Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Um Tratamento Fenomenológico-Numérico do Problema da Turbulência Aerodinâmica Incompressível a Altos Números de Reynolds

SBI-IFUSP
305M810T2715

Ailton P. Cassettari Jr.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
INSTITUTO DE FÍSICA

Tese de Doutoramento
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Orientador: Prof. Dr. Mauro S. D.Cattani

Banca Examinadora

Prof. Dr. Mauro Sérgio Dorsa Cattani (IFUSP)
Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IFUSP)
Prof. Dr. Mahir Saleh Hussein (IFUSP)
Prof. Dr. Júlio Romano Meneghini (EPUSP)
Profa. Dra. Maria Virgínia Alves (INPE)

Prof. Dr. Mauro S. D. Cattani

Prof. Sylvio Roberto Accioly Canuto
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

São Paulo
1997

532
C 344t
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Cassettari Junior, Ailton Pedro
Um Tratamento Fenomenológico-númerico do Problema da Turbulência Aerodinâmica Incompressivel a Altos Números de Reynolds. São Paulo, 1997.

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo. Instituto de Física - Departamento de Física Geral

Área de Concentração: Física do Estado Sólido
Orientador: Prof. Dr. Mauro Sérgio Dorsa Cattani

Unitermos: 1. Mecânica dos Fluídos; 2. Aerodinâmica. 3. Turbulência.

USP/IF/SBI - 77/97

Índice

Agradecimentos.....3
Resumo.....5
Abstract.....7

Introdução.....10

1 AS EQUAÇÕES DA FLUIDODINÂMICA E SUAS CONSEQÜÊNCIAS

1.1. Sistemas de Equações para um fluido viscoso incompressível. 13

1.2. A Teoria dos Vórtices de Helmholtz-Kelvin.

1.2.1. Representações Discretas de Vórtices. 21

1.3. As Equações no Regime Turbulento. A Formulação Estatística Clássica.

1.3.1. A Técnica da Média de Reynolds. 23

1.3.2. As Equações da Fluidodinâmica Escritas de Acordo com a Técnica da Média de Reynolds. 24

2 A INSTABILIDADE HIDRODINÂMICA E A TRANSIÇÃO PARA A TURBULÊNCIA

2.1. A Instabilidade Hidrodinâmica. 34

2.2. Fluxo Turbulento em Torno de Corpos Sólidos. A Camada-Limite de Separação e os Mecanismos de Transição da Camada-Limite. 37

2.2.1. A Instabilidade das Superfícies de Descontinuidade. 40
2.2.2. A Equação de Orr- Sommerfeld. 41
2.2.3. A Estimativa de Heisenberg para R_{e_c}. 44

3 A VORTICIDADE E A FENOMENOLOGIA DA TURBULÊNCIA

3.1. Estruturas Genéricas de Vórtices. 47

3.1.1. A 'Auto-energia', a 'Dobra' e o 'Esticamento' das Estruturas de Vórtices. 48

3.2. Fractalização. 54

4 DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DA TURBULÊNCIA

4.1. Campos de Fluxo Aleatórios 55

4.1.1. Momentos da distribuição e Funções de Correlação 56

4.2. Soluções Aleatórias das Equações de Navier-Stokes. 62

4.3. A Equação de Kármán-Howarth. 67

5 A TEORIA DA TURBULÊNCIA DE HEISENBERG

5.1. A Equação Dinâmica para o Espectro de Energia. *71*

5.2. As Hipóteses do Equilíbrio Universal. *74*

5.3. O Mecanismo de Heisenberg da Transferência Espectral de Energia. *78*

5.3.1. A Forma Analítica do Espectro de Energia no Equilíbrio. *81*
5.3.2. O Caso Não-Estacionário: o 'Decaimento' da Turbulência. *85*
5.3.3. As Flutuações de Pressão na Turbulência. *87*

5.4. Críticas à Teoria de Heisenberg. *89*

6 ESTIMATIVAS NUMÉRICAS DO CAMPO DE FLUXO AERODINÂMICO EM TORNO DE OBSTÁCULOS

6.1. Introdução. *91*

6.2. Generalidades. *92*

6.2.1. A Geometria do Obstáculo. *92*
6.2.2. Condições de Realização dos 'Experimentos Numéricos'. *92*

6.3. Sistemas de Fluxo Totalmente Irrotacionais. *93*

6.3.1. Colocação do Problema. *93*
6.3.2. O Método dos 'Painéis' em Aerodinâmica. *94*
6.3.3. Implementação Numérica. *98*
6.3.4. Resultados da Computação. *101*

6.4. Sistemas de Fluxos Rotacionais a Altos Números de Reynolds. Turbulência. *116*

6.4.1. A 'Criação' de Vorticidade e a Condição de Contorno da Equação de Navier-Stokes. *116*
6.4.2. O Método dos Vórtices para a Simulação Numérica de Fluxos Levemente Viscosos. *119*
6.4.3. Procedimento Numérico para a determinação da Escala Dissipativa. *122*
6.4.4. Integração da Equação (6.15). *125*
6.4.5. Resultados da Computação. *126*

6.5. Conclusões e Comentários. *135*

Referências. *182*

APÊNDICES.

A UMA SOLUÇÃO 'FRACA' DAS EQUAÇÕES DE EULER *140*

B UMA SOLUÇÃO GERAL DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES LINEARIZADAS *144*

C OS POTENCIAIS HIDRODINÂMICOS *151*

D TEOREMAS RELATIVOS ÀS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE LAPLACE EM TERMOS DE POTENCIAIS *153*

E EQUIVALÊNCIA ENTRE UMA DISTRIBUIÇÃO DE VORTICIDADE E UMA DISTRIBUIÇÃO DE 'DIPOLO' *158*

F O ESPECTRO DE ENERGIA ISOTRÓPICO TRI-DIMENSIONAL EM TERMOS DE ESPECTROS UNIDIMENSIONAIS *161*

G ESTIMATIVAS DA ORDEM DE MAGNITUDE DE ALGUMAS GRANDEZAS DA TURBULÊNCIA HOMOGÊNEA E ISOTRÓPICA *170*

H CONEXÃO ENTRE A TEORIA CONVENCIONAL DA TURBULÊNCIA E OS ATRATORES *178*

Agradecimentos

Minha principal dívida é com o Prof. Dr. Mauro Cattani, pelo interesse, incentivo e disposição em aceitar a tarefa de orientar este trabalho.

Devo quase tanto a vários colegas e amigos do Instituto de Física da USP por importantes auxílios computacionais, sobretudo nas fases iniciais do projeto. Sou muito grato a todos: Hamilton J. Higashizono, Luiz C. Donizetti Gonçalves, Sérgio M. Urahata e Alexandre Rigotti.

Também devo reconhecer a gentileza do Prof. Hélcio Onusic, da Mercedes-Benz do Brasil e do IFUSP, no fornecimento de vários dados experimentais, sem os quais parte do trabalho ficaria comprometida.

Finalmente, expresso minhas considerações ao CNPq , pelo apoio financeiro.

Resumo

Partindo do 'Método dos Painéis' e do 'Método dos Vórtices', bem conhecidos em Aerodinâmica, desenvolvemos um método para cálculo da distribuição de pressão real sobre a superfície externa de corpos arbitrários, imersos num fluxo estável, levemente viscoso.

A abordagem utilizada é predominantemente fenomenológica, e a linha de raciocínio seguida é particularmente direta: ênfase é dada ao entendimento da turbulência — seus mecanismos, origem, espectros, estruturas organizadas e sua aplicação a situações práticas.

Como primeira aproximação, foi usado o bem conhecido Método de Painéis de Primeira-Ordem para calcular os campos de pressão e velocidade (sem a separação da camada-limite). Em seguida, as 'pressões reais' (após a separação da camada-limite) foram estimadas através do 'acoplamento' entre o Método de Painéis (que fornece valores iniciais) e o Método dos Vórtices (Chorin, Leonard), usando, para o cálculo da escala dissipativa, as hipóteses de Heisenberg da transferência espectral de energia.

Os obstáculos têm formas de automóveis. A fim de simplificar o trabalho numérico, somente foi analisada a secção média longitudinal de corpos simétricos, na qual o fluxo local pode ser considerado quase-bi-dimensional. Todavia, não há, nesse procedimento, nenhuma falta de generalidade.

Alguns aspectos importantes da aerodinâmica do automóvel, (tais como forças aerodinâmicas, coeficientes de pressão e de arrasto, etc.), bem como da teoria da turbulência homogênea e isotrópica, também foram estudados.

Nossas previsões teóricas estão em bom acordo com os resultados experimentais. Isto mostra a plausibilidade e efetividade de nosso método computacional.

Abstract

From well-estabelished in Aerodynamics 'Panel Method' and 'Vortex Method' , we have developed a method to calculate the real pressure distribution along the external surface of arbitrary bodies immersed in a steady, slightly viscous flow.

Our approach is predominantly phenomenological, and our objetives are clearly defined: the understanding of turbulence — its mechanism, origin, spectra and organized structures, and its direct application to practical situations. As a first approximation, the well-known first-order Panel Method was used to calculate pressure and velocity fields (without boundary-layer separation). In the following, 'real pressures' (after boundary-layer separation) were estimated 'coupling' the Panel Method (which yields initial values) and Vortex Method (Chorin, Leonard), by using the Heisenberg's spectral energy-transfer hypotheses to calculate the dissipative scale .

Obstacles are automobile-shaped. In order to simplify the numerical calculation only longitudinal midsections of symmetric bodies, in which the local flow can be considered as quasi-two-dimensional, were analyzed. However, there is no lack of generality in such procedure.

Some essential features of automobile aerodynamics (such as aerodynamic forces, pressure-coefficient, drag-coefficient, etc.) and those of the homogeneous isotropic turbulence theory were also studied.

Our theoretical predictions are in a good agreement with experimental results. This shows the plausibility and effectiveness of our computational method.

Introdução

No prefácio de seu livro sobre turbulência[1], W. D. Maccomb se refere ao assunto como "o problema não resolvido da Física Clássica". De fato, devido a seu caráter altamente não-linear, a turbulência resistiu por muito tempo a um tratamento matemático preciso e sistemático. Mas nem por isso ela deixou de intrigar finas inteligências da História da Ciência. Embora o conjunto de equações básicas (Equações de Navier-Stokes) que, acredita-se, deva descrever o fenômeno, já seja conhecido desde Navier (1823), foi somente em meados deste século que, graças sobretudo aos trabalhos do matemático russo Andrei N. Kolmogorov, finalmente foi aberto o caminho para sua descrição matemática rigorosa. Entretanto, muitos de seus problemas fundamentais ainda esperam por uma solução satisfatória.

O primeiro período de pesquisa científica em turbulência começa com obra de Boussinesq, em 1887, e de Reynolds, por volta de 1893, e termina no início dos anos quarenta deste século. Boussinesq foi o primeiro a reconhecer que a turbulência era um problema essencialmente caótico por natureza, e não poderia, portanto, ser tratado por leis determinísticas. Conhecendo a obra de Boussinesq, Reynolds escreveu as equações da Fluidodinâmica em termos de quantidades médias, assim introduzindo o que ficou conhecido por *técnica da média de Reynolds*. Essencialmente, sua

[1] *"The Physics of Fluid Turbulence"* - Oxford Science Publications, Claredon Press, Oxford, 1991.

técnica foi usada por J.C. Maxwell para a derivação das equações de Navier-Stokes a partir da Teoria Cinética dos Gases. Alguns anos mais tarde, no período do entre-guerras, Ludwig Prandtl, na Alemanha, desenvolvia sua teoria do 'comprimento de mistura', que logo seria refinada por Th. von Kármán e G. Taylor, em meados dos anos trinta. A grande contribuição desses dois autores, sem dúvida, foi reconhecer como entidade fundamental na descrição de sistemas turbulentos a correlação de velocidades entre dois ou mais pontos. Taylor, pioneiramente, introduziu o método do 'espectro de energia' para descrever a função densidade de probabilidade para a energia num fluido turbulento. von Kármán provou que a correlação de velocidades tem caráter tensorial, assim introduzindo o método do 'tensor de correlação'.

A segunda, e não menos brilhante, fase do desenvolvimento da teoria da turbulência começa com a magnífica obra de A. Kolmogorov, em 1941 e termina no início da década de sessenta. As obras desse período são caracterizadas por uma formidável seqüência de intuições físicas, devidas a W. Heisenberg, C. F. von Weizsäcker e L. Onsager, no Ocidente e a L. Landau, A. Monin, A. Obukhov, entre outros, na União Soviética de então.

A partir dos anos sessenta, o estudo da turbulência como um ramo da Física aumentou consideravelmente. A invenção da anemometria a *laser*, o desenvolvimento de poderosos computadores, novos métodos de processamento digital de dados e de análise de sinais, bem como o advento da utilização de métodos teóricos, desenvolvidos principalmente para a Física Quântica, desempenharam, e desempenham, um papel absolutamente fundamental no campo da moderna pesquisa em Fluidodinâmica (R. H. Kraichman, W. D. Maccomb entre outros) . Mais recente, a Teoria dos Sistemas Dinâmicos, também um legado de Kolmogorov, passou a ser aceita pelos físicos como uma ferramenta indispensável, pela sua beleza e precisão. Ao mesmo tempo, a teoria dos vórtices, esquecida durante alguns anos, ganhou projeção dentro da comunidade da Fluidodinâmica, sobretudo da Computacional, onde são importantíssimas as obras de P. G. Saffman e A. J. Chorin, para citar somente os principais. Também a Magneto-Hidrodinâmica (MHD), como um caso especial de movimento turbulento, foi tratada extensivamente por S. Chandrasekhar, G. K. Batchelor e J. H. Thomas. Finalmente, vários progressos na Teoria da Difusão são encontrados na obra de E. B. Coy.

Também evidente foi a extraordinária importância prática que o estudo da turbulência adquiriu nas últimas três décadas, sobretudo com relação à indústria aeronáutica. Conhecimento

cada vez mais detalhado do campo de fluxo passou a ser exigido, caindo por terra as aproximações grosseiras e as simplificações sem fundamento físico.

É no contexto da aplicação da Teoria a um problema específico que se enquadra o presente trabalho. Mais precisamente, nosso principal objetivo é o de determinar a distribuição de pressão em torno de um obstáculo, imerso num fluido levemente viscoso e incompressível. Ao lado desse, está a tentativa de avaliar numericamente as mais importantes grandezas da turbulência homogênea e isotrópica, como foi descrita originalmente por Heisenberg e amplamente estudadas por Batchelor. A linha mestra que seguimos foi evitar, tanto quanto nos foi possível, aproximações muito difundidas na Literatura da Engenharia, e nos concentrarmos nos fundamentos físicos do problema, buscando , através de um modelo 'híbrido', conciliar a fenomenologia aos métodos matemáticos de que dispomos, métodos esses que se configuram como alternativas à solução numérica direta das equações de Navier-Stokes.

O texto está dividido em seis Capítulos, suplementados por oito Apêndices. No primeiro Capítulo, será feita uma exposição das equações da Fluidodinâmica, que constituem a base para o estudo da turbulência. Nos segundo e terceiro, o assunto central é a fenomenlogia da turbulência, desde o seu início, com a instabilidade hidrodinâmica, até às mais recentes pesquisas sobre o comportamento das estruturas de vórtices na turbulência totalmente desenvolvida. O Capítulo 4 resume a descrição matemática da turbulência, no sentido de Kolmogorov (1941). O capítulo seguinte é dedicado à Teoria Elementar da Turbulência de Heisenberg (1948). Finalmente, o último capítulo traz a descrição dos métodos utilizados para a determinação das distribuições de pressão e estimativas de algumas grandezas da Turbulência homogênea e isotrópica.

1

As Equações da Fluidodinâmica e suas Conseqüências

Neste capítulo, serão apresentadas as equações de Euler e Navier-Stokes para um fluido de densidade constante, de várias formas que serão úteis posteriormente. Em particular, a técnica da média de Reynolds será usada para escrever as equações no regime turbulento. Uma primeira apresentação da Teoria dos Vórtices de Helmholtz-Kelvin é também feita.

1.1. Sistemas de Equações para um Fluido Viscoso Incompressível.

Consideremos uma região $\Re$ do espaço tri-dimensional. Seja o campo de velocidades de um fluido nessa região denotado por:

$$\vec{u}(\vec{x},t) = \{u_1(x_1,x_2,x_3,t), u_2(x_1,x_2,x_3,t), u_3(x_1,x_2,x_3,t)\}$$

e a pressão, densidade e temperatura, respectivamente, por $p(\bar{x},t)$, $\rho(\bar{x},t)$ e $T(\bar{x},t)$. Além dessas quantidades, um dado fluido é caracterizado por seus coeficientes de transporte molecular, que determinam suas propriedades físicas — o coeficiente de viscosidade μ (ou o coeficiente de viscosidade cinemática $\nu = \mu/\rho$) e o segundo coeficiente de viscosidade, ξ (este somente para fluidos compressíveis). Para estes últimos, necessitamos, ainda, do coeficiente de condutividade térmica, χ (ou difusibilidade térmica ou condutividade termométrica, $X = (\chi/C_p\rho)$; C_p nessa última equação é o calor específico a pressão constante).

A mais simples das equações da Fluidodinâmica, que descreve a lei física da conservação da massa, é a *equação da continuidade*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{1.1}$$

ou

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = -\rho \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} \tag{1.2}$$

Além dessa, outra equação fundamental é a chamada *equação da conservação do momentum linear*, ou, simplesmente, *equação do momentum*, que exprime a segunda Lei de Newton, aplicada a um pequeno volume do fluido:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_\alpha)}{\partial x_\alpha} = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \tag{1.3}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}\delta_{i\alpha}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\xi \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\beta}\right), \qquad (i=1,2,3)$$

na qual $\rho X_i(\vec{x},t)$ é a i-ésima componente da densidade de força externa (quando for o caso) no ponto $\vec{x}$, no instante t. Essa equação pode ser escrita (Monin & Yaglon, Vol 1 [26], sec. 1):

$$\rho\left(\frac{\partial x_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right) = \rho X_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i + \left(\xi + \frac{1}{3}\mu\right)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i \partial x_\alpha} \tag{1.4}$$

Desde que as equações (1.1) e (1.4) contêm cinco incógnitas, elas não formam um sistema determinado. Na prática, entretanto, a variação da densidade de uma partícula de fluido é tão pequena que, na maioria das vezes, isto pode ser ignorado (Landau & Lifschits [23], 1963, sec. 10).

Neste caso, a densidade ρ pode ser tomada como constante em todo o espaço preenchido pelo fluido. Assim, ρ representa um valor constante, pré-determinado, característico das propriedades do meio, e as equações (1.1) e (1.4) serão suficientes para se determinar as incógnitas $u_i(\vec{x},t)$ e $p(\vec{x},t)$, sob dadas condições iniciais e de contorno.

Nesta aproximação (ρ constante em toda parte), o fluido é dito *incompressível*, regido pelas equações simplificadas:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} = X_i - \rho^{-1}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \tag{1.6}$$

que contêm apenas um coeficiente de viscosidade, já que o segundo é importante somente quando a compressibilidade é levada em conta.

Em forma mais compacta, a equação (1.6) pode ser escrita:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\rho^{-1}\vec{\nabla}p + \nu\Delta\vec{u} + \vec{X}$$

em que $\frac{D}{Dt}$ denota a a derivada total.

A força total que age no fluido é a soma de forças de pressão, $-\vec{\nabla}p$, forças viscosas, $\nu\Delta\vec{u}$ e de $\vec{X}$, um agente externo, como, por exemplo, a gravidade. Cada problema apresenta ordens de grandeza típicas de velocidade (U), comprimento (L), e tempo (T=L/U). Escrevendo a última equação em forma adimensional, tomando como parâmetros U, L e T, temos:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + R_e^{-1}\Delta\vec{u} + \vec{X}$$

em que $R_e \equiv UL/\nu$ é o *número de Reynolds*, uma quantidade com importante papel em toda Fluidodinâmica. Se $R_e^{-1} \neq 0$, essas equações são conhecidas como *equações de Navier-Stokes*. Se $R_e^{-1} \equiv 0$, elas são conhecidas como *equações de Euler*.

Sobre um contorno ∂D de um domínio limitado D, as condições de contorno apropriadas para as equações são:

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{0}, & R_e^{-1} \neq 0 \\ \vec{u}\cdot\vec{n} = 0, & R_e^{-1} \equiv 0 \end{cases}$$

em que $\vec{n}$ é a normal a ∂D.

Para a eliminação da pressão nas equações anteriores, vamos proceder da seguinte maneira. Aplicando o operador rotacional[1] a ambos os membros da equação (1.6) e assumindo, por simplicidade, que não há forças externas, chegamos a:

[1] Em notação tensorial, o rotacional é escrito como $\varepsilon_{k\beta\alpha}\,\partial/\partial x_\beta$ em que, $\varepsilon_{k\beta\alpha} = 0$ se (k, β, α) não são todos diferentes; $\varepsilon_{k\beta\alpha} = +1$ ou -1 se (k, β, α) é obtido de (1,2,3) por uma permutação par ou impar, respectivamente.

(1.7) $$\frac{\partial \xi_k}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \xi_k}{\partial x_\alpha} - \xi_\alpha \frac{\partial \xi_k}{\partial x_\alpha} = \nu \Delta \xi_k$$

$$(k = 1,2,3)$$

em que

(1.8) $$\xi_k = \varepsilon_{k\beta\alpha} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}$$

são as componentes do *vetor vorticidade.*

Em princípio, o campo $\vec{u}(\vec{x})$ pode ser determinado de (1.7) e (1.8). Tomando a divergência da equação de Navier-Stokes (1.6), com $X_i \equiv 0$, obtemos:

$$\Delta p = -\rho \frac{\partial^2 (u_\alpha u_\beta)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

cuja solução pode ser escrita como:

$$p(\vec{x}) = \frac{\rho}{4\pi} \int \frac{\partial^2 \left[u_\alpha (\vec{x}') u_\beta (\vec{x}') \right]}{\partial x'_\alpha \partial x'_\beta} \frac{d\vec{x}}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

em que a integração é tomada sobre todo o volume oupado pelo fluido. Essa última expressão permite obter o campo de pressão, conhecido o campo de velocidades.

Para obtermos uma solução unívoca das equações (1.5) e (1.6) faz-se necessária a fixação de valores iniciais de $u_i(x_i, t)$, e levar em conta que a velocidade deve se anular sobre a superfície de todos os corpos rígidos imersos no fluido. Todavia, dado que esse sistema é não-linear, uma solução analítica é praticamente impossível de ser obtida.

Quando as condições são estacionárias, a força de pressão que age sobre o fluido para produzir movimento é balanceada pela força de reação, que também age sobre o fluido. A equação que exprime essa igualdade permite-nos estabelecer uma relação entre a velocidade característica do fluido e a pressão. Tal relação é:

(1.9) $$\frac{p}{\rho}+\frac{U^2}{2}=Cte.$$

chamada *equação (ou função) de Bernoulli.*

Para um corpo rígido imerso num fluxo estável, a força $\vec{F}$ exercida pelo fluido sobre o corpo é igual à integral, sobre a superfície $\sum$ do corpo, do fluxo de momento ao longo da normal a essa superfície. O fluxo da i-ésima componente do momento, por unidade de área, perpendicular ao eixo O_{xk} tem a forma:

(1.10) $$pu_iu_k + p\delta_{ik} - \sigma_{ik}$$

em que δ_{ik} é o delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se i = j e 0 se i ≠ j) e σ_{ik} é o tensor de tensão viscosa que, para um fluido incompressível, é igual a (Monin & Yaglon [26], Vol 1, p. 53)

(1.11) $$\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}\right)$$

Pelo fato de ser nula a velocidade de um fluido sobre a superfície $\sum$ de um corpo rígido, obtemos, para a i-ésima componente da força $\vec{F}$, a expressão:

(1.12.a) $$F_i = -\int_\Sigma (p\delta_{ik} - \delta_{ik})n_k d\sum =$$

(1.12. b) $$= -\int_\Sigma pn_i d\sum + Z_i$$

em que n_k é a componente do vetor unitário da normal exterior à superfície do corpo e Z_i é a integral de $\sigma_{ik}n_k$ sobre a mesma superfície. O primeiro termo do lado direito de (1.12. b), independente da viscosidade, descreve a transferência de momento do fluido para o corpo, pelas

forças de pressão. O segundo representa a resistência de fricção que, num fluido viscoso, é sempre diferente de zero[1].

1.2. A Teoria dos Vórtices de Helmholtz-Kelvin.

No que segue, estamos supondo um fluido invíscito, $R_e^{-1} = 0$.

Seja C uma curva fechada imersa no fluido. A circulação Γ ao longo de C é definida como:

(1.13) $$\Gamma_C = \int_C \vec{u}(\vec{x},t) \cdot d\vec{s}$$

Seja $C_t = \phi_t(C)$ a imagem de C sobre o mapeamento do fluido[2]. A quantidade:

(1.14) $$\Gamma_C(t) = \int_{C_t} \vec{u}(\vec{x},t) \cdot d\vec{s}$$

é *invariante* no tempo (Teorema da Circulação de Kelvin).

Seja , agora, Σ_t uma superfície que se estende sobre C_t . Então,

(1.15) $$\Gamma(t) = \int_{\Sigma_t} \vec{\xi} \cdot d\vec{\Sigma}$$

---

[1] Para corpos similares geometricamente, a quantidade $\rho U^2 S / 2$ pode ser tomada como característica da força, onde U é a velocidade característica e S alguma área característica, como, por exemplo, a da secção transversal do corpo. Analogamente, $\rho U^2 / 2$ é a pressão característica.

[2] S e se toma um ponto material particular do fluido localizado em *t=0* em $\vec{x}$, nota-se que este se moverá com o tempo. A equação de sua trajetória é:

$$\dot{x}(t) = \vec{u}(\vec{x},t)$$

integrada com a condição inicial $\vec{x}(0) = \vec{x}_1$. O mapeamento das condições iniciais da partícula nas suas localizações no instante t é o *mapeamento do fluido*, ϕ_t . Como estamos supondo que o fluido tem densidade constante, uma coleção de partículas que ocupa um volume V mover-se-á para sítios que ocuparão igual volume. Se $\phi(\vec{x},t)$ denota a localização da partícula que foi deslocada segundo ϕ_t de $\vec{x}_1$ a $\vec{x}$, o jacobiano $J \equiv \left|\partial\phi / \partial x_j\right| = 1$ (isso é equivalente à equação da continuidade).

Uma *superfície de vórtices*, ou *camada de vórtices*, é uma superfície tangente à vorticidade em cada ponto. Pelo Teorema da Circulação, uma camada de vórtices permanece uma camada de vórtices quando o fluido evolui no tempo. Uma *linha de vórtices* pode ser definida como sendo a intersecção de duas camadas de vórtices e permanece, conseqüentemente, uma linha de vórtice depois de mapeada por ϕ_t .

Consideremos, agora, uma pequena parte fechada duma superfície B tangente, em todos os seus pontos, a $\vec{\xi}$, e também as linhas de vórtices que dela emergem. Tal configuração constitui um *tubo de vorticidade*.

A quantidade

(1.16) $$\Gamma = \int_{\Sigma} \vec{\xi} \cdot d\vec{\Sigma}$$

na qual Σ é a secção reta do tubo, é chamada *intensidade* ou *circulação* do tubo. Γ é *constante no espaço* (pelo Teorema da Divergência) e, quando $R_e^{-1} = 0$, é também *constante no tempo* (pelo Teorema da Circulação de Kelvin). Outra importante conseqüência do Teorema da Circulação é que a vorticidade não pode se criada *ab nihilo*. Isso é verdade tanto para o caso inviscito quanto para o viscoso. Se, digamos, $\vec{\xi} = \vec{0}$ em $t = 0$, poderá haver a geração de vorticidade através da ação de forças externas ou, mais freqüentemente, pela presença de contornos sólidos imersos no fluido.

Para a determinação do campo de velocidades com dados vórtices, pode ser usada a conhecida relação:

(1.16) $$\vec{\xi} = \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

Se o domínio D ocupado pelo fluido é *simplesmente conexo*, a condição de incompressibilidade implica existência de um *potencial vetor* $\vec{A}$, tal que $\vec{u} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Se a dirvergência de $\vec{A}$ for fixada como *zero* , uma simples manipulação de identidades vetoriais leva a $\Delta\vec{A} = -\vec{\xi}$. Usando a Função de Green para a equacão de Laplace tri-dimensional, *na ausência de contornos*, temos:

(1.17) $$\vec{A} = (4\pi)^{-1} \int \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{\xi}(\vec{x}) d\vec{x}'$$

e, portanto,

(1.18) $$\vec{u}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -(4\pi)^{-1} \int \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times \vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3} d\vec{x}'$$

Essa maneira de representar $\vec{u}$ a partir de $\vec{\xi}$ é chamada *Teorema de Biot-Savart.*

1.2.1.- Representações Discretas de Vórtices.

Novamente , nesta seção, estaremos lidando com um fluido inviscito.

As equações do movimento, escritas em termos da vorticidade, podem ser discretizadas tal que o resultado seja um conjunto de equações diferenciais ordinárias, de forma relativamente simples[1].

O campo de vorticidade pode ser escrito como a soma de funções de pequeno suporte[2]:

(1.19) $$\xi \approx \sum_{i=1}^{N} \xi_i(\vec{x})$$

Uma escolha particularmente útil das funções $\xi_i(\vec{x})$ é

(1.20) $$\xi_i = \Gamma_i \phi_\delta(\vec{x} - \vec{x}_i), \qquad \phi_\delta \equiv (\frac{1}{\delta^3}) \phi(\frac{\vec{x}}{\delta})$$

em que ϕ é uma função suave tal que $\int \phi d\vec{x} = 1$; Γ_i são coeficientes. Do Teorema de Biot-Savart, (1.18),

$$\vec{u}(\vec{x}) = \int K(\vec{x} - \vec{x}') \vec{\xi}(\vec{x}) d\vec{x}' \Rightarrow$$

[1] Esta observação é o ponto de partida para a concepção de métodos numéricos baseados em estruturas de vórtices.
[2] O suporte duma função é o conjunto fechado de pontos em que ela não se anula.

$$\vec{u}(\vec{x}) = \sum \int K(\vec{x}-\vec{x}')\Gamma_i \phi_\delta(\vec{x}-\vec{x}')d\vec{x} \tag{1.22}$$

em que $K(\vec{x}-\vec{x}')$ é o operador $\left[-(4\pi|\vec{x}-\vec{x}'|)^{-1}(\vec{x}-\vec{x}')\right]\times$.

As representações discretas de vórtices, no espaço tri-dimensional, podem ser obtidas tentando-se fazer, por exemplo, os suportes dessas vorticidades esféricos[1].

Assumamos que a vorticidade seja distribuída num tubo de vorticidade que, a rigor, deve ser fechado. O tubo tem intensidade Γ_i — a integral de ξ_i através duma secção reta, que é constante no espaço e no tempo, e igual à circulação ao longo de qualquer contorno que circunda o tubo, sem circundar quaisquer outros. Para possuir energia finita, uma clara exigência física, o tubo deve ter uma secção reta finita. Se temos N tais tubos, num ponto $\vec{x}$, o campo de velocidades torna-se:

$$\vec{u}(\vec{x}) = -\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\Gamma_i}{4\pi}\right)\int_{\substack{i-\text{é simo}\\ \text{tubo}}} \phi_j(\vec{x}-\vec{x}')\frac{(\vec{x}-\vec{x}')\times d\vec{s}}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \tag{1.23}$$

em que $d\vec{s}$ é o elemento de comprimento ao longo da linha central do tubo i. A integral da energia é escrita como:

$$E = \frac{1}{8\pi}\sum_i\sum_j \Gamma_i\Gamma_j \int_i\int_j \frac{d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_j}{|\vec{x}(s_i)-\vec{x}(s_j)|} \tag{1.24}$$

uma expressão análoga à da Eletrodinâmica.

Este tipo de formulação tem a desvantagem de que tubos muito extensos são, às mais das vezes, difíceis de manipular matematicamente. Entretanto, sua capacidade de descrever a 'estrutura espacial' da turbulência parece superá-la ou, pelo menos, compensá-la.

[1] Com essa escolha, as restrições de conexividade são satisfeitas apenas aproximadamente.

1.3. As Equações no Regime Turbulento. A Formulação Estatística Clássica.

1.3.1. -A Técnica da Média de Reynolds.

Nesta seção, descreveremos brevemente o procedimento derivado por O. Reynolds em 1895, e que teve um papel fundamental no subseqüente desenvolvimento da Teoria da Turbulência. De acordo com a *técnica da média de Reynolds*, as quantidades físicas que caracterizam um fluido podem ser escritas como:

$$
\begin{aligned}
u_i &= \overline{U} + u_i' \\
p &= \overline{P} + p' \\
\rho &= \overline{\rho} + \rho' \\
T &= \overline{T} + T'
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

isto é, as grandezas presentes na equação de Navier-Stokes são desmembradas em duas partes, *média* e *flutuação*. Em (1.25), as quantidades com barras denotam os valores médios, num intervalo finito de tempo, e as com linhas, as flutuações. Além disso,

$$
\overline{u_i'} = \overline{\rho'} = \overline{T'} = 0 \tag{1.26}
$$

Consideremos agora três quantidades físicas arbitrárias, estatisticamente dependentes, A, B e C, cada qual consistindo de uma média e de uma flutuação:

$$
\begin{aligned}
A &= \overline{A} + A' \\
B &= \overline{B} + B' \\
C &= \overline{C} + C'
\end{aligned}
\tag{1.27}
$$

A técnica de Reynolds permite escrever:

$$\overline{A} = \overline{\overline{A} + A'} = \overline{\overline{A}} + \overline{A'} = \overline{A}$$

(1.28)

$$\overline{AB} = \overline{(\overline{A} + A')(\overline{B} + B')} = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + \overline{A}B' + \overline{B}A' + A'B'}$$

Conseqüentemente[1], $\overline{AB} = \overline{\overline{A}B} = \overline{A}\,\overline{B}$. Para o produto das três quantidades,

$$\begin{aligned}\overline{ABC} &= \overline{(\overline{A} + A')(\overline{B} + B')(\overline{C} + C')} \\ &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B'C'} + \overline{B}\,\overline{A'C'} + \\ &\quad + \overline{C}\,\overline{A'B'} + \overline{A'B'C'}\end{aligned}$$

(1.29)

Além do mais,

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial s}} = \frac{\partial}{\partial s}\overline{A}$$

(1.30)

e

$$\overline{\int A ds} = \int \overline{A} ds$$

(1.31)

1.3.2. -As Equações da Fluidodinâmica Escritas de Acordo com a Técnica da Média de Reynolds.

- A Equação da Continuidade.

A equação da continuidade para um fluido compressível é:

[1] Termos do tipo $\overline{A'B'}$ são chamados 'correlações'.

(1.31) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0$$

Escrevendo ρ e u_j de acordo com (1.13) e fazendo a média,

(1.32) $$\overline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}} = \overline{\frac{\partial \rho}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_j}\rho\overline{u}_j =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\rho}\overline{u}_j + \overline{\rho' u'_j}\right]$$

Assim, em *regime turbulento*, a equação da continuidade para um fluido compressível é:

(1.33) $$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\rho} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\rho}\overline{u}_j + \rho' u'_j\right] = 0$$

- *A Equação de Navier-Stokes.*

A equação de Navier-Stokes, ou equação de conservação do momento-linear, para um *fluido compressível*, é dada por:

(1.34) $$\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right] = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\Theta$$

em que f_i é a componente da força sobre o corpo na direção i e $\Theta \equiv d_{jj} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. A quantidade Θ consiste de uma parte média e de uma flutuante, isto é,

(1.35) $$\Theta = \Theta + \Theta'$$

Tirando a média, no sentido de Reynolds, de (1.34) , usando (1.31) e (1.35), chega-se a:

$$\overline{\rho\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right]}=\overline{\rho f_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}}$$

ou

(1.36) $$\overline{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}}+\overline{\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=\overline{\rho f_i}-\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}}+\overline{\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]}-\overline{\frac{2}{3}\mu\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}}$$

Tirando a média de (1.36), termo a termo,

• (1.37) $$\overline{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}}=\overline{\rho}\,\overline{\frac{\partial u_i}{\partial t}}+\overline{\rho'\frac{\partial u_i}{\partial t}}=\overline{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\overline{u}_i+\overline{\rho'\frac{\partial u'_i}{\partial t}}$$

• (1.38) $$\overline{\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}=\overline{\rho}\,\overline{u}_j\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u}_i+\overline{\rho}\,\overline{u'_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}+\overline{u}_j\,\overline{\rho'\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}+$$
$$+\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}\overline{\rho' u'^j}+\overline{\rho' u'_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}$$

• (1.39) $$\overline{\rho f_i}=\overline{\rho}\,\overline{f}_i$$

• (1.40) $$\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}}=\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{p}$$

• (1.41) $$\mu\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right]}=\mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}+\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}\right]=$$

$$= \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{u}_j\right]$$

• (1.42) $$\overline{\frac{2}{3}\mu\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}} = \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Theta}$$

Substituindo (1.37) e (1.42) em (1.36) e rearranjando os termos, obtemos:

(1.43) $$\overline{\rho}\left[\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}\right] = \overline{\rho f}_i - \frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u}_j}{\partial x_i}\right] -$$

$$-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\overline{\Theta} - \left[\overline{\rho}\,\overline{u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{\rho'\frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{\rho' u'_j}\,\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} +\right.$$

$$\left. +\overline{u}_j\,\overline{\rho'\frac{\partial u'}{\partial x_j}} + \overline{\rho' u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}\right]$$

Para um *fluido incompressível* temos, da equação da continuidade,

(1.44) $$\overline{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0; \qquad \Theta = 0; \qquad \rho' = 0; \qquad \overline{\rho} = \rho$$

Neste caso, (1.43) torna-se:

(1.45) $$\rho\left[\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t} + \overline{u}_j\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}\right] = \rho f_i - \frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i} + \mu\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial x_j^2} - \overline{\rho u'_j\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

Comparando (1.43) à equação de Navier-Stokes ordinária, notamos que vários termos adicionais aparecem. A forma tradicional na qual são escritos é a de *gradientes de tensão*:

$$\Xi_{ji,j} = \left[\overline{\rho u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \overline{\rho' \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \overline{\rho' u'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u}_j \overline{\rho' \frac{\partial u'}{\partial x_j}} + \overline{\rho' u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} \right] \tag{1.46}$$

conhecidos como *Tensores de Tensão de Reynolds.*

As equações (1.33) e (1.46) levam a:

$$\Xi_{ji,j} = -\left\{ \frac{\partial}{\partial t} \overline{\rho' u'_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{\rho} \overline{u_i u_j} + \overline{\rho' u'_j} \overline{u}_i + \overline{\rho' u'_i} \overline{u}_j + \overline{\rho' u'_i u'_j} \right] \right\} \tag{1.47}$$

No caso de um fluido incompressível, o último termo do lado direito de (1.46) pode ser considerado como um gradiente de tensão, isto é,

$$\Xi_{ji,j} = -\rho \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_j u'_i} = \overline{u'_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} + \overline{u_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}$$

Além do mais,

$$\overline{u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = \overline{u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j}} + \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}$$

em que o termo à esquerda e o segundo à direita são nulos, de acordo com a equação da continuidade, aplicada a um fluido incompressível. Por essa razão,

$$\overline{u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_j}} = 0$$

e, portanto,

$$\Xi_{ji,j} = -\rho \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' u_j'}$$

e, desde que ρ é constante,

(1.48) $$\Xi_{ij} = \rho \overline{u_i' u_j'}$$

ou, na forma cartesiana,

$$\Xi_{ij} = \rho \begin{bmatrix} \overline{u'^2} & \overline{v'u'} & \overline{w'u'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{w'v'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{bmatrix}$$

na qual u', v' e w' são as flutuações de velocidade correspondentes às direções x, y, z, respectivamente.

- *A 'viscosidade Turbulenta'.*

Na Hidrodinâmica Clássica, o tensor de tensão para um fluido incompressível pode ser escrito como:

(1.49) $$\Xi_{ij} = \overline{p}\delta_{ij} + 2\mu \overline{d}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'}$$

em que $\overline{p}$ é a pressão média , ρ é a densidade do fluido, μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica e $\overline{d}_{ij}$ é o tensor de deformação média, definido como:

$$\overline{d}_{ij} = \overline{d}_{ji} \equiv \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right] \tag{1.50}$$

Se (1.49) for escrito como:

$$\Xi_{ij} = -\overline{p}\delta_{ij} + (2\mu + \varepsilon_m)\overline{d}_{ij} \tag{1.51}$$

então,

$$\rho\overline{u_i u_j} = \varepsilon_m \overline{d}_{ij} = \frac{\varepsilon_m}{2}\left[\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right] \tag{1.52}$$

em que, por definição, ε_m é a *viscosidade dinâmica turbulenta* que, diferentemente da viscosidade ordinária, pode ser função das coordenadas espaciais. Pode ser mostrado[1] que ε_m é um tensor de 5.º ordem.

- *A Equação da Energia Cinética.*

Multiplicando (1.34) por u_i e tirando a média no sentido de Reynolds, temos:

$$\begin{aligned}(\overline{u}_i + u_i')(\overline{\rho} + \rho')\left[\frac{\partial}{\partial t}(u_i + u_i') + (\overline{u}_j + u_j')\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i + u_i')\right] = \\ = (\overline{u}_i + u_i')\left[-\frac{\partial}{\partial x_i}(\overline{p} + p') + \mu\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}(\overline{u}_i + u_i') - \right. \\ \left. -\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_j + u_j')\right]\end{aligned} \tag{1.53}$$

O lado esquedo (L.E.) dessa última aquação pode ser escrito:

[1] Ver, por exemplo, M.M. Stanisic[31]

$$(1.54)\qquad L.E. \equiv \overline{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\overline{(u_i^2)} + \overline{\rho'\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(u_i^2)'} + \overline{\rho u_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2}\overline{(u_i^2)} +$$

$$+\overline{\rho u_j'\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2}(u_i^2)'} + \overline{u_j}\,\overline{\rho'\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2}(u_i^2)'} +$$

$$+\overline{\rho' u_j'}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\frac{1}{2}(u_i^2)} + \overline{\rho' u_j'\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{1}{2}(u_i^2)'}$$

Multiplicando (1.41) por $\left[\frac{u_i^2}{2}\right]$ e tomando a média,

$$(1.55)\qquad \overline{\frac{u_i^2}{2}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j)\right]} = 0$$

ou

$$\frac{\overline{(u_i^2)}}{2}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\overline{(u_i^2)'}}{2}\frac{\partial \overline{\rho'}}{\partial t} + \frac{\overline{(u_i^2)}}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\rho u_j} + \frac{\overline{(u_i^2)'}}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(\rho u_j)'} = 0$$

Evidentemente,

$$(1.56)\qquad \frac{\overline{(u_i^2)}}{2}\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \overline{u_i}\,\overline{u_i'\frac{\partial \rho'}{\partial t}} + \frac{\overline{(u_i^2)}}{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}\,\overline{u_j} + \overline{\rho' u_j'}) +$$

$$+\overline{u_i}\,\overline{u_i'\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{\rho}u_j' + \overline{u_j}\rho')} = 0$$

Adicionando (1.56) a (1.54) e agrupando os termos, obtemos:

$$L.E. \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{\rho}}{2}\overline{(u_i^2)}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\overline{u_i}\,\overline{\rho' u_i'}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\overline{\rho}}{2}\overline{u_j}\,\overline{(u_i^2)}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_i\,\overline{\rho}\,\overline{u_i'u_j'})+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\overline{(u_i'^2)}}{2}\,\overline{\rho' u_j'}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_j\overline{u}_i\,\overline{\rho' u_i'})+\overline{\rho' u_j'\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{u}_i u_i'}$$

Tirando, agora, a média, no sentido de Reynolds, do lado direito (L.D.) de (1.53), temos:

$$L.D.\equiv -\overline{u}_i\frac{\partial\overline{p}}{\partial x_i}-\overline{u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_i}}+\mu\left(\overline{u}_i\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial x_j^2}+\overline{u_i'\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}\right)-$$

$$-\frac{2}{3}\mu\left(\overline{u}_i\frac{\partial^2\overline{u}_j}{\partial x_i\partial x_j}+\overline{u_i'\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_i\partial x_j}}\right)$$

Definindo:

$$\Im\equiv\mu\left[\overline{u}_i\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial x_j^2}+\overline{u_i'\frac{\partial^2\overline{u}_i}{\partial x_j^2}}-\frac{2}{3}\left(\overline{u}_i\frac{\partial^2\overline{u}_j}{\partial x_i\partial x_j}+\overline{u_i'\frac{\partial^2 u_j'}{\partial x_i\partial x_j}}\right)\right],$$

a *equação da energia cinética média para um fluido compressível* resulta como:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\overline{\rho}}{2}\overline{(u_i'^2)}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\overline{\rho}}{2}\overline{u}_j\overline{(u_i'^2)}\right)+\overline{u}_i\left[\frac{\partial}{\partial t}(\overline{\rho' u_i'})+\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u}_j\overline{\rho' u_i'})+\right.$$

$$\left.+\overline{\rho' u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}}\right]=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u}_i(\overline{p}\delta_{ij}+\overline{\rho}\overline{u_i'u_j'})+\frac{1}{2}\overline{\rho' u_j'(u_i'^2)}\right]+$$

$$+\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial x_j}\left[\overline{p}\delta_{ij}-\overline{\rho}\overline{u_i'u_j'}-\overline{u}_j\overline{\rho' u_i'}-\overline{\rho' u_j'u_i'}\right]-\overline{\rho' u_i'}\frac{\partial\overline{u}_i}{\partial t}+\Im$$

No caso particular de um *fluido incompressível*,

$$\rho' = 0; \qquad \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0; \qquad \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = 0.$$

e a equação anterior se escreve:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{2}\overline{(u_i^2)}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho}{2}\overline{u}_j\overline{(u_j^2)}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u}_i(\overline{p}\delta_{ji} + \rho\overline{u_i'u_j'})\right] -$$

$$-\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j}(\rho\overline{u_i'u_j'}) + \Im^*$$

na qual

$$\Im^* \equiv \mu\left[\overline{u}_i\frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j^2} + u_i'\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}\right]$$

é o termo relacionado à dissipação viscosa.

Como veremos nos capítulos posteriores, a interpretação física dos diversos termos presentes nas equações da Fluidodinâmica, escritas de acordo com a técnica da média de Reynolds, leva a uma descrição fenomenológica da turbulência que concorda notavelmente com as observações experimentais.

2
A Instabilidade Hidrodinâmica e a Transição para a Turbulência

Neste Capílulo, procuraremos descrever os mecanismos físicos da transição do regime laminar para o turbulento. Como é sabido, a turbulência só pode se desenvolver em fluxos rotacionais. Se um fluxo rotacional básico é levemente perturbado, essas perturbações acabam levando a várias instabilidades que, eventualmente, degeneram em turbulência. Devemos salientar que o conceito de *transição à turbulência* não é bem definido: de uma forma geral, o processo completo pode envolver vários estágios sucessivos. Aqui, a transição será caracterizada pelo valor crítico de um parâmetro adimensional (R_c), que depende dos movimentos ou forças impostos ao fluido. Serão brevemente discutidas a equação de Orr-Sommerfeld e a importante obra de Heisenberg sobre a instabilidade hidrodinâmica.

2.1. A Instabilidade Hidrodinâmica.

Em qualquer fluxo, tanto laminar como turbulento, os campos de pressão e velocidade são soluções das equações do movimento, para dadas condições iniciais e de contorno. Todavia, no caso de turbulência, cada fluxo, considerado em particular, corresponde a uma solução não estável das equações dinâmicas. A despeito do fato de as equações da Fluidodinâmica terem uma solução

estável para qualquer R_e, a impossibilidade de existência de um fluxo laminar para números de Reynolds suficientemente altos claramente mostra que nem toda solução corresponde a um movimento real. Pode-se postular disso que o movimento real não somente satisfaz às equações dinâmicas como também deve ser estável para pequenas perturbações. Ora, como tais perturbações estão sempre presentes, elas devem ser amortecidas com o decorrer do tempo, de tal forma a não comprometer a natureza geral do fluxo. Por outro lado, se essas perturbações crescerem com o tempo, ocorre uma considerável distorção do movimento inicial e, por conseguinte, depois de decorido tempo suficiente, tal movimento deixará de existir.

Portanto, é de se esperar que haverá um certo número de Reynolds, digamos o crítico, R_{e_c}, que corresponderá ao ponto no qual a estabilidade é perdida. Para $R_e < R_{e_c}$, o fluxo laminar é *estável*; para $R_e > R_{e_c}$, o mesmo fluxo é *instável* e se tornará turbulento, sob a influência do aparecimento de pequenos distúrbios (ou flutuações) nos campos de velocidade e pressão.

A turbulência seria, então, caracterizada por flutuações irregulares dos campos de pressão e velocidade do fluido.

Apesar dessa razoável complexidade, o mecanismo de inicialização de tais flutuações pode ser explicado em bases puramente mecânicas. Para tanto, é necessário considerar o fluxo como um sistema dinâmico com um número muito grande de graus-de-liberdade, no qual oscilações auto-excitadas surgem como resultado de um influxo *externo* de energia.

A aplicação do conceito de graus-de-liberdade necessita a imediata introdução de *coordenadas generalizadas* que descrevam, univocamente, a configuração do fluxo. Para a definição precisa de tais coordenadas é conveniente desmembrar o movimento em componentes elementares. Essas componentes devem ser tais que a soma de suas energias individuais seja igual à energia total do fluxo. Ademais, o estado de cada uma delas deve ser descrito por um número bastante pequeno de parâmetros. Podemos de pronto reconhecer a soma dos parâmetros necessários à descrição do movimento dessas componentes elementares como sendo as

coordenadas generalizadas, e o número dessas, que pode eventualmente variar sob dadas condições externas, como o número total de *graus-de-liberdade.*

O número de graus-de-liberdade de um fluxo turbulento, num volume finito, será muito grande, porém *finito* [1]. Isso pode ser explicado duma maneira relativamente simples: quando o campo de velocidades é expandido uma série em termos de *funções ortogonais* (equivalente, do ponto de vista matemático, à decomposição do movimento em componentes elementares), as várias componentes descreverão movimentos elementares de diferentes escalas. Quando a ordem das componentes cresce indefinidamente, a escala correspondente tende a zero. Todavia, *devido à viscosidade*, as flutuações de escala muito pequena não poderão existir. Assim, o campo de velocidades em termos de funções ortogonais de ordem suficientemente alta será *independente do tempo*. Isso significa que o número de graus de liberdade deve crescer com o decréscimo do coeficiente de viscosidade, ou, em outras palavras, com o acréscimo do número de Reynolds. Conseqüentemente, o número de graus de liberdade crescerá rapidamente com o número de Reynolds, e, na turbulência com alto R_e, atingirá valores enormes.

Consideremos, agora, a evolução no tempo de um fluxo sob dadas condições externas *estacionárias* (em particular, com um influxo de energia constante). Da Mecânica Estatística, é sabido que sistemas com um grande número de graus de liberdade e condições externas estacionárias tendem a convergir para algum *regime de equilíbrio*, no qual o influxo médio de energia contrabalança a dissipação média de energia do sistema. A energia total tem um *valor fixo* e uma distribuição, entre os diferentes graus de liberdade, também fixa. Neste ponto, duas possibilidades se nos apresentam: ou o fluxo tenderá assintoticamente ao regime *laminar*, que corresponderia a um equilíbrio estático, ou ao regime *turbulento estacionário* , correspondente a um estado de *equilíbrio dinâmico*. Tais regimes serão posteriormente discutidos.

[1] O conceito de um fluxo no espaço infinito será sempre uma idealização. Nessa situação, o campo de velocidades pode ser decomposto numa expansão similar à da integral de Fourier-Stieltjes, o que permite a existência de um espectro contínuo, ou seja, um contínuo de cordenadas generalizadas.

2.2. Fluxo Turbulento em Torno de Corpos Sólidos. A Camada-Limite de Separação e os Mecanismos de Transição da Camada-Limite.

Consideremos a superfície de um corpo sólido tri-dimensional (digamos um cilindro) imerso num fluxo irrotacional, cuja direção é perpendicular a seu eixo principal (Fig 2.1).

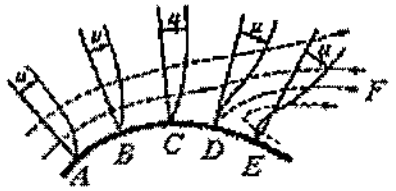


Fig 2.1. *Fluxo próximo ao ponto de separação da camada-limite*

Fora da camada-limite o fluido pode ser considerado ideal e seu movimento irrotacional. As linhas de fluxo desse movimento potencial são muito próximas entre si na parte superior do corpo (ponto *C*) onde, conseqüentemente, a velocidade tangencial atingirá um *máximo*. Pela Equação de Bernuolli (1.9), a pressão em *C* atingirá um *mínimo* , de tal forma que decrescerá ao longo de *AC* e crescerá ao longo de *CE*. Tais mudanças na pressão ao longo da superfície do corpo também ocorrerão na camada-limite (já que na superfície desta a pressão raramente varia). Conseqüentemente, sobre *CE* o fluido na camada-limite deve se mover na direção de decréscimo na pressão, o que leva ao seu retardamento. Esse retardamento terá mais forte efeito sobre as partículas que se movem muito próximas à superfície do cilindro, isto é, as que possuem menor velocidade. Em algum ponto *D*, elas certamente pararão. Além desse ponto, elas se moverão de volta, com relação às partículas que ainda não atingiram *D*. A formação de "contrafluxos" sobre a superfície do corpo nessa região obriga o fluxo externo a se "descolar" da superfície do corpo. Ocorre, então, o fenômeno da *separação da camada-limite,* com a conseqüente formação da superfície *DF,* limítrofe entre dois fluxos. *DF* é, portanto, uma *superfície de descontinuidade*

tangencial da velocidade. Como é evidente, *DF* é altamente instável e rapidamente se transforma em um ou mais *vórtices*[1] (vide Fig. 2.2) . Na região *FDE*, compreendida entre a superfície do corpo e *DF*, é formado um vórtice 'macroscópico' , que se separa do corpo, sendo transportado ao longo de uma certa distância, e gradualmente dispersado.

Como resultado de todos esses fenômenos, um *arrasto turbulento* é formado na região posterior do corpo, na qual o movimento é altamente *rotacional.* Fora dessa região, o movimento é irrotacional (isto é, potencial).

Como já dissemos, o fluido exterior à região turbulenta pode ser assumido ideal. Portanto, durante seu movimento, a circulação da velocidade em torno de qualquer curva fechada é conservada (pelo Teorema de Kelvin) e, por essa razão, no caso estacionário, o rotacional da velocidade é constante ao longo das linhas de fluxo. Portanto, é evidente que uma região de um fluxo rotacional turbulento, a certa distância de um corpo, pode somente surgir quando as linhas de fluxo deixam a camada-limite — na qual o movimento será rotacional devido à viscosidade — isto é, quando há uma 'mistura' direta do fluido originário da camada-limite com o do espaço exterior a ela.

Pode-se inferir, também, que as linhas de fluxo não podem deixar a região em que o rotacional da velocidade é diferente de zero, ou seja, o arrasto turbulento, embora elas possam aí penetrar, vindas da região de fluido potencial. Em outras palavras, um fluido pode 'entrar' no arrasto turbulento, desde que provenha de uma região potencial, mas não pode 'sair' da região do arrasto. Ao mesmo tempo, flutuações turbulentas de velocidade podem 'migrar' do arrasto para o fluido potencial, entretanto, não sem considerável atenuação. Vamos tratar um pouco mais detalhadamente desta questão, seguindo a análise de Landau & Lifschitz [23] (1963).

[1] Se a velocidade decresce suficientemente rápido, a partir de *C* (em direção a *D*), a separação da camada-limite é inibida. Mesmo se a camada-limite é laminar antes da separação, depois que esta ocorrer aquela se comportará como um "jato submerso" , e rapidamente se tornará turbulenta.

Para um movimento potencial de um fluido incompressível, as equações do movimento (1.2) serão satisfeitas identicamente. Portanto, nesse caso, o fluido será descrito unicamente pela condição de incompressibilidade. Essa condição é equivalente à Equação de Laplace $\Delta\varphi = 0$, para o potencial velocidade φ , que define a velocidade $\vec{v} = \vec{\nabla}\varphi$. Seja z a coordenada através do arrasto. Então, o campo $\varphi(x,y,z)$ que descreve as flutuações de velocidade pode ser convenientemente decomposto em componentes periódicas da forma $\varphi = \varphi_o e^{i(k_1x+k_2y)}$. De $\Delta\varphi = 0$, segue que $d^2\varphi_o/dz^2 = k^2\varphi_o$, em que k é o número de onda, inversamente proporcional à escala horizontal das flutuações periódicas em consideração. Desconsiderando a solução φ_o — fisicamente sem significado, posto que cresce com z — encontramos que a atenuação da amplitude das flutuações na região $z > 0$ é dada pelo fator e^{-kz}. Assim, elas são atenuadas tanto mais rapidamente quanto menor for a escala. Conseqüentemente, a uma distância suficiente no interior da região potencial, restam tão somente flutuações "macroscópicas" . Para tais flutuações, a dissipação de energia não desempenha grande papel. Portanto, quase toda dissipação no fluxo ocorrerá na *região do arrasto turbulento rotacional.*

A formação de superfícies de descontinuidade, juntamente com a considerável dissipação de energia em toda região do arrasto turbulento leva a um considerável acréscimo na força de resistência ('drag') de corpos que apresentam camadas-limites separadas. Essa resistência, via de regra, será tanto menor quanto mais estreito o arrasto turbulento, isto é, quanto mais se protelar o ponto de separação ao longo da superfície posterior do corpo[1]. A figura 2.2 ilustra a região do fluxo próxima à separação, de forma idealizada.

[1] Para fluxos com R_e suficientemente alto, para os quais, todavia, a camada-limite permanece laminar além do ponto de separação, o coeficiente *Cd* é *independente de* R_e, pois isso também vale para o ponto de separação.

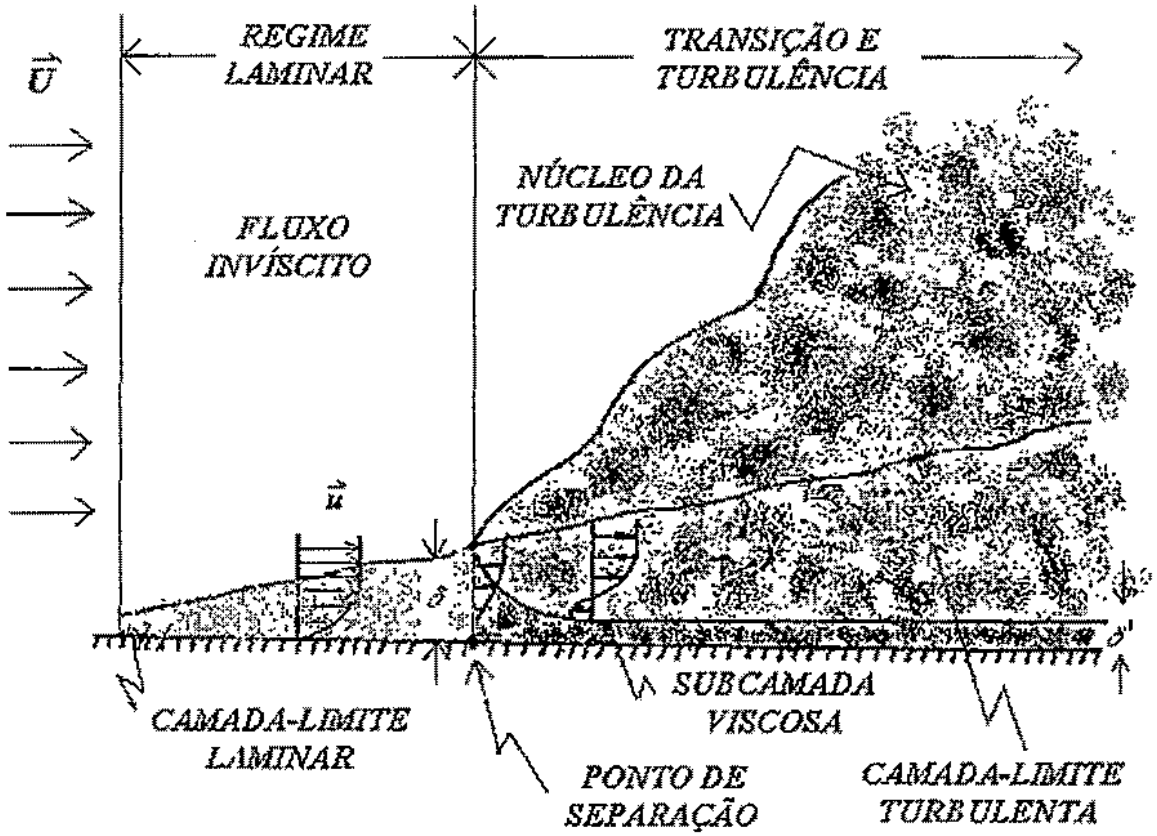


Fig.2.2. *Os mecanismos de Transição para a Turbulência.*

2.2.1. - A Instabilidade das Superfícies de Descontinuidade.

Chamamos de fluxos absolutamente instáveis aqueles que são instáveis mesmo com respeito a distúrbios infinitamente pequenos. Um dos mais simples exemplos de tais fluxos é o próximo a uma superfície de *descontinuidade tangencial da velocidade*. Neste caso, a instabilidade absoluta pode ser explicada com o auxílio de considerações físicas simples.

Vamos considerar duas 'camadas' de um fluido ideal deslizando uma sobre a outra, com velocidades iguais e opostas, U e $-U$, formando uma superfície de descontinuidade. Suponhamos que, devido a um pequeno distúrbio sobre essa superfície, seja formada uma onda de pequena amplitude. Para simplificar, suponhamos que tal onda não seja progressiva. Nessas condições, as

linhas de fluxo sobre a crista da onda ficarão muito próximas entre si e, por conseguinte, a velocidade aumentará. Nas bordas da onda, ocorrerá justamente o inverso, com as linhas de fluxo se afastando entre si. De acordo com a equação de Bernoulli, a pressão na crista da onda cairá, e nas bordas, aumentará de valor. Conseqüentemente, surgirá no fluido um gradiente de pressão transversal, que tenderá a aumentar a amplitude da onda. É esse acréscimo na amplitude que leva a onda a se desintegrar em *vórtices individuais.*

Num *fluido real*, as ondas que surgem, resultantes do processo acima descrito, são *progressivas.* Entretanto, a situação aqui é mais complicada, visto que o deslizamento de duas camadas, uma sobre a outra, é impossível. Ao invés da superfície de descontinuidade, existe entre os dois fluidos uma estreita *camada de transição*, na qual o perfil de velocidades tem a forma de *S.* A investigação da instabilidae de tal camada é, é claro, mais complicada. Todavia, pode ser mostrado, teórica e experimentalmente, que ela é muito *instável* [Monin & Yaglon [26], Vol.1, Cap.1, sec. 2.8].

Para concluir essa seção, resta-nos observar que a formação de um arrasto turbulento num fluxo a alto R_e, na presença de contornos sólidos, é praticamente certa, já que a tarefa de abolir as condições de formação de superfícies de descontinuidade é muito difícil. Isso só pode ser conseguido, dentro de certa tolerância, com geometrias muito especiais.

2.2.2. - A Equação de Orr-Sommerfeld.

De maneira geral, o mais eficaz meio de investigação das condições de transição para a turbulência é o método dos pequenos distúrbios, ou *método das perturbações.*

Considerando, mais uma vez, um fluido incompressível, a idéia central do método é escrever os campos de velocidade $u_i(\vec{x},t)$ e pressão $p(\vec{x},t)$, respectivamente, na forma $u_i = U_i + u_i'$ e $p = P + p'$, em que $U_i(\vec{x},t)$ e $P(\vec{x},t)$ são soluções particulares das equações, e u_i' e p' são distúrbios muito pequenos. Levando em conta também que tanto U_i como P satisfazem às equações do movimento, e ignorando os termos quadráticos nos distúrbios, temos:

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i'}{\partial t} + U_\alpha \dfrac{\partial u_i'}{\partial x_\alpha} + u_\alpha' \dfrac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} = -\rho^{-1} \dfrac{\partial p'}{\partial x_i'} + \nu \Delta u_i' \\ \\ \dfrac{\partial u_\alpha'}{\partial x_\alpha} = 0 \end{cases}
$$

Quando a solução $u_i = U(\vec{x}), P = P(\vec{x})$ descreve um fluido laminar estável, os coeficientes do sistema de equações (2.1) serão independentes do tempo. Nesse caso, (2.1) terá soluções particulares da forma:

$$
\vec{u}'(\vec{x},t) = e^{-i\omega t} f_\omega(\vec{x}), \qquad p'(\vec{x},t) = e^{-i\omega t} g_\omega(\vec{x})
$$

Para distúrbios bi-dimensionais — o que, pelo Teorema de Squire [Monin & Yaglon [26], Vol.1, sec. 2.8], não acarreta nenhuma perda de generalidade — de um movimento plano paralelo, as equações (2.1) tornam-se:

$$
(2.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial t} + U \dfrac{\partial u'}{\partial x} + w' \dfrac{dU}{dz} = -\rho^{-1} \dfrac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u' \\ \\ \dfrac{\partial w'}{\partial t} + U \dfrac{\partial w'}{\partial x} = -\rho^{-1} \dfrac{\partial p'}{\partial z} + \nu \Delta w' \\ \\ \dfrac{\partial u'}{\partial x} + \dfrac{\partial w'}{\partial z} = 0 \end{cases}
$$

As condições de contorno para essas equações exigem que ambas as componentes da velocidade, u' e w', tornem-se nulas sobre os contornos sólidos (ou, equivalentemente, no infinito, $z \to \infty$). Usando a equação da continuidade, na primeira das equações (2.2), podemos escrever, utilizando a definição de *função-corrente*, Ψ,

$$u' = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \qquad w' = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

e, eliminando a pressão,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta\Psi - \frac{d^2U}{dz^2}\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nu\Delta\Psi \tag{2.3}$$

Desde que os coeficientes dessa equação são independetes de x e t, ela tem soluções particulares da forma:

$$\Psi(x,z,t) = e^{i(k_x - \omega t)}\varphi(z) = e^{ik(x-ct)}\varphi(z) \tag{2.4}$$

na qual $c = \omega/k$.

Substituindo (2.4) em (2.3), obtemos a seguinte equação diferencial ordinária de quarta ordem para $\varphi(z)$:

$$(U-c)(\varphi'' - k^2\varphi) - \frac{d^2u}{dz^2}\varphi = -i\frac{\nu}{k}(\varphi^{iv} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi) \tag{2.5}$$

(as linhas denotam as diferenciações em relação a z). A equação (2.5) é chamada *Equação de Orr-Sommerfeld*. Suas condições de contorno são que φ e φ' tornem-se nulos sobre os contornos do fluxo.

Para encontrar um critério de instabilidade é necessário encontrar a solução $\Psi(x,z,t)$ dessa equação para dadas condições de contorno e do valor inicial $\Psi(x,z,t) = \Psi_o$ [1]. A natureza

[1] Aqui, $\Psi_o(x,z)$ é uma função arbitrária diferente de zero numa região finita do espaço e que satisfaz às condições de contorno e de pequenos distúrbios $|\nabla\Psi_o| \ll 0$.

da variação no tempo de $\max|\nabla\Psi(x,z,t)|$ dependerá do número de Reynolds do fluxo *não-perturbado* : para um R_e suficientemente *pequeno*, essa quantidade será amortecida; para R_e suficientemente *grande* pode, algumas vezes, crescer com o tempo. O limite entre essas regiões de valores de R_e (se existem) definirá um *número de Reynolds crítico*, R_{e_c}.

2.2.3.- A Estimativa de Heisenberg para R_{e_c}.

Numa importante obra de 1924 sobre a instabilidade hidrodinâmica, W. Heisenberg estudou a estabilidade de fluxos laminares plano-paralelos, dando uma grande contribuição para a elucidação do assunto, embora seu método tenha sido alvo de muitas críticas.

O problema, considera Heisenberg, é o clássico da estabilidade de um fluxo laminar plano-paralelo, digamos na direção-x, confinado entre dois planos paralelos, localizados em $z = \pm 1$, com unidades de distância normalizadas pela distância d entre as placas, e com um perfil de velocidades $w(z)$, normalizado por U, a velocidade externa. Para determinar R_{e_c} para este problema, Heisenberg procede da seguinte maneira. Primeiramente, busca uma solução da equação de Orr-Sommerfeld fazendo a seguinte substituição:

$$\varphi = \exp\left[\int g(z)dz\right]$$

com

$$g(z) = (kR)^{1/2} g_o(z) + g_1(z) + \vartheta\left[(kR)^{-1/2}\right]$$

Essas substituições fornecem aproximações para duas soluções, φ_1 e φ_2, que variam rapidamente quando o produto (kR) é grande. Para obter aproximações para duas soluções adicionais, φ_3 e φ_4, é feita uma expansão em potencias de (kR) tal que, em mais baixa ordem, essas sproximações são soluções da chamada *Equação de Rayleigh*:

$$(\omega - c)(\varphi'' - k^2\varphi) - \omega''\varphi = 0$$

Mais uma vez, essas soluções "inviscitas" são expandidas, em potências de k^2 [1].

A seguir, Heisenberg considera a maneira de conectar a solução aproximada obtida do outro lado do ponto de retorno, onde $\omega(z_o) - c = 0$. Para fazer isso, introduz a variável $\eta = (z - z_o)(kR)^{1/3}$ e expande φ_1 e φ_2 em potências de $(kR)^{-1/3}$. Para φ_4, escreve:

$$\varphi_4 \approx (\omega - c)\int_{-1}^{z_o} dz(\omega - c)$$

Novas aproximações são feitas para para derivar a dependência do valor característico R_{e_c} de k. Finalmente, Heisenberg estima que $k \approx 0.7$ e $R_{e_c} = \vartheta\,(10)^3$ [2].

O razão de incluirmos aqui essa discussão é o fato da estreita relação existente entre a instabilidade hidrodinâmica e o início da turbulência propriamente dita. Neste ponto, é instrutivo observarmos as próprias palavras de Heisenberg sobre a questão (que traduzo) :

"*Admitindo, agora, que a instabilidade aparece de maneira geral mesmo nos casos em que a equação inviscita tenha somente a solução neutra, surge a questão de como a viscosidade pode causar instabilidade. De argumentos simples, dever-se-ia esperar amortecimento ao invés de amplificação. Mas deve-se lembrar que um fluido inviscito é um sistema com infinitos graus de lberdade que, normalmente, interagem de tal forma que a energia é dissipada em todos os modos de vibração. É unicamente para condições geométricas muito especiais que essa transferência de energia não acontece. Portanto, se um distúrbio neutro é possível num fluido inviscito, a viscosidade pode facilmente mudar as fases de vibração, de tal forma que tem início a transferência de energia, o que significa amplificação dessa vibração.*

[1] Este é o mais sensível ponto da análise de Heisenberg. Em investigações recentes, usam-se soluções mais exatas da equação de Rayleigh, obtidas por métodos numéricos.

[2] Os valores atualmente aceitos são k = 1,097 e $R_{e_c} = 5.772$.

É muito provável, senão certo, que a amplificação leva, imediatamente, à turbulência completa, isto é, à distribuição estatística de energia entre todos os graus de liberdade (...) . Na maioria dos casos, a instabilidade pode, seguramente, levar diretamente à turbulência. Tal turbulência não precisa ser isotrópica, desde que as paredes introduzem desvios na isotropia, mas ela será uma distribuição estatística de energia entre muitos graus-de-liberdade."

A hipótese de *transferência de energia entre muitos graus-de-liberdade*, explícita no trecho acima, constitui, como veremos, uma peça fundamental na teoria elementar da turbulência desenvolvida por Heisenberg.

3
A Vorticidade e a Fenomenologia da Turbulência

O objetivo desse capítulo é investigar como a manisfestação da turbulência pode estar relacionada à evolução, no tempo e no espaço, de estruturas de vórtices. Em outras palavras, queremos entender os processos físicos pelos quais passam os vórtices que são prodizidos pela instabilidade hidrodinâmica. Claramente, essa abordagem fenomenológica tem como pano de fundo o termo não-linear da equação de Navier-Stokes.

3.1. Estruturas Genéricas de Vórtices.

Seja a vorticidade total de um fluido incompressível no espaço tri-dimensional denotada por $\vec{\xi}$. Nosso interesse é representar tal campo como uma soma de objetos matemáticos simples. É importante respeitar a identidade $\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} = 0$ ao menos aproximadamente. A maneira matemática mais conveniente de se fazer isso, como vimos (sec. 1.2.1), é através da soma:

$$\vec{\xi} = \sum_i \vec{\xi}_i(\vec{x})$$

em que se supõe que $\sup \xi_i$ é um *tubo de vórtices fechado*. É possível se demonstrar rigorosamente que qualquer distribuição suave de vórtices pode ser assim representada[1]. Todavia, os rigores dessas exigências matemáticas, para efeito de estudo de situações de interesse prático, devem ser, na grande maioria das vezes, enfraquecidos. Isso é conseguido, dentro de certos limites, se se toma a união dos suportes dos tubos de vórtices como muito menores do que a região acessível ao fluxo[2]. Deve-se assumir, também, que as secções retas dos tubos são pequenas, comparadas a seus comprimentos, e que a excentricidade de cada secção reta — razão entre os comprimentos máximo e mínimo — é *limitada*.

Essas aproximações no campo são corroboradas , em primeiro lugar, pela experiência. Em segundo lugar, porque o uso de tubos de vórtices é *autoconsistente*: o 'ensemble' de tubos de vórtices permanecerá um 'ensemble' de tubos, sob circunstâncias razoáveis.

Entretanto, a razão principal de se fazer tais aproximações é a conveniência: a fim de se estudar numericamente os sistemas turbulentos deve-se simplificá-los.

3.1.1.- A 'Auto-Energia', a 'Dobra' e o 'Esticamento' das Estruturas de Vórtices.

Consideremos a seguinte estrutura de vorticidade (Fig. 3.1):

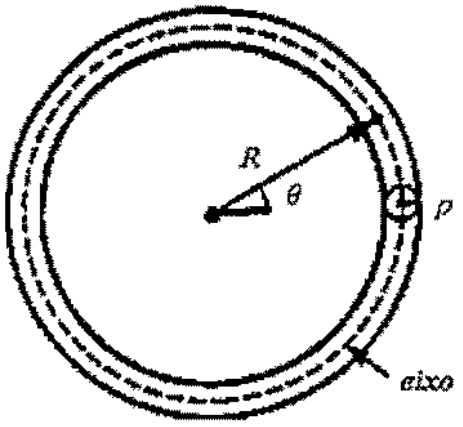


Fig.3.1. *Um anel de vorticidade.*

[1] Ver, por exemplo, C. Geengard, "Convergence of the vortex filament method", *Math. Comp.* 47 (1986).
[2] Nessa situação, podemos falar numa espécie de 'suspensão esparsa de tubos de vórtices', um artifício puramente matemático, importante na concepção de métodos numéricos baseados em vórtices.

Suponhamos que tal estrutura evolua para uma segunda, tal que o raio R cresça para αR, $\alpha > 1$. Nesse caso, o raio do tubo é reduzido para $\rho/\sqrt{\alpha}$, $|\vec{\xi}|$ cresce no tubo para $\alpha|\vec{\xi}|$, e a energia E cresce de $\mu\pi^2\rho^2|\vec{\xi}|^2\pi R^2\log(R/\rho)$ para o valor aproximado de $\pi^2\rho^2\alpha^2 R|\vec{\xi}| = \alpha^2 E$. Portanto, a forma do tubo deve mudar de tal maneira que os campos de velocidade produzidos pela vorticidade em suas várias partes cancelem-se apropriadamente, para garantir a conservação de energia.

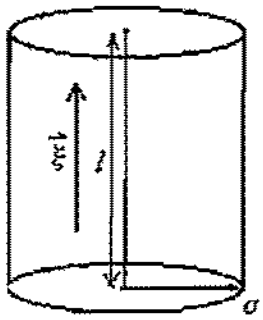


Fig. 3.2. *Secção de um tubo de vorticidade.*

Para analisarmos tais fenômenos quantitativamente, seja a integral

$$E_l = \int_l d\vec{x}\int_l d\vec{x}'\,\frac{\vec{\xi}(\vec{x})\cdot\vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad ,$$

a energia associada à vorticidade da configuração da Fig 3.2 , na qual $\vec{\xi}$ é paralelo ao eixo do tubo, $\vec{\xi} = \vec{\xi}(0,0,\xi)$ e $\xi = \xi_o(x_1/\sigma, x_2/\sigma)$, com $\xi = 0$ quando $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} > \sigma$. E depende de σ, de l, ξ_o e da circulação (integral de ξ_o sobre a base). O que temos de analisar é como E_l muda quando σ e l mudam. Em outras palavras, $E = E(\sigma, l)$, com a circulação mantida fixa (Teorema de Kelvin) e ξ conservando a forma ξ_o.Tais mudanças podem ser induzidas 'esticando' o cilindro pelas suas bases.

Consideremos agora um filamento de vórtices, F, fechado, de circulação unitária e secção reta pequena, aproximadamente circular, de pequena área. Se tal filamento pode ser representado pela superposição de N cilindros circulares, I_i , i = 1, 2, 3,..., N, de iguais comprimentos l e de raios σ_i, i = 1, 2, 3, ..., N, a energia associada a este filamento é:

$$E = (8\pi)^{-1} \int d\vec{x} \int d\vec{x} \frac{\vec{\xi}(\vec{x}) \cdot \vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} =$$

$$= (8\pi)^{-1} \sum_i \sum_{j \neq i} \int_{I_i} d\vec{x} \int_{I_j} d\vec{x}' \frac{\vec{\xi}(\vec{x}) \cdot \vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} +$$

$$+ (8\pi)^{-1} \sum_i \int_{I_i} d\vec{x} \int_{I_j} d\vec{x}' \frac{\vec{\xi}(\vec{x}) \cdot \vec{\xi}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = \sum_i \sum_{j \neq i} E_{ij} + \sum_i E_{ii}$$

Na última das equações acima, o primeiro termo é a energia de interação e a soma $\sum_i E_{ii}$, a auto-energia.

Seja, agora, $\vec{t}_i$ um vetor ao longo do eixo de I_i , com origem em seu centro e apontando na direção de I_i . Se a distância entre os centros de I_i e I_j (respectivamente, r_{c_i} e r_{c_j}) são muito grandes,

$$E_{ij} = \frac{1}{8\pi} \frac{\vec{t}_i \cdot \vec{t}_j}{|\vec{r}_{c_i} - \vec{r}_{c_j}|} .$$

Das leis da conservação, vimos a necessidade de mudança na forma de F, causada pelo seu próprio campo de velocidades e pelo campo de velocidade que o circunda. Entretanto, vamos admitir que tais variações da forma sejam tais que a secção reta dos tubos não se altere radicalmente. Como conseqüência, o tubo irá 'esticar' , enquanto sua secção reta é contraída

isomorficamente. Assim, se o tubo é agora representado por $N' \rangle N$ cilindros de comprimento 1, a soma $\sum_i E_{ii}$ associada aos novos filamentos será maior. Portanto, a energia do filamento F será:

$$\frac{1}{8\pi}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{N}\frac{\vec{t}_i\cdot\vec{t}_j}{\left|\vec{r}_{c_i}-\vec{r}_{c_j}\right|}+\sum_{i=1}^{N}E_{ii}^{(novos)} .$$

A soma dupla tem agora $\vartheta\,(N^2)$ parcelas. Um comprimento típico $\left|\vec{r}_{c_i}-\vec{r}_{c_j}\right|$ não pode aumentar muito se filamento permanece conectado. Assim, o produto interno na equação acima deve *decrescer*. Isso acontece se o filamento se *dobrar*. São esses os mecanismos responsáveis pela transferência de energia entre as escalas, um fenômeno fundamental dos sistemas turbulentos.

Tais conclusões poderiam, é claro, também ser obtidas diretamente a partir das equações do movimento.

Consideremos um fluido ocupando uma região de D do espaço tri-dimensional. Seja $\phi_t = \phi_t(\vec{\omega})$ o mapeamento do fluxo induzido por um campo aleatório incompressível. Sejam $\vec{x}_o, \vec{x}_o + \delta\vec{x}_o$ dois pontos muito próximos entre si, no instante $t = 0$. Eles são mapeados sobre $\vec{x}^t, \vec{x}^t + \delta\vec{x}^t$, no instante t, em que

$$\delta\vec{x}^t = \phi_t(\vec{x}^o + \delta\vec{x}^o) - \phi_t(\vec{x}^o) \approx A\delta\vec{x}^o$$

Na expressão acima, A é uma matriz 3 × 3. A norma $\left|\delta\vec{x}^t\right|$ satisfaz:

$$0 \leq \left|\delta\vec{x}^t\right|^2 = (\delta\vec{x}^t, \delta\vec{x}^t) \approx (A\delta\vec{x}^o, A\delta\vec{x}^o) = (\delta\vec{x}^o, W\delta\vec{x}^o)$$

em que (,) denota o produto interno ordinário, e $W = A^{\mathrm{T}}A$ é uma matriz simétrica definida-positiva. Para um fluxo incompressível, o jacobiano do mapeamento é 1 (cf. nota à pág. 19) e, assim,

$$|W| = |A| \cdot |A^{T}| = 1 = \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

Em $t = 0$, consideremos uma família de vetores $\delta\vec{x}^{o}$, de módulo fixo, $|\delta\vec{x}^{o}| = \delta x^{o}$, com direções uniformemente distribuídas sobre uma esfera unitária. Denotando-se por $\langle\ \rangle_s$ a média sobre a esfera unitária, pode ser mostrado que

$$\frac{d}{dt}\langle\langle|\delta\vec{x}'|\rangle\rangle_s > 0 \ ,$$

em que o símbolo $\langle\ \rangle$ denota a média ordinária.

A importante conclusão a que se chega é : *em média, sobre o espaço de probabilidades e sobre as direções iniciais, o comprimento das linhas aumenta.*

Para o caso particular de uma turbulência homogênea e isotrópica, não há direção preferencial e, portanto[1],

$$\frac{d}{dt}\langle\delta\vec{x}'\rangle > 0 .$$

Em pesquisa recente, A. Tsinober e outros [32] estudaram numericamente o esticamento de vórtices e a geração de enstrofia numa turbulência de laboratório. As principais conclusões desses autores são as seguintes.

• A estrutura da vorticidade num fluxo turbulento quase-homogêneo e isotrópico está associada a um forte alinhamento entre a vorticidade e os auto-valores da taxa de variação do

[1] A rigor, linhas de vórtices são linhas especiais que constituem uma fração negligenciável de todas as linhas. Todos os argumentos anteriores podem, portanto, falhar, e não se pode concluir que essas linhas 'esticam', mesmo num fluido isotrópico. Esse fato é, todavia, verificado por experimentos numéricos de simulação direta (Chorin [12], Bell & Marcus [8]).

tensor de tensão, ao invés de com $\vec{\nabla}|\vec{\xi}|^2$ somente. Conseqüentemente, regiões do fluxo turbulento muito maiores do que aquelas com intensa vorticidade estão espacialmente estruturadas. Em particular, regiões com fraca vorticidade estão organizadas justamente como as regiões com intensa vorticidade, e são também dinamicamente ativas. Uma relação simples é encontrada entre a positividade da geração de enstrofia, $\xi_i\xi_j s_{ij}$, e o alinhamento entre a vorticidade, $\vec{\xi}$, e os auto-valores da taxa de variação do tensor de tensão, s_{ij}.

- A taxa inviscita de mudança da geração de enstrofia consiste de duas contribuições. A primeira delas, local, é puramente positiva e reflete a tendência dos processos não-lineares de interação direta entre vorticidade e tensão sempre para aumentar a geração de enstrofia. A segunda, não-local, reflete a interação entre a vorticidade e o termo

$$\xi_i\xi_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} ,$$

e o caráter não-local dos processos de 'esticamento' dos vórtices. Sua média é negativa e menor do que $\langle \xi^2 \rangle$, tal que a taxa inviscita total de mudança da geração de enstrofia é sempre positiva[1].

[1] Usando as equações para a vorticidade e para a taxa do tensor de tensão, Yanitskii [33] obteve a seguinte equação para a geração de enstrofia:

$$\frac{D}{Dt}\xi_i\xi_j s_{ij} = \xi_j s_{ij}\xi_k s_{ik} - \xi_i\xi_j \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} + \nu(2\xi_i s_{ij}\Delta\xi_j + \xi_i\xi_j \Delta s_{ij}) .$$

Pode-se notar que o primeiro termo do lado direirto desta equação é igual a $\xi^2 \rangle$ 0. Isto significa que os processos não-lineares que envolvem o 'esticamento' das estruturas de vórtices sempre tendem a aumentar a geração de enstrofia. Pode-se provar que o valor máximo do segundo termo à direita é, aproximadamente, da ordem de ξ^2.

3.2. Fractalização.

É sabido que quando os filamentos de vórtices 'esticam' e 'quebram' seus eixos convergem a *conjuntos fractais*. Não importa, no nosso contexto, se isso acontece num tempo finito ou infinito. No objetiivo aqui é entender a importância desse processo dentro da fenomenologia da Turbulência.

Uma curva suave fechada tem dimensão 1 e *vetor capacidade* [1] zero. Consideremos um um filamento de vórtices que é 'esticado' sem modificar a topologia de seu campo de velocidades. Se qualquer porção do fliamento é esticada de tal forma que ela colapsa numa curva, tal curva carrega vorticidade. No entanto, a energia associada a essa configuração é *infinita* . Se a energia se conserva durante o processo de esticamento, este tipo de colapso é proibido. Assim, o esticamento deve ser acompanhado por um processo de 'quebra' que previne o aparecimento de filamentos de vórtices suaves de seção reta zero. Entretanto, as curvas suaves podem ser 'esticadas' em objetos de dimensão fractal maior do que 1, sem perder a característica de possuir dimensão topológica 1 (isto é, ser deformável numa curva suave). Esse processo de 'fractalização' é portanto *necessário*, mas não *suficiente*, para manter a energia finita.

Podemos especular sobre o comportamento das seções retas durante o processos de 'esticamento' e 'quebra' das estruturas. Pode ser lícito imaginar [15] que, quando a linha central do vórtice 'estica', suas seções retas se 'difundem' em torno de sua vizinhança desocupada, criando seções retas fractais com, eventualmente, excentricidade não-limitada. Tais secões retas poderiam então organizar-se em 'objetos coerentes'. Pode ser mostrado que esse processo também é necessário para a conservação da energia (cf. [15], seção 6.3).

---

[1] Um conjunto no espaço tri-dimensional tem *vetor capacidade* positivo se ele pode ser o suporte de um campo de vorticidade ξ tal que

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\xi}=0, \qquad \int_{\Sigma}\vec{\xi}\cdot d\vec{\Sigma}=1$$

para pelo menos uma superfície suave Σ, e tal que o campo de velocidades resultante tenha energia finita. De outra maneira, o conjunto tem vetor capacidade zero.

4

Descrição Matemática da Turbulência

O objetivo deste Capítulo é fazer uma descrição matemática da turbulência, do ponto de vista dos Processos Estocásticos, no sentido de Kolmogorov (1941). Serão definidos um fluxo aleatório homogêneo e seus espectros de energia, vorticidade e dissipação, e sua Transformada de Fourier. A equação de Kármán-Howarth — equação para a propagação de correlações num fluxo isotrópico — é também apresentada.

4.1. Campos de Fluxo Aleatórios.

Seja $\Re$ uma região no espaço tri-dimensional em que se desenvolve um *fluxo aleatório*, isto é, para cada $\vec{x} \in \Re$, a velocidade $\vec{u}(\vec{x})$ é uma variável aleatória, $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{u}(\vec{x},\omega)$, $\omega \in \Omega$, com (Ω, B, P) um espaço de probabilidades[1]. O que necessitamos é informação sobre a relação entre as variáveis $\vec{u}(\vec{x},\omega)$ para os vários valores de $\vec{x}$, de tal maneira que alguma idéia sobre os

[1] O que temos que formalizar é a noção de uma variável cujos valores dependem do experimento realizado para sua determinação. Para tanto, precisamos de um conjunto de experimentos possíveis (espaço amostral), uma coleção de eventos e de alguma maneira de associar uma probabilidade a esses eventos. Aqui, Ω representa o conjunto de eventos, B uma coleção de subconjuntos de Ω, e P denota a medida de probabilidade (cf. mais detalhes, p. ex., em [15], cuja exposição nosso texto segue de perto).

fluxos individuais possa ser obtida. Se, para qualquer número n finito de pontos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, uma função-distribuição das variáveis aleatórias $\vec{u}(\vec{x}_1), \vec{u}(\vec{x}_2), \ldots, \vec{u}(\vec{x}_n)$ é dada, dizemos que está definido um *campo aleatório*.

Seja $F_{\vec{x}_1 \ldots \vec{x}_n}(y_1, \ldots, y_n)$ a função-distribuição de $\vec{u}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m)$. Matematicamente,

(4.1) $$F_{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n} = P\{\omega \,/\, u_1(\vec{x}_1) \leq y_{11}, u_2(\vec{x}_1) \leq y_{12}, \ldots, u_m(\vec{x}_n) \leq y_{nm}\}$$

em que m = número de dimensões do espaço no qual o fluxo ocorre, e y_{jp} é a p-ésima componente do vetor y_j. A família de funções (escalares, por simplicidade) $F_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ deve satisfazer às exigências de auto-consistência:

(i) $$F_{x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n}(y_1, \ldots, y_l, +\infty, +\infty, +\infty, \ldots) = F_{x_1, \ldots, x_l}(y_1, \ldots, y_l)$$

e

(ii) $$F_{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}}(y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}) = F_{x_1, \ldots, x_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

em que $i_1, i_2, \ldots, i_n$ é uma permutação arbitrária de 1, 2, 3, ..., n.

Um fluxo aleatório será considerado *definido* se as funções $F_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ satisfizerem às exigências (i) e (ii) acima.

4.1.1- Momentos da distribuição e Funções de Correlação.

As *funções-momento* $m_{j_1 \ldots j_n}(x_1, \ldots, x_n)$ de um campo aleatório u são definidas por

(4.2) $$m_{j_1 \ldots j_n}(x_1, \ldots, x_n) \left\langle \left(u(x_1)\right)^2 \ldots \left(u(x_n)\right)^{j_n} \right\rangle \quad ,$$

em que $j_1 \ldots j_n$ são inteiros não-negativos. A média de $u(x)$ é $\langle u(x) \rangle = m_1(x)$.

A *função de correlação* $R(x_1, x_2)$ é definida por [1]:

$$R(x_1, x_2) \equiv \langle (u(x_1) - m(x_1))(u(x_2) - m(x_2)) \rangle \ . \tag{4.3}$$

A seguir, algumas importantes propriedades das funções de correlação:

(i) $R(x_1, x_2) = R(x_2, x_1)^*$.

(ii) $R(x_1, x_1) \geq 0$.

(iii) $|R(x_1, x_2)|^2 \leq R(x_1, x_1) R(x_2, x_2)$.

(iv) para cada n, quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e quaisquer números complexos $z_1, z_2, \ldots z_n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} R(x_j, x_k) z_j z_k^* \geq 0 \tag{4.4}$$

que segue de

$$\sum_j \sum_k R(x_j, x_k) z_j z_k^* = \left\langle \sum_j \sum_k (u(x_j) - m(x_j))(u(x_k) - m(x_k))^* z_j z_k^* \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left| \sum_j (u(x_j) - m(x_j)) z_j \right|^2 \right\rangle \geq 0 \ . \tag{4.5}$$

[1] Em particular, $R(x, x) = \sigma^2(x)$ = variância da variável aleatória $u(x)$.

- *Fluxos Homogêneos.*

Um caso de muito interesse pela sua simplicidade é aquele para o qual o fluxo preenche todo o espaço e cujas propriedades estatísticas são independentes do ponto particular no espaço que se considera. Tal campo é dito *homogêneo*. Matematicamente, u é homogêneo se, para qualquer n, quaisquer $x_1 \ldots x_n$ e qualquer X, a distribuição de $u(x_1), \ldots, u(x_n)$ é idêntica à de $u(x_1 + X), \ldots, u(x_n + X)$. Em particular,

(4.6) $$m_1(x) = m_1 = cte$$

e

(4.7) $$R(x_1, x_2) = R(x_1 - x_2, 0) = R(x_1 - x_2) \quad .$$

As propiedades (i), (ii), (iii) e (iv) de $R(x_1, x_2)$ tornam-se:

(i) $R(x) = R(-x)^*$.

(ii) $R(0) \geq 0$.

(iii) $|R(x)| \leq R(0)$.

(iv) para quaisquer $x_1 \ldots x_n$ e $z_1 \ldots z_n$,

(4.8) $$\sum_j \sum_k R(x_j - x_k) z_j z_k^* \geq 0$$

No que segue, consideremos o campo:

(4.9) $$u(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos(n_k x + \alpha_k)$$

em que n_k são números dados e a_k e α_k são variáveis aleatórias. $u(x)$ é um campo aleatório, completamente determinado pela distribuição de a_k e α_k. O conjunto de freqüências n_k, é chamado *espectro* de $u(x)$. Simplificadamente, o campo $u(x)$ pode ser escrito:

$$u(x) = \sum c_k e^{in_k x} \tag{4.10}$$

em que $c_k = a_k + ib_k$, e a_k e b_k são variáveis aleatórias reais independentes. A energia média desse campo aleatório é[1]:

$$\begin{aligned}\left\langle \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{X} u^2(x)dx \right\rangle &= \left\langle \lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{X} \sum_k \sum_r c_k c_r^* e^{ix(n_k - n_r)} dx \right\rangle = \\ &= \lim_{X\to\infty} \left\{ \sum \left\langle |c_k|^2 \right\rangle + \right. \\ &\quad \left. + \left\langle \sum_{\substack{k,r \\ k\neq r}} c_k c_r^* \frac{sen X(n_k - n_r)}{X(n_k - n_r)} \right\rangle \right\} = \\ &= \sum_k \left\langle |c_k|^2 \right\rangle \ .\end{aligned} \tag{4.11}$$

A função de correlação de $u(x)$ é avaliada de maneira similar :

---

[1] Por definição, a integral

$$\int_{-X}^{X} u^2(x)dx$$

é a energia de $u(x)$ no intervalo $-X \le x \le X$. A quantidade

$$\lim_{X\to\infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^{X} u^2(x)dx$$

se existe, será chamada *energia média espacial de u(x)*.

(4.12) $$R(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{N} \left\langle \left| c_k \right|^2 \right\rangle e^{in_k(x_1 - x_2)} \quad .$$

Por definição, a *função-distribuição espectral F(k)* é :

(4.13) $$F(k) = \sum_{n_l \langle k} \left\langle \left| c_l^2 \right| \right\rangle \quad .$$

Esta função caracteriza a potência média por componente harmônica de u. Temos, para um espectro contínuo,

(4.14) $$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk} dF(k) \ .$$

Um importante Teorema, devido a Khinchin, estabelece o seguinte:

•*Para uma função* $R(x)$, $-\infty < x < +\infty$, *ser a função de correlação de um campo que tem médias invariantes sob translação, funções de correlação e também satisfaz a condição*

$$\left\langle \left| u(x+h) - u(x) \right|^2 \right\rangle \to 0 \quad , \quad h \to 0,$$

é necessário e suficiente que tenha uma representação da forma

$$R(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixk} dF(k)$$

em que F(k) é uma função não-decrescente de k .

$F(k)$ é chamada *função-distribuição espectral* de u. Se $F(k)$ é diferenciável, $F'(k) = \phi(k)$, e a função ϕ é chamada *densidade espectral* de u. Dada uma dessas funções, a função de correlação pode ser reconstruída com auxílio das integrais de Fourier.

Se $\vec{u}(\vec{x})$ é *estacionária*, isto é, $\langle \vec{u}(\vec{x}) \rangle$ é um vetor independente de $\vec{x}$, as funções R_{ij} são finitas e independentes de $\vec{x}$ e

$$\left\langle \left\| \vec{u}(\vec{x}+\vec{h}) - \vec{u}(\vec{x}) \right\| \right\rangle \to 0 \tag{4.15}$$

em que $\| \ \|$ denota a norma do vetor. Então,

$$R_{ij}(\vec{r}) = \int \exp(i\vec{k}\cdot\vec{r}) dF_{ij}(\vec{k}) \quad , \tag{4.16}$$

em que F_{ij} é tal que a matriz com elementos $dF_{ij}(\vec{k})$ é definida não-negativa, e a soma

$$\sum_i F_{ii}(+\infty,+\infty,\ldots) - \sum_i F_{ii}(-\infty,-\infty,\ldots)$$

é finita.

Vice-versa, qualquer $R_{ij}(\vec{r})$ com tal representação é o *tensor de correlação* de um campo com as propriedades acima. Geralmente, assume-se que F_{ij} são diferenciáveis quando u é um *campo de velocidades*, o que implica na igualdade:

$$dF_{ij}(\vec{k}) = \Phi_{ij}(\vec{k}) d\vec{k} \quad . \tag{4.17}$$

Isto porque se

(4.18) $$\frac{1}{2}\left\langle u_i(\vec{x})u_j(\vec{x}+\vec{r})\right\rangle = R_{ij}(\vec{r}) = \int \exp\left(i\vec{k}\cdot\vec{r}\right)\Phi_{ij}(\vec{k})d\vec{k}$$

então,

(4.19) $$\bullet \textit{Energia média num ponto} \equiv \frac{1}{2}\left\langle u_i(\vec{x})u_i(\vec{x})\right\rangle = \frac{1}{2}\int \Phi_{ii}(\vec{k})d\vec{k} \ .$$

Logo, $(1/2)\Phi_{ii}$ é a densidade, no espaço de número de onda, das contribuições para energia média, isto é, a *densidade de energia por número de onda.*

O espectro de energia, $E(k)$ de u é definido como a integral de Φ_{ii} sobre uma esfera de raio k. Em outras palavras, é a contribuição para a energia dos números de onda cujos valores absolutos são iguais a k:

(4.20) $$\frac{1}{2}\left\langle u_i(\vec{x})u_i(\vec{x})\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \vec{u}(\vec{x})\cdot\vec{u}(\vec{x})\right\rangle = \frac{1}{2}u^2(\vec{x})$$

e, finalmente,

(4.21) $$\bullet \textit{Energia média num ponto} \equiv \frac{1}{2}u^2(\vec{x}) = \int_0^\infty E(k)dk$$

4.2. Soluções Aleatórias das Equações de Navier-Stokes

Nesta secção, consideraremos campos aleatórios $\vec{u}(\vec{x},\omega)$ que, para cada ω (isto é, para cada experimento que os produz), satisfazem às equações de Navier-Stokes. A seguir, vamos derivar algumas propriedades dos tensores R_{ij} e Φ_{ij}, bem como as de alguns outros, em fluxos que satisfazem às referidas equações. Assumiremos, tacitamente, que as soluções existem para

todos os instantes e são diferenciáveis. Isso implica que, para cada ω, as variáveis aleatórias $\vec{u}(\vec{x},\omega)$ podem ser tomadas como funções suaves $u_i(\vec{x})$, no ponto $\vec{x}$.

De $\vec{\nabla}\cdot\vec{u}=0$, temos:

(4.22) $$\left\langle u_i(\vec{x})\frac{\partial u_j(\vec{x}+\vec{r})}{\partial r_j}\right\rangle = 0 = \frac{\partial}{\partial r_j}R_{ij}(\vec{r}) \quad .$$

Além do mais,

(4.23) $$\frac{\partial}{\partial r_i}R_{ij}(\vec{r}) = 0$$

e, assim,

(4.24) $$k_j\Phi_{ij}(\vec{k}) = k_i\Phi_{ij}(\vec{k}) = 0 \quad .$$

Seja $\vec{\xi}(\vec{x})$ o vetor vorticidade, $\vec{\xi}=\vec{\nabla}\times\vec{u}$. As componentes de $\vec{\xi}(\vec{x})$ são dadas pela equação:

(4.25) $$\xi_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad .$$

Escrevendo $\vec{x}' = \vec{x}+\vec{r}$, temos:

$$\left\langle \xi_i(\vec{x})\xi(\vec{x})\right\rangle = \varepsilon_{ilm}\varepsilon_{jpq}\left\langle \frac{\partial u_m}{\partial x_l}(\vec{x})\frac{\partial u_q}{\partial x'_p}(\vec{x}')\right\rangle =$$

$$= -\left\{\delta_{ij}\delta_{lp}\delta_{mq} + \delta_{ip}\delta_{lq}\delta_{mj} + \delta_{iq}\delta_{lj}\delta_{mp} - \right.$$

$$-\delta_{ij}\delta_{lq}\delta_{mp} - \delta_{ip}\delta_{lj}\delta_{mq} - \delta_{iq}\delta_{lp}\delta_{mj}\Big)\frac{\partial^2}{\partial r_l \partial r_p} R_{mq}(\vec{r}) =$$

(4.26)

$$= -\delta_{ij}\Delta R_{ll} + \frac{\partial^2 R_{ll}}{\partial r_i \partial r_j} - \Delta R_{ji}(\vec{r}) \quad ,$$

em que Δ é o operador de Laplace. Portanto,

(4.27) $$\langle \xi_i(\vec{x})\xi_i(\vec{x})\rangle = -\Delta R_{ii}(\vec{r})$$

e

(4.28) $$\langle \xi_i(\vec{x})\cdot\xi_i(\vec{x})\rangle = \langle \vec{\xi}(\vec{x})\cdot\vec{\xi}(\vec{x})\rangle = -\Delta R_{ii}(\vec{r})\big|_{r=0} = \int (k^2)\Phi_{ii}(\vec{k})d\vec{k}$$

Integrando o lado direito da última equação sobre uma esfera de raio k, obtemos

(4.30) $$\langle \vec{\xi}(\vec{x})\cdot\vec{\xi}(\vec{x})\rangle = \int_0^\infty D(k)dk \quad ,$$

em que

(4.31) $$D(k) \equiv \int_{|\vec{k}|=k} k^2\Phi_{ii}(\vec{k})d\vec{k}$$

e, além do mais,

(4.32) $$D(k) = k^2 E(k) \quad .$$

$D(k)$ é o *espectro de vorticidade*, proporcional ao espectro de energia.

No que segue, vamos fazer as seguintes simplificações. O termo de força externa e o valor médio da velocidade serão assumidos nulos (essa última, pela homogeneidade). Portanto,

(4.33) $$\partial_t u_i + u_k \partial_k u_i = -\partial_i p + R_e^{-1} \Delta u_i \quad ,$$

em que a convenção de soma foi usada e $\partial_i \equiv \partial / \partial x_i$. Escrevendo $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{r}$, a equação acima fica:

(4.34) $$\partial_t u_i' + u_k' \partial_k u_j' = -\partial_i p' + R_e^{-1} \Delta_{x'} u_j' \quad ,$$

com $u_i' = u_i(\vec{x}')$.

Multiplicando a primeira por u_j' e a segunda por u_i, temos, respectivamente:

(4.35) $$u_j' \partial_t u_i + u_j' u_k \partial_k u_i = -u_j' \partial_i p + R_e^{-1} u_j' \Delta u_i$$

e

(4.36) $$u_i \partial_t u_j' + u_i u_k' \partial_k u_j' = -u_i \partial_i p' + R_e^{-1} u_i \Delta_{x'} u_j' \quad .$$

Tomando o valor esperado de cada termo e somando os resultados, termo a termo, notando que

(4.37) $$\left\langle u_j' \partial_t u_i + u_i \partial_t u_j' \right\rangle = \partial_t R_{ij}$$

e, da homogeneidade, que

(4.38) $$\partial_x (uv) = u \partial_x v + v \partial_x u$$

e

(4.39) $$\left\langle \partial_x (uv) \right\rangle = \partial_x \langle uv \rangle = 0 \quad ,$$

segue que

(4.40) $$\langle u\partial_x v\rangle = -\langle v\partial_x u\rangle \quad .$$

Colocando $i = j$ e integrando por partes as equações (4.35) e (4.36), obtemos:

(4.41) $$\partial_t R_{ii}(\vec{r}) = -\partial_{x_k}\langle u_i' u_k u_i' - u_i u_k' u_i\rangle - \partial_{x_i}\langle p u_i' - p' u_i\rangle + 2R_e^{-1}\Delta_r R_{ii}(\vec{r}),$$

em que $\Delta_r \equiv \sum \partial_{r_j}^2$. Todos os termos à direita, exceto o último, se anulam em $r = 0$, pela homogeneidade. Assim,

(4.42) $$\partial_t R_{ii}\big|_{\vec{r}=\vec{0}} = \frac{d}{dt}\langle \vec{u}^2\rangle = 2R_e^{-1}\Delta_r R_{ii}\big|_{\vec{r}=\vec{0}} = -2R_e^{-1}\int k^2\Phi_{ii}(\vec{k})d\vec{k} \quad .$$

$2R_e^{-1}k^2\Phi_{ii}$ é a contribuição do movimento com número de onda próximo a k para a dissipação total. A integração dessa expressão sobre uma esfera de raio k dá

(4.43) $$\partial_t R_{ii}\big|_{\vec{r}=\vec{0}} = \frac{d}{dt}\langle \vec{u}^2\rangle = -\int_0^\infty D(k)dk \quad ,$$

em que $D(k) \equiv 2R_e^{-1}k^2E(k)$ é o *espectro de dissipação*, proporcional ao espectro de vorticidade[1].

[1] Essa última expressão leva à importante conclusão de que, nessas condições, a energia cinética por unidade de massa é um *invariante* da equação de Euler.

4.3. A Equação de Kármán-Howarth.

Mais uma vez, vamos supor um fluxo numa região limitada do espaço tri-dimensional. A equação para um ponto genérico $\vec{x}$ pode ser escrita como:

(4.44) $$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i \quad .$$

Multiplicando esta equação pela k-ésima componente, u_k', da velocidade no ponto $\vec{x}'$, obtemos:

(4.45) $$u_k' \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k' u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\rho^{-1} u_k' \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu u_k' \Delta u_i \quad .$$

Pela equação da continuidade, imediatamente vem

(4.46) $$u_k' u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j u_k'}) \quad .$$

Mas $\overline{u_i u_j u_k'}$ é uma função da distância $\vec{d}$ entre pontos, isto é,

(4.47) $$\vec{x} = \vec{x}' + \vec{d} \quad .$$

Por essa razão,

(4.48) $$\frac{\partial}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial d_j} \quad .$$

Portanto,

(4.49) $$\frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u_i u_j u_k^{'}}) = -\frac{\partial}{\partial d_j}(\overline{u_i u_j u_k^{'}}) \quad .$$

Similarmente,

(4.50) $$-u_k^{'}\,\rho^{-1}\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} = \rho^{-1}\frac{\partial}{\partial d_i}(u_k^{'}\overline{p}) \quad .$$

Mas $u_k^{'}\overline{p}$ se anula em toda parte e, então,

(4.51) $$\rho^{-1}\frac{\partial}{\partial d_i}(u_k^{'}\overline{p}) = 0 \quad .$$

Finalmente, (4.45) pode ser escrita como

(4.52) $$\overline{u_k^{'}\frac{\partial u_i}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial d_j}(\overline{u_i u_j u_k^{'}}) = \nu\Delta(\overline{u_k^{'} u_i}) \quad .$$

Do mesmo modo, para o ponto $\vec{x}^{'}$,

(4.53) $$\overline{u_i\frac{\partial u_k^{'}}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial d_j}(\overline{u_i u_j^{'} u_k^{'}}) = \nu\Delta(\overline{u_i u_k^{'}}) \quad .$$

Além do mais,

(4.54) $$\overline{u_i u_j^{'} u_k^{'}} = -\overline{u_i^{'} u_j u_k} \quad .$$

Por isso, (4.53) e (4.54) levam a

$$\overline{u_i \frac{\partial u_k'}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial d_i}(\overline{u_j u_k u_i'}) = \nu\Delta(\overline{u_i u_k'}) \quad . \tag{4.55}$$

Por definição,

$$\overline{u_i u_k'} \equiv \overline{u^2} R_{ik} \tag{4.56}$$

e

$$\overline{u_i u_j u_k'} \equiv (\overline{u^2})^{3/2} \mathrm{T}_{ijk} \quad , \tag{4.57}$$

sendo que a correlação-tripla, T_{ijk}, desempenha um importante papel na turbulência completamente desenvolvida (vide Cap. 5).

Adicionando (4.52) e (4.55) e usando (4.46), obtemos, finalmente

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{u^2} R_{ik}\right) - (\overline{u^2})^{3/2} \frac{\partial}{\partial d_j}\left(\mathrm{T}_{ijk} + \mathrm{T}_{kji}\right) = 2\nu\overline{u^2}\Delta R_{ik} \tag{4.58}$$

A equação (4.58), derivada pela primeira vez por Kármán e Howarth, é chamada *Equação de Kármán-Howarth*, e é a equação fundamental que governa a propagação das correlações R_{ij} e T_{ijk}, num fluxo turbulento isotrópico incompressível [1].

[1] Uma relação mais geral, válida para a turbulência homogênea anisotrópica, foi obtida por Monin [26] e é conhecida por *relação de Kármán-Howarth-Monin*. Notemos que há n equações em n+1 incógnitas, o que indica que o sistema é *indeterminado*. Isso é conseqüência direta da não-linearidade da equação de Navier-Stokes. Esta dificuldade, bem conhecida na Teoria da Turbulência, é chamada problema da *closura*. Há vários métodos, envolvendo abordagens fenomenológicas, que se propõem a resolver este problema. Um dos mais importantes, pelo impacto que teve no desenvolvimento da teoria da turbulência, é o *método da viscosidade efetiva*, devido a Heisenberg. Entretanto, não rotularemos a abordagem de Heisenberg como um simples *método*, preferindo, seguindo Chandrasekhar, tratá-la dentro da categoria de uma *teoria elementar*. Isto será feito no próximo capítulo.

Uma maneira particularmente útil de escrever essa equação é em termos das *funções de correlação*, $f(r)$ e $h(r)$, da seguinte maneira (para definições, vide Apêndice F):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(f(r)\overline{u^2}\right) + 2\left(\overline{u^2}\right)^{3/2}\left(\frac{\partial h(r)}{\partial r} + 4\frac{h(r)}{r}\right) = 2\nu\overline{u^2}\left(\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\right). \tag{4.59}$$

5

A Teoria da Turbulência de Heisenberg

Neste Capítulo, apresentaremos a Teoria elementar da turbulência como foi desenvolvida por Werner Heisenberg, em 1948. Antes de discutirmos o mecanismo de Heisenberg de transferência de energia, uma breve introdução será feita sobre famosas as *hipóteses da similaridade*, base das análises pioneiras de Kolmogorov, von Weizsäcker e Onsager, e essência da teoria de Heisenberg.

5.1.A Equação Dinâmica para o Espectro de Energia.

Pode-se mostrar que o espectro de energia tri-dimensional pode ser obtido a partir de um espectro de energia unidimensional, que corresponde a uma função de correlação radial $f(r)$ no sentido de Kármán-Howarth, da seguinte maneira (Apêndice F):

$$E(k,t) = \frac{1}{2}\left[k^2 \frac{d^2F}{dk^2} - k\frac{dF}{dk} \right] \quad , \tag{5.1}$$

em que

(5.2) $$F(k) = \frac{2}{\pi}\langle u^2\rangle \int_0^\infty f(r)\cos(kr)dr \quad .$$

Queremos, agora, derivar a equação dinâmica satisfeita por *E(k)*, ou seja, a evolução temporal do espectro de energia. Como *F(k)* é encontrada da correlação

$$\langle \vec{u}(x_i,t)\vec{u}'(x_i',t)\rangle$$

feita no instante *t*, obviamente *E(k)*, em geral, dependerá do tempo. Portanto, $E(k) = E(k,t)$.

A maneira mais direta de derivar *E(k,t)* é feita através da relação de Kármán-Howarth para a propagação de correlações num fluido localmente isotrópico. Tomando a transformada-coseno de Fourier de (4.59), temos:

(5.3) $$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{u^2}\int_0^\infty f(r)\cos(kr)dr\right] + 2\left(\overline{u^2}\right)^{3/2}\left[\int_0^\infty \frac{\partial h(r)}{\partial r}\cos(kr)dr + \right.$$

$$\left. +4\int_0^\infty \frac{h(r)}{r}\cos(kr)dr\right] = 2\nu\overline{u^2}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\cos(kr)dr + 4\int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial f(r)}{\partial r}\cos(kr)dr\right]$$

que pode também ser escrita:

(5.4) $$\frac{\pi}{2}\frac{\partial F(k)}{\partial k} + 4k^2 H_1(k) - 8\int_{k_o}^{k} k' H_1(k')dk' = -2\nu k^2 F(k) + 4\int_{k_o}^{k} k' F(k')dk',$$

em que

(5.5) $$H_1(k) \equiv \frac{\left(\overline{u^2}\right)^{3/2}}{k\pi}\int_0^\infty h(r)sen(kr)dr \quad .$$

Aplicando o operador D_3 (vide Apêndice F), obtemos (5.4) em função de $E(k)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} D_3[F(k)] = 4D_3[k^2 H_1(k)] - 8D_3\left[\int_{k_0}^{k} k' H(k')dk'\right] = \tag{5.6}$$

$$= -2\nu D_3[k^2 F(k)] + 4D_3\left[\int_{k_0}^{k} k' F(k')dk'\right]$$

que, depois de efetuadas as operações indicadas, reduz-se a

$$\frac{\partial}{\partial t} E(k,t) = -\aleph(k,t) - 2\nu E(k,t) \quad , \tag{5.7}$$

em que

$$\aleph(k,t) \equiv 4k^2 D_3[H_1(k,t)] \tag{5.8}$$

é a chamada *função de transferência*.

A equação (5.7) é a *equação dinâmica para o espectro de energia* $E(k,t)$.

$\aleph(k,t)$ pode ser interpretado, fisicamente, como representando os mecanismos de *transferência* de energia no fluido turbulento, daí seu nome. Essa transferência, obviamente, é de caráter não-dissipativo.

De fato, pode ser mostrado de (5.8) que

$$\int_0^{\infty} \aleph(k)dk = 0 \quad , \tag{5.9}$$

o que indica que, de fato, $\aleph(k)$ não representa nenhuma perda, mas simplesmente uma *redistribuição* de energia cinética, através dos processos de transferência.

A fim de encontrar $E(k,t)$ explicitamente, temos de resolver (5.7), que é uma equação não-linear, cuja solução exata não existe. Por isso, deve-se recorrer a algum método de aproximação ou a algum método numérico. Uma das formas de se fazer isso é assumir uma relação entre a função de transferência, $\aleph(k)$, e o espectro de energia, $E(k)$. Uma grande intuição física levou W. Heisenberg a estabelecer uma tal relação, que será discutida na secção 5.3.

5.2. As Hipóteses do Equilíbrio Universal.

O maior desafio de uma teoria candidata a descrever o fenômeno da turbulência é fornecer uma informação intuitiva do que acontece num sistema turbulento. Geralmente, a primeira observação que se faz sobre um fluxo turbulento é que ele envolve muitas escalas do movimento. Todas elas são fortemente acopladas, isto é, para se calcular quaisquer delas, em particular as maiores, tem-se de levar em conta ou todas ou, pelo menos, uma grande fração delas, fração essa maior do que poderia se esperar *a priori*. Num fluxo com alto número de Reynolds, a especificação dessas escalas representa um dos mais sérios problemas para a computação de tais fluxos. Um objetivo ainda mais importante de uma teoria, relacionado ao anterior, é o de fornecer uma maneira de descrever acuradamente o fluxo, sem entretanto considerar, explicitamente, todas as escalas interagentes.

Se existem, como parece razoável, características comuns a todos os sistemas turbulentos, pelo menos numa escala apropriada — certamente nas menores — o entendimento dos seus mecanismos e uma representação útil para eles claramente serão de grande valia para a computação. Por essa razão, as teorias buscam, de uma forma geral, clarificar os fenômenos na dimensão dessas escalas.

A análise das pequenas escalas do movimento na turbulência envolve uma importante acepção (do *equilíbrio universal*): *o tempo característico do movimento de pequena escala é pequeno comparado ao tempo total de decaimento*. Para analisar quantitativamente tal acepção,

vamos identificar as componentes de Fourier de um campo de velocidades com 'elementos de turbulência' (ou movimentos reconhecidamente organizados no interior do flu-xo). Assumindo o campo de velocidades, $\vec{u}(\vec{x})$, como periódico,

$$\vec{u}(\vec{x}) = \sum \vec{u}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \quad . \tag{5.10}$$

Os coeficientes $\vec{u}_{\vec{k}}$ podem ser associados a elementos de turbulência de dimensão $k^{-1}, k = |\vec{k}|$. A velocidade característica do fluxo é $(\overline{u^2})^{1/2}$; o tempo característico de decaimento total é $u/|du/dt|$; o tempo característico das pequenas escalas é $1/(ku_k)$, em que u_k é uma amplitude de $\vec{u}_{\vec{k}}$, para $|\vec{k}| = k$ suficientemente grande. O equilíbrio universal exige que:

$$\frac{1}{ku_k} \ll \frac{u}{|du/dt|} \quad . \tag{5.11}$$

Pode-se inferir dessa relação que as pequenas escalas (k grande) atingem um estado assintótico. Todavia, não podemos assegurar que tal estado possa ser diferente de problema a problema, como parece ser verificado experimentalmente. Há ainda mais uma questão: como a independência entre pequenas e grandes escalas pode ser compatível com o forte acoplamento entre elas? Como veremos, tais fatos não estão em desacordo com as famosas *hipóteses da similaridade*, formuladas, independentemente, por Kolmogorov, von Weizsäcker e Onsager.

-As Hipóteses da Similaridade.

Consideremos um fluxo homogêneo e isotrópico, com espectro de energia $E(k)$. A acepção de homogeneidade não é muito severa para o movimento de pequena escala, dado que, numa escala suficientemente pequena, qualquer fluxo pode ser tomado como homogêneo.

Quando R_e é muito alto, isto é, na quase ausência de amortecimento, o número de onda k para o qual $k^2E(k)$ é significante pode ser muito grande, ou, em outras palavras, o 'range' de dissipação é atingido acima de um k grande. Assim, sendo k_1 e k_2 os números de onda correspondentes, respectivamente, às escalas 'externa' e 'interna', $k_1 \langle\langle k_2$, o 'range' iner-cial (intervalo de números de onda compreendidos entre k_1 e k_2) é grande. Poder-se-ia muito bem acreditar que tudo o que acontece de mais significativo nesse intervalo é que a energia é transferida de região para região (ou melhor, de k para k) até à dissipação total. De que poderia $E(k)$ depender nessa região intermediária? É plausível que somente de k e da taxa à qual a energia é dissipada, $\varepsilon = -d(\overline{\vec{u}^2})/dt$. Essa dependência será evidenciada nas considerações abaixo.

As unidades de $E(k)$ são L^3/T^2, em que L é uma unidade de comprimento e T, de tempo; k tem unidade L^{-1} e ε, L^2/T^3. Uma análise dimensional, baseada no Teorema-π de Vaschy-Buckingham, permite mostrar que

$$E(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad , \tag{5.12}$$

em que C_k é uma *constante adimensional universal*, chamada constante de Kolmogorov.

Essa forma de $E(k)$ é freqüentemente chamada *Lei de Kolmogorov*, porque foi ele o primeiro a chegar a este resultado. Independentemente dele e um do outro, tanto L. Onsager, nos Estados Unidos (1945), como C. F. von Weizsäcker, na Alemanha (1948), obtiveram a mesma expressão.

É importante notarmos que a lei de Kolmogorov é independente das equações do movimento. Ela é surpreendentemente bem verificada tanto por experimentos numéricos como de laboratório, para diferentes tipos de sistemas turbulentos.

A dependência de E sobre ε, postulada anteriormente, pode ser explicada pelos seguin-tes argumentos. Na seção anterior foi deduzida a expressão:

$$\partial_t E(k) + 2k^2 R_v^{-1} E(k) = \aleph(k) \quad ,$$

em que $\aleph(k)$ se origina dos termos não-lineares da equação de Navier-Stokes. Esse termo é cúbico em $\vec{u}(\vec{k})$ e, desde que é a transformada de um produto de termos, envolve valores de $\vec{u}(\vec{k}')$ para vários $\vec{k}' \neq \vec{k}$. É, também, o termo responsável pela transferência de energia entre diferentes números de onda. Se a transferência é local no espaço-$\vec{k}$, isto é, a energia se move de $\vec{k}$ para $\vec{k}$ no 'range' inercial, e não diretamente da vizinhança de k_1 para a vizinhança de k_2, então $\aleph \sim \varepsilon \sim u^3$, em que u é uma amplitude de $\vec{u}$ no 'range' inercial. Como $E \sim u^2$, temos $E \sim \varepsilon^{2/3}$, como prediz a lei de Kolmogorov.

Pode-se, também, em bases dimensionais, derivar uma estimativa simples da ordem de grandeza de k_2, o número de onda característico do 'range' de dissipação. k_2 deve depender da viscosidade e da taxa ε (já que $E(k)$ depende de ε). A única combinação possível dessas grandezas que tem dimensão de comprimento é $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$. É usual definir k_2 tal que tenhamos exatamente $k_2 = 1/\eta$. É razoável que η seja da ordem de grandeza das escalas em que ocorre a dissipação viscosa. De fato, isso é verificado experimentalmente, e η é também chamada de *escala dissipativa*. Em particular, notamos que $k_2 \to \infty$ quando $\nu \to 0$.

Um fato conhecido a algum tempo da experiência é que a energia é determinada preponderantemente pelos menores números de onda, enquanto a taxa de dissipação, pelos maiores. Nota-se ainda que os números de onda k_1 e k_2 nunca se superpõem, mesmo a baixos

R_e. Um fato crucial para a física da turbulência é que o 'range' inercial pode se estender sobre muitos números de onda, dependendo apenas de R_e. A conseqüência disso é que podemos considerar os fenômenos da transferência inercial de energia sem nos preocuparmos com os detalhes da 'entrada' (a pequeno k) ou da 'saída' (a alto k) de energia.

Vimos, anteriormente, que há um forte acoplamento entre as escalas do movimento. Isso expressa a insuplantável natureza coletiva da não-linearidade. Em princípio, cada modo de Fourier do campo de velocidades está acoplado a todos os outros, o que torna o problema muito difícil de ser tratado rigorosamente. É natural, então, buscar alguma simplificação. Essa sim-plificação em parte foi conseguida pelas hipóteses de Heisenberg, discutidas a seguir.

5.3. O Mecanismo de Heisenberg da Transferência Espectral de Energia.

Multiplicando a equação do espectro de energia (5.7) por dk, e a seguir integrando-a de 0 a k, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^k E(k')dk'\right\} = -\int_0^k N(k')dk' - 2\nu\int_0^k k'^2 E(k')dk' \tag{5.13}$$

(<u>obs</u>.- na obra original de Heisenberg, o espectro $E(k)$ é denotado por $F(k)$).

O segundo termo à direita representa a 'perda' de energia devida à dissipação viscosa ordinária da parte do espectro contida no intervalo de número de onda $(0,k)$. O primeiro termo à direita representa a 'perda' devido aos mecanismos de transferência. Heisenberg [18] explica esses mecanismos em termos de uma 'viscosidade turbulenta' que, em última análise, é a forma mais simples de se representar, matematicamente, as famosas *hipóteses da similaridade*, formuladas, independentemente, por Kolmogorov, von Weizsäcker e Onsager.

Em analogia ao segundo termo do lado direito de (5.13), Heisenberg escreve, para o primeiro, a expressão:

$$\varepsilon_k^{(mecânico)} = 2\rho\nu_k \int_0^k E(k')k'^2 dk' \quad , \tag{5.14}$$

em que ν_k é a 'viscosidade turbulenta', que depende de k (vide secção 1.3.2). Dos argumentos da similaridade, Heisenberg assume que ν_k possa ser obtida por uma integral sobre o espectro na forma:

$$\nu_k = \chi \int_k^\infty dk \frac{\sqrt{E(k)}}{k^{3/2}} \quad , \tag{5.15}$$

em que χ é uma constante adimensional. Sobre ela falaremos mais tarde.

Com isso, a equação (5.13) torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^k E(k')dk'\right\} = -2(\nu + \nu_k)\int_0^k k'^2 E(k')dk' \tag{5.16}$$

ou, em vista de (5.15),

$$S_k = -2\left\{\nu + \chi \int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k'',t)}{k''^3}}dk''\right\}\int_0^k k'^2 E(k',t)dk' \quad , \tag{5.17}$$

em que,

$$S_k \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^k E(k',t)dk'\right\} \quad . \tag{5.18}$$

S_k é a 'perda' total de energia da parte do espectro contida no intervalo *(0,k)*.

Heisenberg não dá uma solução explícita dessa equação, apenas discute as suas propriedades fundamentais, distinguindo as situações estacionária [18] e não-estacionária [19]. Chandrasekhar e Bass obtiveram uma solução exata (no caso estacionário) da equação do espectro, que confirma os resultados qualitativos de Heisenberg. Tal solução será apresentada na secção 5.3.1.

Sobre χ, Heisenberg escreve ([18], pág. 632, 1° parágrafo) : *"Die Konstante χ in Gl.(12) [aqui equação 5.15] muß durch die hydrodinamischen Gleischungen exakt festgelegt sein, sie hat in allen Fällen, in denen von statistischer isotroper Turbulenz gesproschen werden kann, den gleischen Zahlwert und hängt in keiner Weise von der Geometrie der Strömung ab."* [1] De fato, em [18], seção 5, Heisenberg faz uma cálculo 'quase-teórico' de χ, obtendo o valor 0,98. Seus comentários finais a esse respeito são ([18], pág. 657, último parágrafo): " *Diese grobe Abschätzung gibt also die richtige Größeordung für χ, aber der exakt Wert mag gut um einen Faktor 2 von 0,98 verschiedenen sein. Die Reschnung dieses Abschnitts haben also zwar nicht zu einer exakten Berechnung der Konstante χ geführt, wohl aber zu einer qualitativen mathematischen Darstellung der Vorgänge, auf denen die Energiedissipation beruht. Vielleicht wird es möglich sein, durch eine umfassende Diskussion der veerschiedenen Versuch von Simmos, Dryden, Prandtl und anderen über das Spektrum und über das Abklingen der Turbulenz zu einer recht genauen experimentellen Bestimung von χ zu gelangen* ".[2] Essas verificações experimentais sugeridas por Heisenberg para a determinação mais exata da constante χ foram feitas, entre outros, por Proudmann [28], que obteve para ela o valor $0{,}45 \pm 0{,}005$.

---

[1] *Tradução livre*: 'A constante χ na equação (12) deve ser fixada, exatamente, através das equações da Hidrodinâmica. Ela tem, em todos os casos em que se pode falar de uma turbulência estatística e isotrópica, o mesmo valor, e não depende, de modo algum, da geometria do fluxo'.

[2] *Tradução livre*: 'Esta avaliação grosseira leva, portanto, a uma ordem de grandeza correta para χ, porém o valor exato pode diferir de 0,98 por um fator próximo de 2 . Os cálculos dessa seção, portanto, não levaram, de fato, a um cálculo exato da constante χ, embora, isto sim, a uma descrição matemática qualitativa dos processos aos quais diz respeito a dissipação de energia. Talvez venha a ser possível chegar-se a uma determinação experimental mais exata de χ através de uma discussão conjunta das diferentes pesquisas de Simmons, Dryden, Prandtl e de outros sobre o espectro e sobre o decaimento da turbulência'.

5.3.1. A Forma Analítica do Espectro de Energia no Equilíbrio.

O astrofísico indiano S. Chandrasekhar [10] e o matemático francês J. Bass [4] obtiveram, independentemente, uma solução analítica para a equação fundamental da teoria de Heisenberg, no caso estacionário.

Para obter uma solução explícita da equação do espectro, o procedimento tomado por Chandrasekhar é o seguinte.

Quando as condições são estacionárias, isto é, quando o estado de equilíbrio é mantido, S_k será *constante, independente de* k.

Diferenciando, pois, (5.17) em relação a k, obtemos:

(5.19) $$\frac{\nu}{k} + \int_k^{\infty} \frac{dk}{k^{3/2}} \sqrt{E(k)} = \frac{1}{k^2\left[E(k)k^3\right]^{1/2}} \int_0^k E(k)k^2 dk \quad .$$

Introduzindo as funções definidas por

(5.20) $$g = k^3 E(k)$$

e

(5.21) $$y = \int_0^k E(k)k^2 dk \quad ,$$

segue que:

(5.22) $$\frac{dk}{dy} = \frac{k}{g}$$

e

(5.23) $$\log k = cte. + \int_0^y \frac{dy}{g(y)} \quad .$$

Usando (5.20), (5.21) e (5.22), podemos escrever (5.19) na forma:

(5.24) $$\frac{v}{k} + \int \frac{dy}{k^2 g^{1/2}} - \frac{y}{k^2 g^{1/2}} = 0 \quad .$$

Diferenciando essa expressão em relação a y e usando (5.22), temos:

(5.25) $$-\frac{1}{k^2 g^{1/2}} + \frac{2y}{k^2 g^{3/2}} - \frac{1}{k^2}\frac{d}{dy}\left(\frac{y}{g^{1/2}}\right) = 0$$

que, simplificada, fica:

(5.26) $$\frac{dg}{dy} - \frac{4}{y} g + 4 = 0 \quad ,$$

cuja solução geral é:

(5.27) $$g(y) = \frac{4}{3} y (1 - C y^3) \quad ,$$

em que C é uma constante.

Inserindo (5.27) em (5.23) e avaliando a integral do lado direito, temos:

(5.28) $$k = \alpha \left(\frac{y^3}{1 - C y^3}\right)^{1/4} \quad , \qquad \alpha \text{ constante.}$$

As soluções podem ser reescritas como:

(5.29) $$y^3 = \frac{k^4}{\alpha^4 + C k^4}$$

e

(5.30) $$g(y) = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha y}{k}\right)^4 \quad .$$

O espectro de energia segue então de (5.20), (5.21), (5.27) e (5.28):

(5.31) $$E(k) = \frac{4}{3}\frac{\alpha^4}{k^{5/3}(\alpha^4 + Ck^4)^{4/3}}$$

ou

(5.32) $$E(k) = E_o\left(\frac{k_o}{k}\right)^{5/3}\frac{1}{\left[1+(k/k_s)^4\right]^{4/3}} \quad ,$$

com

(5.33) $$k_s \equiv \alpha / C^{1/4}$$

e

(5.34) $$E_o \equiv (4/3)\alpha^{4/3}k_o^{5/3} \quad .$$

Resta a determinação das constantes de integração. Para tanto, usando (5.19), (5.20), (5.21) e (5.22),

(5.35) $$\frac{\nu}{k}\frac{y}{k^2\sqrt{g}} - \frac{\alpha^2}{2\sqrt{3}}\int_{\infty}^{k}\frac{1}{(C+\alpha^4/k^4)^{2/3}}\frac{d}{dk}\left(\frac{1}{k^4}\right)dk =$$

$$= \frac{\nu}{k^2\sqrt{g}} - \frac{\sqrt{3}}{2\alpha^2}\left[\left(C+\frac{\alpha^4}{k^4}\right)^{1/3} - C^{1/3}\right]$$

e, de (5.29) e (5.30),

(5.36) $$\frac{\nu}{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{C^{1/3}}{\alpha^{2}} \quad .$$

Retornando ao espectro da turbulência estacionária, dado por (5.32), de (5.33),(5.34) e (5.36),

(5.37) $$k_s = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\chi}{\nu}\right)^{3/4} \quad .$$

Vê-se, claramente, que $k_s \to \infty$ quando $\nu \to 0$, e o espectro dado por (5.32) reduz-se ao espectro de equilíbrio postulado por Kolmogorov.

Nesse limite, temos, também, $C \to 0$, e podemos escrever, numa aproximação sufi-ciente,

(5.38) $$E_o = \frac{4}{3}\alpha^{4/3}k_o^{5/3} \approx E(k_o) \quad .$$

Usando (5.38) para eliminar α de (5.37), encontramos:

(5.39) $$k_s = k_o\left(\frac{3\chi}{4\nu}\sqrt{\frac{E(k_o)}{k_o}}\right)^{3/4} \quad .$$

Heisenberg define também o *número de Reynolds do movimento turbulento total* como:

(5.40) $$R_{e_o} \equiv \frac{\pi}{\nu}\sqrt{\frac{3E(k_o)}{k_o}} \quad .$$

5.3.2 - O Caso Não-Estacionário: o 'Decaimento' da Turbulência.

Num segundo artigo [19], Heisenberg discute outra importante característica dos sistemas turbulentos: o chamado 'decaimento', ou seja, a evolução no tempo do espectro de equilíbrio, após a retirada da fonte mantenedora da turbulência.

Heisenbeg argumenta que a taxa de decaimento pode ser derivada diretamente da equação (5.17):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^k E(k,t)dk\right\} = -2\left\{\nu + \chi\int_k^\infty \sqrt{\frac{E(k'',t)}{k''^3}}dk''\right\}\int_0^k k'^2 E(k',t)dk' \quad (5.41)$$

Se o espectro inicial, $E(k,0)$, é dado, então (5.41) determina o espectro para quaisquer instantes posteriores. Novamente, Heisenberg procura soluções com propriedades de similaridade, assumindo um grupo especial de soluções da forma:

$$E(k,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}s(k\sqrt{t}) \quad . \quad (5.42)$$

Um fato muito importante, reconhecido por Heisenberg, é que a similaridade expressa na equação acima não é destruida pela presença da viscosidade, e que o número de Reynolds do movimento turbulento permanece constante durante todo o decaimento[1].

Em vista de (5.42), a equação (5.41) se converte em

$$\int_0^x s(x)dx - \frac{1}{2}xs(x) = -2\left\{\nu + \chi\int_x^\infty \sqrt{\left(\frac{s(x'')}{x''^3}\right)}dx''\right\}\int_0^x s(x')x'^2dx' \quad . \quad (5.43)$$

[1] De acordo com Chandrasekhar, esse é o 'segundo estágio de decaimento', único que pode ser resolvido com base nessas considerações. A solução completa para o decaimento realmente parece difícil de ser conseguida.

A solução de (5.43) é buscada, primeiramente, para o caso em que o número de Reynolds é muito grande (quase ausência de amortecimento). $s(x)$ é, então, univocamente determinada, exceto por uma transformação de similaridade; pois, se $s = g(x)$ é uma solução de (5.43) para $\nu = 0$, então $s = \alpha^3 g(\alpha x)$ é também uma solução.

Heisenberg deduz, a partir de (5.43), as propriedades essenciais de $s(x)$:

$$\left.\begin{aligned} s(x) &\approx (const.)\cdot x \quad , \; x \to 0 \\ s(x) &\approx (const.)\cdot x^{-5/3} \; , \; x \to \infty \end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

Para $\chi = 0{,}8$, a solução aproximada de (5.43) é dada por:

$$s(x) = x\alpha^4 \left[1 + \left(\frac{x\alpha}{1{,}1} \right)^{4/3} \right]^{-2} \quad , \tag{5.45}$$

que é correta tanto para pequenos como para grandes valores de x, e ao mesmo tempo, uma aproximação razoavelmente boa para os valores intermediários; α é uma constante de integração arbitrária.

Se se caracteriza o estado inicial t_o por duas constantes, ν_o e k_o, obtem-se, de (5.42) e (5.45),

$$E(k,t) = \frac{\nu_o^2}{k_o^2} \frac{k}{\left[1 + \left(\frac{k}{1{,}1} \right)^{4/3} \left(\frac{t\nu_o}{k_o} \right)^{2/3} \right]^2} \quad . \tag{5.46}$$

Na situação oposta, isto é, para um valor muito pequeno do número de Reynolds do movimento turbulento total, novamente Heisenberg deriva uma solução aproximada da equação (5.43). Seus argumentos conduzem a:

$$E(k,t) = \beta^2 \nu^2 k \left[e^{-k^2 \nu t} + \frac{\chi\beta}{4} \frac{k^2 \nu t}{\left(1+\sqrt{2}k^2 \nu t\right)^3} \right]^2 . \tag{5.47}$$

em que $\beta \ll 1$ mede, essencialmente, o número de Reynolds do movimento.

5.3.3.- As Flutuações de Pressão na Turbulência.

Heisenberg também calcula as *oscilações de pressão* na turbulência isotrópica. Em essência, sua derivação é baseada nas hipóteses de independência estatística aproximada das amplitudes de Fourier não-correlacionadas, as quais ele usou para calcular os valores médios dos produtos de quatro dessas amplitudes. Contudo, pode ser provado que essas hipóteses não são estritamente necessárias. Os detalhes dessa derivação, feita em [18], não serão transcritos aqui. Apenas reproduziremos as passagens que consideramos fundamentais. Os argumentos de Heisenberg são particularmente diretos ([18], pág. 645, em tradução livre):

'Se se pode considerar as fases de diferentes números de onda como, estatisticamente, completamente independentes, então, para a seguinte média do produto de quatro fatores,

$$\overline{v_{k_1} v_{k_2} v_{k_3} v_{k_4}} \quad ,$$

somente restarão aqueles com dois números de onda que são iguais e de sinal contrário; portanto, temos do tipo:

$$\overline{v_{k_1} v_{-k_1} v_{k_2} v_{-k_2}} \quad ,$$

e esses valores-médios podem ser substituídos pelos produtos dos valores-médios dos quadrados das amplitudes:

$$\overline{v_{k_1} v_{-k_1} v_{k_2} v_{-k_2}} = \overline{v_{k_1} v_{-k_1}} \cdot \overline{v_{k_2} v_{-k_2}} \quad .$$

Na realidade, todavia, vão restar as correlações estatísticas entre as fases de números de onda diferentes, já que as ondas influenciam-se mutuamente."

Um ponto que merece ser citado é o que diz respeito ao alcance e limitação da teoria, com relação às flutuações de pressão: " (...) $\left\langle\left(\bar{\nabla}p\right)^2\right\rangle$ *tatsächlich durch das Verhalten des Spektrums bei großen* k, *d. h. durch die kleinsten Turbulenzelemente bestimmt ist. (...) Der Wert von* $\overline{p^2}$ *kann daher überhaupt nicht nach dem hier angewandten Verfahren berechnet werden; denn erstens hat das Spektrum bei kleinen* k *eine von der Geometrie abhängige Form, und zweitens wäre es bei den großten Turbulenzelementen sicher ganz unberechtigt, nur die Mittelwerte vom Typus (63) zu berücksichtigen, da die Geometrie dem System der größten Wirbel sicher bestimmte Phasenbeziehungen aufprägt.*" [1] ([18], pág. 646).

A teoria finalmente prevê (v_o é a medida da raiz-quadrática-média da velocidade num sistema isotropicamente turbulento)

$$\left\langle\left(\bar{\nabla}p\right)^2\right\rangle \approx 0{,}17\,\rho^2 v_o^4 k_o^{4/3} k_s^{2/3} \tag{5.41}$$

para o (aproximado) *valor-médio-quadrático dos gradientes de pressão* e

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{\rho^2 v_o^4}{\left\langle(\bar{\nabla}p)^2\right\rangle}} \tag{5.42}$$

para a *extensão espacial média* desses gradientes.

---

[1] '(...) $\left\langle\left(\bar{\nabla}p\right)^2\right\rangle$ é efetivamente determinado pelo comportamento do espectro para k grande, isto é, pelos *menores* elementos de turbulência. (...) O valor de $\overline{p^2}$ não pode ser calculado pelo método aqui utilizado, pois, em primeiro lugar, o espectro tem uma forma, para pequeno k, dependente da geometria, e, em segundo lugar, era totalmente indeterminado nos grandes elementos de turbulência. Somente os valores-médios do tipo (63) são considerados, já que a geometria do sistema imprime relações de fase muito precisas aos grandes elementos' (tradução livre).

5.4. Críticas à Teoria de Heisenberg.

Logo após sua publicação, em 1948, a Teoria de Heisenberg passou por um grande número de verificações experimentais, dentre as quais as mais importantes foram feitas por Proudman [28], que, entretanto, não trabalhou com números de Reynolds muito grandes. Do ponto de vista teórico, várias foram as proposições de modificação das hipóteses de Heisenberg. Entre as que merecem destaque estão as de Stewart e Towsend (1951) e Ogura e Miyakoda (1953). Entretanto, a formulação original parece fornecer os melhores resultados.

O crítico mais mordaz dos trabalhos de Heisenberg em turbulência foi, sem dúvida, o matemático britânico G. K. Batchelor (cf. por exemplo, [5], [6], [7]). Suas objeções fundamentais dizem respeito à maneira pela qual Heisenberg expressa matematicamente o conceito de ' viscosidade turbulenta'. De acordo com Batchelor, as acepções de Heisenberg são válidas somente se os menores elementos da turbulência são estatisticamente independentes dos maiores, dos quais eles retiram energia. Mas, em (5.17), a principal contribuição das duas integrais do lado direito virá dos elementos com números de onda na vizinhança do limite inferior da primeira integral e do limite superior da segunda. Assim, a trasnferência de energia, no sentido de Heisenberg, será causada, principalmente, pela interação de elementos com números de onda muito próximos entre si, o que não caracteriza a independência estatística plena. Esta objeção torna-se mais séria no 'range' de dissipação. Experimentos recentes sugerem que o amorte-cimento (provavelmente exponencial) é realmente muito mais rápido do que o previsto por Heisenberg $(E(k) \approx k^{-7})$[1].

Atualmente, acredita-se que o expoente -5/3 da lei de Kolmogorov seja , na realidade, igual a -1.85 ([9]; vide também a seção 6.5). Essa diferença, contudo, passa desapercebida pela ampla

[1] Simulações numéricas de alta resolução feitas recentemente [11] (1993) , preceituam, para o espectro de equilíbrio, a seguinte expressão:

$$E(k) = 1{,}5\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}(1+1{,}6k\eta)^5 e^{(-7{,}1k\eta)} \quad ,$$

sugerindo um amortecimento exponencial para o 'range' de dissipação. J. von Neumann, em 1949, já reconhecia a necessidade de tal forma para o espectro nesse 'range'.

maioria dos experimentos físicos, de sorte que a teoria, tal como formulada por Heisenberg, pode ser usada extensivamente, sem um erro dramático para grande parte dos propósitos práticos.

6

Estimativas Numéricas do Campo de Fluxo Aerodinâmico em Torno de Obstáculos

Neste Capítulo, serão apresentadas algumas aplicações numéricas da Teoria do fluido viscoso incompressível a fluxos aerodinâmicos em torno de obstáculos, a altos R_e. O bem conhecido *Método dos Painéis* será utilizado para a obtenção das curvas de distribuição de pressão e para estimar as intensidades das componentes das forças aerodinâmicas de maior interesse prático, na aproximação de *fluxo potencial*. A seguir, desenvolvemos e utilizamos um método "híbrido", que acopla o *Método dos Painéis*, o *Método dos Vórtices (Chorin, Leonard)* e a *Teoria da Turbulência de Heisenberg*, para estimar grandezas de muito interesse prático.

6.1. Introdução.

Como é sabido, o problema computacional do fluxo aerodinâmico incompressível em torno de obstáculos, a altos R_e , é fantasticamente difícil de ser resolvido com elevada precisão, e as análises convencionais por diferenças-finitas ou elementos-finitos requerem grande esforço computacional. Neste contexto, métodos alternativos baseados em vórtices emergem como

ferramentas úteis, e, por isso, mereceram muita atenção por parte da comunidade da Fluidodinâmica, sobretudo nos últimos vinte anos[1].

Os problemas a sererm tratados aqui são os típicos da Aerodinâmica: *dado um fluxo inicial incidindo sobre um obstáculo, determinar a distribuição de pressão em torno do mesmo*. Algumas vezes, o campo de velocidades é também requerido. A análise será dividida em duas partes. Primeiramente, os cálculos serão feitos assumindo-se o fluxo como potencial, ou seja, $R_e = 0$, e, portanto, não são esperados quaisquer efeitos viscosos. A seguir, essa simplificação será abolida, e uma abordagem predominantemente fenomenológica buscará quan-tificar os efeitos da viscosidade sobre o campo de fluxo.

6.2. Generalidades.

6.2.1.- A Geometria do Obstáculo.

O obstáculo é a superfície suave de corpos com formas típicas de veículos terrestres, a uma certa distância do plano do pavimento. As dimensões típicas são: comprimento 4m, largura 1m e 50cm e altura, 1m. A distância ao pavimento é de 20 ou 25cm. Há um plano de simetria longitudinal.

6.2.2.- Condições de Realização dos 'Experimentos Numéricos'.

Todos os 'experimentos' foram realizados sob as seguintes condições[2]:

- Velocidade do fluxo de ataque (velocidade de referência) : $2{,}22 \times 10^3$ cm/s.
- Pressão atmosférica (de referência) : $1{,}1 \times 10^6\ dyn/cm^2$.
- Densidade do ar (a 23°C) : $1{,}2 \times 10^{-3}\ g/cm^3$.
- Viscosidade cinemática do ar (a 23°C): $0{,}15\ \ cm^2/s$.

[1] A bibliografia sobre esse assunto é muito extensa. Limitar-nos-emos a indicar as obras que nos parecem mais importantes.
[2] São totalmente desconsiderados, sobre estas quantidades, efeitos tais como latitude, umidade do ar, etc..

- Fluxo incidente axialmente simétrico (paralelo ao plano do pavimento e ao plano de simetria do obstáculo).

- Ausência de 'ventos laterais'.

- Número de Reynolds de referência (R_e):

  - $R_e = \infty$ (Fluxo Potencial);
  - $R_e = (2.220{,}0 \times 100{,}0) / (0{,}15) \approx 1{,}5 \times 10^6$ (Navier-Stokes).

- O campo de velocidades, na situação turbulenta, *é assumido homogêneo e isotrópico.*

6.3. Sistemas de Fluxos Totalmente Irrotacionais.

6.3.1. Colocação do Problema.

Como vimos, nessa situação simplificada, o fluxo, admitido estável, é regido pela equação de Laplace para o potencial velocidade, Φ. O problema, então, torna-se determinar esse po-tencial, dadas as condições de contorno, as quais expressam, obviamente, as exigências físicas da situação. No caso em que a camada-limite é laminar, a condição de contorno aplicada em sua fronteira é a *condição física de tangência do fluxo*: as partículas do fluido não podem penetrar na região da camada-limite. Isso significa que a componente da velocidade, normal à superfície da camada-limite, deve se anular. Matematicamente,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad . \tag{6.1}$$

Em aplicações numéricas de fluxos em torno de corpos, é costume, devido à simplificação que introduz, desmembrar o potencial Φ em duas partes,

$$\Phi = \Phi_\infty + \Phi_p \quad , \tag{6.2}$$

em que Φ_p é o *potencial de perturbação,* que descreve a perturbação causada no fluxo devido à presença do corpo, e Φ_∞ é o *potencial do fluxo não-perturbado.* A condição de contorno imposta a

Φ é que, no infinito, Φ_p tenda a zero, que expressa o fato de que, a grandes distâncias do corpo, o fluxo se acha novamente não-perturbado. Conhecidos a superfície do obstáculo e o fluxo incidente, a tarefa se resume na determinação de Φ_p. A técnica utilizada aqui para esse propósito é a do bem conhecido *Método dos Painéis.*

6.3.2.- O Método dos 'Painéis' em Aerodinâmica.

A essência do chamado *Método dos Painéis* é representar o potencial de perturbação da seguinte maneira, que resulta dos teoremas de Green para a equação de Laplace (vide Apêndice D):

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_{corpo+arrasto} \sigma(Q) \frac{1}{r(P,Q)} dS - \tag{6.3}$$

$$- \iint_{arrasto} \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r(P,Q)}\right] dS$$

em que $\sigma(Q)$ é uma distribuição de singularidades-fonte, por unidade de área, e $\mu(Q)$ é uma distribuição de singularidades tipo dipolo-normal, por unidade de área; $r(P,Q)$ é a distância do ponto P, onde u está sendo avaliado, ao ponto de integração Q,, nas superfícies do corpo ou do arrasto[1].

A superfície definida como 'arrasto', na segunda integral do lado direito, é um prolongamento matemático[2], na direção das linhas de fluxo, da superfície do corpo (Fig. 6.1).

---

[1] Essa particular formulação é devida a J. Hess [22].

[2] Pode ser provado (Apêndice E) que essa distribuição de 'dipolos' é equivalente a uma *distribuição de vorticidade.*

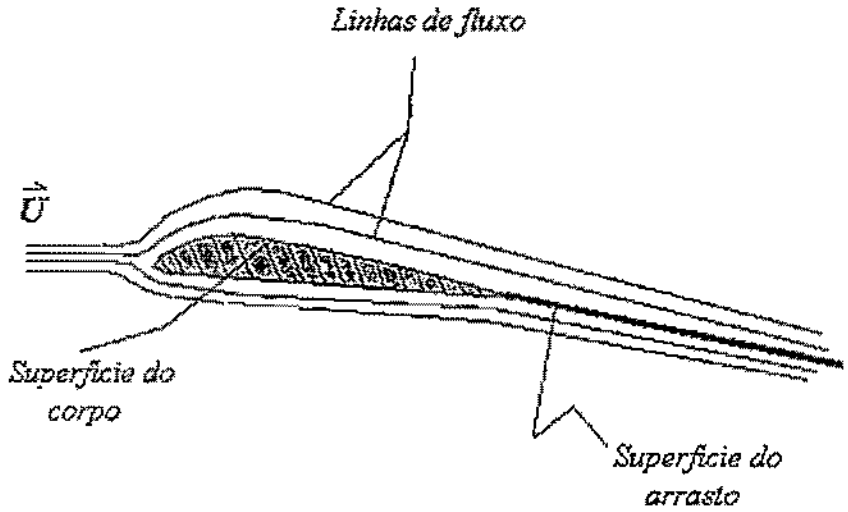


Fig. 6.1. *Definição das sup. de cálculo de acordo com o Método dos Painéis*

Na aplicação das condição de contorno de Neumann, resulta o seguinte problema: temos uma única equação e duas incógnitas, $\sigma(Q)$ e $\mu(Q)$. Portanto, alguma condição adicional é requerida[1]. Claramente, não há uma maneira única de resolver essa questão, visto que a fixação de tal condição pode ser mais ou menos arbitrária. Em nossa particular implementação, vamos optar por uma condição que mais se aproxime da realidade física e que, posteriormente, desempenhará importante papel na obtenção de uma solução para o caso viscoso. A condição que, em princípio, deve eliminar a indeterminação é a seguinte: *o potencial na região interior à superfície S (do corpo + do arrasto) é feito igual a zero, o que é equivalente a um campo de velocidades, nessa região, identicamente nulo*. Assim, as equações que resolvem o problema são:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial \Phi_f}{\partial n}\right|_{P_c} + \left.\dfrac{\partial \Phi_d}{\partial n}\right|_{P_c} = -\left.\dfrac{\partial \Phi_\infty}{\partial n}\right|_{P_c} \\ \left.\Phi_f\right|_{P_i} + \left.\Phi_d\right|_{P_i} + \left.\Phi_d\right|_{P_i} = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

[1] Isso é conhecido como problema da "singularidade mista" [22]

Os símbolos denotam:

- $\Phi_f \equiv \iint \frac{\sigma(Q)}{r(P,Q)} dS$
- $\Phi_d \equiv \iint \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r(P,Q)}\right] dS$
- $P_e \rightarrow$ ponto 'exterior' a S (Fig. 6.2);
- $P_i \rightarrow$ ponto 'interior' a S (Fig. 6.2);

Essas equações devem ser resolvidas no limite em que $P_e, P_i \rightarrow Q$. . Neste limite, aplicamos diretamente os teoremas relativos aos potenciais 'single' e 'double' e suas respectivas derivadas (Apêndice *D*). O resultado são equações integrais de Fredholm do 2.° tipo, nas incógnitas $\sigma(Q)$ e $\mu(Q)$. Para a primeira das equações do sistema (6.4) ($\wp[X]$ denota o *valor principal* [1] de X),

$$\frac{1}{2}\sigma(Q) + \frac{\partial}{\partial n}\left[\iint \sigma(Q)\frac{1}{r(P,Q)}\right] dS = -\left.\frac{\partial \Phi_\infty}{\partial n}\right|_Q + \wp\left[\left.\frac{\partial \Phi_F}{\partial n}\right|_Q\right] \tag{6.5}$$

que, resolvida, nos permite obter $\sigma(Q)$ e, por conseqüência, Φ_f em todo o espaço.

Conhecido Φ_f , substituímos diretamente na segunda das equações de (6.4) e passamos ao mesmo limite anterior (agora de $P_i \rightarrow Q$). A equação obtida é :

$$\frac{1}{2}\mu(Q) + \iint \mu(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r(P,Q)}\right] dS = -\Phi_\infty(Q) - \wp[\Phi_F(Q)] \tag{6.6}$$

[1] O que é entendido aqui por 'valor principal' é o valor da função excetuando-se as suas singularidades.

que nos fornece $\mu(Q)$. Conhecidos $\sigma(Q)$ e $\mu(Q)$, o campo de velocidades é dado pelo gradiente da equação (6.2). As pressões, tanto sobre como fora da superfície do corpo, são calculadas a partir da equação de Bernoulli, (1.9).

Antes de procedermos à implementação numérica, são convenientes as seguintes observações:

- *Efeito do pavimento na aerodinâmica do automóvel.* A fim de considerar o efeito do pavimento — uma 'interferência' aerodinâmica — pode ser usado o 'princípio da reflexão'. Este procedimento, muito utilizado em problemas de Eletrostática, permite transformar uma região semi-infinita em infinita, no problema de resolver a equação de Laplace: cada termo do potencial de perturbação deve ser considerado como a soma da contribuição de um ponto e sua respectiva 'imagem', sob o plano do pavimento.

- *Forças Aerodinâmicas.* O cálculo da força aerodinâmica total sobre um corpo pode ser feito integrando-se a pressão sobre a superfície do corpo. Para um fluxo potencial, este cálculo dá :

$$\vec{F} = -\iint_{corpo} P\vec{n}dS \quad , \tag{6.7}$$

em que P é a pressão e $\vec{F}$, a força aerodinâmica sobre o corpo. As mais importantes componentes dessa força, para propósitos práticos, são a *sustentação* (componente perpendicular ao movimento) e a *resistência* (componente na direção do movimento)[1].

[1] Nessa aproximação (fluxo potencial) somente o fluxo de ataque pode ser simulado. Há também sustentação e resistência associados à formação de vórtices. Isso será considerado posteriormente.

6.3.3.- Implementação Numérica..

Discretização Básica.

Para se obter uma solução numérica das equações integrais, são necessárias duas discretizações separadas: a das geometrias do corpo e do arrasto, e a da distribuição de singularidade. Em aplicações aerodinâmicas, a escolha universal para a primeira dessas é representar as superfícies do corpo e do arrasto por um grande número de pequenas regiões quadriláteras planas[1] . Essas regiões são chamadas de 'painéis', donde o nome do método. A Fig. 6.2 mostra um exemplo de discretização típica.

Fig. 6.2. *Discretização do Método dos Painéis (ref [3])*

A mais simples aproximação para a distribuição de singularidades é que elas são constantes sobre cada painel. Uma questão relevante é que, nos casos práticos, as dimensões dos painéis não podem ser arbitrariamente pequenas, ou, em outras palavras, não podem ser muito pequenas comparadas com todas as dimensões físicas do corpo. Entretanto, isto não implica falta de convergência numérica. Mesmo para casos complexos, a convergência pode ser demonstrada. A diminuição ou aumento no número de painéis é ditada apenas por exigência de maior precisão.

[1] Quando os quadriláteros são planos os métodos são conhecidos como de *primeira-ordem*. Em versões mais sofisticadas, pode-se também considerar a curvatura dos mesmos.

Método Numérico.

Assumamos que a condição de Neumann sobre a superfície do corpo seja satisfeita, majoritariamente, pela distribuição de fontes-simples. A primeira equação a ser resolvida, então, é:

$$\vec{n}(Q)\cdot\vec{\nabla}\left[\frac{1}{4\pi}\iint_{corpo}\frac{\sigma(Q)}{r(P,Q)}dS\right]+\vec{n}(Q)\cdot\vec{\nabla}\Phi_{\infty}=0 \quad . \tag{6.8}$$

Se m painéis são usados para representar a superfície do corpo, a condição acima é escrita:

$$\vec{n}(Q)\cdot\vec{\nabla}\left[\frac{1}{4\pi}\sum_{j=1}^{m}\sigma_j(Q)\iint_{painel_j}\frac{1}{r(P,Q)}dS_j\right]=-\vec{n}(Q)\cdot\vec{\nabla}\Phi_{\infty}(Q) \quad . \tag{6.9}$$

Definindo,

$$X_j=\frac{\sigma_j}{4\pi}\frac{1}{\left|\vec{\nabla}\Phi_{\infty}\right|} \quad ;$$

$$A_{qj}=\vec{n}(Q)\cdot\vec{\nabla}\left[\iint_{painel_j}\frac{1}{r(P,Q)}dS_j\right] \quad ;$$

$$R_q=-\vec{n}(Q)\cdot\vec{\nabla}\Phi_{\infty}\frac{1}{\left|\vec{\nabla}\Phi_{\infty}\right|} \quad ,$$

temos,

$$\sum_{j=1}^{m}A_{qj}X_j=R_q \qquad , \text{q: } 1,2,3,\ldots,m \quad , \tag{6.10}$$

que é um sistema de equações lineares que expressa condição de tangência do fluxo sobre a superfície do corpo. Esse sistema pode ser resolvido por métodos matemáticos muito conhecidos

(p. ex., Gauss-Seidel, Gauss-Jordan, Inversão-Direta), tal que podemos determinar X_j e, conseqüentemente, $\sigma_j(Q)$.

Como vimos, logo que σ_j é conhecido, o problema torna-se determinar μ_j tal que, em todo ponto *interno* à superfície S, o potencial total seja igual a zero. A equação então a ser resolvida é:

$$\Phi_\infty(P) + \frac{1}{4\pi}\iint_{corpo}\left[\frac{\sigma(Q)}{r(P,Q)} + \mu(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r(P,Q)}\right)\right]dS + \tag{6.11}$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iint_{arrasto}\mu(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r(P,Q)}\right]dS = 0$$

ou,

$$\frac{1}{4\pi}\iint_{corpo+arrasto}\mu(Q)\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r(P,Q)}\right]dS = -\Phi_\infty(P) - \tag{6.12}$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{corpo}\frac{\sigma(Q)}{r(P,Q)}dS$$

Numericamente, esta equação é resolvida pelo mesmo processo anteriormente descrito. As únicas diferenças, neste caso, são: deve ser especificado o potencial, não seu gradiente; a incógnita é $\mu(Q)$ e sistema terá (m+n) equações (se n painéis são usados para representar a geometria do arrasto).

Os resultados da computação são mostrados na secção seguinte.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
2715
INSTITUTO DE FÍSICA

6.3.4.- Resultados da Computação.

- Distribuição de pressão ao longo da secção média longitudinal.

Foram calculadas distribuições de pressão ao longo da secção média longitudinal de algumas superfícies. Os resultados são expressos graficamente pelo coeficiente de pressão, C_p, definido como:

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{(1/2)\,\rho U_\infty^2} \quad , \tag{6.13}$$

em que P_∞ é a pressão de referência e U_∞ , a velocidade externa. O fluxo local é tacitamente assumido como *quase bi-dimensional* (bi-dimensional com uma pequena perturbação tri-dimensional). Assim, é plausível se tomar, como contribuintes para as integrais anteriores, somente os painéis interceptados pelo plano de simetria do obstáculo, o que resulta numa enorme simplificação computacional. Somente foi analisado o caso de um fluxo axialmente simétrico, na ausência de ventos laterais.

Para resolver os sistemas lineares foi usado o método iterativo de Gauss-Seidel. A convergência foi atingida rapidamente, pois as matrizes são extremamente bem condicionadas. Os resultados da computação, para os vários obstáculos usados como exemplo, estão resumidos nas tabelas

- Forças Aerodinâmicas.

Para uma geometria específica foram calculadas a sustentação e a resistência, por unidade de comprimento. Por definição, a força que age sobre cada painel é produto da pressão (tomada como constante sobre o painel) e da área do painel. A soma, sobre todos os painéis da superfície do corpo, é a força total que atua sobre o corpo. Simbolicamente (S_i é a área do painel i),

(6.14) $$\left|\vec{F}\right| = \sum_i P_i S_i \quad .$$

Para a geometria da Tabela V, os resultados são apresentados na Tab. I (os erros são apenas estimativas grosseiras[1]):

Tabela I - ***Forças aerodinâmicas (fluxo potencial)***	
• Sustentação (dyn/cm)	$(5{,}2 \pm 0{,}5) \times 10^4$
• Resistência (dyn/cm)	$(5{,}0 \pm 0{,}5) \times 10^3$

As tabelas II a V, das páginas seguintes, resumem os resultados dos cálculos na aproximação potencial para cada geometria estudada. Elas mostram, propositadamente, os valores já arredondados e com *dimensão*. Na secção 6.4, os resultados da tabela V servirão de valores iniciais para o estudo do efeito da viscosidade finita sobre o fluxo.

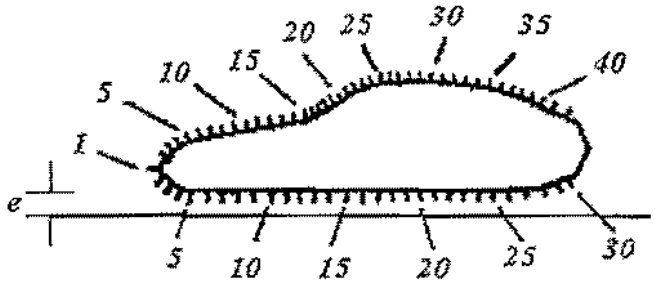
[1] Um tratamento exato dos erros não foi possível devido à inexistência de solução analítica para o problema. Entretanto, uma comparação sistemática a resultados experimentais da Literatura permite estimar o erro em 'X' como:

$$\delta_X = \left|\frac{X_{calculado} - X_{medido}}{X_{medido}}\right| .$$

Isto dá um δ_V em torno de 10 a 15% para as velocidades calculadas.

- Tabelas de Resultados.

Tabela II - Resultados da Computação para a Geometria da Figura



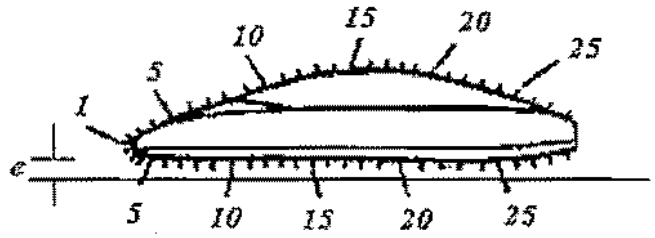
-No. de painéis utilizados: 74;
- e = 20 cm.

Superfície Superior					
Q	*σ(Q)* *(cm/s)*	*μ(Q)* *(cm2/s)*	*Vel.(Q)* *(cm/s)*	*Pressão(Q)* *(dyn/cm2)*	*Cp(Q)*
1	*-3084,30*	*-22583,94*	*2086,49*	*1100344,98*	*0,12*
2	*-2546,70*	*-34503,82*	*2382,09*	*1099552,43*	*-0,15*
3	*-1805,93*	*-37395,70*	*2591,65*	*1098927,06*	*-0,36*
4	*-1223,85*	*-44559,19*	*2696,69*	*1098593,75*	*-0,48*
5	*-1149,17*	*-43736,39*	*2566,79*	*1099003,98*	*-0,34*
6	*-1074,15*	*-39718,80*	*2530,08*	*1099116,25*	*-0,30*
7	*- 847,21*	*-48728,63*	*2530,59*	*1099114,72*	*-0,30*
8	*- 847,21*	*-44447,35*	*2507,98*	*1099183,07*	*-0,28*
9	*- 847,21*	*-44447,35*	*2489,04*	*1099239,85*	*-0,26*
10	*- 847,21*	*-39467,18*	*2468,50*	*1099300,95*	*-0,24*
11	*- 694,59*	*-44072,06*	*2459,72*	*1099326,91*	*-0,23*
12	*- 694,59*	*-43908,12*	*2425,87*	*1099426,15*	*-0,19*
13	*- 541,12*	*-48525,98*	*2382,97*	*1099549,91*	*-0,15*
14	*- 617,95*	*-36256,84*	*2257,04*	*1099900,49*	*-0,03*
15	*-1223,85*	*-42034,89*	*1927,16*	*1100728,67*	*0,25*
16	*-2546,70*	*-41468,43*	*1762,90*	*1101092,34*	*0,37*

Q	σ(Q) (cm/s)	μ(Q) (cm2/s)	Vel.(Q) (cm/s)	Pressão(Q) (dyn/cm2)	Cp(Q)
17	-2418,22	-40277,81	2064,43	1100399,91	0,14
18	-2418,22	-35129,18	2204,85	1100040,23	0,01
19	-2418,22	-45453,37	2265,53	1099877,47	-0,04
20	-2418,22	-60042,62	2334,10	1099688,22	-0,11
21	-2418,22	-18618,43	2491,54	1099232,36	-0,26
22	-2352,86	-27411,96	2606,99	1098879,21	-0,38
23	-2352,87	-33940,15	2784,56	1098304,79	-0,57
24	- 77,51	-35583,88	3172,95	1096916,47	-1,04
25	- 77,51	-57711,21	3528,44	1095487,13	-1,53
26	- 77,51	-31075,26	2938,76	1097775,27	-0,75
27	- 77,51	-57711,21	2847,82	1098090,98	-0,65
28	154,94	-44428,39	2760,29	1098385,53	-0,55
29	77,47	-40199,79	2724,76	1098502,44	-0,51
30	309,70	-44512,76	2697,20	1098592,12	-0,48
31	464,09	-45515,78	2672,22	1098672,59	-0,45
32	617,91	-44187,22	2649,02	1098746,66	-0,42
33	770,98	-48886,58	2626,28	1098818,65	-0,40
34	770,98	-40312,91	2616,98	1098847,90	-0,39
35	847,18	-55815,10	2603,67	1098889,57	-0,38
36	1074,12	-68117,30	2572,98	1098984,90	-0,34
37	1223,82	-42034,98	2548,12	1099061,30	-0,32
38	1518,56	-38466,15	2496,25	1099218,28	-0,26
39	1591,14	-46343,64	2479,28	1099268,94	-0,25
40	1734,84	-42078,72	2446,81	1099364,91	-0,21
41	0,00	-43339,93	2412,53	1099464,87	-0,18
42	0,00	-43686,04	2425,92	1099425,97	-0,19

Superfície Inferior					
Q	σ(Q) (cm/s)	μ(Q) (cm2/s)	Vel.(Q) (cm/s)	Pressão(Q) (dyn/cm2)	Cp(Q)
1	-2970,96	-37330,11	2161,05	1100154,96	0,05
2	-2220,02	-56772,84	2554,52	1099041,71	-0,32
3	- 847,21	-57326,08	2811,16	1098215,48	-0,60
4	38,73	-57717,80	3031,62	1097442,60	-0,86
5	38,73	-53277,97	2774,37	1098338,75	-0,56
6	38,73	-66597,47	2692,58	1098607,05	-0,47
7	38,73	-62157,64	2642,92	1098766,01	-0,42
8	38,73	-62157,64	2617,21	1098847,15	-0,39
9	38,73	-75477,13	2600,95	1098898,07	-0,37
10	38,73	-66597,47	2588,21	1098937,76	-0,36
11	38,73	-62157,64	2580,86	1098960,53	-0,35
12	38,73	-39958,48	2576,24	1098974,83	-0,35
13	38,73	-88796,62	2574,15	1098981,29	-0,34
14	38,73	-62157,64	2571,51	1098989,43	-0,34
15	38,73	-62157,64	2571,13	1098990,62	-0,34
16	38,73	-62157,64	2571,90	1098988,23	-0,34
17	38,73	-53277,97	2573,91	1098982,05	-0,34
18	38,73	-75477,13	2576,74	1098973,28	-0,35
19	38,73	-71727,67	2582,98	1098953,97	-0,35
20	38,73	-67625,49	2591,18	1098928,50	-0,36
21	38,73	-75477,13	2603,21	1098891,02	-0,38
22	38,73	-62157,64	2626,02	1098819,44	-0,40
23	38,73	-66597,47	2658,51	1098716,43	-0,43
24	38,73	-71037,30	2727,09	1098494,84	-0,51
25	38,73	-67186,84	2893,58	1097933,37	-0,70
26	1372,02	-46641,19	2760,19	1098385,86	-0,55
27	1445,51	-63943,66	2944,38	1097755,41	-0,76
28	1518,56	-51607,75	2600,93	1098898,15	-0,37
29	1591,14	-61621,36	2508,39	1099181,82	-0,28
30	1663,24	-62703,72	2447,93	1099361,61	-0,22
31	0,00	-53517,11	2421,43	1099439,05	-0,19
32	0,00	-74339,81	2519,73	1099147,62	-0,29
33	0,00	-57326,16	2514,05	1099164,76	-0,28
34	0,00	-57830,77	2525,63	1099129,75	-0,29

Tabela III - Resultados da Computação para a Geometria da Figura



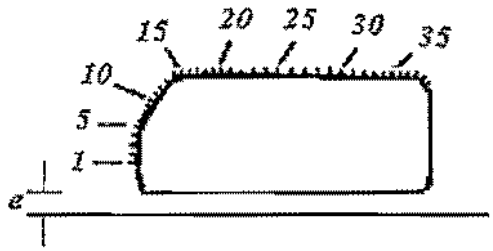
- No. de painéis utilizados: 57
- e = 20 cm.

Superfície Superior

Q	σ(Q) (cm/s)	μ(Q) (cm2/s)	Vel.(Q) (cm/s)	Pressão(Q) (dyn/cm2)	Cp(Q)
1	-3139,57	-22639,52	1992,35	1100575,38	0,19
2	-3084,30	-30299,54	2100,99	1100308,55	0,10
3	-2220,02	-43841,36	2426,63	1099423,91	-0,19
4	-2084,47	-83069,19	2357,78	1099621,57	-0,13
5	-1805,93	-72217,40	2227,94	1099978,81	-0,01
6	-1445,54	-98274,91	2214,38	1100014,94	0,01
7	- 923,15	-120120,66	2086,17	1100345,78	0,12
8	-1734,87	-116319,01	2084,78	1100349,25	0,12
9	-1518,59	-106942,61	2167,76	1100137,54	0,04
10	-1372,05	-104463,45	2284,99	1099824,35	-0,06
11	- 998,80	-107024,25	2368,75	1099590,46	-0,14
12	- 617,95	-133070,94	2420,80	1099440,88	-0,19
13	- 154,97	-106495,07	2453,05	1099346,57	-0,22
14	77,47	-115507,77	2460,23	1099325,40	-0,23
15	232,36	-97646,87	2462,49	1099318,73	-0,23
16	998,77	-113804,72	2411,82	1099466,90	-0,18
17	1074,12	-119156,61	2405,75	1099484,45	-0,17
18	1111,67	-108831,33	2403,46	1099491,07	-0,17
19	1223,82	-113884,59	2390,08	1099529,56	-0,16
20	1372,02	-109790,07	2369,08	1099589,52	-0,14
21	0,00	-104952,67	2358,09	1099620,69	-0,13
22	0,00	-96323,63	2346,30	1099653,98	-0,12
23	0,00	-127153,99	2333,65	1099689,49	-0,11

Superfície Inferior					
Q	σ(Q) (cm/s)	μ(Q) (cm2/s)	Vel.(Q) (cm/s)	Pressão(Q) (dyn/cm2)	Cp(Q)
1	-2084,47	-26660,77	2394,96	1099515,55	-0,16
2	-1734,87	-30379,06	2500,71	1099204,91	-0,27
3	-1372,05	-40059,91	2619,91	1099840,29	-0,39
4	- 923,15	-35014,16	2679,54	1098649,07	-0,46
5	- 541,12	-53066,14	2754,84	1098403,57	-0,54
6	- 154,97	-62122,13	2671,48	1098674,94	-0,45
7	38,73	-62157,64	2645,97	1098756,34	-0,42
8	38,73	-79916,96	2634,98	1098791,17	-0,41
9	38,73	-88796,62	2627,96	1098813,32	-0,40
10	38,73	-88796,62	2623,95	1098825,99	-0,40
11	38,73	-88796,62	2621,78	1098832,79	-0,39
12	38,73	-88796,62	2620,66	1098836,31	-0,39
13	38,73	-88796,62	2620,23	1098837,68	-0,39
14	38,73	-88796,62	2620,62	1098837,38	-0,39
15	38,73	-88796,62	2620,89	1098835,60	-0,39
16	38,73	-88796,62	2621,93	1098832,34	-0,39
17	38,73	-88796,62	2623,51	1098827,36	-0,40
18	38,73	-88796,62	2625,78	1098820,21	-0,40
19	38,73	-88796,62	2628,99	1098810,06	-0,40
20	38,73	-88796,62	2633,66	1098795,35	-0,41
21	38,73	-88796,62	2640,71	1098773,02	-0,41
22	38,73	-97676,28	2652,33	1098736,12	-0,43
23	38,73	-97676,28	2677,89	1098654,38	-0,46
24	38,73	-93658,34	2748,77	1098423,59	-0,53
25	541,09	-92545,04	2728,51	1098490,18	-0,51
26	847,18	-88894,83	2641,57	1098770,32	-0,42
27	847,18	-84625,35	2546,70	1099065,63	-0,32
28	0,00	-91615,23	2483,65	1099255,92	-0,25
29	0,00	-79771,30	2393,30	1099520,31	-0,16
30	0,00	-79437,74	2189,34	1100081,12	-0,03
31	0,00	-97709,60	2390,69	1099527,79	-0,16
32	0,00	-93183,21	2439,87	1099385,27	-0,21
33	0,00	-93236,45	2517,35	1099154,80	-0,29

Tabela IV - Resultados da Computação para a Geometria da Figura

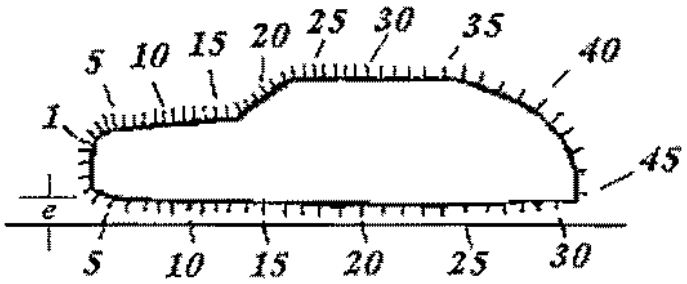


-No. de painéis utilizados: 45;
-e = 25 cm.

Superfície Superior					
Q	*σ(Q)* *(cm/s)*	*μ(Q)* *(cm2/s)*	*Vel.(Q)* *(cm/s)*	*Pressão(Q)* *(dyn/cm2)*	*Cp(Q)*
1	-4198,11	-14899,82	1127,81	1102193,86	0,74
2	-3845,17	-23546,41	1515,05	1101579,81	0,53
3	-3450,54	-31239,69	2026,95	1100491,92	0,17
4	-3498,78	-28993,32	1960,51	1100650,88	0,22
5	-3498,78	-28993,32	1990,23	1100580,43	0,20
6	-3498,78	-30561,65	2064,59	1100399,51	0,14
7	-3498,78	-34168,96	2209,82	1100027,07	0,01
8	-3498,78	-29975,35	2446,11	1099366,97	-0,21
9	38,73	-57073,85	3266,37	1096555,54	-1,16
10	38,73	-55497,89	3758,72	1094480,28	-1,87
11	38,73	-55497,89	3155,51	1096982,69	-1,02
12	38,73	-55497,89	2947,45	1097744,56	-0,76
13	38,73	-55497,89	2842,61	1098108,77	-0,64
14	38,73	-55497,89	2779,52	1098321,60	-0,57
15	38,73	-55497,89	2737,40	1098461,03	-0,52
16	38,73	-55497,89	2707,28	1098559,41	-0,49
17	38,73	-55497,89	2684,69	1098632,51	-0,46
18	38,73	-55497,89	2667,11	1098688,96	-0,44
19	38,73	-55497,89	2653,04	1098733,87	-0,43
20	38,73	-55497,89	2641,53	1098770,44	-0,42
21	38,73	-55497,89	2631,93	1098800,80	-0,41

Q	σ(Q) (cm/s)	μ(Q) (cm2/s)	Vel.(Q) (cm/s)	Pressão(Q) (dyn/cm2)	Cp(Q)
22	38,73	-55497,89	2623,81	1098826,41	-0,40
23	38,73	-55497,89	2616,85	1098848,29	-0,39
24	38,73	-55497,89	2610,82	1098867,22	-0,38
25	38,73	-55497,89	2605,54	1098883,74	-0,38
26	38,73	-55497,89	2600,88	1098898,29	-0,37
27	38,73	-55497,89	2596,74	1098911,20	-0,37
28	38,73	-55497,89	2593,04	1098922,74	-0,36
29	38,73	-55497,89	2589,70	1098933,11	-0,36
30	38,73	-55675,20	2586,69	1098942,48	-0,36
31	38,73	-55675,20	2583,94	1098950,98	-0,35
32	154,94	-55643,41	2580,17	1098962,66	-0,35
33	464,09	-55372,33	2567,07	1099003,13	-0,34
34	770,98	-54831,48	2543,39	1099075,74	-0,31
35	1074,12	-54536,40	2509,22	1099179,31	-0,28
36	0,00	-54977,71	2524,85	1099132,13	-0,29
37	0,00	-56758,99	2537,95	1099092,32	-0,31
38	0,00	-54959,90	2548,51	1099060,11	-0,32
39	0,00	-55195,99	2556,49	1099035,64	-0,33
40	0,00	-55364,82	2561,89	1099019,08	-0,33
41	0,00	-55466,20	2564,66	1099010,54	-0,33
42	0,00	-55497,89	2564,73	1099010,33	-0,33
43	0,00	-55497,89	2563,60	1099013,80	-0,33

Tabela V - Resultados da Computação para a Geometria da Figura



número de painéis = 57;
e = 20 cm.

Superfície Superior					
Q	*σ (Q)* *(cm/s)*	*μ (Q)* *(cm2/s)*	*Vel (Q)* *(cm/s)*	*Pressão(Q)* *(dyn/cm2)*	*Cp(Q)*
1	-3498,78	-21349,45	2024,51	1100497,86	0,17
2	-3084,30	-27100,73	2024,51	1099401,22	-0,20
3	-771,02	-40312,86	3023,76	1097471,17	-0,86
4	-617,95	-49157,58	3210,73	1096771,78	-1,09
5	-541,12	-44288,82	2773,30	1098342,32	-0,56
6	-464,12	-45031,23	2641,22	1098771,41	-0,42
7	-386,99	-44451,63	2565,98	1099006,48	-0,34
8	-309,74	-44512,74	2513,90	1099165,24	-0,28
9	-232,39	-44560,29	2468,14	1099301,99	-0,24
10	-232,39	-44560,29	2418,43	1099447,77	-0,19
11	-232,39	-44339,14	2357,97	1099621,03	-0,13
12	-154,97	-44594,56	2274,23	1099853,76	-0,05
13	-77,51	-44614,65	2120,92	1100258,06	0,09
14	-77,51	-55624,56	1780,92	1101054,04	0,36
15	-2672,08	-38355,07	1285,19	1101966,01	0,66
16	-2672,08	-35459,28	1721,41	1101179,08	0,40
17	-2672,08	-27694,58	1967,73	1100633,86	0,21
18	-2672,08	-33452,22	2060,98	1100408,46	0,14
19	-2609,79	-33116,81	2180,89	1100103,27	0,03
20	-2609,79	-42043,54	2296,80	1099791,87	-0,07
21	-2546,70	-37090,49	2560,12	1099024,52	-0,33

Q	σ(Q) (cm/s)	μ(Q) (cm2/s)	Vel.(Q) (cm/s)	Pressão(Q) (dyn/cm2)	Cp(Q)
22	- 309,74	-44512,74	3063,95	1097324,36	-0,90
23	- 232,39	-44339,14	3379,99	1096102,41	-1,32
24	- 154,97	-44372,95	2971,75	1097658,28	-0,79
25	- 77,51	-44614,65	2838,65	1098122,27	-0,64
26	- 77,51	-44393,23	2774,62	1098337,92	-0,56
27	- 77,51	-44393,23	2740,01	1098452,45	-0,52
28	38,73	-44619,75	2721,36	1098513,57	-0,50
29	77,47	-44393,24	2712,95	1098540,99	-0,49
30	154,94	-44372,96	2712,85	1098541,31	-0,49
31	232,36	-44560,30	2722,38	1098510,23	-0,50
32	271,04	-44317,19	2748,07	1098425,90	-0,53
33	348,34	-53299,88	2802,21	1098245,61	-0,59
34	386,96	-57670,24	2946,14	1097749,20	-0,76
35	1663,24	-55993,19	2714,38	1098536,34	-0,49
36	1663,24	-55231,34	2865,21	1098031,37	-0,66
37	1663,24	-49742,29	2718,92	1098521,54	-0,50
38	1663,24	-58942,19	2733,13	1098475,03	-0,51
39	1663,24	-61199,16	2867,49	1098023,53	-0,67
40	2970,93	-55995,54	2343,76	1099661,11	-0,12
41	3592,03	-42081,31	1948,16	1100679,84	0,23
42	4056,14	-26294,51	1374,16	1101824,05	0,62
43	4342,97	-15774,45	878,02	1102494,48	0,84
44	4435,56	- 3392,19	481,25	1102818,08	0,95

Superfície Inferior					
Q	σ(Q) (cm/s)	μ(Q) (cm2/s)	Vel.(Q) (cm/s)	Pressão(Q) (dyn/cm2)	Cp(Q)
1	-4024,02	-22904,38	1394,14	1101790,86	0,61
2	-3680,94	-16655,09	1777,56	1101061,20	0,36
3	-3247,23	-30280,55	2135,54	1100220,72	0,07
4	-2220,02	-34391,99	2544,09	1099073,62	-0,31
5	-1591,17	-50427,19	2852.73	1098074,21	-0,65
6	-923,15	-52115,66	2711,92	1098544,32	-0,49
7	-386,99	-53077,24	2688,05	1098621,68	-0,47
8	- 77,51	-62150,53	2666,05	1098692,34	-0,44
9	38,73	-53277,97	2647,04	1098752,95	-0,42
10	38,73	-71037,30	2636,96	1098784,90	-0,41
11	38,73	-57717,80	2628,41	1098811,93	-0,40
12	38,73	-66597,47	2623,96	1098825,93	-0,40
13	38,73	-71037,30	2620,68	1098836,26	-0,39
14	38,73	-62157,64	2618,79	1098842,19	-0,39
15	38,73	-71037,30	2618,27	1098843,83	-0,39
16	38,73	-71037,30	2618,89	1098841,90	-0,39
17	38,73	-79916,96	2620,89	1098835,59	-0,39
18	38,73	-71037,30	2625,25	1098821,87	-0,40
19	38,73	-71037,30	2631,87	1098800,99	-0,41
20	38,73	-62157,64	2642,87	1098766,18	-0,42
21	38,73	-71037,30	2659,34	1098713,78	-0,44
22	38,73	-71037,30	2696,96	1098592,89	-0,48
23	38,73	-71175,91	2793,91	1098273,47	-0,58
24	770,98	-61215,69	2745,30	1098435,02	-0,53
25	770,98	-69960,78	2793,10	1098276,19	-0,58
26	770,98	-70097,29	2654,26	1098729,97	-0,43
27	770,98	-69960,78	2611,99	1098863,54	-0,38
28	847,18	-69870,91	2584,50	1098949,27	-0,36
29	847,18	-69870,91	2572,43	1098986,60	-0,34
30	847,18	-69870,91	2564,47	1099011,13	-0,33

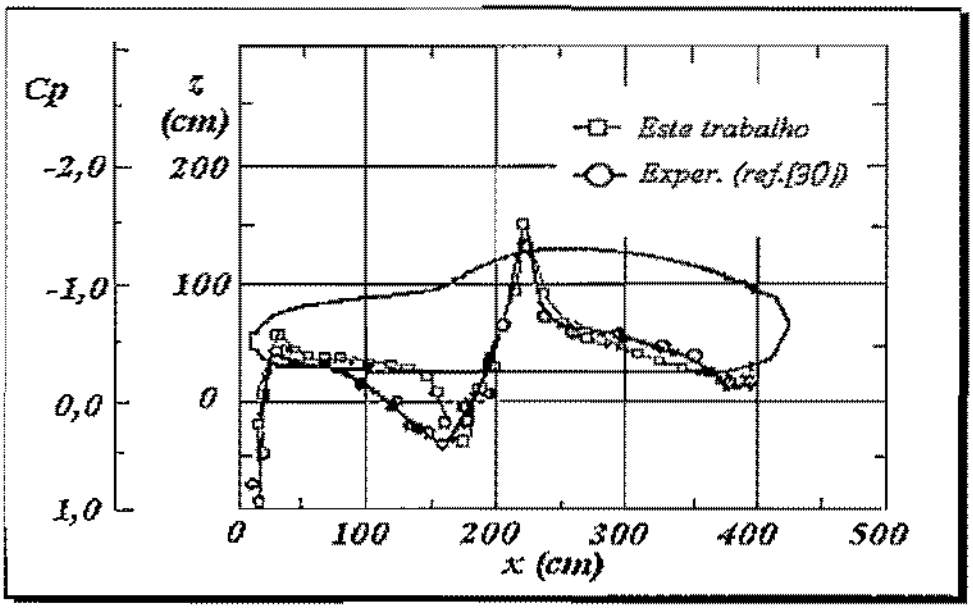


Fig. 6.3. *Distrib. de Pressão ao longo da seção média longitudinal (sup. superior)*

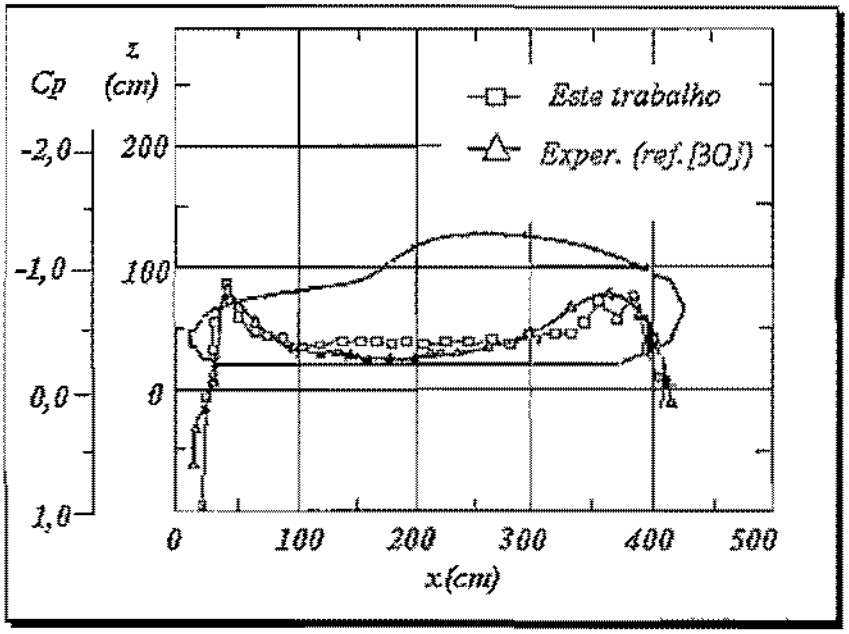


Fig. 6.4. *Distrib. de Pressão ao longo da seção média longitudinal. (sup. inferior)*

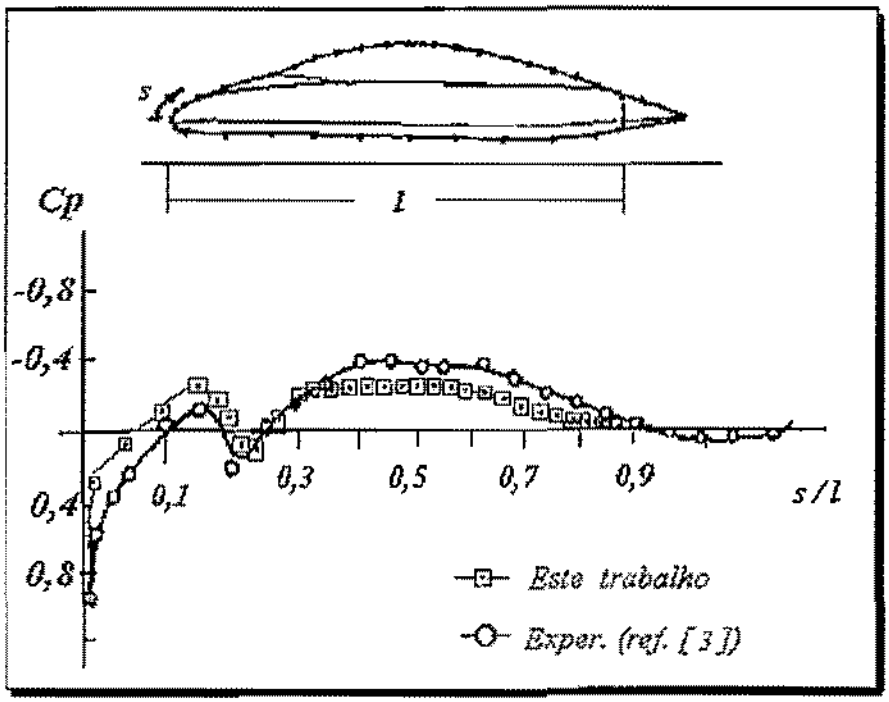


Fig. 6.5. *Distrib. de Pressão ao longo da seção média longitudinal (sup. superior)*

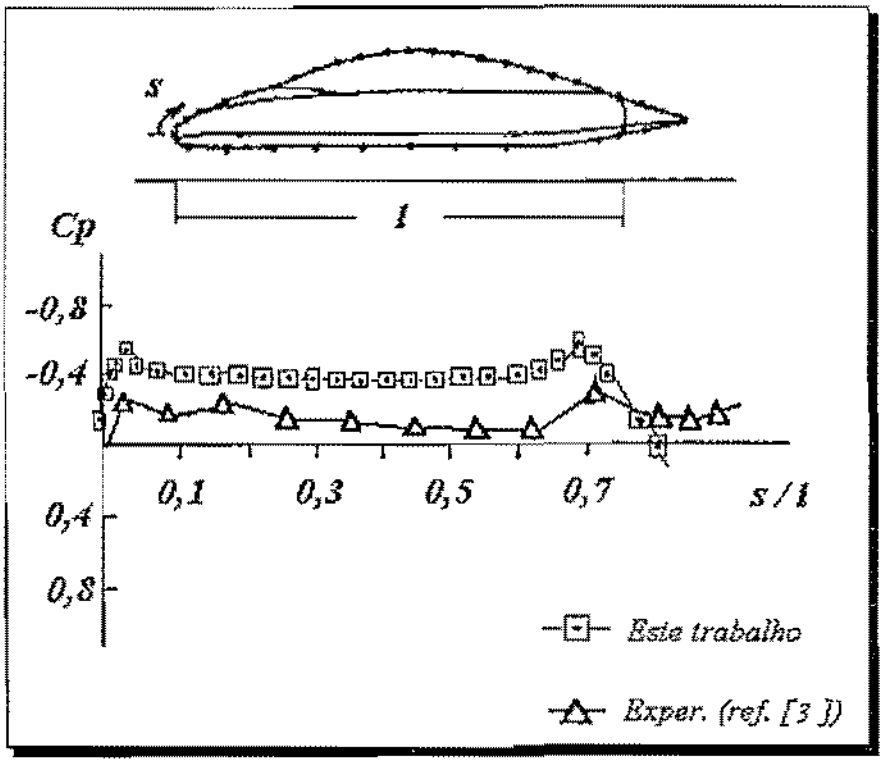


FIG. 6.6. *Distrib.de Pressão ao longo da seção média longitudinal (sup. inferior)*

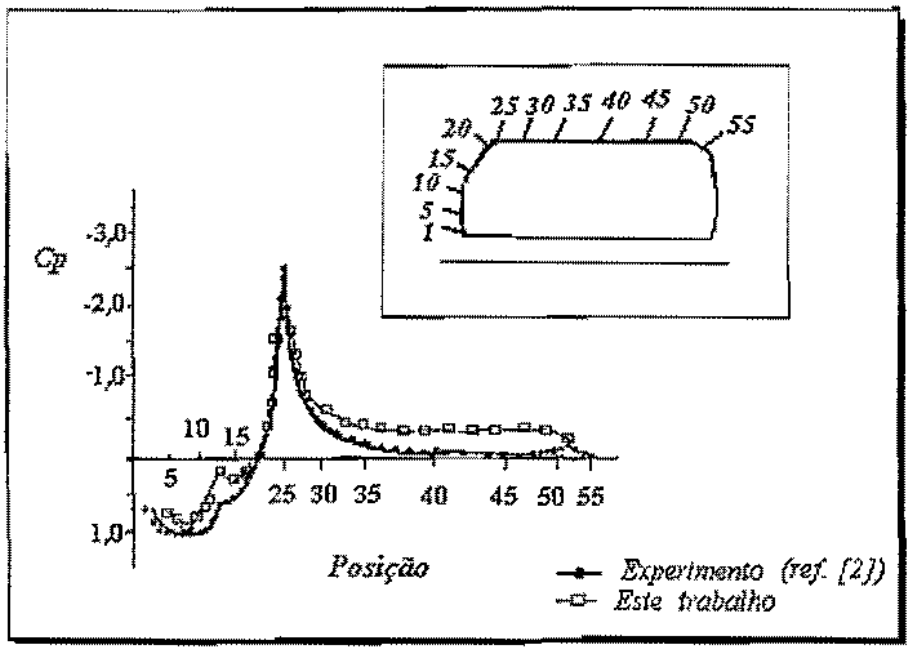


FIG. 6.7. *Distrib.de Pressão ao longo da seção média longitudinal (sup. superior)*

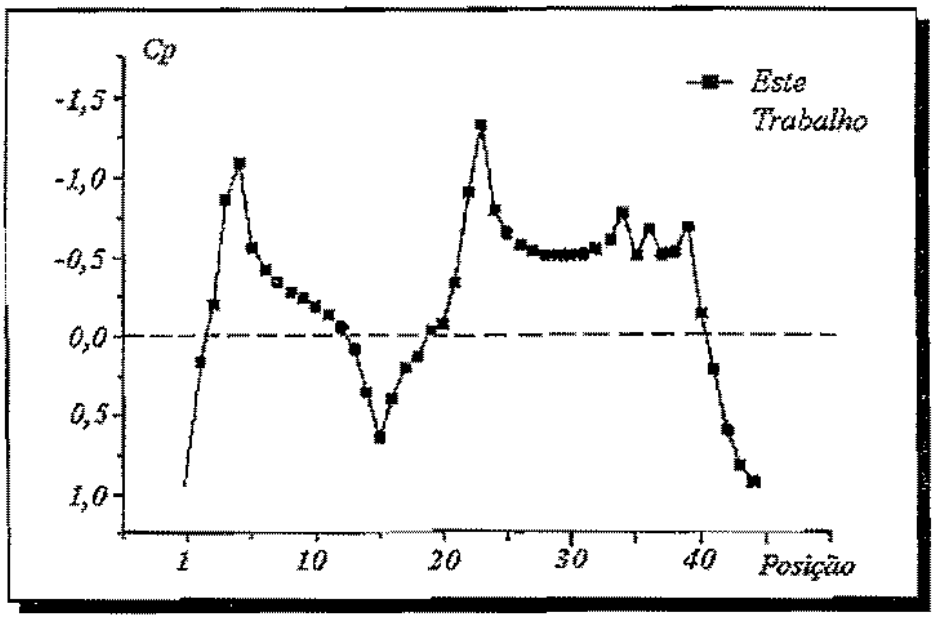


FIG. 6.8. *Distrib. de Pressão ao longo da seção média longitudinal (sup. superior) (Geometria da tabela V)*

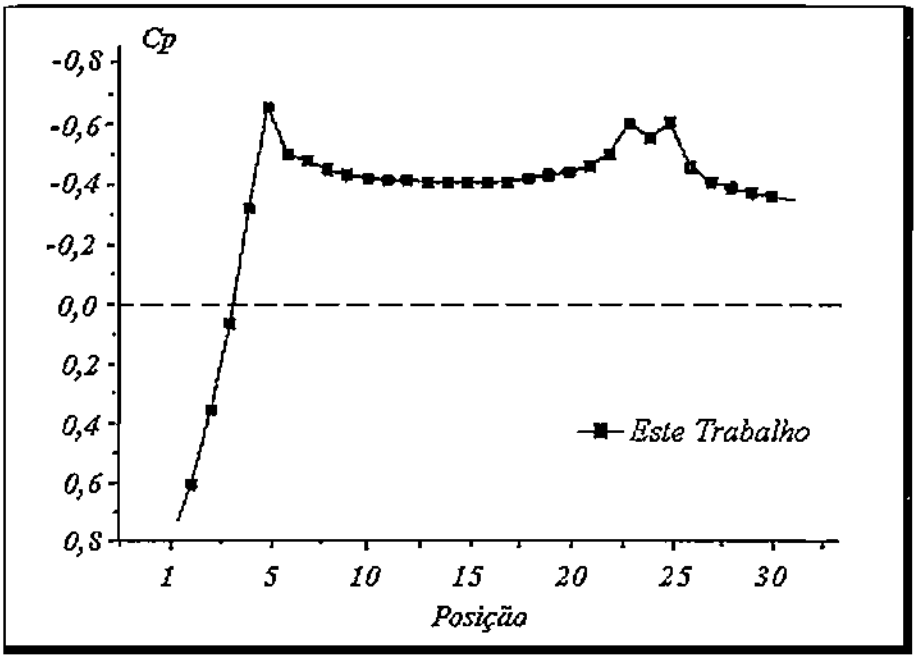


Fig. 6.9. *Distrib. de Pressão ao longo da seção média longitudinal (sup. inferior) (Geometria da tabela V)*

Observação: a escolha do obstáculo da tabela V foi feita tendo em vista seu uso em nosso posterior tratamento do efeito da viscosidade finita sobre o fluxo. Isto porque o arrasto por ela produzido é mais 'simples' que outras similares (ver nota à página 126).

6.4. Sistemas de Fluxos Rotacionais a Altos Números de Reynolds. Turbulência.

6.4.1. - A Criação de Vorticidade e a Condição de Contorno da Equação de Navier-Stokes.

No tratamento das equações da camada-limite, é 'perdida' uma condição de contorno da equação de Navier-Stokes (a saber, a anulação da componente tangencial da velocidade no contorno), na passagem ao limite $\nu \to 0$. Veremos como tal condição pode ser 'recuperada' por meio de um artifício matemático.

O processo de separação na camada-limite é um fenômeno complexo. Vamos, aqui, recorrer a uma maneira de simular os efeitos físicos da anulação da componente tangencial da velocidade no contorno, fenomenologicamente plausível, mas não rigorosamente justificada.

Assumiremos que o ponto de separação é *conhecido* (da intuição, do experimento ou de algum processo independente de cálculo). Dessa forma, a condição de Neumann deve agora ser imposta sobre o contorno rígido do corpo, e não mais da camada-limite, como antes.

Da maneira como procedemos anteriormente, vemos que essa condição foi satisfeita, majoritariamente, pela distribuição de fontes-simples.

A tarefa de satisfazer a condição 'perdida' será, principalmente, da *distribuição de dipolo.*

Fisicamente, parece intuitivo que a criação da vorticidade no contorno deva depender, de alguma maneira, da condição de não-deslizamento ($\vec{u}_{contorno} = \vec{0}$). Dessa forma, ao impormos que o potencial total se anule no interior e sobre o contorno de S, estaremos impondo, também, que a velocidade total se anule. Mas a componente normal dessa velocidade já foi anulada pela distribuição de fontes-simples . Portanto, a exigência da nulidade do potencial corresponde a impor que a componente tangencial da velocidade seja zero *sobre o contorno.*

Assim, a segunda das equações do sistema (6.4) é responsável, de fato, pela 'recuperação' da condição de contorno que fora perdida, na passagem ao limite. Dessa equação, fica claro que a distribuição de dipolo deva se relacionar à vorticidade criada no contorno.

Da equivalência matemática entre uma distribuição de dipolo e uma distribuição de vorticidade (Apêndice E), concluímos que a solução da equação (6.12) nos fornece $\mu(Q)$ que, fisicamente, corresponde à *circulação* associada a um vórtice que acaba de ser criado nas vizinhanças de Q. Em outras palavras, forma-se, sobre a superfície, uma *camada de vórtices.* A criação dessas camadas não viola os Teoremas de Kelvin-Helmholtz. Elas são infinitamente finas, e não contêm partículas de fluido que estavam presentes no instante da criação. A vorticidade provém, *somente*, do contorno.

O procedimento que acabamos de descrever é um artifício matemático que simula o processo físico da criação da vorticidade pela presença de contornos sólidos no fluxo. Em última

análise, obtemos uma solução da equação de Euler, com uma condição de contorno adicional. Para escoamentos estáveis, há infinitas soluções da equação de Euler, dependendo da distribuição de vorticidade.

Finalmente, a vorticidade que é criada no contorno pode ser relacionada aos gradientes de pressão ao longo da superfície, da seguinte maneira: das equações da camada-limite turbulenta temos, para a subcamada viscosa,

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \beta} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \beta} + \nu\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \quad , \tag{6.15}$$

na qual $\partial\bar{p}/\partial\beta$ é o gradiente de pressão sobre a superfície, η é a coordenada normal à superfície e β, a coordenada tangencial. A condição de não-deslizamento é satisfeita quando essas duas contribuições se cancelam mutuamente.

Da identidade,

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right|_S = \hat{n} \times \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \eta} \quad , \tag{6.16}$$

em que $\hat{n}$ é a normal unitária para fora da superfície, e da condição de não-deslizamento, encontramos:

$$-\nu\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \eta} = \rho^{-1}\hat{n} \times \frac{\partial \bar{p}}{\partial \beta}\hat{\beta} \quad , \tag{6.17}$$

em que $\vec{\xi}$ é vetor de vorticidade 'produzida' pelo contorno, de uma maneira assumida, tacitamente, aproximadamente bi-dimensional[1].

Chorin [13] utilizou com sucesso toda essa fenomenologia no estudo de instabilidades de camadas-limites bi- e tri-dimensionais.

6.4.2. - O Método dos Vórtices Para Simulação Numérica de Fluxos Levemente Viscosos.

O que é conhecido como método dos vórtices dentro da comunidade da fluido dinâmica computacional diz respeito à simulação numérica de escoamentos instáveis, incompreensíveis, bi- ou tri-dimensionais, a altos números de Reynolds. De experimentos realizados com tais fluidos, é sabido que a vorticidade que contêm ocupa somente uma pequena fração do volume total do fluido e, portanto, pode ser considerada como altamente concentrada em pequenas regiões do espaço (nos tubos ou linhas de vorticidade). Tal fato é extremamente apropiado para simulação numérica, visto que é suficiente seguir, somente, a evolução da vorticidade para se obter uma descrição do fluido, num dado instante. O campo de velocidades pode ser determinado desse campo de vorticidade, e das condições de contorno (quando contornos sólidos estão presentes). Ademais, dos Teoremas de Kelvin-Helmholtz, sabemos que para um fluido inviscito de densidade constante, os tubos de vorticidade mantém sua identidade, e se movem como entidades materiais. Assim, mesmo fluidos altamente não-lineares podem ser representados por um número relativamente pequeno de elementos computacionais (nesse caso, os próprios vórtices). Isso porque os tubos que transportam vorticidade se movem sob a ação de velocidades locais, e o vetor vorticidade associado a cada elemento é também mais sensível a gradientes *locais* de velocidade.

---

[1]Assumiremos, também tacitamente, que a derivada $1/\partial\eta$ presente na equação acima possa ser tomada da ordem de grandeza de $1/\delta'$, em que δ' é a escala de comprimento da subcamada viscosa (vide Fig. 2.2), ou seja, a escala na qual a viscosidade atua preponderantemente, dissipando energia na forma de calor (daí o nome de escala dissipativa).

Estudos teóricos e experimentais realizados nos últimos vinte anos demonstraram que a distribuição de vorticidade no interior desses tubos não é uniforme. Isso pode trazer dificuldades computacionais adicionais. Entretanto, uma detalhada análise teórica feita por alguns autores leva ao uso de certas *funções de interpolação* que facilitam enormemente o trabalho computacional.

O método dos vórtices desenvolvido por A. Leonard [24] associa às evidências experimentais um certo número de recursos matemáticos para a simulação de fluidos a altos números de Reynolds. No que segue descreveremos, resumidamente, tal método.

- O Método dos Vórtices de Leonard.

A. Leonard [24] propôs um procedimento de interpolação da vorticidade concentrada em curvas espaciais tri-dimensionais para produzir a representação:

(6.18) $$\xi(\vec{x},t) = \sum_i \Gamma_i \int \gamma_i \left[\vec{x} - \vec{r}_i(s,t)\right] \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial s} ds \quad ,$$

em que s é um comprimento ao longo da curva e γ_i é uma função de interpolação (ou 'suavização') que tem a normalização:

(6.19) $$\int \gamma(\vec{x}) d\vec{x} = 1 \quad .$$

É assumido que γ_i tem a forma:

(6.20) $$\gamma_i(\vec{x} - \vec{r}_i) = \frac{1}{\sigma_i^3} p\left(\frac{\left|\vec{x} - \vec{r}_i\right|}{\sigma_i}\right) \quad ,$$

em que σ_i é o raio do filamento i .

Com essa representação para a vorticidade, o Teorema de Biot-Savart resulta em:

$$\vec{u}(\vec{x},t) = -\frac{1}{4\pi}\sum_j \Gamma_j \oint_{C_j} \frac{\left[\vec{x}-\vec{r}_i(s,t)\times(\partial\vec{r}/\partial s)q\left(\left|\vec{x}-\vec{r}_j\right|/\sigma_j\right)\right]}{\left|\vec{x}-\vec{r}_j\right|^3}ds \quad . \tag{6.21}$$

A função q é definida por

$$q(y) = 4\pi\int_0^y p(r)r^2dr \quad . \tag{6.22}$$

Da normalização de γ_i , notamos que $q(r) \to 1$ quando $y \to \infty$, de tal forma que, a grandes distâncias comparadas ao raio do filamento, o campo de velocidades induzido pode ser calculado como se toda a circulação estivesse concentrada sobre as curvas $\vec{r}_i$.

A função $p(r)$ não é unívoca. Sua escolha é ditada por algumas exigências matemáticas e algumas bases físicas.

Ting & Tung e Saffmann encontraram que a distribuição de vorticidade num anel de vórtice viscoso de pequena secção reta é gaussiana. Isso sugere que a escolha particularmente mais apropriada seja tomar $p(r)$ como gaussiana, ou seja,

$$p(r) = \frac{1}{\pi^{3/2}}e^{-r^2} \quad . \tag{6.23}$$

Nakamura [27] usa, ao invés, a função:

(6.24) $$p(r) = \frac{3\alpha}{4\pi}(r^2 + \alpha^2)^{-5/2} \quad .$$

Outras funções obviamente são admissíveis, observadas aindas as condições de convergência e acurácia.

É bem conhecido que as flutuações de velocidade em fluidos turbulentos a altos números de Reynolds são altamente intermitentes no espaço e no tempo, o que implica que intensa vorticidade é confinada em pequenas frações de volume do fluido. Portanto, o método que acabamos de descrever pode ser um candidato natural para a descrição de tais fluidos. Geralmente, resultados muito úteis podem ser obtidos rápida e facilmente com um número relativamente pequeno de elementos computacionais (Leonard & Degani [25]). A principal utilidade do método dos vórtices para a simulação da turbulência é a possibilidade de descrição das propriedades do chamado 'range' inercial do espectro de turbulência. Tal 'range', onde os efeitos viscosos são praticamente desprezíveis, é dominado pelas evoluções não-lineares dos vórtices. As características exibidas pelos vórtices então, nesse 'range', refletem a própria fenomenologia da turbulência.

6.4.3. - Procedimento Numérico para a Determinação da Escala Dissipativa.

Satisfeitas as condições de estacionaridade, a equação do espectro de energia é (equação (5.32)):

$$E(k) = E_o\left(\frac{k_a}{k}\right)^{5/3} \frac{1}{\left[1 + (k/k_s)^4\right]^{4/3}} \quad .$$

Os parâmetros E_o e k_o podem ser determinados da seguinte maneira. Como vimos, da fenomenologia do problema, no 'range' inercial a dissipação viscosa é praticamente desprezível. Portanto, a energia total no equilíbrio deve ser, muito aproximadamente, a mesma que no instante inicial:

(6.25) $$\int_0^\infty E(k,0)dk \approx \int_0^\infty E(k,t_c)dk$$

em que $E(k,0)$ é o espectro inicial (em $t = 0$) e $E(k,t_c)$ é o espectro no equilíbrio (t_c - tempo necessário para se atingir a solução estacionária (Ap.G).

As constantes E_o e k_o devem ser determinadas numericamente, de modo que a equa-ção anterior seja satisfeita, numa aproximação suficiente .

Claramente, vemos que as aproximações iniciais convenientes para E_o e k_o são:

(6.27) $$E_o = E(k_p,0)$$

e

(6.28) $$k_o = k_p \quad ,$$

em que,

k_p : valor de k para o qual o espectro inicial toma seu valor máximo.

$E(k_p,0)$: valor máximo de $E(k,0)$.

Esses valores devem ser ligeiramente modificados, a fim de satisfazer (6.25) mais precisamente.

- O Espectro de Energia Inicial,E(k,0) .

Anteriormente, foi deduzida a equação do espectro de energia tri-dimensional a partir de uma velocidade-quadrática-média e das funções de correlação $f(r)$ e $g(r)$. Portanto, a determinação de $\overline{u^2}$ e $f(r)$ (ou $g(r)$) em $t = 0$ nos permite conhecer $E(k)$. Para a escolha de $f(r)$

e $g(r)$ vamos nos basear no seguinte argumento: do estudo numérico da evolução de um vórtice turbulento utilizando as equações de Euler [12], Chorin conclui que o 'range'inercial do espectro está relacionado, em última análise, à dsitribuição de vorticidade em estruturas de vórtices discretas. Por outro lado, na teoria de Heisenberg as funções de correlação $f(r)$ e $g(r)$ podem ser obtidas a partir de certas integrais sobre o espectro. Ficamos tentados, então, a tomar a função distribuição de vorticidade (estritamente positiva e absolutamente integrável) como a correlação $f(r)$. Vimos, ademais, que essa distribuição é ditada por uma série de razões e não é, de nenhuma maneira, univocamente determinada (o que resulta em infinitas soluções possíveis da equação de Euler).

Conhecida a função $f(r)$ e aplicando a equação (5.1), o espectro de energia inicial segue imediatamente e conseqüentemente, E_o e k_o .

A velocidade-quadrática-média será determinada utilizando os métodos de Leonard e Rehbach.

Vamos admitir, idealisticamente, que a fina camada de vórtices sobre o corpo seja discretizada em M 'tiras' de comprimento h. Cada uma dessas 'tiras', no instante inicial, é 'espelida' do contorno na forma de um tubo. Ao mesmo tempo, esses tubos se alinham de tal forma que seus eixos ficam aproximadamente paralelos entre si e perpendiculares à direção do fluxo incidente, guardando uma distância mútua da ordem de grandeza dos seus diâmetros (Fig. 6.10).

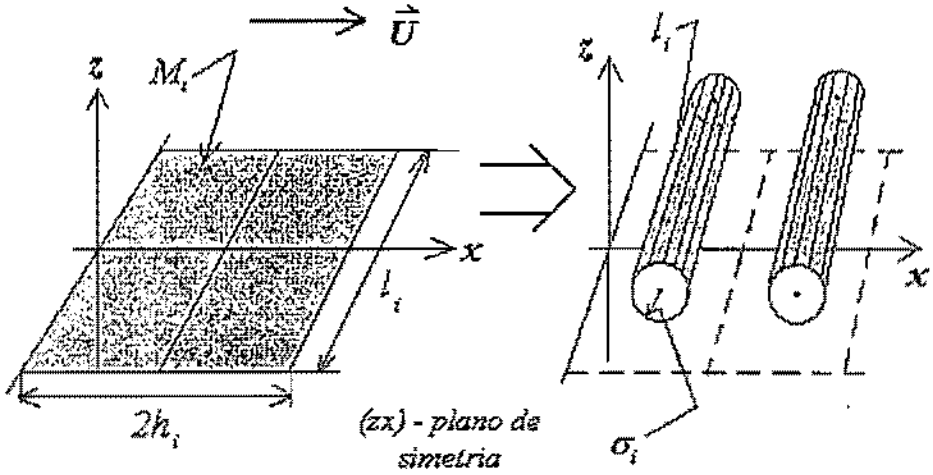


Fig. 6.10. *Ilustração do processo de criação de vorticidade no contorno*

Se a tira ' i ' tem comprimento h_i , $\sigma_i = \dfrac{h_i}{2\pi}$ e $\xi_i = \dfrac{\Gamma_i}{\pi\sigma_i^2}$.

Da teoria dos vórtices, cada tubo se move no campo de velocidades local, induzido por todos os outros vórtices. Esse campo é calculado pela equação (6.21) avaliada sucessivamente, pela regra do centróide, com $p(r)$ gaussiano, em $t = 0$.

Seja v_i o módulo da velocidade do tubo ' i '. Então, assumiremos que a velocidade-quadrática-média $\overline{u^2}$ é da ordem de grandeza de:

$$\overline{u^2} \approx \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} v_i^2 \quad , \tag{6.29}$$

e daqui calculamos v_o como a velocidade de raiz-quadrática-média, $v_o = \sqrt{\overline{u^2}}$ [1].

Finalmente, da solução de Chandrasekhar (5.32), a escala dissipativa pode ser escrita como:

$$k_s = k_o^{(ajust.)}\left[\frac{3\chi}{4\nu}\sqrt{\frac{E_o^{(ajust.)}}{k_o^{(ajust.)}}}\right]^{3/4} \approx \frac{1}{\delta'} \tag{6.30}$$

em que $E_o^{(ajust.)}$ e $k_o^{(ajust.)}$ são os valores 'ajustados' das constantes E_o e k_o .

6.4.4. - Integração da Equação (6.15) .

De posse das grandezas calculadas nas secções precedentes, a equação (6.15), válida na região da subcamada viscosa, pode ser integrada, resultando o valor médio aproximado da pressão exercida pelo fluido turbulento sobre a parede rígida do obstáculo:

---

[1] Como vimos, $\overline{u^2}$ é um invariante da equação de Euler (Cf. nota da pág. 68) .

(6.31) $$\overline{p} = -\int_{contorno} \rho v \frac{\partial \xi}{\partial \eta} d\beta + cte.$$

Para avaliar a integral acima, vamos proceder da seguinte maneira: a diferencial $\partial\xi$ é aproximada como:

(6.32) $$\partial\xi \approx \Delta\xi_{i+1} = \left(\xi_{i+1} - \xi_i\right) \quad ,$$

em que i é o ponto onde a condição de contorno é satisfeita e ξ_i é a vorticidade média na vizinhança de i. A quantidade $\partial\eta$, como vimos, é tomada como sendo da ordem de δ', e a integral é feita ao longo do contorno, considerado somente após o ponto de separação[1]:

(6.33) $$\overline{p} = -\int_{contorno} \rho v \frac{\Delta\xi_i}{\delta'} d\beta + cte.$$

A constante que aparece é determinada da exigência de que, no ponto de separação, a pressão acima se reduza àquela calculada no limite $v \rightarrow 0$.

6.4.5.- Resultados da Computação.

A tabela V resume os resultados da implementação numérica do procedimento computacional anteriormente descrito feita para a geometria considerada[2]. O ponto de separação foi assumido conhecido *a priori*. Na região *anterior* a esse ponto, os resultados foram obtidos utilizando a aproximação de *fluxo potencial*. Na região *posterior* à separação, as pressões são

[1] A pressão assim calculada rigorosamente se refere ao instante inicial (em que se inicia a turbulência). Entretanto, se assumirmos um regime quase estacionário, tal valor pode ser tomado como a média exercida sobre o contorno, em qualquer instante.

[2] A escolha dessa geometria para o obstáculo foi feita tendo em vista que o arrasto por ela produzido é mais 'simples' que outras similares. Também um mapeamento do campo de vorticidade para tal superfície foi obtido experimentalmente por Ahmed & outros [1]. O conhecimento 'visual' do arrasto pode reforçar a plausibilidade do modelo aqui utilizado.

determinadas, em cada ponto de cálculo i, discretizando a equação (6.33) (ver *Região do arrasto turbulento*, na Tab. VII):

$$\overline{p}_i = -\frac{\rho\nu}{\delta'}\Delta\xi_i\Delta\beta_i + cte.\ , \tag{6.34}$$

em que $\Delta\beta_i$ é a dimensão linear da região que contém a vorticidade $\Delta\xi_i$.

- Forças Aerodinâmicas.

De maneira análoga ao caso do fluxo potencial, aqui as forças aerodinâmicas são obtidas integrando a pressão sobre a superfície do corpo (geometria da Tabela VII, idêntica à da V). Os valores são os mostrados na Tab.VI (os erros são estimados):

Tabela VI - ***Forças aerodinâmicas (fluxo turbulento)***	
• Sustentação (dyn/cm)	$(3{,}8 \pm 1{,}0) \times 10^4$
• Resistência (dyn/cm)	$(2{,}6 \pm 1{,}0) \times 10^5$

Os comentários concernentes a esses resultados, bem como uma comparação aos do fluxo potencial, serão feitos na secção 6.5.

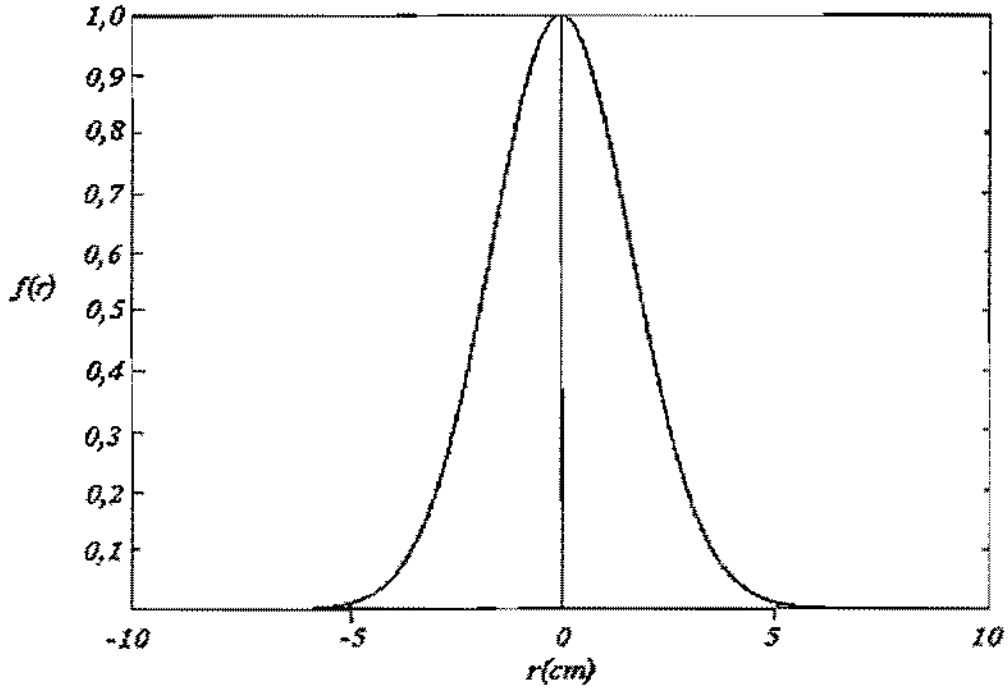


Fig. 6.11. *Correlação f(r)*

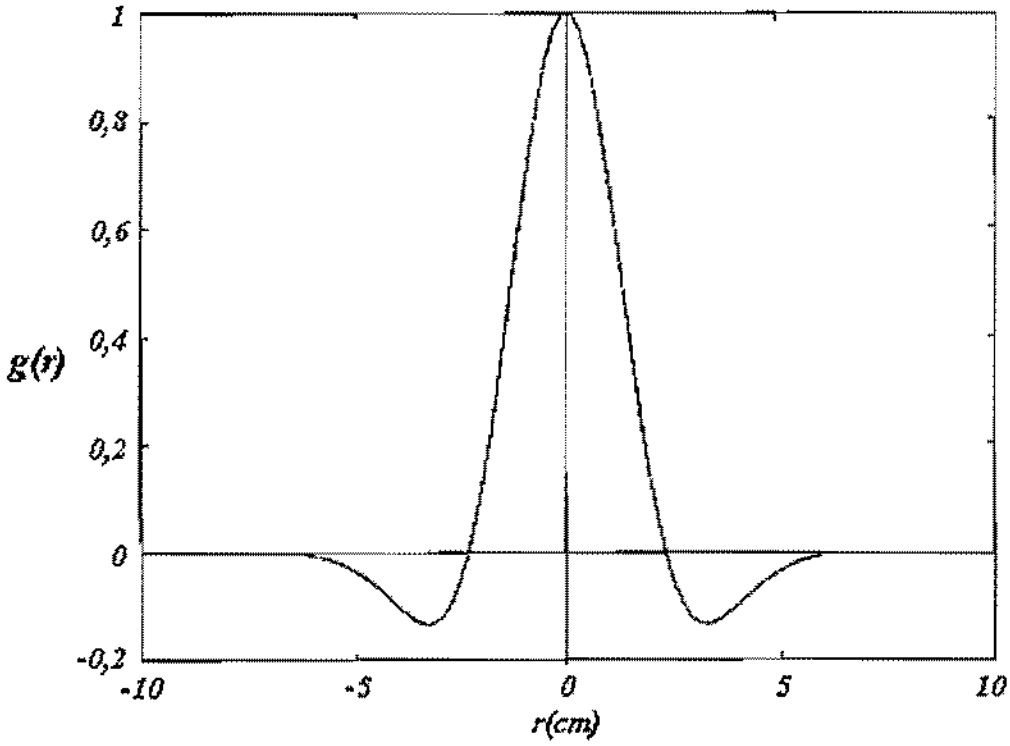


Fig. 6.12. *Correlação g(r)*

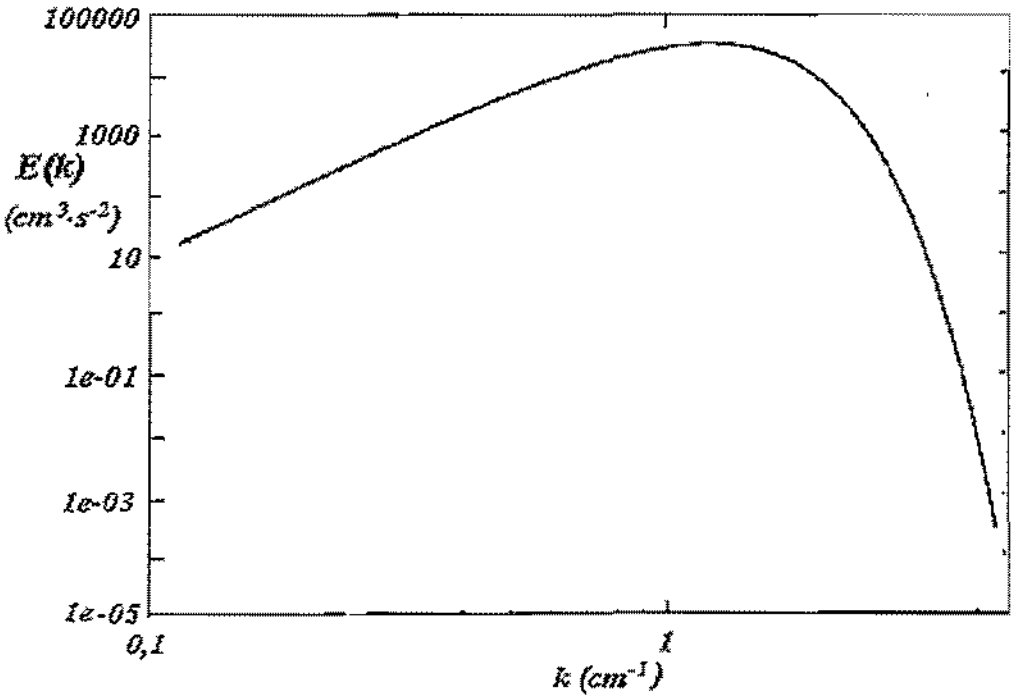


FIG. 6.13. *Espectro de energia inicial*

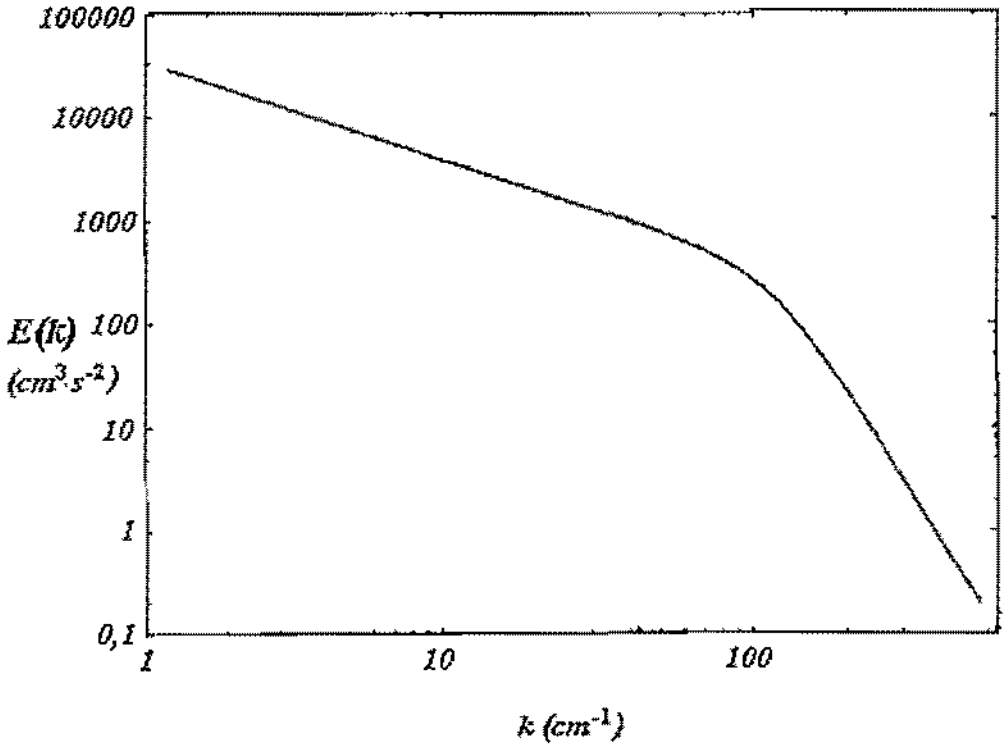


FIG. 6.14. *Espectro de energia no quase-equilíbrio*

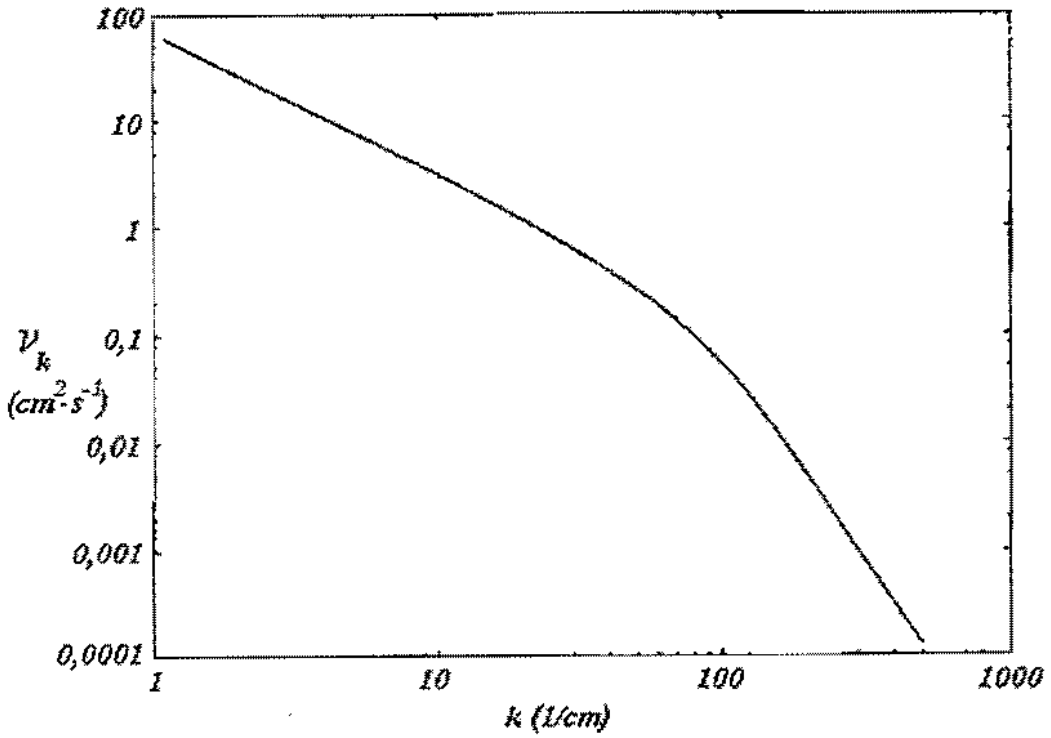
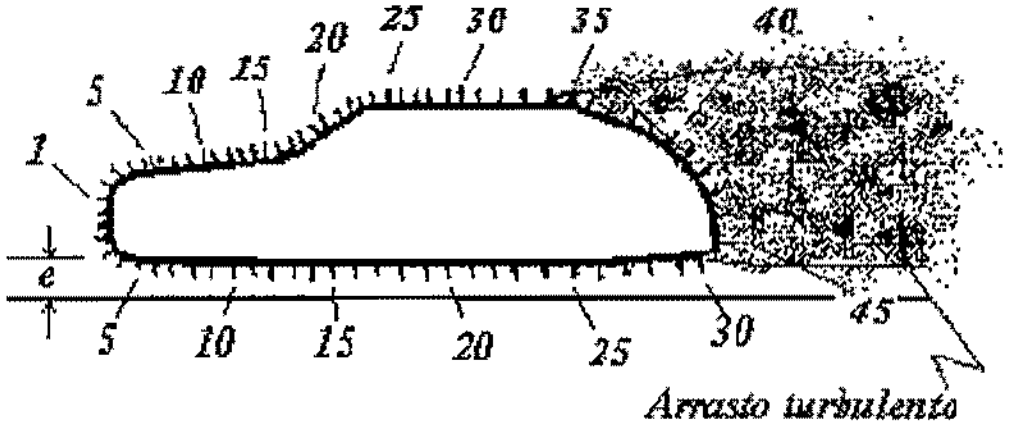


FIG. 6.15. *Espectro da viscosidade turbulenta*

Tabela VII - Resultados da Computação para a Geometria da Figura



número de painéis = 74;
e = 20 cm.

Superfície superior					
Q	*σ (Q)* *(cm/s)*	*μ (Q)* *(cm2/s)*	*Vel (Q)* *(cm/s)*	*Pressão(Q)* *(dyn/cm2)*	*Cp(Q)*
1	*-3498,78*	*-21349,45*	*2024,51*	*1100497,86*	*0,17*
2	*-3084,30*	*-27100,73*	*2024,51*	*1099401,22*	*-0,20*
3	*- 771,02*	*-40312,86*	*3023,76*	*1097471,17*	*-0,86*
4	*- 617,95*	*-49157,58*	*3210,73*	*1096771,78*	*-1,09*
5	*- 541,12*	*-44288,82*	*2773,30*	*1098342,32*	*-0,56*
6	*- 464,12*	*-45031,23*	*2641,22*	*1098771,41*	*-0,42*
7	*- 386,99*	*-44451,63*	*2565,98*	*1099006,48*	*-0,34*
8	*- 309,74*	*-44512,74*	*2513,90*	*1099165,24*	*-0,28*
9	*- 232,39*	*-44560,29*	*2468,14*	*1099301,99*	*-0,24*
10	*- 232,39*	*-44560,29*	*2418,43*	*1099447,77*	*-0,19*
11	*- 232,39*	*-44339,14*	*2357,97*	*1099621,03*	*-0,13*
12	*- 154,97*	*-44594,56*	*2274,23*	*1099853,76*	*-0,05*
13	*- 77,51*	*-44614,65*	*2120,92*	*1100258,06*	*0,09*
14	*- 77,51*	*-55624,56*	*1780,92*	*1101054,04*	*0,36*
15	*-2672,08*	*-38355,07*	*1285,19*	*1101966,01*	*0,66*

Q	σ(Q) (cm/s)	μ(Q) (cm2/s)	Vel.(Q) (cm/s)	Pressão(Q) (dyn/cm2)	Cp(Q)
16	-2672,08	-35459,28	1721,41	1101179,08	0,40
17	-2672,08	-27694,58	1967,73	1100633,86	0,21
18	-2672,08	-33452,22	2060,98	1100408,46	0,14
19	-2609,79	-33116,81	2180,89	1100103,27	0,03
20	-2609,79	-42043,54	2296,80	1099791,87	-0,07
21	-2546,70	-37090,49	2560,12	1099024,52	-0,33
22	- 309,74	-44512,74	3063,95	1097324,36	-0,90
23	- 232,39	-44339,14	3379,99	1096102,41	-1,32
24	- 154,97	-44372,95	2971,75	1097658,28	-0,79
25	- 77,51	-44614,65	2838,65	1098122,27	-0,64
26	- 77,51	-44393,23	2774,62	1098337,92	-0,56
27	- 77,51	-44393,23	2740,01	1098452,45	-0,52
28	38,73	-44619,75	2721,36	1098513,57	-0,50
29	77,47	-44393,24	2712,95	1098540,99	-0,49
30	154,94	-44372,96	2712,85	1098541,31	-0,49
31	232,36	-44560,30	2722,38	1098510,23	-0,50
32	271,04	-44317,19	2748,07	1098425,90	-0,53
33	348,34	-53299,88	2802,21	1098245,61	-0,59
		Região do Arrasto turbulento			
34	386,96	-57670,24	0,00	1098156,02	-0,62
35	1663,24	-55993,19	0,00	1098125,39	-0,63
36	1663,24	-55231,34	0,00	1098231,47	-0,60
37	1663,24	-49742,29	0,00	1098146,52	-0,63
38	1663,24	-58942,19	0,00	1098061,98	-0,66
39	1663,24	-61199,16	0,00	1098207,11	-0,61
40	2970,93	-55995,54	0,00	1097908,72	-0,71
41	3592,03	-42081,31	0,00	1098118,99	-0,64
42	4056,14	-26294,51	0,00	1097887,45	-0,38
43	4342,97	-15774,45	0,00	1097739,60	-0,43
44	4435,56	- 3392,19	0,00	1097857,88	-0,39

Superfície Inferior					
Q	σ(Q) (cm/s)	μ(Q) (cm2/s)	Vel.(Q) (cm/s)	Pressão(Q) (dyn/cm2)	Cp(Q)
1	-4024,02	-22904,38	1394,14	1101790,86	0,61
2	-3680,94	-16655,09	1777,56	1101061,20	0,36
3	-3247,23	-30280,55	2135,54	1100220,72	0,07
4	-2220,02	-34391,99	2544,09	1099073,62	-0,31
5	-1591,17	-50427,19	2852,73	1098074,21	-0,65
6	- 923,15	-52115,66	2711,92	1098544,32	-0,49
7	- 386,99	-53077,24	2688,05	1098621,68	-0,47
8	- 77,51	-62150,53	2666,05	1098692,34	-0,44
9	38,73	-53277,97	2647,04	1098752,95	-0,42
10	38,73	-71037,30	2636,96	1098784,90	-0,41
11	38,73	-57717,80	2628,41	1098811,93	-0,40
12	38,73	-66597,47	2623,96	1098825,93	-0,40
13	38,73	-71037,30	2620,68	1098836,26	-0,39
14	38,73	-62157,64	2618,79	1098842,19	-0,39
15	38,73	-71037,30	2618,27	1098843,83	-0,39
16	38,73	-71037,30	2618,89	1098841,90	-0,39
17	38,73	-79916,96	2620,89	1098835,59	-0,39
18	38,73	-71037,30	2625,25	1098821,87	-0,40
19	38,73	-71037,30	2631,87	1098800,99	-0,41
20	38,73	-62157,64	2642,87	1098766,18	-0,42
21	38,73	-71037,30	2659,34	1098713,78	-0,44
22	38,73	-71037,30	2696,96	1098592,89	-0,48
23	38,73	-71175,91	2793,91	1098273,47	-0,58
24	770,98	-61215,69	2745,30	1098435,02	-0,53
25	770,98	-69960,78	2793,10	1098276,19	-0,58
26	770,98	-70097,29	2654,26	1098729,97	-0,43
27	770,98	-69960,78	2611,99	1098863,54	-0,38
28	847,18	-69870,91	2584,50	1098949,27	-0,36
29	847,18	-69870,91	2572,43	1098986,60	-0,34
30	847,18	-69870,91	2564,47	1099011,13	-0,33

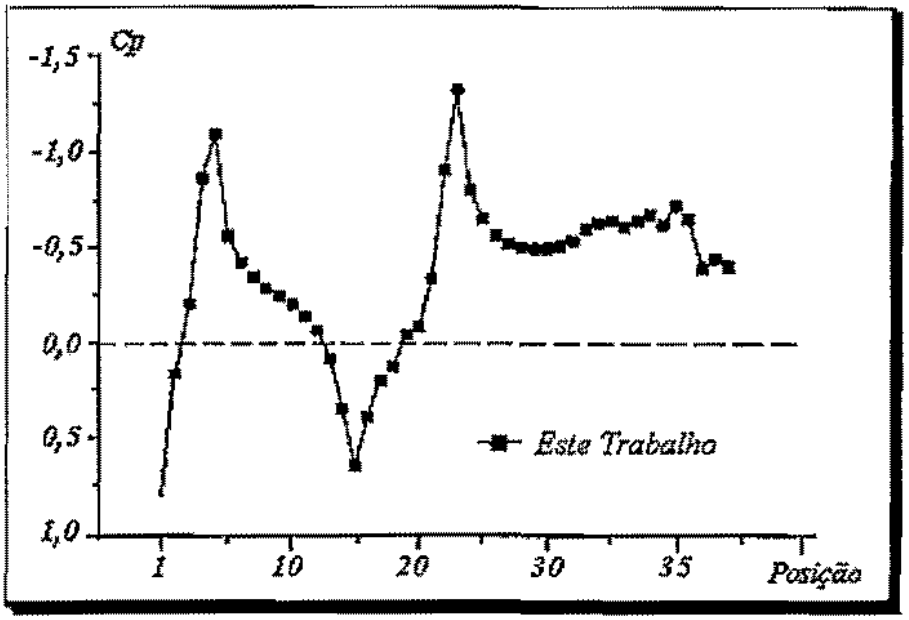


Fig. 6.16. *Distrib. de Pressão ao longo da secção média longitudinal (sup. superior) (Geometria da TAB. VII)*

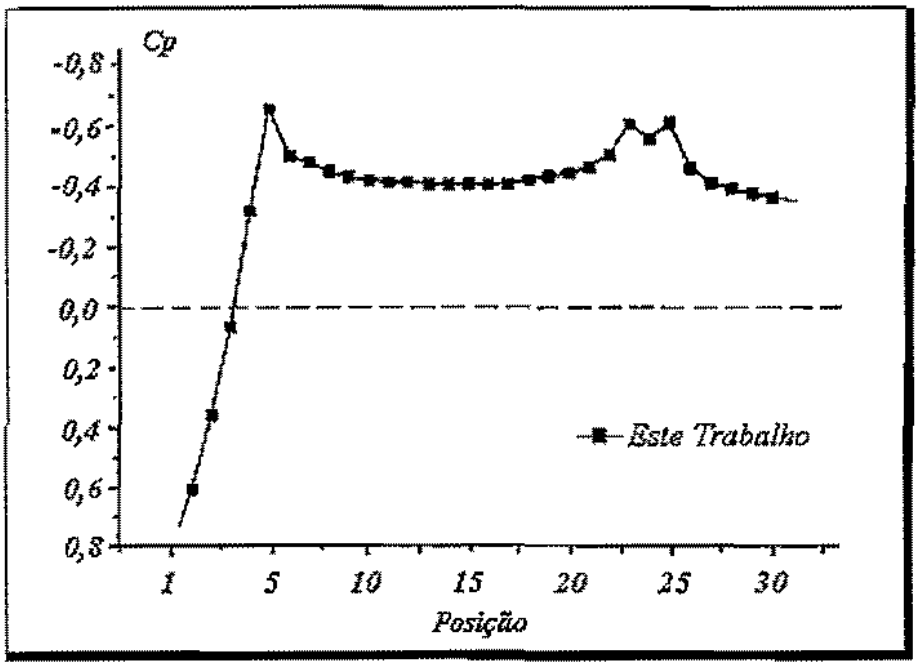
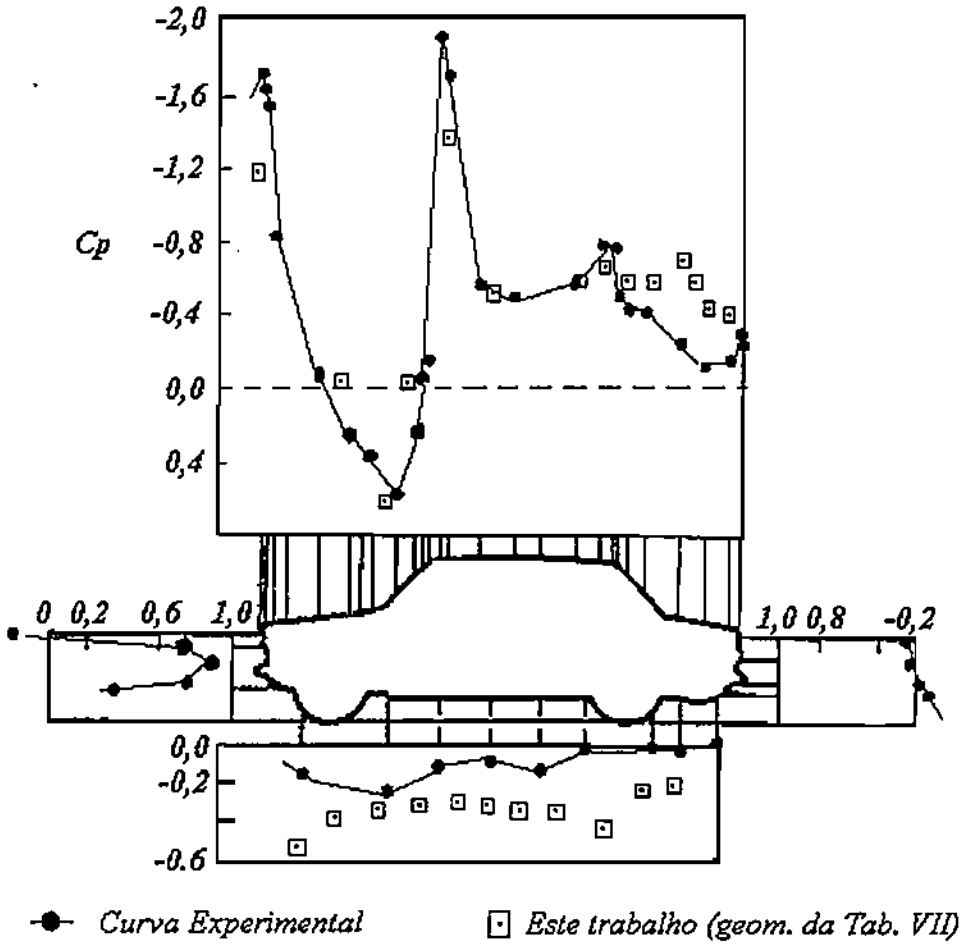


Fig. 6.17. *Distrib de pressão ao longo da secção média longitudinal (sup inferior) (Geometria da TAB. VII)*

A figura a seguir mostra a distribuição de pressão medida em túnel-de-vento de tamanho real. Como dissemos anteriormente, a geometria que utilizamos produz um arrasto mais 'simples' que a da figura, pois, na região traseira, as mudanças de curvatura não são muito acentuadas. Um estudo de geometrias complicadas foge ao escopo deste trabalho. Entretanto, uma simples confrontação de nossos resultados com os da geometria da figura 6.18 mostra que a discrepância entre os valores de Cp para as duas configurações não é muito grande, com exceção da superfície inferior, que, no caso do presente trabalho, foi suavizada. Na região traseira, logo após o ponto de separação, notamos que pressão no arrasto é mais ou menos uniforme, independente da geometria.



(Adaptado de: Losito, V., de Nicola, C., Albertoni,S., Berta, C.-
Int. Journal of Vehicle Design, SP 3, p. 429 (1983))

FIG. 6.18 -*Distribuição de pressão ao longo da secção média longitudinal de um modelo de automóvel obtida em túnel-de-vento*

6.5. Conclusões e Comentários.

De forma geral, podemos dizer que nossos objetivos nesse trabalho foram plenamente atingidos. Dedicaremos essa seção sobretudo a uma breve comparação entre os cálculos feitos na aproximação potencial e os do caso viscoso, e a alguns pontos sensíveis do método desenvolvido.

A primeira observação a ser feita diz respeito às *forças aerodinâmicas*. Os resultados são coerentes com as observações experimentais, nas quais também se verifica a pouca diferença entre os valores para a *sustentação*, sugerindo que o cálculo desta última pode ser feito *sem* o uso de um modelo para a turbulência. Entretanto, as coisas são bem diferentes para a *resistência*. Neste caso, nossos resultados indicam uma força cerca de *50 vezes* maior que a estimada pelo cálculo potencial. Isso é puramente resultado da manifestação da turbulência: os termos viscoso e não-linear da equação de Navier-Stokes, embora em princípio desprezíveis, sofrem tamanha modificação que levam a resultados de maneira alguma óbvios e previsíveis.

Ainda nesse ponto, é interessante nos determos um pouco mais sobre a aerodinâmica do automóvel, que nos serviu de 'laboratório', à luz da Teoria da turbulência.

Um dos funcionais do fluxo mais utilizados na análise do desempenho aerodinâmico de veículos é o coeficiente C_d da força de resistência frontal. Uma das mais importantes características desse coeficiente é que ele é *praticamente independente* da geometria do obstáculo e *praticamente constante* com o no. de Reynolds, quando este excede alguns milhares, e aproximadamente igual 0,3, para a grande maioria dos veículos leves. Vamos tentar compreender melhor esses comportamentos. Em primeiro lugar, a energia cinética do campo de vorticidade é rapidamente dissipada pela turbulência. Isso leva a uma considerável perda de pressão na região turbulenta. De maneira mais precisa, essa energia cinética é inicialmente *injetada*, a uma certa taxa, nas escalas *macroscópicas* (o 'inicio' da turbulência) e então dissipada irreversivelmente pela viscosidade (nas escalas *microscópicas*). Analisemos esses fatos mais quantitativamente. Tomando o coeficiente C_d constante (pelo menos por pedaços) como uma informação experimental, calculemos a quantidade de energia

dissipada por unidade de tempo. Isto é igual ao trabalho τ, por unidade de tempo, para se mover o corpo com velocidade U contra a resistência aerodinâmica (frontal) D:

$$\tau = DU = \frac{1}{2} C_D \rho L^2 U^3 \quad .$$

Assim, a energia cinética dissipada, por unidade de massa, é

$$\varepsilon = \frac{\tau}{\rho L^3} = \frac{1}{2} C_D \frac{U^3}{L}$$

Essa quantidade deve ser a taxa de dissipação de energia cinética, no sentido de Kolmogorov. Como se sabe, ela é *constante* (ou muito aproximadamente constante). Escrevendo C_D explicitamente em função de ε, e substituindo os valores das escalas, encontramos, para os nossas geometrias:

$$C_D = \frac{(2L\varepsilon)}{U^3} = \frac{2 \times 10^2 \times 9{,}9 \times 10^6}{1{,}1 \times 10^{10}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_D \approx 0{,}2 \quad .$$

Este resultado, obtido de maneira tão simples, é, contudo, da ordem de grandeza do valor experimental, obtido em túnel-de-vento. Como C_d depente da taxa de dissipação, sua constância deve ter as mesmas restrições que esta. Isto, em última análise, deve ser mais um indicativo da validade das hipóteses da similaridade de Kolmogorov, pelo menos para as situações de interesse prático.

No que tange à turbulência isotrópica, alguns itens merecem um comentário. O primeiro deles é quanto à fenomenologia dos vórtices. Como vimos, nos processos de transferência de energia, as estruturas 'esticam' e 'quebram', causando um considerável e rápido aumento na

enstrofia média. Nosso resultados quantificam esse acréscimo, como podemos verificar ao comparar os valores das enstrofias inicial e do equilíbrio, após cerca de menos de um centésimo de segundo (Ap. G). E isso foi feito com a teoria de Heisenberg, ou seja, sem entrar nos detalhes do movimento, o que, sem dúvida, seria muito mais complicado. É importante frisarmos que a maioria de nossos resultados pode ser verificada, direta ou indiretamente, pela experiência.

O segundo ponto a ser tocado diz respeito às *leis da conservação*. Na sua derivação, assumimos que os campos de velocidade e pressão eram suficientemente suaves para permitir todas as manipulações necessárias, tal como integrações por partes, derivadas de produto, etc. Isso deve ser verdade para qualquer viscosidade *finita*. Para as soluções das equações de Euler ($\nu = 0$) podem não valer, e, portanto, a conservação da energia, usada por nós explicitamente, pode cair por terra, como foi primeiro observado por Onsager. Além do mais, assumimos tacitamente que a solução da equação de Navier-Stokes 'tende' para a da equação de Euler, quando a viscosidade vai a zero. Isto não é provado rigorosamente, como a propósito não o são muitas das 'propriedades' da equação de Navier-Stokes tri-dimensional.

Finalmente, vamos dedicar algumas observações às equações de Navier-Stokes. Como dissemos, não tivemos nenhuma pretensão de fazer um estudo minucioso dessas equações. Entretanto, seria interessante citarmos aqui os resultados das mais recentes pesquisas nesse difícil e importante assunto.

No que toca a conexão entre a abordagem feita aqui e a Teoria dos Sistemas Dinâmicos (Ap. H), devemos lembrar que há várias limitações práticas para as medidas das dimensões dos atratores, quando elas são muito grandes, como é o caso da turbulência. Assim, a mais frutífera aplicação dos sistemas dinâmicos para a Fluidodinâmica não é exatamente a turbulência, mas a *difusão de escalares passivos* num dado fluxo pré-estabelecido.

As simulações numéricas diretas realizadas em 1995 por Borue & Orszag [9] sugerem o expoente da lei -5/3 de Kolmogorov como igual a $-1{,}85 \pm 0.05$. Essa discrepância poderia ser explicada por uma modificação no termo de dissipação: ao invés do Laplaciano ordinário ele seria substituído pela *oitava potência* deste. Obsevações desse tipo só podem ser conseguidas por simulações numéricas de alta resolução. O experimento físico é incapaz de detectá-las. Portanto,

para as situações práticas, a abordagem física, na direção da elegante teoria de Kolmogorov, permanece como uma das mais notáveis ferramentas no árduo campo da Fluidodinâmica.

Apêndice A

Uma Solução 'Fraca' das Equações de Euler.

A gênese de toda uma tentativa de obtenção de uma solução para as equações de Euler, no caso de um fluxo em torno de corpos sólidos, está na existência de um Teorema de fundamental importância na análise vetorial, provado, em sua essência, por Stokes em 1859[1]. Ele pode ser enunciado da seguinte maneira:

Teorema Fundamental: - Um campo vetorial contínuo $\vec{V}$, definido em todo o espaço e que se anula no infinito, juntamente com suas primeiras derivadas, pode ser representado como a soma de um campo irrotacional $\vec{V}_1$ e de um solenoidal $\vec{V}_2$:

(A.1) $$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

em que

(A.1a) $$\vec{\nabla} \times \vec{V}_1 = \vec{0} \quad ; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_2 = 0$$

Sem perda de generalidade, podemos tomar os campos $\vec{V}_1$ e $\vec{V}_2$ tais que:

[1] Numa forma mais completa, este Teorema constitui a base do artigo de Helmholtz sobre o movimento dos vórtices, de 1858.

(A.1b) $$\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_1 = \vec{\nabla}\vec{V} \quad ; \qquad \vec{\nabla}\times\vec{V}_2 = \vec{\nabla}\times\vec{V}$$

A representação (A.1) é *única, exceto por uma constante vetorial.*

É natural, então, tomar o campo de velocidades de um fluido inviscito, que satisfaz às equações de Euler, como o campo $\vec{V}$, dado que as condições de contorno a ele impostas são idênticas às da equação de Euler, na presença de contornos[1].

- *Determinação de* $\vec{V}$.

1. *Cálculo de* $\vec{V}_1$. O campo irrotacional $\vec{V}_1$ pode ser derivado de um potencial escalar Φ na forma:

(A.2) $$\vec{V}_1 = -\vec{\nabla}\Phi + const.$$

Φ satisfaz à equação diferencial

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\Phi\right) = \Delta\Phi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{V}_1$$

que, tendo em vista a condição (A.1b), pode ser escrita como:

(A.3) $$\Delta\Phi = -\vec{\nabla}\cdot\vec{V}$$

A constante, adicionada em (A.2) por questão de generalidade, nada significa para a determinação de Φ . A solução da equação potencial inomogênea (A.3) pode ser encontrada pelo Teorema de Green . Ela é da forma

[1] Suponhamos, por exemplo, que o termo de vorticidade (rotacional) seja 'mais fraco' que o termo potencial (irrotacional). Nesse sentido, a solução da equação de Euler estacionária não seria muito diferente da da equação de Laplace. Daí falarmos de uma teoria 'linearizada'para a equação de Euler.

(A.4) $$4\pi\Phi(P) = \int_{\Omega} \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}}{r(P,Q)} d\Omega$$

Aqui, r é a distância do ponto do campo P, em que Φ está sendo avaliado, ao ponto de integração Q. Se Φ é conhecido, $\vec{V}_1$ também o é de (A.2.), exceto por uma constante.

2. *Cálculo de* $\vec{V}_2$. É conveniente introduzir um *potencial vetor* $\vec{A}$ colocando

(A.5) $$\vec{V}_2 = \vec{\nabla} \times \vec{A} + const.$$

e adicionando uma nova condição,

(A.6) $$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

De (A.5),

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{V}_2$$

que, de acordo com (A.1b), pode ser escrito:

(A.7) $$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

Mais uma vez, a constante aditiva pode ser abolida. Usando (A.6), a identidade vetorial

$$\Delta \vec{A} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)$$

se reduz a

(A.8) $$\Delta \vec{A} = -\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = -\vec{\nabla} \times \vec{V}$$

Portanto, do mesmo modo que Φ, as componentes de $\vec{A}$ satisfazem a equações potenciais inomogêneas e, assim, possuem uma solução análoga à (A.4):

(A.9) $$4\pi\vec{A} = \int_{\Omega} \frac{\vec{\nabla} \times \vec{V}}{r} d\Omega$$

Além do mais, essa expressão para $\vec{A}$ satisfaz também à condição (A.6) . Exceto por uma constante, quando $\vec{A}$ é conhecido, $\vec{V}_2$ é obtido de (A.5).

Uma simplificação óbvia surge se, por exemplo, o campo $\vec{V}_2$ é *identicamente nulo*. Neste caso, $\vec{V} = \vec{V}_1$ e, portanto, o campo de velocidades é *irrotacional*. Com as derivadas em relação ao tempo ignoradas e na aproximação de incompressibilidade, temos

(A.10) $$\vec{V} = \vec{V}_1 = -\vec{\nabla}\Phi$$

ou seja, o campo de velocidades é o *gradiente de uma função harmônica*.

Apêndice B

Uma Solução Geral das Equações de Navier-Stokes Linearizadas.

Queremos, nesta seção, determinar uma solução fundamental do sistema de Navier-Stokes linearizado ou, para ser mais exato, o tensor construído a partir de soluções correspondentes a forças viscosas dirigidas ao longo dos eixos coordenados. Assim, consideremos o problema [2] ($q \equiv p/\rho$):

$$\text{(B.1)} \qquad \begin{cases} \nu\Delta\vec{u}_k(\vec{x},\vec{y}) + \vec{\nabla}q_k(\vec{x},\vec{y}) = \delta\,(\vec{x}-\vec{y})\vec{e}_k \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{u}_n = 0 \end{cases}$$

Aqui, $\vec{e}_k$ é um vetor unitário dirigido ao longo do k-ésimo eixo coordenado e $\delta\,(x\text{-}y)$ é a função delta de Dirac. Todas as diferenciações são feitas em relação a x, e o ponto y faz papel de um parâmetro (quando a força aplicada está concentrada em y). A condição imposta ao sistema é que $\vec{u}_k$ e $q_k \to 0$ quando $|\vec{x}| \to \infty$.

Para encontrar $\vec{u}_k$ e q_k faremos uso do Método das Transformadas de Fourier.

[2] Esta seção, eminentemente matemática, segue de perto à exposição de O.A. Ladizhenskaya feita no Cap. IV do livro "The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flows" - N.Y., Gordon and Breach, 1969.

Lembrando que:

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\alpha(x-y)} d\alpha dy$$

e que

$$\Delta\left(\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\right) = -\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

e

$$\Delta^2\left(\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{8\pi}\right) = -\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

temos:

$$\delta(\vec{x}-\vec{y}) = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha(x-y)} d\alpha$$

$$\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} = (2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(x-y)}}{\alpha^2} d\alpha$$

$$\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{8\pi} = -(2\pi)^{-3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(x-y)}}{\alpha^4} d\alpha$$

em que

$$\alpha^2 = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k^2 \qquad ; \qquad \alpha x = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k x_k$$

Se $\tilde{v}(\alpha)$ denota a transformada de Fourier da função $v(x)$, então,

$$v(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha$$

Substituindo as transformadas de Fourier na em (B.1), temos:

$$\begin{cases} -\nu\alpha^2 \tilde{u}_j^k - i\alpha_j \tilde{q}^k = (2\pi)^{-3/2}\delta_j^k \\ \alpha_j \tilde{u}_j^k \end{cases} \qquad (k, j = 1,2,3)$$

Desse sistema, $\tilde{u}_j^k$ e $\tilde{q}_j^k$ podem ser univocamente determinados:

$$\tilde{u}_j^k = \frac{1}{\nu(2\pi)^{3/2}\alpha^2}\left[-\delta_j^k + \frac{\alpha_j\alpha_k}{\alpha^2}\right] \quad ,$$

$$\tilde{q}_j^k = \frac{i\alpha_k}{(2\pi)^{3/2}\alpha^2}$$

Usando as fórmulas de inversão,

$$u_j^k(x,y) = (2\pi)^{-3/2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}_j^k(\alpha)e^{i\alpha(x-y)}d\alpha =$$

$$= \nu^{-1}\left[-\frac{\delta_j^k}{4\pi|x-y|} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}\left(\frac{|x-y|}{8\pi}\right)\right] \quad ,$$

$$q^k(x,y) = (2\pi)^{-3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i\alpha_k}{\alpha^2}e^{i\alpha(x-y)}d\alpha = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{1}{4\pi|x-y|}\right)$$

ou, efetuando as diferenciações,

$$
\text{(B.2)} \qquad \begin{cases} \widetilde{u_j^k}(x,y) = -(8\pi\nu)^{-1}\left[\dfrac{\delta_j^k}{|x-y|} + \dfrac{(x_j-y_j)(x_k-y_k)}{|x-y|^3}\right] \\ \\ q^k(x,y) = -\dfrac{(x_k-y_k)}{4\pi|x-y|^3} \end{cases}
$$

As soluções $\vec{u}^k = (u_1^k, u_2^k, u_3^k)$ e q^k nos permitem construir os potenciais volu-métricos:

$$
\vec{U}(\vec{x}) = \int_\Omega \widetilde{u^k}(x,y) f_k(y)dy
$$

e

$$
P(\vec{x}) = \int_\Omega q^k(x,y) f_k(y)dy
$$

que, por causa de (B.1), satisfazem ao *sistema de Navier-Stokes não-homogêneo:*

$$
\text{(B.3)} \qquad \begin{cases} \nu\Delta\vec{U} - \vec{\nabla}P = f(\vec{x}) \\ \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{U} = 0 \end{cases}
$$

É importante lembrar que as propriedades de $\vec{U}(\vec{x})$ e de $P(x)$ são idênticas às do Potencial Newtoniano.

- *Fórmulas de Green para as Equações de Navier-Stokes Linearizadas.*

Para obtermos as chamadas fórmulas de Green, partamos da seguinte identidade:

$$\text{(B.4)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_k}\left[T_{ik}(\vec{u})v_i\right] = \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)+\left(\nu\Delta u_i-\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)v_i$$

na qual,

$$T_{ik}(\vec{u}) = -\delta_i^{\,k} q + \nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

é o *tensor de tensão,* correspondente ao fluxo definido por $\vec{u}$ e q.

Integrando (B.4) num volume Ω, temos:

$$\text{(B.5)} \qquad \int_\Omega\left(\nu\Delta-\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)v_i dx = -\int_\Omega \frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}+\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)dx +$$

$$+\int_S T_{ik}(\vec{u})v_i n_k dS$$

em que $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ é a normal exterior a S.

Introduzindo uma função suave arbitrária p e intercambiando u_i e v_i obtemos, de (B.5) :

$$\text{(B.6)} \qquad \int_\Omega\left[\left(\nu\Delta v_i-\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)u_i - v_i\left(\nu\Delta u_i+\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)\right]dx =$$

$$= \int_S\left[T_{ij}(\vec{v})u_i n_j - T'_{ij}(\vec{u})v_i n_j\right]dS$$

em que

$$T'_{ik} = \delta_i^{\,k} q + \nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

É natural chamarmos (B.5) e (B.6) de fórmulas de Green correspondentes ao problema de Stokes.

Como é usual no cálculo com funções de Green, a partir de (B.6) e utilizando uma solução singular fundamental, obtemos uma representação para qualquer solução $\vec{u}$, P do sistema não-homogêneo (B.3) e função do termo independente e dos valores de $\vec{v}$ e de $T_{ik}(\vec{v})$ *sobre o contorno de S.*

De fato, substituindo em (B.6) as soluções fundamentais (B.2), obtemos:

(B.7) $$v_k(x) = \int_\Omega u_k^i(x,y) f_i(y) dy + \int_S T'_{ij}(\vec{u}^k(x,y))_y v_i n_j dS -$$

$$- \int_S u_k^i(x,y) T_{ij}(\vec{v}) n_j dS$$

para qualquer $x \in \Omega$ [1]

A pressão correspondente a $\vec{v}$ é obtida de (B.3) usando a expressão para $\vec{v}$ e a iden-tidade (obtida a partir de (B.1)):

(B.8) $$\Delta_x T'_{ij}(\vec{u}^k(x,y))_y = \delta_i^{\,j} \Delta_x q^k(x,y) + \nu \frac{\partial}{\partial y_i} \Delta_x u_j^k + \nu \frac{\partial}{\partial y_j} \Delta_x u_i^k =$$

$$= \delta_i^{\,j} \Delta_x q^k(x,y) - \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_x u_j^k - \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_x u_i^k =$$

[1] O índice y em $(X)_y$ mostra que a diferenciação em X é feita com respeito a y

$$= -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} q^k - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} q^k = -2\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} q^k$$

$p(x)$ é obtido usando (B.3), (B.7) e (B.8):

(B.9) $$p(\bar{x}) = \int_\Omega q^k(x,y) f_k(y) dy - \int_S q^k(x,y) T_{kj}(\bar{v}) n_j dS -$$

$$-2\nu \int_S \frac{\partial q^k}{\partial x_j} v_k n_j dS$$

Apêndice C

Os Potenciais Hidrodinâmicos

As expressões para $v_k(\vec{x})$ e $P(\vec{x})$, obtidas no no Ap. B, sugerem que é mais con-veniente introduzir os chamados potenciais 'single' e 'double layers', muito difundidos na Teoria Clássica do Potencial.

Por um potencial 'single layer', com densidade $\Psi(\eta)$, entendemos as integrais:

$$\text{(C.1)} \qquad \begin{cases} \vec{V}(\vec{x},\psi) = -\int_S \vec{u}^k(x,\eta)\psi_k(\eta)dS_\eta \\ Q(x,\psi) = -\int_S q^k(x,\eta)\psi_k(\eta)dS_\eta \end{cases}$$

e por um potencial de 'double layer', com densidade $\Phi(\eta)$, as seguintes:

$$\text{(C.2)} \qquad \begin{cases} W_k(\vec{x},\phi) = \int_S T_{ij}(\vec{u}^k(\vec{x},\eta))_\eta \phi_i(\eta)n_j(\eta)dS_\eta \\ \Pi(\vec{x},\phi) = -2\nu \dfrac{\partial}{\partial x_j}\int_S q^k(\vec{x},\eta)n_j(\eta)\phi_k(\eta)dS_\eta \end{cases}$$

Com essas definições, a expressão para $v_k(\vec{x})$ fica:

(C.3) $$v_k(x) = \int_\Omega u_k^i(x,y) f_i(y) dy + W_k(x,\vec{v}) + V_k(x, \vec{T}_j(\vec{v}) n_j)$$

na qual,

$$\vec{T}_j(\vec{v}) = (T_{1j}(\vec{v}), T_{2j}(\vec{v}), T_{3j}(\vec{v}))$$

Pode ser mostrado que os potenciais (C.2) se escrevem:

(C.4) $$\begin{cases} W_i(x,\phi) = \int_S K_{ij}(x,\eta)\phi_j(\eta) dS\eta \\ \Pi(x,\phi) = \int_S K_j(x,\eta)\phi_j(\eta) dS_\eta \end{cases}$$

em que,

(C.5) $$\begin{cases} K_{ij}(x,\eta) = -\dfrac{3}{4\pi} \dfrac{(x_i - \eta_i)(x_j - \eta_j)(x_k - \eta_k)}{|x-\eta|^5} \\ K(x,\eta) = \dfrac{\nu}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial x_k} \left(\dfrac{x_j - \eta_j}{|x-\eta|^3} \right) n_k(\eta) \end{cases}$$

Esses potenciais, cujas propriedades analíticas são idênticas às dos potenciais eletros-táticos, são conhecidos na Fluidodinâmica como *Potenciais Hidrodinâmicos.*

Apêndice D

Teoremas Relativos às Soluções da Equação de Laplace em Termos de Potenciais

Seja G uma região tri-dimensional, com um elemento de volume $dV = dxdydz$ e contorno Γ, assumido suficientemente suave, então duas funções, u e v, são relacionadas pelas chamadas fórmulas ou identidades de Green:

$$\text{(D.1)} \qquad \iiint_G \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right] dV + \iiint_G v \Delta u dV = \iint_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Aqui, u e v e as segundas-derivadas de u são assumidas contínuas em G, e as primeiras-derivadas de u em $G + \Gamma$.

Se as primeiras e segundas derivadas de u e v são contínuas em $G + \Gamma$, e as segundas derivadas de u são contínuas em G,

$$\text{(D.2)} \qquad \iiint_G (u\Delta v - v\Delta u) dV = \iint_\Gamma \left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right] dS$$

Decorrente das fórmulas de Green é o seguinte

Teorema (D.1) .

Duas funções harmônicas em G que são contínuas em $G+\Gamma$ e coincidem no contorno, são idênticas em toda parte.

As fórmulas anteriores sofrem uma importante modificação se v é uma solução fundamental da equação de Laplace.

Seja $P(x,y,z)$ um ponto no interior de G e uma função arbitrária duplamente continuamente diferenciável. Então, pode ser mostrado que as fórmulas anteriores se escrevem:

$$\text{(D.3)} \qquad \begin{aligned} &\iiint_G \left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}+\frac{\partial u}{\partial \zeta}\frac{\partial v}{\partial \zeta}\right]dV + \\ &+\iiint_G u\Delta v dV = pu+\iint_\Gamma \left[u\frac{\partial v}{\partial n}-\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS \end{aligned}$$

e

$$\text{(D.4)} \qquad \iiint_G [u\Delta w - v\Delta u]dV + \iint_\Gamma \left[u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right]dS$$

com

$$p:\begin{cases} 4\pi \rightarrow & P\in G \\ 2\pi \rightarrow & P\in \Gamma \\ 0 \rightarrow & P\notin G+\Gamma \end{cases}$$

Se $w = 0$, $P\in G$ e u é uma função harmônica em G, então,

$$\text{(D.5)} \qquad u=\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma \frac{\sigma}{r}dS-\frac{1}{4\pi}\iint_\Gamma \mu\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r}\right]dS$$

ou, em outras palavras, *qualquer função que é regular harmônica em G, e continuamente diferenciável em $G+\Gamma$, pode ser representada como o potencial de uma distribuição, sobre a superfície do contorno, de uma camada-simples de densidade σ e de uma camada-dupla de densidade μ.*

A seguir, enunciaremos, sem apresentar as respectivas provas, alguns teoremas relativos aos potenciais anteriormente vistos, que serão úteis no tratamento numérico de problemas de valores de contorno.

Teorema (D.2).

Se μ é contínuo sobre uma superfície S, num espaço m dimensional, então o po-tencial de camada-dupla

$$W(\bar{x}) = \int_S \mu(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r^{m-2}}\right)dS$$

tem um valor completamente definido para qualquer ponto sobre a superfície S. Tal valor varia continuamente quando se percorre a superfície S.

Teorema (D.3).

Se Γ é uma superfície de Liapunov, e a densidade $\sigma(\xi)$ é limitada e integrável, então, o potencial de camada-simples

$$V(\bar{x}) = \int_S \sigma(\xi)\frac{1}{r^{m-2}}\,dS$$

é contínuo em todo o espaço.

Teorema (D.4).

Seja F uma parte do contorno Γ de uma região G, $\sigma(\xi)$ e $\mu(\xi)$ as densidades de distribuição sobre F, limitadas e diferenciáveis, e $P_o \in F$. Então para $m = 3$,

$$\lim_{P \to P_o^{(+)}} W(P) - 2\pi\mu(P_o) = W(P_o)$$

$$\lim_{P \to P_o^{(-)}} W(P) - 2\pi\mu(P_o) = W(P_o)$$

em que $P \to P_o^{(+)}$ denota a aproximação pelo lado 'positivo' da superfície e $P \to P_o^{(-)}$ a aproximação pelo lado 'negativo'.

Teorema (D.5).

Nas mesmas condições do teorema anterior, temos que o potencial de camada-simples tem, sobre F, uma derivada normal regular de ambos os lados da superfície. Os valores limites das derivadas normais são, para $m = 3$,

$$\lim_{P \to P_o^{(+)}} \frac{\partial V(P)}{\partial n_{(+)}} - 2\pi\sigma(P_o) = \frac{\partial V(P_o)}{\partial n}$$

$$\lim_{P \to P_o^{(-)}} \frac{\partial V(P)}{\partial n_{(-)}} - 2\pi\sigma(P_o) = \frac{\partial V(P_o)}{\partial n}$$

em que $\partial/\partial n_{(+)}$ denota diferenciação na direção 'positiva' da normal à superfície em P_o e $\partial/\partial n_{(-)}$ a diferenciação na direção 'negativa' da normal.

Observação: Seja $\bar{x}$ um ponto arbitrário do espaço, e n a normal à superfície Γ em P_o, passando pelo ponto $\bar{x}$. Se $\bar{x} \in \Gamma$, então é possível calcular a derivada do potencial ao longo da direção de n simplesmente sob o sinal de integral. Ou seja,

$$\frac{\partial V(\bar{x})}{\partial n} \equiv \int_{\Gamma} \sigma(\xi) \frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{1}{r^{m-2}}\right] d\Gamma$$

Teorema (D.6.).

As derivadas de um potencial de camada-dupla na direção das normais à superfície variam continuamente quando $P \to P_o$, *ao longo da direção normal em* P_o. *Todavia, as derivadas perpendiculares à normal variam descontinuamente, de tal modo que:*

$$\lim_{P \to P_o^{(+)}} \frac{\partial W(P)}{\partial t_{(+)}} - \frac{\partial W(P_o)}{\partial t} = 2\pi \frac{\partial \mu(P_o)}{\partial t}$$

$$\lim_{P \to P_o^{(-)}} \frac{\partial W(P)}{\partial t_{(-)}} - \frac{\partial W(P_o)}{\partial t} = -2\pi \frac{\partial \mu(P_o)}{\partial t}$$

em que $\partial / \partial t_{(\pm)}$ denota as derivadas nas direções perpendiculares à normal.

Apêndice E

Equivalência entre uma Distribuição de Vorticidade e uma Distribuição de Dipolo

Como vimos, a velocidade induzida por uma linha de vórtices de intensidade Γ ao longo de uma curva fechada dada, parametricamente, por $\vec{r}(s)$ é:

$$\vec{u}(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi}\oint \frac{\vec{s}\times\left[\vec{x}-\vec{r}(s)\right]}{\left|\vec{x}-\vec{r}(s)\right|^3}ds = \frac{\Gamma}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left[\oint\frac{d\vec{s}}{\left|\vec{x}-\vec{r}(s)\right|}\right]$$

Uma extensão de tais resultados para uma única linha de vórtices é obtida considerando-se várias curvas fechadas $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$, com circulações $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots, \Gamma_n$, e a super-posição dos movimentos correspondentes a cada uma delas.

Seja a superfície A da Fig.E.1. Digamos que nessa superfície escolhamos N curvas como indicado. A superfície delimitada por duas curvas subseqüentes é denotada por $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. A velocidade num ponto $\vec{x}$ será a soma das velocidades induzidas por cada uma das curvas. Também a função potencial será a soma dos valores de Φ para cada um dos N movimentos:

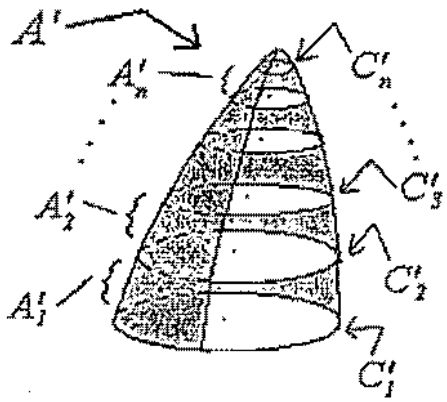


Fig.E.1. *Uma superficie de vorticidade.*

$$\Phi = \frac{\Gamma_1}{4\pi}\int_{(A'_1+A'_2+\ldots+A'_N)} d\Theta + \frac{\Gamma_2}{4\pi}\int_{(A'_2+A'_3+\ldots+A'_N)} d\Theta + \ldots +$$

$$+\ldots+\frac{\Gamma_{N-1}}{4\pi}\int_{(A'_{N-1}+A'_N)} d\Theta + \frac{\Gamma_N}{4\pi}\int_{A'_N} d\Theta$$

Essa última expresão pode ser escrita como segue:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi}\left[\Gamma_1\int_{A'_1} d\Theta + \left(\Gamma_1+\Gamma_2\right)\int_{A'_2} d\Theta + \left(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3\right)\int_{A'_3} d\Theta + \ldots +\right.$$

$$\left.+\ldots+(\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\ldots+\Gamma_N)\int_{A'_N} d\Theta\right] = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i^*\int_{A'_i} d\Theta$$

na qual:

$$\Gamma_i^* = \begin{cases} \Gamma_1 \\ \Gamma_1+\Gamma_2 \\ \Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3+\cdots+\Gamma_N \end{cases}$$

Fisicamente , o valor de Γ em qualquer ponto $\vec{x}'$ sobre a superficie A' é igual à circu-lação de uma curva fechada que 'fura' a superficie somente em $\vec{x}'$, passando de 'fora' para 'dentro'.

Se generalizarmos para o caso de uma distribuição contínua de linhas sobre toda a superfície A' obteremos Γ somando sobre todas as circulações, que mudam por quantidades infinitesimais. Assim, Γ resulta como uma função de cada ponto da superfície e as linhas de vórtices tornam-se linhas de $\Gamma = \text{cte}$. O potencial em qualquer ponto fora de A' é dado por:

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{A'} \Gamma(\vec{x}')d\Theta$$

ou,

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{A'} \Gamma(\vec{x}') \frac{\cos\theta}{r^2} d\Theta$$

Essa última expressão é, essencialmente, a função potencial para uma *distribuição de dipolo* de densidade não-constante μ, com $\mu \equiv \Gamma/4\pi$.

Apêndice F

O Espectro de Energia Isotrópico Tri-dimensional em termos de Espectros Unidimensionais

Levando em conta a simetria esférica, as nove componentes do tensor de correlação entre os pontos P e P' são reduzidas a três, R_1, R_2 e R_3. Mas, $R_2 = R_3$, tal que:

(F.1)
$$r\frac{\partial f(r)}{\partial r} + 2\left[f(r) - g(r)\right] = 0$$

f(r) e *g(r)* são funções pares de *r*. Para $P \rightarrow P'$, isto é, $r \rightarrow 0$,

(F. 2)
$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{2!}f''(0) + \frac{r^4}{4!}f^{iv}(0) + \cdots$$
$$g(r) = 1 + \frac{r^2}{2!}g''(0) + \frac{r^4}{4!}g^{iv}(0) + \cdots$$

em que $''$ e iv denotam, respectivamente, as segunda e quarta derivadas em relação a *r*.

Além das correlações principais, $f(r)$ e $g(r)$, segundo Kármán & Howarth demonstraram, as mais importantes correlações entre pontos P e P' são $h(r)$,$K(r)$ e $q(r)$, definidas como:

$$h(r) = \frac{\overline{u_2^2 u_1'}}{(\overline{u^2})^{3/2}}$$

(F. 3)
$$K(r) = \frac{\overline{u_1^2 u_1'}}{(\overline{u^2})^{3/2}}$$

$$q(r) = \frac{\overline{u_2 u_1 u_2'}}{(\overline{u^2})^{3/2}}$$

As funções $f(r)$ e $g(r)$ podem ser escritas na forma de espectros de energia unidimensionais.

Assumindo que $f(r)$ e $g(r)$ são funções que variam muito suavemente com o tempo, podemos escrever:

(F. 4)
$$\overline{u^2} f(r,t) = \overline{u_r u_r'} = \int_0^\infty F(k,t)\cos(kr)dk$$

Notamos que $F(r)$ representa uma função densidade de energia unidimensional. Além do mais, tomamos a transformada-coseno de Fourier, já que, obviamente, somente nos interessa a energia fisicamente significante, ou seja, energia contida na turbulência.

Similarmente,

(F. 5)
$$\overline{u^2} g(r,t) = \overline{u_t u_t'} = \int_0^\infty G(k,t)\cos(kr)dk$$

Para encontrar uma relação entre $F(k,t)$ e $G(k,t)$, vamos partir de

(F. 6) $$\overline{u^2} f(r,t) = \int_0^\infty F(k,t)\cos(kr)dk$$

mas,

(F. 8) $$\cos(kr) = \frac{\left(e^{ikr} + e^{-ikr}\right)}{2}$$

portanto,

(F. 9) $$\overline{u^2} f(r,t) = \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty F(k,t)e^{ikr}dk + \int_0^\infty F(k,t)e^{-ikr}dk\right]$$

A segunda integral no segundo membro pode ser reescrita.

Seja $\alpha = -k$.

Então,

(F. 10) $$\int_0^\infty F(k,t)e^{-ikr}dk = -\int_0^\infty F(-\alpha,t)e^{-i\alpha r}d\alpha = \int_0^\infty F(-\alpha,t)e^{-kr}dk$$

mas, $F(\alpha) = F(-\alpha)$. Portanto,

(F.11) $$\int_0^\infty F(k)e^{-ikr}dk = \int_{-\infty}^0 F(\alpha)e^{i\alpha r}d\alpha$$

Então, $\alpha = -k$ e (F.11) levam a

(F. 12) $$\overline{u^2} f(r,t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty F(k,t)e^{ikr}dk$$

ou

(F. 13) $$F(k,t) = \frac{\overline{u^2}}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(r,t)e^{-ikr}dr$$

Da mesma maneira, podemos encontrar uma função espectro de energia unidimensional correspondente à função $g(r)$. Tal função é:

(F.14) $$G(k,t) = \frac{\overline{u^2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(r,t) e^{-ikr} dr$$

e, então,

(F. 15) $$\overline{u^2} g(r,t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(k,t) e^{ikr} dk$$

De (F. 12) e (F. 15) temos, para $r \rightarrow 0$:

(F. 16) $$\overline{u^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} F(k,t) dk$$

e

(F. 17) $$\overline{u^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} G(k,t) dk$$

Por isso, nesse limite,

(F. 18) $$\int_{-\infty}^{\infty} F(k,t) dk = \int_{-\infty}^{\infty} G(k,t) dk$$

Da relação

(F. 19) $$g(r,t) = f(r,t) + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} f(r,t)$$

temos,

(F. 20) $$\int_{-\infty}^{\infty} G(k,t) e^{ikr} dk = \int_{-\infty}^{\infty} F(k,t) e^{ikr} dk + \frac{r}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (ki) F(k,t) e^{ikr} dk$$

que integrado por partes dá:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(k,t)e^{ikr}dk = \int_{-\infty}^{\infty} F(k,t)e^{ikr}dk + \frac{1}{2}e^{ikr}kF(k,t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} -$$

(F. 21)

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\frac{\partial}{\partial k}F(k,t) + F(k,t)\right]e^{ikr}dk$$

mas,

(F. 22)
$$\lim_{k\to\pm\infty}\left(kF(k)\right) = 0$$

Esse limite é conseqüência da condição que

(F. 23)
$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(k)\right|dk \;<\; \infty$$

Portanto, (F. 21) torna-se:

(F.24)
$$\int_{-\infty}^{\infty} G(k,t)e^{ikr}dk = \int_{-\infty}^{\infty} F(k,t)e^{ikr}dk - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[k\frac{\partial}{\partial k}F(k,t) + F(k,t)\right]e^{ikr}dk$$

Finalmente, temos:

(F. 25)
$$\int_{-\infty}^{\infty} G(k,t)e^{ikr}dk = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} F(k,t)e^{ikr}dk - \int_{-\infty}^{\infty} k\frac{\partial}{\partial k}F(k,t)e^{ikr}dk\right]$$

e, evidentemente,

(F. 26)
$$G(k,t) = \frac{1}{2}\left[F(k,t) - k\frac{\partial}{\partial k}F(k,t)\right]$$

- O Espectro de Energia Isotrópico Tri-dimensional.

Da seguinte expressão para o tensor de correlação,

(F.27) $$R_{ij}(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{ij}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{k}$$

segue que

(F. 28) $$\Phi_{ij}(\vec{k},t) = \frac{1}{8\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}R_{ij}(\vec{r},t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}d\vec{r}$$

Usando as coordenadas esféricas definidas na Fig. F.1,

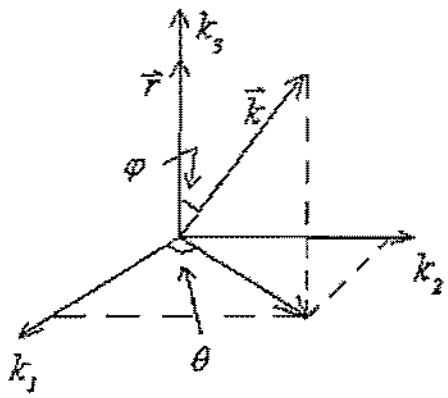


Fig. F.1. *Definição das coordenadas esféricas.*

De (F. 27) , temos

(F. 29) $$R_{ii} = \int_0^{\infty}dk\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\Phi_{ii}(k,t)k^2e^{jkr\cos\theta}\,sen\theta d\theta$$

Obviamente,

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kr\cos\theta$$

(F. 30) $$k = |\vec{k}|$$

$$dk = k^2 sen\theta d\theta d\varphi$$

Então,

(F. 31) $$R_{ii} = 4\pi \int_0^\infty \Phi_{ii}(k,t) k^2 \frac{sen(kr)}{kr} dk$$

Por definição, o espectro de energia tri-dimensional *Ek,t)* é:

(F. 32) $$E(k,t) = 2\pi k^2 \Phi_{ii}(k,t)$$

Então,

(F. 33) $$R_{ii} = 2\int_0^\infty E(k,t) k^2 \frac{sen(kr)}{kr} dk$$

Todavia,

(F. 34) $$R_{ii}(0) = 3\overline{u^2}$$

Num sistema arbitrário de coordenadas, (x_1, x_2, x_3),

(F. 35) $$R_{ij} = \left(\frac{f(r) - g(r)}{r^2}\right) \begin{bmatrix} \xi_1^2 & \xi_1\xi_2 & \xi_1\xi_3 \\ \xi_2\xi_1 & \xi_2^2 & \xi_2\xi_3 \\ \xi_3\xi_1 & \xi_3\xi_2 & \xi_3^2 \end{bmatrix} + g(r) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para um sistema esférico,

$$R_{ii} = \overline{u^2}\left[f(r) + 2g(r)\right] =$$

$$= \int_0^\infty \left[F(k,t) + 2G(k,t)\right] \cos(kr)dk =$$

$$= \left[F(k,t) + G(k,t)\right] \frac{sen(kr)}{kr} \Big|_0^\infty -$$

$$-\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial k}\left[F(k,t) + 2G(K,t)\right] \frac{sen(kr)}{kr} dk =$$

(F. 36) $$= -\int_0^\infty \frac{d}{dk}\left[F(k,t) + 2G(K,t)\right] k \frac{sen(kr)}{kr} dk$$

Usando o teorema da inversão de Fourier, de (F. 36) e (F. 33), chegamos a

(F. 37) $$k\frac{\partial}{\partial k}\left[F(k,t) + 2G(k,t)\right] = -2E(k,t)$$

Mas,

(F. 38) $$G(k,t) = \frac{1}{2}\left[F(k,t) - k\frac{\partial}{\partial k}F(k,t)\right]$$

Assim, (F. 37) pode ser simplificada para dar:

$$k\left[\frac{\partial F}{\partial k} + 2\frac{\partial G}{\partial k}\right] = k\left[\frac{dF}{dk} + \frac{dF}{dk} - \frac{dF}{dk} - k^2\frac{d^2F}{dk^2}\right] =$$

(F. 39)

$$= k\left[\frac{dF}{dk} - k\frac{d^2F}{dk^2}\right]$$

Definindo o operador,

(F. 40) $$D_3 \equiv \frac{1}{2}\left[k^2 \frac{d^2}{dk^2} - k\frac{d}{dk}\right]$$

chega-se a:

(F. 41) $$E(k,t) = D_3\left[F(k,t)\right]$$

Essa expressão permite calcular o espectro da turbulência tri-dimensional a partir de um dos espectros unidimensionais [cf. ref. [31], Cap. 2].

Apêndice G

Estimativas da Ordem de Magnitude de Algumas Grandezas da Turbulência Homogênea e Isotrópica

A turbulência homogênea e isotrópica, embora um pouco distante dos sistemas encontrados na prática, pode, como vimos, ser tratada matemática e numericamente de maneira muito completa. A seguir, apresentaremos as estimativas numéricas de quantidades físicas de muito interesse ao estudo de sistemas turbulentos isotrópicos, tomando como exemplo o sistema turbulento estudado no Cap. 6, sec. 6.4.

G.1. A Enstrofia, $D(t)$.

Por definição, a *enstrofia*, em função do espector de energia, pode ser escrita:

$$D(t) \equiv \int_0^\infty k^2 E(k,t)dk$$

Por integração direta, utilizando a forma de Heisenberg para o espectro de equlíbrio, obtemos, os seguintes valores[1]:

[1] Quando se fizeram necessárias integrações numéricas, utilizou-se diretamente o *Mathematica*.

$$D(0) = 1{,}94 \times 10^5 s^{-2} \quad \text{(inicial)}$$

$$D(t_c) = 3{,}3 \times 10^7 s^{-2} \quad \text{(no equilíbrio)}$$

G.2. A Palinstrofia, $\wp(t)$.

Por definição, a *palinstrofia*, em função do espectro de energia, é escrita:

$$\wp(t) \equiv \int_0^\infty k^4 E(k,t) dk$$

Com a forma do espectro de equlíbrio dada pelas hipóteses de Heisenberg, integrando a equação acima, obtemos:

$$\wp(0) = 5{,}0 \times 10^5 \quad \text{(inicial)}$$

$$\wp(t_c) = 3{,}7 \times 10^{11} \quad \text{(no equilíbrio)}$$

G.3. O Número de Onda de Dissipação (Comprimento de Kolmogorov).

De (5.39), temos,

$$k_s = k_o \left(\frac{3\chi}{4\nu} \sqrt{\frac{E(k_o)}{k_o}} \right)^{3/4} = 1{,}1 \cdot \left(\frac{3 \cdot 0{,}45}{4 \cdot 0{,}15} \sqrt{\frac{6{,}2 \times 10^4}{1{,}1}} \right)^{3/4} \approx 122 \ cm^{-1}$$

G.4. A Taxa de Dissipação de Energia Cinética, ε.

Da Hidrodinâmica Clássica, temos que a taxa de dissipação de energia é dada por:

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^\infty k^2 E(k,t_c)dk = 2\nu\left(D(t_c)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 2 \cdot 0{,}15 \cdot \left(3{,}3 \times 10^7\right) = 9{,}9 \times 10^6 \ cm^2 \cdot s^{-3}$$

G.5. O Valor-Quadrático-Médio dos Gradientes de Pressão.

Da expressão (5.41), com os valores das grandezas que aparecem calculadas anteriormente, obtemos,

$$\overline{\left(\bar{\nabla} p\right)^2} \approx 0{,}17 \cdot \rho^2 v_o^4 k_o^{4/3} k_s^{2/3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\left(\bar{\nabla} p\right)^2} \approx 0{,}17 \cdot 1{,}44 \times 10^{-6} \cdot 4{,}32 \times 10^{10} \cdot 1{,}135 \cdot 24{,}6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\left(\bar{\nabla} p\right)^2} \approx 2{,}95 \times 10^5 \ dyn^2 \ cm^{-6}$$

G.6. A Extensão Espacial Média dos Gradientes de Pressão, λ_p.

De (5.42), e com os valores das grandezas correspondentes,

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\rho^2 v_o^4}{\overline{\left(\bar{\nabla} p\right)^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_p = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{1{,}44 \times 10^{-6} \cdot 4{,}32 \times 10^{10}}{2{,}95 \times 10^5}} \approx 0{,}37 \ cm$$

G.7. A Extensão Espacial Média dos Gradientes de Velocidade, λ_v.

A chamada *Microescala de Taylor* pode ser calculada de :

$$\lambda_v = \sqrt{\frac{\overline{u^2}}{\overline{(\vec{\nabla} \times \vec{u})^2}}} = \sqrt{\frac{15\nu\overline{u^2}}{\varepsilon}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_v \approx \sqrt{\frac{15 \cdot 0{,}15 \cdot 2{,}08 \times 10^5}{9{,}9 \times 10^6}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_v \approx 0{,}22 \ cm$$

G.8. O 'Invariante' de Loitsyanskii, Λ.

Essa quantidade pode ser calculada a partir da expressão :

$$\Lambda(t) = \frac{\overline{u^2}}{9\pi}\int_0^\infty r^4 f(r,t)dr = \frac{\overline{u^2}}{9\pi}\int_0^\infty r^4 f(r,0)dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Lambda(0) = \Lambda = \frac{\overline{u^2}}{9\pi}\int_0^\infty r^4 e^{-(r/2{,}32)^2} dr = \frac{1}{8\pi}\frac{2{,}08 \cdot 10^5 \cdot (2{,}32)^5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Lambda \approx 3{,}3 \times 10^5 \ cm^7 \cdot s^{-2}$$

G.9. A Constante de Kolmogorov, C_k.

O valor da constante de Kolmogorov, adimensional, resulta da expressão que, como vimos, é válida para o 'range' inercial do espectro de turbulência (Fig. 6.16). Do espectro de energia no equilíbrio,

$$E(k) = C_k \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

para, por exemplo, $k = 10$, $E(10) \approx 1{,}54 \times 10^3$. Com o valor, conhecido, da taxa de dissipação de energia, a constante de Kolmogorov segue imediatamente [1]:

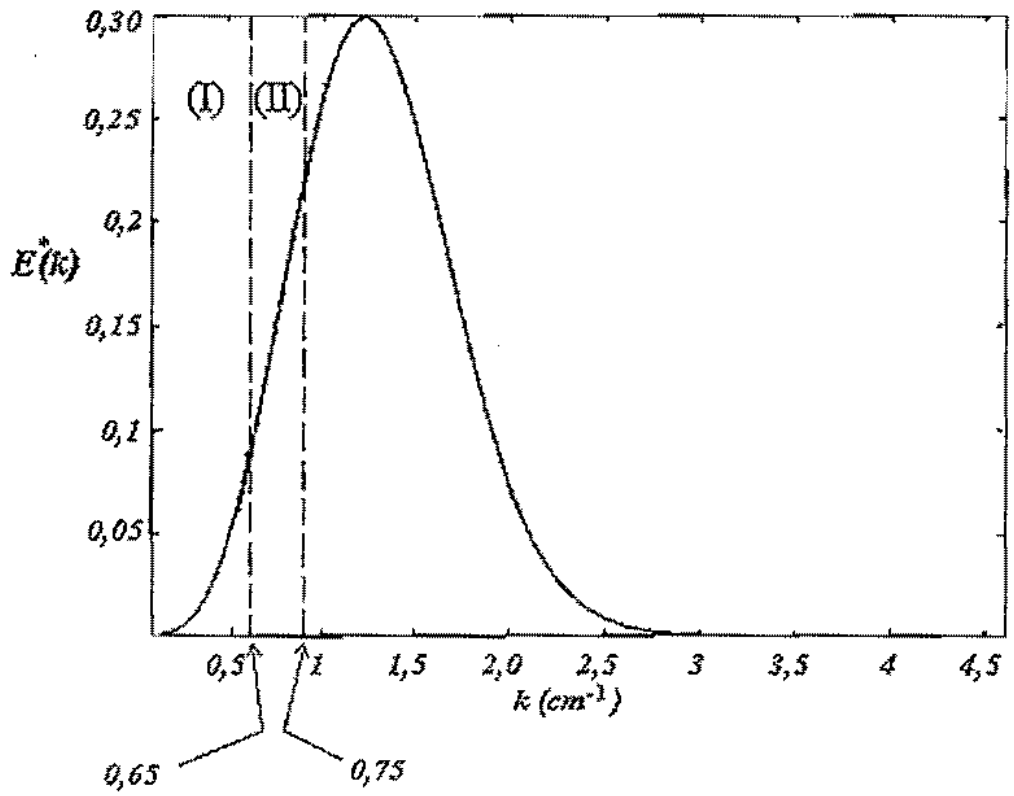
$$C_k = \frac{E(k)}{\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}} = \frac{1{,}54 \times 10^3}{4{,}61 \times 10^4 \cdot 2{,}15 \times 10^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_k \approx 1{,}6$$

G.10. A Difusibilidade, ζ.

Da curva do espectro de quase-equilíbrio, podemos fazer a seguinte análise, graficamente:

[1] Os valores comumente aceitos dessa constante estão entre 1, 4 e 2,2 , embora a maioria dos investigadores acredite que seu valor seja muito próximo de 1,5. Devemos lembrar também que o nosso resultado embute o valor experimental da constante χ obtida por Proudman [28] para um Re não muito alto.



A região I, caracterizada principalmente pela invariante de Loitsyanskii, e a região II, pela difusibilidade, dão para o espectro de energia, respectivamente, as expressões:

$$E(k) = \Lambda k^4 \quad \text{e} \quad E(k) = \zeta^2 k$$

Graficamente, obtemos $\zeta \approx 400 \ cm^2 \cdot s^{-1}$.

G.11. A Constante 'A' de Batchelor.

Batchelor [7] demonstra que essa constante surge da igualdade:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right) = A\frac{u^3}{L} \Rightarrow \frac{1}{u^2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right] = -A\frac{u}{L} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = -\frac{1}{u^2}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{u^2}{2}\right)\right]\cdot\frac{L(t)}{u(t)}$$

Podemos tomar: $\frac{d}{dt}u^2 = \varepsilon$, L=*4,0 cm* (diâmetro dos tubos de vórtices), e $u = v_o$ (raiz-quadrática-média da velocidade). Portanto,

$$A = \left(\frac{9{,}9\times 10^6}{1{,}04\times 10^5}\right)\cdot\frac{4}{456} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \approx 0.85$$ [1].

G.12. O Fator de 'Skewness' das Derivadas da Velocidade, $S(t)$.

Como demonstrado por Batchelor e Townsend, para uma turbulência isotrópica tri-dimensional, a seguinte quantidade

$$S \equiv \frac{\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^3}}{\left[\overline{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2}\right]^{3/2}}$$

é chamada *fator de skewness* das derivavdas da velocidade.

Para tempos suficientemente grandes, próximos ao limiar da formação do 'range' de dissipação *($t \geq tc$)*, Orszag [ ] mostrou que vale a seguinte relação, aproximada:

$$S = -\frac{3\sqrt{30}}{7}\cdot\nu\cdot\frac{\int_0^\infty k^4 E(k,t_c)dk}{\left[\int_0^\infty k^2 E(k,t_c)dk\right]^{3/2}}$$

[1] Pode-se confrontar esse resultado com a experiência comparando as medidas experimentais da figura 6.1 , pág. 106 , da referência [7].

que deve manter S constante nos instantes posteriores. Substituindo os valores das quantidades nessa equação, obtemos:

$$S = -2{,}35 \cdot 0{,}15 \cdot \frac{3{,}7 \times 10^{11}}{\left(3{,}3 \times 10^{7}\right)^{3/2}} \approx -0{,}68$$

G.13. O Tempo de Formação do Espectro de Quase-Equilíbrio, t_c.

Conhecendo-se o fator de skewness e a enstrofia inicial , esse tempo pode ser calculado da expressão (supondo um fator de skewness constante com o tempo):

$$t_c = \frac{1}{0{,}425} \cdot \frac{1}{|S|} \left[D(0)\right]^{-1/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_c = \frac{1}{0{,}425} \cdot \frac{1}{0{,}68} \cdot 2{,}2 \times 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_c \approx 8{,}0 \times 10^{-3} \ s$$

Apêndice H

Conexão Entre a Teoria Convencional da Turbulência e os Atratores

A Teoria convencional é baseada na abordagem física das hipóteses de Kolmogorov, enquanto o ponto de vista baseado na Teoria do Caos e dos Atratores é mais recente e corresponde a um tratamento mais matemático na direção da Teoria dos Sistemas Dinâmicos (Ruelle-Takens, Smale etc.). Embora estas teorias pareçam corresponder a abordagens completamente diferentes, uma conexão entre elas foi estabelecida recentemente [16]. A seguir descreveremos brevemente em que consiste tal conexão. Para tanto, será feita uma breve introdução aos atratores da equação de Navier-Stokes.

- *Conjuntos Invariantes Funcionais e Atratores.*

Nessa abordagem, em que o espaço de fases é um espaço de Hilbert H dimensio-nalmente infinito, as equações de Navier-Stokes são escritas como uma equação diferencial dimensionalmente infinita da forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nu \Delta u + Bu = f \tag{H.1}$$

com a condição inicial

(H.2) $$u(0) = u_o$$

Quando definido, o operador S_t é o operador não-linear

$$u_o \rightarrow u(t)$$

em que $u(t)$ é o valor no instante t da solução (H.1) , (H.2) .

Admitindo o não aparecimento de singularidades e assumindo que a enstrofia permanece limitada no tempo, dada uma solução de (H.1), (H.2), que é definida para todos os instantes pode se mostrar [17] que $u(t)$ converge em H quando $t \rightarrow \infty$ para um conjunto X que tem as seguintes propriedades:

(H.3) - O problema (H.1),(H.2) tem uma solução definda para todo tempo t e todo $u_o \in X$.
(H.4) - $S_t X = X$, $\forall\ t > 0$.

O conjunto X é um objeto matemático que descreve o regime permanente que se estabe-lece após um periodo transiente.

A teoria da estabilidade dos conjuntos invariantes funcionais ainda não está comple-tamente desenvolvida, mas é comumente aceito que esses conjuntos são *estáveis*.

Foi mostrado em [17] que esse conjunto tem uma dimensão finita, o que não é outra coi-sa senão outro aspecto da dimensionalidade finita de um fluxo turbulento. Constantin e outros [16] fizeram uma estimativa precisa desta dimensão em termos de *quantidades físicas*, resultado esse que será descrito a seguir.

- *Dimensão Fractal do Atrator.*

Seja u_o um elemento do conjunto invariante funcional X e seja $u = u(x,t) = S_t u_o$ a solução correspondente de (H.1), (H.2). Da taxa local de dissipação de energia por unidade de massa e tempo,

$$\varepsilon(x,s) = \nu\left|\vec{\nabla} u(x,s)\right|^2,$$

e considerando a média temporal da taxa de dissipação máxima sobre X :

$$\varepsilon = \lim_{t\to\infty} \sup\left(\sup_{u_o \in X} \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \int_\Omega \sup_{x\in\Omega} \varepsilon(x,s) ds \right\} \right)$$

associamos a esta quantidade o comprimento de dissipação de Kolmogorov, L_d. Seja L o comprimento externo da turbulência. Então segue o seguinte

Teorema (H.5) .

A dimensão fractal de X é menor ou igual a

$$c_1 \left(\frac{L}{L_d} \right)^3$$

na qual c_1 é uma constante universal da ordem da unidade[1].

[1] A prova deste teorema é extremamente técnica e elaborada, e pode ser encontrada nas referências citadas nessa seção.

Referências

[1] Ahmed, S.R., Ramm, R. & Faltin, G., - *Some salient features of the time-avarage ground vehicle wake,* ***S.A.E. Paper 840 300,*** Detroit, 1984.

[2] Ahmed, S.R. & Hucho, W.-H.- *Calculation of potential flow fiel past a Van with aid of a panel method,* ***S.A.E. Paper 770 390,*** (1977).

[3] Ahmed, S. R. - *Experimentelle und theorethische Untersuchungen zur Aerodynamik von Straβenfahrzeugen,* ***D.F.V.L.R.-Nachrichten, Köhl, 1980.***

[4] Bass, J. - *Sur les bases mathematique de la theorie de la turbulence d'Heisenberg,* ***C.R. Acad. Sci. Paris, N.° 228 (1949).***

[5] Batchelor, G. K. - *Kolmogorov's theory of locally isotropic turbulence,* ***Proc. Camb. Phil. Soc., 43, 1947,*** (p.533-559).

[6] Batchelor, G. K. - *The role of big eddies in homogeneous turbulence,* ***Proc. Roy. Soc.London, A 195, 1949,*** (p. 513-532).

[7] Batchelor, G. K. - *The Theory of Homogeneous Turbulence,* ***Cambridge University Press, Cambridge, 1953.***

[8] Bell, J. & Marcus D. - ***Comm. Math. Phys., 147, 1992,*** (p. 371-394).

[9] Borue, V. & Orzag, S. A. - ***Europhys. Letter 29, 1995,*** (p. 687-692).

[10] Chandrasekhar, S. - *On Heisenberg's elementary theory of turbulence,* ***Proc. Roy. Soc. London, A 200, 1949,*** (p. 20-35).

[11] Chen, S., Doolen, G.D., Herring, J.R., Kraichman, R.H., Orzag, S.A. & She, Z.S. - ***Phys. Rev. Lett., 70, 1993,*** (p. 3051).

[12] Chorin, A.J.- *The evolution of a turbulent vortex,* ***Commun. Math. Phys. 83, 1982,*** (p. 517-535).

[13] Chorin, A. J.- *Estimates of intermitence, spectra, and blow-up in developed turbulence,* ***Commun. Pure Appl. Math., Vol. XXXIV, 1981,*** (p. 853-866).

[14] Chorin, A. J. - *Vortex models and boundary layer instability,* ***SIAM J. Sci. Stat. Comp., 1, 1980,*** (p. 1-24).

[15] Chorin, A. J. - *Vorticity and Turbulence,* ***Applied Math. Sciences, 103, Springer-Verlag, N. Y, 1994.***

[16] Constantin, P., Foias, C., Manley, O. & Temam, R. - *Determining modes and fractal dimension of turbulent flows,* ***J. Fluid Mech., 1984.***

[17] Foias, C. & Temam, R. - *Some analytic and geometric properties of the solutions of the Navier-Stokes equations,* ***J. Math. Pures Appl., 58, 1979,*** (p.339- 368).

[18] Heisenberg, W. - *Zur statistischen Theorie der Turbulenz,* ***Zeitschrift für Physik, 124, No. 7-12, 1948,*** (p. 628-657).

[19] Heisenberg, W. - *On the stability of Laminar flow, em* ***Proc. Int. Congr. of Mathematicians, 1950, Cambridge, Mass., U.S.A.. (A.M.S., Vol.II, 1952)*** (p. 292 - 296).

[20] Heisenberg, W.- *On the theory of statistical and isotropic turbulence,* ***Proc. Roy. Soc. London, A 195, No. 1042, 1948,*** (p. 402-406).

[21] Heisenberg, W. & von Weizsäcker, C.F. - *Die Gestalt der Spiralnebel,* ***Zeitschrift für Physik, 125, 1948.*** (p. 290-292).

[22] Hess, J.L. - *Panel methods in Computational Fluid Dynamics,* ***Annual Rev. Fluid. Mech., 22, 1990,*** (p. 255-274).

[23] Landau, L.D. & Lifschitz, Y - *Fluid Mechanics ,* ***Pergamon Press, Londres, 1963.***

[24] Leonard, A. - *Lectures Notes in Physics No. 35* ***Springer-Verlag, 1975.***

[25] Leonard, A. & Degani, D. - ***Bull. Am. Phys. Soc., 21, 1976,*** (p.1223).

[26] Monin , A. S. & Yaglom, A. M. - *Statistical Fluid Dynamics, Vols 1 e 2,* ***MIT Press, 1975.***

[27] Nakamura, Y., et al. - ***AGARD Conf. Proc. 342, 1983.***

[28] Proudmann, L. - ***Proc. Camb. Phil. Soc., 47, 1951,*** (p. 158-171).

[29] Saddoughi, S. G. & Veeravalli, J. - ***J. Fluid Mech., 268, 1994,*** (p. 333).

[30] Summa, J.M. & Maskew, B. - ***S.A.E. Paper 830 303, Detroit, 1983.***

[31] Stanisic, M.M. - *The Mathematical Theory of Turbulence,****Springer-Verlag, N. Y, 1985.***

[32] Tsinober, A. Kit, E., Dracos, T. - ***J. Fluid Mech., 242, 1992,***(p.169).

[33] Yanitskii, V. E. - *Sov. Phys. Dokl., 27,1982,* (p. 703).