \partial^\sigma + m)\,\gamma^\Lambda \psi_\Lambda = 0$ (4)

contraíndo esta equação com γ^Λ e ∂^Λ obtemos respectivamente

$$m\,\gamma^\Lambda \psi_\Lambda = -2i\,\partial^\sigma \psi_\sigma \quad ; \quad \left(\frac{2i}{3}\gamma_\Lambda \partial^\Lambda - m\right)\partial^\sigma \psi_\sigma + \frac{m}{3}\,\partial^\Lambda \partial_\Lambda \gamma^\Lambda \psi_\Lambda = 0$$

que levam as condições subisidiárias

$$\partial^\sigma \psi_\sigma = 0 \quad (5) \qquad e \qquad \gamma^\sigma \psi_\sigma = 0 \quad (5')$$

Um fato interessante, sem par na teoria não relativística, é a possibilidade de auto valores complexos para a energia quando se consideram interações. O fato é que a condição de norma positiva definida depende essencialmente da fórma das condições subisidiárias embutidas nas equações de campo. A presença de interações modifica a fórma dessas equações e é possível que ocorra $(\Phi, \Phi) = 0$ sem $\Phi = 0$. Consideremos, por exemplo, o caso de um campo de spin 0 com acoplamento escalar. Escrevendo

$$[\Box + m(m - V)]\,\Phi = 0 \quad ; \quad \Phi = e^{-iEt}\,u(\vec{x})$$

resulta

$$E^2 u = [-\Delta + m(m - V)]\,u \qquad (6)$$

da qual é transparente que é possível $E^2 < 0$ se V é suficientemente profundo. Tal situação também pode ser notado no caso de spin 1, como mostraremos a seguir.

Nêste caso temos

$$\Box \Phi^{\mu} - \partial^{\mu}\partial_{\nu}\Phi^{\nu} + m(m - V(x))\,\Phi^{\mu} = 0 \qquad (7)$$

de onde decorre $\quad (m - V(x))\,\partial_{\mu}\Phi^{\mu}(x) = \Phi^{\mu}\partial_{\mu}V(x) \quad (7')$

Vamos colocar $\underline{\Phi^{\mu}(x) = e^{-iEt}\varphi^{\mu}(\vec{x})}$ e adotar a notação $(\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3) = \vec{A}$. Assim obtemos

a) $\mu \neq 0 \qquad (E^2 + \Delta)\,\vec{A} - \vec{\nabla}(-iE\varphi_0 + \vec{\nabla}.\vec{A}) - m(m - V(x))\,\vec{A} = 0 \quad (8)$

b) $\mu = 0 \qquad (E^2 + \Delta)\,\varphi_0 - iE(-iE\varphi_0 + \vec{\nabla}.\vec{A}) - m(m - V(x))\,\varphi_0 = 0 \quad (8')$

c) equação (7'):

$$(m - V(x))(-iE\varphi_0 + \vec{\nabla}.\vec{A}) = (\vec{A}.\vec{\nabla}V) \qquad (9)$$

a qual nos permite eliminar $\quad \varphi_0(\vec{x}) = \frac{i}{E}\left(\frac{\vec{A}.\vec{\nabla}V}{m - V} - \vec{\nabla}.\vec{A}\right)$

Com ajuda de (9) as equações (8) e (8') podem ser reescritas

$$(E^2 + \Delta)\,\vec{A} - \vec{\nabla}\left[\frac{\vec{A}.\vec{\nabla}V}{m - V(x)}\right] - m(m - V(x))\,\vec{A} = 0 \qquad (10)$$

$$(E^2 + \Delta)\,\varphi_0 - iE\left[\frac{\vec{A}.\vec{\nabla}V}{m - V}\right] - m(m - V)\,\varphi_0 = 0 \qquad (10')$$

Assim nós notamos que é possível ter-se $E^2 < 0$ para a classe de soluções que satisfazem $\vec{A}.\vec{\nabla}V = 0$. Nós podemos verificar isto explicitamente no caso de potenciais esfèricamente simétricos, $V = V(r)$ onde a classe de soluções transversas da fórma

$$\vec{A}_t = \mathrm{rot}\,\vec{N} = \vec{\nabla}f(r,\theta,\varphi) \wedge \frac{\vec{r}}{r} \quad ; \quad \vec{N} = \frac{\vec{r}}{r}f(r,\theta,\varphi)$$

conduz em (9) e (10) a $\varphi_0 = 0$ e

$$\mathrm{rot}\left[E^2\vec{N} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{N} - m^2\vec{N} + mV\vec{N}\right] = 0$$

e como

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{N} = \vec{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial r}f\right) - \hat{r}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right)\right]$$

segue-se que uma classe de soluções satisfaz

$$(E^2 - m^2 + mV)f + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\mathrm{sen}\,\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right] = 0 \qquad (11)$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

Soluções de (11) com procedimento assintótico adequado podem ser obtidas pelo método usual de separação de variáveis. Em particular para um potencial Coulombiano $V = \frac{G}{r}$ nós achamos soluções limitadas da fórma

$$f(r,\theta,\varphi) = C\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\, e^{-\frac{mG}{2n}r}\, r^{\ell+1}\, L^{2\ell+1}_{n-\ell-1}\left(\frac{mG}{n}r\right)$$

sòmente se os autos valores da energia são dados por

$$E^2 = m^2\left(1 - \frac{G^2}{4n^2}\right) \quad , \; n \text{ inteiro}$$

e portanto para $G > 2n$ obtemos $E^2 < 0$

No caso de spin 1/2 podemos afirmar a não existência de energias complexas pois a norma aí é positiva definida de partida. O caso de spin 3/2 é mais complicado e será estudado posteriormente. Antes examinemos algumas conseqüencias no caso mais simples de spin zero (J. Swieca, ref. 11). Se o potencial é suficientemente profundo temos nas soluções de (6) estados ligados com energia complexa $E = \pm\lambda i$ e estados de espalhamento com $E^2 = k^2 + m^2$.+ Se o potencial é bém comportado o conjunto $(\phi_k\ \phi_\ell)$ constitui uma base no espaço das funções

$$\phi_\ell(x)\phi_\ell^*(y) + \int d^3k\ \phi_k(x)\ \phi_k^*(y) = \delta(x-y) \qquad (12)$$

com a normalização

$$\int \phi_\ell^*(x)\ \phi_\ell(x)\ d^3x = 1 \qquad (13)$$

$$\int \phi_k^*(x)\ \phi_{k'}(x)\ d^3x = \delta(k-k') \qquad (14)$$

$$\int \phi_\ell^*(x)\ \phi_k(x)\ d^3x = 0 \qquad (15)$$

Observando que as equações de movimento podem ser obtidas da seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L} = \int \partial_\mu \phi(x)\, \partial^\mu \phi^*(x) - (m^2 - mV)\,\phi\phi^*\ d^3x$$

nós construimos

$$H = \int \pi^+\pi + (\vec{\nabla}\phi^+)\cdot\vec{\nabla}\phi + m(m - V(x))\,\phi^+\phi\ d^3x \qquad (16)$$

$$Q = -i\int(\pi\phi - \pi^*\phi^*)\ d^3x \quad (17) \quad ; \text{ onde } \pi = \dot{\phi}^* \text{ e}$$

$\pi^+ = \dot{\phi}$

+ No que segue vamos considerar o caso de apenas um estado ligado.

A quantização canônica é então procedida impondo-se as leis de comutação em tempos iguais

$$[\pi(x), \phi(y)] = -i\,\delta(x-y) \qquad (18)$$

Assim se escrevemos

$$\phi(x) = q_\ell\,\phi_\ell(x) + \int d^3k\; q_k\,\phi_k(x) \qquad (19)$$

$$\pi(x) = p_\ell\,\phi_\ell^*(x) + \int d^3k\; p_k\,\phi_k^*(x) \qquad (20)$$

resulta de (18) usando (12) que

$$[q_\ell, p_\ell] = i \quad ; \quad [q_k, p_{k'}] = i\,\delta(k-k') \qquad (21)$$

e (16) e (17) podem ser escritas

que é (W_k, λ) coeté a massa

$$H = p_\ell^* p_\ell - \lambda^2 q_\ell^+ q_\ell + \int d^3k\,(p_k^* p_k + W_k^2 q_k^+ q_k) \qquad (22)$$

$$Q = -i\,[p_\ell q_\ell - p_\ell^* q_\ell) + \int d^3k\,(p_k q_k - p_k^+ q_k^+)] \qquad (23)$$

onde foi feito uso de (6).

A parte contínua de H e Q podem ser diagonalisadas através da substituição convencional

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{2W_k}}(b_k^+ + a_k) \quad ; \quad p_k = i\sqrt{\frac{W_k}{2}}\,(b_k^+ - a_k) \qquad (24)$$

e obtemos

$$H = p_\ell^+ p_\ell - \lambda^2 q_\ell^+ q_\ell + \int d^3k\; W(k)\,(a_k^+ a_k + b_k^+ b_k) \qquad (25)$$

$$Q = -i\,(p_\ell q_\ell - p_\ell^+ q_\ell^+) + \int d^3k\,(a_k^+ a_k - b_k^+ b_k) \qquad (26)$$

A contribuição do estado ligado pode ser tratada de duas fórmas :

a) Mantendo a interpretação corpuscular. Nêste caso fazemos as substituições

$$q = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{a+b}{\sqrt{2}} \quad ; \quad q^+ = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\,\frac{a^+ + b^+}{\sqrt{2}} \qquad (27)$$

$$p = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2}}\,(b^+ - a^+) \quad ; \quad p^+ = \sqrt{\lambda}\,\frac{(b-a)}{\sqrt{2}} \qquad (28)$$

$$(b-a)(b^+ - a^+) - \lambda^2\,(a^+ + b^+)(a+b)$$

e então as relações (21) implicam que

$$[a,a] = [b,b] = [a^+,a] = [b^+,b] = 0 \quad ; \quad [a,b^+] = i \qquad (29)$$

e

$$p_\ell^+ p_\ell - \lambda^2 q_\ell^+ q_\ell = -\lambda [a^+b + b^+a] \qquad (30)$$

$$-i(p_\ell q_\ell - p_\ell^+ q_\ell^+) = -i[b^+a - a^+b] + c \qquad (31)$$

Introduzindo um vácuo através de

$$a|0\rangle = a_k|0\rangle = b_k|0\rangle = b|0\rangle = 0$$

obtemos então de

$$a^+|0\rangle = |a\rangle \quad ; \quad b^+|0\rangle = b \qquad \text{que}$$

$$\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle = 0 \qquad e \qquad \langle a|b\rangle = i$$

Além disso temos em virtude de (29)

$$a^+b\,(a^+)^n|0\rangle = -ni\,(a^+)^n|0\rangle \qquad (32)$$

$$a^+b\,(b^+)^n|0\rangle = 0 \qquad (33)$$

$$b^+a\,(a^+)^n|0\rangle = 0 \qquad (34)$$

$$b^+a\,(b^+)^n|0\rangle = ni\,(b^+)^n|0\rangle \qquad (34')$$

que é N_b, N_a?

Portanto a^+b e b^+a são operadores com auto valores $-ni$ e ni respectivamente. Assim obtemos a fórma diagonal para a Hamiltoniana e para carga

$$H = \lambda i\,(N_b - N_a) + \int d^3k\, W(k)\,(N_k^b + N_k^a) \qquad (35)$$

$$Q = N_b + N_a + \int d^3k\,(N_k^a - N_k^b) \qquad (35')$$

Vemos assim que é possível manter-se a interpretação corpuscular com estados de energia complexa e norma zero.

b) Nós podemos também proceder a quantização com métrica definida. Nêste caso não será possível manter a interpletação corpuscular. Fazendo

$$p_\ell = \frac{p_1 + ip_2}{\sqrt{2}} \quad ; \quad q_\ell = \frac{q_1 - iq_2}{\sqrt{2}}$$

então

$$p^+p - \lambda^2 q^+q = \frac{1}{2}(p_1^2 - \lambda^2 q_1^2) + \frac{1}{2}(p_2^2 - \lambda^2 q_2^2) \qquad (36)$$

$$-i(pq - p^+q^+) = (p_2 q_1 - p_1 q_2) \qquad (36')$$

Equação (36) tem a fórma da Hamiltoniana de dois osciladores repulsivos. Para tornar mais claro o seu siguinificado nós escrevemos:

$$p_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left(x - i\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(x + i\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}\left(y - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\left(y + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

e assim

$$p^+p - \lambda^2 q^+q = \frac{\lambda}{2}\left[\left(ix\frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2}\right) + \left(iy\frac{\partial}{\partial y} + \frac{i}{2}\right)\right] \qquad (37)$$

$$-i(pq - p^+q^+) = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad (38)$$

O operador em (37) é proporcional ao gerador de dilatações no plano xy ; com efeito introduzindo o operador unitário

$$U(a) = e^{iaG} \qquad \text{tal que}$$

$$U(a)\,\psi(x,y) = e^{-a}\,\psi(e^{-a}x,\, e^{-a}y)$$

nós obtemos, por derivação

$$G\,\psi(x,y) = \left[i\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\right) + i\left(y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}\right)\right]\psi(x,y) \qquad (39)$$

As auto funções de (37) e (38) são dadas por

$$\psi_{\varepsilon,m}(r,\theta) = \frac{(r)^{i\varepsilon-1}}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{im\theta}}{\sqrt{2\pi}} \qquad (40) \quad \varepsilon \text{ real},\ m \text{ inteiro}$$

onde os autos valores de (37) são $\lambda\varepsilon$ e os de (38) m. Obtemos assim uma solução sem vácuo. É possível também verificar as relações de ortogonalidade e completeza:

$$a)\ \int \psi^+_{\varepsilon' m'}\,\psi_{\varepsilon m}\, r\,dr\,d\theta = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty e^{i(\varepsilon-\varepsilon')\lg r}\,\frac{dr}{r}\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\theta}\,d\theta =$$

$$= \delta(\varepsilon-\varepsilon')\,\delta_{mm'} \qquad (41)$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \, \frac{e^{i\varepsilon(\lg r_1 - \lg r_2)}}{2\pi \, r_1 r_2} \sum \frac{e^{im(\theta'-\theta)}}{2\pi} = \frac{\delta(\lg r_1 - \lg r_2)}{r_1 r_2} \, \delta(\theta'-\theta) =$$

$$= \frac{\delta(r_1 - r_2)}{r_2} \, \delta(\theta'-\theta) = \delta^2(\vec{r}_1' - \vec{r}_2') \qquad (42)$$

<u>Spin 3/2 no Formalismo de Rarita-Schwinger</u> -

I) Soluções da equação livre - Como $\psi^\lambda(x)$ satisfaz a equação de <u>Klein-Gordan</u>, então temos soluções de onda plana da fórma

$$\psi_+^\lambda(x) = a^\lambda(p)\, e^{-ipx} \qquad \text{ou} \qquad \psi_-^\lambda(x) = b^\lambda(p)\, e^{ipx} \qquad (43)$$

com $px = p_0 x_0 - \vec{p}.\vec{x}$ e $p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ e $a^\lambda(p)$, $b^\lambda(p)$ satisfazendo

$$(\not{p} - m)\, a^\lambda(p) = 0 \quad , \quad p_\lambda a^\lambda = 0 \quad , \quad \gamma_\lambda a^\lambda = 0 \qquad (44)$$

$$(\not{p} + m)\, b^\lambda(p) = 0 \quad ; \quad p_\lambda b^\lambda = 0 \quad ; \quad \gamma_\lambda b^\lambda = 0 \qquad (44')$$

a) Soluções de frequência positiva ($\psi_+^\lambda(x) = a^\lambda(p)\, e^{-ipx}$). No referencial de repouso ($\vec{p} = 0$) podemos escrever

$$a^0(p) = 0 \qquad (\gamma_0 - 1)\, a^k(p) = 0 \qquad \gamma_k a^k = 0 \qquad (45)$$

Sejam $u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ soluções da equação

$$(\gamma^0 - 1)\, u^{(r)}(0) = 0$$

. Com auxílio dêstes espinores podemos construir soluções do sistema (45)

$$\begin{aligned} a^1 &= c_1^1\, u^{(1)}(0) + c_2^1\, u^{(2)}(0) \\ a^2 &= c_1^2\, u^{(1)}(0) + c_2^2\, u^{(2)}(0) \\ a^3 &= c_1^3\, u^{(1)}(0) + c_2^3\, u^{(2)}(0) \end{aligned} \qquad (46)$$

a^4

onde C^k_r $(r = 1, 2)$ são constantes a serem determinadas. Utilisando a representação com $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$ temos de $\gamma_\mu a^\mu = 0$ que

$$C^3_1 = i C^3_2 - C^1_2$$
$$C^3_2 = C^1_1 + i C^2_1$$

de onde é aparente que temos duas classes de soluções conforme $C^3_2 = C^1_2 = 0$, $C^1_1, C^2_1 \neq 0$ e $C^1_1 = C^2_1 = 0$, $C^2_2, C^1_2 \neq 0$. Assim

a. 1) Caso $C^3_2 = C^1_2 = 0$ e $C^1_1, C^2_1 \neq 0$. Aqui ainda temos duas possibilidades conforme $C^1_1 = i C^2_1$ ou $C^1_1 = -i C^2_1$. As duas soluções possíveis são da fórma

$$a^1 = c\, u^{(1)} \qquad a^2(0) = \frac{c}{i}\, u^{(1)} \quad , \quad a^3(0) = u^{(2)}$$

$$a^1 = c\, u^{(1)} \qquad a^2(0) = i c\, u^{(1)} \qquad a^3(0) = 0$$

ou seja (normalizando a 1)

$$a^1(0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\, u^{(1)} \; ; \; a^2 = \frac{-i}{\sqrt{6}}\, u^{(1)} \; ; \; a^3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, u^{(2)} \qquad (47)$$

e

$$a^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, u^{(1)} \; ; \; a^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\, u^{(1)} \; ; \; a^3 = 0 \qquad (48)$$

a. 2) Caso $C^1_1 = C^2_1 = 0$ e $C^2_2, C^1_2 \neq 0$. Analogamente temos duas possibilidades conforme $C^1_2 = i C^2_2$ e $C^1_2 = -i C^2_2$. Assim obtemos

$$a^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\, u^{(2)} \qquad a^2 = -\frac{i}{\sqrt{2}}\, u^{(2)} \qquad a^3 = 0 \qquad (49)$$

e

$$a^1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\, u^{(2)} \; ; \; a^2 = \frac{i}{\sqrt{6}}\, u^{(2)} \qquad a^3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\, u^{(1)} \qquad (50)$$

Equações (47) - (50) constituem soluções correspondentes a frequência positiva e a degenerescência observada decorre das 4 possibilidades de polarização.

b) Nós podemos obter as soluções de frequência negativa considerando combinações lineares de $v^{(r)}(0)$ onde $v^{(r)}(0)$ satisfazem

$$(\gamma_0 + 1)\, v^{(r)}(0) = 0$$

$$\left.\begin{aligned} b^1(0) &= e^1{}_1\, v^{(1)}(0) + e^1{}_2\, v^{(2)}(0) \\ b^2(0) &= e^2{}_1\, v^1(0) + e^2{}_2\, v^2(0) \\ b^3(0) &= e^3{}_1\, v^1(0) + e^3{}_2\, v^2(0) \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Nós obtemos assim as 4 soluções:

$$b^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v^1 \; ; \quad b^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} v^{(1)} \; ; \quad b^3 = 0 \qquad (52)$$

$$b^1 = \frac{1}{\sqrt{6}} v^1 \; ; \quad b^2 = -\frac{i}{\sqrt{6}} v^1 \; ; \quad b^3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\, v^2 \qquad (53)$$

$$b^3 = \frac{1}{\sqrt{6}} v^2 \; ; \quad b^2 = \frac{i}{\sqrt{6}} v^2 \; ; \quad b^3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\, v^1 \qquad (54)$$

$$b^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v^2 \; ; \quad b^2 = -\frac{i}{\sqrt{2}} v^2 \; ; \quad b^3 = 0 \qquad (55)$$

Tendo obtido as soluções no referencial de repouso, nós podemos construir as soluções correspondentes ao quadrivetor $p(p_0, \vec{p})$ através de

$$\psi^\mu_+(x) = e^{-ipx} L^\mu{}_\nu S(L)\, a^\nu(0) \; ; \quad \psi^\mu_-(x) = e^{ipx} L^\mu{}_\nu S(L)\, b^\nu(0)$$

onde L é a transformação de Lorentz conectando os dois referenciais

$$L_\sigma{}^\rho = \begin{pmatrix} \frac{E_p}{m} & -p^j/m \\ \frac{p_i}{m} & \delta_i{}^j - \frac{p_i p^j}{m(E_p+m)} \end{pmatrix}$$

e

$$S(L) = e^{\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{\alpha}} \; ; \quad \vec{\alpha} = \gamma_0 \vec{\gamma} \; ; \quad \vec{b} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\, tgh^{-1} \frac{|\vec{p}|}{E}$$

Assim

$$\psi^\mu_+(x) = e^{-ipx} L^\mu{}_k\, c^k{}_r\, u^{(r)}(p) \; ; \quad \psi^\mu_-(x) = e^{ipx} L^\mu{}_k\, e^k{}_r\, v^{(r)}(p)$$

que claramente são soluções do sistema

$$(i\gamma\partial - m)\psi^\mu = 0 \qquad \gamma_\mu \psi^\mu = 0 \qquad \partial_\mu \psi^\mu = 0$$

Observemos que a equação de Rarita-Schwinger pode ser obtida da seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_\mu \left\{ (i\gamma^\alpha \partial_\alpha - m)\, \delta^\mu_\nu - \frac{i}{3} (\partial^\mu \gamma_\nu + \gamma^\mu \partial_\nu) + \frac{1}{3} \gamma^\mu (i\gamma_\alpha \partial^\alpha + m)\, \gamma_\nu \right\} \psi^\nu \qquad (56)$$

que nos fornece o quadri vetor corrente:

$$J^\mu = -\bar{\psi}_\nu \gamma^\mu \psi^\nu + \frac{1}{3} \bar{\psi}^\mu \gamma_\nu \psi^\nu + \frac{1}{3} \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu \psi^\mu - \frac{1}{3} \bar{\psi}_\mu \gamma^\mu \gamma^\mu \gamma_\nu \psi^\nu$$

e portanto no caso livre de interação $J^\mu = -\bar{\psi}_\nu \gamma^\mu \psi^\nu$

Em particular $J^0 = -\bar{\psi}_\nu \gamma^0 \psi^\nu$ é <u>positiva definida.</u> com $(1,-1,-1,-1)$

II) Existência de auto valores complexos para energia. Para investigarmos a existência de auto valores complexos no caso de $s = 3/2$, nós, por simplicidade de cálculo trabalharemos num espaço tri-dimensional (t, x_1, x_2) e além consideramos sòmente interações não locais, mas separáveis. Com esta escolha nós podemos reduzir a álgebra de Dirac à álgebra de Pauli, colocando $\gamma^0 = \sigma_3$; $\gamma^1 = i\sigma_1$; $\gamma^2 = i\sigma_2$

Com esta restrição a equação de campo pode ser escrita

$$\Lambda^\mu_\nu(p)\, \psi^\nu(p) = \lambda\, K(p) \int K(p')\, \Gamma^\mu_\nu\, \psi^\nu(p')\, d^2p' \qquad (57)$$

onde

$$\Lambda^\mu_\nu = (\gamma^\alpha p_\alpha - m)\, \delta^\mu_\nu - \frac{1}{2} (\gamma^\mu p_\nu + p^\mu \gamma_\nu) + \frac{\gamma^\mu}{2} (p_\alpha \gamma^\alpha + m)\, \gamma_\nu \qquad (58)$$

Existe um operador $S(p)$ tal que

$$S(p)\, \Lambda(p) = (-p^2 + m^2) I \qquad (59)$$

A expressão explícita de $S(p)$ no nosso caso é

$$S^\lambda_\mu(p) = -(\gamma_\rho p^\rho + m) \left[\delta^\lambda_\mu - \frac{1}{2} \gamma^\lambda \gamma_\mu - \frac{1}{2m} (\gamma^\lambda p_\mu - p^\lambda \gamma_\mu) - \frac{1}{2m^2} p^\lambda p_\mu \right] +$$

$$+ \left(\frac{-p^2 + m^2}{2m^2}\right) \left[(\gamma^\lambda p_\mu - \gamma_\mu p^\lambda) + (p^\alpha \gamma_\alpha + m)\, \gamma^\lambda \gamma_\mu \right] \qquad (60)^+$$

Com ajuda de $S(p)$ nós podemos inverter a (57)

$$\psi(p) = \frac{S(p)\, K(p)}{-p^2 + m^2}\, \chi \qquad (61)$$

onde

$$\chi = \int K(p')\, \Gamma\, \psi(p')\, d^2p' \qquad (62)$$

+ – Para construção de $S(p)$ de uma fôrma geral veja Aurília e Umezawa (ref. 12).

Daí segue-se $\quad \chi = \lambda \Gamma \int \frac{K^2(p')\, S(p')}{-p'^2 + m^2}\, \chi \quad \Rightarrow$

$$\det \left[1 - \lambda \Gamma \int \frac{K^2(p')\, S(p')}{-p'^2 + m^2} \right] = 0 \qquad (63)$$

que é bàsicamente a equação de auto valores a ser resolvida. Nós simplificaremos mais a situação admitindo simetria esférica. Assim

$$R^{\Lambda}_{\mu} = \int \frac{K^2(p)\, S^{\Lambda}_{\mu}(p)\, d^2p}{-p^2 + m^2} = \int \frac{K^2}{-p^2+m^2} \Big\{ -(p^0 \gamma^0 + m) \left[\delta^{\Lambda}_{\mu} - \tfrac{1}{2} \gamma^{\Lambda} \gamma_{\mu} - \frac{p_0}{2m} (\gamma^{\Lambda} \delta^0_{\mu} -$$

$$- \gamma_{\mu} \delta^{\Lambda}_0) - \frac{1}{2m^2} p_0^2\, \delta^{\Lambda}_0\, \delta^0_{\mu} + \frac{1}{2m^2} (p^k)^2\, \delta^{\Lambda}_k\, \delta^k_{\mu} \right] - \frac{p_0}{2m^2} \gamma_k (p^k)^2\, \delta_{\mu}{}^{k}\, \delta^{\Lambda}_0 +$$

$$+ \frac{p_0}{2m^2} \gamma_k (p^k)^2\, \delta^{\Lambda}_k\, \delta^0_{\mu} - \frac{1}{2m} \gamma_k (p^k)^2\, \gamma^{\Lambda} \delta^k_{\mu} - \frac{1}{2m} \gamma_k (p^k)^2\, \gamma_{\mu} \delta^{\Lambda}_k +$$

$$+ \frac{(-p^2 + m^2)}{2m^2} \left[p_0 (\gamma^{\Lambda} \delta^0_{\mu} - \gamma_{\mu} \delta^{\Lambda}_0) + (p_0 \gamma^0 + m)\, \gamma^{\Lambda} \gamma_{\mu} \right] \Big\}\, d^2p$$

ou seja

$$R^{\Lambda}_{\mu} = \frac{1}{2} \int \frac{K^2}{-p^2+m^2} \begin{pmatrix} -\frac{2(p_0^2 - p_1^2)}{m^2} (p_0 \sigma_3 + m) & \frac{-2(p_0^2 + m^2) + 3p_1^2}{m} \sigma_2 + i \frac{p_0 p_1^2}{m^2} \sigma_1 & \frac{2(p_0^2 - m^2) - 3p_1^2}{m} \sigma_1 + i \frac{p_0 p_1^2}{m^2} \sigma_2 \\ \frac{-2p_0^2 + 3p_1^2 + 2m^2}{m} \sigma_2 - i \frac{p_0 p_1^2}{m^2} \sigma_1 & -\frac{(p_0^2 - p_1^2)}{m^2} (p_0 \sigma_3 + m) & \frac{i\sigma_3}{m} [-p_0^2 + 3p_1^2 + 2m^2] + i \frac{p_0}{m^2} (-p^2 + m^2) \\ \frac{2(p_0^2 - m^2) - 3p_1^2}{m} - i \frac{p_0 p_1^2}{m^2} \sigma_2 & -\frac{i\sigma_3}{m} [-p_0^2 + 3p_1^2 + 2m^2] - i \frac{p_0}{m^2} (-p^2 + m^2) & -\frac{(p_0^2 - p_1^2)}{m^2} (p_0 \sigma_3 + m) \end{pmatrix} \qquad (64)$$

Nós consideramos Γ da fórma geral

$$\Gamma^{\Lambda}_{\mu} = \delta^{\Lambda}_{\mu} - \delta\, \gamma^{\Lambda} \gamma_{\mu} \qquad (65)$$

ou

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1-\delta & -\delta\sigma_2 & \delta\sigma_1 \\ -\delta\sigma_2 & 1-\delta & -i\delta\sigma_3 \\ \delta\sigma_1 & i\delta\sigma_3 & 1-\delta \end{pmatrix} \qquad (66)$$

Portanto $\Pi R = \frac{1}{2}\int d^2p \, \frac{K^2}{-p^2+m^2} \times$

$$\frac{(4p_0^2 - 4m^2 - 6p_1^2)\delta + 2(1-\delta)(p_1^2 - p_0^2)}{m} + \frac{2p_0}{m^2}\left[p_1^2\delta + (1-\delta)(p_1^2 - p_0^2)\right]\sigma_3$$

$$\left[\frac{(4p_0^2 - 5p_1^2 - 2m^2)\delta + (1-\delta)(-2p_0^2 + 3p_1^2 + 2m^2)}{m}\right]\sigma_2 + \frac{ip_0}{m^2}\left[(2p_0^2 - p_1^2)\delta - (1-\delta)p_1^2\right]\sigma_1$$

$$\left[\frac{(-4p_0^2 + 5p_1^2 + 2m^2)\delta + (1-\delta)(2p_0^2 - 3p_1^2 - 2m^2)}{m}\right]\sigma_1 + \frac{ip_0}{m^2}\left[(2p_0^2 - p_1^2)\delta - (1-\delta)p_1^2\right]\sigma_2$$

$$\left[\frac{(2p_0^2 - 4p_1^2 - 2m^2)\delta + (1-\delta)(-2p_0^2 + 2m^2 + 3p_1^2)}{m}\right]\sigma_2 + \frac{ip_0}{m^2}\left[(2p_0^2 - 3p_1^2 - 2m^2)\delta + (1-\delta)p_1^2\right]\sigma_1$$

$$\frac{(3p_0^2 - 4m^2 - 6p_1^2)\delta + (1-\delta)(p_1^2 - p_0^2)}{m} - \frac{p_0}{m^2}\left[(-p_0^2 + 3p_1^2 + 2m^2)\delta + (1-\delta)(p_0^2 - p_1^2)\right]\sigma_3$$

$$\left[\frac{(4p_1^2 - 3p_0^2 + 2m^2)\delta + (1-\delta)(p_0^2 - 3p_1^2 - 2m^2)}{m}\right]i\sigma_3 + \frac{ip_0}{m^2}\left[(-p_0^2 + 2p_1^2)\delta + (1-\delta)(p_0^2 - 2m^2 - 2p_1^2)\right]$$

$$\left[\frac{(-2p_0^2 + 4p_1^2 + 2m^2)\delta + (1-\delta)(2p_0^2 - 3p_1^2 - 2m^2)}{m}\right]\sigma_1 + \frac{ip_0}{m^2}\left[(2p_0^2 - 3p_1^2 - 2m^2)\delta + (1-\delta)p_1^2\right]\sigma_2$$

$$\left[\frac{(3p_0^2 - 4p_1^2 - 2m^2)\delta + (1-\delta)(-p_0^2 + 3p_1^2 + 2m^2)}{m}\right]i\sigma_3 + \frac{ip_0}{m^2}\left[(p_0^2 - 2p_1^2)\delta + (1-\delta)(-p_0^2 + 2p_1^2 + 2m^2)\right]$$

$$\left[\frac{(3p_0^2 - 6p_1^2 - 4m^2)\delta + (1-\delta)(p_1^2 - p_0^2)}{m}\right] - \frac{p_0}{m^2}\left[(-p_0^2 + 3p_1^2 + 2m^2)\delta + (1-\delta)(p_0^2 - p_1^2)\right]\sigma_3$$

Assim vemos que $1 - \lambda\Pi R$ é da fórma

$$Y = \begin{Vmatrix} A + B\sigma_3 & E\sigma_2 + D\sigma_1 & -E\sigma_1 + D\sigma_2 \\ F\sigma_2 + G\sigma_1 & C + H\sigma_3 & -(M + N\sigma_3) \\ -F\sigma_1 + G\sigma_2 & M + N\sigma_3 & C + H\sigma_3 \end{Vmatrix}$$

como seria de esperar. Nós podemos simplificar o cálculo de $\det Y$ multiplicando, inicialmente, Y, pela direita e pela esquerda por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix} \qquad (68)$$

cujo determinante é 1. Assim obtemos :

$$\left\| \begin{array}{c:c:c} A + B\sigma_3 & 0 & -E\sigma_2 - D\sigma_1 \\ 2(F\sigma_2 + G\sigma_1) & 0 & -(C+Ni) - (H+iM)\sigma_3 \\ F\sigma_2 + G\sigma_1 & -\sigma_3(H-iM) - (C-iN) & -C + H\sigma_3 \end{array} \right\|$$

e daí

$$\det Y = [(C-iN)^2 - (H-iM)^2] \det \left\| \begin{array}{cc} A + B\sigma_3 & -E\sigma_2 - D\sigma_1 \\ 2(F\sigma_2 + G\sigma_1) & -(C+Ni) - (H+iM)\sigma_3 \end{array} \right\|$$

$$= [(C-iN)^2 - (H-iM)^2] \begin{vmatrix} A - B & -Ei - D \\ 2(G - iF) & -(C+Ni) - (H-iM \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} A+B & Ei - D \\ 2(G+iF) & -(C+Ni) + (H+iM) \end{vmatrix}$$

Note que $\det Y$ é uma função par de P_0. Escrevendo

$\det Y = [(C-iN)^2 - (H-iM)^2] f(P_0) f(-P_0)$ nós temos

$$\det Y = 0 \Rightarrow [(C-iN)^2 - (H-iM)^2] = 0 \quad \text{ou} \quad f(P_0) = 0$$

a) Examinemos a possibilidade $(C-iN)^2 - (H-iM)^2 = 0$

com

$$C = 1 + \frac{\lambda}{m}[(1-4s)P_0^2\alpha + (7s-1)\beta + 4m^2 s\alpha]$$

$$N = -\frac{i\lambda}{m}[P_0^2(1-4s)\alpha + (7s-3)\beta + m^2(4s-2)]$$

$$H = \frac{p_0\lambda}{m^2}\left[p_0^2(1-2\delta)\alpha + (4\delta-1)\beta + 2m^2\delta\alpha \right]$$

$$M = -\frac{ip_0\lambda}{m^2}\left[p_0^2(1-2\delta)\alpha + (4\delta-2)\beta + 2m^2(\delta-1)\alpha \right]$$

onde $\alpha = \frac{1}{2}\int \frac{K^2\, d^2p}{-p^2+m^2}$; $\beta = \frac{1}{2}\int \frac{K^2\, p_1^2}{-p^2+m^2}\, d^2p$

isto corresponde a

$$\left[1 + \frac{\lambda}{m}(2\beta + 2m^2\alpha)\right]^2 - \frac{p_0^2\lambda^2}{m^4}\left[\beta + 2m^2\alpha\right]^2 = 0$$

Nós vamos daí que com λ real é impossível, nêste caso, obter-se $p_0^2 < 0$.

b) Examinemos agora a condição $f(p_0) = 0$. Com

$$A = 1 + \frac{\lambda}{m}\left[(2-6\delta)p_0^2\alpha + (8\delta-2)\beta + 4m^2\delta\alpha\right]$$

$$B = -\frac{2\lambda}{m^2}p_0\left[\beta - (1-\delta)p_0^2\alpha\right]$$

$$E = -\frac{\lambda}{m}\left[p_0^2\alpha(4\delta-2) + \beta(3-7\delta) + m^2\alpha(2-4\delta)\right]$$

$$F = -\frac{\lambda}{m}\left[p_0^2(6\delta-2) + \beta(3-8\delta) + 2m^2\alpha(1-2\delta)\right]$$

$$D = -\frac{i\lambda p_0}{m^2}\left[2p_0^2\delta\alpha + \beta(1-4\delta) - 2m^2\delta\alpha\right]$$

$$G = -\frac{\lambda p_0 i}{m^2}\left[2p_0^2\delta\alpha + \beta(2\delta-1)\right]$$

obtemos $f(p_0) = -\left\{1 + \frac{\lambda}{m}\left[2p_0^2\alpha(1-3\delta) + 2(4\delta-1)\beta + 4m^2\delta\alpha\right] + \right.$
$+ \left.\frac{2\lambda p_0}{m^2}\left[\beta - (1-\delta)p_0^2\alpha\right]\right\} \times \left\{1 + \frac{\lambda}{m}\left[2p_0^2\alpha(1-4\delta) + 2(7\delta-2)\beta + \right.\right.$
$+ \left. 2m^2(4\delta-1)\alpha\right] + \frac{p_0\lambda}{m^2}\left[2(1-2\delta)p_0^2\alpha + (8\delta-3)\beta + (2\delta-1)2m^2\alpha\right]\Big\} + \frac{2\lambda^2}{m^2}\Big\{2p_0^2\alpha(2\delta-1)$
$+ \beta(3-7\delta) + m^2\alpha(2-4\delta) + \frac{p_0}{m}\left[2p_0^2\delta\alpha + \beta(1-4\delta) - 2m^2\delta\alpha\right]\Big\} \times \Big\{\frac{p_0}{m}\left[(1-2\delta)\beta - \right.$
$\left. - 2p_0^2\delta\alpha\right] + 2p_0^2\alpha(3\delta-1) + \beta(3-8\delta) + 2m^2\alpha(1-2\delta)\Big\}$.

$\beta = \beta(s) > 0$

Procuremos soluções de $f(p_0) = 0$ com $p_0 = is$, $p_0^2 = -s^2$. Para que isso seja possível é necessário que simultâneamente $Re\, f = Im\, f = 0$.

Estas condições são em geral bastante restritivas tanto para λ , s como também para o kernel $K(p)$. No caso de $s = \frac{1}{2}$

$$i\, Im\, f = \frac{\lambda i s}{m^2}\left\{ -(3\beta + s^2\alpha) - \frac{\lambda}{m}\left[5\beta\alpha(m^2+s^2) + 3\beta^2 + s^4\alpha^2 + m^2 s^2\alpha^2\right]\right\} = 0$$

$$Re\, f = \frac{\lambda^2}{m^2}\left[\frac{2\beta^2 s^2}{m^2} + \frac{3\beta s^4\alpha}{m^2} + \frac{2s^6\alpha^2}{m^2} - 4\beta s^2\alpha - 6m^2 s^2\alpha^2 - 3\beta^2 - 10\beta m^2\alpha - 4m^4\alpha^2\right] - \frac{\lambda}{m}\left[3s^2\alpha + 5\beta + 4m^2\alpha\right] - 1 = 0$$

que não são incompatíveis, existindo pois a possibilidade $p^{02} < 0$. Em conclusão existem soluções da fórma $p_0 = is$, $p_0^2 = -s^2$ sòmente no caso em que λ, s são soluções do sistema acima ($Re\, f = Im\, f = 0$) e não para qualquer par λ, s.

III) - Quantização do campo de Rarita-Schwinger livre - Nesta seção nós denotaremos por $u^{(r)}(x)$ e $v^{(r)}(x)$ ($r = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$) as soluções da equação de Rarita-Schwinger correspondentes a frequência positiva e negativa respectivamente, que suporemos normalizadas no sentido que

$$(68) \quad \int d^3x\, \bar{u}^{(r)} R^0 u^{(r')} = \delta^{rr'} \quad ; \quad R^{0\,\wedge}{}_{\mu} = -\gamma^0 \delta^{\wedge}{}_{\mu} + \frac{1}{3}\left(\gamma^{\wedge}\delta^0_{\mu} + \gamma_{\mu}\delta^{\wedge}_0\right) - \frac{1}{3}\gamma^{\wedge}\gamma^0\gamma_{\mu}$$

Como fizemos referência anteriormente existe um operador $S(\partial)$ tal que

$$S(\partial)\,\Lambda(\partial) = \Lambda(\partial)\,S(\partial) = (\Box + m^2)\, I$$

Então $S\,\Delta^{(+)}(x-y)$ é uma solução da equação (4) com frequência positiva+ e como tal pode ser escrita

$$S^{\wedge}{}_{\mu}(\partial_x)\cdot\Delta^{(+)}(x-y) = u^{(r)\wedge}(x) \int d^3x' \left(\bar{u}^{(r)} R^0 S(\partial)\right)_{\mu} \Delta^{+}(x'-y) \qquad (69)$$

Pode ser mostrado que a integral em (69) independe de x'_0 e assim pode ser calculada em $x'_0 = y_0$. Assim de

$$S(\partial)\,\gamma^0\,\Delta^+ = 2i\,\partial^0\,\Delta^+$$

+ - Aquí $\Delta^+(x-y)$ é a parte de frequência positiva da função de Pauli Jordan, satisfazendo

$$(\Box + m^2)\,\Delta(x-y) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial x_0}\Delta^+(x-y)\Big|_{x_0=y_0} = -\frac{i}{2}\delta^3(\vec{x}-\vec{y})$$

segue-se $\quad S^{\wedge}_{\mu} \; \Delta^{+}(x-y) = u^{(r)}(\hat{x}) \, \bar{u}^{(r)}_{\mu}(y)$

Analogamente é possível mostrar que

$$S^{\wedge}_{\mu}(\partial) \, \Delta^{(-)}(x-y) = v^{(r)}(\hat{x}) \, \bar{v}^{(r)}_{\mu}(y)$$

Assim escrevendo $\quad \psi(x) = \sum_{r} a^{(r)} u^{(r)}(x) + v^{(r)}(x) \, b^{(r)+}$

com $a^{(r)}$ e $b^{(r)}$ tais que

$$[a^{(r)}, a^{(r')+}]_{+} = \delta^{rr'} \quad ; \quad [b^{(r)}, b^{(r')+}]_{+} = \delta^{rr'}$$

e todos os outros anti-comutadores nulos vem que

$$[\psi^{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(y)]_{+} = S^{\alpha}{}_{\beta}(\partial) \, \Delta(x-y) \qquad (70) \quad \text{com}$$

$$\Delta(x-y) = \Delta^{(+)}(x-y) + \Delta^{(-)}(x-y)$$

Escrita explicitamente a (70) é

$$[\psi^{\alpha}(x), \bar{\psi}_{\beta}(y)]_{+} = (i\gamma_{\sigma}\partial^{\sigma} + m)\left[\delta^{\alpha}_{\beta} - \tfrac{1}{3}\gamma^{\alpha}\gamma_{\beta} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3m^2}\partial^{\alpha}\partial_{\beta} + \frac{1}{3m}(\partial^{\alpha}\gamma_{\beta} - \partial_{\beta}\gamma^{\alpha})\right] \Delta(x-y) \qquad (71)$$

e em tempos iguais

$$[\psi^{k}(x), \bar{\psi}_{\ell}(y)]_{+\, x_0 = y_0} = \gamma_0 \left[P^{k}_{\ell} + \frac{2}{3}\frac{\partial^{k}\partial_{\ell}}{m^2} \right] \delta^3(\bar{x}' - \bar{y}') \qquad (71')$$

onde $\quad P^{k}_{\ell} = \delta^{k}_{\ell} - \frac{1}{3}\gamma^{k}\gamma_{\ell} \qquad k, \ell = 1, 2, 3$

Definindo $\phi^{n} = P^{n}_{\ell}\,\psi^{\ell}$ nós observamos que ϕ^{n} tem o número de componentes necessárias para a descrição de partículas com spin 3/2 . Nós podemos expressar as componentes ψ^{0} e $\gamma_{k}\psi^{k}$ em função de ϕ^{n}

$$\psi^{0} = \left(-\frac{2}{3}\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + im\right)^{-1}\gamma_0 \, \partial_k \phi^{k} \qquad (72)$$

$$\gamma_k \psi^{k} = \left(-\frac{2}{3}\vec{\gamma}\cdot\vec{\nabla} + im\right)^{-1}\gamma_0 \, \partial_k \phi^{k} \qquad (73)$$

Em têrmos de ϕ^k a (71') pode ser escrita

$$[\phi^n(x), \phi^{\dagger}_m(y)]_{x_0=y_0} = P^n{}_k [\delta^k_\ell + \frac{2}{3m^2}\partial^k\partial_\ell] P^\ell{}_m \, \delta^3(\bar{x}'-\bar{y}')$$

que é identico ao resultado obtido por Johnson e Sudarshan.

Finalizando, nós queremos ressaltar algumas dificuladades na quantização quando interações são introduzidas. Em primeiro lugar, a existência de auto valores complexos para a energia mostra, como vimos no início dêste capítulo para o caso de spin 0, que necessitaremos de métrica indefinida. Embora não possamos dar nenhum argumento de natureza geral esperamos que tais estados sejam ligados, o que não traz nenhuma implicação em problemas de espalhamento. A existência de estados com métrica negativa está associada com o fato que R^0 é em geral indefinida . Como consequência não mais impor a (68') .

Johnson e Surdarshan mostraram também que no caso de interações eletromagnéticas inconsistências são obtidas desde que o campo magnético seja bastante intenso. A êste respeito existe uma série de artigos (ref. 13, 14, 15) mas, a nosso ver, nenhum dos esquemas é satisfatório.