Teorias de 2-gauge e o invariante de Yetter na construção de modelos com ordem topológica em 3-dimensões

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Teorias de 2-gauge e o invariante de Yetter na construção de modelos com ordem topológica em 3-dimensões

Hudson Kazuo Teramoto Mendonça

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio-Sobrinho

Tese de doutorado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Paulo Teotônio-Sobrinho (IF/USP)
Prof. Dr. João Carlos Alves Barata (IF/USP)
Prof. Dr. Carlos Molina Mendes (EACH/USP)
Prof. Dr. Eliezer Batista (UFSC)
Prof. Dr. Paolo Piccione (IME/USP)

São Paulo
2017

© 2017 Hudson Kazuo Teramoto Mendonça

Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo, SP.

Ficha Catalográfica
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Mendonça, Hudson Kazuo Teramoto

Teorias de 2-gauge e o invariante de Yetter na construção de modelos com ordem topológica em 3-dimensões – São Paulo, 2017

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física, Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio-Sobrinho

Área de Concentração: Física Matemática

Unitermos: 1. Mecânica Quântica; 2. Teoria de Gauge; 3. Teoria das Categorias; 4. Topologia Combinatória.

usp/if/sbi-052/2017

Julho de 2017

Resumo

Ordem topológica descreve fases da matéria que não são caracterizadas apenas pelo esquema de quebra de simetria de Landau. Em 2-dimensões ordem topológica é caracterizada, entre outras propriedades, pela existência de uma degenerescência do estado fundamental que é robusta sobre perturbações locais arbitrarias. Com o proposito de entender o que caracteriza e classifica ordem topológica 3-dimensional o presente trabalho apresenta um modelo quântico exatamente solúvel em 3-dimensões que generaliza os modelos em 2-dimensões baseados em teorias de gauge. No modelo proposto o grupo de gauge é substituído por um 2-grupo. A Hamiltonia, que é dada por uma soma de operadores locais, é livre de frustrações. Provamos que a degenerescência do estado fundamental nesse modelo é dado pelo invariante de Yetter da variedade 4-dimensional $\Sigma \times S^1$, onde Σ é a variedade 3-dimensional onde o modelo está definido.

Abstract

Topological order describes phases of matter that cannot be described only by the symmetry breaking theory of Landau. In 2-dimensions topological order is characterized, among other properties, by the presence of a ground state degeneracy that is robust to arbitrary local perturbations. With the purpose of understanding what characterizes and classify 3-dimensional topological order this works presents an exactly soluble quantum model in 3-dimensions that generalize 2-dimensional models constructed using gauge theories. In the model we propose the gauge group is replaced by a 2-group. The Hamiltonian, that is given by a sum of local commuting operators, is frustration free. We prove that the ground state degeneracy of this model is given by the Yetter's invariant of the 4-dimensional manifold $\Sigma \times S^1$, where Σ is the 3-dimensional manifold the model is defined.

Sumário

Notações e Símbolos *xi*

1 Introdução *1*

2 Noções preliminares *9*
2.1 Complexos simpliciais e triangulações 9
2.2 Categorias, grupoide de caminhos e grupos 19

3 Teoria de 2-gauge *41*
3.1 Configurações de 1-gauge 41
3.2 Configurações de 2-gauge 44

4 Função de partição $Z_Y(K)$ e o invariante de Yetter *51*
4.1 Função de partição $Z_Y(K)$ 51
4.2 O invariante de Yetter 53
4.3 Prova da invariância de $Y(M)$ 53
4.3.1 Fatoração de simplexos 55
4.3.2 Fatoração dos passos de Pachner 62

5 Modelo Hamiltoniano *71*
5.1 Levantamento de uma triangulação 72
5.2 Aplicações lineares definidas por complexos 74
5.3 Operadores A_v, $B_p^{(1)}$ e $B_t^{(2)}$ 77
5.3.1 Propriedades do operadores A_v, $B_p^{(1)}$ e $B_t^{(2)}$ 83
5.4 Projetor nos estados fundamentais P_0 86

6 Conclusão *91*

Bibliografia *93*

Índice Remissivo *97*

Notações e Símbolos

Notações

$\mathrm{Aut}(G)$	Isomorfismos de grupo $\{\phi\colon G \to G\}$	
$\mathcal{C}(T)$	configurações de 2-gauge sobre T	44
$f \circ g$	$(f \circ g)(x) \coloneqq g(f(x))$	
$\alpha \odot \beta$	composição horizontal de 2-morfismos	27
$\alpha \circ \beta$	composição vertical de 2-morfismos	27
$\delta(c, c')\,\vert_X$	igualdade parcial das configurações	48
$K^{(k)}$	k-esqueleto, subconjunto de k-simplexos	12
∂s	complexo das faces de s	12
$h_{t,\Gamma}$	2-holonomia do 3-simplexo t	
$h_{p,\gamma}$	1-holonomia do 2-simplexo p	44
$h^{f}_{p,\Gamma}$	pseudo 1-holonomia do 2-simplexo p	47
$\mathrm{Hom}(U, W)$	$\mathrm{Hom}(U, W) \coloneqq \{f\colon U \to W\}$	20
$\mathcal{F}_K$	impõem 2-holonomia e pseudo 1-holonomia identidade	52
$\mathcal{I}_p$	impõem pseudo 1-holonomia identidade	51
$\mathcal{I}_t$	impõem 2-holonomia identidade	52
$\vert K\vert$	espaço topológico associado a K	13
$\ker(f)$	núcleo de uma aplicação	
$\overline{K}$	menor complexo que contém o conjunto K	12
$K\,\vert_\partial$	subcomplexo, restrição de K a $\partial\vert K\vert$	14
$L \searrow K$	K é obtido de L por um descascamento elementar	16
$K \swarrow L$	L é obtido de K por um descascamento elementar inverso	16
$\mathcal{P}_1(T)$	1-grupoide de caminhos sobre T	23
$\mathcal{P}_2(T)$	2-grupoide de caminhos sobre T	30
$s \prec t$	s é uma face própria de t	11
$s \preceq t$	s é uma face de t	11
$A \setminus B$	Complemento relativo $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$	

$[v_0, v_1, \ldots, v_n]$	n-simplexo com vértices $v_0, v_1, \ldots, v_n$	10
$s(f), s(\alpha)$	origem do 1-morfismo f ou 2-morfismo α	
$\mathrm{star}(s)$	conjunto de simplexos que tem s como face	12
$t(f), t(\alpha)$	destino do 1-morfismo f ou 2-morfismo α	
$c \cup c'$	união das configurações	48
$f \triangleright \alpha$	whiskering a esquerda	28
$\alpha \triangleleft f$	whiskering a direita	28

Símbolos

$a_{[012]}, a_{[123]}, \ldots$	Elementos de G_2 associadas a um 2-simplexo $[v_0, v_1, v_2]$, $[v_1, v_2, v_3]$, etc.
c	uma configuração
$f_{[01]}, f_{[12]}, \ldots$	Elementos de G_1 associadas a um 1-simplexo $[v_0, v_1]$, $[v_1, v_2]$, etc.
G	grupo
$\mathcal{G}$	2-grupo
γ	1-caminho
$\mathfrak{G}$	grupo de parâmetros de uma transformação de 2-gauge
$\mathfrak{f}_{[ij]}, \mathfrak{a}_{[ijk]}$	parâmetros de uma transformação de 2-gauge
K	complexo simplicial
M	Variedade de co-dimensão 0
R	Triangulação de uma variedade de co-dimensão 1
s, r, p, t	n-simplexos
Σ	Variedade de co-dimensão 1
T	Triangulação de uma variedade de co-dimensão 0
$v, v_0, v_1, \ldots$	0-simplexos, vértices
$\hat{v}, \hat{v}_0, \hat{v}_1, \ldots$	0-simplexos obtidos por levantamento

1 Introdução

Diferentes fases da matéria podem ser formadas dos mesmos constituintes. O que diferencia um sólido de um líquido são como essas partículas estão organizadas, essa organização é chamada de *ordem do sistema*. O esquema de classificação que foi proposto por Landau explica a ordem de sistemas quânticos e clássicos pela presença de uma *quebra espontânea de simetria*. As duas fases, sólido e líquido, são descritos por Hamiltonianas invariantes pelo mesmo grupo de simetria porém o estado fundamental de cada fase é invariante por subgrupos de simetria diferentes. Um exemplo dessa quebra de simetria são sistemas ferromagnéticos que apresentam o fenômenos de magnetização espontânea. Nesse fenômeno, acima de uma certa temperatura crítica, o estado do sistema tem simetria esférica e abaixo de uma temperatura crítica, o sistema tem um eixo preferencial, o eixo de magnetização.

Tsui, Stormer e Gossard (1982) estudaram experimentalmente um sistema quântico onde um gás de elétrons restrito a um plano bidimensional é submetido a um intenso campo magnético transversal. Quando a *condutividade Hall* desse sistema é medida os valores obtidos para a mesma são quantizados e são dados por:

Tsui, Stormer e Gossard. 1982. "Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit". *Phys. Rev. Lett.* 48 (22): 1559–1562.

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar}\nu$$

Os valores que ν assume são a princípio inteiros porém quando o campo magnético é suficientemente forte ν pode assumir valores fracionários. Esse comportamento foi chamado de *efeito Hall quântico fracionário*, FQH. Um fato importante desse sistema é que ele não pode ser completamente descrito pelo esquema de Landau. Diferentes estados do sistema no FQH são invariantes pelos mesmos subgrupos de simetria.

Violar o esquema de Landau não é a única propriedade inusitada desse sistema. Wen e Niu (1990) mostraram que a degenerescência do estado fundamental no FQH tem dimensão $\tilde{q}^g$, onde g é o gênero da superfície onde os elétrons estão restritos e $\tilde{q}$ é degenerescência do estado fundamental quando essa superfície é $S^1 \times S^1$. A degenerescência desse sistema é robusta a perturbações locais arbitrárias. Outra propriedade é que as quasipartículas do sistema têm estatística fracionária: quando trocamos duas quasipartículas elas ganham uma fase que não é 1 ou −1, ou seja, não são nem bósons nem férmions.

Wen e Niu. 1990. "Ground-state degeneracy of the fractional quantum Hall states in the presence of a random potential and on high-genus Riemann surfaces". *Phys. Rev. B* 41 (13): 9377–9396.

Se essas ordens não podem ser classificadas pelo esquema de Landau o que poderia ser utilizado para caracterizar as fases desse tipo de sistema? Uma das propostas

Wen. 1990. "Topological orders in rigid states". *Int. J. Mod. Phys. B* 04 [02]: 239–271.

(Wen 1990) é um novo tipo de ordem chamado de *ordem topológica*. Esse novo tipo de ordem têm como característica principal a presença de estados onde um ou mais observáveis físicos são robustos a perturbações locais arbitrárias. Esses estados são diferenciados não pelos seus diferentes subgrupos de simetria mas pelas suas diferentes classes topológicas, em outras palavras, esses observáveis são descritos por *invariantes topológicos*.

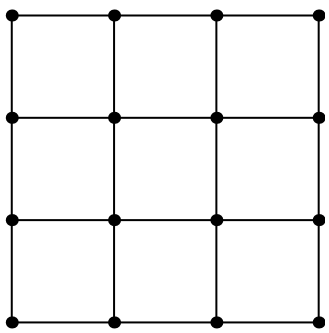
Wen (1990) propôs que esse novo tipo de ordem é caracterizado essencialmente por duas propriedades:

- a degenerescência topológica do estado fundamental;
- a estatística e regras de fusão das quasipartículas.

A degenerescência é dita ser topológica se o seu valor é robusto a perturbações locais arbitrárias.

Kitaev. 2003. "Fault-tolerant quantum computation by anyons". *Ann. Phys.* 303 (1): 2–30.

Modelos que apresentam ordem topológica em 2-dimensões são bem entendidos, no sentido que conhecemos várias famílias de sistemas e temos ferramentas para caracterizar e classificar esses modelos. Um exemplo desse tipo de modelo foi construído por Kitaev (2003). Vamos descrever brevemente o caso mais simples desse tipo de modelo, que é usualmente chamado de *código tórico* (*toric code*). Esse modelo é uma teoria de gauge do grupo $\mathbb{Z}_2$ descrita em um grafo inscrito no toro $S^1 \times S^1$. Vamos tomar esse grafo como sendo uma rede quadrada regular com condições periódicas de contorno como representado abaixo.



Os vetores da base do espaço de Hilbert do código tórico são indexado por configurações de gauge. Uma configuração de gauge c pode ser pensado como sendo uma escolha de elementos de $\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ para cada aresta da rede. Abaixo representamos uma dessas configuração, denotando sobre a aresta o valor de $\mathbb{Z}_2$ associado a

mesma

$$c = \begin{array}{ccccccc}
\bullet & -1 & \bullet & +1 & \bullet & +1 & \bullet \\
| & & | & & | & & | \\
-1 & & +1 & & -1 & & -1 \\
| & & | & & | & & | \\
\bullet & -1 & \bullet & -1 & \bullet & -1 & \bullet \\
| & & | & & | & & | \\
+1 & & +1 & & +1 & & +1 \\
| & & | & & | & & | \\
\bullet & -1 & \bullet & -1 & \bullet & -1 & \bullet \\
| & & | & & | & & | \\
+1 & & +1 & & -1 & & -1 \\
| & & | & & | & & | \\
\bullet & +1 & \bullet & +1 & \bullet & -1 & \bullet
\end{array} .$$

Cada configuração c indexa um vetor da base ϕ_c. Definimos duas famílias de operadores que agem localmente na rede. Os operadores B_p projetam no estado que tem holonomia identidade para a plaqueta p. A holonomia é produto dos elementos de $\mathbb{Z}_2$ associados a fronteira da plaqueta p. Usando um configuração genérica, onde representamos apenas os elementos relevantes ao redor da plaqueta p, para descrever um elemento da base:

$$c_p = \begin{array}{ccccccc}
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
| & & | & & | & & | \\
\bullet & & \bullet & f_1 & \bullet & & \bullet \\
| & & | & & | & & | \\
& & f_0 & p & f_2 & & \\
| & & | & & | & & | \\
\bullet & & \bullet & f_3 & \bullet & & \bullet \\
| & & | & & | & & | \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet
\end{array} ,$$

o projetor B_p é dado por

$$B_p \phi_{c_p} = \delta(g_0 g_1 g_2 g_3, 1) \phi_{c_p} .$$

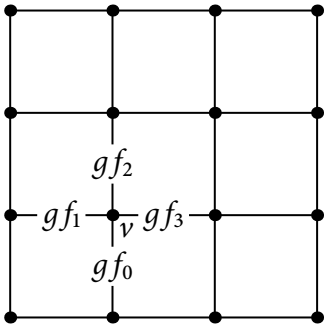
Os operadores A_v^g, $g \in \mathbb{Z}_2$, aplicam uma transformação de gauge pelo elemento g ao redor do vértice v. Dado uma configuração genérica, onde representamos apenas os elementos relevantes ao redor do vértice v

$$c_v = \begin{array}{ccccccc}
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
| & & | & & | & & | \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
| & & f_2 & & | & & | \\
\bullet & f_1 & \bullet & f_3 & \bullet & & \bullet \\
| & & v & & | & & | \\
& & f_0 & & & & \\
| & & | & & | & & | \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet
\end{array} ,$$

os operadores A_v^g são dados por

$$A_v^g \phi_{c_v} = \phi_{c_v'} ,$$

onde a configuração c_v' é

$c_v' =$ 

.

Esses operadores, A_v^g, permitem definir o seguinte projetor

$$A_v = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{g \in \mathbb{Z}_2} A_v^g .$$

Os projetores A_v e B_p comutam entre si e definimos a seguinte Hamiltoniana

$$H = -\sum_v A_v - \sum_p B_p .$$

A degenerescência do estado fundamental do código tórico é um invariante topológico, explicitamente tem o valor 4. Uma base para os espaço de estados fundamentais pode ser indexada pela holonomia global ao longo de duas curvas não contrateis e não homotópicas entre si. Como existem dois possíveis valores para a holonomia global ao longo de uma curva, $\{-1, +1\}$, temos $2 \times 2 = 4$ estados diferentes, que corresponde ao valor da degenerescência do estado fundamental. Esse modelo pode ser generalizado para um grupo finito G ou, mais geral, uma álgebra de Hopf semi-simples, nesse caso o modelo é usualmente chamado de *modelo duplo quântico* (*quantum double model*).

No caso de modelos em 3-dimensões ainda não se tem esse nível de entendimento. Quais são as propriedades que classificam e caracterizam as diferentes ordens topológicas nessa dimensão? Para tentar responder questões desse tipo a primeira ideia é generalizar as propriedades dos modelos 2-dimensionais. Por essa razão gostaríamos de construir modelos 3-dimensionais que tem estado fundamental degenerado, descrito por um invariante topológico. A degenerescência do estado fundamental é apenas um dos números quânticos relevantes, assim como ocorre em 2-dimensões os estados excitados carregam informações que permitem caracterizar a ordem topológica, porem nesse trabalho vamos nos limitar a estudar o estado fundamental.

Como estamos interessados em classificar as possíveis ordens topológicas é importante que existam a disposição modelos suficiente abrangentes para que cada uma das características diferentes estejam presentes em pelo menos um representante. Um possível indicador dessa abrangência é o quão sensível a topologia são os invariantes topológicos associados aos observáveis. Um invariante topológico pode ser trivial, ele associa o mesmo objeto para todo tipo de topologia. Se queremos que as ordens topológicas sejam sensíveis as várias possíveis topológicas do espaço de configuração então seria interessante que o invariante $\mathcal{X}$ associado ao observável fosse tal que se M e M' forem variedades não equivalentes tivéssemos

$$\mathcal{X}(M) \neq \mathcal{X}(M')$$

Em 2-dimensões as variedades fechadas orientáveis são classificadas pelo gênero g, um número inteiro não negativo. A degenerescência do estado fundamental no FQH tem a propriedade descrita acima: a degenerescência é um invariante topológico que é, em geral, diferente para cada valor de g. Em 3-dimensões a classificação das variedades compactas é mais complexa o que torno a existência de um observável com essa propriedade um fato mais notável.

A descrição de estatística de quasipartículas em 3-dimensões também é mais complicada (Wang e Wen 2015). A estatística de pontos é trivial, as únicas possibilidades em 3-dimensão são férmions e bósons. Mas podemos também ter estatística entre objetos extensos, por exemplo anéis (Aneziris et al. 1991). Podemos então perguntar o que ocorre quando permutamos anéis com partículas, anéis com anéis ou configurações mais complexas e quantas e quais dessas configurações precisam ser descritas para completamente caracterizar o tipo de estatística? Ainda não se tem resposta para essa pergunta.

É dentro desse contexto que gostaríamos de apresentar o trabalho que é descrito nesse texto.

A gênese desse modelo está ligada à expectativa de que em modelos com ordem topológica descritos sobre uma variedade d-dimensional Σ, o observável é na verdade um invariante topológico $(d+1)$-dimensional que esta associado a variedade $\Sigma \times S^1$. Este fato foi constado por Ferreira, Padmanabhan e Teotonio-Sobrinho (2014). Eles demonstraram que a degenerescência do estado fundamental do modelo 2-dimensional de Kitaev (2003) é dado pelo invariante 3-dimensional construído por Kuperberg (1991).

No modelo 3-dimensional que iremos construir a degenerescência do estado fundamental é dado pelo invariante 4-dimensional construído por Yetter (1992). A escolha desse invariante é devido principalmente a dois pontos:

1. esse invariante é descrito por teorias de 2-gauge;

Wang e Wen. 2015. "Non-Abelian string and particle braiding in topological order: Modular $SL(3,\mathbb{Z})$ representation and $(3+1)$-dimensional twisted gauge theory". *Phys. Rev. B* 91 [3]: 035134.

Aneziris et al. 1991. "Novel statistics for strings and string "Chern-Simon" terms". *Int. J. Mod. Phys. A* 06 [14]: 2519–2558.

Ferreira, Padmanabhan e Teotonio-Sobrinho. 2014. "2D quantum double models from a 3D perspective". *J. Phys. A* 47 (37): 375204.

Kuperberg. 1991. "Involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants". *Int. J. Math.* 02 (01): 41–66.

Yetter. 1992. "Topological quantum field theories associated to finite groups and crossed G-sets". *J. Knot. Theor. Ramif.* 01 (01): 1–20.

2. ele é mais sensível a estruturas topológica do que o invariante de Kuperberg.

Uma teoria de 2-gauge é uma generalização de uma teoria de gauge, numa teoria de gauge estudamos o transporte paralelo de pontos ao longo de curvas e a teoria é descrita em termos de um grupo de gauge. Numa teoria de 2-gauge também estudamos o transporte de curvas ao longo de superfícies e a teoria é descrita em termos de um 2-grupo.

Teorias de gauge tem um papel fundamental na física. Em particular descrevem os objetos que são utilizados no modelo de Kitaev, que é o nosso protótipo para modelos com ordem topológica. O segundo ponto está relacionado com a ideia de obter uma família de modelos que abrange diversas ordens topológicas. O invariante de Kuperberg só é sensível ao primeiro grupo de homotopia, o *grupo fundamental*, da variedade. Para duas variedades topologicamente diferentes mas que tenham o mesmo grupo fundamental o invariante de Kuperberg associa o mesmo valor a ambas. Agora o invariante de Yetter é sensível aos dois primeiros grupo de homotopia (Martins e Porter 2007) e dessa forma temos uma chance de que as ordens topológicas descritas pelo modelo carreguem uma maior quantidade de informação vindo da topologia. Devemos notar que o invariante de Yetter se reduz ao invariante de Kuperberg para uma classe particular de 2-grupos.

Vamos agora, no restante dessa introdução, descrever uma visão geral do conteúdo dessa tese. O capítulo 2 descreve as duas classes de objetos que serão utilizados para construir o invariante de Yetter e o modelo Hamiltoniano assim como para definir conceitos importantes para o restante do trabalho. O primeiro objeto são *triangulações*, que são uma forma combinatorial de representar variedades. Um resultado importante sobre triangulações é que elas podem ser relacionadas entre si utilizando mutações locais, esse resultado está contido em um teorema de Pachner (1991). O segundo objeto são 2-*categorias*, uma generalização do conceito de *categoria*. Um par de 2-categorias tem um papel fundamental nesse trabalho. A primeira é o 2-*grupo* que é uma generalização de grupo e a segunda é o 2-*grupoide de caminhos* que descreve curvas e superfícies sobre uma variedade. Os tópicos desse capitulo já foram todos descritos anteriormente na literatura, em particular uma referencia para os tópicos sobre complexos e triangulações é (Rourke e Sanderson 1972), para 2-categorias recomendamos (Lack 2010; Street 1996) e para os tópicos conectando esses dois objetos temos (Baez e Huerta 2010; Attal 2004). Uma prova bem clara do teorema de Pachner se encontra em (Lickorish 1999).

O capítulo 3 irá descrever *teorias de* 2-*gauge* e em particular a noção de uma *configuração de* 2-*gauge* que é uma forma de associar elementos de um 2-grupo aos elementos de uma triangulação. Configurações de 2-gauge serão utilizadas para definir conceitos como a 2-*holonomia* de uma superfície fechada. Em geral os nosso objetos são definidos em termos de "somas de configurações de 2-gauge que satisfazem

Martins e Porter. 2007. "On Yetter's invariant and an extension of the Dijkgraaf-Witten invariant to categorical groups". *Theor. Appl. Categ.* 18 [4]: 118–150.

Pachner. 1991. "**PL** homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings". *Eur. J. Combin.* 12 (2): 129–145.

Rourke e Sanderson. 1972. *Introduction to Piecewise-Linear Topology.*

Lack. 2010. "A 2-categories companion". Em *Towards Higher Categories,* editado por John C. Baez e J. Peter May, 105–191.

Street. 1996. "Categorical Structures". Em *Handbook of Algebra,* editado por M. Hazewinkel, 1:529–577.

Baez e Huerta. 2010. "An invitation to higher gauge theory". arXiv: 1003 . 4485.

Attal. 2004. "Combinatorics of non-abelian gerbes with connection and curvature". *Ann. Fond. Louis Broglie* 29 [4]: 609–633. arXiv: 0203056.

uma certa propriedade". Esse tipo de teoria de gauge foi estuda por Attal (2004) para o caso combinatorial e em mais detalhes para o caso diferencial numa série de trabalhos por Baez e Schreiber (2007).

Lickorish. 1999. "Simplicial moves on complexes and manifolds". Em *Proceedings of the Kirbyfest,* editado por Joel Hass e Martin Scharlemann, 2:299–320. Geometry & Topology Monographs.

Baez e Schreiber. 2007. "Higher gauge theory". Em *Categories in Algebra, Geometry and Mathematical Physics,* editado por Alexei Davydov et al., 7–30.

O capítulo 4 irá descrever a construção do *invariante de Yetter* usando a *função de partição de Yetter* que conta o número de configurações de 2-gauge sobre uma triangulação que satisfazem uma certa propriedade, que será enunciada nesse capítulo. Esse invariante foi introduzido por Yetter (1992) e nesse capítulo apresentaremos uma nova prova para esse invariante utilizando o teorema de Pachner. A importância dessa prova é que o teorema de Pachner descreve *passos de Pachner*, que modificam a triangulação e induzem identidades algébricas que a função de partição deve respeitar para que o invariante esteja bem definido. Essas identidades são muito complicadas e iremos introduzir *lemas de fatoração* que permitem simplificar a função de partição e provar as identidades necessárias para aplicar o teorema de Pachner. Esses lemas serão utilizados também para relacionar outros objetos construídos a partir da função de partição. Esse resultado original é o que permite provar a invariância topológica da degenerescência do estado fundamental no modelo que construímos.

Esse modelo será descrito no capítulo 5. Onde, utilizando a função de partição, iremos descrever como construir operadores lineares. Em particular iremos definir três operadores que mutualmente comutam e são projetores. A Hamiltoniana do modelo será descrita em termos desses operadores. Iremos definir um projetor no subespaço de estados fundamentais e mostrar que o traço do operador, ou seja, a degenerescência do estado fundamental é igual ao invariante de Yetter construído no capitulo anterior. A investigação da construção desse modelo foi realizado em conjunto com Ricardo Costa Almeida que irá apresentar mais detalhes sobre o modelo na sua dissertação de mestrado. Nessa tese me foco na prova de que a degenerescência é um invariante topológico.

Sobre os objetos utilizados, todas as nossas variedades serão compactas, todos os nossos grupos serão finitos e todos os nossos espaços vetoriais serão de dimensão finita e construídos sobre $\mathbb{C}$.

Em julho de 2016, tomamos conhecimento que um grupo na Universidade de Leeds, Inglaterra, independentemente, trabalhava em um modelo similar ao apresentado nessa tese. Esse trabalho foi publicado como (Bullivant et al. 2017). O nossa trabalho, apesar de similar, desenvolve alguns dos temas em mais profundidade, o modelo apresentado em (Bullivant et al. 2017) pode ser visto como um caso particular do modelo que construímos, por essa razão acreditamos que os nossos resultado ainda são importantes, principalmente pelo fato que as técnicas que desenvolvemos se aplicam a outros invariantes. Todos os resultados aqui apresentados foram produzidos de forma independente.

Bullivant et al. 2017. "Topological phases from higher gauge symmetry in 3 + 1 dimensions". *Phys. Rev. B* 95 [15]: 155118.

2 Noções preliminares

Nesse capítulo iremos introduzir algumas definições, resultado e notações que serão utilizados no resto desse texto. Iremos nos restringir aos resultados necessários para o entendimento das definições e resultados dos próximos capítulos. Não iremos provar todos os teoremas e lemas descritos nesse capítulo por uma questão de espaço e por se trataram de resultados já descritos na literatura.

Dois objetos principais aparecem como ingredientes nas construções dos próximos capítulos. O primeiro, de carácter combinatório e topológico, é um *complexo simplicial* que é um conjunto de *simplexos*, generalizações de triângulos e tetraedros. O complexo simplicial é utilizado para descrever de forma combinatória as variedades topológicas consideradas por meio de uma *triangulação*. O segundo, de carácter algébrico, é um 2-*grupo* que é uma generalização de ordem superior de um grupo. Usando esses objetos iremos definir a noção de uma *configuração de* 2-*gauge* que é uma generalização de ordem superior de uma configuração de gauge.

Do ponto de vista topológico o principal teorema utilizado é devido a Pachner (1991). O *teorema de Pachner* permite relacionar triangulações diferentes de uma mesma variedade, por um conjunto finito de passos. Esses passos são mutações locais da triangulação. Esses passos irão induzir identidades entre os objetos algébricos associados à triangulações diferentes. Os dois objetos que iremos mostrar serem invariantes sobre a ação induzida pelos passos de Pachner são o *invariante de Yetter*, na seção 4.3, e a *dimensão do espaço de estados fundamentais*, na seção 5.4.

Pachner. 1991. "**PL** homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings". *Eur. J. Combin.* 12 (2): 129–145.

2.1 Complexos simpliciais e triangulações

O primeiro objeto que iremos definir é um *k-simplexo*. Um k-simplexo generaliza a noção de vértices, arestas, triângulos e tetraedros. Nossa definição principal para simplexo e complexos é combinatória, descrevendo simplexos por um conjunto finito de vértices. Isso permite manipular esse objetos utilizando operações sobre conjuntos finito de pontos, que iremos chamar de *vértices*. Iremos apresentar uma representação geométrica em termos de um espaço topológico para esse objetos que será utilizada para ilustrar os diversos conceitos introduzidos.

Definição 2.1. *Um **k-simplexo** é um conjunto contendo $(k+1)$ elementos, chamados **vértices**. Iremos denotar um k-simplexo s usando a seguinte notação*

$$s = [v_0, v_1, \ldots, v_k]$$

onde v_i são os vértices de s.

*Dizemos que um k-simplexo tem **dimensão k**.* □

Vamos introduzir agora uma representação geométrica para os simplexos. Podemos mostrar que essa definição é equivalente a que foi dada acima, porém não iremos buscar essa equivalência, utilizando essa representação apenas como motivação e de forma a ilustrar os simplexos. Um k-simplexo s pode ser visto como um espaço topológico homeomorfo ao disco D^k. Iremos construir esse disco imerso em $\mathbb{R}^n$, n suficientemente grande. Primeiro escolhemos para cada vértices um ponto de $\mathbb{R}^n$, iremos denotar esses pontos pelo mesmo símbolo v_0 usado para denotar os vértices. Esses pontos de $\mathbb{R}^n$ devem ser escolhidos de forma que o seguinte conjunto de vetores sejam linearmente independente

$$\{v_1 - v_0, v_2 - v_0, \ldots, v_k - v_0\}.$$

Um conjunto de pontos com essa propriedade é dito estar em *posição geral*. Dado esse conjunto de pontos de $\mathbb{R}^n$ podemos construir o seu *envoltório convexo*: o menor conjunto convexo que contém esses pontos. Esse conjunto é a representação geométrica do simplexo s e é dado explicitamente pelo seguinte conjunto de pontos

$$s = \left\{t_0 v_0 + \cdots + t_k v_k \mid t_i \geq 0, \sum_{j=0}^{k} t_j = 1\right\} \tag{2.1}$$

Na fig. 2.1 representamos os simplexos de dimensão baixa.

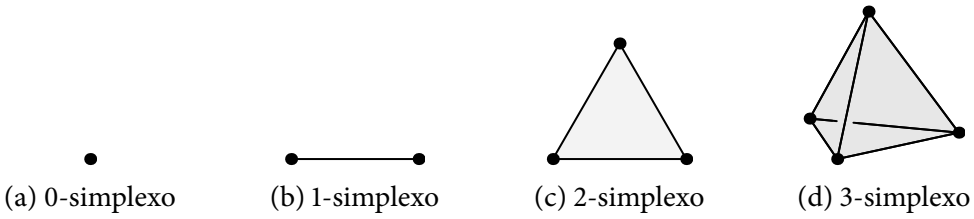


Figura 2.1: k-simplexos de dimensão baixa

Podemos observar nessa representação geométrica que os simplexos são compostos de elementos mais simples. Esses elementos são novamente simplexos. Por exemplo um 2-simplexo tem na sua fronteira três 1-simplexos e cada um desses 1-simplexos tem dois 0-simplexos na fronteira, esses simplexos contidos em um simplexo são chamados de *faces do simplexo*.

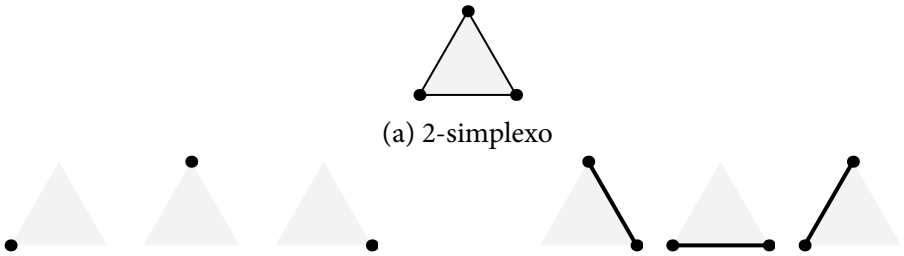
Definição 2.2. *Dado um k-simplexo $t = [v_0, v_1, \ldots, v_k]$ todo subconjunto $\{v_{\alpha_0}, v_{\alpha_1}, \ldots, v_{\alpha_i}\}$ de $i+1$ vértices formam um i-simplexo $s = [v_{\alpha_0}, v_{\alpha_1}, \cdots v_{\alpha_i}]$. Chamamos esse i-simplexo de uma* ***i-face do simplexo t*** *ou simplesmente de uma* ***face de t****. Se t é um subconjunto próprio de t, dizemos que s é uma* ***face própria****.*

Se um simplexo s é uma face de um simplexo t denotamos esse fato por $\boldsymbol{s \preceq t}$ $s \preceq t$, se s é face própria de t denotamos esse fato por $\boldsymbol{s \prec t}$ $s \prec t$. Por convenção iremos dizer que o simplexo vazio $\varnothing$ é face de todo simplexo, ou seja, $\varnothing \preceq s$ para todo simplexo s. Isso também pode ser visto como a definindo que $\varnothing$ é um simplexo de dimensão -1.

Se t é um k-simplexo e s uma $(k-1)$-face tal que $v_i = t \setminus s$ dizemos que ***s é a face oposta a $\boldsymbol{v_i}$****. Em geral se um i-simplexo s é tal que $s \prec t$ dizemos que o $(k-i-1)$-simplexo com vértices $t \setminus s$ é a* ***face oposta a s****.* □

Note que pela transitividade de $\subset$ temos que $\preceq$ também é uma relação transitiva, ou seja, se s, t e v são simplexos e $s \preceq t$, $t \preceq v$ então $s \preceq v$.

A fig. 2.2 ilustra as faces próprias de um 2-simplexo. Retomando a eq. (2.1) podemos ver que as faces próprias podem ser obtidas como subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tomando um ou mais t_i como sendo nulos.



(a) 2-simplexo

(b) 0-faces

(c) 1-faces

Figura 2.2: i-faces próprias de um 2-simplexo

Estamos interessados não apenas em simplexos individuais mas em coleções de simplexos. Queremos coleções que sejam fechadas, no sentido que se uma coleção contém um simplexo ela também deve conter todas as faces desse simplexo.

Definição 2.3. *Um* ***complexo simplicial*** *K é um conjunto de simplexos com a seguintes propriedades*

1. *Toda face de um simplexo que pertence a K também pertence a K, ou seja, se $t \in K$ e $s \preceq t$ então $s \in K$;*

2. *Toda a intersecção de dois simplexos é uma face de cada um dos simplexos, ou seja, se $s, t \in K$ então $s \cap t \preceq s$ e $s \cap t \preceq t$.*

□

Todos os complexos que iremos considerar serão do tipo definido acima, dessa forma iremos nos permitir referir a complexos simpliciais simplesmente por "complexos".

Dado um conjunto K de simplexos que satisfazem a propriedade 2 da definição acima podemos construir um complexo simplicial $\overline{K}$ tomando o conjunto de todas as faces dos simplexo de K, esse conjunto claramente satisfaz a propriedade 1 da definição acima. Um exemplo é se $K = \{s\}$ é a coleção composta de um único simplexo s, o complexo obtido será representado nesse caso simplesmente por $\overline{s}$.

Vamos introduzir algumas notações e operações para subconjuntos especiais de um complexo:

Definição 2.4. *Seja K um complexo.*

Um subconjunto $L \subset K$ é dito ser um ***subcomplexo*** *de K se L for um complexo.*

O ***k-esqueleto*** *$K^{(k)}$ é o subconjunto de todos os k-simplexos. Chamamos $\bigcup K^{(0)}$ de* ***vértices de K****. O* ***f-vetor*** *de um complexo K é um vetor de inteiros onde a i-ésima componente é o número de i-simplexos em K.*

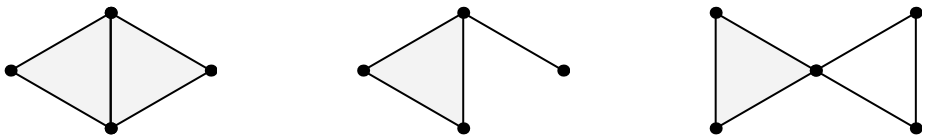
Dado um simplexo t o conjunto de todas as faces próprias s desse simplexo é chamado de ***bordo*** *e é denotado por $\partial t = \{s \prec t \mid s \in \overline{s}\}$.*

Dado um simplexo $t \in K$ definimos a sua ***estrela*** *como sendo o seguinte conjunto:* $\operatorname{star}(t) = \{t \prec s \mid s \in K\}$.

Um simplexo $s \in K$ é dito ser ***maximal*** *se não existem nenhum simplexo $t \in K$ tal que $s \prec t$. Um complexo é dito ser* ***puro*** *se todos os simplexos maximais tiverem a mesma dimensão. Nesse caso dizemos que o complexo tem dimensão d, onde d é a dimensão de qualquer um dos simplexos maximais.* □

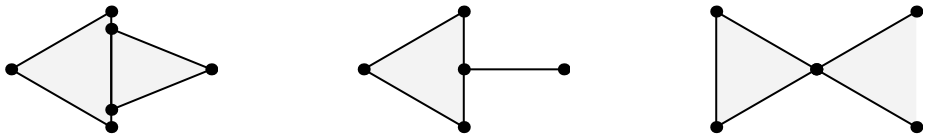
Note que para todo k-simplexo t, ∂t é um complexo puro de dimensão $k-1$.

Na fig. 2.3 representamos conjuntos de simplexos que são complexos simpliciais e na fig. 2.4 na próxima página temos exemplos de conjuntos que não são complexos simpliciais. Em ambos em caso listamos também o f-vetor $f := (|K^{(0)}|, |K^{(1)}|, |K^{(2)}|)$ dos conjuntos. Nos exemplos positivos (a) é puro de dimensão 2, já (b) e (c) não são puros. Nos exemplos negativos, (a) e (b) não são complexo pois as intersecções não são simplexos em (c) uma das faces do 2-simplexo a direita que não está presente.



(a) $(4,5,2)$ (b) $(4,4,1)$ (c) $(5,6,1)$

Figura 2.3: Exemplos de complexos simpliciais



(a) $(6,6,2)$ (b) $(5,4,1)$ (c) $(5,5,2)$

Figura 2.4: Exemplos de conjuntos que não são complexos simpliciais

Estamos interessados apenas em variedades que admitem serem descritas por um complexo simplicial, ou seja, que exista um homeomorfismo entre a representação geométrica de um complexo simpliciais e a variedade. As variedades que admitem essa representação formam a categoria das *variedades lineares por partes*. Vamos agora introduzir esses conceitos. Primeiro definir o que é representação geométrica de um complexo simplicial.

Definição 2.5. *Dado um complexo K podemos construir um espaço topológico denotado por $|K|$ chamado de* ***representação geométrica de K****. Para cada simplexo $s \in K$ considere o seu envoltório convexo com a topologia herdada de $\mathbb{R}^n$, o espaço topológico desejado é dado pela união desses convexos.* □

Estamos interessados em espaços topológicos que sejam localmente homeomorfos a representação geométrica de complexos simpliciais, para isso definimos:

Definição 2.6. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um espaço topológico. X é dito ser um* ***poliedro*** *se para todo ponto $x \in X$ existir um complexo simplicial finito tal que a representação geométrica desse complexo contenha uma vizinhança de x.* □

A principal razão para considerarmos esse tipo de espaço topológico é a existência do seguinte teorema:

Teorema 2.1. *Dado um poliedro X existe um complexo simplicial K tal que $|K| \simeq X$. K é dito ser um* ***triangulação*** *de X.*

Certas aplicações entre poliedros preservam são especiais, essas aplicações são chamadas lineares por partes. Esse tipo de aplicação da a noção correta de morfismos na categoria de variedades lineares por partes.

Definição 2.7. *Seja $X \subset \mathbb{R}^n$ um poliedro. Dizemos que $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ é* ***linear*** *se f é uma restrição de uma aplicação afim de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dizemos que $f\colon X \to R^m$ é* ***linear por partes*** *se existe uma triangulação T de X de forma que a restrição de f, utilizando o homeomorfismo entre X e $|T|$, sobre cada uma das realizações geométricas dos simplexos de T for linear.*

Dado dois poliedros $X \subset \mathbb{R}^n$ e $Y \subset \mathbb{R}^m$ a aplicação $f\colon X \to Y$ é dita ser linear por partes se a aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ que define essa aplicação for linear por partes.

Dizemos que dois poliedros X e Y são **PL-*isomorfos*** *se existe uma aplicação linear por partes com inversa linear por partes entre X e Y.* □

Poliedros que são localmente homeomorfos à $\mathbb{R}^n$ definem uma **PL**-variedade. Em detalhes temos:

Definição 2.8. *Seja M um poliedro. Dizemos que M é uma* **PL-*variedade de dimensão n*** *se para todo ponto $x \in M$ existe uma vizinhança $U \subset M$ que contêm x e um homeomorfismo linear por partes $U \simeq \mathbb{R}^n$.* □

Note que como uma **PL**-variedade M é um poliedro ela admite uma triangulação, ou seja, existe um complexo simplicial T tal que $|T| \simeq M$.

Se M for uma **PL**-variedade como $\partial M \neq$, dado uma triangulação T de M podemos considerar uma triangulação de ∂M que seja um subcomplexo de T, a existência dessa triangulação segue diretamente das definições acimas. Iremos denotar essa triangulação da fronteira por $T\big|_{\partial}$.

Uma **PL**-variedade M admite não apenas uma mas infinitas triangulações. Uma pergunta importante é como podemos relacionar triangulações diferentes de uma mesma variedade M. Essa questão é respondida por um teorema de Pachner (1991).

Teorema 2.2 (Pachner 1991). *Dado duas* ***triangulações*** *T_1 e T_2 de dimensão n valem as seguintes afirmações:*

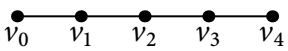
1. *Se T_1 e T_2 são* **PL**-*isomorfos, então existe uma sequência finita de de* ***passos de Pachner*** *que deforma T_1 em T_2;*

2. *Se T_2 é obtido de T_1 por uma sequência finita de* ***passos de Pachner*** *então T_1 e T_2 são* **PL**-*isomorfos.*

Lickorish. 1999. "Simplicial moves on complexes and manifolds". Em *Proceedings of the Kirbyfest,* editado por Joel Hass e Martin Scharlemann, 2:299–320. Geometry & Topology Monographs.

Não vamos provar esse teorema aqui, uma versão da prova desse teorema se encontra em Lickorish (1999). Iremos estudar em mais detalhes como são definidos os passos de Pachner, obtendo algumas das propriedades que são importantes desses passos para o nosso trabalho.

Vamos primeiro introduzir os passo em casos simples e motivar a sua construção no caso geral. O caso mais simples não trivial é o de triangulações de variedades 1-dimensionais. Localmente essas triangulações são 0-simplexos conectados por 1-simplexos, como abaixo:

$T =$ 

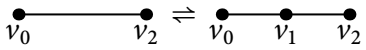
que é a triangulação de $[0,1]$. Se identificarmos v_0 e v_4 temos uma triangulação de S^1. Essas são todas as variedades compactas orientáveis dessa dimensão.

Nessa figura também introduzimos uma convenção que será utilizada ao longo desse texto. Iremos representar complexos utilizando a representação geométrica dos simplexos em termos de convexos e iremos nomear os vértices que descrevem os simplexos. Acima, por exemplo, temos o complexo $T = \{[v_0], [v_1], [v_2], [v_3], [v_4][v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_4]\}$. Iremos apresentar esse complexo também como uma lista vertical e horizontal, separando os simplexos por dimensão. No exemplo acima temos:

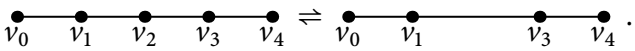
$$T = \left\{ \begin{matrix} [v_0], [v_1], [v_2], [v_3], [v_4] \\ [v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_4] \end{matrix} \right\}$$

Note que a fronteira de uma variedade 1-dimensional ou é vazia, se a variedade for fechada, ou é composta de dois pontos, em outras palavras, toda triangulação de uma variedade 1-dimensional tem a mesma triangulação na fronteira. Assim por hora não iremos nós preocupar com o ocorre na fronteira.

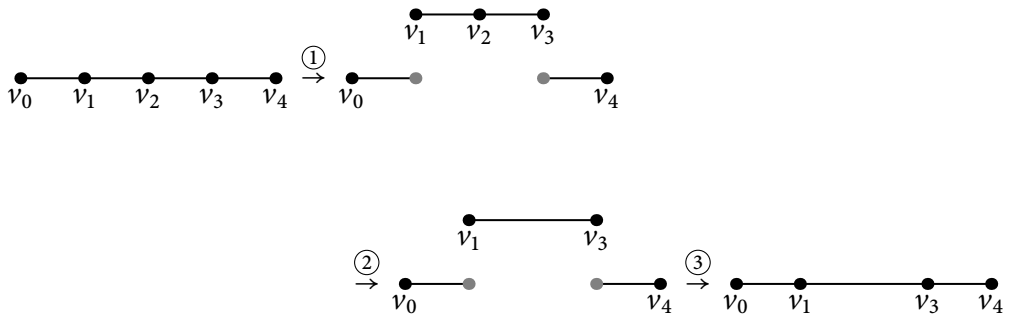
Os passos de Pachner sempre aparecem em pares, sendo um inverso do outro. Nessa dimensão temos apenas um único par e representado pela mutação abaixo



Por exemplo, as duas triangulações abaixo são obtidas uma da outra por um passo de Pachner:



Em detalhes essa mutação descreve o seguinte processo:



onde em ① removemos o complexo $\overline{\{[v_1, v_2], [v_2, v_3]\}}$, em ② trocamos esse complexo pelo complexo $\overline{\{[v_1, v_3]\}}$, em ③ colamos esse último simplexo usando uma aplicação linear por partes.

Nesse caso é fácil ver que toda triangulação das mesma variedades pode ser obtida uma da outra por uma sequência de passos de Pachner, já que elas diferem apenas pelo número de vértices. Porém como ilustração para motivar o caso mais geral vamos descrever esquematicamente como podemos construir uma dessas sequências. Para isso precisamos introduzir a noção de quando uma triangulação pode ser construída simplexo por simplexo a partir de uma outra triangulação.

Definição 2.9. *Sejam dados dois complexos K e L, $K \subset L$ e um k-simplexo $s \in L$, tais que $L = K \cup s$ e $K \cap s$ seja um subcomplexo de ∂s puro de dimensão $k-1$. Dizemos que K é obtido de L por um* ***descascamento elementar*** *e denotamos isso por $L \searrow K$. Dizemos também que L é obtido de K por um* ***descascamento elementar inverso*** *e denotado isso por $K \swarrow L$.*

Agora seja dado uma família de complexos K_i, $0 \leq i \leq n$, tais que

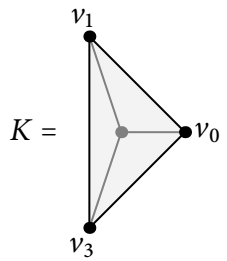
$$K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$$

e que $K_{i+1} \searrow K_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Essa família é dita ser um ***descascamento de K_n em K_0*** *e K_n é dito ser* ***descascável em K_0****.*

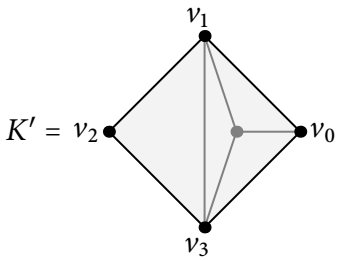
Se d é o número de simplexos maximais em $K \cap s$ dizemos que o descascamento elementar é do tipo $(d, n+1-d)$. □

Uma sequência de passos de Pachner em dimensão d pode ser descrita como um descascamento de um complexo de dimensão $d+1$ em um segundo complexo de dimensão $d+1$ onde as triangulações conectadas pelos passos de Pachner são restrições desses complexos a fronteira. Para visualizar esse procedimento vamos considerar o caso anterior, mas agora identificando a extremidades, v_0 e v_4, para obter uma triangulações de S^1. Iremos considerar o caso de variedades com fronteira mais a frente.

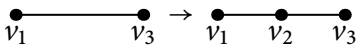
Considere o complexo K, $|K| \simeq D^2$, representado abaixo



note que $\partial|K| \simeq S^1$ e $T \coloneqq K\big|_\partial$ é uma triangulações de S^1. Considere também o complexo K' como abaixo



novamente $\partial|K'| \simeq S^1$ e $T' \coloneqq K'\big|_\partial$ é uma outra triangulações de S^1. Essas duas triangulações, T e T', são conectadas pelo passo de Pachner:



Note agora que temos $K \subset K'$, $K \cup \overline{[v_1, v_2, v_3]} = K'$ e $K \cap \overline{[v_1, v_2, v_3]} = \overline{[v_1, v_3]}$. $\overline{[v_1, v_3]}$ tem um único simplexo maximal de dimensão 1, ou seja, é puro. Disso segue que $K' \searrow K$, em outras palavras, K é obtido de K' por um descascamento elementar. Esse descascamento quando restrito a fronteira descreve exatamente o passo de Pachner.

Dados duas triangulações T e T' a existência de uma sequência de passos de Pachner segue do fato de existir um complexo K com $T = K\big|_\partial$ e um complexo K' com $T' = K'\big|_\partial$ tal que K' é descascável em K. A sequência de descascamentos descreve, quando restrita a fronteira, a sequência de passos de Pachner. Usamos apenas descascamentos elementares inversos para descrever os passos de Pachner por simplicidades, já que eles adicionam simplexos a triangulação o que torna eles mais fáceis de serem descritos, não há perda de generalidade ao fazer isso.

Vamos voltar ao caso 1-dimensional e estudar em detalhes a relação entre o passo de Pachner e o descascamento elementar que descrevemos. O passo de Pachner consiste em substituir o complexo $\overline{[v_1, v_3]}$ pelo complexo $\overline{\{[v_1, v_2], [v_2, v_3]\}}$, note que a fronteira de ambos esses complexos é a mesma, $\{[v_1], [v_3]\}$. Esses dois complexos são completamente caracterizados pelos simplexos maximais de $\partial[v_1, v_2, v_3] = \overline{\{[v_1, v_3], [v_1, v_2], [v_2, v_3]\}}$ e são uma bipartição disjuntas desses simplexos maximais em dois conjuntos. Esses dois complexos são homeomorfos a D^1. Esse tipo de mutação é chamada de um passo biestelar e é um dos dois tipos de passos de Pachner.

Definição 2.10. *Seja K um complexo de dimensão n. Considere agora o bordo de um $(n+1)$-simplexo s, ∂s. Denote o conjunto de simplexos maximais por x. Agora considere uma bipartição disjunta desses simplexos maximais, ou seja, dois conjuntos de simplexos x_0 e x_1 tais que $x_0 \cap x_1 = \varnothing$ e $x_0 \cup x_1 = x$. Esses conjuntos devem ser*

*escolhidos de forma que $x_0 \subset K$ e $x_1 \cap K = \varnothing$. Um **passo biestelar** é a operação realizada quando removemos o subcomplexo $\overline{x_0}$ de K e adicionamos o complexo $\overline{x_1}$, ou seja, o complexo K' dado por $K' \coloneqq (K \setminus \overline{x_0}) \cup \overline{x_1}$.*

*Se x_0 é contém d simplexos chamamos esse passo de Pachner de um **passo biestelar do tipo $(d, n+2-d)$**.* □

Lema 2.1. *Seja x_0 e x_1 conjuntos de simplexos como na definição anterior. Os complexos simpliciais $\overline{x_0}$ e $\overline{x_1}$ são **conexos**, suas representações geométricas são **homeomorfas a D^n** e as triangulações da fronteiras desses discos **satisfazem** $\overline{x_0}\big|_\partial = \overline{x_0}\big|_\partial$.*

Demonstração. Se $n = 0$ essas afirmações são triviais, então assuma que $n \geq 1$.

Como cada simplexo maximal é a face oposta de algum vértice, então temos um simplexo maximal para cada vértice de s. Para verificar a conectividade dos subcomplexos podemos supor que o conjunto em questão tem ao menos dois simplexos maximais, caso contrário temos um único simplexo, que é automaticamente conexo. Considere dois simplexos maximais p_i e p_j e denote os vértices opostos por, respectivamente, v_i e v_j. Agora $[v_i, v_j] \prec s$, já que s é um simplexo. Dessa forma a face oposta ao simplexo $[v_i, v_j]$ é face mutua de p_i e de p_j ou seja $\overline{p_i} \cap \overline{p_j} \neq \varnothing$. Isso vale para todo par de simplexos e segue que os complexos $\overline{x_0}$ e $\overline{x_1}$ são conexos.

$|s|$ é homeomorfo a D^{N+1} logo $\partial|s| \simeq S^n$. Como $\overline{x_0} \cup \overline{x_1} = \partial s$ e $\overline{x_0}$ e $\overline{x_1}$ são conexos então $|\overline{x_0}|$ e $|\overline{x_0}|$ são homeomorfos a D^n.

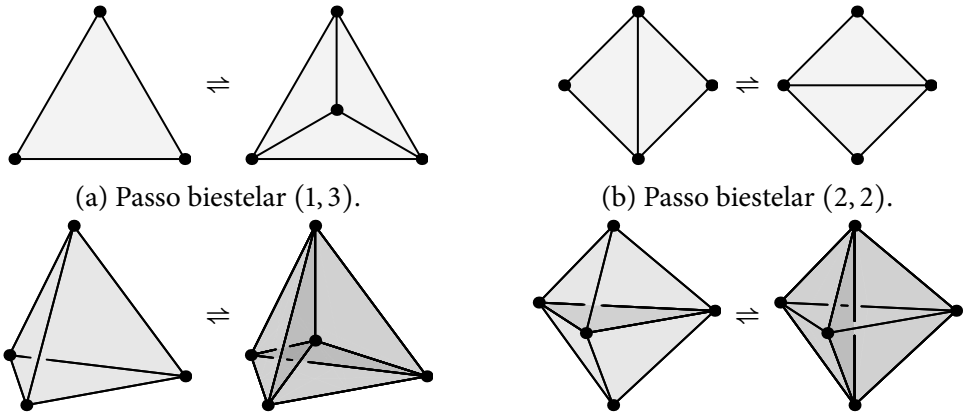
Agora para verificar que as fronteiras são as mesmas basta notar que um $(n-1)$-simplexo pertence a $\overline{x_0}\big|_\partial$ se e somente se ele for a face oposta de um 1-simplexo $[v_i, v_j]$ onde $v_i \in \overline{x_0}$ e $v_j \notin \overline{x_0}$. Como a bipartição é disjunta então $v_i \notin \overline{x_1}$ e $v_j \in \overline{x_1}$, ou seja, a face oposta ao 1-simplexo $[v_i, v_j]$ também pertence a $\overline{x_1}\big|_\partial$. Esse argumento é claramente simétrico e disso segue que a triangulação na fronteira é a mesma. □

Na fig. 2.5 na página oposta temos representados todos os passos biestelares em dimensões 2 e 3. Os passos são apresentados em pares, já que pares do tipo $(d, n+2-d)$ e $(n+2-d, d)$ são inversos um do outro.

Se a variedade em questão for fechada os passos biestelar são todos os passos de Pachner. Caso a variedade tenha fronteira os passos biestelar não alteram a fronteira. Podemos conectar as triangulações da fronteira utilizando descascamento elementares inversos aplicados a simplexos da fronteira, que seguido de passos biestelares no interior conectam qualquer duas triangulações. Dessa forma podemos definir:

Definição 2.11. *Um **passo de Pachner** é um passo biestelar aplicado ao interior ou um descascamento elementar inverso aplicado a fronteira.*

Um passos biestelar de dimensão n são do tipo $(d, n+2-d)$ onde $1 \leq d \leq n+1$ e os descascamentos elementares inversos de dimensão n são do tipo $(d, n+1-d)$ onde $1 \leq d \leq n$. □



(a) Passo biestelar $(1,3)$. (b) Passo biestelar $(2,2)$.

(c) Passo biestelar $(1,4)$. (d) Passo biestelar $(2,3)$.

Figura 2.5: Passos biestelares em dimensão 2 e 3.

2.2 Categorias, grupoide de caminhos e grupos

Nessa seção iremos definir *categorias* e sua generalização 2-*categorias*. Uma categoria também e chamada de uma 1-categoria. Como ilustração dos conceitos e operações iremos definir o 1-grupoide e 2-grupoide de caminhos, que serão os nossos protótipos para essas categorias e terão um papel importante para definir configurações de gauge e 2-gauge no próximo capítulo.

Definição 2.12. *Uma* ***categoria*** *C consiste nos seguinte dados:*

1. *uma classe de* ***objetos****: C_0;*
2. *uma classe de* ***morfismos****: C_1;*

com as seguintes estruturas:

1. *uma aplicação* ***origem*** *$s\colon C_1 \to C_0$;*
2. *uma aplicação* ***destino*** *$t\colon C_1 \to C_0$;*
3. *uma aplicação parcial $\circ\colon C_1 \times C_1 \to C_1$ que associa para cada par de morfismos f e g, $t(f) = s(g)$, o* ***morfismo composto*** *$f \circ g$;*[†]
4. *uma aplicação $1\colon C_0 \to C_1$ que associa a cada objeto x um* ***morfismo identidade****, denotado por 1_x;*

de forma que as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

1. *a composição de morfismos deve satisfazer: $s(f \circ g) = s(f)$ e $t(f \circ g) = t(g)$;*

[†] Utilizamos a ordem diagramática para composições, ou seja, se os morfismos forem funções temos que $(f \circ g)(x) := g(f(x))$.

2. *para todo objeto x o morfismo 1_x satisfaz: $s(1_x) = x$ e $t(1_x) = x$;*

3. *a composição é associativa: para todo $f, g, h \in C_1$ tal que $t(f) = s(g)$ e $t(g) = s(h)$ temos que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;*

4. *a composição e os morfismos identidades satisfazem a regras da identidade em ambos os lados: para todo $f \in C_1$, se $s(f) = x$ e $t(f) = y$ então $1_x \circ f = f = f \circ 1_y$.*

Se $f \in C_1$ é um morfismo tal que $s(f) = x$ e $t(f) = y$ iremos denotar esse morfismo por $f\colon x \to y$. Se $x, y \in C_0$ são um par de objetos iremos denotar a coleção de todos os morfismos f com $s(f) = x$ e $t(f) = y$ por $\mathrm{Hom}_C(x, y)$ ou simplesmente $\mathrm{Hom}(x, y)$ se apenas uma categoria estiver envolvida. Não havendo confusão iremos nos permitir escrever frases como "um objeto $x \in C$" no lugar de "um objeto $x \in C_0$" e "um morfismo $f\colon x \to y \in C$" no lugar de "um morfismo $f \in C_1$, tal que $s(f) = x$ e $t(f) = y$". □

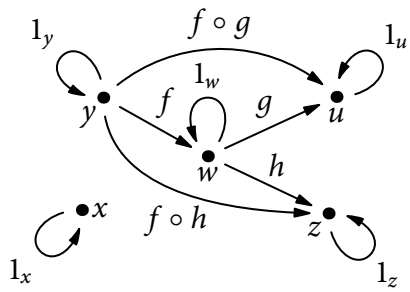


Figura 2.6: Uma categoria com objetos $\{x, y, z, u, w\}$ e morfismos $\{f, g, h\}$, compostas e identidades.

Uma outra forma de apresentar uma categoria é como um um grafo direcionado onde é permitido laços e múltiplas arestas entre vértices. Os vértices do grafo são os objetos e as arestas são os morfismos, que vão do objeto origem para o objeto destino. Nesse grafo, que iremos chamar de um *diagrama*, é introduzindo uma operação de composição que relaciona um par de arestas com uma terceira. Na fig. 2.6 temos um exemplo de uma categoria apresentada como um diagrama. Note que para todo par f e g de arestas que podem ser compostas existe uma aresta representando $f \circ g$. A composição de dois morfismos $f\colon x \to y$ e $g\colon y \to z$ pode ser representado em diagramas como abaixo:

$$f \circ g = \overset{x}{\bullet} \xrightarrow[f]{} \overset{y}{\bullet} \xrightarrow[g]{} \overset{z}{\bullet} = \overset{x}{\bullet} \xrightarrow[f \circ g]{} \overset{z}{\bullet}$$

onde estamos utilizado diagramas não só para representar os objeto e morfismos da categoria mas também as suas operações, nesse caso a operação de composição é representada por justaposição.

Definição 2.13. *Um diagrama de uma categoria C é dito* ***comutar*** *ou* ***ser comutativo*** *se todo morfismo com a mesma origem e o mesmo destino forem iguais.* □

Todas as categorias que iremos utilizar serão *categorias pequenas*. Uma categoria C é dita ser pequena se C_0 e C_1 são conjuntos.

Uma outra importante noção é de um *funtor*, um morfismos entre duas categorias que preserva as estruturas das categorias.

Definição 2.14. *Dado duas categorias C e D, um* ***funtor*** *covariante, $F\colon C \to D$, é um par de aplicações $F_0\colon C_0 \to D_0$ e $F_1\colon C_1 \to D_1$, que satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *F preserva a origem e o destino: se $f \in C_1$ é tal que $s(f) = x$ e $t(f) = y$ então $s(F_1(f)) = F_0(s(f))$ e $t(F_1(f)) = F_0(t(f))$;*

2. *F preserva a composição: se $f, g \in C_1$ são tais que $f \circ g$ existe então $F_1(f \circ g) = F_1(f) \circ F_1(g)$;*

3. *F preserva as identidades: se $x \in C_0$ então $F_1(1_x) = 1_{F_0(x)}$.*

□

Não havendo confusão iremos utilizar o mesmo símbolo para ambas as aplicações na definição acima, ou seja, se $x \in C_0$ iremos escrever $F(x)$ no lugar de $F_0(x)$ e se $f \in C_1$ iremos escrever $F(f)$ no lugar de $F_1(f)$.

Uma definição alternativa de funtor, que facilita a generalização futura, é a seguinte

Definição 2.15. *Dado duas categorias C e D, um* ***funtor*** *covariante, $F\colon C \to D$, é um par de aplicação $F_0\colon C_0 \to D_0$ e $F_1\colon C_1 \to D_1$, tais que todo diagrama comutativo de C é levado num diagrama comutativo obtido substituindo todo objeto $x \in C_0$ por $F(x)$ e todo morfismo $f \in C_1$ por $F(f)$.* □

A equivalência dessa definição segue da existência dos seguintes diagramas em C, que são levados em diagramas em D. A propriedade 1 da definição 2.14 segue direto da definição

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"'] & y \arrow[r, "F"] & F(x) \arrow[r, "F(f)"'] & F(y) \end{tikzcd} .$$

A propriedade 2 segue de impor que o diagrama de C abaixo comute

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "g"] & \\ x \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"'] & & z \end{tikzcd} \xrightarrow{F} \begin{tikzcd} & F(y) \arrow[dr, "F(g)"] & \\ F(x) \arrow[ur, "F(f)"] \arrow[rr, "F(h)"'] & & F(z) \end{tikzcd} .$$

A propriedade 3 segue de impor que o diagrama de C abaixo comute

$$\begin{tikzcd} \bullet x \arrow[loop below, "1_x"] \arrow[r, "F"] & \bullet F(x) \arrow[loop below, "F(1_x)"] \end{tikzcd},$$

note que do lado direito temos que ter $F(1_x) = 1_{F(x)}$, por que esse diagrama comuta e como esses dois morfismos têm as mesma origem e destino eles são iguais.

Definição 2.16. *Dada uma categoria C um morfismo $f: x \to y$ dito ser um* ***isomorfismo*** *se existe um morfismo $g: y \to x$ tal que $f \circ g = 1_x$ e $g \circ f = 1_y$.* □

Se f é um isomorfismo então g, o *morfismo inverso*, é único e é denotado por f^{-1}.

Definição 2.17. *Um* ***grupoide*** *é uma categoria pequena onde todo morfismo é um isomorfismo.* □

Dois grupoides serão importantes o primeiro é um grupo finito G: um conjunto com um operação binária associativa, com uma identidade e onde todo elemento tem uma inversa. Vamos introduzir uma outra definição de um grupo:

Definição 2.18. *Um* ***grupo*** *G é um grupoide de um único objeto.* □

Vamos estudar essa definição em detalhes. A categoria tem um único objeto que iremos denotar por $\bullet$. O único conjunto de morfismos é o $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ e todo morfismo é da forma $f : \bullet \to \bullet$. Dentro desse conjunto existe um morfismo especial: o morfismo identidade $1_\bullet$. Para todo morfismo $f \in \mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ existe um morfismos inverso f^{-1} que satisfaz

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = 1_\bullet \ .$$

Essas propriedades são exatamente o que é preciso para tornar o conjunto $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ um grupo quando definimos a operação de produto $*: \mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) \times \mathrm{Hom}(\bullet, \bullet) \to \mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ para todo par $f, g \in \mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$ por

$$f * g := \bullet \xrightarrow[f]{} \bullet \xrightarrow[g]{} \bullet = \bullet \xrightarrow[fg]{} \bullet .$$

Um segundo grupoide importante é o *grupoide de caminhos* sobre uma triangulação T que iremos denotar por $\mathscr{P}_1(T)$. Essa categoria descreve, no contexto de complexos, a coleção de curvas orientadas sobre uma variedade, sobre relações de equivalência apropriadas. No caso de uma variedade diferenciável o grupoide de caminho tem como objetos pontos de M, os morfismos são curvas $\gamma: [0,1] \to M$ onde $s(\gamma) = \gamma(0)$ e $t(\gamma) = \gamma(1)$ e 1_x é a curva constante $\gamma(t) = x$, não vamos definir o caso diferenciável em detalhes, uma introdução a esse tema é (Baez e Huerta 2010), iremos apenas introduzir apenas o caso combinatorial para variedades lineares por partes.

Definição 2.19. *Dado uma triangulação T, o* ***grupoide de caminhos sobre T*** *denotado por $\mathscr{P}_1(T)$ é um grupoide com o seguintes dados:*

1. *os* ***objetos*** *são os vértices de T;*
2. *os* ***morfismos*** *são todas as sequências ordenadas de vértices $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ que são, par a par, primeiros vizinhos, ou seja, se $n \geq 1$, temos que para todo $0 \leq i < n$ o 1-simplexo $[v_i, v_{i+1}]$ é simplexo de T;*

e estruturas:

1. *a* ***origem*** *de um morfismo é o primeiro vértice da sequência;*
2. *o* ***destino*** *de um morfismo é o último vértice da sequência;*
3. *a* ***composição de morfismos*** *é dado pela concatenação das sequências;*
4. *o* ***morfismo identidade*** *associado ao objeto v é a sequência de um único vértice $1_v = (v)$.*

Onde impomos as seguintes relações de equivalência sobre os morfismos

1. $(\ldots, v_0, v_1, v_1, v_2, \ldots) \sim (\ldots, v_0, v_1, v_2, \ldots)$
2. $(\ldots, v_0, v_1, v_0, v_2, \ldots) \sim (\ldots, v_0, v_2, \ldots)$

para todos os vértices v_0, v_1, v_2 com $v_0 \neq v_1$.

Iremos chamar os morfismos de ***caminhos****. Se $K \subset T$ for um complexo iremos dizer que γ é um* ***caminho sobre K*** *se γ for uma sequência de 0-simplexos de K. Se $s(\gamma) = t(\gamma)$ dizemos que γ é um* ***caminho fechado****.* □

A primeira relação de equivalência pode ser vista como a versão para complexos da invariância por difeomorfismos locais que usualmente associamos a curvas $\gamma : [0,1] \to M$ em uma variedade diferenciável M, a segunda identidade é a invariância por homotopia finas (Baez e Huerta 2010).

Com as equivalências da definição podemos ver que essa categoria é de fato um grupoide já que, explicitamente, dado um caminho $\gamma = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ o caminho inverso é $\gamma^{-1} = (v_n, \ldots, v_1, v_0)$.

Uma característica importante dessa categoria é que podemos definir os caminhos utilizando geradores. Para cada 1-simplexo, $[v_i, v_j] \in T$, podemos associar um *caminho elementar* associado a esse 1-simplexo $\gamma = (v_i, v_j)$, agora todos os caminhos são obtidos por composição e inversões desses caminhos elementares. Note que para cada 1-simplexo $[v_i, v_j]$ podemos associar dois caminhos elementares (v_i, v_j) e (v_j, v_i), porém como geramos todas as inversões não importa qual gerador escolhemos, porém essa liberdade de escolha será utiliza no futuro.

Geradores serão úteis para definir funtores com domínio nessa categoria, já que podemos definir o funtor sobre os geradores, respeitando as equivalências e estender por composição e inversão.

Quando for necessário distinguir os objetos definidos acima, relativos a uma 1-categoria, dos definidos a seguir, relativos a uma 2-categoria, iremos prefixar esse objetos com 1, ou seja, iremos escrever 1-categorias, 1-grupos, 1-caminhos, etc.

Uma 2-categoria é uma generalização do conceito de categoria. Do ponto de vista diagramático, uma categoria é um grafo direcionado com vértices e arestas conectando pares de vértices. Analogamente, uma 2-categoria é um 2-grafo direcionado, onde novamente temos vértices e arestas conectando pares de vértices mas agora também temos "superfícies", células bidimensionais, conectando pares de arestas. Antes de introduzir a definição formal de uma 2-categoria vamos introduzir os diversos conceitos que aparecem na sua definição em termos de diagramas.

Os três elementos que aparecem na definição de uma 2-categorias $\mathcal{C}$ são objetos $\mathcal{C}_0$, 1-morfismos $\mathcal{C}_1$ e 2-morfismos $\mathcal{C}_2$. Os dois primeiros são definidos da mesma forma como feito para uma 1-categoria. Os elementos novos dessa definição são os 2-morfismos, que iremos denotar por $\alpha\colon f \to g$, onde f e g são 1-morfismos tais que $s(f) = s(g)$ e $t(f) = t(g)$. Abaixo temos a representação em termos de diagrama de um 2-morfismo:

$$\alpha = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\alpha \Downarrow"] & y \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

As aplicações origem e destino para 2-morfismos são $s\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$ e $t\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$, respectivamente. Para o 2-morfismo representado acima temos que $s(\alpha) = f$ e $t(\alpha) = g$. Iremos chamar um diagrama desse tipo de um *bigon*, já que ele tem duas arestas.

Note que no digrama da eq. (2.2) estamos representando um único elemento de uma 2-categoria: um 2-morfismo α. As etiquetas x, y, f e g servem apenas para que, em um único diagrama, sejam também representados as origens e destinos dos morfismos, que tem um papel importante na definição das operações sobre 2-morfismos. Isso é semelhante quando representamos uma função sobre conjuntos por $f\colon A \to B$, com o domínio A e contradomínio B explícitos. Esses conjuntos fazem parte do pacote de elementos que define a função f. Alterar o domínio ou contradomínio implica em alterar a função.

A composição de 1-morfismos seguem as mesmas regra definidas para uma 1-categoria. Agora para os 2-morfismos temos dois tipos de composição: *composição horizontal* e *composição vertical*. Ambas serão operações binárias associativas. Para um par de 2-morfismos α e β a composição horizontal está definida quando tivermos

$t(s(\alpha)) = s(s(\beta))$, nesse caso representamos o resultado da composição por $\alpha \odot \beta$, em diagramas essa operação é representada por:

$$\alpha \odot \beta = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "h"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "\alpha\Downarrow"] & y \arrow[r, bend left=60, "g"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "k"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "\beta\Downarrow"] & z \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f \circ g"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "h \circ k"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "\alpha \odot \beta\Downarrow"] & z \end{tikzcd}$$

note que temos $s(\alpha \odot \beta) = s(\alpha) \circ s(\beta)$ e $t(\alpha \odot \beta) = t(\alpha) \circ t(\beta)$.

A segunda composição, chamada de composição vertical e existe para todo par de 2-morfismos α e β tais que $t(\alpha) = s(\beta)$. A composição vertical é representada por $\alpha \circ \beta$, em diagramas por

$$\alpha \circ \beta = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, "g"{name=M}] \arrow[r, bend right=60, "h"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "\alpha\Downarrow"] \arrow[D, phantom, "\beta\Downarrow"] & y \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "h"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "\alpha \circ \beta\Downarrow"] & y \end{tikzcd}$$

As origem e destino satisfazem $s(\alpha \circ \beta) = s(\alpha)$ e $t(\alpha \circ \beta) = t(\beta)$.

Teremos um 2-*morfismos identidade* para cada 1-morfismo $f \in C_1$. Iremos representar esse 2-morfismo por 1_f e ele satisfaz que $s(1_f) = t(1_f) = f$. Esse 2-morfismo deve satisfazer a regra da identidade para a operação de composição vertical, como representado no diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, "f"{name=M}] \arrow[r, bend right=60, "g"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "1_f\Downarrow"] \arrow[D, phantom, "\alpha\Downarrow"] & y \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "g"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "\alpha\Downarrow"] & y \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, "g"{name=M}] \arrow[r, bend right=60, "g"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "\alpha\Downarrow"] \arrow[D, phantom, "1_g\Downarrow"] & y \end{tikzcd}$$

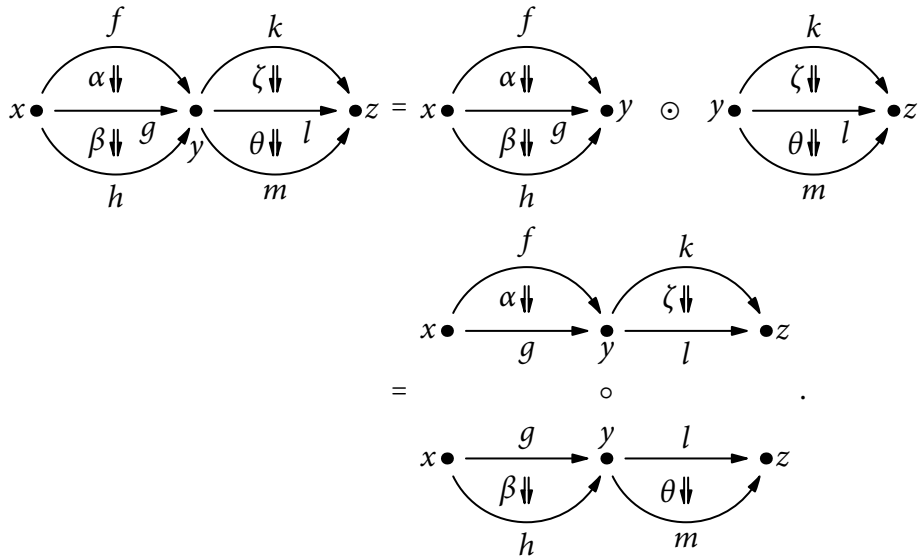
Uma subcoleção dos 2-morfismos identidades são identidades para a composição horizontal, eles são as identidades associadas aos 1-morfismos identidades. Para cada objeto $x \in C_0$ temos o 2-morfismo 1_{1_x}, que devem satisfazer a regra da identidade como representado abaixo:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "g"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "\alpha\Downarrow"] & y \arrow[r, bend left=60, "1_y"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "1_y"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "1_{1_y}\Downarrow"] & y \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "g"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "\alpha\Downarrow"] & y \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left=60, "1_x"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "1_x"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "1_{1_x}\Downarrow"] & x \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "g"'{name=D}] \arrow[U, phantom, "\alpha\Downarrow"] & y \end{tikzcd}$$

A última relação, que é um conceito novo, que não existia para 1-categorias, é que os 2-morfismos devem satisfazer a *regra de troca*, que é uma espécie de regra associativa bidimensional para 2-morfismos, algebricamente temos:

$$(\alpha \circ \beta) \odot (\zeta \circ \theta) = (\alpha \odot \zeta) \circ (\beta \odot \theta)$$

para toda quádrupla de 2-morfismos onde as composições acima estão definidas. Em termo de diagramas, isso significa que qualquer forma de ler o diagrama abaixo à esquerda, seja compondo primeiro na vertical e compondo o resultado na horizontal ou na ordem contrária, resulta no mesmo 2-morfismo.



Podemos agora, depois de introduzidos todos os conceitos importantes para definir uma 2-categoria, listar formalmente os dados, estruturas e propriedade de uma 2-categoria. Para mais detalhes sobre 2-categorias consultar (Street 1996) e (Lack 2010). Um outro ponto importante é que o tipo de 2-categoria que estamos usando é usualmente chamado de uma 2-*categoria estrita* e é uma das possíveis definições de 2-categoria. Existem definições mais compactas de 2-categorias, escolhemos aqui usar uma definição onde todos os elementos dessa definição são listados explicitamente.

Street. 1996. "Categorical Structures". Em *Handbook of Algebra,* editado por M. Hazewinkel, 1:529–577.

Lack. 2010. "A 2-categories companion". Em *Towards Higher Categories,* editado por John C. Baez e J. Peter May, 105–191.

Definição 2.20. *Uma 2-categoria $\mathcal{C}$ consiste nos seguinte dados:*

1. *uma coleção de* ***objetos****: $\mathcal{C}_0$;*
2. *uma coleção de* **1-*morfismos***: $\mathcal{C}_1$;*
3. *uma coleção de* **2-*morfismos***: $\mathcal{C}_2$;*

com as seguintes estruturas:

1. *uma aplicação* ***origem*** *para* 1*-morfismos:* $s\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0$*;*
2. *uma aplicação* ***destino*** *para* 1*-morfismos:* $t\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0$*;*
3. *uma aplicação* ***origem*** *para* 2*-morfismos:* $s\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$*;*
4. *uma aplicação* ***destino*** *para* 2*-morfismos:* $t\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$*;*
5. *uma aplicação parcial* $\circ\colon \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_1$ *que associa para cada par de* 1*-morfismos* f *e* g *tais que* $t(f) = s(g)$ *o* ***1-morfismo composto*** $f \circ g$*;*
6. *uma aplicação parcial* $\odot\colon \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_2$ *que associa para cada par de* 2*-morfismos* α *e* β *tais que* $t(s(\alpha)) = s(s(\beta))$ *o* ***2-morfismo composto horizontalmente*** $\alpha \odot \beta$*;*
7. *uma aplicação parcial* $\circ\colon \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_2$ *que associa para cada par de* 2*-morfismos* α *e* β *tais que* $t(\alpha) = s(\beta)$ *o* ***2-morfismo composto verticalmente*** $\alpha \circ \beta$*;*
8. *uma aplicação* $1 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$ *que associa a cada objeto* x *um* ***1-morfismo identidade****, denotado por* 1_x*;*
9. *uma aplicação* $1 : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ *que associa a cada* 1*-morfismo* f *um* ***2-morfismo identidade****, denotado por* 1_f*;*

de forma que as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

1. *a composição de* 1*-morfismos deve satisfazer:* $s(f \circ g) = s(f)$ *e* $t(f \circ g) = t(g)$*;*
2. *a composição horizontal de* 2*-morfismos deve satisfazer:* $s(\alpha \odot \beta) = s(\alpha) \circ s(\beta)$ *e* $t(\alpha \odot \beta) = t(\alpha) \circ t(\beta)$*;*
3. *a composição vertical de* 2*-morfismos deve satisfazer:* $s(\alpha \circ \beta) = s(\alpha)$ *e* $t(\alpha \circ \beta) = t(\beta)$*;*
4. *para todo objeto* x *o* 1*-morfismo identidade satisfaz:* $s(1_x) = x$ *e* $t(1_x) = x$*;*
5. *para todo* 1*-morfismo* f *o* 2*-morfismo identidade satisfaz:* $s(1_f) = f$ *e* $t(1_f) = f$*;*
6. *a composição de* 1*-morfismos é associativa: para todo* $f, g, h \in \mathcal{C}_1$ *tal que* $t(f) = s(g)$ *e* $t(g) = s(h)$ *temos que* $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$*;*
7. *a composição horizontal de* 2*-morfismos é associativa: para todo* $\alpha, \beta, \zeta \in \mathcal{C}_2$ *tal que* $t(s(\alpha)) = s(s(\beta))$ *e* $t(s(\beta)) = s(s(\zeta))$ *temos que* $(\alpha \odot \beta) \odot \zeta = \alpha \odot (\beta \odot \zeta)$*;*

8. *a composição vertical de 2-morfismos é associativa: para todo* $\alpha, \beta, \zeta \in \mathcal{C}_2$ *tal que* $t(\alpha) = s(\beta)$ *e* $t(\beta) = s(\zeta)$ *temos que* $(\alpha \circ \beta) \circ \zeta = \alpha \circ (\beta \circ \zeta)$*;*

9. *a composição horizontal e vertical satisfazem a regra de troca: para todo* $\alpha, \beta, \zeta, \theta \in \mathcal{C}_2$ *tal que*

$$\begin{aligned} t(\alpha) &= s(\beta) \\ t(\zeta) &= s(\theta) \\ t(s(\alpha)) &= s(s(\zeta)) \\ t(s(\beta)) &= s(s(\theta)) \end{aligned}$$

   temos que

$$(\alpha \circ \beta) \odot (\zeta \circ \theta) = (\alpha \odot \zeta) \circ (\beta \odot \theta)$$

10. *a composição de* 1*-morfismos e os* 1*-morfismos identidades satisfazem a regra da identidade em ambos os lados: para todo* $f \in \mathcal{C}_1$ *se* $s(f) = x$ *e* $t(f) = y$ *então* $1_x \circ f = f = f \circ 1_y$*;*

11. *a composição horizontal de* 2*-morfismos e os* 2*-morfismos identidades obtidos de* 1*-morfismos identidades satisfazem a regra da identidade em ambos os lados: para todo* $\alpha \in \mathcal{C}_2$ *se* $s(s(\alpha)) = x$ *e* $t(s(\alpha)) = y$ *então* $1_{1_x} \odot \alpha = \alpha = \alpha \odot 1_{1_y}$*;*

12. *a composição vertical de* 2*-morfismos e os* 2*-morfismos identidades satisfazem a regra da identidade em ambos os lados: para todo* $\alpha \in \mathcal{C}_2$ *se* $s(\alpha) = f$ *e* $t(\alpha) = g$ *então* $1_f \circ \alpha = \alpha = \alpha \circ 1_g$*.*

□

Existe um outro par de operações que podemos definir numa 2-categoria, eles permitem uma definição alternativa de 2-categoria e permitem definir mais facilmente algumas das operações das 2-categorias que iremos introduzir na sequência.

Definição 2.21. *Dado uma* 2*-categoria* $\mathcal{C}$ *para todo* 1*-morfismos* f *e* 2*-morfismos* α *tais que* $t(f) = s(s(\alpha))$ *definimos o* ***whiskering a esquerda****,* $f \triangleright \alpha$*, por:*

$$f \triangleright \alpha = 1_f \odot \alpha \,,$$

se $g \in \mathcal{C}_1$ *e* $\alpha \in \mathcal{C}_2$ *são tais que* $s(g) = t(s(\alpha))$ *definimos o* ***whiskering a direita****,* $\alpha \triangleleft g$*, por:*

$$\alpha \triangleleft g = \alpha \odot 1_g \,.$$

□

Whiskerings serão representados por diagramas como abaixo:

$$\alpha \triangleleft g = \begin{tikzcd} y \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & z \arrow[r, no head, "g"] & w \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "1_g\Downarrow"] & z \end{tikzcd},$$

$$f \triangleright \alpha = \begin{tikzcd} x \arrow[r, no head, "f"'] & y \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & z \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "1_f\Downarrow"] & y \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[r, phantom, "\alpha\Downarrow"] & z \end{tikzcd}.$$

Whiskerings são definidos em termos da composição horizontal, mas podemos inverter essa relação e definir a composição horizontal em termos de whiskerings e da composição vertical. Para isso considere na regra de troca

$$(\alpha \circ \beta) \odot (\zeta \circ \theta) = (\alpha \odot \zeta) \circ (\beta \odot \theta)$$

que $\beta = 1_{t(\alpha)}$ e $\zeta = 1_{s(\theta)}$. Segue então que

$$\alpha \odot \theta = (\alpha \odot 1_{s(\theta)}) \circ (1_{t(\alpha)} \odot \theta) = [\alpha \triangleleft s(\theta)] \circ [t(\alpha) \triangleright \theta] .$$

Uma definição alternativa de 2-categoria substitui na definição que foi dada para 2-categoria a composição horizontal por whiskerings e introduz as regras de associatividade e identidade apropriadas para estes elementos. Não vamos escrever essa definição por extenso, já que ela é bastante similar a que foi apresentada, mas iremos utilizá-la quando esta definição for mais apropriada.

A definição de um morfismos entre 2-categorias pode ser formulada em termos de diagramas que comutam, onde agora um diagrama comuta se todo 2-morfismo como a mesma origem e o mesmo destino for igual.

Definição 2.22. *Dado duas 2-categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, um* ***2-funtor****, $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, é uma tripla de aplicações $F_0\colon \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$, $F_1\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{D}_1$ e $F_2\colon \mathcal{C}_2 \to \mathcal{D}_2$, tais que todo diagrama comutativo de $\mathcal{C}$ é levado num diagrama comutativo de $\mathcal{D}$.* □

Agora vamos definir o equivalente do 1-grupoide para o caso de 2-categorias.

Definição 2.23. *Dada uma 2-categoria $\mathcal{C}$ um 1-morfismo $f\colon x \to y$ é dito ser um* ***isomorfismo*** *se existe um 1-morfismo $g\colon y \to x$ tal que $f \circ g = 1_x$ e $g \circ f = 1_y$.*

Um 2-morfismo $\alpha\colon f \to g$ é dito ser uma ***equivalência*** *se existe um 2-morfismo $\beta\colon g \to f$ tal que $\alpha \circ \beta = 1_f$ e $\beta \circ \alpha = 1_g$.* □

Se f é um isomorfismo então g, o 1-*morfismo inverso*, é único e é denotado por f^{-1}. Se α é uma equivalência então β, o 2-*morfismo inverso*, é único e é denotado por α^{-1}.

Definição 2.24. *Um* **2-grupoide** *é uma 2-categoria pequena onde todo 1-morfismo é um isomorfismo e todos 2-morfismo uma equivalência.* □

O primeiro 2-grupoide que vamos introduzir é o 2-grupoide de caminhos sobre uma triangulação T que iremos denotar por $\mathscr{P}_2(T)$. Essa 2-categoria descreve no contexto de complexos a coleção de curvas orientadas e certos tipos de superfícies orientadas sobre uma variedade. Novamente iremos introduzir esse objeto de forma combinatória.

Antes de introduzir a definição de um 2-grupoide de caminhos sobre uma triangulação vamos introduzir uma noção apropriada de quando dois 1-caminhos em um 1-grupoide de caminhos são primeiros vizinhos. Essa situação que está representada na fig. 2.7 onde o 1-caminho (v_0, v_1, v_3, v_4) é primeiro vizinho do 1-caminho $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$ num complexo que contenha o 2-simplexo $[v_1, v_2, v_3]$.

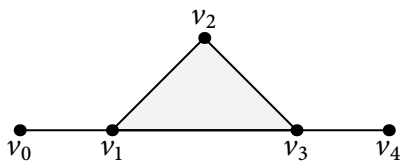


Figura 2.7: (v_0, v_1, v_3, v_4) e $(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$ são primeiros vizinhos

Definição 2.25. *Seja $\mathscr{P}_1(T)$ um 1-grupoide de caminhos sobre a triangulação T, um par de 1-caminhos γ e γ' são ditos serem* ***primeiros vizinhos*** *se:*

1. *$s(\gamma) = s(\gamma')$ e $t(\gamma) = t(\gamma')$;*
2. *as sequências de vértices que definem γ e γ' diferem apenas pela inclusão de um único vértice, ou seja, se eles são da forma:*

$$\gamma = (v_0, \ldots, v_i, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$
$$\gamma' = (v_0, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

3. *o 2-simplexo $[v_i, v_j, v_{i+1}]$ é simplexo de T.*

□

Tendo essa definição podemos utilizada para definir 2-caminhos que serão sequências de 1-caminhos primeiros vizinhos. Isso leva a definição o 2-grupoide de caminhos.

Definição 2.26. *Dado uma triangulação T, o* ***2-grupoide de caminhos sobre T*** *denotado por $\mathscr{P}_2(T)$ é um 2-grupoide descrito pelos seguintes dados:*

1. *os* ***objetos*** *são os vértices de* T*;*
2. *os* **1-*morfismos*** *são todas as sequências ordenadas de vértices* $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ *que são, par a par, primeiros vizinhos;*
3. *os* **2-*morfismos*** *são todas as sequências ordenadas de* 1*-morfismos* $(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *que são, par a par, primeiros vizinhos;*

e estruturas:

1. *a* ***origem de um*** **1-*morfismo*** *é o primeiro vértice da sequência;*
2. *o* ***destino de um*** **1-*morfismo*** *é o último vértice da sequência;*
3. *a* ***origem de um*** **2-*morfismo*** *é o primeiro* 1*-morfismo da sequência;*
4. *o* ***destino de um*** **2-*morfismo*** *é o último* 1*-morfismo da sequência;*
5. *a* ***composição de*** **1-*morfismos*** *é dado pela concatenação das sequências;*
6. *o* ***whiskering a esquerda*** *de um* 1*-morfismo* γ *e um* 2*-morfismo* $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *é dado por* $\gamma \triangleright \Gamma = (\gamma \circ \gamma_0, \gamma \circ \gamma_1, \ldots, \gamma \circ \gamma_n)$*;*
7. *o* ***whiskering a direita*** *de um* 1*-morfismo* γ *e um* 2*-morfismo* $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ *é dado por* $\Gamma \triangleleft \gamma = (\gamma_0 \circ \gamma, \gamma_1 \circ \gamma, \ldots, \gamma_n \circ \gamma)$*;*
8. *a* ***composição vertical de*** **2-*morfismos*** *é dado pela concatenação das sequências;*
9. *o* **1-*morfismo identidade*** *associado ao objeto* v *é a sequência de um único vértice* $1_v = (v)$*;*
10. *o* **2-*morfismo identidade*** *associado ao* 1*-morfismo* γ *é a sequência de um único* 1*-morfismo* $1_\gamma = (\gamma)$*.*

Onde impomos as seguintes relações de equivalência sobre os 1*-morfismos*

1. $(\ldots, v_0, v_1, v_1, v_2, \ldots) \sim (\ldots, v_0, v_1, v_2, \ldots)$
2. $(\ldots, v_0, v_1, v_0, v_2, \ldots) \sim (\ldots, v_0, v_2, \ldots)$

para todos os vértices v_0, v_1, v_2 *com* $v_0 \neq v_1$*. E as seguintes relações de equivalência sobre os* 2*-morfismos*

3. $(\ldots, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots) \sim (\ldots, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots)$
4. $(\ldots, \gamma_0, \gamma_1, \gamma_0, \gamma_2, \ldots) \sim (\ldots, \gamma_0, \gamma_2, \ldots)$

para todos os 1*-morfismos* $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ *com* $\gamma_0 \neq \gamma_1$.

Iremos chamar os 1*-morfismos de* **1-*caminhos*** *e os* 2*-morfismos de* **2-*caminhos*.** *Se* $K \subset T$ *for um complexo iremos dizer que* γ *é um* **1-*caminho sobre K*** *se* γ *for uma sequência de* 0*-simplexos de* K*. Analogamente,* Γ *é um* **2-*caminho sobre K*** *se* Γ *for uma sequência de* 1*-caminhos sobre* K*. Se* $s(\gamma) = t(\gamma)$ *dizemos que* γ *é um* **1-*caminho fechado*** *e se* $s(\Gamma) = t(\Gamma)$ *dizemos que* Γ *é um* **2-*caminho fechado*.** □

Podemos novamente introduzir geradores para um 2-grupoide de caminhos, introduzindo a ideia de *caminhos elementares*. Os 1-caminhos elementares são os mesmo introduzidos anteriormente, ou seja, 1-caminhos da forma (v_i, v_j) onde v_i e v_j são primeiros vizinhos sobre $[v_i, v_j] \in T$. Agora escolhemos também um 2-*caminho elementar* para cada 2-simplexo $s \in T$. Um 2-caminho elementar é um 2-caminho sobre s da forma (γ_i, γ_j) onde γ_i e γ_j são primeiros vizinhos. Os outros 2-caminhos de $\mathscr{P}_2(T)$ serão obtidos desses por sequências de composições verticais e whiskerings. Novamente temos mais de um possível 2-caminho elementar para cada 2-simplexo. Para cada 2-simplexo da forma $[v_i, v_j, v_k]$ temos a escolha de 12 possíveis 2-caminhos elementares, que listamos abaixo.

$$\begin{array}{cc}
((v_i, v_j, v_k), (v_i, v_k)) & ((v_i, v_k), (v_i, v_j, v_k)) \\
((v_i, v_k, v_j), (v_i, v_j)) & ((v_i, v_j), (v_i, v_k, v_j)) \\
((v_j, v_i, v_k), (v_j, v_k)) & ((v_j, v_k), (v_j, v_i, v_k)) \\
((v_k, v_j, v_i), (v_k, v_i)) & ((v_k, v_i), (v_k, v_j, v_i)) \\
((v_j, v_k, v_i), (v_j, v_i)) & ((v_j, v_i), (v_j, v_k, v_i)) \\
((v_k, v_i, v_j), (v_k, v_j)) & ((v_k, v_j), (v_k, v_i, v_j)) .
\end{array}$$

Por exemplo os 2-caminhos elementares $((v_i, v_j, v_k), (v_i, v_k))$ e $((v_j, v_k), (v_j, v_i, v_k))$ estão relacionados por

$$\big((v_j, v_k), (v_j, v_i, v_k)\big) = (v_i, v_j)^{-1} \triangleright \big((v_i, v_j, v_k), (v_i, v_k)\big) .$$

O segundo 2-grupoide que vamos definir é um 2-grupo.

Definição 2.27. *Um* 2*-grupo,* $\mathcal{G}$*, é um* 2*-grupoide com um único objeto.* □

Essa definição é abstrata demais para os nossos propósitos. Gostaríamos de ter uma definição mais concreta em termos de conjuntos de elementos com operações definidas sobres esses conjuntos, da mesma forma que um grupo usual é um conjunto munido de uma operação binária que satisfaz algumas propriedades. Para isso iremos definir uma nova estrutura chamada de *modulo cruzado de grupos* que é formada por um par de grupos e um par de morfismo de grupos que serão utilizados para construir um 2-grupo $\mathcal{G}$. A categoria de 2-grupos é equivalente a categoria de módulos cruzados de grupos (Janelidze 2003), ou seja, todo 2-grupo pode ser construído a partir de um modulo cruzado e vice versa.

Definição 2.28. *Um* ***modulo cruzado*** *(de grupos)* $(G_1, G_2, \partial, \triangleright)$ *é um par de grupos finitos* G_1 *e* G_2 *e dois morfismos de grupos:* $\partial\colon G_2 \to G_1$ *e* $\triangleright\colon G_1 \to \mathrm{Aut}(G_2)$. *Dados* $g \in G_1$ *e* $a \in G_2$ *iremos denotar por:*

$$g \triangleright a \coloneqq [\triangleright (g)](a).$$

Essas estruturas satisfazem as seguinte identidades:

$$\partial(g \triangleright a) = g\partial(a)g^{-1}$$
$$\partial(a) \triangleright b = aba^{-1},$$

a primeira identidade diz que ∂ *é* G_1*-equivariante e a segunda identidade é chamada de* ***identidade de Peiffer****.* □

Note que $\ker(\triangleright) = \{g \in G_1 \mid \triangleright (g) = 1_{\mathrm{Aut}(G_2)}\}$ é um subgrupo normal, já que é o núcleo de um morfismo de grupo.

Para cada modulo cruzado $(G_1, G_2, \partial, \triangleright)$ vamos definir um 2-grupo $\mathcal{G}$. Iremos utilizar diagramas para denotar os 1-morfismos e 2-morfismos. Lembrando que, além dos 1-morfismos e 2-morfismos, precisamos definir a composição de 1-morfismos e duas operações sobre 2-morfismos, composição vertical e a composição horizontal.

Temos apenas um único objeto em $\mathcal{G}$, que iremos denotar por $\bullet$, iremos nos diagramas representar esse único objeto múltiplas vezes como feito para o 1-grupo. O conjunto de 1-morfismos é $\mathcal{G}_1 = G_1$, ou seja, para cada $f \in G_1$ temos o seguinte 1-morfismo:

$$\bullet \xrightarrow[f]{} \bullet.$$

Agora considere um elemento $(f, a, g) \in G_1 \times G_2 \times G_1$ tal que $\partial(a^{-1}) f g^{-1} \in \ker(\triangleright)$. Toda tripla desse tipo irá determinar um 2-morfismo (f, a, g) com $s[(f, a, g)] = f$ e $t[(f, a, g)] = g$, que iremos denotar pelo seguinte bigon:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "(f,a,g)\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}.$$

Iremos em geral simplificar essa notação e representar o 2-morfismo por

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "a\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}.$$

Aqui é preciso chamar a atenção de que apesar dessa notação ser similar à utilizamos para um 2-morfismos de uma 2-categoria em geral o 2-morfismo que estamos definindo é denotado pela tripla (f, a, g) e *não apenas por a*.

Iremos chamar o elemento $\partial(a^{-1}) f g^{-1}$ de *pseudo* 1-*holonomia (fake holonomy) do* 2-*morfismo* (f, a, g).

A composição de 1-morfismos é mesma que definimos para grupos, ou seja, dado dois elementos $f, g \in G_1$ temos que:

$$\bullet \xrightarrow[f]{} \bullet \xrightarrow[g]{} \bullet = \bullet \xrightarrow[fg]{} \bullet .$$

A composição vertical de um par de 2-morfismo (f, a, g) e (g, b, h) é dada por

$$(f, a, g) \circ (g, b, h) := (f, ab, h) .$$

Em diagramas temos:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, "g"{name=M}] \arrow[r, bend right=60, "h"'{name=D}] & \bullet \arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "a"] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D, "b"] \end{tikzcd} = \bullet \begin{tikzcd} \arrow[r, bend left=60, "f"{name=U}] \arrow[r, bend right=60, "h"'{name=D}] & \bullet \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "ab"] \end{tikzcd} .$$

Vamos verificar que essa composição está bem definida. Para isso temos que ter $\partial\left((ab)^{-1}\right) f h^{-1} \in \ker(\triangleright)$. Lembrado que $\partial(a^{-1}) f g^{-1}$ e $\partial(b^{-1}) g h^{-1}$ são elementos de $\ker(\triangleright)$, podemos escrever essa pseudo 1-holonomia como

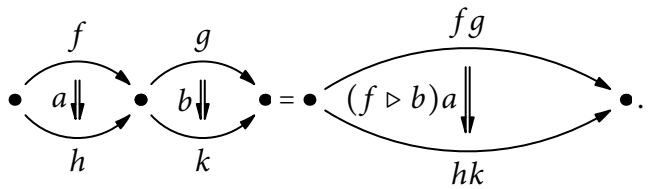
$$\begin{aligned} \partial\left((ab)^{-1}\right) f h^{-1} &= \partial\left(b^{-1}\right) \partial\left(a^{-1}\right) f h^{-1} \\ &= \partial\left(b^{-1}\right) \partial\left(a^{-1}\right) f \left[g^{-1} g\right] h^{-1} \\ &= \partial\left(b^{-1}\right) \partial\left(a^{-1}\right) f g^{-1} \left[\partial(b) \partial\left(b^{-1}\right)\right] g h^{-1} \\ &= \partial\left(b^{-1}\right) \left[\partial\left(a^{-1}\right) f g^{-1}\right] \partial(b) \left[\partial\left(b^{-1}\right) g h^{-1}\right] , \end{aligned}$$

na última linha temos um elemento de $\ker(\triangleright)$ conjugado por $\partial(b)$ e o produto com um outro elemento de $\ker(\triangleright)$ e como $\ker(\triangleright)$ é um subgrupo normal a pseudo 1-holonomia de (f, ab, h) é um elemento de $\ker(\triangleright)$.

Agora vamos definir a composição horizontal de um par de 2-morfismos (f, a, g) e (h, b, k). Note que como temos um único objeto essa composição está definida para todos os pares de 2-morfismos. Ela é dada por

$$(f, a, h) \odot (g, b, k) := (fg, (f \triangleright b)a, hk) .$$

Em diagramas temos:



Vamos verificar que esta operação está bem definida.

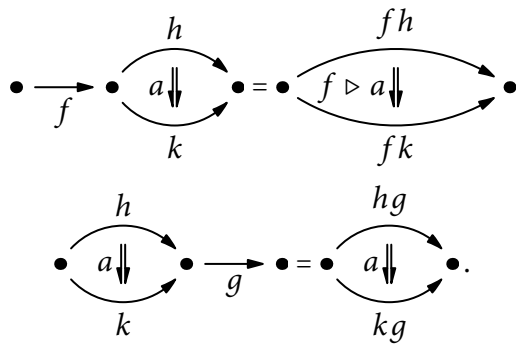
$$\begin{aligned}
\partial\left(\left[(f \triangleright b)a\right]^{-1}\right) fg(hk)^{-1} &= \partial\left(a^{-1}\right)\partial\left[(f \triangleright b)^{-1}\right] fgk^{-1}h^{-1} \\
&\overset{①}{=} \partial\left(a^{-1}\right)\left[f\partial\left(b^{-1}\right)f^{-1}\right] fgk^{-1}h^{-1} \\
&= \partial\left(a^{-1}\right) f\left[h^{-1}h\right]\partial\left(b^{-1}\right) gk^{-1}h^{-1} \\
&= \left[\partial\left(a^{-1}\right) fh^{-1}\right] h\left[\partial\left(b^{-1}\right) gk^{-1}\right] h^{-1}
\end{aligned} .$$

onde em ① usamos que ∂ é equivariante. Novamente a última linha é um produto de elementos de $\ker \triangleright$ de onde o resultado desejado segue.

Os whiskerings são definidos em termos da composição horizontal,

$$\begin{aligned}
f \triangleright (h,a,k) &\coloneqq (f,1,f) \odot (h,a,k) = (fh, f \triangleright a, fk) \\
(h,a,k) \triangleleft g &\coloneqq (h,a,k) \odot (g,1,g) = (hg, a, kg) .
\end{aligned}$$

Em diagramas temos:



Os morfismos identidades são definidos em termos dos elementos identidades de G_1 e G_2. O único 1-morfismo identidade $1_\bullet$ é o 1-morfismo associado a $1 \in G_1$. Claramente esse 1-morfismo satisfaz a regra de identidade. Para cada 1-morfismo f o 2-morfismo identidade é $1_f = (f,1,f)$ e como a pseudo 1-holonomia desse 2-morfismos é 1 esse 2-morfismo está bem definido.

Como um 2-grupo é um 2-grupoide então todo morfismo tem uma inversa. A inversa de um 1-morfismo f é o 1-morfismo f^{-1}. O 2-morfismo inverso de (f,a,g),

que funciona como uma inversa para a composição vertical, é dado por é (g, a^{-1}, f), note que temos

$$\partial(a)gf^{-1} = \left(gf^{-1}\right)^{-1}\left[\partial\left(a^{-1}\right)fg^{-1}\right]^{-1}\left(gf^{-1}\right),$$

logo esse 2-morfismo está bem definido. O 2-grupo também tem 2-morfismos que funcionam como inversa para a composição horizontal. Explicitamente a inversa horizontal de um 2-morfismo (f, a, g) é $(f^{-1}, f^{-1} \triangleright a^{-1}, g^{-1})$, note que temos

$$\partial\left[\left(f^{-1} \triangleright a^{-1}\right)^{-1}\right]f^{-1}g = g^{-1}\left[\partial\left(a^{-1}\right)fg^{-1}\right]^{-1}g,$$

logo esse 2-morfismo também está bem definido.

Em sumário, definimos de 2-grupo dado um modulo cruzado pelo seguinte:

Definição 2.29. *Dado um modulo cruzado* $(G_1, G_2, \partial\colon G_2 \to G_1, \triangleright\colon G_1 \to \mathrm{Aut}(G_2))$ *podemos construir o 2-grupo* $\mathcal{G}$ *com os seguinte dados:*

1. *um único* ***objeto*** $\bullet$*;*
2. *para cada* $f \in G_1$ *um* ***1-morfismo*** $f\colon \bullet \to \bullet$*;*
3. *para cada tripla* $(f, a, g) \in G_1 \times G_2 \times G_1$ *tal que* $\partial\left(a^{-1}\right)fg^{-1} \in \ker(\triangleright)$ *um* ***2-morfismos*** $(f, a, g)\colon f \to g$*;*

e estruturas

1. *a* ***composição de 1-morfismos*** f *e* g *é dada por* $f \circ g = fg$*;*
2. *o* ***whiskering a esquerda*** *de um 1-morfismo* f *e um 2-morfismo* (h, a, k) *é dado por* $f \triangleright (h, a, k) = (fh, f \triangleright a, fk)$*;*
3. *o* ***whiskering a direita*** *de um 1-morfismo* g *e um 2-morfismo* (h, a, k) *é dado por* $(h, a, k) \triangleleft g = (ag, a, kg)$*;*
4. *a* ***composição vertical de 2-morfismos*** (f, a, g) *e* (g, b, h) *é dada por* $(f, a, g) \circ (g, b, h) = (f, ab, h)$*;*
5. *o* ***1-morfismo identidade*** *é* $1_\bullet = 1$*;*
6. *o* ***2-morfismo identidade*** *associado a* f *é* $1_f = (f, 1, f)$.

□

Um ponto importante que gostaríamos chamar atenção é que a nossa definição de 2-morfismos de um 2-grupo construídos a partir de um modulo cruzado é diferente da usual. Na literatura a construção usual impõe que a tripla (f, a, g) deve satisfazer o vínculo $\partial(a^{-1}) f g^{-1} = 1$. Escolhemos a construção permitindo elementos de $\ker \triangleright$ pois dessa forma o modelo Hamiltoniano construído no caso particular em que $G_2 = \{1\}$ se reduz ao modelo duplo quântico construído por Kitaev para o grupo G_1.

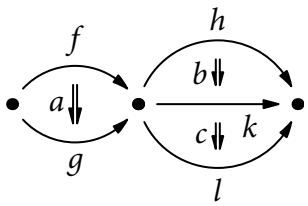
Uma propriedade importante de um grupo G é que se tivermos uma coleção ordenada de elementos (g_i), $g_i \in G$ podemos calcular o produto desses elementos para obter um único elemento de G, ou seja, a seguinte palavra está bem definida e pode ser associada a um elemento do grupo:

$$g_0\, g_1\, g_2 \cdots g_n\,.$$

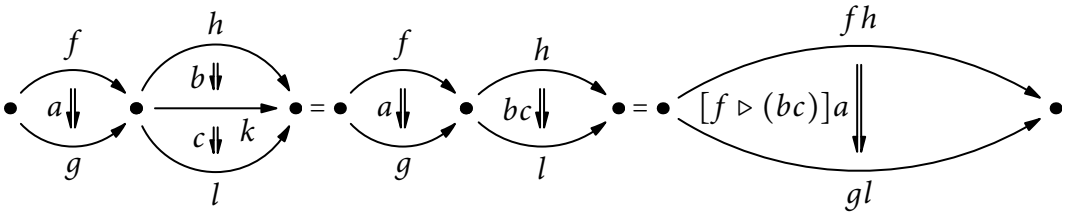
A razão que isso é possível vem da existência da associatividade que não se aplica somente a três elementos mas pode ser utilizada para definir a associatividade de n elementos. Isso torna a expressão acima bem definida, já que podemos colocar parênteses na expressão acima para obter pares e todas as formas possíveis de fazer isso resultam no mesmo elemento. Um 2-grupo também tem uma propriedade similar, mas agora como composições não são apenas unidimensionais mas são bidimensionais, verticais e horizontais, esse resultado não é trivial (Power 1990). O fato importante que obtemos disso é que alguns diagramas podem ser compostos e reduzidos a um único 2-morfismo e quando isso é verdade não importa a ordem da composição o resultado final é sempre o mesmo 2-morfismo. Não iremos enunciar ou provar esse teorema aqui já que os diagramas que iremos calcular serão simples o suficiente para que não seja necessário invocar explicitamente esse resultado.

Power. 1990. "A 2-categorical pasting theorem". *J. Algebra* 129 [2]: 439–445.

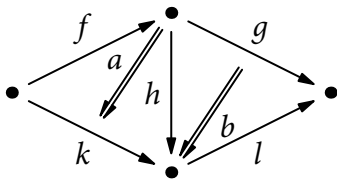
Vamos construir alguns exemplos de como reduzir um diagrama a um único 2-morfismo. Para alguns diagramas isso é bem claro, como no diagrama abaixo:



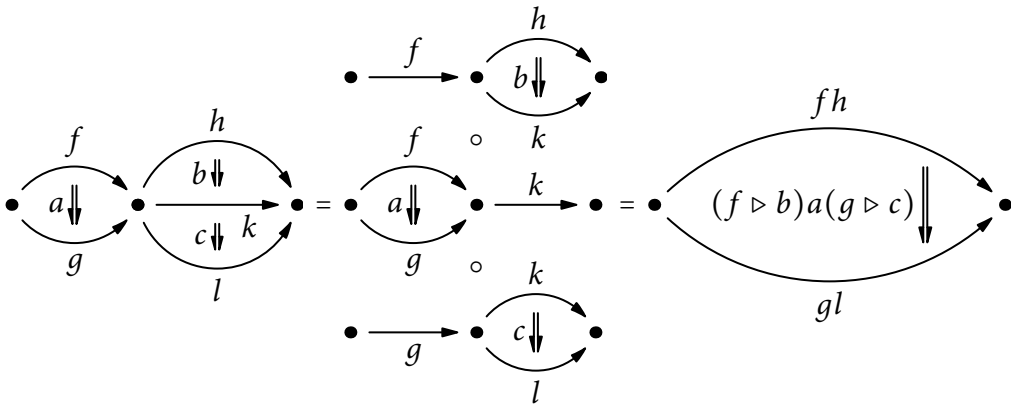
basta realizarmos a composição vertical dos dois bigons mais a direita e compor horizontalmente o resultado com o bigon a esquerda. Em detalhes temos:



agora para alguns diagramas, como o representado abaixo, a ordem de operações não é tão clara:



É sempre possível escolher uma ordem das operações de forma que sempre um único bigon, com possíveis whiskerings aplicados sobre ele, seja composto com um outro bigon verticalmente. O primeiro exemplo pode ser escrito como



onde obtemos o mesmo 2-morfismo que antes. Para verificar isso note que como (f, a, g) é um 2-morfismo temos que $g = k^{-1}\partial\left(a^{-1}\right)f$, onde $k \in \ker(\triangleright)$, logo segue que vale o seguinte:

$$
\begin{aligned}
(f \triangleright b)a(g \triangleright c) &= \\
&= (f \triangleright b)a\left(\left[k^{-1}\partial\left(a^{-1}\right)f\right] \triangleright c\right) \\
&\overset{①}{=} (f \triangleright b)a\left(\left[\partial\left(a^{-1}\right)f\right] \triangleright c\right) \\
&\overset{②}{=} (f \triangleright b)aa^{-1}(f \triangleright c)\,a \\
&= (f \triangleright b)\,(f \triangleright c)\,a \\
&= [f \triangleright (bc)]\,a
\end{aligned}
$$

onde em ① usamos que $k \in \ker(\triangleright)$ e em ② usamos a identidade de Peiffer. Aqui vemos uma diferença importante entre grupos e 2-grupo. Uma palavra em um grupo em geral tem uma única relação disponível, remover ou inserir gg^{-1}, já num 2-grupo existe um número maior de relações que podem ser utilizadas para simplificar palavras como vimos no exemplo acima.

Iremos omitir o símbolo de composição vertical nos próximos exemplos. O segundo exemplo pode ser escrito como no diagrama de composições abaixo:

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "h"] \arrow[dl, Rightarrow, "a"'] & \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "k"'] & & \bullet \\
 & \bullet \arrow[ur, "l"'] \arrow[ul, Rightarrow, "b"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] & \bullet \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "hl"'] \arrow[d, phantom, "b\Downarrow"] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, bend left, "fh"] \arrow[r, bend right, "k"'] \arrow[d, phantom, "a\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, "l"] & \bullet \\
 & &
\end{tikzcd}
$$

3 Teoria de 2-gauge

Uma *teoria de gauge* descreve o comportamento de *configurações de gauge* sobre *transformações de gauge*, transformações de gauge são transformações locais aplicadas a essas configurações. Várias classe importante de sistemas físicos são descritos por teorias de gauge. Uma configuração de gauge c pode ser resumidamente descrita como uma associação de um elemento $c(\gamma) \in G$, onde G é um grupo, para cada curva γ sobre uma variedade.

Uma *teoria de 2-gauge* é uma generalização desse conceito. Uma *configuração de 2-gauge* além de associar elementos de um grupo a caminhos também associa elementos de um 2-grupo a superfícies. Iremos introduzir transformações de 2-gauge no capítulo 5, onde iremos descrever a sua ação induzida sobre elementos de um espaço de Hilbert.

O principal foco desse capítulo será introduzir os conceitos necessários para definir uma configuração de 2-gauge sobre um triangulação de uma variedade compacta linear por partes. Vários objetos podem ser definidas a partir de uma configuração. Em particular iremos definir a noção de 2-*holonomia* e *pseudo* 1-*holonomia* associada a simplexos da triangulação. Esses objetos serão utilizadas para definir o invariante 4-dimensional de Yetter e a Hamiltoniana $(3+1)$-dimensional do sistema quântico associado a esse invariante que iremos construir no capítulo 5.

Iremos começar essa capítulo descrevendo uma configuração de 1-gauge, iremos escolher uma definição que permita generalizarmos de forma natural para o caso de 2-gauge.

3.1 Configurações de 1-gauge

Seja fixa uma triangulação T de uma variedade compacta M. Seja fixo também um grupo finito G. Iremos utilizar o ponto de vista que um grupo é um grupoide de um único objeto.

Definição 3.1. *Uma* ***configuração de 1-gauge*** $c\colon \mathcal{P}_1(T) \to G$ *é um funtor entre o* 1-*grupoide de caminhos sobre* T, $\mathcal{P}_1(T)$, *e um grupo* G.

Vamos denotar o conjunto de todas as configurações de 1-*gauge sobre* T *por* $\mathcal{C}_1(T)$.

□

Vamos estudar em mais detalhes essa definição. Primeiro G é uma categoria com um único objeto e dessa forma todos os objetos de $\mathscr{P}_1(T)$, que são vértices de T, são levados pelo funtor nesse único objeto. Seja $\gamma \in \mathscr{P}_1(T)$ um 1-morfismo, então $c(\gamma)$ é um elemento do grupo G. Um caso particular é quando γ é um caminho 1_{v_0} nesse caso temos que $c(1_{v_0}) = 1$. Também da definição de um funtor temos que dado um par de caminhos γ_1 e γ_2 tais que existe $\gamma_1 \circ \gamma_2$ então $c(\gamma_1 \circ \gamma_2) = c(\gamma_1)c(\gamma_2)$. Para todo caminho γ existe o caminho inverso γ^{-1} que satisfaz $\gamma \circ \gamma^{-1} = 1_{s(\gamma)}$ de onde temos que

$$c(\gamma \circ \gamma^{-1}) = c(\gamma) \cdot c(\gamma^1) = c(1_{s(\gamma)}) = 1\,,$$

ou seja, $c(\gamma^{-1}) = c(\gamma)^{-1}$.

Podemos definir uma configuração de 1-gauge explicitamente. Para isso escolhemos um conjunto de 1-caminhos elementares como geradores do 1-grupoide de caminhos. Agora basta associarmos um elemento de G para cada um desses 1-caminhos elementares, de forma que as equivalências do 1-grupoide de caminhos sejam satisfeitas. Isso completamente caracteriza a configuração e toda configuração é dada por uma construção dessa forma. Escolhido um conjunto de 1-caminhos elementares, $\{(v_i, v_j)\}$, definimos uma configuração c por

$$c\left[(v_i, v_j)\right] = f_{[ij]}\,,$$

onde $f_{[ij]} \in G$ é o valor associado pelo funtor a esse 1-caminho elementar. Iremos utilizar essa notação para denotar os valores associados pela configuração os 1-caminhos elementares. Lembrando que as duas relações de equivalência impostas sobre os 1-caminhos, definição 2.19 na página 23, são:

$$\begin{gathered}(\ldots, v_0, v_1, v_1, v_2, \ldots) \sim (\ldots, v_0, v_1, v_2, \ldots)\\ (\ldots, v_0, v_1, v_0, v_2, \ldots) \sim (\ldots, v_0, v_2, \ldots)\,,\end{gathered}$$

que impõem que os elementos associados pela configurações devêm satisfazer:

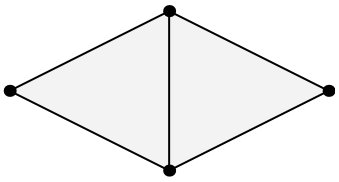
$$\begin{gathered}c[(v_0, v_1)]c(1_{v_1})c[(v_1, v_2)] = c[(v_0, v_1)]c[(v_1, v_2)]\\ c[(v_0, v_1)]c[(v_1, v_0)] = 1\,,\end{gathered}$$

como $c(1_{v_1}) = 1$ e $c[(v_1, v_0)] = c[(v_0, v_1)]^{-1}$ para qualquer escolha de elementos do grupo toda escolha de $f_{[ij]}$ define um funtor e portanto uma configuração. Note também que dois funtores, c e c', são iguais se e somente se para todo 1-caminho elementar (v_i, v_j) tivermos:

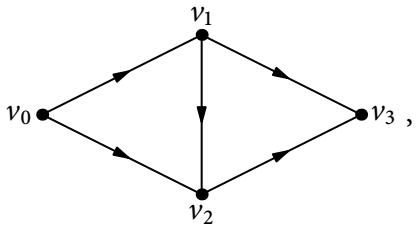
$$c\left[(v_i, v_j)\right] = c'\left[(v_i, v_j)\right]\,.$$

Ao invés de simplesmente listar todos os 1-caminhos elementares e elementos associados pela configuração a esses 1-caminhos iremos utilizar uma notação diagramática

que irá facilitar a visualização de uma configuração. Considere uma triangulação K como a representada abaixo.

$K =$  .

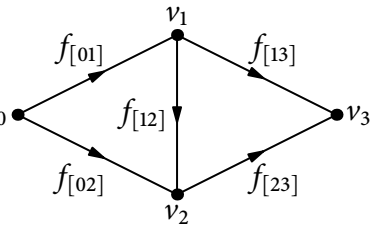
Podemos enumerar e ordenar os vértices de T, $v_0 < v_1 < v_2 v_3$. Vamos adotar a convenção de que se $v_i < v_j$ o 1-caminho elementar associado ao 1-simplexo $[v_i, v_j]$ é o 1-caminho (v_i, v_j), isso pode ser representado orientando a curva que descreve esse 1-simplexo, como feito abaixo, onde também etiquetamos os vértices.



,

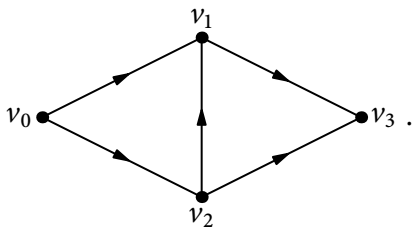
esse diagrama descreve uma escolha de 1-caminho elementar para cada 1-simplexo.

O último passo para descrever uma configuração c sobre K de forma diagramática é escolher um elemento de G para cada um dos 1-caminhos elementares, iremos denotar essas escolhas como abaixo.

$c =:$ 

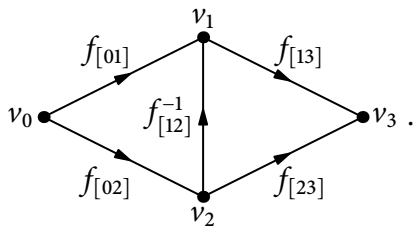
iremos chamar esse diagrama do lado direito de uma *coloração*.

Se for utilizado um outro conjunto de 1-caminhos elementares para representar a configuração c os elementos de G associado a esses 1-caminhos elementares podem ser diferentes. Na triangulação K anterior podemos também escolher o seguinte conjunto de 1-caminhos elementares:



.

A configuração c, que descrevemos anteriormente, agora é denotada, em relação a esse escolha de 1-caminhos elementares pela seguinte coloração:



Essas duas colorações descrevem a mesma configuração pois $(v_1, v_2) = (v_2, v_1)^{-1}$.

Dos valores que uma configuração c associam a 1-caminhos um tipo especial tem um papel importantes: os valores associados aos 1-caminhos fechadas sobre a fronteira de um 2-simplexo.

Definição 3.2. *Seja T uma triangulação, $p \in T$ um 2-simplexo e γ um caminho fechado sobre $\partial(p)$. Dado uma configuração $c \in \mathcal{C}_1(T)$ a* ***holonomia de p em relação a γ****, denotada por $h_{p,\gamma}(c)$, é definida por:*

$$h_{p,\gamma}(c) = c(\gamma)$$

□

Se $h_{p,\gamma} = 1$ para algum γ então $h_{p,\gamma} = 1$ para todo γ e disso segue que se $h_{p,\gamma} \neq 1$ para algum γ então $h_{p,\gamma} \neq 1$ para todo γ. Para provar esse fato basta notar que, dado as relações de equivalência sobre $\mathcal{P}_1(T)$, duas curvas fechadas sobre ∂p, γ e γ', podem diferir em apenas dois aspectos: 1. por *troca de orientação* onde temos $h_{p,\gamma} = h^{-1}_{p,\gamma'}$ e 2. por *troca de origem* onde temos $h_{p,\gamma} = t h_{p,\gamma'} t^{-1}$ onde t é o valor associado pela configuração para um caminho sobre ∂p como origem $s(\gamma')$ e destino $s(\gamma')$. Em ambos os casos temos que $h_{p,\gamma} = 1$ se e somente se $h_{p,\gamma'} = 1$.

3.2 Configurações de 2-gauge

Seja fixo um 2-grupo $\mathcal{G}$ construído a partir de um modulo cruzado $(G_1, G_2, \triangleright, \partial)$ como descrevemos e uma triangulação T.

A definição de uma configuração de 2-gauge generaliza o caso anterior para 2-categorias.

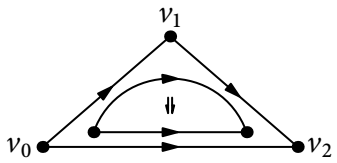
Definição 3.3. *Uma* ***configuração de 2-gauge*** *$c\colon \mathcal{P}_2(T) \to \mathcal{G}$ é um 2-funtor entre o 2-grupoide de caminhos sobre T, $\mathcal{P}_2(T)$, e um 2-grupo $\mathcal{G}$.*

Vamos denotar o conjunto de todas as configurações de 2-gauge sobre T por $\mathcal{C}(T)$.

□

Da mesma forma como feito no caso de 1-gauge iremos introduzir *colorações* para representar e facilitar a enumeração de configurações. Para definir uma coloração de uma configuração c precisamos escolher um conjunto de 1-caminhos elementares e 2-caminhos elementares para gerar $\mathscr{P}_2(T)$.

Vamos primeiro enumerar e ordenar os vértices de T, $v_0 < v_1 < \cdots < v_n$. Para cada 1-simplexo $[v_i, v_j]$, se $v_i < v_j$, iremos escolher o 1-caminho elementar (v_i, v_j). Para cada 2-simplexo $[v_i, v_j, v_k]$, se $v_i < v_j < v_k$, iremos escolher o 2-caminho elementar $((v_i, v_j, v_k), (v_i, v_k))$. Essa escolha de caminhos elementares pode ser representada, para um complexo K com um único 2-simplexo, como abaixo



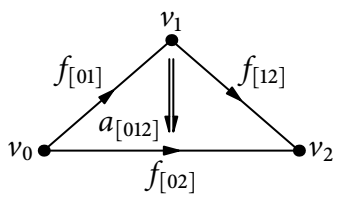
Vamos escolher agora um elemento $f_{[ij]} \in G_1$ para cada 1-simplexo. Para cada 2-simplexo $[v_i, v_j, v_k]$, com $v_i < v_j < v_k$, precisamos escolher $(f_{[ijk]}, a_{[ijk]}, g_{[ijk]}) \in G_1 \times G_2 \times G_1$, com $\partial(a^{-1}_{[ijk]}) f_{[ijk]} g^{-1}_{[ijk]} \in \ker(\triangleright)$, como o valor que a configuração associa ao 2-caminho elementar desse 2-simplexo. Como uma configuração é um 2-funtor os elementos associados devêm satisfazer:

$$\begin{aligned} s(c[\Gamma]) &= c[s(\Gamma)] \\ t(c[\Gamma]) &= c[t(\Gamma)] , \end{aligned}$$

ou seja, o valor de $f_{[ijk]}$ e $g_{[ijk]}$ já estão fixos pela nossa escolha anterior de valores $f_{[ij]} \in G_1$. Explicitamente temos que

$$\begin{aligned} f_{[ijk]} &:= f_{[ij]} f_{[jk]} \\ g_{[ijk]} &:= f_{[ik]} . \end{aligned}$$

Basta então escolhemos um valor $a_{[ijk]} \in G_2$. Iremos representar a configuração c pela coloração abaixo

$c =:$ 

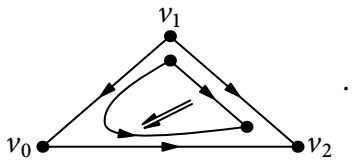
, (3.1)

onde temos que

$$\partial\left(a^{-1}_{[ijk]}\right) f_{[01]} f_{[12]} f^{-1}_{[02]} \in \ker(\triangleright) .$$

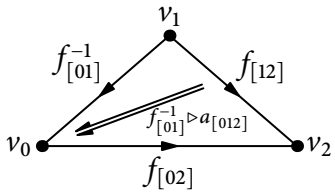
Essa escolha de 1-caminhos elementares e 2-caminhos elementares será utilizado sempre que possível ao longo do texto. Explicitamente iremos chamar essa escolha de *caminhos elementares padrões*.

Novamente se for utilizado um outro conjunto de caminhos elementares os elementos associados a uma configuração em geral são diferentes. Por exemplo, considere o seguinte conjunto de caminhos elementares



A configuração descrita acima associa a seguinte coloração para esses caminhos elementares

$c' =:$



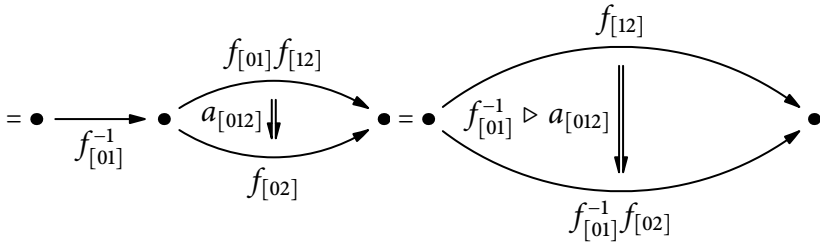
(3.2)

Vamos agora verificar que essas colorações estão de fato associados a mesma configuração, $c = c'$, calculando o valor que o funtor associa para o 2-caminho elementar $((v_1, v_2), (v_1, v_0, v_2))$. Temos a seguinte identidade entre entre 2-caminhos

$$((v_1, v_2), (v_1, v_0, v_2)) = (v_0, v_1)^{-1} \triangleright ((v_0, v_1, v_2), (v_0, v_2)) \ ,$$

onde reconhecemos na esquerda o 2-caminho elementar apresentado em eq. (3.2) e na direita o 2-caminho elementar apresentado em eq. (3.1), onde é aplicado um whiskering a esquerdada por $(v_0, v_1)^{-1}$. Agora temos que

$$c\left[(v_0, v_1)^{-1} \triangleright ((v_0, v_1, v_2), (v_0, v_2))\right]$$



e

$$c'\left[\left((v_1,v_2),(v_1,v_0,v_2)\right)\right] = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "f_{[12]}"] \arrow[r, bend right, "f_{[01]}^{-1} f_{[02]}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow f_{[01]}^{-1} \triangleright a_{[012]}"] & \bullet \end{tikzcd},$$

ou seja,

$$c[((v_1,v_2),(v_1,v_0,v_2))] = c'[((v_1,v_2),(v_1,v_0,v_2))]$$

Dado um configuração de 2-gauge iremos definir um objeto semelhante a holonomia para 1-simplexo.

Definição 3.4. *Dado uma configuração c, a* ***pseudo 1-holonomia*** *de um 2-simplexo p em relação a um 2-caminho elementar Γ sobre p, denotada por $h^{f}_{p,\Gamma}$ é o valor da pseudo 1-holonomia do 2-morfismo $c(\Gamma)$.* □

Se $h^{\mathrm{f}}_{p,\Gamma} = 1$ para algum 2-caminho elementar Γ então $h^{\mathrm{f}}_{p,\Gamma'} = 1$ para todo 2-caminho elementar Γ' sobre p. Para verificar esse fato lembramos que todo 2-caminho elementar Γ' pode ser obtido de Γ por whiskerings e inversões assim basta verificarmos o que ocorre com a pseudo 1-holonomia sobre cada uma dessas operações. Se $\Gamma' = \Gamma^{-1}$, da definição de 2-funtor temos

$$h^{\mathrm{f}}_{p,\Gamma'} = \left(h^{\mathrm{f}}_{p,\Gamma}\right)^{-1}$$

de onde segue o resultado. Agora se $\Gamma' = f \triangleright \Gamma \triangleleft g$ supondo que $c(\Gamma) = (h,a,k)$ temos que $\Gamma' = (fhg, f \triangleright a, fkg)$ e $h^{\mathrm{f}}_{p,\Gamma'}$ é dado por

$$\begin{aligned} h^{\mathrm{f}}_{p,\Gamma'} &= \partial\left(f \triangleright a^{-1}\right)(fhg)(fkg)^{-1} \\ &\overset{①}{=} f\partial\left(a^{-1}\right)f^{-1}(fhg)(fkg)^{-1} \\ &= f\left[\partial\left(a^{-1}\right)hk^{-1}\right]f^{-1} \\ &= f\left(h^{\mathrm{f}}_{p,\Gamma'}\right)f^{-1} \end{aligned}$$

onde em ① usamos que a ação é equivariante e da ultima identidade segue o resultado.

Quando dois complexos tem uma intersecção não nula, podemos comparar localmente as configurações, isso será importante para a prova dos passos de Pachner onde apenas uma pequena região é alterada pela mutação.

Definição 3.5. *Seja K e K' dois complexos e X um subconjunto de simplexos tal que $X \subset K \cap K'$. Agora considere configurações $c \in \mathcal{C}(K)$ e $c' \in \mathcal{C}(K')$ iremos definir o simbolo*

$\boldsymbol{\delta(c,c')\big|_X}$ *da seguinte forma: escolha diagramas que representem as configurações c e c' tais que os caminhos elementares associados aos simplexos em X sejam os mesmos. Dizemos que $\delta(c,c')\big|_X = 1$ se todos os elementos associadas aos simplexos em X forem iguais e $\delta(c,c')\big|_X = 0$ caso contrário.* □

Com essa definição podemos agora obter como configurações associadas a subcomplexos se relacionam com configurações do complexo como um todo.

Lema 3.1. *Seja K_0 e K_1 dois complexos e $K = K_0 \cup K_1$. Sejam dadas configurações $c_0 \in \mathcal{C}(K_0)$ e $c_1 \in \mathcal{C}(K_1)$ tais que $\delta(c_0,c_1)\big|_{K_0\cap K_1} = 1$. Então existe uma única configuração $c \in \mathcal{C}(K)$ que simultaneamente satisfaz $\delta(c,c_0)\big|_{K_0} = 1$ e $\delta(c,c_1)\big|_{K_1} = 1$. Iremos denotar essa configuração por $\boldsymbol{c = c_0 \cup c_1}$.*

Demonstração. Iremos definir c por um diagrama. Primeiro fixe caminhos elementares para K isso induz uma escolha de caminhos elementares para K_0 e K_1. Agora fixado esses caminhos elementares tome os únicos diagramas d_0 representando c_0 e d_1 representando c_1. O diagrama d que representa c é dado pelo seguinte: para cada simplexo $s \in K$ se $s \in K_0$ o elemento associado a esse simplexo é o mesmo que o elemento associado para s por d_0, caso $s \in K_1$ então o elemento associado é o mesmo que o associado por d_1. Note que se $s \in K_0 \cap K_1$ a condição $\delta(c_0,c_1)\big|_{K_0\cap K_1} = 1$ garante que não existe ambiguidade nessa atribuição. Isso determina o único c que satisfaz simultaneamente $\delta(c,c_0)\big|_{K_0} = 1$ e $\delta(c,c_1)\big|_{K_1} = 1$ já que essas restrições determinam todos os elementos associados aos caminhos elementares. □

Os valores associados a 2-caminhos fechados sobre a fronteira de um 3-simplexos por uma configuração são especiais, o que motiva definir:

Definição 3.6. *Seja $c \in \mathcal{C}(T)$ uma configuração de 2-gauge. Dado um 3-simplexo $\tau \in T$ e um 2-caminho não trivial fechado sobre o bordo de τ, Γ, a* **2-holonomia** *de τ em relação a Γ, $h_{\tau,\Gamma}(c) \in \mathcal{G}$, é definida por*

$$h_{\tau,\Gamma}(c) = c(\Gamma)$$

□

Lema 3.2. *Dado uma configuração $c \in \mathcal{C}(T)$, se a 2-holonomia de um 3-simplexo $t \in T$ satisfaz $h_{t,\Gamma} = 1_{c[s(\Gamma)]}$ para algum 2-caminho fechado sobre t, $\Gamma \in \mathcal{P}_2(T)$, então $h_{\tau,\Gamma} = 1_{c[s(\Gamma)]}$ para todos os 2-caminhos fechados $\Gamma \in \mathcal{P}_2(T)$ sobre t.*

Demonstração. Note que um par de 2-caminhos fechados $\Gamma \in \mathcal{P}_2(T)$ e $\Gamma' \in \mathcal{P}_2(T)$ sobre o bordo de t podem apenas diferir apenas pela suas orientações e pelos caminhos iniciais $s(\Gamma)$ e $s(\Gamma')$, as outras diferenças são homotopias finas de superfícies.

Primeiro considere o caso em que $s(\Gamma) = s(\Gamma')$ e os 2-caminhos diferem pela suas orientações, nesse caso usando a definição da 2-holonomia, como aplicação do funtor que define uma configuração, temos que $h_{\tau,\Gamma} = h^{-1}_{\tau,\Gamma'}$, de onde segue o lema.

Agora considere o caso em que $s[s(\Gamma)] = s[s(\Gamma')]$ e $t[s(\Gamma)] = t[s(\Gamma')]$, podemos em vista do anterior considerar que Γ e Γ' tem a mesma orientação. Como $H_1(S^2) = 0$ então $s(\Gamma)$ e $s(\Gamma')$ são homólogos, escolha uma superfície que define essa equivalência e denote essa superfície por X e oriente ela de forma que $s(X) = s(\Gamma)$ e $t(X) = s(\Gamma')$, temos então que

$$\Gamma = X \circ \Gamma' \circ X^{-1}$$

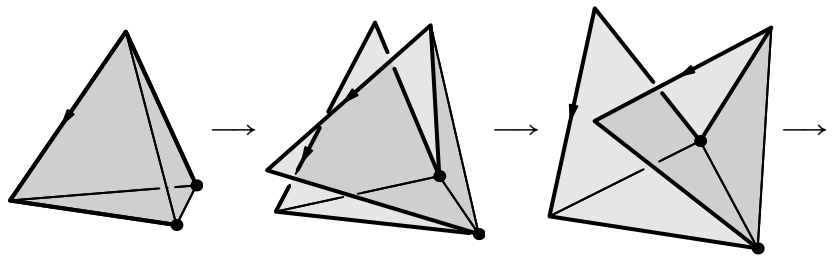
onde a igualdade é uma equivalência por homotopia fina. Aplicando sobre essa identidade o funtor, que preserva as composições, temos

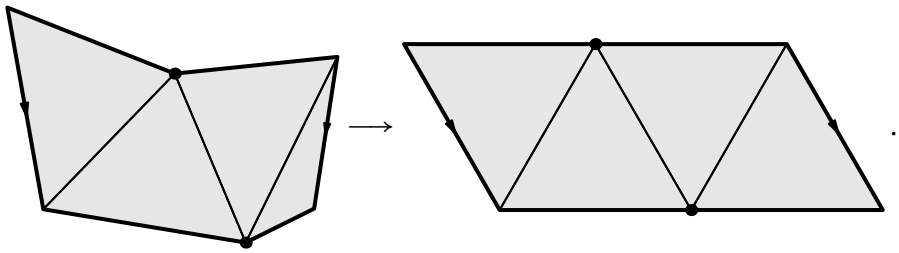
$$h_{\tau,\Gamma} = c(X) \circ h_{\tau,\Gamma'} \circ c(X)^{-1}$$

de onde segue a propriedade enunciada no lema.

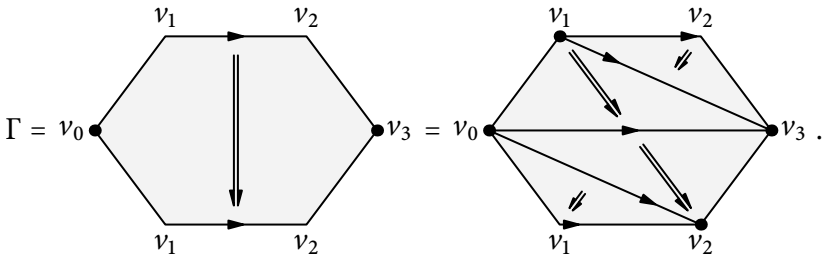
O último caso é quando ou $s[s(\Gamma)] \neq s[s(\Gamma')]$ ou $t[s(\Gamma)] \neq t[s(\Gamma')]$. Vamos assumir o primeiro caso, como S^2 é conexo por caminhos então existe um 1-caminho γ que tem $s(\gamma) = s[s(\Gamma')]$ e $t(\gamma) = s[s(\Gamma)]$. Agora considere o *whiskering* a esquerda $\gamma \circ \Gamma$, então $c[\gamma \circ \Gamma] = (c[s(\gamma \circ \Gamma)], 1)$ se e somente se $c[\Gamma] = (c[s(\Gamma)], 1)$, e podemos utilizar $\gamma \circ \Gamma$ e Γ' no caso do parágrafo anterior para concluir o lema. O caso $t[s(\Gamma)] \neq t[s(\Gamma')]$ é similar. □

Podemos utilizar colorações com caminhos elementares padrões para obter uma expressão explicitá para o elemento do 2-grupo que a 2-holonomia associa a um 3-simplexo. Considere um 3-simplexo $[v_0, v_1, v_2, v_3]$, com a seguinte enumeração $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$. Escolhemos um 2-caminho Γ que tem caminho inicial $\gamma = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ e percorre os 2-simplexos na seguinte ordem: $[v_1, v_2, v_3]$, $[v_0, v_1, v_3]$, $[v_0, v_2, v_3]$ e $[v_0, v_1, v_2]$. Podemos representar esse 2-caminho no plano se abrirmos o 3-simplexo ao longo do 1-caminho γ. Como representado pela sequência de imagens abaixo

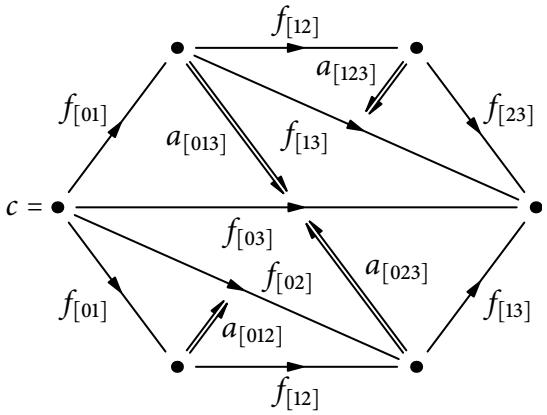




Vamos rotacionar e deformar a última imagem para uma posição mais conveniente. Podemos descrever esse 2-caminho pelo seguinte diagrama de composições



A coloração que a configuração associa para esse 3-simplexo é



A 2-holonomia associada a esse 3-simplexo para esse caminho Γ pode ser escrita explicitamente como

$$h_{[v_0,v_1,v_2,v_3],\Gamma} = \left(f_{[01]}f_{[12]}f_{[23]}, \left[f_{[01]} \triangleright a_{[123]}\right] a_{[013]}a^{-1}_{[023]}a^{-1}_{[012]}, f_{[01]}f_{[12]}f_{[23]}\right) \tag{3.3}$$

4 Função de partição $Z_Y(K)$ e o invariante de Yetter

Iremos nesse capítulo definir o *invariante de Yetter*. Iremos construir esse invariante a partir de uma triangulação de uma variedade compacta definindo o que iremos chamar de *função de partição de Yetter*, que associa um número complexo para cada triangulação. Utilizando o teorema de Pachner iremos provar que, se normalizado de forma apropriada, essa função de partição não depende da triangulação escolhida. Essa função de partição normalizada é o invariante de Yetter.

A função de partição também vai ser utilizada no próximo capítulo para definir operadores lineares que serão utilizados para definir o modelo Hamiltoniano.

Para estudar o comportamento da função de partição sobre uma mudança de triangulação iremos introduzir *lemas de fatoração*. Esse lemas irão permitir mostrar que o invariante de Yetter não se altera sobre a ação dos passos de Pachner. A prova apresentada aqui dessa invariância é um dos trabalhos originais desse trabalho. Iremos também utilizar esses lemas de fatoração no próximo capítulo para relacionar o invariante de Yetter com a degenerescência do estado fundamental. Esses lemas são o resultado mais importante desse capítulo pois eles permite simplificar expressões que de outra forma seriam difíceis de serem analisadas.

4.1 Função de partição $Z_Y(K)$

Seja fixado um complexo simplicial K. Fixe também um 2-grupo $\mathcal{G}$ construído a partir de um modulo cruzado $(G_1, G_2, \triangleright\colon G_1 \to \mathrm{Aut}(G_2), \partial\colon G_2 \to G_1)$.

Seja dado uma 2-configuração $c \in \mathcal{C}(K)$. Para cada 2-simplexo $p \in K$ podemos escolher um 2-caminho elementar Γ e calcular a pseudo 1-holonomia desse 2-simplexo, $h^f_{p,\Gamma}$. Como discutimos essa holonomia tem a propriedade que se ela é $1 \in G_1$ para algum 2-caminho elementar então ela é identidade para todos os 2-caminhos elementares. Assim podemos definir, sem nenhuma ambiguidade, o seguinte:

Definição 4.1. *Para cada 2-simplexo $p \in K$ definimos uma função característica*

$$\mathcal{I}_p\colon \mathcal{C}(K) \to \{0,1\}$$

associada a esse simplexo, pela seguinte expressão

$$\mathcal{I}_p(c) := \delta(h^f_{p,\Gamma}, 1) \quad \forall c \in \mathcal{C}(K)$$

onde Γ *é qualquer* 2*-caminho elementar sobre* p. □

De forma semelhante para cada 3-simplexo $t \in K$ podemos escolher um 2-caminho fechado Γ sobre $\partial(t)$ para definir a 2-holonomia $h_{t,\Gamma}$. Como se $h_{t,\Gamma}$ for identidade para algum Γ então é identidade para todo 2-caminho Γ' fechado sobre $\partial(t)$ podemos definir:

Definição 4.2. *Para cada* 3*-simplexo* $t \in K$ *definimos uma função característica*

$$\mathcal{I}_t : \mathcal{C}(K) \to \{0, 1\}$$

associada a esse simplexo, pela seguinte expressão

$$\mathcal{I}_t(c) := \delta\left[h_{t,\Gamma}, 1_{s(\Gamma)}\right] \quad \forall c \in \mathcal{C}(K)$$

onde Γ *é qualquer* 2*-caminho fechado sobre* $\partial(t)$. □

Essas definições permitem construir uma função característica definida sobre todo o complexo K:

Definição 4.3. *Dado um complexo simplicial* K *definimos a função característica*

$$\mathcal{F}_K : \mathcal{C}(K) \to \{0, 1\}$$

associada a esse complexo, pela seguinte expressão

$$\mathcal{F}_K(c) := \prod_{p \in K^{(2)}} \mathcal{I}_p(c) \prod_{t \in K^{(3)}} \mathcal{I}_t(c) \quad \forall c \in \mathcal{C}(K)$$

Se para uma configuração $c \in \mathcal{C}(K)$ *tivermos* $\mathcal{F}(c) = 1$ *dizemos que essa configuração é* ***flat em K****.* □

Podemos agora definir a função de partição que é que o *número de configurações que são flat em* K.

Definição 4.4. *A* ***função de partição de Yetter*** *de um complexo simplicial* K*, denotada por* $Z_Y(K)$*, é definida por*

$$Z_Y(K) := \sum_{c \in \mathcal{C}(K)} \mathcal{F}_K(c) \tag{4.1}$$

□

Um ponto importante é que a função de partição depende do complexo. Em geral, o número de configurações flat cresce com o número de elementos no complexo. Um fato importante, e não trivial, é que essa dependência com o número de elementos pode ser fatorada de forma que é possível normalizar a função de partição para obter um invariante.

Vamos estender a definição da função de partição para que função de partição também conte configurações que são flat em todo o lugar menos possivelmente em um subconjunto de simplexos.

Definição 4.5. *Dado um complexo K e um subconjunto de simplexos $\xi \subset K$ definimos $Z_Y(K;\xi)$ pelo seguinte*

$$Z_Y(K;\xi) \coloneqq \sum_{c \in \mathcal{C}(K)} \mathcal{F}_{K \setminus \xi}(c)$$

□

4.2 O invariante de Yetter

Agora seja dada uma triangulação T de uma variedade 4-dimensional M, iremos definir o *invariante de Yetter* normalizando de forma apropriada a função de partição que acabamos de definir.

Definição 4.6. *O **invariante de Yetter** de uma variedade compacta 4-dimensional M, $Y(M)$, é definido por*

$$Y(M) \coloneqq \frac{Z_Y(T)}{|G_1|^{f^0}|G_2|^{f^1-f^0}},$$

onde T é qualquer triangulação de M e f^i são as componentes do f-vetor dessa triangulação, ou seja, f^0 é o número de 0-simplexos e f^1 é o número de 1-simplexos. □

Note que tanto a função de partição quanto a normalização dependem da triangulação, porém a razão das duas é um invariante topológico, ou seja, dados duas triangulações da mesma variedade o invariante de Yetter tem o mesmo valor para ambas. Vamos mostrar nesse capítulo que de fato essa razão não depende da escolha de triangulação utilizada. Esse invariante foi introduzido por Yetter (1992). Iremos nesse capítulo apresentar uma versão alternativa dessa prova utilizando o teorema de Pachner para relacionar a função de partição de triangulações diferentes.

Yetter. 1992. "Topological quantum field theories associated to finite groups and crossed G-sets". *J. Knot. Theor. Ramif.* 01 (01): 1–20.

4.3 Prova da invariância de $Y(M)$

Vamos primeiro descrever uma visão geral do prova. Seja T e T' quaisquer duas triangulações de M, ou seja, $|T| \simeq |T'| \simeq M$. Para que $Y(M)$ esteja bem definido

temos que ter:

$$\frac{1}{|G_1|^{f^0}|G_2|^{f^1-f^0}} Z_Y(T) = \frac{1}{|G_1|^{f'^0}|G_2|^{f'^1-f'^0}} Z_Y(T')$$

onde f^i são as componentes do f-vetor de T e f'^i são as componentes do f-vetor de T'. Isso deve ocorrer para todos os pares de triangulações de M. Podemos escrever essa identidade na seguinte forma equivalente:

$$Z_Y(T) = |G_1|^{\Delta f^0}|G_2|^{\Delta f^1-\Delta f^0} Z(T') \tag{4.2}$$

onde definimos $\Delta f^i \coloneqq f^i - f'^i$.

Por causa do teorema de Pachner, teorema 2.2 na página 14, não é necessário testar essa identidade para todos os pares de triangulações de uma variedade. Basta que consideremos pares de triangulações que diferem entre si por um único passo de Pachner. Já que dado duas triangulações quaisquer T e T' **PL**-isomorfas existe uma sequência de passos de Pachner, P_i, tais que:

$$T \simeq T_0 \xrightarrow{P_1} T_1 \xrightarrow{P_2} T_2 \cdots \xrightarrow{P_n} T_n \simeq T'$$

e se essa identidade do invariante é verdade em cada um dos passos ela é verdade para o par T e T'. Fixemos então T e T' como sendo um par de triangulações obtidos aplicando um passo Pachner P qualquer, ou seja, $T \xrightarrow{P} T'$.

Uma propriedade importante dos passos de Pachner é que eles alteram apenas os simplexos na região de discos, lema 2.1 na página 18 e definição 2.9 na página 16.

No caso de um passo biestelar temos dois complexos $K \subset T$ e $K' \subset T'$ ambos homeomorfos a D^n tais que $K\big|_\partial = K'\big|_\partial$ que descrevem o passo de Pachner que leva T em T'. Da definição desses passos, definição 2.10 na página 17, temos que $T \setminus K = T' \setminus K'$. Podemos tornar essa identidade um pouco mais forte, denotando por $X = K \setminus K\big|_\partial$ e $X' = K' \setminus K'\big|_\partial$. Então é verdade que

$$T \setminus X = T' \setminus X'$$

Usando essa identidade podemos escrever que

$$Z_Y(T \setminus X) = Z_Y(T' \setminus X') \tag{4.3}$$

Uma expressão semelhante se aplica para o caso de um descascamento elementar porém agora definimos $X = K$ e esse é um complexo homeomorfo ao disco D^3 e $X' = K'$ é um complexo homeomorfo ao disco D^4, lembrando que temos que $K' \cap T = K$ e $T \cup K' = T'$ nesse caso.

Essa identidade entre funções de partições é a motivação da prova que será apresentada nesse capítulo. Iremos demonstrar que $Z_Y(T)$ é dado pelo produto de $Z_Y(T \setminus X)$ e um número que é função do f-vetor de X. Isso permite escrever que

$$Z_Y(T) = \rho(X) Z_Y(T \setminus X)$$
$$Z_Y(T') = \rho(X') Z_Y(T' \setminus X')$$

para $\rho(X)$ e $\rho(X')$ que iremos determinar. Agora utilizando a eq. (4.3) segue que

$$Z_Y(T) = \frac{\rho(X)}{\rho(X')} Z(T')$$

e o passo final da prova é verificar que

$$\frac{\rho(X)}{\rho(X')} = |G_1|^{\Delta f^0} |G_2|^{\Delta f^1 - \Delta f^0}$$

Para obter os fatores $\rho(X)$ e $\rho(X')$ iremos mostrar que é possível fatorar as funções características associadas aos simplexos de X e a X' de dentro da somatória que define $Z_Y(T)$ e $Z_Y(T')$, respectivamente.

4.3.1 Fatoração de simplexos

Iremos provar primeiro dois lemas. Esses lemas são identidades entre as holonomias associados aos simplexos por uma configuração. O lema para 4-simplexos foi introduzido por Attal (2004). Iremos chamar esses lemas de *identidade de Bianchi*, já que essas identidades são análogas às identidades de Bianchi de teorias de gauge mas agora para o caso de teorias de 2-gauge.

Attal. 2004. "Combinatorics of non-abelian gerbes with connection and curvature". *Ann. Fond. Louis Broglie* 29 (4): 609–633. arXiv: 0203056.

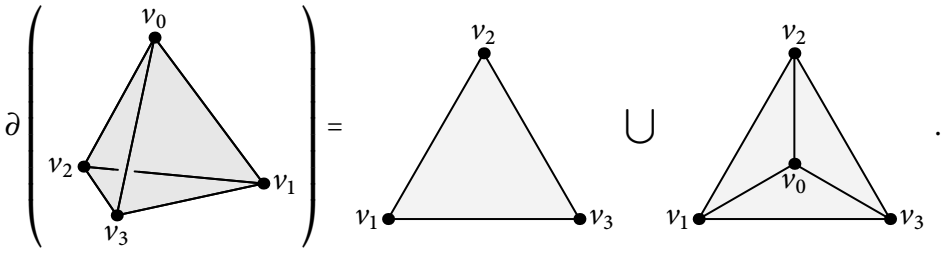
Vamos na sequência introduzir quatro *lemas de fatoração*. Esses lemas provam a existência de identidades com a seguinte forma

$$Z_Y(K) = \rho(\xi) Z_Y(K; \xi),$$

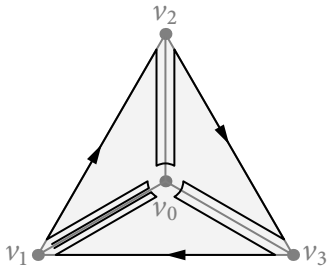
onde ξ é um conjunto de um ou dois simplexos, com propriedades especiais que serão descritas em breve, e $\rho(\xi) \in \mathbb{C}$ é um fator que depende apenas de ξ.

As duas identidades de Bianchi que vamos introduzir generalizam a identidade de mesmo nome da teoria de gauge usual, vamos então primeiro introduzir essa identidade no contexto de triangulações. Considere agora que temos uma teoria de gauge de um grupo G_1. As faces de um 3-simplexo $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ podem ser divididos

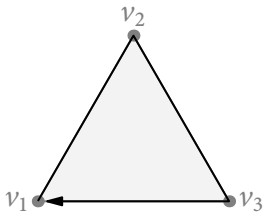
em dois subcomplexos:



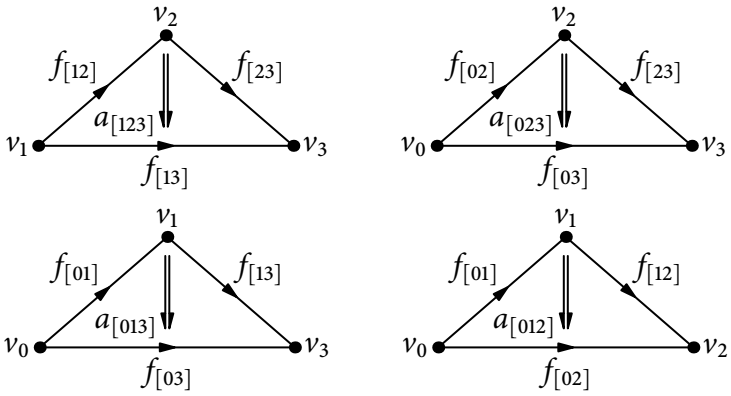
Sobre essa fronteira podemos descrever o 1-caminho fechado $\gamma_1 = (v_1, v_0, v_1, v_2, v_0, v_2, v_3, v_0, v_3, v_1, v_0, v_1)$ como ilustrado abaixo:



Esse 1-caminho é equivalente, pelas equivalências do 1-grupoide de caminhos, a $\gamma_2 = (v_1, v_2, v_3, v_1)$ como ilustrado abaixo:



Escolhendo uma configuração c sobre a fronteira pela seguinte coloração, que dividimos em partes,



e usando o fato que $\gamma_2 \sim \gamma_1 \Rightarrow c(\gamma_2) = c(\gamma_1)$, temos a seguinte identidade

$$f_{[12]}f_{[23]}f_{[13]}^{-1} = f_{[01]}^{-1}\left[f_{[01]}f_{[12]}f_{[02]}^{-1}\right]\left[f_{[02]}f_{[23]}f_{[03]}^{-1}\right]\left[f_{[03]}f_{[13]}^{-1}f_{[01]}^{-1}\right]f_{[01]}\,.$$

Essa expressão pode ser escrita em termos das 1-holonomias de cada uma das faces do 3-simplexo. Escolhemos os 1-caminhos fechados (v_i, v_j, v_k, v_i), com $i < j < k$, sobre o $[v_i, v_j, v_k]$ para calcular as 1-holonomias. Rearranjando os fatores de $f_{[01]}$ temos

$$f_{[01]}h_{[v_1,v_2,v_3]}f_{[01]}^{-1} = h_{[v_0,v_1,v_2]}h_{[v_0,v_2,v_3]}h_{[v_0,v_1,v_3]}^{-1}\,.$$

Lema 4.1 (Identidade de Bianchi para 3-simplexos). *Seja dado um complexo K e uma configuração $c \in \mathcal{C}(K)$. Considere agora um 3-simplexo qualquer de K e denote este por $[v_0, v_1, v_2, v_3]$. Escolhendo a ordem $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$ os elementos da coloração associados aos caminhos elementares padrões e as pseudo 1-holonomias satisfazem a seguinte identidade*

$$f_{[01]}\left[\partial(a_{[123]})h^f_{[v_1,v_2,v_3],\gamma_0}\right]f_{[01]}^{-1}\left[\partial(a_{[013]})h^f_{[v_0,v_1,v_3],\gamma_2}\right]$$
$$\left[\partial(a_{[023]})h^f_{[v_0,v_2,v_3],\gamma_1}\right]^{-1}\left[\partial(a_{[012]})h^f_{[v_0,v_1,v_2],\gamma_3}\right]^{-1} = 1$$

onde γ_i é o 2-caminho padrão associado ao 2-simplexo oposto ao vértice v_i.

Demonstração. A prova é direta, bastando substituir as expressões das pseudo 1-holonomias, definição 3.4 na página 47, em ambos os lados. □

Note que essa identidade é a mesma identidade para 1-holonomias que apresentamos antes, mas agora escrita em termos das pseudo 1-holonomias.

Agora enunciamos a identidade entre as 2-holonomias das faces de um 4-simplexo.

Lema 4.2 (Identidade de Bianchi para 4-simplexos). *Seja dado um complexo K e uma configuração $c \in \mathcal{C}(K)$. Considere agora um 4-simplexo qualquer de K e denote este por $[v_0, v_1, v_2, v_3, v_4]$. Escolhendo a ordem $v_0 < v_1 < v_2 < v_3 < v_4$ os elementos da coloração associados aos caminhos elementares padrões e as 2-holonomias satisfazem a seguinte identidade*

$$\left[h_{[v_0,v_1,v_2,v_3],\Gamma_4} \triangleleft f_{[34]}\right] \circ \left[h_{[v_0,v_1,v_2,v_4],\Gamma_3} \triangleleft \left(f_{[24]}^{-1}f_{[23]}f_{[34]}\right)\right]$$
$$= \left(f_{[01]} \triangleright h^{-1}_{[v_1,v_2,v_3,v_4],\Gamma_0}\right) \circ \alpha \circ h^{-1}_{[v_0,v_1,v_3,v_4],\Gamma_2} \circ h_{[v_0,v_2,v_3,v_4],\Gamma_1} \circ \alpha^{-1}$$

onde o 2-morfismo α é definido por

$$\alpha = \begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f_{[01]}f_{[12]}"] & \bullet \arrow[r, bend left, "f_{[23]}f_{[34]}"] \arrow[r, bend right, "f_{[24]}"'] \arrow[r, phantom, "a_{[234]}\Downarrow"] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, "f_{[01]}"] & \bullet \arrow[r, bend left, "f_{[12]}f_{[24]}"] \arrow[r, bend right, "f_{[14]}"'] \arrow[r, phantom, "a_{[124]}\Downarrow"] & \bullet \\
 & \bullet \arrow[r, bend left, "f_{[01]}f_{[14]}"] \arrow[r, bend right, "f_{[04]}"'] \arrow[r, phantom, "a_{[014]}\Downarrow"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

e os 2-caminhos usados para calcular as 2-holonomias acima são:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= ((v_1, v_2, v_3, v_4), (v_1, v_2, v_4), (v_1, v_4), (v_1, v_3, v_4), (v_1, v_2, v_3, v_4)) \\
\Gamma_1 &= ((v_0, v_4), (v_0, v_3, v_4), (v_0, v_2, v_3, v_4), (v_0, v_2, v_4), (v_0, v_4)) \\
\Gamma_2 &= ((v_0, v_4), (v_0, v_3, v_4), (v_0, v_1, v_3, v_4), (v_0, v_1, v_4), (v_0, v_4)) \\
\Gamma_3 &= ((v_0, v_1, v_2, v_4), (v_0, v_1, v_4), (v_0, v_4), (v_0, v_2, v_4), (v_0, v_1, v_2, v_4)) \\
\Gamma_4 &= ((v_0, v_1, v_2, v_3), (v_0, v_1, v_3), (v_0, v_3), (v_0, v_2, v_3), (v_0, v_1, v_2, v_3))
\end{aligned}$$

Demonstração. A prova é direta, bastando substituir as expressões das 2-holonomias, eq. (3.3) na página 50 para os 2-caminhos listados acima. □

A importância desses dois lemas é o comportamento quando todos menos uma das holonomias nesses lemas são identidades. Para um 4-simplexos se as 2-holonomias de quatro 3-simplexos forem identidade a holonomia do último 3-simplexo também deve ser identidade. Isso pode ser facilmente verificado já que todas as operações que aparecem na identidade de Bianchi para 4-simplexos levam identidade na identidade, já que são inversões, conjugações e whiskerings. De forma semelhante para um 3-simplexo se todas as pseudo 1-holonomias menos uma, por exemplo $h_{[v_0,v_1,v_2]}$, forem identidade e se a 2-holonomia do 3-simplexo for identidade temos

$$\begin{aligned}
1 &= f_{[01]}\partial(a_{[123]})f_{[01]}^{-1}\partial(a_{[013]})\partial(a_{[023]}^{-1})\left[\partial(a_{[012]})h_{[v_0,v_1,v_2]}\right]^{-1} \\
&\overset{①}{=} \partial\left(f_{[01]} \triangleright a_{[123]}\right)\partial(a_{[013]})\partial\left(a_{[023]}^{-1}\right)\left[\partial(a_{[012]})h_{[v_0,v_1,v_2]}\right]^{-1} \\
&\overset{②}{=} \partial\left(h_{[v_0,v_1,v_2,v_3]}\right)\partial\left(a_{[012]}\right)h_{[v_0,v_1,v_2]}^{-1}\partial\left(a_{[012]}^{-1}\right) \\
&= \partial\left(a_{[012]}\right)h_{[v_0,v_1,v_2]}^{-1}\partial\left(a_{[012]}^{-1}\right)
\end{aligned}$$

onde em ① usamos que ∂ é equivariante e em ② usamos a expressão para $h_{[v_0,v_1,v_2,v_3]}$. A pseudo 1-holonomia $h_{[v_0,v_1,v_2]}$ tem que ser identidade se as outras holonomias forem identidades.

Lema 4.3 (Fatoração de 2-simplexo). *Seja K um complexo e $\xi \subset K$. Dado um 2-simplexo $p \in K$ tal que exista um 3-simplexo $t \in K$ com $p \prec t$, $(\partial t)^{(2)} \cap \xi = \varnothing$ e $t \notin \xi$ então temos que*

$$Z_Y(K;\xi) = Z_Y(K;\xi \cup \{p\})$$

Demonstração. Vamos usar $\xi' = \xi \cup \{p\}$ ao longo dessa prova. Explicitamente precisamos mostrar que

$$\sum_{c \in \mathcal{C}(K)} \mathcal{F}_{K \setminus \xi'}(c)\mathcal{I}_p(c) = \sum_{c \in \mathcal{C}(K)} \mathcal{F}_{K \setminus \xi'}(c)$$

como a soma sobre configuração é a mesma em ambos os lados, podemos provar essa identidade termo a termo.

Fixe uma configuração $c' \in \mathcal{C}(K)$. Se $\mathcal{F}_{K \setminus \xi'}(c') = 0$ então ambos os lado são nulos e fica provado a identidade para esse termo. Suponha agora que $\mathcal{F}_{K \setminus \xi;}(c') = 1$. Isso apenas é verdade se todas as 2-holonomias dos 3-simplexos forem identidade e se todos as pseudo 1-holonomias dos 2-simplexos $x \in K \setminus \xi'$ forem identidades. Como $p \prec t$ e $\partial t^{(2)} \cap \xi = \varnothing$ então existem três outros 2-simplexos $x_i \neq t$, $i \in \{0,1,2\}$, faces de t que pertencem a $K \setminus \xi'$ e a pseudo 1-holonomia de cada um desses 2-simplexos é identidade e como $t \notin \xi$ a 2-holonomia do 3-simplexo t é identidade. Usando a identidade de Bianchi do lema 4.1 na página 57 isso implica que a pseudo 1-holonomia do 2-simplexo p também é identidade. Com isso o termo do lado direito é identidade se e somente se o termo lado esquerdo for identidade. □

Lema 4.4 (Fatoração de 3-simplexo). *Seja K um complexo e $\xi \subset K$. Dado um 3-simplexo $t \in K$ tal que exista um 4-simplexo $q \in K$ com $t \prec q$ e $(\partial q)^{(3)} \cap \xi = \varnothing$ então temos que*

$$Z_Y(K;\xi) = Z_Y(K;\xi \cup \{t\}).$$

Demonstração. Vamos usar $\xi' = \xi \cup \{t\}$ ao longo dessa prova. Explicitamente precisamos mostrar que vale o seguinte

$$\sum_{c \in \mathcal{C}(K)} \mathcal{F}_{K \setminus \xi'}(c)\mathcal{I}_t(c) = \sum_{c \in \mathcal{C}(K)} \mathcal{F}_{K \setminus \xi'}(c)$$

como a soma sobre configuração é a mesma em ambos os lados podemos provar essa identidade termo a termo.

Fixe uma configuração $c \in \mathcal{C}(K)$. Se $\mathcal{F}_{K \setminus \xi'}(c) = 0$ então ambos os lado são nulos e fica provado a identidade para esse termo. Suponha agora que $\mathcal{F}_{K \setminus \xi'}(c) = 1$. Isso

apenas é verdade se todas as 2-holonomias dos 3-simplexos $x \in K \setminus \xi'$ forem identidade. Como $t \prec q$ e $(\partial q)^{(3)} \cap \xi = \varnothing$ então existem quatro outros 3-simplexos $x_i \neq t, i \in \{0,1,2,3\}$, faces de q que pertencem a $K \setminus \xi'$ e a 2-holonomia de cada um desses 3-simplexos é identidade. Usando a identidade de Bianchi do lema 4.2 na página 57 isso implica que a 2-holonomia do 3-simplexo t também é identidade. Com isso o termo do lado direito é identidade se e somente se o termo do lado esquerdo for identidade. □

Lema 4.5 (Fatoração de 1-simplexo e 2-simplexo). *Seja K um complexo. Dados um 2-simplexo $p \in K$ e um 1-simplexo $l \in K$ tais que $l \prec p$ e* $\operatorname{star}(l) = \{p\}$ *então temos que:*

$$Z_Y(K) = |G_2| Z_Y(K \setminus \{l,p\})$$

Demonstração. Explicitamente precisamos mostrar que

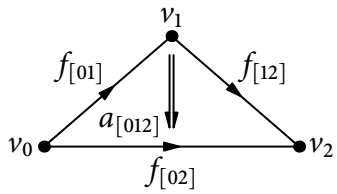
$$\sum_{\substack{c' \in \mathcal{C}(K \setminus \{l,p\}) \\ c \in \mathcal{C}(\{l,p\})}} \mathcal{F}_{K \setminus \{l,p\}}(c') \mathcal{I}_p(c \cup c') = |G_2| \sum_{c' \in \mathcal{C}(K \setminus \{l,p\})} \mathcal{F}_{K \setminus \{l,p\}}(c')$$

vamos provar essa identidade para cada termo da soma sobre $\mathcal{C}(K \setminus \{l,p\})$.

Fixe uma configuração $c' \in \mathcal{C}(K \setminus \{l,p\})$. Se $\mathcal{F}_{K \setminus \{l,p\}}(c') = 0$ então ambos os lado são nulos e fica provado a identidade para esse termo. Suponha agora que $\mathcal{F}_{K \setminus \{l,p\}}(c') = 1$ temos então que mostrar que

$$\sum_{c \in \mathcal{C}(\{l,p\})} \mathcal{I}_p(c \cup c') = |G_2|$$

Vamos escolher uma coloração padrão para a configuração $c \cup c'$. Como $\mathcal{I}_p$ só depende da configuração em $\overline{p}$ vamos representar essa parte abaixo onde escolhemos $p = [v_0, v_1, v_2]$, $l = [v_0, v_2]$ e a ordem $v_0 < v_1 < v_2$



Lembrando que os elementos $f_{[01]}$ e $f_{[12]}$ estão fixos pela configuração c' podemos escrever que

$$\sum_{c \in \mathcal{C}(\{l,p\})} \mathcal{I}_p(c \cup c') = \sum_{\substack{f_{[02]} \in G_1 \\ a_{[012]} \in G_2}} \delta(\partial a_{[012]}^{-1} f_{[01]} f_{[12]} f_{[02]}^{-1}, 1)$$

agora considere um termo na soma da direita com $a_{[012]} \in G_2$ fixo, existe um único valor de $f_{[02]}$ que torna o termo δ não nulo na soma da direita o elemento $f_{[02]} = \partial a_{012}^{-1} f_{[01]} f_{[12]}$. Como isso ocorre para todos os $a_{[012]} \in G_2$ a soma vale $|G_2|$. □

Lema 4.6 (Fatoração de 2-simplexo e 3-simplexo). *Seja K um complexo. Dados um 3-simplexo $t \in K$ e um 2-simplexo $p \in K$, tais que $p < t$ e* $\mathrm{star}(p) = \{t\}$ *então temos que*

$$Z_Y(K) = Z_Y(K \setminus \{p, t\})$$

Demonstração. Explicitamente precisamos mostrar que

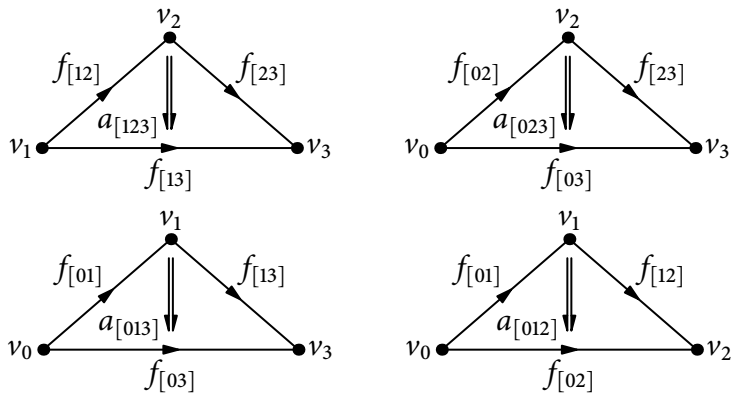
$$\sum_{\substack{c' \in \mathcal{C}(K \setminus \{p,t\}) \\ c \in \mathcal{C}(\{p,t\})}} \mathcal{F}_{K \setminus \{p,t\}}(c') \mathcal{I}_t(c \cup c') \mathcal{I}_p(c \cup c') = \sum_{c \in \mathcal{C}(K \setminus \{p,t\})} \mathcal{F}_{K \setminus \{p,t\}}(c')$$

vamos provar esse identidade para cada termo da soma sobre $\mathcal{C}(K \setminus \{l, p\})$.

Fixe uma configuração $c' \in \mathcal{C}(K \setminus \{p, t\})$. Se $\mathcal{F}_{K \setminus \{p,t\}}(c') = 0$ então ambos os lado são nulos e fica provado a identidade para esse termo. Suponha agora que $\mathcal{F}_{K \setminus \{p,t\}}(c') = 1$ temos então que mostrar que

$$\sum_{c \in \mathcal{C}(\{p,t\})} \mathcal{I}_p(c \cup c') \mathcal{I}_t(c \cup c') = 1$$

Vamos escolher uma coloração padrão para a configuração $c \cup c'$, os únicos elementos que aparecem na soma acima são aqueles de $\bar{t}$. Escolhemos $t = [v_0, v_1, v_2, v_3]$,$p = [v_0, v_1, v_2]$ e a ordem $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$, abaixo representamos a coloração de cada uma das faces



Lembrando que todos os elementos da coloração com exceção de $a_{[012]} \in G_2$ estão fixos por $c' \in \mathcal{C}(K \setminus \{p, t\})$. Temos então que

$$\sum_{c \in \mathcal{C}(\{p,t\})} \mathcal{I}_p(c \cup c') \mathcal{I}_t(c \cup c') = \sum_{a \in G_2} \mathcal{I}_p(c \cup c') \delta \left[\left(f_{[01]} \triangleright a_{[123]} \right) a_{[013]} a_{[023]}^{-1} a_{[012]}^{-1}, 1 \right]$$

um único valor de $a_{[012]}$ existe que torna o termo δ não nulo, o termo em que $a_{[012]} = \left(f_{[01]} \triangleright a_{[123]} \right) a_{[013]} a_{[023]}^{-1}$ e pela identidade de Bianchi do lema 4.1 na página 57 nesse caso temos $\mathcal{I}_p(c \cup c')$ e a soma tem um único termo não nulo. □

4.3.2 Fatoração dos passos de Pachner

Iremos agora realizar o procedimento descrito no início dessa seção. O primeiro passo é encontrar os fatores que relacionam $Z_Y(T)$ e $Z_Y(T')$ quando T e T' são obtidos um do outro por um passo de Pachner.

Lema 4.7. *Considere dois complexos* 4*-dimensionais T e T' onde T' é obtido de T pelo passo biestelar* $(1,5)$. *Então:*

$$Z_Y(T') = |G_1||G_2|^4 Z_Y(T).$$

Demonstração. Como foi notado anteriormente, iremos mostrar que podemos fatorar todas as funções características internas ao passos de Pachner de ambos os lados, para isso ordenamos os vértices internos por $v_0 < v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < v_5$ e abaixo listamos todos os simplexos do interior.

$$T \cap T' = \left\{ \begin{array}{c} [v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_5], \\ [v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_1, v_4], [v_1, v_5], [v_2, v_3], \\ [v_2, v_4], [v_2, v_5], [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_4, v_5], \\ [v_1, v_2, v_3], [v_1, v_2, v_4], [v_1, v_2, v_5], [v_1, v_3, v_4], [v_1, v_3, v_5], \\ [v_1, v_4, v_5], [v_2, v_3, v_4], [v_2, v_3, v_5], [v_2, v_4, v_5], [v_3, v_4, v_5], \\ [v_1, v_2, v_3, v_4], [v_1, v_2, v_3, v_5], [v_1, v_2, v_4, v_5], [v_1, v_3, v_4, v_5], [v_2, v_3, v_4, v_5], \end{array} \right\},$$

$$T' \setminus (T \cap T') = \left\{ \begin{array}{c} [v_0], \\ [v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_0, v_4], [v_0, v_5], \\ [v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_1, v_4], [v_0, v_1, v_5], [v_0, v_2, v_3], \\ [v_0, v_2, v_4], [v_0, v_2, v_5], [v_0, v_3, v_4], [v_0, v_3, v_5], [v_0, v_4, v_5], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3], [v_0, v_1, v_2, v_4], [v_0, v_1, v_2, v_5], [v_0, v_1, v_3, v_4], \\ [v_0, v_1, v_3, v_5], [v_0, v_1, v_4, v_5], [v_0, v_2, v_3, v_4], [v_0, v_2, v_3, v_5], \\ [v_0, v_2, v_4, v_5][v_0, v_3, v_4, v_5], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4], [v_0, v_1, v_2, v_3, v_5], [v_0, v_1, v_2, v_4, v_5], \\ [v_0, v_1, v_3, v_4, v_5], [v_0, v_2, v_3, v_4, v_5] \end{array} \right\},$$

$$T \setminus (T \cap T') = \left\{ [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5] \right\}.$$

Vamos fatorar $Z_Y(T')$. Os passos são:

1. Usamos o lema de fatoração para 3-simplexo, lema 4.4 na página 59, para $[v_0, v_1, v_2, v_3], [v_0, v_1, v_2, v_3] \prec [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4]$;

2. Usamos o lema 4.4 para $[v_0, v_1, v_2, v_4]$, $[v_0, v_1, v_2, v_4] \prec [v_0, v_1, v_2, v_4, v_5]$;

3. Usamos o lema 4.4 para $[v_0, v_1, v_3, v_4]$, $[v_0, v_1, v_3, v_4] \prec [v_0, v_1, v_3, v_4, v_5]$;

4. Usamos o lema 4.4 para $[v_0, v_2, v_3, v_4]$, $[v_0, v_2, v_3, v_4] \prec [v_0, v_2, v_3, v_4, v_5]$;

5. Como $\mathrm{star}[v_0, v_1, v_3] = \{[v_0, v_1, v_3, v_5]\}$ usamos o lema de fatoração para 2-simplexo e 3-simplexo, lema 4.6 na página 61, para o par $[v_0, v_1, v_3]$ e $[v_0, v_1, v_3, v_5]$;

6. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_0, v_1, v_4]$ e $[v_0, v_1, v_4, v_5]$;

7. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_0, v_1, v_5]$ e $[v_0, v_1, v_2, v_5]$;

8. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_0, v_2, v_3]$ e $[v_0, v_2, v_3, v_5]$;

9. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_0, v_2, v_4]$ e $[v_0, v_2, v_4, v_5]$;

10. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_0, v_3, v_4]$ e $[v_0, v_3, v_4, v_5]$;

11. Como $\mathrm{star}[v_0, v_1] = \{[v_0, v_1, v_2]\}$ usamos o lema de fatoração para 1-simplexo e 2-simplexo, lema 4.5 na página 60, para o par $[v_0, v_1]$ e $[v_0, v_1, v_2]$;

12. Usamos o lema 4.5 para o par $[v_0, v_2]$ e $[v_0, v_2, v_5]$;

13. Usamos o lema 4.5 para o par $[v_0, v_3]$ e $[v_0, v_3, v_5]$;

14. Usamos o lema 4.5 para o par $[v_0, v_4]$ e $[v_0, v_4, v_5]$;

15. Como $\mathrm{star}[v_0, v_5] = \varnothing$ podemos fatorar o termo $\sum_{c \in \mathcal{C}([v_0, v_5])} 1 = |G_1|$ da soma sobre configurações.

Os passos 11–14 trazem um fator multiplicativo de $|G_2|$ e o passo 15 um fator de $|G_1|$. Colecionando esses fatores temos o resultado do lema. □

Lema 4.8. *Considere dois complexos* 4*-dimensionais* T *e* T' *onde* T' *é obtido de* T *pelo passo biestelar* $(2, 4)$*. Então:*

$$Z_Y(T') = |G_2| \cdot Z_Y(T).$$

Demonstração. Essa prova é semelhante ao caso anterior, iremos apenas enunciar os passos.

$$T \cap T' = \left\{ \begin{array}{c} [v_0], [v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_5], \\ [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_0, v_4], [v_0, v_5], [v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_1, v_4], \\ [v_1, v_5], [v_2, v_3], [v_2, v_4], [v_2, v_5], [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_4, v_5], \\ [v_0, v_2, v_3], [v_0, v_2, v_4], [v_0, v_2, v_5], [v_0, v_3, v_4], [v_0, v_3, v_5], [v_0, v_4, v_5], \\ [v_1, v_2, v_3], [v_1, v_2, v_4], [v_1, v_2, v_5], [v_1, v_3, v_4], [v_1, v_3, v_5], [v_1, v_4, v_5], \\ [v_2, v_3, v_4], [v_2, v_3, v_5], [v_2, v_4, v_5], [v_3, v_4, v_5], \\ [v_0, v_2, v_3, v_4], [v_0, v_2, v_3, v_5], [v_0, v_2, v_4, v_5], [v_0, v_3, v_4, v_5], \\ [v_1, v_2, v_3, v_4], [v_1, v_2, v_3, v_5], [v_1, v_2, v_4, v_5], [v_1, v_3, v_4, v_5], \end{array} \right\},$$

$$T' \setminus (T \cap T') = \left\{ \begin{array}{c} [v_0, v_1], \\ [v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_1, v_4], [v_0, v_1, v_5], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3], [v_0, v_1, v_2, v_4], [v_0, v_1, v_2, v_5], [v_0, v_1, v_3, v_4], \\ [v_0, v_1, v_3, v_5], [v_0, v_1, v_4, v_5], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4], [v_0, v_1, v_2, v_3, v_5], [v_0, v_1, v_2, v_4, v_5], \\ [v_0, v_1, v_3, v_4, v_5] \end{array} \right\},$$

$$T \setminus (T \cap T') = \left\{ \begin{array}{c} [v_2, v_3, v_4, v_5], \\ [v_0, v_2, v_3, v_4, v_5], [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5] \end{array} \right\}.$$

Vamos fatorar $Z_Y(T')$ primeiro. Os passos são:

1. Usamos o lema 4.4 para $[v_0, v_1, v_2, v_3]$, $[v_0, v_1, v_2, v_3] \prec [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4]$;
2. Usamos o lema 4.4 para $[v_0, v_1, v_2, v_4]$, $[v_0, v_1, v_2, v_4] \prec [v_0, v_1, v_2, v_4, v_5]$;
3. Usamos o lema 4.4 para $[v_0, v_1, v_3, v_4]$, $[v_0, v_1, v_3, v_4] \prec [v_0, v_1, v_3, v_4, v_5]$;
4. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_0, v_1, v_2]$ e $[v_0, v_1, v_2, v_5]$;
5. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_0, v_1, v_3]$ e $[v_0, v_1, v_3, v_5]$;
6. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_0, v_1, v_4]$ e $[v_0, v_1, v_4, v_5]$;
7. Usamos o lema 4.5 para o par $[v_0, v_1]$ e $[v_0, v_1, v_5]$.

O passo 7 traz um fator multiplicativo de $|G_2|$.
Agora vamos fatorar $Z_Y(T)$. O passo é:

1. Usamos o lema 4.4 de fatoração para $[v_2, v_3, v_4, v_5], [v_2, v_3, v_4, v_5] \prec [v_0, v_2, v_3, v_4, v_5]$.

□

Lema 4.9. *Considere dois complexos* 4*-dimensionais* T *e* T' *onde* T' *é obtido de* T *pelo passo biestelar* $(3,3)$*. Então:*

$$Z_Y(T') = Z_Y(T)$$

Demonstração. Essa prova é semelhante ao primeiro caso, iremos apenas enunciar os passos.

$$T \cap T' = \left\{ \begin{array}{c} [v_0], [v_1], [v_2], [v_3], [v_4], [v_5], \\ [v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_0, v_4], [v_0, v_5], [v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_1, v_4], \\ [v_1, v_5], [v_2, v_3], [v_2, v_4], [v_2, v_5], [v_3, v_4], [v_3, v_5], [v_4, v_5], \\ [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_1, v_4], [v_0, v_1, v_5], [v_0, v_2, v_3], [v_0, v_2, v_4], [v_0, v_2, v_5], \\ [v_0, v_3, v_4], [v_0, v_3, v_5], [v_0, v_4, v_5], [v_1, v_2, v_3], [v_1, v_2, v_4], [v_1, v_2, v_5], \\ [v_1, v_3, v_4], [v_1, v_3, v_5], [v_1, v_4, v_5], [v_2, v_3, v_4], [v_2, v_3, v_5], [v_2, v_4, v_5], \\ [v_0, v_1, v_3, v_4], [v_0, v_1, v_3, v_5], [v_0, v_1, v_4, v_5], [v_0, v_2, v_3, v_4], [v_0, v_2, v_3, v_5], \\ [v_0, v_2, v_4, v_5], [v_1, v_2, v_3, v_4], [v_1, v_2, v_3, v_5], [v_1, v_2, v_4, v_5], \end{array} \right\},$$

$$T' \setminus (T \cap T') = \left\{ \begin{array}{c} [v_0, v_1, v_2], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3], [v_0, v_1, v_2, v_4], [v_0, v_1, v_2, v_5], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4], [v_0, v_1, v_2, v_3, v_5], [v_0, v_1, v_2, v_4, v_5] \end{array} \right\},$$

$$T \setminus (T \cap T') = \left\{ \begin{array}{c} [v_3, v_4, v_5], \\ [v_0, v_3, v_4, v_5], [v_1, v_3, v_4, v_5], [v_2, v_3, v_4, v_5], \\ [v_0, v_1, v_3, v_4, v_5], [v_0, v_2, v_3, v_4, v_5], [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5] \end{array} \right\}.$$

Vamos fatorar $Z_Y(T')$ primeiro. Os passos são:

1. Usamos o lema 4.4 para $[v_0, v_1, v_2, v_3], [v_0, v_1, v_2, v_3] \prec [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4]$;
2. Usamos o lema 4.4 para $[v_0, v_1, v_2, v_4], [v_0, v_1, v_2, v_4] \prec [v_0, v_1, v_2, v_4, v_5]$;
3. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_0, v_1, v_2]$ e $[v_0, v_1, v_2, v_5]$.

Agora vamos fatorar $Z_Y(T)$. Os passos são:

1. Usamos o lema 4.4 para $[v_0, v_3, v_4, v_5], [v_0, v_3, v_4, v_5] \prec [v_0, v_1, v_3, v_4, v_5]$;
2. Usamos o lema 4.4 para $[v_1, v_3, v_4, v_5], [v_1, v_3, v_4, v_5] \prec [v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$;

3. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_3, v_4, v_5]$ e $[v_2, v_3, v_4, v_5]$.

Nenhum dos passos tem um fator multiplicativo diferente da unidade. □

Lema 4.10. *Considere dois complexos 4-dimensionais T e T' onde T' é obtido de T pelo descascamento elementar inverso $(1,4)$. Então:*

$$Z_Y(T') = |G_1||G_2|^3 Z_Y(T).$$

Demonstração. Essa prova é semelhante ao primeiro caso, iremos apenas enunciar os passos.

$$T' \cap T = \left\{ \begin{array}{c} [v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_1, v_2], [v_1, v_3], [v_2, v_3], \\ [v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_2, v_3], [v_1, v_2, v_3], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3] \end{array} \right\},$$

$$(T' \setminus T) \cup (T' \cap T) = \left\{ \begin{array}{c} [v_0, v_4], [v_1, v_4], [v_2, v_4], [v_3, v_4], \\ [v_0, v_1, v_4], [v_0, v_2, v_4], [v_0, v_3, v_4], \\ [v_1, v_2, v_4], [v_1, v_3, v_4], [v_2, v_3, v_4], \\ [v_0, v_1, v_2, v_4], [v_0, v_1, v_3, v_4], \\ [v_0, v_2, v_3, v_4], [v_1, v_2, v_3, v_4], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4] \end{array} \right\} \cup (T' \cap T).$$

Vamos fatorar $Z_Y(T')$. Os passos são:

1. Usamos o lema 4.4 para $[v_1, v_2, v_3, v_4], [v_1, v_2, v_3, v_4] \prec [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4]$;
2. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_2, v_3, v_4]$ e $[v_0, v_2, v_3, v_4]$;
3. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_1, v_3, v_4]$ e $[v_0, v_1, v_3, v_4]$;
4. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_1, v_2, v_4]$ e $[v_0, v_1, v_2, v_4]$;
5. Usamos o lema 4.5 para o par $[v_3, v_4]$ e $[v_0, v_3, v_4]$;
6. Usamos o lema 4.5 para o par $[v_2, v_4]$ e $[v_0, v_2, v_4]$;
7. Usamos o lema 4.5 para o par $[v_1, v_4]$ e $[v_0, v_1, v_4]$;
8. Como $\mathrm{star}[v_0, v_4] = \varnothing$ podemos fatorar o termo $\sum_{c \in \mathcal{C}([v_0, v_4])} 1 = |G_1|$ da soma sobre configurações.

Os passos 5–7 trazem um fator multiplicativo de $|G_2|$ e o passo 8 um fator de $|G_1|$. Colecionando esses fatores temos o resultado do lema. □

Lema 4.11. *Considere dois complexos 4-dimensionais T e T' onde T' é obtido de T pelo descascamento elementar inverso $(2,3)$. Então:*

$$Z_Y(T') = |G_2| Z_Y(T).$$

Demonstração. Essa prova é semelhante ao primeiro caso, iremos apenas enunciar os passos.

$$T' \cap T = \left\{ \begin{array}{c} [v_0,v_1],[v_0,v_2],[v_0,v_3],[v_0,v_4],[v_1,v_2], \\ [v_1,v_3],[v_1,v_4],[v_2,v_3],[v_2,v_4], \\ [v_0,v_1,v_2],[v_0,v_1,v_3],[v_0,v_1,v_4],[v_0,v_2,v_3], \\ [v_0,v_2,v_4],[v_1,v_2,v_3],[v_1,v_2,v_4], \\ [v_0,v_1,v_2,v_3],[v_0,v_1,v_2,v_4] \end{array} \right\},$$

$$(T' \setminus T) \cup (T' \cap T) = \left\{ \begin{array}{c} [v_3,v_4], \\ [v_0,v_3,v_4],[v_1,v_3,v_4],[v_2,v_3,v_4], \\ [v_0,v_1,v_3,v_4],[v_0,v_2,v_3,v_4],[v_1,v_2,v_3,v_4], \\ [v_0,v_1,v_2,v_3,v_4] \end{array} \right\} \cup (T' \cap T)\ .$$

Vamos fatorar $Z_Y(T')$. Os passos são:

1. Usamos o lema 4.4 para $[v_1,v_2,v_3,v_4],[v_1,v_2,v_3,v_4] \prec [v_0,v_1,v_2,v_3,v_4]$;
2. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_2,v_3,v_4]$ e $[v_0,v_2,v_3,v_4]$;
3. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_1,v_3,v_4]$ e $[v_0,v_1,v_3,v_4]$;
4. Usamos o lema 4.5 para o par $[v_3,v_4]$ e $[v_0,v_3,v_4]$.

O passo 4 traz um fator multiplicativo de $|G_2|$. □

Lema 4.12. *Considere dois complexos 4-dimensionais T e T' onde T' é obtido de T pelo descascamento elementar inverso $(3,2)$. Então:*

$$Z_Y(T') = Z_Y(T).$$

Demonstração. Essa prova é semelhante ao primeiro caso, iremos apenas enunciar os passos.

$$T' \cap T = \left\{ \begin{array}{c} [v_0,v_1],[v_0,v_2],[v_0,v_3],[v_0,v_4],[v_1,v_2], \\ [v_1,v_3],[v_1,v_4],[v_2,v_3],[v_2,v_4],[v_3,v_4], \\ [v_0,v_1,v_2],[v_0,v_1,v_3],[v_0,v_1,v_4],[v_0,v_2,v_3],[v_0,v_2,v_4], \\ [v_0,v_3,v_4],[v_1,v_2,v_3],[v_1,v_2,v_4],[v_1,v_3,v_4], \\ [v_0,v_1,v_2,v_3],[v_0,v_1,v_2,v_4],[v_0,v_1,v_3,v_4] \end{array} \right\},$$

$$(T' \setminus T) \cup (T' \cap T) = \left\{ \begin{array}{c} [v_2, v_3, v_4], \\ [v_0, v_2, v_3, v_4], [v_1, v_2, v_3, v_4], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4] \end{array} \right\} \cup (T' \cap T) \ .$$

Vamos fatorar $Z_Y(T')$. Os passos são:

1. Usamos o lema 4.4 para $[v_1, v_2, v_3, v_4], [v_1, v_2, v_3, v_4] \prec [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4]$;
2. Usamos o lema 4.6 para o par $[v_2, v_3, v_4]$ e $[v_0, v_2, v_3, v_4]$.

Nenhum dos passos tem um fator multiplicativo diferente da unidade. □

Lema 4.13. *Considere dois complexos* 4*-dimensionais* T *e* T' *onde* T' *é obtido de* T *pelo descascamento elementar inverso* $(4,1)$*. Então:*

$$Z_Y(T') = Z_Y(T).$$

Demonstração. Essa prova é semelhante ao primeiro caso, iremos apenas enunciar os passos.

$$T' \cap T = \left\{ \begin{array}{c} [v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3], [v_0, v_4], [v_1, v_2], \\ [v_1, v_3], [v_1, v_4], [v_2, v_3], [v_2, v_4], [v_3, v_4], \\ [v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1, v_3], [v_0, v_1, v_4], [v_0, v_2, v_3], [v_0, v_2, v_4], \\ [v_0, v_3, v_4], [v_1, v_2, v_3], [v_1, v_2, v_4], [v_1, v_3, v_4], [v_2, v_3, v_4], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3], [v_0, v_1, v_2, v_4], \\ [v_0, v_1, v_3, v_4], [v_0, v_2, v_3, v_4] \end{array} \right\},$$

$$(T' \setminus T) \cup (T' \cap T) = \left\{ \begin{array}{c} [v_1, v_2, v_3, v_4], \\ [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4] \end{array} \right\} \cup (T' \cap T) \ .$$

Vamos fatorar $Z_Y(T')$. Os passos são:

1. Usamos o lema 4.4 para $[v_1, v_2, v_3, v_4], [v_1, v_2, v_3, v_4] \prec [v_0, v_1, v_2, v_3, v_4]$.

Esse passo tem um fator multiplicativo igual a unidade. □

Agora que temos os fatores multiplicativos precisamos verificar que esses valores correspondem aqueles que aparecem na normalização do invariante, ou seja, precisamos verificar que a eq. (4.2) na página 54 é satisfeita para cada um dos passos de Pachner.

Teorema 4.1. *O elemento de $\mathbb{C}$ definido abaixo é um invariante topológico*

$$Y(M) := \frac{Z_Y(T)}{|G_1|^{f^0}|G_2|^{f^1-f^0}}$$

onde T é uma triangulação de M.

Demonstração. Vamos verificar que cada um dos passos de Pachner satisfazem

$$\frac{Z_Y(T)}{Z(T')} = |G_1|^{\Delta f^0}|G_2|^{\Delta f^1-\Delta f^0}$$

Para cada um dos passo de Pachner podemos considerar apenas os f-vetores das regiões ao redor do passo já que a identidade acima só depende da diferença e os complexo são idênticos fora dessa região. Temos para cada passo que:

- Passo biestelar $(1,5)$ os f-vetores são $(5,10,10,5,1)$ e $(6,15,20,15,5)$ temos que $\Delta f^0 = 1$ e $\Delta f^1 - \Delta f^0 = 5 - 1 = 4$ que correspondem aos valores do lema 4.7 na página 62;
- Passo biestelar $(2,4)$ os f-vetores são $(6,14,16,9,2)$ e $(6,15,20,14,4)$ temos que $\Delta f^0 = 0$ e $\Delta f^1 - \Delta f^0 = 1$ que corresponde aos valores do lema 4.8 na página 63;
- Passo biestelar $(3,3)$ os f-vetores são $(6,15,19,12,3)$ e $(6,15,19,12,3)$ temos que $\Delta f^0 = 0$ e $\Delta f^1 - \Delta f^0 = 0$ que corresponde aos valores do lema 4.9 na página 65;
- Descascamento elementar inverso $(1,4)$ os f-vetores são $(4,6,4,1,0)$ e $(5,10,10,5,1)$ temos que $\Delta f^0 = 1$ e $\Delta f^1 - \Delta f^0 = 3$ que correspondem aos valores do lema 4.10 na página 66;
- Descascamento elementar inverso $(2,3)$ os f-vetores são $(5,9,7,2,0)$ e $(5,10,10,5,1)$ temos que $\Delta f^0 = 0$ e $\Delta f^1 - \Delta f^0 = 1$ que correspondem aos valores do lema 4.11 na página 67;
- Descascamento elementar inverso $(3,2)$ os f-vetores são $(5,10,9,3,0)$ e $(5,10,10,5,1)$ temos que $\Delta f^0 = 0$ e $\Delta f^1 - \Delta f^0 = 0$ que correspondem aos valores do lema 4.12 na página 67;
- Descascamento elementar inverso $(4,1)$ os f-vetores são $(5,10,10,4,0)$ e $(5,10,10,5,1)$ temos que $\Delta f^0 = 0$ e $\Delta f^1 - \Delta f^0 = 0$ que correspondem aos valores do lema 4.13 na página 68.

Como todos os passos de Pachner preservam o valor de $Y(M)$ e toda triangulação da mesma variedade é conectada por uma sequência de passos de Pachner, teorema 2.2 na página 14, então $Y(M)$ é um invariante topológico. □

5 Modelo Hamiltoniano

Nesse capítulo vamos definir um sistema quântico descrito por um *Hamiltoniano* associado ao invariante de Yetter. Esse modelo está associado a uma triangulação R de uma variedade 3-dimensional Σ. Dado um complexo R definimos o seguinte espaço vetorial livre:

$$\mathcal{H} = \operatorname{span}(\phi_c \mid c \in \mathcal{C}(R)) .$$

O modelo Hamiltoniano que iremos definir é caracterizado por um operador Hamiltoniano $H\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. A Hamiltoniana H construída terá a seguinte forma:

$$H = -\sum_{v \in R^{(0)}} A_v - \sum_{p \in R^{(2)}} B_p^{(1)} - \sum_{t \in R^{(3)}} B_t^{(2)} ,$$

onde os operadores do lado direito são projetores e comutam entre si. Um candidato a estado de menor energia é um estado que simultaneamente tem autovalor 1 para todos os operadores que aparecem no lado direito da expressão acima, isso motiva definir um novo projetor,

$$P_0 = \prod_v A_v \prod_p B_p^{(1)} \prod_t B_t^{(2)} ,$$

que projeta nesses estados, já que como todos os operadores que aparecem no lado direito são projetores que comutam entre si. Iremos mostrar que esse operador é não nulo e o sub-espaço $\mathcal{H}_0 = P_0\mathcal{H}$ será chamado de *sub-espaço de estados fundamentais*. Iremos denotar a dimensão desse sub-espaço por $\textsc{gsd}(\Sigma) \coloneqq \dim \mathcal{H}_0$. A motivação para essa notação vem do resultado principal desse capítulo: a dimensão do espaço vetorial $P_0\mathcal{H}$ é um invariante topológico da variedade Σ.

Os elementos de matriz dos operadores A_v, $B_p^{(1)}$ e $B_t^{(2)}$ serão construídos utilizando a função de partição de Yetter que definimos no capitulo anterior. Essa construção irá permitir demonstrar que o número $\textsc{gsd}(\Sigma)$ não depende da triangulação R de Σ escolhida para definir o modelo Hamiltoniano e que seja numericamente igual ao invariante de Yetter da variedade $\Sigma \times S^1$, ou seja,

$$\textsc{gsd}(\Sigma) = Y(\Sigma \times S^1) . \tag{5.1}$$

Uma parte importante para provarmos a identidade acima é como, a partir de uma triangulação de Σ, construir uma triangulação de $\Sigma \times S^1$. A importância da construção

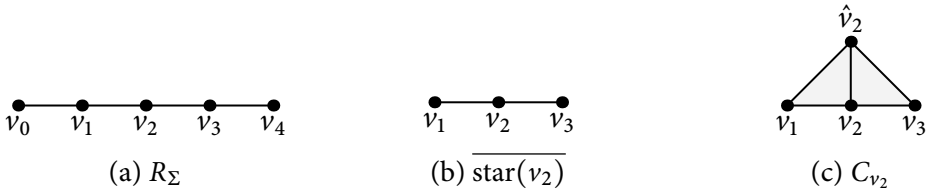
de uma triangulação especial que iremos apresentar é que podemos escolher uma triangulação que facilita a prova da eq. (5.1). Vamos descrever o procedimento para obter essa triangulação especial de $\Sigma \times S^1$ na seção seguinte.

5.1 Levantamento de uma triangulação

Tanto a função de partição de Yetter e quanto a Hamiltoniana são definidas em termos de triangulações. Vamos nessa seção definir como construir a partir de uma triangulação R_Σ de um variedade n-dimensional Σ uma triangulação $T_{\Sigma\times S^1}$ da variedade $(n+1)$-dimensional $\Sigma \times S^1$. O caso particular $n = 3$ descreve o resultado que precisamos nesse capítulo. Essa triangulação não é arbitraria mas é construída de forma a ter a propriedade de ser *projetiva*: todo simplexo de $T_{\Sigma\times S^1}$ é projetado em exatamente um único simplexo de R_Σ, iremos descrever essa projeção em detalhes mais a frente. Esse propriedade simplifica a prova de eq. (5.1) pois precisamos apenas comparar os dois lados localmente, analisados os objetos na pre-imagem de um único simplexo.

Para cada vértice $v \in R_\Sigma$ podemos definir um cone da seguinte forma: crie uma copia distinta desse vértice e o denote por $\hat{v}$. Para cada n-simplexo $s \in \overline{\mathrm{star}(v)}$ podemos construir um novo $(n+1)$-simplexo dado por $[\hat{v}] \cup s$. Definimos o cone C_v

$$C_v \coloneqq \overline{\{[\hat{v}] \cup s \mid s \in \overline{\mathrm{star}(v)}\}}\,. \tag{5.2}$$

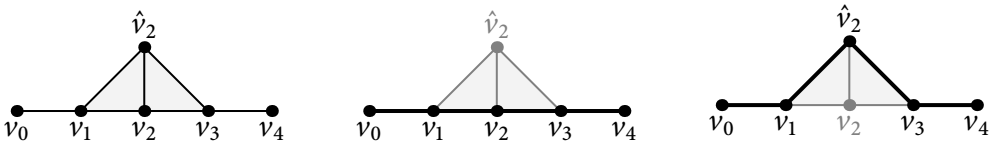


(a) R_Σ (b) $\overline{\mathrm{star}(v_2)}$ (c) C_{v_2}

Figura 5.1: Construção do cone C_v para o caso $(1 \to 2)$-dimensional.

Podemos agora considerar o complexo obtido pela adjunção desse cone ao complexo original: $R_\Sigma \cup C_v$. Existem duas copia de R_Σ contidas nesse objeto, a primeira é o próprio R_Σ e a segunda pode ser obtida pela substituição $v \to \hat{v}$ em R_Σ. Iremos denotar essa copia por $R_\Sigma^{(v)}$. Representamos esses objetos na fig. 5.2 na próxima página.

Agora escolha uma ordem para os vértices de R_Σ, por exemplo, $v_0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_n$. Começando pelo primeiro vértice v_0 construa $T^{(v_0)} \coloneqq R_\Sigma \cup C_{v_0}$. Agora para o segundo vértice v_1 considere o cone $C_{v_1}^{(v_0)}$ construído não sobre R_Σ mas sobre a copia $R_\Sigma^{(v_0)}$. Defina $T^{(v_0,v_1)} \coloneqq T^{(v_0)} \cup C_{v_1}^{(v_0)}$. Repetimos esse processo para todos os vértices,



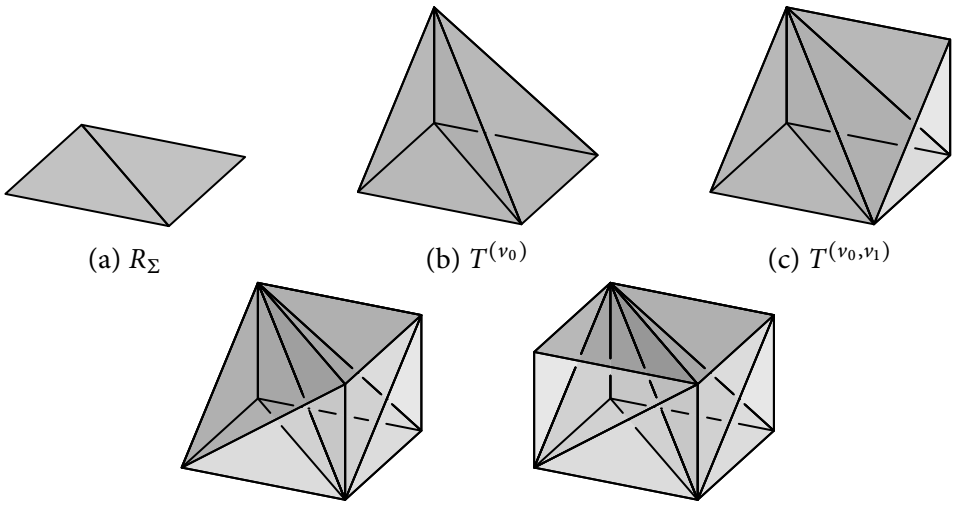
(a) $R_\Sigma \cup C_{v_2}$ (b) Destacado R_Σ (c) Destacado $R_\Sigma^{(v_2)}$

Figura 5.2: Objetos obtidos pelo levantamento de R_Σ, caso $(1 \to 2)$-dimensional.

na ordem escolhida, sempre construindo cones sobre a copia obtida no passo anterior. O resultado final é uma triangulação de $\Sigma \times I$,

$$T_{\Sigma\times I} \coloneqq T^{(v_0,v_1,v_2,\ldots,v_n)} .$$

Ilustramos esse procedimento para uma triangulação simples para o caso $(2 \to 3)$-dimensional na fig. 5.3.



(a) R_Σ (b) $T^{(v_0)}$ (c) $T^{(v_0,v_1)}$

(d) $T^{(v_0,v_1,v_2)}$ (e) $T^{(v_0,v_1,v_2,v_3)}$

Figura 5.3: Passos do levantamento de R_Σ para o caso $(2 \to 3)$-dimensional.

Para obter a triangulação de $\Sigma \times S^1$ identificamos R_Σ com a última copia obtida $R_\Sigma^{(v_0,v_1,v_2,\ldots,v_n)}$,

$$T_{\Sigma\times S^1} = T_{\Sigma\times I} / \left(R_\Sigma \sim R_\Sigma^{(v_0,v_1,v_2,\ldots,v_n)} \right) .$$

Essa triangulação construída tem uma propriedade importante: cada simplexo de $T_{\Sigma\times I}$ tem uma projeção bem definida em R_Σ, ou seja, podemos definir a projeção $P\colon T_{\Sigma\times I} \to R_\Sigma$ como uma função entre conjuntos. Cada simplexo de $T_{\Sigma\times I}$ tem uma

única projeção, um simplexo de R_Σ. Explicitamente seja $s \in T_{\Sigma\times I}$ um n-simplexo defina a projeção substituindo todos os vértices com chapéu $\hat{v}$ por vértices sem chapéu v, note que isso pode diminuir a dimensão do simplexo se $[\hat{v}, v]$ for uma face desse simplexo. Por exemplo, o simplexo $[v_0, v_1, \hat{v}_1]$ é projetado em $[v_0, v_1]$ e o simplexo $[v_0, \hat{v}_1, v_2]$ é projetado em $[v_0, v_1, v_2]$. Iremos dizer que uma triangulação com essa propriedade é *projetiva*. A importância dessa propriedade é que ela permite comparar localmente os simplexo de R_Σ com os simplexos de $T_{\Sigma\times I}$, isso está relacionado ao fato dos operadores que iremos construir serem locais.

5.2 Aplicações lineares definidas por complexos

Dado um complexo K, ou em geral um subconjunto de simplexos, definimos o seguinte espaço vetorial livre

$$V_K = \operatorname{span}(\phi_c \mid c \in C(K)) .$$

Esse espaço vetorial tem uma base especial indexada pelas configurações $\{\phi_c \mid c \in C(K)\}$ e utilizaremos essa base como base de V_K, em particular definiremos todos os operadores nessa base e estenderemos por linearidade.

Nessa seção definiremos para um cobordismo (T, X, Y), onde X e Y são subcomplexos de uma triangulação T, uma aplicação linear $Z_Y(T, X, Y)\colon V_X \to V_Y$. Essa aplicação linear é construído impondo restrições na soma que define a função de partição de Yetter, que foi definida na eq. (4.1) na página 52,

$$Z_Y(T) \coloneqq \sum_{c\in\mathcal{C}(T)} \mathcal{F}_T(c) .$$

essa restrições podem ser vistas como *condições de contorno* impostas sobre as configurações flat.

Definição 5.1. *Uma tripla* $\boldsymbol{(T, X, Y)}$ *onde T é uma triangulação, X e Y são subcomplexos de T é dito ser um* ***cobordismo*** *entre X e Y via T.*

Dado dois cobordismos (T, X, Y) e (T', Y, Z) que satisfaçam $T \cap T' = Y$ definimos o cobordismo composto por

$$(T, X, Y) \circ (T', Y, Z) = (T \cup T', X, Z) .$$

□

Note que permitimos nessa definição de cobordismo que $X \cap Y \neq \varnothing$. Essa definição também contempla o cobordismos degenerado (T, T, T) quando $\dim(T) = 3$.

Vamos agora construir aplicações lineares associados cobordismos. Primeiro vamos definir um caso particular para quando tivermos cobordismos da forma $(T, X, \varnothing)$.

Definição 5.2. *Dado um cobordismo* $(T, X, \varnothing)$. *A aplicação linear* $\mathbf{Z_Y(T, X)}\colon \mathbf{V_X \to \mathbb{C}}$ *é definida pelo seguinte:*

$$Z_Y(T, X)(\phi_c) \coloneqq \sum_{c' \in \mathcal{C}(T)} \mathcal{F}_T(c')\delta(c, c')\big|_X ,$$

para todo $c \in \mathcal{C}(X)$. □

Em palavras, o elemento de matriz, em relação ao elemento da base ϕ_c, do operador $Z_Y(T, X) : V_X \to \mathbb{C}$ é o número de configurações flat em T com a condição de fronteira que essa configuração seja igual á c em X.

Note que essa definição justifica o uso do mesmo simbolo Z_Y para essa aplicação linear. Já que se tivermos $X = \varnothing$, $V_\varnothing = \mathbb{C}$, então:

$$Z_Y(T, \varnothing)(1) = Z_Y(T) ,$$

onde 1 é base canônica de $\mathbb{C}$. Temos também que para qualquer $X \subset T$ vale que

$$Z_Y(T) = \sum_{c \in \mathcal{C}(X)} Z_Y(T, X)(\phi_c) .$$

Vamos estender essa definição para permitir que alguns simplexos não contribuam funções características $\mathcal{I}_s(c)$ no somatório acima.

Definição 5.3. *Dado um cobordismo* $(T, X, \varnothing)$ *considere agora um subconjunto de simplexos* $\xi \subset T$. *Definimos* $Z_Y(T, X; \xi)\colon V_X \to \mathbb{C}$ *pelo seguinte:*

$$Z_Y(T, X; \xi)(\phi_c) \coloneqq \sum_{c' \in \mathcal{C}(T)} \mathcal{F}_{T \setminus \xi}(c')\delta(c, c')\big|_X ,$$

para todo $c \in \mathcal{C}(X)$. □

Note que essa definição é extensão da definição 4.5 na página 53, ou seja, os elementos de matriz desse operador são o número de configurações flat em T menos possivelmente em ξ que satisfazem a condição de contorno c em X.

Já que apenas 2-simplexos e 3-simplexos contribuem funções características para $\mathcal{F}_{T \setminus \xi}$ então se tivermos dois subconjuntos ξ e ξ' tais que $\xi^{(2)} = \xi'^{(2)}$ e $\xi^{(3)} = \xi'^{(3)}$ então temos que $Z_Y(T, X; \xi) = Z_Y(T, X; \xi')$. Vamos usar essa liberdade para simplificar a descrição dos subconjuntos ξ.

Definição 5.4. *Dado um cobordismo* (T, X, Y). *A aplicação linear* $Z_Y(T, X, Y)\colon V_X \to V_Y$ *é definida pelo seguinte:*

$$Z_Y(T, X, Y)(\phi_c) \coloneqq \sum_{c' \in \mathcal{C}(Y)} \left[Z(T, X \cup Y)(\phi_{c \cup c'})\right] \delta(c, c')\big|_{X \cap Y} \phi_{c'} ,$$

para todo $c \in \mathcal{C}(X)$. □

Note a importância na expressão acima do termo $\delta(c,c')\big|_{X\cap Y}$ que garante que $c\cup c'$ está bem definido e é um elemento de $\mathcal{C}(X\cup Y)$.

Em palavras, o elemento de matriz do operador $Z_Y(T,X,Y)\colon V_X \to V_Y$ entre os elementos da base ϕ_c, $c\in\mathcal{C}(X)$ e $\phi_{c'}$, $c'\in\mathcal{C}(Y)$ é dado pelo número de configurações flat em T onde impomos a condição de contorno que essas configurações sejam c em X e c' em Y e que c deve ser igual a c' em $X\cup Y$.

Definição 5.5. *Dado um cobordismo (T,X,Y) e um subconjunto de simplexos $\xi\in T$ definimos a aplicação linear $Z_Y(T,X,Y;\xi)\colon V_X\to V_Y$ por*

$$Z_Y(T,X,Y;\xi)(\phi_c) \coloneqq \sum_{c'\in\mathcal{C}(Y)} \left[Z(T,X\cup Y;\xi)(\phi_{c\cup c'})\right]\delta(c,c')\big|_{X\cap Y}\phi_{c'}\,.$$

□

O produto dessas aplicações lineares é dado pela composição dos cobordismos e podemos demostrar o lema a seguir.

Lema 5.1. *Dado dois cobordismos (T,X,Y) e (T',Y,Z) que satisfaçam $T\cap T'=Y$ e $X\cap Z\subset Y$ e subconjuntos de simplexos $\xi\subset T$ e $\xi'\subset T'$ temos que as aplicações lineares associados satisfazem*

$$Z_Y(T\cup T',X,Z;\xi\cup\xi') = Z_Y(T',Y,Z;\xi')Z_Y(T,X,Y;\xi)\,,$$

onde $(T\cup T',X,Z)=(T,X,Y)\circ(T',Y,Z)$.

Demonstração. Escrevendo essa identidade em termos dos elementos de matriz temos

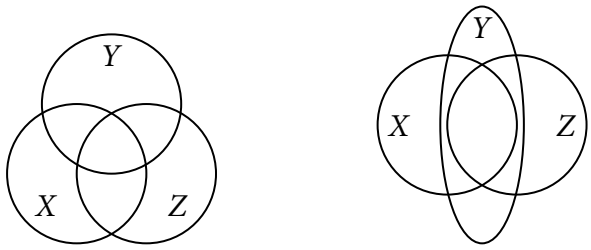
$$\begin{aligned}&Z_Y(T\cup T',X,Z;\xi\cup\xi')(\phi_{c\cup c'})\delta(c,c')\big|_{X\cap Z}\\ &=\sum_{d\in\mathcal{C}(Y)}\Big[Z_Y(T',Y,Z;\xi')(\phi_{d\cup c'})\delta(d,c')\big|_{Y\cap Z}\Big]\Big[Z_Y(T,X,Y;\xi)(\phi_{c\cup d})\delta(c,d)\big|_{X\cap Y}\Big],\end{aligned}$$

onde $c\in\mathcal{C}(X)$ e $c'\in\mathcal{C}(Z)$. Vamos considerar primeiro o caso em que $X\cap Z = Y\cap Z = X\cap Y=\varnothing$. Nesse caso o lado esquerdo é o *número de configurações flat em $T\cup T'$, menos possivelmente em $\xi\cup\xi'$, com condições de contorno em X e Z* do lado direito temos o produtos do *número de configurações flat em T, menos possivelmente em ξ, com condições de contorno em X* pelo *número de configurações flat em T', menos possivelmente em ξ', com condições de contorno em Z*. Os dois lados são iguais já que a condição para que uma configuração seja flat é dado pelo produto de condições locais.

Agora caso as intersecções sejam não vazias a condição $X\cap Z\subset Y$ garante a transitividade das restrições e temos que:

$$\delta(c,c')\big|_{X\cap Z} = \delta(d,c')\big|_{Y\cap Z}\delta(c,d)\big|_{X\cap Y}\,,$$

que pode ser verificada estudando os diagramas da fig. 5.4 na próxima página. □



(a) $X \cup Z \not\subset Y$ (b) $X \cup Z \subset Y$

Figura 5.4: Relação entre os conjuntos X, Y e Z

5.3 Operadores A_v, $B_p^{(1)}$ e $B_t^{(2)}$

Vamos definir agora, utilizando as aplicações lineares introduzidos na seção anterior, os operadores que descrevem o modelo Hamiltoniano. Seja dado uma variedade 3-dimensional Σ e uma triangulação R dessa variedade. Denote por $\mathcal{H} = V_R$ o espaço vetorial indexado pelas configurações de 2-gauge $\mathcal{C}(R)$, como definido anteriormente. Definimos o seguinte produto interno sobre $\mathcal{H}$:

$$\langle \phi_c, \phi_d \rangle = \delta(c, d) \quad \forall c, d \in \mathcal{C}(R)\,,$$

que torna $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert.

Primeiro vamos definir, dado um 2-simplexo $p \in R$, o operador $B_p^{(1)} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$,

$$B_p^{(1)} \coloneqq Z_Y(R, R, R; R \setminus p)\,.$$

Vamos estudar essa definição em detalhes. Como $R \cap R = R$ o termo $\delta(c, d')\big|_R$ da definição torna esse operador diagonal. Agora como $R \setminus (R \setminus p) = p$ apenas uma única função característica ira contribuir para $Z_Y(R, R \cup R; R \setminus p)$, a função característica associada ao 2-simplexo p que é igual a 1 se e somente se a pseudo 1-holonomia de p for identidade, ou seja, o operador $B_p^{(1)}$ é um projetor nos estados em que a pseudo 1-holonomia do 2-simplexo p é identidade.

A definição do operador $B_t^{(2)} \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, definido para todo 3-simplexo $t \in T$, é similar,

$$B_t^{(2)} \coloneqq Z_Y(R, R, R; R \setminus t)\,.$$

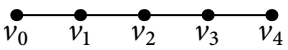
Esse operador é um projetor nos estados em que a 2-holonomia do 3-simplexo t é identidade.

O último operador que definiremos, definido para todo 0-simplexo v, é o operador $A_v \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, que irá projetar nos estados invariantes por transformações de 2-gauge, transformações que definiremos em breve. O cobordismo que define esse projetor é

$(R \cup C_v, R, R^{(v)})$ onde C_v é o cone definido na eq. (5.2) na página 72 e $R^{(v)}$ é a copia de R obtida pela substituição $v \to \hat{v}$. O conjunto de faces virtuais são todas as faces que não estão no cobordo do 1-simplexo $[v, \hat{v}]$, ou seja, definimos $\xi_v = \{s \mid s \in R \cup C_v, [v, \hat{v}] \nleq \sigma\}$ e temos

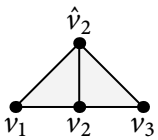
$$A_v \coloneqq Z_Y(R \cup C_v, R, R^{(v)}; \xi_v)\,.$$

Vamos primeiro ilustrar os objetos que aparecem no caso em que esse operador é definido em 1-dimensão. Seja $\Sigma = D^1$ com a seguinte triangulação

$R =$ 

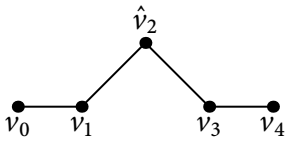
$= \overline{\{[v_0, v_1], [v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_4]\}}\,.$

Vamos construir o operador A_{v_2}. O cone é dado por

$C_{v_2} =$ 

$= \overline{\{[v_1, v_2, \hat{v}_2], [v_2, \hat{v}_2, v_3]\}}$

e

$R^{(v_2)} =$ 

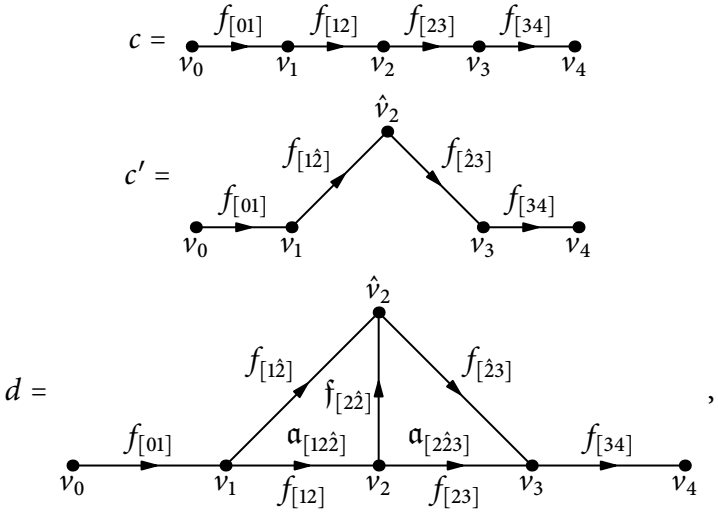
$= \overline{\{[v_0, v_1], [v_1, \hat{v}_2], [\hat{v}_2, v_3], [v_3, v_4]\}}\,.$

Os únicos simplexos que poderiam contribuir de forma não trivial para ξ_{v_2} são $[v_1, v_2, \hat{v}_2]$ e $[v_2, \hat{v}_2, v_3]$ porém ambos tem 1-simplexo $[v_2, \hat{v}_2]$ como face, logo podemos tomar $f_{v_2} = \varnothing$. Teremos contribuições não triviais para ξ_v em dimensões $n \geq 3$. Utilizando esse objetos na definição de A_{v_2} temos para todo $c \in \mathcal{C}(R)$

$$A_{v_2}\phi_c = \sum_{c' \in \mathcal{C}(R^{(v_1)})} \sum_{d \in \mathcal{C}(R \cup C_v)} \mathcal{F}_{(R \cup C_v) \setminus \xi_v}(d)\delta(d, c \cup c')\big|_{R \cup R^{(v_1)}} \delta(c, c')\big|_{R \cap R^{(v_1)}} \phi_{c'}\,.$$

Utilizando as colorações abaixo para as configurações que aparecem na expressão acima o que permite escrever as somas sobre configurações como somas sobre

elementos de G_1 e G_2.



onde já impomos as restrições $\delta(d, c \cup c')\big|_{R \cup R^{(v_1)}} \delta(c, c')\big|_{R \cap R^{(v_1)}}$. Note que o operador A_{v_2}, como notado anteriormente, é identidade nos sub-espaços $V_{[v_0,v_1]}$ e $V_{[v_3,v_4]}$, dessa forma vamos omitir esses sub-espaços nas próximas equações. Os elementos denotados pelos símbolos $\mathfrak{f}$ e $\mathfrak{a}$ tem um papel especial, eles descrevem uma transformação de gauge local parametrizada por esses elementos de forma que A_v é uma soma sobre essas transformação para todos os parâmetros, vamos voltar a esse fato em breve. Usando a coloração acima podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
&A_{v_2} \left| f_{[12]}, f_{[23]} \right\rangle \\
&= \sum_{f_{[1\hat{2}]}, f_{[\hat{2}3]} \in G_1} \sum_{\substack{\mathfrak{f}_{[2\hat{2}]} \in G_1 \\ \mathfrak{a}_{[12\hat{2}]}, \mathfrak{a}_{[2\hat{2}3]} \in G_2}} \delta(\partial \mathfrak{a}^{-1}_{[12\hat{2}]} f_{[12]} \mathfrak{f}_{[2\hat{2}]} f^{-1}_{[1\hat{2}]}, 1) \delta(\partial \mathfrak{a}^{-1}_{[2\hat{2}3]} \mathfrak{f}_{[2\hat{2}]} f_{[\hat{2}3]} f^{-1}_{[23]}, 1) \left| f_{[1\hat{2}]}, f_{[\hat{2}3]} \right\rangle \\
&\qquad = \sum_{\substack{\mathfrak{f}_{[2\hat{2}]} \in G_1 \\ \mathfrak{a}_{[12\hat{2}]}, \mathfrak{a}_{[2\hat{2}3]} \in G_2}} \left| \partial \mathfrak{a}^{-1}_{[12\hat{2}]} f_{[12]} \mathfrak{f}_{[2\hat{2}]}, \mathfrak{f}^{-1}_{[2\hat{2}]} \partial \mathfrak{a}_{[2\hat{2}3]} f_{[23]} \right\rangle .
\end{aligned}
$$

Definindo o seguinte operador

$$
A_{v_2}^{(\mathfrak{f}_{[2\hat{2}]}, \mathfrak{a}_{[12\hat{2}]} \mathfrak{a}_{[2\hat{2}3]})} \left| f_{[12]}, f_{[23]} \right\rangle = \left| \partial \mathfrak{a}^{-1}_{[12\hat{2}]} f_{[12]} \mathfrak{f}_{[2\hat{2}]}, \mathfrak{f}^{-1}_{[2\hat{2}]} \partial \mathfrak{a}_{[2\hat{2}3]} f_{[23]} \right\rangle ,
$$

podemos escrever

$$
A_{v_2} = \sum_{\substack{\mathfrak{f}_{[2\hat{2}]} \in G_1 \\ \mathfrak{a}_{[12\hat{2}]}, \mathfrak{a}_{[2\hat{2}3]} \in G_2}} A_{v_2}^{(\mathfrak{f}_{[2\hat{2}]}, \mathfrak{a}_{[12\hat{2}]} \mathfrak{a}_{[2\hat{2}3]})} .
$$

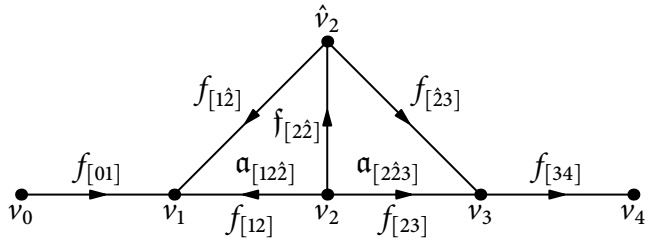
Note que imagem do operador $A_{v_2}^{(\mathfrak{f}_{[2\hat{2}]},\mathfrak{a}_{[12\hat{2}]}\mathfrak{a}_{[2\hat{2}3]})}$ agindo sobre o elemento da base $\left|f_{[12]}, f_{[23]}\right\rangle$ é um outro elemento da base $\left|f_{[1\hat{2}]}, f_{[\hat{2}3]}\right\rangle$ obtido impondo que as pseudo 1-holonomias dos simplexos $[v_1, v_2, \hat{v}_2]$ e $[v_2, \hat{v}_2, v_3]$ sejam identidades.

Vamos estudar o caso particular onde $G_2 = \{1\}$, nesse caso o operador $A_v^{\mathfrak{f}}$ descreve uma *transformação de* 1-*gauge* pelo elemento $\mathfrak{f}$ aplicado em torno do vértices v, ou seja, temos no caso explicito

$$A_{v_2}^{\mathfrak{f}_{[2\hat{2}]}} \left|f_{[12]}, f_{[23]}\right\rangle = \left|f_{[12]}\mathfrak{f}_{[2\hat{2}]}, \mathfrak{f}_{[2\hat{2}]}^{-1} f_{[23]}\right\rangle ,$$

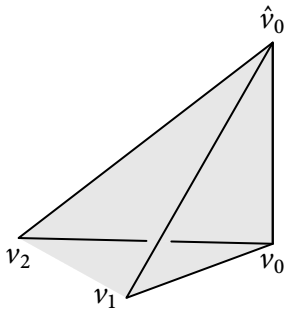
que é a expressão usual de uma transformação de 1-gauge.

A diferença na forma da operação que $A_{v_2}^{(\mathfrak{f}_{[2\hat{2}]},\mathfrak{a}_{[12\hat{2}]}\mathfrak{a}_{[2\hat{2}3]})}$ aplica sobre $f_{[12]}$ e $f_{[23]}$ é causada pela a escolha de ordenação do vértices, se tivéssemos escolhido colorações com a seguinte ordenação



a expressão para $f_{[\hat{2}3]}$ seria obtida da expressão para $f_{[1\hat{2}]}$ bastando substituir $v_1 \to v_3$. Um ponto importante é que não podemos, em geral, escolher ordenações de forma que o operador atue da mesma forma sobre todos os sub-espaços. Um fato importante é que A_{v_2} restrito ao sub-espaço $V_{[v_1,v_2]}$ é um elemento de $\mathrm{Hom}\left(V_{[v_1,v_2]}, V_{[v_1,v_2]}\right)$. Vamos usar esse fato a seguir para definir o operador no caso 3-dimensional onde construiremos a expressão desse operador restrito aos sub-espaços da forma $V_{\overline{[v_0,v_1,v_2]}}$, o menor sub-espaço onde podemos fazer essa restrição e obter um elemento de $\mathrm{Hom}(V_{\overline{[v_0,v_1,v_2]}}, V_{\overline{[v_0,v_1,v_2]}})$. O operador completo agindo sobre $\mathcal{H}$ pode ser obtido reproduzindo o argumento com as ordenações adequadas para os outros sub-espaços.

Vamos agora descrever a expressão para o caso de R ser 3-dimensional. Considere um 2-simplexo da forma $[v_0, v_1, v_2]$, com a ordenação de vértices $v_0 < v_1 < v_2$ vamos descrever a ação do operador A_{v_0} sobre o sub-espaço $V_{\overline{[v_0,v_1,v_2]}}$. O procedimento é similar ao que foi realizado para o caso 1-dimensional, porém agora temos sub-espaços associados não só aos 1-simplexos mais também aos 2-simplexos. Uma outra diferença importante é que agora o operador além de impor que as pseudo 1-holonomias associadas ao 2-simplexos $[v_0, \hat{v}_0, v_1]$ e $[v_0, \hat{v}_0, v_2]$ sejam identidade ele também impõe que a 2-holonomia associado ao simplexo $[v_0, \hat{v}_0, v_1, v_2]$ seja identidade. Note que essas três restrições são as únicas impostas, já que esses são os únicos simplexos em que $[v_0, \hat{v}_0]$ é face, as outras restrições estão ausentes já que os simplexos correspondes pertencem a ξ_{v_0}. O 3-simplexo ilustrado abaixo ajuda a visualizar essa situação.



Os único simplexos que não fazem parte de ξ_v são os simplexos $[v_0, \hat{v}_0]$, $[v_0, \hat{v}_0, v_1]$, $[v_0, \hat{v}_0, v_2]$ e $[v_0, \hat{v}_0, v_1, v_2]$. Dessa forma o operador impõem as condições de pseudo 1-holonomia identidade nas faces $[v_0, \hat{v}_0, v_1]$ e $[v_0, \hat{v}_0, v_2]$ e a condição de 2-holonomia identidade para o simplexo $[v_0, \hat{v}_0, v_1, v_2]$.

Seguindo o mesmo procedimento que anteriormente podemos escrever, escolhendo a ordem $v_0 < \hat{v}_0$, que

$$\begin{aligned}
A_{v_0}\left|f_{[02]}, f_{[01]}, a_{[012]}\right\rangle = & \sum_{\substack{\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}\in G_1 \\ \mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]},\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}\in G_2}} \sum_{\substack{f_{[\hat{0}1]},f_{[\hat{0}2]}\in G_1 \\ \mathfrak{a}_{[\hat{0}12]}\in G_2}} \delta(\partial\mathfrak{a}^{-1}_{[0\hat{0}1]}\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}f_{[\hat{0}1]}f^{-1}_{[01]}, 1) \\
& \delta(\partial\mathfrak{a}^{-1}_{[0\hat{0}2]}\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}f_{[\hat{0}2]}f^{-1}_{[02]}, 1) \\
& \delta(\left[\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]} \triangleright a_{[\hat{0}12]}\right]\mathfrak{a}_{[0\hat{0}2]}a^{-\hat{0}}_{[012]}\mathfrak{a}^{-\hat{0}}_{[0\hat{0}1]}, 1) \\
& \left|f_{[\hat{0}2]}, f_{[\hat{0}1]}, a_{[0\hat{1}2]}\right\rangle . \\
= & \sum_{\substack{\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}\in G_1 \\ \mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]},\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}\in G_2}} \Big|\mathfrak{f}^{-1}_{0\hat{0}}\partial\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}f_{[01]}, \mathfrak{f}^{-1}_{0\hat{0}}\partial\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}f_{[02]}, \\
& \mathfrak{f}^{-1}_{0\hat{0}} \triangleright \left(\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}a_{[012]}\mathfrak{a}^{-1}_{[0\hat{0}2]}\right)\Big\rangle
\end{aligned}$$

Novamente podemos definir um operador associado a cada termo da soma e também generalizar a expressão acima para o caso geral. Vamos definir esse operador em termo dos 2-morfismos associado os 2-simplexos do tipo $[v, \hat{v}, v']$, lembrando que esses 2-morfismos tem pseudo 1-holonomia identidade. Definimos

$$\begin{aligned}
A_{v_0}^{(\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]},a_{[0\hat{0}1]}),\ldots,(\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]},a_{[0\hat{0}n]})}\left|f_{[01]}, f_{[02]}, \ldots, a_{[012]}, a_{[013]}, \ldots\right\rangle \\
= \Big|\mathfrak{f}^{-1}_{[0\hat{0}]}\partial\left(a_{[0\hat{0}1]}\right)f_{[01]}, \mathfrak{f}^{-1}_{[0\hat{0}]}\partial\left(a_{[0\hat{0}2]}\right)f_{[02]}, \ldots \\
\ldots, \mathfrak{f}^{-1}_{[0\hat{0}]} \triangleright \left(a_{[0\hat{0}1]}a_{[012]}a^{-1}_{[0\hat{0}2]}\right), \mathfrak{f}^{-1}_{[0\hat{0}]} \triangleright \left(a_{[0\hat{0}1]}a_{[013]}a^{-1}_{[0\hat{0}3]}\right), \ldots\Big\rangle
\end{aligned}$$

onde n é o número de 1-simplexos em $\mathrm{star}(v_0)$. Com essa definição o operador A_{v_0} no caso geral pode ser escrito como

$$A_{v_0} = \sum_{\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]} \in G_1} \sum_{\substack{\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]} \in G_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_{[0\hat{0}n]} \in G_2}} A_{v_0}^{(\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}), \ldots, (\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}n]})}$$

Note que a forma dessa expressão, quando escrita em termos dos elementos dos grupos G_1 e G_2 depende da escolha de orientação dos 1-morfismos e 2-morfismos elementares escolhidos para definir a coloração.

Iremos também utilizar a seguinte notação para esse operadores

$$A_{v_0}^{(\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}), \ldots, (\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}n]})} = A_{v_0}^{\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}, \ldots, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}n]}}$$

Essa operadores definem as *transformações de 2-gauge em torno do vértice* v_0. Os parâmetros formam um grupo que esta relacionado com o grupo que aparece na multiplicação horizontal do 2-grupo. Esse grupo depende do número n de 1-simplexos em torno do vértice, por isso vamos denotar esse grupo de parâmetros por $\mathfrak{G}_{v_0}$. Ele é um subgrupo de $\left(G_1 \ltimes G_2^{\mathrm{op}}\right)^n$. Os elementos de $\left(G_1 \ltimes G_2^{\mathrm{op}}\right)^n$ são n-uplas de pares

$$((f_1, a_2), (f_2, a_2), \ldots, (f_n, a_n)) \ .$$

O produto é definido componente a componente por

$$(f_i, a_i) \cdot (f_i', a_i') = (f_i f_i', (f_i \triangleright a_i') a_i) \qquad \forall 1 \leq i \leq n \, .$$

$\mathfrak{G}_{v_0}$ é o subgrupo de $\left(G_1 \ltimes G_2^{\mathrm{op}}\right)^n$ onde todas as primeiras componentes do pares são iguais, ou seja, elementos da forma

$$\left((\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}), (\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}2]}), \ldots (\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}n]})\right) \ .$$

Diretamente da definições das transformações de 2-gauge podemos mostrar que esses operadores satisfazem a seguinte álgebra

$$A_{v_0}^{(\mathfrak{f}'_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}'_{[0\hat{0}1]}), \ldots, (\mathfrak{f}'_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}'_{[0\hat{0}n]})} A_{v_0}^{(\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}), \ldots, (\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}n]})} = A_{v_0}^{(\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}) \cdot (\mathfrak{f}'_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}'_{[0\hat{0}1]}), \ldots, (\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}_{[0\hat{0}n]}) \cdot (\mathfrak{f}'_{[0\hat{0}]}, \mathfrak{a}'_{[0\hat{0}n]})} \, ,$$

onde o produto é o que foi definido acima, ou seja, eles forma uma representação da álgebra de $\mathcal{G}_{v_0}$.

5.3.1 Propriedades do operadores A_v, $B_p^{(1)}$ e $B_t^{(2)}$

Os operadores A_v, $B_p^{(1)}$ e $B_t^{(2)}$, definidos para todos os 0-simplexos v, 2-simplexos p e 3-simplexos t em R, são todos projetores e comutam entre si. Vamos demostrar agora essas propriedades. Primeiro vamos verificar que esse operadores são projetores.

Os operadores $B_p^{(1)}$ e $B_t^{(2)}$ são operadores diagonais com autovalores 0 ou 1 e logo são projetores.

Para verificar que A_v é um projetor vamos usar a álgebra do operadores $A_v^{\mathfrak{g}}$, onde $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}_v$. Temos que

$$\begin{aligned} A_v A_v &= \sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}_v} A_v^{\mathfrak{g}} \sum_{\mathfrak{g}'\in\mathfrak{G}_v} A_v^{\mathfrak{g}'} \\ &= \sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}_v} \sum_{\mathfrak{g}'\in\mathfrak{G}_v} A_v^{\mathfrak{g}} A_v^{\mathfrak{g}'} \\ &= \sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}_v} \sum_{\mathfrak{g}'\in\mathfrak{G}_v} A_v^{\mathfrak{g}\mathfrak{g}'} \\ &\overset{①}{=} \sum_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}_v} \sum_{\mathfrak{g}''\in\mathfrak{G}_v} A_v^{\mathfrak{g}''} \\ &= |\mathfrak{G}| A_v = |G_1||G_2|^n A_v \end{aligned} ,$$

onde em ① fizemos a mudança de variáveis $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{g}\mathfrak{g}'$ e n é o número de 1-simplexos em $\mathrm{star}(v)$. A última linha diz que

$$\frac{A_v}{\sqrt{|G_1||G_2|^n}} \tag{5.3}$$

é um projetor. Não vamos normalizar cada um dos operadores A_v para que eles sejam projetores com autovalores $\{0,1\}$ pois isso torna as expressões explicitas que envolvem esse operadores demasiadamente complicadas. Porém iremos, como já temos feito, chamar esses operadores não normalizados de projetores.

Agora vamos estudar as regras de comutação. Novamente o caso de apenas operadores $B_p^{(1)}$ e $B_t^{(2)}$ é simples já que eles são diagonais:

$$\left[B_{p_1}^{(1)}, B_{p_2}^{(1)}\right] = \left[B_{t_1}^{(2)}, B_{t_2}^{(2)}\right] = \left[B_{p_1}^{(1)}, B_{t_1}^{(2)}\right] = 0\,,$$

para todos os 2-simplexos p_1 e p_2 e 3-simplexos t_1 e t_2 em R.

Agora vamos mostrar que $\left[A_v, B_p^{(1)}\right] = 0$. Iremos mostrar que $\left[A_v^{\mathfrak{g}}, B_p^{(1)}\right] = 0$ de onde o resultado segue trivialmente. Note que se $v \not\leq p$ esse resultado é trivial, então vamos assumir que $v < p$. Para escrever expressões explicitas vamos tomar $v = v_0$ e

$p = [v_0, v_1, v_2]$. De um lado temos

$$A_{v_0}^{\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]},\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]},\mathfrak{a}_{[0\hat{0}2]}} B_{[v_0,v_1,v_2]} \left| f_{[01]}, f_{[12]}, f_{[02]}, a_{[012]} \right\rangle = \delta\left[\partial\left(a_{[012]}^{-1} f_{[01]} f_{[12]} f_{[02]}^{-1}\right), 1\right] A_{v_0} \left| f_{[01]}, f_{[12]}, f_{[02]}, a_{[012]} \right\rangle$$

e pelo outro lado temos

$$B_{[v_0,v_1,v_2]} A_{v_0}^{\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]},\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]},\mathfrak{a}_{[0\hat{0}2]}} \left| f_{[01]}, f_{[12]}, f_{[02]}, a_{[012]} \right\rangle = \delta\left[\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}^{-1} \partial\left(\mathfrak{a}_{[0\hat{0}2]}\right) \partial\left(a_{[012]}^{-1} f_{[01]} f_{[12]} f_{[02]}^{-1}\right) \partial\left(\mathfrak{a}_{[0\hat{0}2]}^{-1}\right) \mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}, 1\right] A_{v_0} \left| f_{[01]}, f_{[12]}, f_{[02]}, a_{[012]} \right\rangle ,$$

ou seja, ambos os lado são iguais $A_{v_0} \left| f_{[01]}, f_{[12]}, f_{[02]}, a_{[012]} \right\rangle$ se $\partial\left(a_{[012]}^{-1} f_{[01]} f_{[12]} f_{[02]}^{-1}\right) = 1$, caso contrário ambos os lados são nulos.

Para mostrar que $\left[A_v, B_t^{(2)}\right] = 0$, seguimos um procedimento similar, antes de aplicar $A_{v_0}^{\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]},\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]},\mathfrak{a}_{[0\hat{0}2]}}$ a 2-holonomia do 3-simplexo $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ é

$$\left(f_{[01]} \triangleright a_{[123]}\right) a_{[013]} a_{[023]}^{-1} a_{[012]}^{-1} ,$$

após aplicar $A_{v_0}^{\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]},\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]},\mathfrak{a}_{[0\hat{0}2]}}$ a 2-holonomia é

$$\left(\mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}^{-1} \partial\left[\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]}\right]\right) \triangleright \left[\left(f_{[01]} \triangleright a_{[123]}\right) a_{[013]} a_{[023]}^{-1} a_{[012]}^{-1}\right] ,$$

de onde segue o resultado.

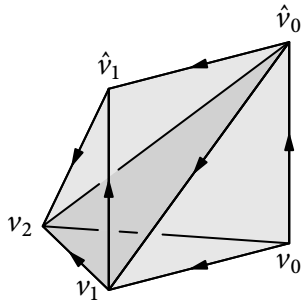
A última regra de comutação que precisamos mostrar é $[A_{v_0}, A_{v_1}] = 0$. Caso não exista um 1-simplexo $[v_0, v_1]$ essa regra de comutação é trivial já que o suporte dos operadores é disjunto. Vamos então supor que v_0 e v_1 são faces de $[v_0, v_1]$. Diferente dos casos anteriores, onde mostramos a regra de comutações para $A_v^{\mathfrak{g}}$ e dessa segue trivialmente a regra de comutação de $\sum_{\mathfrak{g}} A_v^{\mathfrak{g}}$, aqui iremos mostrar que existe um automorfismo de $\mathfrak{G}_{v_0} \times \mathfrak{G}_{v_1}$ que envia $(\mathfrak{g}_0', \mathfrak{g}_1') \to (\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1)$ tal que

$$A_{v_0}^{\mathfrak{g}_0'} A_{v_1}^{\mathfrak{g}_1'} = A_{v_1}^{\mathfrak{g}_1} A_{v_0}^{\mathfrak{g}_0} , \tag{5.4}$$

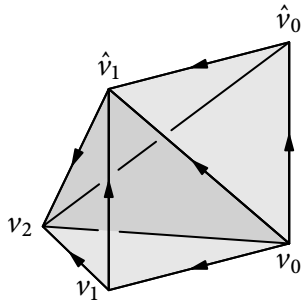
de onde segue que, somando sobre $\mathfrak{g}_0$ e $\mathfrak{g}_1$ no lado direito e sobre $\mathfrak{g}_0'$ e $\mathfrak{g}_1'$ no lado esquerdo, vale o seguinte

$$A_{v_0} A_{v_1} = A_{v_1} A_{v_0} ,$$

Os únicos termos não triviais são aqueles associados aos subespaços $[v_0, v_1]$ e $[v_0, v_1, v_2]$. A triangulação que definem $A_{v_1} A_{v_0}$ é



e a que define $A_{v_0} A_{v_1}$



De um lado temos que

$$A_{v_1}^{\mathfrak{g}_1} A_{v_0}^{\mathfrak{g}_0} \left| f_{[01]}, a_{[012]} \right\rangle = \Big| \partial \mathfrak{a}_{[\hat{0}1\hat{1}]}^{-1} \mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}^{-1} \partial \mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]} f_{[01]} \mathfrak{f}_{[1\hat{1}]}, \\ \mathfrak{a}_{[\hat{0}1\hat{1}]}^{-1} \mathfrak{f}_{[0\hat{0}]}^{-1} \triangleright \left(\mathfrak{a}_{[0\hat{0}1]} \left(f_{01} \triangleright \mathfrak{a}_{[1\hat{1}2]} \right) a_{[012]} \mathfrak{a}_{[0\hat{0}2]}^{-1} \right) \Big\rangle ,$$

lembrando que os simplexos que tem $[0\hat{0}]$ e $[1\hat{1}]$ como face são parâmetros. Do outro lado temos que

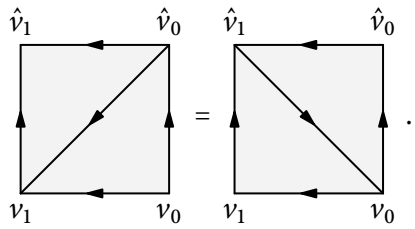
$$A_{v_0}^{\mathfrak{g}'_0} A_{v_1}^{\mathfrak{g}'_1} \left| f_{[01]}, a_{[012]} \right\rangle = \Big| \mathfrak{f}'^{-1}_{[0\hat{0}]} \partial \mathfrak{a}'_{[0\hat{0}1]} \partial \mathfrak{a}'^{-1}_{[\hat{0}1\hat{1}]} f_{[01]} \mathfrak{f}'_{[1\hat{1}]}, \\ \mathfrak{f}'^{-1}_{[0\hat{0}]} \triangleright \left(\mathfrak{a}'_{[0\hat{0}1]} \mathfrak{a}'^{-1}_{[\hat{0}1\hat{1}]} \left(f_{01} \triangleright \mathfrak{a}'_{[1\hat{1}2]} \right) a_{[012]} \mathfrak{a}'^{-1}_{[0\hat{0}2]} \right) \Big\rangle .$$

A seguinte bijeção leva ao resultado da eq. (5.4), que pode ser verificado utilizamos

as expressões explicitas acima

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{f}'_{[0\hat{0}]} &\to \mathfrak{f}_{[0\hat{0}]} \\
\mathfrak{f}'_{[1\hat{1}]} &\to \mathfrak{f}_{[1\hat{1}]} \\
\mathfrak{a}'_{[0\hat{0}2]} &\to \mathfrak{a}_{[0\hat{0}2]} \\
\mathfrak{a}'_{[1\hat{1}2]} &\to \mathfrak{a}_{[1\hat{1}2]} \\
\mathfrak{a}'_{[0\hat{0}\hat{1}]} &\to \mathfrak{f}_{[0\hat{0}]} \triangleright \mathfrak{a}^{-1}_{[\hat{0}1\hat{1}]} \\
\mathfrak{a}'_{[01\hat{1}]} &\to \mathfrak{a}^{-1}_{[0\hat{0}1]} \,.
\end{aligned}
$$

Note que essa bijeção também preserva a 2-holonomia das triangulações laterais:



5.4 Projetor nos estados fundamentais P_0

Definido os operadores da seção anterior podemos definir a Hamiltoniana $H\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$H = -\sum_{v\in R^{(0)}} A_v - \sum_{p\in R^{(2)}} B_p^{(1)} - \sum_{t\in R^{(3)}} B_t^{(2)}$$

Como A_v, $B_p^{(1)}$ e $B_t^{(2)}$ são todos projetores que comutam entre si, o seguinte operador $P_0\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$$P_0 = \prod_{v\in R^{(0)}} A_v \prod_{p\in R^{(2)}} B_p^{(1)} \prod_{t\in R^{(3)}} B_t^{(2)}$$

é um projetor se o mesmo for não nulo e nesse caso $P_0\mathcal{H}$ é o espaço de estados fundamentais e a dimensão desse espaço define o valor $\textsc{gsd}(\Sigma)$.

Vamos verificar que P_0 é não nulo, ou seja, que a Hamiltoniana é livre de frustração. Para isso iremos mostrar que existe ao menos um $\phi \in \mathcal{H}$ tal que $P_0\phi \neq 0$.

Escolhido um conjunto de 1-caminhos e 2-caminhos elementares escolha a configuração $c_1 \in \mathcal{C}(R)$ que associa identidade a todos esses caminhos elementares, que pode ser construída tomando todos os elementos como sendo $1 \in G_1$ ou $1 \in G_2$ de forma apropriada. Isso é uma configuração já que a pseudo 1-holonomia de todos os 2-simplexo é 1 que é sempre um elemento do núcleo da ação para qualquer ação.

Denote o elemento da base associada a essa configuração por ϕ_{c_1}. Agora definimos o seguinte elemento de $\mathcal{H}$

$$\phi = \prod_{v \in R^{(0)}} A_v \phi_{c_1}$$

que é não nulo já que A_v é uma soma sobre permutações dos elementos da base.

Podemos então mostrar o seguinte

$$\begin{aligned}
P_0 \phi &= \prod_{v \in R^{(0)}} A_v \prod_{p \in R^{(2)}} B_p^{(1)} \prod_{t \in R^{(3)}} B_t^{(2)} \prod_{v \in R^{(0)}} A_v \phi_{c_1} \\
&\overset{①}{=} \prod_{v \in R^{(0)}} A_v \prod_{v \in R^{(0)}} A_v \prod_{p \in R^{(2)}} B_p^{(1)} \prod_{t \in R^{(3)}} B_t^{(2)} \phi_{c_1} \\
&\overset{②}{=} \prod_{v \in R^{(0)}} A_v \prod_{v \in R^{(0)}} A_v \phi_{c_1} \\
&\overset{③}{=} \prod_{v \in R^{(0)}} A_v \phi_{c_1} \\
&= \phi \,,
\end{aligned}$$

onde em ① usamos que os operadores comutam entre si, em ② utilizamos que $B_p^{(1)} \phi_{c_1} = \phi_{c_1}$ para todos os $p \in R^{(2)}$ e $B_t^{(2)} \phi_{c_1} = \phi_{c_1}$ para todos os $t \in R^{(3)}$ pela definição de c_1 e em ③ usamos que A_v é um projetor.

Lembrando da nossa escolha feita para a normalização de A_v, eq. (5.3) na página 83, o operador P_0 também não esta normalizado, coletando os fatores obtemos que

$$\text{GSD}\, \Sigma = \dim \mathcal{H}_0 = \frac{\operatorname{tr} P_0}{|G_1|^{F^0} |G_2|^{2F^1}}$$

onde F^i são as componentes do f-vetor de R.

O operador P_0 pode ser representado como uma aplicação linear construído a partir de Z_Y, para isso precisamos tomar a composição de todos os cobordismo que definem o operadores no produtório que define P_0. O termo $\prod_{p \in R^{(2)}} B_p^{(1)} \prod_{t \in R^{(3)}} B_t^{(2)}$ é simples já que cada operador desse produto é um cobordismo degenerado e todos os simplexos de cada um dos operadores menos um dos simplexo são faces virtuais e como temos o produto sobre todos os 1-simplexos e 2-simplexos de R obtemos

$$\prod_{p \in R^{(2)}} B_p^{(1)} \prod_{t \in R^{(3)}} B_t^{(2)} = Z_Y(R, R, R) \,.$$

O termo $\prod_{v \in R^{(0)}} A_v$ está relacionado com o procedimento de levantamento definido anteriormente, primeiro precisamos ordenar esse produtório, a ordem escolhida não é altera o resultado já que os operadores comutam. Começando com o operador

identidade $Z_Y(R, R, R; R)$ tomamos o produto com o primeiro A_{v_0} do produto, o cobordismo que descreve esse produto é um cone colado em R. Agora quando tomarmos o produto pelo segundo A_{v_1} a composição de cobordismos diz que temos que colar um cone em $R^{(v_0)}$. Repetindo esse processo para todos os vértices temos que o cobordismo resultante é exatamente a triangulação de $\Sigma \times I$ que construirmos anteriormente, $T_{\Sigma\times I}$. Temos que

$$\prod_{v\in R^{(0)}} A_v = Z_Y\left(T_{\Sigma\times I}, R, R^{(v_0,v_1,\dots)}; \bigcup_{v\in R^0} \xi_v\right)$$

e finalmente podemos escrever que

$$P_0 = Z_Y\left(T_{\Sigma\times I}, R, R^{(v_0,v_1,\dots)}; \left(\bigcup_{v\in R^0} \xi_v\right) \smallsetminus R\right).$$

Vamos agora demonstrar que a seguinte identidade é verdade

$$Z_Y\left(T_{\Sigma\times I}, R, R^{(v_0,v_1,\dots)}; \left(\bigcup_{v\in R^0} \xi_v\right) \smallsetminus R\right) = Z_Y\left(T_{\Sigma\times I}, R, R^{(v_0,v_1,\dots)}\right).$$

Lembrando que $Z_Y(T_{\Sigma\times S^1}) = \operatorname{tr} Z_Y(T_{\Sigma\times I}, R, R^{(v_0,v_1,\dots)})$, essa identidade relaciona o invariante de Yetter, obtido tomando o traço e normalizando o lado direito, com $\textsc{gsd}(\sigma)$, obtido tomando o traço e normalizando o lado esquerdo. Vamos demonstrar essa identidade mostrado que a presença de cada uma das faces virtuais não altera o valor da expressão. Para isso iremos utilizar os lemas de fatoração da seção 4.3.1 na página 55. Para simplificar a notação vamos definir

$$X = \left(\bigcup_{v\in R^0} \xi_v\right) \smallsetminus R.$$

Para organizar a fatoração dos elementos de X iremos considerar a projeção de cada simplexo em R e organizá-los em pre-imagens de simplexos de R. Para isso note primeiro que dado um n-simplexo $s \in T_{\Sigma\times I} \smallsetminus R$ ele é projetado em um n-simplexo de R se e somente se $[v, \hat{v}] \not\leq s$ para todo $v \in R^{(0)}$ caso contrário ele é projetado em um $(n-1)$-simplexo. Agora um simplexo $s \in T_{\Sigma\times I}$ pertence a X se ele pertence a R ou se $[v, \hat{v}] \not\leq s$ para todo $v \in R^{(0)}$. Então dado um n-simplexo $r \in R$ os simplexos de X que projetam em r são todos os n-simplexos obtidos por uma ou mais substituições da forma $v \to \hat{v}$.

Agora escolha um 3-simplexo $t \in R$ e denote esse simplexo por $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ e assuma que a ordenação escolhida para construir $T_{\Sigma\times I}$ é $v_0 < v_1 < v_2 < v_3 < \cdots$. A lista dos simplexos de X que projetam em t é

$$P^{-1}(r) = \{[\hat{v}_0, v_1, v_2, v_3], [\hat{v}_0, \hat{v}_1, v_2, v_3], [\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2, v_3], [\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3]\}.$$

Essa pre-imagem está ordenada pela ordem com que esses simplexos aparecem no processo de construção de $T_{\Sigma\times I}$. Iremos fatorar os simplexos dessa lista a partir do último simplexo a aparecer na construção terminando com o primeiro a aparecer na construção, ou seja, da direita para a esquerda. Essa ordem garante que um 3-simplexo que será fatorado é face de um 4-simplexo que foi construído no passo anterior da construção de $T_{\Sigma\times I}$.

O caso 3-dimensional representado na fig. 5.3 na página 73, da construção de $T_{\Sigma\times I}$, ilustra os conceitos introduzidos. Iremos utilizar essa ilustração como referencia. Note que a seguir os conceito relativos "abaixo" e "acima" estão sendo definidos em termos da ordem com que a triangulação $T_{\Sigma\times I}$ é construída onde consideremos que ela é construída "de baixo para cima".

Considere primeiro o simplexo $[\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3]$ e o 4-simplexo logo abaixo $[\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2, v_3, \hat{v}_3]$ podemos utilizar o lema de fatoração para esse par de simplexos. Repetimos esse procedimento para os outros 3-simplexos dessa lista, um fato importante é que das faces de $[\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2, v_3, \hat{v}_3]$ o único 3-simplexo que pertence a X é o simplexo $[\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3]$ já que todas as outras faces tem o 1-simplexo $[v_3, \hat{v}_3]$ como uma de suas faces isso garante a hipótese do lema de fatoração já que cada 3-simplexo dessa lista tem um 4-simplexo completo que pode ser utilizado para fatorar a sua função característica.

Esse procedimento é repetido para todos os 3-simplexos $t \in R$. Como todo 3-simplexo em X é projetado em algum t teremos no final fatorado a função característica de todos os 3-simplexos, ou seja, provamos que vale a seguinte identidade

$$Z_Y(T, R, R^{(v_0,v_1,\dots)}; X^{(3)}) = Z_Y(T, R, R^{(v_0,v_1,\dots)}) .$$

Agora para fatorar as funções características dos 2-simplexos. Vamos utilizar um procedimento similar aos parágrafos anteriores mas agora reduzindo a dimensão dos objetos em 1. Fixe um 2-simplexo $p \in R$, denote esse simplexo por $[v_0, v_1, v_2]$ e assuma a seguinte ordenação $v_0 < v_1 < v_2$. Agora todos os simplexos em X que projetam em p são

$$P^{-1}(p) = \{[\hat{v}_0, v_1, v_2], [\hat{v}_0, \hat{v}_1, v_2], [\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2]\}$$

novamente esses simplexos estão ordenados pela ordem de construção e iremos fatorar esses simplexos da direita para esquerda, isso ira garantir, por exemplo, que o 2-simplexo $[\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2]$ é face do 3-simplexo $[\hat{v}_0, \hat{v}_1, v_2, \hat{v}_2]$ construído no passo anterior da construção. Podemos utilizar o lema de fatoração para esse par de simplexos e fator a função característica do 2-simplexo $[\hat{v}_0, \hat{v}_1, \hat{v}_2]$. Novamente a única face do 3-simplexo $[\hat{v}_0, \hat{v}_1, v_2, \hat{v}_2]$ que pertence a X é esse simplexo fatorado o que garante a condição do lema de fatoração para cada simplexo da lista. Note também que todos os 3-simplexos utilizados nesse processo tem o 1-simplexo $[v, \hat{v}]$ para algum v como face, ou seja, esses 3-simplexos não pertencem a X e não foram fatorados no processo anterior. Repetindo para todos os simplexos da lista e para todos os 2-simplexos $p \in R$

iremos fatorar todas as funções características associadas aos 2-simplexos de X. Com isso provamos que vale o seguinte

$$Z_Y(T, R, R^{(v_0,v_1,\dots)}; X^{(3)} \cup X^{(2)}) = Z_Y(T, R, R^{(v_0,v_1,\dots)}) .$$

Como apenas 2-simplexos e 3-simplexos tem funções características associadas temos o resultado desejado

$$Z_Y(T, R, R^{(v_0,v_1,\dots)}; X) = Z_Y(T, R, R^{(v_0,v_1,\dots)}) .$$

Teorema 5.1. *Dado uma variedade Σ, para qualquer triangulação R de Σ escolhida para definir o modelo Hamiltoniano, temos que*

$$\textsc{gsd}(\Sigma) = Y(\Sigma \times S^1)$$

Demonstração. Do discutido anteriormente nessa seção temos que

$$\operatorname{tr} P_0(R) = Z_Y(\Sigma \times S^1) .$$

Substituindo a definição de $\textsc{gsd}(\Sigma)$ e do invariante de Yetter temos que

$$|G_1|^{F^0}|G_2|^{2F^1}\,\textsc{gsd}(\Sigma) = |G_1|^{f^0}|G_2|^{f^1-f^0}\,Y(\Sigma \times S^1) ,$$

onde f^i é o f-vetor da triangulação $T_{\Sigma\times S^1}$ levantada de R e F^i é o f-vetor da triangulação R. Da construção de $T_{\Sigma\times S^1}$ temos que essas componentes são relacionadas pelo seguinte:

$$\begin{aligned} f^0 &= F^0 \\ f^1 &= F^0 + 2F^1 . \end{aligned}$$

Substituindo esses valores temos que:

$$\textsc{gsd}(\Sigma) = Y(\Sigma \times S^1) .$$

□

6 Conclusão

Nesse trabalho apresentamos a construção de um modelo quântico em 3-dimensões sobre a variedade Σ construído de forma que a degenerescência do estado fundamental seja dada pelo invariante de Yetter 4-dimensional calculado para a variedade $\Sigma \times S^1$.

As técnicas utilizadas para construir esse modelo podem ser aplicadas para outros invariantes 4-dimensionais construídos a partir de uma soma sobre estados. Apesar de termos escolhidos o invariante de Yetter e teorias de 2-gauge para construir o modelo as técnicas introduzidas são gerais e podem ser adaptadas para outras estruturas algébricas, ou até mesmo, podemos tentar encontrar quais as propriedades que uma estrutura algébrica deve ter para existir um par invariante 4-dimensiona e modelo quântico 3-dimensional. Essas duas frentes, obter modelos para outros invariantes e generalizar os invariantes que já existem são projetos que estão sendo desenvolvidos.

O próximo passo, em relação ao modelo descrito nessa tese, é estudar os estados excitados. No trabalho presente apenas descrevemos a relação do invariante topológico com o estado fundamental. Os estado excitados não são invariantes topológicos mas tem diversas características topológicas. A primeira parte desse estudo é descrever os possíveis estados excitados, usualmente estamos interessados nos primeiros estados excitados que apresentam uma maior dependência na topologia e uma menor dependência na estrutura particular da triangulação. Esses estados excitados tem energia localizada e descrevem quasipartículas. O próximo passo seria estudar a estatística e regras de fusão dessas quasipartículas.

Em relação a aplicações, esse modelo e generalizações dele dão origem a códigos quânticos que parecem ter propriedades interessantes. Recentemente começamos a estudar essas propriedades e temos esperança de obter resultados importantes.

Acredito que ainda exista muito a ser explorado sobre a relação entre invariantes de $(d+1)$-dimensões e modelos com ordem topológica d-dimensional.

Bibliografia

Aneziris, Charilaos Nikolaos, Aiyalam Parameswaran Balachandran, Louis H. Kauffman e Ajit Mohan Srivastava. 1991. "Novel statistics for strings and string "Chern-Simon" terms". *International Journal of Modern Physics A* 06 (14): 2519–2558. doi:10.1142/S0217751X91001210.

Attal, Romain. 2004. "Combinatorics of non-abelian gerbes with connection and curvature". *Annales de la Fondation Louis de Broglie* 29 (4): 609–633. arXiv: 0203056.

Baez, John C., e John Huerta. 2010. "An invitation to higher gauge theory". arXiv: 1003.4485.

Baez, John C., e Urs Schreiber. 2007. "Higher gauge theory". Em *Categories in Algebra, Geometry and Mathematical Physics,* editado por Alexei Davydov, Michael Batanin, Michael Johnson, Stephen Lack e Amnon Neeman, 7–30. American Mathematical Society. ISBN: 978-0-8218-3970-6.

Bullivant, Alex, Marcos Calçada, Zoltán Kádár, Paul Martin e João Faria Martins. 2017. "Topological phases from higher gauge symmetry in 3 + 1 dimensions". *Physical Review B* 95 (15): 155118. doi:10.1103/PhysRevB.95.155118.

Ferreira, Miguel Jorge Bernabé, Pramod Padmanabhan e Paulo Teotonio-Sobrinho. 2014. "2D quantum double models from a 3D perspective". *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 47 (37): 375204. doi:10.1088/1751-8113/47/37/375204.

Janelidze, George. 2003. "Internal crossed modules". *Georgian Mathematical Journal* 10:99–114. doi:10.1515/GMJ.2003.99.

Kitaev, Alexei Yu. 2003. "Fault-tolerant quantum computation by anyons". *Annals of Physics* 303 (1): 2–30. doi:10.1016/S0003-4916(02)00018-0.

Kuperberg, Greg. 1991. "Involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants". *International Journal of Mathematics* 02 (01): 41–66. doi:10.1142/S0129167X91000053.

Lack, Stephen. 2010. "A 2-categories companion". Em *Towards Higher Categories,* editado por John C. Baez e J. Peter May, 105–191. doi:10.1007/978-1-4419-1524-5_4.

Lickorish, William B. R. 1999. "Simplicial moves on complexes and manifolds". Em *Proceedings of the Kirbyfest,* editado por Joel Hass e Martin Scharlemann, 2:299–320. Geometry & Topology Monographs. doi:10.2140/gtm.1999.2.299.

Martins, João Faria, e Timothy Porter. 2007. "On Yetter's invariant and an extension of the Dijkgraaf-Witten invariant to categorical groups". *Theory and Applications of Categories* 18 (4): 118–150.

Pachner, Udo. 1991. "**PL** homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings". *European Journal of Combinatorics* 12 (2): 129–145. doi:10.1016/S0195-6698(13)80080-7.

Power, A.J. 1990. "A 2-categorical pasting theorem". *Journal of Algebra* 129 (2): 439–445. doi:10.1016/0021-8693(90)90229-H.

Rourke, Colin P., e Brian J. Sanderson. 1972. *Introduction to Piecewise-Linear Topology.* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-540-11102-3. doi:10.1007/978-3-642-81735-9.

Street, Ross. 1996. "Categorical Structures". Em *Handbook of Algebra,* editado por M. Hazewinkel, 1:529–577. doi:10.1016/S1570-7954(96)80019-2.

Tsui, D. C., H. L. Stormer e A. C. Gossard. 1982. "Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit". *Physical Review Letters* 48 (22): 1559–1562. doi:10.1103/PhysRevLett.48.1559.

Wang, Juven C., e Xiao-Gang Wen. 2015. "Non-Abelian string and particle braiding in topological order: Modular $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ representation and $(3+1)$-dimensional twisted gauge theory". *Physical Review B* 91 (3): 035134. doi:10.1103/PhysRevB.91.035134.

Wen, X. G. 1990. "Topological orders in rigid states". *International Journal of Modern Physics B* 04 (02): 239–271. doi:10.1142/S0217979290000139.

Wen, X. G., e Q. Niu. 1990. "Ground-state degeneracy of the fractional quantum Hall states in the presence of a random potential and on high-genus Riemann surfaces". *Physical Review B* 41 (13): 9377–9396. doi:10.1103/PhysRevB.41.9377.

Yetter, David N. 1992. "Topological quantum field theories associated to finite groups and crossed G-sets". *Journal of Knot Theory and Its Ramifications* 01 (01): 1–20. doi:10.1142/S0218216592000021.

Índice Remissivo

1-caminho, *veja* caminho
1-categoria, *veja* categoria
1-funtor, *veja* funtor
1-grupo, *veja* grupo
1-grupoide de caminhos, 23
1-holonomia, *veja* holonomia
2-caminho, *veja* 2-grupoide de caminhos
    elementar, 32
    fechado, 32
2-categoria, 26
2-funtor, 29
2-grupo, 32, 36
2-grupoide, 30
2-grupoide de caminhos, 30
2-morfismo, *veja* 2-categoria

A
aplicação
    linear, 13
    linear por partes, 13

B
Bianchi, identidades de, 55, 57
bigon, 24

C
caminho, 23
    elementar, 23
    fechado, 23
categoria, 19
    diagrama, 20
cobordismo, 74
complexo simplicial, 11
    dimensão, 12
    k-esqueleto, 12
    representação geométrica, 13
    subcomplexo, 12
composição horizontal, *veja* 2-categoria
composição vertical, *veja* 2-categoria
configuração
    1-gauge, 41
    2-gauge, 44
    caminho padrão, 46
    coloração, 43, 45
    flat, 52

D
descascamento elementar, 16
descascável, 16
diagrama, *veja* categoria
    comutativo, 21

E
envoltório complexo, 10
equivariante, 33

F
funtor, 21
f-vetor, *veja* complexo simplicial

G
grupo, 22
grupoide, 22

H
holonomia, 44
    1-holonomia, 44
    2-holonomia, 48
    pseudo 1-holonomia, 34, 47

M
modulo cruzado, 33
morfismo, *veja* categoria
    destino, *veja* categoria
    identidade, *veja* categoria
    isomorfismo, 22
    origem, *veja* categoria

O
objetos, *veja* categoria

P
Pachner, passos de, 14, 18
    biestelar, 18
    descascamento elementar, 16
Peiffer, identidade de, 33
PL-isomorfismo, 14
PL-variedade, 14
poliedro, 13
posição geral, 10
primeiro vizinho, 30

S
simplexo, 9
    bordo, 12
    dimensão, 10
    face, 11
    face oposta, 11
    maximal, 12
    puro, 12

T
triangulação, 13

W
whiskering, *veja* 2-categoria