

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Efeito Aharonov-Bohm não-comutativo para partículas relativísticas de spin $1/2$

Carlos Alberto Stechhahn da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Física para a obtenção
do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes (IFUSP) - Orientador
Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IFUSP)
Prof. Dr. Vicente Pleitez (IFT-UNESP)

São Paulo
2005

Agradeço ao criador do Universo e de todos os seres, pela oportunidade de podermos elevar a natureza nossa maior admiração e singelo estudo.

À
*Solange, Raphael e Anita, minha mãe Etelvina,
meu pai Francisco (In Memoriam), familiares e
amigos.*

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes pela orientação e paciência em todos os momentos.
- Aos professores e alunos do Departamento de Física Matemática: Prof. Dr. Adilson José da Silva, pelas sugestões e discussões sobre os vários temas da física, Prof. Dr. Emerson Passos, Prof. Dr. Victor Rivellis e demais professores por suas orientações desde minha graduação no Instituto. Aos alunos Marcelo Pires, Alex Gomes, Fábio, Leonardo (“digníssimo”), C.Molina, Alyson, pelos momentos de diálogo e “dicas” tão importantes.
- Ao professor do IFT, Dr. Vicente Pleitez, por sua orientação em minha iniciação científica em Física da Alta Energia. À professora Zilda Alves Zacarias pelos primeiros passos em “Ciências”.
- Aos amigos da “Perícia” na pessoa do Dr. Marcos Contesini, Manuel, Antonio, Trigo, Zacarias, Iara, Donizete, Leonora, Helvio, Stan, Valter, Vicente, Álvaro, Ivani e demais funcionários do I.C.
- Aos amigos da “Petrobrás”, Mário, Luiz Pedro, Akira, Figlioli, Miltinho, Chiou, Labre, Julio, Carreira, Bruno, Garrie, Carlão, Guerreiro, Lívio;
- Aos amigos “Vigias Portuários”, Jurandir, Clay, Toninho, Cleone, Ivo e Shumack;
- Aos amigos do Cursinho “Arkitas Vestibulares” na pessoa do Major Romão, seu Roberto, Claudir, Valter, José Carlos, Gilberto e Erinaldo;
- Aos amigos do Centro Espírita “João Cabete” na pessoa de Sueli Lopes e do Centro Espírita “Seara do Amor” na pessoa de seu Pérsio e Elino Júnior;
- Aos meus irmãos Benones, Marcelo e Anderson, minha prima Zoraide, Inesany e demais primos, ao cumpadre Toninho e família e aos amigos José Carlos, Angelo e Sérgio, Marta, Eulália e Noemi;

- Aos “gigantes” que estão no plano espiritual: Clotilde, seu Reinaldo, seu Peirão, tia Elza, vó Elza, tia Ines, tio Carlos, Dourival, Nakazone, João “Sunaman”, Lourival, Rui Barbosa e meu pai Francisco.

Estou feliz pelo trabalho realizado e por ter tantos amigos que ainda continuam me iluminando em minha caminhada.

ÍNDICE

1. Introdução.....	8
2. A Quantização por Deformação e o Produto Moyal.....	11
Os sistemas dinâmicos clássicos	12
3. A Mecânica Quântica e o Produto Estrela.....	15
Produto Estrela - Definição e Propriedades.....	15
O Produto Moyal e suas formas.....	17
4. O efeito Aharonov-Bohm comutativo.....	22
Soluções da equação de Dirac para partículas num campo magnético	24
Soluções da equação de Dirac livre em termos das funções de Bessel de primeira espécie.....	25
Soluções da equação de Dirac para partículas no potencial de AB (caso comutativo).....	28
5. A não-comutatividade e o efeito Aharonov-Bohm.....	31
O campo de AB não-comutativo	31
A equação de Dirac no potencial de Aharonov-Bohm....	35
A amplitude invariante na região assintótica.....	37
6. Amplitude invariante para o caso não-comutativo.....	40
Amplitude de transição usando ondas planas	40
Equação de Dirac no potencial de AB (caso não-comutativo)	43
Conclusão	51
Apêndice A.....	53
Apêndice B.....	57
Apêndice C.....	59
Apêndice D.....	62
Apêndice E.....	63
Apêndice F.....	65

ABSTRACT

In this work we study modifications in the Aharonov-Bohm effect for relativistic spin 1/2 particles due the non-commutativity of space in $2 + 1$ dimensions. The corrections for the Aharonov-Bohm potential, originated from the non-commutativity of the underlying space are very singular, producing the appearance of divergences in the perturbative expansion around the free theory. Working with the perturbation around the exact solution of the commutative version of the problem, we determine then, in the small flux approximation, the invariant amplitude, and the corrections to the differential and total cross sections with all divergences eliminated.

RESUMO

Este trabalho destina-se ao estudo de modificações no espalhamento de Aharonov-Bohm para partículas relativísticas com spin $1/2$, devido à não comutatividade do espaço, em $2+1$ dimensões. As correções para o potencial de Aharonov-Bohm, sendo muito singulares, levam, em geral, ao aparecimento de divergências na expansão perturbativa em torno da teoria livre. Usando, então, como ponto de partida a solução exata da versão comutativa, determinamos, na aproximação de fluxo pequeno, a amplitude invariante, seção de choque diferencial e total, com as divergências eliminadas.

Capítulo 1

Introdução

Tem havido recentemente um grande interesse no estudo de teorias no espaço não-comutativo (para artigos de revisão veja [1],[2]). Este interesse tem sua origem na gravitação quântica [3], teoria de cordas [4] ou mesmo na própria base conceitual da teoria dos campos. Espaços não-comutativos, NC , são caracterizados por operadores de posição, \hat{x}_μ , satisfazendo a relação

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde $\theta_{\mu\nu}$ é uma matriz anti-simétrica constante de dimensão (*comprimento*)². A teoria de campo formulada sobre estes espaços, a teoria de campo não-comutativa, é descrita por operadores de campo, os quais são funções de \hat{x}_μ . Em teorias de campo NC o produto puntual dos campos é trocado pelo produto Moyal dos campos

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) = \lim_{y \rightarrow x} e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}} \phi_1(y)\phi_2(x), \quad (1.2)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são duas funções arbitrárias e infinitamente diferenciáveis, dando origem, assim, a teorias não-locais. Da não-localidade inerente na expressão (1.1) decorre várias peculiaridades das teorias não-comutativas. Uma dessas propriedades é a chamada mistura ultravioleta/infravermelho (UV/IR) que consiste na existência de singularidades infravermelhas, decorrentes de divergências ultravioletas, mesmo em teorias sem campos com massa zero [5]. Salvo em algumas teorias supersimétricas [6],[7], a presença da mistura UV/IR leva a destruição dos esquemas perturbativos usuais. S. Minwalla, M. V. Raamsdonk e N. Seiberg em [8] explicam a origem e porque a NC do espaço-tempo leva a uma surpreendente mistura UV/IR.

Um outro aspecto peculiar decorrente da não-localidade é a quebra de unitariedade e causalidade quando $\theta_{0i} \neq 0$ [9].

Neste trabalho estudamos o efeito Aharonov-Bohm [10], na situação não-comutativa, usando uma abordagem perturbativa. O efeito Aharonov-Bohm, AB , na situação comutativa, tem sido amplamente estudado nos últimos anos no contexto tanto da mecânica quântica [11],[12],[13], quanto da teoria quântica de campos [14]. O efeito AB refere-se ao espalhamento de partículas carregadas por um solenóide impenetrável e de raio arbitrariamente pequeno. Apesar do campo magnético \vec{B} ser zero no exterior do solenóide, a equação de Schrödinger depende explicitamente do potencial vetor \vec{A} , o qual é não se anula fora do solenóide. A região exterior ao solenóide é, neste caso, “livre de campos” e não há, portanto, forças clássicas. Em sua originalidade a experiência introduz a possibilidade dos potenciais eletromagnéticos, os quais não tinham significado físico definido, poderem alterar o padrão de interferência em regiões livres de campos eletromagnéticos clássicos. O trabalho original inicia, assim, o estudo dos deslocamentos em padrões de interferência devidos a efeitos de fluxos eletromagnéticos. Embora os primeiros experimentos [15] já demonstravam a previsão do efeito, Bocchieri *et al.* [16] e Roy [17] questionaram a validade do teste, atribuindo a defasagem a um “vazamento” dos campos. Em 1982 Tonomura *et al.* [18] realizaram um experimento usando holografia óptica com pequenos ímas toroidais. O interferômetro holográfico mostrou que a diferença de fase entre dois feixes de elétrons que atravessaram regiões livres de campos magnéticos concordava com a relação fundamental conhecida do efeito Aharonov-Bohm. No entanto, Bocchieri, Linger e Siragusa [19] ainda argumentaram que a defasagem poderia ser devido ao efeito da força de Lorentz sobre um trecho do feixe de elétrons através do íma. A prova experimental definitiva da existência do efeito AB foi dada por Tonomura e colaboradores em 1986 num arranjo toroidal com o fluxo magnético coberto com material supercondutor [20]. O resultado experimental detectou a defasagem relativa prevista e forneceu, assim, evidência conclusiva do efeito Aharonov-Bohm. A análise dos aspectos teóricos e do estudo perturbativo do efeito de espalhamento de AB para o caso de partículas sem spin regidas por equações relativísticas pode ser encontrado em [21].

Na situação não-comutativa o efeito AB para partículas escalares tem sido estudado tanto no contexto da mecânica quântica [22] (vários aspectos da mecânica quântica não-comutativa foram analisados em [24]-[25]-[26]), como da teoria de campos [27]. Estudos anteriores sobre o efeito Aharonov-

Bohm não-comutativo, $ABNC$, mostraram que, contrariamente ao caso comutativo, a seção de choque para o espalhamento de partículas escalares não se anula quando o campo magnético assume certos valores discretos [23]. No contexto da teoria quântica de campos uma correção NC para o espalhamento AB pode ser encontrada no recente trabalho [27]. Nosso interesse neste trabalho é estudar o efeito de espalhamento AB para o caso de partículas relativísticas de spin $1/2$ na situação não-comutativa.

Esta tese está organizada em seis capítulos. No capítulo 2 fazemos a introdução à Quantização por Deformação através do estudo dos sistemas dinâmicos clássicos. O tensor de Poisson α^{ij} é introduzido e uma discussão é feita para o caso de suas componentes serem ou não constantes. A forma dos parênteses de Poisson que trabalharemos, escrita em termos de α^{ij} estará relacionada com os diversos esquemas de quantização. No capítulo 3 é introduzido o produto estrela, com sua definição e propriedades, culminando com o produto Moyal escrito em algumas de suas diferentes formas. No capítulo 4 será estudado o efeito AB comutativo. Discutimos a necessidade de termos uma solução unívoca da equação de Schrödinger para partículas num campo magnético \vec{B} descrito por um potencial vetor \vec{A} . Usando o método de Berry [29] obtemos a solução unívoca da equação de Dirac para partículas relativísticas de spin $1/2$ no potencial de AB . No capítulo 5 é estudado o efeito $ABNC$. Introduzimos o tensor do campo eletromagnético não-comutativo; impondo que não há campo magnético externo ao solenóide escrevemos as componentes do potencial de AB como uma série que depende do parâmetro não-comutativo θ . Calculamos a amplitude de transição usando ondas planas a qual concorda com a expansão do resultado exato. No capítulo 6 é estudado o efeito $ABNC$. Foi feita a integração da Hamiltoniana de interação não-comutativa, H_{int}^{NC} , entre os estados inicial e final (aproximação de Born), agora escrito em termos das funções de Bessel de primeira espécie, e, devido à conservação da energia, expressamos a amplitude invariante como uma série. A obtenção da solução geral, usando o método de ondas girantes, pode ser encontrada em [30]. A aproximação para fluxo pequeno ($\alpha \ll 1$) resultou numa série convergente permitindo, desse modo, o cálculo da seção de choque diferencial e total.

Capítulo 2

A Quantização por Deformação e o Produto Moyal

Existem diversas abordagens para a mecânica quântica, tais como, o formalismo de operadores e as integrais de trajetórias. Usualmente, no formalismo de operadores, o interesse se concentra nos observáveis físicos de um sistema. Como sabemos o estado de um sistema físico é caracterizado por um vetor do espaço de Hilbert, definido a menos de uma fase, sobre o qual atuam os operadores correspondentes à observáveis. A abordagem das integrais de trajetórias, iniciada por Feynman, é amplamente usada hoje em pesquisas na teoria quântica de campos. É, neste contexto, discutida em diferentes níveis de tratamento [37],[38]. A mecânica quântica possui, portanto, leis básicas que governam o mundo microscópico. Uma outra abordagem que apresentaremos é a quantização por deformação. Muitos de seus resultados podem ser obtidos usando-se adaptações das técnicas conhecidas ou abordagens completamente novas. A quantização por deformação se concentra nos conceitos centrais da teoria quântica: a álgebra de observáveis e sua evolução dinâmica. Devido ao fato de ela lidar exclusivamente com funções do espaço de fase sua ruptura com a mecânica clássica é menos drástica.

Num sistema dinâmico clássico o estado é especificado como um ponto no espaço de fase M $2n$ -dimensional; onde M é uma variedade consistindo do conjunto de todos os estados do sistema. Os observáveis, como a função de Hamilton, por exemplo, são funções a valores reais. Em geral, as funções que representam estes observáveis são multiplicadas do modo usual, puntual, formando assim a chamada álgebra clássica comutativa dos observáveis. Na Mecânica de Hamilton os parênteses de Poisson nos fornecem uma maneira

de combinar duas funções sobre o espaço de fase, envolvendo, em vez dos valores das funções num dado ponto no espaço de fase, suas derivadas neste ponto.

Definindo uma variedade de Poisson (M, α) como sendo uma variedade M equipada com um tensor de Poisson α , cujas componentes não são constantes, teremos também um parêntese de Poisson satisfazendo as propriedades de anti-simetria, regra de Leibnitz e identidade de Jacobi conhecidas dos livros textos. Tais variedades fornecerão um modo adequado de descrever sistemas dinâmicos com simetrias. Na verdade, elas são essenciais no tratamento de teorias de campo de gauge da física de partículas elementares. Nos sistemas quânticos os estados não podem ser representados por pontos no espaço de fase devido ao princípio da incerteza de Heisenberg. Devemos, portanto, substituir a álgebra clássica *comutativa* dos observáveis por uma álgebra quântica *não-comutativa* dos observáveis. Na abordagem convencional para a Mecânica Quântica a não-comutatividade é introduzida quando da representação dos observáveis por operadores lineares no espaço de Hilbert. A não-comutatividade é incorporada pela introdução de um produto não-comutativo para funções sobre o espaço de fase, o chamado “produto estrela”, tal que obtemos uma nova álgebra quântica não-comutativa dos observáveis. O primeiro artigo sobre o tema foi publicado por Snyder em 1947. Neste trabalho é sugerida uma estrutura não-comutativa em uma escala de comprimento pequena para obter um corte efetivo ultravioleta [39]. A passagem da álgebra clássica comutativa dos observáveis para a álgebra quântica não-comutativa dos observáveis se dá de modo contínuo. Quando se investiga uma estrutura particular pode-se efetuar modificações e observar quais propriedades são preservadas e quais mudam. Se a modificação afeta a estrutura de modo contínuo dizemos que houve uma deformação. Para aplicações à Mecânica Quântica vamos considerar funções a valores complexos sobre uma variedade de Poisson. O produto estrela ou Moyal $(f * g)$ de duas funções é uma nova função descrita por uma série infinita. Das propriedades dos coeficientes desta série podemos verificar que os mesmos estão relacionados com os parênteses de Poisson.

2.1 Os sistemas dinâmicos clássicos

Quando falamos de um sistema dinâmico clássico, com um número finito de graus de liberdade, pensamos em algo como um sistema de n -partículas

onde as partículas são especificadas em qualquer tempo por suas posições e momentos instantâneos. O estado do sistema é especificado por um ponto no espaço de fase M $2n$ -dimensional. M é uma variedade, e em coordenadas canônicas um ponto x em M é escrito como $x = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$. A energia do sistema é obtida calculando a função de Hamilton no ponto do espaço de fase $x_0 = (q_0, p_0)$ que caracteriza o estado do sistema neste tempo, ou seja, $E = H(q_0, p_0)$. Em geral, funções sobre uma variedade são multiplicadas uma pela outra de modo puntual, i.e., dadas duas funções f e g seu produto fg é uma função

$$(fg)(x) = f(x)g(x). \quad (2.1)$$

Assim, no contexto da Mecânica Clássica os observáveis constroem uma álgebra comutativa chamada *álgebra clássica comutativa dos observáveis*. Na Mecânica Hamiltoniana se considerarmos $f(q, p, t)$ uma variável dinâmica arbitrária, i.e., uma função qualquer das variáveis canônicas e do tempo, teremos:

$$\frac{df}{dt} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial q_k} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (2.2)$$

onde foram usadas as equações de Hamilton. O colchete ou parêntese de Poisson $\{f, g\}$ é definido por:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) \quad (2.3)$$

A expressão acima pode ser escrita numa forma compacta usando-se os símbolos

$$f \overleftarrow{\partial}_{q_i} g = \frac{\partial f}{\partial q_i} g \quad (2.4)$$

e

$$f \overrightarrow{\partial}_{p_i} g = f \frac{\partial g}{\partial p_i} \quad (2.5)$$

e a equação (2.3) torna-se:

$$\{f, g\} = f(\overleftarrow{\partial}_{q_i} \overrightarrow{\partial}_{p_i} - \overleftarrow{\partial}_{p_i} \overrightarrow{\partial}_{q_i})g, \quad (2.6)$$

onde usamos a convenção de Einstein sobre índices repetidos.

Podemos abreviar ainda mais nossa notação usando x para representar pontos do espaço de fase $x = (x_1, \dots, x_{2n})$, e, introduzir o *tensor de Poisson* α^{ij} , onde os índices i, j percorrem de 1 a $2n$. Em coordenadas canônicas α^{ij} é representado pela matriz

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

onde I_n é a matriz identidade $n \times n$. Assim, a equação (2.6) torna-se

$$\{f, g\}(x) = \alpha^{ij} \partial_i f(x) \partial_j g(x), \quad (2.8)$$

com $\partial_i = \partial/\partial x_i$.

A evolução de um sistema dinâmico clássico é dada pelas equações de Hamilton que podem ser expressas em termos dos parênteses de Poisson:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \{q_i, H\} \quad (2.9)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = \{p_i, H\} \quad (2.10)$$

A equação (2.8) pode ser escrita em coordenadas não-canônicas. Nesse caso as componentes de α não precisam ser constantes e podem depender do ponto da variedade no qual elas serão calculadas. Contudo, na mecânica Hamiltoniana é exigido ainda que α seja inversível. Variedades com tensor de Poisson desse tipo são chamadas de variedades simpléticas. A forma do parêntese de Poisson que trabalharemos, como a dada pela expressão (2.8) também satisfaz as propriedades de anti-simetria, regra de Leibnitz e a Identidade de Jacobi conhecidas e estará relacionada com os diversos esquemas de quantização, conforme veremos a seguir.

Capítulo 3

A Mecânica Quântica e o Produto Estrela

A não-comutatividade na Mecânica Quântica surge com a introdução do produto não-comutativo para as funções no espaço de fase. Os observáveis são representados por operadores no espaço de Hilbert que não comutam e as quantidades físicas são os autovalores desses operadores. Vamos considerar funções a valores complexos sobre uma variedade de Poisson em diferentes esquemas de quantização.

3.1 Produto Estrela - Definição e Propriedades

O produto estrela ($f * g$) de duas funções¹ é uma nova função descrita por uma série infinita:

$$f * g = fg + (i\hbar)C_1(f, g) + O(\hbar^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (i\hbar)^n C_n(f, g) \quad (3.1)$$

O primeiro termo da série é o produto ordinário dado por (2.1) e $(i\hbar)$ é o parâmetro de deformação, o qual varia continuamente. Em geral os coeficientes C_n serão tais que teremos uma álgebra não-comutativa formada a partir de funções com esta nova lei de multiplicação, ou seja, uma deformação da álgebra comutativa original a qual usa multiplicação puntual de funções.

¹O produto Moyal de dois campos clássicos ϕ_1 e ϕ_2 se encontra no Apêndice A.

Os coeficientes $C_n(f, g)$ são funções constituídas de derivadas das funções f e g e satisfazem as seguintes propriedades:

1. *Associatividade*

$$\sum_{j+k=n} C_j(C_k(f, g), h) = \sum_{j+k=n} C_j(f, C_k(g, h)) \quad (3.2)$$

A propriedade acima mostra que o produto estrela é associativo, i.e.,

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (3.3)$$

2. *Correspondência clássica*

$$C_0(f, g) = fg \quad (3.4)$$

Ou seja, no $\lim_{\hbar \rightarrow 0} f * g \rightarrow fg$.

3. *Conexão entre os comportamentos clássicos e quânticos*

$$C_1(f, g) - C_1(g, f) = \{f, g\} \quad (3.5)$$

Escolhendo $C_1(f, g)$ anti-simétrico, $C_1(f, g) = -C_1(g, f)$, temos,

$$C_1(f, g) = \frac{1}{2} \alpha^{ij} (\partial_i f) (\partial_j g) \stackrel{(2.8)}{=} \frac{1}{2} \{f, g\} \quad (3.6)$$

Definindo o comutador estrela por este novo produto:

$$[f, g]_* = f * g - g * f \quad (3.7)$$

notando que cada produto, até a primeira ordem em \hbar , é:

$$f * g = fg + (i\hbar)C_1(f, g) \quad (3.8)$$

e

$$g * f = fg + (i\hbar)C_1(g, f) \quad (3.9)$$

Subtraindo (3.8) de (3.9) teremos o princípio da correspondência:

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{1}{i\hbar} [f, g]_* = \{f, g\} \quad (3.10)$$

Para espaços Euclidianos planos, $M = \mathbf{R}^{2n}$, as componentes do tensor de Poisson α^{ij} podem ser tomadas como constantes.

3.2 O Produto Moyal e suas formas

Os coeficientes de ordem mais alta podem ser obtidos a partir da exponenciação de C_1 . Com este procedimento obteremos o produto Moyal:

$$f *_M g = f \exp \left[\left(\frac{i\hbar}{2} \right) \alpha^{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j \right] g \quad (3.11)$$

com α^{ij} o tensor anti-simétrico de Poisson.

3.2.1 Em termos das coordenadas canônicas

O produto Moyal em termos das coordenadas canônicas q e p pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} f *_M g(q, p) &= f(q, p) \exp \left[\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) \right] g(q, p) = \\ &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^{m+n} \frac{(-1)^m}{m!n!} (\partial_p^m \partial_q^n f) (\partial_p^n \partial_q^m g) \end{aligned} \quad (3.12)$$

3.2.2 “Shift Formula”

Uma outra forma bastante útil nos cálculos é aquela na qual as coordenadas e momentos estão transladados de uma quantidade relacionada a derivadas com respeito aos momentos canônicos q e p , ou seja:

$$f *_M g(q, p) = f \left(q + \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_q \right) g(q, p) \quad (3.13)$$

A prova da expressão acima pode ser obtida expandindo a soma que há na primeira das equações em (3.12). Assim:

$$\begin{aligned} f *_M g(q, p) &= f(q, p) \exp \left[\frac{i\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) \right] g(q, p) = fg + \\ &+ \frac{i\hbar}{2} (\partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g) + \left(\frac{i\hbar}{2} \right)^2 \left[\partial_q f (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) \partial_p g - \partial_p f (\overleftarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p \right. \\ &\left. - \overleftarrow{\partial}_p \overrightarrow{\partial}_q) \partial_q g \right] + \dots = fg + \frac{i\hbar}{2} (\partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \left[\partial^2_q f \partial^2_p g - \partial_p \partial_q f \partial_q \partial_p g - \partial_q \partial_p f \partial_p \partial_q g + \partial^2_p f \partial^2_q g \right] + \dots = \\
& = fg + \frac{i\hbar}{2} (\partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g) + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \left[\partial^2_q f \partial^2_p g - 2\partial_p \partial_q f \partial_q \partial_p g + \right. \\
& \left. + \partial^2_p f \partial^2_q g \right] + \dots \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Expandindo o lado direito de (3.13) em série Taylor, temos, para uma função de duas componentes²:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!} \frac{\partial^{(n+m)} f(x, y)}{\partial x^n \partial y^m} \Big|_{(x_0, y_0)} (x - x_0)^n (y - y_0)^m \tag{3.15}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
f *_M g(q, p) &= f\left(q + \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_p, p - \frac{i\hbar}{2} \vec{\partial}_q\right) g(q, p) = \\
&= fg + \frac{i\hbar}{2} \partial_q f \partial_p g - \frac{i\hbar}{2} \partial_p f \partial_q g + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \partial^2_q f \partial^2_p g + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \partial^2_q f \partial^2_p g \\
&- \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \partial_p \partial_q f \partial_q \partial_p g - \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \partial_q \partial_p f \partial_p \partial_q g + \dots = \\
&= fg + \frac{i\hbar}{2} (\partial_q f \partial_p g - \partial_p f \partial_q g) + \left(\frac{i\hbar}{2}\right)^2 \left[\partial^2_q f \partial^2_p g - 2\partial_p \partial_q f \partial_q \partial_p g + \right. \\
&\left. + \partial^2_p f \partial^2_q g \right] + \dots \tag{3.16}
\end{aligned}$$

A igualdade do lado direito das equações (3.14) e (3.16) nos permite identificar (3.13). Para o caso particular de uma função V depender somente da posição teremos que o produto Moyal

$$V(x) *_M \psi(x) = V(x - \tilde{p}/2) \psi(x) \tag{3.17}$$

será equivalente ao produto ordinário com a posição deslocada de $\tilde{p}/2$, onde $\tilde{p} = \theta^{ij} p_j$ e $\theta^{ij} = \theta \epsilon^{ij}$.

²A fórmula de Taylor para uma função de uma variável pode ser escrita como:
 $f(x + a) = e^{a\partial_x} f(x) = (1 + a\partial_x + \dots) f(x)$

3.2.3 Representação Fourier

Podemos escrever ainda o produto Moyal como uma espécie de representação de Fourier. Por sua expressão integral veremos que o conhecimento das funções f e g no espaço de fase inteiro é necessário para determinarmos o valor do produto estrela no ponto $x = (q, p)$. A álgebra comutativa A_0 das funções sobre o \mathbf{R}^2 é formada por funções com a seguinte transformada de Fourier:

$$f(q, p) = \frac{1}{2\pi} \int d\sigma d\tau \tilde{f}(\sigma, \tau) e^{i(\sigma q + \tau p)} \quad (3.18)$$

onde a anti-transformada \tilde{f} é:

$$\tilde{f}(\sigma, \tau) = \int dq_1 dp_1 f(q_1, p_1) e^{-i(\sigma q_1 + \tau p_1)} \quad (3.19)$$

Analogamente para a função g em termos das coordenadas canônicas e introduzindo a definição de produto Moyal na forma dada por (3.12) podemos calcular o produto $(f *_M g)(q, p)$. Usaremos ainda o teorema da convolução o qual, para uma função de duas variáveis pode ser escrito como³:

$$f(\sigma, \tau) * g(\sigma, \tau) = \int_0^\sigma \int_0^\tau d\xi d\eta f(\xi, \eta) g(\sigma - \xi, \tau - \eta) \quad (3.20)$$

Desse modo:

$$\begin{aligned} (f *_M g)(q, p) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\xi d\eta d\sigma d\tau dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 e^{i(q\sigma + p\tau)} f(q_1, p_1) e^{-i(\xi q_1 + \eta p_1)} \times \\ &\times e^{(i\hbar/2)(\overleftarrow{\partial}_{q_1} \overrightarrow{\partial}_{p_2} - \overleftarrow{\partial}_{p_1} \overrightarrow{\partial}_{q_2})} e^{-i[(\sigma - \xi)q_2 + (\tau - \eta)p_2]} g(q_2, p_2) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Efetuando-se as derivadas e rearranjando as exponenciais (σ e τ em evidência):

$$\begin{aligned} (f *_M g)(q, p) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\xi d\eta d\sigma d\tau dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 f(q_1, p_1) g(q_2, p_2) e^{i\sigma(q + \frac{\hbar}{2}\eta - q_2)} \times \\ &\times e^{i\tau(p - \frac{\hbar}{2}\xi - p_2) - i\xi q_1 + i\xi q_2 + i\eta p_2} \end{aligned} \quad (3.22)$$

³O símbolo $*$ empregado aqui difere do anteriormente usado. Trata-se do símbolo usado no Teorema da Convolução nos livros textos de Física-Matemática e que foi mantido.

Integrando a equação acima em σ e τ :

$$(f *_M g)(q, p) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int d\xi d\eta dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 f(q_1, p_1) g(q_2, p_2) \delta\left(-q - \frac{\hbar}{2}\eta + q_2\right) \times \\ \times \delta\left(-p + \frac{\hbar}{2}\xi + p_2\right) e^{-i\xi q_1 - i\eta p_1 + i\xi q_2 + i\eta p_2} \quad (3.23)$$

Reescalando as funções δ através das expressões

$$\delta\left(-q - \frac{\hbar}{2}\eta + q_2\right) = \delta\left[-\frac{\hbar}{2}\left(\frac{2}{\hbar}q + \eta - \frac{2}{\hbar}q_2\right)\right] = \frac{1}{(\hbar/2)}\delta\left(\eta + \frac{2}{\hbar}q - \frac{2}{\hbar}q_2\right) \quad (3.24)$$

e

$$\delta\left(-p + \frac{\hbar}{2}\xi + p_2\right) = \delta\left[-\frac{\hbar}{2}\left(\frac{2}{\hbar}p + \xi - \frac{2}{\hbar}p_2\right)\right] = \frac{1}{(\hbar/2)}\delta\left(-\xi + \frac{2}{\hbar}p - \frac{2}{\hbar}p_2\right) \quad (3.25)$$

teremos o seguinte resultado:

$$(f *_M g)(q, p) = \frac{1}{\hbar^2 \pi^2} \int dq_1 dq_2 dp_1 dp_2 f(q_1, p_1) g(q_2, p_2) \exp\left\{\frac{2}{i\hbar}\left[p(q_1 - q_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + q(p_2 - p_1) + (q_2 p_1 - q_1 p_2)\right]\right\} \quad (3.26)$$

A expressão do Produto Moyal dada em (3.26) tem uma interessante interpretação geométrica. Denotando pontos do espaço de fase por vetores $2 - D$, temos:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} q_1 \\ p_1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} q_2 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Considerando ainda um triângulo no espaço de fase gerado por vetores $\vec{r} - \vec{r}_1$ e $\vec{r} - \vec{r}_2$ sua área será:

$$A(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{2}(\vec{r} - \vec{r}_1) \times (\vec{r} - \vec{r}_2) = \frac{1}{2} [p(q_2 - q_1) + q(p_1 - p_2) + (q_1 p_2 - q_2 p_1)] \quad (3.30)$$

Assim, a equação (3.26) pode ser escrita em termos da área do triângulo no espaço de fase, ou seja:

$$(f *_M g)(\vec{r}) = \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 f(\vec{r}_1) g(\vec{r}_2) \exp \left[\frac{4i}{\hbar} A(\vec{r}, \vec{r}_1, \vec{r}_2) \right] \quad (3.31)$$

Capítulo 4

O efeito Aharonov-Bohm comutativo

Y. Aharonov e D. Bohm consideraram um campo magnético \vec{B} confinado no interior de um solenóide direcionado ao longo do eixo z e contendo o fluxo Φ . Partículas carregadas com energia E e massa m incidem a partir do eixo x -positivo [10], elas são espalhadas pelo solenóide, mas, não podem penetrá-lo. Eles chegaram a conclusão que o fluxo Φ pode afetar as partículas mesmo que a região contendo o campo seja inacessível. Isto acontece porque a Hamiltoniana envolve o fluxo não através do seu campo \vec{B} , mas, através do potencial vetor \vec{A} , o qual devido ao teorema de Stokes não se anula fora do solenóide, pois, sua integral de linha deve ser igual ao fluxo Φ . O potencial de Aharonov-Bohm pode ser escrito como:

$$A_\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{\Phi}{r} \quad (4.1)$$

e

$$A_r = 0 \quad (4.2)$$

ou seja

$$\vec{A}(r) = \frac{\Phi}{2\pi r} \hat{\varphi} \quad (4.3)$$

onde r e φ são coordenadas polares e $\hat{\varphi}$ é o vetor unitário azimutal.

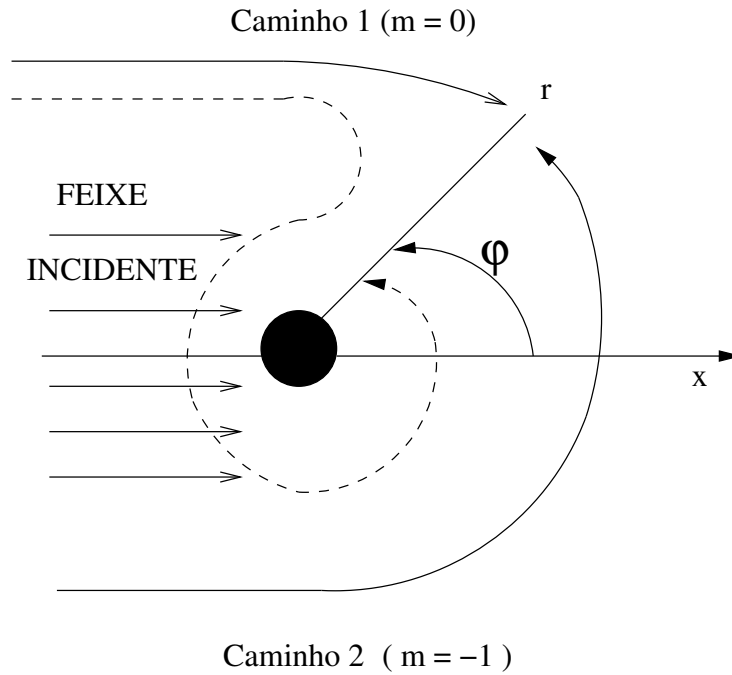


Figura 4.1: Geometria do efeito Aharonov-Bohm. O solenóide é mostrado como um círculo preto com fluxo magnético normal à página. O ponto r é alcançado por dois caminhos (linha cheia); o caminho tracejado é equivalente ao caminho 2.

Escrevendo $\hat{\varphi}$ em coordenadas cartesianas, o potencial de AB terá a seguinte forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\phi}{2\pi r} (-\sin\varphi \hat{\mathbf{i}} + \cos\varphi \hat{\mathbf{j}}) \quad (4.4)$$

ou ainda

$$A^i = \frac{\phi}{2\pi} \frac{\epsilon^{ij} x_j}{r^2} \quad (4.5)$$

onde ϵ^{ij} é o símbolo completamente anti-simétrico ($\epsilon^{12} = 1$ e $i, j = 1, 2$). Este potencial¹ corresponde ao campo $\vec{B} = \Phi\delta(r)\hat{\mathbf{k}}$ para $r = 0$.

¹Vide Apêndice C.

No caso mais simples o solenóide é idealizado como sendo infinitamente fino, tal que, estaremos considerando o espalhamento por uma única linha de fluxo. O feixe incidente, assim, tem a função de onda:

$$\psi_0(\vec{r}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) = \exp(ikr\cos\varphi) \quad (4.6)$$

onde

$$k = \sqrt{2mE} \quad (4.7)$$

Procuramos a função de onda ψ quando Φ é não-nulo. Isto deve satisfazer a condição de impenetrabilidade, i.e., $\psi = 0$ sobre a linha de fluxo em $r = 0$.

4.1 Soluções da equação de Dirac para partículas num campo magnético

A dinâmica quântica de partículas não-relativísticas de massa m , de carga e , num campo magnético \vec{B} , este descrito por um potencial vetor \vec{A} , é regida pela equação de Schrödinger²

$$H(\vec{r}, -i\vec{\nabla})\psi(r) = E\psi(\vec{r}) \quad (4.8)$$

sendo que o operador Hamiltoniano pode ser obtido a partir da Hamiltoniana livre através do acomplamento minimal

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = H_0(\vec{r}, \vec{p} - e\vec{A}) \quad (4.9)$$

onde H_0 é a Hamiltoniana sem o campo magnético. Segundo Dirac [35] uma função $\psi_D(\vec{r})$ satisfazendo (4.8) pode ser construída a partir da função na ausência do campo, i.e., em termos de $\psi_0(\vec{r})$ tal que:

$$H_0\psi_0(\vec{r}) = E\psi_0(\vec{r}) \quad (4.10)$$

A construção de Dirac consiste em multiplicar ψ_0 pelo fator de fase magnético como segue:

$$\psi_D(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r})\exp\left(ie \int_{r_0}^r A(r')dr'\right) \quad (4.11)$$

²Em todo este capítulo usaremos o sistema de unidades naturais $\hbar = c = 1$.

onde r_0 é uma posição fixa arbitrária. Contudo a solução (4.11) não é unívoca. Uma partícula de carga e percorrendo um caminho C_1 numa região com campo magnético nulo deve adquirir uma fase ϕ_1 dada por

$$\phi_1 = e \int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} \quad (4.12)$$

com um diferença de fase $\Delta\phi$ entre quaisquer dois caminhos determinada pelo fluxo magnético Φ através da área entre os dois caminhos (via teorema de Stokes e $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$)

$$\Delta\phi = e \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = e\Phi \quad (4.13)$$

Contudo, se a solução (4.11) representasse o estado o elétron, então, o campo magnético \vec{B} não teria efeito sobre a densidade de probabilidade $|\psi|^2$. Berry, usando o efeito AB , mostrou como a prescrição de Dirac pode ser usada para se obter uma solução da equação de Schrödinger na presença do campo magnético. Decompondo a solução da equação de Schrödinger livre (unívoca) num número infinito de componentes, por ele chamada de “ondas girantes”, onde cada uma delas é plurívoca e a aplicando a equação (4.11) a cada onda girante obteve uma autofunção unívoca. Iremos a seguir usar este método para encontrar soluções da equação de Dirac para partículas relativísticas com spin 1/2 no potencial de AB .

4.2 Soluções da equação de Dirac livre em termos das funções de Bessel de primeira espécie.

A equação de Dirac descreve o movimento de férmions relativísticos com spin. No espaço dos momentos a Hamiltoniana de Dirac livre pode ser escrita na seguinte forma:

$$H_0^D = \gamma^0 \gamma^j k_j + m\gamma^0 \quad (4.14)$$

com $j = 1, 2$.

Usaremos ainda a seguinte representação para as matrizes γ :

$$\gamma^0 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

$$\gamma^1 = i\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$\gamma^2 = i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Escrevendo H_0^D na forma de uma equação de autovalores $H_0^D\psi = E\psi$, podemos calcular os autoestados e os autovalores de energia positiva, obtendo, respectivamente:

$$u_k^0(\vec{r}) = u(\vec{k}) \frac{e^{-i(Et - \vec{k} \cdot \vec{r})}}{2\pi} = \left(\frac{m + E}{2E} \right)^{1/2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k^2 - ik^1}{m + E} \end{bmatrix} \frac{e^{-i(Et - \vec{k} \cdot \vec{r})}}{2\pi} \quad (4.18)$$

e

$$E = \sqrt{m^2 + k^2} \quad (4.19)$$

sendo \vec{k} é o momento do elétron e $k = |\vec{k}|$. A parte espacial do espinor $u(\vec{k})$ pode ser escrito como:

$$u(\vec{k}) = \begin{pmatrix} u^{(1)}(\vec{k}) \\ u^{(2)}(\vec{k}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \begin{bmatrix} \sqrt{E + m} \\ \sqrt{E - m}(-i)e^{i\xi} \end{bmatrix} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{2\pi} \quad (4.20)$$

com ξ o ângulo que o momento do elétron faz com o eixo- x . Os detalhes dos ângulos e vetores envolvidos podem ser visualizados na figura mostrada no Apêndice *D*.

A função de onda (4.18) tem componente superior que pode ser escrita, a menos de constantes, na forma da seguinte série:

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(\varphi - \xi)} \quad (4.21)$$

onde $\varphi - \xi$ é o ângulo entre \vec{k} e \vec{r} . Usando as propriedades de ortogonalidade

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{i(n-m)\beta} d\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n \\ 2\pi & \text{se } m = n \end{cases} \quad (4.22)$$

vem que:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} e^{ikr \cos \beta - in\beta} d\beta \quad (4.23)$$

onde $\beta = \varphi - \xi$.

Fazendo-se a mudança de variável $\beta \rightarrow \beta' = \beta - \frac{\pi}{2}$ temos que os coeficientes c_n podem ser escritos em termos das funções de Bessel de primeira espécie:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikr \sin \beta - in\beta - in\pi/2} d\beta = (-i)^n J_n(-kr) = (-i)^n (-1)^n J_n(kr) \quad (4.24)$$

devido à propriedade $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$ para z real e n inteiro. Dessa forma, os coeficientes c_n podem ser escritos como:

$$c_n = (-i)^{|n|} (-1)^n J_{|n|}(kr) \quad (4.25)$$

onde usamos a propriedade $J_{-|n|}(-z) = (-1)^n J_{|n|}(z)$. Assim, a componente superior do espinor em (4.20) torna-se:

$$u^{(1)}(\vec{k}) = \frac{\sqrt{E+m}}{(2\pi)2E} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{|n|} (-1)^n J_{|n|}(kr) e^{in(\varphi-\xi)} \quad (4.26)$$

Analogamente, para a componente inferior de (4.20), podemos escrever (4.21) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} -ie^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{|n|+1} (-1)^n J_{|n|}(kr) e^{in\beta} = \\ &= e^{i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{|n|+1} (-1)^n J_{|n|}(kr) e^{i(n-1)\beta} = \\ &= e^{i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{|n+1|+1} (-1)^{n+1} J_{|n+1|}(kr) e^{in\beta} = \\ &= e^{i\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_n e^{in\beta} \end{aligned} \quad (4.27)$$

com os coeficientes \bar{c}_n dados por:

$$\bar{c}_n = (-i)^{|n+1|+1} (-1)^{n+1} J_{|n+1|}(kr) \quad (4.28)$$

Dependendo, ainda, do valor de n os coeficientes \bar{c}_n podem ser separados em dois blocos de equações:

$$\bar{c}_n = \begin{cases} (-i)^{|n|}(-1)^n J_{|n|+1}(kr) = (-i)^{|n|}(-1)^n \epsilon(n) J_{|n|+\epsilon(n)}(kr) & \text{se } n \geq 0 \\ (-i)^{-n}(-1)^{n+1} J_{-n-1}(kr) = (-i)^{|n|}(-1)^n \epsilon(n) J_{|n|+\epsilon(n)}(kr) & \text{se } n < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

Dessa forma, a componente inferior de $u(\vec{k})$ torna-se:

$$u^{(2)}(\vec{k}) = \frac{\sqrt{E-m}}{(2\pi)2E} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{|n|}(-1)^n e^{in(\varphi-\xi)} e^{i\varphi} \epsilon(n) J_{|n|+\epsilon(n)}(kr). \quad (4.30)$$

Assim, os coeficientes c_n e \bar{c}_n , escritos em termos das funções de Bessel levam (4.20) a seguinte expressão:

$$\psi_k^0(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{|n|}(-1)^n e^{in(\varphi-\xi)} \left[\frac{\sqrt{E+m} J_{|n|}(kr)}{\sqrt{E-m} e^{i\varphi} \epsilon(n) J_{|n|+\epsilon(n)}(kr)} \right], \quad (4.31)$$

onde introduzimos a função sinal $\epsilon(n) = 1$ se $n \geq 0$ e $\epsilon(n) = -1$ se $n < 0$. Podemos ajustar a equação acima para o caso do sentido do feixe vir da direção positiva do eixo x , ou seja $e^{-ikr \cos \varphi}$, neste caso a onda incidente torna-se:

$$\psi_k^0(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^{|n|} e^{in(\varphi-\xi)} \left[-\frac{\sqrt{E+m} J_{|n|}(kr)}{\sqrt{E-m} e^{i\varphi} \epsilon(n) J_{|n|+\epsilon(n)}(kr)} \right]. \quad (4.32)$$

Optamos por manter a solução usual³, (4.31), conforme equação (4.6). Tal solução constitui-se, portanto, na solução da equação de Dirac livre escrita como uma expansão em ondas parciais.

4.3 Solução da equação de Dirac para partículas no potencial de AB (caso comutativo).

Podemos encontrar a solução da equação de Dirac

³O sentido da onda adotado pode ser visto na fig. 4.1.

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m]\psi = 0 \quad (4.33)$$

a qual descreve partículas relativísticas de spin 1/2 num potencial A_μ . Usando o método desenvolvido por Berry [29], e por ele aplicado na solução da equação de Schrödinger, podemos obter a solução da equação (4.33). Iremos considerar que o efeito de introduzir o potencial de AB será corretamente levado em conta pela magnetização de cada onda girante que entra na decomposição de (4.32). Ou seja, a autofunção da energia $\psi_k^D(\vec{r})$, descrevendo uma partícula relativística com spin na presença do potencial de AB , pode ser obtida a partir da solução da equação livre, $\psi_k^0(\vec{r})$, notando que (4.32) pode ser transformada em uma série de integrais através da fórmula de Poisson⁴

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda F(\lambda) \exp(2\pi i \lambda \ell) \quad (4.34)$$

Assim:

$$\psi_k^0(\vec{r}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E}} (-i)^{|\lambda|} (-1)^\lambda \left[\frac{\sqrt{E+m} J_{|\lambda|}(kr)}{\sqrt{E-m} e^{i\varphi} \epsilon(\lambda) J_{|\lambda|+\epsilon(\lambda)}(kr)} \right] e^{i\lambda(\varphi-\xi+2\pi\ell)} \quad (4.35)$$

A solução (4.35) pode ser escrita como:

$$\psi_k^0(\vec{r}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} T_\ell(r, \varphi) \quad (4.36)$$

onde

$$T_\ell(r, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E}} (-i)^{|\lambda|} (-1)^\lambda \left[\frac{\sqrt{E+m} J_{|\lambda|}(kr)}{\sqrt{E-m} e^{i\varphi} \epsilon(\lambda) J_{|\lambda|+\epsilon(\lambda)}(kr)} \right] e^{i\lambda(\varphi-\xi+2\pi\ell)} \quad (4.37)$$

é a ℓ -ésima “onda girante” que chega em φ após dar ℓ voltas em sentido anti-horário em torno da origem com a propriedade

$$T_\ell(r, \varphi + 2\pi) = T_{\ell+1}(r, \varphi) \quad (4.38)$$

⁴Esta expressão pode ser obtida através da relação de completude da base de Fourier $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n)$

Os termos da série (4.36) são plurívocos, porém, a soma resultante será unívoca. Cada onda girante é uma solução plurívoca da equação de Dirac na ausência do fluxo magnético Φ . A solução $\psi_k^D(\vec{r})$ satisfazendo (4.33) pode, então ser construída em termos da onda na ausência do campo através da equação (4.11). Substituindo a expressão do potencial de AB dada por (4.3) em (4.11), teremos:

$$\psi_D(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) e^{ie\frac{\Phi}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\varphi} \hat{\varphi}' \cdot d\varphi'} = \psi_0(\vec{r}) e^{i\alpha\varphi} \quad (4.39)$$

onde $\alpha = \frac{e\Phi}{2\pi}$. Mas em vez de φ devemos escrever em (4.37), $\varphi + 2\pi\ell$, que é o ângulo total em torno do solenóide. Portanto, a solução (4.11) torna-se

$$\psi_0^D(\vec{r}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} T_{\ell}(r, \varphi) e^{i\alpha(\varphi-\xi+2\pi\ell)} \quad (4.40)$$

Substituindo-se (4.37) na expressão acima, teremos:

$$\psi_0^D(\vec{r}) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \frac{(-i)^{|\lambda|} (-1)^{\lambda}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \left[\frac{\sqrt{E+m} J_{|\lambda|}(kr)}{\sqrt{E-m} e^{i\varphi} \epsilon(\lambda) J_{|\lambda|+\epsilon(\lambda)}(kr)} \right] e^{i(\lambda+\alpha)(\varphi-\xi+2\pi\ell)} \quad (4.41)$$

Fazendo-se uma mudança de variável

$$\lambda \rightarrow \lambda' = \lambda + \alpha \quad (4.42)$$

e usando o procedimento inverso para o somatório de Poisson, teremos:

$$\psi_k^D(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)\sqrt{2E}} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-i)^{|\ell-\alpha|} (-1)^{\ell} \left[\frac{\sqrt{E+m} J_{|\ell-\alpha|}(kr)}{\sqrt{E-m} e^{i\varphi} \epsilon(\ell-\alpha) J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr)} \right] e^{i\ell(\varphi-\xi)} \quad (4.43)$$

A equação, (4.43), acima, constitui-se na solução da equação de Dirac para partículas no potencial de AB . Usaremos, posteriormente, a solução acima para o cálculo da amplitude invariante.

Capítulo 5

A não-comutatividade e o efeito Aharonov-Bohm

A possibilidade de estudarmos os espaços não-comutativos será analisada usando o efeito Aharonov-Bohm. A partir do tensor do campo eletromagnético não-comutativo iremos obter uma expressão para o potencial de Aharonov-Bohm como uma série que depende do parâmetro θ não-comutativo.

5.1 O campo de AB não-comutativo

Vamos considerar um elétron sem spin movendo-se num plano $2D$ não-comutativo $\mathcal{R}^2 - \{0\}$, onde na origem existe um solenóide com um campo magnético concentrado ao longo do eixo z . O tensor $\hat{F}_{\mu\nu}$ no plano não-comutativo é:

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]_* \quad (5.1)$$

onde

$$[A_\mu, A_\nu]_* = A_\mu * A_\nu - A_\nu * A_\mu \quad (5.2)$$

é o comutador NC conforme vimos em (3.7).

Até a aproximação linear em θ os termos envolvendo o produto Moyal em (5.1) podem assim ser calculados [23]:

$$-i[A_\mu, A_\nu]_* = -i(A_\mu A_\nu + \frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\mu\partial_\beta A_\nu) + i(A_\nu A_\mu + \frac{i}{2}\theta^{\beta\alpha}\partial_\beta A_\nu\partial_\alpha A_\mu) =$$

$$= -i\left(\frac{i\theta}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\mu\partial_\beta A_\nu - \frac{i\theta}{2}\epsilon^{\beta\alpha}\partial_\beta A_\nu\partial_\alpha A_\mu\right) = \theta\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\mu\partial_\beta A_\nu \quad (5.3)$$

Logo, o tensor do campo eletromagnético torna-se:

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \theta\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_\mu\partial_\beta A_\nu \quad (5.4)$$

Então, devemos construir um potencial de gauge, tal que, o campo magnético \vec{B} se anula em todo o lugar exceto na origem. O potencial de Aharonov-Bohm, conforme vimos, pode ser escrito na forma cartesiana. Expandindo a equação (4.5) nos índices 1 e 2, teremos:

$$\mathbf{A} = \frac{-x_2\hat{x}_1 + x_1\hat{x}_2}{x_1^2 + x_2^2} \frac{\Phi}{2\pi} \quad (5.5)$$

com o fluxo Φ dentro do solenóide ao longo da direção- z . Iremos construir o fluxo dentro do solenóide por meio do *ansatz*

$$A_1 = -x_2 f(r^2) \quad (5.6)$$

e

$$A_2 = x_1 f(r^2) \quad (5.7)$$

Como no caso comutativo, vamos impor que fora do solenóide

$$B_3 = \hat{F}_{12} = 0. \quad (5.8)$$

Usando a condição acima na equação (5.4), temos, para o tensor do campo eletromagnético não-comutativo:

$$\hat{F}_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + \theta\epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha A_1\partial_\beta A_2 = 0 \quad (5.9)$$

Expandindo α e β vem:

$$\hat{F}_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 + \theta\epsilon^{12}\partial_1 A_1\partial_2 A_2 + \theta\epsilon^{21}\partial_2 A_1\partial_1 A_2 = 0 \quad (5.10)$$

Calculando as derivadas para as componentes 1 e 2 do potencial AB nas equações (5.6) e (5.7), teremos:

$$\partial_1 A_1 = -2x_1 x_2 f' \quad (5.11)$$

$$\partial_1 A_2 = f + 2x_1^2 f' \quad (5.12)$$

$$\partial_2 A_1 = -(f + 2x_2^2 f') \quad (5.13)$$

$$\partial_2 A_2 = 2x_1 x_2 f' \quad (5.14)$$

onde $f' = df/dr^2$. Estas expressões quando inseridas em (5.10) levam a seguinte equação para f :

$$2f + 2x_1^2 f' + 2x_2^2 f' + \theta \left((-2x_1 x_2 f')(2x_1 x_2 f') + (f + 2x_2^2 f')(f + 2x_1^2 f') \right) = 0 \quad (5.15)$$

ou seja,

$$f + \frac{\theta}{2} f^2 + r^2(1 + \theta f)f' = 0 \quad (5.16)$$

Fazendo-se uma mudança de variável

$$v = f + \frac{\theta}{2} f^2 \quad (5.17)$$

$$\frac{dv}{df} = 1 + \theta f \quad (5.18)$$

a equação (5.16) se transforma na seguinte equação diferencial:

$$v + r^2 \frac{dv}{dr^2} = 0 \quad (5.19)$$

Cuja solução para v é:

$$v = \frac{c_1}{r^2} \quad (5.20)$$

onde c_1 é a constante de integração.

Substituindo a (5.20) em (5.17) teremos para f a equação do segundo grau:

$$\frac{\theta}{2} f^2 + f - \frac{c_1}{r^2} = 0 \quad (5.21)$$

cujas raízes são:

$$f = -\frac{1}{\theta} \pm \frac{1}{\theta} \sqrt{1 + \frac{2\theta c_1}{r^2}} \quad (5.22)$$

Expandindo a expressão acima¹ para pequenos valores de θ , temos:

$$f = -\frac{1}{\theta} \pm \frac{1}{\theta} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\theta c_1}{r^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{2\theta c_1}{r^2} \right)^2 + \dots \right] \quad (5.23)$$

Sendo o limite comutativo suave para o sinal (+) temos, portanto, a seguinte expressão para f :

$$f = \frac{c_1}{r^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{2c_1}{r^2} \right)^2 \theta + \dots \quad (5.24)$$

Podemos calcular o valor da constante c_1 substituindo o primeiro termo da série acima em (5.6) e comparando com a componente 1 de \mathbf{A} em (5.5) para o caso comutativo. Assim,

$$c_1 = \frac{\Phi}{2\pi} \quad (5.25)$$

Deste modo as expressões para as componentes (5.6) e (5.7) do potencial de AB escritas em termos do parâmetro não-comutativo θ são:

$$A_1 = -x_2 \left(\frac{\Phi}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)} - \frac{\theta\Phi^2}{8\pi^2(x_1^2 + x_2^2)^2} + \dots \right) \quad (5.26)$$

e

$$A_2 = x_1 \left(\frac{\Phi}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)} - \frac{\theta\Phi^2}{8\pi^2(x_1^2 + x_2^2)^2} + \dots \right) \quad (5.27)$$

que descreve um campo magnético zero em todo lugar exceto na origem. Este potencial é também uma generalização do monopolo magnético para θ pequeno.

¹ $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \dots$

5.2 A equação de Dirac no potencial de Aharonov-Bohm

Vimos que a equação (4.33) descreve partículas num potencial A^μ . Multiplicando-a γ^0 à esquerda e desenvolvendo a soma sobre índices repetidos teremos:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\gamma^0\gamma^\ell\partial_\ell + m\gamma^0)\psi - e\gamma^0\gamma^k A_k\psi \quad (5.28)$$

e daí a Hamiltoniana de interação para o caso comutativo é dada por,

$$H_{int}^C = -e\gamma^0\gamma^k A_k \quad (5.29)$$

enquanto a respectiva Hamiltoniana livre é

$$H_0^C = -i\gamma^0\gamma^\ell\partial_\ell + m\gamma^0 \quad (5.30)$$

com a representação para as matrizes γ escritas em (4.15)-(4.17). Podemos ainda escrever a equação (5.30) em termos das matrizes de Pauli σ_i , $i = 1, 2, 3$, ou seja

$$H_0^C = c\epsilon_{ij}\sigma_i p_j + sm\sigma_3 \quad (5.31)$$

a qual se reduz a (5.30) para $s = 1$, $p_j = -i\partial_j$ e $\epsilon_{12} = 1$. Usando as soluções da teoria livre (4.18), tipo ondas planas, podemos calcular a amplitude de transição de um estado inicial $|i\rangle$ para um estado final $|f\rangle$, antes e após a interação em $(2+1)D$ por meio de:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int dt \langle f | H_{int}^C | i \rangle = ie \int dt d^2x u_{p'}^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^k A_k u_p(x) = \\ &= ie \frac{1}{2\pi} \delta(E_p - E_{p'}) \bar{u}(p') \gamma^k u(p) \tilde{A}^k(q) \end{aligned} \quad (5.32)$$

na aproximação de Bohr e com a Hamiltoniana de interação dada por (5.29). Vimos que o potencial de Aharonov-Bohm pode ser escrito na forma dada pela equação (4.5), com $A^0 = A^3 = 0$. Para os índices j e k assumindo os valores 1 e 2, temos:

$$\gamma^k A_k = -\gamma^k A^k = -\gamma^k \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\epsilon^{kj} x_j}{r^2} \quad (5.33)$$

Temos ainda que A^k possui a seguinte transformada de Fourier:

$$\tilde{A}^k = \frac{\Phi}{2\pi} i \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q^j} \int d^2x \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \epsilon^{kj}}{|\vec{x}|^2 + \mu^2} \quad (5.34)$$

onde o parâmetro μ foi introduzido para evitar divergências nos passos intermediários.

O cálculo da integral acima pode ser efetuado em coordenadas polares. Dessa forma:

$$\int d^2x \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \epsilon^{kj}}{|\vec{x}|^2 + \mu^2} = \int_0^\infty r dr \frac{\epsilon^{kj}}{r^2 + \mu^2} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i|\vec{q}||\vec{r}| \cos \varphi} \quad (5.35)$$

Fazendo-se uma mudança de variável $\varphi' \rightarrow \varphi + \pi$ podemos escrever a integral em φ como:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi' e^{i|\vec{q}||\vec{r}| \cos \varphi'} = 2 \int_0^\pi d\varphi e^{-i|\vec{q}||\vec{r}| \cos \varphi} = 2\pi J_0(|\vec{q}||\vec{r}|) \quad (5.36)$$

Substituindo-se (5.36) em (5.35), temos:

$$\int d^2x \frac{e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}} \epsilon^{kj}}{|\vec{x}|^2 + \mu^2} = 2\pi \int_0^\infty r dr \frac{J_0(|\vec{q}||\vec{r}|)}{r^2 + \mu^2} = 2\pi K_0(\mu|\vec{q}|) \quad (5.37)$$

Para retirar o regulador μ de (5.34) vamos estudar o comportamento da função de Bessel para argumentos pequenos:

$$K_0(\mu|\vec{q}|) = \left(-\ln \frac{\mu|\vec{q}|}{2} - \gamma + O(\mu^2) + \dots\right) \quad (5.38)$$

onde γ é a constante de Euler-Mascheroni. Para $\mu \ll 1$, a equação (5.34) torna-se:

$$\tilde{A}^k = i\Phi \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial q^j} \epsilon^{kj} K_0(\mu|\vec{q}|) = -i\Phi \epsilon^{kj} \frac{q^j}{|\vec{q}|^2} \quad (5.39)$$

Pois,

$$\frac{\partial}{\partial q^j} \left(-\ln \frac{\mu|\vec{q}|}{2}\right) = -\frac{2}{\mu|\vec{q}|} \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{\mu}{2}|\vec{q}|\right) = \frac{-1}{2|\vec{q}|^2} 2q^i \delta_i^j = \frac{-q^j}{|\vec{q}|^2} \quad (5.40)$$

onde $|\vec{q}| = \sqrt{\vec{q}^2}$.

Com tais resultados, a equação (5.32) torna-se:

$$S_{fi} = -ie \frac{\Phi}{2\pi} \delta(E_p - E_{p'}) \bar{u}(p') \gamma^k u(p) \frac{\epsilon^{kj} q^j}{|\vec{q}|^2} \quad (5.41)$$

onde $\vec{q} = (\vec{p}' - \vec{p})$ é o momento transferido. Usando as definições para as matrizes γ dadas por (4.15) a (4.17) e a identidade de Gordon

$$\bar{u}(p') \gamma^k u(p) = \frac{(p + p')^\mu}{2M} \bar{u}(p') u(p) - \bar{u}(p') \frac{[\gamma^\mu, \gamma^\nu]}{4m} u(p) (p' - p)_\nu, \quad (5.42)$$

temos, na aproximação não-relativística:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -\frac{ie\Phi}{4\pi E} \delta(E_p - E_{p'}) \left[1 + i \frac{\vec{s} \times \vec{q}}{|\vec{q}|^2} \right] = \\ &= -\frac{ie\Phi}{4\pi E} \delta(E_p - E_{p'}) [1 + i \cot(\Omega/2)] \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde introduzimos a notação $\vec{s} \times \vec{q} = \epsilon^{kj} s^k q^j$ e $\vec{s} = \vec{p} + \vec{p}'$. Este resultado concorda com a expansão do resultado exato obtido em [11].

5.3 A amplitude invariante na região assintótica

A amplitude de espalhamento pode ainda ser calculada decompondo ψ em onda incidente e onda espalhada, respectivamente, ou seja na forma

$$\psi \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{ikr \cos \varphi} + \frac{e^{ikr}}{r^{1/2}} f(\varphi) \quad (5.44)$$

A onda incidente possui a direção² de \vec{k} , (direção do eixo x), e a amplitude de espalhamento $f(\varphi)$ corresponde ao espalhamento de \vec{k} para \vec{k}' , conforme mostra figura 4.1. Este problema, usual para espalhamento, nos fornece a amplitude de espalhamento $f(\varphi)$ e na região assintótica a parte não perturbada a qual não depende da presença do fluxo $\psi(r \rightarrow \infty, \theta, \alpha = 0)$. O

²A equação (5.44) pode ser escrita numa forma que não enfatiza a função exercida pelo eixo x [40].

cálculo da amplitude de espalhamento no formalismo independente do tempo via equação de Schrödinger pode ser encontrado em [13]. Vamos dividir o cálculo em duas partes, tomando a onda incidente dada pela equação (4.31), ($\xi = 0$), nela expressando o comportamento assintótico da função de Bessel

$$J_{|\ell|}(kr) = \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \cos\left(kr - \frac{|\ell|}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.45)$$

e levando em conta que ψ em (5.44) tem uma estrutura de duas componentes.

5.3.1 Cálculo das componentes de ψ .

A amplitude de espalhamento será calculada pela diferença entre a solução magnetizada e a onda incidente. Para isso vamos ir nos iniciar com a componente superior de (4.32) e sua respectiva solução magnetizada. Desse modo,

$$\begin{aligned} \psi_{MAG}^{(1)} - \psi_0^{(1)} &= \frac{\sqrt{E+m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-i)^{|\ell-\alpha|} (-1)^\ell e^{i\ell\varphi} J_{|\ell-\alpha|}(kr) \right. \\ &- \left. \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-i)^{|\ell|} (-1)^\ell e^{i\ell\varphi} J_{|\ell|}(kr) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{E+m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \frac{1}{\sqrt{2\pi kr}} \left\{ \sum_{\ell>0} e^{-i\frac{\pi}{2}(\ell-\alpha)} e^{-i\pi\ell} e^{i\ell\varphi} \left[e^{ikr-i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{2}(\ell-\alpha)} + e^{-ikr+i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{2}(\ell-\alpha)} \right] \right. \\ &+ \sum_{\ell\leq 0} e^{i\frac{\pi}{2}(\ell-\alpha)} e^{-i\pi\ell} e^{i\ell\varphi} \left[e^{ikr-i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{2}(\ell-\alpha)} + e^{-ikr+i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{2}(\ell-\alpha)} \right] \\ &- \sum_{\ell>0} e^{-i\frac{\pi}{2}\ell} e^{-i\pi\ell} e^{i\ell\varphi} \left[e^{ikr-i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{2}\ell} + e^{-ikr+i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{2}\ell} \right] \\ &- \left. \sum_{\ell\leq 0} e^{i\frac{\pi}{2}\ell} e^{-i\pi\ell} e^{i\ell\varphi} \left[e^{ikr-i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{2}\ell} + e^{-ikr+i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{2}\ell} \right] \right\} = \\ &= \frac{\sqrt{E+m}}{2\pi\sqrt{2E}} \frac{1}{(2\pi kr)^{1/2}} e^{ikr} e^{-i\pi/4} \left\{ e^{i\pi\alpha} (e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \dots) + e^{-i\pi\alpha} (1 + e^{-i\varphi} + \dots) \right. \\ &- \left. \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\ell\varphi} \right\} \quad (5.46) \end{aligned}$$

Efetutando as distribuições das exponenciais e levando em conta que

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} e^{i\ell\varphi} = 2\pi\delta(\varphi) \quad (5.47)$$

e

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-1)^\ell e^{i\ell\varphi} = 0 \quad (5.48)$$

Teremos o seguinte resultado para a componente superior de ψ :

$$\psi^{(1)} = -\frac{\sqrt{E+m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \frac{e^{ikr-i\frac{\pi}{4}} e^{i\varphi/2} \sin(\pi\alpha)}{\sqrt{2\pi kr} \sin(\varphi/2)} \quad (5.49)$$

Analogamente para a componente inferior de ψ , temos:

$$\psi^{(2)} = \frac{\sqrt{E-m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \frac{e^{i\varphi} e^{ikr-i\frac{\pi}{4}} (i) e^{i\varphi/2} \sin(\pi\alpha)}{\sqrt{2\pi kr} \sin(\varphi/2)} \quad (5.50)$$

Desse modo, agrupando os elementos da matriz teremos:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi^{(1)} \\ \psi^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{E+m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-ike^{i\varphi}}{E+m} \end{bmatrix} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} f(\varphi) \quad (5.51)$$

onde

$$f(\varphi) = \frac{-\sin(\pi\alpha) e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt{2\pi k} \sin(\varphi/2)} \quad (5.52)$$

o qual para valores pequenos do fluxo α torna-se:

$$f(\varphi) = \frac{-\pi\alpha e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi k}} [1 - i \cot(\varphi/2)]. \quad (5.53)$$

Capítulo 6

Amplitude Invariante para o caso não-comutativo

Tendo trabalhado com ondas planas no caso comutativo vamos iniciar a tarefa de calcular a amplitude invariante na situação NC . Usando o método desenvolvido no capítulo anterior, seção 5.2, teremos uma nova Hamiltoniana de interação, H_{int}^{NC} , agora dependente do parâmetro não-comutativo θ , a qual será integrada entre os estados inicial e final da teoria livre. Estenderemos nosso estudo com as soluções escritas em termos das funções de Bessel de primeira espécie, conforme equação (4.43).

6.1 Amplitude de transição usando ondas planas.

Analogamente à equação (4.33), a equação de Dirac, que descreve partículas relativísticas com spin, no potencial do tipo AB para o caso NC é:

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m] * \psi = 0 \quad (6.1)$$

ou seja,

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi + e\gamma^\nu A_\nu * \psi = 0 \quad (6.2)$$

onde o produto Moyal é definido conforme (1.2). Usando o procedimento adotado no capítulo anterior teremos, após o desenvolvimento do produto Moyal, até a primeira ordem em θ :

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = (-i\gamma^0\gamma^l\partial_l + m\gamma^0)\psi - e\left(\gamma^0\gamma^k A_k + \frac{i\theta^{ij}\gamma^0\partial_i(\vec{\gamma}\cdot\vec{A})\partial_j}{2}\right)\psi \quad (6.3)$$

onde $\theta^{ij} = \theta\epsilon^{ij}$.

Vimos que o potencial A_k , levando-se em conta a não-comutatividade, até a primeira ordem em θ , pode ser escrito na forma dada pelas equações (5.26) e (5.27), ou compactamente:

$$A_k = -\epsilon_{kl}x_l\left(\frac{\Phi}{2\pi}\frac{1}{r^2} - \theta\frac{\Phi^2}{8\pi^2r^4}\right) \quad (6.4)$$

Substituindo-se a expressão acima na equação (6.3) e usando as propriedades das γ 's, teremos, até a primeira ordem em θ , que a Hamiltoniana agora depende do parâmetro NC , ou seja

$$H_0 = -i\gamma^0\gamma^\ell\partial_\ell + m\gamma^0 \quad (6.5)$$

e

$$H_{int}^{NC} = e\frac{\Phi}{2\pi}\frac{\gamma^0\gamma^k\epsilon_{kl}x_\ell}{r^2} - \theta\left[e\gamma^0\gamma^k\epsilon_{kl}x_\ell\frac{\Phi^2}{8\pi^2r^4} - \frac{ie}{2}\epsilon^{ij}\gamma^0\partial_i(\gamma^k\epsilon_{kl}x_\ell\frac{\Phi}{2\pi}\frac{1}{r^2})\partial_j\right]. \quad (6.6)$$

O cálculo da atuação da derivada pode ser feito notando que:

$$\partial_i\left(\frac{x_\ell}{r^2}\right) = \frac{\delta_\ell^i}{r^2} + x_\ell\partial_i\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{\delta_\ell^i}{r^2} - \frac{2x_ix_\ell}{r^4} \quad (6.7)$$

pois,

$$\partial_i\left(\frac{1}{r^2}\right) = -\frac{1}{r^4}\sum_\ell\partial_i(x_\ell^2) = \frac{-2x_i}{r^4}, \quad (6.8)$$

levando a Hamiltoniana de interação não-comutativa a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
H_{int}^{NC} &= e \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\gamma^0 \gamma^k \epsilon_{kl} x_\ell}{r^2} - \theta \left\{ e \gamma^0 \gamma^k \epsilon_{kl} x_\ell \frac{\Phi^2}{8\pi^2 r^4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{ie}{2} \frac{\Phi}{2\pi} \gamma^0 \gamma^k \left[\left(\frac{\delta_k^j}{r^2} - \frac{2x_k x_j}{r^4} \right) \partial_j - \left(\frac{2\delta_k^j}{r^2} - \frac{2x_\ell x_\ell}{r^4} \right) \partial_j \right] \right\} \\
&= e \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\gamma^0 \gamma^k \epsilon_{kl} x_\ell}{r^2} \\
&\quad - \theta \left[e \gamma^0 \gamma^k \epsilon_{kl} x_\ell \frac{\Phi^2}{8\pi^2 r^4} - \frac{ie}{2} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\gamma^0 \gamma^j}{r^2} \partial_j + ie \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\gamma^0 \gamma^i x_i x_j}{r^4} \partial_j \right] \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Este potencial é bastante singular na origem. Portanto, a fim de evitarmos divergências nos cálculos intermediários, efetuaremos uma regularização na Hamiltoniana de interação introduzindo o parâmetro λ onde na região de interesse temos:

$$H_{int}^{NC} = \lim_{\lambda \rightarrow 1} H_\lambda \quad (6.10)$$

com H_λ dado por:

$$H_\lambda = e \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\gamma^0 \gamma^k \epsilon_{kl} x_\ell}{r^{2\lambda}} - \theta \left[-\frac{ie}{2} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\gamma^0 \gamma^j}{r^{2\lambda}} \partial_j + ie \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\gamma^0 \gamma^i x_i x_j}{r^{2\lambda+2}} \partial_j \right] \quad (6.11)$$

e desprezando termos quadráticos em Φ .

Escrevendo o elemento da matriz S , S_{fi} , na forma dada por (5.32), temos:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= -i \int dt \langle f | H_{int}^{NC} | i \rangle = \\
&= -i \frac{\delta(E_f - E_i)}{2\pi} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \int d^2 x e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} u^\dagger(\vec{k}') H_\lambda u(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad (6.12)
\end{aligned}$$

com a dependência temporal fornecendo a função delta de conservação de energia e H_λ dada por (6.11). A hamiltoniana de interação depende agora do parâmetro θ não-comutativo e possui termos com derivadas a serem aplicadas no estado inicial. Pode-se verificar que a integral contém divergências devido as potências altas de r no denominador. Devemos então procurar soluções que se anulam na origem e tentar, através delas, eliminar as divergências infra-vermelhas que surgem na integral em (6.12). Isto será automático se a perturbação for em torno da solução do problema de AB comutativo.

6.2 A Equação de Dirac no Potencial de AB (caso não-comutativo).

Vamos considerar a Hamiltoniana total como a soma de dois termos

$$H_0^{AB} = -i\gamma^0\gamma^\ell\partial_\ell + m\gamma^0 + e\frac{\Phi}{2\pi}\frac{\gamma^0\gamma^k\epsilon_{k\ell}x_\ell}{r^2} \quad (6.13)$$

cujas soluções conhecemos e

$$H_{int}^{NC} = -\theta \left[-\frac{ie}{2}\frac{\Phi}{2\pi}\frac{\gamma^0\gamma^j}{r^{2\lambda}}\partial_j + ie\frac{\Phi}{2\pi}\frac{\gamma^0\gamma^i x_i x_j}{r^{2\lambda+2}}\partial_j \right]. \quad (6.14)$$

Vamos escrever a solução (4.43) na seguinte forma:

$$\psi_k^0 = \sum_\ell C_\ell \begin{bmatrix} F_1(r, \varphi) \\ F_2(r, \varphi) \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

onde:

$$C_\ell = (-i)^{|\ell-\alpha|}(-1)^\ell \quad (6.16)$$

com $0 < \alpha < 1$,

$$F_1(r, \varphi) = e^{i\ell\varphi} J_{|\ell-\alpha|}(kr) \frac{\sqrt{E+m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \quad (6.17)$$

e

$$F_2(r, \varphi) = e^{i(\ell+1)\varphi} \epsilon(\ell-\alpha) J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) \frac{\sqrt{E-m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \quad (6.18)$$

A correspondente conjugada hermitiana de ψ_k^0 é:

$$(\psi_{k'}^0)^\dagger = \sum_{\ell'} C_{\ell'}^\dagger \begin{bmatrix} F_1'^\dagger & F_2'^\dagger \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

em que

$$F_1'^\dagger = F_1'^\dagger(r, \varphi') = e^{-i\ell'\varphi'} J_{|\ell'-\alpha|}(k'r) \frac{\sqrt{E+m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \quad (6.20)$$

e

$$F_2'^{\dagger} = F_2'^{\dagger}(r, \varphi') = e^{-i(\ell'+1)\varphi'} \epsilon(\ell' - \alpha) J_{|\ell' - \alpha| + \epsilon(\ell' - \alpha)}(k'r) \frac{\sqrt{E - m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \quad (6.21)$$

Queremos calcular o produto $(\psi_{k'}^0)^{\dagger} H_{int}^{NC} \psi_k^0$ o qual para valores pequenos do fluxo, ($\Phi \ll 1$), torna-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1} (\psi_{k'}^0)^{\dagger} H_{\lambda} \psi_k^0 &= -b\theta \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sum_{\ell'} \sum_{\ell} C_{\ell'}^{\dagger} C_{\ell} \begin{bmatrix} F_1'^{\dagger} & F_2'^{\dagger} \end{bmatrix} \left(-\frac{\gamma^0 \gamma^j}{2r^{2\lambda}} \partial_j + \frac{\gamma^0 \gamma^i x_i x_j}{r^{2\lambda+2}} \partial_j \right) \times \\ &\times \begin{bmatrix} F_1(r, \varphi) \\ F_2(r, \varphi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde $b = ie \frac{\Phi}{2\pi}$, e o produto das matrizes γ escritos em termos das matrizes de Pauli: $\gamma^0 \gamma^1 = \sigma^2$, $\gamma^0 \gamma^2 = \sigma^3$. Uma relação útil no cálculo da atuação da derivada ∂_j na matriz em (6.22) é:

$$\partial_j r = \frac{x_j}{r} \quad (6.23)$$

e

$$\partial_j \varphi = \frac{-\epsilon_{jk} x_k}{r^2} \quad (6.24)$$

De posse das equações (6.17) e (6.18), temos:

$$\begin{aligned} \partial_j F_1(r, \varphi) &= \frac{\sqrt{E + m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \partial_j \left(e^{i\ell\varphi} J_{|\ell - \alpha|}(kr) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{E + m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \left[-i\ell e^{i\ell\varphi} \epsilon_{jk} \frac{x_k}{r^2} J_{|\ell - \alpha|}(kr) + e^{i\ell\varphi} J'_{|\ell - \alpha|}(kr) k \frac{x_j}{r} \right] \end{aligned} \quad (6.25)$$

e

$$\begin{aligned} \partial_j F_2(r, \varphi) &= \frac{\sqrt{E - m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \partial_j \left(e^{i(\ell+1)\varphi} \epsilon(\ell - \alpha) J_{|\ell - \alpha| + \epsilon(\ell - \alpha)}(kr) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{E - m}}{(2\pi)\sqrt{2E}} \left[e^{i(\ell+1)\varphi} \epsilon(\ell - \alpha) \frac{-i(\ell + 1)\epsilon_{jk} x_k}{r^2} J_{|\ell - \alpha| + \epsilon(\ell - \alpha)}(kr) + \right. \\ &\left. + e^{i(\ell+1)\varphi} \epsilon(\ell - \alpha) k \frac{x_j}{r} J'_{|\ell - \alpha| + \epsilon(\ell - \alpha)}(kr) \right] \end{aligned} \quad (6.26)$$

com $J'_\ell(kr) = \frac{\partial J_\ell(kr)}{\partial(kr)}$. Assim, a equação (6.22), torna-se:

$$(\psi_{k'}^0)^\dagger H_{int}^{NC} \psi_k^0 = -b\theta \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sum_{\ell'} \sum_{\ell} C_{\ell'}^\dagger C_\ell \begin{bmatrix} F_1'^\dagger & F_2'^\dagger \end{bmatrix} \left(-\frac{1}{2} \frac{\gamma^0 \gamma^j}{r^{2\lambda+1}} \mathbf{M} + \frac{\gamma^0 \gamma^i x_i}{r^{2\lambda+2}} \mathbf{N} \right) \quad (6.27)$$

onde as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{N} são dadas por:

$$\mathbf{M} = e^{i\ell\varphi} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{E-m}}{(2\pi)2E} \left(-i\ell\epsilon_{jk} \frac{x_k}{r} J_{|\ell-\alpha|}(kr) + kx_j J'_{|\ell-\alpha|}(kr) \right) \\ \frac{\sqrt{E+m}}{(2\pi)2E} e^{i\varphi} \epsilon(\ell-\alpha) \left(-i(\ell+1)\epsilon_{jk} \frac{x_k}{r} J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)} + kx_j J'_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)} \right) \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

e

$$\mathbf{N} = e^{i\ell\varphi} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{E-m}}{(2\pi)2E} kr J'_{|\ell-\alpha|}(kr) \\ \frac{\sqrt{E+m}}{(2\pi)2E} e^{i\varphi} \epsilon(\ell-\alpha) kr J'_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)} \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

devido ao cancelamento de termos contendo o fator $\epsilon_{ij}x_i x_j = 0$.

Efetuando o produto das matrizes γ a equação (6.22) torna-se:

$$\begin{aligned} (\psi_{k'}^0)^\dagger H_{int}^{NC} \psi_k^0 &= -\theta \frac{b}{2(2\pi)} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sum_{\ell'} \sum_{\ell} C_{\ell'}^\dagger C_\ell \begin{bmatrix} F_1'^\dagger & F_2'^\dagger \end{bmatrix} \\ &\times \left\{ (-\sigma_2) \begin{bmatrix} i\ell e^{i\ell\varphi} \frac{x_2}{r^{2\lambda+2}} J_{|\ell-\alpha|}(kr) - e^{i\ell\varphi} \frac{kx_1}{r^{2\lambda+1}} J'_{|\ell-\alpha|}(kr) \\ e^{i(\ell+1)\varphi} \epsilon(\ell-\alpha) \left(i(\ell+1) \frac{x_2}{r^{2\lambda+2}} J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) - \frac{kx_1}{r^{2\lambda+1}} J'_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) \right) \end{bmatrix} \right. \\ &+ \sigma_1 \begin{bmatrix} i\ell e^{i\ell\varphi} \frac{(-x_1)}{r^{2\lambda+2}} J_{|\ell-\alpha|}(kr) - e^{i\ell\varphi} \frac{kx_2}{r^{2\lambda+1}} J'_{|\ell-\alpha|}(kr) \\ e^{i(\ell+1)\varphi} \epsilon(\ell-\alpha) \left(i(\ell+1) \frac{(-x_1)}{r^{2\lambda+2}} J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) - \frac{kx_2}{r^{2\lambda+1}} J'_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) \right) \end{bmatrix} \\ &- \sigma_2 \begin{bmatrix} 2ke^{i\ell\varphi} \frac{x_1}{r^{2\lambda+1}} J'_{|\ell-\alpha|}(kr) \\ 2ke^{i(\ell+1)\varphi} \epsilon(\ell-\alpha) \frac{x_1}{r^{2\lambda+1}} J'_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) \end{bmatrix} \\ &\left. + \sigma_1 \begin{bmatrix} 2ke^{i\ell\varphi} \frac{x_2}{r^{2\lambda+1}} J'_{|\ell-\alpha|}(kr) \\ 2ke^{i(\ell+1)\varphi} \epsilon(\ell-\alpha) \frac{x_2}{r^{2\lambda+1}} J'_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) \end{bmatrix} \right\} \quad (6.30) \end{aligned}$$

Calculando todos os produtos de matrizes na equação acima teremos a

seguinte expressão para a equação (6.22):

$$\begin{aligned}
& (\psi_{k'}^0)^\dagger H_{int}^{NC} \psi_k^0 = -\theta \frac{e\Phi}{16\pi^3} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sum_{\ell'} \sum_{\ell} C_{\ell'}^\dagger C_{\ell} \\
& \times \left\{ \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{2E} e^{i(\ell\varphi - \ell'\varphi')} \epsilon(\ell - \alpha) \left[\frac{\ell + 1}{r^{2\lambda+1}} J_{|\ell' - \alpha|}(k'r) J_{|\ell - \alpha| + \epsilon(\ell - \alpha)}(kr) \right. \right. \\
& + \left. \frac{k}{r^{2\lambda}} J_{|\ell' - \alpha|}(k'r) J'_{|\ell - \alpha| + \epsilon(\ell - \alpha)}(kr) \right] \\
& + \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{2E} e^{-i(\ell'+1)\varphi' + i(\ell+1)\varphi} \left[\frac{\ell}{r^{2\lambda+1}} J_{|\ell' - \alpha| + \epsilon(\ell' - \alpha)}(k'r) J_{|\ell - \alpha|}(kr) \right. \\
& - \left. \frac{k}{r^{2\lambda}} J_{|\ell' - \alpha| + \epsilon(\ell' - \alpha)}(k'r) J'_{|\ell - \alpha|}(kr) \right] \epsilon(\ell' - \alpha) \\
& + \frac{\sqrt{E^2 - m^2}}{2E} \left[-2e^{i(\ell\varphi - \ell'\varphi')} \frac{k\epsilon(\ell - \alpha)}{r^{2\lambda}} J_{|\ell' - \alpha|}(k'r) J'_{|\ell - \alpha| + \epsilon(\ell - \alpha)}(kr) \right. \\
& + \left. 2e^{-i(\ell'+1)\varphi' + i(\ell+1)\varphi} \frac{k\epsilon(\ell' - \alpha)}{r^{2\lambda}} J_{|\ell' - \alpha| + \epsilon(\ell' - \alpha)}(k'r) J'_{|\ell - \alpha|}(kr) \right] \Big\} = \\
& = -\theta \frac{e\Phi}{16\pi^3} \frac{k}{2E} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sum_{\ell'} \sum_{\ell} C_{\ell'}^\dagger C_{\ell} \\
& \times \left\{ e^{i(\ell - \ell')\varphi + i\ell'\Omega} \epsilon(\ell - \alpha) \left[\frac{\ell + 1}{r^{2\lambda+1}} J_{|\ell' - \alpha|}(k'r) J_{|\ell - \alpha| + \epsilon(\ell - \alpha)}(kr) \right. \right. \\
& + \left. \frac{k}{r^{2\lambda}} J_{|\ell' - \alpha|}(k'r) J'_{|\ell - \alpha| + \epsilon(\ell - \alpha)}(kr) \right] \\
& + e^{i(\ell - \ell')\varphi + i(\ell'+1)\Omega} \epsilon(\ell' - \alpha) \left[\frac{\ell}{r^{2\lambda+1}} J_{|\ell' - \alpha| + \epsilon(\ell' - \alpha)}(k'r) J_{|\ell - \alpha|}(kr) \right. \\
& - \left. \frac{k}{r^{2\lambda}} J_{|\ell' - \alpha| + \epsilon(\ell' - \alpha)}(k'r) J'_{|\ell - \alpha|}(kr) \right. \\
& - \left. 2e^{i(\ell - \ell')\varphi + i\ell'\Omega} \frac{k\epsilon(\ell - \alpha)}{r^{2\lambda}} J_{|\ell' - \alpha|}(k'r) J'_{|\ell - \alpha| + \epsilon(\ell - \alpha)}(kr) \right. \\
& + \left. 2e^{i(\ell - \ell')\varphi + i(\ell'+1)\Omega} \frac{k\epsilon(\ell' - \alpha)}{r^{2\lambda}} J_{|\ell' - \alpha| + \epsilon(\ell' - \alpha)}(k'r) J'_{|\ell - \alpha|}(kr) \right] \Big\} \quad (6.31)
\end{aligned}$$

onde $\varphi = \varphi' + \Omega$ e Ω o ângulo entre o momento incidente e o emergente.

Usando a representação de Schrödinger, na qual o vetor estado carrega toda a dependência temporal, podemos calcular os elementos da matriz S ,

conforme equação (5.32). Assim, a amplitude de probabilidade para o espalhamento em 1a. aproximação é:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int dt \langle \psi_f | H_{int}^{NC} | \psi_i \rangle = -i \int dt d^2x (\psi_{k'}^0)^\dagger H_{int}^{NC} \psi_k^0 \exp i(E_f - E_i)t = \\ &= -2\pi i \delta(E_f - E_i) f_{fi}^{(1)} \end{aligned} \quad (6.32)$$

com $\psi_i = \psi_k^{(0)} e^{-iE_i t}$, $(\psi_{k'}^0)^\dagger$ sua respectiva conjugada hermitiana e

$$f_{fi}^{(1)} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r dr d\varphi (\psi_{k'}^0)^\dagger H_{int}^{NC} \psi_k^0 \quad (6.33)$$

Substituindo-se (6.31) na equação acima, expressando as derivadas J' em termos das funções de Bessel¹ e devido a conservação da energia, ($k' \rightarrow k$), temos:

$$\begin{aligned} f_{fi}^{(1)} &= -\theta \frac{e\Phi}{16\pi^3} \frac{k}{2E} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sum_\ell \sum_{\ell'} C_{\ell'}^\dagger C_\ell \\ &\times \int_0^{2\pi} \int_0^\infty dr \left\{ e^{i(\ell-\ell')\varphi + i\ell'\Omega} \epsilon(\ell - \alpha) \left[\frac{\ell+1}{r^{2\lambda}} J_{|\ell'-\alpha|}(kr) J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) \right. \right. \\ &- \frac{k}{2r^{2\lambda-1}} J_{|\ell'-\alpha|}(kr) J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)-1}(kr) + \frac{k}{2r^{2\lambda-1}} J_{|\ell'-\alpha|}(kr) J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)+1}(kr) \left. \right] \\ &+ e^{i(\ell-\ell')\varphi + i(\ell'+1)\Omega} \epsilon(\ell' - \alpha) \left[\frac{\ell}{r^{2\lambda}} J_{|\ell'-\alpha|+\epsilon(\ell'-\alpha)}(kr) J_{|\ell-\alpha|}(kr) \right. \\ &+ \frac{k}{2r^{2\lambda-1}} J_{|\ell'-\alpha|+\epsilon(\ell'-\alpha)}(kr) J_{|\ell-\alpha|-1}(kr) \\ &\left. \left. - \frac{k}{2r^{2\lambda-1}} J_{|\ell'-\alpha|+\epsilon(\ell'-\alpha)}(kr) J_{|\ell-\alpha|+1}(kr) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Integrando em φ , temos:

$$\begin{aligned} f_{fi}^{(1)} &= \theta \frac{e\Phi}{8\pi^2} \frac{k}{2E} \lim_{\lambda \rightarrow 1} \sum_\ell |C_\ell|^2 \\ &\times \int_0^\infty dr \left\{ e^{i\ell\Omega} \epsilon(\ell - \alpha) \left[\frac{-(\ell+1)}{r^{2\lambda}} J_{|\ell-\alpha|}(kr) J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) \right. \right. \end{aligned}$$

¹Para detalhes veja seção anterior.

$$\begin{aligned}
& + \frac{k}{2r^{2\lambda-1}} J_{|\ell-\alpha|}(kr) J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)-1}(kr) - \frac{k}{2r^{2\lambda-1}} J_{|\ell-\alpha|}(kr) J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)+1}(kr) \Big] \\
& + e^{i(\ell+1)\Omega} \epsilon(\ell-\alpha) \left[\frac{-\ell}{r^{2\lambda}} J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) J_{|\ell-\alpha|}(kr) \right. \\
& - \frac{k}{2r^{2\lambda-1}} J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) J_{|\ell-\alpha|-1}(kr) \\
& \left. + \frac{k}{2r^{2\lambda-1}} J_{|\ell-\alpha|+\epsilon(\ell-\alpha)}(kr) J_{|\ell-\alpha|+1}(kr) \right] \Big\}. \tag{6.35}
\end{aligned}$$

Cada uma das integrais acima pode ser calculada por meio do resultado (B.1)

Separando as contribuições contidas em (6.35) em duas partes, teremos:
a) Contribuição das ondas com $\ell \leq 0$.

$$f_{fi}^{(-)} = \theta \frac{e\Phi}{8\pi^2} \frac{k}{2E} \sum_{\ell \leq 0} \frac{k\alpha(e^{i\ell\Omega} + e^{i(\ell+1)\Omega})}{4(\ell-\alpha)(\ell-\alpha+1)} \tag{6.36}$$

b) Contribuição das ondas com $\ell \geq 1$.

$$f_{fi}^{(+)} = \theta \frac{e\Phi}{8\pi^2} \frac{k}{2E} \sum_{\ell \geq 1} \frac{-k\alpha(e^{i\ell\Omega} + e^{i(\ell+1)\Omega})}{4(\ell-\alpha)(\ell-\alpha+1)} \tag{6.37}$$

Somando as duas contribuições teremos:

$$f_{fi}^{(1)} = -\theta \frac{e\Phi}{8\pi^2} \frac{k^2\alpha}{2E} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\ell-\alpha)(e^{i\ell\Omega} + e^{i(\ell+1)\Omega})}{4(\ell-\alpha)(\ell-\alpha+1)} \tag{6.38}$$

Portanto, a contribuição dessas ondas em 1a. aproximação, agora dependendo do parâmetro não-comutativo θ , conforme (6.32) e devido a (6.38) é:

$$S_{fi} = 2\pi i \delta(E_f - E_i) \frac{\theta e\Phi}{8\pi^2} \frac{k^2\alpha}{2E} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon(\ell-\alpha)(e^{i\ell\Omega} + e^{i(\ell+1)\Omega})}{4(\ell-\alpha)(\ell-\alpha+1)}. \tag{6.39}$$

com a função delta expressando a conservação da energia-momento para o processo. Em teoria de campos os diferentes fatores em S_{fi} , acima, estão

associados com vértices de interação e propagadores das partículas. Na série em (6.39) os termos com $\ell = 0$, $\ell = -1$, para α próximo de zero, oferecem maior contribuição quando comparados a outros valores de ℓ . Neste caso a amplitude invariante pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \frac{\theta\pi i}{2}\delta(E_f - E_i)\frac{e\Phi}{8\pi^2}\frac{k^2\alpha}{2E}\left\{\sum_{\ell=-1}^0\frac{(-1)(e^{i\ell\Omega} + e^{i(\ell+1)\Omega})}{(\ell-\alpha)(\ell-\alpha+1)}\right. \\
&+ \left.\sum_{\substack{\ell\neq 0 \\ \ell\neq -1}}\frac{\epsilon(\ell-\alpha)e^{i\ell\Omega}}{\ell(\ell+1)} + \sum_{\substack{\ell\neq 0 \\ \ell\neq -1}}\frac{\epsilon(\ell-\alpha)e^{i(\ell+1)\Omega}}{\ell(\ell+1)}\right\} = \\
&= \frac{\theta\pi i}{2}\delta(E_f - E_i)\frac{e\Phi}{8\pi^2}\frac{k^2\alpha}{2E}\left\{\frac{2}{\alpha}(\alpha + i\sin\Omega + \alpha\cos\Omega) + i\sin\Omega\right. \\
&+ \left.\sum_{\substack{\ell\neq 0 \\ \ell\neq -1 \\ \ell\neq 1}}\frac{\epsilon(\ell-\alpha)e^{i\ell\Omega}}{\ell(\ell+1)} + \sum_{\substack{\ell\neq 0 \\ \ell\neq -1 \\ \ell\neq -2}}\frac{\epsilon(\ell-\alpha)e^{i(\ell+1)\Omega}}{\ell(\ell+1)}\right\} \quad (6.40)
\end{aligned}$$

Podemos agrupar as duas somas fazendo a mudança $\ell' = \ell + 1$ na última soma da equação acima. Dessa maneira a amplitude torna-se

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \frac{\theta\pi i}{2}\delta(E_f - E_i)\frac{e\Phi}{8\pi^2}\frac{k^2}{E}\left\{\alpha + i\sin\Omega + \alpha\cos\Omega + \frac{i\alpha\sin\Omega}{2}\right. \\
&+ \left.\frac{4i\alpha}{2}\sum_{\ell=2}^{\infty}\frac{\sin(\ell\Omega)}{\ell^2 - 1}\right\} = \\
&= \frac{\theta\pi i}{16\pi^2}\delta(E_f - E_i)\frac{k^2}{E}\left\{2\pi i\alpha\sin\Omega + \alpha^2\left[1 + e^{i\Omega} - 2i\ln\tau\right]\right\} \quad (6.41)
\end{aligned}$$

onde $\tau = 2\sin\frac{\Omega}{2}$.

A seção de choque diferencial poderá então ser calculada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |A|^2 = |A_0|^2 + 2\mathbf{Re}(A_0A_1^*) \quad (6.42)$$

onde as amplitudes A_0 e A_1 são dadas pelas equações (5.43) e (6.41), respectivamente. Efetuando o produto acima (na condição $\alpha \ll 1$) teremos o seguinte resultado

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\alpha}{2E} \right)^2 \left[\frac{1}{\sin^2(\Omega/2)} - \theta k^2 \cos^2(\Omega/2) \right] \delta(E_p - E'_p) \quad (6.43)$$

Se formos calcular a seção de choque total através de sua definição teremos um resultado infinito. Tal fato se deve a estarmos trabalhando com um potencial que é um exemplo de força de longo alcance. O valor infinito da seção de choque total deste termo também ocorre em Mecânica Clássica [41]. Somente se o campo de força é zero além de uma certa distância (“cuts off”) que a seção de choque será finita. Classicamente o corte, para o campo de Coulomb do núcleo, ocorre como um resultado da presença dos elétrons atômicos, os quais “blindam” o núcleo e cancelam sua carga em grandes distâncias.

A equação (6.42) deve conter no denominador de $|A|^2$ o fluxo de partículas incidentes. Logo, a correção para a seção de choque (em primeira ordem em θ será:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= -\frac{\theta}{2\pi} \int E dE \left(\frac{\alpha}{2E} \right)^2 k^2 \frac{1}{E} \cos^2 \frac{\Omega}{2} \delta(E_p - E_{p'}) = \\ &= -\frac{\theta}{2\pi} \frac{\alpha^2}{4} k \cos^2 \frac{\Omega}{2} \end{aligned} \quad (6.44)$$

Assim, a seção de choque total será:

$$\sigma = -\frac{\theta \alpha^2 k}{8} \quad (6.45)$$

Este resultado indica que a conexão entre os regimes comutativos e NC é suave, i.e., o $\lim \theta \rightarrow 0$ pode, neste caso, ser tomado diretamente.

Conclusão.

Neste trabalho estudamos correções ao espalhamento de Aharonov-Bohm para partículas de spin $1/2$, advindas da não-comutatividade do espaço, na aproximação de fluxo pequeno. Introduzimos o produto Moyal, também chamado de produto estrela, o qual é não-comutativo, mas nos permite utilizar funções de variáveis ordinárias (i.é, comutantes) ao invés das coordenadas não-comutativas do espaço subjacente. Escrevemos o produto estrela de dois campos em algumas de suas diferentes formas e observamos que, numa delas, este produto corresponde ao produto ordinário dos campos com o momento deslocado de $\tilde{p}/2$.

Uma maneira de se estudar espaços não-comutativos pode ser realizada através do efeito Aharonov-Bohm. Abordamos inicialmente o caso comutativo com o cálculo da amplitude invariante usando ondas planas. Neste caso, contrariamente ao caso do espalhamento de partículas com spin 0 , encontramos a reprodução do resultado exato na situação limite de fluxo pequeno. A solução exata da equação de Dirac no contexto comutativo foi obtida pelo uso do método das *ondas girantes* proposto por Berry [29] para o espalhamento não-relativístico. A partir desse resultado calculamos também a amplitude de espalhamento exata.

Impondo o anulamento do campo magnético fora da origem, determinamos o potencial de Aharonov-Bohm como uma série em termos do parâmetro não-comutativo θ . A seguir calculamos na aproximação de Born para dois tipos de aproximações. Na primeira delas, consideramos como sistema não perturbado o descrito pela hamiltoniana de Dirac livre. Contudo, a correção para o potencial, devido a não-comutatividade, é muito singular ocasionando o aparecimento de divergências que invalidam o procedimento. Adotamos então o segundo tipo de aproximação, em que o sistema não perturbado é o modelo de Aharonov-Bohm comutativo. Aqui não existem divergências, diferentemente do que ocorre com ondas planas do primeiro tipo de aproximação. Este fato nos possibilitou determinar as seções de choque diferencial e a correção para a seção de choque total até termos da ordem linear em θ . O resultado obtido indica que a transição entre os regimes comutativo e

não-comutativo é suave, ou seja, $\lim \theta \rightarrow 0$ pode ser tomado diretamente. Tal fato não é usual em teoria de campos não-comutativa devido ao surgimento de divergências logarítmicas na teoria.

Apêndice A

A Correspondência Weyl-Moyal

Vimos que a introdução do espaço-tempo não-comutativo foi feita afirmando que o *tempo* e o *espaço* são operadores definidos no espaço de Hilbert e obedecendo (vide [32]) a relação de comutação

$$[\hat{q}_\mu, \hat{q}_\nu] = i\theta_{\mu\nu} \quad (\text{A.1})$$

onde os $\theta_{\mu\nu}$'s são elementos de uma matriz real $d \times d$ e $q^\mu, \mu = 0, 1, \dots, d-1$. Vamos agora introduzir o operador $T(k)$ definido por:

$$T(k) \equiv e^{ik_\mu q^\mu} \quad (\text{A.2})$$

onde os k 's são c-numbers. O operador $T(k)$ possui as seguintes propriedades:

1. devido aos q 's serem auto-adjuntos:

$$T^\dagger(k) = e^{(ik_\mu q^\mu)^\dagger} = e^{-ik_\mu q^\mu} = e^{-ik_\mu q^\mu} = T(-k) \quad (\text{A.3})$$

2. devido a $[q^\mu, \theta^{\nu\rho}] = 0$:

$$\begin{aligned} T(k)T(k') &= e^{ik_\mu q^\mu} e^{ik'_\nu q^\nu} = e^{ik_\mu q^\mu + ik'_\nu q^\nu} e^{\frac{1}{2}[ik_\mu q^\mu, ik'_\nu q^\nu]} = \\ &= e^{i(k_\mu + k'_\mu)q^\mu} e^{-\frac{1}{2}k_\mu k'_\nu [q^\mu, q^\nu]} = \\ &= T(k + k') e^{-\frac{i}{2}k_\mu k'_\nu \theta^{\mu\nu}} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

3. traço tomado com respeito a uma base na representação do espaço[32]:

$$\text{tr}T(k) = (2\pi)^d \prod_{\mu=0}^{d-1} \delta(k_\mu) \quad (\text{A.5})$$

A.1 A função $\phi(x)$ escrita em termos do traço

Iremos agora obter a expressão para a função $\phi(x)$ a qual será usada para escrever o produto Moyal de funções clássicas. Vamos associar a uma função clássica $\phi(x)$ o operador $\phi(q)$ definido como:

$$\phi(q) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d x \int d^d k T(k) e^{ik_\mu x^\mu} \phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k T(k) \tilde{\phi}(k) \quad (\text{A.6})$$

onde $d^d x \equiv dx$ e $d^d k \equiv dk$

$$\tilde{\phi}(k) = \int d^d x e^{ik_\mu x^\mu} \phi(x) \quad (\text{A.7})$$

Multiplicando (A.6) pelo operador $T^\dagger(k')$ definido em (A.3), temos:

$$\begin{aligned} \phi(q)T^\dagger(k') &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k T(k) T^\dagger(k') \tilde{\phi}(k) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k T(k - k') e^{-\frac{i}{2} k_\mu k'_\nu \theta^{\mu\nu}} \tilde{\phi}(k) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

e aplicando o traço em ambos os membros:

$$\text{Tr}[\phi(q)T^\dagger(k')] = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \text{Tr}T(k - k') e^{\frac{i}{2} k_\mu k'_\nu \theta^{\mu\nu}} \tilde{\phi}(k) \quad (\text{A.9})$$

Fazendo

$$\tilde{\phi}(k') = \text{Tr}[\phi(q)T^\dagger(k')] \quad (\text{A.10})$$

e

$$\text{Tr}T(k - k') = (2\pi)^d \Pi_\mu \delta(k - k')_\mu \quad (\text{A.11})$$

a equação (A.9) torna-se:

$$\tilde{\phi}(k') = \int d^d k \Pi_\mu \delta(k - k')_\mu e^{\frac{i}{2} k_\mu k'_\nu \theta^{\mu\nu}} \tilde{\phi}(k) \quad (\text{A.12})$$

Mas de (A.7):

$$\tilde{\phi}(k') = \int d^d k e^{ik_\mu x^\mu} \phi(x) \quad (\text{A.13})$$

Comparando (A.10) e (A.13):

$$Tr[\phi(q)T^\dagger(k')] = \int d^d k e^{ik_\mu x^\mu} \phi(x) \quad (\text{A.14})$$

Portanto:

$$\phi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{-ik_\mu x^\mu} Tr[\phi(q)T^\dagger(k)] \quad (\text{A.15})$$

A.2 O produto Moyal de dois campos

Usaremos agora a expressão obtida para $\phi(x)$ em termos do traço para construir o produto Moyal das funções clássicas ϕ_1 e ϕ_2 correspondendo ao produto de operadores ϕ_1 e ϕ_2 .

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) = \int \frac{dk}{(2\pi)^d} e^{-ikx} Tr[\Phi_1 \Phi_2 T^\dagger(k)] \quad (\text{A.16})$$

pois,

$$\begin{aligned} Tr[\Phi_1 \Phi_2 T^\dagger(k)] &= Tr \left[\int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \frac{dk_2}{(2\pi)^d} T(k_1) T(k_2) \tilde{\Phi}_1(k_1) \tilde{\Phi}_2(k_2) T^\dagger(k) \right] = \\ &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \int \frac{dk_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Phi}_1(k_1) \tilde{\Phi}_2(k_2) Tr[T(k_1) T(k_2) T^\dagger(k)] \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

onde,

$$\begin{aligned} Tr[T(k_1) T(k_2) T^\dagger(k)] &= e^{-\frac{i}{2} k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu} Tr[T(k_1 + k_2) T(-k)] = \\ &= e^{-\frac{i}{2} k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu} e^{\frac{i}{2} (k_1 + k_2)^\mu \Theta_{\mu\nu} k^\nu} (2\pi)^d \Pi_\mu \delta(k_1 + k_2 - k)_\mu \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo (A.18) em (A.17), a equação (A.16) torna-se:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \int \frac{dk_1}{(2\pi)^d} \frac{dk_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Phi}_1(k_1) \tilde{\Phi}_2(k_2) e^{-i(k_1+k_2)_\mu x^\mu} \times \\ &\times e^{-\frac{i}{2} k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu} e^{\frac{i}{2} (k_1+k_2)^\mu \Theta_{\mu\nu} (k_1+k_2)^\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Mas,

$$\exp \left[\frac{i}{2} (k_1 + k_2)^\mu \Theta_{\mu\nu} (k_1 + k_2)^\nu \right] = 1 \quad (\text{A.20})$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Phi}_1(k_1) \tilde{\Phi}_2(k_2) e^{-i(k_1+k_2)^\mu x_\mu} e^{-\frac{i}{2} k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Phi}_1(k_1) \tilde{\Phi}_2(k_2) e^{-ik_1^\mu x_\mu} e^{-k_2^\mu y_\mu} \times \\ &\times \left(1 - \frac{i}{2} k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \right)^2 k_1^{\mu_1} k_1^{\mu_2} \Theta_{\mu_1\nu_1} \Theta_{\mu_2\nu_2} k_2^{\nu_1} k_2^{\nu_2} + \dots \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Phi}_1(k_1) \tilde{\Phi}_2(k_2) e^{-ik_1^\mu x_\mu} e^{-k_2^\mu y_\mu} \times \\ &\times \left(1 + \frac{i}{2} (-ik_1^\mu) \Theta_{\mu\nu} (-ik_2^\nu) + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \right)^2 (-ik_1^{\mu_1}) (-ik_1^{\mu_2}) \Theta_{\mu_1\nu_1} \Theta_{\mu_2\nu_2} (-ik_2^{\nu_1}) (-ik_2^{\nu_2}) + \dots \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Phi}_1(k_1) \tilde{\Phi}_2(k_2) e^{-ik_1^\mu x_\mu} e^{-k_2^\mu y_\mu} \times \\ &\times \left(1 + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Theta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} \right)^2 \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial x_{\mu_2}} \Theta_{\mu_1\nu_1} \Theta_{\mu_2\nu_2} \frac{\partial}{\partial y_{\nu_1}} \frac{\partial}{\partial y_{\nu_2}} + \dots \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \tilde{\Phi}_1(k_1) \tilde{\Phi}_2(k_2) e^{-ik_1^\mu x_\mu} e^{-k_2^\mu y_\mu} e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_\nu}} = \\ &= \lim_{y \rightarrow x} e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_\nu}} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} e^{-ik_1^\mu x_\mu} \tilde{\Phi}_1(k_1) \int \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} e^{-k_2^\mu y_\mu} \tilde{\Phi}_2(k_2) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Resultando na seguinte expressão para o produto Moyal de dois campos:

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) = \lim_{y \rightarrow x} \exp \left[\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} \right] \phi_1(x) \phi_2(x) = \phi_1(x) \exp \left[\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta_{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu \right] \phi_2(x) \quad (\text{A.22})$$

Apêndice B

Cálculo das integrais em termos de funções Γ

B.1 Cálculo das Integrais em (6.35)

As contribuições das ondas para $\ell \leq 0$ e $\ell > 0$, dadas pelas integrais em (6.35), podem ser calculadas usando-se o seguinte resultado:

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(kr)J_\mu(kr)}{r^\sigma} dr = \frac{k^{\sigma-1}\Gamma(\sigma)\Gamma(A)}{2^\sigma\Gamma(B)\Gamma(C)\Gamma(D)} \quad (\text{B.1})$$

onde

$$2A = \mu + \nu - \sigma + 1 \quad (\text{B.2})$$

$$2B = -\nu + \mu + \sigma + 1 \quad (\text{B.3})$$

$$2C = \mu + \nu + \sigma + 1 \quad (\text{B.4})$$

$$2D = \nu - \mu + \sigma + 1 \quad (\text{B.5})$$

válido desde que

$$\text{Re}(\mu + \nu + 1) > \text{Re}(\sigma) > 0. \quad (\text{B.6})$$

B.1.1 A primeira das integrais em (6.35)

A contribuição com $\ell \leq 0$ leva a uma integral da forma

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_0^\infty dr \frac{e^{i\ell\Omega}(\ell+1)}{r^{2\lambda}} J_{\alpha-\ell}(kr) J_{\alpha-\ell-1}(kr) = \frac{e^{i\ell\Omega}(\ell+1)}{2} \frac{(\frac{1}{2}k)^{\sigma-1} \Gamma(A)}{\Gamma(B)\Gamma(C)\Gamma(D)} \quad (\text{B.7})$$

onde $\sigma = 2\lambda$ e

$$2A = \mu + \nu - \sigma + 1 = 2\alpha - 2\ell - 2\lambda \quad (\text{B.8})$$

$$2B = -\mu + \nu + \sigma + 1 = 2\lambda \quad (\text{B.9})$$

$$2CA = \mu + \nu + \sigma + 1 = 2\lambda + 2\alpha - 2\ell \quad (\text{B.10})$$

$$2D = \mu - \nu + \sigma + 1 = 2\lambda + 2 \quad (\text{B.11})$$

A condição (B.6), e para $\lambda \rightarrow 1$, nos leva a:

$$\alpha - \ell + \alpha - \ell - 1 + 1 > 2 \quad (\text{B.12})$$

Ou seja:

$$\alpha > 1 + \ell \quad (\text{B.13})$$

tal que para $\ell \leq 0$ (no caso particular em que $\ell = 0$) temos que α sai da região $0 < \alpha < 1$. Este tipo de divergência pode ser eliminada, não se tomando $\lambda \rightarrow 1$ diretamente. Faremos, portanto, a integral primeiro e tomaremos o limite depois. Desse modo a integral em (B.14) fica:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} \int_0^\infty dr \frac{e^{i\ell\Omega}(\ell+1)}{r^{2\lambda}} J_{\alpha-\ell}(kr) J_{\alpha-\ell-1}(kr) = \frac{e^{i\ell\Omega}(\ell+1)}{4} \frac{k\Gamma(\alpha-\ell-1)}{\Gamma(\alpha-\ell+1)\Gamma(2)} \quad (\text{B.14})$$

onde $\Gamma(\alpha-\ell+1) = (\alpha-\ell)(\alpha-\ell-1)\Gamma(\alpha-\ell-1)$.

Para as outras integrais o cálculo é análogo.

Apêndice C

Cálculo do campo magnético relacionado ao potencial vetor dado por (4.5)

Vamos escrever o potencial de Aharonov-Bohm (4.5) na seguinte forma:

$$\vec{A} = \frac{\Phi}{2\pi} \frac{\hat{\mathbf{k}} \times \vec{r}}{r^2} = \frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\nabla} \ln r \quad (\text{C.1})$$

O cálculo do campo magnético pode ser obtido como:

- caso: $r \neq 0$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} \times \vec{\nabla} \ln r \right) \quad (\text{C.2})$$

Usando a expressão

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\nabla \cdot \mathbf{G})\mathbf{F} - (\nabla \cdot \mathbf{F})\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad (\text{C.3})$$

podemos calcular o lado direito de (C.2). Assim:

$$\vec{B} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \ln r) \frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} - \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} \right) \right] \vec{\nabla} \ln r + [(\vec{\nabla} \ln r) \cdot \vec{\nabla}] \frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} - \left(\frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{\nabla} \ln r \quad (\text{C.4})$$

Contudo,

$$-\left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}}\right)\right] \vec{\nabla} \ln r = -\frac{\Phi}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \vec{\nabla} \ln r = \partial_z (f(x, y)) = 0 \quad (\text{C.5})$$

$$\left[(\vec{\nabla} \ln r) \cdot \vec{\nabla}\right] \frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (\text{C.6})$$

e

$$-\left(\frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{\nabla} \ln r = 0 \quad (\text{C.7})$$

Com isto a equação (C.4) torna-se:

$$\vec{B} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \ln r) \frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{C.8})$$

Sendo

$$\vec{\nabla} \ln r = \frac{\vec{r}}{r^2} \quad (\text{C.9})$$

temos:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) \frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} = \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r^2}\right) \cdot \vec{r} + \frac{1}{r^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{r}\right] \frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (\text{C.10})$$

Portanto, o campo magnético será nulo para $r \neq 0$.

- caso: $r = 0$

Devido a singularidade que há na expressão $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right)$ iremos usar o teorema de Stokes. Sendo

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) \frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{C.11})$$

e

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) dV = 2\pi \delta(r) \quad (\text{C.12})$$

Substituindo-se a expressão acima em (C.11) teremos:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) \frac{\Phi}{2\pi} \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{C.13})$$

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \Phi \quad (\text{C.14})$$

Para o caso em que $r = 0$ o campo magnético torna-se:

$$\vec{B} = \Phi \delta(r) \hat{\mathbf{k}} \quad (\text{C.15})$$

Apêndice D

Vetores e ângulos envolvidos

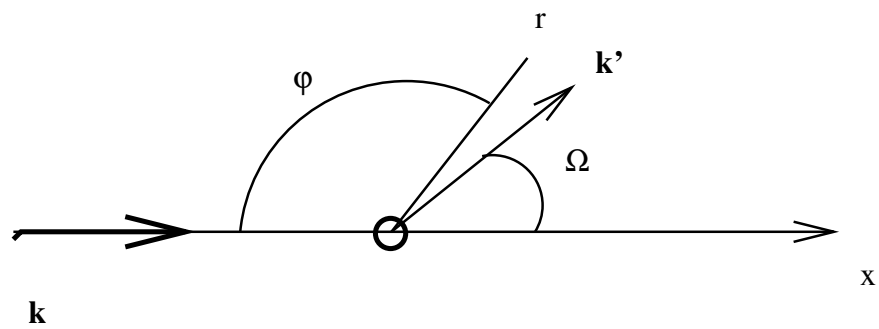


Figura D.1: *Vetores e ângulos envolvidos* - O ângulo de espalhamento Ω se encontra aqui representado. Podemos notar que o ângulo entre \vec{k}' e \vec{r} é φ . O fluxo se dá na direção de x positivo.

Apêndice E

O Sistema de Unidades Naturais

Em física da alta energia com frequência aparecem duas constantes fundamentais, \hbar , a constante de Planck dividida por 2π , e c , a velocidade da luz no vácuo. Os valores dessas grandezas são:

$$\begin{aligned}\hbar &\equiv h/2\pi = 1.0545887(57) \times 10^{-27} \text{ erg.s} \\ c &= 2.99792458(12) \times 10^{10} \text{ cm.s}\end{aligned}\quad (\text{E.1})$$

Por comodidade nos cálculos usamos o sistema de unidades naturais onde $\hbar = c = 1$. Desse modo, apenas uma unidade de energia será necessário para caracterizar todas as grandezas físicas. O sistema estará completamente determinado se especificarmos a unidade de energia $[ML^2T^{-2}]$ em $MeV = 10^6 eV$ ou $GeV = 10^9 eV$. Assim:

$$[massa] = [momento] = [energia] = [comprimento]^{-1} = [tempo]^{-1}. \quad (\text{E.2})$$

• Seção de Choque

As seções de choque usualmente são expressas em *milibarns* (mb) onde

$$\begin{aligned}1mb &= 10^{-3}b = 10^{-27} \text{ cm}^2, \\ 1GeV^{-2} &= 0.389mb\end{aligned}\quad (\text{E.3})$$

A conversão de unidades pode ser feita usando a relação

$$\hbar.c = 197.327 \text{ MeV.fm} \quad (\text{E.4})$$

onde $1fm = 10^{-15}m$.

Temos, portanto, as seguintes relações para a seção de choque

$$\begin{aligned} 1Gev^{-2} &= 1Gev^{-2} \cdot (0,197327 \cdot 10^{-3} GeV \cdot fm)^2 \\ &= 3,89 \cdot 10^{-32} m^2 = 3,89 \cdot 10^5 nb. \end{aligned} \tag{E.5}$$

logo, temos a seguinte relação para a seção de choque

$$\sigma = 1GeV^{-2} = 3,89 \cdot 10^5 nb. \tag{E.6}$$

Apêndice F

Análise Dimensional

Usando o sistema de unidades naturais podemos fazer a análise dimensional do resultado obtido para a seção de choque na situação não-comutativa através da equação (6.45). Na eletrodinâmica clássica, o movimento de uma partícula de carga e num potencial A^μ é obtido pela substituição

$$p^\mu \rightarrow p^\mu - eA^\mu \quad (\text{F.1})$$

Em unidades naturais a carga do elétron, em $3 + 1$ dimensões, é adimensional, logo, o potencial vetor, nesse sistema de unidades terá dimensão de momento. Nesse contexto, o fluxo Φ terá a seguinte dimensão

$$[\textit{fluxo}] = [\vec{B}].[L^2] = [\vec{A}].[L] = [\textit{momento}].[L] \quad (\text{F.2})$$

Dessa forma, temos que $[\textit{fluxo}] = \textit{adimensional}$. A dimensionalidade em unidades de comprimento de cada grandeza física que aparece equação (6.45) se encontra na tabela abaixo:

caso	$[\theta]$	$[e]$	$[\Phi]$	$[\delta]$	$[k]$	S_{fi}
não-comutativo	2	$(D - 4)/2$	$(4 - D)/2$	$D - 2$	-1	2

Referências Bibliográficas

- [1] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, 977, (2002),hep-th/010604.
- [2] R. J. Szabo, Phy.Rept. **378**, 207-299, (2003),hep-th/0109162.
- [3] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, Commun. Math. Phys. **172**, 187 (1995).
- [4] N. Seiberg, E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999), hep-th/9908142.
- [5] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk, N. Seiberg, JHEP **03** 035 (2000) 003, hep-th/980842.
- [6] H. O. Girotti, M. Gomes, V. O. Rivelles e A. J. da Silva - “A Consistent Noncommutative Field Theory: the Wess-Zumino Model” - Nuc. Phys. B **587**, 299 2000, hep-th/0005272.
- [7] H. O. Girotti, M. Gomes, V. O. Rivelles e A. J. da Silva - “*The Noncommutative Supersymmetric Nonlinear Sigma Model*”, Int. J. Mod. Phys. A 17:1503-1516,2002, hep-th/0102101.
- [8] S. Minwalla, M. V. Raamsdonk and N. Seiberg, “*Noncommutative Perturbative Dynamics*”, JHEP **02**, 020 (2000),hep-th/9912072.
- [9] J. Gomis e T. Mehen - “Space-Time Noncommutative Field Theories and Unitarity”, Nucl. Phys. B **591**, 265 2000 - hep-th/0005129.
- [10] Y. Aharonov, D. Bohm - Phys. Rev. [**115**] 485 (1959)
- [11] C.R. Hagen, Phys. Rev. Lett. **64**, 503-506, (1990).

- [12] M. Gomes, “*On the perturbative Aharonov-Bohm effect in 2+1 dimensions*”. Publicado no livro comemorativo do septuagésimo aniversário do Prof. A. H. Zimerman, IFT/Unesp..
- [13] E. Corinaldesi, F. Rafeli, Am. J. Phys. **46** 1185 (1978).
- [14] O. Bergman and G. Lozano, Ann. Phys. (N.Y.) **229**, 416 (1994), hep-th/9302116.
- [15] R. G. Chambers, Phys. Rev. Lett. **5**, 3 (1960); H. A. Fowler *et al.*, J. Appl. Phys. **32**, 1153 (1961); H. Boersch *et al.*, Z. Phys. **165**, 79 (1961).
- [16] P. Bocchieri and A. Loinger, Nuovo Cimento A **47A**, 475 (1978).
- [17] S. M. Roy, Phys. Rev. Lett. **44**, 111 (1980).
- [18] A. Tonomura *et al.*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1443 (1982).
- [19] Bocchieri, A. Loinger, and G. Siragusa, Lett. Nuovo Cimento Soc. Ital. Fis. **35**, 370, (1982).
- [20] A. Tonomura *et al.*, Phys. Rev. Lett. **56**, 792 (1986).
- [21] M. Gomes, J. M. C. Malbouisson, A. G. Rodrigues and A. J. da Silva, J. Phys. A **33**, 5521 (2000), hep-th/0007080; M. Gomes, J. M. C. Malbouisson and A. J. da Silva, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 3157 (1998), hep-th/9801192.
- [22] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder and M. H. Sheikh-Jabbari, Nucl. Phys. B **611**, 383 (2001), hep-th/0101209; Phys. Lett. B **527**, 149 (2002), hep-th/0012175.
- [23] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J. C. Rojas, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 045018, hep-th 0203260.
- [24] J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez and J. C. Rojas, Int. J. Mod. Phys. **A17**:2555-2566, (2002), hep-th 0106125.
- [25] H. O. Girotti, “Noncommutative Quantum Field Theories”, hep-th/0301237.
- [26] M. Lubo, Phys. Rev. **D**, 65 066003 (2002).

- [27] M. A. Anacleto, M. Gomes, A. J. da Silva, and D. Spehler, Phys. Rev. **D70** (2004) 085005, hep-th/0407133.
- [28] Ph. de Souza Gerbert, Phys. Rev. D, **40** 4 (1989)
- [29] M. V. Berry - **1** - Euro J. Phys. 240 (1980).
- [30] H. O. Girotti, F. F. Romero - **1** - Europhys. Lett. **37**, pp. 165-169 (1997).
- [31] A. Connes, M. Douglas and A. S. Schwarz, *JHEP* 9802:003(1998);N. Seiberg and E. Witten, *JHEP* **09**, 032 (1999).
- [32] T. Filk, Phys. Lett. **B376**, 53 240 (1996).
- [33] T. Yoneya, *Prog.Theor.Phys.* **103**, 1081 (2000).
- [34] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas, *JHEP* **0006**, 044 (2000).
- [35] P.A.M. Dirac - Proc. R. Soc. A **133** - (1931).
- [36] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1944.
- [37] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1994
- [38] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books 1995
- [39] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947)
- [40] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill International Editions, pp. 133.
- [41] H. G. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Pub. Company, Inc.