Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Transporte de partículas induzido por ondas de deriva

Francisco Alberto Marcus
Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Tese apresentada ao Instituto
de Física da Universidade de
São Paulo para a obtenção do
título de Doutor em Ciências

Banca Examinadora

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IF-USP - Orientador)

Prof. Dr. Luiz Fernando Ziebell (UFRGS)

Profa. Dra. Maria Célia Ramos de Andrade (INPE)

Prof. Dr. Álvaro Vannucci (IFUSP)

Prof. Dr. Yuri Kuznetsov (IFUSP)

São Paulo

2007

Dedicatória

Dedico este trabalho à minha família e a todos que, como eu, não se cansam de se maravilhar com a Vida.

Agradecimentos

Folheando as páginas e olhando o texto em profundidade, as palavras e as figuras se misturam, e percebo que o resultado deste trabalho vai além das horas em que me dediquei à pesquisa acadêmica. Sinto o quanto é importante o carinho e o convívio de todas as pessoas que participaram de minha vida. Minha família e meus amigos, com quem pude compartilhar momentos de alegrias e descobertas, seja no dia-a-dia do trabalho, no treino de Tai Chi Chuan, aqueles que dividiram o palco comigo, me ensinaram a dançar, até mesmo os que, em uma única vez, puderam participar destas atividades com alegria. Os agradecimentos são muitos.

Dentre todas as pessoas envolvidas, sou eternamente grato aos meus pais, à minha irmã, à Tante Gertraud e Oma Yolanda, pelo carinho, ajuda e orientação; ao meu filho Matheus, pela motivação, inspiração, amizade e companhia.

Nestes últimos quatro anos muitas pessoas maravilhosas conheci. Quero mencioná-las, mesmo correndo o risco de cometer alguma injustiça.

Agradeço aos meus amigos do grupo caótico René Medrano, Silvio Souza, Adriane e Clóvis Maia, Gustavo Zampier, Jefferson Stafusa, Eduardo Lascio, Antônio Batista, Elton C. da Silva, pelo convívio sempre agradável, pela trilha sonora, pizzadas, futebol de sala, pernoites e ao Zwinglio Guimarães-Filho pela orientação e conversas sempre frutíferas que ajudaram muito a desenvolver este trabalho. Ao meu orientador, Professor Doutor Iberê Luiz Caldas, pela dedicação, interesse, paciência, pela motivação e, principalmente, pela oportunidade de trabalhar em seu grupo.

Muito grato a Patrícia Carvalho pela revisão do texto, amizade e carinho, horas de

conversa para assentar as idéias e por ter aceitado comigo o desafio de aprender a dançar; à família Pacheco, principalmente à Cristiana, pela ternura e por compartilhar comigo momentos de tantas descobertas maravilhosas.

Agradeço aos meus amigos do tai chi: Rita, Leonor, Carol, Maira, Otávio, Laura, Chico, Pedrinho; ao mestre e amigo Helder Fouto, pela paciência, motivação e desenvolvimento; a Christiane Antunes por ter motivado e apresentado para mim as riquezas do tai chi, Maira Barbosa por tanto carinho e longas horas de conversa e prática.

Aos amigos queridos Fabiola Sala, Aline Fonseca e Vladimir Souza por me ensinarem a dançar, pelas divertidas saideiras, Adriana Miranda pela companhia e estudo no Batuira; Fernando Bardella, Klaus Fickert por todo o incentivo e apoio, André Gonçalves e César Rodrigues, irmãos por toda vida.

Aos professores Aluísio Fagundes, Marcia Fantini, Daniel Cornejo, Mariana Pojar, pelo trabalho conjunto e bons momentos que compartilhamos com nossos alunos da Escola Politécnica. Aos meus alunos, pela inspiração e motivação para fazer uma aula cada vez melhor, destacando meu amigo Lucas Pamplona.

Aos meus amigos do Nightriders, Bruno, Alexandre, Brizzi e Fernando, pelo apoio, inúmeros shows, e por muito heavy metal.

Ao Wanderley P. de Sá agradeço a implantação e manutenção da sala de computação e dos programas, sem os quais seria quase impossível realizar este trabalho. Quero agradecer também a simpatia e gentileza das secretárias do departamento, Inês e Lia, assim como à secretária do laboratório, Eleonora, e aos funcionários da CPG, Francisleine, Cláudia e Éber.

Agradeço o apoio financeiro da CAPES, do CNPq e da FAPESP.

Sei que posso reunir todos estes agradecimentos em um só; sou grato a Deus por estar no coração de todos e por criar este Universo maravilhoso ao qual me deu a honra de pertencer.

Resumo

Nesta tese, investigamos o transporte caótico de partículas por ondas de deriva ressonantes na borda do plasma em tokamaks com fluxo poloidal de deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$, um problema crítico para compreender, na fusão, as propriedades de confinamento dos plasmas. Usamos, para tokamaks com grande razão de aspecto, um modelo hamiltoniano não integrável (proposto por Horton) para descrever a contribuição dinâmica não linear ao transporte. Assim, embora o fluxo total, composto pelo fluxo de equilíbrio e por duas ondas de deriva ressonantes, não seja turbulento na descrição euleriana, as trajetórias lagrangianas das partículas são caóticas. Foi estudada a influência do perfil radial do campo elétrico nas barreiras de transporte e nas células convectivas criadas pela interação não linear entre o fluxo de equilíbrio e as ondas ressonantes. Para equilíbrios com fluxo reverso, nossos resultados mostram que o transporte de partículas pode ser reduzido pela alteração do perfil do campo elétrico. Finalmente, nossos resultados são aplicados para propor uma interpretação das experiências recentes em tokamaks que mostram uma redução do transporte quando um eletrodo polarizado é inserido na borda do plasma. Como um exemplo, usamos valores experimentais obtidos no TCABR para os perfis radiais do campo elétrico de equilíbrio e suas flutuações, durante o regime ôhmico padrão e durante o regime de confinamento melhorado.

Abstract

We investigate the chaotic particle transport by resonant drift waves propagating in tokamaks plasma edges with $\vec{E} \times \vec{B}$ poloidal zonal flow, a critical problem for the understanding of the confinement properties of fusion plasmas. We assume, for large aspect ratio tokamaks, a non integrable hamiltonian model (proposed by Horton) to describe the non linear dynamical contribution to the transport. Thus, although the total flow, formed by the equilibrium flow and two dominant resonant drift waves, is not turbulent in the eulerian point of view, the lagrangian particle trajectories are chaotic. We study the influence of the electric field radial profile on the transport barriers and convective cells created by the non linear interaction between the poloidal flow and the resonant waves. For equilibria with reverse shear flows, our results show that the particle transport can be reduced by modifying the electric field profile. Futhermore, our results are applied to propose an interpretation of recent tokamak experiments developed for studying the transport reduction when a biased electrode is inserted into the plasma edge or the Scrape-Off-Layer. As an example, we use the equilibrium and fluctuating electric field radial profiles measured in the TCABR tokamak to calculate the transport during the standard ohmic and improved confinement regimes obtained in this tokamak.

Sumário

1	Introdução	1
2	Transporte de partículas induzidas por ondas de deriva	7
2.1	Confinamento de plasma em tokamaks	7
2.2	Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$	10
2.3	Ondas de deriva	14
3	Descrição hamiltoniana do modelo	19
3.1	Modelo hamiltoniano de onda de deriva	19
3.2	Mudança para o referencial de uma onda	22
3.3	Parâmetro de confinamento	23
3.4	Modelo de duas ondas e o transporte	28
4	Campo Elétrico Uniforme	33
4.1	Configuração das linhas de fluxo	33
4.2	Duas ondas e o transporte	36
5	Campo Elétrico Monotônico	51
5.1	Configuração das linhas de fluxo	51
5.2	Difusão local	55
6	Campo Elétrico Não Monotônico	65
6.1	Configuração das linhas de fluxo	66
6.2	Difusão local	69
7	TCABR e o Campo Elétrico Não Monotônico	81
7.1	Experimento no TCABR e os modos de confinamento	81

7.2	Controle do transporte do plasma pelo campo elétrico	83
8	Conclusões	95
	Referências Bibliográficas	97
	Apêndice	107
A	Cálculo Numérico	107
		109
B	Publicações e Eventos	109

Capítulo 1

Introdução

Para a construção de reatores que produzam energia a partir de reações de fusão termonuclear controlada é necessário confinar o plasma, a altas temperaturas e densidade, em um campo magnético, por um tempo suficientemente longo para que a energia produzida supere a gasta com o confinamento e o aquecimento [1].

Entre as máquinas de confinamento magnético de plasma, o tokamak é a mais promissora e a mais desenvolvida, com uma melhora contínua em sua performance ao longo do tempo, desde o sucesso com as primeiras máquinas montadas na Rússia nos anos 50 [1].

Entretanto, o sucesso do confinamento magnético de plasmas em tokamaks é limitado por algumas dificuldades entre as quais destacamos as instabilidades e o transporte anômalo de partículas e energia para fora do plasma [2, 3]. Para superar essas limitações, uma série de experiências têm sido realizadas em tokamaks cada vez maiores e com operações mais sofisticadas [4, 5]. Nessas máquinas, várias descobertas importantes para a melhoria do confinamento têm sido realizadas e, mesmo assim, várias propriedades básicas do plasma magneticamente confinado permanecem sem um esclarecimento adequado, o que dificulta a previsão do comportamento do plasma confinado nas novas máquinas propostas [6, 7]. Assim, pesquisas experimentais sobre essas propriedades básicas continuam sendo realizadas e novos estudos teóricos estão sendo desenvolvidos.

Atualmente, vários tokamaks estão em operação em diferentes países. No exterior, destacamos os tokamaks: JET, ASDEX Upgrade, TORE SUPRA, e o DIII-D. No Brasil,

temos o TCABR do Instituto de Física da Universidade de São Paulo - USP, o ETE do Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE e o NOVA do Instituto de Física Gleb Wataghin da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Cada um desses tokamaks tem objetivos específicos, mas todos eles tentam esclarecer propriedades do plasma e fornecer indicações sobre a viabilidade de se construir um reator de fusão. Em todos eles têm ficado evidentes as limitações que a turbulência eletrostática e o transporte de partículas impõem ao confinamento. Está claro que a dificuldade com o transporte não está resolvida e será um limite importante à performance do tokamak ITER, que será construído através de uma ampla colaboração internacional com a intenção de verificar a viabilidade da construção de um reator. Além disso, ainda há dificuldades que limitam as previsões realizadas. De fato, a difusão estimada pelo cálculo do transporte neo-clássico (com as interações coulombianas e a geometria toroidal) é inferior à observada experimentalmente [8]. Assim sendo, é consensual entre os especialistas de fusão que, para melhorar essas previsões e a performance do ITER, é necessário compreender melhor a natureza do transporte na borda do plasma [9].

Entre as principais descobertas sobre o transporte de partículas observado está a sua dependência com a turbulência eletrostática [10, 11]. Essa turbulência deve-se, principalmente, às ondas de deriva [11]. Essas ondas surgem devido à não uniformidade do plasma ao ser confinado magneticamente num recipiente toroidal [7, 12] e provocam a deriva que leva à perda de partículas pela borda do plasma. Assim, o transporte em questão é inerente ao confinamento em tokamaks e não poderá ser eliminado, restando apenas a possibilidade de controlá-lo para diminuir o prejuízo que causa ao confinamento.

Na procura de explicações para as experiências sobre o transporte em tokamaks, está sendo explorada a possibilidade de os efeitos dinâmicos não lineares determinarem algumas das observações ainda não adequadamente interpretadas.

De fato, a relevância de efeitos dinâmicos não lineares para explicar o transporte associado à turbulência tem sido reconhecida, e vários efeitos foram identificados, como o acoplamento de modos [13, 14], a modulação de flutuações e o seu controle [15–17], a característica global do transporte e a sua estatística não Gaussiana [18]. Efeitos similares têm sido identificados no estudo do aquecimento iônico pela propagação de ondas híbridas

inferiores em tokamaks [19–21].

Transições entre regime de confinamento observadas em tokamaks, devido a pequenas variações dos parâmetros de controle, alteram substancialmente o transporte. Essas transições condizem com as bifurcações observadas em vários sistemas dinâmicos [22, 23]. Essa é uma outra evidência da presença de efeitos dinâmicos não lineares no transporte em tokamaks. Uma dessas transições é a que ocorre entre dois regimes de descargas em tokamaks, o regime mais comum, conhecido como L (inicial da palavra *low*), e o regime mais promissor, conhecido como H (de *high*), com melhor confinamento do plasma [24, 25].

O efeito dinâmico que vamos explorar neste trabalho é o do transporte caótico de partículas em campos magnéticos e elétricos determinísticos, devido ao movimento de deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$ [7].

Experimentos em tokamaks mostram que as configurações do campo magnético de equilíbrio, $\vec{B}_0$, do campo elétrico de equilíbrio, $\vec{E}_0$, e do campo elétrico da perturbação natural, $\vec{E}_1$, influenciam enormemente o transporte radial de partículas na borda do plasma para fora do tokamak, principalmente através do fluxo provocado pela deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$, sendo $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$. A flutuação $\vec{E}_1$ é turbulenta e determina, devido à deriva mencionada, o transporte de partículas na borda do plasma [7, 26, 27]. Deste modo, as flutuações eletrostáticas induzem o transporte anômalo das partículas observado na borda dos tokamaks e degradam o confinamento do plasma.

Recentemente foi verificado, em vários tokamaks, que o transporte de partículas para a parede do vaso e a perda de energia diminuem com o aumento do gradiente radial do campo elétrico. Assim, experiências que alteram o perfil radial dessa componente têm sido realizadas para diminuir o transporte [28–30]. A alteração do campo elétrico radial leva à criação de barreiras que diminuem o transporte. Embora os processos que levam a essa criação de barreiras tenham sido discutidos na literatura [8, 30], ainda não há uma teoria completa sobre esse efeito [8].

Resultados sobre a turbulência eletrostática e o transporte de partículas na borda do plasma em experiências realizadas nos tokamaks TBR e TCABR, ambos do Instituto de

Física da USP, foram apresentados em algumas dissertações de mestrado [31, 32], teses de doutoramento e [33, 34] e artigos científicos [35–37]. Essa linha de pesquisa tem sido desenvolvida desde que o tokamak TBR entrou em funcionamento em 1980. Recentemente, vários resultados relevantes foram obtidos no TCABR com o uso de polarização de borda, como a redução do transporte devido à transição do modo de operação L para o modo H [38], o crescimento da atividade (magnética) MHD, que deteriora o confinamento [39], e também foi observado a modulação da turbulência eletrostática pela perturbação magnética ressonante criada por um limitador magnético [15].

A contribuição do nosso trabalho ao Laboratório de Física de Plasmas do IFUSP foi desenvolver, pela primeira vez, uma análise do transporte em tokamaks devido às derivas caóticas criadas pela turbulência eletrostática [40]. Esta pesquisa complementa as pesquisas realizadas nesse laboratório sobre o transporte de linhas magnéticas caóticas criadas por perturbações magnéticas ressonantes [41, 42]. Enquanto as linhas magnéticas caóticas conduziriam as partículas, que as seguiriam e girariam em torno delas, as derivas caóticas causadas pela turbulência eletrostática completariam a descrição das órbitas dessas partículas.

A proposta da tese é, a partir da existência de ondas eletrostáticas em tokamaks e do fluxo do plasma (ocasionado pela deriva dos campos $\vec{B}_0$ e $\vec{E}_0$), investigar os efeitos dinâmicos devido às variações dos parâmetros do equilíbrio do plasma e das ondas que nele se propagam, mostrando como isso afeta o transporte de partículas causado pelas ondas de deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$.

Nesta tese consideramos o plasma em equilíbrio em um campo magnético uniforme $\vec{B}_0$ (na direção correspondente à direção toroidal de um tokamak) e um campo elétrico $\vec{E}_0$ perpendicular ao campo magnético (na direção correspondente à direção radial em um tokamak). Com isso, temos um fluxo poloidal de equilíbrio. Além desses campos, consideramos a perturbação $\vec{E}_1$ do campo elétrico correspondente às ondas de deriva que se propagam na direção perpendicular aos campos $\vec{B}_0$ e $\vec{E}_0$ (correspondente à direção poloidal do tokamak).

Em nossa dissertação de mestrado consideramos o campo elétrico de equilíbrio uni-

forme [43]. Nesta tese consideramos esse campo não uniforme, com perfis radiais monotônico e não monotônico. Observamos, nestes casos, a existência de barreiras ao transporte, cuja posição radial depende do campo elétrico de equilíbrio. Assim, analisamos numericamente o transporte caótico do fluxo de partículas quando submetido a perfis radiais monotônico e não monotônico do campo elétrico. Em especial, obtivemos como o transporte pode ser alterado com o deslocamento da região sem cisalhamento do fluxo pela alteração do campo elétrico de equilíbrio. Mostramos que o transporte de partículas pode ser significativamente reduzido com a mudança do perfil radial do campo elétrico, o que pode ser conseguido em tokamaks por várias técnicas experimentais. Em nosso trabalho, essa redução é causada pelo deslocamento radial das barreiras ao transporte.

Como método de trabalho, utilizamos a formulação hamiltoniana apresentada por [11] para descrever a superposição dos campos de equilíbrio e das ondas de deriva. Assim sendo, a configuração total dos campos considerados constitui um sistema dinâmico hamiltoniano não linear. O transporte é descrito pelas órbitas das partículas teste que são introduzidas para calcular o transporte lagrangeano caótico dos centros de guia e associá-lo ao transporte anômalo da borda do plasma. Desta forma, verificamos como esse transporte varia com os parâmetros característicos do equilíbrio e das ondas eletrostáticas, mostramos a existência de barreiras que diminuem esse transporte e analisamos a estatística do movimento dos centros de guia, mais precisamente o desvio quadrático médio dessas partículas nas direções radial e poloidal.

Mostramos também que a variação espacial do campo elétrico influencia o transporte de partículas devido às ondas de deriva através de efeitos dinâmicos não lineares. Entre esses efeitos, destacamos a existência de órbitas caóticas, o deslocamento das partículas na direção da separatriz da estrutura ressonante das ondas e a existência de barreiras na borda do plasma em tokamaks.

Quanto à estrutura deste estudo, no capítulo 2, apresentamos uma breve introdução aos tokamaks e à propagação das ondas de deriva nessa máquina. No capítulo 3, abordamos a formulação hamiltoniana da propagação de ondas de deriva em tokamaks. Já nos capítulos 4, 5 e 6, apresentamos os resultados sobre o transporte de partículas para os perfis e ondas considerados. No capítulo 7, relatamos uma aplicação dos resultados obti-

dos para interpretar os resultados de uma experiência no tokamak TCABR do Instituto de Física da USP e finalmente apresentamos, no capítulo 8, as conclusões.

Capítulo 2

Transporte de partículas induzidas por ondas de deriva

2.1 Confinamento de plasma em tokamaks

A literatura atual aponta que 99% da matéria visível do universo encontra-se no estado de plasma. Caracterizado por seu alto grau de ionização e formado a temperaturas elevadas, o plasma é um estado especial da matéria geralmente encontrado com sua dinâmica caracterizada pela turbulência. Definido como um sistema quase neutro constituído por um número muito grande de partículas carregadas, geralmente se estabelece como condição necessária para sua existência uma densidade mínima de partículas ionizadas. Esta densidade é calculada através da relação entre o comprimento linear L , onde o plasma está confinado, e o comprimento de Debye λ_D [44], de modo que $L \gg \lambda_D$.

O comprimento de Debye é dado por:

$$\lambda_D \equiv \left(\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n e^2} \right)^{1/2} \quad (2.1)$$

onde n , T_e , k_B e ϵ_0 são, respectivamente, a densidade de partículas, a temperatura do gás de elétrons, a constante de Boltzmann e a permissividade elétrica no vácuo.

A quase neutralidade é um aspecto importante que diferencia o plasma de um gás ionizado. O raio de Debye é a medida da distância característica do plasma dentro da qual pode haver separação de carga. Para distâncias acima do raio λ_D no plasma, encontramos um sistema neutro com o mesmo número de íons e elétrons. Para um gás ionizado, encontramos cargas de sinais opostos em proporções diferentes.

O tokamak, cujo nome deriva do russo "toroidal'naya kamera v magnitnykh katushkakh" (câmara de confinamento magnético toroidal) é uma máquina desenvolvida para o estudo dos diversos fenômenos do plasma e para o desenvolvimento de novas técnicas a fim de se obter um confinamento estável em altas temperaturas. Em um tokamak, o plasma é produzido em uma câmara toroidal e confinado dentro desta câmara através da superposição do campo magnético toroidal, criado pela corrente elétrica que passa por espiras colocadas ao redor da câmara, e do campo magnético poloidal, produzido pela corrente elétrica que flui através do plasma, conforme é apresentado na figura 2.1. A corrente de plasma é criada por um campo elétrico na direção toroidal, gerado pela variação do fluxo magnético produzido pela corrente no primário de um transformador ôhmico, no qual o plasma representa o secundário. Outras espiras, posicionadas paralelamente acima e abaixo da câmara toroidal, produzem campos magnéticos verticais para o controle da posição e formato da coluna de plasma.

A superposição das linhas dos campos magnéticos toroidal e poloidal origina uma configuração de linhas de campo helicoidais cuja helicidade em uma aproximação cilíndrica (na qual a razão entre o raio do plasma a e o raio do tokamak R é muito próxima de zero, ou seja, $R \gg a$) é descrita pelo fator de segurança q , dado aproximadamente por [44]:

$$q(r) = \frac{rB_\varphi}{RB_\theta} \quad (2.2)$$

onde B_φ é o campo magnético toroidal associado às espiras do campo toroidal, e B_θ é o campo magnético poloidal devido ao movimento das partículas carregadas que se movem na direção toroidal.

Figura 2.1: Esquema dos principais componentes do Tokamak.

Nas superfícies de fluxo magnético, conhecidas como superfícies racionais, uma linha de campo helicoidal retorna ao mesmo ponto depois de descrever m voltas na direção toroidal e n voltas na direção poloidal. A razão $q = m/n$ é conhecida como fator de segurança.

O aquecimento do plasma ocorre por meio da dissipação de calor provocada pela passagem da corrente elétrica pelo plasma. Para uma temperatura é de aproximadamente 8 keV, a corrente elétrica da ordem de 10^6 Ampères. No TCABR, estes valores estão na ordem de 10^5 Ampères para a corrente de plasma e 0,5 keV para a temperatura. A altas temperaturas a resistividade do plasma diminui e outro tipo de aquecimento é necessário para aumentar a temperatura.

O plasma interagindo com um campo magnético é usualmente considerado como um fluido magnetohidrodinâmico; um fluido condutor elétrico sujeito às forças eletromagnéticas, com propriedades que são descritas pela combinação das equações da hidrodinâmica para o fluido, com as equações de Maxwell para o campo. As propriedades

de tal fluido são extremamente interessantes e exibem uma gama de fenômenos que vão muito além de um fluido comum, verificando-se indesejáveis instabilidades e turbulência relacionadas aos campos elétrico e magnético. Nessas condições, a altas temperaturas, os efeitos da difusão ganham extraordinária importância.

Em dispositivos de confinamento magnético, como tokamaks, tem-se verificado que o referido estado de turbulência deve-se principalmente às instabilidades provocadas pelas ondas de deriva. As instabilidades das ondas de deriva ocorrem, principalmente, devido ao gradiente radial de densidade, produzindo o transporte anômalo das partículas através das linhas de campo magnético, conforme observado em experimentos e simulações numéricas [10, 11, 45].

Descrevendo matematicamente o plasma como um sistema bidimensional, o estado de turbulência normalmente contém estruturas coerentes em larga escala como vórtices e zonas de fluxo. Para representar realisticamente o transporte, o modelo deve incluir, além da componente estocástica, estruturas coerentes de larga escala como parte da componente determinística. Para explorar essas estruturas coerentes, supomos que estas são de origem determinística e o fluxo que as provoca descrito por um modelo matemático simples.

Em trabalho recente, analisando a recorrência da turbulência eletrostática em descargas no tokamak TCABR [46], verificou-se que, na região da borda do plasma, predominam os efeitos de instabilidade de origem determinística, enquanto que, à sombra do limitador (Scrap-off-Layer), predominam os efeitos de origem estocástica. Este resultado é muito importante, pois legitima os esforços em representar a dinâmica da borda do plasma através de modelos matemáticos determinísticos, tema deste trabalho.

2.2 Deriva $\vec{E} \times \vec{B}$

O recente entendimento de que sistemas dinâmicos simples, com poucos graus de liberdade, podem exibir comportamento caótico, está mudando a maneira como tratamos os problemas que tradicionalmente têm sido considerados muito complicados para o es-

tudo analítico. As principais características destes sistemas podem ser aproximadas por equações simples com poucos graus de liberdade cujas soluções podem ser estudadas numericamente com as técnicas atualmente disponíveis. O estudo das propriedades estatísticas das flutuações desses sistemas pode revelar algumas de suas características relevantes. Com essa visão, vamos estudar o transporte de partículas do sistema hamiltoniano nesta tese.

As instabilidades provenientes do gradiente de densidade do plasma fornecem um possível mecanismo para o transporte anômalo das partículas eletricamente carregadas através das linhas de campo em dispositivos de confinamento magnético. Enfatizada na literatura, a presença de estruturas coerentes e zonas de fluxo são elementos característicos da mecânica dos fluidos. Elas podem ser devidas à deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, que é um resultado conseqüente do tratamento matemático da teoria das órbitas de partículas, e também deduzida tratando o plasma como um fluido [44]. Como um elemento de fluido é composto por muitas partículas, é natural que este tenha derivas perpendiculares a $\vec{B}$ se cada centro de guia individualmente tiver estas derivas. Para compor este resultado, precisamos considerar a frequência ciclotrônica ω_c e também supor que o sistema é adiabático, o que relaciona o gradiente de pressão com a densidade:

$$\nabla p = \gamma k_B T \nabla n \quad (2.3)$$

onde n é a densidade do plasma e $\gamma = C_p/C_v$ é a razão dos calores específicos a pressão e volume constante.

Para uma partícula carregada em um campo magnético uniforme, temos a equação de movimento dada pela segunda lei de Newton e pela força de Lorentz com o campo elétrico nulo,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

e, conseqüentemente, as partículas giram em torno das linhas de campo magnético com frequência ciclotrônica ω_c

$$\omega_c \equiv \frac{|q|B}{m} \quad (2.4)$$

A equação de movimento de um elemento de fluido no plasma é escrita como

$$mn \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = qn(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \nabla p \quad (2.5)$$

O termo $\partial \vec{v} / \partial t$ da equação acima pode ser desprezado para derivas cujo tempo característico seja bem maior que o período ciclotrônico. A outra aproximação é considerar nulo o termo $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$, porque estamos particularmente interessados em estudar os efeitos lineares de transporte por perturbações eletrostáticas. Outro argumento para desconsiderar o termo não linear $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ vem do fato de que o comprimento de onda das ondas de deriva é bem maior que o comprimento característico do gradiente de densidade.

Tomando o produto vetorial da equação 2.5 com $\vec{B}$, e considerando apenas a velocidade perpendicular ($\vec{v}_\perp$) ao campo magnético, temos

$$0 = qn(\vec{E} \times \vec{B} + (\vec{v}_\perp \times \vec{B}) \times \vec{B}) - \nabla p \times \vec{B}$$

Agora, lembrando que

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

temos

$$qn(\vec{E} \times \vec{B} + (\vec{v}_\perp \cdot \vec{B})\vec{B} - \vec{v}_\perp B^2) - \nabla p \times \vec{B} = 0$$

Como $\vec{v}_\perp \cdot \vec{B} = 0$, isolando a velocidade $\vec{v}_\perp$, obtemos

$$\vec{v}_\perp = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} - \frac{\nabla p \times \vec{B}}{qnB^2} \equiv \vec{v}_E + \vec{v}_d$$

onde

$$\vec{v}_E \equiv \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (2.6)$$

$$\vec{v}_d \equiv -\frac{\gamma k_B T}{eB} \hat{e}_z \times \frac{\nabla n}{n} \quad (2.7)$$

Obtivemos nas equações 2.6 e 2.7, respectivamente, a deriva elétrica e a deriva diamagnética; esta última já com a fórmula 2.3 substituída no gradiente de pressão ∇p .

Tratando o plasma como um fluido, obtemos duas derivas. Um resultado importante obtido experimentalmente [47] aponta que o transporte radial das partículas na borda do plasma se deve principalmente à deriva dada por 2.6. Deste modo, como é este o objeto deste trabalho, consideraremos apenas a deriva elétrica para o desenvolvimento do modelo.

Nesta tese, consideramos o campo magnético na direção toroidal. Assim, outras derivas, que contribuem menos para o transporte, não aparecem na descrição adotada. Entre essas derivas, citamos as causadas pela não uniformidade de $\vec{B}$ e pela sua curvatura [47].

Com a equação 2.6, podemos calcular o transporte de partículas do plasma causado pela deriva sob a influência dos campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Em particular, vamos considerar o caso em que $\vec{E}$ é a superposição de

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) + \vec{E}_1(\vec{r}, t)$$

onde $\vec{E}_0$ é o campo de equilíbrio e $\vec{E}_1(\vec{r}, t)$ é o campo de ondas eletrostáticas de deriva.

Embora nesta tese não consideremos a deriva diamagnética (pois esta tem um efeito muito menor que a deriva proveniente do campo elétrico radial [13]), convém ressaltar que a deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$ será causada em parte por ondas de deriva cuja causa é o gradiente da densidade (ou outras funções do equilíbrio). Assim, não estamos desprezando o efeito do gradiente da densidade no transporte de partículas.

2.3 Ondas de deriva

Medidas de flutuações na borda do plasma indicam a existência de um espectro turbulento com frequências abaixo de 500 kHz. As flutuações de densidade, δn , e do potencial elétrico, $\delta\phi$, possuem grandes amplitudes correspondentes a $\delta n/n \approx 0,1 - 0,3$ e $e\delta\phi/k_B T \approx 0,1$ [7,8].

Atualmente é aceito que o transporte de partículas na borda do plasma em tokamaks é devido à deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$ causado por essa turbulência eletrostática [7,8,48]. Entretanto, apesar do progresso teórico já obtido para interpretar e descrever esse fenômeno físico, ainda não foi proposta uma teoria que explique completamente o conjunto de resultados obtidos em várias experiências realizadas. Por outro lado, o grande avanço experimental que ocorreu com a física de plasmas confinados em tokamaks, a utilização de novos sistemas de diagnósticos e o sucesso dos novos métodos de simulação e análise numéricas propiciaram a obtenção de resultados extremamente precisos sobre a turbulência e o transporte observados. Essa precisão constitui um desafio interessante para a elaboração de novos modelos ou sistemas dinâmicos que expliquem satisfatoriamente os resultados experimentais obtidos sobre o transporte [3,8].

A seguir introduzimos a equação de Hasegawa-Mima, uma das equações que descreve, de forma aproximada, a propagação de ondas de deriva em tokamaks.

No modelo considerado para a obtenção da equação de Hasegawa-Mima, as ondas de deriva são fenômenos de baixa frequência, da ordem de kHz (conforme observado em tokamaks) e, assim, a onda eletrostática se propaga com uma frequência ω muito menor que a frequência ciclotrônica do íon ω_{ci} ,

$$\omega \ll \omega_{ci}$$

Sua velocidade de fase é muito menor que a velocidade térmica do elétron, e o plasma é considerado ionicamente frio

$$(T_i \ll T_e)$$

A condição de quase-neutralidade relaciona as densidades dos íons e dos elétrons

$$n_i \approx n_e$$

sendo que a densidade dos elétrons satisfaz a distribuição de Boltzmann

$$n = n_0 \exp(e\phi/k_B T_e)$$

Na teoria de fluidos, a relação de dispersão, que relaciona os valores da frequência angular ω com o vetor de onda $\vec{k}$, pode ser obtida de forma aproximada. Para o potencial eletrostático ϕ_1 definido como

$$\vec{E}_1 = -\nabla\phi_1(x, y, t)$$

uma dessas aproximações leva à equação de Hasegawa-Mima, apresentada na equação 2.8 já normalizada.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\phi - \phi) - [(\nabla\phi \times \hat{e}_z) \cdot \nabla] \left[\nabla^2\phi - \ln\left(\frac{n_0}{\omega_{ci}}\right) \right] = 0 \quad (2.8)$$

onde ∇ é o gradiente na direção transversal ao campo magnético [7, 49].

A linearização da equação de Hasegawa-Mima possibilita soluções de onda plana propagando-se na direção y com uma amplitude modulada na direção x . Assim, a onda eletrostática pode ser descrita por [11, 45]:

$$\phi_i = A_i \sin(k_{x_i}x) \cos(k_{y_i}y - \omega_i t)$$

e na presença de N ondas de deriva, o potencial eletrostático é

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^N A_i \sin(k_{x_i}x) \cos(k_{y_i}y - \omega_i t) \quad (2.9)$$

onde $\phi_0(x)$ representa o potencial de equilíbrio, propriedade característica do tipo da descarga no tokamak [11, 27, 50].

Com essa solução, temos a relação de dispersão dada por

$$\omega_k = -\frac{1}{1+k^2} \left[(\vec{k} \times \hat{e}_z) \cdot \nabla \ln \left(\frac{n_0}{\omega_{ci}} \right) \right] \quad (2.10)$$

com [7, 49] $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

A escala de comprimento característica da dispersão é dada pelo parâmetro ρ_s , que é dado por:

$$\rho_s = \frac{1}{\omega_{ci}} \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \quad (2.11)$$

Para normalizar a equação 2.8, as coordenadas x e y foram divididas pelo comprimento característico ρ_s , o tempo pelo inverso da frequência ciclotrônica ω_{ci} , e o potencial ϕ por $k_B T_e / e$.

A linearização da equação de Hasegawa-Mima leva à relação de dispersão apresentada, mas a flutuação do potencial elétrico, intermitente e com picos acentuados, indica a presença de efeitos não lineares, como o acoplamento entre alguns modos dominantes. A equação de Hasegawa-Mima, não linear, descreve efeitos desse tipo [51].

As linhas de fluxo, aqui descritas pelas coordenadas x e y do espaço físico, são bidimensionais, sendo o fluxo incompressível. A principal característica da descrição dos fluxos aqui considerados é de exibirem transporte caótico, entendendo que os fluxos não são turbulentos do ponto de vista da descrição de Euler do fluido, mas que as trajetórias Lagrangianas das partículas teste são caóticas, ou seja, elas apresentam sensível dependência às condições iniciais. Deste modo, descrevemos o modelo utilizando o formalismo hamiltoniano, o que será detalhado no capítulo seguinte.

Alguns modelos matemáticos incluem as oscilações do campo magnético acoplando-as às ondas de deriva [52], mas este tipo de acoplamento não é observado em tokamaks [15, 39]. Com isso, outras equações diferentes da equação 2.8 são construídas para descrever as oscilações elétricas e magnéticas.

Nesta tese, vamos considerar o campo magnético uniforme $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$ e, no modelo, a velocidade de deriva das partículas é descrita por 2.6. Aplicando o divergente em 2.6, temos que

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{B^2} \nabla \cdot [B_0 \hat{e}_z \times \nabla \phi]$$

Lembrando da identidade vetorial

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

resulta que

$$\nabla \cdot [B_0 \hat{e}_z \times \nabla \phi] = \nabla \phi \cdot B_0 (\nabla \times \hat{e}_z) - B_0 \hat{e}_z \cdot (\nabla \times \nabla \phi) = 0$$

pois

$$(\nabla \times \hat{e}_z) = (\nabla \times \nabla \phi) = \vec{0}$$

e, deste modo, $\nabla \cdot \vec{v}$ independe da escolha de ϕ . Assim, neste trabalho, o fluido considerado é incompressível.

Na descrição do modelo, usamos o sistema de coordenadas cartesianas, pois consideramos a redução da geometria de toroidal para cilíndrica e, desta, para a plana. Esta aproximação é conhecida na literatura como "slab approximation", aproximação por fatias. Torna-se o primeiro recurso para modelagem matemática, pois as autofunções são normalmente mais simples de ser determinadas e testadas nas equações diferenciais.

Como nos tokamaks o plasma encontra-se contido em uma câmara toroidal, é natural descrever o modelo num sistema de coordenadas toroidais. Entretanto, para facilitar a análise, costuma-se, em grande parte dos casos, simplificar a geometria do sistema. No nosso problema, para fazer a aproximação por fatias, a primeira mudança na geometria é seccionar e remover a curvatura do toróide, transformando-o em um cilindro. Na figura 2.2, apresentamos o processo seguinte, considerado para a aproximação geométrica em que o cilindro é deformado para o plano. Nessa aproximação, usamos coordenadas cartesianas.

Figura 2.2: Aproximação cilíndrica ao plano cartesiano.

O cilindro da figura 2.2 é seccionado da lateral até o centro. Na base, o corte foi indicado pelos pontos $adcb$ e aberto conforme a figura 2.2 II. A direção radial r , indicada pelos pontos da , passa a ser a variável de ação x , enquanto que a direção angular θ , indicada pelos pontos dc , passa a ser a variável y .

Mais uma vez ressaltamos que a aproximação geométrica, de cilíndrica para plana, é válida apenas se considerarmos que as distâncias ad e bc são muito pequenas se comparadas ao comprimento ab . Isso implica que as equações descritas nessa aproximação têm validade apenas para uma camada bem fina do plasma, o que, em nosso modelo, trata-se da borda do plasma.

Capítulo 3

Descrição hamiltoniana do modelo

Neste capítulo apresentamos o modelo de ondas de deriva utilizando o formalismo hamiltoniano. Com uma transformação canônica, obtemos as equações de movimento das partículas numa forma apropriada para ressaltar a dependência temporal do transporte com os parâmetros de controle. Com essa descrição, identificamos as ondas ressonantes e introduzimos o parâmetro de confinamento, que determina as configurações das órbitas no espaço de fase.

3.1 Modelo hamiltoniano de onda de deriva

Conforme apresentado no capítulo anterior, consideramos um campo magnético homogêneo $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$, onde $\hat{e}_z$ é a direção toroidal, e o campo elétrico $\vec{E}$, perpendicular a $\vec{B}$ na direção radial, sendo que $\vec{E} = -\nabla\phi(x, y, t)$. A velocidade de deriva elétrica v_E é determinada por:

$$\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (3.1)$$

Desenvolvendo as expressões para $\nabla\phi(x, y, t)$, temos

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial y} \phi(x, y, t) \quad \text{e} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y, t) \quad (3.2)$$

As equações de Hamilton são dadas por

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}H(x, y, t) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}H(x, y, t) \quad (3.3)$$

Comparando as equações 3.3 com 3.2, definimos a hamiltoniana do nosso sistema como

$$H(x, y, t) = \frac{\phi(x, y, t)}{B_0} \quad (3.4)$$

Deste modo, x e y formam o par momento-coordenada. Devido à forma das equações de Hamilton, temos que y é a coordenada e x é o momento associado.

O perfil do potencial utilizado para o estudo é dado por:

$$\phi(x, y, t) = \phi_0(x) + \sum_{i=1}^N A_i \sin(k_{x_i}x) \cos(k_{y_i}y - \omega_i t) \quad (3.5)$$

Estamos considerando o potencial $\phi(x, y, t)$ como uma superposição dos potenciais de equilíbrio $\phi_0(x)$ e do potencial $\phi_1(x, y - \omega t)$ que representa uma superposição de ondas eletrostáticas que se propagam na direção poloidal y com uma modulação na direção radial x . Essas ondas eletrostáticas representam as ondas de deriva.

Para realizar o estudo analítico e principalmente o numérico, faz-se necessário primeiramente reescrever as equações normalizadas em relação aos parâmetros característicos do sistema estudado. Os parâmetros característicos são dados pelo campo elétrico radial de equilíbrio E_0 , pelo campo magnético toroidal de equilíbrio B_0 , e pelo raio do plasma a . A partir destes parâmetros, escrevemos a velocidade característica $v_0 = E_0/B_0$ e o tempo característico $t_0 = a/E_0$, e deste modo definimos as novas variáveis adimensionais:

$$x' = \frac{x}{a} \quad y' = \frac{y}{a} \quad t' = \frac{t}{t_0} \quad \omega' = \omega_i t_0 \quad u' = \frac{u}{v_0} \quad A'_i = \frac{A_i}{E_0 a} \quad k'_i = k_i a$$

Substituindo-as na equação 3.5,

$$\phi(x', y', t') = \phi_0(x') + \sum_{i=1}^N A'_i E_0 a \sin\left(\frac{k'_{x_i}}{a} x' a\right) \cos\left(\frac{k'_{y_i}}{a} y' a - \frac{\omega'_i}{t_0} t' t_0\right)$$

Após as devidas simplificações, obtemos

$$\phi(x', y', t') = E_0 a \left[\frac{\phi_0(x')}{E_0 a} + \sum_{i=1}^N A'_i \sin(k'_{x_i} x') \cos(k'_{y_i} y' - \omega'_i t') \right]$$

e então,

$$\phi(x', y', t') = E_0 a \left[\phi'_0(x') + \sum_{i=1}^N A'_i \sin(k'_{x_i} x') \cos(k'_{y_i} y' - \omega'_i t') \right]$$

A relação entre as hamiltonianas é dada por

$$H(x, y, t) = \frac{E_0 a}{B_0} \phi'(x', y', t') \quad (3.6)$$

Podemos notar que a relação entre a hamiltoniana física e a normalizada se dá pelo fator $E_0 a$, ficando claro que o potencial $\phi'(x', y', t')$ é a nova hamiltoniana adimensionalizada. Pela análise dimensional da hamiltoniana H , constatamos que $[H] = m^2/s$, expressando a unidade típica de difusão.

A partir de agora, omitiremos a indicação de linha das expressões, trabalhando com as equações já normalizadas.

3.2 Mudança para o referencial de uma onda

Passamos para o estudo da hamiltoniana, investigando as condições necessárias para a integrabilidade do sistema e o surgimento de caos. Consideramos agora a expressão normalizada de ϕ da expressão 3.5 com apenas uma onda ($N = 1$). Nesse caso, temos a hamiltoniana

$$H(x, y, t) = \phi_0(x) + A \sin(k_x x) \cos(k_y y - \omega t) \quad (3.7)$$

Observamos que essa hamiltoniana tem um grau e meio de liberdade, ou seja, ela depende das coordenadas (x, y) , formando o par canônico momento-coordenada, e a dependência explícita com o tempo t . Procuramos então uma transformação canônica de modo a simplificar as equações, identificando se estas são integráveis.

Definindo a nova variável

$$y' = y - u_1 t = \frac{\partial F(x', y, t)}{\partial x'}$$

onde

$$u_1 = \omega_1 / k_{y1}$$

é a velocidade de fase da primeira onda.

Segue-se então que a função geratriz é dada por $F(x', y, t) = x'(y - u_1 t)$.

A nova hamiltoniana, descrita pelas novas coordenadas x' e y' , é

$$H'(x', y') = \phi(x', y') + \frac{\partial F}{\partial t} = \phi(x', y') - u_1 x'$$

assim como

$$x = \frac{\partial F}{\partial y} = x'$$

Portanto

$$H(x', y') = \phi_0(x') - u_1 x' + A \sin(k_x x') \cos(k_y y') \quad (3.8)$$

O termo $-u_1 x'$ da equação 3.8 corresponde ao potencial elétrico introduzido pela mudança de referencial do laboratório para o da onda. Como não há dependência explícita de H com o tempo no referencial em movimento, a hamiltoniana é uma constante de movimento, o sistema é integrável, e as trajetórias das partículas no referencial da onda repousam sobre as curvas onde a hamiltoniana é constante.

Novamente omitiremos as linhas, já considerando todo o conjunto sendo representado neste novo referencial.

3.3 Parâmetro de confinamento

De posse da nova hamiltoniana, observamos que está determinada por um conjunto de parâmetros relativos à sua descrição ondulatória. Para direcionar e simplificar o estudo, torna-se importante escrever as expressões com um número reduzido de parâmetros e, a partir destes, encontrar tópicos importantes relativos ao problema estudado. Procuramos, utilizando os conceitos físicos, encontrar argumentos que possam direcionar este estudo.

Assim, vamos inicialmente escrever as equações de Hamilton nas coordenadas normalizadas x e y :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (3.9)$$

para

$$H(x, y) = \phi_0(x) - u_1 x + A \sin(k_x x) \cos(k_y y) \quad (3.10)$$

Substituindo 3.10 em 3.9, temos para dx/dt

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = - \left[\frac{\partial \phi_0(x)}{\partial y} - A_1 k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \right]$$

como $\partial \phi_0(x)/\partial y = 0$,

$$-\frac{\partial H}{\partial y} = [A_1 k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y)]$$

Da mesma maneira, temos para dy/dt

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left[\frac{d\phi_0(x)}{dx} - u_1 + A_1 k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \right]$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx}{dt} = A_1 k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad (3.11)$$

$$\frac{dy}{dt} = \left[\frac{d\phi_0(x)}{dx} - u_1 + A_1 k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \right] \quad (3.12)$$

Fazendo a mudança de variável $X = k_x x$ e $Y = k_y y$, temos para equação 3.11

$$\frac{1}{k_x} \frac{dX}{dt} = A_1 k_y \sin X \sin Y$$

então

$$\frac{1}{A_1 k_x k_y} \frac{dX}{dt} = \sin X \sin Y$$

Já na equação 3.12,

$$\frac{1}{k_y} \frac{dY}{dt} = \frac{d\phi_0(x)}{dx} - u_1 + A_1 k_x \cos X \cos Y$$

$$\frac{1}{A_1 k_x k_y} \frac{dY}{dt} = \frac{1}{A_1 k_x} \left[\frac{d\phi_0(x)}{dx} - u_1 \right] + \cos X \cos Y$$

Em consequência da mudança de variáveis espaciais X e Y , definimos que a variável tempo será escrita como $\tau = \omega_b t$, onde $\omega_b = A_1 k_x k_y$, e assim o sistema de equações 3.11, 3.12 fica escrito como se segue:

$$\frac{dX}{d\tau} = \sin X \sin Y \quad (3.13)$$

$$\frac{dY}{d\tau} = U(x) + \cos X \cos Y \quad (3.14)$$

sendo que

$$U(x) = \frac{1}{A_1 k_x} \left[\frac{d\phi_0(x)}{dx} - u_1 \right] \quad (3.15)$$

Deste modo, conseguimos concentrar o conjunto A_1 , k_x e $u_1 = \omega/k_y$ a um único parâmetro relevante para descrição do espaço de fase e estudo analítico do modelo. Definimos $U(x)$ como o parâmetro de confinamento. É importante notar que esse parâmetro depende do campo elétrico radial de equilíbrio e da velocidade de fase da primeira onda. Mais que isso, U depende da soma dessas duas grandezas.

Assim, a velocidade de deriva

$$\vec{v}_{E_0} = \frac{\vec{E}_0 \times \vec{B}_0}{B_0^2}$$

dos campos de equilíbrio $\vec{E}_0 = E_0 \hat{e}_x$ e $\vec{B}_0 = B_0 \hat{e}_z$ na representação utilizada é

$$\vec{v}_{E_0} = \frac{1}{B_0} \frac{d\phi_0(x)}{dx} \hat{e}_y$$

Nessa representação, a velocidade de fase da primeira onda é

$$\vec{v}_{fase} = u_1 \hat{e}_y$$

portanto $U = 0$ para

$$\vec{v}_{fase} = \vec{v}_{E_0}$$

Outro aspecto relevante do parâmetro de confinamento é o de estar relacionado com a derivada radial do potencial de equilíbrio, ou seja, com o campo elétrico radial.

Além disto, notamos que, ao considerarmos apenas o potencial de equilíbrio ϕ_0 (sem ondas), obtemos a frequência

$$\omega_0 = dH_0/dx = d\phi_0/dx \quad (3.16)$$

e, portanto, concluímos que a primeira onda tem uma frequência ressonante se $u_1 = \omega_0$ (levando-nos para o caso em que $U = 0$), ou seja, se a velocidade de fase for igual à frequência angular do equilíbrio.

Os potenciais estudados neste trabalho são:

Caso I: $\phi_0(x) = Ax$

Caso II: $\phi_0(x) = Ax^2 + Bx$

Caso III: $\phi_0(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

e, para cada um deles, calculamos a condição de ressonância.

Então, pela teoria da perturbação [53], temos que

$$H = H_0 + H_1 \quad \frac{H_1}{H_0} \ll 1$$

Retomando a equação 3.7 com uma onda, temos que ϕ_0 segue os casos citados acima, e

$$H_1 = A \sin(k_x x) \cos(k_y y - \omega t)$$

A velocidade de fase u_1 é obtida pela condição

$$\frac{d}{dt}(k_y y - \omega t) = 0$$

então

$$k_y \dot{y} - \omega = 0 \Rightarrow \dot{y} = \frac{\omega}{k_y} = u_1$$

que é a velocidade de fase da onda.

Sabendo das equações de Hamilton que $\dot{y} = dH_0/dx$, temos que a condição de ressonância ocorre para

$$\frac{d\phi_0}{dx} - u_1 = 0 \quad (3.17)$$

que corresponde a $U = 0$. Portanto, podemos antever que o valor nulo do parâmetro de confinamento será importante na análise das órbitas. A onda com velocidade de fase satisfazendo a condição 3.17 será considerada ressonante e deve contribuir bastante para o transporte.

Temos, então, para os potenciais considerados,

Caso I: $\omega_0 = A$, que independe da coordenada x

Caso II: $\omega_0 = 2Ax + B$, possui apenas uma ressonância em x^*

Caso III: $\omega_0 = 3Ax^2 + Bx + C$, possui duas ressonâncias em $x_{1,2}^*$

Quando considerado apenas o potencial de equilíbrio ϕ_0 , o produto $\vec{E} \times \vec{B}$ produz a deriva na direção poloidal, conseqüentemente a condição para que os centros de guia fiquem confinados é $dy/dt = 0$. Para o termo referente às ondas de deriva, ϕ_1 , que induzem o transporte na direção radial, tomamos $dx/dt = 0$. Nestas condições, os centros de guia executarão o movimento em $\hat{e}_z$ seguindo as linhas de campo magnético toroidal. Em outras palavras, estamos determinando os pontos fixos do sistema.

Tomando as derivadas iguais a zero

$$\frac{dX}{d\tau} = \sin X \sin Y = 0$$

$$\frac{dY}{d\tau} = U(x) + \cos X \cos Y = 0$$

Na condição de ressonância em que $U = 0$, obtemos:

Pontos fixos hiperbólicos: $X = m\pi$, $Y = (2n + 1)\pi/2$.

Pontos fixos elípticos: $X = (2n + 1)\pi/2$, $Y = m\pi$.

onde

$$m, n \in \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

3.4 Modelo de duas ondas e o transporte

Com uma onda encontramos uma função geratriz $F(x', y, t)$ que reduziu o sistema de um grau e meio de liberdade para um, preservando a estrutura das equações de Hamilton. Agora com o par canônico de variáveis y e x temos uma constante de movimento dada por ϕ e portanto as equações são integráveis e não aparece caos no espaço de fase.

Assim, o comportamento caótico dos centros de guia só aparece quando adicionamos mais uma onda. Desta maneira não é possível encontrar uma transformação canônica de modo a reduzir a dimensão do sistema e portanto não há solução analítica para a função geratriz.

A hamiltoniana com duas ondas é dada por:

$$H(x, y, t) = \phi_0(x) + A_1 \sin(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y - \omega_1 t) + A_2 \sin(k_{x2}x) \cos(k_{y2}y - \omega_2 t)$$

Novamente, fazendo a mudança de referencial para a onda de índice 1, $y' = y - u_1 t$, e repetindo o processo matemático realizado na seção 3.2, temos que a nova hamiltoniana para duas ondas:

$$H(x, y, t) = \phi_0(x) - u_1 x + A_1 \sin(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y) + A_2 \sin(k_{x2}x) \cos(k_{y2}(y - ut)) \quad (3.18)$$

onde $u_1 = \omega_1/k_{y1}$ é a velocidade de fase da onda de índice 1, e $u = \omega_2/k_{y2} - \omega_1/k_{y1}$ é a diferença de velocidade de fase entre a primeira e a segunda onda.

No decorrer deste trabalho passamos a chamar a onda de índice 1, que não carrega a variável t na fase do cosseno, como primeira onda e, a de índice 2, como segunda onda.

Notamos que é importante para o surgimento do caos que u (diferença de velocidades de fase) seja diferente de zero, pois, se assim não for, a fase da segunda onda se anula, visto que some a dependência temporal do sistema e o sistema passa a ser integrável.

A determinação do transporte radial de partículas induzido por flutuações é feita através da correlação entre as flutuações da densidade e da velocidade radial das partículas carregadas do plasma. Como a flutuação da velocidade radial é consequência da deriva, então o transporte de partículas é determinado através da correlação entre as flutuações da densidade e do campo elétrico. Em alguns tokamaks como o TEXT, uma comparação feita entre o transporte global de partículas e o transporte de partículas induzido por flutuações na borda do plasma mostrou que este último é o principal responsável pela perda de partículas [13, 47]. As flutuações magnéticas também contribuem para o transporte de partículas. Entretanto, medidas realizadas em tokamaks mostram que este transporte é muito pequeno quando comparado ao transporte de partículas induzido pelas flutuações eletrostáticas e, portanto, pode ser desprezado [13, 47].

As oscilações eletrostáticas do plasma na borda do tokamak constituem um estado turbulento. Esse estado é uma mistura de uma componente estocástica e uma outra determinística com estruturas coerentes como fluxos e vórtices [18, 26, 27]. Essa componente determinística pode ser aproximadamente descrita por um sistema dinâmico bidimensional e, dada esta descrição, analisamos o transporte causado por essa componente determinística.

Neste trabalho, a componente determinística do plasma é descrita por um modelo bidimensional de um plasma em um campo magnético uniforme (na direção correspondente à direção toroidal do tokamak) e um campo elétrico unidimensional (dependente da coordenada correspondente à coordenada radial de uma seção poloidal do tokamak).

Esses campos produzem um fluxo de deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$, com transporte caótico de partículas. Ou seja, o fluxo considerado não é turbulento, na descrição de Euler, mas as trajetórias das partículas testes são caóticas na descrição de Lagrange, uma vez que elas são sensíveis às condições iniciais [11]. Assim, a existência de órbitas caóticas é devida a variação espacial e temporal do fluxo.

No modelo que usamos, a existência do transporte radial de partículas pode ser confirmada calculando-se numericamente o coeficiente de difusão. Para isto, calculamos primeiro o desvio quadrático médio da ordenada de cada órbita em relação à posição inicial, ou seja, para cada tempo t calculou-se a média do desvio em relação à posição inicial, somaram-se os desvios e tirou-se a média, conforme indicado na equação 3.19.

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i(t) - x_i(0))^2 \quad (3.19)$$

onde N é o número total de partículas consideradas no cálculo.

A partir da equação 3.19, calculamos o coeficiente de difusão temporal,

$$D_x(t) = \frac{1}{2t} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i(t) - x_i(0))^2 \quad (3.20)$$

cujo limite para $t \rightarrow \infty$ corresponde ao coeficiente de difusão $\langle D_x \rangle$.

O crescimento com o tempo do desvio quadrático médio σ^2 de um conjunto de partículas de teste em uma região estocástica caracteriza o tipo de transporte. A relação da expressão 3.19 com o tempo é

$$\sigma^2(t) \approx t^\gamma \quad (3.21)$$

onde o expoente γ indica se o sistema é difusivo, subdifusivo ou superdifusivo. Para $\gamma = 1$, as partículas descrevem um movimento difusivo, cuja distribuição do desloca-

mento é gaussiana. Quando o resultado numérico relacionado ao transporte exibe difusão anômala, $\gamma > 1$, o processo é superdifusivo, conseqüentemente, o cálculo da difusão utilizando a fórmula 3.20 diverge e o transporte $\vec{E} \times \vec{B}$ não pode ser modelado como um processo difusivo.

Na prática, utilizar a expressão 3.20 exige um tempo muito longo para a integração, contudo isto nem sempre é necessário, uma vez que já foi observada a convergência e, deste modo, assegurado que o transporte é difusivo. No entanto, entre as partículas podem existir algumas com características superdifusivas que só são observadas no gráfico, construído a partir da equação de difusão 3.20, quando este diverge depois de um tempo muito longo.

Uma outra maneira de verificar a existência de transporte consiste em analisar o histograma construído a partir dos deslocamentos Δx em sucessivos intervalos de tempo constantes Δt , para um conjunto de partículas. Em seguida, faz-se o ajuste da curva gaussiana sobre o histograma e calcula-se a curtose e a assimetria. A partir do ajuste da função gaussiana, verifica-se se as barras, que se encontram nos extremos do histograma, acompanham o decaimento exponencial da curva ajustada. Se as barras se encontram acima da curva, estes são indicativos da existência do transporte superdifusivo, enquanto que, abaixo da curva ajustada, o transporte é subdifusivo.

Calcula-se a assimetria β e a curtose κ através das seguintes expressões:

$$\beta = \frac{\langle (x_i - \bar{x})^3 \rangle}{(\sigma^2)^{3/2}} \quad (3.22)$$

$$\kappa = \frac{\langle (x_i - \bar{x})^4 \rangle}{(\sigma^2)^2} \quad (3.23)$$

Pela assimetria β , podemos constatar a existência de uma deriva preferencial na direção radial para dentro ou para fora do plasma, esta ocorre quando $\beta \neq 0$. A curtose κ indica se a distribuição dos pontos segue uma gaussiana. Isto ocorre, segundo a equação 3.23, para $\kappa = 3$. Valores de κ maiores que três indicam que uma parte do conjunto de dados

não corresponde a uma distribuição normal e a função densidade de probabilidade pode ser uma lei de potência.

Em conclusão, neste capítulo apresentamos a descrição hamiltoniana das trajetórias das partículas no plasma com fluxo poloidal e ondas de deriva. Apresentamos também a metodologia para calcular o transporte a partir das trajetórias das partículas.

Capítulo 4

Campo Elétrico Uniforme

Apresentamos, neste capítulo, as configurações possíveis das linhas de fluxo, perturbadas pelas ondas de deriva, em relação ao parâmetro de confinamento quando o perfil do potencial elétrico de equilíbrio é linear. Em grande parte da literatura, o perfil de potencial linear foi, sem qualquer dúvida no que tange ao transporte, o mais estudado [10, 11, 43, 45, 50].

Esse foi o potencial considerado em nossa dissertação de mestrado [43]. A importância em apresentá-lo aqui se deve ao fato de que para os demais perfis de ϕ_0 , que apresentaremos neste trabalho, o parâmetro de confinamento não uniforme assume valores que localmente reproduzem a mesma configuração das linhas de fluxo com U uniforme. Além disso, novos resultados foram obtidos no que tange à interação de duas ondas.

4.1 Configuração das linhas de fluxo

Conforme visto no capítulo anterior, a equação 3.15 relaciona o parâmetro de confinamento com o perfil do potencial de equilíbrio. Como o potencial é uma função linear da coordenada radial, o coeficiente angular é o campo elétrico de equilíbrio, ou seja, $A \equiv E_0$. Assim, quando $\phi_0(x) = E_0x$ é substituído em 3.15, obtemos a seguinte expressão:

$$U(x) = \frac{E_0 - u_1}{A_1 k_x} \quad (4.1)$$

ou seja, não existe variação de U com a coordenada x , sendo aquela uma constante por todo o espaço de fase.

A importância do valor desse parâmetro U para o transporte e a ressonância em $U = 0$ (condição 3.17) foi apontada em alguns trabalhos anteriores [10, 11, 54].

Deste ponto, selecionando valores para E_0 , A_1 , k_x , ω_1 e k_y , encontramos (analítica ou numericamente) as possíveis configurações das linhas de fluxo quando o sistema se encontra com apenas uma onda de deriva, ou seja, $A_2 = 0$. As mudanças na topologia do espaço de fase estão relacionadas com o valor do parâmetro de confinamento, conforme a equação 4.1, dado pelos parâmetros acima. Escolhemos relacionar as mudanças de U com o valor do campo elétrico E_0 por este alterar as linhas de fluxo, mas preservando a coordenada y dos pontos elípticos.

Chamamos a atenção para a nomenclatura usada para os eixos cartesianos diferente da convencional que adota o símbolo x para o eixo das abscissas e y para as ordenadas. Lembramos que, devido à mudança de geometria do cilindro para o plano e da analogia com as equações de Hamilton, x está associado ao raio do plasma que é a nossa variável correspondente ao momento canônico, e y ao ângulo poloidal (periódico em 2π), que é a coordenada canônica.

Integramos numericamente as órbitas das partículas para pontos iniciais demarcados na figura 4.1 por $\times$. A grade de pontos iniciais foi escolhida criteriosamente para tornar visíveis as principais características do espaço de fase que estamos apresentando e permaneceu sempre a mesma em todas as simulações numéricas deste capítulo. Fica evidente que a escolha dos pontos iniciais para desenhar as linhas de fluxo é arbitrária e útil para visualizar a configuração das linhas de fluxo.

Conforme apresentado no capítulo anterior, observamos nitidamente, na figura 4.1A, os pontos elípticos ($X = (2n+1)\pi/2$, $Y = m\pi$) e hiperbólicos ($X = m\pi$, $Y = (2n+1)\pi/2$) quando o parâmetro de confinamento $U = 0$. Em torno dos pontos elípticos temos órbitas fechadas e o conjunto de células separadas pela separatriz onde encontramos os pontos hiperbólicos.

Figura 4.1: Com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0$, apresentamos, de cima para baixo, o espaço de fase para $U = 0$, $U = 0,5$, $U = 1,5$.

Mudando o valor do campo elétrico radial E_0 , obtemos, pela equação 4.1, o valor para o parâmetro $U = 0,5$ que está representado graficamente pela figura 4.1B. A bifurcação

é bem visível na mudança topológica do espaço de fase, pois o sistema que, para $U = 0$, tinha apenas órbitas confinadas, passou a apresentar órbitas livres, na direção y , para $U = 0,5$. Um aspecto importante é a presença da separatriz na direção radial (x) para $U = 0$. Com a mudança de U , observamos que os pontos elípticos preservam sua posição no eixo y , mas aproximam-se aos pares na direção radial.

A primeira mudança sensível na topologia vem com o desaparecimento da separatriz na direção radial, quando o parâmetro de confinamento é ligeiramente maior que zero. Gradativamente com o aumento de U , linhas de fluxo, que antes estavam fechadas, passam a percorrer todo o eixo horizontal com adquirida ondulação e os pontos elípticos vão se aproximando na direção vertical. Esta alteração na configuração do espaço de fase permanece praticamente a mesma até $U = 1$, quando ocorre a segunda bifurcação.

Assim, para $U > 1$, temos todas as linhas de fluxo abertas e onduladas, conforme apresentado na figura 4.1C, feita com $U = 1,5$; notamos a completa ausência de curvas fechadas, todas que assim estavam passaram a percorrer o espaço de fase na direção poloidal y .

Neste ponto fica claro o significado da condição de ressonância, $U = 0$, calculada no capítulo anterior. Para $U = 0$ determinamos que a frequência $\omega_0 = E_0$ (equação 3.16), ou seja, constante por todo o espaço de fase. Assim, as ilhas e as linhas de fluxo assinaladas na figura 4.1 repetem este padrão indefinidamente.

4.2 Duas ondas e o transporte

Com o entendimento das configurações das linhas de fluxo para o perfil do potencial linear, passamos agora a analisar o comportamento destas linhas quando a segunda onda é adicionada.

Devemos manter em mente que nosso interesse é relacionar as três configurações do espaço de fase conseqüentes do parâmetro de confinamento, apresentadas na secção anterior, com o transporte que está ligado à presença de caos.

Na figura 4.2, apresentamos os mesmos espaços de fase da figura 4.1 após adicionar a segunda onda, ou seja, sem alterar os parâmetros pertinentes à primeira onda e utilizando a mesma grade de pontos iniciais. Lembrando que designamos como primeira onda aquela em que não aparece a dependência temporal dada a transformação canônica utilizada (equação 3.8), sendo a segunda onda a de fase dependente do tempo, responsável pela perturbação do sistema hamiltoniano integrável.

Na tabela 4.1, apresentamos os parâmetros das ondas utilizados para o cálculo numérico neste capítulo. Na investigação numérica das propriedades de um sistema não linear escolhem-se os valores dos parâmetros de modo a destacar as principais propriedades do sistema. Embora tenhamos liberdade de escolha, restringimo-nos a utilizar valores que não fossem distantes daqueles obtidos experimentalmente. Uma referência para a escolha destes parâmetros encontra-se em [43].

Parâmetros das ondas	Primeira onda $i = 1$	Segunda onda $i = 2$
Frequência angular ω_i	3,0	4,0
Número de onda k_{xi}	20,0	11,5
Número de onda k_{yi}	3,0	2,8

Tabela 4.1: Tabela com os parâmetros das ondas usados para o cálculo numérico.

Com a adição da segunda onda com a razão das amplitudes de $A_2/A_1 = 0,1$, observamos que a destruição do fluxo se faz mais intensa na figura 4.2A, onde o parâmetro de confinamento $U = 0$. A separatriz é a primeira a sofrer a interferência da segunda onda, sendo que a perturbação induz ao caos em todo o espaço de fase. Apenas algumas ilhas preservaram aproximadamente suas órbitas pela variação periódica $\sin(k_{x2}x)$ da amplitude da segunda onda com x ; as órbitas foram preservadas nas células em que essa amplitude foi menor. Uma partícula, situada em uma região distante do centro da ilha, desprende-se e passa a percorrer o espaço de fase ao longo da separatriz, até novamente sofrer influência da perturbação e sua trajetória circundar, possivelmente, um outro ponto elíptico e sucessivamente retornando à separatriz. Isto ocorre para todos os centros de guia em tempos distintos e, deste modo, a sensibilidade das partículas à presença da se-

gunda onda aumenta dos pontos elípticos aos hiperbólicos.

Figura 4.2: Com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,1$, apresentamos, de cima para baixo, o espaço de fase para $U = 0$, $U = 0,5$, $U = 1,5$.

Seguindo para a figura 4.2B, onde tínhamos o conjunto misto de órbitas abertas e

fechadas, a adição da segunda onda provocou maior instabilidade nas ilhas onde a sua amplitude é maior, e isto é observado nas regiões onde o caos é mais intenso. Destaca-se também a limitação dada ao caos nestas regiões. Observamos que um ponto que estava com sua trajetória fechada, ao sofrer a interação da segunda onda, passou a descrever o movimento caótico restrito ao local onde estava, tendo como únicas possibilidades deslocar-se para as ilhas que se encontram na direção poloidal y , para a direita ou para a esquerda. A partícula que se encontra na trajetória aberta apenas flutua sobre esta, preservando seu movimento, sem qualquer deslocamento efetivo na direção radial.

Aqui destacamos um aspecto importante no transporte radial. Com o parâmetro de confinamento $U = 0$, os centros de guia têm liberdade de percorrer todo o espaço de fase quando perturbado pela segunda onda. No entanto, isto não ocorre para $U > 0$, o movimento fica limitado à região onde se encontram as ilhas, não se deslocando para ilhas que estão acima ou abaixo. Para esta configuração de onda, com a razão das amplitudes das ondas $A_2/A_1 = 0,1$, as trajetórias abertas formam barreiras impedindo o deslocamento dos centros de guia na direção radial. Estas barreiras podem ser quebradas com o aumento da amplitude da onda perturbadora, respeitando um certo limite como será visto a posteriori. Portanto, o confinamento local fica atrelado ao valor de U e à intensidade da segunda onda.

Com maior intensidade, a descrição do parágrafo anterior é válida para a figura 4.2C, com a ressalva que, neste caso, não existem ilhas e o deslocamento se faz exclusivamente na direção poloidal independentemente da amplitude da segunda onda, constatando a robustez que a barreira adquire para impedir o deslocamento radial das partículas quando $U > 1$.

Conforme foi apresentado anteriormente, o confinamento do plasma em tokamaks é prejudicado pela perda de partículas que atingem a parede da câmara. Agora temos a clara distinção da importância que o parâmetro de confinamento representa no retrato de fase para o transporte dos centros de guia. Na condição ressonante em que $U = 0$, temos caos predominante no sistema e a este associamos os efeitos da turbulência das ondas de deriva no transporte.

Figura 4.3: Limite do coeficiente de difusão temporal (equação 3.20) em função do parâmetro de confinamento U . Apresentamos as amplitudes $A_2/A_1 = 0,1$ em preto, $A_2/A_1 = 0,3$ em azul e $A_2/A_1 = 0,8$ em verde.

Para ilustrar a importância do parâmetro de confinamento e da perturbação que a segunda onda provoca nas partículas, apresentamos, no gráfico 4.3, a relação entre o coeficiente de difusão, calculado segundo a equação 3.20, e o parâmetro U para três diferentes amplitudes: $A_2/A_1 = 0,1$ em preto, $A_2/A_1 = 0,3$ em azul e $A_2/A_1 = 0,8$ em verde. Observamos que o pico central está em $U = 0$ indicando que a difusão é mais intensa neste valor, decaindo assintoticamente a zero para valores em que $|U| > 0$.

Lembrando que consideramos como perturbação a segunda onda, não faz muito sentido $A_2 > A_1$, pois, neste caso, a segunda onda seria a onda predominante no sistema.

Verificamos também que ocorreu a convergência esperada conforme a expressão 3.20, e mostrada na figura 4.4 para $A_2/A_1 = 0,1$.

Restringimo-nos agora à condição ressonante (com $U = 0$) para avaliar o comportamento do transporte em função dos parâmetros contidos em U . Dentre eles, apresentamos, na figura 4.5, o coeficiente de difusão radial em função da razão entre as amplitudes das duas ondas (para $U = 0$).

Para a construção deste gráfico, apenas variamos a amplitude da segunda onda, man-

Figura 4.4: Coeficiente de difusão em função do tempo para $U = 0$ e a razão entre as amplitudes dada por $A_2/A_1 = 0,1$

Figura 4.5: Coeficiente de difusão em função da amplitude das ondas A_2/A_1 , com $U = 0$.

tendo a primeira constante, pois, baseados nos gráficos de função espectral de medições experimentais em tokamaks, atribuímos a frequência de maior intensidade à primeira onda. Conforme podemos observar, a difusão cresce com o aumento da amplitude até atingir o valor máximo de $\langle D_x \rangle$ em $A_2/A_1 = 0,55$, para depois oscilar entre valores menores até $A_2/A_1 = 1,0$. Neste percurso aparecem valores mínimos localizados para $\langle D_x \rangle$ em que A_2/A_1 é igual a 0,15, 0,45, 0,7, e 0,9 e, ao contrário do que se poderia esperar, a difusão não aumenta indefinidamente com o aumento da amplitude A_2 .

Figura 4.6: Coeficiente de difusão em função do parâmetro de confinamento U . Apresentamos as amplitudes $A_2/A_1 = 0,1$ em preto, $A_2/A_1 = 0,4$ em vermelho, $A_2/A_1 = 0,6$ em verde e $A_2/A_1 = 0,8$ em azul. Com o aumento da amplitude da segunda onda o máximo da difusão se desloca.

A explicação para a queda no valor de $\langle D_x \rangle$ quando $A_2/A_1 > 0,55$ pode ser vista na figura 4.6, onde apresentamos o coeficiente de difusão em função do parâmetro de confinamento, e ampliamos a região onde aparecem os máximos da difusão. Na cor preta temos a relação entre as ondas dada por $A_2/A_1 = 0,1$, na cor vermelha por $A_2/A_1 = 0,4$, $A_2/A_1 = 0,6$ na cor verde e $A_2/A_1 = 0,8$ na cor azul. Destacamos que os máximos vão se deslocando para direita conforme aumenta a intensidade da segunda onda. Isto indica que a atividade da segunda onda modifica a topologia do espaço de fase, e a grade de ilhas consideradas para o sistema deixa de valer. Por isso, para a construção do gráfico 4.5, não foram tomados os valores onde a difusão é máxima, mas onde $U = 0$.

O deslocamento do pico apresentado na figura 4.6 foi pequeno, mas o suficiente para mudar a configuração construída pela primeira onda e alterar o cálculo da difusão conforme a figura 4.5.

Na figura 4.7, apresentamos o coeficiente de difusão em função do parâmetro de confinamento U para várias escolhas das velocidades de fase u_2 . Observamos que o coeficiente de difusão é maior quando as velocidades de fase u_1 e u_2 são próximas. Quanto maior a diferença de velocidade das ondas, mais o máximo da difusão se desloca, ao mesmo tempo

em que diminui a intensidade com que a onda contribui para o transporte.

Figura 4.7: Coeficiente de difusão em função do parâmetro de confinamento U com $A_2/A_1 = 0,8$. Com as velocidades de fase da primeira onda dadas por $u_1 = 1,0$, e da segunda onda dadas por $u_2 = 1,4$ em preto, $u_2 = 2,0$ em azul e $u_2 = 4,0$ em verde.

Além da relação entre as amplitudes das ondas para contribuição no transporte radial, outro parâmetro analisado separadamente foi o número de onda radial k_{x2} . A conexão deste com a difusão deve-se à superposição das ondas, que transferem energia às partículas. Isto está representado na figura 4.8, onde se variou o número de onda k_{x2} mantendo fixo o da primeira onda em $k_{x1} = 20$. Notamos que a difusão é menor nos valores de k_{x2} múltiplos de 5, e mais intensa próxima a este valor.

Podemos imaginar que, assim como a primeira onda, a onda perturbadora em seu referencial tem também ilhas envoltas pela separatriz. Quando as duas ondas atuam simultaneamente no espaço de fase ocorre a superposição das ilhas. Estando em fase, elas geram linhas de fluxo concêntricas em torno dos pontos elípticos, e deste modo interferem construtivamente, melhorando o confinamento. Este é o caso quando k_{x2} é um múltiplo de 5. Calculamos que a difusão é máxima para a razão $k_{x2}/k_{x1} = 0,935$.

A redução no transporte deve-se ao fato de a superposição das ondas neste valor do número de onda e de mesma fase contribuir para que as partículas permaneçam em suas

Figura 4.8: Coeficiente de difusão em função do número de onda radial k_{x2} com $U = 0$ e $A_2/A_1 = 0,4$.

órbitas em torno dos pontos fixos. Para os valores muito próximos de 5, temos os efeitos de batimento, que a cada período corresponde ao valor médio da diferença entre as frequências, a partícula ganha um impulso deslocando-se através das linhas fechadas em torno dos pontos fixos funcionando como um impulso ("kick")

Figura 4.9: Coeficiente de difusão em função do número de onda poloidal k_{y2} , com $U = 0$.

O mesmo estudo foi feito para o número de onda angular, mas os resultados não fo-

ram muito expressivos. Conforme mostra a figura 4.9, não houve variação significativa no coeficiente de difusão, ou mesmo alguma simetria que pudesse ser explorada. O sentido de propagação da onda com $k_{y2} < 0$ poderia interferir no sentido de rotação das ilhas retardando a velocidade destas, mas o valor de $\langle D_x \rangle$ permaneceu flutuando entre 1 e 3, similar ao que observamos para $k_{y2} > 0$, à exceção do pico em que o valor da difusão dobra em relação à média. Contudo, como já verificamos, esta se deve ao fato das velocidades de fase das ondas estarem próximas.

Todo o estudo numérico sobre a difusão realizado até agora considerou que as duas ondas estão em fase. Um ponto importante que verificamos foi se a diferença de fase modificaria significativamente a difusão do sistema com os parâmetros utilizados. Para isso, adicionamos uma fase δ_2 no argumento do cosseno da segunda onda. Deste modo, a hamiltoniana 3.18 passa a ser:

$$\begin{aligned} H(x, y, t) = & \phi_0(x) - u_1x + A_1 \sin(k_{x1}x) \cos(k_{y1}y) \\ & + A_2 \sin(k_{x2}x) \cos(k_{y2}(y - ut) + \delta_2) \end{aligned}$$

Construímos a figura 4.10 com $A_2/A_1 = 0,4$ e $U = 0$ variando δ_2 entre 0 a 2π em intervalos de $\pi/12$. Notamos que a difusão não foi máxima com $\delta_2 = 0$ ou $\delta_2 = 2\pi$, esta difusão máxima ocorre simetricamente para $\delta_2 = \pi/12$ e $\delta_2 = 11\pi/12$.

Além do estudo particular de cada parâmetro, estudamos também a contribuição do transporte anômalo para a difusão dos centros de guia. O comportamento coletivo é caracterizado pela combinação das partículas que se atêm a percorrer as órbitas fechadas, e aquelas cujo movimento predomina na separatriz. A contribuição de cada partícula depende de sua posição inicial e da interação desta com a segunda onda. Até a segunda onda atuar, pontos muito próximos dos centros elípticos vão tender a permanecer em torno destes, ao passo que próximos da separatriz ficarão em trajetórias abertas.

Para a escolha que fizemos, neste capítulo, dos parâmetros e dos pontos iniciais, calculamos a variação do deslocamento Δx de cada partícula em um intervalo fixo de tempo

Figura 4.10: Coeficiente de difusão em função da fase da segunda onda δ_2 , com $U = 0$ e $A_2/A_1 = 0,4$.

Δt , construímos o histograma, e ajustamos uma função gaussiana para estes dados, apresentados na figura 4.11.

Observamos que a curva ajustada se encontra centrada no histograma e com o perfil simétrico em seu decaimento exponencial envolvendo as barras do histograma no intervalo $\Delta x \in [-0,4; 0,4]$. Essa simetria é confirmada pelo cálculo utilizando a expressão 3.22, cujo valor calculado é $\beta = 0,005$, indicando uma tendência igual das partículas em se deslocarem ao interior ou para fora do plasma.

Ainda na figura 4.11, notamos que a cauda da curva ajustada em $|\Delta x > 0,5|$ não se encontra envolvendo as barras do histograma. Neste trecho, observamos que uma quantidade significativa de partículas deslocou-se mais do que o esperado para que o movimento predominante das partículas correspondesse ao difusivo. A curtose calculada pela expressão 3.23 resultou em $\kappa = 3,6$, ou seja, indicando um valor pouco maior que três. Com estes valores da assimetria e da curtose, entendemos que, predominantemente, o sistema comporta-se de maneira geral como um sistema difusivo, mas com uma parcela do transporte caracterizada pela superdifusão. Conclusões semelhantes aparecem nas referências [10, 18, 54].

Figura 4.11: Histograma com a curva gaussiana ajustada para $A_2/A_1 = 0,6$ em $U = 0$.

Para ilustrar esta característica do transporte anômalo em nosso modelo de ondas de deriva, analisamos a trajetória de uma partícula em função da perturbação da segunda onda.

A partícula que se encontra próxima à separatriz é sensível à perturbação da segunda onda, e é aquela que descreve as trajetórias mais longas na coordenada x . Nas figuras 4.12, 4.13 e 4.14, apontamos a sensibilidade à perturbação da segunda onda de uma partícula situada na coordenada $(x, y) = (0,7869; \pi)$. Notamos que, com aumento da amplitude da segunda onda, a partícula que inicialmente descreve um movimento periódico em torno do ponto fixo (figura 4.12) passa a percorrer a separatriz em saltos quase-periódicos (figura 4.13), e finalmente se desloca pelo espaço de fase sem se ater muito tempo nas ilhas.

Em conclusão, vemos que o histograma da figura 4.11 poderia ser ajustado por uma

Figura 4.12: Gráfico da série temporal $x \times t$ de uma partícula localizada inicialmente em $(x, y) = (0,7869; \pi)$, com a correspondente trajetória no espaço de fase $y \times x$, e sem a adição da segunda onda ($A_2/A_1 = 0$).

Figura 4.13: Gráfico da série temporal $x \times t$ de uma partícula localizada inicialmente em $(x, y) = (0,7869; \pi)$, com a correspondente trajetória no espaço de fase $y \times x$, e com a segunda onda ($A_2/A_1 = 0,04$).

Figura 4.14: Gráfico da série temporal $x \times t$ de uma partícula localizada inicialmente em $(x, y) = (0,7869; \pi)$, com a correspondente trajetória no espaço de fase $y \times x$, e com a segunda onda ($A_2/A_1 = 0,08$).

curva gaussiana, se excluíssemos os deslocamentos mais longos. Entretanto, esses deslocamentos longos revelam a existência de um efeito dinâmico importante: o rápido deslocamento de partículas caóticas que se encontram próximas da separatriz das células da onda dominante. Essas partículas podem se deslocar por várias células. Para $U = 0$, essas órbitas causam altos níveis de transporte como mostrado na figura 4.7. Esse efeito foi estudado nas referências [10, 11, 18, 54].

Capítulo 5

Campo Elétrico Monotônico

Neste capítulo vamos apresentar as principais características do espaço de fase na situação em que o perfil do potencial é descrito por uma função quadrática, implicando em um perfil de campo elétrico monotônico. Analisamos a influência da variação espacial do campo elétrico no transporte das partículas do plasma.

5.1 Configuração das linhas de fluxo

O perfil cujo potencial de equilíbrio é

$$\phi_0(x) = Ax^2 + Bx$$

apresenta, tomando o gradiente, um campo elétrico radial monotônico. Este varia linearmente em função do raio do plasma, assim como o parâmetro de confinamento. Aplicando ϕ_0 à equação 3.15 obtemos para o parâmetro de confinamento:

$$U(x) = \frac{1}{A_1 k_{x1}} (2Ax + B - u_1) \quad (5.1)$$

Para melhor entendimento da mudança que a expressão 5.1 causa no espaço de fase, mantivemos o mesmo intervalo para a coordenada radial, $x \in [0, 5; 1, 2]$, adotado no capítulo anterior. Separamos o parâmetro de confinamento em três casos distintos, cujas

imagens para o domínio de x são $U \in [-0, 1; 0, 1]$, $U \in [-0, 8; 0, 8]$, e $U \in [-1, 3; 1, 3]$, e para cada um deles com seus respectivos coeficientes A e B . Estes valores estão apresentados na tabela 5.1.

retas	Imagem	A	B
I	$U \in [-0, 1; 0, 1]$	-1,43	2,76
II	$U \in [-0, 8; 0, 8]$	-11,42	19,76
III	$U \in [-1, 3; 1, 3]$	-18,57	31,90

Tabela 5.1: Tabela com os coeficientes angular A e linear B utilizados para a construção do espaço de fase para a expressão 5.1.

Os coeficientes A e B foram escolhidos para o perfil de U reproduzir os três valores de U apresentados no capítulo anterior, com a diferença da escolha para o caso em que $U > 1$, que agora tem como limite o valor de 1,3. Adotamos esta escolha para que a transição das ilhas ($U = 0$) às linhas abertas ($U > 1$), em um mesmo espaço de fase, fosse mais suave destacando as três configurações de U descritas no capítulo 4.

Apresentamos, na figura 5.1, o parâmetro de confinamento em função da coordenada x , referente à expressão 5.1, para os três perfis de potencial. Visivelmente se trata de retas com inclinações diferentes, mas todas têm o mesmo valor de $U = 0$ em $x = 0,85$. As retas assinaladas por I , II e III correspondem às imagens $-0,1 < U < 0,1$, $-0,8 < U < 0,8$ e $-1,3 < U < 1,3$. Portanto, nesta ordem, o coeficiente angular A aumenta em módulo.

Neste caso, temos uma mudança significativa no espaço de fase. Os três tipos de topologia, descritos no capítulo anterior na figura 4.1, aparecem agora em um só retrato de fase. Com apenas a primeira onda, $A_2/A_1 = 0$, apresentamos, na figura 5.2, os três retratos de fase para cada perfil.

Utilizamos os mesmos valores para os parâmetros de onda do capítulo anterior, descritos na tabela 4.1, para desenhar as linhas de fluxo, e tomamos as mesmas posições para os pontos iniciais. Conseqüentemente, ficaram inalteradas as posições dos pontos fixos, nítidos na figura 5.2A. Nesta figura encontramos a mesma grade de ilhas com linhas

Figura 5.1: Perfis radiais I (cheia verde), II (tracejada) e III (traço-ponto azul) do parâmetro de confinamento $U(x)$ para o caso do campo elétrico monotônico.

abertas.

Lembramos que agora o valor de $U = 0$ se restringe a um único ponto em que $x = 0,85$, que é raiz da função 5.1 com os devidos valores dos parâmetros A e B já escolhidos, e deste modo não é possível enxergar uma grade, por menor que seja, em uma região do gráfico. Poderíamos fazê-lo aumentando o valor do número de onda radial k_{x1} , conseqüentemente aumentaríamos o número de centros estáveis na coordenada x , também próximos ao ponto onde $U = 0$. Ainda assim, as linhas de fluxo são desenhadas segundo a escolha dos pontos iniciais, ou seja, se não forem escolhidos pontos onde as linhas são abertas, poderíamos ver um pequeno conjunto de ilhas, mas estaríamos omitindo a existência da separatriz na direção radial. Além disso, um valor muito grande para k_{x1} não poderia representar uma situação real experimental em um tokamak.

Para o perfil II, temos uma configuração das linhas de fluxo semelhante à figura 4.1B, agora lembrando que os extremos de U estão com valores próximos de um, e observamos que as barreiras em $x \approx 1,0$ e $x \approx 0,6$ tornam-se mais intensas. Na figura 5.2C, barreiras ainda mais robustas ocorreram nas regiões onde $x \approx 1,2$ e $x \approx 0,6$, $|U| \approx 1,3$.

Portanto notamos que na região radial com $U > 1$ há barreiras que devem limitar o transporte caótico (que surge com a segunda onda). Por outro lado, na região com

Figura 5.2: Com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0$, apresentamos, de cima para baixo, o espaço de fase com os perfis radiais de U (figura 5.1) para os casos I ($-0,1 < U < 0,1$), II ($-0,8 < U < 0,8$) e III ($-1,3 < U < 1,3$).

$U \approx 0$ há células de convecção em cujas separatrizes se espera uma grande contribuição ao transporte caótico. Para $U \approx 0$, o campo elétrico de equilíbrio muda de sinal e o fluxo também. Nesse local o transporte caótico será alto, pois o fluxo da segunda onda será significativo.

5.2 Difusão local

Com o conhecimento das modificações que ocorrem no espaço de fase com a mudança no potencial de equilíbrio, acrescentamos a segunda onda ao sistema. Desta forma, temos caos no espaço de fase assimetricamente distribuído.

Com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,1$, observamos, na figura 5.3, que o sistema perturbado é sutilmente diferente daquele observado no capítulo 4. Na figura 5.3A, notamos que há trajetórias caóticas (em torno dos pontos elípticos) limitadas. Apenas as trajetórias próximas da separatriz se deslocam por toda a ilha. Isto ocorre mesmo em $x = 0,85$, onde o parâmetro de confinamento é zero.

Para entender este fato, devemos retomar a condição utilizada para determinar os pontos fixos do sistema.

No capítulo 3 descrevemos que o confinamento dos centros de guia ocorre quando suas velocidades radial e poloidal são nulas, ou seja, $dx/dt = 0$ e $dy/dt = 0$. Para a hamiltoniana dada por

$$H(x, y) = \phi_0(x) - u_1x + A \sin(k_x x) \cos(k_y y)$$

encontramos que a velocidade em x fica determinada apenas pela flutuação do potencial dado pelo termo ondulatório,

$$\frac{dx}{dt} = A_1 k_y \sin(k_x x) \sin(k_y y) = 0$$

e a velocidade poloidal por

Figura 5.3: Com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,1$, apresentamos, de cima para baixo, o espaço de fase com os perfis radiais de U (figura 5.1) para os casos A ($-0,1 < U < 0,1$), B ($-0,8 < U < 0,8$) e C ($-1,3 < U < 1,3$).

$$\frac{dy}{dt} = \left[\frac{d\phi_0(x)}{dx} - u_1 + A_1 k_x \cos(k_x x) \cos(k_y y) \right] = 0$$

determinada pelo potencial de equilíbrio, o potencial flutuante e a velocidade de fase da onda, considerando $A_2 \ll A_1$.

Deste modo, a partir da condição da velocidade poloidal $v_y = dy/dt = 0$, a partícula fica confinada em torno do ponto elíptico quando

$$A_1 k_{x1} > \left| \frac{d\phi_0(x)}{dx} - u_1 \right| \quad (5.2)$$

restando apenas a separatriz para o deslocamento dos centros de guia.

Assim, para a figura 5.3B, notamos que, com o aumento em módulo do coeficiente A da expressão 5.1, as ilhas dão lugar às linhas de fluxo abertas nas posições radiais onde $x \sim 1,0$ e $x \approx 0,6$. Nestes pontos, com a perturbação, a atividade das barreiras mostra-se mais evidente.

Na figura 5.3C encontramos uma topologia próxima à da figura 4.2C, onde o caos fica restrito às regiões próximas às linhas de fluxo abertas, sendo visível que as partículas não se deslocam na direção radial, mas apenas na direção poloidal. As transições apresentadas na figura 5.3 mostram que as estruturas vão se modificando dos extremos em que $x \approx 0,6$ e $x \approx 1,2$, para $x = 0,85$, e nesta posição as ilhas não sofrem alterações significativas.

Para complementar, apresentamos na figura 5.4 o mesmo retrato de fase da figura 5.3C com a razão das amplitudes dada por $A_2/A_1 = 0,4$. A diferença pode ser vista no espalhamento dos pontos, comprovando que, para o sistema em que a segunda onda age com maior intensidade, a estrutura prevista pela condição 5.2 é significativamente alterada.

A figura 5.4 destaca outro aspecto em relação ao transporte. Notamos que a difusão se encontra localizada na região determinada pelos pontos iniciais, pois a existência das barreiras em $x \approx 1,0$ e $x \approx 0,6$ impede que as partículas percorram todo o espaço de fase.

Figura 5.4: Espaço de fase com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$, o mesmo que a figura 5.3C.

Diz-se que o transporte é global para o caso em que o potencial é linear e $U = 0$, onde a grade de ilhas se repete por todo espaço de fase. Para o caso estudado neste capítulo, em que o transporte é conhecido como local, o estudo da difusão passa a ser realizado com um conjunto de pontos em uma estreita faixa do espaço de fase. Para isso, utilizando as mesmas equações 3.19 e 3.20, construímos uma grade de 32×33 pontos iniciais em uma faixa de $\Delta x = \pm 0,02$ unidades de comprimento centradas em sete posições diferentes de x e integramos o sistema por um tempo curto. Com um número grande de pontos iniciais, também temos o comportamento assintótico esperado para $\langle D_x \rangle$.

Assim, construímos os gráficos de barras que apresentamos na figura 5.5, referentes ao potencial do caso I (em verde) da figura 5.1, para a razão das amplitudes $A_2/A_1 = 0,4$ e $A_2/A_1 = 0,8$ respectivamente. Nestas figuras, representamos pela barra vertical o valor do coeficiente de difusão para as sete faixas selecionadas que estão localizadas na coordenada radial em $x = \{0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0; 1,1; 1,2\}$.

Neste perfil de potencial, notamos, na figura 5.5A, que a região predominante para difusão se encontra em $x = 0,8$, para $A_2/A_1 = 0,4$. Quando aumentamos a intensidade da segunda onda de modo que $A_2/A_1 = 0,8$, observamos que a difusão aumentou em todas as faixas escolhidas. Mas, duas faixas, as de $x = 1,0$ e $x = 1,1$, apresentaram um

Figura 5.5: Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial I da figura 5.1.

aumento de 3 e 4 vezes respectivamente, conforme a figura 5.5B.

Como esperado, com a mudança do perfil I para o II, a diminuição de órbitas fechadas proporciona um aumento no confinamento dos centros de guia. Assim, na figura 5.6, notamos que os valores da difusão foram dez vezes menores se comparados aos da figura 5.5. Mais uma vez, a difusão em $x = 0,8$ é mais intensa em relação às demais coordenadas, e novamente, em $x = 1,2$, obtem-se o ponto de menor valor de difusão por ser uma região dominada por barreiras. Na figura 5.6B, a difusão torna-se quase que homogênea para $x \leq 0,9$ com $A_2/A_1 = 0,8$. No entanto, ocorre um aumento de quatro vezes no coeficiente de difusão em $x = 1,0$, sobressaindo-se em relação às demais coordenadas.

Com a mudança no perfil do potencial para o caso III, apresentamos os gráficos de barra do coeficiente de difusão na figura 5.7. Não houve uma mudança muito grande da ordem de grandeza em relação aos coeficientes de difusão do caso II. Temos, na figura 5.7A, uma configuração dos coeficientes de difusão muito similar à 5.6A onde $A_2/A_1 = 0,4$. Isto significa que mesmo com o aumento no valor do parâmetro de confinamento, a perturbação $A_2/A_1 = 0,4$ causada pela segunda onda ainda é forte o suficiente para vencer as barreiras criadas por este novo padrão do espaço de fase. Novamente, com $A_2/A_1 = 0,8$, o coeficiente de difusão atinge o maior valor em $x = 1,0$, aproximadamente o triplo do valor em relação ao calculado com $A_2/A_1 = 0,4$, e em $x = 1,2$, com o valor do coeficiente de difusão praticamente inalterado.

Figura 5.6: Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial II da figura 5.1.

Figura 5.7: Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial III da figura 5.1.

Essa particularidade do coeficiente de difusão na coordenada $x = 1,0$ exigiu uma investigação particular sobre o comportamento de uma partícula nesta região. Analisando o espaço de fase da figura 5.2A na região em que $x = 0,8$, temos a configuração de linhas abertas, e portanto uma região sensível à perturbação da segunda onda. Na região em que $x = 0,9$ temos a predominância dos pontos fixos, e portanto estável em relação à

perturbação da segunda onda. A mesma descrição pode ser feita para a região em que $x = 1, 0$, pois, assim como em $x = 0, 9$, ocorre o predomínio dos pontos fixos elípticos.

Na figura 5.8, apresentamos as séries temporais $x \times t$ e $y \times t$, e o espaço de fase $x \times y$, para uma trajetória, correspondente ao caso I do perfil do potencial (figura 5.1). O ponto inicial localiza-se em $(x, y) = (0, 96; \pi)$ e as equações foram integradas com a razão das ondas dada por $A_2/A_1 = 0, 4$. Observamos na série temporal $x \times t$ o mesmo fenômeno dos deslocamentos descrito no capítulo 4 para uma partícula próxima à separatriz. Neste caso, a partícula se encontra mais próxima do ponto fixo do que aquela estudada no capítulo citado. No entanto, para esta condição das amplitudes ($A_2/A_1 = 0, 4$), ela se comporta executando o deslocamento ao longo da separatriz, com alguns períodos movendo-se em torno dos pontos fixos elípticos.

Figura 5.8: Gráficos das séries temporais $x \times t$ e $y \times t$, de uma partícula localizada inicialmente em $(x, y) = (0, 96; \pi)$, com a correspondente trajetória no espaço de fase $x \times y$, e a razão das amplitudes $A_2/A_1 = 0, 4$.

Da série temporal $y \times t$, notamos que a deriva na direção poloidal y é maior que a do deslocamento radial x . Nesta figura não calculamos o $Mod[y, 2\pi]$, para que pudéssemos analisar o sentido de rotação adquirido pela partícula. Assim, verificamos que esta percorre o sentido anti-horário, com sua trajetória predominantemente na separatriz. Logo abaixo temos o espaço de fase, no qual vemos a partícula descrever seu movimento ao longo das linhas de fluxo abertas, transitando entre as ilhas formadas pelos pontos elípticos.

Em seguida, na figura 5.9, apresentamos os três gráficos descrevendo as séries temporais $x \times t$ e $y \times t$, e o espaço de fase $x \times y$, para o caso I do perfil do potencial (figura 5.1), mas, desta vez, a razão entre as amplitudes das ondas é $A_2/A_1 = 0,8$. Comparando-a com a figura 5.8, notamos mudanças importantes no comportamento da partícula.

Figura 5.9: Gráficos das séries temporais $x \times t$ e $y \times t$, de uma partícula localizada inicialmente em $(x, y) = (0, 96; \pi)$, com a correspondente trajetória no espaço de fase $x \times y$, e a razão das amplitudes $A_2/A_1 = 0,8$.

Na série temporal $x \times t$, observamos que, em relação à figura anterior, a partícula

executou longos saltos em $5 < t < 15$, e depois se ateve a deslocar por uma região restrita a $0,8 \lesssim x \lesssim 1,0$. No quadro a seguir, com $y \times t$, a partícula passa a percorrer o sentido horário e com a velocidade de deriva poloidal reduzida em relação a $A_2/A_1 = 0,4$. No espaço de fase aparece a configuração já mencionada no capítulo 4, de que, com a amplitude da segunda onda muito próxima à amplitude da primeira onda, a topologia é significativamente alterada. A configuração apresentada dos pontos no espaço de fase assemelha-se a uma condição caracterizada pela presença das linhas de fluxo abertas.

No cálculo do coeficiente de difusão local, o tempo em que ocorre a convergência é próximo de 30 unidades de tempo. Como tomamos uma grade de pontos iniciais muito densa (32×33) em uma estreita faixa ($\Delta x = \pm 0,02$), o comportamento coletivo proporciona, em $t \approx 10$, um deslocamento radial intenso apresentado nos gráficos de barra da difusão local.

Com os resultados deste capítulo, concluímos que o transporte varia com a posição radial para um campo elétrico não uniforme. Esse resultado tem consequência importante para interpretar as experiências em tokamaks.

Capítulo 6

Campo Elétrico Não Monotônico

Neste capítulo vamos apresentar as principais características do espaço de fase e do transporte quando o perfil do potencial é descrito por uma função cúbica, cujo perfil de campo elétrico é não monotônico no espaço de fase. Serão discutidas as principais alterações no transporte em relação ao perfil monotônico do capítulo 5.

No capítulo anterior, o fluxo do plasma na direção poloidal, associado à deriva na direção poloidal causada pelos campos elétrico e magnético de equilíbrio, variava monotonicamente com a coordenada x (correspondente à coordenada radial do plasma). Conforme vimos nos capítulos anteriores, essa variação depende do perfil do potencial elétrico do plasma. Portanto, neste capítulo, ao considerarmos uma variação não monotônica do campo elétrico E_0 teremos uma variação também não monotônica do fluxo do plasma. Deste modo, poderemos analisar a alteração no transporte na região espacial em que ocorre a inversão do fluxo de plasma poloidal. Convém ressaltar que a velocidade de fase da onda dominante (u_1) é constante e que, portanto, o perfil radial da velocidade de deriva v_E do plasma é o mesmo do parâmetro de confinamento U . Assim, os extremos de v e E_0 são os mesmos. Isso será usado na análise do transporte observado no espaço de fase. Em outras palavras, além das posições radiais em que $U = 0$ (com a formação de células ressonantes de convecção pela onda dominante) e $U = 1$ (com a formação de barreiras pela onda dominante), devemos procurar os pontos em que U passa por um valor extremo, pois há evidências experimentais de redução do transporte nessa região.

6.1 Configuração das linhas de fluxo

Com um grau a mais no polinômio do potencial ϕ_0 em relação ao do capítulo anterior, descrevemos o que conhecemos por perfil do campo elétrico radial não monotônico. Sendo o potencial um polinômio de grau três, a sua derivada fornece o campo elétrico radial e o parâmetro de confinamento como um polinômio do segundo grau.

Assim, o potencial de equilíbrio é dado por:

$$\phi_0(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx \quad (6.1)$$

e, aplicando ϕ_0 à equação 3.15, obtemos para o parâmetro de confinamento:

$$U(x) = \frac{1}{A_1 k_{x1}} (3Ax^2 + 2Bx + C - u_1) \quad (6.2)$$

Para estudar as mudanças que ocorrem no retrato de fase, adotamos método semelhante ao utilizado no capítulo anterior.

Mas, desta vez, três pontos são importantes para definir a topologia do sistema hamiltoniano: dois pontos onde $U = 0$ (as raízes da equação dada por 6.2), e um ponto de máximo para o valor de U (vértice da parábola). Na figura 6.1 mostramos as curvas para os três casos que consideramos neste capítulo. Mantivemos o mesmo intervalo para x , de modo que $x \in [0, 5; 1, 2]$, e agora atribuímos os valores de U $\{0, 1; 0, 8; 1, 3\}$ correspondentes aos vértices das parábolas.

O caso I (curva verde da figura 6.1) foi construído para que o parâmetro de confinamento em função do raio x varie pouco no intervalo considerado da coordenada x . Deste modo, as ilhas preenchem grande parte do espaço de fase. O valor do vértice da parábola é de $U = 0, 1$ em $x = 0, 87$, e as raízes de $U = 0$ são em $x = 0, 78$ e $x = 0, 97$.

Figura 6.1: Perfil radial I (curva cheia verde), II (curva tracejada) e III (curva traço-ponto azul) do parâmetro de confinamento $U(x)$ para o caso do campo elétrico não monotônico.

Um pouco diferentes ficaram as raízes dos casos II e III, nestes os valores são 0,65 e 1,1, e os máximos do parâmetro de confinamento são respectivamente 0,8 e 1,3 em $x = 0,87$.

Na tabela 6.1 colocamos os valores das constantes A , B , C e do parâmetro de confinamento para os três casos estudados em nossa simulação numérica.

curvas	Vértice $x = 0,87$	A	B	C
I	$U = 0,1$	-29	77	-66
II	$U = 0,8$	-56	148	-121
III	$U = 1,3$	-85	224	-183

Tabela 6.1: Tabela com os coeficientes A , B e C utilizados para a construção do espaço de fase para a expressão 6.2.

A mudança na configuração das linhas de fluxo em relação às condições apresentadas nos capítulos anteriores é vista na figura 6.2. Para cada um dos três casos, colocamos a curva do parâmetro de confinamento ao lado para comparar as alterações na topologia do sistema e identificar as regiões onde aparecem as ilhas e as linhas abertas. Para indicar os pontos iniciais optamos por colorir as trajetórias geradas pelos mesmos ao invés de

marcá-los, sendo que cada cor se refere a um conjunto de pontos iniciais. Estes estão separados em três cores (azul, verde e vermelho) e, para cada um deles, utilizamos uma grade respectivamente de 54, 36 e 54 pontos.

Figura 6.2: Espaço de fase com apenas a primeira onda, para os três perfis considerados neste capítulo, conforme a tabela 6.1.

Para o caso I da figura 6.2, encontramos uma configuração similar ao caso do potencial quadrático da figura 5.2II. Ao centro da figura, em $x = 0,87$ na cor verde, temos seis ilhas bem delineadas com a separatriz. Afastando-se para cima e para baixo, as ilhas se tornam menores até surgirem as linhas de fluxo abertas.

A principal modificação originada pelo perfil não monotônico em relação aos dois perfis anteriores aparece nas figuras 6.2II e 6.2III. Claramente, as ilhas da região em verde vão se deformando com o aumento no valor de U , até se tornarem linhas abertas. Esta nova configuração é importante, pois, neste perfil, encontramos barreiras nas coordenadas em que $x \approx 0,56$ e $x \approx 1,2$, e uma barreira central em torno de $x = 0,87$.

Assim, conforme a escolha dos parâmetros do potencial, podemos obter uma das três configurações apresentadas acima. A localização da barreira central foi escolhida para que pudéssemos também verificar a alteração nas ilhas ao redor desta, e verificar, quando a segunda onda for adicionada, a sua região de influência.

6.2 Difusão local

Completando o estudo deste trabalho, passamos a apresentar o novo aspecto das trajetórias das partículas quando a segunda onda é adicionada. Uma pequena modificação foi feita em relação ao número de onda k_{y1} . Aumentamos o seu valor para que também fosse aumentado o número de pontos elípticos e assim pudéssemos observar melhor os efeitos no espaço de fase quando a segunda onda fosse adicionada. Deste modo, apresentamos, na figura 6.3, o novo desenho das linhas de fluxo para o caso I com o perfil do parâmetro de confinamento ao lado e, nas figuras subsequentes, a estrutura do espaço de fase quando a segunda onda é adicionada.

Conforme visto na seção anterior, o caso I é aquele em que o vértice da parábola atinge o valor de 0,1, e deste modo temos o predomínio das ilhas em grande parte no retrato de fase. Na figura seguinte 6.3A, verificamos a perturbação que ocorre quando a segunda onda é adicionada, sendo a razão entre as amplitudes $A_2/A_1 = 0,4$. Notamos que mais afastada dos pontos elípticos a perturbação é suficiente para que as partículas descrevam suas trajetórias caoticamente e se distribuam pelo retrato de fase. Os pontos indicados

pela cor verde se distribuem nos dois sentidos na direção vertical, e observamos também que os pontos vermelhos seguem em direção às ilhas de cor azul.

Figura 6.3: Espaço de fase para o caso I do potencial de equilíbrio, destacando a mudança que ocorre com as ilhas com o aumento da amplitude da segunda onda. Em A temos $A_2/A_1 = 0,4$, e em B $A_2/A_1 = 0,8$.

Mais intensamente os pontos se distribuem quase que homoganeamente por todo o sistema, conforme visto na figura 6.3B, onde $A_2/A_1 = 0,8$, restando apenas a região onde se encontram as barreiras em que o caos é local. Ainda assim, podemos notar que as partículas, cujas trajetórias se encontram em torno dos pontos elípticos, ficam perturbadas, mas não se deslocam ao longo do espaço de fase. Este ponto é importante e só pode ser observado devido à escolha de se colorir as trajetórias descritas pelas partículas. Como a descrição do sistema não inclui a colisão entre as partículas, apenas a interação destas com as linhas de campo $\vec{E}$ e $\vec{B}$, os centros de guias seguem a configuração dada pelo potencial de equilíbrio e pelas duas ondas. Nas outras figuras em preto e branco, apresentadas nos capítulos anteriores, o caos no espaço de fase parecia homogêneo não havendo distinção entre as partículas que seguiam pela separatriz e aquelas que orbitavam em torno dos centros estáveis. Essa diferença é visível para pontos iniciais com cores diferentes.

No estudo da difusão local repetimos o procedimento descrito no capítulo anterior. Utilizamos as equações 3.19 e 3.20, construímos uma grade 32×33 de pontos iniciais em uma faixa de $\Delta x = \pm 0,02$ unidades de comprimento centradas em sete posições diferentes de x e integramos o sistema por um tempo curto.

Na figura 6.4A, observamos que a difusão é maior na região onde $x = 0,8$, e cai para o valor $x = 0,9$, onde também deveríamos observar um valor de difusão comparável ao anterior, já que ambos estão próximos da região onde o parâmetro de confinamento é nulo. Isto se deve ao fato de que os pontos elípticos se encontram neste valor de coordenada. Conforme esperado, na região das barreiras onde $x = 1,2$, a difusão é bem menor comparada aos outros valores de coordenada, pois o caos é local.

Assim, aumentando a intensidade da segunda onda de modo que $A_2/A_1 = 0,8$, mostramos na figura 6.4B que ocorreu o aumento esperado do transporte radial por todo o espaço de fase. Os valores de $\langle D_x \rangle$ quase ficaram iguais, à exceção dos valores em $x = 0,9$ e $x = 1,2$. O valor do coeficiente de difusão em $x = 0,9$ não sofreu aumento significativo, confirmando a observação feita das trajetórias em relação aos pontos elípticos, descrita no capítulo anterior. Na coordenada $x = 1,2$, o coeficiente de difusão pouco muda, isto por ser uma região onde as barreiras são robustas, e pouco modifica o transporte radial.

Figura 6.4: Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial I da figura 6.1.

A mudança mais expressiva ocorreu em $x = 0,6$, tornando-se cinco vezes maior, comparando-o com o número apresentado na figura 6.4A, ficando próximo do coeficiente de difusão calculado em $x = 0,8$. Isto indica que as partículas mais internas ao plasma têm uma forte tendência a se deslocarem em direção à parede externa do vaso. Novamente temos uma variação expressiva na coordenada em $x = 1,0$. Pelo mesmo motivo descrito no capítulo 5, neste ponto, a segunda onda tem intensidade para inverter a direção de propagação das partículas alterando as linhas de fluxo, provocando um grande deslocamento radial.

Nos pontos onde as raízes são 0,78 e 0,97, confirmamos o que já conhecíamos, que o parâmetro de confinamento é próximo de zero e a difusão é maior. Embora singular a bifurcação em que $U = 0$, mostramos que mesmo para valores próximos deste, as linhas de fluxo são sensíveis e facilmente destruídas quando a segunda onda é adicionada.

Para ilustrar a influência da segunda onda no transporte, apresentamos na figura 6.5 uma seqüência em que a razão entre as amplitudes das ondas é inicialmente nula (em A), e aumenta de $A_2/A_1 = 0,1$ (em B) para $A_2/A_1 = 0,4$ (em C). Destacamos a robustez das barreiras localizadas em $x \approx 0,5$ e em $x \approx 1,2$, além disso, observamos que a perturbação da segunda onda é mais intensa quanto mais distante a linha de fluxo estiver do centro

elíptico.

Figura 6.5: Espaço de fase para o caso I do potencial de equilíbrio, destacando a mudança que ocorre com as ilhas com o aumento da amplitude da segunda onda. Em A temos $A_2/A_1 = 0,0$, em B $A_2/A_1 = 0,1$, e em C $A_2/A_1 = 0,4$.

Na etapa seguinte, apresentamos o espaço de fase para o perfil do potencial para o caso II na figura 6.6. Este é o perfil onde $U = 0,8$ tem seu valor máximo em $x = 0,87$. Semelhante à configuração das linhas de fluxo apresentada na figura 6.2II, mas desta vez com um maior número de pontos fixos, notamos a presença da barreira (na cor verde) com pequenas ilhas postadas nos extremos, onde havia apenas ilhas na configuração anterior. Com o gráfico do parâmetro de confinamento anexado ao lado do espaço de fase não perturbado, podemos identificar as ilhas com o valor de $U = 0$, e as linhas de fluxo abertas com a região em que $U \approx 0,8$.

Com a adição da segunda onda, notamos que o caos ocorre em todo o espaço de fase, mas, por causa das cores utilizadas, evidenciamos que as partículas não se distribuem igualmente por todo o espaço de fase. Na figura 6.6A, com $A_2/A_1 = 0,4$, temos uma expansão limitada da região central em verde onde inicialmente havia as barreiras. A perturbação da segunda onda atinge principalmente a região mais externa da barreira, onde U tem seu valor em módulo se aproximando de zero, e as partículas limitam-se a percorrer uma pequena parte das linhas de fluxo onde se encontram as partículas assinaladas pela cor azul e vermelha.

Na figura 6.6B, com $A_2/A_1 = 0,8$, temos o aumento esperado devido à intensidade da segunda onda. As partículas assinaladas em vermelho deslocam-se (assim como as assinaladas em azul) em direção às linhas de fluxo assinaladas pelos pontos iniciais em verde. Aparentemente as partículas se misturaram na região onde ocorreram as barreiras, sendo por esta capturadas. Por este motivo, construímos a figura 6.7 para verificar se os centros de guia ultrapassam a coordenada onde o valor de U atinge seu máximo ($x = 0,87$).

Notamos pela figura 6.7 que as partículas não permutam entre as regiões delimitadas pela barreira em $U = 0,8$. A grade de pontos iniciais foi escolhida de modo a excluir as linhas de fluxo em $x = 0,87$.

A mudança ocasionada no transporte pelo novo perfil do campo elétrico pode ser vista na figura 6.8. O coeficiente de difusão ficou aproximadamente dez vezes menor em relação aos valores apresentados na figura 6.4 para todas as coordenadas. Com $A_2/A_1 = 0,4$ (na

Figura 6.6: Espaço de fase para o caso II do potencial de equilíbrio, destacando a mudança que ocorre com as ilhas com o aumento da amplitude da segunda onda. Em A temos $A_2/A_1 = 0,4$ e, em B, $A_2/A_1 = 0,8$.

figura 6.8A), pouca diferença é observada nos valores do coeficiente de difusão, indicando que, para o tempo de integração e a posição inicial das partículas adotados, a difusão é uniforme. Com $A_2/A_1 = 0,8$ (na figura 6.8B), notamos apenas um pequeno aumento no

Figura 6.7: Espaço de fase para o caso II do potencial de equilíbrio sem a segunda onda (em A), e com a perturbação da segunda onda dada por $A_2/A_1 = 0,4$. Destacando, em B, a presença da barreira em $x \approx 0,8$ e a mudança que ocorre com as ilhas com o aumento da amplitude da segunda onda.

coeficiente de difusão, sendo este mais relevante na coordenada $x = 0,6$, cujo valor de $\langle D_x \rangle$ dobrou. Neste caso, observamos que o valor do coeficiente de difusão decresce com o aumento da posição radial.

Como último perfil do potencial estudado, apresentamos, na figura 6.9, o caso III. Significativamente maior em seu máximo com $U = 1,3$ em $x = 0,87$, notamos a maior concentração das linhas abertas em $x = 0,85$ e a ausência das ilhas nos extremos das linhas de fluxo de cor verde. As ilhas que estavam nas regiões caracterizadas pelas cores azul e vermelha em $x = 0,7$ e $x = 1,0$ cedem lugar para as linhas de fluxo abertas. Com a perturbação da segunda onda ($A_2/A_1 = 0,4$), temos praticamente a mesma configuração

Figura 6.8: Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial II da figura 6.1.

observada na figura 6.6A. Já na figura 6.9B, os pontos que se encontravam na coordenada $x = 0,7$ se deslocaram para a região situada em $x > 0,8$, deixando um espaço e mostrando que as partículas situadas em $x = 0,6$ permaneceram aí confinadas.

A sensibilidade à perturbação na região em que $x = 0,6$ e $x = 0,7$ pode ser vista na figura 6.10. A ordem de grandeza do coeficiente de difusão não mudou em relação à figura 6.8, e a variação entre cada valor de difusão que foi calculada se manteve praticamente a mesma, comparando 6.8A com 6.10A em que $A_2/A_1 = 0,4$. Com $A_2/A_1 = 0,8$ (na figura 6.10B), notamos que o transporte foi maior em $x = 0,6$ e $x = 0,7$, neste último confirmando o deslocamento das partículas apresentado na figura 6.9B.

Cabe aqui uma observação importante em relação aos resultados apresentados nos capítulos 4, 5 e 6.

Com o campo elétrico radial uniforme sem a adição de ondas, as linhas de fluxo são uniformes e o fluido é laminar na direção poloidal. Com a inclusão da primeira onda, as trajetórias passam a descrever ilhas ou linhas abertas na direção y e não existe transporte na direção x , apenas quando a segunda onda é inserida no sistema.

Figura 6.9: Espaço de fase para o caso III do potencial de equilíbrio, destacando a mudança que ocorre com as ilhas com o aumento da amplitude da segunda onda. Em A temos $A_2/A_1 = 0,4$ e, em B, $A_2/A_1 = 0,8$.

Passando para os campos elétricos monotônico e não monotônico, apareceram duas configurações, uma com cisalhamento (*shear*) uniforme e outra com reversão do cisalhamento (*reverse shear*), ambas observadas em tokamaks. No cisalhamento uniforme temos

Figura 6.10: Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial III da figura 6.1.

um gradiente de velocidade uniforme, em que uma camada de fluido possui velocidade diferente das camadas adjacentes. Na reversão do cisalhamento, o gradiente de velocidade perpendicular às trajetórias se anula.

Como previmos, a influência do perfil de U é relevante para descrever o transporte em tokamaks. Examinaremos, no próximo capítulo, as experiências no TCABR.

Capítulo 7

TCABR e o Campo Elétrico Não Monotônico

Neste capítulo, vamos apresentar uma aplicação dos resultados obtidos nos capítulos anteriores para a interpretação de resultados de experimentos com o uso de polarização de borda realizados no tokamak TCABR do Instituto de Física da USP. Descrevemos sucintamente o arranjo experimental, cujo objetivo foi o de reduzir o transporte de partículas pela alteração do perfil radial do campo elétrico de equilíbrio [28–30].

7.1 Experimento no TCABR e os modos de confinamento

Nos últimos anos, muita atenção tem sido dada aos campos elétricos na borda do plasma nos tokamaks, em particular aos campos radiais. Um dos principais pontos de interesse é no chamado *biasing schemes*, no qual se tenta controlar externamente estes campos independentemente dos parâmetros usuais da máquina de confinamento [28–30]. A pesquisa ganhou um impulso extra quando ficou claro que o campo elétrico radial na borda pode ser a chave para entender a transição que ocorre entre os regimes L e H para o equilíbrio do plasma. Com essa transição, surge uma barreira no transporte das partículas [24].

A descoberta da alteração significativa do transporte de partículas na borda do plasma, devido às alterações na velocidade de fluxo ou de deriva do equilíbrio, abriu uma perspectiva de controlar a turbulência eletrostática e o transporte associado a ela, modificando o perfil radial dessas velocidades [9]. Isso pode ser conseguido de várias maneiras, como a injeção de partículas neutras ou de ondas eletromagnéticas no plasma.

Outra forma é a introdução de eletrodos que alteram o potencial local do plasma e, conseqüentemente, o perfil radial do campo elétrico que gera o fluxo de deriva. Essa última forma está sendo usada no tokamak TCABR para criar o regime H a partir do regime L [38]. No nosso trabalho examinamos a alteração no transporte provocada pela mudança do perfil do campo elétrico de equilíbrio.

Figura 7.1: Visão esquemática do Tokamak TCABR.

As principais características do tokamak TCABR são indicadas na figura 7.1. Destacam-se o raio do plasma $a = 0,18m$, o raio toroidal $R = 0,61m$, o ângulo poloidal θ e o ângulo toroidal φ nos elementos geométricos, assim como o plasma e o vaso do tokamak, e as sondas eletrostáticas (*probes*) usadas para medir o potencial flutuante e a corrente de saturação iônica.

Os experimentos foram realizados em descargas de baixa densidade. O eletrodo utilizado para a polarização do plasma consiste em um disco de grafite com $2,0cm$ de diâmetro e com a espessura de $0,8cm$, inserido dentro do plasma no plano equatorial a $16,5cm$ do

Figura 7.2: Visão esquemática da seção poloidal do Tokamak TCABR onde o eletrodo é colocado.

centro do plasma, utilizando um isolante de alumina para revestir a haste. Em uma secção poloidal do tokamak (figura 7.2), destacamos o eletrodo em que é aplicado um potencial V com o referencial no vaso e o limitador que determina o raio do plasma.

7.2 Controle do transporte do plasma pelo campo elétrico

Com ciência do experimento com o eletrodo em suas características básicas, vamos agora aplicar o modelo hamiltoniano, com o perfil do campo elétrico estudado, utilizando os dados experimentais já obtidos. Convém salientar que esses dados não foram obtidos visando diretamente à aplicação do modelo de ondas de deriva, estudadas neste trabalho. Partimos de uma coleção de dados experimentais com e sem a utilização do eletrodo, buscando descargas que tivessem características similares e que pudessem fornecer valores aos parâmetros utilizados no modelo.

É importante lembrar que a aplicação que aqui faremos não pretende levar à conclusão

teórica ou a uma explicação definitiva dos resultados experimentais. Mesmo assim, pretendemos examinar uma possível ligação entre a redução do transporte e a alteração do perfil do campo elétrico. Aachamos importante lembrar que modelos simplificados e não lineares podem descrever fenômenos ditos complexos e fornecem resultados aproximados, semi-qualitativos. Por razão das simplificações efetuadas para construir as equações que modelam o sistema, os valores para os parâmetros são escolhidos por aproximação, mas mantendo a coerência com os resultados experimentais.

Conforme visto nos capítulos anteriores, o transporte depende do potencial de equilíbrio e dos parâmetros das duas ondas. Assim, para a nossa análise, precisamos encontrar qual é a frequência predominante em uma descarga e seu respectivo número de onda poloidal para, deste modo, determinar a velocidade de fase desta onda.

Com os dados de um experimento sem a utilização do eletrodo (descarga de número 17682), obtivemos a função espectral em função do número de onda e da frequência $S(k, f)$, que pode ser vista na figura 7.3. Nesta aquisição os dados foram coletados pela sonda eletrostática na borda do plasma na posição radial $r = 18cm$.

Figura 7.3: Função espectral $S(k, f)$ obtida na descarga de número 17682 na borda do plasma com raio $r = 18cm$. A intensidade do espectro é maior na cor vermelha e decresce para as de tom azul.

Verificamos que não existe uma única onda que pode ser considerada como fundamental para ser substituída de pronto no modelo de ondas de deriva, temos um pico em torno dos $15kHz$ e outro mais agudo em torno de $24kHz$.

Conforme foi descrito e enfatizado nos capítulos anteriores, um resultado importante do modelo de ondas de deriva é a expressão para o parâmetro de confinamento U . Na expressão 3.15, destacam-se o campo elétrico radial, proveniente da função do potencial do plasma ϕ_0 , e da velocidade de fase da onda u_1 , sendo esta última o resultado da razão entre a frequência angular ω com o número de onda poloidal k_{y1} . Deste modo, é importante para o modelo a velocidade de fase da onda, e não dos valores isolados de ω e de k_{y1} .

Temos então certa liberdade na escolha da frequência e no respectivo número de onda, respeitando os dados coletados. Conforme a figura 7.3, a energia se concentra em média em torno de $20kHz$ e, deste modo, adotamos esta frequência para a primeira onda.

A partir desta escolha para frequência, diagramamos a função espectral em função do número de onda poloidal k_y para frequências próximas a $20kHz$ (de $15kHz$ a $25kHz$), que pode ser vista na figura 7.4. Nesta figura, notamos que o pico fica em torno de $0,3cm^{-1}$, e portanto utilizamos $k_{y1} = 0,3cm^{-1}$.

Calculando a velocidade de fase

$$u_1 = \frac{\omega}{k_y} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 20 \cdot 10^3 Hz}{30m^{-1}}$$

obtivemos como resultado

$$u_1 \cong 4,2km/s$$

coerente com os valores médios medidos experimentalmente, por defasagem entre sinais de dois eletrodos próximos. Estas velocidades ficam em torno de $5km/s$ para esta posição radial ($r = 18cm$).

Passamos agora ao estudo do potencial. Como vimos na seção anterior, o eletrodo foi colocado a $16,5cm$ do raio do plasma. Em uma sequência de descargas, mediu-se, utili-

Figura 7.4: Função espectral $S(k)$ obtida na descarga de número 17682 para uma faixa de frequências em torno de $20kHz$, na borda do plasma com raio $r = 18cm$.

zando as sondas eletrostáticas, o potencial flutuante da borda (em torno de $r = 16cm$) até a região da sombra do limitador (em $r = 21cm$). Essas medidas foram executadas em duas etapas: com e sem o uso do eletrodo.

Na figura 7.5, apresentamos os pontos experimentais do potencial flutuante em função do raio, ajustados ao perfil não monotônico pelo método dos mínimos quadrados. Os pontos e a curva em azul representam o perfil do potencial com o eletrodo e, os de cor verde, o perfil sem o eletrodo. Cada ponto desenhado no gráfico é o resultado da média de um conjunto de pontos experimentais similares, no qual a barra de erro representa o desvio padrão em torno da média. Por similar entendemos as descargas com mesmos parâmetros de equilíbrio, como a densidade e a corrente do plasma ($I_p \approx 100kA$).

O potencial do plasma, ϕ , é dado pela soma do potencial flutuante (V_p) com o termo associado à energia cinética das partículas, $k_B T_e$. Portanto

$$\phi = V_p + \alpha k_B T_e$$

onde α é uma constante. Na borda do plasma, a variação radial do termo ligado à energia é muito menor do que a do potencial flutuante e, assim, consideramos para o nosso tra-

balho $\phi \approx V_p$, uma vez que a equação 3.15 do nosso modelo depende apenas da derivada de ϕ na direção radial.

Fizemos o ajuste da curva:

$$\phi_0(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

aos pontos experimentais, conforme indica na figura 7.5.

Os ajustes foram testados utilizando o teste de χ^2 reduzido, para o qual obtivemos valores próximos de um para os dois casos apresentados. Além do teste de χ^2 , a função de terceiro grau escolhida também leva em conta o fato conhecido experimentalmente de que o potencial tende a zero com decrescimento assintótico até atingir a parede do vaso. Ressaltamos ainda que, a princípio, a função a ser escolhida deve ter como propriedades um ponto de inflexão e, em um extremo, ir a zero para um valor fixo da variável independente. A nossa escolha pela função polinomial de terceiro grau foi feita de forma a corresponder aos quesitos citados e por ser a mais simples de tratar numericamente, tanto no ajuste quanto na simulação numérica.

Figura 7.5: Perfis do potencial elétrico flutuante em função do raio para o TCABR. A curva azul representa o ajuste para o perfil com o eletrodo e a curva verde para o perfil sem o eletrodo.

De posse dos parâmetros ajustados para o potencial com e sem o eletrodo, e das respectivas curvas, construímos os gráficos do parâmetro de confinamento $U(x)$ para cada

perfil de potencial. Para isso, escolhemos os parâmetros característicos, que foram mencionados no capítulo 3, para adimensionalizar os demais valores das variáveis e constantes do sistema.

Os parâmetros característicos são o raio do plasma, o campo magnético toroidal e o campo elétrico de equilíbrio. Para os dois primeiros, temos que $a = 0,18m$ e $B_0 = 1,1T$. O campo elétrico varia com a posição radial (a coordenada x no modelo), e portanto não existe um valor constante típico que pode ser obtido diretamente. A nossa escolha foi pelo valor médio entre duas posições onde a curva do potencial flutuante sem o eletrodo pode ser aproximada por uma reta. Observando o gráfico de cor verde da figura 7.5, as posições das coordenadas escolhidas foram $x_B = 0,190m$ e $x_A = 0,178m$. Assim, temos que o campo elétrico característico E_0 é:

$$E_0 = \frac{1}{x_B - x_A} \int_{x_B}^{x_A} \phi_0(x) dx = 3,3 \times 10^3 V/m$$

Outra maneira viável de obtermos E_0 seria fazendo o ajuste linear neste intervalo $[x_A, x_B]$, cujo resultado é similar.

Deste modo, obtemos a velocidade característica $v_0 = E_0/B_0 = 3km/s$, e o tempo $t_0 = a/E_0 = 6 \times 10^{-5}s$.

Já escolhemos a frequência e o número de onda angular para a primeira onda, restando a amplitude e o número de onda radial. Para a amplitude da onda, escolhemos um valor típico $A_1 = 50V$, medido pelas sondas eletrostáticas. Para o número de onda radial, não encontramos referências específicas de que medições precisas tenham sido feitas. Os poucos artigos reportam a dificuldade em se realizar tais medições. Em um experimento realizado no tokamak TEXT da Universidade do Texas [55], os resultados apontam que o número de onda radial k_r é da mesma ordem de grandeza do número de onda poloidal k_θ .

Por construção, temos que a onda eletrostática é composta por uma onda harmônica descrita pelo termo $\cos(k_{y_i}y - \omega_i t)$ na direção poloidal, modulada por uma onda estacionária $\sin(k_{x_i}x)$ na direção radial. Por ser estacionária, sabemos que as ondas só podem oscilar com frequências bem definidas, e como nosso sistema é descrito em coordenadas cartesianas, fizemos a analogia do nosso modelo com o da corda vibrante de extremidades

fixas. Escolhemos como condição de contorno o valor em $r = 0$ (centro do plasma) e $r = a$ (definido pelo limitador). Desta forma, o número de onda deve respeitar

$$k_n = \frac{n\pi}{a}$$

onde ($n = 1, 2, 3, \dots$) e a é o raio do plasma. Escolhemos o valor de $n = 9$ e, conseqüentemente, obtemos $k_{x1} = 157m^{-1}$, o que corresponde aproximadamente a duas ilhas na borda do plasma na região entre $r = 0,16m$ e $r = 0,18m$, se considerarmos o caso em que o perfil do campo elétrico é constante.

Temos dois vínculos em relação ao número de onda radial. Devemos escolher um valor que apresente um número mínimo de ilhas na borda do plasma, pois o modelo foi construído contando com essa configuração na topologia e, ao mesmo tempo, deve estar próximo aos resultados obtidos experimentalmente. Assim, a diferença entre k_y e k_x escolhidos para a aplicação do modelo é menor do que uma ordem de grandeza.

Baseados nos estudos numéricos apresentados no capítulo 4, escolhemos para a segunda onda a amplitude dada por $A_2/A_1 = 0,4$, $k_{x2} = 0,935k_{x1}$. Tomando os gráficos da função espectral 7.3 e 7.4, escolhemos $f_2 = 22kHz$ com o respectivo número de onda $k_{y2} = 28m^{-1}$.

Deste modo, obtemos os parâmetros adimensionais, seguindo o que foi estabelecido no capítulo 3

$$x' = \frac{x}{a} \quad y' = \frac{y}{a} \quad t' = \frac{t}{t_0} \quad \omega' = \omega_i t_0 \quad u' = \frac{u}{v_0} \quad A'_i = \frac{A_i}{E_0 a} \quad k'_i = k_i a$$

que apresentamos na tabela 7.1.

Para o perfil não monotônico, temos que o parâmetro de confinamento U é dado por:

$$U(x) = \frac{3Ax^2 + 2Bx + C - u_1}{A_1 k_{x1}} \quad (7.1)$$

Parâmetros das ondas	Primeira onda $i = 1$	Segunda onda $i = 2$
Amplitude da onda A_i	0,084	0,034
Frequência angular ω_i	7,5	8,25
Número de onda poloidal k_{yi}	5,4	5,0
Número de onda radial k_{xi}	28,3	26,5

Tabela 7.1: Tabela com os parâmetros adimensionais utilizados para construir os gráficos do parâmetro de confinamento U .

Correspondentemente ao potencial da figura 7.5 no uso das cores para representar os ajustes nas duas diferentes condições (verde quando não há ação do eletrodo, e azul quando o eletrodo está polarizado), apresentamos as curvas do parâmetro de confinamento em função do raio, conforme a figura 7.6.

O primeiro ponto a ressaltar é que as curvas do parâmetro de confinamento da figura 7.6 são resultantes dos valores calculados pela equação multiplicados por -1 . Escolhemos assim para manter as parábolas com a concavidade para baixo, já que o importante é o valor em módulo do parâmetro de confinamento. Apresentamos os perfis radiais da figura 7.6 em função da coordenada radial r , que corresponde à nossa coordenada x .

Figura 7.6: Perfil radial (curva cheia verde) sem a ação do eletrodo, e com o eletrodo polarizado (curva azul) do parâmetro de confinamento $U(r)$ (casos de campo elétrico não monotônico).

Observamos que os máximos das duas curvas possuem valores diferentes e encontram-se em posições diferentes. Sem o eletrodo (a curva de cor verde), o valor máximo é $U = 1,17$ na coordenada $r = 0,189m$. Embora o parâmetro de confinamento tenha atingido um valor maior que um neste ponto, este encontra-se na sombra do limitador, ou seja, fora do plasma, e o efeito esperado da barreira não é efetivo para a melhoria do confinamento.

Quando o eletrodo é acionado (representado pela curva de cor azul), o valor máximo do parâmetro de confinamento aumenta e se desloca para dentro do plasma. Este valor é $U = 1,61$ na coordenada $r = 0,179m$ próximo à região do limitador.

Com os parâmetros adimensionais, construímos o espaço de fase para o perfil sem o eletrodo e com o eletrodo. Estes podem ser vistos, respectivamente, nas figuras 7.7 e 7.8. Nessas figuras estão também os perfis radiais do parâmetro de confinamento U .

Figura 7.7: Espaço de fase sem ação do eletrodo, com o parâmetro de confinamento $U(x)$ para o caso do campo elétrico não monotônico.

Assim, ao analisarmos as figuras 7.7 e 7.8, notamos que, com eletrodo, a região com $U > 1$ em que há barreiras se desloca da camada externa ($x > 1$) para a borda do plasma ($x \approx 1$), enquanto a região com grande transporte, $U \approx 0$, sai da borda do plasma. Nessas condições, o nosso trabalho prevê uma redução no transporte confirmada nessa experiência.

Figura 7.8: Espaço de fase com o eletrodo polarizado, com o parâmetro de confinamento $U(x)$ para o caso do campo elétrico não monotônico.

Vamos analisar com mais detalhe o significado do numerador do parâmetro de confinamento da equação 7.1. Observamos que a velocidade de fase da onda se soma ao campo elétrico radial de equilíbrio. Uma constante somada a uma função desloca a curva no eixo das ordenadas e, no caso do campo elétrico radial, esta constante diminui sua intensidade, mudando a inclinação em torno do ponto de inflexão do potencial elétrico. Um recurso utilizado para remover a influência da primeira onda e aumentar a intensidade do campo elétrico é o da inserção do eletrodo, e neste aplicar um potencial de valor próximo do potencial introduzido pela influência da onda eletrostática. Com isso seria reduzido o transporte calculado no modelo usado nesta tese.

Podemos estimar essa tensão desejável na posição radial do eletrodo, $\Delta\phi$, a partir do campo magnético toroidal, da frequência e do número de onda poloidal da primeira onda, e da distância Δx do eletrodo ao limitador. Assim,

$$\Delta\phi = u_1 B_0 \Delta x = \frac{2\pi 20 \cdot 10^3}{30} 1,1(0,18 - 0,165) \approx 70V$$

Apresentamos, na figura 7.9, os gráficos das medidas feitas no TCABR com a sonda eletrostática na região do SOL (Scrape-Off-Layer) cujo raio é $r = 0.19m$, ou seja, na

região fora do plasma. Temos a corrente de saturação iônica medida pela sonda, I_s , a corrente do eletrodo I_b e a tensão do eletrodo V_b . A amplitude da flutuação da corrente de saturação iônica indica o nível de turbulência que ocorre na borda do plasma. Em um primeiro momento, temos I_s sem o uso do eletrodo, notando-se grande intensidade na flutuação, esta depois é reduzida quando acionado o eletrodo. Os números de 1 a 4 representam quatro tipos de descargas diferentes mostrando o tempo de aplicação do potencial do eletrodo em velocidades sucessivamente menores. Chamamos a atenção para a descarga de número 1, na qual observamos uma redução expressiva na amplitude da corrente com a polarização do eletrodo em $t = 26ms$. Esta variação corresponde a uma melhoria no confinamento e pode indicar uma transição do modo L (Low) para o H (High) que também ocorre nas outras descargas, mas em menor intensidade, pois a redução da amplitude da flutuação é menor [38].

Nas quatro descargas, o potencial do eletrodo atinge um valor final em torno de 350V e o experimento procurava relacionar a melhoria do confinamento com o tempo que o potencial leva até chegar a esta tensão. Entretanto, destacamos que esta transição ocorre para o potencial do eletrodo em torno dos 100V. O potencial onde ocorre a melhoria do confinamento está indicado pela barra horizontal hachurada no potencial e na corrente do eletrodo, e na corrente de saturação estão anotadas nas circunferências correspondentes.

Notamos que o valor previsto utilizando o modelo de ondas de deriva (70V) se encontra próximo ao valor obtido experimentalmente para melhoria do confinamento (100V).

Assim, os resultados obtidos no nosso trabalho possibilitam uma interpretação para a redução do transporte nas descargas do TCABR com eletrodo: o deslocamento das regiões de barreira e de grande transporte causado pela alteração do perfil radial do parâmetro de confinamento U (que depende linearmente do campo elétrico de equilíbrio). Experiências semelhantes em outros tokamaks [29, 30] podem ser interpretadas de maneira semelhante.

Figura 7.9: De cima para baixo: gráfico da corrente de saturação iônica do plasma (proporcional à densidade local), corrente do eletrodo e a tensão do eletrodo [56].

Capítulo 8

Conclusões

Nesta tese usamos o modelo hamiltoniano introduzido por Horton para estudar o transporte de partículas que as ondas de deriva causam na borda do plasma confinado em tokamaks [11]. Considerando a deriva do tipo $\vec{E} \times \vec{B}$ nas órbitas caóticas de partículas do plasma, devido à propagação de duas ondas ressonantes em campos magnético e elétrico uniformes, este autor usou este modelo para calcular o coeficiente de difusão a partir do desvio quadrático médio da posição inicial dessas partículas.

Já havíamos utilizado esse modelo em nossa dissertação de mestrado [43], também com campos uniformes e duas ondas de deriva ressonantes, para investigar os principais efeitos de dinâmica não linear que afetam o transporte das partículas na borda do plasma em um tokamak. Além disso, estimamos o coeficiente de difusão de partículas na borda do plasma do tokamak TBR, do Instituto de Física da USP, obtendo valores mais próximos dos medidos nesse tokamak do que os obtidos com estimativas usando o modelo neoclássico de transporte [33]. Esses resultados confirmam que as ondas de deriva são importantes para o transporte das partículas.

Inicialmente apresentamos alguns resultados da nossa dissertação de mestrado. A seguir, apresentamos resultados novos relativos à influência dos parâmetros da segunda onda ressonante no transporte. Com essa análise ficou evidente que o transporte é maior se a velocidade de fase da segunda onda for próxima da velocidade de fase da onda dominante.

Consideramos, nesta tese, o campo elétrico de equilíbrio não uniforme e verificamos

como o transporte local de partículas varia com a posição radial. Mostramos que, devido a essa variação, a alteração do perfil radial do campo elétrico na borda do plasma pode ser usada para controlar o transporte nessa região. Para obter esses resultados, usamos novamente o modelo hamiltoniano de Horton para investigar o transporte de partículas na borda do plasma em um tokamak, ainda com duas ondas de deriva e um campo magnético uniforme. Analisamos o transporte para dois perfis radiais do campo elétrico, um perfil monotônico e um outro não monotônico. Dessa forma, verificamos que a contribuição de uma onda ressonante dominante ao transporte local diminui com o aumento do gradiente do campo elétrico nessa região. Em outras palavras, observamos que o cisalhamento do fluxo do plasma na direção poloidal altera a condição de ressonância (expressa pelo valor nulo do parâmetro de controle) e, conseqüentemente, reduz o transporte de partículas na borda do plasma.

Integramos as equações de Hamilton, obtidas com o modelo usado, para obter as órbitas das partículas e calcular o seu transporte. A análise dos resultados obtidos revela que alguns efeitos dinâmicos relacionados ao caos lagrangiano das órbitas das partículas determinam o transporte obtido nesse modelo. Entre esses efeitos destacamos a existência de órbitas caóticas, para os parâmetros típicos de plasmas confinados em tokamaks, e a presença de ondas de deriva ressonantes que criam estruturas celulares e barreiras de transporte na borda do plasma. Portanto, apresentamos várias evidências de que o transporte observado em tokamaks depende da dinâmica caótica das partículas do plasma.

Assim, constatamos que o transporte depende fortemente do parâmetro de confinamento, U , introduzido na referência [11]. Esse parâmetro depende tanto da onda dominante como do fluxo poloidal do plasma. Deste modo, para o seu cálculo usamos a amplitude, a velocidade de propagação (na direção poloidal) e a modulação radial da onda dominante, além da velocidade do fluxo poloidal. Na posição radial em que o parâmetro de controle é nulo (ou seja, $U = 0$), está localizada a região ressonante onde o transporte local é máximo. Nessa posição, a velocidade da onda é igual à do fluxo. Estudamos também a dependência do transporte com os parâmetros da segunda onda, especialmente a sua amplitude e a sua modulação. Enfatizamos a variação do transporte caótico local com a posição radial. Essa análise mostra a alteração do transporte com o perfil do campo elétrico do equilíbrio.

Finalmente, com uma aplicação da nossa análise sobre a influência do perfil radial do campo elétrico radial, discutimos a redução do transporte de partículas no tokamak TCABR. Sugerimos que essa redução possa ter sido causada pelo aumento do gradiente radial do campo elétrico provocado pelo potencial elétrico do eletrodo.

Os resultados obtidos confirmam a formação de barreira ao transporte na região de inversão em que o fluxo do plasma na direção poloidal se anula. Pela nossa previsão, as experiências realizadas em tokamaks (como o TCABR, ISTTOK, CASTOR, etc.) levam à formação de barreiras nas regiões com $|U| \geq 1$.

A distribuição dos deslocamentos das partículas segue uma distribuição quase gaussiana, uma vez que os eventos longos são mais numerosos que os previstos por uma distribuição gaussiana. Esses vãos longos seguem outra estatística e o transporte que eles causam é superdifusivo, enquanto que os deslocamentos menores são gaussianos [18]. Como prosseguimento do nosso trabalho, essa análise poderia ser feita a partir dos estudos iniciados nesta tese.

A incorporação de outras ondas com velocidades de fase próximas das duas ondas consideradas poderia facilitar a comparação com os resultados experimentais [19].

Uma continuação natural do trabalho apresentado seria o estudo da influência da não uniformidade do campo magnético no transporte de partículas, como relatado nas referências [57, 58], nas quais um modelo similar ao usado nesta tese foi aplicado. Outra ampliação do atual trabalho seria considerar o equilíbrio do plasma em uma configuração toroidal, conforme apresentado na referência [57].

Referências Bibliográficas

- [1] J. Wesson. *Tokamaks*. Oxford University Press, 3rd Edition (2004).
- [2] J. D. Callen, B. A. Carreras, R. D. Stambaugh. *Stability and transport processes in tokamak plasmas*. Physics Today **45**, 34 (1992).
- [3] R. D. Hazeltine, S. C. Prager. *New physics in fusion plasma confinement*. Physics Today **55**(7), 30 (2002).
- [4] J. A. Boedo, D. L. Rudakov, E. Hollmann, D. S. Gray, K. H. Burrell, R. A. Moyer, G. R. McKee, R. Fonck, P. C. Stangeby, T. E. Evans, P. B. Snyder, A. W. Leonard, M. A. Mahdavi, M. J. Schaffer, W. P. West, M. E. Fenstermacher, M. Groth, S. L. Allen, C. Lasnier, G. D. Porter, N. S. Wolf, R. J. Colchin, L. Zeng, G. Wang, J. G. Watkins, T. Takahashi. *Edge-localized mode dynamics and transport in the scrape-off layer of the DIII-D tokamak*. Physics of Plasmas **12**, 072516 (2005).
- [5] E. Mazzucato, S. H. Batha, M. Beer, M. Bell, R. E. Bell, R. V. Budny, C. Bush, T. S. Hahm, G. W. Hammett, F. M. Levinton, R. Nazikian, H. Park, G. Rewoldt, G. L. Schmidt, E. J. Synakowski, W. M. Tang, G. Taylor, M. C. Zarnstorff. *Turbulent fluctuations in TFTR configurations with reversed magnetic shear*. Physical Review Letters **77**, 3145 (1996).
- [6] C. Hidalgo, C. Alejandre, A. Alonso, J. Alonso, L. Almoguera, F. de Aragon, E. Ascasibar, A. Baciero, R. Balbin, E. Blanco, J. Botija, B. Branas, E. Calderon, A. Cappa, J.A. Carmona, R. Carrasco, F. Castejon, J. R. Cepero, A. A. Chmyga, J. Doncel, N.B. Dreval, S. Eguilior, L. Eliseev, T. Estrada, J. A. Ferreira, A. Fernandez, J. M. Fontdecaba, C. Fuentes, A. Garcia, I. Garcia-Cortes, B. Goncalves, J. Guasp, J. Herranz, A. Hidalgo, R. Jimenez, J. A. Jimenez, D. Jimenez-Rey, I. Kirpichev, S. M. Khrebtov, A. D. Komarov, A. S. Kozachok, L. Krupnik, F. Lapayese, M. Liniers,

- D. Lopez-Bruna, A. Lopez-Fraguas, J. Lopez-Razola, A. Lopez-Sanchez, E. de la Luna, G. Marcon, R. Martin, K. J. McCarthy, F. Medina, M. Medrano, A. V. Melnikov, P. Mendez, B. van Milligen, I. S. Nedzelskiy, M. Ochando, O. Orozco, J. L. de Pablos, L. Pacios, I. Pastor, M. A. Pedrosa, A. de la Pena, A. Pereira, A. Petrov, S. Petrov, A. Portas, D. Rapisarda, L. Rodriguez-Rodrigo, E. Rodriguez-Solano, J. Romero, A. Salas, E. Sanchez, J. Sanchez, M. Sanchez, K. Sarksian, C. Silva, S. Schchepetov, N. Skvortsova, F. Tabares, D. Tafalla, A. Tolkachev, V. Tribaldos, I. Vargas, J. Vega, G. Wolfers, B. Zurro. *Overview of tj-ii experiments*. Nuclear Fusion **45**, s266 (2005).
- [7] W. Horton. *Drift waves and transport*. Review of Modern Physics **71**, 735 (1999).
- [8] C. Hidalgo. *On the nature of transport in fusion plasmas*. Astrophysics and Space Science **292**, 681 (2004).
- [9] C. Hidalgo, M. A. Pedrosa, B. Gonçalves. *Fluctuations, sheared radial electric fields and transport interplay in fusion plasmas*. New Journal of Physics **4**, 51 (2002).
- [10] R. G. Kleva, J. F. Drake. *Stochastic $E \times B$ particle transport*. Physics of Fluids **27**, 1686 (1984).
- [11] W. Horton. *Onset of stochasticity and the diffusion approximation in drift waves*. Plasma Physics and Controlled Fusion **27**, 937 (1985).
- [12] J. M. Kwon, W. Horton, P. Zhu, P. J. Morrison, H.-B. Park, D. I. Choi. *Global drift wave map test particle simulations*. Physics of Plasmas **7**(4), 1169 (2000).
- [13] Ch. P. Ritz, H. Lin, T. L. Rhodes, A. J. Wootton. *Evidence for confinement improvement by velocity-shear suppression of edge turbulence*. Physical Review Letters **65**, 2543 (1990).
- [14] A. E. White, S. J. Zweben, M. J. Burin, T. A. Carter, T. S. Hahm, J. A. Krommes, R. J. Maqueda. *Bispectral analysis of low to high confinement mode transitions in the national spherical torus experiment*. Physics of Plasmas **13**, 072301 (2006).
- [15] M. V. A. P. Heller, I. L. Caldas, A. A. Ferreira, E. A. O. Saettone, A. Vannucci. *Tokamak turbulence at the scrape-off layer in TCABR with an ergodic magnetic limiter*. Journal of Plasma Physics **73**, 295 (2007).

- [16] P. Devynck, G. Bonhomme, E. Martines, J. Stöckel, G. Van Oost, I. Voitsekhovitch, J. Adámek, A. Azeroual, F. Doveil, I. Duran, E. Gravier, J. Gunn, M Hron. *Spatially resolved characterization of electrostatic fluctuations in the scrape-off layer of the CASTOR tokamak*. Plasma Physics and Controlled Fusion **47**, 269 (2005).
- [17] R. A. Moyer, T. E. Evans, T. H. Osborne, P. R. Thomas, M. Becoulet, J. Harris, K.-H. Finken, J. A. Boedo, E. J. Doyle, M. E. Fenstermacher, P. Gohil, R. J. Groebner, M. Groth, G. L. Jackson, R. J. La Haye, C. J. Lasnier, A. W. Leonard, G. R. McKee, H. Reimerdes, T. L. Rhodes, D. L. Rudakov, M. J. Schaffer, P. B. Snyder, M. R. Wade, G. Wang, J. G. Watkins, W. P. West, L. Zeng. *Edge localized mode control with an edge resonant magnetic perturbation*. Physics of Plasmas **12**, 0561199 (2005).
- [18] D. del Castillo-Negrete. *Chaotic transport in zonal flows in analogous geophysical and plasma systems*. Physics of Plasmas **7**, 1702 (2000).
- [19] L. M. Tozawa, L. F. Ziebell. *Stochastic diffusion of energetic ions due to incoherent lower hybrid waves*. Brazilian Journal of Physics **33**(4), 806 (2003).
- [20] C. F. F. Karney. *Stochastic ion heating by a lower hybrid wave*. Physics of Fluids **21**(9), 1584 (1978).
- [21] C. F. F. Karney. *Stochastic ion heating by a lower hybrid wave ii*. Physics of Fluids **22**(11), 2188 (1979).
- [22] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press (1993).
- [23] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke. *Chaos, an Introduction to Dynamical Systems*. Springer (1997).
- [24] F. Wagner, G. Becker, K. Behringer, D. Campbell, A. Eberhagen, W. Engelhardt, G. Fussmann, O. Gehre, J. Gernhardt, G. V. Gierke, G. Haas, M. Huang, F. Karger, M. Keilhacker, O. Klüber, M. Kornherr, K. Lackner, G. Lisitano, G. G. Lister, H. M. Mayer, D. Meisel, E. R. Müller, H. Murmann, H. Niedermeyer, W. Poschenrieder, H. Röhr H. Rapp, F. Schneider, G. Siller, E. Speth, A. Stäbler, K. H. Steuer, G. Venus, O. Vollmer, , Z. Yü. *Regime of improved confinement and high-beta in neutral-beam-heated divertor discharges of the ASDEX tokamak*. Physical Review Letters **49**, 1408 (1982).

- [25] F. Wagner. *Topics in toroidal confinement*. Plasma Physics and Controlled Fusion **39**, 23 (1997).
- [26] P. W. Terry. *Suppression of turbulence and transport by sheared flow*. Rev. Mod. Phys. **72**(1), 109–165 (Jan 2000).
- [27] A. J. Majda, P. R. Kramer. *Simplified models for turbulent diffusion: Theory, numerical modelling, and physical phenomena*. Physics Report **314**, 238 (1999).
- [28] C. Silva, I. Nedzelskiy, H. Figueiredo, J. A. C. Cabral, C. A. F. Varandas, J. Stöckel. *Limiter biasing experiments on the tokamak ISTTOK*. Czechoslovak Journal of Physics **53**(10), 937 (2003).
- [29] P. Devynck, J. Stöckel, J. Adámek, I. Dearonuran, M. Hronm, G. Van Oost. *Poloidal structure of the turbulence and the turbulent flux during edge plasma biasing in the Castor tokamak*. Czechoslovak Journal of Physics **53**(10), 853 (2003).
- [30] G. Van Oost, J. Adámek, V. Antoni, P. Balan, J. A. Boedo, P. Devynck, I. Duran, L. Eliseev, J. P. Gunn, M. Hron, C. Ionita, S. Jachmich, G. S. Kirnev, E. Martines, A. Melnikov, R. Schrittwieser, C. Silva, J. Stockel, M. Tendler, C. Varandas, M. Van Schoor, V. Vershkov, R. R. Weynants. *Turbulent transport reduction by $E \times B$ velocity shear during edge plasma biasing: recent experimental results*. Plasma Physics and Controlled Fusion **45**, 621 (2003).
- [31] W. P. de Sá. *Medida da Turbulência na Periferia do TBR-1*. Dissertação de mestrado IF-USP (1987).
- [32] D. F. Cruz Junior. *Análise do Espectro de Turbulência no TBR-1*. Dissertação de mestrado IF-USP (1987).
- [33] R. M. Castro. *Controle de Turbulência no Tokamak TBR-1*. Tese de doutorado IF-USP (1996).
- [34] R. P. da Silva. *Transporte partículas e energia no plasma do tokamak TBR-1: Diagnósticos e estudo experimental*. Tese de doutorado IF-USP (1989).
- [35] M. V. A. P. Heller, R. M. Castro, I. L. Caldas, Z. A. Brasília, R. P. Silva, I. C. Nascimento. *Correlation between plasma edge electrostatic and magnetic oscillations*

in the brazilian tokamak TBR. Journal of the Physical Society of Japan **66**, 3453 (1997).

- [36] A. A. Ferreira, M. V. A. P. Heller, I. L. Caldas. *Experimental analysis of mode coupling and plasma turbulence induced by magnetic fields.* Physics of Plasmas **7**, 3567 (2000).
- [37] R. S Dallaqua, A. Herscovitch, R. P. da Silva, I. C. Nascimento, R. M. O. Galvão. *Particle diffusion in TBR.* Il Nuovo Cimento **83**, 1 (1984).
- [38] I. C. Nascimento, Y. K. Kuznetsov, J. H. F. Severo, A. M. M. Fonseca, A. Elfimov, V. Bellintani, M. Machida, M. V. A. P. Heller, R. M. O. Galvão, E. K. Sanada, J. I. Elizondo. *Plasma confinement using biased electrode in the TCABR tokamak.* Nuclear Fusion **45**, 796 (2005).
- [39] I. C. Nascimento, Yu. K. Kuznetsov, Z. O. Guimarães-Filho, I. El Chamaa-Neto, O. Usuriaga, A. M. M. Fonseca, R. M. O. Galvão, I. L. Caldas, J. H. F. Severo, I. B. Semenov, M. V. P. Heller, V. Bellintani, J. I. Elizondo, E. Sanada. *Suppression and excitation of MHD activity with electrically polarized electrode at the TCABR tokamak plasma edge.* Nuclear Fusion, a ser publicado.
- [40] F.A. Marcus, T. Kroetz, M. Roberto, I.L. Caldas, E.C. da Silva, R.L. Viana, Z.O. Guimarães-Filho. *Chaotic transport in reversed shear tokamaks.* Nuclear Fusion **48**(2), 024018 (8pp) (2008).
- [41] E. C. Silva, I. L. Caldas, R. L. Viana. *Field line diffusion in a tokamak with ergodic limiter.* Physics of Plasmas **8**, 2855 (2001).
- [42] K. Ullmann, I. L. Caldas. *A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter and its dynamical analysis.* Chaos and Solitons and Fractals **11**, 2129 (2000).
- [43] F. A. Marcus. *Instabilidade Dinâmica das Flutuações Eletrostáticas em Tokamaks.* Dissertação de mestrado IF-USP (2002).
- [44] F. F. Chen. *Introduction to Plasma Physics.* Plenum Press, 2nd Edition (1974).
- [45] W. Horton. *Anomalous ion conduction from toroidal drift modes.* Plasma Physics and Controlled Fusion **23**, 1107 (1981).

- [46] Z. O. Guimarães-Filho, I. L. Caldas, R. L. Viana, I. C. Nascimento, Y. Kuznetsov, J. Kurths. *Recurrence quantification analysis of electrostatic fluctuations in fusion plasmas*. Physics Letters A, aceito para publicação (2007).
- [47] Ch. P. Ritz, R. V. Bravenec, P. M. Schoch, R. D. Bengtson, J. A. Boedo, J. C. Forster, K. W. Gentle, Y. He, R. L. Hickok, Y. J. Kim, H. Lin, P. E. Phillips, T. L. Rhodes, W. L. Rowan, P. M. Valanju, A. J. Wootton. *Fluctuation-induced energy flux in the tokamak edge*. Physical Review Letters **62**(16), 1844 (1989).
- [48] J. W. Connor, H. R. Wilson. *Survey of theories of anomalous transport*. Plasma Physics and Controlled Fusion **36**, 719 (1994).
- [49] W. Horton, A. Hasegawa. *Quasi-two-dimensional dynamics of plasma and fluids*. Chaos **4**(2), 227 (1994).
- [50] I. L. Caldas, F. A. Marcus, A. M. Batista, R. L. Viana, S. R. Lopes, M. V. A. P. Heller, Z. O. Guimarães-Filho, P. J. Morrison, W. Horton. Turbulence induced transport in tokamaks. volume 875 pages 341–346. AIP 2006.
- [51] A. M. Batista, I. L. Caldas, R. L. Viana, S. Lopes, W. Horton, P. J. Morrison. *Nonlinear three-mode interaction and drift-wave turbulence in a tokamak edge plasma*. Physics of Plasmas **13**, 042510 (2006).
- [52] S. J. Camargo, B. D. Scott, B. D. Biskamp. *The influence of magnetic fluctuations on collisional drift-wave turbulence*. Physics of Plasmas **3**, 3912 (1996).
- [53] A. J. Lichtenberg, M.A. Lieberman. *Regular and Chaotic Motion*. Springer (1995).
- [54] I. Doxas, W. Horton, H. L. Berk. *Stochastic diffusion in two-dimensional periodic flow*. Physics of Fluids **2**, 1906 (1990).
- [55] Ch. P. Ritz, E. J. Powers, T. L. Rhodes, R. D. Bengtson, K. W. Gentle, H. Lin, P. E. Phillips, A. J. Wootton, D. L. Brower, N. C. Luhmann Jr., W. A. Peebles. *Advanced plasma fluctuation analysis techniques and their impact on fusion research*. Review of Scientific Instruments **59**(8), 1739 (1988).
- [56] Yu.K. Kuznetsov. 10th IAEA Technical Meeting on H-mode Physics and Transport Barriers, St. Petersburg, Russia. (2005).

- [57] W. Horton, H. B. Park, J. M. Kwon, D. Strozzi, P. J. Morrison, D. I. Choi. *Drift wave test particle transport in reversed shear profile*. Physics of Plasmas **5**, 3910 (1998).
- [58] M. El Mouden, D. Saifaoui, A. Dezairi, B. Zine, M. Eddahby. *Transport barriers with magnetic shear in a tokamak*. Journal of Plasma Physics **73**, 439 (2006).

Apêndice A

Cálculo Numérico

Para que este trabalho fosse desenvolvido, o cálculo numérico foi sem dúvida uma ferramenta de grande importância para obter os resultados e testar o modelo. Por este motivo, incluímos este apêndice para registrar a técnica utilizada e assim tornar fácil a reprodução dos resultados e evidenciar os limites técnicos da simulação numérica. A reprodutibilidade dos resultados oriundos de cálculos numéricos depende de alguns fatores. É comum encontrar diferenças nos cálculos quando trabalhamos com processadores, compiladores e algoritmos diferentes. Tomando este cuidado, fizemos algumas experiências para garantir a confiabilidade dos resultados.

Primeiro foi a escolha do compilador. Desenvolvemos o programa para integrar o sistema de equações diferenciais em Pascal para o compilador FreePascal 2.0, para o sistema operacional Linux, aplicando o algoritmo de integração conhecido como algoritmo de Bulirsch-Stoer.

Uma imprecisão numérica significativa destruiria o caráter conservativo do sistema Hamiltoniano considerado. Adotamos uma precisão no integrador da ordem de 10^{-12} , integramos o mapa da figura 4.1A com o tempo de integração de 10^4 e não observamos qualquer desvio nos mapas, todos mantiveram o padrão periódico testado. Repetimos o teste e encontramos o limite para a precisão do integrador em 10^{-7} , deste modo, para assegurar a confiabilidade nos cálculos sem aumentar o tempo de processamento, adotamos a precisão com 10^{-9} . As variáveis para o cálculo foram do tipo *double*, ou seja, variáveis com 16 dígitos significativos.

Quanto ao algoritmo integrador, tínhamos como opções o Runge Kutta 4 ordem com passo variável e o Bulirsch-Stoer. Estes dois algoritmos foram obtidos da referência [?] e os aplicamos no problema do oscilador harmônico forçado, construindo um mapa de Poincaré com cada um dos algoritmos. As diferenças entre os mapas foram muito sutis, embora nem todos os pontos tenham se apresentado exatamente no mesmo lugar. Porém não houve qualquer alteração no aspecto do mapa como um todo, apresentando o mesmo padrão. Para o nosso caso das ondas de deriva, apareceu uma pequena diferença nos mapas e nos gráficos do desvio quadrático médio e da difusão temporal, mas, quando calculado o coeficiente de difusão, não obtínhamos alterações na ordem de grandeza dos valores, e portanto o aspecto dos gráficos foi preservado.

Adotamos o algoritmo de Bulirsch-Stoer, pois este vem sendo utilizado com comprovada eficiência nos trabalhos do grupo [41] que também realiza pesquisa em sistemas Hamiltonianos conservativos. Fizemos testes também com o programa Mathematica versão 5.2 para Linux, um pacote com mais de 10 anos em uso pelos diversos centros acadêmicos, pois procuramos alternativas para a apresentação de alguns resultados que exigiriam mudanças no programa principal.

Os histogramas e os gráficos de barras foram feitos utilizando o programa Origin na versão 5 para o sistema operacional Windows, nas demais figuras utilizamos o pacote XmGrace para o sistema operacional Linux.

Apêndice B

Publicações e Eventos

Produção bibliográfica

- MARCUS, F. A. ; KROETZ, T. ; CALDAS, I. L. . **Chaotic transport in reversed-shear tokamaks.** *Nuclear Fusion*, 2008.
- CALDAS, I. L. ; MARCUS, F. A. . **XI Latin American Workshop on Plasma Physics.** *AIP Conference Proceedings*, v. 875, p. 341-346, 2006.

Participações em Congresso

- 9th Brazilian Meeting on Plasma Physics. **Chaotic Transport in Reverse-Shear Flow Tokamaks**, 2007.
- The 9th Experimental Chaos Conference. **Chaotic Transport in Tokamaks.**, 2006.
- 8th Brazilian Meeting on Plasma Physics. **Dynamical Instabilities of Electrostatic Fluctuations in Tokamaks**, 2005.
- X Latin American Workshop on Plasma Physics. **Electrostatic Fluctuations in Tokamaks**, 2003.

- 6th Brazilian Meeting on Plasma Physics. **Dynamics of Electrostatic Fluctuations in Tokamaks**, 2001.

Lista de Figuras

2.1	Esquema dos principais componentes do Tokamak.	9
2.2	Aproximação cilíndrica ao plano cartesiano.	18
4.1	Com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0$, apresentamos, de cima para baixo, o espaço de fase para $U = 0$, $U = 0,5$, $U = 1,5$	35
4.2	Com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,1$, apresentamos, de cima para baixo, o espaço de fase para $U = 0$, $U = 0,5$, $U = 1,5$	38
4.3	Limite do coeficiente de difusão temporal (equação 3.20) em função do parâmetro de confinamento U . Apresentamos as amplitudes $A_2/A_1 = 0,1$ em preto, $A_2/A_1 = 0,3$ em azul e $A_2/A_1 = 0,8$ em verde.	40
4.4	Coeficiente de difusão em função do tempo para $U = 0$ e a razão entre as amplitudes dada por $A_2/A_1 = 0,1$	41
4.5	Coeficiente de difusão em função da amplitude das ondas A_2/A_1 , com $U = 0$	41
4.6	Coeficiente de difusão em função do parâmetro de confinamento U . Apresentamos as amplitudes $A_2/A_1 = 0,1$ em preto, $A_2/A_1 = 0,4$ em vermelho, $A_2/A_1 = 0,6$ em verde e $A_2/A_1 = 0,8$ em azul. Com o aumento da amplitude da segunda onda o máximo da difusão se desloca.	42
4.7	Coeficiente de difusão em função do parâmetro de confinamento U com $A_2/A_1 = 0,8$. Com as velocidades de fase da primeira onda dadas por $u_1 = 1,0$, e da segunda onda dadas por $u_2 = 1,4$ em preto, $u_2 = 2,0$ em azul e $u_2 = 4,0$ em verde.	43
4.8	Coeficiente de difusão em função do número de onda radial k_{x2} com $U = 0$ e $A_2/A_1 = 0,4$	44
4.9	Coeficiente de difusão em função do número de onda poloidal k_{y2} , com $U = 0$	44

4.10	Coeficiente de difusão em função da fase da segunda onda δ_2 , com $U = 0$ e $A_2/A_1 = 0,4$	46
4.11	Histograma com a curva gaussiana ajustada para $A_2/A_1 = 0,6$ em $U = 0$. .	47
4.12	Gráfico da série temporal $x \times t$ de uma partícula localizada inicialmente em $(x, y) = (0,7869; \pi)$, com a correspondente trajetória no espaço de fase $y \times x$, e sem a adição da segunda onda ($A_2/A_1 = 0$).	48
4.13	Gráfico da série temporal $x \times t$ de uma partícula localizada inicialmente em $(x, y) = (0,7869; \pi)$, com a correspondente trajetória no espaço de fase $y \times x$, e com a segunda onda ($A_2/A_1 = 0,04$).	48
4.14	Gráfico da série temporal $x \times t$ de uma partícula localizada inicialmente em $(x, y) = (0,7869; \pi)$, com a correspondente trajetória no espaço de fase $y \times x$, e com a segunda onda ($A_2/A_1 = 0,08$).	49
5.1	Perfis radiais I (cheia verde), II (tracejada) e III (traço-ponto azul) do parâmetro de confinamento $U(x)$ para o caso do campo elétrico monotônico.	53
5.2	Com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0$, apresentamos, de cima para baixo, o espaço de fase com os perfis radiais de U (figura 5.1) para os casos I ($-0,1 < U < 0,1$), II ($-0,8 < U < 0,8$) e III ($-1,3 < U < 1,3$).	54
5.3	Com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,1$, apresentamos, de cima para baixo, o espaço de fase com os perfis radiais de U (figura 5.1) para os casos A ($-0,1 < U < 0,1$), B ($-0,8 < U < 0,8$) e C ($-1,3 < U < 1,3$).	56
5.4	Espaço de fase com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$, o mesmo que a figura 5.3C.	58
5.5	Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial I da figura 5.1.	59

5.6	Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial II da figura 5.1.	60
5.7	Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial III da figura 5.1.	60
5.8	Gráficos das séries temporais $x \times t$ e $y \times t$, de uma partícula localizada inicialmente em $(x, y) = (0, 96; \pi)$, com a correspondente trajetória no espaço de fase $x \times y$, e a razão das amplitudes $A_2/A_1 = 0,4$	61
5.9	Gráficos das séries temporais $x \times t$ e $y \times t$, de uma partícula localizada inicialmente em $(x, y) = (0, 96; \pi)$, com a correspondente trajetória no espaço de fase $x \times y$, e a razão das amplitudes $A_2/A_1 = 0,8$	62
6.1	Perfil radial I (curva cheia verde), II (curva tracejada) e III (curva traço-ponto azul) do parâmetro de confinamento $U(x)$ para o caso do campo elétrico não monotônico.	67
6.2	Espaço de fase com apenas a primeira onda, para os três perfis considerados neste capítulo, conforme a tabela 6.1.	68
6.3	Espaço de fase para o caso I do potencial de equilíbrio, destacando a mudança que ocorre com as ilhas com o aumento da amplitude da segunda onda. Em A temos $A_2/A_1 = 0,4$, e em B $A_2/A_1 = 0,8$	70
6.4	Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial I da figura 6.1.	72
6.5	Espaço de fase para o caso I do potencial de equilíbrio, destacando a mudança que ocorre com as ilhas com o aumento da amplitude da segunda onda. Em A temos $A_2/A_1 = 0,0$, em B $A_2/A_1 = 0,1$, e em C $A_2/A_1 = 0,4$	73

6.6	Espaço de fase para o caso II do potencial de equilíbrio, destacando a mudança que ocorre com as ilhas com o aumento da amplitude da segunda onda. Em A temos $A_2/A_1 = 0,4$ e, em B, $A_2/A_1 = 0,8$	75
6.7	Espaço de fase para o caso II do potencial de equilíbrio sem a segunda onda (em A), e com a perturbação da segunda onda dada por $A_2/A_1 = 0,4$. Destacando, em B, a presença da barreira em $x \approx 0,8$ e a mudança que ocorre com as ilhas com o aumento da amplitude da segunda onda.	76
6.8	Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial II da figura 6.1.	77
6.9	Espaço de fase para o caso III do potencial de equilíbrio, destacando a mudança que ocorre com as ilhas com o aumento da amplitude da segunda onda. Em A temos $A_2/A_1 = 0,4$ e, em B, $A_2/A_1 = 0,8$	78
6.10	Gráfico relacionando o coeficiente de difusão radial $\langle D_x \rangle$ para uma grade com 32×33 de partículas localizadas em uma estreita faixa $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, com a razão entre as amplitudes das ondas dada por $A_2/A_1 = 0,4$ (no gráfico A), e $A_2/A_1 = 0,8$ (no gráfico B), para o perfil do potencial III da figura 6.1.	79
7.1	Visão esquemática do Tokamak TCABR.	82
7.2	Visão esquemática da seção poloidal do Tokamak TCABR onde o eletrodo é colocado.	83
7.3	Função espectral $S(k, f)$ obtida na descarga de número 17682 na borda do plasma com raio $r = 18cm$. A intensidade do espectro é maior na cor vermelha e decresce para as de tom azul.	84
7.4	Função espectral $S(k)$ obtida na descarga de número 17682 para uma faixa de frequências em torno de $20kHz$, na borda do plasma com raio $r = 18cm$	86
7.5	Perfis do potencial elétrico flutuante em função do raio para o TCABR. A curva azul representa o ajuste para o perfil com o eletrodo e a curva verde para o perfil sem o eletrodo.	87

7.6	Perfil radial (curva cheia verde) sem a ação do eletrodo, e com o eletrodo polarizado (curva azul) do parâmetro de confinamento $U(r)$ (casos de campo elétrico não monotônico).	90
7.7	Espaço de fase sem ação do eletrodo, com o parâmetro de confinamento $U(x)$ para o caso do campo elétrico não monotônico.	91
7.8	Espaço de fase com o eletrodo polarizado, com o parâmetro de confinamento $U(x)$ para o caso do campo elétrico não monotônico.	92
7.9	De cima para baixo: gráfico da corrente de saturação iônica do plasma (proporcional à densidade local), corrente do eletrodo e a tensão do eletrodo [56].	94

Lista de Tabelas

4.1	Tabela com os parâmetros das ondas usados para o cálculo numérico. . . .	37
5.1	Tabela com os coeficientes angular A e linear B utilizados para a construção do espaço de fase para a expressão 5.1.	52
6.1	Tabela com os coeficientes A , B e C utilizados para a construção do espaço de fase para a expressão 6.2.	67
7.1	Tabela com os parâmetros adimensionais utilizados para construir os gráficos do parâmetro de confinamento U	90