Universidade de São Paulo Instituto de Física

Instabilidade Dinâmica das Flutuações Eletrostáticas em Tokamaks

Francisco Alberto Marcus



Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IF-USP / Orientador)

Profa. Dra. Maria Célia Ramos Andrade (INPE)

Prof. Dr. Álvaro Vannucci (IF-USP)

1 hammel

öberê friez Caldas

Prof. Armando Corbani Ferraz residente da Comissão de Pós Graduação

defesa: 12/09/02

São Paulo 2002

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo:

er. I

530.44 M322i M ex.L

FICHA CATALOGRÁFICA Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Marcus, Francisco Alberto

Instabilidade Dinâmica das Flutuações Eletrostáticas em Tokamaks.

São Paulo 2002.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo Instituto de Física – Departamento de Física Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas Área de Concentração: Física de Plasmas e Descargas Elétricas

Unitermos: 1. Plasma;

- 2. Sistema Hamiltoniano; 3. Caos;
- 4. Transporte Anômalo; 5. Difusão.

USP/IF/SBI-048/2002



Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que ajudaram, direta ou indiretamente, a desenvolver este trabalho, começando pelo meu orientador, Professor Doutor Iberê Luiz Caldas, pela dedicação, interesse, paciência, pela motivação e, principalmente pela oportunidade em poder pertencer ao seu grupo.

Aos meus amigos Marcelo Alves dos Santos e a Benedito M. Silva, pela companhia, amizade e ajuda nos cursos da pós-graduação, no trabalho e nos momentos difíceis.

Aos meus amigos do Nightriders, Bruno, Alexandre, Brizzi e Fernando pelo apoio.

Aos meus colegas de grupo René Medrano, Murilo Baptista, Silvio Souza, Anselmo Rodrigues pelo convívio sempre agradável, e principalmente ao Elton C. da Silva pela ajuda no cálculo numérico, pela orientação e conversas sempre frutíferas que ajudaram muito a desenvolver este trabalho.

Agradeço também aos meus amigos da graduação, e ao Henady pelo apoio burocrático, e ao Professor Álvaro Vannucci pelo incentivo ao trabalho.

Ao Wanderley P. de Sá agradeço a implantação e manutenção da sala de computação e dos programas, sem os quais seria quase impossível realizar este trabalho.

Quero agradecer também à simpatia e gentileza das secretárias do departamento, Inês e Lia, assim como a secretária do laboratório, Eleonora.

Agradeço o apoio financeiro do CNPq e da FAPESP.

Dentre todas as pessoas envolvidas, serei eternamente grato aos meus pais, Tante Gertraud e Oma Yolanda, pelo carinho, ajuda e orientação; ao meu filho Matheus pela motivação e companhia; e a Deus por estar sempre ao meu lado e por criar este Universo maravilhoso e ao qual me deu a honra de pertencer.



RESUMO

Neste trabalho foi realizado um estudo do transporte de partículas em um plasma, confinado em um campo magnético uniforme, devido às ondas eletrostáticas de deriva. O modelo adotado consiste em descrever o movimento do centro de guia de uma partícula no campo magnético perpendicular a um campo elétrico radial perturbado pelas ondas de deriva. Usamos uma descrição Hamiltoniana para o movimento dos centros de guia. A velocidade de deriva produzida pelo campo elétrico radial é representada pela parte integrável da Hamiltoniana e a esta foram adicionadas perturbações periódicas representando as flutuações do campo elétrico associadas às ondas de deriva. Assim, obtemos órbitas caóticas que determinam o transporte radial das partículas. Apresentamos, para várias condições de equilíbrio, a variação do transporte radial de partículas com a amplitude da perturbação. Utilizamos dados experimentais, sobre a turbulência eletrostática no tokamak TBR-1, para verificar a validade do modelo e a importância das ondas de deriva no transporte radial das partículas. Comparamos os valores do coeficiente de difusão experimental com os do modelo e obtivemos os resultados com a mesma ordem de grandeza.



ABSTRACT

In this work we have studied the transport of particles in a magnetically confined plasma, due to electrostatic drift waves. The adopted model describes the trajectory of the guiding center of a particle in a uniform magnetic field perpendicular to a radial electric field perturbed by drift waves. We have used the Hamiltonian description for the guiding center trajectory. The drift produced by the radial electric field is represented by the integrable part of the Hamiltonian, while the other part contains periodic perturbations representing the fluctuations of the electric field associated to the drift waves. In this way we obtain chaotic orbits that determine the particles radial transport. For several balance conditions, we present the variation of the radial transport of particles with the amplitude of the perturbation. We have used the experimental data of the electrostatic turbulence measured in TBR-1 tokamak to verify the validity of the model and the importance of the drift waves in the particles radial transport. We have also compared the values of the experimental diffusion coefficient with those provided by using the model, obtaining results with the same order of magnitude.



ÍNDICE

Cap	ítulo 1	
Intr	odução	1
Cap	ítulo 2	
_	lelo e Descrição Hamiltoniana	5
	Plasma e tokamak	
2.2	Modelo para ondas de deriva	8
2.3	Descrição Hamiltoniana do movimento.	12
2.4	Transporte de partículas e coeficiente de difusão	17
Capi	ítulo 3	
Aná	lise para Uma Onda	21
3.1	Equações de movimento para uma onda	21
3.2	Trajetórias no espaço de fase	25
a		
•	ítulo 4	21
Anal	lise para Duas Ondas	31
4.1	Modelo matemático	31
4.2	Parâmetro de confinamento $U=0$	33
4.3	Parâmetro de confinamento $0 < U < 1$	47
4.4	Parâmetro de confinamento $U > 1$	52

Capítulo 5

Aplicação ao TBR-1		59
5.1	Parâmetro de confinamento $U = 0$	59
5.2	Velocidade média das ondas de deriva	69
5.3	Variando a freqüência da segunda onda	71
	Parâmetro de confinamento próximo de zero	
Capi	ítulo 6	
Discussão, Conclusões e Desenvolvimento Futuro		
6.1	Discussão	77
6.2	Conclusões	81
6.3	Desenvolvimento Futuro	81
Apêndice A - Cálculo Numérico		
Apêndice B		
Referências		

Capítulo 1

Introdução

As oscilações eletrostáticas turbulentas observadas na periferia de um plasma confinado em tokamaks têm sido um tema de crescente investigação, pelo fato de suas características influírem no tempo de confinamento do plasma e nas condições desse confinamento.¹⁻⁴

Nos últimos anos, a utilização de novas sondas e diagnósticos não invasivos em tokamaks, além do enorme desenvolvimento nos sistemas de aquisição e tratamento de séries experimentais (tanto temporais como espaciais), permitiu o uso de sofisticados algoritmos para aplicar técnicas não lineares de análise espectral ¹⁶. Assim, um conjunto de detalhadas observações experimentais tem permitido avaliar as previsões dos modelos existentes sobre plasmas turbulentos, e concluir que estudos fundamentais devem ser desenvolvidos para a interpretação das experiências realizadas em tokamaks e outras máquinas de confinamento de plasma ⁴.

As flutuações eletrostáticas produzidas pelo gradiente de pressão na borda do plasma podem representar um possível mecanismo de transporte de partículas carregadas em tokamaks 1,17 . Estas flutuações, cuja freqüência característica ω é muito menor do que a freqüência giromagnética $\omega_{\rm e}$ e $\omega_{\rm i}$ dos elétrons e dos íons, respectivamente, movem as partículas através das linhas de campo magnético pela deriva produzida por $\vec{E} \times \vec{B}$ devido aos campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} do equilíbrio 26 . O transporte de partículas devido ao espectro das flutuações eletrostáticas, associadas às ondas de deriva, pode ser medido por uma quantidade estatística como o coeficiente de difusão D das partículas 1 .

O transporte das partículas do plasma é causado pela superposição do movimento do centro de guia dessas partículas ao longo e ao redor das linhas do campo magnético e do movimento de deriva desses mesmos centros de guia, devido aos campos elétrico e magnético de equilíbrio. O campo magnético considerado nesta dissertação é uniforme e constante,

enquanto o campo elétrico é a superposição de um campo radial constante com o das ondas eletrostáticas de deriva que se propagam na direção poloidal.

O sistema que descreve esse movimento, sem ondas ou com a perturbação causada por apenas uma onda, é integrável, enquanto que a perturbação causada por duas ondas ou mais, o sistema se torna não integrável. Sistemas desse tipo descrevem as órbitas das partículas em aceleradores ⁵ e em máquinas de confinamento magnético como tokamaks^{7,17} e esteleradores ⁶. Esses resultados indicam que o surgimento de órbitas caóticas alteram significativamente o transporte das partículas. Em particular destacamos trabalhos realizados sobre a propagação de ondas híbridas ³⁰. Uma abordagem semelhante tem sido considerada para estudar a influência da turbulência das ondas de deriva na borda do plasma em tokamaks ¹⁷.

O modelo usado neste trabalho é discutido em vários artigos, principalmente os publicados por W. Horton¹⁷. Em particular, a dissertação de mestrado de Ilya Osipenkov ¹⁴ explora o mesmo modelo que utilizamos e contém alguns dos resultados iniciais desta dissertação, para uma ou duas ondas de deriva.

Neste trabalho investigamos numericamente o transporte das partículas em um campo magnético homogêneo devido às ondas eletrostáticas de deriva. Cada uma destas ondas se propaga na direção y, que pela aproximação utilizada é a direção poloidal, e é estacionária na direção x, que representa a direção radial. Estas ondas são transversas ao campo magnético que está na direção toroidal z. As características dessas ondas correspondem às características das flutuações medidas em tokamaks.

No modelo que utilizamos, consideramos um sistema simples composto apenas por uma ou duas ondas. As equações que descrevem a deriva eletrostática constituem um sistema Hamiltoniano, ou seja, a partir da equação da velocidade de deriva eletrostática, é feita uma mudança de variáveis de modo a obter um sistema de equações diferenciais com a mesma estrutura das equações de Hamilton, o que será apresentado no capítulo 2 ¹⁴.

A Hamiltoniana que descreve esse movimento é do tipo quase-integrável ¹³ com um grau e meio de liberdade, ou seja, $H(x,y,t) = H_0(x,y) + H_1(x,y,t)$, $\frac{H_0}{H_1} << 1$. Em outras palavras, a Hamiltoniana depende de um par de variáveis canônicas (x,y) e do tempo t.

A Hamiltoniana H₀ é integrável. Essa componente H₀ descreve o efeito dos campos elétrico e magnético de equilíbrio sobre o movimento das partículas e a perturbação H₁ descreve as ondas eletrostáticas, associadas às flutuações investigadas, que perturbam o

movimento considerado.

No capítulo 3 analisamos o caso em que o termo perturbado consistia em apenas uma onda, e deste modo verificamos que o sistema era integrável, determinando os pontos fixos e classificando-os. Isto foi importante para conhecer os pontos de equilíbrio instáveis e estáveis e determinar a formação de ilhas no espaço de fase que afetam o confinamento e o transporte de partículas.

A seguir, no capítulo 4, foi feita uma análise da dinâmica das trajetórias no espaço de fase do sistema perturbado por duas ondas. Neste caso não integrável, analisamos a dinâmica das trajetórias no espaço de fase do sistema perturbado. Para isso, as equações de Hamilton foram integradas numericamente e as soluções apresentadas graficamente em mapas de Poincaré para uma seção poloidal (em um ângulo toroidal fixo).

Também, através dos mapas obtidos, investigamos o transporte de partículas na direção radial do plasma calculando o desvio quadrático médio e o coeficiente de difusão, analisando como as trajetórias caóticas afetam o transporte de partículas no espaço de fase^{14,18}.

Pudemos identificar através desta análise que, para alguns casos, o coeficiente de difusão não aumenta monotonicamente com o aumento da perturbação, isto é, com o aumento da amplitude da segunda onda. Observamos também a existência de barreiras no transporte radial ⁷, e também apresentamos critérios para determinar a ocorrência destas barreiras, identificando os casos onde o transporte é maior.

No capítulo 5, o método desenvolvido foi aplicado para interpretar as experiências sobre turbulência e transporte no tokamak TBR-1 ⁸⁻¹¹. Dentre todos os modos de flutuação encontrados no TBR-1, procuramos identificar os que poderiam contribuir para o transporte de partículas. Os resultados obtidos foram comparados aos observados experimentalmente, para avaliar a importância das instabilidades dinâmicas na origem do transporte anômalo de partículas no TBR-1.

Como principais resultados encontramos os valores do coeficiente de difusão próximos ao valor medido experimentalmente. Também apresentamos a relação da frequência das ondas com o coeficiente de difusão e destacamos a importância destas ondas para o transporte de partículas.

Capítulo 2

Modelo e Descrição Hamiltoniana

Neste capítulo descrevemos as principais características do plasma confinado em um tokamak, da sua turbulência e do transporte de partículas. Apresentamos uma breve descrição desse aparelho utilizado para o confinamento do plasma.

Também apresentamos a configuração dos campos elétricos e magnéticos de equilíbrio e as equações de movimento que levam à velocidade de deriva.

A partir daí, formulamos a descrição Hamiltoniana para o deslocamento das partículas associado à velocidade de deriva. Estabelecemos os parâmetros característicos de um tokamak para rescrever a Hamiltoniana adimensionalmente, e apresentamos as equações de movimento que foram usadas para a integração numérica.

De maneira sucinta, apresentamos as equações utilizadas para o cálculo do desvio quadrático médio e do coeficiente de difusão temporal, e apresentamos as principais implicações que relacionam o coeficiente de difusão com o transporte de partículas.

2.1 Plasma e tokamak

Atualmente, vários problemas físicos em plasmas confinados magneticamente são investigados tais como equilíbrio e estabilidade, aquecimento e transporte¹⁻⁴. O objetivo é descobrir as condições mais adequadas para o confinamento magnético do plasma a uma densidade e temperatura suficientemente grandes, por um tempo suficientemente longo, para produzir mais energia do que a gasta na experiência.

O plasma é um estado especial da matéria que se caracteriza, neste caso, por seu alto grau de ionização. O plasma completamente ionizado se forma a temperaturas elevadas, a exemplo do que ocorre no Sol e nas estrelas.

A existência de uma grande quantidade de partículas carregadas do plasma condiciona a elevadíssima condutibilidade elétrica do mesmo, característica específica muito semelhante à propriedade fundamental dos condutores da corrente elétrica.

Uma condição necessária para a existência do plasma consiste em haver certa densidade mínima de partículas carregadas, a partir da qual possamos trata-las como um plasma e não como um conjunto simples de partículas carregadas isoladas 15 . Essa densidade ρ_{\min} é calculada com auxílio da desigualdade entre o comprimento linear L onde o plasma está confinado e o raio de Debye D, em termos matemáticos L >> D. O raio de blindagem de Debye é dado por:

$$D = \left(\sum_{i} \frac{q_i^2 n_i}{\varepsilon_0 k T_i}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
 2.1.1

onde q_i , n_i e T_i são a carga, a concentração e a temperatura do i-ésimo tipo de partícula constituintes do plasma; k é a constante de Boltzmann; e ε_0 a constante elétrica. D é a distância a que se produz a blindagem do campo de qualquer carga do plasma. A blindagem deve-se ao fato de que toda a carga se encontra rodeada principalmente pelas partículas carregadas de sinal contrário.

A definição mais exata do plasma é de um sistema quase-neutro constituído por um grande número de partículas carregadas que ocupam uma região do espaço de dimensões lineares L >> D. O número total de partículas carregadas do plasma situadas dentro do espaço limitado por uma esfera de raio D, tem o nome de número de Debye. Se o valor de N for grande, o plasma é considerado, sob o ponto de vista termodinâmico, como um gás perfeito¹⁵.

Do ponto de vista macroscópico, o plasma interagindo com um campo magnético pode ser considerado como um fluido magnetohidrodinâmico, um fluido condutor elétrico sujeito às forças eletromagnéticas. As propriedades de tal fluido, que podem ser descritas por uma combinação das equações da hidrodinâmica para o fluido e das equações de Maxwell para o campo, são extremamente interessantes e exibem uma gama de fenômenos que vão além de um

fluido comum¹⁵. Indesejáveis instabilidades são verificadas e, a altas temperaturas, os efeitos da difusão ganham extraordinária importância^{1,17}.

O tokamak, cujo nome deriva do russo "toroidalnya kamera magnetnaya katushka", câmara de confinamento magnético toroidal, é uma máquina desenvolvida para o estudo dos diversos fenômenos do plasma e para o desenvolvimento de novas técnicas a fim de se obter um confinamento estável em altas temperaturas.

Em um tokamak, o plasma é produzido em uma câmara toroidal e confinado dentro desta câmara através da superposição do campo magnético toroidal, criado pela corrente elétrica que passa por espiras colocadas ao redor da câmara, e do campo magnético poloidal, produzido pela corrente elétrica que flui através do plasma. A corrente de plasma é criada por um campo elétrico na direção toroidal, gerado pela variação do fluxo magnético produzido pela corrente no primário de um transformador ôhmico, no qual o plasma representa o secundário. Outras espiras, posicionadas paralelamente acima e abaixo da câmara toroidal, produzem campos magnéticos verticais para o controle da posição e formato da coluna de plasma.

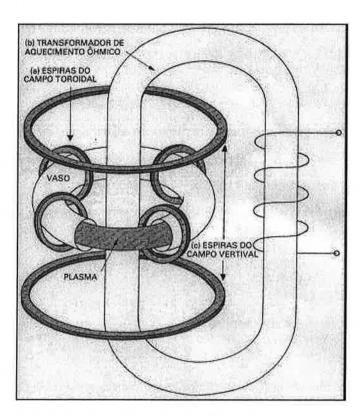


Figura 2.1 - principais componentes de um tokamak

Na figura 2.1, apresentamos um diagrama com os principais componentes de um tokamak.

A superposição das linhas dos campos magnético toroidal e poloidal origina uma configuração de linhas de campo helicoidais cuja helicidade em uma aproximação cilíndrica (na qual a razão entre o raio do plasma r_0 e o raio do tokamak R é muito próxima de zero, ou seja, $R >> r_0$) é descrita pelo fator de segurança q, dado por:

$$q(r_0) = \frac{r_0 B_{\varphi}}{R B_{\varphi}},$$
 2.1.2

onde:

 B_{φ} é o campo magnético toroidal, criado pelas espiras do campo toroidal;

 B_{θ} é o campo magnético poloidal, criado pelo movimento das partículas carregadas que se movem na direção toroidal 18 .

Nas superfícies de fluxo magnético conhecidas como superfícies racionais, uma linha de campo helicoidal retorna ao mesmo ponto depois de descrever m voltas na direção toroidal e n voltas na direção poloidal. Quando isto ocorre o fator de segurança é um número racional dado por $q = \frac{m}{n}$.

O aquecimento do plasma ocorre por meio da dissipação de calor provocada pela passagem da corrente elétrica pelo plasma. Para uma corrente elétrica da ordem de 10^6 Ampères a temperatura é da ordem de $8~{\rm keV}$.

Informações mais detalhadas sobre o tokamak podem ser obtidas nas referências 21 e 22.

2.2 Modelo para ondas de deriva

Consideremos o movimento de partículas em um dispositivo de confinamento numa aproximação cilíndrica. O movimento principal das partículas resulta da superposição do movimento ao longo das linhas de campo e do movimento circular que ocorre ao redor dessas

linhas. Com a presença do campo elétrico, haverá o movimento adicional das partículas em relação ao centro do movimento circular.

A equação de movimento é escrita compondo a equação de movimento com a força de Lorentz:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$
 2.2.1

Quando o campo elétrico é zero na equação 2.2.1, obtemos como resultado o movimento circular uniforme das partículas em torno de uma linha do campo magnético com freqüência ciclotrônica ω_c ou freqüência de Larmor, cujo raio de Larmor é dado por

$$r_L \equiv \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{m v_\perp}{|q|B},$$

onde B é o campo magnético toroidal constante, v_{\perp} é a velocidade transversal ao campo magnético B e tangencial ao movimento circular de velocidade angular

$$\omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

q é a carga elétrica da partícula, e m é a massa da partícula.

No entanto, a velocidade paralela ao campo magnético,

$$v_{\prime\prime} \equiv \vec{v} \cdot \vec{B} / B$$

permanece constante, e assim na composição dos movimento obtemos uma hélice cilíndrica conforme mostramos na figura 2.2.

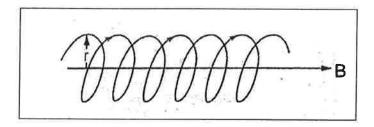


Figura 2.2 - Movimento da partícula ao longo da linha de campo magnético

Definimos como *centro de guia* o ponto cujo lugar geométrico é o centro do movimento circular da partícula, e é este ponto que segue a linha de campo magnético. Em nosso estudo, estamos interessados em descrever o movimento de deriva do centro de guia.

Para obter a velocidade de deriva do centro de guia, resolvemos a equação 2.2.1 na forma vetorial com a presença de um campo elétrico perpendicular ao campo magnético. Para isso, igualamos o termo $m d\vec{v}/dt$ a zero, pois este contribui apenas para descrever o movimento circular da partícula, em torno do centro de guia, com freqüência ω_c^{15} .

Deste modo a equação 2.2.1 é rescrita como:

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$$

Fazendo o produto vetorial da expressão anterior com \vec{B} obtemos:

$$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{B} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = \vec{v} B^2 - \vec{B} (\vec{v} \cdot \vec{B})$$

A componente transversal ao campo magnético da equação acima é

$$\vec{v}_E \equiv \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$
 2.2.2

Definimos \vec{v}_E como sendo a velocidade de deriva do centro de guia das partículas devido ao campo elétrico. É importante ressaltar que a velocidade de deriva é independente de q, m, e da velocidade tangencial do movimento circular em torno de uma linha de campo magnético. Na figura 2.3 ilustramos o movimento do centro de guia da partícula devido à presença de um campo elétrico homogêneo perpendicular à um campo magnético também homogêneo.

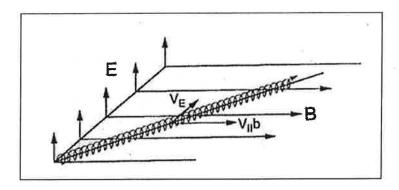


Figura 2.3 – Movimento do centro de guia da partícula

O movimento de uma partícula do plasma em um tokamak é ainda mais complexo. Os campos magnéticos e elétricos não são constantes e uniformes, e portanto outras derivas podem ser consideradas para uma descrição mais detalhada¹⁵. Em nosso modelo utilizamos apenas a velocidade de deriva \vec{v}_E , pois acreditamos que esta é a que mais contribui para o transporte de partículas.

Ainda temos a questão da configuração geométrica dos campos elétricos e magnéticos nas equações consideradas.

A principio é comum esperar que a geometria toroidal seja adotada para o modelo matemático do tokamak. O problema com a geometria toroidal é que as equações se tornam muito complexas para serem analisadas analiticamente. Para simplificar, utilizamos a aproximação do toróide para o cilindro com a condição de que $r_0/R << 1$, onde R é o raio em relação ao eixo maior e r_0 é o raio em relação ao eixo menor, conforme podemos ver nas figuras 2.4 e 2.5.

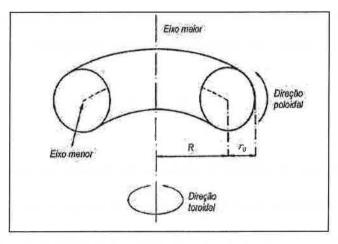


Figura 2.4 – Geometria toroidal

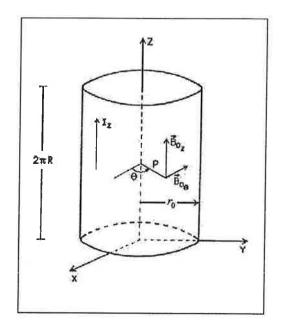


Figura 2.5 – Aproximação cilíndrica

Estas simplificações visam a encontrar um modelo que possa contribuir para a descrição do transporte de partículas sem alterar drasticamente o sistema físico, e com isso adicionar mais um instrumento na investigação do confinamento e da turbulência do plasma^{4,19}.

2.3 Descrição Hamiltoniana do movimento

Nesta seção, formulamos uma descrição Hamiltoniana para as equações de campo que compõem o sistema descrito pela velocidade de deriva dos centros de guia na borda do plasma.

Consideremos um plasma em um campo magnético homogêneo

$$\vec{B} = B_0 \; \hat{e}_z \; ,$$

onde \hat{e}_z é o vetor unitário na direção z conforme foi descrito na seção anterior, e B_0 a intensidade do campo magnético toroidal de equilíbrio. O campo elétrico \vec{E} , perpendicular à \vec{B} , é a soma do campo elétrico de equilíbrio e do campo das ondas de deriva que se propagam no plasma.

A velocidade de deriva \vec{v} dos centros de guia¹³ é dada por:

$$\vec{v} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$$

onde omitimos o índice da equação 2.2.2.

Em coordenadas cartesianas, o produto vetorial é dado por

$$\vec{E} \times \vec{B} = E_{\nu} B_0 \hat{e}_x - E_x B_0 \hat{e}_{\nu}$$

e da igualdade com \vec{v} temos

$$\vec{v} = v_x \hat{e}_x + v_y \hat{e}_y = \frac{B_0}{B_0^2} (E_y \hat{e}_x - E_x \hat{e}_y)$$

ou escrevendo cada uma das componentes separadamente:

$$v_x = \frac{E_y}{B_0}$$
 e $v_y = -\frac{E_x}{B_0}$ 2.3.1

O campo elétrico é dado pelo gradiente do potencial na borda do plasma,

$$\vec{E} = -\nabla \phi = E_x \hat{e}_x + E_y \hat{e}_y + E_z \hat{e}_z = (-\partial_x \hat{e}_x - \partial_y \hat{e}_y - \partial_z \hat{e}_z)\phi$$
 2.3.2

Assim, comparando a equação 2.3.1 com a equação 2.3.2 temos,

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y)$$
 e $v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y)$ 2.3.3

Definimos a Hamiltoniana como

$$H(x, y, t) = \frac{\phi(x, y, t)}{B_0}$$

onde $\phi(x, y, t)$ descreve o potencial da borda do plasma.

Assim temos então que as equações em 2.3.3 representam um sistema Hamiltoniano com x e y sendo as variáveis canônicas associadas. Devido a forma das equações de Hamilton, temos que y é a coordenada e x é o momento associado.

Usamos o sistema de coordenadas cartesianas para descrever a Hamiltoniana, pois consideramos mais uma redução na geometria do problema; de toroidal para cilíndrica, conforme foi visto na seção 2.2, e agora da cilíndrica para a plana.

Na figura 2.6, apresentamos a aproximação geométrica para as equações de Hamilton.

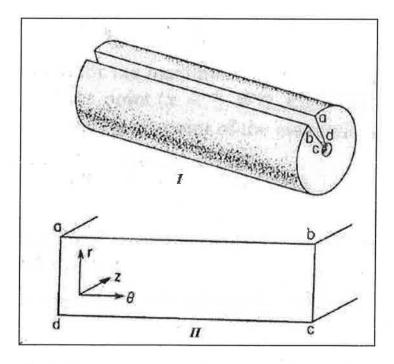


Figura 2.6 - Aproximação geométrica de cilíndrica para plano

O cilindro da figura 2.6.I é secionado da lateral até o centro. Na base o corte foi indicado pelos pontos adcb e aberto conforme a figura 2.6.II. A direção radial r, indicada pelos pontos da, passa a ser a variável de ação x, enquanto que a direção angular θ , indicada pelos ponto dc, passa a ser a variável ângulo y.

A aproximação geométrica de cilíndrica para plano, apresentada na figura 2.6, é válida apenas se considerarmos que a distância *ad* e *bc* são muito pequenas se comparadas ao comprimento *ab*. Isso implica que as equações, nesta aproximação, tem validade apenas para uma camada bem fina do plasma, o que em nosso modelo trata-se da borda do plasma.

O potencial eletrostático que estudamos foi escrito da seguinte forma:

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^{N} A_i \operatorname{sen}(k_{x_i} x) \cos(k_{y_i} y - \omega t)$$
 2.3.4

sendo ϕ_0 o potencial do plasma em equilíbrio com N ondas estacionárias se propagando na direção y (poloidal) e uma modulação espacial na direção x (radial).

Portanto a Hamiltoniana é:

$$H(x, y, t) = \frac{1}{B_0} \left[\phi_0(x) + \sum_{i=1}^{N} A_i \operatorname{sen}(k_{x_i} x) \cos(k_{y_i} y - \omega t) \right]$$
 2.3.5

O potencial elétrico $\phi_0(x)$ adotado neste trabalho foi o da forma linear,

$$\phi_0(x) = ax,$$

onde a é o campo elétrico constante na direção de x, pois este corresponde, em primeira aproximação, ao perfil do potencial medido no TBR-1¹¹. Entretanto, poderíamos ter escolhido outros perfis observados em outras experiências.

A seguir, rescrevemos a Hamiltoniana de maneira a tornar as equações de movimento adimensionais.

Analisando a equação 2.3.5, observamos que os parâmetros característicos são dados pelo campo elétrico $E_0=a$, o campo magnético toroidal B_0 e o raio do plasma r_0 , e a partir destes tiramos também a velocidade característica $v_0=\frac{E_0}{B_0}$ e o tempo característico $t_0=\frac{r_0}{v_0}$.

Deste modo definimos as novas variáveis adimensionais:

$$x' = \frac{x}{r_0}, \quad y' = \frac{y}{r_0}, \quad a' = \frac{a}{E_0}, \quad t' = \frac{t}{t_0},$$

$$\omega' = \omega_i t_0, \quad u' = \frac{u}{v_0}, \quad A'_i = \frac{A_i}{E_0 r_0}, \quad k'_i = \frac{\omega'}{u'} = k_i r_0$$

substituindo-as na Hamiltoniana,

$$H(x, y, t) = \frac{a' E_0 x' r_0}{B_0} + \frac{1}{B_0} \left[\sum_{i=1}^{N} A_i' E_0 r_0 \operatorname{sen} \left(\frac{k_{x_i}}{r_0} x' r_0 \right) \cos \left(\frac{k'_{y_i}}{r_0} y' r_0 - \frac{\omega_i'}{t_0} t' t_0 \right) \right]$$

Após as devidas simplificações, obtemos

$$H(x, y, t) = \frac{E_0 r_0}{B_0} \left[a' x' + \sum_{i=1}^{N} A_i' \operatorname{sen}(k_{x_i} x') \cos(k'_{y_i} y' - \omega_i' t') \right]$$
 2.3.6

ou

$$H(x,y,t) = \frac{E_0 r_0}{B_0} H'(x',y',t')$$
2.3.7

onde

$$H'(x', y', t') = a'x' + \sum_{i=1}^{N} A'_{i} \operatorname{sen}(k_{x_{i}} x') \cos(k'_{y_{i}} y' - \omega'_{i} t')$$
2.3.8

Como veremos no capítulo 3, H'(x', y', t') é a Hamiltoniana em termos das variáveis associadas x' e y'.

2.4 Transporte de partículas e coeficiente de difusão

A determinação do transporte radial de partículas induzido por flutuações é feita através da correlação entre as flutuações da densidade e da velocidade radial das partículas carregadas do plasma. Como a flutuação da velocidade radial é conseqüência da deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, então o transporte de partículas é determinado através da correlação entre as flutuações da densidade e do campo elétrico. Em alguns tokamaks como o TEXT 23 , uma comparação feita entre o transporte global de partículas e o transporte de partículas induzido por flutuações na borda do plasma mostrou que este último é o principal responsável pela perda de partículas. As flutuações magnéticas também contribuem para o transporte de partículas. Entretanto, medidas realizadas em tokamaks mostram que este transporte é muito pequeno quando comparado ao transporte de partículas induzido pelas flutuações eletrostáticas e, portanto, pode ser desprezado 1 .

No modelo usado, a existência do transporte radial de partículas pode ser confirmada calculando-se numericamente o coeficiente de difusão. Para isto, calculamos primeiro o desvio quadrático médio da ordenada $x_i(t)$ de cada órbita em relação à posição inicial $x_i(0)$, ou seja, para cada tempo t, calculou-se a média do desvio em relação à posição inicial, somaram-se os desvios e tirou-se a média, conforme indicado na equação 2.4.1.

$$\sigma^{2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_{i}(t) - x_{i}(o))^{2}$$
2.4.1

onde N é o número de órbitas consideradas.

A partir da equação 2.4.1, calculamos o coeficiente de difusão temporal,

$$D_x(t) = \frac{1}{2t} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[x_i(t) - x_i(0) \right]^2$$
 2.4.2

cujo limite, para $t \to \infty$, corresponde ao coeficiente de difusão 27-29.

Conforme veremos no capítulo 4, na prática, o valor do coeficiente de difusão é determinado tomando-se a média dos últimos pontos, no intervalo entre os instantes t_i e t_f , que em nosso caso é quando $t_f \to 2\pi \times 10^3$. Portanto o coeficiente de difusão é calculado pela seguinte equação:

$$\langle D_x \rangle = \frac{1}{\Delta t} \sum_{t_j = t_i}^{t_f} D_x (t_j)$$
 2.4.3

onde $\Delta t = t_f - t_i$.

A dependência temporal de σ , que determina o coeficiente $\langle D_x \rangle$, é importante para caracterizar o tipo de transporte. Dado por

$$\sigma \sim t^{\gamma}$$
 2.4.4

este pode ser difusivo, superdifusivo ou subdifusivo, desde que, respectivamente, $\gamma = 1$, $\gamma > 1$ ou $\gamma < 1^{20}$.

Neste trabalho, utilizamos a equação do desvio quadrático médio para verificar se ocorre o transporte de partículas e através deste calcular o coeficiente de difusão.

Da mesma maneira para o que foi feito na Hamiltoniana, calculamos o coeficiente de difusão adimensional.

Partindo da equação 2.4.2 temos

$$D_{x}(t) = \frac{1}{2t} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[r_{0} \left(x_{i}'(t') - x_{i}'(0) \right) \right]^{2} = \frac{1}{2t} \frac{r_{0}^{2}}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[x_{i}'(t') - x_{i}'(0) \right]^{2}$$

mas como $t = t_0 t' = \frac{r_0}{v_0} t'$, então

$$D_{x}(t) = \frac{1}{2t't_{0}} \frac{r_{0}^{2}}{N} \sum_{i=1}^{N} [x'_{i}(t') - x'_{i}(0)]^{2}$$
2.4.5

Como $\frac{r_0^2}{t_0} = r_0^2 \frac{v_0}{r_0} = \frac{r_0 E_0}{B_0}$ a equação 2.4.5 é escrita da seguinte forma

$$D_x(t) = \frac{1}{2t'} \frac{1}{N} \frac{r_0 E_0}{B_0} \sum_{i=1}^{N} \left[x_i'(t') - x_i'(0) \right]^2 = \frac{r_0 E_0}{B_0} D_x'(t')$$

ou seja,

$$D_x(t) = \frac{r_0 E_0}{B_0} D_x'(t')$$
2.4.6

onde

$$D'_{x}(t') = \frac{1}{2t'} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[x'_{i}(t') - x'_{i}(0) \right]^{2}$$
2.4.7

As equações 2.3.7 e 2.4.6 indicam que tanto a Hamiltoniana como o coeficiente de difusão são iguais às respectivas Hamiltoniana e coeficiente de difusão adimensionais vezes uma constante determinada pelos parâmetros característicos de um tokamak.

Doravante omitiremos as linhas para facilitar a escrita.

Capítulo 3

Análise para Uma Onda

Com a Hamiltoniana e as equações de movimento apresentadas no capítulo 2, passamos a estudar neste capítulo o comportamento do plasma em equilíbrio com a propagação de uma onda estacionária de deriva na direção poloidal.

Com a mudança de referencial para a primeira onda, definimos o parâmetro de confinamento, e assim estabelecemos critérios para o comportamento do plasma em função dos parâmetros característicos.

Apresentamos os gráficos das linhas de fluxo devido ao movimento de deriva dos centros de guia no espaço de fase. Com o auxílio desses gráficos determinamos os pontos fixos das órbitas analisadas e os classificamos.

3.1 Equações de movimento para uma onda

Para estudar o comportamento do sistema como um todo, temos que analisar primeiro as principais características para o caso mais simples.

O mais simples é quando temos apenas o potencial da borda do plasma dado por

$$\phi_0(x) = ax$$

(conforme medidas efetuadas no tokamak TBR1 11) e, adicionado a este, uma onda de deriva, ou seja, com o índice do somatório N=1 na equação 2.3.8. Assim, a Hamiltoniana é dada por:

$$H(x, y, t) = ax + A_1 sen(k_{x1} x) cos(k_{y1} y - \omega_1 t)$$
 3.1.1

O sistema considerado possui um grau e meio de liberdade. Neste caso, podemos fazer uma transformação canônica de coordenadas de modo a retirar a variável t, passando do referencial do laboratório para o referencial da onda e assim mostrando que é integrável¹².

Seja

$$y' = y - \frac{\omega_1}{k_{v1}} t = \frac{\partial F_2(x', y, t)}{\partial x'} ,$$

temos então que a função geratriz é da seguinte forma :

$$F_2 = x'(y - u_1 t) = F_2(x', y),$$

onde $u_1 = \frac{\omega_1}{k_{y1}}$ é a velocidade de fase da onda.

Então, a nova Hamiltoniana é dada por

$$H'(x,y) = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} = H - u_1 x'$$
, com $x = \frac{\partial F_2}{\partial y} = x'$

e portanto temos que:

$$H(x,y) = (a - u_1)x + A\operatorname{sen}(k_x x)\operatorname{cos}(k_y y) \qquad 3.1.2$$

é a Hamiltoniana em termos das novas variáveis.

Para não sobrecarregar a escrita, omitimos os índices de A, k_x , k_y assim como as linhas de x, y.

O termo - $u_1 x$ da equação 3.1.2 corresponde ao potencial elétrico introduzido pela mudança de referencial do laboratório para o da onda. Como não há dependência explícita do tempo no referencial em movimento, a Hamiltoniana é uma constante de movimento, o sistema é integrável, e a trajetória das partículas no referencial da onda repousam sobre curvas onde a Hamiltoniana é constante.

Assim, as equações de Hamilton ficam escritas como:

$$\frac{dx}{dt} = A k_y \operatorname{sen}(k_x x) \operatorname{sen}(k_y y)$$
3.1.3a

$$\frac{dy}{dt} = a - u_1 + A k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y)$$
3.1.3b

O passo seguinte é determinar os pontos fixos e classificá-los. Para isso, fizemos a seguinte mudança de variável:

$$X = k_x x \quad e \quad Y = k_y y$$
.

Em consequência da mudança de variável temos que a variável tempo será escrita como

$$\tau = \omega_0 t \operatorname{com} \omega_0 = A k_x k_y .$$

Então em 3.1.3a

$$\frac{dx}{dt} = A k_y \operatorname{sen} X \operatorname{sen} Y,$$

e em 3.1.3b

$$\frac{dy}{dt} = a - u_1 + A k_x \cos X \cos Y$$

Como
$$x = \frac{X}{k_x}$$
, escrevemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{X}{k_x} \right) \frac{1}{Ak_y} = \frac{dX}{dt} \frac{1}{Ak_x k_y} = \frac{dX}{d\tau}$$

ou

$$\frac{dX}{d\tau} = \operatorname{sen} X \operatorname{sen} Y.$$

Para a outra coordenada temos $y = \frac{Y}{k_y}$ e

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{Y}{k_y} \right) = a - u_1 + Ak_x \cos X \cos Y$$

assim

$$\frac{dY}{d\tau} = \frac{a - u_1}{A k_x} + \cos X \cos Y$$

Seja

$$U = \frac{a - u_1}{Ak_x} = \frac{a}{Ak_x} - \frac{1}{Ak_x} \frac{\omega}{k_y} = \frac{ak_y - \omega}{Ak_x k_y} = \frac{ak_y - \omega}{\omega_0}$$

Assim, obtemos

$$U = \frac{a - u_1}{Ak_x}$$
 3.1.4a

que será bastante mencionada neste trabalho ou

$$U = \frac{ak_y - \omega}{\omega_0}$$
 3.1.4b

Dando continuidade, temos que

$$\frac{dY}{d\tau} = U + \cos X \cos Y$$

O parâmetro U é definido como parâmetro de confinamento. Este parâmetro é importante pois caracteriza a forma com que as linhas de fluxo descritas por H(x,y) = constante são apresentadas no espaço de fase. Essa forma será importante, no capítulo seguinte, para encontrar as condições em que ocorre o transporte de partículas .

Isto significa que o parâmetro de confinamento depende do campo elétrico da descarga no tokamak e dos parâmetros da onda de deriva.

Temos então o sistema de equações diferenciais que analisaremos. A mudança de variáveis trouxe uma simplificação ao nosso sistema, ou seja, além de facilitar a manipulação algébrica para determinar os pontos fixos, podemos analisar os principais aspectos das linhas de fluxo no espaço de fase do sistema de equações diferenciais, em função apenas do parâmetro U.

Tomando as derivadas iguais a zero, determinamos os pontos fixos.

$$\frac{dX}{d\tau} = \sin X \sin Y = 0$$
3.1.5a

$$\frac{dY}{d\tau} = U + \cos X \cos Y = 0$$
3.1.5b

Os valores calculados para U = 0 são os seguintes:

Pontos fixos hiperbólicos: $X = m\pi$, $Y = (2n+1)\pi/2$

Pontos fixos elípticos: $Y = m\pi$, $X = (2n+1)\pi/2$

onde

$$m, n \in \{ ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \}$$

3.2 Trajetórias no espaço de fase

Vamos analisar as trajetórias obtidas integrando numericamente as equações 3.2.1

$$\frac{dX}{d\tau} = \sin X \sin Y \tag{3.2.1a}$$

$$\frac{dY}{d\tau} = U + \cos X \cos Y \tag{3.2.1b}$$

para um conjunto de pontos iniciais.

No trabalho, utilizamos uma grade de pontos iniciais de modo que os gráficos apresentassem simetria, portanto os pontos escolhidos foram:

$$Y = \frac{n\pi}{2} - 2\pi$$
 e $X = \frac{2m\pi}{5} - 2\pi$, com $n = \{0, 1, 2, ..., 8\}$ $m = \{0, 1, 2, ..., 10\}$.

Neste caso evitamos os pontos com X=0, pois estes pontos caem exatamente em cima da separatriz e assim não teriam aparecido os contornos externos das ilhas adjacentes a esta separatriz. Por este motivo introduzimos os pontos X=-0,2 e X=0,2.

Os detalhes do cálculo numérico e do algoritmo utilizado para construir as figuras e mapas se encontram no apêndice A.

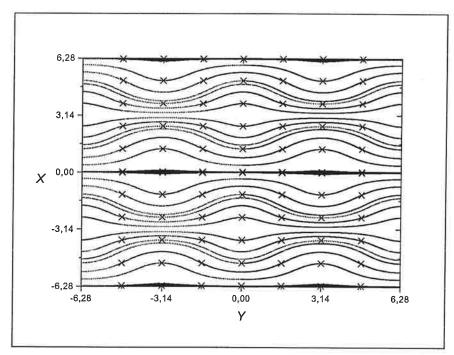


Figura 3.1 – Configuração das linhas de fluxo no espaço de fase para $\left|U\right|=1,5$

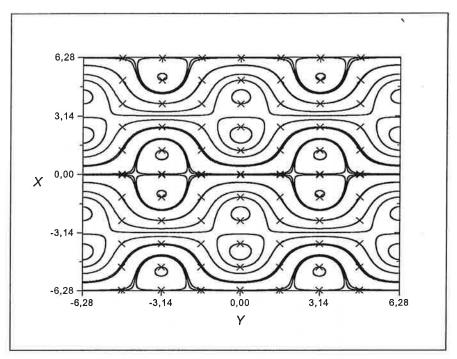


Figura 3.2 - Configuração das linhas de fluxo no espaço de fase para $\left|U\right|=0.5$

Pela igualdade do sistema de equações diferenciais 3.1.5, temos que para o caso |U|>1 o sistema não tem solução e, portanto, o sistema não possui pontos fixos. Assim, as linhas de fluxo serão abertas conforme podemos observar na figura 3.1. Para este gráfico, a integração numérica foi feita com o valor de |U|=1,5.

Para |U|<1, temos tanto linhas fechadas como abertas. O sistema das equações 3.1.5 tem solução e portanto possui pontos fixos. Na figura 3.2, o gráfico apresentado tem como parâmetro de confinamento |U|=0.5. Observamos neste caso a presença de pontos elípticos, e conseqüentemente o aparecimento de ilhas. Os centros de guia inicialmente nas ilhas permanecem confinados e os demais se deslocam indefinidamente na direção Y.

Para U=0 as ilhas ocupam todo o espaço de fase e, assim, verificamos numericamente a presença de pontos elípticos em $Y=m\pi$ e $X=(2n+1)\pi/2$ e dos pontos hiperbólicos em $X=m\pi$ e $Y=(2n+1)\pi/2$, sendo m e n números inteiros.

Para $U \neq 0$ havia linhas de fluxo não limitadas apenas na direção Y (poloidal). Para U = 0 há uma linha (a separatriz) que não é limitada, não só na direção Y mas também na direção X (radial). Com esta condição de U, obtemos uma estrutura no espaço de fase que

permite o transporte de partículas na direção radial e poloidal, e também com a presença de ilhas, que seriam responsáveis pelo confinamento das partículas no plasma.

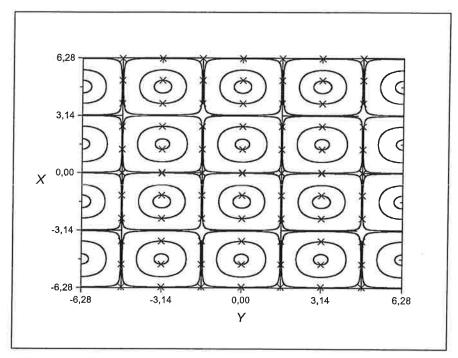


Figura 3.3 - Configuração das linhas de fluxo no espaço de fase para $\,U=0\,$

Estamos interessados em estudar o deslocamento radial dos centros de guia das partículas ionizadas. Observamos nos gráficos anteriores que o deslocamento radial, de uma ilha para outra, ocorrerá apenas, para U=0, ao longo da separatriz.

Conforme o parâmetro de confinamento U aumenta a partir de zero, as separatrizes vão se distanciando umas das outras, surgindo linhas não confinadas poloidalmente e diminuindo o tamanho das ilhas, até |U| ser maior que 1, apenas com linhas abertas.

Um significado importante da condição U=0, é obtida da condição de ressonância usando a teoria da perturbação.

Vamos escrever a Hamiltoniana na equação 3.1.1 como sendo

$$H = H_0 + H_1$$
, $\frac{H_0}{H_1} << 1$,

onde

$$H_0 = ax$$
 e $H_1 = A \operatorname{sen}(k_x x) \cos(k_y y - \omega t)$

Omitimos o índice 1 das expressões para não confundir com o índice do termo perturbativo, além de melhorar a visualização das equações.

Pela teoria da perturbação temos que a condição de ressonância 12 é

$$\frac{d}{dt}(k_y y - \omega t) \approx 0,$$

então

$$k_{y}\dot{y} - \omega = 0 \implies \dot{y} = \frac{\omega}{k_{y}} = u$$
 3.2.2

que é a velocidade de fase da onda.

Sabendo que

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = \frac{\partial H_0}{\partial x} = a$$
 3.2.3

e substituindo 3.2.3 na expressão 3.2.2, temos que

$$a = \frac{\omega}{k_{y}} = u \implies a - u = 0,$$

que corresponde ao numerador do parâmetro de confinamento U da equação 3.1.4a.

Assim a ressonância ocorre para os pontos que se locomovem com a velocidade poloidal aproximadamente igual à velocidade de fase da onda de deriva. Nesse caso, um ponto na separatriz pode se deslocar no espaço de fase de uma ilha a outra seguindo a separatriz.

Capítulo 4

Análise para Duas Ondas

Neste capítulo, escrevemos a Hamiltoniana com duas ondas e, usando as equações de Hamilton, compusemos o sistema de equações diferenciais para serem integradas numericamente.

Apresentamos a mudança no comportamento do sistema, utilizando os mapas de Poincaré, quando alteramos a intensidade da segunda onda em três diferentes tipos de padrão de confinamento.

Em seguida calculamos o desvio quadrático médio para as diversas configurações do espaço de fase e interpretamos as principais características da dinâmica do sistema, para depois calcular os coeficientes de difusão e relacioná-los com a razão das amplitudes das ondas em seus respectivos parâmetros de confinamento.

4.1 Modelo matemático

Passamos agora para o estudo das órbitas descritas pela Hamiltoniana perturbada por duas ondas.

É conhecido, através de experiências realizadas em laboratório e através de simulações numéricas, que as ondas de deriva podem ser responsáveis pelo transporte anômalo das partículas fazendo com que estas rompam o confinamento do campo magnético^{1,17}. Assim, é comum avaliar o efeito das ondas de deriva calculando os coeficientes de difusão quase-lineares derivados da convecção $\vec{E} \times \vec{B}$ de partículas através do campo magnético¹⁷.

Uma onda de deriva produz apenas uma convecção localizada no plasma sem contribuir para o transporte como um todo, conforme visto no capítulo anterior, mas com a

introdução de uma segunda onda de deriva de pequena amplitude, produzimos um movimento caótico que pode causar o transporte radial das linhas de fluxo.

A Hamiltoniana da equação 2.3.8 para duas ondas N=2 é escrita da seguinte forma:

$$H(x, y, t) = ax + A_1 \operatorname{sen}(k_{x1} x) \cos(k_{y1} y - \omega_1 t) + A_2 \operatorname{sen}(k_{x2} x) \cos(k_{y2} y - \omega_2 t)$$
 4.1.1

Novamente, fazendo a mudança para o referencial da primeira onda com

$$y' = y - \frac{\omega_1}{k_{y1}}t,$$

temos que a nova Hamiltoniana com duas ondas é

$$H(x, y, t) = (a - u_1)x + A_1 \operatorname{sen}(k_{x1} x) \cos(k_{y1} y) + A_2 \operatorname{sen}(k_{x2} x) \cos(k_{y2} (y - u t))$$
 4.1.2

onde $u = \frac{\omega_2}{k_{y2}} - \frac{\omega_1}{k_{y1}}$ é a diferença entre a velocidade de fase da segunda onda com a primeira e

$$u_1 = \frac{\omega_1}{k_{v1}}$$
 é a velocidade de fase da primeira onda.

Novamente omitimos a linha para não sobrecarregar a escrita.

Devemos notar que a Hamiltoniana tem uma dependência temporal e esta não pode ser removida através de uma mudança de coordenadas, portanto a Hamiltoniana não é uma constante de movimento e o sistema não é integrável.

A Hamiltoniana depende das coordenadas espaciais e do tempo, com dependência periódica no tempo. Pode-se construir mapas a partir de seções de Poincaré para observar o comportamento do sistema através dos valores de x e y tomados em instantes específicos. Desta maneira construímos um mapa estroboscópico, formado pelo conjunto de pontos iniciais escolhidos e os pontos anotados a cada período fixo de 2π .

Tomando as equações de Hamilton

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad e \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \,,$$

e a Hamiltoniana dada pela equação 4.1.2, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais.

$$\frac{dx}{dt} = A_1 k_{y1} \operatorname{sen}(k_{x1} x) \operatorname{sen}(k_{y1} y) + A_2 k_{y2} \operatorname{sen}(k_{x2} x) \operatorname{sen}(k_{y2} (y - u t))$$
 4.1.3a

$$\frac{dy}{dt} = a - u_1 + A_1 k_{x1} \cos(k_{x1} x) \cos(k_{y1} y) + A_2 k_{x2} \cos(k_{x2} x) \cos(k_{y2} (y - ut))$$
 4.1.3b

Integrando numericamente este sistema de equações diferenciais para um conjunto de pontos iniciais, construímos todo o estudo numérico em função apenas da razão entre as amplitudes das ondas e o parâmetro de confinamento U para as variáveis x e y, e apresentamos os mapas nessas variáveis.

4.2 Parâmetro de confinamento U = 0

Para o estudo numérico do sistema de equações diferenciais, escolhemos parâmetros que permitem construir os gráficos de maneira que pudéssemos observar os efeitos provocados pela adição da segunda onda. Escolhemos um espetro de ondas de modo a comparar com os resultados obtidos no artigo da referência de número 14 e, deste modo, obter uma certa classe de fenômenos, como o movimento de deriva das órbitas e as regiões onde ocorre o confinamento.

Os parâmetros escolhidos foram:

$$\omega_1 = \omega_2 = 0.2$$
 $\frac{k_{x2}}{k_{x1}} = \sqrt{3}$ $\frac{k_{y2}}{k_{y1}} = 0.5$

Para o campo elétrico usamos $a=0,1\,$ e, para a amplitude da primeira onda, usamos $A_1=1\,.$

A grade de pontos iniciais escolhida foi a seguinte:

$$y = \frac{n\pi}{2}$$
 e $x = \frac{2m\pi}{5} - 2\pi$, com $n = \{0,1,2,3,4\}$ $m = \{0,1,2,...,10\}$.

Da mesma forma descrita no capítulo 3, adicionamos ao conjunto de pontos iniciais acima os pontos x = -0.2 e x = 0.2. A diferença em relação às figuras do capítulo anterior foi o intervalo no qual os pontos no eixo x são apresentados, de -10 à 10. Este intervalo foi escolhido e padronizado para poder visualizar o espalhamento dos pontos através do espaço de fase quando este estiver em regime caótico.

O mapa é um sistema dinâmico que evolui no tempo de forma discreta. É uma ferramenta importante para caracterizar o comportamento dinâmico de um sistema, pois há inúmeros modelos cujas soluções aparecem sob a forma de relações de recorrência¹². Em um sistema Hamiltoniano, o mapa é construído tendo, como eixos coordenados, as variáveis y e x proporcionais às variáveis de ângulo e ação. Os pontos no mapa são as posições dos centros de guia tomados em um intervalo de tempo pré-fixado. Utiliza-se, em geral, como período para apresentar os pontos no mapa,o inverso da freqüência da perturbação.

Em nosso caso, as variáveis de ângulo-ação representam o espaço físico, ou seja, a posição das partículas na borda do plasma, e a escolha feita para a freqüência da segunda onda foi de 0,2. Mas, se usarmos este valor de freqüência para determinar o período do mapa, os pontos no mapa seriam apresentados em um intervalo de 10π , o que é muito grande, pois poderíamos perder informação sobre o movimento da partícula. Usar um período muito pequeno teria o inconveniente de aumentar muito o número de pontos dificultando, assim, a visualização no mapa e tomando muito tempo de processamento numérico. Deste modo, após alguns testes, adotamos que os pontos seriam apresentados no mapa no intervalo de 2π .

Nas figuras 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, mostramos a influência da segunda onda conforme aumentamos sua amplitude. Temos os mapas espaço de fase (x, y), com o parâmetro de confinamento escolhido para U=0, e com a razão das amplitudes das duas ondas $A_2/A_1=0$, $A_2/A_1=0$, $A_2/A_1=0$, $A_2/A_1=0$, e $A_2/A_1=0$, 8.

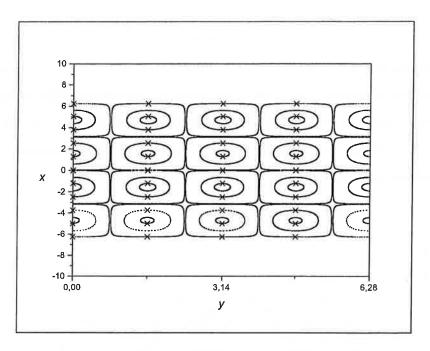


Figura 4.1 — Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0\,$ com parâmetro de confinamento $U=0\,$

Observamos na figura 4.1 que, com o parâmetro $A_2=0$, voltamos ao caso em que o mapa é formado por uma rede de ilhas, situação estudada no capítulo anterior para o caso de uma onda.

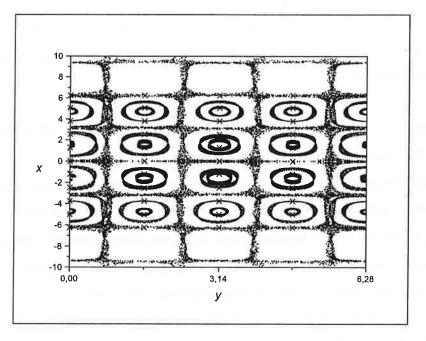


Figura 4.2 — Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0$,1 com parâmetro de confinamento U=0

Para o mapa, da figura 4.2, a razão entre as amplitudes foi $A_2/A_1 = 0.1$. Com esta razão entre as amplitudes, verificamos neste mapa, a destruição das linhas mais externas às ilhas, próximas da separatriz, e os pontos que nelas se encontravam distribuem-se por essa região. Também temos que as ilhas mais internas apresentam-se sobrepostas, indicando que os centros de guia sofreram desvios em suas trajetórias, contudo permanecem limitadas apresentando movimento periódico.

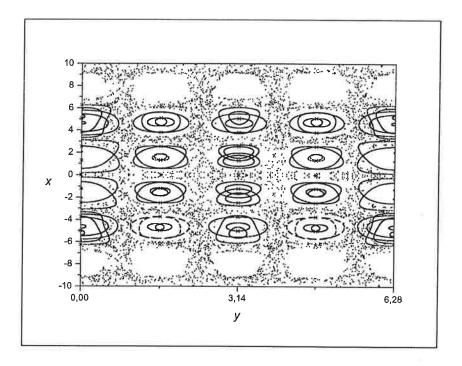


Figura 4.3 – Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0$,3 com parâmetro de confinamento U=0

Na figura 4.3, notamos que os pontos próximos à separatriz se encontram mais dispersos, e as ilhas mais internas começam a se sobrepor.

A escolha dos pontos iniciais delimita a região onde as ilhas aparecem. Se refinássemos a grade, incluindo pontos próximos aos pontos hiperbólicos, teríamos como resultado a presença da separatriz em todo o espaço de fase, o que foi feito no capítulo anterior na figura 3.3. Como estamos interessados em analisar a modificação causada no espaço de fase com a introdução da segunda onda e a relação das amplitudes das ondas com o coeficiente de difusão, um excesso de linhas de fluxo congestionaria o mapa impedindo a correta visualização do fenômeno de transporte. Portanto, o número de pontos iniciais e suas disposição no espaço

de fase servem para tornar nítidas as órbitas nos mapas e sua mudanças em função da razão das amplitudes, sem prejudicar o cálculo do coeficiente de difusão.

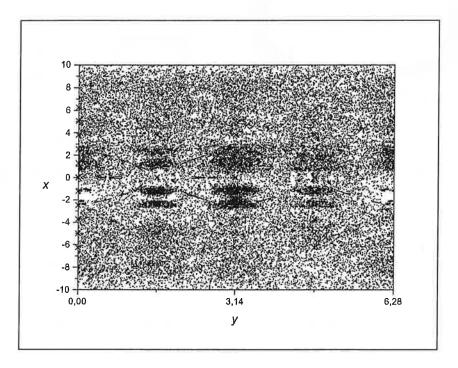


Figura 4.4 – Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0.8\,$ com parâmetro de confinamento U=0

Com as ilhas totalmente destruídas e com o caos generalizado em todo o espaço de fase, observamos na figura 4.4 que, embora ainda apareçam regiões com maior concentração de pontos, a grande parte das partículas está livre para percorrer todo o espaço de fase do sistema.

Poderíamos imaginar que os pontos próximos à separatriz se concentram ao redor das ilhas. No entanto, isto não ocorre, conforme verificamos quando calculamos o coeficiente de difusão das partículas. Para ilustrar a sensibilidade do sistema em relação à amplitude da segunda onda e o movimento que as partículas executam ao longo da separatriz, construímos os gráficos a seguir, com a razão entre as amplitudes dada por $A_2/A_1=0.1$.

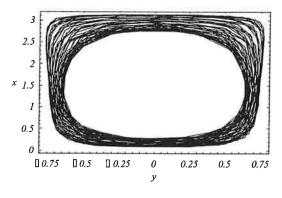


Figura 4.5

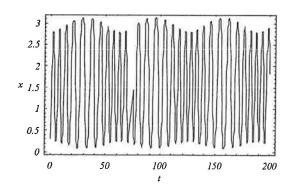
Órbita com ponto inicial $P_0 = (0,3;0,3)$

Figura 4.6

Órbita com ponto inicial $P_0 = (0,2;0,2)$

Na figura 4.5, o ponto encontra-se inicialmente em $P_0 = (0,3;0,3)$, a órbita a partir desse ponto permanece confinada à ilha. A uma pequena distância deste ponto, tomamos outro ponto inicialmente no par ordenado $P_0 = (0,2;0,2)$, ou seja, mais próximo da separatriz, e conforme podemos ver na figura 4.6, a órbita percorre outras ilhas, e assim notamos o quão sensível é o sistema.

Mostramos também nas figuras 4.5 e 4.6 o comportamento de cada órbita apresentando os gráficos da posição em relação ao tempo.



8 6 x 4 2 0 0 100 200 300 400

Figura 4.7

Figura 4.8

Evolução temporal da órbita com ponto inicial em $P_0 = (0,3;0,3)$.

Evolução temporal da órbita com ponto inicial em $P_0 = (0,2;0,2)$.

Na figura 4.7, mostramos o confinamento do centro de guia com ponto inicial mais próximo do ponto elíptico, ao passo que, para o ponto inicial próximo da separatriz (figura

4.8), observamos que centro de guia circunda as ilhas mais próximas sem uma regularidade definida.

Com as mesmas condições vistas anteriormente, mas com a perturbação três vezes maior $(A_2/A_1=0.3)$, observamos que, para os dois pontos iniciais, os centros de guia se deslocam ao longo da separatriz, porém o centro de guia cujo ponto inicial encontrava-se em $P_0=(0.3;0.3)$, executa mais voltas em torno das ilhas, conforme podemos ver nas figuras 4.9 e 4.11. Para o ponto $P_0=(0.2;0.2)$, a perturbação é suficiente para que seu deslocamento seja o mais variado possível sem se deter muito tempo em uma ilha específica, conforme verificamos nas figuras 4.10 e 4.12.

Por estes dois exemplos, fica claro que os pontos que estão mais próximos da separatriz contribuirão com uma parcela maior ao coeficiente de difusão.

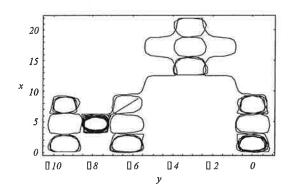


Figura 4.9

Órbita com ponto inicial $P_0 = (0,3;0,3)$

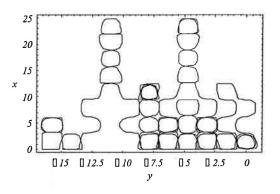


Figura 4.10

Órbita com ponto inicial $P_0 = (0,2;0,2)$

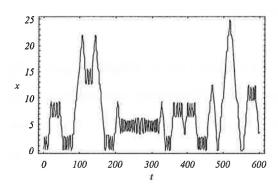


Figura 4.11

Evolução temporal da órbita com ponto inicial em $P_0 = (0,3;0,3)$.

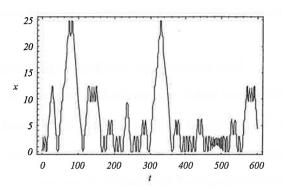


Figura 4.12

Evolução temporal da órbita com ponto inicial em $P_0 = (0,2;0,2)$.

Completando a descrição do deslocamento radial das órbitas descritas pelos centros de guia, temos ainda o gráfico do desvio quadrático médio. Com a grade de 60 pontos iniciais, distribuídos uniformemente no intervalo de $[0,2\pi]x[-2\pi,2\pi]$, calculamos o desvio quadrático médio para cada deslocamento em relação ao ponto inicial.

Na figura 4.13, encontra-se o gráfico do desvio quadrático médio em função do tempo para o caso em que $A_2/A_1=0.1$ e, na figura 4.14, para o caso $A_2/A_1=0.3$.

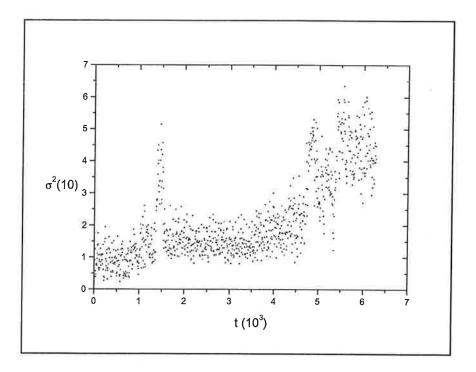


Figura 4.13 - $A_2/A_1 = 0,1$

Figura 4.13 — Gráfico do desvio quadrático médio em função do tempo com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0,1$ e com parâmetro de confinamento U=0 .

Fica evidente que a ordem de grandeza para σ na figura 4.14 em relação à figura 4.13, indica um maior transporte de partículas na direção radial. Observamos também que, para $A_2/A_1=0,1$, os pontos se encontram mais dispersos que para $A_2/A_1=0,3$. Isto ocorre porque existe um número maior de partículas que estão presas às ilhas, sendo que estas não contribuem para o movimento de deriva.

Para figura 4.13, notamos a presença de um pico em $t \approx 1500$. Isto ocorre devido ao fato das partículas mais próximas à separatriz terem mudado para uma ilha mais distante quase que ao mesmo tempo. Lembramos que não existe uma perturbação de intensidade suficiente

para que a maior parte dos pontos saia do regime regular, por isso casos como este devem ser peculiares.

Embora os pontos da figura 4.14 se apresentam mais compactos, notamos a presença de flutuações indicando que o transporte das partículas não ocorre livremente, isto é, ainda encontramos partículas que, durante seu percurso pela região da separatriz, executam movimentos em torno das ilhas para depois voltar a viajar pela separatriz.

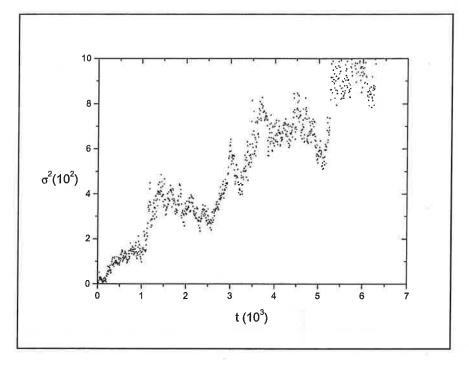


Figura 4.14 — Gráfico do desvio quadrático médio em função do tempo com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0$,3 e com parâmetro de confinamento U=0.

Poderíamos obter uma reta (ou algo bem próximo) no gráfico do desvio quadrático médio, se tivéssemos escolhido uma grade de pontos iniciais todos próximos à separatriz, mas isto, de certo modo, ilustraria apenas este tipo de movimento, descaracterizando o que seria um comportamento coletivo de partículas no plasma. Mas, aumentando a perturbação, cuja razão entre as amplitudes é dado por $A_2/A_1=0.8$, e consequentemente destruindo as ilhas, obtemos um gráfico cujos pontos estão mais compactos e se aproximam de uma reta, conforme mostra a figura 4.15.

No gráfico da figura 4.15, podemos ver a redução das amplitudes das oscilações, no número de oscilações, assim como uma maior concentração dos pontos no decorrer do tempo.

Comparando os gráficos das figuras 4.14 e 4.15, podemos observar que, para o caso em que $A_2/A_1=0.3$, o deslocamento das partículas em relação a posição inicial é maior do que em $A_2/A_1=0.8$. Isto nos indica que o transporte de partículas é maior para $A_2/A_1=0.3$, conforme verificamos quando calculamos o coeficiente de difusão.

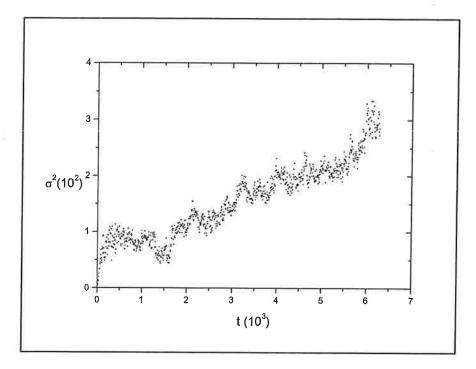


Figura 4.15 — Gráfico do desvio quadrático médio em função do tempo com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0,8\,$ e com parâmetro de confinamento U=0 .

Para confirmar a influência do número de pontos iniciais escolhidos no desvio quadrático médio, fizemos os cálculos para um sistema com 1000 pontos iniciais distribuídos uniformemente no intervalo descrito anteriormente e com $A_2/A_1=0,1$.

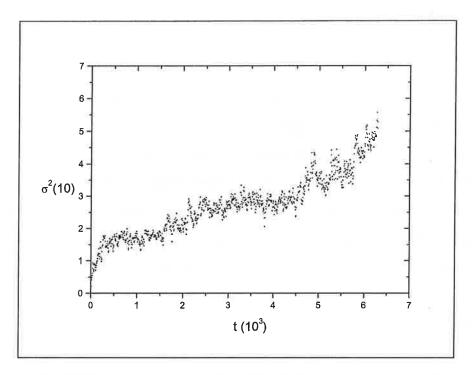


Figura 4.16 – Gráfico do desvio quadrático médio em função do tempo com 1000 pontos iniciais com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0,1$ e com parâmetro de confinamento U=0.

Na figura 4.16, apresentamos o gráfico do desvio quadrático médio para 1000 pontos iniciais.

A ordem de grandeza do desvio quadrático médio continuou a mesma se comparada com o gráfico da figura 4.13. Mas a diferença fica nítida quando observamos a largura da curva, ou seja, o espalhamento dos pontos, e a redução das oscilações. Isto nos mostra que, com o aumento no número de pontos iniciais, aumentou a quantidade de pontos que estão próximos à separatriz, refinando o gráfico do desvio quadrático médio. Mesmo com estas mudanças no desvio quadrático médio, o valor do coeficiente de difusão calculado não alterou.

O aumento do número de pontos iniciais torna-se importante quando estamos interessados em classificar o tipo de difusão (normal, subdifusivo ou superdifusivo) 20 . Para calcular o valor do coeficiente de difusão, usando a equação 2.4.3, o número de pontos iniciais deve ser suficiente para que o gráfico do coeficiente de difusão temporal (que será visto a seguir) seja assintótico para $t \to \infty$.

O passo seguinte consiste em analisar a variação do coeficiente de difusão em relação à razão das amplitudes das duas ondas de deriva. Isto é importante para podermos comparar o modelo de ondas de deriva com os dados experimentais medidos em Tokamaks, e associar os valores medidos a este o tipo de difusão.

Apresentamos abaixo o gráfico do coeficiente de difusão em função do tempo, isto para $A_2/A_1=0.3$ (figura 4.17) e para $A_2/A_1=0.8$ (figura 4.18). Vale observar o caráter assintótico quando o valor de t tende a infinito que, para nosso caso numérico, ocorre a partir de $6\cdot 10^3$. Da mesma maneira que descrevemos o gráfico do desvio quadrático médio, a curva exibe pequenas oscilações além de apresentar um pequenos espalhamento dos pontos.

Estes dois gráficos foram escolhidos por apresentarem nitidamente em suas curvas as oscilações que demonstram a influência das ilhas no espaço físico. Com $A_2/A_1=0,3$ as ilhas exercem uma influência maior sobre as partículas para transladarem em torno do ponto elíptico, justamente por não estarem ainda destruídas, o que ocorre em menor intensidade para $A_2/A_1=0,8$.

A partir das figuras 4.17 e 4.18, fica clara a importância da segunda onda. Com A_2 de maior intensidade, o caráter caótico do sistema faz com que a curva do coeficiente de difusão atinja o limite assintótico mais rapidamente.

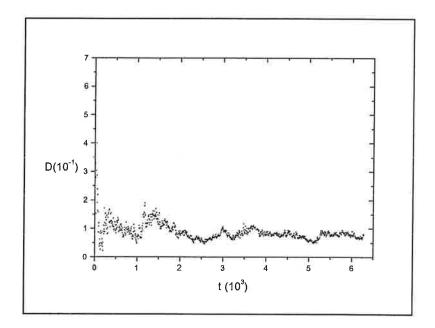


Figura 4.17 — Gráfico do coeficiente de difusão em função do tempo com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0.3\,$ e com parâmetro de confinamento U=0 .

Também podemos, a princípio, esperar que o coeficiente de difusão aumente com o acréscimo da intensidade da segunda onda. Mas, com os parâmetros que utilizamos, obtivemos um máximo no coeficiente de difusão para $A_2/A_1=0.3$, e o decréscimo do mesmo quando a amplitude da segunda onda aumentou.

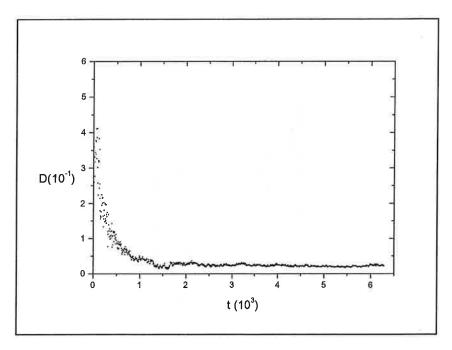


Figura 4.18 — Gráfico do coeficiente de difusão em função do tempo com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0.8\,$ e com parâmetro de confinamento U=0 .

Para ressaltar a relação entre o coeficiente de difusão e a amplitude da segunda onda, apresentamos abaixo a tabela 4.1 e a figura 4.19 com os coeficientes de difusão médios calculados para diversas amplitudes.

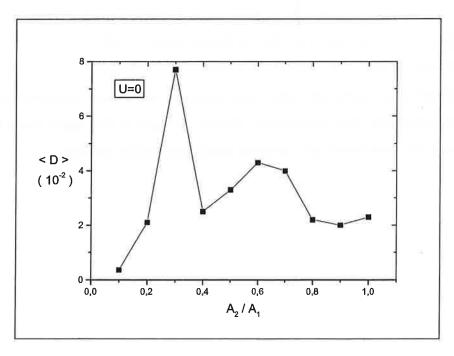


Figura 4.19 - Gráfico do coeficiente de difusão em função da razão das amplitudes das ondas

Tabela 4.1 - Tabela do coeficiente de difusão em função da razão das amplitudes das ondas

A_2 / A_1	< D >
0,1	0,0036
0,2	0,021
0,3	0,077
0,4	0,025
0,5	0,033
0,6	0,043
0,7	0,04
0,8	0,022
0,9	0,02
1	0,023

Ressaltamos que a linha que une os pontos na figura 4.19 não é um ajuste, mas apenas completa o gráfico para permitir uma melhor visualização.

Portanto, para a escolha de parâmetros que fizemos, teremos um máximo no coeficiente de difusão para $A_2/A_1=0.3$.

Entendemos que, por considerar a segunda onda como uma perturbação, existe um limite para a amplitude da segunda onda. Se esta excede um certo valor, deixa de ser uma perturbação e passa a ser um elemento efetivo do sistema. Existe o problema desta perturbação de grande amplitude descaracterizar o modelo e o conjunto como um todo, ou seja, o modelo passa a não corresponder ao problema proposto e, em nosso caso especificamente, o cálculo para a condição de ressonância do capítulo 3 também não seria válido.

Como nosso sistema trata de uma superposição de duas ondas, não é difícil ver que a onda predominante será aquela que tiver maior amplitude, mesmo que o referencial esteja na onda de menor amplitude. Para exemplificar, fizemos na figura 4.20 o mapa com a amplitude da segunda onda 10 vezes maior que a primeira (aquela que modela as ilhas).

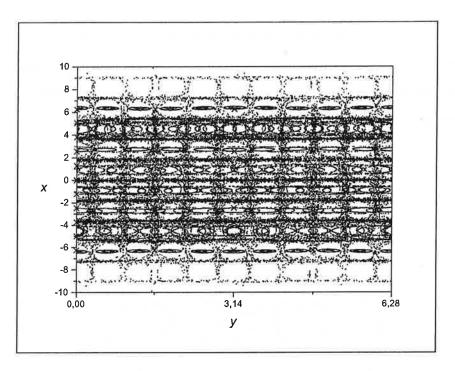


Figura 4.20 — Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $\,A_2=10\,A_1\,$ com parâmetro de confinamento $\,U=0\,$

Em meio ao caos, podemos notar nitidamente o aparecimento da cadeia de ilhas, assim como torna-se nítida a separatriz .

4.3 Parâmetro de confinamento 0 < U < 1

Nesta seção, analisamos a mudança de valor que o coeficiente de difusão sofre em relação à mudança do parâmetro de confinamento U.

No capítulo 3 verificamos que, para o caso em que 0 < U < 1, existe uma mistura de ilhas e de linhas de fluxo abertas. As linhas de fluxo abertas promovem o movimento poloidal das partículas e, com isso, o aparecimento de barreiras na difusão radial, ou seja, não existe um movimento natural na direção radial, que só será possível com a adição do termo perturbativo conforme veremos a seguir.

Usamos os mesmos valores da seção anterior para as constantes, assim como para a grade de pontos iniciais. Para mudar o parâmetro de confinamento apenas elevamos o valor do campo elétrico para a = 0,6. Conforme vimos na expressão de U na equação 3.1.4, poderíamos também ter mudado a velocidade de fase, mas isto acarretaria uma mudança na

freqüência e/ou no número de onda, o que não seria interessante, pois queremos verificar as mudanças no coeficiente de difusão para uma dada onda de deriva, ou seja, com velocidade de fase e número de onda definidos. Deve-se notar que, uma mudança no campo elétrico implica em um outro tipo de descarga em um tokamak.

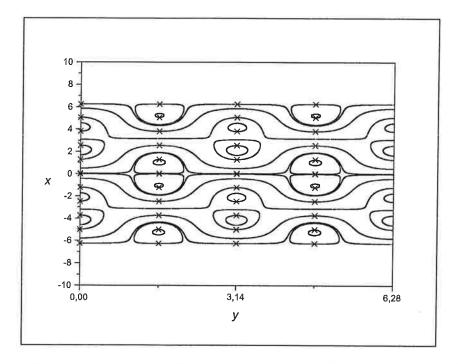


Figura 4.21 — Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0\,$ com parâmetro de confinamento $U=0.5\,$

Na figura 4.21 apresentamos o mapa estroboscópico para o caso em que $A_2/A_1=0\,$ e U=0,5. Conforme observamos, não existem linhas de fluxo abertas na direção de x. O gráfico apresenta linhas sobrepostas devido a escolha da grade. Preservamos a grade para que a mudança no parâmetro de confinamento apresente, de maneira clara, a nova configuração do espaço de fase.

Com a introdução da segunda onda, ainda de pequena amplitude $A_2/A_1=0,1$, observamos a destruição das linhas mais próximas, conforme mostra o mapa da figura 4.22.

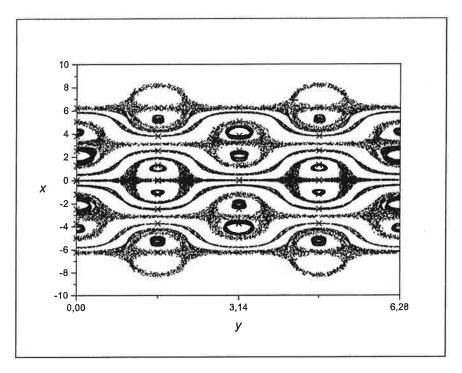


Figura 4.22 — Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0,1\,$ com parâmetro de confinamento $U=0,5\,$

Para os pontos que estão em $x=\pm 2\pi$, observamos que estes modelam a separatriz que na figura anterior não aparecia. Além disso, temos uma superposição das ilhas mais internas e o espalhamento dos pontos nas linhas pertencetes às ilhas externas.

Progressivamente notamos a destruição das superfícies no espaço de fase na medida em que aumentamos a amplitude da segunda onda.

Nas figuras 4.23 e 4.24, temos o mapa estroboscópico do espaço de fase para a razão das amplitudes de $A_2/A_1=0.3$, e $A_2/A_1=0.8$.

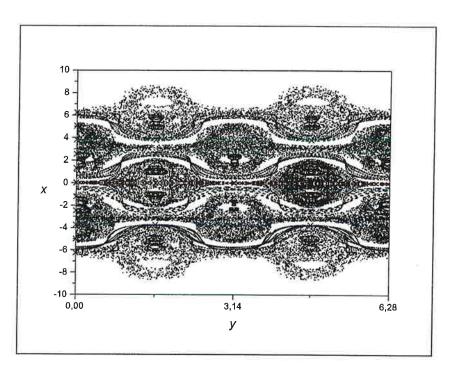


Figura 4.23 – Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0,\!3$ com parâmetro de confinamento $U=0,\!5$

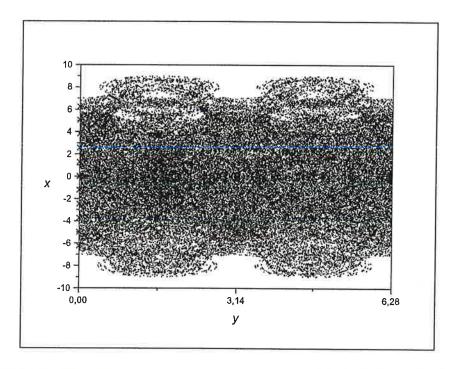


Figura 4.24 – Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0.8\,$ com parâmetro de confinamento $U=0.5\,$

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 3710

93.1

Podemos observar na figura 4.23 que as ilhas já não se encontram bem definidas, perderam em definitivo o contorno característico, embora vemos em certas regiões a presença de pequenas aglomerações de pontos onde encontram-se os pontos elípticos.

Nas figuras 4.22 e 4.23 aparecem espaços entre as linhas de fluxo na região da separatriz. Notamos que, com o aumento da amplitude da segunda onda, nem toda superfície de fluxo foi destruída, indicando a existência de uma barreira no transporte de partículas nesta região no espaço de fase. Já na figura 4.24 com amplitude da segunda onda muito próxima da primeira em $A_2/A_1=0.8$, as linhas de fluxo se encontram totalmente caóticas, destruindo toda a barreira de transporte que apareceu no gráfico anterior.

Mesmo assim não observamos o deslocamento das órbitas por todo o espaço de fase como foi obtido na figura 4.4.

Na tabela 2 apresentamos a tabela com os valores obtidos do coeficiente de difusão em função da razão das amplitudes das ondas e o respectivo gráfico na figura 4.25.

Comparando a tabela 4.2 com a tabela 4.1, observamos a diferença entre as ordens de grandeza. O coeficiente de difusão é 100 vezes menor para o parâmetro de confinamento U=0,5 em relação a U=0. Isto mostra o quão importante é a presença da separatriz para o transporte de partículas na direção radial e a relação que o parâmetro de confinamento estabelece para este transporte.

Na figura 4.25 observamos outra diferença em relação à seção anterior; o coeficiente de difusão aumenta monotonicamente com a amplitude da segunda onda e, conforme o esperado, aumentando a amplitude da segunda onda aumentamos a difusão das partículas no espaço de fase.

Tabela 4.2 - Tabela do coeficiente de difusão em função das amplitudes das ondas

A2/A1	< D >
0,1	9,7E-05
0,2	1,1E-04
0,3	1,2E-04
0,4	1,3E-04
0,5	1,4E-04
0,6	1,7E-04
0,7	2,1E-04
0,8	2,4E-04
0,9	3,0E-04
1,0	3,5E-04

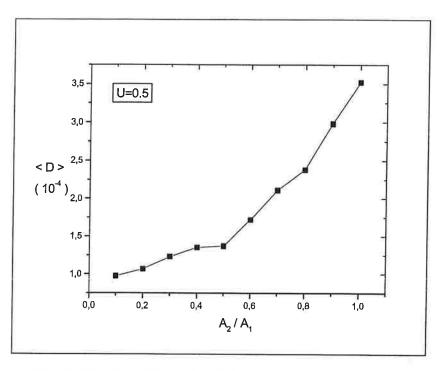


Figura 4.25 - Gráfico do coeficiente de difusão em função das amplitudes das ondas

4.4 Parâmetro de confinamento U > 1

Dando continuidade ao estudo do coeficiente de difusão e dos mapas, consideramos o último estudo para o parâmetro de confinamento U=1,5. Intuitivamente esperamos valores menores para o coeficiente de difusão e um aumento da barreira de transporte de partículas na região limitada pelos pontos iniciais escolhidos, assim como uma maior dificuldade das partículas em escapar ou mesmo se deslocarem para fora desta região.

Conforme analisado no capítulo 3, com o aumento do parâmetro de confinamento, obtivemos as linhas de fluxo na direção poloidal sem a presença de ilhas, ou seja, sem pontos elípticos.

No mapa da figura 4.26, apresentamos o espaço de fase com a grade de pontos iniciais para os casos em que $A_2/A_1=0$.

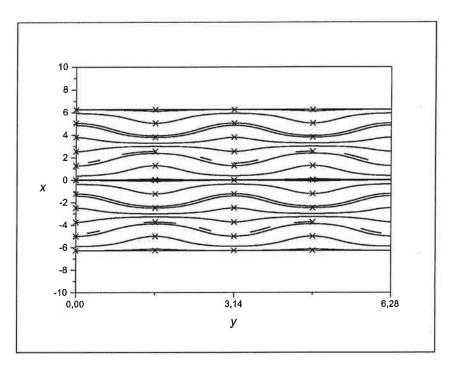


Figura 4.26 — Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0\,$ com parâmetro de confinamento $U=1,5\,$

Na figura 4.26 fica clara a ausência das ilhas. Notamos também que, quando comparada com a figura 4.21, as linhas de fluxo se encontram mais concentradas e as amplitudes com que oscilam diminuem. Isto nos indica que, com o aumento do parâmetro de confinamento, as linhas de fluxo tendem a ser lineares e cada vez mais concentradas.

Entendemos então que o parâmetro U determina a intensidade do fluxo das linhas na direção poloidal, maior o valor, maior a dificuldade das partículas se deslocarem na direção radial x. O sinal de U indica o sentido; quando U é positivo temos um fluxo da esquerda para a direita e negativo da direita para esquerda.

Com as figuras 4.27 e 4.28, completamos a seqüência de mapas mostrando a deformação nas linhas de fluxos com o aumento da perturbação.

A primeira coisa que observamos na figura 4.27 são as faixas caóticas. Assim como para o caso em que parâmetro U=0,5, e para a mesma amplitude da segunda onda, obtivemos aqui caos limitado em certas regiões no espaço de fase e regiões bem definidas onde os pontos não passam.

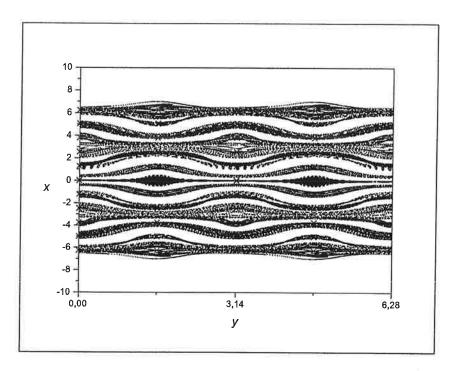


Figura 4.27 — Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0$,3 com parâmetro de confinamento U=1,5

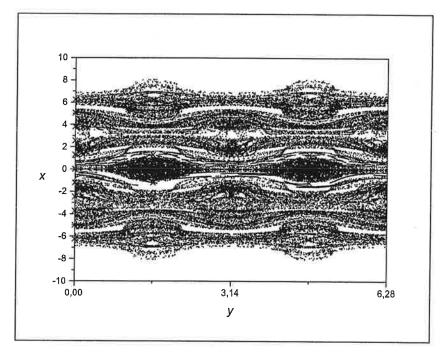


Figura 4.28 – Mapa do espaço de fase com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1=0.8\,$ com parâmetro de confinamento $U=1.5\,$

Podemos notar na figura 4.28 a concentração de pontos no eixo x = 0, mostrando-se totalmente dominada pelo caos, e regiões pequenas sem a presença de pontos indicando que as barreiras vistas anteriormente estão quase totalmente destruídas.

Nesta seção e na anterior, apresentamos mapas em que apareciam espaços em branco e os chamamos de barreiras de difusão. Com o aumento do caos notamos a redução dos espaços livres e, dentro dos limites que impusemos para a amplitude da segunda onda, não obtivemos uma distribuição uniforme (ou quase uniforme) dos pontos pelo espaço de fase na região limitada pelos pontos iniciais. O fato é que as órbitas escolhidas foram perturbadas mas apresentaram uma tendência a manter seu deslocamento na direção poloidal. Em outras palavras, o transporte radial é pequeno.

Completando a descrição destes fenômenos apresentamos na tabela 4.3 o coeficiente de difusão em função da amplitude e o respectivo gráfico na figura 4.29.

Tabela 4.3 - Tabela do coeficiente de difusão em função das amplitudes das ondas

A2/A1	< D >
0,1	1,8E-05
0,2	1,8E-05
0,3	2,0E-05
0,4	2,2E-05
0,5	2,5E-05
0,6	2,9E-05
0,7	3,7E-05
0,8	3,4E-05
0,9	3,8E-05
1,0	3,9E-05

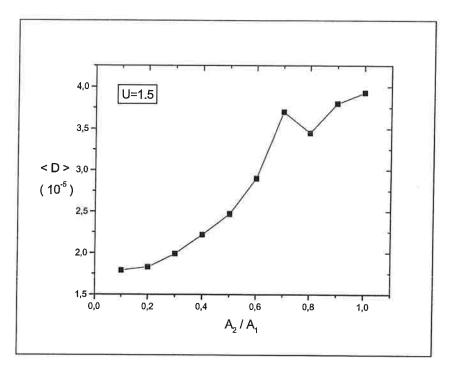


Figura 4.29 - Gráfico do coeficiente de difusão em função da razão das amplitudes das ondas

Mais uma vez fica claro a dependência do coeficiente de difusão com o parâmetro de confinamento. Agora, com U=1,5, temos uma redução na ordem de grandeza de um fator de 10 em relação à U=0,5 e um fator de 1000 em relação à U=0.

Mas desta vez observamos um comportamento interessante referente ao gráfico da figura 4.29. Inicialmente, o coeficiente de difusão cresce quase que exponencialmente até $A_2/A_1=0,7$ para depois diminuir o valor em $A_2/A_1=0,8$ e a seguir cresce assintoticamente para um valor limite quando $A_2/A_1=1$. Ressaltamos novamente que a linha que une os pontos não se trata de um ajuste; ela está apenas conectando os pontos para uma melhor visualização do gráfico.

Para ilustrar a importância do parâmetro de confinamento no transporte de partículas, fizemos o gráfico do coeficiente de difusão em função do parâmetro de confinamento. Este gráfico encontra-se na figura 4.30.

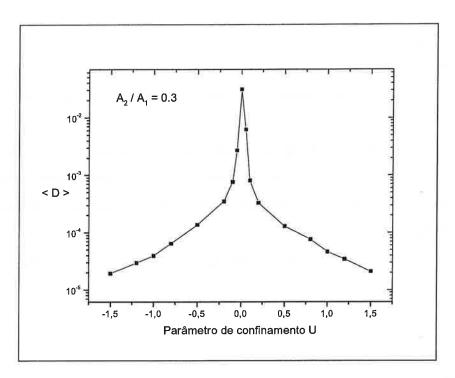


Figura 4.30 – Coeficiente de difusão em função do parâmetro de confinamento U.

Para compor o gráfico, a razão escolhida entre as amplitudes das ondas foi de 0,3 e os outros demais valores foram mantidos os mesmos.

Conforme mostrado no decorrer do capítulo, a figura 4.30 confirma o máximo do coeficiente de difusão para U=0.

Este gráfico ilustra a dependência do coeficiente de difusão em relação ao parâmetro de confinamento, e deste modo, fica clara a importância em conhecer a velocidade de fase da onda e o potencial radial para determinar o tipo de confinamento.

Para variar o parâmetro de confinamento foi conveniente alterar o valor do campo elétrico em cada situação, isto porque concentramo-nos em um valor específico para as freqüências das ondas, o que significa que alterar a velocidade de fase para obter os valores de U, obrigaria a alterar o número de onda e deste modo descaracterizando o sistema. Ainda lembramos que variar o campo elétrico radial implica em descargas diferentes.

Resta-nos analisar o caso em que U=1. Embora este seja um ponto particular ao sistema, ele não representou algo de tão importante no transporte das partículas como foi para U=0. Mas fizemos também a simulação para este caso e, dos resultados obtidos, podemos destacar que U=1 é a interface onde deixam de existir as ilhas para se tornarem apenas linhas abertas.

Assim apresentamos os principais fenômenos encontrados para este modelo de ondas de deriva, ressaltando a importância da segunda onda para a estocasticidade do sistema, e a relação entre o coeficiente de difusão e o parâmetro de confinamento para uma determinada freqüência.

Esta sucessiva apresentação de mapas visa identificar e ilustrar os principais fenômenos que ocorrem na descrição do plasma pelo modelo das ondas de deriva. Identificamos barreiras no transporte radial e analisamos o comportamento coletivo das partículas através do cálculo do coeficiente de difusão.

No próximo capítulo, faremos uma aplicação deste modelo para o tokamak TBR-1.

Capítulo 5

Aplicação ao TBR-1

Neste capítulo aplicamos o modelo de ondas de deriva, estudado nos capítulos anteriores, utilizando parâmetros extraídos experimentalmente do Tokamak TBR-1 e adaptados ao nosso modelo.

Como são muitas as possibilidades para compor a aplicação, principalmente porque em um tokamak existem várias ondas e não apenas duas, procuramos, dentro dos limites do modelo, obter o coeficiente de difusão para quatro casos que determinamos como relevantes. Para isso escolhemos alguns valores possíveis para o parâmetro de confinamento U.

Tendo como referência o parâmetro de confinamento U, iniciamos o estudo com U=0, passando depois para o caso em que U é determinado pela velocidade média das ondas de deriva. Analisamos quando o valor do parâmetro U é um pouco diferente de zero, e também calculamos para U=0 com diferentes freqüências da segunda onda, mantendo a velocidade de fase constante.

5.1 Parâmetro de confinamento U = 0

Depois de ter estudado o modelo em suas principais características, o passo seguinte foi procurar verificar sua contribuição para o fenômeno de transporte de partículas. Já é de conhecimento dos físicos de plasma, através de várias investigações experimentais, a presença das ondas de deriva e consequentemente o transporte de partículas na borda do plasma em um tokamak^{16,17,26}. Com base nos dados experimentais obtidos no Tokamak TBR-1 calculamos o coeficiente de difusão para a borda do plasma.

O TBR-1 era um tokamak de pequeno porte, construído no laboratório de Física de Plasmas do Instituto de Física da USP, com uma câmara de secção transversal circular, tendo como principais características o raio maior R de 0,30 m, o raio do vaso r_{ν} de 0,11m, o raio

do plasma r_0 de 0,08 m e campo magnético toroidal B_0 de aproximadamente 0,4 T. Os dados usados para a simulação numérica deste trabalho provêm do trabalho experimental da tese de doutorado realizado por Raul M. de Castro, utilizando sondas eletrostáticas¹¹.

Existem vários fenômenos em um tokamak que contribuem para o transporte radial das partículas, sendo que cada um tem seu respectivo modelo para descreve-lo. Queremos saber com que parcela o modelo para ondas de deriva contribui para o transporte radial de partículas.

Modelos neoclássicos, que tratam da difusão em plasmas em tokamaks, apresentam geralmente uma discordância com os valores medidos experimentalmente em um fator de 100 vezes menor^{1,17}.

Inicialmente, resolvemos adotar os parâmetros com os quais fosse possível obter o valor máximo para o coeficiente de difusão.

No capítulo anterior, verificamos que o máximo da difusão ocorre quando o parâmetro de confinamento é igual a zero (U=0) e este valor ocorre quando o numerador da equação 3.1.4a resulta $a-u_1=0$, isto é, adimensionalmente, o valor do campo elétrico radial deve ser igual à velocidade de fase da primeira onda. Neste caso, devido a normalização, a velocidade de deriva é igual ao parâmetro a. Portanto, para obtermos o parâmetro de confinamento igual a zero, supusemos que a velocidade de fase da primeira onda é a mesma da velocidade de deriva do centro de guia. Isto nos leva ao parâmetro U=0.

Como o campo elétrico é perpendicular ao campo magnético, a velocidade de deriva do equilíbrio é escrita como:

$$v_0 = \left| \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B_0^2} \right| = \frac{E_0}{B_0}$$

Na referência 31, foi determinado o perfil radial do potencial elétrico na borda do plasma e estimado o campo elétrico radial E_0 em 3000 V/m. Também conhecemos o raio do plasma $r_0=0.08\,m$ e o campo magnético toroidal $B_0=0.4\,T$.

De posse destes valores pudemos determinar os outros parâmetros característicos como a velocidade de deriva v_0 e o tempo característico t_0 do plasma.

Assim sendo temos que:

$$v_0 = \frac{E_0}{B_0} = \frac{3000 \, V/m}{0.4 \, T} = 7500 \, m/s ,$$

$$t_0 = \frac{r_0}{v_0} = \frac{0.08 \, m}{7500 \, m/s} = 1,067 \cdot 10^{-5} \, s ,$$

Devemos observar que a velocidade característica v_0 , para nosso caso em particular, é a velocidade de deriva do equilíbrio.

No apêndice B, apresentamos, na figura B1, o gráfico da potência espectral para as flutuações do potencial do plasma em função da freqüência f e, na figura B2, o gráfico da função espectral em função do número de onda k. Estes gráficos foram obtidos a partir de medidas experimentais são encontrados na tese de doutorado de Raul M. Castro, IFUSP $(1996)^{31}$. O valor máximo para a potência espectral lido no gráfico se encontra aproximadamente no valor de 30 kHz para a freqüência.

Escolhemos a frequência da primeira onda como $f_1 = 30 kHz$, e a velocidade de fase da primeira onda igual a velocidade de deriva, $u_1 = v_0$.

Com a frequência $f_1 = 30kHz$ e $u_1 = 7500 \frac{m}{s}$ determinamos o número de onda na direção poloidal: $k_{y1} = \frac{f_1}{u_1} = 4 \, m^{-1}$, valor que, comparado ao gráfico da figura B2, encontra-se próximo ao valor máximo medido experimentalmente. Este resultado é importante, pois confirma que as escolhas da frequência e da velocidade de fase para a primeira onda são valores coerentes dentre os possíveis encontrados experimentalmente.

A amplitude da primeira onda é determinada pela amplitude das flutuações do potencial elétrico e, para isso, tomamos como referência o resultado das flutuações do potencial, cuja amplitude média é cerca de 0,2 da amplitude do potencial de equilíbrio. Assim, com um potencial linear de 240V para a borda do plasma, a amplitude da primeira onda foi determinada em 48V.

O próximo passo foi determinar características das componentes dos termos radiais.

Pelos dados experimentais obtidos através de sondas eletrostáticas não foi possível determinar, para o TBR-1, a freqüência das ondas na direção radial³¹. Em pesquisa de artigos experimentais, encontramos que tanto o número de onda como a freqüência radial são difíceis de serem determinados, o valor médio se encontra próximo de zero (comprimento de onda grande) e o desvio quadrático médio das medidas é muito grande permitindo, deste modo, uma livre escolha para os valores das componentes radiais, desde que estejam na mesma ordem de grandeza das componentes poloidais¹.

Assim, supomos que a onda na direção radial é estacionária e está em seu modo fundamental de oscilação com comprimento de onda igual ao dobro do raio do plasma.

Assim sendo, calculamos o número de onda radial da primeira onda k_{x1} . Destacamos que neste capítulo, as variáveis com a linha (') são adimensionais.

$$\lambda = 2r_0$$
 e, portanto, $k_{x1} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{0.16} \approx 39.3 \frac{rad}{m}$

já que

$$k'_{x1} = k_x r_0 \implies k'_{x1} \cong 3$$

Deste modo, baseando-se nos parâmetros escolhidos no capítulo 4, escolhemos a seguinte relação entre os números de onda: $k'_{y2} = 1.5 \, k'_{y1}$ e $k'_{x2} = \sqrt{3} \, k'_{x1}$.

A relação entre k'_{y1} e k'_{y2} foi escolhida desta maneira para que as ondas tivessem velocidades de fase diferentes. Isto porque se as velocidades de fase das duas ondas fossem iguais, o argumento no coseno da segunda onda em 4.1.2 seria independente do tempo e, portanto, esta seria estacionária em relação a primeira onda, tornando o sistema integrável.

Para a frequência da segunda onda escolhemos $f_2 = 18k\,Hz$; é um valor próximo da metade da frequência da primeira onda. Como o espectro é contínuo, poderíamos ter escolhido outros valores, inclusive se seguíssemos o critério do capítulo anterior (a frequência para a segunda onda com o mesmo valor da primeira), mas, para o resultado numérico, achamos mais interessante explorar outros valores.

No capítulo anterior encontramos a condição em que obtínhamos o máximo do coeficiente de difusão, que acontece quando o parâmetro de confinamento U é zero e quando a amplitude da segunda onda é de 30% do valor da primeira onda, ou seja, $A_2/A_1=0.3$. Mas

sabe-se, a partir de dados experimentais⁹, que o regime na borda do plasma é turbulento. Entretanto, comparando os mapas obtidos para $A_2/A_1=0,3$ (Figura 4.3) e para $A_2/A_1=0,8$ (Figura 4.4), notamos que as linhas de fluxo parecem mais destruídas no último caso. Portanto achamos conveniente associar essa destruição à turbulência observada experimentalmente e escolhemos $A_2/A_1=0,8$, para depois experimentar diversos tipos de amplitudes e verificar qual a ordem de grandeza obtida numericamente que mais se aproxima do resultado experimental.

De posse de todos os parâmetros físicos para o sistema, o passo seguinte foi convertêlos em unidades adimensionais utilizando os parâmetros de referência descritos anteriormente, para que fosse possível executar o cálculo numérico.

Assim sendo, apresentamos na tabela 5.1 os seguintes valores adimensionais:

	Primeira onda $i = 1$	Segunda onda $i = 2$
Freqüência angular ω_i'	2,0	1,2
Número de onda: k'_{xi}	3,0	5,2
Número de onda: k'_{yi}	2,0	3,0

Tabela 5.1 – Parâmetros adimensionais usados para a simulação numérica do TBR-1

Temos também para o campo elétrico $a=1\,$ e que para a amplitude da primeira onda $A_1=0,2\,$.

A distância x correspondente ao intervalo radial da borda do plasma medido experimentalmente, que é de 0,06 até 0,08m. Fazendo a mudança para as variáveis adimensionais, temos então que os pontos iniciais escolhidos, para a simulação numérica, estão correspondentemente no intervalo $x' \in [0,75;1]$.

Na aproximação geométrica do sistema de cilíndrica para plana, conforme apresentamos no capítulo 2, levamos em consideração que a espessura da borda do plasma é muito fina, e isto significa que o raio interno do anel tem o mesmo comprimento que o raio externo. O perímetro do anel considerado para a borda do plasma é $y = 2\pi r_0$, onde r_0 é o raio do plasma. Fazendo a mudança de y para a forma adimensional, temos que, da expressão $y' = y/r_0$, o intervalo a ser usado para a variável (poloidal) é $y' \in [0, 2\pi]$.

No mais, integramos as equações diferenciais no intervalo $t' \in [0, 2\pi \cdot 10^3]$, usamos para o erro para o integrador o valor $\varepsilon = 10^{-8}$, a grade de pontos iniciais formada por 108 pontos e o período para o mapa estroboscópico de 2π .

Aumentamos o número de pontos iniciais para que fosse reduzido um eventual espalhamento dos pontos nos gráficos do desvio quadrático médio e do coeficiente de difusão, e para que pudéssemos ter uma melhor distribuição dos pontos no espaço de fase, evitando dar preferência a um determinado fenômeno.

De posse das constantes para a integração numérica, iniciamos com a configuração das ilhas no espaço de físico, tomando então $A_2/A_1=0$. Isto equivale à situação em que o plasma está confinado na ausência de turbulência.

Podemos ver o aspecto das ilhas no mapa da figura 5.1.

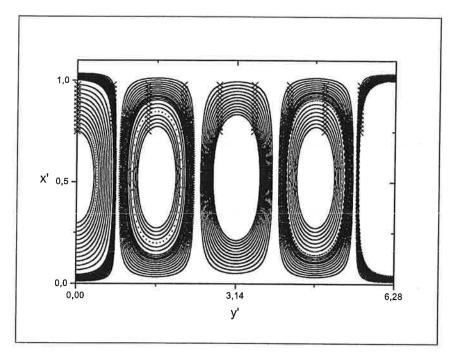


Figura 5.1 – Configuração das ilhas no plasma para $A_2/A_1=0$, U=0

O modelo é válido apenas para a borda do plasma, pois consideramos que esta é fina o suficiente para que a descrição cartesiana pudesse ser aplicada, e apesar das condições iniciais estarem na borda, observamos que as ilhas ocuparam todo o plasma. Isto aconteceu devido à escolha dos parâmetros para a simulação numérica, principalmente do número de onda radial. O importante a ser avaliado por este mapa é o fato dele apresentar, em uma situação de

equilíbrio, a possibilidade de um movimento convectivo das partículas da borda para o centro e vice-versa, o que não é verificado experimentalmente, e isto é uma consequência decorrente das aproximações efetuadas na construção do modelo. Mesmo assim, conforme veremos a seguir, o modelo é importante pois, efetuados os cálculos do coeficiente de difusão, verificamos a possibilidade de associar o caos no espaço de fase à turbulência na borda do plasma.

De certo modo, a escolha dos pontos iniciais privilegiou as órbitas que estão mais próximas da separatriz. As poucas órbitas que estão perto dos pontos elípticos contribuirão de maneira menos significativa ao cálculo do coeficiente de difusão, o que será observado no gráfico do desvio quadrático médio com pouco espalhamento dos pontos e um número reduzido de oscilações.

Adicionada a segunda onda, apresentamos na figura 5.2, como primeiro resultado, o gráfico do desvio quadrático médio para o caso em que $A_2/A_1=0.8$.

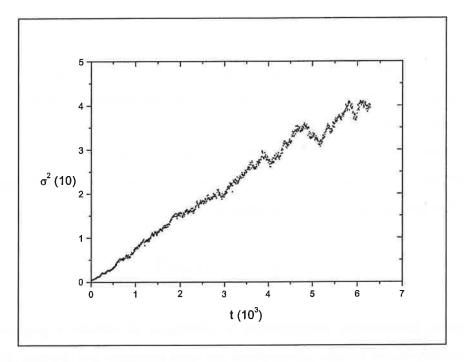


Figura 5.2 – Desvio quadrático médio para $\left.A_{2}\left/A_{1}\right.=0.8\right.$ com $\left.U=0\right.$

O desvio quadrático médio seguiu aproximadamente uma reta, apresentando pequenas flutuações conforme descrevemos no parágrafo anterior, não ocorrendo qualquer alteração que pudesse ser caracterizada como uma anomalia.

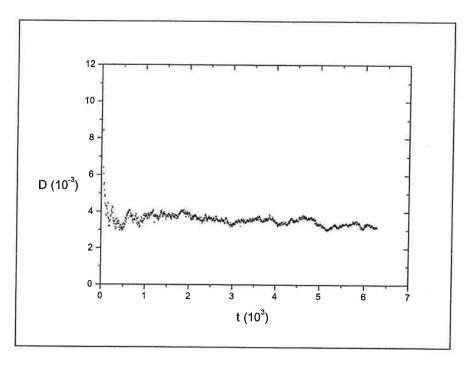


Figura 5.3 – Gráfico do coeficiente de difusão temporal para $\,A_2\,/A_1=0.8\,$ com $\,U=0$.

Assim sendo, passamos a examinar o gráfico do coeficiente de difusão.

Na figura 5.3 mostramos o gráfico do coeficiente de difusão em função do tempo. Observamos que os pontos que compõem a curva apresentam pequenas flutuações, mas preservou o caráter assintótico do gráfico com o aumento do tempo.

De acordo com a equação 2.4.7, calculamos o coeficiente de difusão para o caso adimensional em que $A_2/A_1=0.8$, cujo resultado é:

$$< D_x' > = 3.3 \times 10^{-3}$$

Conforme descrevemos anteriormente, o coeficiente de difusão é proporcional ao produto do coeficiente de difusão adimensional por uma constante que depende do raio do plasma, do campo magnético toroidal e do campo elétrico radial. Portanto, da equação 2.4.6, obtemos

$$< D_x > = \frac{r_0 E_0}{B_0} < D_x' >$$

Como

$$\frac{r_0 E_0}{B_0} = \frac{0.08 \cdot 3000}{0.4} = 600 \, \text{m}^2 / \text{s} ,$$

então o coeficiente de difusão obtido numericamente tem o seguinte valor

$$< D_x > \cong 2.0 \ m^2 / s$$

O valor calculado experimentalmente³¹ é $< D_E >= 0.5 \, m^2 / _{S}$, portanto, quatro vezes menor que o valor calculado com o modelo Hamiltoniano para ondas de deriva.

Mesmo levando em conta as aproximações feitas, este resultado é expressivo, pois cálculos utilizando a teoria neoclássica apresentam valores da ordem de 10⁻² do valor experimental.

Na tabela 5.2, mostramos a variação do coeficiente de difusão em relação à razão da amplitude da segunda onda com a da primeira.

A ₂ /A ₁	< D' >	< D > [m ² /s]
0,1	0,0018	1,1
0,2	0,0035	2,1
0,3	0,0043	2,6
0,4	0,0035	2,1
0,5	0,0031	1,8
0,6	0,0036	2,2
0,7	0,0029	1,8
0,8	0,0033	2,0
0,9	0,0034	2,0
1	0,0026	1,6

Tabela 5.2 - Tabela do coeficiente de difusão em função das amplitudes das ondas

Podemos notar que existem outros valores de A_2 que levam o coeficiente de difusão mais próximo do valor experimental e, mais uma vez, temos que o coeficiente de difusão não cresce monotonicamente com o aumento da amplitude da segunda onda.

Na figura 5.4 apresentamos graficamente os dados da tabela 5.2.

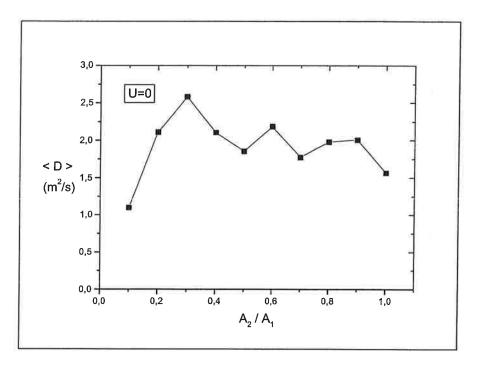


Figura 5.4 – Coeficiente de difusão em função de $\left.A_2\left/A_1\right.$.

Verificamos que o máximo no coeficiente de difusão aparece quando $A_2/A_1=0,3$, reproduzindo o resultado obtido no capítulo 4, mas com a diferença de que o valor não é muito maior do que os outros.

Também podemos ver, ainda que sejam de menor intensidade, pequenos picos em $A_2/A_1=0.6$ e $A_2/A_1=0.9$. Este último pico não foi observado no gráfico da figura 4.19.

Mesmo com critérios limitados para a reprodução dos parâmetros experimentais, e com a ausência de uma geometria mais condizente com o tokamak para escrever as equações de movimento, os resultado foi de certo modo muito interessante.

5.2 Velocidade média das ondas de deriva

Neste item apresentamos outra forma para escolher o parâmetro de confinamento U.

Nos artigos experimentais sobre a turbulência no tokamak TBR- $1^{10,11,31}$ é apresentado o cálculo do valor médio da velocidade de fase das ondas medidas \overline{v}_f . Podemos, baseados neste valor, determinar o coeficiente de difusão supondo que a média da velocidade de fase corresponde à velocidade de fase da primeira onda.

No apêndice B encontramos, na figura B3, que em $r=7.1~cm \to \frac{r}{r_0} \approx 0.9~$, então $\overline{v}_f \approx 1~\frac{km}{s} = 1000~\frac{m}{s}~.$

O parâmetro de confinamento foi então calculado da seguinte forma:

$$U = \frac{a' - v'_f}{A'k'_{x1}} = \frac{1 - \frac{\overline{v}_f}{v_0}}{A'k'_{x1}} \cong 1,4.$$

Este valor do parâmetro de confinamento corresponde ao espaço de fase com linhas de fluxo abertas conforme mostramos nas figuras 3.1 e 4.26 dos capítulos anteriores.

Mantivemos a frequência da primeira onda em 30kHz, que calculada com a velocidade de fase escolhida, resultou em um número de onda $k_{y1} \cong 30~m^{-1}$, valor que também pertence ao gráfico experimental da potência espectral em função do número de onda.

Tomamos o cuidado, quando calculamos o número de onda, para que este fosse um valor pertencente às medidas experimentais, por isso verificamos uma consistência com os valores do gráfico da potência espectral em função do número de onda.

Os valores para o campo elétrico e para a amplitude da primeira onda foram os mesmos, respectivamente 1 e 0,2, conforme determinamos na seção anterior, e a razão entre as amplitudes foi também a mesma; $A_2/A_1=0.8$.

Preservando o critério escolhido para as constantes dos cálculos efetuados na seção anterior, temos então os seguintes valores adimensionais apresentados na tabela 5.3.

	Primeira onda $i = 1$	Segunda onda $i = 2$
Freqüência angular ω_i'	2,0	1,2
Número de onda radial: k'_{xi}	3,0	5,2
Número de onda angular: k'_{yi}	15,0	22,5

Tabela 5.3 – Parâmetros adimensionais usados para a simulação numérica do TBR-1

Mantivemos o valor da freqüência da segunda onda em 18kHz, pois esta serve para perturbar o espaço de fase.

De posse dos parâmetros, calculamos o coeficiente de difusão para o caso em que $A_2/A_1=0.8$ e obtivemos o seguinte resultado:

$$< D'> = 4.2 \times 10^{-6}$$

o que corresponde a

$$< D_x > = 2.5 \times 10^{-3} \ m^2 /_S$$

ou seja, um valor 200 vezes menor que o experimental.

Na figura 5.5 apresentamos a configuração do espaço de fase.

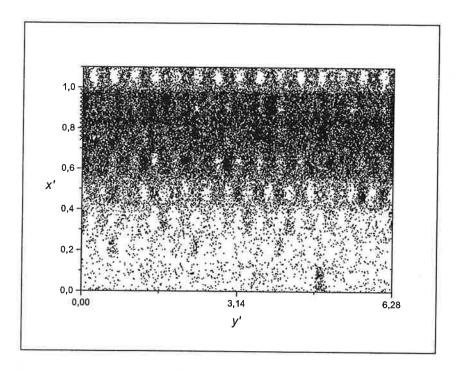


Figura 5.5 – Espaço de fase para a razão das amplitudes das ondas dada por $\,A_2/A_1=0.8\,,\,U\cong1.4\,$

Conforme foi mencionado no capítulo 4, com a razão entre as amplitudes em 0,8 para o parâmetro de confinamento |U|>1, as linhas de fluxo do espaço de fase encontram-se destruídas. Destacamos para o gráfico do TBR-1 que o caos no espaço de fase não se limitou à região onde estavam os pontos iniciais, em vez disto, parte dos pontos alcançaram valores de x' maiores que um, o que significa que as partículas analisadas foram em direção à parede do vaso. Observamos também que um grande número de partículas foram em direção ao centro do plasma, correspondendo a valores radiais de x' menores que 0,75.

Este movimento em direção ao centro do plasma era, de certo modo, esperado, pois conforme vimos na figura 5.1, as linhas de fluxo apresentavam um movimento convectivo.

O resultado obtido nesta seção representa uma das possibilidades, dentre outras com o mesmo parâmetro de confinamento, pois o coeficiente de difusão depende da segunda onda escolhida para a perturbação.

Na seção seguinte, faremos um estudo da influência da segunda onda no cálculo do coeficiente de difusão.

5.3 Variando a freqüência da segunda onda

Também estivemos interessados em conhecer a dependência do coeficiente de difusão em função da freqüência da segunda onda. Este cálculo é importante para verificar se existem ondas que contribuem mais ou menos para o transporte radial das partículas.

Mantivemos como frequência da primeira onda o valor de pico da função espectral, cujo valor era de aproximadamente $f_1 = 30kHz$ e com o parâmetro de confinamento em U=0. A velocidade de fase da segunda onda também não foi alterada, permanecendo em 3000 $\frac{m}{s}$, ou seja, v'=0,4, e desta maneira a variação na frequência implicou também na variação do número de onda angular.

Outro detalhe importante foi que mantivemos o critério para o cálculo dos números de onda radiais k'_{x1} e k'_{x2} . Deste modo, os valores para as constantes foram as seguintes:

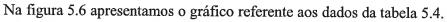
$$\omega'_1 = 2$$
, $k'_{y1} = 2$, $k'_{x1} = 3$, $k'_{x2} = 5.2$.

A freqüência da segunda onda variou de 9kHz até 48kHz aproximadamente em intervalos de 3kHz. O acréscimo escolhido para a freqüência é muito grande se comparado às várias freqüências que existem no plasma, mas o interesse nesta seção é o de verificar a influência da segunda no coeficiente de difusão. A razão entre as amplitudes escolhida foi $A_2/A_1=0.8$ pelo mesmo motivo visto na primeira seção.

Na tabela 5.4 são apresentados os valores dos coeficientes de difusão em função da freqüência da segunda onda ω_2' , assim como os respectivos números de onda.

ω_2'	k'_{y2}	< D > [m²/s]
0,6	1,5	2,6
0,8	2,0	2,5
1,0	2,5	1,8
1,2	3,0	2,0
1,4	3,5	2,2
1,6	4,0	2,3
1,8	4,5	2,0
2,0	5,0	2,0
2,2	5,5	1,8
2,4	6,0	1,5
2,6	6,5	1,3
2,8	7,0	0,9
3,0	7,5	0,7
3,2	8,0	0,8

Tabela 5.4 - Tabela do coeficiente de difusão em função da frequência da segunda onda



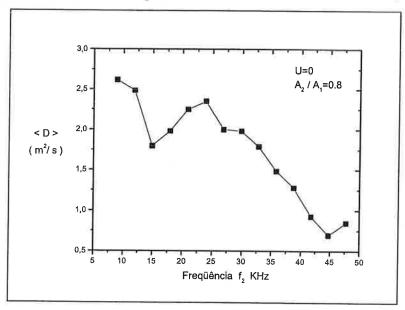


Figura 5.6 – Gráfico do coeficiente de difusão em função da freqüência da segunda onda. Freqüência da primeira onda $f_1=30 kHz$.

Como podemos observar, o coeficiente de difusão é maior para as frequências mais baixas e menor para as mais altas. A média dos valores da tabela 2 (obtida considerando as segundas ondas com mesma amplitude) é maior que o valor experimental $(0.5 m^2/s)$:

$$< D_x > = 1.7 \, \frac{m^2}{s}$$

Esse valor médio é adequado para comparar com o valor experimental por dispensar a escolha arbitrária da freqüência da segunda onda.

5.4 Parâmetro de confinamento próximo de zero

Na seção 5.1 calculamos o coeficiente de difusão para U=0. Nesta seção, como último caso estudado, consideramos a possibilidade do parâmetro de confinamento ser próximo de zero.

Para isto supusemos que a velocidade de fase da primeira onda é um pouco menor que e velocidade de deriva devido ao campo elétrico. Supusemos que U=0,17 e assim calculamos a velocidade de fase da primeira onda usando o numerador da expressão 3.1.4a e os valores estabelecidos para A' e k'_{x1} na seção 5.1, ou seja,

$$A'k'_{x1}U = 0,1 = 1 - u'_1 = 1 - \frac{u_1}{v_0} \Rightarrow u_1 = 0,9 v_0 = 6750 \frac{m}{s}$$

A frequência da primeira onda foi mantida a mesma das outras seções com 30kHz e mantivemos o critério para os números de onda radiais k'_{x1} e k'_{x2} , assim como os números de onda k'_{y1} e k'_{y2} .

Na tabela 5.5 mostramos os valores das constantes adimensionais calculadas.

	Primeira onda $i = 1$	Segunda onda $i = 2$
Freqüência angular ω_i'	2,0	1,2
Número de onda: k'_{xi}	3,0	5,2
Número de onda: k'_{yi}	2,22	3,33

Tabela 5.5 – Parâmetros adimensionais usados para a simulação numérica do TBR-1

Após o cálculo numérico obtivemos $< D' > = 2.6 \times 10^{-3}$, o que corresponde a

$$< D_x > = 1.6 \, \frac{m^2}{s}$$

Este resultado é mais próximo do valor experimental se comparado aos resultados obtidos nas outras seções, mas este pode apenas representar a parcela com que esta onda de deriva contribui para o transporte radial dos centros de guia.

Na figura abaixo, apresentamos o espaço de fase para o TBR-1.

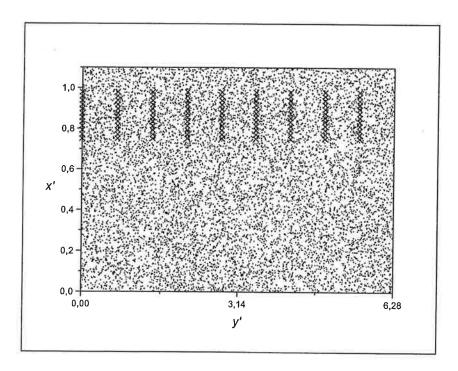


Figura 5.7 - Espaço de fase para a razão das amplitudes das ondas dada por $\,A_{2}\,/A_{1}=0.8$, $\,U=0.17$.

O espaço de fase apresenta caos generalizado. Devemos interpretar a figura 5.7 como uma configuração em que as partículas estão livres para percorrer todo o espaço, entretanto como o modelo não é adequado para descrever as linhas de fluxo no interior do plasma, as órbitas na região em que x' < 0.75 não são relevantes nesta análise.

Capítulo 6

Discussão,

Conclusões e

Desenvolvimento Futuro

Neste capítulo discutimos os principais resultados obtidos com o modelo de ondas de deriva e apontamos algumas das diretrizes que serão seguidas para melhorar o sistema dinâmico considerado.

6.1 Discussão

Neste trabalho consideramos um modelo para transporte de partículas cuja construção baseou-se no cálculo da velocidade de deriva do centro de guia de uma partícula em movimento, em um campo magnético perpendicular a um campo elétrico uniforme e ao campo elétrico das ondas de deriva¹⁴.

Este sistema passou por simplificações geométricas, de toroidal para cilíndrica e depois para plana, para facilitar o estudo do movimento de deriva^{14,17}.

O potencial da onda eletrostática foi escolhido de modo a apresentar flutuações tanto na direção radial, no qual é estacionário, como na direção poloidal, que se propaga com o tempo, e as equações que descrevem o movimento de deriva dos centros de guia foram escritas numa formulação Hamiltoniana¹⁴.

Com estes elementos e utilizando o formalismo Hamiltoniano, estudamos o sistema considerando a existência de uma ou duas ondas.

Nesse tipo de confinamento, a topologia das linhas de fluxo depende do valor do parâmetro de confinamento U determinado pela intensidade do campo elétrico e da velocidade de fase da primeira onda. Deste modo, consideramos, no capítulo 3, três casos distintos para o parâmetro de confinamento U.

Para o sistema perturbado com duas ondas, há trajetórias caóticas que destroem parcialmente o confinamento e são responsáveis pelo transporte na direção radial. Neste caso, calculamos numericamente o sistema de equações diferenciais e apresentamos os resultados nos mapas estroboscópico, verificamos que o sistema é caótico para uma dada razão entre as amplitudes das duas ondas e calculamos o coeficiente de difusão.

Para |U|>1, as linhas de fluxo são abertas e seguem na direção poloidal. Neste caso, o movimento do centros de guia é pouco sensível às perturbações, e esse efeito aumenta com o valor de U. Este é o tipo de configuração que, estudada no capítulo 4, favorece a uma maior condição de confinamento do plasma.

Notamos, pelo cálculo do parâmetro de confinamento realizado no capítulo 3, que existem duas possibilidades para obter grandes valores de U. A primeira seria produzir uma descarga no tokamak de modo a gerar, no máximo da potência espectral, uma onda de deriva com freqüência cuja velocidade de fase seja próxima à velocidade de deriva do equilíbrio, mas isto é algo difícil de se controlar experimentalmente. A outra maneira seria aumentar o campo elétrico radial a, o que já foi feito experimentalmente mudando do regime de confinamento conhecido como modo L (do inglês low mode) e passando para um regime de melhor confinamento que é conhecido como modo H (high mode) 24,25 .

No caso 0 < |U| < 1, encontramos um regime em que o confinamento é mais suscetível às flutuações eletrostáticas. Os mapas dos capítulos 3 e 4 apresentaram linhas de fluxo abertas na direção y (poloidal) e outras fechadas indicando o aparecimento de pontos elípticos. Neste tipo de confinamento temos órbitas que percorrem a direção poloidal e outras que ficam presas nas ilhas. No capítulo 4, mostramos que o sistema, nestas condições, é mais sensível à perturbação no potencial do que o caso anterior (|U| > 1), conforme observamos ao comparar os valores do coeficiente de difusão no gráfico da figura 4.30.

Com U = 0, encontramos o caso mais peculiar do modelo. Sem a presença da segunda onda, o espaço de fase é caracterizado por um número grande de ilhas e linhas de fluxo

confinadas tanto na direção y (poloidal) como na direção x (radial). Entretanto, a separatriz atinge todo o espaço de fase, contribuindo para o transporte efetivo das partículas.

Adicionada a perturbação, encontramos um sistema com transporte mas que não cresce monotonicamente com o aumento da amplitude da segunda onda ao longo da separatriz.

Apresentamos ainda a dependência do coeficiente de difusão com o parâmetro de confinamento e verificamos que o transporte das partículas é maior quando U=0.

Em seguida, aplicamos o modelo para estudar o transporte no tokamak TBR-1 e comparamos os resultados numéricos do coeficiente de difusão cujo valor experimental é:

$$D_E = 0.5 \ m^2 / s$$

Para U = 0, encontramos para o TBR-1 o seguinte valor para o coeficiente de difusão:

$$< D_x > = 2.0 \, \frac{m^2}{s}$$

que é quatro vezes maior que o valor experimental.

Fizemos também o teste usando o parâmetro de confinamento diferente de zero, U = 0,17, e obtivemos para o TBR-1 o seguinte resultado para o coeficiente de difusão.

$$< D_x > = 1.6 \, \frac{m^2}{s}$$

Estes resultados numéricos indicam que, apesar das aproximações realizadas, o modelo representa uma situação física próxima da experimental.

Incluímos, na aplicação ao TBR-1, o estudo de configurações em que a velocidade de fase da primeira onda corresponde à velocidade de fase média das ondas no plasma e $U\cong 1,4$. Observamos que, neste caso, o coeficiente de difusão ficou 200 vezes menor que o valor experimental, indicando que o valor médio da velocidade de fase não é uma boa aproximação a ser considerada.

Para a análise seguinte, voltamos ao caso em que o parâmetro de confinamento é zero, e estruturamos os parâmetros para verificar a dependência do coeficiente de difusão em função da freqüência da segunda onda.

O resultado obtido nos mostra que certas freqüências contribuem mais do que outras para o transporte radial das partículas, e que o coeficiente de difusão é menor quanto maior for a freqüência. Observamos que, para a segunda onda com freqüência de 45kHz, temos o valor do coeficiente de difusão $(0.7 \, m^2/s)$ que mais se aproxima do valor experimental.

Tendo a contribuição de cada onda para o transporte radial, calculamos o coeficiente de difusão médio destas contribuições, cujo valor foi de

$$< D_x > = 1.7 \, \frac{m^2}{s}$$

o que pode ser considerado como um resultado adequado para comparar com o experimental.

Através de experimentos realizados em tokamaks, sabemos que o transporte das partículas é maior na direção poloidal. Esta característica aparece em nosso modelo de ondas de deriva para os casos em que o parâmetro de confinamento é maior que zero.

Conforme avançamos levando em consideração novas hipóteses, o valor do coeficiente de difusão foi se aproximando cada vez mais do resultado experimental. O objetivo não foi obter exatamente o resultado experimental, mas sim usá-lo como referência para verificar a validade do modelo e associar o caos no espaço de fase à turbulência na borda do plasma.

Assim, concluímos que a deriva dos centros de guia das partículas do plasma pode explicar o transporte observável no TBR-1.

6.2 Conclusões

A análise do modelo Hamiltoniano para o transporte causado por ondas de deriva mostrou que este sistema é capaz de descrever aspectos da turbulência na borda do plasma em confinamento e, efetuados os cálculos em simulação numérica, este procedimento mostrou-se promissor para determinar o valor do coeficiente de difusão.

Através dos mapas e de seus respectivos gráficos para o coeficiente de difusão temporal, obtivemos relações entre as instabilidades das órbitas e o transporte de partículas na direção radial e poloidal.

Verificamos a dependência do transporte radial com a frequência e, para um dado potencial elétrico na direção radial, definimos o parâmetro de confinamento U que estabelece condições para caracterizar o tipo de confinamento.

6.3 Desenvolvimento Futuro

Neste trabalho calculamos o coeficiente de difusão para diversas possibilidades dentro dos limites impostos pelos dados experimentais.

Dando continuidade ao trabalho, destacamos abaixo os principais tópicos que contribuirão para o aprimoramento do modelo.

Na seção 5.3 calculamos o coeficiente de difusão para diversas freqüências e todas tinham a mesma amplitude para a segunda onda. Observando o gráfico da potência espectral³¹ temos que cada freqüência atua no plasma com intensidade diferente e, portanto, podemos obter o coeficiente de difusão com melhor precisão se a amplitude da segunda onda for proporcional ao valor da potência espectral.

Além disso, para o desenvolvimento do modelo, devemos rescrever as equações no sistema de coordenadas cilíndricas e verificar as diferenças produzidas nos mapas e caracterizar os efeitos.

Podemos ainda verificar o comportamento das órbitas nos mapas quando as freqüências estão muito próximas e com fases diferentes, assim estaríamos estudando os efeitos de batimento das ondas de deriva que podem ocorrer no plasma.

Muitas descargas realizadas em tokamaks não apresentam um potencial elétrico linear na borda, como observado no TBR-1, desta forma o transporte de partículas pode ser também investigado adotando-se outros perfis de potencial.

Em um plasma, encontramos diversas freqüências com diferentes velocidade de fase, número de onda, e amplitudes. Podemos fazer a simulação numérica levando em conta mais de duas ondas com características diferentes entre si.

Apresentamos, no capítulo 4, o desvio quadrático médio como ferramenta para verificar se ocorria o transporte de partículas na direção radial, assumindo que o caos no espaço de fase possa ser descrito estatisticamente por uma distribuição normal. Mas, observando as flutuações no desvio quadrático médio e no coeficiente de difusão temporal, podemos supor que para pequenos intervalos de tempo o transporte pode ser anômalo. Assim, podemos investigar as possibilidades do modelo para ondas de deriva representar este tipo de transporte.

O estudo do transporte de partículas na borda do plasma, através do modelo para ondas de deriva, pode fornecer informações que, juntamente com dados experimentais, conduzam a condições otimizadas na borda, com fluxos mínimos de partículas para fora do plasma.

Apêndice A

Cálculo Numérico

Para que este trabalho fosse desenvolvido, o cálculo numérico foi sem dúvida uma ferramenta de grande importância para obter os resultados e testar o modelo. Por este motivo, incluo este apêndice para registrar a técnica utilizada e assim tornar fácil a reprodução dos resultados e evidenciar os limites técnicos da simulação numérica.

A reprodutibilidade dos resultados oriundos de cálculos numéricos depende de alguns fatores. É comum encontrar diferenças nos cálculos quando trabalhamos com processadores, compiladores e algoritmos diferentes. Tomando este cuidado, fizemos algumas experiências para garantir a confiabilidade dos resultados.

Primeiro foi a escolha do compilador. Desenvolvemos o programa para integrar o sistema de equações diferenciais em Pascal para o compilador Turbo Pascal 6.0 para o sistema operacional Windows 95, para o compilador FreePascal 0.96, para os sistemas operacionais Windows 95 e Linux, e em Fortran 77 para Linux, aplicando o algoritmo de integração conhecido como algoritmo de Bulirsch-Stoer.

Uma imprecisão numérica significativa destruiria o caráter conservativo do sistema Hamiltoniano considerado. Adotando uma precisão no integrador da ordem de 10^{-12} , integramos o mapa da figura 4.1 com o tempo de integração de $3\pi \times 10^3$ e não observamos qualquer desvio nos mapas, todos mantiveram o padrão periódico testado.

Repetimos o teste e encontramos o limite para a precisão do integrador em 10^{-7} , deste modo, para assegurar a confiabilidade nos cálculos sem aumentar o tempo de processamento, adotamos a precisão com 10^{-8} .

As variáveis para o cálculo foram do tipo double, ou seja, variáveis com 16 dígitos significativos.

Quanto ao algoritmo integrador, tínhamos como opções o Runge Kutta 4ª ordem com passo variável e o Bulirsch-Stoer. Estes dois algoritmos foram obtidos da referência 26 e os

aplicamos no problema do oscilador harmônico forçado, construindo um mapa de Poincaré com cada um dos algoritmos. As diferenças entre os mapas foram muito sutis, embora nem todos os pontos apresentaram-se exatamente no mesmo lugar. Porém não houve qualquer alteração no aspecto do mapa como um todo, apresentando o mesmo padrão.

Para o nosso caso das ondas de deriva, apareceu uma pequena diferença nos mapas e nos gráficos do desvio quadrático médio e da difusão temporal, mas quando calculado o coeficiente de difusão, não obtínhamos alterações na ordem de grandeza dos valores, e portanto o aspecto dos gráficos foram preservados.

Adotamos o algoritmo de Bulirsch-Stoer, pois este vem sendo utilizado com comprovada eficiência nos trabalhos do grupo que também realizam pesquisa em sistemas Hamiltonianos conservativos.

Fizemos testes também com o programa Mathematica versão 4 para Linux, pois além de ser um pacote com mais de 10 anos em uso pelos diversos centros acadêmicos, procuramos alternativas para a apresentação de alguns resultados que exigiriam mudanças no programa principal.

Os gráficos foram feitos utilizando o programa Origin na versão 5 para o sistema operacional Windows, a exceção das figuras indicadas no texto.

Apêndice B

Resultados sobre a turbulência eletrostática medida na borda do tokamak TBR-1³¹.

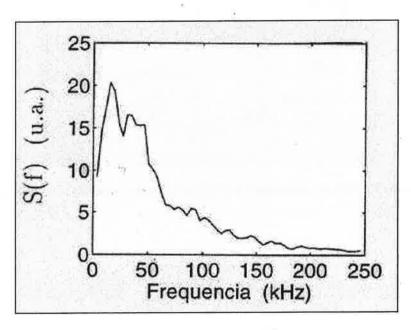


Figura B1 – Gráfico da função espectral em função da freqüência.

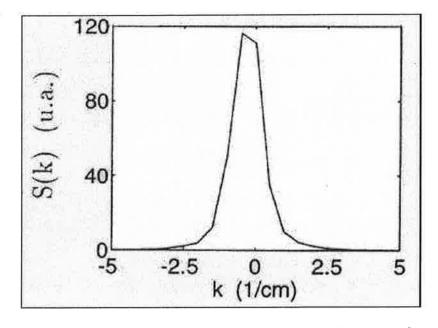


Figura B2 - Gráfico da função espectral em função do número de onda.

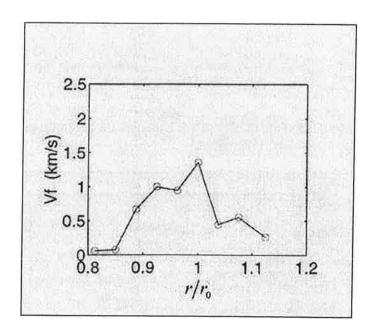


Figura B3 – Gráfico da velocidade média das ondas em função do raio do plasma.

Referências.

- 1. A.J. Wootton, B.A. Carreras, H.Matsumoto, et al., *Fluctuations and Anomalous Transport* in *Tokamaks*, Phys. Fluids B, **2**, 587 (1990).
- 2. D.C. Robinson, *The Present Role of Small Tokamaks*, Plasma Physics and Controlled Fusion, **35**, B91 (1993).
- 3. J.W. Connor, *Pressure-Gradient Turbulent Transport and Collisionless Reconnection*, Plasma Physics and Controlled Fusion, **35**, B293 (1993).
- 4. D. Biskamp, Nonlinear Magnetohydrodynamics, Cambridge (1993).
- 5. R. Pakter, G. Corso, F.B. Rizzato, Particle Acceleration by Large Amplitude Waves Revisited, J. Plasma Phys., 57, 785 (1997).
- 6. C.D. Beidler, Y.I. Kolesnichenko, U.S. Marchenko, H. Wobig, Stochastic Diffusion of Energetic Ions in Optimized Stelletors, Phys. Plasmas, 8, 2731 (2001).
- 7. R.G. Kleva and J.F. Drake, Stochastic $\vec{E} \times \vec{B}$ particle transport, Phys. Fluids, 27, 1686 (1984).
- M.V.A.P. Heller, R.M.Castro, I.L. Caldas, Z.A. Brasílio, R.P. Silva, I.C. Nascimento,
 Correlation between Plasma Edge Electrostatic and Magnetic Oscillations in the Brazilian
 Tokamak TBR, J. Phys. Soc. Jap., 66, 3453 (1997).
- R.M.Castro, M.V.A.P. Heller, R.P. Silva, I.L. Caldas, F.T. DeGasperi, I.C. Nascimento, A Complex Probe for Measurements of Turbulence in the Edge of Magnetically Confined Plasma, Rev. Sci. Instruments, 68, 4418 (1997).
- 10. M.V.A.P. Heller, R.M. Castro, Z.A. Brasilio, I.L. Caldas, R.P. da Silva, *Edge Turbulence Spectrum Alterations Driven by Resonant Fields*, Nuclear Fusion, **35**, pp.59 (1995).
- R.M.Castro, M.V.A.P. Heller, I.L. Caldas, Z.A. Brasílio, R.P. Silva, I.C. Nascimento, Influence of Resonant Magnetic Perturbations on Plasma Edge Turbulence, Physics of Plasmas, 4, 329 (1997).
- 12. A. Lichtenberg, M.A. Lieberman, Regular and Chaotic Motion, Springer (1995).
- 13. F.M. Levinton, M.C. Zarnstirff, S.H. Batha, et al., *Improved Confinement with Reserved Magnetic Shear in TFTTR*, Phys. Rev. Lett **75**, 4417 (1995).

- 14. I. Osipenkov, W. Horton, P.J. Morrison, *Drift Wave Transport Barriers in Shear and Reverse Shear Flows*, a ser publicado. Ver também I. Osipenkov, *Diffusion in Chaotic Systems*, Report IFSR#885, The University of Texas, Austin (2000).
- 15. F.F. Chen, Introduction to Plasma Physics, Plenum Press (1974).
- C.P. Ritz, H. Lin, T.L. Rhodes. and A.J. Wootton, Evidence for Confinement
 Improvement by Velocity Shear Suppression of Edge Turbulence, Physical Review Letters,

 65, 2543 (1990).
- 17. W. Horton, Drift Waves and Transport, Reviews of Modern Physics, 71, 735 (1999).
- 18. J.P. Freiberg, Ideal Magnetohydrodynamics, Plenum Press (1987).
- 19. G. Bateman, MHD Instabilities, MIT Press (1978).
- 20. E.R Weeks and H.L. Swinney, Anomalous Diffusion Resulting from Strongly Asymmetric Random Walks, Physical Review E, 57 (5), 4915 (1998).
- 21. L.A. Artimovich, Tokamak Devices, Nuclear Fusion, 12, 215 (1972).
- 22. B.B. Kadomtsev, *Tokamak Plasma: A complex Physical System*, IOP Publishing Ltd., London (1992).
- 23. W.L. Rowan, C.C. Klepper, C.P. Ritz, R. D. Bengston, A.J. Wootton, *Global Particle Confinament in the TEXAS Experimental Tokamak*, Nuclear Fusion, 27, 1105, (1987).
- 24. H. Lin, Turbulence and Transport Studies in the Edge Plasma of the TEXT Tokakmak, Ph.D. Thesis, Report FRCR #401, The University of Texas, Austin, (1991).
- 25. A. V. Nedospasov, *Edge Turbulence in Tokamaks*, Journal of Nuclear Materials, **90**, 196, (1992).
- 26. Teukolsky, Vetterling and Flannery, Numerical Recipes in C, Cambridge Press (1992).
- 27. U. Frisch, *Turbulence: the Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press (1995).
- 28. H. Aref, Chaos Applied to Fluid Mixing, Pergamon Press (1995).
- 29. J.M. Ottino, *The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport*, Cambridge University Press (1989).
- 30. L.M. Tozawa and L.F. Ziebell, Stochastic diffusion of Ions Due to a Finite Set of Lower Hybrid Waves, Physical Review E, a ser publicado.
- 31. R.M. Castro, *Turbulência Eletrostática e Magnética em Tokamaks*, Tese de doutorado, IF-USP, São Paulo, (1996).