**Universidade de São Paulo
Instituto de Física**

**Perturbações temporais em condensados de Bose-Einstein
diluídos e vórtice em condensados densos**

VICENTE PEREIRA DE BARROS

Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Gammal

*Tese apresentada ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo, como parte
dos requisitos para obtenção do título de
Doutor em Ciências.*

Banca Examinadora:

Emerson José Veloso Velosos de Passos - IFUSP

Vanderlei Salvador Bagnato - IFSC/USP

Arnaldo Gammal - IFUSP

Roberto André Kraenkel - IFT/UNESP

Marcelo Oliveira da Costa Pires - UFABC

**São Paulo
2007**

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Barros, Vicente Pereira de

“Perturbações temporais em condensados de Bose-Einstein
diluídos e vórtice em condensados densos.”
São Paulo, 2007.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Experimental
Orientador: Prof. Dr. Arnaldo Gammal
Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Mecânica quântica;
2. Física estatística;
3. Condensado de Bose-Einstein.

USP/IF/SBI-082/2007

* * *

dedico à pessoa que um dia decidir dividir a sua vida e seu amor comigo.

* * *

“Assim, procurei descobrir o que é o conhecimento e a sabedoria,
o que é a tolice e a falta de juízo. Mas descobri que isto é o mesmo
que correr atrás do vento...”

Salomão, *Bíblia, Eclesiastes capítulo 1 versículo 17*

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo milagre da vida.

Ao professor Dr. Arnaldo Gammal, pela orientação e paciência em tolerar minha ignorância e limitações em minha formação básica. Ao professor Fatkhulla Abdullaev da Universidade de Tashkent no Uzbequistão *thank you a lot*. Ao professor Klaus Ziegler da Universidade de Augsburg pelo estágio na Alemanha *Danke schön Herr Ziegler*.

Ao professor Dr. Jacques Lépine pela amizade e compreensão durante o período inicial de trabalho no IAG.

Aos amigos e colegas de trabalho na Alemanha que ajudaram a estadia em terras germânicas não ser apenas frutífera em minha formação acadêmica como rica em experiências humanas e culturais. *Danke schön Christopher und Sasha für Alles*.

Aos meus amigos do Instituto de Física. Em especial aos que passaram pelo Instituto e agora ficaram um pouco distantes como Fernando Tadashi, Andrea Taschetto, Marcelo Maia Garcia, Alexsandro Jacob. O meu sincero muito obrigado.

Aos irmãos de Fé do Instituto de Física que ajudaram em todo este trabalho, agradeço pelos momentos de alegria em nossa missão aqui.

Aos meus familiares, meus pais (Rita e Onofre), minha irmã e meus dois sobrinhos Felipe e Priscila.

À CAPES, pelo apoio financeiro tanto com a bolsa no Brasil quanto pela bolsa no exterior dentro do programa CAPES/DAAD/PROBAL.

Resumo

Neste trabalho estudamos a interação entre dois sólitons em condensados de Bose-Einstein diluídos submetidos a perturbações temporais nos potenciais de armadilhamento e de interação entre as partículas. Nesta abordagem utilizamos a aproximação de campo médio dada pela equação de estado da Gross-Pitaevskii. Estudamos também vórtices em condensados de Bose-Einstein densos usando o modelo de “bósons escravos”.

A perturbação temporal do potencial de armadilhamento gera o fenômeno de ressonância paramétrica na distância relativa entre os sólitons dependendo da fase inicial entre os mesmos. Para o caso em que a diferença de fase entre os sólitons é nula, existe uma força atrativa entre os mesmos e a distância relativa oscila com uma amplitude que aumenta exponencialmente com o tempo quando a perturbação temporal varia com uma frequência igual ao dobro da frequência natural de armadilhamento. Para o caso em que a diferença de fase entre os sólitons é π , existe uma distância relativa de equilíbrio onde a posição do sólitons permanece fixa, se o potencial de armadilhamento varia com uma frequência específica, igual ao dobro da frequência de pequenas oscilações do potencial de interação entre os sólitons, a distância relativa oscilará ao redor da distância de equilíbrio de forma paramétrica.

A perturbação temporal do potencial de interação entre as partículas gera oscilações na distância relativa entre os sólitons de forma paramétrica para o caso em que a diferença de fase inicial é nula. A frequência que excita uma ressonância paramétrica é igual ao dobro da frequência natural de armadilhamento. Para o caso em que a diferença de fase inicial entre os sólitons é π não ocorre ressonância paramétrica na distância relativa entre os sólitons. No entanto, a diferença de fase entre os sólitons é muito sensível a perturbações do potencial de interação entre as partículas.

Em condensados de Bose-Einstein densos estudamos a inserção do termo cinético indo além da aproximação de Thomas-Fermi e seu efeito na velocidade crítica para formação de vórtices no condensado. A inserção do termo cinético gera a diminuição da depleção se comparado a aproximação de Thomas-Fermi e o aumento da velocidade crítica de formação dos vórtices da ordem de 10%.

Abstract

In this work we studied the soliton interactions between two solitons under time-dependent perturbations in trap potential and interparticle potential. In this picture we used mean-field approach given by Gross-Pitaevskii equation. We also studied vortices formation in a dense Bose-Einstein condensate using slave bosons model.

The time-dependent perturbation in trap potential produces a parametric resonance in the relative distance between solitons, which is dependent of initial phase difference between them. In the initial phase zero, there is an attractive force between solitons and the relative distance oscillates with a exponential enhancement in the amplitude when the system is excited by a frequency equal to the double of the trap frequency. For phase difference equal to π there exists an equilibrium distance where the solitons are fixed, if the trap potential changes in a specific frequency, which is a double of small oscillations frequency of interaction solitons potential, the relative distance oscillates around the equilibrium distance parametrically.

The time dependent perturbation in interparticle potential produces parametric oscillations in the relative distance between solitons for case where initial phase difference is zero. The frequency which excites the parametric resonance is the double of trap frequency. For initial phase difference equal to π there is no parametric resonance in relative distance. However, the phase difference between soliton is sensible to perturbations in the interparticle potential.

In a dense Bose-Einstein condensate we studied the insertion of kinetic term going beyond the Thomas-Fermi approximation and its effect in critical frequency of vortices formation. The insertion of kinetic term decreases the condensate depletion if we compare to Thomas-Fermi approximation and the critical velocity of vortices formation is increased around 10%.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Motivação	5
1.2	Objetivos	7
2	Interação sóliton-sóliton	9
2.1	Sólitons em Condensados de Bose-Einstein.	10
2.2	Cálculo variacional	12
2.2.1	Dinâmica de um único sóliton	12
2.2.2	Sistema com dois sólitons	14
3	Dinâmica de sólitons na presença de potencial de armadilhamento	22
3.1	Variações temporais no potencial de armadilhamento	22
3.1.1	Diferença de fase $\phi(t = 0) = 0$	29
3.1.2	Diferença de fase $\phi(t = 0) = \pi$	31
3.2	Variações temporais no potencial interatômico	37
3.2.1	Resultados	39
4	Vórtices em condensados densos	45
4.1	O modelo de “bósons escravos”	45
4.2	Metodo numérico	48
4.3	Resultados de simulações	50
4.4	Efeito da temperatura	54
5	Conclusões	61
A	Método de Crank-Nicolson e <i>split-step</i> aplicados a Gross-Pitaevskii	64

B	Tabela de derivadas e integrais	70
C	Determinação da fase entre dois sólitons	71
D	Método de relaxação	74
D.1	Evolução no tempo imaginário	74
E	Período no regime oscilante de sólitons	76
	Referências Bibliográficas	76

Capítulo 1

Introdução

Na segunda década do século XX o físico indiano Satyendra Nath Bose desenvolveu uma estatística para deduzir a lei de Planck para radiação de corpo negro [1], na qual não existia restrição quanto ao número de partículas que podem ocupar um nível de energia. Einstein posteriormente estendeu a aplicação desta estatística para átomos [2], neste trabalho Einstein previu a existência de um fenômeno no qual uma parcela significativa de átomos estariam no estado fundamental do sistema. Este fenômeno ficou conhecido como a condensação de Bose-Einstein.

A condensação de Bose-Einstein (CBE em português e BEC em inglês) acontece quando um sistema de bósons é suficientemente resfriado e boa parte dos átomos ocupam o estado fundamental, ou seja, saindo de uma configuração de maior desordem o sistema se altera para um novo estado e muitos observáveis são alterados e há uma quebra de simetria, o que quer dizer uma transição de fase. Na ocasião do trabalho de Einstein foi a primeira vez que se tratava uma transição de fase no gás ideal.

A obtenção do condensado de Bose-Einstein por resfriamento de átomos com *laser* e armadilhas magnéticas usando gases diluídos foi obtido primeiramente por Eric Cornell e Carl Wieman em 1995 na Universidade do Colorado em Boulder, usando um gás de átomos de ^{87}Rb [3], na Rice University foi obtido por Hulet o condensado de átomos de ^7Li [4, 5], no MIT foi obtido por Ketterle o condensado de átomos de ^{23}Na [6], e posteriormente ^1H [7], ^{85}Rb [8] e ^4He metaestável [9, 10]. Todas estas grandes realizações propiciaram um grande avanço na compreensão da Física atômica. Recentemente foram obtidos condensados de ^{41}K [11], ^{133}Cs [12], ^{174}Yb [13] e ^{52}Cr [14], a nova fronteira atualmente é a produção condensados de moléculas

[15, 16].

O uso de átomos alcalinos nas primeiras experiências está relacionado ao fato de que nestes átomos todas as camadas eletrônicas são preenchidas exceto a última camada s , esta estrutura mais simples de camadas, juntamente com o fato de que os átomos alcalinos possuem momento magnético, propiciam melhores condições para o resfriamento e armadilhamento dos átomos.

As técnicas experimentais para obtenção de átomos resfriados utilizam a seleção de átomos de menor energia através de armadilhas magnéticas-ópticas. A técnica consiste na associação de um campo magnético não homogêneo com um mínimo no centro da armadilha e da utilização de feixes de *lasers* polarizados apontados para o centro [17].

A associação dessas técnicas de confinamento e resfriamento consegue obter temperaturas baixíssimas, de centenas de nano-Kelvin a dezenas de micro-Kelvin. A densidade do gás no centro do potencial também é bem baixa variando em torno de 10^{11} átomos/cm³ a 10^{15} átomos/cm³.

O grupo de Boulder obteve experimentalmente a condensação do ^{87}Rb após a verificação que a distribuição de velocidades do gás ao ser atingida uma temperatura em torno de 100 nK era a mesma distribuição do estado fundamental do potencial de armadilhamento, no caso, assimétrica e não a distribuição clássica de Maxwell-Boltzmann que é simétrica [3] e o que seria esperado para um gás clássico.

A estabilidade do condensado de Bose-Einstein depende muito da força de interação entre os átomos em uma armadilha. Quando temos forças de interação entre átomos repulsivas o condensado é estável e quando temos forças atrativas o condensado é meta-estável possuindo um número crítico a partir do qual o condensado colapsa [18].

Evidências típicas de que o sistema gasoso chegou à condensação são a superfluidez e a formação de vórtices. Inclusive o estudo destes fenômenos por métodos teóricos têm despertado um grande interesse [19].

Uma teoria que explica muito bem o comportamento do condensado em seu estado mais diluído é a teoria de campo médio de Gross-Pitaevskii [20] que associa o comprimento de espalhamento à força de interação entre os átomos. Nas experiências com gás de rubídio a densidade do gás era 2×10^{10} átomos/cm³ [3, 21].

Nestas experiências a energia potencial de armadilhamento, que é fundamental

para o confinamento das partículas de menor energia no estado fundamental, é tipicamente parabólica e é um termo a mais na equação que descreve o comportamento do parâmetro de ordem do condensado de Bose-Einstein [22].

A equação de Gross-Pitaevskii matematicamente equivale a equação de Schrödinger não linear cujo o coeficiente da não linearidade está associado a uma interação de contato entre os átomos.

Esta característica não linear na equação de Gross-Pitaevskii levou à pesquisa de estruturas que se formam em sistemas não lineares em condensados de Bose-Einstein. É relativamente recente a obtenção de sólitons, ou seja, estruturas típicas de sistemas não lineares em condensados de Bose-Einstein [23, 24]. A obtenção dos sólitons era alcançada pela variação do comprimento de espalhamento de forma abrupta e posteriormente a expansão do condensado.

Sóliton é uma onda que não tem seu perfil alterado durante sua propagação devido ao equilíbrio entre a dispersão e a não linearidade [25]. Existem vários fenômenos na natureza onde ocorrem a formação de sólitons. Os mais conhecidos são sólitons formados na água como os que motivaram John Scott Russell em 1834 a fazer a primeira descrição deste fenômeno ao observar uma onda formada em um canal quando um bote era puxado por dois cavalos.

Boussinesq's, Korteweg e de Vries em 1872 e 1895 respectivamente mostraram que era matematicamente possível a descrição de uma onda solitária através de equações diferenciais não lineares, uma solução era o secante hiperbólico.

Na década de 50 Gel'fand, Levitan e Marchenko [26, 27] desenvolveram a “transformada inversa do espalhamento” (*Inverse Scattering Transform*, “IST”) que a partir das informações de uma onda espalhada reconstruía o potencial espalhador que a gerou. Miura, Gardner e Kruskal [28] utilizaram a “IST” na solução da equação de Korteweg-de Vries e na obtenção das equações de movimento e quantidades conservadas em sólitons.

Fermi, Pasta e Ulam em 1955 [29] e Zabusky e Kruskal em 1965 [30] fizeram importantes avanços na compreensão da interação entre sólitons. A compreensão da dinâmica de interações entre sólitons teve um forte avanço com o trabalho de Zakharov e Shabat [31] (1972) que utilizando a “IST” obtiveram de forma mais geral a dinâmica de um conjunto de sólitons para as equações de Schrödinger não linear e do seno-Gordon .

Posteriormente outra área em que a formação de sólitons foi bem estudada foi a óptica, mais especificamente as fibras ópticas. Em 1973, Akira Hasegawa dos Laboratórios Bell foi o primeiro a sugerir que poderiam existir sólitons em fibras ópticas devido a auto-modulação da fase e a dispersão anômala. Hasegawa também propôs a idéia de sistemas de transmissão baseados em sólitons para melhora do desempenho da óptica aplicada à telecomunicações [32, 33].

Podemos perceber que apenas o estudo dos sólitons já apresenta um vasto campo de conhecimento. No entanto, a riqueza da fenomenologia presente na condensação de Bose-Einstein não está restrita somente em termos do estudo da dinâmica do condensado, mas se estende além para a compreensão da natureza da Física atômica e molecular.

Como por exemplo no mesmo campo de estudo da matéria condensada um fenômeno de grande importância e análogo a superfluidade é a supercondutividade. E o estudo de sistemas de férmions em que este fenômeno é visível gerou uma grande quantidade de trabalhos durante os últimos anos.

Um fenômeno muito estudado é o isolante de Mott, que consiste em uma material que deveria ser condutor pela teoria convencional de bandas, mas que experimentalmente mostra-se isolante. Este efeito é devido as interações elétron-elétron que não são consideradas na teoria de bandas clássica. Em geral o isolante de Mott ocorre quando o potencial repulsivo de Coulomb gerado entre os elétrons é grande o suficiente para criar uma barreira de condução no material. Uma das mais simples teorias no estudo deste fenômeno é o modelo Hubbard.

O modelo de Hubbard é um modelo simples de interação de partículas em uma rede com apenas dois termos no Hamiltoniano. O termo cinético permite o tunelamento de partículas entre sítios da rede e um termo potencial representa as interações no sítio da rede. As partículas podem ser férmions, como no trabalho original de Hubbard [34], mas há aplicações do modelo em bósons em redes óticas, o assim denominado de modelo de Bose-Hubbard [35, 36].

A transição de fase superfluidade e isolante de Mott em gases ultraresfriados foi observada e explicada utilizando-se o modelo de Bose-Hubbard [37]. O modelo de “bósons escravos” trata de condensados de Bose-Einstein em regime mais denso. Originalmente esta abordagem de campos foi usada no modelo (de férmions) de Hubbard [38, 39]

Em meados dos anos 90 este modelo foi aplicado na descrição de um gás de bósons denso e armadilhado [40], este modelo tem sido útil no estudo destes sistemas [41, 42, 43].

1.1 Motivação

O estudo de interações entre sólitons possui um formalismo bem fundamentado [44, 45]. Karpman e Solov'ev [46] e posteriormente Gordon [47] estudaram o efeito de fases em dois sólitons interagentes e usando um 'ansatz' hiperbólico (isto é, uma solução construída com funções hiperbólicas) construiu um sistema de equações diferenciais ordinárias com as quais é possível prever o comportamento dos sólitons a partir de sua fase relativa, notando que dois pulsos solitônicos podem interferir na transmissão de um sinal em fibra óptica.

Anderson e Lisak [48] estudaram de forma mais geral a dinâmica de um conjunto de sólitons mostrando que a situação exemplificada por Gordon é um caso particular. Seus estudos mostraram as limitações da transmissão de informações por fibras ópticas.

O estudo de sólitons na equação de Schrödinger não linear sobre a ação de um potencial espacial periódico foi feito por Sharf e Bishop [49]. Os autores mostram que um potencial com largura comparável as dimensões do sóliton causam efeitos de radiação caóticos.

Na condensação de Bose-Einstein a criação, a dinâmica e a manipulação de sólitons é importante para um grande número de aplicação como na construção de lasers atômicos [50], interferência atômica [51], na construção de giroscópios e instrumentos de precisão.

No caso de condensados de Bose-Einstein uma interessante área de investigação são as alterações temporais na equação de Gross-Pitaevskii. Com o advento da ressonância *Feshbach* [52], com a qual é possível mudar o sinal do comprimento de espalhamento dos átomos tornando o sistema repulsivo ou atrativo, o efeito de modos ressonantes se tornou um campo interessante. Saito e Ueda [53] mostraram que sólitons brilhantes podem ser estabilizados com oscilações rápidas entre as forças atrativas e repulsivas. A importância de se estudar sistemas perturbados externamente é que pode-se controlar o condensado com possíveis aplicações em

interferometria atômica [50].

A energia de troca na armadilha e o comportamento caótico das oscilações foram estudados por Elyutin [54] em um sistema regido pela equação de Gross-Pitaevskii com oscilações no potencial de armadilhamento. A colisão entre dois sólitons foi estudada por Dmitriev [55].

Baizakov et al [56] estudaram um potencial de armadilhamento dependente do tempo focalizando o fenômeno de ressonância paramétrica (é o fenômeno no qual uma dada frequência excita um aumento exponencial da amplitude de oscilação) através de uma aproximação variacional. Perceberam que as múltiplas colisões dos sólitons são elásticas e não alterando assim o equilíbrio do condensado nas bordas.

Abdullaev et al. [57] aplicaram um estudo variacional de sólitons formados em um sistema sob a atuação de um potencial óptico com o termo não linear da Gross-Pitaevskii dependente do tempo, a modulação temporal periódica da não linearidade leva a um comportamento caótico na dinâmica da largura dos sólitons. O aumento da intensidade da perturbação na não linearidade leva à separação dos sólitons.

Na mesma linha de pesquisa o efeito da perturbação temporal harmônica da não linearidade em condensados em duas e três dimensões mostraram que é possível obter-se situações estáveis do condensado [58].

Em trabalhos recentes [59] o estudo da dependência temporal da armadilha e da não linearidade na equação de Gross-Pitaevskii indicaram que a amplitude de sólitons brilhantes depende do valor absoluto da intensidade da não linearidade, enquanto que a dinâmica dos mesmos é fortemente influenciada pelo potencial de armadilhamento.

Kraenkel et al. [60] também estudaram a ressonância paramétrica gerada por perturbações no comprimento de espalhamento, neste trabalho foi feito o cálculo variacional de um condensado simples representado por um 'ansatz' gaussiano. Fenômenos de ressonância no raio quadrático médio de condensados sob a ação de uma não linearidade que varia periodicamente no tempo também foram observados [61], a frequência ressonante era proporcional a assimetria da armadilha, a presença de vórtices neste sistema também influencia na magnitude das oscilações.

Uma característica interessante da formação de vórtices é que os mesmos são uma assinatura da superfluidez. De uma maneira geral um vórtice é um escoamento turbulento giratório, é um movimento espiral ao redor de um centro de rotação. Em

outras palavras em um sistema gasoso confinado girando ao redor de um eixo, um superfluido apresentaria uma região sem fluido, este ponto é denominado de vórtice. Assim, a partir de uma dada frequência forma-se um vórtice em um sistema girante.

Dalfovo e Stringari [62] resolveram a equação de Gross-Pitaevskii para um gás de Bose armadilhado e diluído modelado por um potencial harmônico isotrópico e determinaram uma aproximação analítica que fornecia uma expressão que relaciona a frequência de formação de um vórtice e o número de partículas, o que indicou que a frequência crítica de formação diminui com o aumento do número de partículas.

Para frequência maiores que a frequência crítica pode ocorrer a formação de mais de um vórtice no condensado [63]. Feder e Clark [64] trataram a Gross-Pitaevskii com a técnica da evolução no tempo imaginário e, comparando a energia entre os estados com e sem vórtice, obtiveram o comportamento da frequência crítica em função da assimetria da armadilha e notaram que para armadilhas mais assimétricas a frequência crítica tende a ser maior. Os mesmos autores estudaram a formação de vórtices múltiplos usando o mesmo procedimento e determinaram uma transição entre a superfluidade e o comportamento de corpo sólido [65].

Para o caso de condensados densos tratados por outras teorias além do campo médio previsões sobre a formação dos condensados também foram realizadas e indicaram um comportamento semelhante para a relação de frequência crítica e número de partículas [66], neste mesmo trabalho foi desenvolvida uma versão renormalizada da equação de Gross-Pitaevskii.

Toda esta efervescência no estudo de dinâmica temporal de sólitons em condensados e o estudo do comportamento superfluido do gás de Bose justificam o estudo mais aprofundado destes temas como veremos a seguir.

1.2 Objetivos

Atualmente ainda não é simples medir experimentalmente a fase de sólitons que tenham sido formados recentemente [23], existem medidas indiretas da fase entre sólitons [67]. Assim o entendimento da dinâmica de sólitons em função de sua fase relativa pode nos dar importantes informações sobre esta característica na formação dos condensados.

Neste trabalho utilizamos cálculos numéricos para resolução completa em uma

dimensão da equação de Gross-Pitaevskii com um potencial de armadilhamento dependente do tempo para dois sólitons interagentes e comparamos o resultado com um cálculo variacional que modelava diferença de fase entre os sólitons [68]. Este trabalho trouxe informações sobre o desacoplamento da fase dos sólitons no condensado com sua posição, indo além do estudo do potencial de armadilhamento dependente do tempo [56] anteriormente realizado. Usamos os mesmos métodos numéricos e técnicas analíticas para o estudo do caso da não linearidade variando periodicamente no tempo [69].

Para o estudo de vórtices em um gás de Bose denso utilizamos o modelo de bósons-escravos, que é uma aplicação em condensação de Bose-Einstein para o modelo de Bose-Hubbard. Realizamos cálculos numéricos que levaram em conta a contribuição do termo cinético, fazendo assim, uma estimativa além da aproximação de Thomas-Fermi obtida recentemente [66].

A tese está organizada da seguinte maneira, no capítulo 2 apresentamos um estudo das interações sóliton-sóliton e reproduzimos resultados conhecidos. Utilizamos um cálculo variacional na resolução da Gross-Pitaevskii com dois sólitons interagentes e um cálculo numérico para resolução de equação diferencial parcial completa. Informações mais específicas sobre os métodos encontram-se em apêndices.

No capítulo 3 temos as contribuições deste trabalho. Usando as mesmas técnicas inserimos o potencial de armadilhamento, em um primeiro momento estudamos o efeito da variação temporal deste potencial. Posteriormente estudamos a variação temporal do potencial interatômico, ou seja, variações da não linearidade na equação de Gross-Pitaevskii.

No capítulo 4 temos os resultados do estudo de sistemas mais densos sobre a ação de rotações ao redor do eixo de simetria onde se encontra o centro do potencial de armadilhamento. Apresentamos os fundamentos do modelo de Bósons-escravos e suas aproximações para o regime em que é válida a equação de Gross-Pitaevskii.

No capítulo 5 finalmente apresentamos as conclusões deste trabalho e perspectivas futuras na continuidade desta pesquisa.

Capítulo 2

Interação sóliton-sóliton

Em sistemas diluídos o condensado de Bose-Einstein a temperatura nula pode ser descrito pela equação de Gross-Pitaevskii. A mesma é uma equação de campo médio sendo expressa por [20]

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext}(\vec{r}) + g|\Psi|^2 \right] \Psi(\vec{r}, t), \quad (2.1)$$

onde m é a massa do átomo, $V_{ext}(\vec{r})$ é um potencial externo de armadilhamento e o termo de interação de dois corpos foi aproximado por uma interação de contato, $g = 4\pi\hbar^2 a/m$, a é o comprimento de espalhamento átomo-átomo e Ψ é o parâmetro de ordem.

Para $a > 0$ (interação efetivamente repulsiva), as soluções para o estado fundamental são sempre estáveis. Com $a < 0$ (interação efetivamente atrativa) as soluções serão (meta-) estáveis até atingirem um número crítico máximo a partir do qual não há mais estabilidade [18].

A equação de Gross-Pitaevskii é uma equação diferencial não linear parabólica e com um termo potencial da armadilha. Algumas equações não lineares parabólicas admitem soluções como os sólitons [25].

Em equações diferenciais não lineares onde existem soluções solitônicas, surge uma competição entre o termo não linear da equação e a dispersão advinda do termo cinético.

Em sistemas ópticos a equação não linear de Schrödinger descreve o envelope do campo eletromagnético é dada por

$$\frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} = \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} + |\psi(z, t)|^2 \psi(z, t) \quad (2.2)$$

onde $\psi(z, t)$ é o envelope do campo eletromagnético na fibra óptica, z é a coordenada axial da fibra, t é o tempo [32, 33].

Podemos notar que não há o termo correspondente ao potencial de armadilhamento que surge em (2.1), assim a equação de Gross-Pitaevskii possui uma dificuldade adicional na sua resolução gerada pelo potencial de armadilhamento. O efeito da armadilha na dinâmica destes sólitons formados em condensados é uma interessante área de pesquisa.

Inicialmente faremos uma redução unidimensional da equação (2.1) e identificaremos sua similaridade com (2.2), usando um cálculo variacional e um cálculo numérico reproduziremos o que existe na literatura sobre interação entre dois sólitons na ausência do termo de armadilhamento.

2.1 Sólitons em Condensados de Bose-Einstein.

Na equação (2.1) temos uma expressão tridimensional, no entanto, podemos realizar uma redução nesta equação que simplifica a sua solução. Encontramos na literatura referência sobre esta aproximação [70] que é válida para a situação em que a frequência longitudinal da armadilha é muito menor do que a radial, que desta forma reduz um problema em três dimensões para um problema unidimensional, considerando apenas a direção x .

Imaginemos que um sistema composto por N bósons fracamente interagentes, confinados por uma potencial de armadilhamento, pode ser descrito pela equação de Gross-Pitaevskii (2.1).

Esta equação é válida no caso em que a densidade de partículas e a temperatura do condensado são pequenas o suficiente. A normalização para o parâmetro Ψ é $N = \int |\Psi|^2 d^3\vec{r}$. E o potencial de armadilhamento é dado por

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega^2(\lambda_x^2x^2 + \lambda_y^2y^2 + \lambda_z^2z^2), \quad (2.3)$$

onde λ_η ($\eta = x, y, z$) são, usualmente, constantes que descrevem a anisotropia da armadilha. Sistemas experimentais típicos apresentam a condição $\lambda_x = \lambda_y = 1$ e $\lambda_z = \omega_z/\omega$ que é o quociente entre a frequência ao longo da direção z , ω_z , e a frequência radial $\omega_r \equiv \omega$.

Estudaremos as soluções da equação (2.1) em armadilhas de simetria parabólica,

ou seja, o condensado na forma de charuto, caso em que o potencial de armadilhamento na direção radial é muito maior do que o potencial na direção longitudinal, matematicamente $\lambda_z \ll 1$.

Façamos uma mudança de variável da forma $\tau = \omega t$, $a_0 \rho = r$, $a_0 s = z$, e $Q = -8\pi a N / a_0$, onde $a_0 = (\hbar / m \omega)^{\frac{1}{2}}$. Definindo uma função de onda como $u(\rho, s, \tau) = \Psi(r, z, t)(a_0^3 / N)^{\frac{1}{2}}$, assim a equação (2.1) pode ser reescrita como

$$i \frac{\partial u}{\partial \tau} = \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{2} (\rho^2 + \lambda_z^2 s^2) - \frac{Q}{2} |u|^2 \right] u, \quad (2.4)$$

com a condição de normalização dada por $\int |u|^2 d\vec{r} = 1$.

Assumindo que podemos fatorar a solução da equação (2.4), afirmamos que:

$$u(\rho, s, \tau) = \phi(\rho) \xi(s, \tau), \quad (2.5)$$

encontraremos

$$i \frac{\partial \xi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial s^2} - \frac{Q}{4} |\xi|^2 \xi + \frac{1}{2} \lambda_z^2 s^2 \xi + \omega_\rho \xi, \quad (2.6)$$

onde o fator adicional $\frac{1}{2}$ no termo não linear vem do quociente

$$\int_0^\infty |\phi_0|^4 \rho d\rho / \int_0^\infty |\phi_0|^2 \rho d\rho = 1/2$$

Finalmente podemos fazer a seguinte mudança de variável $\varphi(s, \tau) = \xi(s, \tau) e^{i\omega_\rho \tau}$ para obtermos:

$$2i \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - \lambda_z^2 s^2 \varphi - \frac{Q}{2} |\varphi|^2 \varphi = 0. \quad (2.7)$$

Assim dividindo por 2 ambos os lados, renomeando $\lambda_z \equiv \bar{\omega}$, $s \equiv x$, $\tau \equiv \bar{t}$, $\frac{Q}{4} \equiv -\gamma$, chegamos à seguinte equação:

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{t}} = \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 + \frac{1}{2} \bar{\omega}^2 x^2 - \gamma |\varphi|^2 \right] \varphi. \quad (2.8)$$

Por fim, reescrevemos a equação (2.1) na forma (2.8) onde: $\bar{\omega}$ esta associado a forma do potencial de armadilhamento e o termo γ ao potencial de interação interatômica.

Podemos perceber que esta estrutura da equação (2.8) é muito semelhante a equação (2.2), que como já afirmamos é bem conhecida. A princípio trataremos esta

equação na ausência da armadilha e posteriormente inseriremos a armadilha (que é uma das contribuições do trabalho desenvolvido nesta tese).

O procedimento usado na resolução da equação (2.8) foi um cálculo numérico e um cálculo variacional com um *ansatz* de dois sólitons com formato de secantes hiperbólicas. O método numérico empregado foi o método de Crank-Nicolson [71, 72] (o método é descrito no apêndice A). O cálculo variacional dependente do tempo é descrito a seguir.

2.2 Cálculo variacional

Como afirmamos, uma função que é solução da equação (2.8), sem o termo harmônico, pode ser uma solução solitônica [25]. Tomemos uma solução que é a soma de dois sólitons deslocados

$$\varphi(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (2.9)$$

onde para um sóliton simples usaremos o seguinte *ansatz* variacional

$$u_n(x) = 2\nu_n \operatorname{sech}[2\nu_n(x - \xi_n)] e^{i2\mu_n(x - \xi_n) + i\delta_n}, \quad (2.10)$$

com $n = 1, 2$.

Um *ansatz* variacional é uma solução tentativa com a qual procuramos descrever a maioria da fenomenologia da equação original mais complexa.

Nesta expressão os parâmetros dependentes do tempo são: ν_n , μ_n , δ_n e ξ_n , que são respectivamente as amplitudes, velocidades, fases e posições do centro dos n sólitons (com $n = 1, 2$ neste caso).

Podemos obter as equações de “movimento” dos parâmetros ν_n , μ_n , δ_n e ξ_n utilizando a teoria inversa do espalhamento [46] ou podemos realizar uma dedução utilizando uma abordagem de teoria de campos clássicos. Nesta tese usaremos o tratamento com teoria de campos clássicas. Para uma melhor compreensão obteremos primeiramente a dinâmica de um sóliton.

2.2.1 Dinâmica de um único sóliton

Pelo formalismo Lagrangeano em teoria de campos [73], existe uma densidade de Lagrangeana, $\mathfrak{L}$, tal que, ao ser introduzida nas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta_{i,t}} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta_{i,x}} \right) - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta_i} = 0 \quad (2.11)$$

resulta nas equações de movimento do sistema, as coordenadas $\eta_{i,x}$ e $\eta_{i,t}$ são respectivamente as derivadas espaciais e temporais da i -ésima função da densidade de Lagrangeana.

A partir da equação de movimento da equação não linear de Schrödinger dada por

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^2 u = 0, \quad (2.12)$$

encontramos a seguinte densidade de Lagrangeana [47]

$$\mathfrak{L} = \frac{i}{2} (u_t u^* - c.c.) - \frac{1}{2} |u_x|^2 + \frac{1}{2} |u|^4, \quad (2.13)$$

onde $u_t \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ e usamos $\eta_i = u^*(x, t)$ em (2.11).

A Lagrangeana do sistema é dada por

$$L = \int \mathfrak{L} d\vec{r}^3 \quad (2.14)$$

Para o caso de um sóliton unidimensional com a seguinte forma

$$u(x, t) = 2\nu \operatorname{sech}[2\nu(x - \xi)] e^{i2\mu(x - \xi) + i\delta} \quad (2.15)$$

onde ν , ξ , μ e δ são parâmetros dependentes do tempo.

Substituindo a (2.15) em (2.13) e (2.14) encontramos a seguinte Lagrangeana

$$L = 4\nu(2\mu\xi_t - \delta_t) - 8 \left[\frac{\nu^3}{3} + \mu^2\nu \right] + \frac{16}{3}\nu^3 \quad (2.16)$$

Agora buscaremos encontrar as equações de movimento dos parâmetros, então substituindo (2.16) nas equações de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_{k,t}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (2.17)$$

com $q_k = \nu, \mu, \xi, \delta$, encontraremos as seguintes equações de movimento dos parâmetros da função (2.15)

$$\frac{d\nu}{dt} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = 0, \quad (2.19)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 2\mu, \quad (2.20)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = 2(\nu^2 - \mu^2). \quad (2.21)$$

Este resultado nos indica que para um único sólon a amplitude ν de um sólon não varia, bem como sua velocidade μ , a distância da origem ξ aumenta proporcionalmente a velocidade μ , também a fase δ do sólon varia com a amplitude e a velocidade do mesmo.

2.2.2 Sistema com dois sólons

Uma ilustração bidimensional de dois sólons com diferença de fase igual a $\frac{\pi}{2}$ é apresentada na figura 2.1, no entanto, esta situação não é estática, os dois sólons interagirão entre si.

Figura 2.1: Representação bidimensional de dois sólons em condensados de Bose-Einstein, linha contínua representa a distribuição de densidade e linha tracejada distribuição de fase no sólon (vide texto para maiores detalhes).

São bem conhecidas as interações entre dois sólons [32, 33, 47]. As equações de

movimento dos parâmetros dos sólitons produzem equações que podem ser associadas a potenciais e a forças de interação. A interação (atração ou repulsão) entre os sólitons varia exponencialmente com a distância entre os mesmos, sendo atrativa ou repulsiva dependendo da fase entre os sólitons. Na figura 2.2 temos uma ilustração da evolução no tempo entre dois sólitons bidimensionais.

Substituindo a equação (2.9) na (2.8) e levando em conta que é pequena a superposição das caudas dos dois sólitons, fazendo o mesmo tratamento de teoria de campos clássica deduzimos as equações de movimento dos parâmetros do *ansatz*. Obtemos as seguintes equações de movimento para os parâmetros dos dois sólitons na ausência do potencial harmônico ($\bar{\omega}^2 x^2$).

$$\frac{d\nu_n}{dt} = (-1)^n 16\nu^3 e^{-2\nu r} \sin(\phi), \quad (2.22)$$

$$\frac{d\mu_n}{dt} = (-1)^n 16\nu^3 e^{-2\nu r} \cos(\phi), \quad (2.23)$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 2\mu_n + 4\nu e^{-2\nu r} \sin(\phi), \quad (2.24)$$

$$\frac{d\delta_n}{dt} = 2(\nu_n^2 + \mu_n^2) + 8\mu\nu e^{-2\nu r} \sin(\phi) + 24\nu^2 e^{-2\nu r} \cos(\phi), \quad (2.25)$$

onde $\nu = \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{2}$, $\mu = \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{2}$, $\phi = 2\mu r + \psi$, $r = \xi_1 - \xi_2$ e $\psi = \delta_2 - \delta_1$. Aqui r é a distância entre os sólitons e ψ é a fase relativa entre os sólitons. Neste caso nós supomos que $r > 0$ e $|\nu_1 - \nu_2| \ll \nu$, $|\mu_1 - \mu_2| \ll \mu$, $|\nu_1 - \nu_2|r \ll 1$ e $\nu r \gg 1$, sempre simulamos o caso em que $\mu(t=0) = 0$ (portanto, $\phi(t=0) = \psi(t=0)$).

Manipulando as equações de $\xi_{1,2}$ e $\delta_{1,2}$ obtemos uma equação para a distância relativa e diferença de fase entre os sólitons dada por

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -64\nu^3 e^{-2\nu|r|} \text{sgn}(r) \cos(\phi), \quad (2.26)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = 128\nu^4 e^{-2\nu|r|} \sin \phi, \quad (2.27)$$

onde $\text{sgn}(r) = 1$ para $r > 0$ e $\text{sgn}(r) = -1$ para $r < 0$.

Esta é a equação de uma partícula de massa unitária sobre a ação de um potencial dado por

$$U(r, \phi) = -32\nu^2 e^{-2\nu|r|} \cos(\phi). \quad (2.28)$$

Figura 2.2: Representação tri-dimensional do efeito da diferença de fase entre dois sólitons. Diferença de fase nula entre os sólitons gera uma atração entre os sólitons (figura do alto) e diferença de fase π gera uma repulsão entre os sólitons (figura abaixo). Soluções da equação (2.8) com $\varpi = 0$

Os resultados obtidos pela resolução da equação (2.8) pelo método de Crank-Nicolson serão denominados de EDP (equação diferencial parcial) e os obtidos pela

resolução das equações de (2.22) a (2.25) de variacional.

As equações de movimento de dois sólitons na ausência da armadilha podem ser encontradas em [47, 48]. E concordam muito bem com nossos resultados, como veremos a seguir.

Na figura 2.3 temos o efeito do potencial de interação entre os sólitons para o caso em que a diferença de fase inicial entre os sólitons é nula. Apresentamos este efeito através do comportamento da distância relativa entre os sólitons, a razão entre as amplitudes dos sólitons e a diferença de fase entre os sólitons evoluindo no tempo. Nesta situação podemos entender que há uma “força” atrativa que causa a sobreposição dos sólitons, por esta razão temos um comportamento oscilatório na distância relativa, a distância relativa na EDP é calculada a partir do máximo dos sólitons, por esta razão ela se anula quando os sólitons estão muito próximos. A razão entre as amplitudes dos sólitons e a fase relativa não se altera com o tempo nesta situação.

No caso em que a fase relativa inicial entre os sólitons é $\phi(t = 0) = \pi$, que é ilustrado no gráfico da figura 2.4, percebemos que há uma força repulsiva entre os sólitons que leva ao aumento da distância relativa com o tempo. Neste caso como no caso de fase nula, a razão entre as amplitudes dos sólitons não varia. A diferença de fase entre os sólitons permanece constante.

Para os casos intermediários da diferença de fase inicial ($\phi(t = 0) = \frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{2}$) notamos um aumento na força de repulsão entre os sólitons, a força repulsiva é proporcional ao valor da fase inicial. Para o caso $\phi(t = 0) = \frac{\pi}{6}$ (gráfico da figura 2.5) percebemos uma diferença no perfil da razão entre as amplitudes dos sólitons.

O comportamento da diferença de fase relativa entre os sólitons apresenta uma particularidade interessante, ao contrário dos casos anteriores a mesma aumenta significativamente durante o tempo. É interessante notar que o mesmo comportamento surge com a fase inicial sendo nula para um sóliton ($\delta_1 = 0$) e diferente de zero para outro ($\delta_2 \neq 0$) ou com ambos sólitons tendo fase diferente de zero, indicando que o importante é a diferença de fase e não o valor absoluto da fase de um dado sóliton.

Para o caso da diferença de fase inicial $\phi(t = 0) = \frac{\pi}{2}$, a distância relativa aumenta com o tempo (com uma taxa menor do que o caso $\phi(t = 0) = \pi$) e a diferença de fase aumenta de forma mais suave apresentando uma inflexão menor do que a percebida na curva do caso $\phi(t = 0) = \frac{\pi}{6}$ (gráfico da figura 2.6).

Figura 2.3: Efeito da diferença de fase inicial entre os sólitons nula sobre a distância relativa entre os sólitons r , a relação entre as amplitudes dos sólitons ν_1/ν_2 e a evolução temporal da diferença de fase ψ . Parâmetros dos sólitons são $\omega = 0$ (ausência de armadilha), $\nu = 0.2$ e $r(0) = 20$, a linha contínua são os resultados obtidos pela EDP (solução da equação (2.1)) a linha tracejada com (x) indica os resultados obtidos pelo variacional (resolução das equações (2.22) à (2.25)).

Os resultados obtidos pela EDP e pelo variacional concordam muito bem para os casos de $\phi(t=0) = \pi/6, \pi/2, \pi$. No caso de $\phi(t=0) = 0$ temos um bom acordo da variação da distância relativa para tempos menores, no entanto, ocorre uma pequena discrepância para tempos maiores, isto pode estar associado ao fato que as equações de (2.22) à (2.25) não são aplicadas para valores negativos de r , no entanto, após a primeira superposição existe uma mudança de sinal na distância relativa, o que pode explicar tal diferença.

Os resultados confirmam que reproduzimos resultados anteriores e que nosso cálculo variacional e numérico são confiáveis.

Figura 2.4: Efeito da diferença de fase inicial entre os sólitons $\phi(t = 0) = \pi$ sobre a distância relativa entre os sólitons r , a relação entre as amplitudes dos sólitons ν_1/ν_2 e a evolução temporal da diferença de fase ψ . Parâmetros dos sólitons são $\omega = 0$ (ausência de armadilha), $\nu = 0.2$ e $r(0) = 20$, a linha contínua são os resultados obtidos pela EDP (solução da equação (2.1)) a linha tracejada com (x) indica os resultados obtidos pelo variacional (resolução das equações (2.22) à (2.25)).

Figura 2.5: Efeito da diferença de fase inicial entre os sólitons $\phi(t = 0) = \frac{\pi}{6}$ sobre a distância relativa entre os sólitons r , a relação entre as amplitudes dos sólitons ν_1/ν_2 e a evolução temporal da diferença de fase ψ . Parâmetros dos sólitons são $\omega = 0$ (ausência de armadilha), $\nu = 0.2$ e $r(0) = 20$, a linha contínua são os resultados obtidos pela EDP (solução da equação (2.1)) a linha tracejada com (x) indica os resultados obtidos pelo variacional (resolução das equações (2.22) à (2.25)).

Figura 2.6: Efeito da diferença de fase inicial entre os sólitons $\phi(t = 0) = \frac{\pi}{2}$ sobre a distância relativa entre os sólitons r , a relação entre as amplitudes dos sólitons ν_1/ν_2 e a evolução temporal da diferença de fase ψ . Parâmetros dos sólitons são $\omega = 0$ (ausência de armadilha), $\nu = 0.2$ e $r(0) = 20$, a linha contínua são os resultados obtidos pela EDP (solução da equação (2.1)) a linha tracejada indica os resultados obtidos pelo variacional (resolução das equações (2.22) à (2.25)).

Capítulo 3

Dinâmica de sólitons na presença de potencial de armadilhamento

A presença do potencial de armadilhamento é determinante na dinâmica de interação entre os sólitons como veremos a seguir. Primeiramente apresentaremos o tratamento de teoria de campos para a inserção da armadilha entre os sólitons e posteriormente o efeito da perturbação temporal deste potencial de armadilhamento e uma perturbação no termo interatômico.

3.1 Variações temporais no potencial de armadilhamento

Na presença de uma armadilha harmônica na equação (2.12) teremos a densidade de Lagrangeana para um sólito dada por

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}(u_t u^* - c.c.) - \frac{1}{2}|u_x|^2 + \frac{1}{2}|u|^4 - \frac{1}{2}\omega^2 x^2 |u|^2. \quad (3.1)$$

que resulta na Lagrangeana

$$L = 4\nu(2\mu\xi_t - \delta_t) - 8\left[\frac{\nu^3}{3} + \mu^2\nu\right] + \frac{16}{3}\nu^3 - \omega^2\left(\frac{\pi^2}{24\nu} + 2\nu\xi^2\right). \quad (3.2)$$

Usando o mesmo procedimento encontramos as seguintes equações de movimento para os parâmetros do variacional

$$\frac{d\nu}{dt} = 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{1}{2}\omega^2\xi, \quad (3.4)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = 2\mu, \quad (3.5)$$

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{1}{2}\omega^2\left(\xi^2 - \frac{\pi^2}{48\nu^2}\right) + 2(\nu^2 - \mu^2). \quad (3.6)$$

Assim temos uma alteração na velocidade do sóliton proporcional a frequência (ω^2) da armadilha e da posição do sóliton, além de uma dependência de $\omega^2\xi^2$ e $(\frac{\omega}{\nu})^2$ na fase do sóliton.

Para o caso em que temos dois sólitons que representam a função u , tal que

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t). \quad (3.7)$$

Com u_n representado na forma (2.15). Se os dois sólitons estão bem distantes uns dos outros de tal forma que a superposição das “caudas” é pequena, substituindo (3.7) em (2.12) teremos a seguinte equação de movimento:

$$\begin{aligned} iu_{1,t} + \frac{1}{2}u_{1,xx} + |u_1|^2u_1 &= \frac{1}{2}\omega^2x^2u_1 - (u_2^*u_1^2 + 2|u_1|^2u_2), \\ iu_{2,t} + \frac{1}{2}u_{2,xx} + |u_2|^2u_2 &= \frac{1}{2}\omega^2x^2u_2 - (u_1^*u_2^2 + 2|u_2|^2u_1). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Este sistema pode ser obtido pela seguinte função densidade de Lagrangeana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{n=1}^2 &\left[\frac{i}{2}(u_{n,t}u_n^* - c.c.) - \frac{1}{2}|u_{n,x}|^2 + \frac{1}{2}|u_n|^4 - \frac{1}{2}\omega^2x^2|u_n|^2 \right] \\ &- i\epsilon(u_1^*R_{2,1}[u_1] + u_2^*R_{1,2}[u_2] + c.c.) \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde

$$\epsilon R_{m,n}[u_n] = i(u_m^*u_n^2 + 2u_m|u_n|^2) \quad (3.10)$$

o “operador” ϵ foi introduzido apenas para melhor notação.

Portanto, as equações de movimento para o sistema na presença da armadilha são

$$\frac{d\nu_n}{dt} = (-1)^n 16\nu^3 e^{-2\nu r} \sin(\phi), \quad (3.11)$$

$$\frac{d\mu_n}{dt} = -\frac{1}{2}\omega^2 \xi_n + (-1)^n 16\nu^3 e^{-2\nu r} \cos(\phi), \quad (3.12)$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 2\mu_n + 4\nu e^{-2\nu r} \sin(\phi), \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_n}{dt} = & -\frac{1}{2}\omega^2 \left(\xi_n^2 - \frac{\pi^2}{48\nu_n^2} \right) + 2(\nu_n^2 + \mu_n^2) + \\ & 8\mu\nu e^{-2\nu r} \sin(\phi) + 24\nu^2 e^{-2\nu r} \cos(\phi), \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $\nu = \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{2}$, $\mu = \frac{(\mu_1 + \mu_2)}{2}$, $\phi = 2\mu r + \psi$, $r = \xi_1 - \xi_2$ e $\psi = \delta_2 - \delta_1$. Neste caso nós supomos que $r > 0$ e $|\nu_1 - \nu_2| \ll \nu$, $|\mu_1 - \mu_2| \ll \mu$, $|\nu_1 - \nu_2|r \ll 1$ e $\nu r \gg 1$.

Assim temos as seguintes equações de movimento para a distância relativa entre os sólitons

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\omega^2 r - 64\nu^3 e^{-2\nu|r|} \text{sgn}(r) \cos(\phi), \quad (3.15)$$

E para a fase relativa teremos

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = 128\nu^4 e^{-2\nu|r|} \sin \phi, \quad (3.16)$$

onde $\text{sgn}(r) = 1$ para $r > 0$ e $\text{sgn}(r) = -1$ para $r < 0$.

A equação (3.15) é a equação de uma partícula de massa unitária sob a ação de um potencial anarmônico dado por

$$U(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - 32\nu^2 e^{-2\nu|r|} \cos(\phi). \quad (3.17)$$

Neste potencial podemos encontrar pontos fixos tanto na distância relativa r quanto na frequência de armadilhamento ω .

Utilizamos uma frequência de armadilhamento específica, na qual a força de repulsão entre os sólitons para o caso de diferença de fase inicial ($\phi(t=0) = \pi$) se anula, usando a equação (3.15) encontramos

$$\omega_{eq}^2 = \frac{64\nu^3 e^{-2\nu r_e}}{r_e}. \quad (3.18)$$

Sob esta frequência de armadilhamento a distância relativa entre os sólitons permanece constante para o caso ($\phi(t=0) = \pi$). Assim, temos os valores de frequência de equilíbrio ω_{eq} e posição de equilíbrio r_e .

No gráfico da figura 3.1 apresentamos os resultados das simulações de EDP e pelo variacional para o sistema de dois sólitons na presença de uma armadilha com frequência dada por (3.18), mas com fase inicial $\phi(t = 0)$ nula. Podemos perceber que há uma pequena variação no valor da frequência de oscilação entre os sólitons (conforme veremos a seguir), a mesma é ampliada com a presença do potencial de armadilhamento.

Figura 3.1: Efeito da diferença de fase inicial entre os sólitons $\phi(t = 0) = 0$ na distância relativa entre sólitons r , a relação entre as amplitudes dos sólitons $\frac{v_1}{v_2}$ e a evolução temporal da diferença de fase $\psi(t)$. Parâmetros dos sólitons são $\omega = 2.93 \times 10^{-3}$, $\nu = 0.2$ e $r(0) = 20$. As linhas contínuas são os resultados obtidos pela EDP (solução da equação (2.1)) e a linha tracejada com (x) indica os resultados obtidos pelo variacional (resolução das equações (2.22) à (2.25)).

Apesar da frequência de oscilação entre os sólitons na presença do potencial de armadilhamento ser alterada, a característica de força atrativa entre os sólitons permanece inalterada, o que é evidenciado pelo comportamento periódico das oscilações na distância relativa. A razão entre as amplitudes dos sólitons continua inalterada com a inserção da armadilha como podemos observar. A diferença de fase permanece

constante entre os sólitons.

Como esperávamos, a distância relativa entre os sólitons para o caso em que a diferença de fase inicial entre os sólitons é π não se altera com o tempo, como mostra a figura 3.2. É interessante notar que a diferença de fase também permanece constante com o decorrer do tempo, o mesmo ocorre com o comportamento da razão entre as amplitudes dos sólitons.

Figura 3.2: Efeito da diferença de fase inicial entre os sólitons $\phi(t=0) = \pi$ na distância relativa entre sólitons r , arelação entre as amplitudes dos sólitons $\frac{v_1}{v_2}$ e a evolução temporal da diferença de fase $\psi(t)$. Parâmetros dos sólitons são $\omega = 2.93 \times 10^{-3}$, $\nu = 0.2$ e $r(0) = 20$. As linhas contínuas são os resultados obtidos pela EDP (solução da equação (2.1)) e a linha tracejada com (x) indica os resultados obtidos pelo variacional (resolução das equações (2.22) à (2.25)).

Para o caso $\phi(t=0) = \pi/6$ temos uma pequena oscilação na distância relativa. Ocorre um interessante comportamento da razão entre as amplitudes dos sólitons, existe uma diminuição nesta razão e em seguida uma suave estabilização. A diferença de fase se altera significativamente se comparada ao caso sem armadilha, onde anteriormente ocorria um aumento constante no tempo.

Figura 3.3: Efeito da diferença de fase inicial entre os sólitons $\phi(t=0) = \frac{\pi}{6}$ na distância relativa entre sólitons r , a relação entre as amplitudes dos sólitons $\frac{\nu_1}{\nu_2}$ e a evolução temporal da diferença de fase $\psi(t)$. Parâmetros dos sólitons são $\omega = 2.93 \times 10^{-3}$, $\nu = 0.2$ e $r(0) = 20$. As linhas contínuas são os resultados obtidos pela EDP (solução da equação (2.1)) e a linha tracejada com (x) indica os resultados obtidos pelo variacional (resolução das equações (2.22) à (2.25)).

A força de repulsão para o caso $\phi(t=0) = \frac{\pi}{2}$ gera suaves oscilações na distância relativa entre os sólitons. A razão entre as amplitudes apresenta também oscilações. Um comportamento interessante é o apresentado pela fase que apresenta máximos como podemos verificar no gráfico apresentado na figura 3.4.

Neste breve resumo apresentamos o efeito da armadilha na dinâmica dos sólitons no âmbito do que foi estudado anteriormente para o sistema de sólitons ópticos [33].

Figura 3.4: Efeito da diferença de fase inicial entre os sólitons $\phi(t=0) = \frac{\pi}{2}$ na distância relativa entre sólitons r , a relação entre as amplitudes dos sólitons $\frac{v_1}{v_2}$ e a evolução temporal da diferença de fase $\psi(t)$. Parâmetros dos sólitons são $\omega = 2.93 \times 10^{-3}$, $\nu = 0.2$ e $r(0) = 20$. As linhas contínuas são os resultados obtidos pela EDP (solução da equação (2.1)) e a linha tracejada com (x) indica os resultados obtidos pelo variacional (resolução das equações (2.22) à (2.25)).

Para o caso de $\phi(t=0) = \pi$ temos uma situação de equilíbrio estável no fundo do poço do potencial descrito pela expressão (2.28), neste caso podemos forçar o sistema com uma perturbação dependente do tempo na frequência de armadilhamento e verificarmos os efeitos causados.

Analisaremos a presença das oscilações no sistema nos casos de fase nula e π nas próximas seções.

3.1.1 Diferença de fase $\phi(t = 0) = 0$

Para o caso da diferença de fase $\phi(t = 0) = 0$ a interação entre os sólitons é atrativa e dependendo da separação inicial, nós temos dois regimes de oscilações: no primeiro regime (ω maior que o termo de interação entre os sólitons, $32\nu^2 e^{-2\nu|r|}$, na equação (2.28)) a frequência de oscilação entre os sólitons é harmônica e dominada pela frequência da armadilha. No segundo regime, o período de oscilação entre os sólitons é dominado pelo potencial de interação entre os sólitons, neste regime os sólitons oscilam com período [48] (veja apêndice), dado por

$$T \approx \frac{\pi}{4\nu^2} e^{\nu r_0}, \quad (3.19)$$

onde $r_0 \equiv r(t = 0)$. Em geral, o período de oscilação entre os sólitons pode ser estimado a partir da equação (2.28) e é dado por

$$T = 4\sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{2}\omega^2(r_0^2 - r^2) + 32\nu^2(e^{-2\nu r} - e^{-2\nu r_0})}}. \quad (3.20)$$

Neste ponto obtemos uma expressão do período dependente da frequência ω da armadilha, desta relação temos o efeito da frequência da armadilha sobre a frequência de oscilação entre os sólitons, o que explica a diferença entre as frequências de oscilação apresentadas nos gráficos 2.3 e 3.1

A equação (3.20) é válida para $\nu r \gg 1$, quando os dois sólitons estão inicialmente muito afastados, ao se aproximarem estarão com energia cinética muito grande e se interceptarão muito rapidamente, este efeito contribuirá pouco para a integral do período. Assim, no limite inferior o integrando da equação (3.20) pode ser tomado como nulo.

Na figura 3.5 apresentamos os resultados numéricos da frequência de oscilação entre os sólitons em função da frequência da armadilha. Para grandes valores de ω , a frequência da armadilha domina completamente o fenômeno de oscilação entre os sólitons, o que é evidenciado pelo comportamento linear da curva. Para valores pequenos de ω os valores numéricos encontrados pela equação (3.20) concordam com a equação (3.19). Quando a armadilha apresenta um comportamento repulsivo ($\omega^2 < 0$) há uma frequência crítica a partir da qual os sólitons param de oscilar entre si e começam a se afastar, o que corresponde a uma frequência de armadilhamento

Figura 3.5: *Frequência de oscilação entre sólitons*(Ω) *em função da frequência da armadilha* (ω) *usando (3.20). A diferença de fase é $\phi = 0$ e a distância relativa inicial é $r_0 = 20$. A linha tracejada corresponde a $\nu = 0.10$ e a linha contínua a $\nu = 0.2$.*

maior que o termo de interação entre os sólitons.

Para o caso atrativo ($\omega^2 > 0$) construímos o diagrama de fase do sistema para estudarmos melhor a dinâmica dos sólitons. Na figura 3.6 percebemos que existe um comportamento semi-harmônico do potencial de interação para valores maiores de distância relativa (r grande)

Figura 3.6: *Potencial $U(r)$ e diagrama de fase para $\phi = 0$, $\nu = 0.15$, $\omega^2 = 1.6 \times 10^{-4}$.*

Podemos agora inserir uma frequência de armadilhamento dependente do tempo, nós consideramos a oscilação sendo periódica do tipo

Figura 3.7: Oscilações da distância relativa (r) para o caso de fase relativa $\phi = 0$ e distâncias relativas iniciais r_0 . (a) $r_0 = 15$, (b) $r_0 = 20$, (c) $r_0 = 25$, (d) $r_0 = 30$; onde $\nu = 0.2$, $\omega_0 = 0.005$, $\omega_f = 2\omega_0$, $\eta = 0.3$; EDP corresponde a equação (2) e variacional equação (3.22).

$$\omega^2 = \omega_0^2[1 + \eta \cos(\omega_f t)] \quad (3.21)$$

onde η e ω_f são respectivamente a magnitude e frequência da perturbação.

Desta forma podemos reescrever a equação (2.26) para o caso de $r > 0$ e para ϕ qualquer e obtemos

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \omega_0^2[1 + \eta \cos(\omega_f t)]r - 64\nu^3 e^{-2\nu r} \cos(\phi) = 0. \quad (3.22)$$

Na figura 3.7 são apresentados os resultados obtidos pelo variacional e EDP para o caso de $\omega_f = 2\omega_0$. Podemos perceber que para distâncias relativas iniciais suficientemente grandes ($r_o > r_c \sim 25$) o comportamento das oscilações é tipicamente de ressonância paramétrica, ou seja a amplitude de oscilação entre os sólitons aumenta exponencialmente com o tempo. Os resultados de EDP e variacional concordam de forma qualitativa.

3.1.2 Diferença de fase $\phi(t=0) = \pi$

Para o caso da diferença de fase $\phi = \pi$ a interação é repulsiva, o potencial efetivo entre os sólitons, que é a soma dos potenciais de armadilhamento e interação, possui a forma de um “duplo poço”, o que quer dizer que há um ponto de equilíbrio instável em $r = 0$ e dois pontos de equilíbrio estáveis. A posição dos mínimos é dada por

$$r_{1,2} = \pm r_e, r_e = \frac{64\nu^3 e^{-2\nu r_e}}{\omega^2}. \quad (3.23)$$

Na figura 3.8 nós apresentamos o potencial e o diagrama de fase do caso $\phi = \pi$ para parâmetros apropriados. Os dois pontos de mínimo do potencial correspondem a dois pontos fixos no diagrama de fase. Denominamos a condição em que os dois sólitons estão separados por uma distância que oscila pouco em torno de um valor de “estado de bisóliton estável”, no momento em que os sólitons se sobrepõem ou se afastam este estado é perdido.

Figura 3.8: Potencial $U(r)$ e diagrama de fase para $\phi = \pi$ mostrando os pontos fixos. $r_e = 15$, $\nu = 0.15$, $\omega = 1.26 \times 10^{-2}$.

Para a diferença de fase $\phi = \pi$ nós também consideramos o caso da armadilha variando com o tempo conforme a expressão (3.21) e equação de movimento dada pela equação (3.22). Podemos perceber pela equação (2.27) que para este caso a fase oscila com pequena amplitude em torno do valor π da seguinte forma

$$\frac{d^2\phi_1}{dt^2} + \Omega_\phi^2\phi_1 = 0, \quad (3.24)$$

onde $\phi = \pi + \phi_1$, e com a frequência $\Omega_\phi = 8\sqrt{2}\nu^2 \exp(-\nu r_e) = \sqrt{2\nu r_e}\omega_0$, dependente apenas da distância relativa inicial. Assim, nesta aproximação linear, as oscilações da diferença de fase entre sólitons são desacopladas das oscilações da distância relativa entre os sólitons (r) dependendo apenas da distância inicial r_e . Assim, podemos analisar as duas oscilações separadamente.

Para simplificar nossa análise neste caso, tomemos o ponto de equilíbrio dado para o caso em que $\eta = 0$ através da equação (3.23). Substituindo $y = r - r_e$ em

(3.22), assumindo y pequeno para expandir o termo exponencial e usando (3.23), obtemos

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + 2\nu r_e + \eta \cos(\omega_f t)] y = -\omega_0^2 r_e \eta \cos(\omega_f t). \quad (3.25)$$

Podemos reescrever esta expressão como

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \bar{\omega}_0^2 [1 + \bar{\eta} \cos(\omega_f t)] y = F_0 \cos(\omega_f t), \quad (3.26)$$

onde $\bar{\omega}_0^2 = \omega_0^2 [1 + 2\nu r_e]$, $\bar{\eta} = \eta / (1 + 2\nu r_e)$ e $F_0 = -\omega_0^2 r_e \eta$. Esta expressão se assemelha a conhecida equação de Mathieu quando $F_0 = 0$ [75]. A solução para esta equação é

$$y(t) = y_h + y_p, \quad (3.27)$$

onde y_h e y_p são respectivamente as soluções homogênea e particular da equação (3.26).

Usando a solução aproximada de Bogoliubov [74, 75] para o caso da ressonância paramétrica onde $\omega_f = 2\bar{\omega}_0 + \varepsilon$, a solução homogênea da equação é dada por

$$y_h(t) = e^{\sigma t} \left[a_0 \cos\left[(\bar{\omega}_0 + \frac{\varepsilon}{2})t\right] + b_0 \sin\left[(\bar{\omega}_0 + \frac{\varepsilon}{2})t\right] \right], \quad (3.28)$$

com $\sigma^2 = \frac{1}{4}[(\frac{\eta\bar{\omega}_0}{2})^2 - \varepsilon^2]$, a_0 e b_0 sendo constantes. Para encontrarmos a solução particular nós empregamos o método das variação dos parâmetros [76] e obtivemos

$$y_p(t) = \frac{F_0}{2\bar{\omega}_0} \left[\frac{3\bar{\omega}_0 \cos(2\bar{\omega}_0 t) + \sigma \sin(2\bar{\omega}_0 t)}{(9\bar{\omega}_0^2 + \sigma^2)} - \frac{\bar{\omega}_0 \cos(2\bar{\omega}_0 t) + \sigma \sin(2\bar{\omega}_0 t)}{(\bar{\omega}_0^2 + \sigma^2)} \right]. \quad (3.29)$$

Usando a condição inicial de $y(t=0) = y_0$, $dy/dt(t=0) = 0$, as constantes a_0 e b_0 são dadas por

$$a_0 = y_0 - \frac{F_0}{2} \left[\frac{3}{(9\bar{\omega}_0^2 + \sigma^2)} - \frac{1}{(\bar{\omega}_0^2 + \sigma^2)} \right], \quad (3.30)$$

$$b_0 = -\frac{\sigma}{\bar{\omega}_0} \left\{ y_0 - \frac{F_0}{2} \left[\frac{1}{(9\bar{\omega}_0^2 + \sigma^2)} + \frac{1}{(\bar{\omega}_0^2 + \sigma^2)} \right] \right\}. \quad (3.31)$$

Comparamos a solução numéricas de pequenas oscilações para o caso forçado (equação 3.26) com a solução analítica obtida com o método da variação dos parâmetros

equações (3.27-3.31). Os resultados de ambos as soluções concordam muito bem para pequenos valores de $\bar{\eta}$.

No gráfico da figura 3.9a é apresentado o caso da equação de Mathieu padrão ($F_0 = 0$) para parâmetros específicos na equação (3.26). Notamos que existe um crescimento exponencial na amplitude de oscilação em função do tempo. No gráfico da figura 3.9b mostramos o efeito da inserção do termo forçador. O termo forçador causa um aumento na amplitude inicial de oscilação, a taxa de crescimento (σ) não é afetada pela inserção do termo forçador como podemos notar pelas expressões (3.27-3.31) que são a solução analítica da aproximação (3.25).

No gráfico da figura 3.9c mostramos a solução numérica da equação (3.22) obtida pelo método de Runge-Kutta [77] e no gráfico 3.9d a solução numérica obtida por EDP da equação (2.8). Comparando os gráficos 3.9c e 3.9d notamos que eles são muito semelhantes, como esperávamos, o que indica que uma aproximação (3.25) é realista da expressão (3.22). As amplitudes de oscilação em 3.9c e 3.9d são maiores do que os resultados mostrado em 3.9b para grandes tempos, no entanto, para instantes iniciais as soluções coincidem muito bem como podemos notar pelo gráfico da figura 3.9e. Observamos que a solução analítica dada pelas expressões (3.27-3.31) representa inclusive o segundo modo de oscilação que surge na solução numérica de (2.8). A divergência que surge entre as soluções para tempos maiores está relacionada com o comportamento não linear de (2.8) e (3.22), o que se torna mais evidente com o aumento da amplitude de oscilação onde a aproximação de (3.22) já não é tão boa para representar a equação (2.8).

Na ressonância principal, caso onde $\omega_f = \bar{\omega}_0$, não há uma solução analítica fechada (mesmo que aproximada) para a equação homogênea da expressão (3.26). Para obtermos uma aproximação analítica, reescrevemos a equação como

$$\hat{L}y(t) = S(y, t), \quad (3.32)$$

onde $\hat{L} \equiv d^2/dt^2 + \bar{\omega}_0^2$ e $S \equiv [F_0 - \bar{\omega}_0^2 \bar{\eta} y(t)] \cos(\bar{\omega}_0 t)$. Nesta forma podemos usar a técnica iterativa da função de Green [77]

$$y_{(n)}(t) = y_{(0)}(t) + \int G(t - \tau) S(y_{(n-1)}(\tau), \tau) d\tau. \quad (3.33)$$

Para o operador $\hat{L}$ a função de Green é dada por $G(t - \tau) = \sin[\bar{\omega}_0(t - \tau)]/\bar{\omega}_0$. Assumindo $y(t = 0) = y_0$ e $dy/dt(t = 0) = 0$ nós temos $y_{(0)} = y_0 \cos(\bar{\omega}_0 t)$ a solução

Figura 3.9: *Ressonância paramétrica na interação sóliton-sóliton com $\omega_0 = 2.93 \times 10^{-3}$, $\nu = 0.2$, $r(0) = r_e = 20$, $\eta = 0.1$, caso $\phi = \pi$. a) Solução numérica da Equação de Mathieu dada pela equação (3.26) com $F_0 = 0$. b) Aproximação analítica obtida para pequenas amplitudes (equação 3.25) usando o método da variação dos parâmetros, equações (3.27-3.31). c) Resultado numérico da equação (3.22). d) Resultados numéricos da EDP no limite unidimensional dado pela equação (2.8). e) Resultados das figuras anteriores 4.3a (tracejada), b (contínua), c (traço ponto), d (pontos) sobrepostos para tempos iniciais.*

obtida pela segunda interação do método é dada por

$$\begin{aligned}
 y_{(2)}(t) = & y_0 \left\{ \cos(\bar{\omega}_0 t) + \bar{\eta} \left[\frac{1}{3} \cos(\bar{\omega}_0 t) + \frac{1}{6} \cos(2\bar{\omega}_0 t) - \frac{1}{2} \right] \right. \\
 & + \bar{\eta}^2 \left[-\frac{1}{6} + \frac{87}{864} \cos(\bar{\omega}_0 t) + \frac{1}{18} \cos(2\bar{\omega}_0 t) + \frac{1}{96} \cos(3\bar{\omega}_0 t) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{5}{24} \bar{\omega}_0 t \sin(\bar{\omega}_0 t) \right] \right\} + F_0 \left\{ \frac{\bar{\eta}}{9\bar{\omega}_0^2} \left[\cos(2\bar{\omega}_0 t) - \cos(\bar{\omega}_0 t) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\bar{\eta}}{24} t \sin(2\bar{\omega}_0 t) + \frac{1}{24} t \sin(\bar{\omega}_0 t) \right\}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Nosso estudo apresentou um notável acordo entre os resultados da solução numérica da equação (3.26) e a função aproximada obtida pelo método de Green (3.34). Na figura 3.10 apresentamos a comparação entre os cálculos numéricos da equação (3.22) e a função aproximada obtida pelo método de Green, equação (3.34). Claramente podemos perceber que a aproximação é boa para tempos curtos, mas difere da solução completa para tempos maiores. Como em tempos maiores a amplitude cresce muito, o comportamento não linear da equação (3.22) começa diferir da aproximação. O efeito da não linearidade tipicamente gera modulações como a que notamos neste sistema.

Estimamos o valor destes efeitos para experiências como a relatada em [23]. Para $\nu = 0.2, r_e = 20$ leva a $\bar{\omega}_0 = \omega_0 \sqrt{1 + 2\nu r_e} = 3\omega_0$, assim a ressonância paramétrica ocorre aproximadamente em $\omega_x = 2\pi \times 19.2\text{Hz}$ e a ressonância principal em $2\pi \times 9.6\text{Hz}$.

Figura 3.10: *Ressonância principal em interação sóliton-sóliton com $\omega_0 = 2.93 \times 10^{-3}$, $\nu = 0.2$, $r_0 = 20$, $\eta = 0.1$. A linha tracejada representa a solução analítica da aproximação de pequenas amplitudes (equação 3.25) usando o método iterativo da função de Green, eqs. (3.34). A linha contínua corresponde a solução numérica da equação (3.22). Os pontos correspondem a solução numérica por EDP da aproximação quase unidimensional, equação (2.8).*

As oscilações ressonantes podem levar à “quebra” do chamado “estado bisóliton” destruindo os sólitons. Na verdade, se a amplitude de oscilação de (3.30) é da ordem de grandeza da largura do potencial r_m no valor máximo U_m , o “estado de bisóliton”

é perdido. O comprimento r_m pode ser estimado quando $E_{tot} = U_m$, i.e.

$$\frac{1}{2}\omega_0^2 r_m^2 = 32\nu^2(1 - e^{-2\nu r_m}). \quad (3.35)$$

Assim $r_m \approx 8\nu/\omega_0$. Para os parâmetros da figura 3.9 temos $r_m \sim 95$. A amplitude máxima da ressonância paramétrica no instante $t = 6000$ é $A_m < 1$. A distorção na forma do “bisóliton” pode ocorrer se a amplitude A_m for $A_m > r_m$. No caso da figura 3.9 esta condição não é satisfeita. A mesma condição é válida para o caso da ressonância principal com $A_m \leq 10$ (veja Fig. 3.10). Assim podemos concluir que o “estado bisóliton” é conservado na fase π .

3.2 Variações temporais no potencial interatômico

Continuando nossa análise da equação de Gross-Pitaevskii em uma dimensão, entretanto, estudaremos o efeito da inserção de um termo dependente do tempo na interação entre os átomos, onde teremos

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{t}} = \left[-\frac{1}{2}\nabla^2 + \frac{1}{2}\bar{\omega}^2 x^2 - \gamma(t)|\varphi|^2 \right] \varphi, \quad (3.36)$$

onde: $\bar{\omega}$ é a frequência do potencial de armadilhamento e o termo γ é o termo de interação interatômica. Novamente renomearemos as variáveis $\bar{t} = t$ e $\bar{\omega} = \omega$ quando nos referirmos a elas nos próximos passos.

Usaremos o mesmo procedimento para a resolução da equação diferencial parcial (3.36) através do método numérico de Crank-Nicolson. Para compararmos o resultado numérico faremos um cálculo variacional dependente do tempo que é descrito a seguir.

Usaremos o *ansatz* utilizado no caso da frequência da armadilha dependente do tempo dado por

$$\varphi(x, t) = 2\nu \text{sech}[2\nu(x - \xi)] e^{i2\mu(x - \xi) + i\delta}, \quad (3.37)$$

com $\nu = \nu(t)$, $\xi = \xi(t)$, $\mu = \mu(t)$ e $\delta = \delta(t)$.

Para contornar o problema da variação temporal da não-linearidade e tratá-la apenas como uma perturbação na solução independente do tempo é útil a seguinte transformação $\sqrt{\gamma}\varphi = v$. Substituindo na equação (3.36) nós obtemos para

a variável v

$$iv_t + \frac{1}{2}v_{xx} + |v|^2v - \frac{1}{2}\omega_t^2x^2v = i\frac{\gamma_t}{2\gamma}v. \quad (3.38)$$

onde v_t denota a derivada parcial com relação ao tempo e v_{xx} a segunda derivada parcial com relação ao espaço.

O termo da esquerda pode ser considerado com uma pequena perturbação, a condição desta aproximação é $t_s/T \ll 1$, onde t_s é o período de oscilação entre os sólitons e T o período de oscilação da perturbação $\gamma(t)$, ou seja, uma aproximação adiabática. Vamos definir $g(t) = (1/2)(\log \gamma(t))_t$. O sólton simples possui uma amplitude envolvida por $\nu_s(t) = \gamma(t)\nu_{s0}$. Retornando a variável φ nós obtemos.

$$\varphi = \sqrt{\gamma(t)}\nu_{s0}\text{sech}(2\gamma(t)\nu_{s0}(x - \xi(t)))e^{i\theta}. \quad (3.39)$$

Vamos analisar a interação entre dois sólitons bem separados.

$$v(x, t) = v_1(x, t) + v_2(x, t), \quad (3.40)$$

com

$$v_n = 2\nu_n\text{sech}[2\nu_n(x - \xi_n)]e^{2i\mu_n(x - \xi_n) + i\delta_n},$$

$n = 1, 2$. Substituindo esta expressão na equação (3.38) e considerando o caso em que há pouca superposição das caudas, nós podemos derivar equações do tipo Karpman-Solov'ev:

$$\frac{d\nu_n}{dt} = (-1)^n 16\nu^3 e^{-2\nu r} + 2g(t)\nu_n, \quad (3.41)$$

$$\frac{d\mu_n}{dt} = -\frac{1}{2}\omega^2\xi_n + (-1)^n 16\nu^3 e^{-2\nu r} \cos(\phi), \quad (3.42)$$

$$\frac{d\xi_n}{dt} = 2\mu_n + 4\nu e^{-2\nu r} \sin(\phi), \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_n}{dt} = & -\frac{1}{2}\left(\xi_n^2 - \frac{\pi^2}{48\nu_n^2}\right) + 2(\nu_n^2 + \mu_n^2) + \\ & 8\mu\nu e^{-2\nu r} \sin(\phi) + 24\nu^2 e^{-2\nu r} \cos(\phi), \end{aligned} \quad (3.44)$$

onde $\phi = 2\mu r + \psi$, $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$, $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2$, $r = \xi_1 - \xi_2$, $\psi = \delta_2 - \delta_1$. Aqui r é a distancia relativa entre os sólitons e ψ é a fase relativa entre eles. Supondo que $r > 0$ e $|\nu_1 - \nu_2| \ll \nu$, $|\mu_1 - \mu_2| \ll \mu$, $|\nu_1 - \nu_2|r \ll 1$ e o parâmetro $\nu r \gg 1$. Para a equação (3.41) nós temos

$$\nu = \gamma(t)\nu_0. \quad (3.45)$$

Então, podemos aproximar este sistema a um sistema de duas equações diferenciais de segunda ordem acopladas

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{2}\omega_t^2 r - 64\nu^3 e^{-2\nu|r|} \cos(\phi) \operatorname{sgn}(r), \quad (3.46)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = 128\nu^4 e^{-2\nu|r|} \sin \phi, \quad (3.47)$$

onde ν é definido pela equação (3.45).

A exemplo do que realizamos anteriormente, nas próximas seções apresentaremos os resultados obtidos pela simulação numérica como sendo resultados de “EDP” (Equação Diferencial Parcial) e os resultados analíticos obtidos pelo princípio variacional simplesmente denominados como “variacional”.

3.2.1 Resultados

Primeiramente procuramos investigar o efeito da dependência temporal da não linearidade em situações estudadas anteriormente no caso da armadilha variando temporalmente. Analisamos as situações em que dois sólitons relativamente distantes possuem entre si fase 0 e π .

Inicialmente realizamos estudos com a perturbação dada por

$$\gamma(t) = 1 + \eta \cos(\omega_a t) \quad (3.48)$$

A figura 3.11 apresenta o efeito comparativo da inserção da armadilha, da perturbação da não linearidade sem a armadilha e da perturbação da não linearidade na presença da armadilha para o caso de dois sólitons com diferença de fase nula entre si. No gráfico (a) verificamos a oscilação natural dos sólitons, a frequência de oscilação dada por (3.19) é da ordem de 6×10^{-3} , no gráfico (b) temos o efeito de uma pequena modulação na não linearidade, podemos perceber um pequeno aumento na amplitude de oscilação entre os sólitons e uma modulação no período de oscilação, neste caso estamos calculando a distância relativa pela posição do centro de massa, no gráfico (c) temos o efeito da não linearidade constante na presença de um potencial de armadilhamento com frequência de valor elevado comparado a frequência natural dos sólitons, a frequência de oscilações é dominada pela frequência da armadilha, no gráfico (d) a inserção da modulação da não linearidade não é tão significativa no comportamento da distância relativa. No entanto, quando modulamos a não lineari-

dade com uma frequência igual ao dobro da frequência de armadilhamento notamos uma aumento na amplitude de oscilação.

Os resultados do variacional e da EDP concordam qualitativamente em todas as simulações, o acordo não é muito evidente para o caso ilustrado no gráfico (e) da figura 3.11.

Figura 3.11: *Comportamento da distância relativa entre sólitons. (a) Ausência de potencial de armadilhamento $\omega_0 = 0$ e não linearidade constante $\gamma = 1$. (b) Não linearidade variando no tempo $\gamma(t) = 1 + 0.1 \cos(\omega_a t)$, $\omega_a = 5.8 \times 10^{-4}$ e ausência de potencial de armadilhamento. (c) Potencial de armadilhamento com $\omega_0 = 5 \times 10^{-2}$ e não linearidade constante $\gamma = 1$. (d) Potencial de armadilhamento com $\omega_0 = 5 \times 10^{-2}$ e não linearidade dependente do tempo $\gamma = 1 + 0.1 \cos(\omega_0 t)$. (e) Potencial de armadilhamento com $\omega_0 = 5 \times 10^{-2}$ e não linearidade dependente do tempo $\gamma = 1 + 0.1 \cos(2\omega_0 t)$. Parâmetros dos sólitons $\nu = 0.2$, $r(0) = 20$. Linha contínua resultados de “EDP” e tracejada resultados do variacional.*

A presença do comportamento ressonante para perturbações na não linearidade em um sistema armadilhado é confirmada pelo efeito na amplitude de oscilação causado pelo aumento da intensidade da perturbação, o que é ilustrado na figura 3.12. O aumento na amplitude de oscilação da distância relativa é tanto maior

quanto maior a intensidade na modulação do coeficiente da não linearidade.

Figura 3.12: Efeito do aumento da intensidade da modulação da não linearidade sobre a distância relativa entre dois sólitons $\gamma(t) = 1 + \eta \cos(\omega_a t)$ com $\omega_a = 2\omega_0$, $\omega_0 = 5 \times 10^{-2}$. Parâmetros dos sólitons $\nu = 0.2$, $r(0) = 20$ e $\phi(0) = 0$. Linha contínua resultados de “EDP” e tracejada resultados do variacional.

Para o caso em que a diferença de fase inicial entre os sólitons é π ($\phi(0) = \pi$), exploraremos a situação em que os sólitons estão sob a ação de um potencial de armadilhamento que equilibra os sólitons em uma posição definida (como mostrado na equação (3.18)).

A modulação da não linearidade gera oscilações na distância relativa como mostra a figura 3.13. Notamos que existem duas frequências ressonantes, uma localizada no dobro da frequência de armadilhamento ($2\omega_0$) e outra localizada na frequência de pequenas oscilações do potencial entre sólitons. Indicando que o sistema possui frequências típicas de oscilação. Adhikari [61] observou que para o caso de um sólton simples existem várias frequências de ressonância para oscilações do valor do raio quadrático médio do sólton sob a ação de uma modulação na não linearidade, todas sendo múltiplos da frequência de armadilhamento. Na presença de um vórtice simples esta frequência é o dobro da assimetria da armadilha.

No entanto, ao contrário do caso em que a frequência da armadilha era depen-

Figura 3.13: Efeito do aumento da intensidade da modulação da não linearidade sobre a distância relativa entre dois sólitons $\gamma(t) = 1 + \eta \cos(\omega_a t)$ com $\omega_a = 2\omega_0$ (gráficos da esquerda) e $\omega_a = \omega_0\sqrt{1+2\nu r_0}$ (gráficos da direita), $\omega_0 = 2.93 \times 10^{-3}$. Parâmetros dos sólitons $\nu = 0.2$, $r(0) = 20$ e $\phi(0) = \pi$. Linha contínua resultados de “EDP” e tracejada resultados do variacional.

dente do tempo, o acordo entre EDP e o variacional não é tão evidente. Podemos perceber apenas um acordo qualitativo que deve estar associado ao fato que as perturbações na não linearidade geram uma alteração significativa no perfil dos sólitons como mostram as imagens apresentadas na figura 3.14 e 3.15. Podemos perceber que ao se aproximarem os sólitons apresentam um aumento significativo na amplitude e uma possível interpenetração das caudas, o *ansatz* variacional não trata esta situação de superposição. Este comportamento é mais evidente com uma maior intensidade da modulação da não linearidade (η grande).

Outro comportamento interessante na modulação da não linearidade para o caso em que a diferença de fase inicial é π ($\phi(0) = \pi$) é o comportamento do diagrama de fase do parâmetro $\phi(t)$. Na figura 3.16 ilustramos este comportamento, a presença da modulação da não linearidade. Podemos perceber que o aumento da intensidade da não linearidade gera um comportamento caótico neste diagrama de fase, as órbitas fechadas são substituídas por um comportamento caótico. Abdullaev et. al. [57] observaram um comportamento semelhante na largura dos sólitons formados.

Todos estes resultados apresentam a riqueza da fenomenologia presente em sistemas diluídos de Bose-Einstein que podem ser estudados usando-se ferramentas

relativamente simples.

Figura 3.14: *Representação tridimensional dos perfis de funções de onda para dois sólitons sob variação da não linearidade com os seguintes parâmetros $\gamma(t) = 1 + \eta \cos(\omega_a t)$, $\eta = 0.1$, $\omega_0 = 5 \times 10^{-2}$, $\omega_a = 2\omega_0$, $\nu = 0.2$, $r(0) = 20$ e $\phi(0) = \pi$.*

Figura 3.15: *Representação bidimensional dos perfis de funções de onda para dois sólitons sob variação da não linearidade com os parâmetros da figura 3.14.*

Figura 3.16: *Mapa de Poincaré da diferença de fase $\phi(t)$. (a) Não linearidade constante $\gamma = 1$, (b) $\gamma(t) = 1 + 0.1 \cos(2\omega_a)$. (c) $\gamma(t) = 1 + 0.2 \cos(2\omega_a)$, $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 + 2\nu r_0}$. Parâmetros dos sólitons $\nu = 0.2$, $r(0) = 20$, $\phi(0) = \pi + \frac{\pi}{100}$ e $\omega_0 = 2.93 \times 10^{-3}$.*

Capítulo 4

Vórtices em condensados densos

No capítulo anterior sempre quando nos referíamos ao condensado de Bose-Einstein estávamos tratando o caso de temperatura nula e baixa densidade que é o regime em que a equação de Gross-Pitaevskii é válida [20]. Neste capítulo trataremos outro regime onde temos uma densidade maior (comparado ao regime em que a equação de Gross-Pitaevskii é válida) e a temperatura não é nula, estudaremos a formação de vórtices nestes sistemas densos haja visto que a formação de vórtices em sistemas diluídos é relativamente bem conhecida [62]. A existência de vórtices é um importante campo para o estudo da superfluidez em condensados.

O capítulo se divide da seguinte forma: Na primeira seção temos a apresentação do modelo de "bósons escravos" que é uma teoria consolidada atualmente e na segunda seção apresentaremos os resultados da inserção de vórtices no condensado em uma aproximação de Thomas-Fermi e posteriormente em um cálculo mais completo com a presença do termo cinético que é a principal contribuição deste trabalho, finalmente na terceira seção apresentaremos um pequeno estudo do efeito da temperatura no cálculo completo.

4.1 O modelo de "bósons escravos"

O modelo de "bósons escravos" trata de condensados de Bose-Einstein em regime mais denso. Originalmente esta abordagem de campos foi usada no modelo (de férmions) de Hubbard [38, 39].

No modelo de "bósons escravos", os bósons ocupam lugar no espaço com densidade finita. Modela-se o comportamento do gás como uma rede onde cada partícula ocupa uma célula com a forma de uma esfera de raio a_s .

O Hamiltoniano do modelo pode escrito como

$$\hat{H} = \frac{J}{2d} \sum_{\langle x, x' \rangle} \hat{b}_x^* \hat{e}_x \hat{e}_{x'}^* \hat{b}_{x'} + \sum_x V_x \hat{b}_x^* \hat{b}_x \quad (4.1)$$

Os operadores $\hat{e}_x$, $\hat{e}_x^+$ são os operadores de aniquilação e criação de “vazios” na rede, $\hat{b}_x$, $\hat{b}_x^+$ são operadores de aniquilação e criação de bósons na rede, d é dimensão e J é termo de “hopping” que mede a probabilidade de um sítio na rede transitar entre o estado vazio e preenchido por um bóson, V_x é o potencial de interação entre os bósons nos x sítios, que para o caso do condensado armadilhado, equivale ao potencial de armadilhamento.

Assim, os estados ocupado e vazio são representados por dois campos b_x e e_x . Finalmente, podemos escrever a função de partição gran-canônica que é dada por

$$Z = \int \exp \left[-\beta \sum_{x, x'} b_x^* e_x t_{x, x'} e_{x'}^* b_{x'} + \beta \sum_x \mu_x |b_x|^2 \right] \times \prod_x \delta(|e_x|^2 + |b_x|^2 - 1) db_x db_x^* de_x de_x^*, \quad (4.2)$$

onde $1/\beta = k_B T$ é a energia em escala térmica. Em uma rede de dimensão d ,

$$\hat{t}_{x, x'} = \begin{cases} -J/(2d) & \text{se } x, x' \text{ é o vizinho mais próximo} \\ 0 & \text{se não} \end{cases}$$

é a taxa de tunelamento entre os vizinhos mais próximos, e $\mu_x = \mu - V_x$ é a dependência espacial do potencial químico que inclui o potencial de armadilhamento V_x . Ao invés de escrevermos μ_x escreveremos apenas μ nas equações subsequentes. Os campos a e b são adimensionais. Ainda mais, escreveremos todas as grandezas físicas em termos do produto entre a taxa de “hopping” e de uma constante advinda da transformação de Hubbard-Stratonovich α [79] para obtermos as quantidades adimensionais

$$\hat{t} \rightarrow \hat{t}' = \frac{1}{\alpha J} \hat{t}, \quad \mu \rightarrow \mu' = \frac{1}{\alpha J} \mu, \quad \beta \rightarrow \beta' = \alpha J \beta. \quad (4.3)$$

O parâmetro α deve ser escolhido “apropriadamente”, como por exemplo $\alpha = \frac{1}{J}$ já que α é um número. Desta forma dois novos campos são introduzidos pela transformação de Hubbard-Stratonovich [79], o campo complexo Ψ_x o qual descreve a “função de onda” do condensado e o campo real φ_x que está relacionado a densidade total de partículas [41].

$$Z = \int \exp \left\{ -\beta \sum_x \left[\sum_{x'} \Psi_x (\mathbf{1} - \hat{t})_{xx'}^{-1} \Psi_{x'}^* + \varphi_x^2 + (e_x, b_x) \begin{pmatrix} 1 + 2\varphi_x & \Psi_x \\ \Psi_x^* & -\mu' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x^* \\ b_x^* \end{pmatrix} \right] \right\} \\ \times \prod_x \delta(|b_x|^2 + |e_x|^2 - 1) db_x db_x^* de_x de_x^* d\Psi_x d\Psi_x^* d\varphi_x . \quad (4.4)$$

Integrando sobre todos os campos Ψ e φ_x voltamos à Equação (4.2). Por outro lado, os campos b_x e e_x podem ser integrados separadamente em (4.4) pois eles aparecem na forma de expoentes quadráticos. Isto leva a função de partição a ter a forma

$$Z = \int e^{-S_b - S_1} \prod_x d\Psi_x d\Psi_x^* \quad (4.5)$$

com a parte cinética da ação dada por

$$S_b = \sum_{x,x'} \Psi_x (1 - t)_{xx'}^{-1} \Psi_{x'}^* \quad (4.6)$$

e a parte potencial dada por

$$S_1 = - \sum_x \log \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta' \varphi_x^2} \frac{\sinh \left[\beta' \sqrt{(\varphi_x + \mu'/2)^2 + |\Psi_x|^2} \right]}{\beta' \sqrt{(\varphi_x + \mu'/2)^2 + |\Psi_x|^2}} d\varphi_x \right) . \quad (4.7)$$

onde β' , μ' são obtidos pela relação (4.3), os campos Ψ_x e φ_x que descrevem os campos de partículas condensadas e totais no sítio x respectivamente.

A densidade do condensado n_0 pode ser identificada como $|\Psi_x|^2/(1+J)^2$ e a densidade total de partículas sendo dada por $n_{tot} = \langle \varphi_x \rangle + \frac{1}{2}$. Aplicando a aproximação do ponto de sela para a integral da equação (4.5) encontraremos a ação do sistema. Para obtermos a equação de campo utilizamos o princípio da mínima ação, que significa resolver a equação

$$\frac{\partial S}{\partial \Psi_x^*} = 0 .$$

A equação de campo médio procurada é

$$\sum_{x'} (\mathbf{1} - \hat{t})_{xx'}^{-1} \Psi_{x'}^* - \left[\frac{\partial}{\partial (|\Psi_x|^2)} \log Z(\mathbf{r}) \right] \Psi_{\mathbf{r}} = 0 . \quad (4.8)$$

Para derivarmos a equação de campo médio a qual é aplicável para um potencial de armadilhamento, extendemos à aproximação no contínuo da (4.8). Isto pode ser feito usando a expansão

$$(\mathbf{1} - \hat{t})_{xx'}^{-1} = \frac{1}{1+J} \left(\delta_{x,x'} + \frac{\hat{t}_{x,x'} + J \delta_{x,x'}}{1+J} + \mathcal{O}(J^2) \right) ,$$

negligenciando os termos de segunda ordem nesta aproximação temos

$$\sum_{x'} (\hat{t}_{x,x'} + J \delta_{x,x'}) \rightarrow -\frac{Ja^2}{6} \nabla^2.$$

Isto leva-nos a equação

$$\left[-\frac{Ja^2}{6} \nabla^2 + (1+J) - \frac{(1+J)^2}{\beta} \frac{\partial}{\partial |\Psi(\mathbf{r})|^2} \log Z(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.9)$$

com

$$Z(\mathbf{r}) = \int e^{-\beta' \varphi_{\mathbf{r}}^2} \frac{\sinh \left[\beta' \sqrt{(\varphi_{\mathbf{r}} + \mu'/2)^2 + |\Psi(\mathbf{r})|^2} \right]}{\left[\beta' \sqrt{(\varphi_{\mathbf{r}} + \mu'/2)^2 + |\Psi(\mathbf{r})|^2} \right]} d\varphi_{\mathbf{r}}$$

para a dependência espacial do parâmetro de ordem $\Psi(\mathbf{r})$ em 3 dimensões, a é a constante de rede do sistema discreto. No contínuo a perde sua identidade como constante de rede, mas descreve características de escala de comprimento da equação(4.9), e pode ser interpretada como a extensão espacial de um boson. Assim, este parâmetro pode ser associado com o comprimento de espalhamento da onda $s a_s$ na equação de Gross-Pitaevskii [20]. A equação (4.9) é análoga a equação de Gross-Pitaevskii. Os parâmetros nesta equação podem ser identificados com a equação de Gross-Pitaevskii como

$$\frac{\hbar^2}{2m} \equiv \frac{Ja^2}{6}. \quad (4.10)$$

De posse deste instrumental teórico iniciamos os cálculos numéricos para tratar a formação de vórtices em um gás de Bose denso.

4.2 Metodo numérico

A resolução da equação (4.9) é mais complexa do que a equação de Gross-Pitaevskii pelo fato de ser uma equação integro diferencial, para resolvê-la de forma mais geral reescreveremos (4.9) em coordenadas cilíndricas

$$\left[-\frac{Ja^2}{6} \nabla_{\rho,z}^2 - \frac{Ja^2}{6} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + (1+J) - \frac{(1+J)^2}{\beta} \frac{\partial \log Z(\rho, z, \varphi)}{\partial |\Psi(\rho, z, \varphi)|^2} \right] \Psi(\rho, z, \varphi) = 0, \quad (4.11)$$

onde $\nabla_{\rho,z}^2 \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

Para resolvermos a equação de “bósons escravos” empregamos um algoritmo de relaxação similar ao aplicado na equação de Gross-Pitaevskii [81]. Inicialmente, usaremos o artifício de escrever a equação de “bósons escravos” em uma forma dependente do tempo, resultando em

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \left[-\frac{Ja^2}{6} \nabla_{\rho,z}^2 - \frac{Ja^2}{6} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + (1+J) - \frac{(1+J)^2}{\beta} \frac{\partial \log Z}{\partial |\tilde{\Psi}|^2} \right] \tilde{\Psi}, \quad (4.12)$$

com $Z = Z(\rho, z, \varphi)$ e a função de onda dada por $|\Psi(\rho, z, \varphi)|^2 = \eta |\tilde{\Psi}|^2$ e $\tilde{\Psi}$ normalizado a 1, assim toda a perda de “densidade de probabilidade” da função de onda causada pela propagação no tempo imaginário (que não é hermitiana) ocorrida a cada passo temporal é transferida e compensada no parâmetro η .

$$\eta_{n+1} \leftarrow \eta_n \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{\Psi}_{n+1}|^2 d^3r, \quad (4.13)$$

O sistema em um referencial girante tem a inserção do operador momento angular na direção z , ΩL_z , na expressão de (4.12), dado por $L_z = -i \frac{\partial}{\partial \phi}$. Usando o ‘ansatz’ em coordenadas cilíndricas $\tilde{\Psi}(\mathbf{r}) = \psi(\rho, z) e^{im\varphi}$ o qual expressa que para $m = 0$ não há vórtice no sistema e $m = 1$ há vórtice. Assim, teremos a seguinte expressão

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial t} = \left[-\frac{Ja^2}{6} \nabla_{\rho,z}^2 + (1+J) + \left(\frac{Ja^2 m^2}{6\rho^2} - m\Omega \right) - \frac{(1+J)^2}{\beta} \frac{\partial \log Z}{\partial |\tilde{\Psi}|^2} \right] \tilde{\Psi}, \quad (4.14)$$

Uma distribuição inicial de $\tilde{\Psi}$ relaxa para solução no equilíbrio quando $t \rightarrow \infty$. No equilíbrio a derivada temporal desaparecerá. Então, isto resulta na solução da equação original 4.9.

Durante a evolução temporal o termo cinético correspondente as derivadas espaciais (∇^2) é resolvido com algoritmo de Crank-Nicolson ($\mathcal{O}_{CN}$) alternado nas direções ρ e z . Na direção ρ eram utilizadas condições de contorno de von Neumann ($\frac{\partial \tilde{\Psi}(\rho=0,z)}{\partial \rho} = 0$).

A integral $Z(\mathbf{r})$ era calculada em cada passo temporal, utilizamos o seguinte artefato numérico: reescrevemos a derivada do logaritmo como

$$\chi_n \equiv \frac{\partial \log Z_n(\mathbf{r})}{\partial |\tilde{\Psi}(\mathbf{r})|^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{Z_n(\mathbf{r})} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi_{\mathbf{r}} e^{-\varphi_{\mathbf{r}}^2} \left[\frac{\cosh \gamma}{\gamma^2} - \frac{\sinh \gamma}{\gamma^3} \right], \quad (4.15)$$

onde

$$\gamma = \sqrt{\left(\varphi_{\mathbf{r}} - \frac{\mu'}{2}\right)^2 + \eta_n |\tilde{\Psi}(r)|^2}. \quad (4.16)$$

Isto quer dizer que substituímos a derivada por duas integrais independentes. As integrais χ_n e Z_n são calculadas eficientemente através de quadratura de Gauss-Hermite com apenas nove pontos.

Isto significa que a cada passo temporal utilizamos o seguinte algoritmo

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Psi}_{n+1/3} &\leftarrow \tilde{\Psi}_n + \frac{3\Delta t}{Ja^2} \left[\left(1 + J\right) + \left(\frac{Ja^2 m^2}{6\rho^2} - m\Omega\right) - \frac{(1+J)^2}{\beta} \chi_n \right] \\ \tilde{\Psi}_{n+2/3} &\leftarrow \mathcal{O}_{CN} \tilde{\Psi}_{n+1/3} \\ \tilde{\Psi}_{n+1} &\leftarrow \tilde{\Psi}_n + \frac{3\Delta t}{Ja^2} \left[\left(1 + J\right) + \left(\frac{Ja^2 m^2}{6\rho^2} - m\Omega\right) - \frac{(1+J)^2}{\beta} \chi_n \right] \\ \eta_{n+1} &\leftarrow \eta_n \int |\tilde{\Psi}_{n+1}|^2 d^3x \\ \tilde{\Psi}_{n+1} &\leftarrow \frac{\tilde{\Psi}_{n+1}}{\int |\tilde{\Psi}_{n+1}|^2 d^3x} \end{aligned} \right\}, \quad (4.17)$$

Como mostraremos a seguir, este algoritmo resolve eficientemente a equação de “bósons escravos”.

4.3 Resultados de simulações

Primeiramente realizamos um estudo para verificarmos se nosso algoritmo de cálculo estava correto, o procedimento foi compará-los com cálculos analíticos já realizados.

Usamos um potencial de armadilhamento parabólico $V(r) = \frac{m}{2} \omega_{oh} r^2$. Valores típicos em experimentos para o comprimento do oscilador harmônico $d_{oh} = \sqrt{\hbar/m\omega_{oh}}$ é de poucos μm [20], onde ω_{oh} é a frequência do potencial de armadilhamento medida em Hz. Considerando, por exemplo, átomos de ^{85}Rb próximos a ressonância *Feshbach* [8], nós estudamos um gás de Bose denso com comprimento de espalhamento $a_s \sim a \sim 200$ nm. Em nossos cálculos escolhemos os parâmetros $\frac{a}{d_{oh}} = 0.1215$ e $J = 5.5$ [66]. Assim, a unidade de energia seria J .

Uma aproximação muito boa para um estudo analítico de situações de condensados densos é a aproximação de Thomas-Fermi que considera que as interações entre

Figura 4.1: Perfil do módulo da função de onda do condensado obtido com diferentes potenciais químicos dentro da aproximação de Thomas-Fermi. A curva contínua é o cálculo numérico utilizando algoritmo de relaxação e a curva tracejada é o cálculo numérico utilizando pacotes numéricos (Mathematica). Parâmetro $\beta = 1$, temperatura não nula.

as partículas é muito mais forte do que a energia cinética das partículas, logo o termo potencial na equação (4.9) é muito maior do que o termo correspondente a derivada espacial (∇^2). Resultando em

$$\left[(1 + J) - \frac{(1 + J)^2}{\beta} \frac{\partial}{\partial |\Psi(\mathbf{r})|^2} \log Z(\mathbf{r}) \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.18)$$

A resolução desta equação pode ser obtida por vários pacotes matemáticos ¹ e comparamos a solução obtida com os pacotes com solução obtida com nosso código numérico usando apenas o algoritmo de relaxação (sem Crank-Nicolson) como mostra a figura 4.1. Podemos perceber um excelente acordo entre ambas as soluções.

Após esta etapa introduzimos o termo cinético na equação (4.18), indo assim além da aproximação de Thomas-Fermi. Percebemos que ocorre uma suavização na curva de densidade do condensado como mostra a figura 4.2. Podemos notar por ambos os cálculos que a densidade do condensado no centro da armadilha diminui com o aumento do potencial químico, ou seja, o aumento do número de partículas

¹Os cálculos analíticos foram realizados pelo grupo de Física teórica da Universidade de Augsburg [66]

condensadas e resultantemente da interação entre as mesmas. No entanto, a adição do termo cinético não altera tão significativamente este efeito.

Figura 4.2: Perfil do módulo da função de onda do condensado obtido com diferentes potenciais químicos fazendo uma comparação entre a aproximação de Thomas-Fermi (linha tracejada) e o cálculo completo incluindo o termo cinético (linha contínua). Parâmetro $\beta = 1$.

Agora podemos inserir vórtice neste tipo de condensado. Como citamos anteriormente no capítulo 1, vórtices são fenômenos que ocorrem em sistemas girantes. Utilizaremos o procedimento apresentado para obtenção da equação (4.14).

Na figura 4.3 podemos perceber o efeito da inserção do vórtice para o caso em que $\mu = 0$, ou seja, menor número de partículas. Podemos notar que a densidade de condensado desaparece abruptamente no centro da armadilha na aproximação de Thomas-Fermi, no entanto, a inserção do termo cinético aumenta o valor da densidade na origem, podemos associar que o termo cinético diminui a tendência a depleção.

O aumento do potencial químico ilustrado na figura 4.4 apresenta o mesmo efeito com relação a depleção verificado anteriormente. Uma forma de se estudar os sistemas com vórtices é fazer o levantamento da frequência crítica de formação dos vórtices. Esta frequência é definida como a frequência na qual energia do estado sem vórtice é igualada ao estado com vórtice. A energia do estado sem vórtice é

Figura 4.3: Perfil de densidade do condensado obtido para o potencial químico nulo. (a) Sistema sem vórtice, linha tracejada aproximação de Thomas-Fermi e linha contínua cálculo com termo cinético. (b) Sistema com vórtice linha tracejada aproximação de Thomas-Fermi e linha contínua cálculo com termo cinético. Parâmetro $\beta = 1$.

dada por

$$E = \int \left\{ \beta' \Psi^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{J}{(1+J)^2} \frac{a^2}{6} \nabla^2 + \frac{1}{1+J} \right] \Psi(\mathbf{r}) - \log Z(\mathbf{r}) \right\} d^d r. \quad (4.19)$$

Usando o mesmo procedimento para a obtenção da equação (4.14), o laplaciano da equação (4.19) contribui com um termo $\left(\frac{Ja^2}{6r_\perp^2} - \Omega \right)$ na expressão, ou seja, dependente de Ω , vejamos a expressão

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= 2\pi \int \left\{ \beta' \Psi^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{J}{(1+J)^2} \frac{a^2}{6} \nabla_{r_\perp, z}^2 + \left(\frac{Ja^2}{6r_\perp^2} - \Omega \right) + \frac{1}{1+J} \right] \Psi(\mathbf{r}) \right\} r_\perp dr_\perp dz \\ &\quad - 2\pi \int \beta' \log Z(\mathbf{r}) r_\perp dr_\perp dz. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Quando a diferença $E - E(\Omega)$ anula-se encontramos a frequência crítica ($\Omega_{critico}$). Na figura 4.5 apresentamos o efeito do termo cinético na curva da frequência crítica para um gás de Bose denso. Notamos que a velocidade crítica aumenta, este efeito pode ser entendido que com a presença do termo cinético a depleção no centro da

Figura 4.4: Perfil de densidade do condensado obtido para o potencial químico $\mu = 36.93$ com vórtice. Linha tracejada aproximação de Thomas-Fermi, linha contínua cálculo completo com termo cinético.

armadilha diminui (a aproximação de Thomas-Fermi superestima a depleção), para se obter o mesmo efeito de depleção necessita-se de uma maior frequência de rotação.

Podemos comparar o efeito da interação no condensado sobre esta frequência no regime denso de altas temperaturas, que caracteriza o modelo de “bósons escravos”, com a mesma curva obtido no regime diluído e de baixas temperaturas, que caracteriza o modelo de campo médio descrito pela equação de Gross-Pitaevskii. Antes disto veremos como o modelo de “bósons escravos” se aproxima do regime diluído, o que é mostrado a seguir.

4.4 Efeito da temperatura

No limite de baixas temperaturas nós podemos integrar o campo φ na equação (4.4) exatamente usando uma integração por ponto de sela, como veremos a seguir. Desta forma escreveremos

$$Z(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\beta'}(Z_- - Z_+) ,$$

Figura 4.5: Curva da frequência crítica de formação de vórtices em função do número de partículas para um condensado denso. Curva tracejada (Δ) cálculo utilizando algoritmo de relaxação sem o termo cinético (aproximação de Thomas Fermi), curva contínua (círculo) cálculo utilizando algoritmo de relaxação com o termo cinético.

onde

$$Z_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\beta' f_{\pm}(\varphi, |\Psi|^2)}}{\sqrt{(\varphi + \frac{\mu'}{2})^2 + |\Psi|^2}} d\varphi$$

e

$$f_{\pm}(\varphi, |\Psi|^2) = \varphi^2 \pm \sqrt{\left(\varphi + \frac{\mu'}{2}\right)^2 + |\Psi|^2}.$$

É possível realizar a aproximação de ponto sela a partir da expansão da função $f_{\pm}$ até segunda ordem em φ ao redor de seu mínimo φ_0 :

$$f_{\pm}(\varphi, |\Psi|^2) = f_{\pm}(\varphi_0, |\Psi|^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{\pm}}{\partial \varphi^2}(\varphi_0, |\Psi|^2) (\varphi - \varphi_0)^2 + \mathcal{O}(\varphi^2).$$

No limite de β grande (baixa temperatura), a integração de campo de sela nos fornece

$$Z_{\pm} = \sqrt{\frac{\pi}{(\varphi_0 + \frac{\mu'}{2})^2 + |\Psi|^2}} \frac{e^{-\beta' f_{\pm}(\varphi_0, |\Psi|^2)}}{\sqrt{\frac{\beta'}{2} \frac{\partial^2 f_{\pm}(\varphi_0, |\Psi|^2)}{\partial \varphi^2}}}.$$

O mínimo a ser encontrado satisfaz a equação

$$|\Psi|^2 = \left(\varphi_0 + \frac{\mu'}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{4\varphi_0^2} - 1 \right), \quad (4.21)$$

e teremos

$$f_{\pm}(\varphi_0) = \varphi_0^2 - \frac{1}{2} - \frac{\mu'}{4\varphi_0}; \quad \frac{\partial^2 f_{\pm}(\varphi_0)}{\partial \varphi^2} = 2 - \frac{8|\Psi|^2 \varphi_0^3}{(\varphi_0 + \frac{\mu'}{2})^3}.$$

Nós encontramos o seguinte resultado para temperatura nula para um condensado invariante por translações ($\Psi_x \equiv \Psi = \text{const}$) para a equação de campo médio equação (4.9): para a densidade do condensado encontramos

$$n_0 = \frac{|\Psi|^2}{(1+J)^2} = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\mu^2}{J^2} \right) & \text{se } -J < \mu < J \\ 0 & \text{senão,} \end{cases} \quad (4.22)$$

a densidade total de partículas é dada por

$$n_{\text{tot}} = \varphi_0 + \frac{1}{2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu \leq -J \\ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{J} \right) & \text{se } -J < \mu < J \\ 1 & \text{se } J \leq \mu. \end{cases} \quad (4.23)$$

Figura 4.6: Comportamento das densidades total e densidade de condensado em função da temperatura (figura retirada de [66]).

O comportamento das densidades total e condensada de partículas em função da interação do sistema é ilustrado na figura 4.6. Notamos a existência de uma temperatura crítica T_c onde o condensado de Bose-Einstein praticamente colapsa

Figura 4.7: *Comportamento da densidade do condensado em função da temperatura próximo ao limite da Gross-Pitaevskii. Linha contínua $\Delta\mu = 0.5$ e $\beta' = 10$, linha traço-ponto $\Delta\mu = 0.5$ e $\beta' = 20$, linha traço-ponto mais espessa $\Delta\mu = 0.7$ e $\beta' = 20$, linha pontilhada limite da Gross-Pitaevskii.*

($\frac{k_B T}{J} = 1/5.5$). Na temperatura nula $T = 0$, podemos explorar a região em que há menor interação entre as partículas (regime diluído) que caracterizada pela linearização da densidade de partículas próximo a fase vazia $\mu = -J$ (o oposto é a fase de isolante de “Mott” $\mu = J$, ou seja, fase mais densa). Nesta região o potencial químico pode ser escrito como $\mu = -J + \Delta\mu$, onde $\Delta\mu \ll J$. Iremos posteriormente fazer esta linearização e uma expansão para ilustrar o limite do modelo de “bósons escravos” e o regime diluído descrito pela equação de Gross-Pitaevskii.

Apresentamos na figura 4.7 o resultado de cálculos completos da equação de “bósons escravos” (calculado pela solução da equação (4.9) com o termo cinético) comparados com a equação de Gross-Pitaevskii (resolvida com os mesmos parâmetros na aproximação de Thomas-Fermi), notamos a expansão natural da densidade do condensado com a diminuição da temperatura (aumento do termo β'). Percebemos também que a diminuição da temperatura leva a curva cada vez mais próxima da solução da equação de Gross-Pitaevskii, para o mesmo $\Delta\mu$.

Podemos inserir vórtice nesta equação, utilizando o mesmo procedimento e verificar o efeito da temperatura e do potencial de interação (isto é, o valor de $\Delta\mu$). Na tabela 4.1 percebemos que ao aumentarmos $\Delta\mu$ para a mesma temperatura ($\beta = 20$) a velocidade crítica diminui. Aumentar $\Delta\mu$ implica em aumentar a interação, que gera o aumento da depleção favorecendo a formação dos vórtices. A diminuição da temperatura (aumento de β) gera uma diminuição da frequência crítica, no entanto, o sistema é bem mais sensível a variação do termo $\Delta\mu$.

$\Delta\mu$	β	ω_{crit}	Número de partículas
0.5	10	0.144	3800
0.5	20	0.124	6200
0.7	20	0.062	16000

Tabela 4.1: Conjunto de parâmetros que conduzem ao limite da Gross-Pitaevskii a partir do modelo de “bósons escravos”.

A figura 4.8 mostra a curva de frequência crítica de formação de vórtices versus número de partículas nos regimes das equações de Gross-Pitaevskii e “bósons escravos” usando o cálculo de relaxação e Crank-Nicolson. Os resultados concordam com dados já publicados [64] para a equação de Gross-Pitaevskii. Podemos perceber que a velocidade crítica é maior para o regime da equação de Gross-Pitaevskii o que vai ao encontro da análise do parâmetro $\Delta\mu$ na equação de “bósons escravos”. Em outras palavras, quanto menos interagentes são as partículas maior será a velocidade crítica de formação de vórtice.

Para melhor visualizarmos a aproximação do limite do modelo de “bósons escravos” e o modelo diluído descrito pela equação de Gross-Pitaevskii retornemos a equação (4.9) e reescreveremos o termo J como a constante α , ao invés de colocarmos a derivada do termo Z com relação ao parâmetro de ordem $|\Psi|^2$, o expressaremos em termos dos campos que acabamos de obter e escreveremos a equação de campo (4.9) em termos de $|\Psi|^2$. Vejamos

$$\left[-\frac{a^2}{6\alpha} \nabla^2 + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \frac{\varphi_0}{\varphi_0 + \frac{\mu'}{2\alpha J}} \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0, \quad (4.24)$$

como escolhemos um α específico podemos inserir o termo αJ no denominador.

Podemos reescrever o terceiro termo do lado direito em função de $|\Psi|^2$ através da expressão (4.21), teremos

Figura 4.8: *Comportamento da velocidade crítica de formação de vortices no regime da equação de Gross-Pitaevskii (linha contínua com círculos) e no regime da equação de “bósons escravos” (linha tracejada com $\triangle$). Resultados obtidos usando-se método da relaxação e Crank-Nicolson.*

$$|\Psi|^2 = \frac{1}{4B^2} - \left(\frac{\mu}{2\alpha J} \right)^2 \frac{1}{(1-B)^2},$$

onde $B = \frac{\varphi_0}{\varphi_0 + \frac{\mu}{2}}$.

Para uma solução de Thomas-Fermi, sem o termo laplaciano na equação (4.24) temos

$$B = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} \Rightarrow |\Psi|^2 = \frac{(1 + \frac{1}{\alpha})^2}{4} \left[1 - \left(\frac{\mu}{2J} \right)^2 \right], \quad (4.25)$$

Procuramos também uma solução para uma situação onde o gás é diluído, logo a densidade é pequena $|\Psi|^2 \simeq 0$, então,

$$\left[\left(\frac{\mu}{\alpha J} \right)^2 - 1 \right] B^2 + 2B - 1 = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{1 \pm \frac{\mu}{\alpha J}}, \quad (4.26)$$

Como tratamos o caso que $|\Psi|^2$ é pequeno podemos expandir B e obteremos

$$B = B(|\Psi|^2 = 0) + \left. \frac{\partial B}{\partial(|\Psi|^2)} \right|_{|\Psi|^2=0} |\Psi|^2 + O(|\Psi|^4),$$

Com algumas manipulações algébricas chegaremos em

$$B = \frac{1}{1 - \frac{\mu}{\alpha J}} + \frac{2(\frac{\mu}{\alpha J})}{(1 - \frac{\mu}{\alpha J})^4} |\Psi|^2, \quad (4.27)$$

Substituindo a expressão B na equação (4.24) e expandindo o primeiro termo de B em primeira ordem, com $\mu = -J + \Delta\mu$ e o segundo em ordem zero, teremos

$$\left[-\frac{a^2}{6\alpha} \nabla^2 - \frac{\Delta\mu}{J\alpha} - \frac{\frac{2}{\alpha}}{(1 + \frac{1}{\alpha})^2} \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0. \quad (4.28)$$

Reescrevendo em termos de J e lembrando que o potencial químico tem uma dependência espacial através do potencial de armadilhamento [66], obteremos uma expressão muito próxima da equação de Gross-Pitaevskii.

$$\left[-\frac{Ja^2}{6} \nabla^2 - \Delta\mu(x) - \frac{2J}{(1 + J)^2} \right] \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.29)$$

onde $\Delta\mu = \mu - V(x)$, com $V(x)$ sendo o potencial de armadilhamento em uma dimensão.

Usamos esta aproximação para o cálculo ilustrado no gráfico 4.7.

Isto nos indica que no limite das partículas pouco interagentes reobtemos os resultados da equação de Gross-Pitaevskii, o que indica que o modelo de “bósons escravos” é uma ferramenta útil no estudo da condensação de Bose-Einstein.

Capítulo 5

Conclusões

O estudo de perturbações dependentes do tempo utilizando métodos numéricos, Crank-Nicolson e Runge-Kutta, e analítico, variacional usando as técnicas da transformada inversa do espalhamento, mostraram serem muito úteis na compreensão da dinâmica de sólitons em condensados de Bose-Einstein. O estudo da dinâmica de dois sólitons na presença de modulações temporais na armadilha e na não linearidade resultou em um volume considerável de resultados.

A modulação periódica temporal da armadilha indicou que para o caso em que a diferença de fase inicial entre sólitons é nula, ou seja, um caso em que há um comportamento oscilatório na ausência da armadilha [47, 48], a amplitude de oscilação na distância relativa aumenta significativamente indicando uma situação de ressonância para um valor de frequência de modulação da armadilha com o dobro da frequência da armadilha no instante inicial (evidentemente sendo esta frequência diferente de zero).

Para o caso em que a diferença de fase inicial entre os sólitons é π , situação em que na ausência da armadilha os sólitons se repeliriam, surge um potencial de interação entre os sólitons com o formato de um duplo poço. Dependendo da frequência da armadilha há um potencial de armadilhamento que anula a força de repulsão entre os sólitons [68], mantendo-os fixos. A modulação periódica temporal neste potencial de armadilhamento gera uma oscilação ao redor da posição de equilíbrio. Uma modulação com uma frequência igual a frequência de pequenas oscilações do potencial de interação entre os sólitons causa o fenômeno da ressonância principal nas oscilações ao redor da distância relativa de equilíbrio que é caracterizada por um aumento linear nas amplitudes de oscilação.

A modulação do potencial de armadilha com uma frequência específica, frequência esta igual ao dobro da frequência de pequenas oscilações do potencial de interação entre os sólitons, gera o fenômeno de ressonância paramétrica nas oscilações ao redor da distância relativa de equilíbrio. A ressonância paramétrica é caracterizada pelo aumento exponencial nas amplitudes de oscilação.

Como perspectiva futura, ainda no estudo do sistema em questão, usando este mesmo ferramental poderemos discutir o efeito de termos anarmônicos no potencial de armadilhamento. Poderemos explorar situações mais críticas onde podem ocorrer fenômenos como o caos que é bem conhecido na equação de Duffing, por exemplo, que nada mais é do que um potencial harmônico com termos anarmônicos.

A modulação periódica no comprimento de espalhamento se reflete matematicamente como a modulação da não linearidade na equação de Gross-Pitaevskii. Esta modulação, no caso da diferença de fase nula, causa oscilações na distância relativa entre os sólitons e ressonância para a situação em que a frequência de modulação é o dobro da frequência de armadilhamento, a qual permanece constante durante o tempo, esta ressonância é mais intensa quanto mais intensa a modulação da não linearidade.

Para a situação em que a diferença de fase inicial é π existem oscilações ao redor da posição de equilíbrio no qual os sólitons não se repelem, nesta situação há oscilações cíclicas. A diferença de fase apresenta um comportamento muito semelhante ao caótico quando analisamos o mapa de Poincaré desta variável. Percebemos que o perfil dos sólitons se perturbam muito mais com modulações na não linearidade quando comparado a modulações no potencial de armadilhamento.

Estes resultados indicam o controle dos sólitons por perturbações externas do potencial de armadilhamento e de interação que podem ajudar o controle destas estruturas dentro do laboratório, inclusive para a construção de lasers atômicos [50].

Podemos aprofundar o estudo destes efeitos como por exemplo através do estudo de oscilações em um regime mais intenso (amplitude de modulação e frequência de oscilação maiores), onde nós sabemos que existe um tratamento geral da equação de Gross-Pitaevskii [80] que poderemos aplicar a sólitons interagentes.

Outra área estudada nesta tese foi a aplicação da teoria de “bósons escravos” na condensação de Bose-Einstein na formação de vórtices, nesta teoria foram estudados

condensados mais densos e em temperatura não nula. Utilizamos um algoritmo de relaxação para o estado fundamental e o método numérico de Crank-Nicolson para obter a contribuição do termo cinético no Hamiltoniano do condensado fazendo assim um cálculo além da aproximação de Thomas-Fermi. Percebemos que a contribuição do termo cinético pouco altera a curva de densidade do condensado, no entanto, diminui a depleção no centro do condensado o que causa um aumento na frequência crítica de formação de vórtices que foi mostrado pela análise das energias.

O estudo da temperatura indicou que ao sairmos da aproximação de “bósons escravos” para a aproximação de Gross-Pitaevskii temos uma diminuição na depleção o que favorece a formação de vórtices que já era notado anteriormente com o comportamento da frequência crítica com o número de partículas [62] para a Gross-Pitaevskii que diminui com o aumento das partículas, ou seja, o aumento da interação.

Dentro do laboratório poderá ser estudado o efeito da rotação do gás no limiar da temperatura crítica de obtenção do condensado, e assim obter mais informações sobre as interações entre as partículas nesta condição.

Como perspectiva futura poderemos estudar mais detalhadamente o limite da aproximação de “bósons escravos” para a Gross-Pitaevskii além da formação de múltiplos vórtices que também é uma fenomenologia interessante em condensados de Bose-Einstein [63].

Apêndice A

Método de Crank-Nicolson e *split-step* aplicados a Gross-Pitaevskii

O método de Crank-Nicolson é um método usado principalmente para solução de equações diferenciais parciais parabólicas. Tomemos como exemplo a equação da propagação do calor em uma dimensão, dada por:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{A.1})$$

onde: σ é constante de propagação do calor, e $u(x, t)$ é a função que representa a temperatura da barra em um tempo t e uma posição x .

Neste problema temos as seguintes condições de contorno e condição inicial:

$$u(x, 0) = \phi(x), 0 \leq x \leq 1 \quad (\text{A.2})$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, t \geq 0 \quad (\text{A.3})$$

As expressões (A.2) e (A.3) representam as condições de contorno e inicial respectivamente. Podemos dividir a região Ω' , do espaço de soluções de u (o que quer dizer: $\Omega' = (0, 1) \times (0, t)$), que satisfaz (A.2) e (A.3) em uma malha com n passos na direção temporal e M passos na direção espacial.

Assim a diferenciação da (A.1) resultará em:

$$\frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k} = \sigma \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2} + E(x, t), \quad (\text{A.4})$$

onde $E(x, t)$ é o erro causado pela discretização.

Se as dimensões h e k da malha forem suficientemente pequenas, nós podemos renomear $u(mh, nk)$ por U_m^n e obter:

$$U_m^{n+1} = U_m^n + \frac{k\sigma}{h^2}[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n], \quad (\text{A.5})$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, n > 0.$$

onde o índice subscrito é o passo espacial e o superescrito o temporal.

Este é um método explícito, no qual a estabilidade depende da condição que $\frac{k\sigma}{h^2} \leq \frac{1}{2}$ e o erro deste método é da ordem $O(k + h^2)$. É possível que a equação (A.6) seja modificada de maneira que se tenha um erro da ordem de $O(k^2 + h^2)$ e estabilidade incondicional, aplicando a regra do trapézio na forma que

$$U^{n+1} = U^n + \frac{k\sigma}{2}[AU^{n+1} + AU^n]. \quad (\text{A.6})$$

onde A é a diferenciação espacial.

Esta equação indica que o conhecimento do que ocorre no instante atual depende da diferenciação espacial neste mesmo instante. Para resolver este problema, chamando $r = \frac{k\sigma}{h^2}$, e escrevendo explicitamente a derivada espacial, temos

$$U_m^{n+1} - 0.5r[U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}] = \quad (\text{A.7})$$

$$U_m^n + 0.5r[U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n]$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, n > 0$$

Desta maneira temos no lado esquerdo da equação apenas o instante atual e no direito apenas o instante anterior. Assim temos um sistema de equações dadas por

$$\begin{bmatrix} 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & -\frac{r}{2} & 1+r & -\frac{r}{2} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -\frac{r}{2} & 1+r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1-r & \frac{r}{2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \frac{r}{2} & 1-r & \frac{r}{2} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{r}{2} & 1-r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix},$$

onde satisfazendo as condições de contorno das equações (A.2) e (A.3), devemos ter $U_0^n = U_M^n = 0$ e $U_0^{n+1} = U_M^{n+1} = 0$

Como estas matrizes são tridiagonais, para resolver este sistema matricial foi usada a técnica da decomposição LU [71]. Até aqui o uso do método de Crank-Nicolson resolve o termo ∇^2 da equação (2.8), no entanto, como trabalhar o termo não linear e a perturbação (potencial de armadilhamento)? Para contornarmos este problema lembremo-nos do problema do espalhamento de um pacote de onda sujeito à um potencial $V(x)$. Problema este que tem sua solução obtida pela equação de Schrödinger em uma dimensão dada por:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t) \\ &= (\mathbf{T} + \mathbf{V})\psi(x, t) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde o termo $\mathbf{T}$ é a energia cinética da partícula, e $\mathbf{V}$ é o potencial.

A solução da expressão (A.8) é:

$$\psi(x, t) = e^{-i(\mathbf{T}+\mathbf{V})\frac{(t-t_0)}{\hbar}} \psi(x, t_0) \quad (\text{A.9})$$

Chamando $\Delta t = t - t_0$ que é o passo de avanço temporal do processo numérico, teremos a seguinte expressão

$$\psi(x, t) = e^{-i(\mathbf{T}+\mathbf{V})\frac{\Delta t}{\hbar}} \psi(x, t_0) \quad (\text{A.10})$$

Ficamos tentados a escrever $e^{-i(\mathbf{T}+\mathbf{V})\frac{\Delta t}{\hbar}} = e^{-i\mathbf{T}\frac{\Delta t}{\hbar}} e^{-i\mathbf{V}\frac{\Delta t}{\hbar}}$, no entanto, $\mathbf{T}$ e $\mathbf{V}$ não comutam. Assim devemos tratar mais cuidadosamente esta expressão.

Tomando dois operadores A e B e uma constante λ , podemos escrever a exponencial da soma como:

$$e^{\lambda(A+B)} = 1 + \lambda(A+B) + \frac{\lambda^2}{2!}(A+B)^2 + \frac{\lambda^3}{3!}(A+B)^3 + \dots \quad (\text{A.11})$$

Ou, podemos rearranjar os termos em:

$$e^{\lambda(A+B)} = 1 + \lambda A + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2!}(AA + AB + BA + BB) + O(\lambda^3) \quad (\text{A.12})$$

Agora manipulando o produto de duas exponenciais, teremos:

$$\begin{aligned} e^{\lambda A} e^{\lambda B} &= (1 + \lambda A + \frac{\lambda^2}{2!}AA + O(\lambda^3))(1 + \lambda B + \lambda B + \frac{\lambda^2}{2!}BB + O(\lambda^3)) \quad (\text{A.13}) \\ &= 1 + \lambda A + \lambda B + \frac{1}{2!}\lambda^2(AA + BB) + \lambda^2 AB + O(\lambda^3) \end{aligned}$$

Podemos subtrair a expressão (A.12) de (A.13) e encontraremos:

$$e^{\lambda(A+B)} = e^{\lambda A} e^{\lambda B} - \frac{\lambda^2}{2!}[A, B] + O(\lambda^3) \quad (\text{A.14})$$

Logo se A e B não comutarem poderemos separar como produto de exponenciais a exponencial da soma dos operadores, introduzindo um erro da ordem de λ^2 . Mas podemos melhorar a aproximação de (A.12) escrevendo a exponencial da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} e^{\lambda \frac{A}{2}} e^{\lambda B} e^{\lambda \frac{A}{2}} &= [1 + \lambda(\frac{A}{2}) + \frac{\lambda^2}{2!}(\frac{A}{2})^2 + \dots][1 + \lambda(B) + \frac{\lambda^2}{2!}(B)^2 + \dots] \\ &\quad [1 + \lambda(\frac{A}{2}) + \frac{\lambda^2}{2!}(\frac{A}{2})^2 + \dots] \\ &= 1 + \lambda \frac{A}{2} + \lambda B + \lambda \frac{A}{2} + \lambda^2 \frac{BA}{2} + \\ &\quad \lambda^2 \frac{AB}{2} + \lambda^2 (\frac{A}{2})^2 + \frac{\lambda^2 A^2}{2! 4} + \frac{\lambda^2 B^2}{4} + \frac{\lambda^2 A^2}{2! 4} + O(\lambda^3) \quad (\text{A.15}) \end{aligned}$$

Subtraindo (A.12) de (A.15) encontramos:

$$e^{\lambda(A+B)} = e^{\lambda \frac{A}{2}} e^{\lambda B} e^{\lambda \frac{A}{2}} + O(\lambda^3) \quad (\text{A.16})$$

Ou seja, introduzimos um erro da ordem de λ^3 na aproximação. Fazendo $A = \mathbf{V}$, $B = \mathbf{T}$ e $\lambda = -i\Delta t/\hbar$ temos

$$e^{-i(\mathbf{V}+\mathbf{T})\frac{\Delta t}{\hbar}} = e^{-i\mathbf{V}\Delta t/2\hbar} e^{-i\mathbf{T}\Delta t/\hbar} e^{-i\mathbf{V}\Delta t/2\hbar} + O(\Delta t^3) \quad (\text{A.17})$$

que produz um erro da ordem de Δt^3 .

Voltando para (A.10) encontramos a aproximação numérica:

$$\psi(x, t_0 + \Delta t) = e^{-i(\mathbf{V}+\mathbf{T})\frac{\Delta t}{\hbar}}\psi(x, t_0) = e^{-i\mathbf{V}\Delta t/2\hbar}e^{-i\mathbf{T}\Delta t/\hbar}e^{-i\mathbf{V}\Delta t/2\hbar}\psi(x, t_0) + O(\Delta t^3) \quad (\text{A.18})$$

Este procedimento é conhecido como aproximação de *split-step* [72]. Desta forma conhecendo-se um estado inicial podemos resolver a equação (A.8) pela aproximação apresentada em (A.18).

Então, podemos resolver a equação (2.8), pois operar $e^{-i\mathbf{T}\delta t/\hbar}$ sobre ψ corresponde a evoluir ψ usando

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \mathbf{T}\psi. \quad (\text{A.19})$$

que pode ser resolvido por Crank-Nicolson. Os termos não-linear e o potencial de armadilhamento podem ser resolvidos apenas pela exponenciação de $\frac{-iV\Delta t}{\hbar}$ e multiplicação por $\psi(x, t_0)$. Este procedimento é válido pelo fato de que $\psi(x, t)$ varia lentamente para este caso.

Na figura A.1 temos uma ilustração do procedimento usado.

Figura A.1: Ilustração do processo numérico usado na resolução da “EDP” da equação de G.P.

Apêndice B

Tabela de derivadas e integrais

$$\frac{d[\operatorname{sech}(x)]}{dx} = -\tanh(x)\operatorname{sech}(x). \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{d[\tanh(x)]}{dx} = \operatorname{sech}^2(x). \quad (\text{B.2})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(x) dx = 2. \quad (\text{B.3})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \operatorname{sech}^2(x) dx = \frac{\pi^2}{6}. \quad (\text{B.4})$$

$$\int \operatorname{sech}^2(x) \tanh^2(x) dx = \frac{1}{3} \tanh^2(x). \quad (\text{B.5})$$

$$\int x \operatorname{sech}^2(x) dx = x \tanh(x) - \ln[\cosh(x)]. \quad (\text{B.6})$$

$$\int \operatorname{sech}^4(x) dx = \tanh(x)\operatorname{sech}^2(x) + \frac{2}{3} \tanh^3(x). \quad (\text{B.7})$$

Apêndice C

Determinação da fase entre dois sólitons

Dado um número complexo $z(t) = x(t) + iy(t)$ (e $|z(t)| = 1$) a determinação da quantidade de voltas que este número realiza no plano complexo como mostra a figura C.1, pode ser determinada por uma técnica conhecida como “winding number”.

Este procedimento é mais interessante do que o cálculo que usa a função tangente, $\tan(x)$, que é uma função que possui duas singularidades em $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = -\frac{\pi}{2}$ [82], o que dificulta a determinação numérica de $\theta(t)$ para o caso em que $z(t)$ realiza mais de uma volta no plano complexo.

Figura C.1: Representação de um número complexo dependente do tempo $z(t)$ no plano complexo

Parametrizando $x(t) = \cos(\theta)$ e $y(t) = \sin(\theta)$ podemos obter o ângulo $\theta(t)$ descrito por z por meio da expressão [83]

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \left[x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right] dt, \quad (\text{C.1})$$

onde $x^2 + y^2 = 1$

Para a obtenção numérica da fase entre dois sólitons, que tenham sido evoluídos utilizando-se uma técnica numérica para resolução de EDP (Equação Diferencial Parcial), como por exemplo Crank-Nicolson, utilizamos o “winding number”. Assim, dados dois sólitons representados por

$$u_n(x) = 2\nu_n \text{sech}[2\nu_n(x - \xi_n)] e^{i2\mu_n(x - \xi_n) + i\delta_n}, \quad (\text{C.2})$$

Podemos encontrar o máximo $u(t)_{nmax}$ no instante t , como mostra a figura C.2, que é um número complexo.

Figura C.2: Ilustração do cálculo da diferença de fase entre dois sólitons, $u(t)_{nmax}$ são números complexos que representam o máximo de cada sólito, e fornecem a informação da fase do sólito.

A fase do número complexo $u(t)_{nmax}$ representa a fase do sólito n [84]. Assim, para os dois sólitons temos:

$$u_{1max} = x_1 + iy_1, \quad (\text{C.3})$$

$$u_{2max} = x_2 + iy_2, \quad (\text{C.4})$$

Então as fases dos sólitons 1 e 2 serão dadas respectivamente por

$$\delta_1(t) = \delta_1(0) + \int_0^t \left[x_1 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dx_1}{dt} \right] dt, \quad (\text{C.5})$$

$$\delta_2(t) = \delta_2(0) + \int_0^t \left[x_2 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dx_2}{dt} \right] dt, \quad (\text{C.6})$$

E finalmente,

$$\psi(t) = \delta_2(t) - \delta_1(t). \quad (\text{C.7})$$

Outro cálculo que fornece-nos a distribuição de fase de um sólito é o cálculo pela velocidade do fluxo de probabilidade. Tomemos a equação da continuidade [85], dada por

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \mathcal{J} = 0, \quad (\text{C.8})$$

onde $\mathcal{J}$ é o fluxo de densidade de probabilidade e ρ' é a densidade de probabilidade, dada por

$$\rho' = uu^*,$$

usando a mesma notação da equação (C.2).

O fluxo pode ser deduzido a partir da equação de onda [85] e é dado por

$$\mathcal{J} = -i \frac{\hbar}{2m} \left[u^* \nabla u - (\nabla u^*) u \right], \quad (\text{C.9})$$

e associando com

$$\mathcal{J} = \vec{v} \rho'.$$

Com $u = ae^{i\delta}$ sendo a amplitude e δ a fase do sólito, portanto

$$\delta = \int \vec{v} dr \quad (\text{C.10})$$

Logo o cálculo da fase pode ser feito instantaneamente em todos os pontos do sólito. O cálculo pela integração da velocidade permite saber o valor da fase a menos de uma constante, o cálculo usando o “winding number” permite-nos o cálculo do valor líquido da fase (somando as diversas rotações da fase). Por ser dependente do passo temporal anterior, o cálculo pelo método de “winding number” é muito mais sensível a mudanças na forma da função de onda que ocorrem durante a evolução do sólito.

Apêndice D

Método de relaxação

Suponha que desejemos resolver a equação elíptica

$$\mathcal{L}u = \rho, \quad (\text{D.1})$$

onde $\mathcal{L}$ representa algum operador elíptico e ρ é um termo de fonte. Reescrevendo a equação como uma equação de difusão

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u - \rho. \quad (\text{D.2})$$

Uma distribuição inicial u relaxará para uma solução equilibrada quando $t \rightarrow \infty$. No equilíbrio a derivada temporal desaparecerá. Com isto teremos a solução do problema elíptico inicial (D.1).

Desta forma um método de relaxação consiste na evolução do sistema até a obtenção do equilíbrio, no caso particular de nossos problemas deveremos fazer esta evolução no tempo imaginário [86].

D.1 Evolução no tempo imaginário

Para obtermos o estado fundamental de um sistema podemos utilizar a técnica de evolução no tempo imaginário [78]. desta forma um sistema governado pela equação de Schrödinger dependente do tempo

$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad (\text{D.3})$$

nesta situação utilizamos $\hbar = 1$. Considerando que $\Psi(x, t)$ é solução da equação, podemos expandi-la em termos dos auto-estados de (D.3) na forma

$$\Psi = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \Phi_i, \quad (\text{D.4})$$

sendo Φ_0 o estado fundamental. Quando o tempo t é substituído por um tempo imaginário α , na forma $t \rightarrow -i\alpha$ temos

$$\frac{\partial \Psi(\alpha)}{\partial \alpha} = -H\Psi(\alpha), \quad (\text{D.5})$$

cujas a solução formal é

$$\Psi(\alpha) = e^{-H\alpha}\Psi(0), \quad (\text{D.6})$$

Este procedimento é válido para um Hamiltoniano independente do tempo.

Desta forma poderemos após uma evolução no tempo imaginário calcular o estado fundamental notando que

$$\frac{a_0}{|a_0|}\Phi_0 = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\Psi(\alpha)}{\langle \Psi(\alpha) | \Psi(\alpha) \rangle^{1/2}} \quad (\text{D.7})$$

o que significa que é possível chegar ao estado fundamental fazendo uma evolução temporal no tempo imaginário com $\alpha \rightarrow \infty$. Esta afirmação pode ser demonstrada assumindo que, escrevendo $\Psi(0)$ em termos da equação (D.4) tenhamos $a_0 \neq 0$, ou seja, que haja uma componente não nula do estado fundamental na função de onda inicial. Assumindo esta condição podemos escrever a energia média na forma

$$\begin{aligned} E(\alpha) &\equiv \frac{\langle \Psi(\alpha) | H | \Psi(\alpha) \rangle}{\langle \Psi(\alpha) | \Psi(\alpha) \rangle} \\ &= \frac{E_0 + \sum_{i=1}^{\infty} E_i e^{-2\alpha(E_i - E_0)} |a_i/a_0|^2}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2\alpha(E_i - E_0)} |a_i/a_0|^2} \\ &= E_0 + \frac{\sum_{i=1}^{\infty} (E_i - E_0) e^{-2\alpha(E_i - E_0)} |a_i/a_0|^2}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2\alpha(E_i - E_0)} |a_i/a_0|^2} \geq E_0, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

de forma que $E(\alpha)$ tende a E_0 quando $\alpha \rightarrow \infty$.

Apêndice E

Período no regime oscilante de sólitons

Tomando a equação (3.20) para o caso de $\omega = 0$ teremos

$$T = 4\sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{32\nu^2(e^{-2\nu r} - e^{-2\nu r_0})}}, \quad (\text{E.1})$$

Que pode ser reescrita como

$$T = \frac{e^{\nu r_0}}{2\nu} \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{(e^{-2\nu(r-r_0)} - 1)}}, \quad (\text{E.2})$$

fazendo uma mudança de variáveis tal que $2\nu(r - r_0) = u$ termos

$$T = \frac{e^{\nu r_0}}{4\nu^2} \int_{-2\nu r_0}^0 \frac{du}{\sqrt{(e^{-u} - 1)}}, \quad (\text{E.3})$$

precisamos de outra mudança de variáveis, dada por $v = e^{-u}$ então

$$T = -\frac{e^{\nu r_0}}{4\nu^2} \int_{e^{2\nu r_0}}^1 \frac{dv}{v\sqrt{(v-1)}}, \quad (\text{E.4})$$

Fazendo os limites da integral $\int \frac{dv}{v\sqrt{(v-1)}} = 2 \arctan\left(\sqrt{(v-1)}\right)$ teremos

$$T = \frac{e^{\nu r_0}}{2\nu^2} \arctan \sqrt{(e^{2\nu r_0} - 1)}, \quad (\text{E.5})$$

Como temos a condição $\nu r \gg 1$ chegamos a conclusão que $e^{\nu r_0} \gg 1$ logo, $\arctan \sqrt{(e^{2\nu r_0} - 1)} \approx \arctan \infty = \frac{\pi}{2}$ e finalmente chegamos na expressão

$$T \approx \frac{\pi}{4\nu^2} e^{\nu r_0}. \quad (\text{E.6})$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. N. Bose, “Plancks Gesetz Lichtquantenhypotese”, Z. Phys. B **26**, 178 (1924).
- [2] A. Einstein, “Quantentheorie des idealen Gases” *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, rept. 3, p.18 (1925).
- [3] M.H.Anderson, J.R.Ensher, M.R.Matthews, C.E.Wieman, and E.A.Cornell, “Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor” , Science **269**, 198 (1995).
- [4] C.C. Bradley, C.A. Sackett, J.J. Tollet, and R.G. Hulet, “Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions”, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
- [5] C.C. Bradley, C.A. Sackett and R.G. Hulet, “Bose-Einstein Condensation of Lithium: Observation of Limited Condensate Number”, Phys. Rev. Lett. **78**, 985 (1997).
- [6] K.B.Davis, M. O. Mewes, M.R. Andrews, N.J.van Druten, D.S.Durfee, D.M.Kurn, e W.Ketterle, “Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms”, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969(1995).
- [7] D.G.Fried, T.C. Killian, L. Willmann, D.Landhuis, S.C. Moss, D.Kleppner, e T.J. Greytak, “Bose-Einstein Condensation of Atomic Hydrogen” Phys. Rev. Lett. **81**, 3811 (1998).
- [8] N.R.Claussen, S.L.Cornish, J.L.Roberts, E.A.Donley, E.A.Cornell, e C.E.Wieman, “Stable Rb Bose-Einstein Condensates widely Tunable Interactions”, Phys. Rev. Lett. **85**, 1795 (2000).

-
- [9] A. Robert, O. Sirjean, A. Browaeys, J. Poupard, S. Nowak, D.Boiron, C.I. Westbrook and A.Aspect, “A Bose-Einstein Condensate of Metastable Atoms”, *Science* **292**, 461 (2001).
- [10] F. Pereira Dos Santos, J. Léonard, Junmin Wang, C.J. Barrelet, F. Perales, E. Rasel, C.S. Unnikrishnan, M. Leduc, C.Cohen-Tanoudji, “Bose-Einstein Condensation of Metastable Helium” , *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3459 (2001).
- [11] G.Moduno, G. Ferrari, G. Roati, R. J. Brecha, A. Simoni, M. Inguscio, “Bose-Einstein Condensation of Potassium Atoms by Sympathetic Cooling” , *Science* **294**, 1320(2001).
- [12] T. Weber, J. Herbig, M. Mark, H. Nägerl, and R. Grimm, “Bose-Einstein Condensation of Cesium”, *Science* **299**, 232 (2003).
- [13] Y. Takasu, K. Maki, K. Komori, T. Takano, K. Honda, M. Kumakura, T. Yabuzaki and Y. Takahashi “Spin-Singlet Bose-Einstein Condensation of Two-Electron Atoms”, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040404 (2003).
- [14] A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler and T. Pfau “Bose-Einstein Condensation of Chromium”, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 160401 (2005).
- [15] M. Greiner, C. Regal and D. Jin “Emergence of a molecular Bose-Einstein Condensate from a Fermi gas”, *Nature* **426**, 537 (2003).
- [16] S. Jochim, M. Bartenstein, A. Altmeyer, G. Hendl, S. Riedl, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R.Grimm “Bose-Einstein Condensation of Molecules” , *Science* **302**, 2101 (2003).
- [17] W. D. Phillips “Laser cooling and trapping of neutral atoms”, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 721 (1998).
- [18] A. Gammal, T. Frederico, L.Tomio, “Critical number of atoms for attractive Bose-Einstein condensates with cylindrically symmetrical traps”, *Phys. Rev. A* **64**, 055602 (2001).
- [19] A. J. Leggett, “Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts” , *Rev. Mod. Phys.* **73**, 307 (2001).

- [20] F. Dalfovo, S. Giorgini, L.P. Pitaevskii, e S. Stringari, “Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases”, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999).
- [21] Ph. W. Courteille, V. S. Bagnato and V. I. Yukalov, “Bose-Einstein Condensation of Trapped Atomic Gases”, *Laser Physics*, **11**, 659 (2001).
- [22] W. Ketterle, “When atoms behave as waves”, *Rev. Mod. Phys.*, **74**, 1131 (2002).
- [23] K.Strecker, G.Patridge, A.Truscott, and R.G.Hulet, “Formation and propagation of matter-wave soliton trains”, *Nature (London)* **417**, 150 (2002).
- [24] L.Khaykovich, F.Schreck, G.Ferrari, T.Bourdel, J.Cubizolles, L.D.Carr, Y.Castin, and C.Salomon, “Formation of a Matter-Wave Bright Soliton”, *Science* **296**, 1290 (2002).
- [25] P.G.Drazin and R.S.Jonhson, *Solitons: an introduction*, Cambridge University Press (1989).
- [26] I. M. Gel’fand and B. M. Levitan, “On the determination of a differential equation from its spectral function”, *Am. Math. Soc. Transl.* **1**, 253 (1951).
- [27] V. A. Marchenko, “On the reconstruction of potential enrgy from phases of the scattered waves”, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **104**, 695 (1955).
- [28] R. M. Miura, C. S. Gardner and M. D. Kruskal “Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservations laws and constants of motion”, *J. Math. Phys.* **9**, 1204, (1968).
- [29] E. Fermi, J. Pasta and S. M. Ulam, “Studies in nonlinear problems.” *Tech. Rep.*, **LA-1940**, Los Alamos Sci. Lab (1955) and *Collected Papers of Enrico Fermi*, Vol. II, Chicago University Press, (1965).
- [30] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal “Interactions of ‘solitons’ in a collisionless plasma and the recurrence of initial states”, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1965).
- [31] V. E. Zakharov and A. B. Shabat, “Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modultation of waves in nonlinear media”, *Sov. Phys. JETP* **34**, 62 (1972).

-
- [32] A. Hasegawa and Y. Kodama, *Solitons in Optical Communications*, Oxford University Press (1995).
- [33] J.R. Taylor, *Optical Solitons: Theory and experiment*, Section: C. Desem and P.L.Chu”, Cambridge University Press (1992).
- [34] J. Hubbard, “Electron Correlations in Narrow Energy Bands”, Proc. Roy. Soc. A **276**, 238 (1963)
- [35] D. Jaksch, C. Bruder, J. I. Cirac, C. W. Gardiner and P. Zoller, “Cold bosonic atoms in optical lattices”, Phys. Rev. Lett. **81**, 153108 (1998).
- [36] D. van Oosten, P. van der Straten and H. T. C. Stoof, “Quantum phases in an optical lattice” Phys. Rev. A **63**, 053601 (2001).
- [37] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch and I Bloch, “Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms” Nature **415**, 39 (2002).
- [38] S. E. Barnes, “New method for the Anderson model”, J. Phys. F: Met. Phys. **6**, 1375 (1976).
- [39] G. Kotliar and A. E. Ruckenstein, “New Functional Integral Approach to Strongly Correlated Fermi Systems: The Gutzwiller Approximation as a Saddle Point”, Phys. Rev. Lett. **57**, 1362 (1986).
- [40] K. Ziegler and A. Shukla, “Bose-Einstein Condensation in a Trap: the Case of a Dense Condensate”, Phys. Rev. A **56**, 1438 (1997).
- [41] K. Ziegler, “Condensation of a hard core Bose-gas”, Phys. Rev A **62**, 23611 (2000)
- [42] K. Ziegler, “Properties of a dense Bose gas”, Laser Phys. **12**, 247 (2002).
- [43] K. Ziegler, “Interacting Bose gas in an Optical Lattice”, J. Low Temp. Phys. **126**, 1431 (2002).
- [44] S. Novikov, S. V.Manakov, L. P. Pitaevskii and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*, Springer (1984).

-
- [45] F. Kh. Abdullaev, *Theory of solitons in inhomogeneous media*, Wiley (1994).
- [46] V.I. Karpman and V.V.Solov'ev, "A perturbation theory for soliton systems", *Physica D* 1 & 2, 142 (1981).
- [47] J. P. Gordon, "Interaction forces among solitons in optical fibers", *Opt. Lett.* **8**, 596 (1986).
- [48] D. Anderson and M. Lisak, "Bandwidth limits due to mutual pulse interaction in optical soliton communication systems", *Opt. Lett.* **11**, 174 (1986).
- [49] R. Scharf and A. R. Bishop, "Soliton chaos in the nonlinear Schrödinger equation with spatially periodic perturbations", *Phys. Rev. A* **46**, R2973 (1992), *ibid.* **43**, 6535 (1991).
- [50] L. D. Carr and J. Brand, "Pulsed atomic soliton laser", *Phys. Rev. A* **70**, 033607 (2004).
- [51] B. P. Anderson, K. Dholakia and E. M. Wright "Atomic-phase interference devices based on ring-shaped bose-Einstein condensates: two-ring case", *Phys. Rev. A* **67**, 033601 (2003).
- [52] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn and W. Ketterle, "Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate", *Nature* **392**, 151 (1998).
- [53] H. Saito and M. Ueda, "Dynamically Stabilized Bright Solitons in a Two-Dimensional Bose-Einstein Condensate", *Phys. Rev. Lett.* **90**, 040403 (2003).
- [54] P. V. Elyutin, A. V. Buryak, V. V. Gubernov, R. A. Sammut and I. N. Towers "Interaction of two one-dimensional Bose-Einstein solitons: Chaos and energy exchange", *Phys. Rev. E* **64**, 016607 (2001).
- [55] S. V. Dmitriev, P. G. Kevrekidis, B. A. Malomed and D. J. Frantzeskakis "Two-soliton collisions in near-integrable lattice system", *Phys. Rev. E* **68**, 056603 (2003).
- [56] B. Baizakov, G. Filatella, B. A. Malomed and M. Salerno, "Double parametric resonance for matter-wave solitons in a time-modulated trap", *Phys. Rev. E* **71**, 036619 (2005).

-
- [57] F. Kh. Abdullaev, E. N. Tsoy, B. A. Malomed, and R. A. Kraenkel, “Array of Bose-Einstein condensates under time-periodic Feshbach-resonance management”, *Phys. Rev. A* **68**, 053606 (2003).
- [58] F. Kh. Abdullaev, J. G. Caputo, R. A. Kraenkel, and B. A. Malomed, “Controlling collapse in Bose-Einstein condensates by temporal modulation of the scattering length”, *Phys. Rev. A* **67**, 013605 (2003).
- [59] L. Wu, J. Zhang, and L. Li, “Modulational instability and bright solitary wave solution for Bose-Einstein condensates with time-dependent scattering length and harmonic potential”, *New J. Phys.* **9**, 69 (2007).
- [60] R.A. Kraenkel, F. K. Abdullaev, R. Galimzyanov and M. Brtka, “Resonances in a trapped 3D Bose-Einstein condensate under periodically varying atomic scattering length” *J. of Phys. B: Atom. Mol. and Opt. Phys.*, **37**, 3535 (2004).
- [61] S. K. Adhikari, “Resonance in Bose-Einstein condensate oscillation from a periodic variation in scattering length”, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **36**, 1109 (2003).
- [62] F. Dalfovo and S. Stringari, “Bosons in anisotropic traps: Ground state and vortices”, *Phys. Rev. A* **53**, 2477 (1996).
- [63] D. A. Butts and D. S. Rokhsar, “Predicted signatures of rotating Bose-Einstein condensates”, *Nature* **397**, 327 (1999).
- [64] D. L. Feder, C. W. Clark and B. I. Schneider, “Vortex Stability of Interacting Bose-Einstein Condensates Confined in Anisotropic Harmonic Traps”, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4956 (1999).
- [65] D. L. Feder and C. W. Clark, “Superfluid-to-Solid Crossover in a Rotating Bose-Einstein Condensate”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 190401 (2001).
- [66] Ch. Moseley, K. Ziegler, “A renormalized Gross-Pitaevskii Theory and vortices in a strongly interacting Bose gas”, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40**, 629 (2007).

- [67] G. B. Jo, Y. Shin, S. Will, T. A. Pasquini, M. Saba, W. Ketterle, and D. E. Pritchard, “Long Phase Coherence Time and Number Squeezing of Two Bose-Einstein Condensates on an Atom Chip”, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 030407 (2007).
- [68] V. P. Barros, M. Brtko, A. Gammal, and F.Kh Abdullaev, “Interaction of solitons in elongated BEC with time-dependent trap”, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38**, 4111 (2005).
- [69] F. Kh. Abdullaev, V. P. Barros, A. Gammal, “Interaction of solitons in trapped BEC with Feshbach resonance management”, em preparação.
- [70] V.M.Pérez-García, H. Michinel, H. Herrero, “Bose-Einstein solitons in highly assymmetric traps”, *Phys. Rev. A* **57**, 3837 (1998).
- [71] D. Quinney, *An Introduction to the Numerical Solution of Differential Equations*, Wiley (1987).
- [72] P. L. DeVries, *A first course in computational Physics, Problems solving with computers*, Wiley (1997).
- [73] B. Hatfield, *Quantum Field Theory of Point Particles and Strings*, Addison-Wesley (1992).
- [74] V. Zanchin *et al.* “Reheating in the presence of noise”, *Phys. Rev. D* **57**, 4651 (1998).
- [75] L. D. Landau e M. Lifshitz, *Mecânica*, Mir (1978).
- [76] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, *Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno*, Guanabara Dois (1979).
- [77] F. W. Byron and R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics* (Addison Wesley, vol. 1&2) (1979).
- [78] Y. Suzuki and K. Varga *Stochastic Variational Approach to Quantum-Mechanical Few-Body Problems*, Springer (1998).
- [79] J. W. Negele, H. Orland *Quantum Many-Particle Systems*, Addison-Wesley (1988).

-
- [80] D. E. Pelinovsky, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis and V. Zharnitsky “Hamiltonian averaging for solitons with nonlinearity management”, Phys. Rev. E **70**, 047604 (2004)
- [81] M. Brtka, A. Gammal and L. Tomio “Relaxation algorithm to hyperbolic states in Gross-Pitaevskii equation”, Phys. Lett. A **359**, 339 (2006).
- [82] R. V. Churchill, *Variáveis complexas e suas aplicações*, MacGraw-Hill (1975).
- [83] A. Gammal, *O termo sigma nuclear no modelo de Skyrme*, tese de doutorado, IFUSP (1997), p. 32.
- [84] S. Demokritov, A. A. Serga, V. E. Demidov, B. Hillebrands, M. P. Kostylev and B. A. Kalinikos “Experimental observation of symmetry-breaking nonlinear modes in an active ring”, Nature **426**, 159 (2003).
- [85] E. Merzbacher, *Quantum Mechanics* John Wiley, 2nd ed, 1970.
- [86] *Numerical Recipes in Fortran 77: The art of scientific computing*, Cambridge University Press, 2nd ed. (1992), section 19.5.