UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

UNITARIZAÇÃO DE RESSONÂNCIAS PIÔNICAS ESCALARES

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Lécio de Oliveira Arantes

Tombo: 4189

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do grau de Mestre em Ciências Físicas

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta (IF-USP)

Prof. Dra. Frederique Marie Brigitte Sylvie Grassi (IF-USP)

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld (IFT-UNESP)

São Paulo

2004

[Handwritten signature]

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

SBI-IFUSP

20.08/12/04

539.721
A66Z w
M
Ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Arantes, Lécio de Oliveira

Unitarização de Ressonâncias Piônicas Escalares.
São Paulo - 2004

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Depto. de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta
Área de Concentração: Física

Unitermos

1. Física de Partículas;
2. Simetria-quiral;
3. Ressonância-escalar;
4. Hadron;
5. Partículas-Pion.

USP/IF/SBI-076/2004

Ao meu filho

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Manoel Roberto Robilotta, pela excelente orientação e por toda sua paciência comigo. À CNPq pela ajuda financeira, sem a qual este trabalho seria inviável. Aos meus professores Ana Regina Blak, Kazunori Watari, Fernando Navarra, Marina Nielsen e outros, por terem ajudado em minha formação, indispensável para realização deste trabalho. Aos meus amigos do GHAFITE Regina, Simone, Rômulo, David e outros, pelos chás da 5 da tarde e momentos prazerosos em que estivemos juntos. Aos meus avós Lande Arantes, Maria Arantes, Mariana de Oliveira e Davi de Oliveira, pelos bons momentos juntos. Em especial ao Lande pelo trombone que recebi de herança e à tradição que sigo de colocar todos os nomes de meus filhos começando com a letra *L*. Aos meus pais, Laudelande Arantes e Lúcia M. de Oliveira, por toda ajuda; sem eles eu sequer existiria. À minha esposa Claudia M. Ramalho, por ter gerado meu bem mais precioso, meu filho. Ao meu filho Luan Diego R. Arantes, por todas diversões e alegrias, nas prazerosas horas de brincadeiras. Ao meu grande amigo Guilherme de Souza Rabello, não só por ter corrigido diversos erros de português deste trabalho, mas também pela sua grande amizade. Ao meu amigo Ricardo D'Elia Matheus, por todas discussões de física e outros assuntos, e à sua namorada Mirela, por não ter me xingado quando eu insistia em falar de física ao seu lado. Ao meu irmão Lúcio O. Arantes, por fazer tudo o que não tenho coragem de fazer; sua imensa alegria me contagia. À minha irmã Lígia O. Arantes e aos meus primos-irmãos¹ Odirley, Mariana, Gisele e Gabriela, por todos os momentos felizes nos quais estivemos juntos. Aos meus amigos da USP Diego, Ilomar, Lucas, Arthur, Caio e sua namorada Tati que, além de toda ajuda na conclusão do curso de física, deram memoráveis horas de alegria. Aos meus amigos do Pq. Santo Antônio Manteiga, Piruca, Doullhas, Cléber, Orelha, Cláuber e outros, pelas baladas onde estivemos juntos. Enfim, aos meus 43 tios e mais de 100 primos de primeiro grau, e a todos não citados que de alguma forma me ajudaram ao longo de minha vida.

¹A mãe deles é irmã da minha mãe ou do meu pai. O pai deles é irmão do meu pai ou da minha mãe.

Estrelas Generosas

Imaginem duas estrelas
praticamente idênticas,
com a mesma capacidade
de gerar *Luz*.

A primeira, mais egoísta,
não se preocupa
com as estrelas em formação
que o cercam.
Ilumina essas
com tanta intensidade
que varre a massa de seus lares,
tirando, assim,
um pouco da capacidade
de gerar *Luz*,
Luz tão preciosa.

A segunda, mais generosa,
se preocupa
com as estrelas em formação
que a cercam,
dando a elas
um pouco de sua massa
e, com ela, a capacidade
de gerar *Luz*.
Assim, não consegue
gerar tanta *Luz*
como a primeira,
mas ajuda muitas
a se tornarem
grandes e luminosas.

Poderíamos nos perguntar:

qual das duas estrelas mais contribuiu ao longo de sua vida com a iluminação do Universo,

a egoísta ou a generosa?

Se analisarmos separadamente, teremos como resposta a egoísta, pois esta gerou mais *Luz* ao longo de sua vida do que a segunda.

Mas se analisarmos como um todo, não separando um indivíduo de toda uma sociedade, teremos como resposta a generosa, pois esta não é só responsável pela luz que gerou, mas também é responsável pela luz gerada por todas estrelas que ajudou a formar.

Agradecemos a todos professores, estrelas generosas, que ajudaram em nossa formação.^a

^aDiscurso elaborado por Lécio de Oliveira Arantes para agradecer à Professora Ana Regina, paraninfa da turma de formandos IFUSP de 2001.

Resumo

A implementação da simetria quiral por meio do modelo sigma linear requer um méson escalar, cuja existência foi objeto de muito debate ao longo das últimas quatro décadas. Recentemente, evidências da ocorrência dessa partícula foram encontradas em um experimento realizado no Fermilab. A análise desses resultados experimentais depende de modelos teóricos acerca da dinâmica das ressonâncias. Neste trabalho, estudou-se o papel da simetria quiral na estrutura desses modelos e mostrou-se que, na região de energias baixas, essa simetria influi decisivamente nas expressões que descrevem ressonâncias escalares.

Abstract

In the linear sigma model, the implementation of chiral symmetry requires a scalar meson, whose existence has been much debated along the last four decades. Recently, evidences of this particle were found in a experiment done at Fermilab. The interpretation of these experimental results relies on theoretical models for the dynamics of resonances. In this work, the role of chiral symmetry in these models is studied and it is shown that this symmetry is rather important in determining the expressions that should be used to describe scalar resonances at low-energies.

Lista de Figuras

2.1	Potencial V nos planos $\sigma \times V$ e $\pi \times V$, com $\lambda^2 = 1$ e $\alpha^2 = -1$	15
2.2	Potencial V com $\lambda^2 = 1$ e $\alpha^2 = -1$	15
2.3	Potencial V nos planos $\sigma \times V$ e $\pi \times V$, com $\frac{\lambda^2}{4} = 1$ e $\alpha^2 = +1$	16
2.4	Potencial V com $\lambda^2 = 1$ e $\alpha^2 = +1$	16
2.5	Ponto de inflexão de v em função de α^2	20
2.6	Potencial com o termo linear em sigma nos planos $\sigma \times V$ e $\pi \times V$, com $\alpha^2 = +1$, $c = 0, 1$ e $\lambda^2 = 1$	21
2.7	Potencial com o termo linear em sigma, com $\alpha^2 = +1$, $c = 0, 1$ e $\lambda^2 = 1$	21
3.1	Gráficos de Feynman para os processos $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^+ \pi^-$	23
3.2	Espalhamento $\pi_a \pi_b \rightarrow \pi_c \pi_d$	25
3.3	Espalhamento $\pi_a \pi_b \rightarrow \xi \rightarrow \pi_c \pi_d$	25
3.4	Amplitudes A_π , A_σ , A_a e A_{BE} . $M_\sigma = 0,5 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$	26
3.5	Representação gráfica de A_a	27
3.6	Espalhamento $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ com loops internos	27
3.7	Espalhamento $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ com um loop	27
3.8	Decaimento $\sigma \rightarrow \pi^a \pi^b$	29
3.9	Contratermos	32
3.10	Soma dos contratermos	32
3.11	Amplitudes $ A_u ^2$, $ A_a ^2$ e $ A_{BE} ^2$. $M_\sigma = 0,5 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$	34
3.12	Amplitudes $ A_u ^2$ e $ A_I ^2$; $M_\sigma = 0,5 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$	35
3.13	Espalhamento $\pi^+ \pi^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ meson sigma	36
3.14	Amplitudes $ A_u ^2$, $ A_u^p ^2$ e $ A_I^p ^2$; $M_\sigma = 0,5 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$	37
3.15	Zero da amplitude A_a em função de θ ; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$, $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$, $k_1 = \text{sen}^2(\theta)$ e $k_2 = \text{cos}^2(\theta)$	40

3.16	Amplitudes $ A_I ^2$; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$, $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$, $k_1 = \cos^2(\theta)$ e $k_2 = \sin^2(\theta)$	41
3.17	Zero da amplitude A_a em função de θ ; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$, $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$, $k_1 = \sec^2(\theta)$ e $k_2 = -\tan^2(\theta)$	42
3.18	Amplitudes $ A_I ^2$; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$, $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$, $k_1 = \sec^2(\theta)$ e $k_2 = -\tan^2(\theta)$	43
4.1	Curva que determina a região aonde o decaimento é possível	46
4.2	Diagrama de Dalitz para $ T ^2$ em que T é dada pela equação (4.1.9), para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$	47
4.3	Soma das projeções de $ T ^2$, sobre o eixo s_{12} , para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$	47
4.4	Diagrama de Dalitz para $ T ^2$ em que T é dada pela equação (4.1.9), para $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$	48
4.5	Soma das projeções de $ T ^2$, sobre o eixo s_{12} , para $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$	48
4.6	Diagrama de Dalitz para $ T ^2$ em que T é dada pela equação (4.1.10), para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$	48
4.7	Soma das projeções de $ T ^2$, sobre o eixo s_{12} , para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$	48
4.8	Diagrama de Dalitz para $ T ^2$, em que T é dada pela equação (4.1.10), para $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$	49
4.9	Soma das projeções de $ T ^2$ sobre o eixo s_{12} ; $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$	49
4.10	Diagrama de Dalitz para $ T ^2$, em que T é dada pela equação (4.1.10), para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$ e $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$	49
4.11	Soma das projeções de $ T ^2$, sobre o eixo s_{12} ; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$ e $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$	49
4.12	Diagrama de Dalitz para $ T ^2$ em que T é dada pela equação (4.1.10), para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$ e $M_2 = 1,37 \text{ GeV}$	50
4.13	Soma das projeções de $ T ^2$, sobre o eixo s_{12} ; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$ e $M_2 = 1,37 \text{ GeV}$	50
4.14	Diagrama de Dalitz para $ T ^2$ em que T é dada pela equação (4.1.10), para $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$ e $M_2 = 1,37 \text{ GeV}$	50
4.15	Soma das projeções de $ T ^2$ sobre o eixo s_{12} ; $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$ e $M_2 =$ $1,37 \text{ GeV}$	50
4.16	Diagrama de Dalitz $D^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$	51
4.17	Diagrama de Dalitz $D_s^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$	51
4.18	Projeção $D_s^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$	51

Lista de Tabelas

2.1	Massas dos quarks	9
2.2	Propagadores do modelo sigma linear	19
2.3	Vértices do modelo sigma linear	22
3.1	Massa e largura para as ressonância $f_0(980)$ e $f_0(1370)$	40

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Simetria Quiral	4
2.1	Teorema de Noether	4
2.2	Grupo $SU(2)$	7
2.3	Simetria Quiral na QCD	9
2.3.1	Campos com helicidade direita (right-handed) e esquerda (left-handed)	10
2.3.2	Lagrangiana da QCD na linguagem RL	10
2.4	Modelo sigma linear	11
2.4.1	Simetria $SU(2) \otimes SU(2)$	11
2.4.2	Transformações axial e vetorial	12
2.4.3	O vácuo no modelo sigma linear	14
2.4.4	Observáveis	16
2.5	Modelo sigma não linear	17
2.6	Regras de Feynman	19
3	Espalhamento $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$	23
3.1	Teorema de baixa energia	24
3.2	Modelo sigma linear em árvore	24
3.3	Unitarização dinâmica para uma ressonância escalar	27
3.3.1	Iteração de A_a	27
3.3.2	Renormalização	30
3.4	Simetria quiral	35
3.5	Unitarização quiral para n ressonâncias	37
3.5.1	Unitarização quiral para 2 ressonâncias.	38
4	Dcaimento em três corpos	44
4.1	Diagrama de Dalitz	44

4.2 Dados Experimentais 46

5 Conclusões e perspectivas 52

A Regularização dimensional 54

Capítulo 1

Introdução

O méson sigma foi primeiramente proposto no modelo sigma linear, criado por Schwinger em 1957 [Sch57], e depois reformulado no contexto da PCAC por Gell-Mann and Lévy [GML60], em 1960. Esse modelo consiste, na sua forma mais simples, em realizar linearmente a simetria quiral $SU(2) \times SU(2)$. Observada inicialmente nas interações fracas, a simetria quiral está presente na lagrangiana da QCD com dois sabores, no limite em que a massa dos quarks u e d é igual a zero. Assim, é natural pensar que ela também esteja presente nas interações mediadas por mésons. O méson sigma seria o parceiro quiral do pión e teria papel fundamental na interação pión-pión. No entanto, durante quarenta anos não se encontrou nenhuma evidência experimental do méson sigma. A ausência de evidências experimentais levou à proposição de realizações não lineares da simetria quiral que não necessitavam desse méson. A perturbação quiral [Sch02], baseada na realização não linear da simetria quiral, vem obtendo excelentes resultados para o espalhamento pión-pión em baixas energias, o que levou a acreditar que o méson sigma não era realmente necessário. Porém, nessas experiências, o méson sigma não poderia ser detectado se tivesse uma largura muito grande.

Recentemente, no experimento Fermilab E791 [A⁺01b], o méson sigma foi necessário para ajustar melhor os dados do decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$. No entanto, esse tipo de análise experimental depende de considerações teóricas acerca da estrutura das ressonâncias.

Uma grandeza fundamental para caracterizar um decaimento é a largura (Γ). Em mecânica quântica, a função de onda que representa uma partícula de energia E na posição $\vec{r}$ pode ser escrita como:

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r})e^{-iEt}. \quad (1.0.1)$$

No caso de estados estacionários, a energia E é constante. Por outro lado, quando esses

estados podem decair, energia adquire uma componente imaginária:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma}{2} &= -\text{Im}(E), \quad E_0 = \text{Re}(E), \\ E &= E_0 - i\frac{\Gamma}{2},\end{aligned}\tag{1.0.2}$$

de modo que a função de onda torna-se

$$\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r})e^{-\frac{\Gamma}{2}t}e^{-iE_0t}\tag{1.0.3}$$

e, conseqüentemente, a probabilidade é dada por

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = e^{-\Gamma t}|\phi(\vec{r})|^2.\tag{1.0.4}$$

A exponencial real e negativa $e^{-\Gamma t}$ garante que, no limite em que $t \rightarrow \infty$, a probabilidade vai a zero. Ou seja, essa exponencial está ligada ao decaimento da partícula em questão. Existem várias formas de calcular e definir essa largura e, em geral, os métodos passam pela unitarização do processo de decaimento. O objetivo deste trabalho é discutir a relação entre a simetria quiral e a unitarização do decaimento do méson σ .

No contexto da simetria quiral, a amplitude para o espalhamento elástico $\pi^a(p_a)\pi^b(p_b) \rightarrow \pi^c(p_c)\pi^d(p_d)$ deve satisfazer um teorema de baixa energia quando os momentos dos píons são pequenos ($q \sim M_\pi$). O termo dominante da amplitude, A_a , deve ser dado por

$$A_a(x) = \frac{x - M_\pi^2}{F_\pi^2},$$

em que x é uma das variáveis de Mandelstam, $M_\pi = 139 \text{ MeV}$ e $F_\pi = 93 \text{ MeV}$ são a massa e a constante de decaimento do pion. No caso do modelo sigma linear, essa amplitude é construída a partir de um vértice direto com quatro pernas, A_π , e uma contribuição da ressonância, A_σ . A conformidade com o teorema de baixa energia resulta de cancelamentos importantes entre A_π e A_σ . Após esses cancelamentos, a amplitude em árvore pode ser escrita como

$$A_a = -\frac{\gamma^2}{x - M_\sigma^2},\tag{1.0.5}$$

com $\gamma^2 = \frac{(x - M_\pi^2)(M_\sigma^2 - M_\pi^2)}{F_\pi^2}$. Essa amplitude tem uma divergência em $x = M_\sigma^2$, que é removida com a unitarização. A unitarização produz uma correção no denominador de A_a da forma

$$A_a = -\frac{\gamma^2}{x - M_\sigma^2 + \gamma^2 \Sigma},\tag{1.0.6}$$

em que Σ é uma função de x . Essa unitarização da amplitude em árvore A_a conserva simetria quiral, o que não acontece com as componentes A_π e A_σ .

Este trabalho é estruturado da seguinte forma. No Capítulo 2, é feita uma breve revisão do modelo sigma linear, com o intuito de estabelecer a notação e obter as regras de Feynman que serão usadas adiante. No Capítulo 3, são discutidas as características do espalhamento elástico pión-pión na aproximação de árvore e, em seguida, é efetuada a sua unitarização. Nesse processo aparecem loops, que contêm partes infinitas e precisam ser removidas por meio de renormalização. Nas duas últimas seções do capítulo, a discussão é estendida para o caso de várias ressonâncias. No Capítulo 4 estuda-se de que modo os resultados do Capítulo 3 se manifestam em diagramas de Dalitz, o instrumento usado na análise de dados experimentais. Finalmente, conclusões são apresentadas no Capítulo 5.

Capítulo 2

Simetria Quiral

A palavra *quiral* deriva do grego $\chiείρ$ (mão)¹. Logo, simetria quiral diz respeito à simetria das mãos. A mão direita é diferente da esquerda, porém o reflexo em um espelho de uma delas é igual à outra. O reflexo pode ser entendido como uma transformação de paridade. Assim, uma transformação de paridade leva a mão direita na mão esquerda. Até 1956, acreditava-se que as leis da física eram invariantes por paridade, quando experimentos envolvendo neutrinos derrubaram essa hipótese, indicando que existem apenas neutrinos de mão esquerda na natureza [CW57].

A simetria quiral é implementada, no espaço de dois sabores, por um grupo $SU(2)_L \times SU(2)_R$ de transformações contínuas que, por meio do teorema de Noether, dá origem a um conjunto de cargas conservadas.

Neste capítulo é apresentado, inicialmente, o teorema de Noether. Em seguida, são introduzidos o grupo $SU(2)$ e a simetria quiral, através da lagrangiana da QCD. Finalmente, discute-se o modelo sigma linear e as regras de Feynman dele decorrentes.

2.1 Teorema de Noether

Todas as transformações que deixam invariantes a lagrangiana em um problema físico são chamadas de simetrias. Uma simetria contínua está associada a grandezas conservadas. O teorema de Noether estabelece a conexão entre a simetria e essas grandezas. Considere uma lagrangiana $\mathcal{L}$, função de n campos independentes Φ_i e das suas derivadas parciais de primeira ordem:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i). \quad (2.1.1)$$

¹Bailly, A. Dictionnaire Grec-Français, Hachette Paris (1950)

Dessa lagrangiana, são obtidas n equações de movimento de Euler-Lagrange através da minimização da ação:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1.2)$$

Um grupo com a geradores produz transformações infinitesimais dos campos como segue:

$$\Phi_i(x) \mapsto \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) + \delta \Phi_i(x) = \Phi_i(x) - i\epsilon_a(x) F_i^a[\Phi_j(x)], \quad (2.1.3)$$

em que F_i^a é uma função dos campos Φ_i e ϵ_a representa a contribuição de cada gerador. Desprezando termos a partir da segunda ordem em ϵ , tem-se

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \mathcal{L}(\Phi'_i, \partial_\mu \Phi'_i) - \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} \delta \Phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \partial_\mu \delta \Phi_i \\ &= \epsilon_a \left(-i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} F_i^a - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \partial_\mu F_i^a \right) + \partial_\mu \epsilon_a \left(-i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} F_i^a \right). \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

Para cada gerador da transformação, define-se o quadri-vetor corrente como

$$J^{\mu,a} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} F_i^a. \quad (2.1.5)$$

A sua quadri-divergência é dada por

$$\partial_\mu J^{\mu,a} = -i \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \right) F_i^a - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \partial_\mu F_i^a. \quad (2.1.6)$$

Usando a equação de movimento (2.1.2), obtém-se

$$\partial_\mu J^{\mu,a} = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} F_i^a - i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_i)} \partial_\mu F_i^a. \quad (2.1.7)$$

Substituindo a corrente e sua divergência, conforme dadas pelas equações (2.1.6) e (2.1.7), em (2.1.4), chega-se a

$$\delta \mathcal{L} = \epsilon_a \partial_\mu J^{\mu,a} + \partial_\mu \epsilon_a J^{\mu,a}. \quad (2.1.8)$$

Considerando $\mathcal{L}$ como função de ϵ_a e $\partial_\mu \epsilon_a$, pode-se escrever

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_a} \epsilon_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \epsilon_a} \partial_\mu \epsilon_a. \quad (2.1.9)$$

Comparando essa última expressão com a equação (2.1.8), são obtidas a corrente e sua divergência, dadas por

$$J^{\mu,a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \epsilon_a}, \quad (2.1.10)$$

$$\partial_\mu J^{\mu,a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \epsilon_a}. \quad (2.1.11)$$

Quando $\mathcal{L}$ é independente de ϵ_a , a corrente é conservada, pois $\partial_\mu J^{\mu,a} = 0$. A carga é definida como

$$Q^a(t) = \int d^3x J^{a,0}(\vec{x}, t). \quad (2.1.12)$$

A variação temporal dessa carga é dada por

$$\frac{dQ^a(t)}{dt} = \int d^3x \partial_0 J^{a,0}(\vec{x}, t). \quad (2.1.13)$$

Pelo Teorema de Gauss,

$$\int d^3x \partial_i J^{a,i}(\vec{x}, t) = \oint dS J^{a,i} n_i, \quad (2.1.14)$$

em que S é uma superfície fechada que engloba todo o universo e n_i é a componente i da sua normal. Supondo que $J^{a,i}$ se anule sobre essa superfície, tem-se

$$\frac{dQ^a(t)}{dt} = \int d^3x \partial_\mu J^{a,\mu}. \quad (2.1.15)$$

Desse modo, quando a corrente é conservada (equações (2.1.15) e (2.1.12)), a carga não depende do tempo.

Como um caso especial da equação (2.1.3) considere transformações infinitesimais lineares dos campos, dadas por

$$\Phi_i(x) \mapsto \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) - i\epsilon_a(x) t_{ij}^a \Phi_j(x), \quad (2.1.16)$$

em que t_{ij}^a são representações matriciais dos geradores das transformações. A partir da equação (2.1.5), obtém-se

$$J^{\mu,a}(x) = -i t_{ij}^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} \Phi_j, \quad (2.1.17)$$

$$Q^a(t) = -i \int d^3x \Pi_i(x) t_{ij}^a \Phi_j(x), \quad (2.1.18)$$

em que, agora, $J^{\mu,a}(x)$ e $Q^a(t)$ são operadores.

Os campos Φ_i e seus momentos conjugados $\Pi_i = \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_0 \Phi_i)$ são operadores em um espaço de Hilbert e obedecem às seguintes regras de comutação:

$$\begin{aligned} [\Phi_i(\vec{x}, t), \Pi_j(\vec{y}, t)] &= i\delta^3(\vec{x} - \vec{y})\delta_{ij}, \\ [\Phi_i(\vec{x}, t), \Phi_j(\vec{y}, t)] &= 0, \\ [\Pi_i(\vec{x}, t), \Pi_j(\vec{y}, t)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Calculando as relações de comutação das cargas $Q^a(t)$ com os campos, a partir das equações (2.1.19), tem-se

$$\begin{aligned} [Q^a(t), \Phi_k(\vec{y}, t)] &= -i t_{ij}^a \int d^3x [\Pi_i(\vec{x}, t) \Phi_j(\vec{x}, t), \Phi_k(\vec{y}, t)] \\ &= -t_{kj}^a \Phi_j(\vec{y}, t). \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

Partindo desses resultados, é possível obter as seguintes relações de comutação entre as cargas:

$$[Q^a(t), Q^b(t)] = -i(t_{ij}^a t_{jk}^b - t_{ij}^b t_{jk}^a) \int d^3x \Pi_i(\vec{x}, t) \Phi_k(\vec{x}, t). \quad (2.1.21)$$

No caso em que

$$t_{ij}^a t_{jk}^b - t_{ij}^b t_{jk}^a = iC_{abc} t_{ik}^c, \quad (2.1.22)$$

o operador carga $Q^a(t)$ forma uma álgebra de Lie, pois

$$[Q^a(t), Q^b(t)] = iC_{abc} Q^c(t). \quad (2.1.23)$$

Os números C_{abc} são as *constantes de estrutura* do grupo.

2.2 Grupo SU(2)

Um grupo pode ser definido pela álgebra de seus geradores. Os geradores do grupo $SU(2)$ obedecem às relações de comutação

$$[t^i, t^j] = i\epsilon_{ijk} t^k, \quad (2.2.24)$$

em que ϵ_{ijk} é o tensor antissimétrico de Levi-Civita.

As representações matriciais de menor dimensão, representação fundamental, são matrizes 2×2 , dadas por

$$\vec{t} = 1/2(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3), \quad (2.2.25)$$

em que os σ^i correspondem às matrizes de Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.26)$$

as quais obedecem às seguintes relações de comutação:

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon_{ijk} \sigma^k. \quad (2.2.27)$$

As transformações de $SU(2)$ são da forma

$$U = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{t}}, \quad (2.2.28)$$

em que as componentes de $\vec{\alpha}$ são ângulos de rotação. Um campo se transforma como

$$\phi' = U\phi U^\dagger. \quad (2.2.29)$$

Um caso interessante descrito pelo grupo $SU(2)$ é o da simetria de isospin, que unifica o próton e o nêutron em um multipletto denominado *nucleon*. Há as seguintes associações:

$$\text{próton} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \Leftrightarrow |p\rangle, \quad (2.2.30)$$

$$\text{nêutron} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \Leftrightarrow |n\rangle. \quad (2.2.31)$$

Os autovalores da terceira componente do isospin são

$$t^3|p\rangle = +\frac{1}{2}|p\rangle, \quad (2.2.32)$$

$$t^3|n\rangle = -\frac{1}{2}|n\rangle. \quad (2.2.33)$$

Uma representação da álgebra de $SU(2)$ também é dada por matrizes 3×3 , representação adjunta, que podem ser aplicadas no caso dos píons. Estes devem ser representados por três vetores linearmente independentes. Pode-se tomar, por exemplo, matrizes

$$t^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^2 = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.34)$$

Essas matrizes satisfazem a equação (2.2.24), que define uma álgebra $SU(2)$. Os píons são representados, nessa base, por

$$\pi^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.35)$$

Uma alternativa consiste em considerar as combinações lineares, e reescrever as matrizes da equação (2.2.34) na base desses novos campos. Fazendo isso, chega-se ao resultado:

$$\pi^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.2.36)$$

a partir do qual, pode-se construir os campos das partículas carregadas, dados por:

$$\pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \pi^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.37)$$

e às matrizes

$$T^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.38)$$

que também obedecem à álgebra $SU(2)$.

2.3 Simetria Quiral na QCD

A lagrangiana da QCD [MP78], que descreve a interação dos quarks e gluons [GW73, Wei73, HFL73], é escrita como

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} + \sum_{f=\substack{u,d,s, \\ c,b,t}} \bar{q}_f^a (i\not{D} - m_f) q_f^a, \quad (2.3.39)$$

em que, o índice a repetido indica uma soma implícita de 1 a 8, e tem-se

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu^a - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^a + g f_{abc} \mathcal{A}_\mu^b \mathcal{A}_\nu^c, \quad (2.3.40)$$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{A}_\mu^a, \quad (2.3.41)$$

sendo $\mathcal{A}_\mu^a$ o campo do glúon, q_f^a o campo do quark e λ_a são os geradores do grupo $SU(3)$. Nessas expressões, os índices a e f referem-se, respectivamente, à cor e ao sabor. Os parâmetros m_f representam as massas de correntes dos quarks, cujos valores aceitos atualmente oscilam em torno dos apresentados na tabela 2.1.

sabor	u	d	s
carga(e)	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
massa(MeV)	$5,1 \pm 0,9$ [Leu96]	$9,3 \pm 1,4$ [Leu96]	175 ± 25 [BPdR95]
sabor	c	b	t
carga(e)	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
massa(GeV)	$1,15 - 1,35$ [G ⁺ 00]	$4,0 - 4,4$ [G ⁺ 00]	$174,3 \pm 3,2 \pm 4,0$ [G ⁺ 00]

Tabela 2.1: Massas dos quarks

Como é possível notar, as massas dos quarks u e d são muito pequenas na escala de energia hadrônica, permitindo que sejam incluídas perturbativamente nos cálculos. Essa é a idéia que está por trás da simetria quiral.

2.3.1 Campos com helicidade direita (right-handed) e esquerda (left-handed)

Podem-se introduzir os operadores projetores

$$P_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) = P_R^\dagger, \quad P_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) = P_L^\dagger, \quad (2.3.42)$$

em que os índices R e L referem-se a “right-handed” e “left-handed”, respectivamente. As matrizes 4×4 P_R e P_L satisfazem a relação de completeza

$$P_R + P_L = 1, \quad (2.3.43)$$

são projetores:

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad (2.3.44)$$

e ortogonais:

$$P_R P_L = P_L P_R = 0. \quad (2.3.45)$$

As propriedades das equações (2.3.43) e (2.3.45) garantem que P_R e P_L são operadores de projeção independentes quando agem sobre o campo q .

As componentes quirais q_R e q_L são dadas por

$$q_R = P_R q, \quad q_L = P_L q. \quad (2.3.46)$$

Da equação (2.3.46), tem-se

$$\bar{q}_R = q_R^\dagger \gamma_0 = q^\dagger P_R^\dagger \gamma_0 = \bar{q} P_L, \quad (2.3.47)$$

$$\bar{q}_L = q_L^\dagger \gamma_0 = q^\dagger P_L^\dagger \gamma_0 = \bar{q} P_R. \quad (2.3.48)$$

2.3.2 Lagrangiana da QCD na linguagem RL

Para discutir o papel da simetria quiral na QCD, é conveniente reescrever a lagrangiana (2.3.39) como

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{leve}} + \bar{\mathcal{L}}_{\text{QCD}}, \quad (2.3.49)$$

em que

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{leve}} = \sum_{f=u,d} \bar{q}_f^a (i \not{D} - m_f) q_f^a \quad (2.3.50)$$

e

$$\bar{\mathcal{L}}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu,a} + \sum_{f=s,c,b,t} \bar{q}_f^a (i \not{D} - m_f) q_f^a. \quad (2.3.51)$$

Em baixas energias, os graus de liberdade associados a $\bar{\mathcal{L}}_{\text{QCD}}$ não se manifestam e a física é descrita, com boa aproximação, por $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{leve}}$. Considere, assim, a lagrangiana da QCD (equação (2.3.39)) com somente dois sabores, reescrevendo-a em termos dos campos q_R e q_L . Usando a propriedades descritas na seção anterior, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{leve}} &= \sum_{f=u,d} \bar{q}_f^a (P_R^2 + P_L^2) (i \not{D} - m_f) q_f^a \\ &= \sum_{f=u,d} (\bar{q}_{L,f}^a i \not{D} q_{L,f}^a + \bar{q}_{R,f}^a i \not{D} q_{R,f}^a - \bar{q}_{L,f}^a m_f q_{R,f}^a - \bar{q}_{R,f}^a m_f q_{L,f}^a). \quad (2.3.52)\end{aligned}$$

No limite em que as massas dos quarks são nulas, obtém-se a seguinte lagrangiana livre:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d} (\bar{q}_{R,f}^a i \not{D} q_{R,f}^a + \bar{q}_{L,f}^a i \not{D} q_{L,f}^a). \quad (2.3.53)$$

Considere transformações unitárias nos campos q_R e q_L dadas por

$$\begin{aligned}q'_R &= R q_R, & \bar{q}'_R &= \bar{q}_R R^\dagger, & R^\dagger R &= 1, \\ q'_L &= L q_L, & \bar{q}'_L &= \bar{q}_L L^\dagger, & L^\dagger L &= 1,\end{aligned} \quad (2.3.54)$$

com

$$R = e^{-i \sum_{a=1}^3 \Theta_a^R \tau^a}, \quad L = e^{-i \sum_{a=1}^3 \Theta_a^L \tau^a}. \quad (2.3.55)$$

Conclui-se que a lagrangiana da QCD no limite $m_f \rightarrow 0$ é invariante sob as transformações R e L . Essa simetria é conhecida como *simetria quiral* e, por isso, o limite $m_f \rightarrow 0$ corresponde ao limite quiral. A simetria quiral é quebrada quando se consideram as massas dos quarks como diferentes de zero.

2.4 Modelo sigma linear

2.4.1 Simetria $SU(2) \otimes SU(2)$

O modelo sigma linear foi criado por Schwinger em 1957 e depois reformulado, no contexto da PCAC, por Gell-Mann and Lévy, em 1960 [GML60]. No modelo sigma linear, há uma simetria quiral $SU(2) \otimes SU(2)$, implementada por meio de operadores de isospin T_i e operadores axiais Q_i . Esses operadores respectivamente conservam e mudam a paridade dos estados sobre os quais agem.

Os operadores de isospin, com paridade positiva, satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[T^i, T^j] = i \epsilon_{ijk} T^k. \quad (2.4.56)$$

Os operadores axiais são isovetores e, por isso, obedecem às relações

$$[T^i, Q^j] = i\epsilon_{ijk}Q^k. \quad (2.4.57)$$

O fechamento da álgebra é dado pelas relações de comutação entre dois operadores de paridade negativa:

$$[Q^i, Q^j] = i\epsilon_{ijk}T^k. \quad (2.4.58)$$

Para visualizar melhor a relação de comutação da álgebra $SU(2) \otimes SU(2)$, considere as seguintes combinações linearmente independentes de T^i e Q^j :

$$R^i = \frac{T^i + Q^i}{2}, \quad L^j = \frac{T^j - Q^j}{2}, \quad (2.4.59)$$

o que leva às seguintes relações de comutação:

$$[L^i, L^j] = i\epsilon_{ijk}L^k, \quad (2.4.60)$$

$$[R^i, R^j] = i\epsilon_{ijk}R^k, \quad (2.4.61)$$

$$[L^i, R^j] = 0. \quad (2.4.62)$$

O último resultado mostra o desacoplamento das simetrias R e L , indicando uma simetria $SU(2) \otimes SU(2)$ de forma explícita.

2.4.2 Transformações axial e vetorial

No modelo sigma linear existem dois campos básicos, um tripleto de isospin com paridade negativa e um méson escalar-isoescalar, denominado *sigma*.

As transformações desses campos, de acordo com a simetria $SU(2) \otimes SU(2)$, são implementadas pelos operadores

$$U^v = e^{i\alpha_j T^j}, \quad (2.4.63)$$

$$U^a = e^{i\beta_j Q^j}. \quad (2.4.64)$$

Considerando transformações infinitesimais a partir da equação (2.2.29), tem-se

- Transformações vetoriais:

$$\delta^v \pi^i = -i\alpha_j [T^j, \pi^i] = -i\alpha_j i\epsilon_{jik}\pi_k = -(\vec{\alpha} \times \vec{\pi})_i, \quad (2.4.65)$$

$$\delta^v \sigma = -i\alpha_j [T^j, \sigma] = 0. \quad (2.4.66)$$

- Transformações axiais:

$$\delta^a \pi^i = -i\beta_j [Q^j, \pi^i] = \beta_j \delta_{ij} \sigma, \quad (2.4.67)$$

$$\delta^a \sigma = -i\beta_j [Q^j, \sigma] = -i\beta_j (-i\pi^j) = -\vec{\beta} \cdot \vec{\pi}. \quad (2.4.68)$$

Considerando a expressão $(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)$ obtém-se, tanto para transformações vetoriais como axiais,

$$\delta^v (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = 0, \quad (2.4.69)$$

$$\delta^a (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) = 0. \quad (2.4.70)$$

Assim, a expressão $(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)$ é um invariante quiral e é possível construir a lagrangiana como uma soma de termos do tipo $(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^n$. A parte cinética da lagrangiana, também um invariante quiral, é dada por $\frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi})$. Assim, a lagrangiana mais simples com termos de auto interação é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}) - \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2. \quad (2.4.71)$$

Pelo Teorema de Noether, é possível determinar as correntes vetorial e axial para a lagrangiana. Então,

- para a transformação vetorial:

$$\vec{j}_\mu^v = -\frac{\partial \delta^v \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \vec{\alpha})} = \vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi}, \quad (2.4.72)$$

$$\partial^\mu \vec{j}_\mu^v = -\frac{\partial \delta^v \mathcal{L}}{\partial (\vec{\alpha})} = 0. \quad (2.4.73)$$

- para a transformação axial:

$$\vec{j}_\mu^a = -\frac{\partial \delta^a \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \vec{\beta})} = \vec{\pi} \partial_\mu \sigma - \sigma \partial_\mu \vec{\pi}, \quad (2.4.74)$$

$$\partial^\mu \vec{j}_\mu^a = -\frac{\partial \delta^a \mathcal{L}}{\partial (\vec{\beta})} = 0. \quad (2.4.75)$$

A conservação da corrente axial é incompatível com o decaimento do pión, cujo elemento de matriz é proporcional a $\partial^\mu \vec{j}_\mu^a$. A incorporação, de modo mínimo, da possibilidade desse decaimento é feita através da hipótese de PCAC:

$$\partial^\mu j_\mu^a = F_\pi M_\pi^2 \pi^a. \quad (2.4.76)$$

Para implementar PCAC (conservação parcial da corrente axial), introduz-se um termo linear em σ na lagrangiana. Assim, com o termo $\mathcal{L}_{SB} = c\sigma$, obtém-se

$$\partial^\mu j_\mu^a = c\pi^a. \quad (2.4.77)$$

Tomando $c = F_\pi M_\pi^2$, reproduz-se PCAC. A nova lagrangiana, com esse termo a mais, fica

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}) - \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + c\sigma. \quad (2.4.78)$$

Essa densidade de lagrangiana contém um termo cinético e um outro associado à energia potencial. Como a energia cinética é sempre positiva, o vácuo, ou seja, o estado fundamental desse sistema, é dado por campos σ e $\vec{\pi}$ independentes de $\vec{x}$ e t . O termo de energia potencial, dado por

$$V = \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 - c\sigma, \quad (2.4.79)$$

pode ser minimizado com relação a σ e π , determinando vários cenários para o vácuo. Pela sua importância, serão discutidas, a seguir, as suas características em detalhe.

2.4.3 O vácuo no modelo sigma linear

O vácuo corresponde ao estado com menor energia possível, ou seja, é o estado que minimiza o potencial. Considere, inicialmente, o caso $c = 0$, em que o potencial é dado por

$$V = \frac{m^2}{2}(\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (2.4.80)$$

$$V = \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \pi^2 - \alpha^2)^2 - \frac{\lambda^2 \alpha^4}{4}, \quad (2.4.81)$$

em que $\alpha^2 = -\frac{m^2}{\lambda^2}$. Esse potencial é mínimo quando

$$\frac{\partial V}{\partial \sigma} = \frac{\partial V}{\partial \pi} = 0. \quad (2.4.82)$$

Colocando essas condições na equação (2.4.81), tem-se por resultado

$$v(v^2 - \alpha^2) = 0, \quad (2.4.83)$$

Figura 2.1: Potencial V nos planos $\sigma \times V$ e $\pi \times V$, com $\lambda^2 = 1$ e $\alpha^2 = -1$

Figura 2.2: Potencial V com $\lambda^2 = 1$ e $\alpha^2 = -1$

em que $v = \langle \sigma \rangle = \langle \pi \rangle$. No caso $\alpha^2 < 0$, só há uma solução, dada por $\langle \sigma \rangle = \langle \pi \rangle = 0$, e o potencial possui apenas um mínimo, como ilustram os gráficos da figura 2.1.

No caso $\alpha^2 > 0$, como se vê na figura 2.3, não há mais um único mínimo em zero. O vácuo passa a ser degenerado, existindo várias possibilidades de estabilidade. Quando o parâmetro c da lagrangiana é não nulo, há uma quebra explícita de simetria e o potencial fica:

$$V = \frac{\lambda^2}{4}(\sigma^2 + \pi^2 - \alpha^2)^2 - \frac{\lambda^2 \alpha^4}{4} - c\sigma. \quad (2.4.84)$$

A partir da equação (2.4.82), tem-se:

$$\lambda^2 v(v^2 - \alpha^2) - c = 0 \Rightarrow v^3 - \frac{\alpha^2}{\lambda^2}v - \frac{c}{\lambda^2} = 0. \quad (2.4.85)$$

Resolvendo essa equação cúbica,

$$Q = -\frac{\alpha^2}{3}, \quad R = -\frac{c}{2\lambda^2}, \quad D = Q^3 + R^2. \quad (2.4.86)$$

No caso $D > 0$, existe apenas uma raiz real:

$$v_1 = \sqrt[3]{R + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{R - \sqrt{D}}. \quad (2.4.87)$$

No caso $D \leq 0$, existem três raízes, dadas por

$$v_1 = \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3}\right), \quad (2.4.88)$$

$$v_{2\pm} = \frac{2\alpha}{\sqrt[3]{3}} \cos\left(\frac{\theta}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\right), \quad (2.4.89)$$

Figura 2.3: Potencial V nos planos $\sigma \times V$ e $\pi \times V$, com $\frac{\lambda^2}{4} = 1$ e $\alpha^2 = +1$

Figura 2.4: Potencial V com $\lambda^2 = 1$ e $\alpha^2 = +1$

com $\cos(\theta) = \frac{R}{\sqrt{-Q^3}}$.

A evolução das raízes da equação (2.4.85) com α^2 é mostrada na figura 2.5, aonde podem ser vistos os pontos de inflexão. Para $D > 0$ há um único ponto, com $D = 0$ há dois pontos e para $D < 0$ há três pontos. As curvas dos pontos de inflexão com o termo da quebra de simetria tendem a curvas sem quebra de simetria no limite em que $|\alpha^2| \gg c$.

Na figura 2.6, são mostrados gráficos do potencial em função dos campos π e σ . Como é possível notar, o mínimo agora é único e não mais degenerado.

2.4.4 Observáveis

No modelo sigma linear, o campo σ tem um valor esperado no vácuo de $\langle \sigma \rangle = v$, no qual o valor de v depende dos parâmetros da lagrangiana original e pode ou não ser nulo. As flutuações quânticas no setor escalar-isoescalar correspondem a desvios do vácuo e são descritas pela campo f , dado por

$$f = \sigma - v, \quad \sigma = f + v. \quad (2.4.90)$$

Assim, em função de f , a lagrangiana do modelo passa a ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu f \partial_\mu f + \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi}) - \frac{m^2}{2}(f^2 + 2vf + v^2 + \vec{\pi}^2) \\ & - \frac{\lambda^2}{4}(f^2 + 2vf + v^2 + \vec{\pi}^2)^2 + c(f + v) \end{aligned} \quad (2.4.91)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu f \partial_\mu f - (m^2 + 3\lambda^2 v^2)f^2) + \frac{1}{2}(\partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi} - (m^2 + \lambda^2 v^2)\vec{\pi}^2) \\ & - \frac{\lambda^2}{4}(4vf(f^2 + \vec{\pi}^2) + (f^2 + \vec{\pi}^2)^2) + (-m^2 v - \lambda^2 v^3 + c)f + \text{const.}\end{aligned}\quad (2.4.92)$$

Despreza-se o termo constante *const*, que apenas redefine a energia do vácuo. O penúltimo termo se anula, de acordo com a equação (2.4.85), e a lagrangiana do modelo para flutuações passa a ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu f \partial_\mu f - M_\sigma^2 f^2) + \frac{1}{2}(\partial^\mu \vec{\pi} \cdot \partial_\mu \vec{\pi} - M_\pi^2 \vec{\pi}^2) \\ & - \frac{\lambda^2}{4}(4vf(f^2 + \vec{\pi}^2) + (f^2 + \vec{\pi}^2)^2).\end{aligned}\quad (2.4.93)$$

A partir desse resultado, as massas dos píons e do sigma são dadas por

$$\begin{aligned}M_\pi^2 &= m^2 + \lambda^2 v^2, \\ M_\sigma^2 &= m^2 + 3\lambda^2 v^2.\end{aligned}\quad (2.4.94)$$

Assim, essas massas deixam de ser degeneradas, pois $M_\sigma^2 - M_\pi^2 = 2\lambda^2 v^2$ para o caso em que $v \neq 0$. Entretanto, esta degenerescência é recuperada se $v = 0$.

Para reproduzir PCAC, tem-se

$$c = F_\pi(m^2 + \lambda^2 v^2).\quad (2.4.95)$$

Das equações (2.4.95) e (2.4.94), conclui-se que

$$v = F_\pi.\quad (2.4.96)$$

Quando $v = 0$, a simetria é do tipo Wigner-Weyl, e quando $v \neq 0$ mas $c = 0$, trata-se do modo de Nambu-Goldstone.

As relações das equações (2.4.95) e (2.4.94) permitem obter os parâmetros do modelo em termos das grandezas físicas F_π, M_π^2 e M_σ^2 :

$$\begin{aligned}\lambda^2 v^2 &= \frac{M_\sigma^2 - M_\pi^2}{2F_\pi^2}, \\ m^2 &= \frac{M_\pi^2 - M_\sigma^2}{2}.\end{aligned}\quad (2.4.97)$$

2.5 Modelo sigma não linear

Durante 40 anos não se encontrou nenhuma evidência do méson sigma. Se realmente não for confirmada a existência de uma partícula escalar com as propriedades descritas

pelo modelo sigma linear, existem outras formas de satisfazer a simetria quiral. Uma outra forma de satisfazer a simetria quiral, sem a necessidade de uma nova partícula escalar, é pelo modelo sigma não linear. Nesse modelo tem-se a perturbação quiral, que soma correções da ordem de $q^2 \sim M_\pi^2 \sim p^2$. Assim, esse modelo, em primeira ordem, corresponde ao limite de baixas energias da seção 3.1.

A construção de uma lagrangiana não linear tem como base uma matriz U que se transforma conforme a equação abaixo [Sch02]:

$$U' = RUL^\dagger. \quad (2.5.98)$$

Assim,

$$UU^\dagger \rightarrow RUL^\dagger LUR^\dagger. \quad (2.5.99)$$

Da equação (2.3.54), tem-se que

$$Tr(UU^\dagger) \rightarrow Tr(UU^\dagger), \quad (2.5.100)$$

em que $Tr(UU^\dagger)$ corresponde ao traço da matriz $UU^\dagger$. Assim, $Tr(UU^\dagger)$ tem simetria quiral.

Da mesma forma, $Tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger)$ também obedece à simetria quiral. Assim, é possível construir uma lagrangiana:

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_0^2}{4} Tr(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{F_0^2 M_\pi^2}{4} Tr(U^\dagger + U), \quad (2.5.101)$$

em que $Tr(U^\dagger + U)$ é o termo de quebra de simetria.

Uma parametrização possível é

$$U = \frac{\sigma + i\vec{\tau}\vec{\pi}}{F_0}, \quad (2.5.102)$$

em que $\vec{\tau} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e $\sigma = \sqrt{F_0^2 - \vec{\pi}^2}$. Aplicando essa parametrização na equação (2.5.101), obtém-se

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}) + F_0 M_\pi^2 \sigma. \quad (2.5.103)$$

Expandindo σ em torno $\pi = 0$, tem-se a seguinte lagrangiana de interação para quatro píons:

$$\mathcal{L}_2^{4\pi} = \frac{1}{2F_0^2} \partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - \frac{M_\pi^2}{8F_0^2} (\vec{\pi}^2)^2. \quad (2.5.104)$$

2.6 Regras de Feynman

A lagrangiana de um sistema determina toda sua dinâmica. A parte livre ($\mathcal{L}_{livre}$) determina os propagadores das partículas. A parte de interação ($\mathcal{L}_{int}$) determina os acoplamentos entre as partículas. Os propagadores para bósons escalares, como os píons e o sigma, são determinados a partir da equação de Klein-Gordon (2.6.105):

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\Delta(x) = 0, \quad (2.6.105)$$

em que m corresponde à massa do bóson e $\Delta(x)$ é a *função distribuição de Pauli-Jordan*. No espaço dos momentos, nosso propagador é escrito conforme a tabela 2.2:

	$\mathcal{L}_{livre} = \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi} - M_\pi^2 \vec{\pi}^2$	$D_\pi = \frac{i}{P^2 - M_\pi^2}$
	$\mathcal{L}_{livre} = \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - M_\sigma^2 \sigma^2$	$D_\pi = \frac{i}{P^2 - M_\sigma^2}$

Tabela 2.2: Propagadores do modelo sigma linear

Os acoplamentos podem ser determinados facilmente através da equação (2.6.106):

$$V = \frac{\partial^n \mathcal{L}_{int}}{\partial \Phi_1 \partial \Phi_2 \cdots \partial \Phi_n}. \quad (2.6.106)$$

Para a lagrangiana do modelo sigma linear (equação (2.4.93)), tem-se

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda^2}{4} [4v\sigma(\sigma^2 + \delta_{ab}\pi^a\pi^b) + (\sigma^2 + \delta_{ab}\pi^a\pi^b)^2]. \quad (2.6.107)$$

Tomando apenas o termo com dois campos de píons e um campo de sigma, chega-se a

$$\mathcal{L}_{\sigma\pi\pi} = -v\lambda^2\sigma\delta_{ab}\pi^a\pi^b. \quad (2.6.108)$$

Aplicando a equação (2.6.106) na equação (2.6.108), obtém-se

$$v_\sigma = -i \frac{\partial \partial \partial v \lambda^2 \sigma \delta_{ab} \pi^a \pi^b}{\partial \sigma \partial \pi^i \partial \pi^j} \quad (2.6.109)$$

$$= -iv\lambda^2\delta_{ab}(\delta_{ai}\delta_{bj} + \delta_{aj}\delta_{bi}) = -i2v\lambda^2\delta_{ij} = -i \frac{M_\sigma^2 - M_\pi^2}{F_\pi}. \quad (2.6.110)$$

Da mesma forma, são obtidos os vértices da tabela 2.3.

Aplicando na lagrangiana de interação do modelo sigma não linear $\mathcal{L}_{4\pi}$ (equação (2.5.104)) a regra da equação (2.6.106), em que as derivadas ∂_μ geram $-ip_\mu$ e ip_μ para as partículas inicial e final, respectivamente, obtém-se

$$T_2^{4\pi} = \frac{\partial^4}{\partial \pi^a \partial \pi^b \partial \pi^c \partial \pi^d} \left[\delta_{ij} \delta_{kl} \left(\frac{1}{2F_0^2} \partial_\mu \pi^i \pi^j \partial^\mu \pi^k \pi^l - \frac{M_\pi^2}{8F_0^2} (\pi^i \pi^j \pi^k \pi^l) \right) \right] \quad (2.6.111)$$

$$T_2^{4\pi} = \left[\delta_{ab} \delta_{cd} \left(\frac{s - M_\pi^2}{F_0^2} \right) + \delta_{ac} \delta_{bd} \left(\frac{t - M_\pi^2}{F_0^2} \right) + \delta_{ad} \delta_{bc} \left(\frac{u - M_\pi^2}{F_0^2} \right) \right]. \quad (2.6.112)$$

em que F_0 , na primeira ordem da perturbação quiral, corresponde a F_π . Esse resultado corresponde ao teorema de baixa energia da seção 3.1.

_____	c/ quebra de simetria
_____	c/ quebra de simetria
_____	c/ quebra de simetria
_____	sem quebra de simetria
_____	sem quebra de simetria

Figura 2.5: Ponto de inflexão de v em função de α^2

Figura 2.6: Potencial com o termo linear em sigma nos planos $\sigma \times V$ e $\pi \times V$, com $\alpha^2 = +1$, $c = 0,1$ e $\lambda^2 = 1$

Figura 2.7: Potencial com o termo linear em sigma, com $\alpha^2 = +1$, $c = 0,1$ e $\lambda^2 = 1$

$\mathcal{L}_{int} = -v\lambda^2\sigma\delta_{ij}\pi^i\pi^j$	$v_\sigma = -i2v\lambda^2\delta_{ab}$
$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda^2}{4}\delta_{ij}\delta_{kl}\pi^i\pi^j\pi^k\pi^l$	$v_\pi = -i2\lambda^2(\delta_{ab}\delta_{cd} + \delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc})$
$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\delta_{ij}\pi^i\pi^j$	$v_{\sigma 2} = -i\lambda^2\delta_{ab}$
$\mathcal{L}_{int} = -v\lambda^2\sigma^3$	$v_{\sigma 3} = -iv\lambda^2$
$\mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda^2}{4}\sigma^4$	$v_{\sigma 4} = -i\frac{\lambda^2}{4}$

Tabela 2.3: Vértices do modelo sigma linear

Capítulo 3

Espalhamento $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$

No decaimento $D^+ \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^+$, existem vários processos intermediários que devem ser considerados. O mais simples seria considerar que D^+ decai por uma interação fraca em uma ressonância escalar ξ ($\sigma, f_0(980)$ ou $f_0(1370)$), $D^+ \rightarrow \xi\pi^+$, e que a ressonância ξ decai, por interação forte, em dois píons, $\xi \rightarrow \pi^-\pi^+$. Como a segunda parte desse processo é devida a uma interação forte, ela é praticamente instantânea. O processo ocorre como se fosse em um único ponto: por isso, o nome de ressonância, em vez de partícula, para o escalar ξ .

Para calcular a amplitude deste processo tem-se os dois gráficos de Feynman possíveis, mostrados na figura 3.1

Figura 3.1: Gráficos de Feynman para os processos $D^+ \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$

Esses processos envolvem o vértice fraco $v_{D\xi\pi}$, o vértice forte $v_{\xi\pi\pi}$ e, também, o propa-

gador da ressonância escalar ξ . A partir desses objetos, constrói-se a amplitude

$$T = T_s(s_{12}) + T_s(s_{13}), \quad (3.0.1)$$

em que $s_{12} = (p_1 + p_2)^2$ e $s_{13} = (p_1 + p_3)^2$.

Na aproximação de árvore, a função $T_s(s)$ é dada por

$$T_s(s) = v_{\xi\pi\pi} \frac{1}{s - M_\xi^2} v_{D\xi\pi}, \quad (3.0.2)$$

e $T_s(s)$ tem uma divergência quando $s = M_\xi^2$, o que dá um valor tendendo a infinito para a amplitude do processo. Isso viola a unitariedade da amplitude, pois a soma das probabilidades de todos os processos possíveis deve ser igual a 1. Assim, a amplitude deve ser unitarizada.

Existem várias formas de unitarizar uma amplitude. Neste trabalho, será vista apenas uma delas: unitarização dinâmica aplicada ao caso de dois corpos.

3.1 Teorema de baixa energia

A amplitude para o espalhamento elástico $\pi^a(p_a)\pi^b(p_b) \rightarrow \pi^c(p_c)\pi^d(p_d)$ é representada por $T_{\pi\pi}$. De modo muito geral, a estrutura de isospin dessa amplitude é dada por

$$T_{\pi\pi} = \delta_{ab}\delta_{cd}A(s) + \delta_{ac}\delta_{bd}A(t) + \delta_{ad}\delta_{bc}A(u), \quad (3.1.3)$$

em que $A(x)$, ($x = s, t, u$), é uma função escalar das variáveis de Mandelstam.

Quando os momentos dos píons são pequenos (da ordem de $M_\pi \sim q$), a amplitude $T_{\pi\pi}$ deve satisfazer ao teorema de baixa energia que, na ordem dominante, assume a forma

$$A_{BE}(x) = \frac{x - M_\pi^2}{F_\pi^2} + O(q^4). \quad (3.1.4)$$

Por esse motivo, qualquer modelo (inclusive os que incluam ressonâncias, como o que é considerado aqui) deve produzir amplitudes que tendam a $A_{BE}(x)$ quando $x \sim M_\pi^2$. O modelo sigma não linear obedece a esse teorema, como se pode observar na equação (2.6.112).

3.2 Modelo sigma linear em árvore

No caso do modelo sigma linear, para calcular as funções $A(x)$ são considerados os vértices descritos na tabela 2.3. Considere o espalhamento pión-pión no canal s onde há,

em árvore, os gráficos de Feynman das figuras 3.2 e 3.3. Da tabela 2.3, têm-se os vértices

$$v_\sigma = \frac{-i(M_\sigma^2 - M_\pi^2)}{F_\pi}, \quad (3.2.5)$$

$$v_\pi = \frac{-i(M_\sigma^2 - M_\pi^2)}{F_\pi^2}. \quad (3.2.6)$$

Figura 3.2: Espalhamento $\pi_a \pi_b \rightarrow \pi_c \pi_d$

Figura 3.3: Espalhamento $\pi_a \pi_b \rightarrow \xi \rightarrow \pi_c \pi_d$

Assim, a amplitude do espalhamento $\pi\pi$ em árvore fica

$$A_\pi = -\frac{M_\sigma^2 - M_\pi^2}{F_\pi^2}, \quad (3.2.7)$$

$$A_\sigma = -\frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)^2}{F_\pi^2 (x - M_\sigma^2)}, \quad (3.2.8)$$

cuja soma é

$$A_a = A_\pi + A_\sigma = -\frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)(x - M_\pi^2)}{F_\pi^2 (x - M_\sigma^2)}, \quad (3.2.9)$$

em que o índice a refere-se a *árvore*. Para este resultado satisfazer a simetria quiral, ele deve obedecer ao teorema de baixa energia (equação 3.1.4).

Expandindo em série de Taylor em torno de $M_\pi^2 = 0$ e $x = 0$, ou fazendo o limite $M_\sigma^2 \gg M_\pi^2$ e $M_\sigma^2 \gg x$, tem-se

$$\lim_{\frac{q^2}{M_\sigma^2} \rightarrow 0} A_a = \frac{x - M_\pi^2}{F_\pi^2}, \quad (3.2.10)$$

Figura 3.4: Amplitudes A_π , A_σ , A_a e A_{BE} . $M_\sigma = 0,5 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$

o que mostra que A_a satisfaz ao teorema de baixa energia. Entretanto, isso não acontece com as componentes A_π e A_σ individualmente, indicando a existência de um cancelamento importante entre elas, como mostra a figura 3.4. A amplitude dada pela equação (3.2.9) diverge no pólo $x = M_\sigma^2$ e deve ser unitarizada. Uma das formas de unitarizar essa amplitude é corrigindo o denominador de A_a . Esse tipo de correção é a forma mais simples de resolver o problema, mas não é a única forma de fazê-lo. Uma forma mais consistente é apresentada neste capítulo.

Na sequência, para simplificar a álgebra, reescreve-se a equação (3.2.9) como

$$A_a = -\frac{\gamma^2}{(x - M_\sigma^2)}, \quad (3.2.11)$$

com

$$\gamma^2 = \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)(x - M_\pi^2)}{F_\pi^2}. \quad (3.2.12)$$

A estrutura da amplitude A_a está representada na figura 3.5.

Figura 3.5: Representação gráfica de A_a

3.3 Unitarização dinâmica para uma ressonância es- calar

A unitarização dinâmica consiste, basicamente, em somar um conjunto de infinitos gráficos de Feynman, que diferem quanto ao número de um mesmo tipo de loop. O ingrediente básico para o cálculo da amplitude unitarizada é a função em árvore, dada pela equação (3.2.9).

3.3.1 Iteração de A_a

Para unitarizar a amplitude para o espalhamento $\pi_a\pi_b \rightarrow \pi_c\pi_d$, consideram-se os vários diagramas com loops internos, como mostra a figura 3.6.

Figura 3.6: Espalhamento $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ com loops internos

Figura 3.7: Espalhamento $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ com um loop

O processo com um loop é mostrado em detalhes na figura 3.7. O cálculo desse diagrama resulta em

$$A_1 = A_a \Sigma A_a, \quad (3.3.13)$$

em que a função Σ envolve uma integral de loop e é dada por

$$\Sigma = -i \frac{3}{2!} \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(Q + P/2)^2 - M_\pi^2} \frac{1}{(Q - P/2)^2 - M_\pi^2}. \quad (3.3.14)$$

Neste resultado, o fator 3 tem origem na soma dos isospins dos píons do loop e o fator 2! é devido à simetria dos estados intermediários. O cálculo da integral de loop é discutido no apêndice A e produz

$$\int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(Q + P/2)^2 - M_\pi^2} \frac{1}{(Q - P/2)^2 - M_\pi^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi(s), \quad (3.3.15)$$

em que

$$\Pi(s) = L(s) + \Lambda_\infty; \quad (3.3.16)$$

Λ_∞ é uma constante real infinita e $L(s)$ é a parte finita da integral, dada por

$$L(s) = \begin{cases} -2 \frac{\sqrt{4M_\pi^2 - s}}{\sqrt{s}} \arctan\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4M_\pi^2 - s}}\right), & 0 \leq s < 4M_\pi^2, \\ + \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}} \ln\left(\frac{1 - \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}}}{1 + \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}}}\right) + i\pi \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}}, & s > 4M_\pi^2. \end{cases} \quad (3.3.17)$$

Assim,

$$\Sigma = \frac{3}{32\pi^2} [L + \Lambda_\infty]. \quad (3.3.18)$$

No desenvolvimento dos cálculos, é conveniente escrever

$$\Sigma = R + R_\infty + iI, \quad (3.3.19)$$

em que $R_\infty = \frac{3}{32\pi^2} \Lambda_\infty$ e

$$R(s) = \frac{3}{32\pi^2} \begin{cases} -2 \frac{\sqrt{4M_\pi^2 - s}}{\sqrt{s}} \arctan\left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4M_\pi^2 - s}}\right), & 0 \leq s < 4M_\pi^2, \\ + \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}} \ln\left(\frac{1 - \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}}}{1 + \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}}}\right), & s > 4M_\pi^2, \end{cases}$$

$$I(s) = \frac{3}{32\pi^2} \begin{cases} 0, & 0 \leq s < 4M_\pi^2, \\ + \pi \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}}, & s > 4M_\pi^2. \end{cases}$$

Definindo $B = \Sigma A_a$, tem-se

$$A_1 = A_a B. \quad (3.3.20)$$

O caso de dois loops fornece

$$\begin{aligned} A_2 &= A_a \Sigma A_a \Sigma A_a, \\ A_2 &= A_a B^2. \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

Generalizando para n loops, obtém-se

$$A_n = A_a B^n. \quad (3.3.22)$$

Assim, para o cálculo da amplitude unitarizada (A_u), basta somar todas as amplitudes A_n :

$$A_u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} (A_a(B)^n) = A_a \sum_{n=0}^{\infty} B^n. \quad (3.3.23)$$

É bem conhecido que

$$\sum_{n=0}^{\infty} B^n = \frac{1}{1-B}. \quad (3.3.24)$$

Portanto,

$$A_u = A_a \left(\frac{1}{1-B} \right) = \frac{-\gamma^2}{x - M_\sigma^2 - B(s - M_\sigma^2)}, \quad (3.3.25)$$

$$A_u = -\frac{\gamma^2}{s - M_\sigma^2 + \gamma^2 \Sigma}. \quad (3.3.26)$$

Da mesma forma, pode-se calcular os diagramas da figura 3.8, que representam a probabilidade de que um σ , produzido em um decaimento fraco, se propague e venha a decair em dois píons, como discutido por Dib e Rosenfeld[DR00]

Figura 3.8: Decaimento $\sigma \rightarrow \pi^a \pi^b$

Assim, tem-se uma sub-amplitude em árvore, dada por

$$C_\sigma = \frac{v_\sigma}{s - M_\sigma^2}, \quad (3.3.27)$$

sendo que a sua versão unitarizada adquire a forma

$$C_{\sigma u} = \frac{v_\sigma}{s - M_\sigma^2} \left(\frac{1}{1-B} \right) = \frac{v_\sigma}{s - M_\sigma^2 + \gamma^2 \Sigma}. \quad (3.3.28)$$

Pode-se também unitarizar o propagador da ressonância sigma,

$$D_\sigma = \frac{i}{s - M_\sigma^2}, \quad (3.3.29)$$

que passa a ser dado por

$$\begin{aligned} D_{\sigma u} &= \frac{i}{s - M_\sigma^2} + \frac{iv_\sigma}{s - M_\sigma^2} \Sigma \frac{v_\sigma}{s - M_\sigma^2} + \frac{iv_\sigma}{s - M_\sigma^2} \Sigma \frac{-\gamma^2}{s - M_\sigma^2 + \gamma^2 \Sigma} \Sigma \frac{v_\sigma}{s - M_\sigma^2} \\ &= \frac{i}{s - M_\sigma^2} \left\{ 1 + \frac{v_\sigma^2 \Sigma}{s - M_\sigma^2 + \gamma^2 \Sigma} \right\} \\ &= \frac{i}{s - M_\sigma^2} \left\{ \frac{s - M_\sigma^2 + \gamma^2 \Sigma + v_\sigma^2 \Sigma}{s - M_\sigma^2 + \gamma^2 \Sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Como

$$\gamma^2 + v_\sigma^2 = \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)(s - M_\pi^2)}{F_\pi^2} - \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)^2}{F_\pi^2} = \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)}{F_\pi^2} (s - M_\sigma^2), \quad (3.3.31)$$

tem-se

$$D_{\sigma u} = \frac{i \left(1 + \Sigma \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)}{F_\pi^2} \right)}{s - M_\sigma^2 + \gamma^2 \Sigma}. \quad (3.3.32)$$

Comparando esse resultado com a amplitude em árvore (equação (3.3.29)) nota-se que a unitarização produz uma correção no denominador. O deslocamento do pólo para uma massa com componente imaginária é o que remove a divergência do denominador. De fato, como mostra a equação (3.3.19), a função Σ tem partes real e imaginária. Entretanto, a função Σ (equação (3.3.19)) contém um termo infinito, que precisa ser removido por meio de renormalização, como é discutido a seguir. Por esse motivo, a amplitude A_u , determinada em (3.3.26), deve ser vista, por enquanto, como um resultado puramente formal.

3.3.2 Renormalização

A função $\Sigma(s)$ (equação (3.3.19)) tem um termo divergente, que pode ser removido redefinindo a lagrangiana do modelo sigma linear. À remoção desta divergência chamamos de renormalização.

A lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}] - \frac{m_0^2}{2} [\sigma^2 + \vec{\pi}^2] - \frac{\lambda_0^2}{4} [\sigma^2 + \vec{\pi}^2]^2 + c\sigma. \quad (3.3.33)$$

Alterando apenas os parâmetros $\lambda_0^2 = \delta_\lambda + \lambda^2$ e $m_0^2 = \delta_m + m^2$, tem-se

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \partial_\mu \vec{\pi} \partial^\mu \vec{\pi}] - \frac{m^2}{2} [\sigma^2 + \vec{\pi}^2] - \frac{\lambda^2}{4} [\sigma^2 + \vec{\pi}^2]^2 - \frac{\delta_m^2}{2} [\sigma^2 + \vec{\pi}^2] - \frac{\delta_\lambda^2}{4} [\sigma^2 + \vec{\pi}^2]^2 + c\sigma. \quad (3.3.34)$$

Neste trabalho esse procedimento será efetuado de modo aproximado. Na seção anterior, foram consideradas interações nas quais loops piônicos modificam propriedades do méson sigma. Entretanto, por uma questão de simplicidade, deixou-se de considerar outros processos envolvendo o méson sigma da tabela 2.3, pois esses processos se tornam mais importantes a energias mais altas. Por isso, desconsiderar-se-ão também aqui esses vértices. Substituindo $\sigma = v + f$, tem-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2} [\partial_\mu f \partial^\mu f - (m^2 + 3\lambda^2 v^2) f^2] + \frac{1}{2} [\partial_\mu \pi \partial^\mu \pi - (m^2 + \lambda^2 v^2) \pi^2] \quad (3.3.35) \\ & - \lambda^2 v f \pi^2 - \lambda^2 \pi^4 + \dots \\ & - \frac{1}{2} [(\delta_m + 3v^2 \delta_\lambda) f^2 + (\delta_m + v^2 \delta_\lambda) \pi^2] + \\ & - \delta_\lambda v f \pi^2 - \frac{\delta_\lambda}{4} \pi^4 + \dots.\end{aligned}$$

Supondo que a massa do pión não seja renormalizada, obtém-se

$$\delta_m + v^2 \delta_\lambda = 0 \Rightarrow \delta_m = -v^2 \delta_\lambda. \quad (3.3.36)$$

Assim, os contratermos da lagrangiana são

$$\mathcal{L}_{CT} = -\frac{1}{2}(2v^2 \delta_\lambda) f^2 - \delta_\lambda v f \pi^2 - \frac{\delta_\lambda}{4} \pi^4 + \dots, \quad (3.3.37)$$

que correspondem aos vértices mostrados na figura 3.9.

A constante δ_λ pode assumir, em princípio, qualquer valor. Logo é possível, sem perda de generalidade, fazê-la absorver o termo divergente Λ_∞ da função Σ , dada pela equação (3.3.19). Para tanto, nota-se que as contribuições dos contratermos à amplitude $\pi\pi$ são dadas pelos diagramas da figura 3.10. A somatória $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ pode ser vista como uma série perturbativa em (M_σ^2) , em que o termo A_n é da ordem M_σ^{2n} . Considerando δ_λ da ordem M_σ^4 , têm-se contratermos da ordem de M_σ^4 .

O cálculo desses diagramas fornece

$$\begin{aligned}A_c &= -2\delta_\lambda - 2\delta_\lambda \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)^2}{(s - M_\sigma^2)^2} - 4\delta_\lambda \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)}{(s - M_\sigma^2)} \quad (3.3.38) \\ &= -2\delta_\lambda \frac{F_\pi^4 \gamma^4}{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)^2} \frac{1}{(s - M_\sigma^2)^2}.\end{aligned}$$

Somando esse resultado à amplitude A_1 (equação(3.3.39)) tem-se

$$\bar{A}_1 = \frac{\gamma^4}{(s - M_\sigma^2)^2} \left\{ [R + iI + R_\infty] - 2\delta_\lambda \frac{F_\pi^4}{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)^2} \right\}. \quad (3.3.39)$$

Após o cancelamento do termo infinito, escreve-se

$$\bar{A}_1 = A_a \bar{\Sigma} A_a, \quad (3.3.40)$$

Figura 3.9: Contratermos

Figura 3.10: Soma dos contratermos

em que a função $\bar{\Sigma}$ depende de uma constante ainda indeterminada c e tem a forma

$$\bar{\Sigma} = [R(s) + iI(s) + c], \quad (3.3.41)$$

na qual

$$c = \frac{2\bar{\delta}_\lambda F_\pi^2}{v_\sigma^2}. \quad (3.3.42)$$

Analogamente à seção anterior, define-se $\bar{B} = \bar{\Sigma}A_a$ e obtém-se a amplitude unitarizada

$$\bar{A}_u = \frac{-\gamma^2}{s - M_\sigma^2 + \gamma^2[R + c + iI]}. \quad (3.3.43)$$

A constante c pode ser determinada fixando-se a posição do pólo. Porém, ela não é suficiente para fixar também a norma. Diferentemente de uma partícula, uma ressonância não tem estado assintótico. Logo, há uma arbitrariedade sobre a norma de seu propagador unitarizado. Para determinar a constante c , é preciso trabalhar com o propagador unitarizado da ressonância.

Na série perturbativa de propagador tem-se D_1 da ordem de M_σ^0 . O contratermo com a mesma ordem perturbativa é

$$D_c = \frac{i}{s - M_\sigma^2} (-2iF_\pi^2 \delta_\lambda) \frac{i}{s - M_\sigma^2}. \quad (3.3.44)$$

Somando esse contratermo em D_1 , tem-se

$$\begin{aligned} \bar{D}_1 &= \frac{i}{s - M_\sigma^2} (v_\sigma^2 \Sigma + 2F_\pi^2 \delta_\lambda) \frac{1}{s - M_\sigma^2} \\ &= \frac{i}{s - M_\sigma^2} \left[v_\sigma^2 \left(\Sigma + \frac{2\delta_\lambda F_\pi^2}{v_\sigma^2} \right) \right] \frac{1}{s - M_\sigma^2} \\ &= \frac{i}{s - M_\sigma^2} (v_\sigma^2 \bar{\Sigma}) \frac{1}{s - M_\sigma^2}. \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

Pode-se concluir, assim, que para renormalizar também o propagador, basta substituir Σ por $\bar{\Sigma}$. Da equação (3.3.32) chega-se a

$$\bar{D}_{\sigma u} = \frac{i \left(1 + \bar{\Sigma} \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)}{F_\pi^2} \right)}{s - M_\sigma^2 + \gamma^2 \bar{\Sigma}}. \quad (3.3.46)$$

A constante c pode ser determinada pela fixação do pólo em $s = M_\sigma^2$. Essa condição dá origem à seguinte equação:

$$Re(\gamma^2 \bar{\Sigma}(s))_{s=M_\sigma^2} = 0, \quad (3.3.47)$$

que fornece

$$c = -R(M_\sigma^2) \quad (3.3.48)$$

e permite que a amplitude $\pi\pi$ unitarizada seja escrita como

$$\bar{A}_u = \frac{-\gamma^2}{s - M_\sigma^2 + \gamma^2 [R(s) - R(M_\sigma^2) + iI]}. \quad (3.3.49)$$

Esse é um dos principais resultados deste trabalho e sua dependência com s é mostrada na figura 3.11, juntamente com a amplitude em árvore, equação (3.2.9), e o limite de baixas energias, equação (3.1.4). Comparando as três curvas, pode-se notar que elas praticamente coincidem na região $0 \leq s \leq 4M_\pi^2$. Esse resultado era esperado, já que, da equação (3.2.12), fazendo o limite $M_\sigma^2 \gg M_\pi^2$ e $M_\sigma^2 \gg x$, chega-se a

$$\lim_{\frac{x}{M_\sigma^2} \rightarrow 0} \bar{A}_u = \frac{x - M_\pi^2}{F_\pi^2} + O(q^4). \quad (3.3.50)$$

A curva finita da figura 3.11, que representa $\bar{A}_u$, é determinada pelas partes real e imaginária de $\bar{\Sigma}$, usando $F_\pi = 93MeV$, $M_\pi = 138MeV$ e $M_\sigma = 500MeV$. Para estudar a influência no resultado de cada uma dessas funções, na figura 3.12 compara-se a função

Figura 3.11: Amplitudes $|A_u|^2$, $|A_a|^2$ e $|A_{BE}|^2$. $M_\sigma = 0,5 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$

$\bar{A}_u$ com $\bar{A}_I$, obtida fazendo-se $[R(s) - R(M_\sigma^2)] = 0$, ou seja, considerando apenas a parte imaginária da função Σ . Para essa aproximação, não há mais o problema da parte infinita da função Σ e tem-se $c = 0$. A amplitude nessa aproximação A_I difere muito pouco da amplitude $\bar{A}_u$, como pode ser visualizado no gráfico 3.12.

É interessante notar que as duas curvas se tocam no ponto $s = M_\sigma^2$, onde a parte imaginária do denominador está associada à largura convencional, dada por

$$M_\sigma \Gamma_\sigma = \gamma^2(M_\sigma^2) I(M_\sigma^2). \quad (3.3.51)$$

Tem-se, assim,

$$\Gamma_\sigma = \frac{3}{32\pi} \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)^2}{F_\pi^2} \frac{\sqrt{M_\sigma^2 - M_\pi^2}}{M_\sigma^2}, \quad (3.3.52)$$

o que fornece $\Gamma_\sigma = 353 \text{ MeV}$. A figura 3.12 deixa claro que, no caso de ressonâncias largas, a posição do pólo não pode ser inferida a partir do ponto máximo da curva.

No final deste capítulo, o resultado 3.3.49 será generalizado para o caso de mais de uma ressonância. Antes de fazer isso, entretanto, é conveniente discutir o papel da simetria

Figura 3.12: Amplitudes $|A_u|^2$ e $|A_I|^2$; $M_\sigma = 0,5 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$

quiral nesse problema.

3.4 Simetria quiral

A construção da amplitude unitarizada feita na seção anterior teve como base a função A_a , dada pela equação (3.2.9), que satisfaz o teorema de baixa energia, tendo essa característica sido preservada no processo de iteração. Para determinar o papel da simetria quiral naquele problema, é interessante considerar um outro tipo de unitarização, em que essa simetria é quebrada.

Uma outra forma possível de unitarizar os resultados em árvore é remover a divergência apenas do seu local de origem, ou seja, da amplitude A_σ . Assim, consideram-se apenas os diagramas da figura 3.13.

Fazendo a soma tendo como objeto básico a amplitude A_σ , equação (3.2.8), obtém-se

Figura 3.13: Espalhamento $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ meson sigma

novamente o resultado da equação (3.3.26), com

$$\gamma^2 \rightarrow \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)^2}{F_\pi^2}, \quad (3.4.53)$$

o que fornece, após a renormalização,

$$\bar{A}_{\sigma u} = -\frac{\frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)^2}{F_\pi^2}}{s - M_\sigma^2 + \frac{(M_\sigma^2 - M_\pi^2)^2}{F_\pi^2} \bar{\Sigma}}. \quad (3.4.54)$$

Esse resultado corresponde à mesma largura convencional da equação (3.3.52). Adicionado também a amplitude A_π , equação(3.2.8), tem-se

$$\bar{A}_u^p = A_\pi + \bar{A}_{\sigma u}. \quad (3.4.55)$$

Nesse caso, apesar da unitarização, a amplitude com a correção do propagador deixa de satisfazer o teorema de baixa energia, como pode ser visualizado na figura 3.14. Também é possível observar nesse gráfico que os picos dos dois tipos de unitarização estão em posições distintas, que a correção do propagador é maior do que na unitarização quiral e, ainda, que ela é descontínua em $s = 4M_\pi^2$.

Ao contrário do caso da unitarização da amplitude A_a , as diferenças entre as amplitudes A_u^p e A_I^p são grandes. Considerando apenas a parte imaginária da correção da massa (A_I^p), tem-se um gráfico semelhante, com a mesma forma, ao da amplitude A_u . Já o gráfico da amplitude A_u^p é extremamente distinto ao da amplitude A_u .

Porém, no limite em que s vai a infinito, a amplitude A_u^p vai a zero, como é esperado. Já a amplitude A_u vai a uma constante. Esse é o maior problema dessa amplitude.

Figura 3.14: Amplitudes $|A_u|^2$, $|A_u^p|^2$ e $|A_I^p|^2$; $M_\sigma = 0,5 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$

3.5 Unitarização quiral para n ressonâncias

Nesta seção, generalizam-se os resultados anteriores para o caso de mais de uma ressonância. Essa generalização tem caráter especulativo e é feita de modo informal, sem recurso a lagrangianas.

Considere n partículas escalares que se acoplam com o pión pelas constantes g_i , onde $i = 1, \dots, n$. Os vértices dos processos $f_i \rightarrow \pi^a \pi^b$ ficam sendo $v_i = i \left(\frac{M_i^2 - M_\pi^2}{F_\pi} \right)$ e o propagador do escalar f_i é $D_{\xi i} = \frac{i}{p^2 - M_i^2}$. Assim como no caso de um único méson escalar, obtém-se

$$A_{fi} = \frac{-(M_i^2 - M_\pi^2)^2}{F_\pi^2(s - M_i^2)}. \quad (3.5.56)$$

Considere, também, como no caso do modelo sigma linear, a soma

$$A_{ai} = A_{\pi i} + A_{\xi i} = -\frac{\gamma_i^2}{s - M_i^2}, \quad (3.5.57)$$

com

$$\gamma_i(s) = \frac{(M_i^2 - M_\pi^2)(s - M_\pi^2)}{F_\pi^2}. \quad (3.5.58)$$

Essas amplitudes A_{ai} satisfazem individualmente o limite quiral,

$$\lim_{\frac{q}{M_\pi^2} \rightarrow 0} A_{ai} = \frac{s - M_\pi^2}{F_\pi^2} + O(q^4). \quad (3.5.59)$$

Assim, é possível construir a partir das amplitudes A_{ai} um objeto que satisfaz o limite quiral, da forma

$$A_a = \sum_{i=1}^n k_i A_{ai}, \quad (3.5.60)$$

em que

$$\sum_{i=1}^n k_i = 1. \quad (3.5.61)$$

Unitarizando essa amplitude como na equação (3.3.25), tem-se

$$A_u = A_a \frac{1}{1 - \Sigma A_a}. \quad (3.5.62)$$

Como no caso de uma ressonância, para remover o termo infinito da função Σ é necessário renormalizar. Entretanto, como foi discutido na figura 3.12 da seção 3.3.2, a aproximação de considerar apenas a parte imaginária da função Σ é muito boa. Por esse motivo, no caso de mais de uma ressonância, trabalha-se no âmbito dessa aproximação. Para tanto, considere o caso simplificado, $\Sigma \simeq iI$, que fornece

$$A_I = A_a \frac{1}{1 - iIA_a}. \quad (3.5.63)$$

3.5.1 Unitarização quiral para 2 ressonâncias.

Para o caso em que $n = 2$, no qual há duas ressonâncias escalares, tem-se a amplitude em árvore

$$A_a = \frac{-k_1 \gamma_1^2}{s - M_1^2} + \frac{-k_2 \gamma_2^2}{s - M_2^2}. \quad (3.5.64)$$

Usando (3.5.58) tem-se

$$A_a = -(s - M_\pi^2) \left(\frac{k_1(M_1^2 - M_\pi^2)(s - M_2^2) + k_2(M_2^2 - M_\pi^2)(s - M_1^2)}{F_\pi^2(s - M_1^2)(s - M_2^2)} \right). \quad (3.5.65)$$

Essa amplitude corresponde à generalização da equação (3.2.9). Como discutido anteriormente, ela satisfaz o teorema de baixa energia, pois quando $M_1 \sim M_2 \gg s \sim M_\pi^2$,

$$\lim A_a = \frac{(s - M_\pi^2)}{F_\pi^2} + O(q^4). \quad (3.5.66)$$

A amplitude unitarizada é

$$A_I = \frac{-k_1\gamma_1^2}{s - M_1^2 + iI(s) \left[k_1\gamma_1^2 + k_2\gamma_2^2 \frac{(s-M_1^2)}{(s-M_2^2)} \right]} + \frac{-k_2\gamma_2^2}{s - M_2^2 + iI(s) \left[k_2\gamma_2^2 + k_1\gamma_1^2 \frac{(s-M_2^2)}{(s-M_1^2)} \right]}. \quad (3.5.67)$$

Além disso, o numerador de A_I pode se anular. De fato, impondo

$$k_1(M_1^2 - M_\pi^2)(s - M_2^2) + k_2(M_2^2 - M_\pi^2)(s - M_1^2) = 0, \quad (3.5.68)$$

obtém-se

$$s = \frac{k_1(M_1^2 - M_\pi^2)M_2 + k_2(M_2^2 - M_\pi^2)M_1}{k_1(M_1^2 - M_\pi^2) + k_2(M_2^2 - M_\pi^2)}. \quad (3.5.69)$$

As condições $M_1^2 > M_\pi^2$ e $M_2^2 > M_\pi^2$ correspondem a $M_1^2 - M_\pi^2 > 0$ e $M_2^2 - M_\pi^2 > 0$. Será mostrado, agora, que s está entre M_1^2 e M_2^2 . Suponha, sem perda de generalidade, que $M_1^2 < M_2^2$. Assim, se $M_1^2 > s$, ocorreria $M_1^2 - s > 0$, o que implicaria, pela equação (3.5.68), que $M_2^2 - s < 0$. Portanto, $M_1^2 > M_2^2$, o que contraria a condição $M_1^2 < M_2^2$. Já se $M_1^2 - s < 0$, tem-se $M_2^2 - s > 0$, logo $M_1^2 < M_2^2$, $s > M_1^2$ e $s < M_2^2$. A condição (3.5.61), que no caso de duas ressonâncias adquire a forma

$$k_1 + k_2 = 1, \quad (3.5.70)$$

sugere a parametrização $k_1 = \cos^2(\theta)$ e $k_2 = \sin^2(\theta)$. Neste caso, o zero da amplitude está entre M_1^2 e M_2^2 , como pode ser visto na figura 3.15.

Pode-se observar no gráfico da figura 3.16 que os casos $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ são equivalentes a uma única ressonância. Nota-se também que, para $\theta = \frac{\pi}{4}$, tem-se um zero entre M_1^2 e M_2^2 .

Pode-se também considerar o caso em que $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$, mostrado na figura 3.18. Assim, pode-se reescrever $k_1 = \sec^2(\theta)$ e $k_2 = -\tan^2(\theta)$. Fazendo isso, obtém-se

$$k_1 + k_2 = \sec^2(\theta) - \tan^2(\theta) = 1. \quad (3.5.71)$$

Como no caso anterior, tem-se um gráfico do s que zera a amplitude A_a , mostrado na figura 3.17. Nela, é possível notar que há uma divergência próxima de $\theta = 0,51 \text{ rad}$. Na região entre $\theta = 0$ e o ponto divergente, o zero da amplitude ocorre em $s > M_2^2$ e, assim, em $s > 0$. Já depois da divergência o zero da amplitude se localiza em uma região onde $s < 0$. Então, para garantir um zero na região em que $s > 0$, deve-se estar na região $0 \leq \theta \leq 0,51 \text{ rad}$.

A existência desses zeros são uma assinatura importante do acoplamento de duas ressonâncias que pode, em princípio, ser evidenciada experimentalmente, conforme foi enfatizado por Tornqvist [Tör95].

Figura 3.15: Zero da amplitude A_a em função de θ ; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$, $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$, $k_1 = \sin^2(\theta)$ e $k_2 = \cos^2(\theta)$

ressonância	Massa em (GeV)	Largura Γ em (GeV)
$f_0(980)$	$M_1 = 0,980$	$\Gamma = 0,070$
$f_0(1370)$	$M_3 = 1,370$	$\Gamma = 0,350$

Tabela 3.1: Massa e largura para as ressonância $f_0(980)$ e $f_0(1370)$

Figura 3.16: Amplitudes $|A_I|^2$; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$, $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$, $k_1 = \cos^2(\theta)$ e $k_2 = \sin^2(\theta)$

Figura 3.17: Zero da amplitude A_a em função de θ ; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$, $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$, $k_1 = \sec^2(\theta)$ e $k_2 = -\tan^2(\theta)$

Figura 3.18: Amplitudes $|A_I|^2$; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$, $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$, $M_\pi = 0,139 \text{ GeV}$, $F_\pi = 0,093 \text{ GeV}$, $k_1 = \sec^2(\theta)$ e $k_2 = -\tan^2(\theta)$

Capítulo 4

Decaimento em três corpos

4.1 Diagrama de Dalitz

Os diagramas de Dalitz são um instrumento muito importante na interpretação de dados experimentais envolvendo ressonâncias. A idéia básica desse tipo de diagramas é expressar a seção de choque de processos que contêm ressonâncias no estado final em figuras bidimensionais, cujos eixos são funções de escalares de Lorentz construídas a partir das variáveis cinemáticas do problema. No caso de um decaimento em três corpos $D(Q) \rightarrow \zeta_1(k_1)\zeta_2(k_2)\zeta_3(k_3)$, pode-se escrever a probabilidade de decaimento ρ por unidade de tempo como [Käl64]

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{2E_D} \int \int \int d^4k_1 d^4k_2 d^4k_3 \prod_{i=1}^3 \delta(k_i^2 - m_i^2) \theta(E_i) \delta^4 \left(\sum_{i=1}^3 k_i - Q \right) T^2, \quad (4.1.1)$$

em que Q é o quadrimomento da partícula D e k_i é o momento da partícula ζ_i . No centro de massa, tem-se $Q = (M, \vec{0})$. Assim,

$$\rho_{CM} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{2E_D} \int \int \int d^4k_3 d^4k_2 d^4k_1 \prod_{i=1}^3 \delta(k_i^2 - m_i^2) \theta(E_i) \delta^3 \left(\sum_{i=1}^3 \vec{k}_i \right) \delta \left(\sum_{i=1}^3 E_i - M \right) T^2. \quad (4.1.2)$$

Fazendo as derivadas parciais em termos das energias E_3 e E_2 , tem-se

$$\frac{\partial^2 \rho_{CM}}{\partial E_3 \partial E_2} = \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{2E_D} \int \int d^3k_3 d^3k_2 \int d^4k_1 \prod_{i=1}^3 \delta(k_i^2 - m_i^2) \theta(E_i) \delta^3 \left(\sum_{i=1}^3 \vec{k}_i \right) \delta \left(\sum_{i=1}^3 E_i - M \right). \quad (4.1.3)$$

Separando a integral J no caso em que T^2 depende apenas de E_3 e E_2 , obtém-se

$$J = \int \int d^3k_3 d^3k_2 \int d^4k_1 \prod_{i=1}^3 \delta(k_i^2 - m_i^2) \theta(E_i) \delta^3 \left(\sum_{i=1}^3 \vec{k}_i \right) \delta \left(\sum_{i=1}^3 E_i - M \right). \quad (4.1.4)$$

Fazendo a integral em k_1 e utilizando as propriedades da função δ , chega-se a

$$J = \int \int d^3 k_3 d^3 k_2 \delta(k_3^2 - m_3^2) \delta(k_2^2 - m_2^2) \theta(E_3) \theta(E_2) \delta((\vec{k}_3 + \vec{k}_2)^2 + m_3^2 - (M - E_3 - E_2)^2) \theta(M - E_3 - E_2). \quad (4.1.5)$$

Reescrevendo em coordenadas esféricas a integral no trimomento e resolvendo-a, tem-se

$$J = \pi^2 \theta(E_3) \theta(E_2) \theta(M - E_3 - E_2) \theta(4(E_3^2 - m_3^2)(E_2^2 - m_2^2) - [m_1^2 - m_3^2 - m_2^2 - M^2 + 2M(E_3 + E_2) - 2E_3 E_2]^2). \quad (4.1.6)$$

Assim, a borda que determina a região aonde é possível o decaimento é descrita pela equação

$$4(E_3^2 - m_3^2)(E_2^2 - m_2^2) = [m_1^2 - m_3^2 - m_2^2 - M^2 + 2M(E_3 + E_2) - 2E_3 E_2]^2 \quad (4.1.7)$$

É possível trocar os parâmetros E_2 e E_3 por $s_{12} = (k_1 + k_2)^2$ e $s_{13} = (k_1 + k_3)^2$ no caso em que $m_i = m$, obtendo-se

$$E_2 = \frac{M^2 + m^2 - s_{13}}{2M}, \quad (4.1.8)$$

$$E_3 = \frac{M^2 + m^2 - s_{12}}{2M}.$$

A região onde o decaimento é possível, em função dos parâmetros s_{12} e s_{13} , tem a forma da figura 4.1. Em seguida, exploram-se alguns exemplos do uso do diagrama no estudo das ressonâncias consideradas neste trabalho. Nesses diagramas o largura dos quadrados representa a amplitude $|T|^2$.

Os gráficos das figuras 4.2 a 4.5 foram construídos a partir da função $C_{\sigma u}(s)$, equação (3.3.28). Adicionando o vértice fraco $D^+ \rightarrow \pi^+ \sigma$ à função $C_{\sigma u}$, obtém-se a amplitude do decaimento $D^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$, conforme discutido na [DR00]. Porém, neste trabalho, não será estudado esse vértice fraco. Para todos os efeitos, considere que ele é apenas uma constante e, assim, o vértice fraco não muda a forma da função C_I . Trabalhando na aproximação $R = 0$, obtém-se

$$T = C_{\sigma I}(s_{12}) + C_{\sigma I}(s_{13}). \quad (4.1.9)$$

As figuras 4.2 e 4.4 mostram os diagramas de Dalitz para o caso de uma única ressonância, com massas $0,5 \text{ GeV}$ e $0,98 \text{ GeV}$ respectivamente. É possível notar um pico grande próximo do zero em ambas as figuras.

Se o vértice fraco tiver simetria quiral, a amplitude do decaimento $D_s^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^+$ terá a mesma forma que A_u . Por uma questão de simplicidade, será considerada somente a parte imaginária da função Σ , ou seja, o caso em que $R = 0$. Assim, tem-se a função $A_I(s)$.

$$T = A_I(s_{12}) + A_I(s_{13}), \quad (4.1.10)$$

Figura 4.1: Curva que determina a região aonde o decaimento é possível

que dá origem às figuras 4.6 a 4.9.

Considere agora o caso de duas ressonâncias com massas $M_1 = 0.5 \text{ GeV}$ e $M_2 = 0.98 \text{ GeV}$, das figuras 4.10 e 4.11. Neste caso, nota-se um zero[DR00] entre M_1^2 e M_2^2 e os dois picos ficam claros. Porém, para valores de s grandes, a seção de choque deveria tender a zero, o que não ocorre. Isso já foi notado no capítulo anterior e continua presente aqui.

4.2 Dados Experimentais

No trabalho experimental da colaboração E791, têm-se os diagramas de Dalitz e os gráficos das figuras 4.16 e 4.17, que correspondem respectivamente aos decaimentos $D^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+ [A^+01b]$ e $D_s^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+ [A^+01a]$.

Na figura do decaimento do D^+ , é possível notar vários picos e cada um deles corresponde a uma ressonância, $\rho^0(770)$, $f_0(980)$, $f_0(1370)$, etc. Nesse decaimento, existem ressonâncias vetoriais, que não são estudadas neste trabalho.

Na figura do decaimento do D_s^+ há picos bem claros, correspondentes às ressonâncias $f_0(980)$ e $f_0(1370)$. Esse processo seria adequado para analisar decaimentos envolvendo

Figura 4.2: Diagrama de Dalitz para $|T|^2$ em que T é dada pela equação (4.1.9), para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$

Figura 4.3: Soma das projeções de $|T|^2$, sobre o eixo s_{12} , para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$

apenas ressonâncias escalares. Entretanto, a presença do méson sigma não é clara.

Na figura 4.18, os pontos são as projeções do diagrama de Dalitz sobre o eixo s_{12} e a curva contínua corresponde ao modelo usado para ajustar essas projeções. O modelo usado no artigo [A⁺01b] corresponde à unitarização separada das ressonâncias. Neste trabalho, mostrou-se que esse tipo de unitarização não conserva propriedades importantes presentes na amplitude em árvore, tais como a simetria quiral e zeros da amplitude. Nota-se que o modelo usado não corresponde aos dados experimentais, pois há justamente um zero entre $M_{f_0(980)}^2$ e $M_{f_0(1370)}^2$ e outro zero entre $M_{\sigma(500)}^2$ e $M_{f_0(1370)}^2$, o que pode sugerir a presença do mesón sigma. Esse problema poderia ser resolvido com a utilização de um modelo que unitarize as ressonâncias em conjunto, como o descrito neste trabalho.

Figura 4.4: Diagrama de Dalitz para $|T|^2$ em que T é dada pela equação (4.1.9), para $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$

Figura 4.5: Soma das projeções de $|T|^2$, sobre o eixo s_{12} , para $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$

Figura 4.6: Diagrama de Dalitz para $|T|^2$ em que T é dada pela equação (4.1.10), para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$

Figura 4.7: Soma das projeções de $|T|^2$, sobre o eixo s_{12} , para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$

Figura 4.8: Diagrama de Dalitz para $|T|^2$, em que T é dada pela equação (4.1.10), para $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$

Figura 4.9: Soma das projeções de $|T|^2$ sobre o eixo s_{12} ; $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$

Figura 4.10: Diagrama de Dalitz para $|T|^2$, em que T é dada pela equação (4.1.10), para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$ e $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$

Figura 4.11: Soma das projeções de $|T|^2$, sobre o eixo s_{12} ; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$ e $M_2 = 0,98 \text{ GeV}$

Figura 4.12: Diagrama de Dalitz para $|T|^2$ em que T é dada pela equação (4.1.10), para $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$ e $M_2 = 1,37 \text{ GeV}$

Figura 4.13: Soma das projeções de $|T|^2$, sobre o eixo s_{12} ; $M_1 = 0,5 \text{ GeV}$ e $M_2 = 1,37 \text{ GeV}$

Figura 4.14: Diagrama de Dalitz para $|T|^2$ em que T é dada pela equação (4.1.10), para $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$ e $M_2 = 1,37 \text{ GeV}$

Figura 4.15: Soma das projeções de $|T|^2$ sobre o eixo s_{12} ; $M_1 = 0,98 \text{ GeV}$ e $M_2 = 1,37 \text{ GeV}$

Figura 4.16: Diagrama de Dalitz $D^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$

Figura 4.17: Diagrama de Dalitz $D_s^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$

Figura 4.18: Projeção $D_s^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, estudou-se o papel da simetria quiral no tratamento teórico de ressonâncias piônicas, no âmbito do modelo sigma linear. A simetria quiral assegura que a amplitude para o espalhamento elástico $\pi^a(p_a)\pi^b(p_b) \rightarrow \pi^c(p_c)\pi^d(p_d)$ deve satisfazer o teorema de baixa energia quando os momentos dos píons são pequenos ($q \sim M_\pi$). No caso do modelo sigma linear, a amplitude em árvore

$$A_a = -\frac{\gamma^2}{s - M_\sigma^2} \quad (5.0.1)$$

satisfaz o teorema de baixa energia, o que não acontece com as componentes A_π e A_σ . Entretanto, a amplitude em árvore tem uma divergência em $s = M_\sigma^2$ que precisa ser removida por meio de uma unitarização. A unitarização produz uma correção no denominador de A_a , dada por

$$A_u = -\frac{\gamma^2}{s - M_\sigma^2 + \gamma^2 \Sigma}. \quad (5.0.2)$$

A parte real da função Σ tem um termo divergente que é removido por meio de uma renormalização. Uma boa aproximação é considerar apenas a parte imaginária da função Σ , que não é divergente.

A unitarização da amplitude em árvore A_a conserva simetria quiral. Já a unitarização das componentes A_π e A_σ , separadamente, não conserva essa simetria. Neste trabalho foram considerados apenas os efeitos da unitarização no canal s . Esse tratamento teórico poderia ser melhorado considerando mais gráficos do modelo sigma linear e, também, termos cruzados de s , t e u .

Ao analisar as previsões deste trabalho, notou-se que o pico da amplitude A_u não corresponde a M_σ^2 . Além disso, tanto a amplitude A_a como a amplitude unitarizada A_u não vão a zero no infinito. Esse problema pode ser resolvido colocando uma outra ressonância de forma conveniente ou, ainda, um fator de forma.

Para o caso de duas ressonâncias, pode-se ter um zero entre as massas dessas ressonâncias conforme notado por Tornqvist [Tör95]. Esse zero é conservado quando as duas ressonâncias são unitarizadas juntas, o que não ocorre quando se unitariza as ressonâncias separadamente. Logo, para conservar as propriedades da amplitude em árvore, não se deve separar uma ressonância da outra. No decaimento $D_s^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$, nota-se, no resultado experimental, que há um zero entre as massas dos mésons $f_0(980)$ e $f_0(1370)$. Um modelo que unitariza as ressonâncias separadamente não pode prever esse resultado. Nos decaimentos dos mésons D , poderia ser feita uma unitarização de três corpos para melhorar o resultado. No entanto, a unitarização de dois corpos deve ser uma aproximação razoável desse caso.

Apêndice A

Regularização dimensional

Para tratar a divergência existente na integral

$$I_{\pi\pi}^0(s) = \int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(Q + P_s)^2 - M_\pi^2 + i0^+} \frac{1}{(Q - P_s)^2 - M_\pi^2 + i0^+}, \quad (\text{A.0.1})$$

será usada uma técnica chamada *regularização dimensional*, que consiste em integrar primeiramente em n , em que n é um numero real, e depois fazer o limite para $n \rightarrow 4$:

$$I_{\pi\pi}^0(s) = \int \frac{d^n Q}{(2\pi)^n} \frac{1}{(Q + P_s)^2 - M_\pi^2 + i0^+} \frac{1}{(Q - P_s)^2 - M_\pi^2 + i0^+}. \quad (\text{A.0.2})$$

Uma identidade muito útil é

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dz \frac{1}{[az + b(1-z)]^2}. \quad (\text{A.0.3})$$

Através dessa identidade, é possível reescrever a integral, em que $a = ((Q + P_s)^2 - M_\pi^2)$ e $b = (Q - P_s)^2 - M_\pi^2$. Assim,

$$I_{\pi\pi}^0(s) = \int \frac{d^n Q}{(2\pi)^n} \int_0^1 dz \frac{1}{[((Q + P_s)^2 - M_\pi^2)z + ((Q - P_s)^2 - M_\pi^2)(1-z)]^2}. \quad (\text{A.0.4})$$

A integral é equivalente a

$$I_{\pi\pi}^0(s) = \int_0^1 dz \int \frac{d^n Q}{(2\pi)^n} \frac{1}{Q^2 - M^2 + i0^+}, \quad (\text{A.0.5})$$

em que $M^2 = M_\pi^2 \left(1 + \frac{(z^2 - z)s}{M_\pi^2}\right)$.

Uma integral já conhecida é

$$\int \frac{d^n Q}{(2\pi)^n} \frac{(Q^2)^p}{(Q^2 - M^2 + i0^+)^q} = i(-1)^{p-q} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} (M^2)^{p-q+\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(p+\frac{n}{2})\Gamma(q-p-\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(q)}. \quad (\text{A.0.6})$$

Da equação (A.0.6), quando $p = 0$ e $q = 2$, tem-se

$$I_{\pi\pi}^0(s) = \int_0^1 dz i(-1)^{-2} \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} (M^2)^{-2+\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(2-\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\Gamma(2)}. \quad (\text{A.0.7})$$

Como $\Gamma(2) = 1$ obtém-se

$$I_{\pi\pi}^0(s) = \int_0^1 dz i \left(\frac{M^2}{(4\pi)} \right)^{\frac{n}{2}-2} \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right). \quad (\text{A.0.8})$$

Esse resultado é válido para $n < 4$. Porém, o caso de interesse é aquele em que $n \rightarrow 4$. Para fazer esse limite, define-se uma nova variável $\epsilon = 4 - n$. Assim, quando $n \rightarrow 4$, $\epsilon \rightarrow 0$. Reescrevendo a resposta da integral, chega-se a

$$I_{\pi\pi}^0(s) = \int_0^1 dz i \left(\frac{4\pi}{M^2} \right)^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right). \quad (\text{A.0.9})$$

Como $\epsilon \rightarrow 0$, é possível expandir em série de Taylor em torno de $\epsilon/2 = 0$. Assim,

$$I_{\pi\pi}^0(s) = \int_0^1 dz \frac{i}{(4\pi)^2} \left[1 + \ln\left(\frac{4\pi}{M^2}\right) \frac{\epsilon}{2} + O(\epsilon^2) \right] \left[\Gamma(1) + \Gamma(1)' \frac{\epsilon}{2} \right] \frac{2}{\epsilon}. \quad (\text{A.0.10})$$

Finalmente,

$$I_{\pi\pi}^0(s) = \int_0^1 dz \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} + \ln(4\pi) + \Gamma(1) - \ln(M^2) + O(\epsilon) \right]. \quad (\text{A.0.11})$$

A divergência da integral está no termo $\frac{2}{\epsilon}$, que é divergente porém real. A divergência ocorre para $\epsilon \rightarrow 0$. O único termo que depende do parametro z é $\ln(M^2)$. O restante, por não depender de z , não é alterado quando integrado de 0 a 1:

$$\int_0^1 \ln(M^2) dz = \int_0^1 \ln\left(M_\pi^2 \left(1 + \frac{s(z^2 - z)}{M_\pi^2}\right)\right) dz \quad (\text{A.0.12})$$

Uma integral conhecida para $x > 4$ é

$$\int_0^1 \ln(1 + x(z^2 - z)) dz = -2 - \sigma(x) \ln\left(\frac{1 - \sigma(x)}{1 + \sigma(x)}\right) - i\pi\sigma(x), \quad (\text{A.0.13})$$

em que $\sigma(x) = \sqrt{1 - \frac{4}{x}}$.

Para $0 \leq x < 4$, tem-se

$$\int_0^1 \ln(1 + x(z^2 - z)) dz = -2 + 2\sqrt{\frac{4}{x} - 1} \operatorname{arccot}\left(\sqrt{\frac{4}{x} - 1}\right). \quad (\text{A.0.14})$$

Da equação (A.0.13), tem-se

$$\int_0^1 \ln\left(M_\pi^2 \left(1 + \frac{s(z^2 - z)}{M_\pi^2}\right)\right) dz = \ln(M_\pi^2) - 2 - \sigma(x) \ln\left(\frac{1 - \sigma(x)}{1 + \sigma(x)}\right) - i\pi\sigma(x), \quad (\text{A.0.15})$$

em que $x = \frac{s}{M_\pi^2}$.

Da equação (A.0.14), tem-se

$$\int_0^1 \ln \left(M_\pi^2 \left(1 + \frac{s(z^2 - z)}{M_\pi^2} \right) \right) dz = \ln(M_\pi^2) - 2 + 2\sqrt{\frac{4}{x} - 1} \operatorname{arccot} \left(\sqrt{\frac{4}{x} - 1} \right) \quad (\text{A.0.16})$$

Assim, pode-se escrever

$$\int \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(Q + P/2)^2 - M_\pi^2} \frac{1}{(Q - P/2)^2 - M_\pi^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \Pi(s), \quad (\text{A.0.17})$$

em que

$$\Pi(s) = L(s) + \Lambda_\infty; \quad (\text{A.0.18})$$

Λ_∞ é uma constante real infinita e $L(s)$ é a parte finita da integral, dada por

$$L(s) = \begin{cases} -2 \frac{\sqrt{4M_\pi^2 - s}}{\sqrt{s}} \arctan \left(\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{4M_\pi^2 - s}} \right), & 0 \leq s < 4M_\pi^2, \\ + \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}} \ln \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}}}{1 + \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}}} \right) + i\pi \frac{\sqrt{s - 4M_\pi^2}}{\sqrt{s}}, & s > 4M_\pi^2. \end{cases} \quad (\text{A.0.19})$$

Bibliografia

- [A⁺01a] E. M. Aitala et al. Experimental evidence of a light and broad scalar resonance in $D^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$ decay. *Physical Review Letters*, 86(5):770–774, January 2001. Fermilab E791 Collaboration.
- [A⁺01b] E. M. Aitala et al. Study of the $D_s^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$ decay and the measurement of the f_0 masses and widths. *Physical Review Letters*, 86(5):765–769, January 2001. Fermilab E791 Collaboration.
- [BPdR95] J. Bijnens, J. Prades, and E. de Rafael. Light quark masses in QCD. *Physics Letters B*, 348:226–238, 1995.
- [CW57] R.W. Hayward D.D. Hoppes R.P. Hudson C.S. Wu, E. Ambler. Experimental test of parity conservation in beta decay. *Phys.Rev.*, 105:1413–1414, 1957.
- [DR00] C. Dib and R. Rosenfeld. Estimating σ -meson couplings from $d \rightarrow 3\pi$ decays. *Physical Review D*, 63(117501), June 2000.
- [G⁺00] D. E. Groom et al. Review of particle physics. *The European Physical Journal C*, 15:1–878, 2000.
- [GML60] M. Gell-Mann and M. Lévy. The axial vector current in beta decay. *Nuovo Cimento*, 16:705, 1960.
- [GW73] D. J. Gross and F. Wilczek. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343, 1973.
- [HFL73] M. Gell-Mann H. Fritzsch and H. Leutwyler. *Phys. Lett. B*, 47:365, 1973.
- [Käl64] G. Kälém. *Elementary Particle Pysics*. 1964.
- [Leu96] H. Leutwyler. The ratios of the light quark masses. *Physics Letters B*, 378:313–318, 1996.
- [MP78] W. J. Marciano and H. Pagels. *Phys. Rept.*, 36:137, 1978.

- [Sch57] J. Schwinger. *Ann. Phys.*, 2:407, 1957.
- [Sch02] Stefan Scherer. Introduction to chiral perturbation theory. *hep-ph/0210398*, 2002.
- [Sut92] Christine Sutton. *Spaceship Neutrino*. Cambridge University Press, 1992.
- [Tör95] Nils A. Törnqvist. Understanding the scalar meson $q\bar{q}$ nonet. *Z.Phys. C*, 68(117501):765–769, 1995.
- [Wei73] S. Weinberg. *Phys. Rev. Lett.*, 31:494, 1973.