Universidade de São Paulo

Instituto de Física

**Tomografia do potencial gravitacional primordial
através da polarização da radiação cósmica de fundo
em aglomerados de galáxias**

Henrique Scemes Xavier

Orientador: Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo

*Dissertação apresentada ao Instituto de
Física da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Mestre em Ciências.*

Comissão Examinadora

Dr. Carlos Alexandre Wuensche de Souza (INPE)

Prof. Dr. Laerte Sodré Júnior (IAG-USP)

Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo (IF-USP)

São Paulo

2007

Resumo

Após uma revisão das bases da cosmologia moderna e dos mecanismos de produção de anisotropias na radiação cósmica de fundo, calculamos a relação entre a polarização da radiação cósmica de fundo causada por espalhamento Thomson no gás ionizado presente em aglomerados de galáxias e o potencial gravitacional da época do desacoplamento dos fótons com a matéria, em $z \simeq 1100$. Mostramos como é possível realizar, em teoria, uma tomografia desse potencial gravitacional em todo o universo observável e como a correlação desse sinal de polarização com o contraste de densidade de matéria poderia nos ajudar a restringir parâmetros cosmológicos. Entretanto, o fraco sinal esperado para essa polarização nos leva à conclusão de que uma tomografia do potencial gravitacional, através desse método, é impraticável no futuro próximo.

Abstract

After a review of the foundations of modern cosmology and the cosmic microwave background anisotropies production mechanisms, we calculated the relation between the cosmic microwave background polarization caused by Thomson scattering in the ionized gas found in galaxy clusters and the gravitational potential from the photon decoupling epoch, on $z \simeq 1100$. We have shown how it is possible to make, in theory, a tomography of this potential over all the observable universe and how the correlation of this polarization signal with the matter density contrast could help us constrain cosmological parameters. However, the weak signal expected for this polarization shows that a gravitational potential tomography using this method is unfeasible in the near future.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos professores: João Zanetic, pela assistência na introdução histórica; Thyrso Villela Neto, pelo auxílio na compreensão das técnicas observacionais; e João Carlos Alves Barata, pela ajuda com as relações de recorrência das funções de Bessel. Também agradeço à *Wikimedia Foundation* pelo fantástico projeto Wikipédia, sem o qual este trabalho teria sido muito mais árduo; ao meu orientador, pelo valioso suporte durante meus estudos de cosmologia (além da orientação específica dentro deste projeto, é claro); à Universidade de São Paulo pela infra-estrutura, à FAPESP pelo auxílio financeiro e aos meus pais pela educação, sem a qual este trabalho não teria sido possível. Finalmente, agradeço a toda minha família e amigos pelo suporte e carinho durante esses anos de mestrado e os vários outros anteriores, e à minha namorada Mariana kz, pelas coincidências.

Sumário

1	Introdução	9
1.1	Apresentação do trabalho desenvolvido	9
1.2	Teoria da Relatividade Geral de Einstein	10
1.3	O modelo cosmológico padrão	17
1.3.1	A métrica FLRW e a cosmografia	19
1.3.2	Evolução temporal da matéria homogênea	24
1.3.3	Dinâmica do fator de escala	29
2	Além do equilíbrio	35
2.1	Nucleossíntese e Desacoplamento	35
2.1.1	Nucleossíntese primordial	38
2.1.2	Desacoplamento dos fótons com a matéria	42
2.2	Perturbações Lineares	44
2.2.1	Aplicação para fótons	46
2.2.2	Condições Iniciais	49
2.2.3	Inomogeneidades de matéria	51
2.2.3.1	Grandes Escalas	52
2.2.3.2	Pequenas Escalas	54
3	A Radiação Cósmica de Fundo	59
3.1	Regime fortemente acoplado	60
3.1.1	Grandes escalas	60
3.1.2	Escalas intermediárias	61
3.1.3	Pequenas escalas	63
3.2	Desacoplamento e deslocamento livre	66
3.3	Conexão com observações	71
4	Tomografia das perturbações primordiais	77
4.1	A Polarização da radiação	78
4.1.1	A polarização a partir de primeiros princípios	79
4.1.2	A polarização no ambiente extragaláctico	82
4.2	A relação entre a polarização e as flutuações primordiais	83
4.2.1	No espaço de momentos $\vec{k}$	83

4.2.2	Expansão da polarização em harmônicos esféricos de <i>spin</i> s . . .	86
4.2.3	Simplificação da relação entre $p_{LM}(r)$ e $\tilde{\Psi}_*(\vec{k})$	90
4.2.4	Análise do kernel no espaço de momentos	92
4.3	A relação da polarização com as flutuações no espaço real	99
4.3.1	Interpretação geométrica e análise dos Kerneis	102
4.3.2	Testes de reconstrução de $b_{lm}(r)$ a partir de $p_{lm}(r)$	106
5	Correlação entre galáxias e polarização	111
5.1	Cálculo da correlação	111
5.2	Análise da correlação	116
6	Considerações Finais	123
A	Rotação de coordenadas	125
B	Símbolos 3-j de Wigner	127
C	Inversão de matrizes	129
C.1	Decomposição em Valores Singulares	130

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação do trabalho desenvolvido

Grande parte das informações que nós temos sobre o universo vem de mapeamentos do céu. Alguns exemplos de mapeamentos são o da distribuição de galáxias e outros corpos celestes, feito, por exemplo, pelo *Sloan Digital Sky Survey* [1], e o da Radiação Cósmica de Fundo, feita, por exemplo, pelo satélite *WMAP* [2]. Esses mapas são utilizados no teste de modelos cosmológicos, de formação de estruturas e de produção das perturbações iniciais.

Como as observações do universo são feitas principalmente através da luz, nossas observações possuem sempre um vínculo fixo entre local do espaço observado e época observada, ou seja, estamos sempre observando regiões do espaço-tempo no nosso cone de luz. Isso nos leva ao fato das condições iniciais do universo só serem observadas em pontos muito distantes de nós e de épocas recentes só serem observadas em regiões próximas. Além dessa restrição, o fato de só ser possível observar um único universo algumas vezes limita bastante nossa amostra, como ocorre com as anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo, principalmente em grandes escalas angulares. Buscando uma maneira de contornar esses problemas, Marc Kamionkowski e Abraham Loeb propuseram, em 1997, a observação indireta do quadrupolo das anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo através da polarização gerada por seu espalhamento em aglomerados de galáxias [3]. Essa técnica permitiria, em princípio, observar um maior número de realizações do quadrupolo das anisotropias, reduzindo sua variância cósmica, e também épocas muito antigas em regiões próximas a nós. A execução dessas observações serviria como um novo mapeamento, capaz de testar ainda mais os modelos utilizados na descrição do universo.

Interessados em obter mais informação sobre o universo através da utilização da polarização da Radiação Cósmica de Fundo gerada em aglomerados de galáxias, estudamos em detalhe a relação entre essa polarização e o potencial gravitacional na época do desacoplamento dos fótons com a matéria. Para tanto, nos baseamos na cosmologia padrão, descrita nos capítulos 1, 2 e 3. Na parte inicial da nossa pesquisa,

utilizamos o trabalho realizado por Emory Bunn [4], cuja revisão é apresentada nas seções 4.2.1 e 4.2.2 do capítulo 4. Nossa pesquisa, da qual resultou uma publicação científica [5], é detalhada no restante do capítulo 4. No capítulo 5, os resultados de nosso trabalho são utilizados no cálculo da correlação esperada entre o sinal de polarização e o contraste de densidade de galáxias.

1.2 Teoria da Relatividade Geral de Einstein

No ano de 1687, Isaac Newton publicou o livro *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, no qual apresenta sua teoria da mecânica, constituída em três leis para o movimento e a lei da gravitação universal. Esta mecânica, que teve por base trabalhos de diversas pessoas como Galileo Galilei, Jean Buridan e Johannes Kepler, causou um enorme impacto na ciência devido à sua abrangência, acurácia e simplicidade, e se tornou assim um forte paradigma [3]. Seu sucesso foi muito importante inclusive para a consolidação do modelo heliocêntrico de universo, reapresentado por Copérnico no século XVI em contraposição ao modelo geocêntrico de universo. Durante os três séculos seguintes, observou-se o absoluto sucesso da mecânica newtoniana, que se colocava como base de fenômenos aparentemente distintos, como a mecânica dos fluídos, a física térmica e a teoria dos gases.

Uma das poucas áreas da física que parecia possuir certa independência da mecânica foi o eletromagnetismo, sintetizado por James Clerk Maxwell em 1864. Esta inclusive possuía uma peculiaridade em relação à mecânica newtoniana: as transformações de coordenadas que deixavam suas equações invariantes (chamadas Transformações de Lorentz) eram diferentes das da mecânica de Newton (chamadas transformações de Galileu). No contexto da época, dominado pelo paradigma newtoniano, essa diferença foi interpretada como a existência de um referencial privilegiado, no qual as equações do eletromagnetismo eram as apresentadas por Maxwell. Para tanto, postulou-se a existência de um meio chamado éter, no qual as ondas eletromagnéticas se propagavam. Entretanto, experimentos que objetivavam medir o fluxo de éter, como o realizado por Albert Michelson e Edward Morley em 1887, falhavam: independentemente da direção do movimento da Terra e da orientação do experimento, não era possível detectar tal fluxo [7].

Albert Einstein apresentou em 1905 uma solução para estas questões. Assumindo que as leis da física eram as mesmas em qualquer referencial inercial e que a velocidade da luz permanecia constante independentemente da velocidade do emissor, as equações de Maxwell para corpos em movimento eram iguais às para corpos em repouso. Além disso, o éter se tornava desnecessário. Porém, essas modificações nos impeliram a modificar as leis de movimento de Newton para que estas fossem as mesmas sob as transformações de Lorentz. Desconsiderando por um momento as forças gravitacionais, Einstein chegou na mecânica da teoria da Relatividade Res-

trita (à qual nos anos antecedentes os cientistas Henri Poincaré, Walter Kaufmann e Max Abraham, entre outros, deram importantes contribuições) [7]. Esta teoria encontrou, posteriormente, comprovações em diversos experimentos, tornando-se um novo paradigma na física.

Para incluir a gravidade na Teoria da Relatividade, Einstein postulou que as leis físicas deveriam ser as mesmas em qualquer referencial, e não apenas nos inerciais. Einstein também considerou idênticas as massas inercial m_i e gravitacional m_g , fato muito bem apoiado em diversos experimentos (por exemplo, o realizado por Roland von Eötvös em 1889, que limitou a diferença entre as duas em no máximo $10^{-7}\%$) e inclusive verificado por Newton [8, 9]. Essa identidade implica que o movimento de qualquer corpo sob a ação exclusiva de um campo gravitacional é o mesmo, como podemos ver na equação de Newton abaixo:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m_g \frac{GM}{|\vec{r}|^3} \vec{r}. \quad (1.1)$$

Desta forma, pode-se considerar que, num curto espaço de tempo e numa pequena região do espaço, o movimento de um corpo sujeito a uma força gravitacional é equivalente ao de um corpo num referencial acelerado, uma vez que independe sua massa. Vemos na Figura 1.1 como os efeitos de um campo gravitacional são traduzidos num referencial acelerado. Essa conclusão, chamada de Princípio de Equivalência, permite-nos transferir os efeitos de uma força gravitacional para o sistema de coordenadas. Como o campo gravitacional pode variar no tempo e em geral não é homogêneo no espaço, é importante notar a restrição da equivalência a pequenas regiões de espaço e de tempo.

A equivalência entre as situações (c) e (d) da Figura 1.1 ilustra que podemos escolher um referencial localmente inercial no qual corpos sujeitos à força gravitacional se comportam como se ela não existisse, e portanto obedecem à mecânica da relatividade restrita. Assim, no caso de não existirem forças de outra natureza, temos que nesse referencial escolhido:

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (1.2)$$

onde $\xi^\mu = (ct, x, y, z)$ é o quadrivetor posição (c é a velocidade da luz no vácuo) e $d\tau$ é o tempo próprio, dado por:

$$d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (1.3)$$

Podemos escrever a equação acima como:

$$d\tau^2 = - \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu, \quad (1.4)$$

Figura 1.1: Conhecido como elevador de Einstein, este esquema ilustra: um elevador sendo acelerado por uma força externa num local sem gravidade (a), um elevador parado num local com gravidade (b), um elevador não-acelerado num local livre de gravidade (c), um elevador em queda livre num local com gravidade (d). Vemos que para um observador dentro do elevador, a situação (a) é equivalente à (b), enquanto que a (c) é equivalente à (d).

onde

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

é chamada métrica de Minkowski. Para limpar a Eq. (1.4), vamos deixar de escrever os símbolos de somatória, adotando a convenção de Einstein, na qual toda a vez em que aparecem dois índices repetidos existe uma somatória sobre este índice. Se os índices forem letras gregas, a somatória vai de 0 a 3. Se forem latinos, a somatória vai de 1 a 3 (somente as coordenadas espaciais). Desta forma, temos:

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu. \quad (1.6)$$

Vamos reescrever a Eq. (1.2) no referencial original de coordenadas x^μ , no qual existia o campo gravitacional. Dada a regra da cadeia do cálculo diferencial:

$$\frac{d\xi^\mu}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad (1.7)$$

obtemos

$$\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (1.8)$$

Multiplicando os dois lados por $\partial x^\nu / \partial \xi^\mu$, chegamos a

$$\frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0, \quad (1.9)$$

onde $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ é chamada conexão afim, e definida por [8]:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (1.10)$$

Por construção, a Eq. (1.9), chamada equação da geodésica, é válida em qualquer referencial e para qualquer sistema de coordenadas. De acordo com o princípio de equivalência, ela então descreve o movimento de uma partícula num campo gravitacional, que tem sua influência através da conexão afim.

É interessante para nós reescrevermos, também nas coordenadas x^μ , a Eq. (1.6). Fazendo uma transformação em $d\xi^\mu$ semelhante à apresentada na Eq. (1.7), temos:

$$d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta = -g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.11)$$

$$g_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta}. \quad (1.12)$$

O elemento $g_{\alpha\beta}$ é chamado de métrica, e ele é tal que mantém $d\tau^2$ invariante numa transformação de coordenadas.

Ao calcularmos as derivadas da métrica em função das coordenadas x^γ , obtemos termos que contém segundas derivadas de ξ^μ em relação a x^α . As segundas derivadas podem ser expressas em termos da conexão afim da Eq. (1.10):

$$\frac{\partial^2 \xi^\gamma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\nu}. \quad (1.13)$$

Por fim, lembrando da Eq. (1.12), chegamos a:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma} = g_{\delta\beta} \Gamma_{\gamma\alpha}^\delta + g_{\alpha\delta} \Gamma_{\gamma\beta}^\delta. \quad (1.14)$$

Da Eq. (1.14) podemos obter que:

$$g_{\gamma\mu,\nu} + g_{\gamma\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\gamma} = 2g_{\lambda\gamma} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda, \quad (1.15)$$

onde $g_{\mu\nu,\gamma} \equiv \partial g_{\mu\nu} / \partial x^\gamma$. Definindo $g^{\mu\nu}$ tal que $g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_\lambda^\mu$, sendo δ_λ^μ o delta de Kronecker, temos, finalmente [8]:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{g^{\mu\nu}}{2} [g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}] \quad (1.16)$$

Da equação acima percebemos que, se conhecermos a métrica $g_{\mu\nu}$, podemos descrever o movimento das partículas através da equação da geodésica sem mais fazer referência a sistemas localmente inerciais ξ^μ . E como a influência da gravidade na trajetória aparece na conexão afim e esta pode ser determinada unicamente pela métrica, esta última contém toda a informação sobre os campos gravitacionais. Notamos também que para desenvolver as equações acima, apenas consideramos válido

o princípio da equivalência, e não como os campos gravitacionais ou a métrica $g_{\mu\nu}$ são determinados. O que fizemos foi generalizar a equação do movimento da relatividade restrita para qualquer sistema de coordenadas (incluindo curvilíneas, não inerciais...), de forma a descrever o movimento em campos gravitacionais através do princípio de equivalência. O que nos falta agora é descobrir o que determina as características da métrica em questão.

Como espera-se que esta teoria da gravitação resulte na teoria newtoniana no limite de baixas velocidades e campos fracos e estacionários, analisemos a equação de movimento de uma partícula nestas condições. O limite de baixas velocidades nos faz desconsiderar termos contendo $dx^i/d\tau$ em favor de $cdt/d\tau$, o que leva a Eq. (1.9) a:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (1.17)$$

O fato do campo ser fraco significa que podemos expandir a métrica em primeira ordem na teoria das perturbações: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Com esta condição, obtemos, mantendo apenas termos de primeira ordem:

$$\Gamma_{00}^\mu \simeq \frac{\eta^{\mu\nu}}{2} [2h_{0\nu,0} - h_{00,\nu}], \quad (1.18)$$

onde o termo com derivada no tempo é zero devido à condição de campos estacionários. Desta maneira, a Eq. (1.17) leva a:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{d\tau^2} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 \simeq 0, \quad (1.19)$$

$$\frac{d^2 ct}{d\tau^2} \simeq 0. \quad (1.20)$$

Da Eq. (1.20) temos que a derivada de t em relação a τ é uma constante, que pode ser descartada na Eq. (1.19) dividindo ambos os lados por essa constante, resultando em:

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \simeq \frac{c^2}{2} \vec{\nabla} h_{00}. \quad (1.21)$$

Comparando este resultado com o esperado na mecânica clássica,

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi, \quad (1.22)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional, concluímos que $g_{00} \simeq -(1 + \frac{2}{c^2} \phi)$ [8].

Para determinarmos como o campo gravitacional é gerado na relatividade geral, vamos observar a equação de Poisson da gravitação de Newton:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_M, \quad (1.23)$$

onde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ é a constante da gravitação universal e ρ_M é a den-

sidade de massa. Na hidrodinâmica relativística, um fluido perfeito é caracterizado por um tensor $T_{\mu\nu}$ chamado Tensor Energia Momento, cuja componente $T_{00} = \rho$ é a densidade de energia. No caso não-relativístico, $\rho = \rho_M c^2$, e assim:

$$\nabla^2 g_{00} \simeq -\frac{8\pi G}{c^4} T_{00}. \quad (1.24)$$

A partir da equação acima podemos supor que as outras componentes vão se comportar de maneira similar:

$$G_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.25)$$

sendo que $G_{\mu\nu}$ é calculado a partir da métrica $g_{\mu\nu}$. Notamos que, assim como na mecânica de Newton, a fonte de gravidade na Relatividade Geral é a matéria. Esse fato não é surpreendente, uma vez que a Relatividade Geral se baseou, como vimos, na gravitação clássica. Entretanto, nesta teoria não é apenas a quantidade de energia (ou de massa) que causa a gravidade, mas também sua pressão e velocidade, por exemplo.

Precisamos agora descobrir o que é $G_{\mu\nu}$. Primeiramente, ele deve ser um tensor para que a igualdade com outro tensor, o Energia Momento $T_{\mu\nu}$, seja válida em qualquer referencial. Além disso, como o tensor $T_{\mu\nu}$ é simétrico na troca de μ por ν , o tensor $G_{\mu\nu}$ também deve ser simétrico. E como vimos na Eq. (1.24), ele deve conter segundas derivadas da métrica. Também é importante notar que a conservação da energia, no contexto da relatividade geral expressa através da derivada covariante do Tensor Energia Momento [8],

$$T^{\mu}_{\nu;\mu} \equiv \frac{\partial T^{\mu}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} T^{\lambda}_{\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} T^{\mu}_{\lambda} = 0, \quad (1.26)$$

implica que $G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$. Por fim, no limite adotado na dedução da Eq. (1.24), $G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00}$.

O único tensor linear nas segundas derivadas da métrica possível de ser construído é conhecido como Tensor de Curvatura:

$$R^{\mu}_{\nu\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}_{\nu\alpha,\beta} - \Gamma^{\mu}_{\nu\beta,\alpha} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\alpha} \Gamma^{\mu}_{\beta\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\beta} \Gamma^{\mu}_{\alpha\lambda}. \quad (1.27)$$

Este tensor possui uma propriedade muito interessante: no espaço de Minkowski, ele é nulo, e portanto continua nulo para qualquer referencial utilizado para descrever este espaço. Essa propriedade nos permite distinguir, portanto, métricas realmente curvas (efeito da gravidade) de métricas planas escritas em referenciais não-inerciais. Esta propriedade vem da presença de segundas derivadas da métrica que, em espaços curvos, não se anulam em referenciais localmente inerciais. Assim, não é uma grande surpresa que esse tensor possa estar relacionado com $T_{\mu\nu}$.

A partir do tensor de curvatura, é possível construir suas combinações lineares

chamadas Tensor de Ricci e Escalar de Curvatura:

$$R_{\mu\nu} \equiv R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (1.28)$$

$$R \equiv g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}, \quad (1.29)$$

respectivamente. Estes são as únicas contrações que podem ser construídas a partir do Tensor de Curvatura, o que nos leva a propor que $G_{\mu\nu}$ seja uma combinação linear das duas contrações:

$$G_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}R, \quad (1.30)$$

onde a e b são constantes, e $G_{\mu\nu}$ é, como queríamos, simétrico. Através de propriedades das derivadas covariantes de $R_{\mu\nu}$, R e $T_{\mu\nu}$, chegamos a uma relação entre as duas constantes, e o limite newtoniano fixa a última constante, finalmente resultando em:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.31)$$

chamado de Tensor de Einstein, que satisfaz todas as propriedades que queríamos. Com este tensor temos então as chamadas Equações de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.32)$$

É interessante notar que podemos adicionar uma constante multiplicando a métrica nas Equações de Einstein e não alterar suas propriedades [com exceção do limite newtoniano da Eq. (1.25)]. Portanto, ao concordarmos sobre o sucesso da mecânica newtoniana, devemos assumir que o valor desta constante Λ , chamada de constante cosmológica, é muito pequeno [8]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (1.33)$$

A teoria da Relatividade Geral de Einstein é a teoria de gravitação mais aceita na comunidade científica atualmente (entre as teorias alternativas, está a Brans-Dicke e outras teorias escalares-tensoriais, por exemplo). Seus testes observacionais mais famosos, apresentados para distingüi-la da teoria newtoniana, são a determinação da velocidade de precessão do periélio de Mercúrio e o ângulo de desvio da luz causado pela gravidade. Outros testes incluem o desvio para o vermelho gravitacional, realizado em 1959 por R. V. Pound e G. A. Rebka Jr. [10], e a emissão de ondas gravitacionais. Apesar dessas ondas não terem sido detectadas diretamente, a evolução da órbita do sistema binário Hulse-Taylor, descoberto em 1974, está de acordo com a perda de energia prevista através dessa emissão [11]. Experimentos como o *Gravity Probe B*, recém-concluído, procuram testar previsões de precessão de giroscópios, por exemplo. Resultados preliminares já indicam concordância dentro de 1% entre

um dos efeitos que causam a precessão e as observações [12].

1.3 O modelo cosmológico padrão

O sucesso da mecânica newtoniana ajudou a tirar o planeta Terra do centro do Universo, através da adoção do paradigma heliocêntrico. Essa adoção não significou necessariamente que o Sol ou o sistema solar fosse o centro do universo, uma vez que, já nesta época, existiam especulações sobre o que eram a Via Láctea e as nebulosas, além das sobre o caráter finito ou infinito do universo. Em 1610, Galileo Galilei observou a Via Láctea e notou que ela era composta por inúmeras estrelas [13]. Em 1750, Thomas Wright imaginou que a Via Láctea tinha tal aspecto pois seu formato era de disco e o Sol se situava dentro deste. A primeira observação que sustentou essa hipótese foi feita pelo Astrônomo descobridor de Urano, Frederick William Herschel, em 1785. Como Herschel não suspeitava que a luminosidade das estrelas poderia ser alterada por um meio intragaláctico, concluiu que o Sol se situava próximo do centro da Via Láctea. Apesar da sugestão feita pelo filósofo Immanuel Kant em 1755 de que as nebulosas eram sistemas de estrelas separados da Via Láctea, ou Universos-Ilha, as observações da época não tinham resolução suficiente para sustentar firmemente tal afirmação [13]. Essa dúvida permaneceu por mais de um século, sendo que a imagem da Via Láctea como sendo o universo completo, contendo as nebulosas, se manteve firme, talvez até com mais força que sua alternativa.

Um importante trabalho sobre a distribuição das estrelas foi publicado em 1922, pelo astrônomo holandês Jacobus Kapteyn, no qual apresentava seu sistema, conhecido como Universo de Kapteyn, de 50.000 anos-luz de diâmetro e 6.000 de espessura, com o Sol no centro. Cinco anos antes, o astrônomo estadunidense Harlow Shapley chegou a conclusões muito diferentes: seu sistema era cinco vezes maior, incluía algumas nebulosas e localizava o Sol a 65.000 anos-luz do centro da distribuição [13]. Símbolo da falta de consenso sobre galáxias e o universo foi o chamado Grande Debate, realizado em 1920 entre os astrônomos estadunidenses Shapley e Heber Doust Curtis. Shapley argumentava que a Via Láctea compreendia todo o universo, que as nebulosas faziam parte dela e que o Sol estava deslocado do centro. Curtis afirmava que a Via Láctea era mais uma das várias galáxias, vistas como nebulosas, e que o Sol estava no centro da nossa [14]. Curiosamente, a concepção atual da Via Láctea e do Universo contém elementos das duas visões, mas aqueles que retiram o foco sobre nossa posição: a Via Láctea é apenas uma das muitas galáxias do universo, e o Sol não ocupa nenhuma posição privilegiada.

As observações de Edwin Hubble, publicadas em 1929, tiveram um papel importante na conclusão desse debate. Através da observação de estrelas cefeidas, Hubble percebeu que certas nebulosas estavam tão distantes que não poderiam pertencer à Via Láctea [13]. Além disso, Hubble notou uma relação entre a distância destas

FIGURE 1
Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

Radial velocities, corrected for solar motion, are plotted against distances estimated from involved stars and mean luminosities of nebulae in a cluster. The black discs and full line represent the solution for solar motion using the nebulae individually; the circles and broken line represent the solution combining the nebulae into groups; the cross represents the mean velocity corresponding to the mean distance of 22 nebulae whose distances could not be estimated individually.

Figura 1.2: Gráfico do trabalho original de Edwin Hubble, publicado em 1929 [15]. Podemos perceber a tendência de afastamento das demais galáxias em relação a nós, e que essa tendência é proporcional à distância.

nebulosas e seu desvio para o vermelho, ou *redshift* (ver Figura 1.2). Tal relação indicava a expansão do universo que, dada a instabilidade dos modelos cosmológicos estáticos, poderia até ser esperada. De fato, após a publicação do trabalho de Hubble, Einstein se arrependeu de ter introduzido a constante cosmológica em suas equações, uma vez que a crença no universo estático o desviou da previsão da expansão do universo.

Essa sucessão de eventos históricos provavelmente induziu a formulação do Princípio Cosmológico, uma vez que as observações de grandes escalas da época eram praticamente inexistentes. Como afirma Steven Weinberg, “*Modern science began with the discovery that the earth is not at the center of the universe. Antianthropocentrism has become incorporated into the scientific mentality, and no one now would seriously suggest that the earth, or solar system, or our galaxy, or our local group of galaxies, occupies any specially favored position in the cosmos. Rather, our intuition now runs in precisely the opposite direction. A large portion of modern cosmological theory is built on the Cosmological Principle, the hypothesis that all positions in the universe are essentially equivalent.*” [8].

O princípio cosmológico afirma que o universo é espacialmente homogêneo e isotrópico em grandes escalas. Esta afirmação é interessante pois nos leva a uma única métrica possível, simples, que possui solução exata nas equações de Einstein: a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (ou métrica FLRW), primeiramente derivada pelo físico soviético Alexander Friedmann em 1922-24 e rigorosamente provada como a única solução isotrópica e homogênea das equações de Ein-

stein por Howard P. Robertson e Arthur G. Walker, em 1935 [16, 17].

1.3.1 A métrica FLRW e a cosmografia

Para descrever um espaço isotrópico, é interessante utilizar coordenadas esféricas (ρ, θ, ϕ) . A isotropia aparece através das coordenadas angulares, e resulta que o elemento de linha numa esfera de raio unitário é [8]:

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (1.34)$$

Logo, se quisermos considerar a isotropia no espaço tridimensional, adotamos a seguinte forma:

$$dl^2 = d\rho^2 + f^2(\rho) [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2]. \quad (1.35)$$

Para incluirmos a homogeneidade, a Eq. (1.35) deve ter a mesma forma após uma translação. Essa condição restringe a função $f(\rho)$ a:

$$f(\rho) = \frac{\sin(\sqrt{k}\rho)}{\sqrt{k}}, \quad (1.36)$$

onde k é uma constante real arbitrária [16]. Através da mudança de variável $r = f(\rho)$, chegamos ao elemento de linha

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2]. \quad (1.37)$$

Para $k = 0$, temos um espaço plano, enquanto que para $k > 0$ temos um espaço curvo fechado, e com $k < 0$ um espaço curvo aberto.

A partir do elemento de linha apresentado na Eq. (1.37) podemos construir a distância invariante $ds^2 = -d\tau^2$ da forma mais genérica possível, multiplicando o elemento de linha por uma função do tempo. Assim, obtemos finalmente, em acordo com [17]:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.38)$$

onde $a(t)$ é chamado fator de escala. Se a curvatura for nula ($k = 0$) e o fator de escala for constante, temos o espaço-tempo de Minkowski. Da Eq. (1.38) obtemos a métrica de FLRW em coordenadas esféricas, da qual vemos que toda a dinâmica do universo homogêneo e isotrópico se encontra numa única função: o fator de escala $a(t)$.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Figura 1.3: Consideramos acima um caso em que o fator de escala cresce com o tempo t . A grade que determina as coordenadas comóveis cresce com o fator de escala, de forma que, apesar da distância física entre os pontos vermelhos aumentar com o tempo, a distância em coordenadas permanece constante.

Para um fóton, $ds^2 = 0$, e portanto

$$cdt = a(t)dl, \quad (1.40)$$

com dl dado pela Eq. (1.37). Como um fóton consegue percorrer, num intervalo de tempo dt , a distância física cdt , dessa equação vemos que podemos expressar a distância física infinitesimal através de $a(t)dl$. Ou seja, mesmo para uma distância dl fixa, a distância física varia com o fator de escala. Por esse motivo, dl é chamada de distância infinitesimal comóvel, e as coordenadas r , θ e ϕ que a compõem são chamadas coordenadas comóveis.

Podemos compreender as coordenadas comóveis como os nós de uma grade que possui arestas proporcionais ao fator de escala, de forma que mesmo com a grade expandindo ou contraindo, o número de nós entre um determinado nó e outro é sempre o mesmo. Dito de outra forma, a distância comóvel entre dois pontos da grade é sempre a mesma, independentemente do que acontece com o fator de escala - veja a Figura 1.3.

Esses conceitos são extremamente úteis para a interpretação das velocidades radiais observadas de galáxias. Observações como as realizadas por Hubble em 1929 mostram que, independentemente da direção do céu observada, as galáxias tendem a se afastar de nós, com uma média de velocidades crescente com a distância [15]. Vemos que, no esquema da Figura 1.3, o fenômeno se repete: qualquer que seja o ponto escolhido para observar os demais pontos, nota-se um afastamento, independente da direção, com velocidade proporcional à distância. Desvios desta regra são interpretados como movimentos sobre a grade, ou seja, o objeto observado está variando suas coordenadas comóveis. Da relação entre distância física d_f e distância comóvel χ , $d_f = a\chi$, obtemos a velocidade observada:

$$\dot{d}_f = \dot{a}\chi + a\dot{\chi}. \quad (1.41)$$

Assim, o ajuste feito por Hubble, apresentado na Figura 1.2, representa o primeiro termo da direita da Eq. (1.41), chamado de fluxo de Hubble. Os desvios deste fluxo aparecem no segundo termo da direita e correspondem a velocidades peculiares, ou seja, movimentos sobre a grade comóvel. No caso da velocidade peculiar ser negligível frente ao fluxo de Hubble, o que ocorre para grandes distâncias comóveis, a velocidade observada é praticamente o fluxo de Hubble. Da Eq. (1.40), vemos que a velocidade que não pode exceder a da luz é a velocidade peculiar, adl/dt .

Um observável importante da cosmologia é o desvio para o vermelho, ou *redshift*. Ele corresponde a um deslocamento na frequência do espectro de um objeto observado. Para entendermos a relação dele com o fator de escala, vamos supor que esse objeto não possui velocidade peculiar e que emite ondas eletromagnéticas em nossa direção. Podemos calcular o tempo que um pico da onda demora para chegar na Terra usando as Eqs. (1.40) e (1.37), de onde resulta:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad (1.42)$$

onde t_1 é o instante em que o pico parte do objeto, t_0 o instante em que o pico chega na Terra e r_1 a coordenada comóvel do objeto [8]. O resultado da integral é a distância comóvel entre nós e o objeto. Como ele não possui velocidade peculiar, essa distância é a mesma em qualquer instante. Vamos então calcular a mesma distância para o pico seguinte:

$$\int_{t_1+T_1}^{t_0+T_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_{r_1}^0 \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}, \quad (1.43)$$

onde T_0 é o intervalo de tempo observado, na Terra, entre o primeiro pico e o segundo, ou seja, é o período observado; e T_1 é o período da radiação emitida. Subtraindo a Eq. (1.42) da (1.43), obtemos:

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \frac{cdt}{a(t)} - \int_{t_1}^{t_1+T_1} \frac{cdt}{a(t)} = 0. \quad (1.44)$$

Como o período de uma onda eletromagnética é muito pequeno, vamos simplificar as integrais acima, chegando a:

$$\frac{T_0}{a(t_0)} = \frac{T_1}{a(t_1)}, \quad (1.45)$$

o que leva à seguinte relação para a frequência da radiação emitida:

$$\nu_0 a(t_0) = \nu_1 a(t_1). \quad (1.46)$$

Figura 1.4: Fótons emitidos isotropicamente pelo objeto central, em azul, durante um intervalo de tempo, caminham em linha reta. A região preenchida por esses fótons (representada pela cor verde-água) compreende uma casca esférica de espessura inicialmente proporcional ao intervalo de tempo durante o qual os fótons foram emitidos. Com o movimento dos fótons, a casca aumenta seu raio, mas devido à expansão do espaço, a espessura da casca aumenta, o que faz o fluxo de fótons diminuir.

Da definição de *redshift*, $z \equiv (\nu_1 - \nu_0)/\nu_0$, temos [8]:

$$z = \frac{a(t_0) - a(t_1)}{a(t_1)} = \frac{a_0 - a_1}{a_1}. \quad (1.47)$$

Vemos assim que, medindo o *redshift* de um objeto com pequena velocidade peculiar, podemos saber como era o fator de escala na época quando a radiação que observamos hoje foi emitida, em termos do fator de escala hoje. Como o valor de a_0 é uma escolha arbitrária, em geral se estabelece $a_0 = 1$. Também vemos que a relação entre *redshift* e fator de escala independe da geometria do universo e da relação entre matéria e espaço.

Outros observáveis são a luminosidade aparente (ou fluxo) e o ângulo preenchido no céu por um objeto. Para tratarmos da primeira, vamos considerar um objeto emissor de radiação de potência L_1 , que é proporcional ao número de fótons emitidos num certo intervalo de tempo n_1 e suas energias E_1 : $L_1 \propto n_1 E_1$. A potência observada L_0 também é proporcional ao número de fótons que atravessam uma superfície num certo intervalo de tempo e a energia dos fótons: $L_0 \propto n_0 E_0$. Esses fótons emitidos se distanciam da fonte radialmente, compreendendo então uma casca esférica que se expande ao longo do tempo, e portanto a densidade de fótons diminui. Enquanto num espaço de Minkowski essa diluição se dá apenas através do aumento da área da casca esférica, num espaço em expansão, como o de FLRW, a espessura da casca esférica aumenta também, devido à expansão do espaço (ver Figura 1.4). Logo, o número de fótons que chegam, por unidade de tempo, numa certa distância segue a relação $n_1 a_1 = n_0 a_0$ [18].

Paralelamente, como veremos mais adiante, a energia de cada fóton segue uma relação semelhante: $E_1 a_1 = E_0 a_0$, ou seja, eles perdem energia com a expansão do universo [considerando a relação de de Broglie, isso pode ser constatado a partir da Eq. (1.46)]. Dessas relações resulta que a potência observada numa casca esférica hoje (t_0 , com $a(t_0) = 1$) é:

$$L_0 = \frac{a_1^2}{a_0^2} L_1 = a_1^2 L_1. \quad (1.48)$$

Como não podemos observar os fótons sobre toda a esfera - o que observamos é a potência por unidade de área, ou fluxo F , temos:

$$F = \frac{L_0}{4\pi d_f^2(t_0)} = \frac{L_0}{4\pi a^2(t_0)\chi^2} = \frac{a_1^2 L_1}{4\pi\chi^2}. \quad (1.49)$$

Se quisermos utilizar a fórmula tradicional de fluxo, podemos definir uma distância chamada distância de luminosidade d_L , que é aquela com a qual a relação entre fluxo e potência permanece igual ao caso euclidiano, ou seja,

$$F = \frac{L_1}{4\pi d_L^2}, \quad d_L \equiv \frac{\chi}{a_1}, \quad (1.50)$$

onde a_1 é o fator de escala na época em que a radiação foi emitida. Do ponto de vista prático, devemos conhecer qual a luminosidade esperada L_1 para um determinado objeto pra obtermos d_L a partir da medição do fluxo F . A partir dessa distância, podemos obter a distância comóvel χ através do fator de escala, que pode ser calculado utilizando uma medição de *redshift*.

Para o cálculo do ângulo preenchido por um objeto, é mais interessante usar a variável ρ para escrever a distância comóvel infinitesimal dl . Através das Eqs. (1.35) e (1.36), temos:

$$dl^2 = d\rho^2 + \frac{\sin^2(\sqrt{k}\rho)}{k} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.51)$$

Para um objeto de tamanho comóvel dl a uma distância ρ fixa, o ângulo $d\theta$ que ele apresenta no céu obedece à relação:

$$d\theta = \left[\frac{\sin(\sqrt{k}\rho)}{\sqrt{k}} \right]^{-1} dl. \quad (1.52)$$

Para um objeto de comprimento físico h constante e conhecido, é melhor escrever a relação acima da forma:

$$d\theta = \left[\frac{\sin(\sqrt{k}\rho)}{\sqrt{k}} \right]^{-1} \frac{h}{a_1}. \quad (1.53)$$

É interessante perceber que, mesmo num universo estático [$a(t) = cte$], a relação entre o ângulo observado no céu e o tamanho do objeto depende da distância de forma diferente que no caso euclidiano. Esta relação é a mesma apenas para o caso

de universo plano ($k = 0$). Se quisermos utilizar a relação euclidiana entre estas grandezas,

$$d\theta = \frac{h}{d_A}, \quad (1.54)$$

temos que definir uma nova distância d_A , chamada distância angular, pois o ângulo observado no céu obedece à Eq. (1.53). Logo, a distância angular se relaciona com a distância comóvel χ através da equação abaixo, conhecida na literatura [18]:

$$d_A \equiv a_1 \frac{\text{sen}(\sqrt{k}\chi)}{\sqrt{k}}, \quad (1.55)$$

sendo que da Eq. (1.51) vemos que, para um fóton viajando em linha reta, $dl = d\rho$, e portanto $\chi = \int dl = \rho$. Assim, utilizando medidas de distância angular, distância de luminosidade e *redshift* de um mesmo objeto, podemos medir a curvatura k do universo. Esta relação entre ângulos e distâncias pode ser melhor entendida através da Figura 1.5. Esses resultados são independentes da teoria de gravitação utilizada, ou seja, da relação entre gravidade e matéria. A única necessidade é que valha o princípio da equivalência e a hipótese de homogeneidade e isotropia. Por fim, quando a curvatura espacial do universo k é nula, podemos estabelecer uma relação simples entre a distância angular d_A e a distância de luminosidade d_L . Considerando o limite da Eq. (1.55):

$$\lim_{k \rightarrow 0} a_1 \frac{\text{sen}(\sqrt{k}\chi)}{\sqrt{k}} = a_1 \chi, \quad (1.56)$$

e as Eqs. (1.50) e (1.47), temos que:

$$d_L = (1 + z)^2 d_A. \quad (1.57)$$

Uma grandeza muito utilizada na cosmologia é o chamado horizonte comóvel, $\eta(t)$. Ele corresponde à distância comóvel χ que a luz pode percorrer desde o início do universo ($t' = 0$) até o tempo t [18]:

$$\eta(t) \equiv \int_0^t dl = \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}. \quad (1.58)$$

Como esta é uma grandeza monotônica, ela é muitas vezes utilizada como parametrização do tempo. Dividindo esta grandeza por c , a chamamos de tempo conforme.

1.3.2 Evolução temporal da matéria homogênea

Logo no início da cosmologia moderna, surgiram evidências de que existia mais matéria no universo do que podíamos ver. Em 1933, o astrofísico suíço Fritz Zwicky notou que, quando se inferia a massa das galáxias do aglomerado de Coma, utilizando o teorema de Virial, através de medidas de velocidade, a massa era duas ordens de grandeza maior do que a que seria esperada de medições de luminosidade

Figura 1.5: Um objeto de comprimento físico h situado a uma distância comóvel χ é observado da posição em azul. A trajetória relativa de dois fótons depende da curvatura do espaço. O caso plano, de curvatura k nula, corresponde à geometria euclidiana, na qual dois fótons paralelos continuam paralelos. Num universo de curvatura k positiva, chamado de fechado ou esférico, dois fótons paralelos convergem, o que faz com que o ângulo ocupado no céu pelo objeto seja maior que no universo plano. Já num de curvatura k negativa, chamado de aberto ou hiperbólico, dois fótons paralelos divergem, o que faz com que o ângulo ocupado no céu pelo objeto seja menor que no universo plano.

[19]. Em 1978, notam-se certas anomalias na curva de rotação de galáxias, como se a distribuição de massa não acompanhasse a distribuição de luminosidade [20, 21]. Além do acúmulo desses tipos de observações, surgiram evidências dessa “matéria escura” invisível em outros fenômenos: a temperatura observada de gases intragalácticos, através de raios-X, indicava um potencial gravitacional maior que o esperado pela observação da matéria luminosa [22]. Observações mais recentes, como o fenômeno de lentes gravitacionais também indicam a existência de mais massa além da luminosa [23]. Até questões cosmológicas, como a formação de estruturas e o espectro de anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo, corroboram esse novo tipo de matéria [18]. Espera-se que ela seja composta por partículas massivas que interagem fracamente.

Além dessa importante descoberta, em 1998 começaram a surgir observações de supernovas do tipo Ia que indicavam uma aceleração da expansão do universo [24]. Além disso, observações da Radiação Cósmica de Fundo levam a um universo plano, o que é incompatível com a quantidade de matéria observada [25]. Essas e outras observações indicam a existência de mais outro elemento ainda desconhecido, ao qual se dá o nome de “energia escura”, cujas propriedades são pouco usuais quando comparadas a outros tipos de matéria. De qualquer forma, vemos que precisamos considerar alguns elementos de natureza ainda desconhecida ao lidar com o universo.

Para compreendermos o comportamento da matéria no universo, é importante considerar a teoria da Relatividade Geral e a Mecânica Estatística. Da última, temos

as relações simples:

$$\rho(t, \vec{x}) = g \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} f(t, \vec{x}, \vec{p}) E(p), \quad (1.59)$$

$$P(t, \vec{x}) = g \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} f(t, \vec{x}, \vec{p}) \frac{p^2 c^2}{3E(p)}, \quad (1.60)$$

onde ρ é a densidade de energia do conjunto de partículas, P sua pressão, g é a degenerescência de estados com mesma energia, $\hbar = 6,582 \cdot 10^{-16} \text{eV} \cdot \text{s}$ é a constante de Planck dividida por 2π , $f(\vec{x}, \vec{p})$ é a função de distribuição das partículas, E a energia e p o momento de cada partícula. No caso de partículas relativísticas, $E \simeq pc$, e portanto as Eqs. (1.59) e (1.60) resultam em:

$$P \simeq \frac{\rho}{3}. \quad (1.61)$$

Para fótons, a igualdade na Eq. (1.61) é exata. De outro lado, ao considerarmos partículas não-relativísticas, podemos aproximar a equação

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (1.62)$$

por $E \simeq mc^2$ e considerar $pc \ll E$, de onde obtemos [18]:

$$P \simeq 0. \quad (1.63)$$

Para esta última dedução, na realidade precisamos considerar que a função de distribuição $f(t, \vec{x}, \vec{p})$ contém termos do tipo $e^{-\alpha E}$, com $\alpha = cte$, que, para massas m elevadas (quando comparadas com a temperatura das partículas), suprimem toda a integral.

Esses resultados nos levam à evolução da densidade de energia em função do fator de escala, quando combinados com a conservação da energia [8]:

$$T^\mu_{\nu;\mu} \equiv \frac{\partial T^\mu_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu} T^\alpha_\nu - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} T^\mu_\alpha = 0. \quad (1.64)$$

Para utilizarmos a Eq. (1.64), precisamos calcular a conexão afim [Eq. (1.16)] com a métrica de FLRW, dada na Eq. (1.39), de onde se obtém:

$$\Gamma^0_{ij} = a \frac{da}{dt} \tilde{g}_{ij}, \quad (1.65)$$

$$\Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \delta_{ij}, \quad (1.66)$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\tilde{g}^{il}}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial \tilde{g}_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial x^l} \right), \quad (1.67)$$

onde $\tilde{g}_{\mu\nu}$ é a métrica de FLRW com $a = 1$:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (1.68)$$

Todas as demais componentes da conexão são zero. Além disso, escolhemos um referencial em repouso em relação ao fluido descrito por $T_{\mu\nu}$, no sentido que, nesse referencial, o fluido é isotrópico, e então o Tensor Energia Momento adquire uma forma simples:

$$T^\mu_\nu = \begin{pmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

Como estamos considerando um fluido homogêneo, $\rho = \rho(t)$ e $P = P(t)$ não dependem das coordenadas espaciais. Assim, finalmente chegamos na equação de conservação de energia para um universo em expansão:

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + \frac{1}{a(t)} \frac{da(t)}{dt} [3\rho(t) + 3P(t)] = 0. \quad (1.70)$$

Fazendo uma mudança de variável $\rho(t) \rightarrow \rho(a)$, temos:

$$\frac{d\rho(a)}{da} = -\frac{3\rho(a) + 3P(a)}{a}, \quad (1.71)$$

em acordo com a literatura [26]. Para o caso da matéria não-relativística, fazemos $P(a) = 0$, e integrando a Eq. (1.71), obtemos:

$$\rho_m(a) = \rho_m^0 a^{-3}, \quad (1.72)$$

onde ρ_m^0 é a densidade atual de energia na forma de matéria não-relativística. Vemos que essa densidade é inversamente proporcional ao volume do universo. Isso era esperado, pois, como a energia de cada partícula é aproximadamente $E \simeq mc^2 = cte$, $\rho_m(a) \simeq mc^2 n_m(a)$, onde $n_m(a)$ é a densidade em número de partículas, que deve cair com o fator de escala ao cubo.

No caso dos fótons, temos $P = \rho/3$, o que nos leva a:

$$\rho_\gamma(a) = \rho_\gamma^0 a^{-4}. \quad (1.73)$$

Considerando que o número de fótons no universo (desconsiderando interações) é constante, $n_\gamma(a) \propto a^{-3}$, vemos que a energia de cada fóton deve ser inversamente proporcional ao fator de escala, conforme afirmamos na dedução da Eq. (1.48). Para

uma dedução mais rigorosa, precisaríamos calcular a geodésica para uma partícula relativística ($g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = 0$, sendo P^μ o quadrimomento), escolhendo o parâmetro afim λ tal que $dx^\mu/d\lambda = P^\mu$.

É comum referir-se à temperatura T da radiação cósmica de fundo, ou seja, à temperatura dos fótons de densidade de energia ρ_γ . Para acharmos a relação entre a densidade de energia e sua temperatura, partimos da Eq. (1.59) e utilizamos a função de distribuição de Bose-Einstein, que nos leva a:

$$\rho_\gamma(t) = 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \frac{pc}{e^{(pc-\mu)/[k_B T(t)]} - 1}, \quad (1.74)$$

onde μ é o potencial químico, que para fótons é zero [18], e $k_B = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{eV/K}$ é a constante de Boltzmann. Como as funções da integral não dependem da direção de propagação $\hat{p}$, é melhor escrever a Eq. (1.74) utilizando coordenadas esféricas. A parte angular resulta apenas em um fator de 4π . Logo, temos:

$$\rho_\gamma(t) = 8\pi \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{pc}{e^{pc/[k_B T(t)]} - 1}. \quad (1.75)$$

Através da mudança de variável $x = pc/k_B T$, temos:

$$\rho_\gamma(t) = \frac{k_B^4 T^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \quad (1.76)$$

sendo que a integral restante possui resultado exato e igual a $\pi^4/15$ [18]. Assim,

$$\rho_\gamma(t) = \frac{\pi^2 k_B^4 T^4(t)}{15 \hbar^3 c^3}, \quad (1.77)$$

que é justamente o esperado para uma radiação de corpo negro. Como $\rho_\gamma \propto a^{-4}$, vemos que a temperatura dessa radiação $T \propto a^{-1}$. Assim, escrevemos:

$$T(t) = \frac{T_0}{a(t)}, \quad (1.78)$$

onde $T_0 = 2,725\text{K}$ é a temperatura dessa radiação hoje, chamada de radiação cósmica de fundo [27].

O comportamento de outras formas de matéria em geral estão contemplados dentro dessas duas possibilidades: matéria não-relativística e radiação. Como espera-se que a chamada matéria escura seja extremamente massiva (massas maiores que a do próton $m_p = 0,9383\text{GeV}$), seu comportamento é não-relativístico [23]. Já os neutrinos, por sua massa reduzida ($< 1\text{eV}$), com certeza se comportaram como radiação durante muito tempo. Para tratar de um universo preenchido por diversos tipos de matéria, escrevemos $\rho(t) = \rho_m(t) + \rho_\gamma(t) + \rho_\nu(t) + \dots$

Também é possível tratar elementos da geometria do universo como se fossem matéria. Ao calcularmos a componente 0–0 das Equações de Einstein (1.32) com as

conexões afim da métrica de FLRW, apresentadas nas Eqs. (1.65), (1.66) e (1.67), e o Tensor Energia Momento da Eq. (1.69), obtemos uma das chamadas Equações de Friedmann:

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right)^2 + \frac{c^2 k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho. \quad (1.79)$$

Podemos escrever esta equação da forma:

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \left[\rho - \frac{3c^4 k}{8\pi G a^2} \right], \quad (1.80)$$

e interpretá-la como decorrente de um universo plano, composto pelos tipos de matéria contidos em ρ , mais um novo tipo de “matéria”, cujo valor atual é:

$$\rho_k^0 = -\frac{3c^4 k}{8\pi G}, \quad (1.81)$$

e que decai com o quadrado do fator de escala: $\rho_k(a) = \rho_k^0 a^{-2}$. O mesmo pode ser feito com a Constante Cosmológica Λ presente na Eq. (1.33). Passando este termo para o lado direito da equação, temos:

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu R = -\frac{8\pi G}{c^2} \left[T^\mu{}_\nu + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \delta^\mu_\nu \right] = -\frac{8\pi G}{c^2} T'^\mu{}_\nu. \quad (1.82)$$

O novo Tensor Energia Momento $T'^\mu{}_\nu$ contém um tipo de “matéria” cuja densidade é:

$$\rho_\Lambda(a) = \rho_\Lambda^0 = -\frac{\Lambda c^2}{8\pi G}, \quad (1.83)$$

e $P_\Lambda = -\rho_\Lambda$.

1.3.3 Dinâmica do fator de escala

Da resolução das Equações de Einstein, obtemos duas equações, chamadas Equações de Friedmann:

$$H^2(t) + \frac{c^2 k}{a^2(t)} = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho(t), \quad (1.84)$$

$$\frac{2}{a(t)} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + H^2(t) + \frac{c^2 k}{a^2(t)} = -\frac{8\pi G}{c^2} P(t), \quad (1.85)$$

onde $H(t) \equiv \frac{1}{a} \frac{da}{dt}$ é o chamado parâmetro de Hubble, $\rho(t) = \rho_b(t) + \rho_{dm}(t) + \rho_\gamma(t) + \rho_\nu(t) + \rho_\Lambda(t)$ é a densidade total de energia no universo, sendo ρ_ν a densidade de neutrinos, ρ_b a densidade relativa à matéria bariônica e ρ_{dm} a relativa à matéria escura, que em geral espera-se que seja extremamente massiva e portanto não-relativística. $P(t)$ é a pressão total, que também inclui a contribuição dos mesmos elementos que contribuem na densidade. A dedução das Equações de Friedmann podem ser acompanhadas na literatura [8].

Da Eq. (1.84) vemos que podemos definir uma densidade, chamada densidade

crítica $\rho_{cr}(t)$, tal que a curvatura $k = 0$. Para este valor de densidade, vale a relação:

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_{cr}(t). \quad (1.86)$$

Esta relação vale inclusive para $t = t_0$, ou seja, para os valores atuais do parâmetro de Hubble ($H(t_0) = H_0$) e da densidade crítica, que vamos representar simplesmente por ρ_{cr} . Desta forma, podemos substituir a constante que multiplica $\rho(t)$ do lado direito da Eq. (1.84) e ter:

$$H^2 + \frac{c^2 k}{a^2} = H_0^2 \frac{\rho(t)}{\rho_{cr}} = H_0^2 (\Omega_b a^{-3} + \Omega_{dm} a^{-3} + \Omega_\gamma a^{-4} + \Omega_\nu a^{-4} + \Omega_\Lambda), \quad (1.87)$$

onde $\Omega_x = \rho_x^0 / \rho_{cr}$ e $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km/Mpc} \cdot \text{s}$ é chamado de constante de Hubble [28]. Podemos utilizar a Eq. (1.81) para escrever k da mesma forma:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4} + \Omega_\Lambda + \Omega_k a^{-2}}, \quad (1.88)$$

sendo que $\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda$ (por ter a mesma dependência em a , agrupamos $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm}$ e $\Omega_r = \Omega_\gamma + \Omega_\nu$). Observações feitas pelos experimentos *BOOMERanG* e *WMAP*, entre outros, indicam um universo plano. Os resultados do primeiro ano de observação do *WMAP* implicam em $\Omega_k = -0,02 \pm 0,02$ [29]. Por esse motivo, a partir de agora vamos considerar um universo plano, com $k = 0$.

Os valores das frações de densidade Ω_x só podem ser determinados observacionalmente. Ω_b é determinado a partir de observações da abundância dos elementos Li, ^3He , D e ^4He no universo e a partir da Radiação Cósmica de Fundo (RCF), resultando em $\Omega_b = 0,043(3)$ [30]. Ω_γ pode ser obtido da medição temperatura da RCF e utilizando a Eq. (1.77). Observações do *FIRAS*, a bordo do satélite *COBE*, levam a $T_0 = 2,725(2) \text{ K}$ [27], que resulta em $\Omega_\gamma = 4,76 \cdot 10^{-5}$. Deste resultado pode-se calcular $\Omega_\nu = 3,24 \cdot 10^{-5}$ através de considerações entrópicas [18]. Ω_{dm} pode ser obtido também da RCF, assim como de observação de grandes estruturas. Dados do primeiro ano do *WMAP* indicam $\Omega_{dm} = 0,23(5)$ [29]. Dados os valores apresentados até aqui, vemos que a condição que segue a Eq. (1.88) só é satisfeita se fixarmos $\Omega_\Lambda \simeq 0,73$. Curiosamente, este valor está de acordo com as observações de Supernovas de tipo Ia, sensíveis a efeitos gravitacionais típicos de uma constante cosmológica [31]. Entretanto, poderíamos ter incluído na Eq. (1.88) outros elementos desconhecidos, que poderiam suprir a falta de matéria observada e promover os efeitos observados através das Supernovas. Assim, vamos flexibilizar o significado de Ω_Λ para qualquer coisa que possa gerar a aceleração do fator de escala, chamando este elemento de energia escura.

Na Figura 1.6 vemos como as densidades variam com o fator de escala, e que o universo é dominado por um certo tipo de elemento, em cada época. Esse fato é comumente usado para cálculos aproximados: consideramos que, numa época

Figura 1.6: Evolução das densidades de matéria não relativística ρ_m , de radiação ρ_r e de energia escura $\rho_\Lambda = cte$ com o fator de escala do universo, a . As densidades estão normalizadas pelo valor da densidade atual total, ρ_0 . Vemos que o universo é dominado por tipos de energia diferentes, dependendo da época. Antes de a_{eq} , o universo é dominado por radiação, e depois por matéria. Também podemos perceber que em torno de $a = 0.74$, o universo passa a ser dominado pela energia escura.

dominada por matéria, por exemplo, só existe matéria no universo. Veremos mais adiante que a dependência da densidade com o fator de escala é determinante para vários fenômenos. Por isso, podemos esperar que importantes efeitos ocorram nos momentos em que essa dependência muda, como acontece em $a = a_{eq}$. Essa época pode ser facilmente obtida igualando $\rho_m(a_{eq})$ a $\rho_r(a_{eq})$, que resulta em $a_{eq} = 2,7 \cdot 10^{-4}$.

Da Eq. (1.88) podemos calcular $a(t)$. A Figura 1.7 mostra o resultado. Vemos que o conteúdo do universo altera a evolução do fator de escala com o tempo. A idade do universo é drasticamente modificada nos diferentes modelos, sendo mais jovem para o modelo plano e preenchido por matéria, e mais antigo para o Λ CDM. Em tempos mais recentes, notamos que o Λ CDM é o único modelo em que $a(t)$ possui uma segunda derivada positiva; o representado em azul, aberto, apresenta uma dependência linear. Foi justamente essa segunda derivada, inferida através de observações de supernovas, que levou o modelo Λ CDM ao favoritismo.

Na prática, o que se mede numa supernova é a distância de luminosidade, através do fluxo, e o *redshift*. A Figura 1.8 mostra um conjunto de dados do *Supernova Legacy Survey (SNLS)* e previsões de dois modelos: Λ CDM e o plano, composto apenas por matéria; este último, com $\Omega_m = 1$, está certamente em desacordo com essas observações.

Além de determinar o valor das frações de densidade Ω_x , as observações também

Figura 1.7: Fator de escala a em função do tempo t multiplicado pela constante de Hubble, H_0 , para três casos: universo plano ($k = 0$) e composto por matéria, em vermelho; universo aberto ($k < 0$) e composto por matéria, em azul; e universo plano, composto por matéria e constante cosmológica ($\Omega_m = 0.27$, $\Omega_\Lambda = 0.73$), em preto. Este último é chamado de Λ CDM ou modelo padrão cosmológico. Todos incluem a contribuição da radiação determinada por $T_0 = 2,725K$.

podem restringir a chamada Equação de Estado dessas componentes escuras:

$$P(t) = w(t)\rho(t). \quad (1.89)$$

Como exemplo, para fótons e para a curvatura, temos uma equação de estado constante ($w_\gamma = 1/3$ e $w_k = -1/3$, respectivamente). Esta equação para a constante cosmológica também é constante, $w_\Lambda = -1$, mas como a causa da expansão acelerada pode ser uma matéria exótica, temos que considerar a possibilidade de ter, para a energia escura, $w \neq -1$, ou até mesmo w dependente de t . Resultados do *SNLS*, combinados com medições das oscilações acústicas de bárions do *Sloan Digital Sky Survey* (*SDSS*) indicam, para um $w = cte$, $w = -1,02 \pm 0,11$ [31].

Agora que já vimos como as constantes da natureza G , c , $\hbar$ e k_B entram na cosmologia, vamos passar a utilizar as unidades naturais, nas quais $c = \hbar = k_B = 1$, para não carregar demais as equações.

Figura 1.8: Dados do *Supernova Legacy Survey*, juntos com previsões de modelos [31]. μ_B é um estimador de distância e corresponde basicamente a $5 \log(d_L/10\text{pc})$.

Capítulo 2

Além do equilíbrio

Até aqui consideramos apenas o comportamento de uma matéria homogênea e sem interação, junto a um espaço também homogêneo e sem perturbações. Para nos aprofundarmos ainda mais no conhecimento do universo, é importante considerar, por exemplo, as interações entre os diversos constituintes da matéria. Através dessa abordagem podemos compreender os processos de formação dos elementos químicos no início do universo (a nucleossíntese primordial) e de secessão das interações entre fótons e prótons e elétrons (o desacoplamento dos fótons). Se, além disso, trabalharmos com a teoria de pequenas perturbações sobre o modelo cosmológico padrão isotrópico e homogêneo, permitindo pequenas variações nas densidades de matéria e na curvatura do espaço-tempo, podemos obter mais informação acerca do universo através, por exemplo, das anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo.

2.1 Nucleossíntese e Desacoplamento

Para tratar de nucleossíntese primordial e do desacoplamento dos fótons com a matéria, vamos utilizar a Equação de Boltzmann, que determina a evolução da função de distribuição $f = f(x^\mu, P^\mu)$ de um certo tipo de partículas i em função de suas interações:

$$\frac{df}{d\lambda} = C[f], \quad (2.1)$$

sendo λ um parâmetro afim qualquer, e $C[f]$ é chamado de termos de colisão, e consiste nas interações das quais a partícula i participa [32]. A derivada presente na Eq. (2.1) pode ser escrita da forma:

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \frac{dP^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} P^\mu - \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu P^\alpha P^\beta, \quad (2.2)$$

onde escolhemos λ tal que $dx^\mu/d\lambda = P^\mu$. No segundo termo da direita, utilizamos a equação da geodésica (1.9). No universo homogêneo e isotrópico, com a métrica de FLRW, temos:

$$E \frac{\partial f}{\partial t} - H p^2 \frac{\partial f}{\partial E} = C[f], \quad (2.3)$$

sendo que $-E^2 \equiv g_{00}P^0P^0$ e $p^2 \equiv g_{ij}P^iP^j$. É importante realizar a integral em P^0 lembrando que temos que obedecer a relação $g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = -m^2$, o que é feito através de uma função Delta de Dirac. Em seguida, podemos integrar a Eq. (2.3) em $\vec{p}$ e, utilizando a definição de densidade em número n :

$$n_i = g_i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f_i, \quad (2.4)$$

temos:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + 3Hn_i = \frac{1}{a^3} \frac{\partial(a^3 n_i)}{\partial t} = \frac{g_i}{(2\pi)^3} \int C[f_i] d^3p_i. \quad (2.5)$$

Num processo do tipo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$, envolvendo as quatro partículas 1, 2, 3 e 4, o lado direito da Eq. (2.5) é dado por [32]:

$$\begin{aligned} & \iiint (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |M|^2 \times \\ & [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)] \times \\ & \frac{g_1 d^3p_1}{2(2\pi)^3 E_1} \frac{g_2 d^3p_2}{2(2\pi)^3 E_2} \frac{g_3 d^3p_3}{2(2\pi)^3 E_3} \frac{g_4 d^3p_4}{2(2\pi)^3 E_4}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde $|M|^2$ é a amplitude do espalhamento $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Como, nos processos de interesse, a quantidade de interações entre as partículas é grande, elas estão em equilíbrio térmico local, e portanto assumem as distribuições de equilíbrio de Bose-Einstein, para bósons, e de Fermi-Dirac, para férmions [18]:

$$f_i = \frac{1}{e^{(E_i - \mu_i)/T} \pm 1}. \quad (2.7)$$

É possível, entretanto, aproximar estas distribuições pela de Boltzmann:

$$f_i = e^{-(E_i - \mu_i)/T}, \quad (2.8)$$

e desconsiderar os termos $(1 \pm f_i)$, referentes a efeitos quânticos, da Eq. (2.6). Essas aproximações são possíveis pois, nos casos que nos interessam, o termo $e^{(E_i - \mu_i)/T} \gg 1$ [26]. Além desta razão numérica, a interpretação desse termo nos mostra porque podemos considerar a distribuição clássica. O termo $e^{-\mu_i/T} = V_{pp}/\lambda_T^3$ corresponde à divisão do volume disponível por partícula V_{pp} pelo volume de uma caixa de dimensões λ_T , que é o comprimento de onda de deBroglie de uma partícula de energia cinética $k_B T$ [33]. Se o volume disponível para cada partícula é muito maior que a escala na qual sua característica ondulatória aparece, ela se comportará classicamente. Na nucleossíntese, por exemplo, $e^{-\mu_e-/T} \simeq 10^9$.

Neste ponto, é útil definir a quantidade $n_i^{(0)}$, que corresponde à densidade em

número da partícula i quando seu potencial químico $\mu_i = 0$. Desta forma, temos:

$$e^{\mu_i/T} = \frac{n_i}{n_i^{(0)}}. \quad (2.9)$$

Usando então a conservação da energia, $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$, a segunda linha da Eq. (2.6) ganha a forma:

$$e^{-(E_1+E_2)/T} \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right], \quad (2.10)$$

o que leva a Eq. (2.5) a:

$$\frac{1}{a^3} \frac{\partial(a^3 n_1)}{\partial t} = n_1^{(0)} n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left[\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \right]. \quad (2.11)$$

Na Eq. (2.11), definimos média térmica da seção de choque $\langle \sigma v \rangle$ como [18]:

$$\begin{aligned} \langle \sigma v \rangle \equiv & \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} \iiint (2\pi)^4 \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{p}_3 - \vec{p}_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \times \\ & |M|^2 e^{-(E_1+E_2)/T} \frac{g_1 d^3 p_1}{2(2\pi)^3 E_1} \frac{g_2 d^3 p_2}{2(2\pi)^3 E_2} \frac{g_3 d^3 p_3}{2(2\pi)^3 E_3} \frac{g_4 d^3 p_4}{2(2\pi)^3 E_4}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Podemos ganhar alguma intuição acerca desses processos analisando a Eq. (2.11). A função sobre a qual age a derivada parcial no tempo é $N_1 = a^3 n_1$, o número de partículas da espécie 1. Se esse número não varia, ou a taxa de reação é muito baixa, ou o equilíbrio químico foi atingido. Na equação, observamos justamente essas possibilidades: se taxa de reação $n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle$ for muito pequena, o lado direito da Eq. (2.11) fica próximo de zero. Outra forma de obter zero é fazendo com que os termos dentro dos colchetes sejam iguais, o que corresponde a um equilíbrio químico, $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$. Note que, para manter este equilíbrio, as partículas precisam estar reagindo rapidamente, o que significa $n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle$ alto. Quando a taxa de reação cai, não é mais possível manter o equilíbrio, e os termos dentro dos colchetes não se anulam mais. Também é importante lembrar que o ponto de equilíbrio químico depende da temperatura, e portanto ele será atingido, a cada momento, com concentrações das partículas n_i diferentes, numa sucessão de estados de equilíbrio.

Para estimarmos até quando as reações são eficientes, podemos comparar o livre caminho médio de um fóton, $[n_2^{(0)} \langle \sigma v \rangle]^{-1}$, com o raio de Hubble, H^{-1} , que é aproximadamente a distância física que ele percorre no tempo do universo dobrar de tamanho. Quando o livre caminho médio é maior que o raio de Hubble, praticamente não há reação no tempo do universo dobrar seu tamanho, e portanto a reação torna-se ineficiente. Assim, temos a condição para a ocorrência das reações, muito

utilizada na literatura [18]:

$$\frac{n_2^{(0)}(a) \langle \sigma v \rangle (a)}{H(a)} > 1. \quad (2.13)$$

Como esta fração decresce, nos casos de interesse, com a^{-1} ou mais rápido, o aumento do fator de escala sempre torna as reações mais ineficientes.

2.1.1 Nucleossíntese primordial

A nucleossíntese primordial ocorreu quando a temperatura do universo estava entre 1MeV e 0,01MeV, aproximadamente [18]. Nessa época, núcleos de elementos leves, como deutério D, trítio T e os isótopos de hélio ^3He e ^4He , se formaram a partir dos prótons p e nêutrons n . Esses elementos, com excessão do nêutron que é instável, serão praticamente os únicos constituintes bariônicos do universo até o surgimento das primeiras estrelas [26].

Para tratarmos a nucleossíntese de forma rigorosa, seria necessário resolver numericamente um sistema de diversas Eqs. (2.11) acopladas, uma para cada processo que relaciona os elementos acima, entre outros [34]. Aqui, vamos utilizar algumas simplificações, baseadas nos cálculos mais rigorosos, para podermos compreender a nucleossíntese. Primeiro, vamos considerar que, em temperaturas maiores que 0,1MeV, os únicos bárions existentes são p e n . Devido à aniquilação dos antibárions através de processos como $p + \bar{p} \rightarrow 2\gamma$, em temperaturas da ordem da massa m_p , o número de fótons era cerca de 10^{10} vezes maior que o número bárions. Esse excessivo número de fótons quebrava qualquer ligação entre prótons e nêutrons, que possuem energias de $\sim \text{MeV}$. Só quando a temperatura dessas partículas se tornou bastante menor que a energia de ligação dos elementos é que estes puderam se formar. Além disso, a temperatura e densidade do universo caem rapidamente, deixando a fusão nuclear ineficiente em pouco tempo e impedindo a formação de elementos mais pesados que Hélio [18]. A fração de Lítio produzida, por exemplo, é cerca de 10^4 vezes menor que a fração de ^3He [30].

Assim, começamos calculando a abundância de nêutrons advindos da reação $p + l_1 \leftrightarrow n + l_2$, sendo l_i leptons como e^- e ν_e . A Equação de Boltzmann (2.11) para essa reação fica:

$$a^{-3} \frac{d(a^3 n_n)}{dt} = n_n^{(0)} n_{l_2}^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left[\frac{n_p n_{l_1}}{n_p^{(0)} n_{l_1}^{(0)}} - \frac{n_n n_{l_2}}{n_n^{(0)} n_{l_2}^{(0)}} \right]. \quad (2.14)$$

Admitindo que esses leptons possuem potencial químico zero [18], obtemos:

$$a^{-3} \frac{d(a^3 n_n)}{dt} = n_{l_2}^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left[\frac{n_p n_n^{(0)}}{n_p^{(0)}} - \frac{n_n}{n_n^{(0)}} \right]. \quad (2.15)$$

Como na época da nucleossíntese prótons e nêutrons não são relativísticos, podemos calcular $n_i^{(0)}$ aproximando $E_i \simeq m_i + p_i^2/2m_i$:

$$n_i^{(0)} = g_i \int e^{-E_i/T} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-m_i/T}, \quad (2.16)$$

e logo, temos:

$$\frac{n_n^{(0)}}{n_p^{(0)}} = \left(\frac{m_n}{m_p} \right)^{3/2} e^{(m_p - m_n)/T} \simeq e^{-(m_n - m_p)/T}. \quad (2.17)$$

Escrevendo a Eq. (2.15) em termos da fração $X_n = n_n/n_b$, onde $n_b = n_p + n_n$, obtemos então:

$$\frac{dX_n}{dt} = n_{l_2}^{(0)} \langle \sigma v \rangle [(1 - X_n)e^{-(m_n - m_p)/T} - X_n], \quad (2.18)$$

pois a conservação do número bariônico implica que $(n_p + n_n)a^3 = cte$. Escrevendo a derivada em $x \equiv (m_n - m_p)/T$, chegamos a:

$$\frac{dX_n}{dx} = \frac{x n_{l_2}^{(0)} \langle \sigma v \rangle}{H(x)} [e^{-x} - X_n(1 - e^{-x})], \quad (2.19)$$

lembrando, ao calcular $H(x)$, que na época de interesse (dentro da era da radiação), elétrons e pósitrons se comportam como matéria relativística, e tanto eles quanto fótons e neutrinos estão em equilíbrio à mesma temperatura. A taxa de reação $n_{l_2}^{(0)} \langle \sigma v \rangle$ é dada por [35]:

$$n_{l_2}^{(0)} \langle \sigma v \rangle = \frac{255}{\tau_n x^5} (12 + 6x + x^2), \quad (2.20)$$

onde $\tau_n = 886.7s$ é o tempo de vida do nêutron.

A Eq. (2.19) pode agora ser integrada numericamente, de onde obtemos que a fração X_n congela em $X_n = 0,151$ quando $T \simeq 0,5MeV$ [35]. A partir de $T \simeq 0,1MeV$, o decaimento $n \rightarrow p + \bar{\nu}_e + e^-$ torna-se importante, e portanto, quando se inicia a produção de deutério e ${}^4He$ em $T \simeq 0,07MeV$, a fração de nêutrons é $e^{-t/\tau_n} X_n \simeq 0,11$, onde t é o tempo decorrido de $T = 0.1MeV$ a $T = 0,07MeV$ [18].

Em temperaturas da ordem de $0,07MeV$, iniciam-se a produção de elementos mais pesados, numa cadeia de reações nucleares basicamente como a apresentada na Figura 2.1.

Se a densidade e a temperatura do universo não diminuíssem com o tempo, os processos de fusão nuclear continuariam até se produzir ferro, que possui a maior energia de ligação por nucleon. Entretanto, a forte dependência das seções de choque com esses parâmetros limitam os processos de fusão, de forma que elementos mais pesados praticamente não são produzidos.

Por ter a maior energia de ligação por nucleon dentre os elementos da Figura

Figura 2.1: Principais reações nucleares da nucleossíntese primordial [26]. As setas mais grossas indicam as reações mais importantes. Vemos que as fusões ocorrem em etapas, com um aumento gradual do número atômico. Devido a baixa densidade de bárions, reações como a ${}^4\text{He} + {}^4\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^{12}\text{C}$, que ocorre no interior de estrelas, não ocorrem com frequência durante a nucleossíntese.

2.1, o ${}^4\text{He}$ será o elemento mais produzido, absorvendo a grande parte dos nêutrons livres [18]. Assim, para cada dois nêutrons existentes em $T \simeq 0.07\text{MeV}$, um núcleo de ${}^4\text{He}$ se forma. Definindo a fração de ${}^4\text{He}$ por:

$$X_{4He} \equiv \frac{4n_{4He}}{n_b} = 4\frac{1}{2}\frac{n_n}{n_b} = 2X_n, \quad (2.21)$$

vemos que aproximadamente 22% da matéria bariônica primordial surge na forma de ${}^4\text{He}$, e praticamente todo o restante permanece na forma de hidrogênio (p). Os próximos elementos mais abundantes possuem frações cerca de 10^4 vezes menor que a de ${}^4\text{He}$. Eles são os constituintes da cadeia de produção de ${}^4\text{He}$: deutério, trítio e hélio-3 (ver Figura 2.1). Elementos construídos a partir do hélio-4 são muito mais raros, e suas frações são 10^9 vezes menor que a deste [26].

Resultados precisos da abundância de cada elemento da nucleossíntese são obtidos através de cálculos numéricos envolvendo, ao menos, as reações apresentadas na Figura 2.1. Um exemplo é apresentado na Figura 2.2.

Apesar dos processos de fusão dominarem a nucleossíntese, a alta concentração de fótons produz reações inversas, como a apresentada para o deutério na Figura 2.1. Essa combinação de processos faz com que as abundâncias dos elementos sejam proporcionais à fração de bárions por fóton, $\eta_b \equiv n_b/n_\gamma$. Esta última grandeza é proporcional à fração de bárions atual, Ω_b , e portanto a nucleossíntese nos fornece uma forma de restringir esse importante parâmetro: observando a abundância dos produtos da nucleossíntese primordial, podemos determinar a quantidade de bárions no universo [30]. Essa relação é particularmente boa para o deutério, cuja concentração depende fortemente de Ω_b . Cálculos teóricos e resultados de observações são apresentados na Figura 2.3.

Por se fundamentar em poucas e básicas suposições - Relatividade Geral de

Figura 2.2: Evolução das frações da massa bariônica total na forma de nêutrons, prótons, hélio-4, deutério, hélio-3 e trítio, obtidas através de cálculos numéricos [26]. Vemos que a maior parte da matéria bariônica permanece na forma de prótons, seguida por ${}^4\text{He}$. A fração na forma de nêutrons não se mantém estável como as demais após $T \simeq 8,6\text{keV}$ devido ao decaimento $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$.

Figura 2.3: Fração dos elementos em função da fração total de bárions, n_b [30]. As linhas coloridas são as previsões teóricas, e as caixas de contorno preto são os limites estabelecidos pelas observações (na realidade, as limitações observacionais são as arestas horizontais, e as arestas verticais são obtidas a partir da anterior, através da teoria). Note que a limitação observacional para o ${}^3\text{He}$ é apenas superior, e que a quantidade de deutério é o que mais restringe n_b , tanto devido à inclinação da curva teórica quanto à precisão das medições. Vemos também que os dados concordam entre si.

Einstein, Modelo Cosmológico Padrão, Modelo Padrão das Partículas Elementares e seções de choque bem conhecidas - a nucleossíntese primordial é um aspecto que deve ser levado em conta no tratamento da cosmologia. Assim, ela sustenta a hipótese da matéria escura ser composta por um novo tipo de matéria não-bariônica, já que restringe a fração de bárions a $\sim 5\%$ da densidade crítica.

2.1.2 Desacoplamento dos fótons com a matéria

Alguns autores supõem que mesmo antes dos trabalhos teóricos sobre a Radiação Cósmica de Fundo, iniciados em 1948 pelo ucraniano George Gamow e pelos estadunidenses Ralph Alpher e Robert Herman [36, 37, 38], sua temperatura fora medida por Andrew McKellar, através da observação do espectro de moléculas interestelares, em 1941 [8]. De qualquer forma, McKellar não interpretou esta temperatura medida como uma radiação primordial semelhante à que iria aparecer na teoria de Gamow. A possível relação dessa medida com a RCF só foi percebida após a publicação de sua detecção por Arno Penzias e Robert Wilson, em 1965. Até então, não se sabia se essa radiação sobreviveria até os dias de hoje e se ela era observável.

Talvez a primeira publicação da RCF como um fenômeno observável diretamente tenha sido feita em 1964 pelos astrofísicos soviéticos Doroshkevich e Novikov [39]. No mesmo ano, aconselhados por Robert Dicke, os cientistas David Wilkinson e Peter Roll, da *Princeton University*, iniciaram a construção de uma antena capaz de detectar a radiação com características parecidas com as previsões de Gamow e Alpher, estas baseadas na abundância de elementos da nucleossíntese primordial [40]. Paralelamente, Arno Penzias e Robert Wilson estavam fazendo experimentos com antenas de mesmo tipo, que seriam utilizadas em radioastronomia e comunicação com satélites, e detectavam uma fonte de ruído de 3,5K que não conseguiam explicar. Graças ao encontro desse grupo com o de *Princeton*, foi publicado em 1965 a interpretação daquele ruído como a radiação cósmica de fundo prevista teoricamente, de espectro de corpo negro e isotrópica [41]. Apesar da predominância de elementos leves (H, D e He) sobre os mais pesados ser bem explicada pelo modelo *Hot Big Bang*, ela ainda podia ser explicada através de processos estelares. A detecção da radiação cósmica de fundo foi muito importante para a sedimentação deste modelo, hoje chamado de modelo padrão, principalmente após a verificação de seu espectro de corpo negro. O experimento mais famoso que fez essa verificação foi o *Far-InfraRed Absolute Spectrophotometer*, a bordo do satélite *COBE*, lançado em 1989. Os resultados do *FIRAS* acerca do espectro da RCF foram publicados em 1994 [42], e renderam o prêmio Nobel de física de 2006.

Um corpo negro é definido como um corpo que absorve toda a radiação incidente sobre ele, de forma que nenhuma radiação o atravessa ou é refletida. De maneira mais formal, isso significa que os fótons incidentes interagem diversas vezes com as

partículas constituintes do corpo, o que faz com que praticamente toda sua energia seja transmitida a este último. Essa energia ganha é então reemitida de forma característica, através de uma radiação com espectro definido. Assim, a verificação do espectro da RCF nos indica que há muito tempo atrás o universo era extremamente opaco à radiação, como é o caso de um gás denso e ionizado. Para que essa radiação seja observada hoje e com o mesmo espectro, em algum momento o número de colisões tem que cair, bastante e rapidamente. Isso ocorre através da expansão do universo, pois além de diminuir a densidade de íons, ela leva a uma diminuição da temperatura dos fótons e à conseqüente desionização do gás.

Portanto, o processo que nos interessa é $p^+ + e^- \rightarrow H + \gamma$, muitas vezes chamado de “recombinação” [18]. Para que a concentração de hidrogênio neutro comece a aumentar, a temperatura dos fótons deve estar abaixo de $\epsilon_0 = 13,6\text{eV}$, sua energia de ionização. A Equação de Boltzmann (2.11) para essa reação fica:

$$a^{-3} \frac{d(n_e a^3)}{dt} = n_e^{(0)} n_p^{(0)} \langle \sigma v \rangle \left[\frac{n_H}{n_H^{(0)}} - \frac{n_e^2}{n_e^{(0)} n_p^{(0)}} \right], \quad (2.22)$$

Enquanto a taxa de reação $n_p^{(0)} \langle \sigma v \rangle$ é alta, vale a aproximação que o termo entre colchetes na Eq. (2.22) é zero, o que significa que os potenciais químicos devem se balancear: $\mu_e + \mu_p = \mu_H$ ($\mu_\gamma = 0$). Apesar de não ser exata, essa aproximação é capaz de prever a época na qual a fração de elétrons livres começa a cair. Lembrando que a densidade em número de bárions $n_b = n_H + n_p = n_H + n_e$, considerando as massas $m_e \gg T$ e $m_p \gg T$, e que $m_p \simeq m_H$, a menos que este fator apareça numa exponencial (caso no qual $\epsilon_0 = m_e + m_p - m_H$), temos:

$$\frac{X_e^2}{1 - X_e} = \frac{1}{n_b} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\epsilon_0/T}, \quad (2.23)$$

onde $X_e = n_e/n_b = n_p/n_b$. Podemos ver na Figura 2.4 os resultados desta equação. Notamos que para $z > 1600$ praticamente todos os elétrons estão livres. Para $z = 1100$, redshift comumente referente ao desacoplamento na literatura, a fração de elétrons livres é de $\sim 10^{-3}$.

O desacoplamento ocorre aproximadamente quando a taxa de reação $n_e \sigma_T$ se torna inferior à taxa de expansão do universo $H = \dot{a}/a$, sendo $\sigma_T = 6,6524 \cdot 10^{-25} \text{cm}^2$ a seção de choque de Thomson. Podemos ver na Figura 2.4 que a reação em questão cessa em $z \simeq 1100$, que corresponde a uma temperatura $T_* \simeq 0,26\text{eV}$. Lembramos que, em *redshifts* por volta de 3000, o universo passa a ser dominado por matéria, de forma que, em $z \simeq 1100$, podemos utilizar a aproximação $H(z) \simeq H_0 \sqrt{\Omega_m(1+z)^3}$.

Por fim, como antes do desacoplamento as interações eram bem intensas (a queda de X_e é abrupta), espera-se que o espectro dessa radiação seja o de um corpo negro, como foi constatado em observações como as do *Cosmic Background Explorer* (COBE) [42]. Observações atuais indicam que a temperatura dessa radiação é de

Figura 2.4: À direita, apresentamos a razão entre o raio de Hubble H^{-1} e o livre caminho médio de um fóton, $(n_e \sigma_T)^{-1}$. Em geral, adota-se o limite para a ocorrência de espalhamentos quando o livre caminho médio se torna igual ou maior que o raio de Hubble, ou seja, quando a curva no gráfico à direita cruza $n_e \sigma_T / H = 1$. Isto acontece em $z \simeq 1100$. Neste instante, podemos observar no gráfico da esquerda que a fração de elétrons livres é $X_e \simeq 10^{-3}$.

$\sim 2,725\text{K}$, com variações da ordem de $10\mu\text{K}$ [27].

Resultados mais precisos podem ser obtidos através da resolução numérica da Eq. (2.22). O redshift da recombinação é praticamente o mesmo que o obtido considerando o equilíbrio químico, entretanto a fração de elétrons livres é bem diferente. Vemos na Figura 2.4 que, se a reação $p^+ + e^- \rightarrow H + \gamma$ permanecesse em equilíbrio, não existiriam elétrons livres. Entretanto, o processo sai do equilíbrio e X_e congela em $\sim 6 \cdot 10^{-4}$ [18].

2.2 Perturbações Lineares

A partir de um modelo de universo baseado no princípio cosmológico, de um modelo homogêneo e isotrópico, podemos considerar pequenas inomogeneidades e anisotropias através da teoria de perturbações lineares. Essa forma de tratar desvios da homogeneidade e isotropia é válida enquanto a diferença entre a grandeza medida e sua média for bem menor que o valor da média. Por exemplo, para uma região no espaço com densidade de matéria $\bar{\rho} + \delta\rho$, onde $\bar{\rho}$ é a densidade média no universo, podemos utilizar a aproximação linear se:

$$\left| \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}} \right| \ll 1. \quad (2.24)$$

Em nosso universo, na época atual, certamente não podemos aplicar a teoria de perturbações lineares em escalas menores que $\sim 100\text{Mpc}$, pois nessas escalas os contrastes de densidade se tornam muito elevados. A princípio, é possível aplicar essa teoria para todas as escalas maiores que 100Mpc (apesar de que observações recentes parecem indicar a existência de anisotropias em grandes escalas angulares

[43], o que poderia comprometer a aplicabilidade do princípio cosmológico nesses casos).

Para tratar de perturbações na métrica, vamos introduzir as grandezas $\Phi = \Phi(\vec{x}, t)$ e $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$, chamados de curvatura espacial e potencial gravitacional newtoniano, respectivamente. Desta forma, a nova métrica fica, em coordenadas comóveis cartesianas (t, x, y, z) [18]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 - 2\Psi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(1 + 2\Phi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(1 + 2\Phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(1 + 2\Phi) \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Note que estamos considerando um universo de curvatura da seção espacial k nula.

Com a métrica da Eq. (2.25), temos:

$$-E^2 \equiv g_{00}P^0P^0 = -(1 + 2\Psi)P^0P^0, \quad (2.26)$$

$$p^2 \equiv g_{ij}P^iP^j = a^2(1 + 2\Phi)\delta_{ij}P^iP^j. \quad (2.27)$$

Invertendo as Eqs. (2.26) e (2.27) e escolhendo o vetor $\vec{p}$ na mesma direção de $\vec{P}$, temos:

$$P^0 = \frac{E}{\sqrt{1 + 2\Psi}} \simeq (1 - \Psi)E, \quad (2.28)$$

$$P^i = \frac{p\hat{p}^i}{a\sqrt{1 + 2\Phi}} \simeq \frac{(1 - \Phi)}{a}p\hat{p}^i. \quad (2.29)$$

Para a segunda passagem das Eqs. (2.28) e (2.29), expandimos a expressão em série de Taylor e3 mantivemos apenas os termos de ordem 0 e 1. Esse procedimento será utilizado durante toda a derivação das equações envolvendo perturbações lineares, e assim, termos contendo a multiplicação de duas pequenas perturbações serão ignorados. Além das perturbações da métrica, qualquer derivada da função de distribuição que não seja em t ou E são pequenas perturbações e também seguem as mesmas regras no tratamento das equações.

Partindo da Equação de Boltzmann (2.1), vamos escolher, para simplificar os cálculos, $\lambda = t$ e $f = f(t, \vec{x}, E, \hat{p})$. Lembramos também que $E^2 = m^2 + p^2$:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt}. \quad (2.30)$$

O último termo da Eq. (2.30) é de segunda ordem e será desprezado. Para eliminarmos as derivadas temporais totais do lado direito, utilizamos a equação da geodésica (1.9):

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{P^i}{P^0} = \frac{1 - \Phi}{a} \frac{p}{E} (1 + \Psi) \hat{p}^i \simeq \frac{p\hat{p}^i}{aE}. \quad (2.31)$$

Na Eq. (2.31) só consideramos o termo de ordem zero pois dx^i/dt sempre aparece

multiplicando um termo de ordem 1. A outra derivada temporal fica:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p \hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i}. \quad (2.32)$$

Desta forma, a equação de Boltzmann fica:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{aE} \frac{\partial f}{\partial x^i} \hat{p}^i + \frac{\partial f}{\partial E} \left(\frac{1}{a} \frac{da}{dt} \frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p \hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right) = C[f], \quad (2.33)$$

em acordo com a literatura [18].

2.2.1 Aplicação para fótons

A Eq. (2.33) é utilizada para determinar a evolução das perturbações para todos os tipos de partículas. As perturbações nas funções de distribuição se dão em torno das distribuições de equilíbrio [Eq. (2.7)] e são consideradas pequenas. Para fótons, vamos escrever a perturbação da seguinte forma:

$$f(t, \vec{x}, E, \hat{p}) = \frac{1}{e^{E/T(t)[1+\Theta(t, \vec{x}, \hat{p})]} - 1}, \quad (2.34)$$

onde $\Theta = \delta T/T = [T(t, \vec{x}, \hat{p}) - T(t)]/T(t)$ é o contraste de temperatura, sendo $T(t)$ a temperatura média no instante t . É importante notar que Θ depende da posição no espaço $\vec{x}$ e da direção de propagação do fóton $\hat{p}$. Estamos acostumados a lidar apenas com a distribuição angular em $\hat{p}$ dos fótons em nosso planeta ($\vec{x} = 0$). Entretanto, a distribuição angular pode ser diferente em um local distante, com $\vec{x} \neq 0$.

Como estamos considerando Θ pequeno, podemos expandir a função de distribuição f em torno do valor $\Theta = 0$:

$$f \simeq f(\Theta = 0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=0} \Theta = f_0 - p \frac{\partial f_0}{\partial p} \Theta, \quad (2.35)$$

onde f_0 é a distribuição de equilíbrio (de Bose-Einstein), homogênea e isotrópica, e Θ é um termo de primeira ordem. Inserindo a Eq. (2.35) na (2.33), obtemos uma equação com os termos de ordem zero, que resulta em $T = T_0/a$, e uma com os termos de primeira ordem que, após um pouco de álgebra, resulta em:

$$-p \frac{\partial f_0}{\partial p} \left(\frac{\partial \Theta(\vec{x}, \hat{p}, t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta(\vec{x}, \hat{p}, t)}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi(\vec{x}, t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial x^i} \right) = C[f]. \quad (2.36)$$

O cálculo do termo de colisão $C[f]$ envolve uma série de considerações e aproximações. Como estamos interessados em épocas próximas ao desacoplamento ou mais recentes, onde a temperatura média dos fótons é menor que $\sim 1\text{eV}$, o processo relevante é o espalhamento Compton não-relativístico, ou espalhamento Thomson. Nesse tipo de espalhamento, colisões entre elétrons e fótons são praticamente elásti-

cas, e o momento do elétron não muda significativamente [18]. Também costuma-se assumir uma amplitude de espalhamento constante:

$$|M|^2 = 8\pi\sigma_T m_e^2, \quad (2.37)$$

onde m_e é a massa do elétron. Essa aproximação desconsidera a dependência angular e a na polarização, que pode ser importante para uma busca por maior precisão (no caso da primeira) e para o estudo das polarizações primordiais da RCF.

Levando em conta essas considerações, o termo de colisão fica [18]:

$$C[f] = -p \frac{\partial f_0}{\partial p} n_e(t) \sigma_T [\Theta_0(\vec{x}, t) - \Theta(\vec{x}, \hat{p}, t) + \hat{p} \cdot \vec{v}_b(\vec{x}, t)], \quad (2.38)$$

onde $n_e(t)$ é a densidade em número de elétrons, $\vec{v}_b$ é a velocidade média dos bárions e $\Theta_0(\vec{x}, t)$ é a média angular de $\Theta(\vec{x}, \hat{p}, t)$ no ponto $\vec{x}$, chamada de monopolo:

$$\Theta_0(\vec{x}, t) \equiv \frac{1}{4\pi} \int \Theta(\vec{x}, \hat{p}, t) d^2\hat{p}. \quad (2.39)$$

Desta forma, chegamos à equação para evolução das perturbações na temperatura dos fótons:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = n_e \sigma_T [\Theta_0 - \Theta + \hat{p} \cdot \vec{v}_b], \quad (2.40)$$

Para obtermos uma equação diferencial apenas em t , de resolução mais simples, podemos passar para o espaço de Fourier. O par de Fourier $\tilde{f}(\vec{k})$ e $f(\vec{x})$ se relacionam da seguinte forma:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3x, \quad (2.41)$$

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k, \quad (2.42)$$

e portanto:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} + \frac{i\hat{p}^i \cdot k_i}{a} \tilde{\Theta} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{i\hat{p}^i \cdot k_i}{a} \tilde{\Psi} = n_e \sigma_T [\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \hat{p} \cdot \tilde{\vec{v}}_b]. \quad (2.43)$$

Se considerarmos que a velocidade dos bárions $\tilde{\vec{v}}_b(t, \vec{k})$ aponta na mesma direção de $\vec{k}$ [18], vemos que a única dependência de $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \hat{p}, t)$ em $\hat{p}$ se dá através do produto escalar deste com $\vec{k}$, ou seja, a evolução de perturbações com $\hat{p}$ diferentes, mas com $\mu \equiv \hat{p} \cdot \vec{k}/k$ iguais, é a mesma. Como o vetor $\vec{k}$ está orientado da mesma forma que o gradiente de um certo campo (Ψ ou Θ , neste caso), a suposição de que $\tilde{\vec{v}}_b$ aponta na mesma direção que $\vec{k}$ significa que esperamos que os bárions se movimentem, em média, na mesma direção em que os campos variam, sem velocidades médias transversais (isso equivale a dizer que a velocidade $\tilde{\vec{v}}_b$ é irrotacional).

Para efeitos de resolução da Eq. (2.43), escrevemos então $\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, t)$. Final-

mente, temos:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial t} + \frac{i\mu k}{a} \tilde{\Theta} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \frac{i\mu k}{a} \tilde{\Psi} = n_e \sigma_T [\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \mu \tilde{v}_b]. \quad (2.44)$$

Equações similares podem ser obtidas para os outros componentes do universo: neutrinos, matéria escura e matéria bariônica. Ao final de um processo similar, obtemos as equações:

$$\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} + \frac{ik\tilde{v}}{a} = -3 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + H\tilde{v} = -\frac{ik\tilde{\Psi}}{a}, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial \tilde{\delta}_b}{\partial t} + \frac{ik\tilde{v}_b}{a} = -3 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}_b}{\partial t} + H\tilde{v}_b = -\frac{ik\tilde{\Psi}}{a} - \frac{4\rho_\gamma n_e \sigma_T}{3\rho_b} (\tilde{v}_b + 3i\tilde{\Theta}_1), \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \tilde{N}}{\partial t} + \frac{ik\mu}{a} \tilde{N} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - \frac{ik\mu}{a} \tilde{\Psi}, \quad (2.49)$$

onde $\delta = \delta(\vec{x}, t) = [\rho(\vec{x}, t) - \rho(t)]/\rho(t)$ é o contraste de densidade de matéria escura, δ_b o contraste de matéria bariônica, $v = v(\vec{x}, t)$ é o módulo da velocidade média da matéria escura, $\rho_\gamma = \rho_\gamma(t)$ é a densidade de energia média dos fótons, $\rho_b = \rho_b(t)$ é a densidade de energia média dos bárions e $N = N(\vec{x}, \mu, t)$ é a perturbação na temperatura dos neutrinos [18]. $\tilde{\Theta}_1$, chamado de dipolo, vem da Eq. (2.50), com $\ell = 1$:

$$\tilde{\Theta}_\ell(\vec{k}, t) \equiv \frac{i^\ell}{2} \int_{-1}^1 \tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, t) P_\ell(\mu) d\mu, \quad (2.50)$$

onde podemos expandir a função $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, t)$ nos polinômios de Legendre $P_\ell(\mu)$:

$$\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, t) = \sum_\ell (2\ell + 1) (-i)^\ell \tilde{\Theta}_\ell(\vec{k}, t) P_\ell(\mu). \quad (2.51)$$

As Equações de Einstein (1.32) devem ser calculadas para a métrica e tensor de energia momento perturbados. O procedimento é análogo à derivação das Equações de Boltzmann, mantendo apenas os termos de primeira ordem. Delas resultam as equações $0-0$ e $i-j$:

$$k^2 \tilde{\Phi} + 3 \frac{da}{dt} \left(a \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - \tilde{\Psi} \frac{da}{dt} \right) = 4\pi G a^2 (\rho_{dm} \tilde{\delta} + \rho_b \tilde{\delta}_b + 4\rho_\gamma \tilde{\Theta}_0 + 4\rho_\nu \tilde{N}_0), \quad (2.52)$$

$$k^2 (\tilde{\Phi} + \tilde{\Psi}) = -32\pi G a^2 (\rho_\gamma \tilde{\Theta}_2 + \rho_\nu \tilde{N}_2), \quad (2.53)$$

onde $\tilde{\Theta}_2$, chamado de quadrupolo, é dado pela Eq. (2.50) com $\ell = 2$. Os termos do tensor energia momento que foram selecionados na Eq. (2.53) são chamados de estresse anisotrópico, e apenas partículas relativísticas contribuem para esse estresse.

Dessa equação podemos notar algo importante: $\tilde{\Phi} \simeq -\tilde{\Psi}$ a menos que exista um quadrupolo $\tilde{\Theta}_2$ ou $\tilde{N}_2$ apreciável em épocas em que as densidades de radiação são significativas. Como, durante a época da radiação, os fótons estavam em intensa interação, seu quadrupolo era desprezível. Assim, um estresse anisotrópico estaria ligado ao quadrupolo da distribuição de neutrinos, já que estes se desacoplaram bem antes dos fótons e durante a era da radiação.

2.2.2 Condições Iniciais

Para determinarmos as perturbações $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, t)$, $\tilde{N}(\vec{k}, \mu, t)$, $\tilde{\delta}(\vec{k}, t)$, $\tilde{\delta}_b(\vec{k}, t)$, $\tilde{\Phi}(\vec{k}, t)$ e $\tilde{\Psi}(\vec{k}, t)$, precisamos dos valores de cada uma em algum instante. Porém, as Equações de Boltzmann amarram, no início do universo, todas estas grandezas juntas, de forma que nos basta determinar as condições iniciais para o potencial $\tilde{\Phi}(\vec{k}, t)$ e sua derivada para determinar todas as outras. Se tivermos um mecanismo capaz de gerar perturbações iniciais na métrica, como é o caso da inflação, teremos as condições iniciais para todas as perturbações.

Com início do universo queremos dizer que o horizonte comóvel η é muito pequeno. Inclusive, vamos considerar uma época em que η é tão pequeno que qualquer escala de perturbação de interesse λ é maior que o horizonte η , ou seja, k é comparativamente muito pequeno. Desta forma, desprezamos, nessa época, os termos proporcionais a k nas Eqs. (2.44) a (2.49) [18]. Além disso, o fato dos λ 's serem todos maiores que η significa que dentro do horizonte praticamente não existem flutuações, e portanto praticamente não há anisotropias. Logo, se expandirmos $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, t)$ em polinômios de Legendre, o termo dominante será o monopolo $\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, t)$. Da Eq. (2.53), vemos que nessa época temos $\tilde{\Phi} \simeq -\tilde{\Psi}$. Como veremos na seção 3.1.2, devido à alta interação entre fótons e bárions, $\tilde{v}_b \simeq -3i\tilde{\Theta}_1$, e portanto a velocidade dos bárions também era desprezível naquela época. Desta forma, as Equações de Boltzmann relevantes nessa época ficam:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_0}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial \tilde{N}_0}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} = -3\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \tilde{\delta}_b}{\partial t} = -3\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}. \quad (2.57)$$

Por se tratar de um limite de k pequeno e de universo dominado por radiação, a Equação de Einstein (2.52) pode ser escrita da forma:

$$\eta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} - \tilde{\Psi} = 2\left(\frac{\rho_\gamma}{\rho} \tilde{\Theta}_0 + \frac{\rho_\nu}{\rho} \tilde{N}_0\right), \quad (2.58)$$

onde $\rho = \rho_\gamma(t) + \rho_\nu(t)$ é a densidade total do universo no instante t . Através da definição $f_\nu \equiv \rho_\nu(t)/\rho(t)$, temos:

$$\eta \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} - \tilde{\Psi} = 2 \left[(1 - f_\nu) \tilde{\Theta}_0 + f_\nu \tilde{N}_0 \right]. \quad (2.59)$$

Finalmente, derivando a equação acima em η , considerando $\tilde{\Phi} \simeq -\tilde{\Psi}$ e utilizando as Eqs. (2.54) e (2.55), obtemos:

$$\eta \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \eta^2} = -4 \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta}, \quad (2.60)$$

cujas soluções são $\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta) = \tilde{\Phi}_p(\vec{k}) \eta^j$, onde $j = -3$ ou $j = 0$ e $\tilde{\Phi}_p(\vec{k})$ é um potencial primordial, excitado por algum mecanismo como a inflação [18]. Mesmo se o modo $\propto \eta^{-3}$ for excitado, ele rapidamente decai e portanto não tem impacto sobre o universo. Logo, nos interessa a solução em que $\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta)$ é constante.

Das Eqs. (2.54) a (2.57), vemos que todas as perturbações são então aproximadamente constantes no tempo. Na maioria dos modelos de formação de estruturas, as perturbações iniciais (em $\eta = \eta_i$) nos fótons e nos neutrinos são iguais, e assim temos, da Eq. (2.59):

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta_i) = 2\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta_i). \quad (2.61)$$

Também vemos que:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}, \eta_i) = 3\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta) + cte. \quad (2.62)$$

Considerando perturbações adiabáticas, que é o caso da inflação, a razão entre as densidades em número de fótons e de matéria é constante no espaço e no tempo, o que implica o anulamento da constante na Eq. (2.62). Como o mesmo argumento pode ser dado em respeito aos bárions, temos:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}, \eta_i) = \tilde{\delta}_b(\vec{k}, \eta_i) = 3\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta_i). \quad (2.63)$$

Desta forma, só nos falta as condições iniciais $\tilde{\Phi}_p(\vec{k})$. Um modelo inflacionário típico nos dá a auto-correlação [18]:

$$\langle \tilde{\Phi}_p(\vec{k}) \tilde{\Phi}_p^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 P_\Phi(k) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (2.64)$$

onde

$$P_\Phi(k) = \frac{25}{36\pi k^3} \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1} \delta_H^2 \left(\frac{\Omega_m}{D(1)} \right)^2, \quad (2.65)$$

sendo que $P(k)$ é chamado espectro de potência, δ_H é um fator de normalização chamado perturbação de densidade no horizonte, $n_s \sim 1$ é um parâmetro livre chamado índice espectral e $D(a)$ é a função de crescimento definida na seção seguinte. Pode existir, quando comparamos a Eq. (2.65) com outros espectros na literatura,

um excesso ou escassez de fatores de (2π) . Essa diferença aparece por causa das diferentes definições de transformada de Fourier.

2.2.3 Inomogeneidades de matéria

A idéia básica que governa a evolução das inomogeneidades de matéria é a da soma das influências da gravidade, que busca colapsar a matéria em pontos mais densos, e da pressão, que atua na direção oposta. Por esse motivo, o comportamento das inomogeneidades da matéria tem determinadas características de acordo com a época analisada e com a escala observada. As perturbações de comprimento λ maiores que o horizonte comóvel η não contém conexões causais e permanecem praticamente imutáveis enquanto estiverem além do horizonte. Durante a era da radiação, a pressão criada por esta impede que perturbações de densidade dentro do horizonte cresçam de forma significativa, enquanto que na época da matéria, a inexistência da pressão faz com que todos os modos de perturbações de densidade cresçam com a mesma velocidade.

Dado que as perturbações da métrica estão ligadas às de todos os tipos de matéria - e estas entre si - todas as equações, (2.44) a (2.49), (2.52) e (2.53), devem ser consideradas para determinar a perturbação de matéria escura $\tilde{\delta}(\vec{k}, t)$, por exemplo. Desta forma, o cálculo preciso das perturbações é feito numericamente. Conhecendo esses resultados numéricos e utilizando algumas aproximações, podemos calcular as perturbações analiticamente em certas regiões do espaço de parâmetros. Do ponto de vista do tratamento matemático, como a matéria é afetada basicamente pelos potenciais $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Psi}$ mas estes são afetados também por outros componentes, como a radiação, a evolução das inomogeneidades de matéria será calculada a partir da evolução dos potenciais.

Em geral, escreve-se a evolução da perturbação $\tilde{\Phi}$ da seguinte forma [18]:

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}, t) = \frac{9}{10} \tilde{\Phi}_p(\vec{k}) T(k) \frac{D(a)}{a}, \quad (2.66)$$

onde $T(k)$ é chamada de função de transferência, $D(a)/a$ a função de crescimento do potencial Φ [$D(a)$ é a função de crescimento da matéria] e $\tilde{\Phi}_p(\vec{k})$ é a condição inicial do campo $\tilde{\Phi}$. A evolução das perturbações do potencial é dividida em duas épocas: uma durante a transição de um universo dominado por radiação para um dominado por matéria e a outra dentro da era da matéria. Durante esta última, os potenciais gravitacionais permanecem constantes e todas as escalas de perturbação de matéria crescem linearmente com o fator de escala. Durante a outra época (a da transição), os potenciais entram em decaimento a partir do momento em que sua escala se torna menor que o horizonte, ou seja, o valor do potencial, ao chegar na época dominada por matéria, depende do modo k da perturbação. Como só observamos estruturas em épocas de dominação da matéria, efeitos provenientes da primeira época da evolução

são sempre os mesmos para qualquer *redshift*, dependendo apenas de k . Por isso, associamos a função de transferência $T(k)$ aos efeitos da época de transição, e a função de crescimento $D(a)/a$ à evolução na época da matéria. Como apresentamos mais adiante, os potenciais de grandes escalas praticamente não se alteram durante toda a evolução [$\tilde{\Phi}(k \ll \eta^{-1}) \simeq \frac{9}{10} \tilde{\Phi}_p$]. O fator de $\frac{9}{10}$ da Eq. (2.66) é escolhido de forma que a função de transferência possa ser escrita da forma:

$$T(k) = \frac{\tilde{\Phi}(k, a \gg a_{eq})}{\tilde{\Phi}(k\eta \ll 1, a \gg a_{eq})}. \quad (2.67)$$

Para os cálculos analíticos, utilizamos algumas aproximações: primeiro, dado que $\sim 10\%$ da matéria é composta por bárions, consideramos que estes não interferem no potencial Φ e seguem a distribuição de matéria escura. Além disso, antes do desacoplamento, a distribuição de fótons praticamente não apresenta multipolos elevados, de forma que a contribuição destes para Φ se dá apenas através de Θ_0 e Θ_1 [18]. Também vamos desconsiderar estresses anisotrópicos ($\Phi \simeq -\Psi$). Dentro desse quadro, o termo da Eq. (2.44) proporcional a $n_e \sigma_T$ pode ser desprezado ($\tilde{\Theta}$ contém apenas $\tilde{\Theta}_0$ e $-3i\tilde{\Theta}_1\mu$, sendo este último termo, em acordo com a seção 3.1.2, muito próximo a $\mu\tilde{v}_b$), e tanto fótons como neutrinos seguem a mesma equação. As equações de Boltzmann relevantes ficam:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_{r,0}}{\partial t} + \frac{k}{a} \tilde{\Theta}_{r,1} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (2.68)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_{r,1}}{\partial t} - \frac{k}{3a} \tilde{\Theta}_{r,0} = -\frac{k}{3a} \tilde{\Phi}, \quad (2.69)$$

$$\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} + \frac{ikv}{a} = -3\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (2.70)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + H\tilde{v} = \frac{ik\tilde{\Phi}}{a}, \quad (2.71)$$

onde o índice r indica contribuição de fótons e neutrinos.

2.2.3.1 Grandes Escalas

Se considerarmos perturbações de escalas $\lambda = 2\pi/k$ maiores que o horizonte comóvel numa época (k pequeno), podemos desprezar os termos das equações que contém fatores de k [18]. A condição $\lambda \gg \eta$ aparece na região superior do gráfico da Figura 2.5, além da região em vermelho. Naquela região temos:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_{r,0}}{\partial t} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (2.72)$$

$$\frac{\partial \tilde{\delta}}{\partial t} = -3\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (2.73)$$

Figura 2.5: Evolução do horizonte comóvel $\eta(a)$ (linha preta contínua). A linha pontilhada vertical indica o fator de escala na época da igualdade $\rho_m(a_{eq}) = \rho_r(a_{eq})$. A região em azul indica a época aproximada de transição. À sua esquerda temos a época da radiação, e à sua direita, a época da matéria. A região acima da faixa vermelha corresponde a distâncias comóveis $\lambda \gg \eta$, enquanto que a região abaixo da faixa vermelha corresponde a $\lambda \ll \eta$. As escalas λ_1 e λ_2 indicam os limites dos cálculos analíticos, que envolvem aproximações.

$$3 \frac{da}{dt} \left(a \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} + \tilde{\Phi} \frac{da}{dt} \right) = 4\pi G a^2 (\rho_{dm} \tilde{\delta} + 4\rho_r \tilde{\Theta}_{r,0}), \quad (2.74)$$

sendo que a última equação deriva da Eq. (2.52). Das Eqs. (2.72) e (2.73) resulta, considerando perturbações iniciais adiabáticas, $\tilde{\delta}(\vec{k}, t) = 3\tilde{\Theta}_{r,0}(\vec{k}, t)$ [18]. A partir das Eqs. (2.73) e (2.74) obtemos uma única equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}}{dy^2} + \frac{21y^2 + 54y + 32}{2y(y+1)(3y+4)} \frac{d\tilde{\Phi}}{dy} + \frac{1}{y(y+1)(3y+4)} \tilde{\Phi} = 0, \quad (2.75)$$

sendo $y \equiv a/a_{eq}$, e lembrando que $\rho_m(a)a_{eq} = \rho_r(a)a$.

A solução analítica da Eq. (2.75) foi descoberta em 1984 por Hideo Kodama e Misao Sasaki, das universidades de Tokio e Kioto, no Japão [44]. Ela é:

$$\tilde{\Phi}(k \ll \eta^{-1}, a) = \frac{\tilde{\Phi}_p(\vec{k})}{10} \left(9 + \frac{2}{y} - \frac{8}{y^2} + 16 \frac{\sqrt{1+y}}{y^3} - \frac{16}{y^3} \right). \quad (2.76)$$

Vemos que para $a \gg a_{eq}$, $\tilde{\Phi}(\vec{k}) = \frac{9}{10} \tilde{\Phi}_p(\vec{k})$, ou seja, perturbações da métrica com escalas maiores que o horizonte permanecem praticamente constantes. Se elas só entrarem no horizonte na era da matéria, elas permanecerão constantes até hoje. Essas escalas devem ser maiores que $\lambda_1 \simeq 900 \text{Mpc}$ da Figura 2.5.

Na época da matéria, a Eq. (2.52) se torna:

$$k^2 \tilde{\Phi}(\vec{k}, t) = 4\pi G \rho_m(a) a^2 \tilde{\delta}(\vec{k}, t), \quad (2.77)$$

e portanto

$$\tilde{\delta}(\vec{k}, t) = \frac{9}{10} \frac{2k^2 \tilde{\Phi}_p(\vec{k}) a}{3\Omega_m H_0^2}. \quad (2.78)$$

Podemos calcular a auto-correlação da perturbação de matéria:

$$\langle \tilde{\delta}^*(\vec{k}, t) \tilde{\delta}(\vec{k}', t) \rangle \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^N \frac{\tilde{\delta}_m^*(\vec{k}, t) \tilde{\delta}_m(\vec{k}', t)}{N}, \quad (2.79)$$

onde $\tilde{\delta}_m$ é uma m -ésima possível realização de $\tilde{\delta}$. Essa correlação vai depender apenas da correlação de $\tilde{\Phi}_p(\vec{k})$, que é dada pelo modelo inflacionário de início de universo:

$$\langle \tilde{\Phi}_p(\vec{k}) \tilde{\Phi}_p^*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 \frac{25}{36\pi k^3} \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1} \delta_H^2 \left[\frac{\Omega_m}{D(a=1)} \right]^2 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.80)$$

Para uma condição inicial dita invariante de escala, $n_s = 1$. Logo,

$$\langle \tilde{\delta}^*(\vec{k}, t) \tilde{\delta}(\vec{k}', t) \rangle = (2\pi)^3 \frac{k}{4\pi H_0^4} \delta_H^2 \left[\frac{a}{D(a=1)} \right]^2 \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.81)$$

Como $\langle \tilde{\delta}^*(\vec{k}, t) \tilde{\delta}(\vec{k}', t) \rangle = (2\pi)^3 P_\delta(k, t) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}')$, temos:

$$P_\delta(k, a) = \frac{k}{4\pi H_0^4} \delta_H^2 \left[\frac{a}{D(a=1)} \right]^2. \quad (2.82)$$

Esse espectro de potência $P_\delta(k)$ é válido para $k \lesssim 7,0 \cdot 10^{-3} \text{Mpc}^{-1}$, e vemos que ele cresce linearmente com k . Através de sua dependência do fator de escala, podemos ver que a função de crescimento das perturbações de matéria é $D(a) = a$, ou seja, todas as escalas lineares crescem com a mesma velocidade durante a época da matéria.

2.2.3.2 Pequenas Escalas

Uma outra aproximação pode ser feita para modos de perturbação que entram no horizonte ainda na época da radiação. A escala desses modos está limitada por cima em $\lambda_2 \simeq 15 \text{Mpc}$ - veja a Figura 2.5. Note que estamos considerando o regime linear de crescimento de perturbações.

Na aproximação de pequenas escalas, iniciamos a evolução do potencial gravitacional $\tilde{\Phi}$ lembrando que estamos na era da radiação, e portanto são as perturbações na radiação que irão determiná-lo, através das Equações de Einstein. Neste mo-

Figura 2.6: Gráfico da evolução do potencial $\tilde{\Phi}(k, a)$ calculado na era da radiação, para dois modos diferentes: $k = 2\pi\text{Mpc}^{-1}$ e $k = \frac{2\pi}{10}\text{Mpc}^{-1}$, ambos dentro do horizonte comóvel $\eta(a_{eq})$. O potencial aparece normalizado pelo seu valor primordial, $\tilde{\Phi}_p(k)$.

mento, é mais simples utilizar uma combinação das componentes $G_{00} = -8\pi GT_{00}$ e $G_{0i} = -8\pi GT_{0i}$:

$$k^2\tilde{\Phi} = 4\pi Ga^2 \left[\rho_m \tilde{\delta}_m + 4\rho_r \tilde{\Theta}_{r,0} + \frac{3aH}{k} \left(i\rho_m \tilde{v}_m + 4\rho_r \tilde{\Theta}_{r,1} \right) \right]. \quad (2.83)$$

No limite que estamos estudando, a Eq. (2.83) fica:

$$k^2\tilde{\Phi} = 16\pi Ga^2 \rho_r \left[\tilde{\Theta}_{r,0} + \frac{3aH}{k} \tilde{\Theta}_{r,1} \right]. \quad (2.84)$$

Combinando esta equação com as de Boltzmann (2.68) e (2.69), chegamos à equação de segunda ordem para o potencial [18]:

$$\frac{d^2\tilde{\Phi}}{dt^2} + 4H\frac{d\tilde{\Phi}}{dt} + \frac{k^2}{3a^2}\tilde{\Phi} = 0. \quad (2.85)$$

A Eq. (2.85) lembra a de um oscilador harmônico amortecido, e possui uma solução similar: uma função esférica de Bessel $j_1(k\eta/\sqrt{3})$ dividida por seu argumento, o que pode ser escrito da forma:

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta) = 3\tilde{\Phi}_p(\vec{k}) \left[\frac{\text{sen}(k\eta/\sqrt{3}) - (k\eta/\sqrt{3}) \cos(k\eta/\sqrt{3})}{(k\eta/\sqrt{3})^3} \right], \quad (2.86)$$

onde o fator de 3 foi escolhido de forma que $\tilde{\Phi}(\vec{k}, 0) = \tilde{\Phi}_p(\vec{k})$. A segunda solução da Eq. (2.85) envolve as chamadas funções de Neumann esféricas (ou funções de Bessel esféricas de segundo tipo) e foi descartada pois explode em η 's muito pequenos, o que iria contra as condições iniciais dadas pela inflação.

Vemos na Eq. (2.86) que tanto as oscilações quanto o decaimento se iniciam

quando $k\eta \sim 1$, ou seja, quando a escala da perturbação é da ordem do horizonte - veja a Figura 2.6. Também percebemos que quanto mais cedo as perturbações entrarem no horizonte, mais elas serão reduzidas, de forma que podemos esperar que, após o término da era da radiação, modos com k maiores tenham amplitudes menores. Esse decrescimento do potencial com k será refletido no espectro de potência da matéria. Por fim, podemos verificar que o potencial permanece constante enquanto $k\eta \ll 1$ através da expansão das funções trigonométricas da Eq. (2.86) em série de Taylor até terceira ordem. Dessa expansão resulta:

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta) \simeq \tilde{\Phi}_p(\vec{k}) \left[1 - \frac{(k\eta)^2}{30} \right]. \quad (2.87)$$

Uma vez conhecido o potencial, utilizamos as Equações de Boltzmann (2.70) e (2.71) para determinar a evolução de $\tilde{\delta}$ na era da radiação, e concluímos que as perturbações de matéria crescem logaritmicamente [18]:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}, \eta) = A\tilde{\Phi}_p(\vec{k}) \ln(Bk\eta), \quad (2.88)$$

onde as constantes $A = 9,6$ e $B = 0,44$ são determinadas a partir das condições iniciais. Para modos de escalas menores que λ_2 , a evolução após a era da radiação não muda significativamente, de forma que quando chegamos na era da matéria, temos uma perturbação de matéria:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}, a) \propto \tilde{\Phi}_p(\vec{k}) \ln(k), \quad (2.89)$$

e portanto o espectro de potência da matéria, para $k \gtrsim 0,42\text{Mpc}^{-1}$, tem a forma $P(k) \propto k^{-3} \ln(k)$. Mais especificamente,

$$P_\delta(k, a) = \delta_H^2 \frac{36k_{eq}^4}{\pi H_0^4 k^3} \ln^2\left(\frac{k}{8k_{eq}}\right) D^2(a), \quad (2.90)$$

onde $k_{eq} \equiv a_{eq}H(a_{eq})$.

Vemos algo muito interessante acontecer no espectro de matéria: ele possui dois comportamentos diametralmente distintos em escalas menores que λ_2 e maiores que λ_1 , que circundam a escala do tamanho do horizonte na época da transição radiação-matéria. Em termos de k , vemos que para k pequeno, o espectro de potência das perturbações lineares é crescente, enquanto que para k grande, é decrescente. A transição de um comportamento para outro acontece em $k \simeq 2\pi/\eta_{eq}$.

A Figura 2.7 mostra dados observacionais junto com um modelo de espectro de potência de matéria escura mais completo que as aproximações apresentadas aqui. As retas em vermelho indicam os limites para as aproximações, e vemos que o comportamento da curva no gráfico nestas regiões é o esperado pelas Eqs. (2.82) e (2.90).

Figura 2.7: Dados obtidos de diversas observações são comparados entre si, junto com um modelo tradicional de espectro de matéria escura [45]. As linhas verticais em vermelho foram acrescentadas ao gráfico para delimitar os limites $\lambda_1 \simeq 900 \text{ Mpc}$ e $\lambda_2 \simeq 15 \text{ Mpc}$ das aproximações apresentadas. Consideramos $h = 0,72$.

Capítulo 3

A Radiação Cósmica de Fundo

As previsões teóricas mais precisas das anisotropias da Radiação Cósmica de Fundo são obtidas numericamente com computadores, através da resolução do sistema de Equações de Boltzmann e de Einstein já apresentado. Essa forma de obter a previsão também foi historicamente a primeira a ser feita [18]. Em seguida, vieram as aproximações que trouxeram soluções analíticas e permitiram uma melhor compreensão dos mecanismos físicos geradores das anisotropias.

Cálculos numéricos das anisotropias já haviam sido realizados mesmo antes do lançamento do satélite *COBE*. Em 1981, M. L. Wilson e Joseph Silk, da *University of California*, publicaram uma previsão numérica que já continha aspectos chave das anisotropias na RCF [46]. Em 1996, um grande avanço foi feito por Uros Seljak e Matias Zaldarriaga, através do código conhecido como *CMBFAST* [47]. Utilizando resultados semi-analíticos, esse programa reduziu drasticamente o tempo necessário para calcular as anisotropias, dado um certo modelo cosmológico, de dias para minutos.

Como vimos na Figura 2.4 da seção 2.1.2, o desacoplamento dos fótons com a matéria bariônica ocorre rapidamente, em $z \sim 1100$. Assim, para tratarmos analiticamente as perturbações Θ dos fótons, separamos seu comportamento em dois regimes: o anterior ao desacoplamento, no qual consideramos que os fótons estão em forte interação com os bárions, e o após o desacoplamento, no qual consideramos que praticamente não há mais interações entre as duas espécies. Além dessa separação em dois regimes de acordo com a época que estamos tratando, podemos fazer outra separação, dependendo da escala das perturbações analisadas. Escalas maiores que o horizonte, escalas menores que a escala de difusão dos fótons (que corresponde à distância quadrática média que os fótons conseguem caminhar no tempo do universo dobrar de tamanho) e escalas intermediárias. Esse tratamento nos permite obter boa parte das características das perturbações hoje observadas.

Considerando abrupta a transição entre os dois regimes e que as interações pós-desacoplamento são desprezíveis, os fótons que observamos hoje carregam informação dessa época longínqua, como se fosse uma foto (esta aproximação é chamada

Figura 3.1: Fótons que observamos hoje, na Terra (no centro, em azul), partiram há bilhões de anos atrás de uma região compreendida por uma casca esférica (em vermelho) de raio R . Perturbações na temperatura dos fótons da época de escala espacial de λ serão observadas por nós hoje como perturbações em escalas angulares θ .

de recombinação instantânea). Baseados na homogeneidade e isotropia, imaginamos que esses fótons partiram todos na mesma época, chegam na Terra ao mesmo tempo e viajaram a mesma distância. Logo, quando observamos as perturbações Θ aqui na Terra, hoje, estamos observando como eram as perturbações Θ situadas numa casca esférica centrada na Terra, há bilhões de anos atrás. Essa relação faz com que perturbações de comprimento $\lambda = 2\pi/k$ sejam vistas como anisotropias angulares de escala $\theta \simeq \lambda/R$ (para θ pequeno e espaços planos), onde R é a distância até essa superfície de último espalhamento, como apresentado na Figura 3.1.

Essas deduções qualitativas serão demonstradas de forma mais rigorosa, através das Equações de Boltzmann e de Einstein.

3.1 Regime fortemente acoplado

O regime fortemente acoplado corresponde à época anterior à “recombinação”, em $z \simeq 1089$ [29]: nessa época, os fótons estavam em constante interação com a matéria bariônica. Como vimos na seção 2.1.2, essa época se caracteriza pelo fato do livre caminho médio dos fótons ser muito menor que o raio de Hubble, $(n_e \sigma_T)^{-1} \ll H^{-1}$. Nesse cenário, trataremos as perturbações de temperatura dos fótons $\tilde{\Theta}_l(k, \eta)$ dentro dos casos: grandes escalas, escalas intermediárias e pequenas escalas.

3.1.1 Grandes escalas

Para escalas bem maiores que o horizonte, que no desacoplamento é $\eta_* = 310\text{Mpc}$, podemos utilizar a Eq. (2.72), que é a aproximação da Equação de Boltzmann para modos k pequenos [18]. Vemos então que $\tilde{\Theta}_0 = -\tilde{\Phi} + cte$, sendo que a inflação nos

dá uma constante $3\tilde{\Phi}_p/2$:

$$\tilde{\Theta}_0 \simeq -\tilde{\Phi} + \frac{3\tilde{\Phi}_p}{2}. \quad (3.1)$$

Para modos além da escala $\lambda_1 \simeq 900\text{Mpc}$ da Figura 2.5, vimos que o potencial $\tilde{\Phi} \simeq \frac{9}{10}\tilde{\Phi}_p$, ou seja:

$$\tilde{\Phi}_p(k) \simeq \frac{10}{9}\tilde{\Phi}(k, \eta), \quad k \lesssim 7 \cdot 10^{-3}\text{Mpc}^{-1}. \quad (3.2)$$

Inserindo a Eq. (3.2) na (3.1) e desconsiderando estresses anisotrópicos ($\tilde{\Phi} = -\tilde{\Psi}$) temos então, no limite de grandes escalas:

$$\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta_*) \simeq -\frac{2}{3}\tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta_*). \quad (3.3)$$

Utilizando a relação da Figura 3.1, esperamos observar este comportamento em escalas angulares maiores que $\theta \simeq 4^\circ$.

Da Eq. (2.69), vemos que, para o limite de k pequeno, temos que o dipolo $\tilde{\Theta}_1(\vec{k}, \eta) \simeq \text{cte}$. As condições iniciais do universo implicam em $\tilde{\Theta}_1(\vec{k}, 0) \ll \tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta)$, e portanto o dipolo é irrelevante nessas escalas.

3.1.2 Escalas intermediárias

Para escalas menores que o horizonte mas maiores que a escala de difusão dos fótons, partimos da Eq. (2.44). Para facilitar os cálculos, é melhor transformarmos essa equação em um conjunto de equações diferenciais para os multipolos de $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, t)$, $\tilde{\Theta}_\ell(\vec{k}, t)$, definidos pela Eq. (2.50). Para tanto, a multiplicamos pelo polinômio de Legendre $P_\ell(\mu)$ e integramos em μ , obtendo:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_0}{\partial t} + \frac{k\tilde{\Theta}_1}{a} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_1}{\partial t} - \frac{k\tilde{\Theta}_0}{3a} + \frac{2k\tilde{\Theta}_2}{3a} = \frac{k\tilde{\Psi}}{3a} - n_e\sigma_T \left(\tilde{\Theta}_1 - \frac{iv_b}{3} \right), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_\ell}{\partial t} + \frac{(\ell+1)}{(2\ell+1)}\frac{k}{a}\tilde{\Theta}_{\ell+1} - \frac{\ell}{(2\ell+1)}\frac{k}{a}\tilde{\Theta}_{\ell-1} = -n_e\sigma_T\tilde{\Theta}_\ell, \quad \ell \geq 2. \quad (3.6)$$

No regime fortemente acoplado, as interações entre bárions e fótons são tão frequentes que as anisotropias são apagadas, de forma que os multipolos com $\ell \geq 2$ são desprezíveis frente ao monopolo e ao dipolo [18]. Por isso, $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, t)$ é praticamente definido por $\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, t)$ e $\tilde{\Theta}_1(\vec{k}, t)$ e o termo da Eq. (3.5) que envolve $\tilde{\Theta}_2$ pode ser desprezado. Como o monopolo $\Theta_0(\vec{x}, t)$ corresponde à média de energia dos fótons no ponto $\vec{x}$, ele é o análogo da perturbação de densidade de energia $\delta(\vec{x}, t)$ para um fluido. O dipolo $\Theta_1(\vec{x}, t)$ é equivalente a um monopolo visto por um referencial em movimento, de forma similar ao que acontece com a densidade vista de um refe-

rencial em movimento. Essas relações começam a indicar que, durante a época em questão, os fótons se comportam como um fluido.

Para relacionar as perturbações dos fótons com os campos gravitacionais, precisamos determinar $\tilde{v}_b$. Através da Eq. (2.48), temos:

$$\tilde{v}_b = -3i\tilde{\Theta}_1 - \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \frac{H}{n_e\sigma_T} \left(\frac{\partial\tilde{v}_b}{\partial a} + \tilde{v}_b + \frac{ik\tilde{\Psi}}{aH} \right). \quad (3.7)$$

Na época em questão, o fator $H/n_e\sigma_T$ é, como vimos na seção 2.1.2, muito pequeno. Como o desacoplamento ocorre numa época próxima à época da igualdade, o fator ρ_b/ρ_γ , que fica muito pequeno no passado, não chega a 1 no desacoplamento. Desta forma, o primeiro termo da direita da Eq. (3.7) é o dominante, e portanto podemos substituir $\tilde{v}_b$ do lado direito por $-3i\tilde{\Theta}_1$. Essa quase proporcionalidade entre $\tilde{v}_b(\vec{k}, t)$ e $\tilde{\Theta}_1(\vec{k}, t)$ corrobora a idéia de que bárions e fótons estão fortemente acoplados e formam um fluido só.

Com a substituição apresentada, a Eq. (3.7) fica:

$$\tilde{v}_b \simeq -3i\tilde{\Theta}_1 + i\frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma} \frac{H}{n_e\sigma_T} \left(3\frac{\partial\tilde{\Theta}_1}{\partial a} + 3\tilde{\Theta}_1 - \frac{k\tilde{\Psi}}{aH} \right). \quad (3.8)$$

Substituindo a Eq. (3.8) na (3.5), temos, junto com a Eq. (3.4), um sistema que envolve $\tilde{\Theta}_0$, $\tilde{\Theta}_1$ e as perturbações da métrica. Daí podemos obter uma equação diferencial para o monopolo $\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, t)$ [18]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\tilde{\Theta}_0}{d\eta^2} + aH \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma + 3\rho_b} \frac{d\tilde{\Theta}_0}{d\eta} + k^2 c_s^2 \tilde{\Theta}_0 = \\ -\frac{k^2}{3} \tilde{\Psi} - aH \frac{3\rho_b}{4\rho_\gamma + 3\rho_b} \frac{d\tilde{\Phi}}{d\eta} - \frac{d^2\tilde{\Phi}}{d\eta^2} \equiv F(\vec{k}, \eta), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $c_s \equiv 1/\sqrt{3(1 + 3\rho_b/4\rho_\gamma)}$ é a velocidade do som efetiva do fluido composto por fótons e bárions.

Novamente nos deparamos com uma equação similar à de um oscilador harmônico. Aqui, temos uma oscilação amortecida (pelo termo da esquerda que contém $d\tilde{\Theta}_0/d\eta$) e forçada [pelos termos da direita, que chamamos de $F(\vec{k}, \eta)$]. Essas oscilações podem ser compreendidas como uma soma dos efeitos da gravidade e da pressão no fluido. A gravidade induz um colapso das perturbações, aumentando as inhomogeneidades. Esse aumento, porém, aumenta também a pressão, que então leva à diluição da perturbação.

É interessante notar que o termo correspondente à força restauradora, $k^2 c_s^2 \tilde{\Theta}_0$, é inversamente proporcional à quantidade de bárions no universo, de forma que o aumento da quantidade de bárions diminui a frequência de oscilação de $\tilde{\Theta}_0$. Além disso, este termo também é proporcional a k , ou seja, a frequência de oscilação de

$\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, t)$ depende de k . Poderíamos supor que a solução da Eq. (3.9) seja parecida com:

$$\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta) \sim \cos(kc_s\eta). \quad (3.10)$$

Percebemos que, num instante η fixo, a função $\tilde{\Theta}_0$ oscila em k . Considerando a discussão que culmina na Figura 3.1, esperamos observar anisotropias na RCF mais intensas e menos intensas, oscilando conforme variamos o ângulo θ analisado.

Reparamos também que termo que levaria à oscilação forçada, $F(\vec{k}, \eta)$, é um termo gravitacional, que imaginamos querer colapsar a matéria e aumentar $\tilde{\Theta}_0$. Se esse termo fosse uma constante, poderíamos transformar a Eq. (3.9) numa equação homogênea, e perceberíamos que $\tilde{\Theta}_0$ oscilaria não mais em torno de zero, mas de $F/k^2c_s^2$. Esse termo extra nos diz que uma maior densidade de bárions leva a picos de $\tilde{\Theta}_0$ positivo mais elevados e vales de $\tilde{\Theta}_0$ negativo menos profundos.

Wayne Hu e Naoshi Sugiyama descobriram, em 1994, a solução da Eq. (3.9) [48]:

$$\begin{aligned} [1 + R(\eta)]^{1/4} \tilde{\Theta}_0(\eta) = & \tilde{\Theta}_0(\eta_i) \cos[kr_s(\eta)] + \\ & \frac{\sqrt{3}}{k} \left[\frac{d\tilde{\Theta}_0(\eta_i)}{d\eta} + \frac{1}{4} \frac{dR(\eta_i)}{d\eta} \tilde{\Theta}_0(\eta_i) \right] \sin[kr_s(\eta)] + \\ & \frac{\sqrt{3}}{k} \int_0^\eta [1 + R(\eta')]^{3/4} \sin[kr_s(\eta) - kr_s(\eta')] F(\eta') d\eta', \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $R(\eta) = 3\rho_b(\eta)/4\rho_\gamma(\eta)$ e

$$r_s(\eta) = \int_0^\eta c_s(\eta') d\eta', \quad (3.12)$$

que é chamado de horizonte sonoro. Vemos que quando a velocidade do som no fluido c_s é constante, o argumento das funções cosseno e seno se torna $kc_s\eta$, como supusemos na Eq. (3.10). Essa solução também apresenta o deslocamento do ponto de equilíbrio de $\tilde{\Theta}_0$ citado, de forma que uma maior quantidade de bárions leva a um maior contraste entre as amplitudes dos picos e dos vales.

Por fim, como o dipolo $\tilde{\Theta}_1$ está relacionado ao monopolo $\tilde{\Theta}_0$ através de uma primeira derivada e a primeira derivada de $\cos(t)$ é $-\sin(t) = \cos(t + \frac{\pi}{2})$, esperamos que o dipolo esteja fora de fase com o monopolo, o que de fato acontece [18].

3.1.3 Pequenas escalas

Quando analisamos escalas bem pequenas, percebemos que não existe um acoplamento perfeito entre bárions e fótons, ou seja, os fótons conseguem caminhar uma porção considerável dessa escala sofrendo poucas interações. Esse pequeno número de interações permite que um fóton originário de uma região quente vá para uma mais fria, apagando as inomogeneidades [18]. Dessa forma, esperamos que as os-

Figura 3.2: Para representar a difusão de um fóton, desenhamos sua trajetória em vermelho. O fóton executa um movimento browniano por um gás de elétrons, representados em azul, e seu livre caminho médio é $L = (n_e \sigma_T)^{-1}$. No tempo necessário para o universo dobrar de tamanho, um fóton consegue percorrer uma distância aproximada λ_D . Perturbações de escalas próximas ou inferiores a λ_D são atenuadas pela difusão. Note que estas escalas ainda são maiores que L .

cilações apresentadas na seção anterior sofram, próximo a essas escalas, um amortecimento devido a essa difusão dos fótons. Este fenômeno é conhecido como *Silk Damping*, em referência ao astrônomo inglês Joseph Silk. A Figura 3.2 representa a difusão, e apresenta as escalas relevantes para o problema. Como o fóton executa movimento browniano, ele consegue percorrer, após N colisões, uma distância comóvel de $\lambda_D = L\sqrt{N}$, onde L é o seu livre caminho médio comóvel. Como vimos na seção 2.1.2, $L = (n_e \sigma_T a)^{-1}$, e num intervalo de tempo H^{-1} , o fóton interage $N \simeq n_e \sigma_T H^{-1}$ vezes, em média. Assim:

$$\lambda_D \simeq \frac{1}{\sqrt{n_e \sigma_T a^2 H}}, \quad (3.13)$$

Essa mobilidade dos fótons introduz um complicador na solução analítica, pois permite o aparecimento de anisotropias. Assim, nessas escalas devemos levar em conta também o quadrupolo de $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, \eta)$ [18]. Por outro lado, da Eq. (2.86) nota-se que o potencial $\tilde{\Phi}(k, \eta)$ sofre um rápido decaimento se k é grande. Para simplificar os cálculos, vamos então desprezar os potenciais $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Psi}$. Dados esses elementos, as Eqs. (3.4), (3.5) e (3.6) ficam:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_0}{\partial t} + \frac{k \tilde{\Theta}_1}{a} = 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_1}{\partial t} + \frac{k}{3a} (2\tilde{\Theta}_2 - \tilde{\Theta}_0) = -n_e \sigma_T \left(\tilde{\Theta}_1 - \frac{iv_b}{3} \right), \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}_2}{\partial t} - \frac{2k}{5a} \tilde{\Theta}_1 = -\frac{9}{10} n_e \sigma_T \tilde{\Theta}_2, \quad (3.16)$$

onde o fator de $\frac{9}{10}$ da última equação vem de uma correção do quadrupolo não apresentada neste trabalho [18]. Como esperamos que nessas escalas as perturbações também oscilem como as intermediárias da seção 3.1.2, vamos escrever a dependência temporal de todas as perturbações da forma:

$$e^{i \int \omega d\eta}, \quad (3.17)$$

onde $\omega \simeq kc_s$, de forma que essa dependência seja similar à dada pela Eq. (3.11). Para resolvermos as Eqs. (3.14) a (3.16), precisamos de uma equação para a velocidade dos bárions $\tilde{v}_b$. Partindo da Eq. (3.7), desconsiderando o potencial $\tilde{\Psi}$ e lembrando que estamos trabalhando em escalas λ tal que $(aH)^{-1} \gg \lambda_D \gtrsim \lambda \gg (n_e \sigma_T a)^{-1}$, chegamos na equação aproximada:

$$\tilde{v}_b \simeq -3i\tilde{\Theta}_1 \left[1 - \frac{i\omega R}{n_e \sigma_T a} - \left(\frac{\omega R}{n_e \sigma_T a} \right)^2 \right]. \quad (3.18)$$

Como a derivada de $\tilde{\Theta}_2$ na Eq. (3.16) é a única grandeza não multiplicada por um fator grande (k ou $n_e \sigma_T$), desprezamos-a, obtendo:

$$\tilde{\Theta}_2 = \frac{4k}{9a} \frac{\tilde{\Theta}_1}{n_e \sigma_T}. \quad (3.19)$$

Por fim, utilizando a expressão (3.17) para a dependência temporal do monopolo, temos:

$$\tilde{\Theta}_0 = \frac{ik}{\omega} \tilde{\Theta}_1. \quad (3.20)$$

Substituindo todas as grandezas acima na Eq. (3.15), chegamos a:

$$\omega^2(1+R) - \frac{k^2}{3} - \frac{i\omega}{n_e \sigma_T a} \left(\omega^2 R^2 + \frac{8k^2}{27} \right) = 0. \quad (3.21)$$

Como a escala λ referente a frequência ω é maior que o livre caminho médio comóvel $(n_e \sigma_T a)^{-1}$, o fator $\omega/n_e \sigma_T a$ é muito pequeno. Se desconsiderarmos os termos da Eq. (3.21) que o multiplicam, obtemos o resultado $\omega = kc_s$, o que justifica a aproximação apresentada após a expressão (3.17).

Introduzindo a expansão $\omega = kc_s + \delta\omega$, sendo $\delta\omega$ um termo de primeira ordem, na Eq. (3.21) e eliminando termos de segunda ordem (inclusive $\delta\omega/n_e \sigma_T a$), temos:

$$\delta\omega = \frac{ik^2}{6(1+R)n_e \sigma_T a} \left(\frac{R^2}{(1+R)} + \frac{8}{9} \right), \quad (3.22)$$

que, por ser imaginário, é um termo de amortecimento. Desta forma, a evolução

temporal do monopolo fica:

$$\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta) \propto \exp\left(i \int_0^\eta \omega_0 d\eta'\right) \cdot \exp\left(i \int_0^\eta \delta\omega d\eta'\right). \quad (3.23)$$

Podemos escrever o amortecimento exponencial de $\tilde{\Theta}_0$ da forma [18]:

$$\exp\left(i \int_0^\eta \delta\omega d\eta'\right) = \exp\left(-\frac{k^2}{k_D^2(\eta)}\right), \quad (3.24)$$

onde

$$\frac{1}{k_D^2(\eta)} \equiv \int_0^\eta \frac{1}{6(1+R)n_e\sigma_T a} \left(\frac{R^2}{(1+R)} + \frac{8}{9}\right) d\eta'. \quad (3.25)$$

Desconsiderando termos de primeira ordem de grandeza (como R próximo à época da equipartição de energia), temos:

$$\lambda_D^2 \sim \int_0^a \frac{da'}{n_e\sigma_T a'^3 H} \sim \frac{1}{n_e\sigma_T a^2 H}, \quad (3.26)$$

que concorda com nossa estimativa feita no início da seção.

Relembramos que estes cálculos são válidos para escalas λ que obedecem a relação:

$$(aH)^{-1} \gg \lambda_D \gtrsim \lambda \gg (n_e\sigma_T a)^{-1}. \quad (3.27)$$

Em $z = 1500$, esta relação adquire os seguintes valores numéricos:

$$166\text{Mpc} \gg 28\text{Mpc} \gtrsim \lambda \gg 0.17\text{Mpc}. \quad (3.28)$$

Como os cálculos numéricos resultam em $\lambda_D(\eta_*) \simeq 56\text{Mpc}$ (com η_* o tempo conforme na época do desacoplamento), o amortecimento nessas escalas deve ser perceptível, da ordem de $1/e$. Uma perturbação na superfície de último espalhamento nessas escalas corresponde a uma anisotropia angular, vista da Terra, de $\theta \simeq 0,24^\circ$. Em conclusão, podemos supor que as anisotropias em escalas angulares abaixo de $\theta \simeq 0,24^\circ$ são exponencialmente suprimidas.

3.2 Desacoplamento e deslocamento livre

Nesta seção, vamos evoluir a perturbação $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, \eta)$ da época do desacoplamento ($\eta = \eta_*$) até uma época posterior, na qual o número de interações entre fótons e bárions é pequena e o deslocamento dos fótons no universo é livre [18]. Essa passagem é importante pois, além de resultar nas anisotropias observadas hoje ($\eta = \eta_0$), ela é uma das bases do trabalho por nós desenvolvido.

Como sempre, partimos da Equação de Boltzmann (2.44) que, escrita em termos

de η , fica:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \eta} + i\mu k \tilde{\Theta} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} + i\mu k \tilde{\Psi} = n_e \sigma_T a [\tilde{\Theta}_0 - \tilde{\Theta} + \mu \tilde{v}_b]. \quad (3.29)$$

É interessante definir a grandeza profundidade ótica $\tau(\eta)$ da forma:

$$\tau(\eta) \equiv \int_{\eta}^{\eta_0} n_e(\eta) \sigma_T a(\eta) d\eta, \quad (3.30)$$

de maneira que $d\tau/d\eta = -n_e \sigma_T a$. A profundidade ótica é uma medida de quanta radiação é transmitida num meio. Se I_0 é a intensidade emitida inicialmente e I a intensidade observada em algum ponto do meio, a profundidade ótica τ desse meio é dada por $I/I_0 = e^{-\tau}$ [49].

Utilizando essa definição e rearranjando os termos da Eq. (3.29), temos:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \eta} + \left(i\mu k - \frac{d\tau}{d\eta} \right) \tilde{\Theta} = -\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} - i\mu k \tilde{\Psi} - \frac{d\tau}{d\eta} (\tilde{\Theta}_0 + \mu \tilde{v}_b), \quad (3.31)$$

sendo que definimos o lado direito da equação acima como termo de fonte $S' = S'(\vec{k}, \mu, \eta)$. Para isolarmos $\tilde{\Theta}$, escrevemos a Eq. (3.31) da forma:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\tilde{\Theta} e^{i\mu k \eta - \tau} \right) = e^{i\mu k \eta - \tau} S', \quad (3.32)$$

e então:

$$\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, \eta_x) e^{i\mu k \eta_x - \tau(\eta_x)} - \tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, \eta_i) e^{i\mu k \eta_i - \tau(\eta_i)} = \int_{\eta_i}^{\eta_x} e^{i\mu k \eta - \tau} S'(\vec{k}, \mu, \eta) d\eta, \quad (3.33)$$

onde $\eta_x \gg \eta_*$ é uma época arbitrária e η_i corresponde a uma época muito anterior ao desacoplamento ($\eta_i \ll \eta_*$). O segundo termo da esquerda pode ser desprezado devido ao fator de $e^{-\tau(\eta_i)}$, que é muito pequeno em η_i . Esse fato já nos diz algo muito interessante sobre a evolução das perturbações: as perturbações em $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, \eta)$ de tempos remotos η_i não influenciam na perturbação $\tilde{\Theta}$ de épocas muito recentes. As únicas perturbações que a influenciam são as que compõem o termo de fonte S' . Assim, de todos os multipolos de $\tilde{\Theta}$, os únicos que influenciam o $\tilde{\Theta}$ de épocas recentes é o monopolo e o dipolo, através da velocidade $\tilde{v}_b$.

Devido à recombinação e a expansão do universo, a densidade de elétrons livres cai drasticamente. Este fato, combinado com a própria definição de τ faz com que $\tau(z < 10) \ll 10^{-4}$, desconsiderando a reinonização. Desta forma, temos:

$$\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, \eta_x) = \int_{\eta_i}^{\eta_x} e^{i\mu k (\eta - \eta_x) - \tau(\eta)} S'(\vec{k}, \mu, \eta) d\eta. \quad (3.34)$$

Escrevendo o integrando da Eq. (3.34) explicitamente, vemos que, com excessão do fator $e^{i\mu k \eta}$ que multiplica todos os termos, μ só aparece linearmente (nenhuma

função que compõe S' tem μ como parâmetro). Logo, podemos fazer a substituição:

$$\mu e^{i\mu k(\eta-\eta_x)} = \frac{1}{ik} \frac{d}{d\eta} e^{i\mu k(\eta-\eta_x)}. \quad (3.35)$$

Utilizando esta igualdade, reescrevemos o integrando da Eq. (3.34) e obtemos:

$$-e^{-\tau} \left[e^{i\mu k(\eta-\eta_x)} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} + \frac{de^{i\mu k(\eta-\eta_x)}}{d\eta} \tilde{\Psi} + \frac{d\tau}{d\eta} \left(e^{i\mu k(\eta-\eta_x)} \tilde{\Theta}_0 + \frac{de^{i\mu k(\eta-\eta_x)}}{d\eta} \frac{\tilde{v}_b}{ik} \right) \right]. \quad (3.36)$$

Os termos que contêm derivadas de $e^{i\mu k(\eta-\eta_x)}$ podem ser integrados por partes. A integral do último termo da expressão (3.36) fica:

$$\begin{aligned} & - \int_{\eta_i}^{\eta_x} \frac{de^{i\mu k(\eta-\eta_x)}}{d\eta} e^{-\tau(\eta)} \frac{d\tau}{d\eta} \frac{\tilde{v}_b}{ik} d\eta = \\ & -e^{i\mu k(\eta-\eta_x)-\tau(\eta)} \frac{d\tau}{d\eta} \frac{\tilde{v}_b}{ik} \Big|_{\eta_i}^{\eta_x} + \int_{\eta_i}^{\eta_x} e^{i\mu k(\eta-\eta_x)} \frac{d}{d\eta} \left(e^{-\tau(\eta)} \frac{d\tau}{d\eta} \frac{\tilde{v}_b}{ik} \right) d\eta. \end{aligned} \quad (3.37)$$

O primeiro termo do lado direito da equação pode ser desprezado: quando $\eta = \eta_i$, $e^{-\tau(\eta_i)}$ se torna muito pequeno, e quando $\eta = \eta_x$, não existe nenhuma dependência angular. Quando formos calcular os multipolos $\tilde{\Theta}_\ell$ a partir da Eq. (3.34), esses termos só contribuirão para o monopolo $\tilde{\Theta}_0$, e este não pode ser diferenciado da temperatura média, se observarmos a RCF apenas da Terra. Assim, temos:

$$- \int_{\eta_i}^{\eta_x} \frac{de^{i\mu k(\eta-\eta_x)}}{d\eta} e^{-\tau(\eta)} \frac{d\tau}{d\eta} \frac{\tilde{v}_b}{ik} d\eta = \int_{\eta_i}^{\eta_x} e^{i\mu k(\eta-\eta_x)} \frac{d}{d\eta} \left(e^{-\tau(\eta)} \frac{d\tau}{d\eta} \frac{\tilde{v}_b}{ik} \right) d\eta. \quad (3.38)$$

Através do mesmo método, podemos transformar a integral do termo proporcional a $\tilde{\Psi}$ da expressão (3.32):

$$- \int_{\eta_i}^{\eta_x} \frac{de^{i\mu k(\eta-\eta_x)}}{d\eta} e^{-\tau(\eta)} \tilde{\Psi} d\eta = \int_{\eta_i}^{\eta_x} e^{i\mu k(\eta-\eta_x)} \frac{d}{d\eta} \left(e^{-\tau(\eta)} \tilde{\Psi} \right) d\eta. \quad (3.39)$$

Dessa forma, o integrando da Eq. (3.34) fica:

$$e^{i\mu k(\eta-\eta_x)} \left[-e^{-\tau} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} + \frac{d}{d\eta} \left(e^{-\tau} \tilde{\Psi} \right) - e^{-\tau} \frac{d\tau}{d\eta} \tilde{\Theta}_0 + \frac{d}{d\eta} \left(e^{-\tau(\eta)} \frac{d\tau}{d\eta} \frac{\tilde{v}_b}{ik} \right) \right]. \quad (3.40)$$

Neste momento, utilizamos a expansão de Rayleigh [18]:

$$e^{i\mu k(\eta-\eta_x)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) j_\ell[k(\eta-\eta_x)] P_\ell(\mu), \quad (3.41)$$

onde $j_\ell(z)$ é a função de Bessel esférica de ordem ℓ . Como temos toda dependência angular do integrando no argumento do polinômio de Legendre $P_\ell(\mu)$, é fácil transformar a Eq. (3.34) em uma série de equações para os multipolos $\tilde{\Theta}_\ell$. Multiplicando

Figura 3.3: Evolução, em função do *redshift*, da função $e^{-\tau(\eta)}$ (em azul) e da função de visibilidade $g(\eta)$ (em vermelho), que para ficar adimensional foi multiplicada por 20Mpc. Aqui consideramos que o processo $e^- + p \rightarrow H + \gamma$ ocorre em equilíbrio até se atingir $X_e = 7 \cdot 10^{-4}$, o que não é verdade. Tal simplificação deslocou o pico de $g(\eta)$ de $z \sim 1100$ para $z \sim 1300$. Apesar disso, as características básicas das duas funções permanecem inalteradas. Um gráfico preciso de $g(\eta)$ é apresentado em [18].

seus dois lados por $P_\ell(\mu)$ e integrando em μ , temos:

$$\tilde{\Theta}_\ell(\vec{k}, \eta_x) = \int_{\eta_i}^{\eta_x} S(\vec{k}, \eta) j_\ell[k(\eta_x - \eta)] d\eta, \quad (3.42)$$

onde utilizamos a relação $(-1)^\ell j_\ell(z) = j_\ell(-z)$, e:

$$S(\vec{k}, \eta) \equiv -\frac{d\tau}{d\eta} e^{-\tau(\eta)} \left(\tilde{\Theta}_0 + \tilde{\Psi} \right) + \frac{d}{d\eta} \left(\frac{d\tau}{d\eta} e^{-\tau(\eta)} \frac{\tilde{v}_b}{ik} \right) + e^{-\tau(\eta)} \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \eta} \right). \quad (3.43)$$

O novo termo de fonte $S(\vec{k}, \eta)$ possui dois tipos de termos: os proporcionais a $e^{-\tau(\eta)}$ e os proporcionais a $g(\eta) \equiv -\frac{d\tau}{d\eta} e^{-\tau(\eta)}$, chamada de função de visibilidade. Esses dois fatores possuem comportamentos bem diferentes um do outro. O fator exponencial $e^{-\tau(\eta)}$ torna negligível contribuições de épocas anteriores ao desacoplamento, mas confere pesos semelhantes para todas as épocas posteriores. O fator $g(\eta)$ possui um comportamento curioso, pois funciona como uma função janela em $\eta = \eta_*$. Inclusive, a determinação de η_* se dá, de fato, através do cálculo preciso da função $g(\eta)$, que é a densidade de probabilidade do fóton ser espalhado, em η , pela *última vez* [18]. Note que segundo a definição de $g(\eta)$, sua integral de η_i a η_0 é igual a um. A Figura 3.3 apresenta o comportamento de ambos os fatores em função do *redshift*. Como é a função de visibilidade que determina qual é a superfície de último espalhamento, concluímos que esta tem uma espessura finita.

O pico bem definido da função $g(\eta)$ é a base matemática para a nossa interpretação da radiação cósmica de fundo como uma foto do universo sobre uma fina casca

esférica. Para calcularmos a Eq. (3.42) analiticamente, utilizamos o fato de que as demais funções da integral são quase constantes dentro do pequeno intervalo em que $g(\eta)$ é não-negligível [18]. Como esta função tem seu máximo em η_* e $\int_{\eta_i}^{\eta_x} g(\eta) d\eta = 1$ (tendo $\eta_x \gg \eta_*$), o primeiro termo da Eq. (3.43) nos leva a:

$$\int_{\eta_i}^{\eta_x} g(\eta) \left[\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta) + \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta) \right] j_\ell[k(\eta_x - \eta)] d\eta \simeq \left[\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta_*) + \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta_*) \right] j_\ell[k(\eta_x - \eta_*)]. \quad (3.44)$$

A integral do segundo termo da Eq. (3.43) pode ser feita por partes, sendo que o termo de superfície é anulado por $g(\eta)$:

$$\begin{aligned} \int_{\eta_i}^{\eta_x} \frac{d}{d\eta} \left(-g(\eta) \frac{\tilde{v}_b}{ik} \right) j_\ell[k(\eta_x - \eta)] d\eta &= \int_{\eta_i}^{\eta_x} g(\eta) \frac{\tilde{v}_b}{ik} \frac{dj_\ell[k(\eta_x - \eta)]}{d\eta} d\eta = \\ \int_{\eta_i}^{\eta_x} g(\eta) \frac{3\tilde{\Theta}_1}{k} \frac{1}{2\ell + 1} \{(\ell + 1)j_{\ell+1}[k(\eta_x - \eta)] - \ell j_{\ell-1}[k(\eta_x - \eta)]\} d\eta. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Na última passagem utilizamos uma relação de recorrência das funções de Bessel esféricas, e consideramos $\tilde{v}_b \simeq -3i\tilde{\Theta}_1$. Para finalizar, realizamos a integral utilizando a função $g(\eta)$ como uma função janela estreita, dentro da qual os valores das demais funções são constantes. A Eq. (3.42) resulta em:

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_\ell(\vec{k}, \eta_x) &\simeq \left[\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta_*) + \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta_*) \right] j_\ell[k(\eta_x - \eta_*)] + \\ \frac{3\tilde{\Theta}_1(\vec{k}, \eta_*)}{k} \frac{1}{2\ell + 1} \{(\ell + 1)j_{\ell+1}[k(\eta_x - \eta_*)] - \ell j_{\ell-1}[k(\eta_x - \eta_*)]\} + \\ \int_{\eta_i}^{\eta_x} e^{-\tau(\eta)} \left(\frac{\partial \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial \tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta)}{\partial \eta} \right) j_\ell[k(\eta_x - \eta)] d\eta. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Esta equação possui um significado físico profundo. Para analisá-la, vamos considerar as perturbações $\tilde{\Theta}_\ell$ na época atual ($\eta_x = \eta_0$). Começando pelo primeiro termo, vemos que as perturbações atuais são determinadas em parte pelo monopolo na época do desacoplamento, sem que este sofra qualquer modificação. Na realidade, vemos que $\tilde{\Theta}_0$ aparece somado ao potencial $\tilde{\Psi}$, ambos calculados no mesmo instante e para o mesmo modo $\vec{k}$. Este fenômeno é chamado de Efeito Sachs-Wolfe (SW), e é interpretado como a perda de energia que o fóton sofre para sair de um poço de potencial ($\tilde{\Psi}$ é negativo em regiões mais densas) [18]. A função $j_\ell(x)$ que multiplica esse termo também nos leva a considerações importantes. Como essa função apresenta um grande pico quando seu argumento $x \simeq \ell$, ela acaba selecionando as perturbações primordiais de modo $k \simeq \ell/(\eta_x - \eta_*)$. Como $\tilde{\Theta}_\ell$ apresenta flutuações em escalas angulares $\theta \sim \pi/\ell$, e $\eta_x - \eta_* = R$ é a distância conforme até a SUE, recuperamos a interpretação da Figura 3.1.

Vemos que a temperatura dos fótons que partem da SUE não é alterada pelos potenciais no meio do caminho, a não ser que estes estejam variando [o que é considerado no último termo da Eq. (3.46)]. Isso ocorre porque a energia ganha ao entrar no potencial é perdida ao sair, e portanto só existe saldo quando o potencial já não é mais o mesmo. Neste caso, o efeito é chamado de Efeito Sachs-Wolfe Integrado (SWI), e devido à função $e^{-\tau}$, ele ocorre apenas após o desacoplamento. Por isso, ele é chamado, juntamente com outros efeitos que acontecem em $\eta > \eta_*$ (como a reionização, que não foi contabilizada neste trabalho), de anisotropias secundárias ou tardias, em contraste ao efeito Sachs-Wolfe e à contribuição do dipolo, que acontecem na SUE. Estes últimos são chamados de anisotropias primárias.

Por fim, o termo de dipolo é esperado pois o que observamos hoje são os fótons que, ao desacoplarem, vieram em nossa direção. Portanto, deveríamos observar $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \mu, \eta_*)$ completo (no μ correspondente à nossa direção). Em outras palavras, esperaríamos ver uma soma de todos os multipolos $\tilde{\Theta}_l(\vec{k}, \eta_*)$. Entretanto, a supressão dos multipolos é proporcional a l , de forma que os com $l \geq 2$ podem ser desprezados [18]. Como vimos na seção 3.1.1, a contribuição do dipolo também é negligível em escalas angulares $\theta \gtrsim 4^\circ$.

3.3 Conexão com observações

O contraste de temperatura $\Theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta)$ que nós observamos hoje, da Terra, tem alguns de seus parâmetros fixados: a posição $\vec{x}$, localizada na Terra (podemos escolher $\vec{x} = 0$), e o tempo atual $\eta = \eta_0$. Logo, a perturbação nos fótons a qual nós temos acesso diretamente é função apenas da direção da linha de visada $\hat{p} = (\theta, \phi)$. As observações feitas com telescópios associam a cada direção de medição no céu $\hat{p}$ uma temperatura da Radiação Cósmica de Fundo $T(\theta, \phi)$, de onde construímos o contraste:

$$\Theta(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \bar{T}}{\bar{T}}, \quad (3.47)$$

onde $\bar{T}$ é a média das temperaturas $T(\theta, \phi)$. É possível descrever funções de coordenadas angulares em termos de funções chamadas harmônicos esféricos $Y_{lm}(\theta, \phi)$:

$$\Theta(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (3.48)$$

onde a_{lm} são coeficientes que dependem dos índices l e m mas são independentes das coordenadas θ e ϕ . Podemos interpretar esses coeficientes como sendo uma transformada da função Θ , e os índices l e m como variáveis conjugadas de θ e ϕ . A importante propriedade de ortogonalidade dos esféricos harmônicos:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}(\theta, \phi) Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (3.49)$$

nos permite calcular os coeficientes a_{lm} :

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^*(\theta, \phi) \Theta(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi. \quad (3.50)$$

Para deixar as equações mais compactas, vamos reescrever a equação acima da forma:

$$a_{lm} = \int Y_{lm}^*(\hat{p}) \Theta(\hat{p}) d^2\hat{p}, \quad (3.51)$$

onde $d^2\hat{p} = \sin\theta d\theta d\phi$. Por fim, o contraste de temperatura dependente das variáveis $\vec{x}$ e η pode ser escrito da forma:

$$\Theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm}(\vec{x}, \eta) Y_{lm}(\hat{p}). \quad (3.52)$$

Esse formalismo é importante para compararmos as observações com as previsões teóricas, pois a teoria não nos dá os valores de $\Theta(\hat{p})$ em cada ponto $\hat{p}$, e sim a distribuição da qual os valores de $\Theta(\hat{p})$ foram retirados. Logo, o que pode ser comparado com as observações são grandezas estatísticas tais como a média e a variância de uma distribuição. Como a média $\langle a_{lm} \rangle$ é, por definição, nula, vamos calcular a variância $\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle$. Para tanto, precisamos relacionar os coeficientes a_{lm} com alguma grandeza que tenha suas propriedades estatísticas determinadas teoricamente.

Na seção 3.2, vimos a relação entre $\tilde{\Theta}_\ell(\vec{k}, \eta_0)$ e $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \eta_*)$. Já a seção 3.1 faz a ligação entre $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \eta_*)$ e $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \eta_i)$. Finalmente, a seção 2.2.2 estabelece a conexão entre $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \eta_i)$ e $\tilde{\Phi}_p(\vec{k})$, que possui uma correlação prevista pela teoria da inflação. Logo, só nos resta ligar a_{lm} a $\tilde{\Theta}_\ell(\vec{k}, \eta_0)$.

Utilizando a ortogonalidade dos Y_{lm} , invertamos a Eq. (3.52):

$$a_{lm}(\vec{x}, \eta) = \int Y_{lm}^*(\hat{p}) \Theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta) d^2\hat{p}. \quad (3.53)$$

A função $\Theta(\vec{x}, \hat{p}, \eta)$ pode ser escrita em termos de sua transformada de Fourier, o que nos leva a:

$$a_{lm}(\vec{x}, \eta) = \int Y_{lm}^*(\hat{p}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{\Theta}(\vec{k}, \hat{p}, \eta) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k d^2\hat{p}. \quad (3.54)$$

A função $\tilde{\Theta}(\vec{k}, \hat{p}, \eta)$ pode ser expandida em uma série de polinômios de Legendre, o que nos leva a:

$$a_{lm}(\vec{x}, \eta) = \int Y_{lm}^*(\hat{p}) \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) (-i)^\ell \tilde{\Theta}_\ell(\vec{k}, \eta) P_\ell(\hat{k} \cdot \hat{p}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k d^2\hat{p}, \quad (3.55)$$

onde relembramos a definição $\mu \equiv (\vec{k} \cdot \hat{p})/k$. Vemos assim que a dependência em $\hat{p}$

só aparece em dois termos, sendo que a Eq. (3.56) pode ser utilizada para isolar o $\hat{p}$ do polinômio de Legendre:

$$P_\ell(\hat{k} \cdot \hat{p}) = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \sum_{m'=-\ell}^{\ell} Y_{\ell m'}^*(\hat{k}) Y_{\ell m'}(\hat{p}). \quad (3.56)$$

Assim, a integral em $\hat{p}$ se torna simples e resulta apenas em $\delta_{\ell\ell}\delta_{mm'}$, e a Eq. (3.55) se torna:

$$a_{lm}(\vec{x}, \eta) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int (-i)^l \tilde{\Theta}_l(\vec{k}, \eta) Y_{lm}^*(\hat{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d^3k. \quad (3.57)$$

Escrevendo $a_{lm} = a_{lm}(0, \eta_0)$, a variância $\langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle$ pode então ser escrita da forma:

$$\begin{aligned} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle &= \left\langle \frac{2}{\pi} \iint (-i)^{l-l'} \tilde{\Theta}_l(\vec{k}, \eta_0) \tilde{\Theta}_{l'}^*(\vec{k}', \eta_0) Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{l'm'}(\hat{k}') d^3k d^3k' \right\rangle = \\ &= \frac{2}{\pi} \iint (-i)^{l-l'} \left\langle \tilde{\Theta}_l(\vec{k}, \eta_0) \tilde{\Theta}_{l'}^*(\vec{k}', \eta_0) \right\rangle Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{l'm'}(\hat{k}') d^3k d^3k', \end{aligned} \quad (3.58)$$

sendo que a última passagem pode ser feita porque toda a variabilidade estatística está nas funções $\tilde{\Theta}_l$. Inclusive, o mesmo princípio pode ser usado se escrevermos $\tilde{\Theta}_l(\vec{k}, \eta_0)$ em função de $\tilde{\Phi}_p(\vec{k})$: todos os termos, com exceção de $\tilde{\Phi}_p(\vec{k})$, são constantes que multiplicam as várias possíveis realizações de $\tilde{\Phi}_p(\vec{k})$. Como o mesmo pode ser feito com a perturbação de densidade da matéria $\tilde{\delta}(\vec{k}, \eta_0)$, a expressão

$$\frac{\tilde{\Theta}_l(\vec{k}, \eta_0) \tilde{\Theta}_{l'}^*(\vec{k}', \eta_0)}{\tilde{\delta}(\vec{k}, \eta_0) \tilde{\delta}^*(\vec{k}', \eta_0)} \quad (3.59)$$

é independente de qual realização de $\tilde{\Phi}_p(\vec{k})$ estamos analisando, já que ela afeta o numerador e o denominador da expressão (3.59) sempre da mesma forma [18]. Além disso, podemos verificar nas expressões explícitas de $\tilde{\Theta}_l(\vec{k}, \eta_0)$ e $\tilde{\delta}(\vec{k}, \eta_0)$ que estes só dependem da direção do vetor $\vec{k}$ através de $\tilde{\Phi}_p(\vec{k})$, e portanto a razão entre os dois é independente da direção $\hat{k}$. Assim, a Eq. (3.58) pode ser transformada em:

$$\begin{aligned} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle &= \frac{2}{\pi} \iint (-i)^{l-l'} \frac{\tilde{\Theta}_l(k, \eta_0) \tilde{\Theta}_{l'}^*(k', \eta_0)}{\tilde{\delta}(k, \eta_0) \tilde{\delta}^*(k', \eta_0)} \times \\ &\quad \left\langle \tilde{\delta}(\vec{k}, \eta_0) \tilde{\delta}^*(\vec{k}', \eta_0) \right\rangle Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{l'm'}(\hat{k}') d^3k d^3k', \end{aligned} \quad (3.60)$$

sendo que a correlação $\left\langle \tilde{\delta}(\vec{k}, \eta_0) \tilde{\delta}^*(\vec{k}', \eta_0) \right\rangle$ já foi tratada na seção 2.2.3. Então escrevemos a Eq. (3.60) da forma:

$$\begin{aligned} \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle &= \frac{2}{\pi} \iint (-i)^{l-l'} \frac{\tilde{\Theta}_l(k, \eta_0) \tilde{\Theta}_{l'}^*(k', \eta_0)}{\tilde{\delta}(k, \eta_0) \tilde{\delta}^*(k', \eta_0)} \times \\ &\quad (2\pi)^3 P_\delta(k, \eta_0) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{l'm'}(\hat{k}') d^3k d^3k', \end{aligned} \quad (3.61)$$

o que torna a resolução das integrais mais fácil. Uma delas (em $\vec{k}'$, por exemplo) pode ser usada junto com a função delta de Dirac para transformar $\vec{k}'$ em $\vec{k}$. Em seguida, podemos realizar a integral nas coordenadas angulares de $\vec{k}$, que apenas aparecem nos esféricos harmônicos. Essa integral apenas resulta em $\delta_{ll'}\delta_{mm'}$, e finalmente temos:

$$C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \equiv \langle a_{lm} a_{l'm'}^* \rangle = 16\pi^2 \int \left| \frac{\tilde{\Theta}_l(k, \eta_0)}{\tilde{\delta}(k, \eta_0)} \right|^2 P_\delta(k, \eta_0) k^2 dk \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \quad (3.62)$$

Este espectro está em acordo com o encontrado na literatura a menos de um fator de $(2\pi)^3$, devido à diferença na definição de transformada de Fourier [18]. Esse desacordo nos fatores não altera o resultado do espectro C_l , uma vez que é contra-balanceado no espectro $P_\delta(k, \eta_0)$, que possui um fator extra de $(2\pi)^{-3}$ em relação ao apresentado na referência citada.

Infelizmente, não é possível calcular o lado esquerdo da Eq. (3.62) através de uma definição estrita de variância como a dada pela Eq. (2.79). Como o universo é um só, não temos uma amostra de a_{lm} para medirmos grandezas como variâncias e correlações. Temos apenas uma realização de cada a_{lm} . Por sorte, vemos na Eq. (3.62) que a variância esperada teoricamente $\langle a_{lm} a_{lm}^* \rangle$, para um l fixo, é a mesma independentemente do m . Ou seja, podemos considerar cada $\langle a_{lm} a_{lm}^* \rangle$ de m diferente como sendo uma realização de C_l com um certo l . Logo, o número de realizações de um determinado C_l é de $2l + 1$, e assim temos uma incerteza intrínseca proporcional a $(2l + 1)^{-1/2}$, chamada de variância cósmica [18].

A Figura 3.4 apresenta o espectro C_l medido pelo *WMAP* após 3 anos de observações, juntamente com o melhor ajuste, cujos seis parâmetros não diferem muito dos já apresentados. Nela podemos observar diversas características esperadas pelas equações deduzidas até aqui. Primeiro, a Eq. (3.11) nos diz que o intervalo entre os máximos e mínimos das oscilações acústicas é $kr_s(\eta) \simeq \pi$. Além disso, vimos que a evolução subsequente de $\tilde{\Theta}_l$ não altera significativamente o período das oscilações, e que a relação entre l e k é da forma $l \simeq k(\eta_0 - \eta_*)$. Calculando, na aproximação de recombinação instantânea, $r_s(\eta_*)$, obtemos um intervalo entre a posição de cada pico de $\pi(\eta_0 - \eta_*)/r_s(\eta_*) \simeq 260$, o que não está muito longe do observado. Esses espaços entre os picos nos indicam, através de r_s , a densidade de bárions Ω_b .

A diferença de altura entre picos vizinhos também é um importante indicador de Ω_b , pois um corresponde a um $\tilde{\Theta}$ positivo e o outro a um negativo. Como discutimos na seção 3.1.2, o aumento da densidade de bárions eleva perturbações de temperatura positivas e diminui de temperaturas negativas, tornando a diferença entre os picos de C_l maiores. Nesta comparação, porém, devemos contabilizar outros efeitos que alteram as alturas dos picos, como o efeito Sachs-Wolfe Integrado que ocorre próximo à época do desacoplamento, uma vez que a transição da era da radiação para da matéria ainda não tinha se concretizado totalmente, e os potenciais

Figura 3.4: Dados observacionais do espectro C_l do experimento *WMAP* e outros [2]. A curva apresentada corresponde ao melhor ajuste, dados pelos parâmetros $h = 0,732$, $\Omega_b h^2 = 0,02229$, $\Omega_m h^2 = 0,1277$, $\tau = 0,089$, $n_s = 0,958$ e $\sigma_8 = 0,761$ [50]. O parâmetro $h = H_0/(100\text{km/Mpc} \cdot \text{s})$, τ é a profundidade ótica devido a reionização e σ_8 é a amplitude das perturbações de densidade de matéria. A faixa em vermelho indica a variância cósmica.

ainda estavam variando [18]. Esse efeito resulta num aumento apenas do primeiro pico, o que aumenta bastante a diferença entre a altura deste e dos demais. Dessa forma, a altura do primeiro pico também nos diz qual a densidade de matéria total no universo $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{dm}$, pois esta muda a época da equipartição. Além disso, a densidade de matéria Ω_m , alterando a composição do universo, altera a evolução dos potenciais e portanto a estrutura geral do espectro C_l .

Um dos parâmetros mais bem medidos através da RCF é a curvatura espacial do universo. Durante o deslocamento livre apresentado na seção 3.2, consideramos um universo plano. Tal consideração é que resulta na relação $l \simeq k(\eta_0 - \eta_*)$, como apresentado na Figura 3.1. Lembrando a Figura 1.5, um universo aberto faria com que perturbações de escala λ aparecessem em ângulos menores, e portanto todo o espectro seria esticado para maiores ls .

Como a energia escura apenas se tornou importante na composição do universo recentemente, seus efeitos só podem afetar a RCF após o desacoplamento, durante o deslocamento livre dos fótons. Estes efeitos se dão através do efeito SWI, quando os potenciais começam a variar novamente, e através da alteração do atual horizonte comóvel η_0 , que se torna maior com o aumento do parâmetro de densidade Ω_Λ . Por se tornar não-desprezível apenas em épocas recentes, o efeito SWI devido à energia escura se manifesta em escalas angulares muito grandes, $l \lesssim 10$. Já o aumento do horizonte η_0 desloca todo o espectro para momentos angulares l maiores. Parâmetros como o índice espectral n_s das perturbações iniciais, profundidade ótica

da reionização e normalização alteram o espectro C_l de maneiras parecidas, o que dificulta a determinação destes parâmetros apenas através da medição do espectro de temperatura da RCF [18].

Um dos primeiros experimentos que mediram as anisotropias da radiação cósmica de fundo foi o soviético *RELICT-1*, lançado a bordo de um satélite em 1983, que mediu o dipolo e o quadrupolo da RCF [51]. O satélite estadunidense *COBE*, lançado em 1989, foi o primeiro a medir o espectro C_l até $l \sim 30$ [52, 53]. As anisotropias da RCF também foram observadas com experimentos a bordo de balões como *BOOMERanG*, em 1998, e com arranjos de telescópios como o *Cosmic Anisotropy Telescope*, que teve seus dados publicados em 1996 [54, 55]. O *WMAP*, um dos experimentos mais importantes atualmente, foi lançado em 2001 e chegou a $l \sim 800$ com uma sensibilidade de $20\mu\text{K}$ por ponto observado [29]. Uma maior sensibilidade e precisão angular é esperada do satélite europeu *Planck*, a ser lançado em 2008 [56].

Capítulo 4

Tomografia das perturbações primordiais

A Radiação Cósmica de Fundo pode ser compreendida essencialmente como uma foto de uma fina casca esférica centrada em nós, tirada na época do desacoplamento dos fótons com a matéria. Ao observarmos a RCF, estamos observando estas regiões do universo em $\eta = \eta_*$, num raio de $\eta_0 - \eta_*$. Se estivéssemos em outro ponto $\vec{x}$ do universo e em outra época η_x , observaríamos fótons advindos de outras regiões: cascas esféricas centradas em $\vec{x}$ e de raio $(\eta_x - \eta_*)$. Ainda assim, a época observada seria em $\eta = \eta_*$, pois os fótons desacoplaram aproximadamente ao mesmo tempo em todos os pontos do universo. Um esquema do processo é apresentado na Figura 4.1. Vemos então que cada ponto do universo vê uma RCF diferente, pois esta reflete a casca esférica ao redor do observador. Mas como só podemos observar diretamente a radiação cósmica de fundo da Terra, só conhecemos o universo primordial na nossa Superfície de Último Espalhamento (SUE).

Apesar disso, ainda é possível observar indiretamente as SUEs de outras localidades. Se algum fenômeno nessa localidade depender da radiação de sua SUE, e se esse fenômeno puder então ser observado da Terra, poderíamos deduzir como era o universo em outros pontos do espaço. É disso que trata este trabalho. Aglomerados de galáxias podem gerar polarização proporcional ao quadrupolo da RCF visto por eles, e essa polarização pode ser detectada, em princípio, da Terra. Essa técnica permite, em teoria, a obtenção de informação sobre a época do desacoplamento em todo o universo observável, ao invés de apenas na nossa SUE. Essa informação extra poderia então ser utilizada para testar modelos de formação e evolução de estruturas, reduzir incertezas em grandezas e restringir parâmetros cosmológicos. Uma vez que: o desacoplamento ocorreu em todos os pontos do espaço na época η_* ; toda a radiação, incluindo aquela que foi polarizada pelos aglomerados, viajam com a mesma velocidade; e que todos esses fótons são observados na época atual η_0 , a distância percorrida por todos os fótons - espalhados ou não por aglomerados - deve ser a mesma (veja a Figura 4.1). Essa condição implica que a soma da distância de

Figura 4.1: Nossa posição e respectiva SUE, de raio R , estão representados em preto. Três aglomerados e suas respectivas SUEs são apresentados também. As distâncias aos aglomerados r_i são representadas por linhas contínuas, enquanto que os raios de suas SUEs $R-r_i$ são representados por linhas tracejadas.

nós até um aglomerado com a distância deste até sua SUE deve ser igual à distância de nós até nossa SUE.

4.1 A Polarização da radiação

A luz é uma onda eletromagnética transversal, ou seja, ela é composta por campos elétrico e magnético que oscilam no tempo e no espaço, orientados perpendicularmente à direção de propagação. Para caracterizarmos um feixe de radiação (uma superposição de várias ondas eletromagnéticas) precisamos especificar, além da direção de propagação, sua intensidade e polarização. Como os campos eletromagnéticos são vetores, para defini-los precisamos escolher uma base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$. A partir dessa base, o estado de polarização do feixe pode ser completamente determinado pelos chamados parâmetros de Stokes [57]:

$$I = \left| \hat{e}_1 \cdot \vec{E} \right|^2 + \left| \hat{e}_2 \cdot \vec{E} \right|^2 = I_1 + I_2, \quad (4.1)$$

$$Q = \left| \hat{e}_1 \cdot \vec{E} \right|^2 - \left| \hat{e}_2 \cdot \vec{E} \right|^2 = I_1 - I_2, \quad (4.2)$$

$$U = \left| \frac{(\hat{e}_1 + \hat{e}_2)}{\sqrt{2}} \cdot \vec{E} \right|^2 - \left| \frac{(\hat{e}_1 - \hat{e}_2)}{\sqrt{2}} \cdot \vec{E} \right|^2 = I_{1+2} - I_{1-2}, \quad (4.3)$$

$$V = 2\text{Im} \left[(\hat{e}_1 \cdot \vec{E})^* (\hat{e}_2 \cdot \vec{E}) \right] = 2I_1 I_2 \sin(\phi_2 - \phi_1), \quad (4.4)$$

onde $\vec{E}$ é o campo elétrico resultante do feixe, I é uma medida de sua intensidade (I_i mede a intensidade devido à componente de $\vec{E}$ na direção $\hat{e}_i$), Q nos dá a polarização linear nas direções $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$, U nos dá a polarização linear nas direções $\hat{e}_1 + \hat{e}_2$ e $\hat{e}_1 - \hat{e}_2$ (que são uma base rodada de 45° com respeito à base $\hat{e}_1$ e $\hat{e}_2$) e V mede a polarização circular. A diferença $(\phi_2 - \phi_1)$ é a diferença de fase entre as componentes $(\hat{e}_1 \cdot \vec{E})$ e $(\hat{e}_2 \cdot \vec{E})$ do campo elétrico $\vec{E}$.

4.1.1 A polarização a partir de primeiros princípios

Consideremos uma nuvem de elétrons situada na origem do sistema de coordenadas e um campo de radiação incidindo da direção $\hat{n}'$ com polarização na direção $\hat{e}'_j$. Se essa radiação é espalhada na direção $-\hat{z}$ e com polarização na direção $\hat{e}_i$, a seção de choque do processo é [57]:

$$\frac{d\sigma_{ij}}{d\Omega} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} |\hat{e}_i(-\hat{z}) \cdot \hat{e}'_j(\hat{n}')|^2. \quad (4.5)$$

Como a luz é uma onda transversal, não pode existir polarização na mesma direção da propagação. Logo, vemos pela Eq. (4.5) que a radiação incidente cuja polarização aponta na direção $\hat{e}'_j = -\hat{z}$ não é espalhada naquela direção. A intensidade de radiação espalhada com polarização na direção $\hat{e}_i$, I_i , é dada pela soma das contribuições das duas direções de polarização possíveis da radiação incidente, I'_j :

$$I_i = \sum_{j=1}^2 I'_j \rho_s \frac{d\sigma_{ij}}{d\Omega} = \frac{3\rho_s \sigma_T}{8\pi} \frac{I'}{2} \sum_{j=1}^2 |\hat{e}_i(-\hat{z}) \cdot \hat{e}'_j(\hat{n}')|^2, \quad (4.6)$$

com ρ_s representando a densidade superficial da nuvem de elétrons, que consideramos aproximadamente uniforme. A densidade que nos interessa é apenas a de elétrons pois a seção de choque é inversamente proporcional ao quadrado da massa do agente espalhador, resultando, no caso de prótons, numa seção de choque reduzida por um fator de $2,5 \cdot 10^{-7}$. Na segunda passagem da Eq. (4.6) consideramos que a radiação incidente não é polarizada, o que implica em $I'_1 = I'_2 = I'/2$.

A polarização da radiação espalhada pode ser quantificada calculando a diferença entre as intensidades nas duas possíveis polarizações: $Q = I_1 - I_2$. Sem perda de generalidade, podemos escolher $\hat{e}_1(-\hat{z}) = \hat{x}$ e $\hat{e}_2(-\hat{z}) = \hat{y}$ (veja Figura. 4.2). As direções $\hat{e}'_j$ também podem ser escolhidas, mas respeitando a dependência da direção de incidência, $\hat{n}' = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$. Escolhendo $\hat{e}'_1 = (\cos\theta \cos\phi, \cos\theta \sin\phi, -\sin\theta)$ e $\hat{e}'_2 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0)$, temos:

$$Q(-\hat{z}, \theta, \phi) = \frac{3\rho_s \sigma_T}{8\pi} \frac{I'(\theta, \phi)}{2} (\cos^2\theta \cos^2\phi + \sin^2\phi - \cos^2\theta \sin^2\phi - \cos^2\phi). \quad (4.7)$$

Podemos escrever esta equação em termos dos harmônicos esféricos, $Y_{lm}(\theta, \phi)$:

$$Q(-\hat{z}, \theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \frac{\rho_s \sigma_T}{4} I'(\theta, \phi) [Y_{22}(\theta, \phi) + Y_{2-2}(\theta, \phi)], \quad (4.8)$$

Somando a contribuição da radiação incidente de todas as direções (integrando nas coordenadas angulares), obtemos a polarização final da radiação Q espalhada na direção $-\hat{z}$:

$$Q(-\hat{z}) = \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \frac{\rho_s \sigma_T}{4} \int I'(\hat{n}') [Y_{22}(\hat{n}') + Y_{2-2}(\hat{n}')] d^2 \hat{n}'. \quad (4.9)$$

Podemos escrever também $\rho_s = \int n_e dl$, ou seja, que a densidade superficial de elétrons é igual à integral, no trajeto da luz, da densidade volumétrica n_e . Reconhecemos então a grandeza $\tau = \int \sigma_T n_e dl$ como a profundidade ótica do meio percorrido pela radiação (no caso, uma nuvem de elétrons ou um aglomerado de galáxias). Ficamos então com:

$$Q(-\hat{z}) = \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \frac{\tau}{4} \int I'(\hat{n}') [Y_{22}(\hat{n}') + Y_{2-2}(\hat{n}')] d^2 \hat{n}'. \quad (4.10)$$

Expandindo a intensidade da radiação incidente $I'(\hat{n}')$ em termos dos harmônicos esféricos,

$$I'(\hat{n}') = \sum_l \sum_{m=-l}^{\infty} a_{lm} Y_{lm}(\hat{n}'), \quad (4.11)$$

realizamos a integral da Eq. (4.10), escrevendo então esta última como:

$$Q(-\hat{z}) = \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \frac{\tau}{4} (a_{2-2} + a_{22}), \quad (4.12)$$

Vemos que os únicos termos da radiação incidente capazes de gerar polarização na radiação espalhada são os termos do quadrupolo. E considerando a radiação emitida na direção $-\hat{z}$, apenas os termos a_{22} e a_{2-2} contribuem (veja Figura 4.2). Considerar outra direção de espalhamento é o mesmo que reescrever os termos a_{22} e a_{2-2} numa base girada, o que os transforma numa combinação dos cinco elementos a_{2m} . Note ainda que são apenas os termos do quadrupolo que contribuem para a polarização.

Como a radiação cósmica de fundo reflete, principalmente, o potencial gravitacional na superfície de último espalhamento, e cada ponto do universo possui sua própria e distinta superfície de último espalhamento, cada ponto veria uma função $I'(\hat{n}')$ diferente, levando a coeficientes a_{lm} diferentes, que vamos chamar de $a_{lm}(\vec{r})$, onde $\vec{r}$ é a posição de onde se observa a RCF. Se considerarmos que $\hat{z}$ está alinhado a $\vec{r}$ ($-\hat{z}$ aponta na nossa direção), escreveremos que a polarização observada de um ponto do espaço $\vec{r}$, $Q(\vec{r})$, é:

$$Q(\vec{r}) = \sqrt{\frac{3}{10\pi}} \frac{\tau(\vec{r})}{4} [a'_{2-2}(\vec{r}) + a'_{22}(\vec{r})], \quad (4.13)$$

Figura 4.2: Uma distribuição de radiação, do tipo quadrupolar, incide sobre uma nuvem de elétrons situada na origem do sistema de coordenadas e é espalhada na direção $\hat{z}$ e $-\hat{z}$. A espessura e a cor das barras desenhadas nas bases das flechas indicam a intensidade da radiação polarizada na direção de orientação da barra. A radiação incidente é não-polarizada e portanto as barras em ambas as direções são iguais. Como a luz é uma onda transversal, uma incidente de $\hat{x}$ só pode mover os elétrons nas direções $\hat{y}$ e $\hat{z}$. Pelo mesmo motivo, apenas o movimento em $\hat{y}$ gerará radiação na direção $\hat{z}$. Dessa forma, a superposição do resultado dos espalhamentos na figura resulta numa radiação polarizada.

onde as linhas “/” servem para nos lembrar que estes termos foram definidos na base em que $\hat{z} = \vec{r}/r$. A Figura 4.3 ilustra a situação.

Para estimar a ordem de grandeza de $Q(\vec{r})$, precisamos conhecer o quadrupolo. Este só foi medido na Terra, e aqui o valor de sua variância é anormalmente menor que o valor esperado pelo melhor ajuste teórico: $\Delta T_{obs\ l=2}^2 = 236\mu K^2$ em comparação com $\Delta T_{teo\ l=2}^2 = 1252\mu K^2$ [2]. Dada a dificuldade de se escolher um desses valores para a nossa estimativa, trabalhamos com o meio termo $\Delta T_{l=2}^2 = 740\mu K^2$. Como $a'_{2\pm 2}(\vec{r})$ é uma variável Gaussiana de variância $\Delta T_{l=2}^2$, vamos utilizar o valor $a'_{2\pm 2}(\vec{r}) \simeq 27\mu K$ quando necessário. Considerando um aglomerado rico de profundidade ótica $\tau \simeq 0,01$ [58], temos uma polarização de $Q(\vec{r}) \approx 0,03\mu K$, o que está de acordo com outras estimativas [59].

É importante lembrar que, se a radiação emitida estiver polarizada na direção a 45° de $\hat{x}'$ e $\hat{y}'$, $Q(\hat{z}')$ será nulo. Por isso, para caracterizar completamente a polarização de uma radiação, precisamos calcular também a grandeza $U = I_{x'+y'} - I_{x'-y'}$, ou seja, a mesma grandeza que Q , mas com a base rodada de 45° . Através do mesmo procedimento apresentado aqui, obtemos que:

$$U(\vec{r}) = i\sqrt{\frac{3}{10\pi}} \frac{\tau(\vec{r})}{4} [a'_{2-2}(\vec{r}) - a'_{22}(\vec{r})]. \quad (4.14)$$

Figura 4.3: Observamos um ponto em $\vec{r}$, definido no nosso sistema de coordenadas (o grande, central). O sistema de coordenadas linha é uma rotação do nosso para a posição em que $\hat{z}'$ está alinhado a $\vec{r}$. É neste sistema que os termos a_{2-2} e a_{22} que geram a polarização na direção $-\hat{z}'$ são calculados. Note que $Y_{22}(\theta, \phi)$ e $Y_{2-2}(\theta, \phi)$ são simétricos na troca de $\hat{z}'$ por $-\hat{z}'$.

No caso do espalhamento Thomson descrito nesta seção, não existe geração de polarização circular V .

4.1.2 A polarização no ambiente extragaláctico

Considerando a densidade média de elétrons livres no universo obtida através do processo de *freeze-out* $n_e = 7,87 \cdot 10^{-11} a^{-3} \text{cm}^{-3}$ [18], onde a é o fator de escala, podemos calcular qual é a profundidade ótica da Terra até a superfície de último espalhamento. Obtemos ~ 0.03 , desconsiderando a reionização. Apesar de ser uma profundidade ótica da ordem da de aglomerados, não esperamos o surgimento de polarização durante esse extenso trajeto através do “espaço vazio”: os $a'_{2\pm 2}(\vec{r})$ ao longo dele devem ser não-correlacionados, e portanto a integral da Eq. (4.13) ao longo da linha de visada inteira deve ser muito próxima a zero. As únicas formas da RCF ser polarizada neste percurso (através do processo descrito na seção 4.1.1) é passando por um aglomerado [pois sua profundidade ótica é considerável num curto percurso, no qual $a_{lm}(\vec{r})$ não varia] ou devido à reionização do universo, que aumentaria o número de elétrons livres e, conseqüentemente, a profundidade ótica. Outros meios conhecidos de gerar polarização são através de ondas gravitacionais [60], lentes gravitacionais e campos magnéticos intraglomerados [61, 62], sendo em geral subdominantes.

Dentro de aglomerados, a radiação incidente pode adquirir um termo de quadrupolo extra (não relacionada com o quadrupolo da RCF) que, por sua vez, pode gerar polarização num espalhamento descrito na seção 4.1.1. Radiações isotrópicas ganham anisotropias nos referenciais de repouso de elétrons com velocidades peculiares relativísticas, incluindo um quadrupolo, que pode ser espalhado e gerar

polarização [63]. Para um gás de elétrons de profundidade ótica τ , a um *redshift* z e velocidade peculiar v , o quadrupolo advindo desse processo é proporcional a $T(z) \left(\frac{v}{c}\right)^2 \tau$.

Outro mecanismo é a ocorrência de mais de um espalhamento dentro do aglomerado, através de uma profundidade ótica elevada, podendo gerar polarização extra: o primeiro espalhamento gera a anisotropia necessária para o segundo criar polarização [64]. Também é possível existir uma anisotropia na profundidade ótica (por exemplo, na borda do aglomerado), o que pode gerar polarização. Apesar desses diversos efeitos, esperamos que eles possam ser distingüidos uns dos outros através do seu comprimento de coerência, por exemplo. Além disso, eles apresentam dependências diferentes na frequência da luz espalhada [59] e podem, assim, ser diferenciados através de medidas em multi-freqüências. Considerando que seja possível fazer a separação desses sinais, relacionamos na seção seguinte a polarização em aglomerados devido ao quadrupolo da radiação cósmica de fundo local com as flutuações primordiais do campo gravitacional.

4.2 A relação entre a polarização e as flutuações primordiais

Podemos estabelecer a relação entre a polarização da RCF em aglomerados de galáxias tanto com a perturbação da métrica na época do desacoplamento $\Phi(\vec{r}, \eta_*)$ quanto com sua transformada de Fourier $\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta_*)$. A relação com esta última é obtida na seção 4.2.1, e serve como ponto de partida para a obtenção da relação com $\Phi(\vec{r}, \eta_*)$ no espaço real - apresentada na seção 4.3.

4.2.1 No espaço de momentos $\vec{k}$

Vamos definir a polarização por unidade de profundidade ótica $P(\vec{r})$ a partir das Eqs. (4.13) e (4.14) como:

$$P(\vec{r}) \equiv \frac{Q(\vec{r}) - iU(\vec{r})}{T(\eta)\tau(\vec{r})} = \sqrt{\frac{3}{40\pi}} \frac{a'_{2-2}(\vec{r})}{T(\eta)}, \quad (4.15)$$

onde $T(\eta) = 2.725[1 + z(\eta)]K$ é a temperatura da RCF no *redshift* z . A forma apresentada na Eq. (4.15) de escrever a polarização é interessante porque o outro termo necessário para caracterizá-la por completo é seu complexo conjugado [4]. É importante lembrar que as funções dependentes de $\vec{r}$ são implicitamente dependentes de η , já que ambos estão situados em nosso cone de luz passado. Como vamos utilizar a transformada de Fourier, escreveremos essa dependência explicitamente.

A transformada de Fourier de $I(\vec{r}, \hat{p})/T(\eta)$:

$$\frac{\tilde{I}(\vec{k}, \eta, \hat{p})}{T(\eta)} \equiv \int \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{I(\vec{r}, \eta, \hat{p})}{T(\eta)}, \quad (4.16)$$

pode ser expandida em termos de harmônicos esféricos:

$$\tilde{I}(\vec{k}, \eta, \hat{p}) = \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} \tilde{a}_{l'm'}(\vec{k}, \eta) Y_{l'm'}(\hat{p}), \quad (4.17)$$

mas também em termos de polinômios de Legendre P_n . Para tanto, considera-se que sua dependência na variável $\hat{p}$ se dá apenas através do produto escalar $\hat{k} \cdot \hat{p}$ [18]. Assim, podemos escrever:

$$\frac{\tilde{I}(\vec{k}, \eta, \hat{p})}{T(\eta)} = \frac{\tilde{I}(\vec{k}, \eta, \hat{k} \cdot \hat{p})}{T(\eta)} = \sum_n^{\infty} (2n+1)(-i)^n \tilde{\Theta}_n(\vec{k}, \eta) P_n(\hat{k} \cdot \hat{p}). \quad (4.18)$$

O polinômio de Legendre $P_n(\hat{k} \cdot \hat{p})$ pode ser escrito em função de harmônicos esféricos:

$$P_n(\hat{k} \cdot \hat{p}) = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{j=-n}^n Y_{nj}^*(\hat{k}) Y_{nj}(\hat{p}), \quad (4.19)$$

o que nos leva a:

$$\frac{\tilde{I}(\vec{k}, \eta, \hat{p})}{T(\eta)} = 4\pi \sum_n^{\infty} \sum_{j=-n}^n (-i)^n \tilde{\Theta}_n(\vec{k}, \eta) Y_{nj}^*(\hat{k}) Y_{nj}(\hat{p}). \quad (4.20)$$

Multiplicando os dois lados da equação acima por $Y_{lm}^*(\hat{p})$ e integrando em $\hat{p}$, obtemos que:

$$\frac{\tilde{a}_{lm}(\vec{k}, \eta)}{T(\eta)} = 4\pi(-i)^l \tilde{\Theta}_l(\vec{k}, \eta) Y_{lm}^*(\hat{k}). \quad (4.21)$$

Aplicando a transformada de Fourier inversa na Eq. (4.21) e inserindo o resultado na Eq. (4.15), obtemos:

$$P(\vec{r}) = -\sqrt{\frac{6\pi}{5}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{\Theta}_2(\vec{k}, \eta) Y_{2-2}'^*(\hat{k}), \quad (4.22)$$

lembrando que “'” nos diz que o harmônico esférico em questão foi construído no referencial em que $-\hat{z}$ aponta para nós. Podemos, agora, estabelecer a relação com as perturbações da métrica através do termo $\tilde{\Theta}_2(\vec{k}, \eta)$, cujo valor é dado pela Eq. (3.46). Descartando a contribuição do dipolo $\tilde{\Theta}_1(k, \eta_*)$ (os modos k que influenciam grandes escalas angulares como o quadrupolo são grandes também, e como vimos na seção 3.1.1 o dipolo é insignificante nestes casos), essa equação fica:

$$\tilde{\Theta}_2(\vec{k}, \eta) = [\tilde{\Theta}_0(\vec{k}, \eta_*) + \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta_*)] j_2[k(\eta - \eta_*)] +$$

$$\int_{\eta_i}^{\eta} e^{-\tau(\eta')} \left[\frac{\partial \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta')}{\partial \eta'} - \frac{\partial \tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta')}{\partial \eta'} \right] j_2[k(\eta - \eta')] d\eta', \quad (4.23)$$

onde o primeiro termo da direita corresponde ao efeito Sachs-Wolfe (SW), enquanto que o segundo corresponde ao efeito Sachs-Wolfe Integrado (SWI). Além dessa simplificação, outras serão utilizadas: vamos considerar que não existe estresse anisotrópico, o que nos leva a $\tilde{\Psi} = -\tilde{\Phi}$. Por estarmos trabalhando em grandes escalas, podemos também aproximar a soma $\tilde{\Theta}_0 + \tilde{\Psi}$ por $\tilde{\Psi}/3$ (seção 3.1.1). Além disso, vamos desconsiderar o efeito SWI de épocas próximas ao desacoplamento (devido à transição da era da radiação para a da matéria): as escalas afetadas por esse efeito estão dentro do horizonte, ou seja, $\lambda \lesssim \eta_*$, que quando observadas na época η_x , corresponderão às escalas angulares:

$$l \gtrsim \frac{\eta_x - \eta_*}{\eta_*}. \quad (4.24)$$

Mesmo para um aglomerado em $z = 50$, as escalas angulares afetadas por esse efeito possuem $l \gtrsim 5$, e portanto o quadrupolo praticamente não é alterado. Por fim, vimos na seção 4.1.2 que em épocas mais recentes a profundidade ótica do espaço homogêneo é pequena. Mesmo para $z = 100$, $e^{-\tau} \simeq 0,998$, que aproximamos então para 1. Assim, obtemos:

$$\tilde{\Theta}_2(\vec{k}, \eta) = \frac{\tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta_*)}{3} j_2[k(\eta - \eta_*)] + 2 \int_{\eta_*}^{\eta} \frac{\partial \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta')}{\partial \eta'} j_2[k(\eta - \eta')] d\eta'. \quad (4.25)$$

A dependência temporal do potencial pode ser descrita através da função de crescimento $D(\eta)/a(\eta)$, normalizada em altos *redshifts* [$D(\eta_*)/a(\eta_*) = 1$]:

$$\tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta) = \frac{D(\eta)}{a(\eta)} \tilde{\Psi}(\vec{k}, \eta_*) = \frac{D(\eta)}{a(\eta)} \tilde{\Psi}_*(\vec{k}). \quad (4.26)$$

Podemos assim isolar $\tilde{\Psi}_*(\vec{k})$ na equação (4.25), obtendo:

$$\tilde{\Theta}_2(\vec{k}, \eta) = \frac{1}{3} \Delta_2(k, \eta) \tilde{\Psi}_*(\vec{k}), \quad (4.27)$$

$$\Delta_2(k, \eta) = j_2[k(\eta - \eta_*)] + 6 \int_{\eta_*}^{\eta} \frac{d}{d\eta'} \frac{D(\eta')}{a(\eta')} j_2[k(\eta - \eta')] d\eta'. \quad (4.28)$$

Outro termo da Eq. (4.22) que precisa ser trabalhado é $Y'_{2-2}(\hat{k}) = Y'_{22}(\hat{k})$, que precisamos rodar do sistema em que $\hat{z}' = \vec{r}/r$ para o sistema onde definimos $\vec{r}$ (onde $\hat{z}' = \hat{z}$). Mais especificamente, o sistema de coordenadas linha é obtido, a partir do nosso, através de uma rotação de ângulo θ_r em torno do eixo $\hat{x}$ e, em seguida, de uma rotação de ângulo ϕ_r em torno do eixo $\hat{z}$ original. O harmônico esférico $Y'_{22}(\hat{k})$

pode ser transformado através das matrizes de rotação de Wigner D_{ms}^l [4]:

$$Y'_{22}(\hat{k}) = \sum_{m=-2}^2 D_{m2}^2 Y_{2m}(\hat{k}). \quad (4.29)$$

Podemos escrever as matrizes de Wigner em termos dos chamados harmônicos esféricos de *spin* s [65], ${}_s Y_{lm}$, de onde resulta:

$$Y'_{22}(\hat{k}) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{m=-2}^2 (-1)^m {}_2 Y_{2-m}(\hat{r}) Y_{2m}(\hat{k}), \quad (4.30)$$

sendo $\hat{r} = (\theta_r, \phi_r)$. Esse mesmo resultado foi obtido de forma menos sofisticada (entretanto mais trabalhosa), e é apresentado no Apêndice A.

Inserindo as Eqs. (4.27) e (4.30) na Eq. (4.22), finalmente relacionamos a polarização $P(\vec{r})$ com o potencial gravitacional na época do desacoplamento $\tilde{\Psi}_*(\vec{k})$:

$$P(\vec{r}) = -\frac{1}{15} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \sum_{m=-2}^2 (-1)^m \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \Delta_2(k, \eta) Y_{2m}(\hat{k}) {}_2 Y_{2-m}(\hat{r}) \tilde{\Psi}_*(\vec{k}) d^3k. \quad (4.31)$$

4.2.2 Expansão da polarização em harmônicos esféricos de *spin* s

Para simplificar a Eq. (4.31), é interessante expandir a polarização por unidade de profundidade ótica $P(\vec{r})$ em termos de harmônicos esféricos de *spin* 2:

$$P(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l p_{lm}(r) {}_2 Y_{lm}(\hat{r}). \quad (4.32)$$

Essa expansão deve ser feita necessariamente em harmônicos esféricos de *spin* 2 porque a polarização se transforma como uma grandeza de *spin* 2, ou seja, se aplicarmos em $P(\vec{r})$ uma rotação R_ψ de ângulo ψ em torno do vetor $\vec{r}$, temos:

$$R_\psi[P(\vec{r})] = e^{-2i\psi} P(\vec{r}). \quad (4.33)$$

Se queremos preservar essa propriedade, temos que utilizar como base funções que também se transformam dessa maneira. Como esse é o caso das funções ${}_2 Y_{lm}$, elas são as escolhidas para tal tarefa. Podemos apreciar a propriedade da polarização descrita pela Eq. (4.33) na Figura 4.4.

Como os harmônicos esféricos de *spin* s também são ortogonais [71]:

$$\int {}_s Y_{lm}(\hat{q}) {}_s Y_{l'm'}^*(\hat{q}) d^2\hat{q} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.34)$$

da multiplicação da Eq. (4.31) por ${}_2 Y_{LM}^*(\hat{r})$, seguida da integração angular em $\hat{r}$,

Figura 4.4: As bases Q e U utilizadas na quantificação da polarização P (linha grossa, preta) aparecem em azul e vermelho, respectivamente, e são perpendiculares à direção de observação $\hat{r}$, que aparece entrando na página. Uma rotação de P em torno de $\hat{r}$ por um ângulo ψ (que é equivalente a uma rotação das bases no sentido contrário) altera o valor de P de forma que $P \rightarrow e^{-2i\psi} P$.

resulta:

$$p_{LM}(r) = -\frac{1}{15}\sqrt{\frac{3}{\pi}} \sum_{m=-2}^2 (-1)^m \int \Delta_2(k, \eta) Y_{2m}(\hat{k}) \tilde{\Psi}_*(\vec{k}) \times \int {}_2Y_{LM}^*(\hat{r}) {}_2Y_{2-m}(\hat{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^2\hat{r} d^3k. \quad (4.35)$$

Podemos separar, na exponencial $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, a parte angular da parte radial através da expansão de Rayleigh [18]:

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} 4\pi i^{\lambda} j_{\lambda}(kr) Y_{\lambda\mu}(\hat{k}) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r}), \quad (4.36)$$

o que nos leva a:

$$p_{LM}(r) = -\sqrt{\frac{16\pi}{75}} \sum_{m=-2}^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} (-1)^m i^{\lambda} \int \Delta_2(k, \eta) j_{\lambda}(kr) Y_{\lambda\mu}(\hat{k}) Y_{2m}(\hat{k}) \tilde{\Psi}_*(\vec{k}) d^3k \times \int {}_2Y_{LM}^*(\hat{r}) {}_2Y_{2-m}(\hat{r}) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r}) d^2\hat{r}. \quad (4.37)$$

A segunda linha da Eq. (4.37), que contém todos os termos que participam da integral em $\hat{r}$, não depende nem de r e nem de $\vec{k}$. Assim, da integral em $\hat{r}$ resulta apenas um fator dependente dos índices L , M , m , λ e μ . Para calcularmos essa integral, fizemos o uso da relação [65]:

$${}_sY_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} D_{-ms}^l(\phi, \theta, 0), \quad (4.38)$$

onde $D_{ms}^l(\phi, \theta, \gamma)$ é a matriz de rotação de Wigner. Dessa forma, obtemos:

$$\int {}_2Y_{LM}^*(\hat{r}) {}_2Y_{2-m}(\hat{r}) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r}) d^2\hat{r} = \sqrt{\frac{5(2L+1)(2\lambda+1)}{(4\pi)^3}} (-1)^m \int D_{M-2}^L(\hat{r}) D_{m2}^2(\hat{r}) D_{\mu 0}^\lambda(\hat{r}) d^2\hat{r}, \quad (4.39)$$

onde também utilizamos a identidade [4]:

$${}_sY_{lm}^*(\hat{r}) = (-1)^{m+s} {}_{-s}Y_{l-m}(\hat{r}). \quad (4.40)$$

A integral do lado direito da Eq. (4.39) possuiria solução se fosse realizada sobre o grupo de rotações inteiro, isto é, se integrássemos também no ângulo ψ ao redor de $\hat{r}$. Entretanto, como o integrando é independente deste ângulo ψ , a integral sobre ele apenas acrescentaria um fator de 2π . Assim, podemos substituir, na Eq. (4.39), $d^2\hat{r}$ por $\frac{d\psi d^2\hat{r}}{2\pi}$. Essa integral tem então a seguinte solução ([66], p. 103):

$$\int D_{M-2}^L(\hat{r}) D_{m2}^2(\hat{r}) D_{\mu 0}^\lambda(\hat{r}) \frac{d\psi d^2\hat{r}}{2\pi} = 4\pi \begin{pmatrix} \lambda & 2 & L \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 2 & L \\ \mu & m & M \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

onde $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ são os chamados símbolos 3-j de Wigner - veja o Apêndice B. Com o resultado acima, a Eq. (4.37) adquire a forma:

$$p_{LM}(r) = -\sqrt{\frac{4}{15}} \sum_{m=-2}^2 \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} i^\lambda \sqrt{(2L+1)(2\lambda+1)} \times \int \Delta_2(k, \eta) j_\lambda(kr) \begin{pmatrix} \lambda & 2 & L \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 2 & L \\ \mu & m & M \end{pmatrix} Y_{\lambda\mu}(\hat{k}) Y_{2m}(\hat{k}) \tilde{\Psi}_*(\vec{k}) d^3k. \quad (4.42)$$

Juntando todos os termos que contém os índices μ e m numa função Z , temos:

$$Z^{(\lambda LM)}(\hat{k}) = \sum_{m=-2}^2 \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda & 2 & L \\ \mu & m & M \end{pmatrix} Y_{\lambda\mu}(\hat{k}) Y_{2m}(\hat{k}), \quad (4.43)$$

e assim a Eq. (4.42) pode ser escrita como:

$$p_{LM}(r) = -\sqrt{\frac{4}{15}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} i^\lambda \sqrt{(2L+1)(2\lambda+1)} \times \int \Delta_2(k, \eta) j_\lambda(kr) \begin{pmatrix} \lambda & 2 & L \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} Z^{(\lambda LM)}(\hat{k}) \tilde{\Psi}_*(\vec{k}) d^3k. \quad (4.44)$$

Bunn sugere a expansão de $Z^{(\lambda LM)}(\hat{k})$ em harmônicos esféricos [4]:

$$Z^{(\lambda LM)}(\hat{k}) = \sum_{l_0=0}^{\infty} \sum_{m_0=-l_0}^{l_0} Z_{l_0 m_0}^{(\lambda LM)} Y_{l_0 m_0}(\hat{k}), \quad (4.45)$$

de maneira que:

$$Z_{l_0 m_0}^{(\lambda LM)} = \int Z^{(\lambda LM)}(\hat{k}) Y_{l_0 m_0}^*(\hat{k}) d^2 \hat{k} = \sum_{m=-2}^2 \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda & 2 & L \\ \mu & m & M \end{pmatrix} \int Y_{\lambda \mu}(\hat{k}) Y_{2m}(\hat{k}) Y_{l_0 m_0}^*(\hat{k}) d^2 \hat{k}. \quad (4.46)$$

Usando a identidade (4.40) com $s = 0$, podemos obter a solução da integral na equação acima [66]:

$$Z_{l_0 m_0}^{(\lambda LM)} = \sqrt{\frac{5(2\lambda+1)(2l_0+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \lambda & 2 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1)^{m_0} \times \sum_{m=-2}^2 \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \begin{pmatrix} \lambda & 2 & L \\ \mu & m & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 2 & l_0 \\ \mu & m & -m_0 \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Uma propriedade de ortogonalidade dos símbolos 3-j nos dá o resultado das somatórias na equação acima ([66], p. 51):

$$Z_{l_0 m_0}^{(\lambda LM)} = \sqrt{\frac{5(2\lambda+1)(2l_0+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \lambda & 2 & l_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-1)^{m_0} \frac{1}{(2L+1)} \delta_{Ll_0} \delta_{M-m_0}. \quad (4.48)$$

Ao inserir este resultado na Eq. (4.45), os deltas de kronecker anulam todos os termos da somatória com excessão de um, de forma que a equação se torna:

$$Z^{(\lambda LM)}(\hat{k}) = \sqrt{\frac{5(2\lambda+1)(2L+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} \lambda & 2 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{(-1)^M}{(2L+1)} Y_{L-M}(\hat{k}). \quad (4.49)$$

Com este resultado, a Eq. (4.44) para a polarização fica:

$$p_{LM}(r) = -\sqrt{\frac{1}{3\pi}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} i^{\lambda} (2\lambda+1) \begin{pmatrix} 2 & L & \lambda \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & L & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \int \Delta_2(k, \eta) j_{\lambda}(kr) Y_{LM}^*(\hat{k}) \tilde{\Psi}_*(\vec{k}) d^3 k, \quad (4.50)$$

onde usamos a invariância dos símbolos 3-j por permutações pares. Da relação entre os símbolos 3-j e os coeficientes de Clebsch-Gordan [Eq. (B.1)] vemos que os símbolos 3-j se anulam sob as mesmas condições que $\langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle$. Assim, temos que:

$$L-2 \leq \lambda \leq L+2. \quad (4.51)$$

Os símbolos 3-j $\begin{pmatrix} 2 & L & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ podem ser calculados através de expressões para casos especiais [66]. Os casos $\lambda = L \pm 1$ se encaixam no padrão cuja expressão para o cálculo do símbolo 3-j possui um fator de m :

$$\begin{pmatrix} 2 & j+1 & j \\ 0 & m & -m \end{pmatrix} \propto m, \quad (4.52)$$

e portanto eles se anulam quando $m = 0$. Dessa forma, a somatória da Eq. (4.50) se restringe a 3 termos: com $\lambda = L - 2$, L e $L + 2$.

Colocando os termos que contém o índice λ numa função F , chegamos na equação para a polarização obtida por Bunn, a menos de um fator de $(2\pi)^{3/2}$ proveniente da diferença de definição da transformada de Fourier [4]:

$$p_{LM}(r) = -\frac{i^L}{\sqrt{3\pi}} \int \Delta_2(k, \eta) F_L(kr) Y_{LM}^*(\hat{k}) \tilde{\Psi}_*(\vec{k}) d^3k, \quad (4.53)$$

$$F_L(kr) = \sum_{\lambda=L-2, L, L+2} (-1)^{(\lambda-L)/2} (2\lambda+1) \begin{pmatrix} 2 & L & \lambda \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & L & \lambda \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} j_\lambda(kr). \quad (4.54)$$

As Eqs. (4.53) e (4.54) resumem o resultado final de Bunn. Entretanto, essa expressão ainda pode ser substancialmente simplificada, como veremos a seguir.

4.2.3 Simplificação da relação entre $p_{LM}(r)$ e $\tilde{\Psi}_*(\vec{k})$

A função $F_L(kr)$ pode ser simplificada se calcularmos os símbolos 3-j explicitamente. As expressões para o cálculo dos símbolos 3-j que nos interessam são apresentadas no Apêndice B. Os símbolos $\begin{pmatrix} 2 & L+2 & L \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & L & L-2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ podem ser calculados com a Eq. (B.2), o $\begin{pmatrix} 2 & L & L \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ com a Eq. (B.3), os $\begin{pmatrix} 2 & L+2 & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 & L & L-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ com a Eq. (B.4) e o $\begin{pmatrix} 2 & L & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ com a Eq. (B.5). Com essas substituições, a função $F_L(kr)$ fica:

$$\begin{aligned} F_L(kr) = & -(2L-3) \frac{L!}{(L-2)!} \frac{(2L-4)!}{(2L+1)!} \sqrt{6 \frac{(L+2)!}{(L-2)!}} j_{L-2}(kr) + \\ & -(2L+1) 2L(L+1) \frac{(2L-2)!}{(2L+3)!} \sqrt{6 \frac{(L+2)!}{(L-2)!}} j_L(kr) + \\ & -(2L+5) \frac{(L+2)!}{L!} \frac{(2L)!}{(2L+5)!} \sqrt{6 \frac{(L+2)!}{(L-2)!}} j_{L+2}(kr). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Abrindo os fatoriais da equação acima e simplificando-a, temos:

$$F_L(kr) = -\sqrt{\frac{3(L+2)!}{8(L-2)!}} \times$$

$$\left[\frac{j_{L-2}(kr)}{(2L+1)(2L-1)} + \frac{2j_L(kr)}{(2L-1)(2L+3)} + \frac{j_{L+2}(kr)}{(2L+3)(2L+1)} \right]. \quad (4.56)$$

Surpreendentemente, podemos utilizar as relações de recorrência das funções de Bessel esféricas para simplificar a expressão acima, utilizando então apenas uma função $j_L(kr)$. Da relação [67]:

$$j_n(x) = \frac{x}{2n+1} [j_{n-1}(x) + j_{n+1}(x)] \quad (4.57)$$

obtemos, através da realimentação dela com ela própria, a seguinte:

$$\frac{j_n(x)}{x^2} = \frac{j_{n-2}(x)}{(2n+1)(2n-1)} + \frac{2j_n(x)}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{j_{n+2}(x)}{(2n+3)(2n+1)}, \quad (4.58)$$

e então a Eq. (4.56) se torna:

$$F_L(kr) = -\sqrt{\frac{3(L+2)!}{8(L-2)!}} \frac{j_L(kr)}{(kr)^2}. \quad (4.59)$$

Com este resultado, podemos reescrever a equação (4.53):

$$p_{LM}(r) = \frac{i^L}{\sqrt{8\pi}} \sqrt{\frac{(L+2)!}{(L-2)!}} \int \Delta_2(k, \eta) \frac{j_L(kr)}{(kr)^2} Y_{LM}^*(\hat{k}) \tilde{\Psi}(\vec{k}) d^3k, \quad (4.60)$$

lembrando que $\eta = \eta(r)$. Vemos que os únicos termos que dependem da direção de $\vec{k}$ são $\tilde{\Psi}$ e Y_{LM}^* . Portanto, a parte angular da integral está apenas selecionando os multipolos $\tilde{b}_{lm}(k)$ da expansão $\tilde{\Psi}(\vec{k}) = \sum_{l,m} \tilde{b}_{lm}(k) Y_{lm}(\hat{k})$. Assim, obtemos que:

$$p_{lm}(r) = \frac{i^l}{\sqrt{8\pi}} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \int_0^\infty \Delta_2(k, r) \frac{j_l(kr)}{r^2} \tilde{b}_{lm}(k) dk. \quad (4.61)$$

Também colocamos explicitamente, na equação acima, a dependência de Δ_2 em r . Fazendo $r = \eta_0 - \eta$, onde η_0 é o tempo conforme atual, temos:

$$\Delta_2(k, r) = j_2[k(R-r)] - 6 \int_r^R \frac{d}{dr''} \frac{D(r'')}{a(r'')} j_2[k(r''-r)] dr'', \quad (4.62)$$

onde $R = \eta_0 - \eta_*$. Vemos que a Eq. (4.61) pode ser escrita como:

$$p_{lm}(r) = \int_0^\infty K_l(r, k) \tilde{b}_{lm}(k) dk, \quad (4.63)$$

$$K_l(r, k) = \frac{i^l}{\sqrt{8\pi}} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \Delta_2(k, r) \frac{j_l(kr)}{r^2}. \quad (4.64)$$

As duas equações acima são o resultado final desta seção e descrevem a relação entre a polarização $p_{lm}(r)$ e as perturbações do potencial no desacoplamento $\tilde{b}_{lm}(k)$.

Como um dos objetivos deste trabalho é a inversão dessa relação [ou seja, obter $\tilde{b}_{lm}(k)$ a partir de $p_{lm}(r)$], escolhemos organizar a relação da forma apresentada na Eq. (4.63), em referência às chamadas Equações de Fredholm de primeiro tipo. Nessa perspectiva, chamamos a função $K_l(r, k)$ de kernel no espaço de Fourier.

4.2.4 Análise do kernel no espaço de momentos

Gráficos do kernel $K_l(r, k)$ são apresentados nas Figuras 4.5 e 4.6. No restante desta seção ignoramos o efeito Sachs-Wolfe Integrado, pois este traz dificuldades extras no cálculo numérico devido à necessidade de realização de múltiplas integrais. A contribuição do efeito SWI é considerada na seção 4.3. De qualquer forma, já podemos esperar que a contribuição do efeito SWI apareça, no kernel no espaço de momentos, sobreposta à contribuição do efeito SW. No caso $l = 4$, apresentado na Figura 4.5, essa conclusão é evidente, uma vez que a estrutura do gráfico proveniente do efeito SW cobre todo o domínio (r, k) . Para ver que o efeito SWI não contribuirá, no caso $l = 20$ apresentado na Figura 4.6, na região de baixos k e r onde não há nenhuma estrutura, voltamos à Eq. (4.64). A região nula do gráfico apresentado na Figura 4.6 provém da função $j_l(kr)$, que é muito próxima de zero para $kr < l$. Essa função multiplica todo o termo $\Delta_2(k, r)$, e portanto anula, nesta região do domínio da função $K_l(r, k)$, tanto o efeito SW quanto o SWI. Logo, qualquer contribuição do efeito SWI só será perceptível na mesma região (r, k) em que já existe a contribuição do efeito SW.

É importante notar que a Eq. (4.63) não nos permite reconstruir o espectro do potencial primordial $\tilde{b}_{lm}(k)$ perfeitamente, pois para tanto precisaríamos de informação sobre modos k de comprimentos de onda maiores que a superfície de último espalhamento, aos quais não temos acesso. Nosso kernel $K_l(r, k)$ reflete esta limitação através das funções de Bessel esféricas. Isso foi percebido no processo computacional numérico realizado no trabalho: para obter $\tilde{b}_{lm}$, discretizamos a integral da Eq. (4.63), transformando-a numa equação linear algébrica:

$$p_{lm}(r_i) = \sum_j K_l(r_i, k_j) \tilde{b}_{lm}(k_j). \quad (4.65)$$

Essa equação pode ser representada da forma:

$$p_{lm(i)} = K_{l(i)(j)} \cdot \tilde{b}_{lm(j)}, \quad (4.66)$$

onde $K_{l(i)(j)}$ é uma matriz e $p_{lm(i)}$ e $\tilde{b}_{lm(j)}$ são vetores. A obtenção dos $\tilde{b}_{lm(j)}$ se daria através da aplicação, na Eq. (4.66), da matriz inversa de $K_{l(i)(j)}$, $K_{l(k)(i)}^{-1}$:

$$I_{(k)(j)} \cdot \tilde{b}_{lm(j)} = K_{l(k)(i)}^{-1} \cdot p_{lm(i)}, \quad (4.67)$$

onde $I_{(k)(j)}$ deveria ser uma matriz identidade. Entretanto, nosso kernel $K_{l(i)(j)}$,

Figura 4.5: Kernel no espaço de momentos k , com $l = 4$, normalizado pelo quadrado do raio da nossa Superfície de Último espalhamento, R^2 . A presença das funções de Bessel esféricas são facilmente identificadas, assim como o termo r^{-2} . Aqui apenas incluímos a contribuição do efeito Sachs-Wolfe. O gráfico foi cortado, no eixo vertical, em -1.1 e 1.1 .

Figura 4.6: Gráfico do kernel $K_{20}(r, k)$, ignorando o efeito SWI. Os efeitos de l , r e k na Eq. (4.64) podem ser observados nessa Figura e na comparação dela com a Figura 4.5. A região de baixos k e r é anulada pela função de Bessel esférica $j_l(kr)$.

Figura 4.7: Representação de uma matriz resultante da multiplicação $K_{5(SW)}^\dagger \cdot K_{5(SW)}$, onde $K_{5(SW)}$ é o kernel discretizado (com $l = 5$), referente apenas ao efeito Sachs-Wolfe, e $K_{5(SW)}^\dagger$ é sua pseudo-inversa, obtida através do método de *SVD*. Pontos mais escuros indicam valores maiores, e pontos mais claros, valores menores. Ambos os eixos correspondem a valores de kR . O cálculo foi feito contando com medidas de polarização em 200 *redshifts* diferentes igualmente espaçados em r , e com a recuperação de 200 modos k . Essas medidas foram consideradas desprovidas de erros. Caso a matriz $K_{5(SW)}$ não fosse singular, deveríamos observar apenas uma linha na diagonal, correspondendo à matriz unidade I .

além de em geral não ser quadrado, se mostra singular - veja o Apêndice C. Uma matriz singular é uma matriz que não contém informação suficiente para que seu sistema de equações correspondente tenha solução, ou seja, a matriz não pode ser invertida. Numa matriz quadrada, por exemplo, isso acontece quando pelo menos uma linha da matriz é uma combinação linear das demais, ou quando pelo menos uma colunas é proporcional a outra. No cálculo numérico, entretanto, consideramos uma matriz singular se essas condições são evitadas por diferenças menores que a precisão utilizada nos cálculos. Assim, a inversão usual de uma matriz singular introduziria mais erros de arredondamento do que extrairia informações, e portanto a propriedade $M^{-1} \cdot M = I$ ficaria longe de ser satisfeita. A forma numérica de lidar com esse problema é escrever a matriz em questão de uma forma que possamos identificar os termos singulares e retirá-los. Isso é feito através de um processo chamado Decomposição em Valores Singulares (*SVD*), apresentado no Apêndice C. Como ao retirar termos perdemos informação, a inversão é imperfeita e faz com que a matriz $I_{(k)(j)}$ não seja mais uma matriz identidade, mas uma matriz $\tilde{I}_{(k)(j)}$ próxima da identidade. Por essa razão, $K_{l(k)(i)}^\dagger$ é a chamada pseudo-inversa da matriz $K_{l(i)(j)}$, e é tal que $K_{l(k)(i)}^\dagger \cdot K_{l(i)(j)} = \tilde{I}_{(k)(j)}$.

Um caso típico de uma matriz pseudo-identidade obtida através da multiplicação

Figura 4.8: Gráfico da diagonal transversa à diagonal principal da matriz $K_{5(SW)}^\dagger \cdot K_{5(SW)}$, representada na Figura 4.7 (ou seja, a diagonal que vai de baixo para cima, da esquerda à direita). Note que as polarizações foram consideradas desprovidas de erros. Este gráfico foi construído a partir do kernel discretizado do efeito SW, com $l = 5$, $p_{5m}(r = \frac{i}{200})$ e $kR = i$, sendo $i = 1, 2, \dots, 200$. Este gráfico praticamente não depende dos parâmetros citados, e em geral apresenta o mesmo comportamento para qualquer l , por exemplo.

da pseudo-inversa do kernel com ele mesmo ($\tilde{I} = K^\dagger \cdot K$) é apresentado na Figura 4.7. É importante notar que a inversão não é perfeita por dois motivos: primeiro, por causa das oscilações em torno da diagonal, num local onde os termos da matriz deveriam ser nulos. Como o processo de recuperação das perturbações primordiais se dá da forma:

$$\tilde{b}_{lm}^{rec}(k) = K_l^\dagger p_{lm}(r) = K_l^\dagger \cdot K_l \tilde{b}_{lm}^p(k), \quad (4.68)$$

sendo $\tilde{b}_{lm}^{rec}(k)$ o valor recuperado a partir da polarização e $\tilde{b}_{lm}^p(k)$ o primordial, vemos pela Figura 4.7 que estamos intrinsecamente limitados a recuperar não o verdadeiro $\tilde{b}_{lm}^p(k)$, mas uma combinação linear deles. Essa constatação pode ser melhor percebida na Figura 4.8.

O segundo motivo pelo qual a inversão não é perfeita é o seguinte: nota-se que para modos $kR \lesssim l$, a diagonal principal simplesmente desaparece, ou seja, absolutamente nada é recuperado. Considerando $k = 2\pi/\lambda$ e $l \simeq 2\pi/\theta$, temos o desaparecimento da diagonal quando:

$$\lambda \gtrsim \theta R. \quad (4.69)$$

A condição citada acima corresponde a tentarmos determinar perturbações de comprimento de onda λ maiores que as que o universo observável comporta na escala angular θ , $\lambda_{max} \simeq \theta R$. Assim, essa anomalia na inversão do kernel no espaço de Fourier não é surpreendente.

Os efeitos típicos da variação dos parâmetros l e número de *redshifts* observados N_r podem ser vistos nas Figuras 4.9 e 4.10. A condição apresentada na expressão (4.69) pode ser vista em ambas as figuras, sendo mais clara na correspondente a um

Figura 4.9: Representação de uma matriz calculada da mesma forma que a apresentada na Figura 4.7, mas com $l = 50$. Notamos o mesmo comportamento, sendo que a diagonal agora desaparece em $kR \lesssim 50$.

kernel com $l = 50$. Na Figura 4.10 apresentamos o comportamento típico da pseudo-identidade quando o número de modos k que se pretende determinar é muito maior que o número de $p_{lm}(r)$ conhecidos: $N_k \gg N_r$. A diminuição gradual do número de dados N_r faz com que linhas diagonais, paralelas e transversas à diagonal principal, surjam na pseudo-identidade, como que deslizando para dentro da matriz a partir de seus vértices correspondentes a kR grandes. Ou seja: a falta de dados prejudica principalmente a determinação de perturbações de comprimento de onda λ pequenos. Isso faz sentido, uma vez que consideramos as observações igualmente espaçadas em r : a falta de dados torna, portanto, a separação das observações grande demais para determinarmos perturbações de comprimento de onda pequenos.

As deficiências da inversão do kernel $K_l(r, k)$ podem ser percebidas até mesmo na análise exclusiva das diagonais de suas pseudo-identidades. A Figura 4.11 apresenta a diagonal principal das matrizes apresentadas aqui (Figuras 4.7, 4.9 e 4.10). Além do desaparecimento da diagonal em modos k grandes, percebemos que em nenhum dos casos o valor da diagonal é igual a 1, como seria desejado. Nos casos em que o número de observações é igual ao número de modos a se recuperar ($l = 5$ e $l = 50$), o valor da diagonal é quase constante, com excessão de suas extremidades. No caso $l = 50$, o leve aumento do valor da diagonal com kR é mais perceptível. Quando temos muito menos observações que grandezas a serem determinadas (caso $l = 10$ e $N_r = 40$), não é preciso atentar à formação de losangos na pseudo-identidade. Sua diagonal já nos apresenta a precariedade da inversão do kernel neste caso. Feitas todas essas considerações, concluímos então que o espaço de momentos não é muito adequado para o tratamento do nosso problema.

Figura 4.10: Representação de uma matriz resultante da multiplicação $K_{10(SW)}^\dagger \cdot K_{10(SW)}$. O cálculo foi feito contando com $N_r = 40$ (medidas de polarização em 40 *redshifts* diferentes igualmente espaçados em r), e com a recuperação de 200 modos k . Notamos que quando tentamos recuperar muito mais informação do que temos em observações, aparecem na matriz $K_{l(SW)}^\dagger \cdot K_{l(SW)}$ esses losangos. As “vibrações” que surgem nos vértices dos losangos são proporcionais a l , ou seja, quanto maior o l , mais o padrão de diagonais e transversas é perturbado.

Figura 4.11: Diagonais principais das pseudo-identidades apresentadas nas Figuras 4.7 (linha contínua em preto), 4.9 (linha tracejada em vermelho) e 4.10 (linha pontilhada em azul). O anulamento da diagonal em $kR \lesssim l$ é facilmente percebido.

4.3 A relação da polarização com as flutuações no espaço real

Em comparação com a relação apresentada na seção 4.2.3 entre $p_{lm}(r)$ e $\tilde{b}_{lm}(k)$, a da polarização com as perturbações da métrica no espaço real, $b_{lm}(r)$, é interessante por vários motivos. Primeiro, estaremos trabalhando com duas grandezas físicas observáveis. Segundo, com o tratamento no espaço real a relação causal entre as perturbações da métrica e a polarização causada em aglomerados se torna evidente. Além disso, veremos na seção 4.3.2 que a reconstrução de $b_{lm}(r)$ a partir de $p_{lm}(r)$ é potencialmente perfeita, ao contrário do que ocorre no espaço dos momentos, que possui uma limitação intrínseca.

Para estabelecer tal relação, vamos partir da Eq. (4.63), mas escrevendo $\tilde{b}_{lm}(k)$ em função dos $b_{lm}(r)$. Para tanto, expandimos o potencial $\Psi_*(\vec{r})$ em harmônicos esféricos:

$$\Psi_*(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l b_{lm}(r) Y_{lm}(r). \quad (4.70)$$

A transformada de Fourier do campo gravitacional $\Psi_*(\vec{r})$ é, por outro lado:

$$\tilde{\Psi}_*(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \Psi_*(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3r. \quad (4.71)$$

Inserindo a Eq. (4.70) na (4.71) e expandindo $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ e $\tilde{\Psi}_*(\vec{k})$ também em harmônicos esféricos, temos:

$$\begin{aligned} & \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} \tilde{b}_{l''m''}(k) Y_{l''m''}(\hat{k}) = \\ & \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} b_{l'm'}(r) Y_{l'm'}(\hat{r}) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=-n}^n 4\pi (-i)^n j_n(kr) Y_{np}(\hat{k}) Y_{np}^*(\hat{r}) d^3r. \end{aligned} \quad (4.72)$$

A parte angular da integral em $\vec{r}$ pode ser feita facilmente, pois só $Y_{l'm'}(\hat{r})$ e $Y_{np}^*(\hat{r})$ participam, o que resulta em:

$$\begin{aligned} & \sum_{l''=0}^{\infty} \sum_{m''=-l''}^{l''} \tilde{b}_{l''m''}(k) Y_{l''m''}(\hat{k}) = \\ & \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{m'=-l'}^{l'} (-i)^{l'} b_{l'm'}(r) j_{l'}(kr) Y_{l'm'}(\hat{k}) r^2 dr. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Multiplicando os dois lados da equação acima por $Y_{lm}^*(\hat{k})$ e integrando na parte angular de $\hat{k}$, eliminamos os harmônicos esféricos dos dois lados, obtendo:

$$\tilde{b}_{lm}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-i)^l \int_0^{\infty} b_{lm}(r) j_l(kr) r^2 dr, \quad (4.74)$$

ou seja, $\tilde{b}_{lm}(k)$ é a transformada de Hankel de $b_{lm}(r)$. Note que essa equação é inversível:

$$b_{lm}(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^l \int_0^\infty \tilde{b}_{lm}(k) j_l(kr) k^2 dk. \quad (4.75)$$

Substituindo então a Eq. (4.74) na (4.63) e escrevendo o kernel $K_l(k, r)$ explicitamente, chegamos a:

$$p_{lm}(r) = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \int_0^\infty \Delta_2(k, r) \frac{j_l(kr)}{r^2} j_l(kr') r'^2 dk b_{lm}(r') dr', \quad (4.76)$$

onde trocamos a ordem das integrais para começar pela em k , sendo que b_{lm} não participa mais dessa integral, pois está escrito no espaço real. Assim como foi feito no caso do espaço de momentos, vamos escrever o problema como a convolução do b_{lm} com um kernel K_l :

$$p_{lm}(r) = \int_0^\infty K_l(r, r') b_{lm}(r') dr', \quad (4.77)$$

onde o kernel é dado por:

$$K_l(r, r') = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \left(\frac{r'}{r}\right)^2 \int_0^\infty \Delta_2(k, r) j_l(kr) j_l(kr') dk. \quad (4.78)$$

Da Eq. (4.62) vemos que toda a dependência de $\Delta_2(k, r)$ em k está nas funções de Bessel esféricas e são da forma $j_2(ak)$, com a constante. A simplificação do kernel $K_l(r, r')$ depende, portanto, da resolução de duas integrais: uma para o primeiro termo da Eq. (4.62) (SW) e outra para o segundo (SWI). Entretanto elas são do mesmo tipo, e assim a integral a ser resolvida, nos dois casos, é:

$$I = \int_0^\infty j_2(ak) j_l(bk) j_l(ck) dk = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{arr'}} \int_0^\infty \frac{1}{k^{3/2}} J_{5/2}(ak) J_{l+1/2}(rk) J_{l+1/2}(r'k) dk, \quad (4.79)$$

sendo $J_n(x)$ as funções de Bessel. A integral acima tem solução analítica [68]. Se $r' < a - r$, temos:

$$I = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{arr'}} \frac{(rr')^{3/2} \sinh^2 \beta}{\sqrt{\frac{\pi^3}{2}} a^{5/2}} \sin \left[\left(\frac{5}{2} - l - \frac{1}{2} \right) \pi \right] Q_l^{-2}(\cosh \beta) = 0, \quad (4.80)$$

onde $Q_l^n(x)$ é a função de Legendre associada de segundo tipo e β é dado pela relação:

$$2rr' \cosh \beta = a^2 - r^2 - r'^2. \quad (4.81)$$

A integral I foi, neste caso, igualada a zero por causa do argumento da função seno,

que é sempre um número inteiro multiplicado por π . No caso $r' < r - a$ e no caso $r' > a + r$, também temos $I = 0$, de maneira que só nos resta solução não-nula no intervalo $|a - r| < r' < a + r$, no qual:

$$I = \frac{\pi}{4} \frac{rr'}{a^3} \sin^2 \alpha P_l^{-2}(\cos \alpha), \quad (4.82)$$

com

$$2rr' \cos \alpha = r^2 + r'^2 - a^2. \quad (4.83)$$

Para a parte referente ao efeito Sachs-Wolfe, $a = (R - r)$, e assim:

$$K_l^{(SW)}(r, r') = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \frac{r'^3}{r} \frac{\sin^2 \phi P_l^{-2}(\cos \phi)}{(R-r)^3}, \quad |R - 2r| < r' < R. \quad (4.84)$$

Quando a condição acima não é satisfeita, caímos nos casos em que a integral I da Eq. (4.79) resulta em zero, e portanto $K_l^{(SW)}(r, r') = 0$. Na equação (4.84), o ângulo ϕ é definido pela equação:

$$(R - r)^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi. \quad (4.85)$$

Da parte referente ao efeito Sachs-Wolfe Integrado, onde temos $a = (r'' - r)$, resulta:

$$K_l^{(SWI)}(r, r') = -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \frac{r'^3}{r} \int_r^R \frac{\sin^2 \psi P_l^{-2}(\cos \psi)}{(r'' - r)^3} \frac{d}{dr''} \left[\frac{D(r'')}{a(r'')} \right] dr'', \quad (4.86)$$

$$|r'' - 2r| < r' < r''. \quad (4.86)$$

A definição do ângulo ψ é dada pela equação:

$$(r'' - r)^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi. \quad (4.87)$$

Da mesma forma que na Eq. (4.84), a condição $|r'' - 2r| < r' < r''$ tem que ser satisfeita para o kernel $K_l^{(SWI)}$ não se anular. É interessante notar que pelas condições que surgiram naturalmente da integral na Eq. (4.79), a integração em r' da Eq. (4.77) pára automaticamente em R , sem a necessidade de limitações *ad-hoc*. Ademais, toda a relação causal entre as perturbações na época do desacoplamento e a polarização hoje observada aparecem nessas condições - como veremos na seção 4.3.1 -, o que nos indica que as Eqs. (4.84) e (4.86) estão corretas. E como essas equações apenas necessitam das perturbações situadas dentro de nosso cone de luz passado, podemos esperar que a reconstrução de $b_{lm}(r)$ a partir de $p_{lm}(r)$ seja potencialmente perfeita. De fato, a matriz resultante da discretização do kernel é bem comportada e não apresentou nenhuma singularidade durante os cálculos computacionais.

Podemos inserir as condições $|a - r| < r' < a + r$ nas equações através das funções

degrau $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}. \quad (4.88)$$

Assim, a relação entre a polarização e o campo gravitacional primordial, no espaço real, pode ser escrita da forma:

$$p_{lm}(r) = \int_0^R \left[K_l^{(SW)}(r, r') + K_l^{(SWI)}(r, r') \right] b_{lm}(r) dr, \quad (4.89)$$

$$K_l^{(SW)}(r, r') = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \frac{r'^3}{r} \theta(r' - |2r - R|) \frac{\sin^2 \phi P_l^{-2}(\cos \phi)}{(R - r)^3}, \quad (4.90)$$

$$K_l^{(SWI)}(r, r') = -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \frac{r'^3}{r} \times \int_r^R \theta(r' - |r'' - 2r|) \theta(r'' - r') \frac{\sin^2 \psi P_l^{-2}(\cos \psi)}{(r'' - r)^3} \frac{d}{dr''} \left[\frac{D(r'')}{a(r'')} \right] dr''. \quad (4.91)$$

Neste trabalho consideramos um modelo de universo plano, dominado por energia escura de equação de estado $P_\Lambda = w_\Lambda \rho_\Lambda$ ($w_\Lambda = cte$) e por matéria não-relativística de parâmetro de densidade Ω_m . Sob essas condições, a função de crescimento do potencial gravitacional, $D(a)/a$, pode ser escrita da forma [69]:

$$\frac{D(a)}{a} = 1 - \frac{H(a)}{a} \int_0^a \frac{da'}{H(a')} = 1 - a^{-5/2} \sqrt{1 + \gamma a^{-3w_\Lambda}} \int_0^a \frac{a'^{3/2}}{\sqrt{1 + \gamma a'^{-3w_\Lambda}}} da', \quad \gamma = \frac{1 - \Omega_m}{\Omega_m}. \quad (4.92)$$

O comportamento da função de crescimento para o modelo padrão em que $w_\Lambda = -1$ e $\Omega_m = 0,3$ é apresentado na Figura 4.12.

4.3.1 Interpretação geométrica e análise dos Kerneis

Das definições dos ângulos ϕ e ψ apresentadas na seção anterior, vemos que estamos lidando com triângulos de lados r , r' e $R - r$, e de lados r , r' e $r'' - r$. A Figura 4.13 exemplifica a situação.

Conforme discutido na introdução deste capítulo, vemos na Figura 4.13 que as superfícies de último espalhamento dos aglomerados tangenciam a nossa, e assim $R_{ag} = R - r$, onde R_{ag} é o raio da SUE do aglomerado. Enquanto a contribuição do efeito Sachs-Wolfe para a polarização vem apenas de uma casca esférica (a SUE do aglomerado), a do Sachs-Wolfe Integrado vem de todo o volume interno à SUE. Essa integração é feita através da variável r'' . Como, durante a integração, r' se mantém fixo, a integração é realizada sobre cascas esféricas de raio r' . As condições que aparecem nas funções degrau das Eqs. (4.90) e (4.91) limitam as integrais em

Figura 4.12: Gráfico da função de crescimento do potencial gravitacional Ψ , $D(a)/a$, num universo plano com constante cosmológica e densidade de matéria não-relativística $\Omega_m = 0,3$. Notamos um decaimento no potencial para *redshifts* de ordem 1, ou seja, durante a época de transição entre um universo dominado por matéria e um universo dominado pela constante cosmológica.

Figura 4.13: A nossa superfície de último espalhamento é apresentada em preto (círculo maior), assim como nossa posição, no centro. A SUE de dois aglomerados são apresentadas também, uma em vermelho e a outra em azul. No aglomerado em azul estão descritas as variáveis do kernel $K_l^{(SW)}$, e no em vermelho as variáveis do kernel $K_l^{(SWI)}$. As variáveis r e $R-r$ são, como já especificado anteriormente, a distância de nós até o aglomerado e o raio da SUE deste aglomerado, respectivamente. A integral em r'' é feita ao longo dos arcos em rosa (cada um para cada r').

r' e r'' exatamente às regiões internas às SUEs.

Talvez devamos ressaltar que as variáveis r , r' e r'' possuem significados um pouco diferentes. A variável r é a distância comóvel de um aglomerado que polarizou a RCF numa época η_p em que:

$$c(\eta_0 - \eta_p) = r, \quad (4.93)$$

onde η_0 é o tempo conforme atual. Isso quer dizer que, ao observarmos maiores distâncias, estamos observando processos que ocorreram em épocas mais remotas. Já a distância comóvel r' não possui esse vínculo com a época observada. Quando nos referimos a um potencial $b_{lm}(r')$, estamos nos referindo ao potencial na época $\eta = \eta_*$. Mesmo quando temos $r' = 0$, o potencial ao qual nos referimos é aquele da época do desacoplamento, e não o atual.

A variável r'' , por sua vez, possui apenas um significado temporal. Ela está ligada à função de crescimento do potencial, que só depende do instante no tempo, e não da posição. Isso quer dizer que $D(r'')/a(r'')$ é, rigorosamente, $D(\eta)/a(\eta)$, sendo que a r'' demos o significado de “distância comóvel que um fóton conseguiria percorrer no intervalo de tempo $\eta_0 - \eta$ ”. Como esse significado foi dado a partir de uma relação similar à Eq. (4.93), vemos que a variável r'' deve possuir como origem a nossa posição, e não a posição do aglomerado. É claro que podemos fazer a mudança de variável $r''' = r'' - r$. Nesse caso, porém, r''' representa a época η através da relação $r''' = c(\eta_p - \eta)$. Para mantermos o padrão de relação entre distância comóvel e tempo conforme, dado pela Eq. (4.93), preferimos a variável r'' à r''' .

Voltando à análise da Figura 4.13, é interessante notar que existem intervalos em r e r' onde a contribuição do efeito SW é exatamente zero, mas a do efeito integrado não. Basta tomar um aglomerado próximo o suficiente para que estejamos dentro de sua SUE, e um r' pequeno demais para tocá-la. Se nos aproveitarmos do fato de que o efeito SWI era desprezível em tempos mais remotos, também podemos selecionar regiões nas quais o efeito SW aparece isolado. Estas constatações aparecem nos kernels calculados numericamente. A Figura 4.14 apresenta um exemplo, que foi calculado com os parâmetros cosmológicos do modelo padrão ($\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$, $w_\Lambda = -1$).

O kernel da Figura 4.14 foi gerado por um programa criado em linguagem C. Apesar de ser capaz de calcular com rapidez o kernel referente ao efeito Sachs-Wolfe, o programa *Mathematica* teve dificuldades em lidar com o kernel do efeito SWI (justamente por causa da integração).

Podemos ver na Fig. 4.14 o que esperávamos a partir da análise da Figura 4.13 e das fórmulas dos kernels: Para baixas distâncias (tanto em r e r'), apenas temos a contribuição do efeito SWI. Essa contribuição desaparece em distâncias altas pois a função D/a presente no $K_l^{(SWI)}$ se torna praticamente constante. Vemos também que a contribuição do efeito SWI é mais proeminente na região $r \simeq r'$. Provavelmente isso se dá porque esse vínculo inclui o caso em que $r'' - r = 0$ (e portanto η assume

Figura 4.14: Kernel total ($K_l^{(SW)} + K_l^{(SWI)}$) para $l = 5$, $K_5(r, r')$. O vale na diagonal é a contribuição do $K_5^{(SWI)}$, enquanto que as ondulações em altos z e z' correspondem a apenas $K_5^{(SW)}$. A intersecção entre as duas contribuições é pequena. O gráfico foi gerado com pontos igualmente espaçados no fator de escala. Para que o gráfico apareça em unidades adimensionais, multiplicamos o kernel pelo raio da nossa SUE, R .

Figura 4.15: Kernel com $l = 15$, $K_{15}(r, r')$, em função do *redshift* $z = z(r)$ e $z' = z(r')$, de acordo com o modelo padrão cosmológico. Em comparação com a Figura 4.14, vemos que o número de oscilações em altos *redshifts* é maior, sendo aproximadamente proporcional a $l/2$. Também notamos que a contribuição do efeito SWI se concentrou na diagonal. O “serrilhado” que apareceu no sentido da diagonal é um artefato da função `ListPlot3D` do programa *Mathematica*.

o maior valor possível para aquele aglomerado, considerando épocas mais recentes quando a energia escura contribui para a densidade do universo).

Também podemos perceber que o kernel se anula em pontos de r altos (z grandes) e r' baixos (z' pequenos). Esta conclusão é compatível com o observado na Figura 4.13. Para aglomerados muito distantes, r' não chega a alcançar sua superfície de último espalhamento, não havendo portanto contribuição desses pontos para a polarização. Este fato pode ser notado facilmente na função degrau da Eq. (4.90). Por fim, vemos que ao longo da diagonal $r = r'$, o efeito SWI é o único existente até $r = R/3$. Uma análise detalhada das funções degrau de ambos os kernels mostra que a Figura 4.14 está correta neste aspecto. O efeito de multipolos mais altos (l s maiores) é aumentar o número de oscilações no $K_l^{(SW)}$ e concentrar a contribuição do $K_l^{(SWI)}$ na diagonal, como podemos ver na Figura 4.15.

4.3.2 Testes de reconstrução de $b_{lm}(r)$ a partir de $p_{lm}(r)$

Discretizando a Eq. (4.89) da mesma forma como foi feito na seção 4.2.4 para $b_{lm}(k)$, temos:

$$p_{lm(i)} = K_{l(i)(j)} \cdot b_{lm(j)} \cdot \quad (4.94)$$

Figura 4.16: Representação gráfica da matriz resultante da multiplicação do kernel $K_{15(j)(k)}$ por sua pseudo-inversa $K_{15(i)(j)}^\dagger$: $K_{15(i)(j)}^\dagger \cdot K_{15(j)(k)}$. Os índices i , j e k variam de 0 a 200, e seguem a relação $a_i = a_0 + (a_{200} - a_0) \frac{i}{200}$, onde a é o fator de escala. No caso apresentado, $a_{200} = 0,01$ e $a_0 = 1$, e o número de observações é igual ao número de valores recuperados. Esta figura não se altera com l .

Como dito na seção 4.3, a inversão do kernel no espaço real $K_l(r, r')$ é bem comportada e não singular, ou seja, $K_{l(i)(j)}^\dagger \cdot K_{l(j)(k)} = I_{(i)(k)}$, onde $I_{(i)(k)}$ é a matriz identidade. Um exemplo de uma matriz resultante da multiplicação $K_{l(i)(j)}^\dagger \cdot K_{l(j)(k)}$ é apresentado na Figura 4.16. É claro que, se tivermos mais incógnitas que equações ($j_{max} > i_{max}$), a inversão não é perfeita, mas para casos em que o número de equações é igual ou maior ao de incógnitas ($j_{max} \leq i_{max}$), ela é.

Dessa forma, podemos obter o espectro do potencial gravitacional através da equação:

$$b_{lm(k)} = K_{l(k)(i)}^\dagger \cdot p_{lm(i)}. \quad (4.95)$$

Para estimar qual seria o erro em $b_{lm(i)}$ se a medida de polarização possuísse erro, vamos supor que a polarização medida, $\tilde{p}_{lm(i)}$ (“~” não significa, aqui, a transformada de Fourier), seja dada pela equação:

$$\tilde{p}_{lm(i)} = (I_{(i)(j)} + N_{(i)(j)})p_{lm(j)}, \quad (4.96)$$

onde $N_{(i)(j)}$ é uma matriz diagonal composta por números aleatórios gaussianos, adquiridos de uma distribuição com média zero e variância σ_l^2 . Dessa forma, o espectro do campo gravitacional primordial obtido a partir das observações é:

$$\tilde{b}_{lm(i)} = K_{l(i)(k)}^\dagger \tilde{p}_{lm(k)} = K_{l(i)(k)}^\dagger [I_{(k)(n)} + N_{(k)(n)}] p_{lm(n)} =$$

$$K_{l(i)(k)}^\dagger [I_{(k)(n)} + N_{(k)(n)}] K_{l(n)(j)} b_{lm(j)}. \quad (4.97)$$

Comparando o lado esquerdo da primeira igualdade com o lado direito da última, vemos que a determinação dos $b_{lm(i)}$ é melhor quanto mais próxima a matriz $M_{l(i)(j)} = K_{l(i)(k)}^\dagger [I_{(k)(n)} + N_{(k)(n)}] K_{l(n)(j)}$ estiver da identidade $I_{(i)(j)}$. Para estimar esta proximidade, analisamos a diagonal da matriz $M_{l(i)(j)}$. Esperamos que, se seus elementos forem próximos a um, os elementos fora da diagonal serão próximos de zero, de forma que a matriz se aproxima da identidade.

Para obter a diagonal da matriz $M_{l(i)(j)}$, fizemos um programa de computador em linguagem C que calculava cada elemento da matriz $K_{l(i)(j)}$ através da soma das Eqs. (4.90) e (4.91), utilizando $r = r(a_i)$ e $r' = r(a'_j)$, onde os fatores de escala a_n estão igualmente espaçados. Foram calculadas diversas matrizes de tamanhos diferentes, sendo representativa dos testes uma matriz de 100x50 (recuperar 50 b_{lm} a partir de 100 p_{lm}). Após esta etapa, invertíamos a matriz $K_{l(i)(j)}$ através do método de Decomposição em Valores Singulares para, se necessário, melhor ajustar a inversão. A matriz de erro $N_{(k)(n)}$ era gerada 500 vezes, e assim obtínhamos 500 matrizes $M_{l(i)(j)}$, a fim de ter uma idéia acerca da distribuição dos erros. Em geral, os valores de r e r' eram tais que as polarizações $p_{lm}(r)$ vinham de *redshifts* de 0.1 a 10 e reconstruíamos o espectro $b_{lm}(r')$ do *redshift* 0.1 ao 100. Colocando todas as diagonais num único gráfico, podíamos estimar quão bom era a reconstrução. Um gráfico representativo dos testes é apresentado na Figura 4.17.

O erro σ_l foi estimado como:

$$\sigma_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1} \frac{1}{f_{ceu}} (1 - f_{ceu} + \sigma_0^2)}, \quad (4.98)$$

onde σ_0 entra como erro experimental e erros devidos à discretização do problema, etc. O erro apresentado na Eq. (4.98) é similar ao erro considerado em medidas da temperatura da radiação cósmica de fundo, com excessão da subtração, dentro do parênteses, da fração observada do céu f_{ceu} . Este termo aparece pois, ao contrário das medidas usuais de temperatura da RCF (nas quais estamos interessados na distribuição de probabilidade de onde o dado observado foi tirado), nessas o que nos interessa é o valor realizado, e não quais ele poderia assumir. Com $f_{ceu} = 1$ e $\sigma_0 = 0$, $\sigma_l = 0$, ao contrário do espectro de temperatura, que teria nesse caso $\sigma_l = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}$. Essa incerteza intrínseca do espectro da RCF é a chamada variância cósmica.

Vemos na Figura 4.17 que a reconstrução dos b_{lm} , no caso sem nenhum erro (estrelas pretas), é perfeita para qualquer l . Também podemos ver que os erros são completamente dominados pela fração do céu observada: um aumento de 10 vezes no erro σ_0 não é significativo para o erro final σ_l . Este fato pode ser constatado também a partir da Eq. (4.98). Além disso, vemos que a reconstrução se torna melhor com o aumento do l . Isso se dá por dois motivos: O erro σ_l decresce com l [ver Eq. (4.98)], e mesmo com uma matriz $N_{(k)(n)}$ fixa, a matriz $M_{l(i)(j)}$ se torna

Figura 4.17: Elemento da diagonal da matriz $M_{l(i)(j)}$ em função do *redshift* correspondente ao $b_{lm(j)}$ naquele *redshift*. Foram calculadas 500 matrizes $M_{l(i)(j)}$ para cada erro σ_0 . Apresentamos acima os resultados para $l = 10$ e $l = 30$. Neste exemplo, consideramos a existência de medidas de polarização em 100 *redshifts* diferentes, e recuperamos os b_{lm} em 50 *redshifts* diferentes. Também consideramos a fração medida do céu como sendo $f_{ceu} = 2/3$. Os dados apresentados como estrelas pretas correspondem a $\sigma_0 = 0$ e $f_{ceu} = 1$, ou seja, $\sigma_l = 0$.

mais próxima de $I_{(i)(j)}$ com o aumento do l , ou seja: mesmo se não existisse o fator $\sqrt{\frac{2}{2l+1}}$ em σ_l , o erro final nos b_{lm} ainda decresceria com l . Apesar da reconstrução ser ruim para $l \lesssim 10$, ela se torna bem precisa para $l \gtrsim 30$. As mesmas constatações podem ser feitas a partir da Figura 4.18, que apresenta reconstruções com $l = 5$ e $l = 20$.

Podemos estimar quais devem ser as características de observações que visem reconstruir as perturbações primordiais $b_{lm}(z)$ de $l = 2$ a $l = 30$, com m de $-l$ a l e em 50 *redshifts* diferentes a partir de medidas de polarização em 100 *redshifts* diferentes (como a considerada na Figura 4.17). Para tanto, seria necessário realizar cerca de 90.000 observações e, para cada uma delas, precisaríamos atingir uma sensibilidade da ordem da estimativa feita na seção 4.1.1, $0,03\mu\text{K}$. Telescópios modernos como o *South Pole Telescope* (*SPT*) possuem uma sensibilidade já limitada por emissões de fundo, de forma que só é possível aprimorá-la através de um aumento da área do telescópio ou do tempo de integração [70]. Como a sensibilidade ΔT do *SPT* (de 10m de diâmetro), ao observar um grau quadrado no céu, é de $\sim 10\mu\text{K}$ em uma hora e ela melhora com a raiz quadrada da área $\pi d^2/4$ e do tempo de integração t , temos as seguinte relação:

$$\Delta T \sim \frac{10\mu\text{K}}{\frac{d}{10m} \sqrt{\frac{t}{1h}}} . \quad (4.99)$$

Para que uma única observação alcance a sensibilidade de $\Delta T = 0,03\mu\text{K}$ em um

Figura 4.18: Diagonal da matriz $M_{l(i)(j)}$ calculada sem nenhum erro (estrelas pretas) e com erros calculados pela Eq. (4.98). Apresentamos acima os resultados para $l = 5$ e $l = 20$. Nesse exemplo, supusemos a existência de 150 observações de $p_{lm}(z)$, com z entre 0.01 e 10, e recuperamos $b_{lm}(z)$ em 100 *redshifts* diferentes. Também consideramos a fração medida do céu como sendo $f_{ceu} = 2/3$.

telescópio análogo ao *SPT* mas de 100m diâmetro, seria necessário um tempo de integração de aproximadamente 90 noites, o que inviabiliza por completo a reconstrução proposta. Estimativas um pouco mais otimistas podem ser feitas se considerarmos profundidades óticas τ e/ou quadrupolos $a_{2\pm 2}$ mais elevados, pois o tempo de integração se reduz quadraticamente com τ e $a_{2\pm 2}$ (ver seção 4.1.1). Entretanto, mudanças factíveis desses parâmetros não nos parecem suficientes para viabilizar a reconstrução num futuro próximo.

Capítulo 5

Correlação entre galáxias e polarização

Na seção 4.3 vimos que o kernel que relaciona a polarização com perturbações primordiais depende do conteúdo de energia escura no universo através do efeito Sachs-Wolfe Integrado. Em alguns casos, este efeito é o único responsável pela conexão entre essas duas grandezas. Desta forma, a correlação da polarização da RCF em aglomerados de galáxias com outras grandezas pode nos oferecer uma nova forma de detecção do efeito SWI, além de poder restringir parâmetros da energia escura tais como sua equação de estado w e densidade Ω_Λ . O cálculo dessas correlações, embora simples, pode ser trabalhoso.

5.1 Cálculo da correlação

Apresentamos aqui o cálculo da correlação entre os multipolos do contraste de densidade total, $\delta_{lm}(x)$, e a polarização calculada na seção 4.3, $p_{l'm'}(y)$: $\langle p_{l'm'}(y)\delta_{lm}^*(x) \rangle$. Os multipolos de $\delta(\vec{x})$ são obtidos da forma:

$$\delta_{lm}^*(x) = \int \delta(\vec{x}) Y_{lm}(\hat{x}) d^2\hat{x}, \quad (5.1)$$

onde $\delta(\vec{x})$ pode ser escrito em função de sua transformada de Fourier, $\tilde{\delta}(\vec{k})$:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \tilde{\delta}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d^3k. \quad (5.2)$$

Para calcular a correlação em questão, devemos relacionar o contraste de densidade $\tilde{\delta}(\vec{k}, \eta)$ com o potencial $\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta)$ da época do desacoplamento ($\eta = \eta_*$). Utilizamos a equação de Einstein (2.52):

$$k^2 \tilde{\Phi} + 3 \frac{da}{dt} \left(a \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial t} - \tilde{\Psi} \frac{da}{dt} \right) = 4\pi G a^2 (\rho_{dm} \tilde{\delta}_{dm} + \rho_b \tilde{\delta}_b + 4\rho_\gamma \tilde{\Theta}_0 + 4\rho_\nu \tilde{N}_0). \quad (5.3)$$

Aqui fazemos algumas simplificações. Primeiro, desconsideramos estresses anisotrópicos ($\tilde{\Phi} = -\tilde{\Psi}$). Como estamos interessados em perturbações $\delta(\vec{x})$ que podemos observar diretamente e portanto são de épocas recentes, podemos fazer duas aproximações: desconsideramos as perturbações de radiação, uma vez que a densidade que as multiplica é bem menor que a densidade de matéria não-relativística. Além disso, como estamos na era da matéria, todos os modos k de $\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta)$ evoluem da mesma forma. Escrevemos então a dependência temporal de $\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta)$ da forma:

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta) = \frac{D[a(\eta)]}{a(\eta)} \tilde{\Phi}(\vec{k}, \eta_*) \equiv G[a(\eta)] \tilde{\Phi}_*(\vec{k}). \quad (5.4)$$

Por fim, conforme apresentado na seção 2.2.3, consideramos que o contraste de densidade de bárions $\tilde{\delta}_b$ segue o de matéria escura: $\tilde{\delta}_b \simeq \tilde{\delta}_{dm}$. Fazendo então $\rho_{dm} + \rho_b = \rho_m$, temos:

$$\left[k^2 G(a) + 3a \left(\frac{da}{dt} \right)^2 \frac{dG(a)}{da} + 3 \left(\frac{da}{dt} \right)^2 G(a) \right] \tilde{\Phi}_*(\vec{k}) = 4\pi G a^2 \rho_m \tilde{\delta}_{dm}(\vec{k}, a). \quad (5.5)$$

Note que já na Eq. (5.3) consideramos uma energia escura homogênea, desprovida de perturbações de densidade. Este fato facilita a introdução do contraste de densidade total:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}, a) = \frac{\rho_m(a) \tilde{\delta}_{dm}(\vec{k}, a)}{\rho(a)}, \quad (5.6)$$

onde $\rho(a)$ é a densidade total de energia no universo. Utilizando a equação de Friedmann (1.84), substituímos $\rho(a)$ por $3H^2(a)/8\pi G$, o que nos leva a:

$$\tilde{\delta}(\vec{k}, a) = \left[\frac{2}{3} k^2 \frac{G(a)}{(aH)^2} + 2a \frac{dG(a)}{da} + 2G(a) \right] \tilde{\Phi}_*(\vec{k}) \equiv F(k, a) \tilde{\Phi}_*(\vec{k}). \quad (5.7)$$

Com este resultado, calculamos a correlação:

$$\begin{aligned} \langle p_{l'm'}(y) \delta_{lm}^*(x) \rangle &= \left\langle \int K_{l'}(y, y') b_{l'm'}(y') dy' \int \delta(\vec{x}) Y_{lm}^*(\hat{x}) d^2 \hat{x} \right\rangle = \\ &= \left\langle \int K_{l'}(y, y') \int \Phi_*(\vec{y}') Y_{l'm'}^*(\hat{y}') d^2 \hat{y}' dy' \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \tilde{\delta}(\vec{k}, a) d^3 k Y_{lm}(\hat{x}) d^2 \hat{x} \right\rangle = \\ &= \left\langle \int K_{l'}(y, y') \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{y}'} \tilde{\Phi}_*(\vec{k}') d^3 k' Y_{l'm'}^*(\hat{y}') d^2 \hat{y}' \times \right. \\ &\quad \left. \int \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} F(k, a) \tilde{\Phi}_*(\vec{k}) d^3 k Y_{lm}(\hat{x}) d^2 \hat{x} \right\rangle. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Durante as passagens acima, tudo o que fizemos foi substituir expressões até que a dependência em $\tilde{\Phi}_*(\vec{k})$ de ambas as grandezas correlacionadas ficasse explícita. Neste ponto, toda a flutuação estatística da correlação está nos potenciais $\tilde{\Phi}_*$. Assim,

obtemos:

$$\begin{aligned} \langle p_{l'm'}(y)\delta_{lm}^*(x) \rangle &= \iiint K_{l'}(y, y') \frac{1}{(2\pi)^3} e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{y}'} Y_{l'm'}^*(\hat{y}') \langle \tilde{\Phi}_*(\vec{k}) \tilde{\Phi}_*(\vec{k}') \rangle \times \\ &\quad e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} F(k, a) Y_{lm}(\hat{x}) d^3 k' d^2 \hat{y}' dy' d^3 k d^2 \hat{x}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Escrevendo

$$\langle \tilde{\Phi}_*(\vec{k}) \tilde{\Phi}_*(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 P_*(k) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (5.10)$$

chegamos a:

$$\begin{aligned} \langle p_{l'm'}(y)\delta_{lm}^*(x) \rangle &= \iiint K_{l'}(y, y') e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{y}'} Y_{l'm'}^*(\hat{y}') P_*(k) \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \times \\ &\quad e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} F(k, a) Y_{lm}(\hat{x}) d^3 k' d^2 \hat{y}' dy' d^3 k d^2 \hat{x}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Utilizando a função delta de Dirac, realizamos a integral em $\vec{k}'$, o que nos leva a:

$$\begin{aligned} \langle p_{l'm'}(y)\delta_{lm}^*(x) \rangle &= \\ \iiint K_{l'}(y, y') e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y}'} Y_{l'm'}^*(\hat{y}') P_*(k) F(k, a) Y_{lm}(\hat{x}) d^2 \hat{y}' dy' d^3 k d^2 \hat{x}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para realizar as integrais das coordenadas angulares $\hat{x}$ e $\hat{y}'$, utilizamos a expansão apresentada na Eq. (4.36):

$$e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y}'} = \sum_{\lambda'=0}^{\infty} \sum_{\mu'=-\lambda'}^{\lambda'} 4\pi (-i)^{\lambda'} j_{\lambda'}(ky) Y_{\lambda'\mu'}^*(\hat{k}) Y_{\lambda'\mu'}(\hat{y}'), \quad (5.13)$$

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} 4\pi i^{\lambda} j_{\lambda}(kx) Y_{\lambda\mu}(\hat{k}) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{x}). \quad (5.14)$$

Inserindo as duas equações acima na Eq. (5.12), toda dependência em $\hat{x}$ e $\hat{y}'$ aparece num par de harmônicos esféricos, de forma que as integrais nestas variáveis resultam apenas numa substituição de índices ($\lambda' \rightarrow l'$, por exemplo). Assim, chegamos a:

$$\begin{aligned} \langle p_{l'm'}(y)\delta_{lm}^*(x) \rangle &= \\ 16\pi^2 i^l (-i)^{l'} \iint K_{l'}(y, y') P_*(k) F(k, a) j_l(kx) j_{l'}(ky') Y_{l'm'}^*(\hat{k}) Y_{lm}(\hat{k}) dy' d^3 k. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Novamente, a dependência angular só aparece num par de harmônicos esféricos. A parte angular da integral em $\vec{k}$ resulta apenas em um par de deltas de Kronecker:

$$\begin{aligned} \langle p_{l'm'}(y)\delta_{lm}^*(x) \rangle &= \\ 16\pi^2 \delta_{l'l} \delta_{m'm'} \int_0^R \int_0^\infty K_l(y, y') P_*(k) F(k, a) j_l(kx) j_{l'}(ky') k^2 dk dy'. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Assim como na observação das anisotropias da RCF, as funções de Bessel esféricas da Eq. (5.16) funcionam como deltas de Dirac aproximados, apresentando um pico quando seu argumento iguala sua ordem e oscilando rapidamente para argumentos maiores (essa é a chamada “aproximação de Limber”). Dessa forma, podemos esperar que o resultado das duas integrais seja:

$$\langle p_{l'm'}(y)\delta_{lm}^*(x) \rangle \sim K_l(y, x) P_* \left(\frac{l}{x} \right) F \left(\frac{l}{x}, a \right) \frac{l^2}{x^2}. \quad (5.17)$$

O fato das funções $j_n(x)$ não serem picos perfeitos deve borrar a imagem gerada pela expressão acima, homogeneizando regiões do espaço de parâmetros com muitas oscilações. Para casos em que $l/x \lesssim 7 \cdot 10^{-3} \text{Mpc}^{-1}$, o espectro de potência de Φ na época do desacoplamento, $P_*(l/x)$, é, de acordo com a discussão feita na seção 2.2.3.1, praticamente igual ao espectro primordial presente na Eq. (2.80):

$$P_*(k) = \frac{9}{16\pi k^3} \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1} \delta_H^2 \left[\frac{\Omega_m}{D(a=1)} \right]^2 \equiv \frac{A_*}{k^3} \left(\frac{k}{H_0} \right)^{n_s-1}. \quad (5.18)$$

A diferença numérica na normalização é devido ao leve decaimento dos potenciais em grandes escalas [$\tilde{\Phi}(k, a \gg a_{eq}) = \frac{9}{10} \tilde{\Phi}_p(k)$]. Com esta fórmula, podemos calcular a integral em k da Eq. (5.16). Como o kernel K_l não participa desta integral, podemos deixá-lo de fora e escrever a Eq. (5.16) da forma:

$$\langle p_{l'm'}(y)\delta_{lm}^*(x) \rangle = 16\pi^2 \delta_{ll'} \delta_{mm'} \int_0^R K_l(y, y') W_l(y', x) dy', \quad (5.19)$$

$$W_l(y', x) \equiv \int_0^\infty P_*(k) F(k, a) j_l(kx) j_l(ky') k^2 dk. \quad (5.20)$$

Esta última equação define uma função janela, que é aplicada ao kernel na Eq. (5.19). Essa função não possui o fator de escala como parâmetro pois este é dependente da distância de observação x do contraste de densidade δ_{lm} [$a = a(x)$]. A contribuição da função $F(k, a)$ para a integral na Eq. (5.20) é bem simples, sendo apenas constantes multiplicativas ou um fator de k^2 . Em qualquer caso, assumindo o espectro da Eq. (5.18), a integral que temos que resolver tem a forma:

$$I = \int_0^\infty k^p j_l(kx) j_l(ky') dk, \quad (5.21)$$

onde p é um expoente real, resultado dos fatores de k advindos de $P_*(k)$, $F(k, a)$ e da própria integral no raio k . A integral I possui solução [68]:

$$I = \frac{2^{p-1} \pi \Gamma \left(\frac{2l+p+1}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{2-p}{2} \right) \Gamma \left(l + \frac{3}{2} \right)} \frac{(xy')^l}{(x^2 + y'^2)^{\frac{2l+p+1}{2}}} \times$$

$$F \left[\frac{2l+p+1}{4}, \frac{2l+p+3}{4}, l + \frac{3}{2}, \left(\frac{2xy'}{x^2+y'^2} \right)^2 \right], \quad (5.22)$$

onde $\Gamma(z)$ é chamada função gama e definida por:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (5.23)$$

e $F(a, b, c, z)$ é a função hipergeométrica, também conhecida por ${}_2F_1(a, b, c, z)$, definida por:

$$F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (a)_n = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}. \quad (5.24)$$

Podemos notar que a integral I é simétrica na troca de x por y' . Se não fosse pela dependência implícita do fator de escala a em x , a função $W_l(y', x)$ também seria simétrica.

Com o resultado da integral da Eq. (5.21), calculamos a função janela:

$$\begin{aligned} W_l(y', x) = & \frac{A_* \pi}{H_0^{n_s-1}} \left\{ \frac{1}{3} \frac{G(a)}{(aH)^2} \frac{2^{n_s} \Gamma\left(\frac{2l+n_s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-n_s}{2}\right) \Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} \frac{(xy')^l}{(x^2+y'^2)^{\frac{2l+n_s+1}{2}}} \times \right. \\ & F \left[\frac{2l+n_s+1}{4}, \frac{2l+n_s+3}{4}, l + \frac{3}{2}, \left(\frac{2xy'}{x^2+y'^2} \right)^2 \right] + \\ & \left[a \frac{dG(a)}{da} + G(a) \right] \frac{2^{n_s-2} \Gamma\left(\frac{2l+n_s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-n_s}{2}\right) \Gamma\left(l+\frac{3}{2}\right)} \frac{(xy')^l}{(x^2+y'^2)^{\frac{2l+n_s-1}{2}}} \times \\ & \left. F \left[\frac{2l+n_s-1}{4}, \frac{2l+n_s+1}{4}, l + \frac{3}{2}, \left(\frac{2xy'}{x^2+y'^2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (5.25) \end{aligned}$$

Esta é a expressão final para a função janela $W_l(y', x)$. Com este resultado e o obtido na seção 4.3:

$$K_l^{(SW)}(r, r') = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \frac{r'^3}{r} \theta(r' - |2r - R|) \frac{\sin^2 \phi P_l^{-2}(\cos \phi)}{(R-r)^3}, \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} K_l^{(SWI)}(r, r') = & -\frac{3}{4} \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \frac{r'^3}{r} \times \\ & \int_r^R \theta(r' - |r'' - 2r|) \theta(r'' - r') \frac{\sin^2 \psi P_l^{-2}(\cos \psi)}{(r'' - r)^3} \frac{d}{dr''} \left[\frac{D(r'')}{a(r'')} \right] dr'', \quad (5.27) \end{aligned}$$

podemos finalmente calcular a correlação apresentada na Eq. (5.19):

$$\langle p_{l'm'}(y) \delta_{lm}^*(x) \rangle = 16\pi^2 \delta_{ll'} \delta_{mm'} \int_0^R K_l(y, y') W_l(y', x) dy'. \quad (5.28)$$

Figura 5.1: Gráfico da função janela $W_l(y', x)$, com $l = 20$ e y' fixado em $0.5R$, sendo R o raio da superfície de último espalhamento. Na abscissa temos a distância comóvel x , normalizada em R . O comportamento dessa função é similar para qualquer l e para parâmetros cosmológicos próximos dos obtidos observacionalmente, sempre apresentando um pico em $x = y'$.

5.2 Análise da correlação

Enquanto o kernel $K_l(y, y')$ é sensível aos parâmetros da energia escura, principalmente devido ao efeito SWI, através da função de crescimento $G(a)$, a função janela $W_l(y', x)$, além de depender desses parâmetros, também depende do índice espectral das perturbações iniciais. Desta forma, a correlação $\langle p_{l'm'}(y) \delta_{lm}^*(x) \rangle$ pode, em princípio, nos ajudar a conhecer melhor a energia escura e as condições iniciais do universo. A Figura 5.1 apresenta um gráfico típico da função $W_l(y', x)$, onde notamos seu comportamento *quasi* delta de Dirac. Suas bases mais largas farão com que a correlação não seja uma reprodução exata do kernel, mas uma cópia suavizada, já que um ponto (y, x) da correlação envolverá uma certa média ao redor do ponto (y, x) do kernel. O comportamento dessa função janela com respeito à variação de suas variáveis pode ser visto na Figura 5.2.

Inserindo a Eq. (5.25) e as Eqs. (4.90) e (4.91) na (5.19), podemos calcular a correlação da polarização em aglomerados com o contraste de densidade. Exemplos são apresentados nas Figuras 5.3 e 5.4. Se compararmos com as Figuras 4.14 e 4.15, podemos perceber a semelhança entre o kernel e a correlação, e que as rápidas oscilações do kernel são apagadas na correlação.

Essa semelhança da correlação com o kernel nos confere uma região do espaço de parâmetros na qual toda a correlação se deve ao efeito Sachs-Wolfe Integrado. Inclusive, este efeito se torna dominante na correlação, como podemos ver nas Figuras 5.5 e 5.6, que apresentam as correlações $\langle p_{5m}(y) \delta_{5m}^*(x) \rangle$ e $\langle p_{15m}(y) \delta_{15m}^*(x) \rangle$ numa escala maior. Da Figura 5.3 vemos que essa região aparece em $x \sim y$ e para distâncias

Figura 5.2: Aqui vemos como os parâmetros l e y' modificam a função janela $W_l(y', x)$. Notamos que o aumento de l torna a função janela mais estreita, e que ela parece se tornar mais alta em y' maiores.

Figura 5.3: Gráfico da correlação $\langle p_{5m}(y) \delta_{5m}^*(x) \rangle$, que foi construído com 100 valores de x e 100 valores de y diferentes, igualmente espaçados no fator de escala. O vale que aparece na diagonal em baixos x e y , correspondente ao efeito SWI, é muito mais profundo e está além dos limites da escala vertical. Se o colocarmos dentro da escala, as ondulações provenientes do efeito SW não ficam visíveis. Correlação calculada com $\Omega_m = 0,3$, $\Omega_\Lambda = 0,7$, $w_\Lambda = -1$ e $n_s = 0.95$.

Figura 5.4: Gráfico da correlação $\langle p_{15m}(y)\delta_{15m}^*(x) \rangle$, calculada com os mesmos parâmetros que a da Figura 5.3. Podemos notar a semelhança com o kernel de $l = 15$, sendo que a contribuição do efeito SW é quase completamente apagada, enquanto que a do ISW se torna dominante. Para ser perceptível a contribuição do efeito SW, tivemos que plotar o gráfico de maneira que o fundo do vale produzido pelo efeito SWI ficou para fora da escala. Estes mesmos dados são apresentado numa escala mais abrangente na Figura 5.6.

baixas. Num modelo Λ CDM plano com $\Omega_m = 0,3$, essas distâncias correspondem a *redshifts* de até $z \sim 2$. Além disso, uma vantagem deste método de detecção do efeito SWI é que, ao contrário da auto-correlação $\langle a_{lm}a_{l'm'}^* \rangle$ das anisotropias primárias da RCF ou de uma correlação $\langle \delta_g^{2D} a_{l'm'}^* \rangle$ entre as anisotropias da RCF e o contraste de densidade de galáxias num mapeamento angular, que possuem um número de dados limitado a um espaço bidimensional, a correlação aqui apresentada possui um terceiro parâmetro (o *redshift*) e portanto nos oferece uma quantidade maior de dados.

Podemos analisar a diferença entre correlações calculadas com parâmetros cosmológicos diferentes. A Figura 5.7 apresenta a diferença entre a correlação calculada, para $l = 5$, com $\Omega_m = 0,3$ e $\Omega_m = 0,2$, enquanto mantemos constante a equação de estado da energia escura ($w_\Lambda = -1$):

$$\langle p_{5m}(y)\delta_{5m}^*(x) \rangle(0,3;-1,0) - \langle p_{5m}(y)\delta_{5m}^*(x) \rangle(0,2;-1,0) . \quad (5.29)$$

Notamos que o efeito de diminuir a densidade de matéria Ω_m desloca ligeiramente o efeito SWI para *redshifts* mais altos, como era esperado: a igualdade entre matéria e energia escura ocorre antes. Outra diferença surge na região em que o efeito SW é dominante. Isso provavelmente ocorre devido à diferença que surge no cálculo das

Figura 5.5: Correlação $\langle p_{5m}(y)\delta_{5m}^*(x) \rangle$ é apresentada, multiplicada por -1 para facilitar a visualização. Com a escala vertical variando de 0 a 0,2, a dominação do efeito SWI e o anulamento do efeito SW são melhor percebidos.

Figura 5.6: Correlação $\langle p_{15m}(y)\delta_{15m}^*(x) \rangle$, multiplicada por -1 para facilitar a visualização. Vemos que o efeito do aumento do l , além de deixar a correlação na diagonal mais estreita, concentra-a em *redshifts* mais baixos. O “serrilhado” na diagonal é um artefato do programa gerador dos gráficos.

Figura 5.7: Diferença entre a correlação calculada com $\Omega_m = 0,3$ e a calculada com $\Omega_m = 0,2$, $\langle p_{5m}(y)\delta_{5m}^*(x) \rangle (0,3;-1,0) - \langle p_{5m}(y)\delta_{5m}^*(x) \rangle (0,2;-1,0)$. O vale a baixos *redshifts* foi cortado pelo gráfico em $-0,005$, mas ele chega a atingir cerca de $-0,1$ em $z \simeq 0,01$ (ou seja, 50% do valor apresentado na Figura 5.5). Notamos que a diminuição de Ω_m aprofunda o vale referente ao efeito SWI em altos *redshifts* e torna o efeito SWI menor em baixos *redshifts* (lembre-se que o valor da correlação referente ao efeito SWI é negativo).

distâncias comóveis. A grande quantidade de valores nulos na correlação torna numericamente difícil a normalização da diferença por $\langle p_{5m}(y)\delta_{5m}^*(x) \rangle (0,3;-1,0)$, mas estimamos que em certas regiões a diferença passa dos 10% do valor da correlação, como é o caso da diagonal a baixos *redshifts*.

Na Figura 5.8 apresentamos o resultado da subtração:

$$\langle p_{5m}(y)\delta_{5m}^*(x) \rangle (0,3;-1,0) - \langle p_{5m}(y)\delta_{5m}^*(x) \rangle (0,3;-0,9) . \quad (5.30)$$

O aumento da equação de estado de $w_\Lambda = -1$ para $w_\Lambda = -0,9$ reduz a intensidade do efeito Sachs-Wolfe Integrado e parece alterar também o efeito Sachs-Wolfe, embora essa alteração seja bem menor do que a observada na Figura 5.7, quando variamos a densidade Ω_m . Por fim, todos esses efeitos são similares para o caso $l = 15$.

Figura 5.8: Diferença entre as correlações com $w_\Lambda = -1$ e $w_\Lambda = -0,9$, $\langle p_{5m}(y)\delta_{5m}^*(x) \rangle (0, 3; -1, 0) - \langle p_{5m}(y)\delta_{5m}^*(x) \rangle (0, 3; -0, 9)$. O vale do efeito SWI, que foi cortado em $-0,005$, chega a $-0,05$ em $z = 0,01$. Esta diferença, em baixos *redshifts*, não parece se distinguir muito da apresentada na Figura 5.7. A quebra de degenerescência é mais visível em altos *redshifts*.

Capítulo 6

Considerações Finais

O resultado mais importante deste trabalho são as Eqs. (4.89), (4.90) e (4.91), que estabelecem uma relação causal entre a polarização produzida pelo quadrupolo observada em algum ponto do céu e as perturbações da métrica Φ na época do desacoplamento. Essas equações possuem um diferencial quando comparadas a outras relações similares, como aquela entre as anisotropias primordiais da Radiação Cósmica de Fundo e o potencial primordial, pois se dão no espaço real, no qual as relações causais entre as duas grandezas se tornam mais claras. Essas relações, que surgiram naturalmente do cálculo desde primeiros princípios, foram explicadas na seção 4.3.1. Também estudamos os efeitos da variação dos parâmetros cosmológicos sobre a correlação da polarização com o contraste de densidade de matéria, e como esses efeitos podem ser utilizados para testar a energia escura, por exemplo. Dada a semelhança entre essa correlação e os kernels apresentados na seção 4.3, podemos esperar que os efeitos da variação dos parâmetros sobre os kernels sejam similares aos observados no capítulo 5, para a correlação.

Também vimos como seria possível, em teoria, realizar uma tomografia do potencial Φ na época do desacoplamento em todo o universo observável, o que nos permitiria, por exemplo, testar modelos de evolução de estruturas. Ao contrário da reconstrução de Φ no espaço dos momentos k , a no espaço real não possui nenhuma limitação intrínseca e poderia, em princípio, ser perfeita. Infelizmente, estimamos na seção 4.3.2 que tal tomografia seria inviável atualmente dada a alta sensibilidade requerida para detectar os sinais de polarização e o elevado número de medições necessárias para a reconstrução. Apesar disso, os resultados aqui apresentados podem ser úteis em outros problemas importantes que não necessariamente requerem uma sensibilidade tão grande ou tantas medições.

Nesse sentido, algumas possibilidades de prosseguimento deste trabalho incluem: medidas remotas do quadrupolo para reduzir sua variância cósmica, como proposto por Bunn; aplicação das equações obtidas neste trabalho no estudo da polarização primordial, originada na superfície de último espalhamento, e da polarização produzida na reionização do universo; e a consideração da polarização descrita neste

trabalho como contaminante da medição do modo B de polarização gerado pela inflação. Nesse sentido, seria importante uma análise mais detalhada dos erros envolvidos na medição dessa polarização. Essa análise também pode ser importante na determinação da eficiência da correlação descrita no capítulo 5 como mecanismo de restringimento dos parâmetros cosmológicos. Vale a pena destacar que, ao contrário da tomografia das perturbações descrita no capítulo 4, o cálculo da correlação não necessita de tantas medições.

Apêndice A

Rotação de coordenadas

Um sistema de coordenadas linha $(\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$ é obtido, a partir de um original $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, através de uma rotação de ângulo θ_r em torno do eixo $\hat{x}$ e, em seguida, de uma rotação de ângulo ϕ_r em torno do eixo $\hat{z}$ original. Sendo $\hat{r} = (\theta_r, \phi_r)$, os eixos do sistema linha podem ser obtidos a partir da seguinte rotação:

$$\begin{aligned}\hat{z}' &= \text{sen}\theta_r \text{sen}\phi_r \hat{x} - \text{sen}\theta_r \cos\phi_r \hat{y} + \cos\theta_r \hat{z}, \\ \hat{y}' &= -\cos\theta_r \text{sen}\phi_r \hat{x} + \cos\theta_r \cos\phi_r \hat{y} + \text{sen}\theta_r \hat{z}, \\ \hat{x}' &= \cos\phi_r \hat{x} + \text{sen}\phi_r \hat{y}.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Como um ponto no sistema linha possui coordenadas:

$$\hat{q} = \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \hat{x}' - \text{sen}\theta' \cos\phi' \hat{y}' + \cos\theta' \hat{z}',\tag{A.2}$$

podemos escrever esse vetor no outro sistema (com base nos versores $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$) substituindo os versores $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ e $\hat{z}'$ da Eq. (A.2) pelos apresentados nas Eqs. (A.1):

$$\begin{aligned}\hat{q} &= \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' (\cos\phi_r \hat{x} + \text{sen}\phi_r \hat{y}) \\ &\quad - \text{sen}\theta' \cos\phi' (-\cos\theta_r \text{sen}\phi_r \hat{x} + \cos\theta_r \cos\phi_r \hat{y} + \text{sen}\theta_r \hat{z}) + \\ &\quad \cos\theta' (\text{sen}\theta_r \text{sen}\phi_r \hat{x} - \text{sen}\theta_r \cos\phi_r \hat{y} + \cos\theta_r \hat{z}),\end{aligned}\tag{A.3}$$

Esse mesmo ponto pode receber coordenadas (θ, ϕ) , definidas a partir dos versores originais $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$:

$$\hat{q} = \text{sen}\theta \text{sen}\phi \hat{x} - \text{sen}\theta \cos\phi \hat{y} + \cos\theta \hat{z}.\tag{A.4}$$

Igualando a Eq. (A.4) à (A.3), obtemos um sistema de equações que relaciona as coordenadas (θ', ϕ') às (θ, ϕ) através das coordenadas (θ_r, ϕ_r) :

$$\cos\theta = -\text{sen}\theta' \cos\phi' \text{sen}\theta_r + \cos\theta' \cos\theta_r,$$

$$\text{sen}\theta\text{sen}\phi = \text{sen}\theta'\text{sen}\phi' \cos\phi_r + \text{sen}\theta' \cos\phi' \cos\theta_r \text{sen}\phi_r + \cos\theta' \text{sen}\theta_r \text{sen}\phi_r \quad (\text{A.5})$$

$$-\text{sen}\theta \cos\phi = \text{sen}\theta' \text{sen}\phi' \text{sen}\phi_r - \text{sen}\theta' \cos\phi' \cos\theta_r \cos\phi_r - \cos\theta' \text{sen}\theta_r \cos\phi_r.$$

Este sistema pode ser invertido, de maneira a obter as funções trigonométricas de θ' e ϕ' em função das de θ , ϕ , θ_r e ϕ_r . Este trabalho, apesar de longo e demorado, não envolve nenhuma passagem excepcional e pode ser feito num programa como o *Mathematica* 5.2. Com estas relações, podemos passar o harmônico esférico $Y_{22}(\hat{k})$ da base linha para a base sem linha. Na base linha, temos:

$$Y'_{22}(\hat{k}) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} (\cos 2\phi' + i \text{sen} 2\phi') \text{sen}^2 \theta', \quad (\text{A.6})$$

onde (θ', ϕ') são as coordenadas do versor $\hat{k}$ no sistema linha. Substituindo as funções trigonométricas de θ' e ϕ' pelas expressões obtidas do sistema de equações (A.5), chegamos a:

$$Y'_{22}(\hat{k}) = \text{sen}^4 \left(\frac{\theta_r}{2} \right) e^{2i\phi_r} Y_{2-2}(\hat{k}) - \frac{\text{sen}\theta_r (\cos\theta_r - 1)}{2} e^{i\phi_r} Y_{2-1}(\hat{k}) + \sqrt{\frac{3}{8}} \text{sen}^2 \theta_r Y_{20}(\hat{k}) + \frac{\text{sen}\theta_r (\cos\theta_r + 1)}{2} e^{-i\phi_r} Y_{21}(\hat{k}) + \cos^4 \left(\frac{\theta_r}{2} \right) e^{-2i\phi_r} Y_{22}(\hat{k}). \quad (\text{A.7})$$

Vemos então que, ao rodar a base, Y'_{22} se torna uma combinação linear dos 5 Y_{2m} , sem se misturar com outros l 's.

Interessantemente, a equação acima pode ser escrita da forma:

$$Y'_{22}(\hat{k}) = \sqrt{\frac{4\pi}{5}} \sum_{m=-2}^2 (-1)^m {}_2Y_{2-m}(\hat{r}) Y_{2m}(\hat{k}), \quad (\text{A.8})$$

onde ${}_sY_{lm}$ é o chamado harmônico esférico de spin s [71].

Apêndice B

Símbolos 3-j de Wigner

Os símbolos 3-j de Wigner tem a seguinte relação com os coeficientes de Clebsch-Gordan [66]:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1, j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle. \quad (\text{B.1})$$

Richard Zare nos apresenta fórmulas para o cálculo de alguns símbolos 3-j que costumam aparecer nos trabalhos em física e química [66]:

$$\begin{pmatrix} 2 & j+2 & j \\ 2 & m & -m-2 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \sqrt{\frac{(j-m+2)!}{(j-m-2)!} \frac{(2j)!}{(2j+5)!}}, \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & j & j \\ 2 & m & -m-2 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \sqrt{6 \frac{(j+m+2)!}{(j+m)!} \frac{(j-m)!}{(j-m-2)!} \frac{(2j-2)!}{(2j+3)!}}, \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & j+2 & j \\ 0 & m & -m \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \sqrt{6 \frac{(j+m+2)!}{(j+m)!} \frac{(j-m+2)!}{(j-m)!} \frac{(2j)!}{(2j+5)!}}, \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{pmatrix} 2 & j & j \\ 0 & m & -m \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} 2[3m^2 - j(j+1)] \sqrt{\frac{(2j-2)!}{(2j+3)!}}. \quad (\text{B.5})$$

Além disso, os símbolos 3-j possuem algumas propriedades sob a permutação de seus índices. Permutações pares ou cíclicas não alteram seu valor, enquanto que permutações ímpares obedecem a relação:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Apêndice C

Inversão de matrizes

A inversão de matrizes é um instrumento útil para a resolução de sistemas de equações lineares do tipo:

$$A \cdot x = b, \quad (\text{C.1})$$

onde A é uma matriz, x um vetor a ser descoberto e b um vetor conhecido. O que buscamos com a resolução da Eq. (C.1) é:

$$x = A^{-1} \cdot b, \quad (\text{C.2})$$

onde $A^{-1} \cdot A = I$, sendo I a matriz identidade. Esse processo pode se tornar algo complexo quando trabalhamos com matrizes não-quadradas ou quando existem degenerescências de linhas ou colunas. Degenerescência de linha significa que uma ou mais linhas da matriz são combinações lineares das demais. Degenerescência de coluna significa que ao menos uma coluna da matriz é proporcional a outra. Uma matriz que apresenta alguma dessas degenerescências é chamada de matriz singular.

As degenerescências implicam numa redução da informação que supostamente teríamos com um sistema de M equações e N incógnitas, e portanto atrapalham a inversão. Além disso, uma matriz não-quadrada também traz dificuldades pois se $M < N$ nos falta informação, e se $M > N$ nosso problema está super-determinado, de forma que não é possível satisfazer plenamente todas as equações de forma concomitante.

Apesar disso, ainda é possível buscar uma matriz chamada de pseudo-inversa $A^\dagger$, tal que o produto $A^\dagger \cdot A$ se aproxima o máximo possível da matriz identidade. No caso $M > N$, o processo de obtenção da pseudo-inversa corresponde à minimização do χ -quadrado. O produto $A^\dagger \cdot A$ foi chamado de pseudo-identidade. A matriz $A^\dagger$ pode ser obtida através do processo de Decomposição em Valores Singulares [72].

C.1 Decomposição em Valores Singulares

Qualquer matriz A de dimensões $M \times N$ pode ser escrita da forma:

$$A = U \cdot W \cdot V^T, \quad (\text{C.3})$$

onde U é uma matriz $M \times N$ ortogonal nas colunas, W é uma matriz diagonal $N \times N$:

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & w_N \end{pmatrix}, \quad (\text{C.4})$$

e V^T é a transposta da matriz ortogonal V de dimensões $N \times N$ [72]. Os valores w_i da matriz W são todos nulos ou positivos, e são chamados de valores singulares. Por ortogonalidade nas colunas queremos dizer que:

$$\sum_{i=1}^M U_{ik} U_{in} = \delta_{kn}, \quad \begin{matrix} k \leq \min(M, N) \\ n \leq \min(M, N) \end{matrix}. \quad (\text{C.5})$$

O interessante dessa forma de descrever a matriz A é que suas características problemáticas para a inversão aparecem na matriz W , através de valores singulares nulos. No caso de uma matriz A com $M = N$, por exemplo, sua inversa A^{-1} pode ser calculada da forma:

$$A^{-1} = (V^T)^{-1} \cdot W^{-1} \cdot U^{-1}. \quad (\text{C.6})$$

Entretanto, como W é uma matriz diagonal, sua inversa é composta pelo inverso dos valores da diagonal (os valores singulares). Se um desses valores é nulo, a inversão é impossível. Esse problema é resolvido através da eliminação dos termos problemáticos de A , o que é feito fixando em $w_i^{-1} = 0$ os w_i^{-1} que explodem. Chamaremos a matriz diagonal composta por esses novos termos w_i^{-1} de W_0^{-1} , e a pseudo-inversa é obtida da seguinte forma:

$$A^\dagger = (V^T)^{-1} \cdot W_0^{-1} \cdot U^{-1}. \quad (\text{C.7})$$

Como as matrizes U e V são matrizes ortogonais, $U^{-1} = U^T$ e $V^{-1} = V^T$:

$$A^\dagger = V \cdot W_0^{-1} \cdot U^T. \quad (\text{C.8})$$

Quando se trata de cálculo numérico, não é necessário que algum valor singular seja nulo para impossibilitar a inversão perfeita de A . Basta que a razão entre dois valores singulares exceda a precisão dos cálculos. Nesse caso, o cálculo com o valor singular mais próximo a zero irá introduzir mais erros de arredondamento do que

informação, de forma que é mais vantajoso eliminá-lo.

Bibliografia

- [1] Adelman-McCarthy, Jennifer K. *et al. Astrophysical Journal Suppl. Vol. 162 p. 38* (astro-ph/0507711), 2006.
- [2] Hinshaw, G. *et al. The Astrophysical Journal Suppl. Vol. 170 p. 288* (astro-ph/0603451v2), 2007.
- [3] Kamionkowski, Marc; Loeb, Abraham. *Physical Review D Vol. 56 p. 4511* (astro-ph/9703118), 1997.
- [4] Bunn, Emory F.. *Physical Review D Vol. 73 123517* (astro-ph/0603271), 2006.
- [5] Abramo, L. Raul; Xavier, Henrique S.. *Physical Review D Vol. 75 p. 101302* (astro-ph/0612193), 2007.
- [6] Holton, Gerald. *Introduction to concepts and theories in physical science*, Addison-Wesley Publishing Company Inc, 1952.
- [7] Holton, Gerald. *Thematic origins of scientific thought; Kepler to Einstein*, Harvard University Press, 1973.
- [8] Weinberg, Steven. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons Inc., 1972.
- [9] Newton, Isaac. *Sir Issac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System of the World*, University of California Press, 1946.
- [10] Pound, R. V.; Rebka, G. A.. *Physical Review Letters Vol. 4 p. 337*, 1960.
- [11] Weisberg, J. M.; Taylor, J. H.. (astro-ph/0407149), 2004.
- [12] <http://einstein.stanford.edu> - 30/07/2007.
- [13] de Vaucouleurs, Gérard. *Discovery of the Universe: An outline of the history of Astronomy from the origins to 1956*, Faber and Faber, 1956.
- [14] Neto, Gastão Bierrenbach Lima. *Notas de Aula*, 2005.
- [15] Hubble, Edwin. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America Vol. 15 Issue 3 p. 168*, 1929.

- [16] Robertson, Howard P.. *The Astrophysical Journal* Vol. 82 p.284, 1935.
- [17] Walker, Arthur G.. *Proceedings of the London Mathematical Society* 2 42 p. 90, 1936.
- [18] Dodelson, Scott. *Modern Cosmology*. Academic Press, 2003.
- [19] Zwicky, Fritz. *The Astrophysical Journal*, Vol. 86 p.217, 1937.
- [20] Bosma, A.. *Tese de doutorado, Rijksuniversiteit Groningen*, 1978.
(<http://nedwww.ipac.caltech.edu/level5/March05/Bosma/frames.html>)
- [21] Faber, Sandra M.. *Annual review of astronomy and astrophysics* Vol. 17 p. 135, 1979.
- [22] Fabricant, D.; Gorenstein, P.. *The Astrophysical Journal* Vol. 267 p. 535, 1983.
- [23] Olive, Keith A.. (astro-ph/0301505), 2003.
- [24] Riess, Adam G. *et al.* *The Astronomical Journal* Vol. 116 p. 1009 (astro-ph/9805201), 1998.
- [25] Pryke, C.; Halverson, N. W.; Leitch, E. M.; Kovac, J.; Carlstro, J. E.. *The Astrophysical Journal* Vol. 568 p. 46 (astro-ph/0104490), 2002.
- [26] Mukhanov, Viatcheslav. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, 2005.
- [27] Mather, J.; Fixsen, D.; Shafer, R.; Mosier, C.; Wilkinson, D.. *The Astrophysical Journal* Vol. 512 p. 511, 1999.
- [28] Freedman, Wendy L. *et al.* *The Astrophysical Journal* Vol. 553 p. 47, 2001.
- [29] Spergel, David N. *et al.* *The Astrophysical Journal Suppl.* Vol. 148 p. 175 (astro-ph/0302209v3), 2003.
- [30] Burles, Scott; Nollett, Kenneth M.; Turner, Michael S.. (astro-ph/9903300), 1999.
- [31] Astier, P. *et al.* *Astronomy & Astrophysics* Vol. 447 p. 31 (astro-ph/0510447), 2006.
- [32] Peter, Patrick e Uzan, Jean-Philippe. *Cosmologie Primordiale*. Belin, 2005.
- [33] Callen, Herbert B.. *Thermodynamics and an introduction to thermostatics*. John Wiley & Sons, 2a edição, 1985.
- [34] Wagoner, R. V.. *The Astrophysical Journal* Vol. 179 p. 343, 1973.

-
- [35] Bernstein, Jeremy. *Kinetic theory in the expanding universe*. Cambridge University Press, 1988.
  - [36] Gamow, George. *Reviews of Modern Physics Vol. 21 p. 367*, 1949.
  - [37] Gamow, George. *The Creation of the Universe*. Dover Publications Inc, 1961.
  - [38] Kragh, Helge. *Cosmology and Controversy: The Historical Development of Two Theories of the Universe*. Princeton University Press, 1996.
  - [39] Doroshkevich, A. G.; Novikov, I. D.. *Soviet Physics Doklady Vol. 9 p. 111*, 1964.
  - [40] Dicke, R. H.; Peebles, P. J. E.; Roll, P. G.; Wilkinson, D. T.. *The Astrophysical Journal Vol. 142 p. 414*, 1965.
  - [41] Penzias, A. A.; Wilson, R. W.. *The Astrophysical Journal Vol. 142 p. 419*, 1965.
  - [42] Mather, J. C. *et al. The Astrophysical Journal Vol. 420 p. 439*, 1994.
  - [43] Bernui, A.; Villela, T.; Wuensche, C.; Leonardi, R.; Ferreira, I.. *Astronomy & Astrophysics Vol. 454 p. 409* (astro-ph/0601593), 2006.
  - [44] Kodama, H.; Sasaki, M.. *Progress of Theoretical Physics Supplement Vol. 78 p. 1*, 1984.
  - [45] Tegmark, M. *et al. The Astrophysical Journal Vol. 606 p. 702*, 2004.
  - [46] Wilson, M. L., Silk, Joseph; *The Astrophysical Journal Vol. 243 p. 14*, 1981.
  - [47] Seljak, U.; Zaldarriaga, M.. *The Astrophysical Journal Vol. 469 p. 437* (astro-ph/9603033), 1996.
  - [48] Hu, Wayne; Sugiyama, Naoshi. *Physical Review D Vol. 51 p. 2599* (astro-ph/9411008), 1995.
  - [49] Kitchin, Christopher Robert. *Stars, Nebulae and the Interstellar Medium: Observational Physics and Astrophysics*. CRC Press, 1987.
  - [50] Spergel, David N. *et al. The Astrophysical Journal Suppl. Vol. 170 p. 377* (astro-ph/0603449), 2007.
  - [51] Strukov, I. A.; Skulachev, D. P.. *Soviet Astronomy Letters (Pis'ma) Vol. 10 p. 3*, 1984.
  - [52] Smoot, George *et al. The Astrophysical Journal Vol. 360 p. 685*, 1990.
  - [53] Wright, E. L.; Bennett, C. L.; G'Orski, K.; Hinshaw, G.; Smoot, G. F.. *The Astrophysical Journal Vol. 464 p. 21* (astro-ph/9601059), 1996.

- [54] de Bernardis, P. *et al.* *New Astronomy Reviews Vol. 43 p. 289* (astro-ph/9911461), 1999.
- [55] Scott, P. F. *et al.* *The Astrophysical Journal Vol. 461 p. 1*, 1996.
- [56] <http://www.rssd.esa.int/index.php?project=Planck> - 10/08/2007.
- [57] Jackson, John David. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons Inc., 1998.
- [58] Carlstrom, John E.; Holder, Gilbert P.; Reese, Erik D.. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics Vol. 40 p. 643* (astro-ph/0208192), 2002.
- [59] Shimon, M.; Rephaeli, Y.; O'Shea, B. W.; Norman, M. L.. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Vol. 368 p. 511* (astro-ph/0602528), 2006.
- [60] Gibilisco, M.. *Astrophysics & Space Science Vol. 235 p. 75*, 1996.
- [61] Cooray, A.; Melchiorri, A.; Silk, J.. *Physics Letters B Vol. 554 p. 1* (astro-ph/0205214), 2003.
- [62] Ohno, H.; Takada, M.; Dolag, K.; Bartelmann, M.; Sugiyama, N.. *The Astrophysical Journal Vol. 584 p. 599*, 2003.
- [63] Sunyaev, R. A.; Zeldovich, Ya. B.. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Vol. 190 p. 413*, 1980.
- [64] Sazonov, S. Y.; Sunyaev, R. A.. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Vol. 310 p. 765* (astro-ph/9903287), 1999.
- [65] Lewis, Antony; Challinor, Anthony; Turok, Neil. *Physical Review D Vol. 65 p. 02350*, 2001.
- [66] Zare, Richard N. *Angular Momentum: Understanding spatial aspects in chemistry and physics*. Wiley-Interscience, 1988.
- [67] Arfken, George B.; Weber, Hans J.. *Mathematical Methods for Physicists, 4^a ed.*, Academic Press, 1995.
- [68] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M.. *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, Corrected and enlarged edition, 1980.
- [69] Hu, Wayne; Scranton, Ryan. *Physical Review D Vol. 70 p. 123002* (astro-ph/0408456), 2004.
- [70] Ruhl, J. *et al.*, *Proc. SPIE-Int. Soc. Opt. Eng. Vol. 5498 p. 11* (astro-ph/0411122), 2004.
- [71] Goldberg, J. N.; Macfarlane, A. J.. *Journal of Mathematical Physics Vol. 8 p. 2155*, 1967.

- [72] Press, William H.; Flannery, Brian P.; Teukolsky, Saul A.; Vetterling, William T.. *Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing*, 2^a ed., Cambridge University Press, 1992.