UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Algumas Aplicações de Integrais de Trajetória Grassmannianas na Teoria Quântica Moderna

Paulo Barbosa Barros

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo

ORIENTADOR: Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Gitman

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Abraham Hirsch Zimerman (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Gitman (IFUSP)

Prof. Dr. José Abdalla Helayel-Neto (CBPF-RJ)

Prof. Dr. Josif Frenkel (IFUSP)

Prof. Dr. Walter Felipe Wreszinski (IFUSP)

São Paulo

1998

Sylvio Canuto
Prof. Sylvio Roberto Accioly Canuto
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

SBI-IFUSP

305M810T2857

530.12
B 277a
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Barros, Paulo Barbosa

Algumas Aplicações de Integrais de Trajetória
Grassmannianas na Teoria Quântica Moderna.
São Paulo, 1998.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Gitman
Área de Concentração: Física do Estado Sólido

Unitermos: 1. Integrais de Trajetória;
2. Álgebra de Grassmann; 3. Álgebra de Berezin;
4. Fator Espinoral; 5. Cálculo de Operadores.

USP/IF/SBI-064/98

Abstract

This work is devoted to an application of Grassmann path integrals to operator calculus relevant to problems of relativistic quantum theory. A detailed survey of path integral method is given first. Then we concentrate ourselves on definitions and applications of path integrals over Grassmann variables. We discuss in detail an important role of Grassmann path integrals in representations of relativistic particle propagators. We derive the so called spin factors for such representations doing Grassmann integrations. A completely original contribution was made in application of such integrals to operator calculus. We have derived in such a way a set of new formulas for operator functions of γ -matrices. Applications of such formulas are presented.

Resumo

Este trabalho é dedicado à aplicação de integrais de trajetória de Grassmann para o cálculo de operadores relevantes aos problemas da teoria quântica relativística. Primeiramente uma visão geral detalhada do método é fornecida. Então concentramos nas definições e aplicações das integrais de trajetória sobre as variáveis de Grassmann. Discutimos, em detalhe, um importante papel das integrais de trajetória de Grassmann na representação de propagadores de partículas relativísticas. Derivamos o chamado fatores de spin para tais representações, fazendo as integrações Grassmannianas. Uma contribuição completamente original foi feita aplicando tais integrais ao cálculo de operadores. Derivamos, desta forma, um conjunto de fórmulas novas para as funções de operadores das matrizes γ . As aplicações de tais fórmulas são apresentadas.

Dedicatória

A minha família, pelo
aprendizado e elevação que
me proporciona.

Agradecimentos

Ao professor Dr. Dmitri M. Gitman, pela orientação e apoio nos momentos difíceis.

Ao professor Dr. Stoian I. Zlatev pela colaboração neste projeto.

À Cláudia, Kelma, Amélia e João pela ajuda constante nas questões burocráticas.

À todos meus amigos do IFUSP.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Conteúdo

1	Introdução	8
2	Integrais de Trajetória sobre as Variáveis Ordinárias na Mecânica Quântica Convencional	14
2.1	Evolução Temporal na Mecânica Quântica	14
2.2	A Representação da Função de Propagação por meio da Integral de Trajetória na forma Hamiltoniana	25
2.3	A Forma Lagrangiana da Integral de Trajetória	28
2.4	Realizando Integrais de Trajetória Simples	32
3	Álgebra e Análise sobre as Variáveis de Grassmann	41
3.1	Álgebra de Grassmann e de Berezin	41
3.2	Supermatrizes na Álgebra de Berezin	45
3.3	Derivadas e Integrais na Álgebra de Berezin	50
4	Integrais de Trajetória sobre Variáveis Ordinárias e de Grassmann na Teoria de Pertubação	56
4.1	Funcional Gerador das Funções de Green	56
4.2	Integrais Funcionais	62
4.3	Representação do Funcional Gerador das Funções de Green na Forma de uma Integral Funcional	71

5	Aplicações de Integrais de Trajetória para o Cálculo de Propagadores das Partículas Espinoriais	88
5.1	Introdução	88
5.2	O Fator de Spin em $3 + 1$ Dimensões	90
5.2.1	Fazendo Integrais sobre Variáveis de Grassmann	90
5.2.2	O Propagador num Campo Constante Uniforme	94
5.2.3	Propagador num Campo Uniforme e num Campo de Ondas Planas	98
5.3	Fator de Spin em $2 + 1$ Dimensões	106
5.3.1	Dedução do Fator de Spin	106
5.3.2	O Propagador de Dirac num Campo Uniforme Constante em $2 + 1$ Dimensões	108
6	Aplicação de Integrais de Trajetória Grassmannianas ao Cálculo de Operadores	110
6.1	Métodos Algébricos em Cálculo de Operadores	110
6.2	Aplicação de Integrais de Trajetória para o Cálculo de Funções da Álgebra de Clifford	117
A	Algumas Propriedades de Tensores Anti-simétricos	132
A.1	Tensores Anti-simétricos em $3 + 1$ Dimensões	132
A.2	Tensores Anti-simétricos em $2 + 1$ Dimensões	133
B	Algumas Identidades Envolvendo as Matrizes γ	134
B.1	As Estruturas das Matrizes-Gama da Transformação de Lorentz na Representação Espinorial	134
B.2	Decomposição de Algumas Funções de Matrizes γ	136
B.3	Identidades Envolvendo Matrizes γ em $2 + 1$ Dimensões	139

Capítulo 1

Introdução

Atualmente as integrais de trajetórias têm sua importância reconhecida e são utilizadas em diversas aplicações em vários campos da física contemporânea.

O seu aparecimento surgiu a partir de uma leitura feita por R. P. Feynman de um artigo de P. A. M. Dirac [1]. Nesta época Feynman fazia o doutorado e de modo intuitivo desenvolveu o conceito de integrais de trajetória a partir da idéia inicial contida neste artigo. Dirac encontrou uma função de Green a qual chamou de função de transformação que possuía a forma: $G = e^{iS/\hbar}$, com S , a solução da equação Hamilton-Jacobi, válida para o intervalo de tempo tendendo a zero. O objetivo de Feynman era encontrar o propagador como uma soma de amplitudes de probabilidades sobre todas as trajetórias possíveis e identificou a função G acima como uma das amplitudes para uma determinada trajetória. Feynman mostrou, que as funções de ondas propagadas por uma integral de trajetória possuem uma evolução temporal que satisfazem a equação de Schrödinger em seu artigo original [2] sobre integrais de trajetória. Esta dedução e outras aplicações de integrais de trajetória estão no seu livro *Quantum Mechanics and Path Integrals* [3]. Assim Feynman estabeleceu a terceira formulação da mecânica quântica [4, 5, 6, 7].

Os detalhes principais da abordagem das integrais de trajetória na mecânica quântica não relativística são apresentados no Capítulo 2.

A noção de integrais de trajetória usualmente chamada integral funcional era do conhecimento dos matemáticos antes de Feynman. A integral de trajetória apresen-

tava um contraste em relação as integrais Euclidianas de Wiener, pois estas podiam ser definidas matematicamente de maneira precisa, uma vez que a presença de um número imaginário no expoente faz da integral de trajetória uma integral com um argumento oscilatório e dificulta sua definição rigorosa. Deste modo, fazemos a transformação onde multiplicamos o tempo pelo número imaginário “ i ” para transformamos uma integral de trajetória em uma integral de Wiener, o que é equivalente a assumir que a integral de trajetória é uma continuação analítica da integral de Wiener [8, 9, 10, 11, 12].

Foi nos anos 70 que começaram a surgir várias aplicações para as integrais de trajetória. Além da mecânica quântica, também foi aplicada na física estatística [13, 14, 15, 16, 17]. Nesta área ela serviu de estrutura básica para a primeira formulação do grupo de renormalização feita por Wilson: em transições de fase de segunda ordem em que ocorre fenômenos cooperativos de longo alcance, sendo que temos os expoentes críticos como características muito importantes para a teoria e eles apresentam características universais dependendo da dimensão do espaço e do número de componentes do parâmetro de ordem. Um modo de se perceber detalhes do sistema é a utilização de escalas maiores. Wilson encontrou um bom caminho para eliminar o comportamento de curto alcance, ao expressar a função de partição como uma integral funcional, somando os infinitos modos do sistema e finalmente integrando sobre os modos de curtos comprimentos de onda deixando somente os comprimentos de ondas longos que apresenta o comportamento crítico depois que é feita uma reescala das coordenadas espaciais. Esta eliminação dos modos de curtos comprimentos de onda e a subsequente reescala é aplicada ao sistema repetidamente [18].

Foi estudada, em sistemas com impurezas aleatórias, sistemas naturais que nem sempre correspondem às idealizações que os físicos acham convenientes. As redes não são sempre periódicas. Os metais nem sempre são puros. Os problemas de impurezas podem ser atacados usando-se integrais funcionais, porque pode ser feita uma idealização. Especificamente podemos supor que estas impurezas estão distribuídas de maneira aleatória e que esta aleatoriedade encontra expressão como uma integral funcional [19, 20].

Foi aplicada na física de instanton como também nas teorias de gauge e tem sido utilizada nos esquemas de aproximação semiclássica para a teoria de espalhamento. As primeiras formulações da teoria de espalhamento na linguagem de integrais de trajetória estavam no contexto de espalhamento atômico, mas para energias mais altas (e números quânticos) envolvidos em espalhamento de íons pesados tem levado a aplicações em física nuclear [6].

Apesar da ausência de uma definição matemática precisa, as integrais de trajetória na teoria de campos são ideais para implementar as simetrias da teoria diretamente, incorporar vínculos simplesmente, explorar a topologia do campo, isolar variáveis dinâmicas relevantes, descrever temperaturas não nulas e etc.

No final dos anos 70 e começo dos anos 80 o emprego das integrais de trajetória na teoria de campos foi ampliado surgindo vários livros textos com a nova abordagem [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32].

O surgimento de computadores com alta capacidade de processamento permitiu o utilização de procedimentos numéricos para o cálculo, dentro de uma aproximação, das integrais de dimensão finita (dimensões muito altas) que em primeira aproximação poderiam representar integrais de trajetórias. Com este modelamento surgiram várias aplicações. No modelamento usando o computador, as coordenadas de tempo e espaço devem ser discretizadas. Para este caso, utiliza-se o método de Monte Carlo, usando tempo imaginário, de forma que todas contribuições são reais e as regiões mais importantes aparecem como máximo no integrando.

Uma outra aplicação de integrais de trajetória é na óptica geométrica em que podemos chegar ao princípio de Fermat.

Podemos, também, usar as integrais de trajetória como método de quantização em espaços curvos [33].

Uma aplicação importante das integrais de trajetória se dá na emissão quântica de energia de buracos negros, que classicamente é proibida e é resultado de um processo de tunelamento quântico [34].

Na teoria quântica, as partículas elementares são classificadas como bósons ou férmions. A quantização das variáveis (campos) correspondentes aos bósons e as

correspondente aos férmions são diferentes. A primeira é quantizada usando um comutador e a última usando um anticomutador. Nos primeiros estágios da evolução da teoria quântica, as variáveis correspondentes para ambos tipos de partículas e sujeitas a uma quantização posterior eram assumidas ser variáveis clássicas ordinárias, isto é, funções comutativas clássicas das coordenadas e tempo. Usando tal descrição, não podemos extrair um paralelo entre as equações clássicas e quânticas do movimento (uma parte do princípio de correspondência) para o caso fermiônico por analogia ao caso bosônico. Por esta e outras razões, foi finalmente assumido que a teoria quântica correspondente aos férmions deveria ser construída pela quantização de uma teoria clássica cujas variáveis anticomutam entre si ou, mais precisamente, são elementos geradores da chamada álgebra de Grassmann [35]. A teoria clássica que incluía bósons e férmions é construída na estrutura da chamada *álgebra de Berezin*, que descrevemos no Capítulo 3. Neste capítulo apresentamos também os princípios necessários da supermatemática, criada e desenvolvida em grande parte por *Berezin* (veja [36, 37, 38, 39, 40] e a literatura citada)

A álgebra de Berezin é uma construção matemática na qual se formula a teoria clássica para bósons e férmions. O subsistema de elementos geradores pares correspondem, num certo sentido, ao caso bosônico, e o subsistema de elementos ímpares, ao fermiônico. Esta é uma maneira de obter igualdade de descrição. Devemos notar, entretanto, que a teoria clássica na álgebra B não possui uma interpretação física direta na presença de elementos geradores ímpares, mas é introduzida como um conveniente estágio preliminar para construção da teoria quântica.

Outra aplicação importante das variáveis de Grassmann é a descrição dos graus de liberdade do spin. Pela primeira vez um modelo pseudoclássico de uma partícula com spin foi proposto por Berezin e Marinov [41] e logo após foi discutido e investigado em vários artigos (veja por exemplo [42, 43, 44, 45, 46]). Desta maneira, temos duas aplicações importantes das variáveis de Grassmann na teoria quântica moderna: a descrição de campos fermiônicos na teoria clássica de campos e a descrição de graus de liberdade de spin para modelos de partículas com spin. Em ambos casos mencionados a abordagem de integrais de trajetória de Feynman tem que ser modificada para as

integrações de trajetória de Grassmann sobre as variáveis correspondentes. Na teoria quântica de campos esta integração de trajetória sobre campos de Grassmann, na qual apresenta trajetórias fermiônicas. Na mecânica quântica de partículas com spin, esta integração de trajetórias sobre as variáveis de Grassmann, que descreve o spin.

A definição das integrais de trajetória de Grassmann é baseada nas integrais de Berezin sobre as variáveis de Grassmann [36]. Neste trabalho, usamos a chamada definição de integral de trajetória no campo da teoria de perturbação, que foi proposto no trabalho [47], e que é suficiente para os nossos propósitos.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira: No Capítulo 2 fazemos um resumo da integral de trajetória com variáveis ordinárias na mecânica quântica não relativística. Começamos com a função de propagação em que as representações de integral de trajetória Hamiltoniana e Lagrangiana são derivadas. No fim do capítulo apresentamos cálculos de integrais de trajetória em alguns casos simples. No Capítulo 3, colocamos todos os detalhes necessários da álgebra e análise de variáveis de Grassmann (variáveis fermiônicas, variáveis ímpares). Apresentamos aqui uma construção geral a qual é chamada Álgebra de Berezin e que é usada para descrever no mesmo nível as variáveis bosônicas e fermiônicas. No Capítulo 4 discutimos uma abordagem para definição de integral de trajetória que serve dentro de uma teoria de perturbação. Tal abordagem é muito efetiva no caso da teoria quântica de campos e serve bem no caso da mecânica quântica com variáveis de Grassmann. Isto é, tal abordagem para construção de integral de trajetória de Grassmann que usamos nas nossas aplicações posteriores para a mecânica quântica relativística e cálculos de operadores. Devemos mencionar que no caso da teoria quântica de campos, o objeto apropriado a ser apresentado através de uma integral de trajetória é o funcional gerador para funções de Green (veja o Capítulo 4), considerando que na mecânica quântica relativística de partículas com spin, este é um propagador da partícula. A técnica correspondente para apresentar tais propagadores através de integrais de trajetórias sobre ambas variáveis bosônicas e de Grassmann é descrita no Capítulo 5. Nesta seção demonstramos a possibilidade de calcular estas integrais de trajetórias para obter expressões finitas para propagadores em várias configurações de campos eletromagnéticos externos. Tais

expressões para os propagadores contêm expressões de operadores complicadas de matrizes γ . Descobrimos que o problema de desembaraçar tais expressões de operadores pode ser resolvido muito eficientemente pelo uso de integral de trajetória de Grassmann. A técnica correspondente é descrita no Capítulo 6. Aqui lembramos os métodos antigos de cálculo de operadores. Apresentamos várias aplicações destes métodos para desembaraçar funções complexas de operadores não comutativos. Então usamos a abordagem da integral de trajetória de Grassmann para desembaraçar funções de operadores de matrizes γ . Deduzimos algumas fórmulas novas e que são muito úteis para cálculos com propagadores na teoria quântica de campos.

Deste modo, apresentamos na tese uma nova aplicação possível das integrais de trajetórias de Grassmann. Nos apêndices apresentamos alguns cálculos diretos e a dedução de algumas propriedades úteis.

Capítulo 2

Integrais de Trajetória sobre as Variáveis Ordinárias na Mecânica Quântica Convencional

2.1 Evolução Temporal na Mecânica Quântica

Começaremos nossa consideração com o caso da mecânica quântica não relativística de sistemas sem vínculos [48, 49, 50]. Seja um sistema que possua n graus de liberdade e seja descrito pelas coordenadas $\mathbf{x} = (x^a)$ e os momentos $\mathbf{p} = (p_a)$, $a = 1, \dots, n$. Os operadores correspondentes $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{p}}$ obedecem às relações de comutação

$$[\hat{x}^a, \hat{p}_b] = i\hbar\delta_b^a, \quad [\hat{x}^a, \hat{x}^b] = [\hat{p}_a, \hat{p}_b] = 0. \quad (2.1)$$

As relações de comutação (2.1) são idealizadas num espaço de Hilbert $\mathfrak{H}$ de vetores de estado $|\Psi\rangle$, $|\Psi\rangle \in \mathfrak{H}$. Usaremos frequentemente autovetores $|\mathbf{x}\rangle$ e $|\mathbf{p}\rangle$ dos operadores $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{p}}$ respectivamente

$$\hat{\mathbf{x}}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle, \quad \hat{\mathbf{p}}|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle, \quad (2.2)$$

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{x}'\rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \prod_a \delta(x^a - x'^a),$$

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'), \quad \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') = \prod_a \delta(p_a - p'_a),$$

$$\int |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| d\mathbf{x} = I, \quad d\mathbf{x} = \prod_a dx^a,$$

$$\int |\mathbf{p}\rangle \langle \mathbf{p}| d\mathbf{p} = I, \quad d\mathbf{p} = \prod_a dp_a,$$

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathbf{x} \mathbf{p} \right\} , \quad \mathbf{x} \mathbf{p} = \sum_a x^a p_a ,$$

$$\langle \mathbf{x} | \hat{\mathbf{p}} | \mathbf{y} \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) .$$

A evolução temporal dos vetores de estado $|\Psi\rangle$ são descritos pela equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi\rangle , \quad (2.3)$$

onde $\hat{H}$ é a Hamiltoniana quântica ou o operador de energia, que corresponde à Hamiltoniana H^1 . A última é uma função das variáveis de fase $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ e, no caso geral, do tempo t .

O que significa resolver a equação de Schrödinger (2.3)? Por exemplo, esta pode ser a solução para o problema de Cauchy, isto é, para encontrar uma solução $|\Psi(t)\rangle$ da equação (2.3) para um instante inicial $t = t_0$, tal que

$$|\Psi(t_0)\rangle = |\Psi_0\rangle . \quad (2.4)$$

Para resolver a equação de Schrödinger poderíamos também encontrar um conjunto completo de soluções $|\varphi_n(t)\rangle$, tal que qualquer solução $|\Psi(t)\rangle$ da equação (2.3) pode ser apresentada como uma combinação linear dos últimos com coeficientes constantes

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n(t)\rangle . \quad (2.5)$$

Uma solução de um destes problemas dá uma solução do outro problema e vice versa.

Vamos introduzir o chamado operador de evolução $\hat{U}(t, t')$, que obedece à equação

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = \hat{H} \hat{U} , \quad (2.6)$$

e a condição

$$\hat{U}(t, t') \Big|_{t'=t} = I . \quad (2.7)$$

Se $\hat{H}$ não depende do tempo ele possui a forma

$$\hat{U}(t, t') = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t - t') \right\} . \quad (2.8)$$

¹No caso geral, o princípio correspondência não permite que a função do operador seja construída de uma maneira única classicamente.

No caso geral das Hamiltonianas dependentes do tempo uma solução das equações (2.6), (2.7) possuem a forma (uma prova desta fórmula podemos encontrar em muitos livros, veja por exemplo [51])

$$\hat{U}(t, t') = T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^t \hat{H}(\tau) d\tau \right\} , \quad (2.9)$$

onde T é o símbolo de ordenamento temporal ² ou produto T . Atuando no produto dos operadores $\hat{H}(\tau)$, ele ordena-os, tal que os seus argumentos do tempo decrescem da esquerda para direita.

Se $\hat{H}$ é um operador hermitiano, então $\hat{U}$ é unitário

$$\hat{U}^+(t, t') = \hat{U}^{-1}(t, t') . \quad (2.10)$$

Além disso, ele obedece à propriedade de grupo

$$\hat{U}(t, t') = \hat{U}(t, t'') \hat{U}(t'', t') . \quad (2.11)$$

A última propriedade implica

$$\hat{U}^{-1}(t, t') = \hat{U}(t', t) , \quad (2.12)$$

tal que

$$\hat{U}^+(t, t') = \hat{U}(t', t) . \quad (2.13)$$

Seja $|\Psi(t) \rangle$ uma solução da equação de Schrödinger. Então temos a fórmula

$$|\Psi(t) \rangle = \hat{U}(t, t') |\Psi(t') \rangle , \quad (2.14)$$

ou

$$|\Psi(t) \rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi_0 \rangle .$$

Então, se o operador de evolução é conhecido, podemos encontrar facilmente uma solução para o problema de Cauchy. Além disso, podemos encontrar um conjunto

²De fato, a operação de T em (2.9) ordena os operadores $\hat{H}(\tau)$. Algumas vezes o produto T é chamado produto T de Dyson.

completo de soluções $|\varphi_n(t)\rangle$ mencionadas acima. De fato, seja $|\varphi_n\rangle$ um conjunto completo de vetores em $\mathfrak{R}$, Então

$$|\varphi_n(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\varphi_n\rangle . \quad (2.15)$$

Para provar a decomposição (2.5) é disponível para qualquer solução da equação de Schrödinger, podemos decompor o vetor $|\Psi_0\rangle$ da representação (2.14) em $|\varphi_n\rangle$

$$|\Psi_0\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle . \quad (2.16)$$

Atuando pelo operador de evolução em ambos lados de (2.16) e usando (2.15), podemos obter (2.5).

Por outro lado, se for encontrado um conjunto completo de soluções $|\varphi_n(t)\rangle$, é possível construir o operador de evolução. Para simplificar o problema vamos supor que o conjunto é ortonormal em cada momento do tempo

$$\langle \varphi_n(t) | \varphi_m(t) \rangle = \delta_{nm} . \quad (2.17)$$

Então segue de (2.5) que a relação de completeza pode ser escrita na forma

$$\sum_n |\varphi_n(t)\rangle \langle \varphi_n(t)| = I ,$$

onde I é um operador idêntico.

Neste caso

$$\hat{U}(t, t') = \sum_n |\varphi_n(t)\rangle \langle \varphi_n(t')| . \quad (2.18)$$

A última fórmula pode ser deduzida da decomposição de (2.5) da seguinte maneira. Usando (2.17), encontramos

$$c_n = \langle \varphi_n(t) | \Psi(t) \rangle .$$

Visto que c_n não depende realmente do tempo, podemos reescrever a fórmula acima na forma

$$c_n = \langle \varphi_n(t') | \Psi(t') \rangle .$$

Usando a última expressão em (2.5), obtemos

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n |\varphi_n(t)\rangle \langle \varphi_n(t') | \Psi(t') \rangle ,$$

que confirma a fórmula (2.18).

Usando os autovetores $|\mathbf{x}\rangle$ podemos usar a representação de coordenadas, onde os vetores de estado podem ser considerados funções de $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &\rightarrow \Psi(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{x} | \Psi(t) \rangle , \\ \langle \Psi | \chi \rangle &\rightarrow (\Psi, \chi) = \int \Psi^+(\mathbf{x}) \chi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Os elementos de matriz do operador de evolução $\hat{U}$ na representação de coordenadas é chamada função de propagação G

$$G(\mathbf{x}t, \mathbf{y}t') = \langle \mathbf{x} | \hat{U}(t, t') | \mathbf{y} \rangle . \quad (2.20)$$

É conveniente usar algumas vezes a notação “relativística”, por exemplo, $t = x^0$, $x = (x^0, \mathbf{x})$. Nesta notação a função de propagação tem a forma

$$G(x, y) = \langle \mathbf{x} | \hat{U}(x^0, y^0) | \mathbf{y} \rangle . \quad (2.21)$$

Todas as propriedades da função de propagação podem ser deduzidas a partir das propriedades do operador de evolução e dos autovetores $|\mathbf{x}\rangle$

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^0} - \hat{H}_x \right) G(x, y) = 0 , \quad (2.22)$$

$$G(x, y)|_{y^0=x^0} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \quad (2.23)$$

$$G^+(x, y) = G(y, x) , \quad (2.24)$$

$$\int G(x, z) G(z, y) dz = G(x, y) , \quad (2.25)$$

$$\Psi(x) = \int G(x, y) \Psi(y) dy . \quad (2.26)$$

Em (2.22) o sub-índice x , que pertence a Hamiltoniana, indica que o último atua no primeiro argumento na função de propagação. Podemos dizer que a função de propagação $G(x, y)$ é uma solução da equação de Schrödinger com as condições iniciais

(2.23). Esta função de propagação “propaga” soluções da equação de Schrödinger a partir de um instante de tempo para outro, (veja a propriedade (2.26)). O significado físico da função de propagação $G(x, y)$ segue da representação (2.20) ou (2.21). É a amplitude de probabilidade de transição do sistema indo do ponto y no espaço tempo para o ponto x .

Usando a representação (2.18) em (2.20), podemos deduzir uma fórmula importante, que nos permite construir a função de propagação como uma soma sobre um conjunto completo das soluções da equação de Schrödinger na representação de coordenadas

$$G(x, y) = \sum_n \varphi_n(x) \varphi_n^+(y) , \quad (2.27)$$

onde $\varphi_n(x) = \varphi_n(\mathbf{x}, t)$ é um conjunto completo de soluções, obedecendo às propriedades

$$\begin{aligned} (\varphi_n(t), \varphi_m(t)) &= \delta_{nm} , \\ \sum_n \varphi_n(\mathbf{x}, t) \varphi_n^+(\mathbf{y}, t) &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \end{aligned} \quad (2.28)$$

Abaixo apresentamos cálculos diretos da função de propagação em alguns casos. Seguiremos as seguintes notações

$$G = G(\mathbf{x}_{out} t_{out}, \mathbf{x}_{in} t_{in}) , \quad T = t_{out} - t_{in} , \quad \mathbf{X} = \mathbf{x}_{out} - \mathbf{x}_{in} .$$

A função de propagação para uma partícula livre denotaremos por G_0 .

1. *Uma partícula livre.*

$$G_0 = \langle \mathbf{x}_{out} | \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T\right\} | \mathbf{x}_{in} \rangle , \quad \hat{H} = \hat{\mathbf{p}}^2 / 2m . \quad (2.29)$$

Podemos escrever, usando a relação de completeza (2.2) para os autovetores $|\mathbf{p}\rangle$, que

$$\begin{aligned} G_0 &= \int \langle \mathbf{x}_{out} | \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T\right\} | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | \mathbf{x}_{in} \rangle d\mathbf{p} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} T + \frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \mathbf{X}\right\} d\mathbf{p} . \end{aligned}$$

A última integral pode ser feita, usando a integral chamada Gaussiana

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\alpha x^2 + \beta x\} dx = \exp\left\{\frac{\beta^2}{4\alpha}\right\} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} . \quad (2.30)$$

Então

$$G_0 = \left[\frac{m}{2\pi\hbar iT} \right]^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ \frac{im\mathbf{X}^2}{\hbar 2T} \right\} . \quad (2.31)$$

O mesmo resultado pode ser obtido, apresentando o operador de evolução de uma partícula livre através de uma integral Gaussiana,

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} T \right\} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar iT} \right)^{n/2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{y} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m\mathbf{y}^2}{2T} + \mathbf{y}\hat{\mathbf{p}} \right] \right\} ,$$

e levando em conta que

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \mathbf{y}\hat{\mathbf{p}} \right\} |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x} - \mathbf{y}\rangle . \quad (2.32)$$

Para representar o resultado (2.31), vamos calcular a ação de uma partícula livre. Como é conhecida a ação Lagrangiana $S_L[\mathbf{x}]$ que possui a forma

$$S_L[\mathbf{x}] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt ,$$

onde $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ é uma Lagrangiana do sistema. Para a partícula livre $L = L_0 = m\dot{\mathbf{x}}^2/2$. De fato, a ação $S_L[\mathbf{x}]$ é um funcional da trajetória $\mathbf{x}(t)$, que começa no instante de tempo t_{in} e acaba no instante de tempo t_{out} . Vamos calcular a ação na trajetória clássica³ $\mathbf{x}_{cl}$, que obedece às condições iniciais

$$\mathbf{x}_{cl}(t_{in}) = \mathbf{x}_{in} . \quad \mathbf{x}_{cl}(t_{out}) = \mathbf{x}_{out} .$$

Para um caso de uma partícula livre tal trajetória é uma linha com ponto inicial $\mathbf{x}_{in}$ em t_{in} e um ponto final $\mathbf{x}_{out}$ em t_{out} . A velocidade correspondente

$$\dot{\mathbf{x}}_{cl} = \text{const} = \frac{\mathbf{X}}{T} .$$

Então

$$S_{cl}^0 = S_L^0[\mathbf{x}_{cl}] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} \frac{m\dot{\mathbf{x}}_{cl}^2}{2} dt = \frac{m\mathbf{X}^2}{2T} . \quad (2.33)$$

Então, a expressão (2.31) pode ser apresentada da seguinte forma

$$G_0 = \left[\frac{m}{2\pi\hbar iT} \right]^{n/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}^0 \right\} . \quad (2.34)$$

³Aqui e nas citações seguintes, chamaremos uma trajetória clássica se ela obedece às equações do movimento clássicas correspondentes.

2. *Uma partícula em um campo externo homogêneo constante.*

Considere uma partícula num campo externo homogêneo constante f em uma dimensão. Neste caso $\mathbf{x} = x$; a Hamiltoniana e o operador de evolução possui a forma

$$\hat{H} = \hat{a} + \hat{b} . \quad \hat{U}(t_{out}, t_{in}) = \exp \left\{ \tau (\hat{a} + \hat{b}) \right\} , \quad (2.35)$$

onde

$$\hat{a} = \frac{\hat{p}^2}{2m} . \quad \hat{b} = -fx , \quad \tau = T/i\hbar .$$

Três operadores $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c} = [\hat{a}, \hat{b}]$. e uma constante $\mu = [\hat{b}, \hat{c}]$ forma uma álgebra

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{c} = \frac{i\hbar f}{m} \hat{p} , \quad [\hat{a}, \hat{c}] = 0 , \quad [\hat{b}, \hat{c}] = \mu = \frac{\hbar^2 f^2}{m} . \quad (2.36)$$

Isto implica que o operador de evolução pode ser apresentado da seguinte forma

$$\hat{U}(t_{out}, t_{in}) = \exp(K + \alpha \hat{b}) \exp(\beta \hat{a} + \gamma \hat{c}) , \quad (2.37)$$

onde K , α , β , γ são algumas funções de τ , obedecendo as condições iniciais

$$K(0) = \alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0 . \quad (2.38)$$

Para encontra-las, podemos diferenciar a equação (2.37) com respeito a τ

$$\hat{a} + \hat{b} = K' + \alpha' \hat{b} + \exp(\alpha \hat{b}) (\beta' \hat{a} + \gamma' \hat{c}) \exp(-\alpha \hat{b}) .$$

Usando a fórmula (6.5) e as relações de comutação (2.36), obtemos

$$\hat{a} + \hat{b} = K' + \alpha' \hat{b} + \beta' \left(\hat{a} - \alpha \hat{c} - \frac{\alpha^2}{2} \mu \right) + \gamma' (\hat{c} + \alpha \mu) .$$

Desta igualdade obtemos as equações diferenciais para funções desconhecidas

$$\beta' = 1 , \quad \alpha' = 1 . \quad \gamma' = \alpha \beta' , \quad K' = \frac{\mu \alpha^2}{2} \beta' - \alpha \mu \gamma' ,$$

que podem ser facilmente resolvidas, levando em conta as condições iniciais (2.38).

Isto é

$$\beta = \tau . \quad \alpha = \tau , \quad \gamma = \frac{\tau^2}{2} , \quad K = -\frac{\tau^3}{6} \mu .$$

Então

$$\hat{U}(t_{out}, t_{in}) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{f^2 T^3}{6m} + fTx \right] \right\} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} T + \frac{fT^2}{2m} \hat{p} \right] \right\} . \quad (2.39)$$

Vamos usar a expressão (2.39) na representação (2.19). Então obtemos

$$G = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{f^2 T^3}{6m} + fTx_{out} \right] \right\} \langle x_{out} | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} T + \frac{fT^2}{2m} \hat{p} \right] \right\} | x_{in} \rangle .$$

Levando em conta a propriedade (2.32), podemos escrever

$$G = G_0(x_{out}, t_{out}; x_{in} + \frac{fT^2}{2m}, t_{in}) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[-\frac{f^2 T^3}{6m} + fTx_{out} \right] \right\} ,$$

onde G_0 é uma função de propagação da partícula livre. Já foi calculado antes, veja a equação (2.34). Usando esta expressão obtemos finalmente

$$G = \left[\frac{m}{2\pi\hbar iT} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m\Delta x^2}{2T} + \frac{1}{2} fT (x_{in} + x_{out}) - \frac{f^2 T^3}{24m} \right] \right\} . \quad (2.40)$$

3. O oscilador harmônico.

O problema mais complicado é encontrar função de propagação para o oscilador harmônico. Vamos considerar o problema num caso unidimensional. Neste caso $\mathbf{x} = x$; a Hamiltoniana e o operador de evolução possuem a forma

$$\hat{H} = \hat{a} + \hat{b} , \quad \hat{U}(t_{out}, t_{in}) = \exp \left\{ \tau(\hat{a} + \hat{b}) \right\} , \quad (2.41)$$

onde

$$\hat{a} = \frac{\hat{p}^2}{2m} , \quad \hat{b} = \frac{m\omega^2 \hat{x}^2}{2} , \quad \tau = T/i\hbar .$$

Podemos descobrir que três operadores $\hat{a}$, $\hat{b}$, e $\hat{c} = [\hat{a}, \hat{b}]$ são geradores de uma álgebra

$$\begin{aligned} [\hat{a}, \hat{b}] &= \hat{c} , \quad [\hat{a}, \hat{c}] = -\lambda\hat{a} , \quad [\hat{b}, \hat{c}] = \lambda\hat{b} , \\ \hat{c} &= -(\hbar\omega)^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{i}{\hbar} \hat{x}\hat{p} \right] , \quad \lambda = 2(\hbar\omega)^2 . \end{aligned} \quad (2.42)$$

Então podemos apresentar o operador de evolução temporal de forma conveniente para os cálculos, usando os resultados da consideração da seção 6.1 (veja (6.21))

$$\hat{U}(t_{out}, t_{in}) = \exp(\alpha\hat{b}) \exp(\beta\hat{c}) \exp(\gamma\hat{a}) .$$

Os coeficientes α , β , γ podem ser encontrados, de acordo com a (6.22)

$$\alpha = \gamma = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\tau\right) = -\frac{i}{\hbar\omega} \tan(\omega T) ,$$

$$\beta = \frac{2}{\lambda} \ln \cosh\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\tau\right) = \frac{1}{(\hbar\omega)^2} \ln \cos(\omega T) .$$

Então

$$\begin{aligned} \hat{U}(t_{out}, t_{in}) &= \frac{1}{\sqrt{\cos(\omega T)}} \exp \left\{ -\frac{im\omega \tan(\omega T)}{2\hbar} \hat{x}^2 \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \ln[\cos(\omega T)] \hat{x} \hat{p} \right\} \exp \left\{ -\frac{i \tan(\omega T)}{2m\hbar\omega} \hat{p}^2 \right\} . \end{aligned} \quad (2.43)$$

Vamos usar a expressão (2.43) na representação (2.19) da função de propagação.

Então obtemos

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{\sqrt{\cos(\omega T)}} \exp \left\{ -\frac{im\omega \tan(\omega T)}{2\hbar} x_{out}^2 \right\} \int dp \exp \left\{ -\frac{i \tan(\omega T)}{2m\hbar\omega} p^2 \right\} \\ &\times \langle x_{out} | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \ln[\cos(\omega T)] \hat{x} \hat{p} \right\} | p \rangle \langle p | x_{in} \rangle . \end{aligned} \quad (2.44)$$

Os elementos de matrizes do lado direito de (2.44), podem ser facilmente calculados.

Logo, podemos escrever, usando a representação de coordenadas

$$\begin{aligned} I &= \langle x_{out} | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \ln[\cos(\omega T)] \hat{x} \hat{p} \right\} | p \rangle \langle p | x_{in} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \left\{ -\ln[\cos(\omega T)] x_{out} \frac{d}{dx_{out}} \right\} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p(x_{out} - x_{in}) \right\} . \end{aligned}$$

A ação de um operador $\exp\left(\alpha x \frac{d}{dx}\right)$ em uma função arbitrária $f(x)$ é dada pela fórmula (6.16)

$$\exp\left(\alpha x \frac{d}{dx}\right) f(x) = f(x \exp \alpha) .$$

Logo, obtemos

$$I = \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p \left[\frac{x_{out}}{\cos(\omega T)} - x_{in} \right] \right\} .$$

Usando esta fórmula. podemos apresentar a função de propagação através de uma integral Gaussiana

$$G = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\hbar)^2 \cos(\omega T)}} \exp \left\{ -\frac{im\omega \tan(\omega T)}{2\hbar} x_{out}^2 \right\}$$

$$\times \int dp \exp \left\{ -\frac{i \tan(\omega T)}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{i}{\hbar} p \left[\frac{x_{out}}{\cos(\omega T)} - x_{in} \right] \right\} ,$$

que pode ser feita (veja (2.30)). Então

$$G = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega T}} \times \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} \left[(x_{out}^2 + x_{in}^2) \cos \omega T - 2x_{in}x_{out} \right] \right\} . \quad (2.45)$$

Para interpretar este resultado vamos calcular a ação $S_L[\mathbf{x}]$ na correspondente trajetória clássica $x_{cl}(t)$

$$\ddot{x}_{cl} + \omega^2 x_{cl} = 0 , \quad x_{cl}(t_{in}) = x_{in} , \quad x_{cl}(t_{out}) = x_{out} ,$$

que pode ser facilmente encontrada

$$x_{cl}(t) = \frac{x_{out} \sin \omega(t - t_{in}) + x_{in} \sin \omega(t_{out} - t)}{\sin \omega T} . \quad (2.46)$$

Denotamos a ação acima mencionada através S_{cl}

$$S_{cl} = S_L[\mathbf{x}_{cl}] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} \frac{m}{2} (\dot{x}_{cl}^2 - \omega^2 x_{cl}^2) dt . \quad (2.47)$$

Pela uma integração parcial podemos reescrever esta ação como

$$\begin{aligned} S_{cl} &= \int_{t_{in}}^{t_{out}} \frac{m}{2} [x_{cl}(-\ddot{x}_{cl} - \omega^2 x_{cl})] dt + \frac{m}{2} x_{cl} \dot{x}_{cl} \Big|_{t_{in}}^{t_{out}} \\ &= \frac{m}{2} [x_{out} \dot{x}_{cl}(t_{out}) - x_{in} \dot{x}_{cl}(t_{in})] . \end{aligned}$$

desde

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl}(t_{in}) &= \frac{\omega}{\sin \omega T} [x_{out} - x_{in} \cos \omega T] , \\ \dot{x}_{cl}(t_{out}) &= \frac{\omega}{\sin \omega T} [x_{out} \cos \omega T - x_{in}] , \end{aligned}$$

obtemos para S_{cl}

$$S_{cl} = \frac{m\omega}{2 \sin \omega T} \left[(x_{out}^2 + x_{in}^2) \cos \omega T - 2x_{in}x_{out} \right] . \quad (2.48)$$

Então, a função de propagação (2.45) para o oscilador harmônico pode ser apresentada da seguinte forma

$$G = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega T}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl} \right\} . \quad (2.49)$$

2.2 A Representação da Função de Propagação por meio da Integral de Trajetória na forma Hamiltoniana

Considere a função de propagação G , definida na seção prévia

$$G = G(\mathbf{x}_{out}t_{out}, \mathbf{x}_{in}t_{in}) = \langle \mathbf{x}_{out} | \hat{U}(t_{out}, t_{in}) | \mathbf{x}_{in} \rangle , \quad (2.50)$$

e supondo para simplicidade que a Hamiltoniana não depende do tempo. Neste caso

$$\hat{U}(t_{out}, t_{in}) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} T \right\} , \quad T = (t_{out} - t_{in}) . \quad (2.51)$$

Vamos dividir o intervalo de tempo T em N partes iguais $\Delta t = T/N$ por meio dos pontos t_a , $a = 1, \dots, N-1$: $t_a = t_{in} + a\Delta t$. Usando a propriedade de grupo do operador de evolução e a relação de completeza para os autovetores $|\mathbf{x}\rangle$, podemos escrever

$$\begin{aligned} G &= \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_{N-1} \langle \mathbf{x}_{out} | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t_{out} - t_{N-1}) \right\} | \mathbf{x}_{N-1} \rangle \\ &\times \langle \mathbf{x}_a | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t_a - t_{a-1}) \right\} | \mathbf{x}_{a-1} \rangle \\ &\times \langle \mathbf{x}_1 | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t_1 - t_{in}) \right\} | \mathbf{x}_{in} \rangle . \end{aligned} \quad (2.52)$$

A igualdade escrita é válida em qualquer N , e é válida também no limite $N \rightarrow \infty$, que consideraremos na sequência. Agora o nosso objetivo é calcular o elemento típico de matriz

$$\langle \mathbf{x}_a | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t \right\} | \mathbf{x}_{a-1} \rangle , \quad (2.53)$$

do lado direito de (2.52). Um resultado deste cálculo pode ser expresso em termos Hamiltoniana clássica $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Entretanto, no caso geral, temos que pensar que este resultado depende da escolha da regra de correspondência entre as funções clássicas e o operador quântico correspondente. Para nossos cálculos escolhemos a chamada regra de correspondência de Weyl. Podemos expressar os elementos matriz (2.53) através do símbolo de Weyl do operador

$$\exp \{ \hat{H} \epsilon \} , \quad \epsilon = \frac{\Delta t}{i\hbar} \approx \frac{1}{N} . \quad (2.54)$$

Se $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ é o símbolo de Weyl do operador $\hat{H}$, então o símbolo de Weyl do operador (2.54) é

$$\exp\{H(\mathbf{x}, \mathbf{p})\epsilon\} [1 + O(\epsilon^2)] . \quad (2.55)$$

Levando em conta, que, de fato, precisamos do símbolo de Weyl do operador (2.54) no limite $N \rightarrow \infty$ ou $\epsilon \rightarrow 0$, podemos tomar na expressão (2.53)

$$\exp\{H(\mathbf{x}, \mathbf{p})\epsilon\}$$

como o símbolo de Weyl do operador (2.54). Então, no limite, podemos usar as seguintes expressões para o elemento de matriz (2.53)

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{x}_a | \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t \right\} | \mathbf{x}_{a-1} \rangle \\ & \cong \frac{1}{(2\pi\hbar)^n} \int \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\mathbf{p}_a \frac{\Delta \mathbf{x}_a}{\Delta t} - H(\mathbf{x}'_a, \mathbf{p}_a) \right] \Delta t \right\} d\mathbf{p}_a , \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde

$$\mathbf{x}'_a = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_a + \mathbf{x}_{a-1}) , \quad \Delta \mathbf{x}_a = \mathbf{x}_a - \mathbf{x}_{a-1} .$$

Usando este resultado, podemos reescrever a representação (2.52) no limite $N \rightarrow \infty$ da seguinte forma

$$\begin{aligned} G &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_{N-1} \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^n} \dots \frac{d\mathbf{p}_N}{(2\pi\hbar)^n} \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{a=1}^N \left[\mathbf{p}_a \frac{\Delta \mathbf{x}_a}{\Delta t} - H(\mathbf{x}'_a, \mathbf{p}_a) \right] \Delta t \right\} . \end{aligned} \quad (2.57)$$

A soma no expoente (2.57) pode ser considerada como uma soma de integral para a integral

$$S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} [\mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}, \mathbf{p})] dt , \quad (2.58)$$

onde

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} .$$

Então podemos introduzir a seguinte notação para o lado direito de (2.57)

$$G = \lim_{N \rightarrow \infty} \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_{N-1} \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^n} \dots \frac{d\mathbf{p}_N}{(2\pi\hbar)^n}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{a=1}^N \left[\mathbf{p}_a \frac{\Delta \mathbf{x}_a}{\Delta t} - H(\mathbf{x}'_a, \mathbf{p}_a) \right] \Delta t \right\} \\
& = \int_{\mathbf{x}_{in}}^{\mathbf{x}_{out}} D' \mathbf{x} \int D \mathbf{p} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p}] \right\} .
\end{aligned} \tag{2.59}$$

A integral (2.58) no expoente (2.59) é a ação da Hamiltoniana do sistema. É uma função das trajetórias no espaço de fase. A integral de trajetória do lado direito de (2.59) é obtida do funcional $\exp\{\frac{i}{\hbar} S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p}]\}$ sobre todas as trajetórias no espaço de fase, obedecendo as condições iniciais

$$\mathbf{x}(t_{in}) = \mathbf{x}_{in} , \quad \mathbf{x}(t_{out}) = \mathbf{x}_{out} . \tag{2.60}$$

Não há nenhuma restrição nos valores iniciais dos momentos. O número de integrações sobre $\mathbf{x}$ sobre o sinal de limite em (2.59) é menor que o número de integrações sobre $\mathbf{p}$. Por isso, usamos o símbolo $D' \mathbf{x}$ para diferencial funcional em relação a $\mathbf{x}$.

De fato, a fórmula (2.59) nos dá uma definição de integral de trajetória para a função de propagação. Podemos usar esta definição para os cálculos da integral de trajetória. Se usarmos esta definição para os cálculos, esta maneira é chamada método de discretização ou procedimento de discretização. Na estrutura do procedimento de discretização precisamos dividir o intervalo de tempo $[t_{in}, t_{out}]$ em N partes iguais, como foi feito acima, e apresentar as trajetórias no espaço de fase por seus valores $\mathbf{x}_a, \mathbf{p}_a$ nos instantes de tempo t_a , $a = 1, \dots, N-1$. Neste caso o funcional $S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$ é reduzido a uma função $S_H(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_N)$ destes valores

$$\begin{aligned}
S_H(\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_N) &= \sum_{a=1}^N [\mathbf{p}_a \dot{\mathbf{x}}_a - H(\mathbf{x}'_a, \mathbf{p}_a)] \Delta t , \\
\dot{\mathbf{x}}_a &= \frac{\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_{a-1}}{\Delta t} , \quad \mathbf{x}'_a = \frac{\mathbf{x}_a + \mathbf{x}_{a-1}}{2} .
\end{aligned} \tag{2.61}$$

A integral de trajetória (2.59) é reduzida a uma integral de dimensão finita sobre $\mathbf{x}_a$ and $\mathbf{p}_a$, o número de integrações sobre $\mathbf{x}$ é menor que o sobre $\mathbf{p}$, veja a expressão (2.59).

Tendo esta regra inicial de construir integrais de trajetória podemos tentar formular outras regras, que podem ser mais convenientes e permitir-nos alcançar o resultado

de uma maneira mais direta. Estudando as integrais de trajetória, tentaremos formular tais regras de manipulação.

De fato, temos que frisar que, a definição (2.59) depende da regra de correspondência entre operadores e funções clássicas. Regras diferentes dão modos diferentes de parametrização das trajetórias. Este problema foi profundamente investigado em [52] e [24].

A expressão (2.59) apresenta a chamada forma Hamiltoniana da integral de trajetória para a função de propagação. A integração é feita sobre as trajetórias no espaço de fase. O integrando é um funcional $\exp\{\frac{i}{\hbar}S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p}]\}$, onde $S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p}]$ é a ação Hamiltoniana (2.58). Entretanto, as ideias iniciais de Feynman era que a função de propagação (amplitude de probabilidade) sempre pode ser apresentada da seguinte forma

$$G = \int_{\mathbf{x}_{in}}^{\mathbf{x}_{out}} \mathcal{D}\mathbf{x} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_L[\mathbf{x}] \right\} , \quad (2.62)$$

onde $S_L[\mathbf{x}]$ é a ação Lagrangiana

$$S_L[\mathbf{x}] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt ,$$

L é uma Lagrangiana de um sistema e $\mathcal{D}\mathbf{x}$ é a medida da integração funcional sobre as trajetórias $\mathbf{x}(t)$ no espaço de configuração. Tal forma de integral de trajetória, quando as integrações são feitas no espaço de configuração, é chamada Lagrangiana. Uma integral de trajetória específica (2.62) chamaremos representação de Feynman. Podemos obter sempre a forma Lagrangiana da integral de trajetória, integrando sobre os momentos na expressão (2.59). A única questão é se sempre podemos obter uma representação de Feynman (2.62) depois de tal integração. Na próxima seção veremos que no caso geral isto nem sempre é possível.

2.3 A Forma Lagrangiana da Integral de Trajetória

Como foi dito na seção precedente, para obter a forma Lagrangiana da integral de trajetória para a função de propagação, devemos efetuar a integração sobre os momentos na forma Hamiltoniana correspondente (2.59). Vamos realizar primeiramente

tal integração num caso simples quando uma Hamiltoniana depende dos momentos quadraticamente, por exemplo.

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{x}) . \quad (2.63)$$

Se usarmos o procedimento de discretização, precisaremos usar a integral típica

$$I_a = \int \frac{d\mathbf{p}_a}{(2\pi\hbar)^n} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\mathbf{p}_a \frac{\Delta \mathbf{x}_a}{\Delta t} - \frac{\mathbf{p}_a^2}{2m} \right] \Delta t \right\} .$$

A integral é Gaussiana e pode ser facilmente resolvida, por meio da equação (2.30)

$$I_a = \left[\frac{m}{2\pi\hbar i \Delta t} \right]^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ \frac{im}{\hbar 2} \left(\frac{\Delta \mathbf{x}_a}{\Delta t} \right)^2 \Delta t \right\} .$$

Usando-a na expressão (2.59), obtemos

$$\begin{aligned} G &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int \frac{d\mathbf{x}_1}{A} \dots \frac{d\mathbf{x}_{N-1}}{A} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{a=1}^N \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\Delta \mathbf{x}_a}{\Delta t} \right)^2 - V(\mathbf{x}'_a) \right] \Delta t \right\} \\ &= \int_{\mathbf{x}_{in}}^{\mathbf{x}_{out}} \mathcal{D}\mathbf{x} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_L[\mathbf{x}] \right\} , \end{aligned} \quad (2.64)$$

onde

$$A = \left[\frac{2\pi\hbar iT}{mN} \right]^{\frac{n}{2}} , \quad (2.65)$$

e

$$S_L[\mathbf{x}] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt , \quad L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V(\mathbf{x}) . \quad (2.66)$$

Então, neste caso simples a representação de Feynman (2.62) é realmente disponível.

Vamos ver o que acontecerá no caso geral, onde não restringimos a forma específica (2.63) da Hamiltoniana. Não é uma boa ideia usar no início o procedimento da discretização neste caso, porque as integrais de dimensão finita sobre $\mathbf{p}_a$ aparece não ser uma Gaussiana. Então, primeiramente, faremos uma manipulação útil, que é, de fato, um deslocamento dos momentos na integral de trajetória. Deste modo, acreditamos que a integral de trajetória não se altera se fizermos a seguinte substituição

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}} , \quad (2.67)$$

onde $\tilde{\mathbf{p}}$ é uma dada trajetória. A prova pode ser feita no referencial do procedimento de discretização. É instrutivo ver como ela funciona no caso mencionado acima da

Hamiltoniana (2.63). Depois do deslocamento (2.67) a ação Hamiltoniana (2.58) com a Hamiltoniana (2.63) é transformada

$$\begin{aligned} & \int_{t_{in}}^{t_{out}} \left[\mathbf{p}\dot{\mathbf{x}} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - V(\mathbf{x}) \right] dt \rightarrow \\ & \int_{t_{in}}^{t_{out}} \left[\mathbf{p}(\dot{\mathbf{x}} - \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{m}) - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{\tilde{\mathbf{p}}^2}{2m} + \tilde{\mathbf{p}}\dot{\mathbf{x}} - V(\mathbf{x}) \right] dt . \end{aligned} \quad (2.68)$$

Escolhemos $\tilde{\mathbf{p}}$ tal que a parte linear nos termos $\mathbf{p}$ no lado direito de (2.68) se anulam. Isto significa que $\tilde{\mathbf{p}}$ tem que ser encontrado pela equação

$$\tilde{\mathbf{p}} = m\dot{\mathbf{x}} , \quad (2.69)$$

que é, de fato, uma das equações clássicas do movimento para o caso em consideração. Então o lado direito de (2.68) resulta

$$\int_{t_{in}}^{t_{out}} \left[\frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} - V(\mathbf{x}) - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right] dt = S_L[\mathbf{x}] - \int_{t_{in}}^{t_{out}} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} dt , \quad (2.70)$$

onde $S_L[\mathbf{x}]$ é ação Lagrangiana (2.66). Usando estes resultados na integral de trajetória (2.59), podemos escrever

$$G = \int_{\mathbf{x}_{in}}^{\mathbf{x}_{out}} D\mathbf{x}' \int D\mathbf{p} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p}] \right\} = \int_{\mathbf{x}_{in}}^{\mathbf{x}_{out}} D\mathbf{x} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_L[\mathbf{x}] \right\} , \quad (2.71)$$

onde uma nova medida $D\mathbf{x}$ é introduzida

$$D\mathbf{x} = D\mathbf{x}' \int D\mathbf{p} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_{out}} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} dt \right\} D\mathbf{p} . \quad (2.72)$$

Para identificar as expressões (2.71) e (2.64) podemos usar o procedimento de discretização.

Então, vemos que a manipulação com os deslocamentos do momentos funciona efetivamente e podemos aplica-la para considerar o caso da Hamiltoniana de forma geral $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Vamos supor somente por simplicidade que esta Hamiltoniana é construída de uma Lagrangiana $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ da forma usual, e a teoria é não singular, que significa, em particular (veja [27]), que não há vínculos na formulação Hamiltoniana. Então,

vamos fazer um deslocamento (2.67) na integral de trajetória (2.59), onde $\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{p}}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$ é uma solução da equação clássica do movimento

$$\frac{\delta S_H}{\delta \mathbf{p}} = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, H\} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \left(\frac{\delta S_H}{\delta \mathbf{p}} \Big|_{\mathbf{p}=\tilde{\mathbf{p}}} \equiv 0 \right), \quad (2.73)$$

com respeito a $\mathbf{p}$. Se, como supomos, H é construída de uma Lagrangiana $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$. Então tal $\tilde{\mathbf{p}}$ tem a forma

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}. \quad (2.74)$$

Neste caso

$$S_H[\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{p}}] = S_L[\mathbf{x}] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) dt. \quad (2.75)$$

Levando em conta (2.73-2.75), podemos encontrar

$$S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p} + \tilde{\mathbf{p}}] = S_L[\mathbf{x}] + \Delta S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p}], \quad (2.76)$$

$$\Delta S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p}] = - \int_{t_{in}}^{t_{out}} \sum_{n=2} \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^n H}{\partial \mathbf{p}^n} \Big|_{\mathbf{p}=\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}} \right) \mathbf{p}^n dt.$$

Então, a integral de trajetória Hamiltoniana (2.59) pode ser transformada na forma Lagrangiana

$$G = \int_{\mathbf{x}_{in}}^{\mathbf{x}_{out}} D\mathbf{x}' \mathcal{M}[\mathbf{x}] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_L[\mathbf{x}] \right\}. \quad (2.77)$$

com uma medida

$$\mathcal{M}[\mathbf{x}] = \int D\mathbf{p} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \Delta S_H[\mathbf{x}, \mathbf{p}] \right\}. \quad (2.78)$$

Vemos, que no caso geral, a representação de Feynman (2.62) tem que ser modificada pela introdução de uma medida que é dependente de $\mathbf{x}$ e que chamamos $\mathcal{M}[\mathbf{x}]$.

As vezes, é conveniente fazermos a integração sobre as trajetórias $\mathbf{x}(t)$ com condições iniciais nulas na forma Lagrangiana da integral de trajetória. Para essa finalidade podemos fazer um deslocamentos de coordenadas na integral (2.77). Como no caso de deslocamentos de momentos, acreditamos que esta integral não será alterada depois do deslocamento

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}, \quad (2.79)$$

onde $\tilde{\mathbf{x}}$ é uma dada trajetória com condições iniciais

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_{in}) = \mathbf{x}_{in}, \quad \tilde{\mathbf{x}}(t_{out}) = \mathbf{x}_{out}. \quad (2.80)$$

A diferença com o caso de deslocamentos de momento é que a integral de trajetória (2.77) tem condições iniciais finitas para as trajetórias no espaço de configuração. Depois do deslocamento (2.79), temos que mudar as condições iniciais para as trajetórias de integração $\mathbf{x}$, tal que toda a trajetória $\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{x}}$ obedecem as condições prévias. Então para as trajetórias de integração $\mathbf{x}$ depois do deslocamento (2.79) temos as condições iniciais nulas

$$\mathbf{x}(t_{in}) = \mathbf{x}(t_{out}) = 0 . \quad (2.81)$$

Depois do deslocamento a integral (2.77) toma a forma

$$G = \int_0^0 D\mathbf{x}' \mathcal{M}[\mathbf{x}] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_L[\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{x}] \right\} , \quad (2.82)$$

onde a integração é efetuada sobre as trajetórias, obedecendo as condições iniciais nulas (2.81).

Algumas vezes é conveniente escolher a trajetória $\tilde{\mathbf{x}}$ sendo uma trajetória de uma partícula livre ou sendo uma trajetória clássica $\mathbf{x}_{cl}(t)$ da ação $S_L[\mathbf{x}]$

$$\left. \frac{\delta S_L}{\delta \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_{cl}} \equiv 0 . \quad \mathbf{x}_{cl}(t_{in}) = \mathbf{x}_{in} , \quad \mathbf{x}_{cl}(t_{out}) = \mathbf{x}_{out} . \quad (2.83)$$

2.4 Realizando Integrais de Trajetória Simples

Nesta seção encontraremos as funções de propagação realizando integrais de trajetória. Consideraremos os mesmos casos da seção 2.1 para sermos capazes de comparar de modo direto os cálculos com o método das integrais de trajetória.

1. Uma partícula livre.

Neste caso podemos usar a representação de Feynman (2.62) ou (2.64), por causa da estrutura simples da Hamiltoniana. Então

$$G_0 = \int_{\mathbf{x}_{in}}^{\mathbf{x}_{out}} \mathcal{D}\mathbf{x} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_L^0[\mathbf{x}] \right\} , \quad S_L^0[\mathbf{x}] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} dt , \quad (2.84)$$

e o significado exato da medida $\mathcal{D}\mathbf{x}$ podemos extrair da definição (2.64).

Vamos fazer um deslocamento (2.79), onde $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{cl}$, que obedece as equações (2.83). Para uma partícula livre

$$\mathbf{x}_{cl}(t) = \frac{\mathbf{x}_{out} - \mathbf{x}_{in}}{T} t + \frac{\mathbf{x}_{in} t_{out} - \mathbf{x}_{out} t_{in}}{T} . \quad (2.85)$$

Considerando (2.83) e devido a estrutura quadrática do funcional $S_L[\mathbf{x}]$, obtemos

$$S_L^0[\mathbf{x} + \mathbf{x}_{cl}] = S_L^0[\mathbf{x}] + S_L^0[\mathbf{x}_{cl}] . \quad (2.86)$$

De fato, o lado direito de (2.86) é um resultado da decomposição do funcional $S_L[\mathbf{x} + \mathbf{x}_{cl}]$ em séries de Taylor funcionais perto do ponto (trajetória) $\mathbf{x}_{cl}$. O funcional $S_L[\mathbf{x}_{cl}]$ é a ação Lagrangiana na trajetória clássica (2.85). Tal ação foi calculada na seção 2.1, isto é denotado através S_{cl} , veja a equação (2.33). Levando em conta (2.82), (2.86) e (2.33), podemos escrever

$$G_0 = I_0 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}^0 \right\} , \quad S_{cl}^0 = \frac{m\mathbf{X}^2}{2T} , \quad (2.87)$$

onde o fator I_0 não depende dos parâmetros $\mathbf{x}_{in}$, $\mathbf{x}_{out}$

$$I_0 = \int_0^0 \mathcal{D}\mathbf{x} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_{out}} \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2} dt \right\} . \quad (2.88)$$

Para calcular o fator (2.88) usaremos o procedimento de discretização. De acordo com este

$$I_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A^N} \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_{N-1} \exp \left\{ \frac{im}{\hbar 2\Delta t} \sum_{a=1}^N (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_{a-1})^2 \right\} , \quad (2.89)$$

onde agora

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_N = 0 . \quad (2.90)$$

Levando em conta (2.90), podemos apresentar a soma no expoente (2.89) da seguinte forma

$$\sum_{a=1}^N (\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_{a-1})^2 = \sum_{a,b=1}^{N-1} \mathbf{x}_a K_{ab} \mathbf{x}_b ,$$

como uma matriz simétrica $(N-1) \times (N-1)$ denominada K .

$$K = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \quad (2.91)$$

Então

$$I_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A^N} \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_{N-1} \exp \left\{ \frac{im}{\hbar 2\Delta t} \sum_{a,b=1}^{N-1} \mathbf{x}_a K_{ab} \mathbf{x}_b \right\} . \quad (2.92)$$

A integral sob o sinal de limite em (2.92) é uma integral Gaussiana multidimensional. Lembremos aqui o procedimento de cálculo de tais integrais.

Seja $J(K, j)$ uma integral Gaussiana de dimensão r

$$J(K, j) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^r x \exp \left\{ -\frac{1}{2} x K x + j x \right\} , \quad (2.93)$$

onde $x = (x_a)$, $j = (j_a)$, $a = 1, \dots, r$ são vetores reais de dimensão r , $j x = \sum_{a=1}^r j_a x_a$, e $x K x = \sum_{a,b=1}^r x_a K_{ab} x_b$ tem uma forma quadrática definida positiva com a matriz simétrica K_{ab}

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^r x = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_r .$$

Para calcular a integral (2.93), fazemos uma substituição $x = x' + K^{-1}j$, onde K^{-1} é a matriz inversa de K . Esta substituição elimina a parte linear do termo x' no expoente

$$-\frac{1}{2} x K x + j x = -\frac{1}{2} x' K x' + \frac{1}{2} j K^{-1} j .$$

Então

$$J(K, j) = J(K, 0) \exp \left\{ \frac{1}{2} j K^{-1} j \right\} .$$

Para calcular a integral $J(K, 0)$ fazemos a substituição

$$x = K^{-1/2} x' , \quad \frac{Dx}{Dx'} = \det K^{-1/2} ,$$

para obter

$$J(K, j) = J(1, 0) \det K^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} j K^{-1} j \right\} .$$

A integral $J(1, 0)$ pode ser resolvida facilmente, usando a integral Gaussiana unidimensional (2.30)

$$J(1, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} = (2\pi)^{r/2} .$$

Usando a propriedade $\det[\lambda K] = \lambda^r \det K$, obtemos finalmente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^r x \exp \left\{ -\frac{1}{2} x K x + j x \right\} = \det \left[\frac{K}{2\pi} \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} j K^{-1} j \right\} . \quad (2.94)$$

Podemos usar a fórmula (2.94) não somente para matrizes definidas positivas K , mas para qualquer matriz não singular K . Isto corresponde a uma definição adicional de integrais gaussianas impróprias por meio de uma continuação analítica dos elementos de matriz K .

Uma generalização da fórmula (2.94) para o caso de variáveis complexas temos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} d^r \text{Re } z \, d^r \text{Im } z \, \exp \left\{ -z^+ K z + j^+ z + z^+ j \right\} \\ &= \det \left[\frac{K}{\pi} \right]^{-1} \exp \left\{ j^+ K^{-1} j \right\} . \end{aligned} \quad (2.95)$$

Agora podemos usar a fórmula (2.84) em (2.92). Para esta finalidade temos que encontrar o determinante da matriz (2.91). Denotando o menor principal de tamanho j desta matriz por k_j . Então, segue da estrutura concreta da matriz que

$$k_{j+1} = 2k_j - k_{j-1} . \quad k_0 = 1 . \quad (2.96)$$

A equação (2.96) possui uma solução: $k_j = j + 1$. Consequentemente,

$$\det K = k_{N-1} = N . \quad (2.97)$$

Podemos usar este resultado e a fórmula (2.94) para obter uma resposta para I_0 . Uma vez que cada $\mathbf{x}$ é um vetor n -dimensional $\mathbf{x} = (x^i)$ e a matriz K não depende do índice i , podemos primeiramente calcular a integral (2.92) para $\mathbf{x}$ unidimensional e elevar o resultado a potência n . Então, obtemos (usando a forma explícita (2.65) para A)

$$I_0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{mN}{2\pi\hbar iT} \right]^{\frac{n}{2}N} \left[\frac{2\pi\hbar iT}{mN} \right]^{\frac{n}{2}(N-1)} \left[\frac{1}{N} \right]^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{m}{2\pi\hbar iT} \right]^{\frac{n}{2}} . \quad (2.98)$$

Retornando para expressão (2.87), finalmente obtemos uma expressão para a função de propagação da partícula livre

$$G_0 = \left[\frac{m}{2\pi\hbar iT} \right]^{\frac{n}{2}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl}^0 \right\} , \quad S_{cl}^0 = \frac{m\mathbf{X}^2}{2T} , \quad (2.99)$$

que coincide com o cálculo direto na seção 2.1

2. Uma partícula em um campo externo homogêneo constante.

Considere uma partícula em um campo externo homogêneo constante f em uma dimensão. A ação Lagrangiana correspondente tem a forma

$$S_L[x] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} \left[\frac{m\dot{x}^2}{2} + fx \right] dt , \quad (2.100)$$

e representação de Feynman (2.64) é disponível.

Para calcular a integral de trajetória (2.64) fazemos um deslocamento (2.79) onde x_{cl} é a trajetória clássica correspondente

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_{cl} &= f, \quad x_{cl}(t_{in}) = x_{in}, \quad x_{cl}(t_{out}) = x_{out}, \\ x_{cl}(t) &= \frac{f}{2m}(t - t_{in})^2 + \left[\frac{X}{T} - \frac{fT}{2m} \right] (t - t_{in}) + x_{in}, \\ X &= x_{out} - x_{in}, \quad T = t_{out} - t_{in}. \end{aligned} \quad (2.101)$$

No caso em consideração

$$S_L[x_{cl} + x] = S_{cl} + \int_{t_{in}}^{t_{out}} \frac{m\dot{x}^2}{2} dt, \quad S_{cl} = S_L[x_{cl}].$$

Então, obtemos

$$G = I_0 \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl} \right\}.$$

O fator I_0 é da partícula livre (2.88). Foi calculado no caso n -dimensional, veja (2.98).

Para o nosso caso $n = 1$ e

$$I_0 = \left[\frac{m}{2\pi\hbar iT} \right]^{1/2}. \quad (2.102)$$

Calculando a ação S_{cl} , obtemos

$$S_{cl} = \frac{mX^2}{2T} + \frac{1}{2}fT(x_{in} + x_{out}) - \frac{f^2T^3}{24m}. \quad (2.103)$$

Então, finalmente

$$G = \left[\frac{m}{2\pi\hbar iT} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{mX^2}{2T} + \frac{1}{2}fT(x_{in} + x_{out}) - \frac{f^2T^3}{24m} \right] \right\}. \quad (2.104)$$

3. O oscilador harmônico.

Considere um cálculo da função de propagação para um oscilador harmônico unidimensional, usando a representação de Feynman (2.64), que é disponível neste caso.

A ação Lagrangiana do sistema tem a forma

$$S_L[x] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) dt. \quad (2.105)$$

Primeiramente, fazemos o deslocamento (2.79) na integral de trajetória (2.64) onde x_{cl} é a trajetória clássica correspondente, uma forma explícita de tal trajetória foi apresentada pela equação (2.46). A igualdade similar a (2.86) ocorre

$$S_L[x_{cl} + x] = S_{cl} + S_L[x] , \quad S_{cl} = S_L[x_{cl}] .$$

Então,

$$G = G(x_{out}t_{out}, x_{in}t_{in}) = I \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{cl} \right\} , \quad (2.106)$$

onde

$$I = \int_0^0 \mathcal{D}x \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_{out}} \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2) dt \right\} . \quad (2.107)$$

A ação S_{cl} foi calculada na seção 2.1, veja (2.48). Temos somente que calcular o fator I , que não depende dos parâmetros x_{in}, x_{out} . Primeiramente, vamos tentar usar o procedimento de discretização para calcular a integral de trajetória (2.107). Fazendo a discretização, obtemos

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{A^N} \int d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_{N-1} \exp \left\{ \frac{im}{\hbar 2 \Delta t} \sum_{a,b=1}^{N-1} \mathbf{x}_a K_{ab} \mathbf{x}_b \right\} , \quad (2.108)$$

$$K = \begin{pmatrix} 2a_- & -a_+ & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -a_+ & 2a_- & -a_+ & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -a_+ & 2a_- & -a_+ & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & 0 & 0 & -a_+ & 2a_- & -a_+ \\ \dots & 0 & 0 & 0 & -a_+ & 2a_- \end{pmatrix} , \quad a_{\mp} = 1 \mp \left(\frac{\omega \Delta t}{2} \right)^2 ,$$

$$A = \left[\frac{2\pi \hbar i \Delta t}{m} \right]^{1/2} , \quad x_0 = x_N = 0 , \quad \Delta t = T/N .$$

A integral Gaussiana de dimensão finita em (2.108) pode ser realizada, usando a fórmula geral (2.94), logo obtemos

$$I = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{m}{2\pi \hbar i \Delta t} \right]^{\frac{N}{2}} \left[\frac{2\pi \hbar i \Delta t}{m} \right]^{\frac{N-1}{2}} \det K^{-1/2} = \left[\frac{m}{2\pi \hbar i \mathcal{I}} \right]^{1/2} , \quad (2.109)$$

onde

$$\mathcal{I} = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta t \det K .$$

Temos que considerar a matriz K para calcular a quantidade $\mathcal{I}$. Podemos escrever uma equação para os menores principais k_j de tamanho j desta matriz

$$k_{j+1} = 2a_- k_j - a_+^2 k_{j-1}, \quad k_0 = 1. \quad (2.110)$$

Vamos introduzir uma função $\varphi(t)$, que é definida pelos seus valores no ponto $t = t_{in} + j\Delta t$ como

$$\varphi(t_{in} + j\Delta t) = \Delta t k_{j-1}. \quad (2.111)$$

Isto implica

$$\varphi(t_{out}) = \Delta t k_{N-1} = \Delta t \det K. \quad (2.112)$$

Levando em conta (2.110) e (2.111), podemos ver que no limite $\Delta t \rightarrow 0$, a função $\varphi(t)$ satisfaz a equação

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0.$$

Uma solução geral da equação pode ser escrita da forma

$$\varphi(t) = A(\omega) \sin \omega(t - t_{in}) + B(\omega) \cos \omega(t - t_{in}),$$

tal que

$$\mathcal{I} = \varphi(t_{out}) = A(\omega) \sin \omega T + B(\omega) \cos \omega T. \quad (2.113)$$

Podemos encontrar os coeficientes $A(\omega)$ e $B(\omega)$, considerando o limite $\omega \rightarrow 0$ em ambos os lados (2.113). Este limite corresponde ao caso de uma partícula livre. Comparando (2.108) com (2.102), encontramos

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \mathcal{I} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(t_{out}) = T.$$

A única possibilidade de suprir tal comportamento do lado direito de (2.113) é selecionar $A(\omega) = \omega^{-1}$. $B(\omega) = 0$. Então

$$\mathcal{I} = \frac{\sin \omega T}{\omega},$$

e

$$I = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi\hbar i \sin \omega T}}. \quad (2.114)$$

Unindo-se (2.114) com (2.106), obtemos a função de propagação para o oscilador harmônico

$$G = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega T}} \times \exp \left\{ \frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega T} \left[(x_{out}^2 + x_{in}^2) \cos \omega T - 2x_{in}x_{out} \right] \right\} . \quad (2.115)$$

Isto é justamente a expressão (2.45), que foram encontrados nos cálculos de maneira direta.

Vamos considerar uma outra maneira de calcular a integral de trajetória (2.107) para o fator I . Devido as condições de contorno nulas para as trajetórias de integração nesta integral de trajetória, apresentamos a ação (2.105) na seguinte forma

$$S_L[x] = -\frac{m}{2} \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt_1 \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt_2 x(t_1) K(t_1, t_2) x(t_2) ,$$

onde

$$K(t_1, t_2) = \left[\partial_{t_1}^2 + \omega^2 \right] \delta(t_1 - t_2) , \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t} .$$

Então, temos que calcular a integral de trajetória

$$I = \int_0^0 \mathcal{D}x \exp \left\{ -\frac{im}{2\hbar} \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt_1 \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt_2 x(t_1) K(t_1, t_2) x(t_2) \right\} .$$

Baseado na experiência prévia, podemos supor que esta integral é proporcional à $\det K^{-1/2}$

$$I = \Lambda \det K^{-1/2} ,$$

com o fator Λ , que não depende dos parâmetros contidos em K , neste caso concreto ele não depende de ω . Então podemos escrever

$$I = I_0 \left(\frac{\det K}{\det K_0} \right)^{-1/2} , \quad (2.116)$$

onde as quantidades com sub-índices 0 correspondem ao caso $\omega = 0$, isto é. ao caso da partícula livre. O fator I_0 foi calculado antes, veja (2.102). Então, devemos calcular os determinantes da matriz $K(t_1, t_2)$ e $K_0(t_1, t_2)$. São matrizes de índices contínuos t_1, t_2 . Como encontrar os correspondentes determinantes? Aqui vamos considerar

uma maneira. Isto é, vamos definir os determinantes como produtos de autovalores dos operadores correspondentes K e K_0

$$K = \partial_t^2 + \omega^2, \quad K_0 = \partial_t^2, \quad (2.117)$$

no espaço das funções em t , dado no intervalo $[t_{in}, t_{out}]$ com condições de contorno nulas. Então, considere o problema de autovalor para o operador K

$$[\partial_t^2 + \omega^2] x_n(t) = \lambda_n x_n(t),$$

no espaço das funções $x(t)$, satisfazendo as condições de contorno

$$x(t_{in}) = x(t_{out}) = 0.$$

As autofunções normalizadas tem a forma

$$x_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\pi n}{T} (t - t_{in}), \quad n > 0,$$

e os autovalores correspondentes λ_n são

$$\lambda_n = -\frac{n^2 \pi^2}{T^2} + \omega^2.$$

Então

$$\det K = \det [\partial_t^2 + \omega^2] = \prod_{n>0} \left(-\frac{n^2 \pi^2}{T^2} + \omega^2 \right). \quad (2.118)$$

O produto infinito no lado direito de (2.118) é divergente. Entretanto a razão

$$\frac{\det K}{\det K_0} = \frac{\det [\partial_t^2 + \omega^2]}{\det [\partial_t^2]} = \prod_{n>0} \left(1 - \frac{\omega^2 T^2}{n^2 \pi^2} \right) = \frac{\sin \omega T}{\omega T} \quad (2.119)$$

é finita. Unindo-se os resultados (2.119), (2.116) e (2.102), obtemos para I a expressão (2.114).

Outros casos mais complicados, onde dá para calcular integrais de trajetória na mecânica quântica não relativística, o leitor pode achar nas publicações [3, 6, 4, 20].

Capítulo 3

Álgebra e Análise sobre as Variáveis de Grassmann

3.1 Álgebra de Grassmann e de Berezin

A álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$ (álgebra $\mathcal{G}$) sobre o campo $\mathbb{C}$ dos números complexos é uma álgebra cujos os elementos geradores ξ^α , $\alpha = 1, \dots, m$, satisfazem as relações [35]

$$\xi^\alpha \xi^\beta + \xi^\beta \xi^\alpha = 0 . \quad (3.1)$$

Qualquer elemento de álgebra $\mathcal{G}$ pode ser representado como

$$g = f_0 + f_\alpha \xi^\alpha + f_{\alpha_1 \alpha_2} \xi^{\alpha_1} \xi^{\alpha_2} + \dots + f_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \xi^{\alpha_1} \dots \xi^{\alpha_m} , \\ f_0, f_\alpha, \dots, f_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \in \mathbb{C} . \quad (3.2)$$

Tal representação não será ambígua se escolhermos $f_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$, $k = 2, \dots, m$ como anti-simétricos em relação a seus índices.

Assumimos que a operação de involução a ser dada numa álgebra $\mathcal{G}$ que significa o mapeamento de $\mathcal{G}$ nele mesmo ($g \rightarrow g^+$, $g, g^+ \in \mathcal{G}$) com as propriedades

$$(g^+)^+ = g , \quad (g_1 g_2)^+ = g_2^+ g_1^+ , \\ (c_1 g_1 + c_2 g_2)^+ = c_1^* g_1^+ + c_2^* g_2^+ , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} . \quad (3.3)$$

Além disso, assumimos que o conjunto de elementos geradores ξ é involutivo que significa que a operação de involução translada cada elemento gerador novamente em

um certo elemento gerador

$$(\xi^\alpha)^+ = \xi^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, m; . \quad (3.4)$$

Vamos considerar a álgebra $\mathcal{F}$ das funções numéricas $f(c)$ de variáveis c^i , $i = 1, \dots, k$. Entre as variáveis c que podem ser reais ou imaginárias, e assumimos que as variáveis complexas sempre aparecem em pares conjugados. Então para qualquer c^i , c^j existe, tal que

$$(c^i)^* = c^j, \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Uma álgebra $\mathcal{F}$ pode ser de funções contínuas, de funções infinitamente diferenciáveis, etc. Notamos somente que a álgebra $\mathcal{F}$ pode ser vista como uma álgebra abstrata sobre $\mathbf{C}$ com o conjunto de elementos geradores $\theta^i(c)$, $i = 1, \dots, k$, onde

$$\theta^i(c) = c^i. \quad (3.5)$$

(Para obter, usando θ , elementos não polinomiais em c , deveríamos introduzir uma topologia em $\mathcal{F}$; não vamos entrar em detalhes aqui.)

Podemos assumir que numa álgebra $\mathcal{F}$ a involução tem as propriedades similares a (3.3) e satisfazem a condição

$$(\theta^i(c))^+ = c^{i*} = c^j = \theta^j(c), \quad i, j = 1, \dots, k.$$

Vamos generalizar a construção (3.1–3.4), assumindo que todas as quantidades $f_0, f_\alpha, \dots, f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}$ em (3.1) pertencem a uma álgebra $\mathcal{F}$

$$b = f_0(\theta) + f_\alpha(\theta)\xi^\alpha + \dots + f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}(\theta)\xi^{\alpha_1} \dots \xi^{\alpha_m}. \quad (3.6)$$

O conjunto gerados por elementos da forma (3.6) é uma álgebra sobre $\mathbf{C}$ com os elementos geradores (θ, ξ) . Devemos daqui em diante chama-la *álgebra de Berezin* (ou *álgebra B*) [36, 37, 38, 39, 40].

Introduzimos a notação $z^a = (\theta^i, \xi^\alpha)$ e chamamos de z os *elementos geradores da álgebra B*, e

$$z^a = \theta^i, \quad a = i = 1, \dots, k, \quad z^a = \xi^\alpha, \quad a = k + \alpha, \quad \alpha = 1, \dots, m.$$

Por construção numa álgebra B uma operação de involução $b \rightarrow b^+$, $b, b^+ \in B$ é dada tal que

$$\begin{aligned}(b^+)^+ &= b, & (b_1 b_2)^+ &= b_2^+ b_1^+, \\ (c_1 b_1 + c_2 b_2)^+ &= c_1^* b_1^+ + c_2^* b_2^+, & c_1, c_2 &\in \mathbf{C}.\end{aligned}$$

O conjunto dos elementos z é involutivo: em particular, os conjuntos de elementos geradores θ e ξ são invariantes independentes sobre a operação de involução. Deste modo referimos aos elementos $b \in B$ definidos por (3.6) simplesmente *funções dos elementos geradores z*

$$b = b(z).$$

Denotamos por B' o subespaço B consistindo de elementos b cuja a representação (3.6) contém somente potências ímpares de ξ . Os elementos $b \in B'$ serão chamados *ímpares*. Por B'' denotamos o subespaço B consistindo dos elementos cuja representação (3.6) envolve somente potências pares de ξ , os elementos $b \in B''$ ser ao chamados *pares*. Note que B'' é uma sub-álgebra de uma álgebra B . Elementos de B'' são permutáveis com todos os elementos de B . e elementos de B' anticomutam entre si. Em particular

$$b^2 = 0, \quad b \in B'.$$

Claramente, $\theta \in B''$; serão chamados *elementos geradores pares*, enquanto $\xi \in B'$ serão chamados *elementos geradores ímpares*. Os elementos que pertencem a B' e B'' , devemos falar como elementos com uma *paridade de Grassmann* definida. A representação (3.6) implica que um elemento arbitrário $b \in B$ pode ser representado como uma soma de elementos pares e ímpares

$$b = b' + b'', \quad b' \in B', \quad b'' \in B''.$$

Para cada elemento B pertencente a B' ou B'' introduzimos a quantidade P_b que caracteriza sua paridade por

$$P_b = 1, \quad b \in B'; \quad P_b = 0, \quad b \in B''.$$

Obviamente

$$P_\theta = 0 \quad , \quad P_\xi = 1 \quad .$$

A paridade do elemento $b_3 = b_1 b_2$, onde b_1 e b_2 possuem paridades, iguais a

$$P_{b_3} = (P_{b_1} + P_{b_2}) \pmod{2} \quad . \quad (3.7)$$

A partir daqui, devemos usar como função somente uma função da paridade P , isto é

$$(-1)^P \quad .$$

Claramente, a adição de qualquer número par em P não muda esta função. Em (3.7) podemos, conseqüentemente, omitir $\pmod{2}$.

É também conveniente introduzir os *índices de paridade de Grassmann*. Nas páginas seguintes denotamos a paridade do índice a por $P_{(a)}$. Assumimos que a paridade $P_{(a)}$ do índice do elemento gerador z^a coincide com a paridade do próprio elemento gerador

$$P_{(a)} = P_{z^a} \quad .$$

Usando as quantidades introduzidas, podemos escrever as relações de comutação dos elementos da álgebra com uma paridade definida

$$b_1 b_2 = (-1)^{P_{b_1} P_{b_2}} b_2 b_1 \quad .$$

Em particular, as relações de comutação para os elementos geradores da álgebra B são

$$z^a z^b = (-1)^{P_{z^a} P_{z^b}} z^b z^a = (-1)^{P_{(a)} P_{(b)}} z^b z^a \quad .$$

Devemos notar que a escolha dos elementos geradores numa álgebra B é ambígua. Logo, podemos fazer uma mudança de variáveis, isto é, escolhendo como os novos elementos geradores $y^a \in B$, $[y] = [z]$, que são funções de z

$$y^a = y^a(z) = f_0^a(\theta) + f_\alpha^a(\theta) \xi^\alpha + \cdots + f_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^a(\theta) \xi^{\alpha_1} \dots \xi^{\alpha_m} \quad . \quad (3.8)$$

Para y ser realmente elementos geradores, é necessário e suficiente que as condições

$$\det \left\| \frac{\partial f_0^i(c)}{\partial c^j} \right\| \neq 0 \quad , \quad \det \left\| f_\alpha^\beta(c) \right\| \neq 0 \quad , \quad (3.9)$$

sejam válidas para alguma divisão de $a = (i, \beta)$. Uma mudança de variáveis satisfazendo (3.9) será chamado não-singular. Devemos assumir que os elementos geradores sempre são escolhidos com paridade definida. Conjuntos de elementos geradores de paridade definida conectados por uma mudança não singular podem ser chamados equivalentes.

3.2 Supermatrizes na Álgebra de Berezin

Devemos descrever agora uma certa classe de matrizes numa álgebra B que aparecem de um modo natural nas construções da mecânica quântica e teoria quântica de campos. Estas matrizes serão daqui em diante chamadas *supermatrizes*.

A supermatriz M é caracterizada por um conjunto de elementos de matriz $M_{ab} \in B$, em que tem uma paridade definida, e por um conjunto de paridades dos seus índices $(P_{(a)}, P_{(b)})$. Dado isto, as paridades dos elementos de matrizes e as paridades dos índices da supermatriz são relacionados como

$$P_{M_{ab}} = P_{(a)} + P_{(b)} . \quad (3.10)$$

A ordem de sucessão de índices pares e ímpares numa supermatriz pode ser arbitrário, mas a condição é válida

$$P_{(a)} = P_{(b)} \quad \text{para} \quad a = b . \quad (3.11)$$

Note que uma supermatriz não é definida unicamente por seus elementos de matriz. Duas supermatrizes diferentes existem, com elementos de matrizes idênticos mas com paridades de índices opostas. Devemos chamar duas supermatrizes M e N *casadas* se elas possuírem a mesma ordem de sucessão dos índices pares e ímpares.

No que segue, consideraremos somente a soma e a multiplicação de matrizes casadas. Para os índices das matrizes $M + N$ e MN , que são a soma e o produto das matrizes M e N , associamos a paridade dos correspondentes índices livres. Neste caso, $M + N$ e MN são supermatrizes.

A supermatriz $M^{(N)}$ é chamada *forma normal da supermatriz M* e é construída a partir de M por meio de uma permutação simultânea de linhas e colunas com números

iguais, tal que $M^{(N)}$ seguem uma ordem definida de sucessão de índices: primeiro vem todos os pares e depois todos os índices ímpares (as linhas de índices pares e ímpares da matriz $M^{(N)}$ devem manter a hierarquia dos índices da matriz M). A matriz $M^{(N)}$ pode ser representada na seguinte forma de bloco

$$\begin{aligned} \|M_{ab}^{(N)}\| &= \begin{pmatrix} (M_1)_{ij} & (M_2)_{i3} \\ (M_3)_{\alpha j} & (M_4)_{\alpha\beta} \end{pmatrix} , \\ a &= (i, a) , \quad b = (j, \beta) , \quad P_{(i)} = P_{(j)} = 0 , \\ P_{(\alpha)} &= P_{(\beta)} = 1 , \quad M_1, M_4 \in B'' , \quad M_2, M_3 \in B' . \end{aligned} \quad (3.12)$$

Dizemos que a matriz M tem a *forma normal* se

$$M = M^{(N)} .$$

A supermatriz M será chamada *não-singular* se tiver a recíproca. As recíprocas a esquerda e a direita para as supermatrizes coincidem e são supermatrizes.

Fazendo uma expansão em série nos elementos geradores ímpares, podemos verificar que as condições necessárias e suficientes de não-singularidade das supermatrizes M e $M^{(N)}$ são idênticas e têm a forma

$$\det M_1^0 \neq 0 , \quad \det M_4^0 \neq 0 , \quad (3.13)$$

em, que M_1^0 e M_4^0 são matrizes ordinárias que são funções das variáveis complexas c e são construídas como segue

$$M_1^0 = M_1|_{\xi \rightarrow 0, \theta \rightarrow c} , \quad M_4^0 = M_4|_{\xi \rightarrow 0, \theta \rightarrow c} .$$

Um par de de números (n_1, n_2) , tal que

$$n_1 = \text{posto } M_1^0 , \quad n_2 = \text{posto } M_4^0$$

será chamado o *posto da supermatriz* M

$$\text{posto } M = (n_1, n_2) .$$

As matrizes M^{T_λ} , $\lambda = 0, 1, \dots, 4$. serão chamadas *transpostas* T_λ em relação a matriz M

$$\begin{aligned} M_{ab}^{T_0} &= M_{ba} = M_{ab}^T, & M_{ab}^{T_1} &= (-1)^{P_{(a)}+P_{(b)}+P_{(a)}P_{(b)}} M_{ba}, \\ M_{ab}^{T_2} &= (-1)^{P_{(a)}P_{(b)}} M_{ba}, & M_{ab}^{T_3} &= (-1)^{P_{(a)}+P_{(a)}P_{(b)}} M_{ba}, \\ M_{ab}^{T_4} &= (-1)^{P_{(b)}+P_{(a)}P_{(b)}} M_{ba}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Se a matriz M tem uma forma normal, As matrizes M^{T_λ} na forma de blocos são

$$\begin{aligned} M^{T_1} &= \begin{pmatrix} M_1^T & -M_3^T \\ -M_2^T & -M_4^T \end{pmatrix}, & M^{T_2} &= \begin{pmatrix} M_1^T & M_3^T \\ M_2^T & -M_4^T \end{pmatrix}, \\ M^{T_3} &= \begin{pmatrix} M_1^T & M_3^T \\ -M_2^T & M_4^T \end{pmatrix}, & M^{T_4} &= \begin{pmatrix} M_1^T & -M_3^T \\ M_2^T & M_4^T \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aqui, a relação

$$M^{T_\lambda} = M^{T_{\lambda+2}} \sigma_3, \quad \lambda = 1, 2, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

é válida, quando a supermatriz σ_3 é casada com a supermatriz M .

Devido a não comutatividade dos elementos de matriz das supermatrizes, a operação convencional de transposição não possui a propriedade conhecida

$$(MN \dots Q)^T \neq Q^T \dots N^T M^T.$$

Esta propriedade é exibida pelas operações de transposição T_λ com $\lambda = 3, 4$

$$(MN \dots Q)^{T_\lambda} = Q^{T_\lambda} \dots N^{T_\lambda} M^{T_\lambda}, \quad \lambda = 3, 4.$$

Para a transposição T_λ com $\lambda = 1, 2$ se verifica a relação

$$(MN \dots Q)^{T_\lambda} = Q^{T_\lambda} \sigma_3 \dots \sigma_3 N^{T_\lambda} \sigma_3 M^{T_\lambda}, \quad \lambda = 1, 2. \quad (3.16)$$

Além de

$$\begin{aligned} T_\lambda^2 &= 1, \quad \lambda = 0, 1, 2; & T_\lambda^2 &\neq 1, \quad \lambda = 3, 4; & T_\lambda^4 &= 1, \quad \lambda = 0, 1, \dots, 4; \\ T_3 T_4 &= T_4 T_3 = 1; & T_3^3 &= T_4; & T_4^3 &= T_3; & \dots \end{aligned}$$

De (3.16,3.15) segue que

$$\begin{aligned} (f(M))^{T_\lambda} &= f(M^{T_\lambda}) , \quad \lambda = 3, 4 ; \\ (f(M))^{T_\lambda} &= (f(M))^{T_{\lambda+2}} \sigma_3 = f(M^{T_{\lambda+2}}) \sigma_3 \\ &= f(M^{T_\lambda} \sigma_3) \sigma_3 , \quad \lambda = 1, 2 . \end{aligned}$$

A matriz M será chamada *simétrica em T_λ* (*anti-simétrica em T_λ*) se

$$M^{T_\lambda} = M \quad (M^{T_\lambda} = -M) .$$

Qualquer supermatriz M pode ser representada como a soma da parte simétrica T_λ de M^{s_λ} e da parte anti-simétrica T_λ de M^{a_λ} , $\lambda = 0, 1, 2$

$$M = M^{s_\lambda} + M^{a_\lambda} , \quad M^{s_\lambda} = \frac{1}{2}(M + M^{T_\lambda}) , \quad M^{a_\lambda} = \frac{1}{2}(M - M^{T_\lambda}) .$$

Consideremos a forma quadrática $I = z^a M_{ab} z^b$, cuja a supermatriz M é tal que as paridades dos índices coincidem com os dos índices dos correspondentes elementos geradores. Então a contribuição em I é dado somente pela parte simétrica de T_1 da supermatriz M , isto é

$$z^a M_{ab} z^b = z^a M_{ab}^{s_1} z^b . \quad (3.17)$$

A supermatriz M^P é chamada *transposta em P* relativa a supermatriz M se os elementos da supermatriz M^P coincidem com os da supermatriz M , e a paridade dos índices da supermatrix M^P são opostos aos da supermatriz M . As supermatrizes M e M^P são reduzidas a forma normal numa maneira diferente, isto é: $M_1^P = M_4$, $M_2^P = M_3$, $M_3^P = M_2$, $M_4^P = M_1$. Aí são válidas as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} (MN \dots Q)^P &= M^P N^P \dots Q^P , \quad (f(M))^P = f(M^P) , \\ (M^P)^{T_{1,2}} &= - (M^{T_{2,1}})^P . \end{aligned} \quad (3.18)$$

A última relação implica. em particular, que se a supermatriz M é $T_{1,2}$ -simétrica (anti-simétrica), Então a matriz M^P é $T_{2,1}$ -anti-simétrica (simétrica) isto é

$$\begin{aligned} \text{se } M^{T_{1,2}} &= M , \quad \text{então } (M^P)^{T_{2,1}} = -M^P ; \\ \text{se } M^{T_{1,2}} &= -M , \quad \text{então } (M^P)^{T_{2,1}} = M^P . \end{aligned} \quad (3.19)$$

As expressões

$$\text{Str}M = \sum_a (-1)^{P(a)} M_{aa} , \quad (3.20)$$

$$\text{Sdet}M = \exp[\text{Str} \ln M] , \quad (3.21)$$

serão chamadas de *supertraço* ($\text{Str}M$) e *superdeterminante* ($\text{Sdet}M$) da supermatriz M . O supertraço e o superdeterminante possuem muitas propriedades do traço e determinante de matrizes ordinárias e aparecem de forma natural nas construções da mecânica quântica e teoria quântica de campos. Apresentamos a seguir várias propriedades de supertraço e superdeterminante:

- a) O supertraço e o superdeterminante permanecem inalterados sobre uma permutação simultânea de linhas e colunas igualmente numeradas da supermatriz.
- b) O superdeterminante permanece inalterado quando para qualquer linha (coluna) da supermatriz, uma combinação linear arbitrária de outras linhas (colunas) são adicionadas na condição de conservação de paridade dos elementos de uma dada linha (coluna).
- c) $\text{Str}(M + N) = \text{Str}M + \text{Str}N$.
- d) $\text{Str}M = \text{Str}M^{(N)} = \text{tr}M_1 - \text{tr}M_4$.
- e) $\text{Sdet}M = \text{Sdet}M^{(N)} = \det M_1 \det^{-1} (M_4 - M_3 M_1^{-1} M_2)$
 $= \det (M_1 - M_2 M_4^{-1} M_3) \det^{-1} M_4$.
- f) $\text{Str}MN = \text{Str}NM$.
- g) $\text{Sdet}MN = \text{Sdet}M \text{Sdet}N$.
- h) $\text{Sdet}M^{-1} = \text{Sdet}^{-1}M$.
- i) $\text{Str}M^{T_\lambda} = \text{Str}M$, $\lambda = 0, 3, 4$.
- j) $\text{Str}M^{T_\lambda} = \text{tr}M$, $\lambda = 1, 2$.
- k) $\text{Sdet}M^{T_\lambda} = (-1)^{[\alpha]} \text{Sdet}M$, $\lambda = 1, 2$,
 onde α são todos os índices ímpares da supermatriz M .
- l) $\text{Sdet}M^{T_\lambda} = \text{Sdet}M$, $\lambda = 3, 4$.
- m) $\text{Str}M^P = -\text{Str}M$.
- n) $\text{Sdet}M^P = \text{Sdet}^{-1}M$.

Vamos provar, por exemplo, a propriedade (e). A propriedade (a) implica que para este propósito é suficiente calcular o superdeterminante da supermatriz $M^{(N)}$ com os blocos $M_1, \dots, M_4$. Qualquer matriz em bloco pode ser representada na forma (3.4)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ M_3 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & M_1^{-1}M_2 \\ 0 & M_4 - M_3M_1^{-1}M_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I & M_2 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 - M_2M_4^{-1}M_3 & 0 \\ M_4^{-1}M_3 & I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e para qualquer matriz triangular, as igualdades

$$\ln \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln A & X \\ 0 & \ln C \end{pmatrix}, \quad \ln \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln A & 0 \\ Y & \ln C \end{pmatrix},$$

são válidas, onde X e Y são algumas matrizes. Usando isto, como também as propriedades (g) e (d), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Sdet} M &= \exp[\text{tr} \ln M_1] \exp[-\text{tr} \ln (M_4 - M_3M_1^{-1}M_2)] \\ &= \det M_1 \det^{-1} (M_4 - M_3M_1^{-1}M_2) \\ &= \exp[-\text{tr} \ln M_4] \exp[\text{tr} \ln (M_1 - M_2M_4^{-1}M_3)] \\ &= \det (M_1 - M_2M_4^{-1}M_3) \det^{-1} M_4. \end{aligned}$$

Devemos provar a propriedade (n) fazendo o uso da propriedade (m) e segundo as propriedades (3.18)

$$\begin{aligned} \text{Sdet} M^P &= \exp[\text{Str} \ln M^P] = \exp[\text{Str}(\ln M)^P] \\ &= \exp[-\text{Str} \ln M] = \text{Sdet}^{-1} M. \end{aligned}$$

3.3 Derivadas e Integrais na Álgebra de Berezin

Agora procederemos as definições das *derivadas* e *integrais* na álgebra B . Por definição, as derivadas são operações lineares, e é portanto suficiente defini-las como produtos de elementos geradores. Reconhecendo que os elementos geradores não comutam no caso geral, dois tipos de derivadas existem: a direita e esquerda. A derivada a esquerda é

definida como segue

$$\begin{aligned} & \frac{\partial_l}{\partial z^a} z^{a_1} z^{a_2} \dots z^{a_k} \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{\sum_{j=1}^{i-1} P_{(a)} P_{(a_j)}} \delta_a^{a_i} z^{a_1} \dots z^{a_{i-1}} z^{a_{i+1}} \dots z^{a_k} . \end{aligned} \quad (3.22)$$

A derivada a direita é definida como

$$\begin{aligned} & \frac{\partial_r}{\partial z^a} z^{a_1} z^{a_2} \dots z^{a_k} \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{\sum_{j=k}^{i+1} P_{(a)} P_{(a_j)}} \delta_a^{a_i} z^{a_1} \dots z^{a_{i-1}} z^{a_{i+1}} \dots z^{a_k} . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Podemos ver que as derivadas a direita e a esquerda com relação aos elementos geradores pares coincidem e possuem a forma das derivadas usuais com respeito ao número de variáveis.

Devemos listar um número de propriedades e relações simples para introduzirmos as derivadas:

- a) $\frac{\partial_{l,r}}{\partial z^a} \frac{\partial_{l,r}}{\partial z^{a'}} b = (-1)^{P_{(a)} P_{(a')}} \frac{\partial_{l,r}}{\partial z^{a'}} \frac{\partial_{l,r}}{\partial z^a} b ,$
- b) $\frac{\partial_l}{\partial z^a} \frac{\partial_r}{\partial z^{a'}} b = \frac{\partial_r}{\partial z^{a'}} \frac{\partial_l}{\partial z^a} b ,$
- c) $\frac{\partial_l}{\partial z^a} b = (-1)^{P_{(a)}} \frac{\partial_r}{\partial z^a} b , \quad b \in B'' .$
- d) $\frac{\partial_l}{\partial z^a} b = \frac{\partial_r}{\partial z^a} b , \quad b \in B' .$
- e) $\frac{\partial_l}{\partial z^a} (b_1 b_2) = \frac{\partial_l b_1}{\partial z^a} b_2 + (-1)^{P_{b_1} P_{(a)}} b_1 \frac{\partial_l b_2}{\partial z^a} ,$

onde b_1 é um elemento de paridade definida,

$$f) \frac{\partial_r}{\partial z^a} (b_1 b_2) = (-1)^{P_{b_2} P_{(a)}} \frac{\partial_r b_1}{\partial z^a} b_2 + b_1 \frac{\partial_r b_2}{\partial z^a} , \quad (P1.3)$$

onde b_2 é um elemento de paridade definida.

A definição de derivadas também implica a regra de diferenciação para funções compostas. Isto é, seja $y = y(z)$ um conjunto equivalente de elementos geradores

numa álgebra B (os novos elementos geradores são numerados tal que $P_{z^a} = P_{y^a}$). Então considere uma função composta de z

$$\tilde{b}(z) = b(y(z)) .$$

As derivadas com respeito a z podem ser calculadas como

$$\frac{\partial_r \tilde{b}}{\partial z^a} = \frac{\partial_r b}{\partial y^c} \frac{\partial_r y^c}{\partial z^a} , \quad \frac{\partial_l \tilde{b}}{\partial z^a} = \frac{\partial_l y^c}{\partial z^a} \frac{\partial_l b}{\partial y^c} . \quad (3.24)$$

Além de, se $y = y(\lambda, z)$, onde λ é um parametro numérico, então

$$\frac{\partial \tilde{b}}{\partial \lambda} = \frac{\partial y^a}{\partial \lambda} \frac{\partial b}{\partial y^a} = \frac{\partial_r b}{\partial y^a} \frac{\partial y^a}{\partial \lambda} . \quad (3.25)$$

Agora procedemos na definição da *integral numa álgebra* B. Para esta finalidade introduzimos os símbolos formais dz^a e associamos a eles e aos seus índices, paridades dos elementos geradores correspondentes z^a . Por definição

$$z^a dz^b = (-1)^{P(a)P(b)} dz^b z^a , \quad dz^a dz^b = (-1)^{P(a)P(b)} dz^b dz^a . \quad (3.26)$$

Usando estes símbolos, devemos escrever a integral dos elementos da álgebra B com respeito ao conjunto dos elementos geradores $z^{a_1}, \dots, z^{a_\mu}$

$$I = \int b(z) dz^{a_1} \dots dz^{a_\mu} . \quad (3.27)$$

Por definição, a integral (3.27) é um funcional linear de $b(z)$ e é visto como repetido. É portanto suficiente definir separadamente as integrais sobre elementos geradores pares e ímpares.

A integral $b(z)$ sobre o conjunto de elementos geradores pares $\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_\nu}$, onde $\nu \leq [\theta]$, são definidos como

$$\int b(z) d\theta^{i_1} \dots d\theta^{i_\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} b(z) \Big|_{\theta^{i_1}, \dots, \theta^{i_\nu} \rightarrow c^{i_1}, \dots, c^{i_\nu}} , \quad (3.28)$$

e é consequentemente reduzidos a integral sobre as variáveis c .

A integral sobre elementos geradores ímpares é definida, de acordo com *Berezin* [36], pelas regras

$$\int d\xi^\alpha = 0 , \quad \int \xi^\alpha d\xi^\alpha = 1 . \quad (3.29)$$

Note que a integral sobre os elementos geradores ímpares coincidem com as derivadas em relação a estes elementos geradores, isto é

$$\int b(z) d\xi^{\alpha_1} \dots d\xi^{\alpha_\lambda} = \frac{\partial_r}{\partial \xi^{\alpha_\lambda}} \dots \frac{\partial_r}{\partial \xi^{\alpha_1}} b(z) . \quad (3.30)$$

A integral introduzida possui um número de propriedades análogas as das integrais usuais.

A integral da derivada total é igual a zero (para um decrescimento suficientemente forte de $b(z)$ com respeito aos elementos geradores pares)

$$\int \frac{\partial_r b}{\partial z^a} dz^a = \int \frac{\partial_l b}{\partial z^a} dz^a = 0 , \quad (3.31)$$

que implica fórmulas de integração por partes, por exemplo:

$$\int \frac{\partial_l b_1}{\partial z^a} b_2 dz^a = -(-1)^{P_{b_1} P_{(a)}} \int b_1 \frac{\partial_l b_2}{\partial z^a} dz^a , \quad (3.32)$$

onde b_1 é um elemento de paridade definida. Note que em (3.29, 3.31, 3.32) não há soma sobre índices repetidos.

Uma fórmula de “*mudança de variáveis*” é válida, de maneira semelhante a integral usual. Isto é, sejam z e y dois conjuntos equivalentes de elementos geradores. Então

$$\int b(y) dy = \int b(y(z)) \text{Ber } y(z) dz , \quad (3.33)$$

onde $\text{Ber } y(z)$ é o *Bereziniano* da mudança dos elementos geradores $y = y(z)$, que é a extensão do Jacobiano usado no caso das integrais usuais

$$\text{Ber } y(z) = \text{Sdet } r = \text{Sdet } l . \quad (3.34)$$

As supermatrizes r e l são construídas como segue

$$r_{ab} = \frac{\partial_r y^a}{\partial z^b} , \quad l_{ab} = \frac{\partial_l y^b}{\partial z^a} .$$

Os índices a e b das supermatrizes r e l sendo associadas paridades dos elementos geradores correspondentes z e y .

Lembrando as propriedades (P1.3 c,d) das derivadas na álgebra B , podemos prontamente ver que

$$l = r^{T_3} , \quad r = l^{T_4} .$$

Assim, as duas definições de Bereziniano coincidem em virtude da propriedade (3.21) do superdeterminante.

Com uma dupla mudança de variáveis $x = x(y)$, $y = y(z)$, tal que $x = x(y(z)) = \varphi(z)$, temos de acordo com (3.24)

$$\frac{\partial_r \varphi^a}{\partial z^b} = \frac{\partial_r x^a}{\partial y^c} \frac{\partial_r y^c}{\partial z^b} \cdot \frac{\partial_l \varphi^b}{\partial z^a} = \frac{\partial_l y^c}{\partial z^a} \frac{\partial_l x^b}{\partial y^c} \cdot$$

Consequentemente

$$\text{Ber } \varphi(z) = \text{Ber } x(y) \text{Ber } y(z) , \quad (3.35)$$

como no caso usual de dupla mudança de variáveis.

Se mudamos somente os elementos geradores pares $\theta = \theta(\kappa)$ O Bereziniano é reduzido a um determinante usual

$$\text{Ber } \theta(\kappa) = \frac{D(\theta)}{D(\kappa)} . \quad (3.36)$$

Se mudarmos somente os elementos geradores ímpares $\xi = \xi(\psi)$, temos

$$\text{Ber } \xi(\psi) = \det^{-1} \left\| \frac{\partial_r \xi^a}{\partial \psi^b} \right\| . \quad (3.37)$$

Deste modo, a expressão (3.37) de mudança para a integral sobre elementos geradores ímpares difere substancialmente da expressão correspondente (3.36) para integral sobre os elementos geradores pares.

Não apresentaremos aqui a prova das fórmulas (3.33,3.34) (veja [38]). A prova correspondente para uma certa classe de integrais sobre uma álgebra B de dimensão infinita, que são o principal interesse na teoria de campos. Podemos igualmente obter (3.33,3.34) para o caso de dimensão finita considerado aqui.

Como uma consequência da fórmula geral de mudança de variáveis (3.33,3.34), a invariância da integral (3.27) segue sobre a mudanças das variáveis de integração. Isto é

$$\int b(z + y) dz = \int b(z) dz , \quad (3.38)$$

onde y^a pertence a B e não depende desses z sobre qual a integração é realizada em (3.38).

Na conclusão apresentamos a expressão para a integral Gaussiana na álgebra B, que pode ser obtida seguindo as regras de integração acima mencionadas

$$\int \exp \left[-\frac{1}{2} z M z + \mathcal{I} z \right] dz = (2\pi)^{\nu/2} \text{Sdet}^{-1/2} M^{s_1} \exp \left[\frac{1}{2} \mathcal{I} \Lambda \mathcal{I} \right] ,$$

$$\Lambda_{ab} = (M^{s_1})_{ab}^{-1} (-1)^{P_{(b)}} , \quad \Lambda^{T_1} = \Lambda , \quad (3.39)$$

onde ν é o número de elementos geradores pares z . Em (3.39). é realizada sobre um certo subconjunto de elementos geradores z álgebra B; $\mathcal{I}$ são elementos da álgebra B que possuem paridade definida e não dependem de z . $P_{\mathcal{I}_a} = P_{z^a} = P_{(a)}$, M é uma supermatriz, as paridades dos índices da qual coincidem com os elementos geradores, e M^{s_l} é uma supermatriz não singular independente dos elementos geradores z .

Capítulo 4

Integrais de Trajetória sobre Variáveis Ordinárias e de Grassmann na Teoria de Pertubação

4.1 Funcional Gerador das Funções de Green

Um objeto conveniente de consideração na teoria de campos são as chamadas funções de Green. Elas contêm a informação completa do sistema quântico. Suponhamos que $\tilde{\eta}$ são operadores de Heisenberg correspondendo as variáveis canônicas $\eta = (q, p)$. Vamos considerar funções de Green $\eta = (q, p)$

$$\mathcal{G}_H(A_1, t_1, \dots, A_n, t_n) = \langle T \tilde{\eta}^{A_1}(t_1) \dots \tilde{\eta}^{A_n}(t_n) \rangle, \quad (4.1)$$

onde $\langle \dots \rangle$ é o valor esperado do vácuo de Hamiltoniana quântica $\hat{H}$.

Introduzimos o funcional gerador das funções de Green (4.1)

$$Z_H(\mathcal{I}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int \mathcal{G}_H(A_1, t_1, \dots, A_n, t_n) \mathcal{I}_{A_1}(t_1) \dots \mathcal{I}_{A_n}(t_n) dt_1 \dots dt_n, \quad (4.2)$$

onde $\mathcal{I}$ são funções do tempo (trajetórias) numa álgebra B, em que a paridade é igual aos operadores correspondentes $\tilde{\eta}$. $P_{\mathcal{I}_A} = P_{(\tilde{\eta})_A} = P_{(A)}$.

Devemos chamar $\mathcal{I}$ as fontes das variáveis η . Obviamente

$$\mathcal{G}_H(A_1, t_1, \dots, A_n, t_n) = \left. \frac{\delta^n Z_H(\mathcal{I})}{\delta (i\mathcal{I}_{A_1}(t_1)) \dots \delta (i\mathcal{I}_{A_n}(t_n))} \right|_{\mathcal{I}=0} \quad (4.3)$$

Devemos assumir que as fontes $\mathcal{I}$ comutam com os sinais da média do vácuo $\langle, \rangle$ (e também $\langle, \rangle_0$, veja abaixo). Para fazer a construção consistente, devemos assumir as funções de Green contendo um número ímpar de operadores ímpares para ser igual a zero. De fato, seja $\mathcal{G}_H$ tal função. Desde que $\mathcal{G}_H$ é uma função c -number, segue que $\mathcal{I}_A \mathcal{G}_H = \mathcal{G}_H \mathcal{I}_A$. Por outro lado, permutando sucessivamente $\mathcal{I}_A$ com o sinal $\langle, \rangle$, com operadores e com o sinal $\rangle$, obtemos $\mathcal{I}_A \mathcal{G}_H = (-1)^{P(A)} \mathcal{G}_H \mathcal{I}_A$. Se $P(A) = 1$, então $\mathcal{G}_H = -\mathcal{G}_H = 0$. Esta propriedade é sempre válida dentro da teoria de perturbação.

Substituindo (4.1) em (4.2), encontramos

$$Z_H(\mathcal{I}) = \left\langle T \exp \left\{ i \int \mathcal{I}_A(t) \tilde{\eta}^A(t) dt \right\} \right\rangle. \quad (4.4)$$

O funcional $Z_H(\mathcal{I})$ pode ser calculado usando a expansão de perturbação em potências da constante de acoplamento. Dentro do formalismo de operador este problema é de certo modo mais complicado, especialmente para as teorias singulares.

Devemos obter agora a representação do funcional gerador na teoria de perturbação para uma teoria não singular. Para esta finalidade usamos o fato que nas suposições conhecidas na estrutura Hamiltoniana e. em particular na estrutura do estado fundamental, a fórmula

$$\begin{aligned} Z_H(\mathcal{I}) &= C_v^{-1} Z(\mathcal{I}) \\ Z(\mathcal{I}) &= \left\langle T \exp \left[i \int (-H_{\text{int}}(\hat{\eta}) + \mathcal{I}\hat{\eta}) dt \right] \right\rangle_0, \quad C_v = Z(\mathcal{I})|_{\mathcal{I}=0}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

é válida, onde $\langle \dots \rangle_0$ é o valor esperado no vácuo de Hamiltoniana $\hat{H}_0$ (quadrática) livre ($H = H_0 + H_{\text{int}}$), e $\hat{\eta}$ são operadores na representação que corresponde as variáveis canônicas η ($\hat{\eta} = \exp(i\hat{H}_0 t) \hat{\eta} \exp(-i\hat{H}_0 t)$).

O funcional $Z(\mathcal{I})$ é gerado para as funções de Green na representação

$$\begin{aligned} &\mathcal{G}(A_1, t_1, \dots, A_n, t_n) \\ &= \left\langle T \hat{\eta}^{A_1}(t_1) \dots \hat{\eta}^{A_n}(t_n) \exp \left(-i \int H_{\text{int}}(\hat{\eta}) dt \right) \right\rangle_0 \\ &= \frac{\delta^n Z(\mathcal{I})}{\delta (i\mathcal{I}_{A_1}(t_1)) \dots \delta (i\mathcal{I}_{A_n}(t_n))} \Big|_{\mathcal{I}=0} \\ &\mathcal{G} = C_v \mathcal{G}_H. \end{aligned} \quad (4.6)$$

O funcional $Z(\mathcal{I})$ pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{I}) &= \exp \left(-i \int H_{\text{int}} \left(\frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I})} \right) dt \right) Z_0(\mathcal{I}) , \\ Z_0(\mathcal{I}) &= \left\langle T \exp \left(i \int \mathcal{I} \hat{\eta} dt \right) \right\rangle_0 , \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde $Z_0(\mathcal{I})$ é o funcional gerador da teoria com Hamiltoniana H_0 . A representação (4.7) é equivalente a expansão perturbativa do funcional $Z(\mathcal{I})$ em potências da interação H_{int} .

Para uma teoria não singular, o funcional $Z_0(\mathcal{I})$ é calculado de uma maneira simples. Consequentemente, nas relações de comutação dos operadores de Schrödinger de uma teoria não singular, temos

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= \hat{\eta}^{(-)} + \hat{\eta}^{(+)} , \quad \hat{\eta}^{(-)}|0\rangle_0 = 0 , \quad \langle 0|\hat{\eta}^{(+)} = 0 , \\ [\hat{\eta}^{(\pm)} , \hat{\eta}^{(\pm)}] &= 0 , \quad [\hat{\eta}^{(-)} , \hat{\eta}^{(+)}] = c\text{-number} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Neste caso, podemos fazer uso da fórmula de Hori $TF(\hat{\eta})$ e reduzir o funcional arbitrário ordenado em T para a forma normal

$$TF(\hat{\eta}) = N \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{\delta_r}{\delta \eta^A(t)} \left\langle T \hat{\eta}^A(t) \hat{\eta}^B(t') \right\rangle_0 \frac{\delta_r}{\delta \eta^B(t')} \right\} F(\eta) \right]_{\eta \rightarrow \hat{\eta}} \quad (4.9)$$

Levando em conta (4.8,4.9), obtemos para $Z_0(\mathcal{I})$

$$Z_0(\mathcal{I}) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int \mathcal{I}_A(t) \left\langle T \hat{\eta}^A(t) \hat{\eta}^B(t') \right\rangle_0 (-1)^{P(B)} \mathcal{I}_B(t') dt dt' \right) . \quad (4.10)$$

Então

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{I}) &= \exp \left(-i \int H_{\text{int}} \left(\frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I})} \right) dt \right) \\ &\times \exp \left(-\frac{1}{2} \int \mathcal{I}_A(t) \left\langle T \hat{\eta}^A(t) \hat{\eta}^B(t') \right\rangle_0 (-1)^{P(B)} \mathcal{I}_B(t') dt dt' \right) . \end{aligned} \quad (4.11)$$

A representação (4.1) do funcional $Z(\mathcal{I})$ corresponde a estrutura das séries de perturbação de Feynman para as funções de Green (4.6), onde o vértice é H_{int} e o propagador é $\langle T \hat{\eta} \hat{\eta} \rangle_0$.

Vamos encontrar a equação para este propagador, que coincide com a função de Green livre de dois pontos (4.6). O operador $\hat{\eta}$ satisfaz as equações

$$\frac{d}{dt}\hat{\eta}^A = -i \left[\hat{\eta}^A, H_0(\hat{\eta}) \right] . \quad (4.12)$$

A Hamiltoniana livre H_0 é quadrática em η e no caso geral pode ser escrita como

$$H_0(\eta) = \frac{1}{2} \eta^A h_{AB} \eta^B . \quad (4.13)$$

Desde que H_0 é um elemento par na álgebra B, podemos assumir sem perda de generalidade que h é uma matriz simétrica em T_1 na forma normal, em que somente os blocos h_1 e h_4 são não nulos. Levando em conta as relações de comutação de mesmo tempo para os operadores $\hat{\eta}$, obtemos a equação para $\hat{\eta}$

$$\begin{aligned} K_{AB} \hat{\eta}^B &= 0 \\ K_{AB} &= E_{AB} \frac{d}{dt} - h_{AB} , E_{AB} E^{BD} = \delta_A^D , \end{aligned} \quad (4.14)$$

que coincide com as equações clássicas do movimento na teoria quadrática. De (4.14) a equação para o propagador segue

$$K_{AB} \left\langle T \hat{\eta}^B(t) \hat{\eta}^D(t') \right\rangle_0 = i \delta_A^D \delta(t - t') . \quad (4.15)$$

Na teoria quântica é conhecido que para calcular todas as quantidades físicas é suficiente ter somente as funções de Green de coordenadas

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(a_1, t_1, \dots, a_n, t_n) \\ = \left\langle T \hat{q}^{a_1}(t_1) \dots \hat{q}^{a_n}(t_n) \exp \left(-i \int H_{\text{int}}(\hat{\eta}) dt \right) \right\rangle_0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

O funcional gerador correspondente tem a forma

$$Z(j) = Z(\mathcal{I})|_{\kappa=0} \quad (4.17)$$

onde j são fontes das coordenadas, e κ são fontes dos momentos ($\mathcal{I} = (j, \kappa), \mathcal{I}_{1a} = j_a, \mathcal{I}_{2a} = \kappa^a$).

A expressão para o funcional $Z(\mathcal{I})$ pode ser simplificada em alguns casos como comparada a expressão geral (4.11). Tal procedimento será descrito na seção 4.3 com

a representação para $Z(\mathcal{I})$ na forma de uma integral funcional. Aqui, permanecendo na estrutura do formalismo do operador, consideremos o caso simples de uma teoria Lagrangiana não singular sem as variáveis ímpares, em que a Lagrangiana de interação não contém derivadas temporais

$$\begin{aligned} L &= L_0 + L_{\text{int}} , \\ L_0 &= \frac{1}{2}(\dot{q}a\dot{q} + 2\dot{q}bq + qcq) , L_{\text{int}} = L_{\text{int}}(q) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sem perda de generalidade, as matrizes a e c são assumidas simétricas. Sendo a teoria não singular, a matriz a também o é. A matriz b será assumida anti-simétrica pois a parte simétrica de b , se existir contribui para L , que é a derivada temporal total. Em virtude da estrutura da Lagrangiana (4.18). temos

$$H_{\text{int}} = H_{\text{int}}(q) = -L_{\text{int}}(q) .$$

consequentemente

$$\begin{aligned} Z(j) &= \exp \left(-i \int L_{\text{int}} \left(\frac{\delta}{\delta(ij)} \right) dt \right) \\ &\times \exp \left(-\frac{1}{2} \int j_a(t) \langle T \hat{q}^a(t) \hat{q}^b(t') \rangle_0 j_b(t') dt dt' \right) . \end{aligned} \quad (4.19)$$

Então, para funções de Green (4.16), temos a teoria de perturbação de Feynman padrão com vértice L_{int} e o propagador $\langle T \hat{\eta} \hat{\eta} \rangle_0$.

Encontramos agora a equação que é válida para o propagador indicado. Vamos construir uma Hamiltoniana H_0 e as equações clássicas do movimento na aproximação quadrática

$$\begin{aligned} \Lambda q &= 0 , \quad \Lambda = -a \frac{d^2}{dt^2} - 2b \frac{d}{dt} + c , \\ p &= \lambda q , \quad \lambda = a \frac{d}{dt} + b . \\ H_0 &= \frac{1}{2} [p a^{-1} p + 2q b a^{-1} p - q (b a^{-1} b + c) q] . \end{aligned} \quad (4.20)$$

As equações para os operadores na representação de interação coincide com as equações clássicas de aproximação quadrática. temos

$$\Lambda \hat{q} = 0 , \quad \hat{p} = \lambda \hat{q} . \quad (4.21)$$

A equação para o propagador pode agora ser encontrada usando o primeiro grupo de equações (4.21), ou a partir da fórmula geral (4.15), usando a relação entre os operadores de coordenadas e momentos. Ela possui a forma

$$\Lambda_{ab} \langle T \hat{q}^b(t) \hat{q}^c(t') \rangle_0 = i \delta_a^c \delta(t - t') \quad (4.22)$$

Na conclusão obtemos a equação para o funcional gerador $Z_H(\mathcal{I})$, que é válido no caso de uma teoria singular [53. 54]. Para este propósito, consideramos a igualdade de operadores

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_l}{\delta \mathcal{I}_A(t)} T \exp \left(i \int \mathcal{I}_B(t') \tilde{\eta}^B(t') dt' \right) \\ &= iT \tilde{\eta}^A(t) \exp \left(i \int \mathcal{I}_B(t') \tilde{\eta}^B(t') dt' \right) \\ &= iT \exp \left(i \int_t^\infty \mathcal{I}_B(t') \tilde{\eta}^B(t') dt' \right) \tilde{\eta}^A(t) \exp \left(i \int_{-\infty}^t \mathcal{I}_C(t') \tilde{\eta}^C(t') dt' \right) . \end{aligned}$$

Vamos diferencia-la com relação a t

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\delta_l}{\delta \mathcal{I}_A(t)} T \exp \left(i \int \mathcal{I}_B(t') \tilde{\eta}^B(t') dt' \right) \\ &= iT \left(\frac{d}{dt} \tilde{\eta}^A(t) \right) \exp \left(i \int \mathcal{I}_B(t') \tilde{\eta}^B(t') dt' \right) \\ &+ T \mathcal{I}_C(t) \left[\tilde{\eta}^C(t), \tilde{\eta}^A(t) \right] \exp \left(i \int \mathcal{I}_B(t') \tilde{\eta}^B(t') dt' \right) , \end{aligned}$$

e executar o valor esperado no vácuo

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{\delta_l}{\delta \mathcal{I}_A(t)} Z_H(\mathcal{I}) \\ &= \left\langle T \left(\left[\tilde{\eta}^A(t), \check{H} \right] + \mathcal{I}_C(t) \left[\tilde{\eta}^C(t), \tilde{\eta}^A(t) \right] \exp \left(i \int \mathcal{I}_B(t') \tilde{\eta}^B(t') dt' \right) \right) \right\rangle , \end{aligned}$$

Usando as relações de comutação para os operadores de Heisenberg, derivamos

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d}{dt} \eta^A(t) - \{ \eta^A(t), H \}_{D(\Phi)} \right. \\ & \left. - \mathcal{I}_B(t) \{ \eta^B(t), \eta^A(t) \}_{D(\Phi)} \right]_{\eta \rightarrow \delta_l / \delta(i\mathcal{I})} Z_H(\mathcal{I}) = 0 . \end{aligned} \quad (4.23)$$

O funcional $Z_H(\mathcal{I})$ satisfaz as equações de vínculo

$$\Phi(\eta)|_{\eta \rightarrow \delta_l / \delta(i\mathcal{I})} Z_H(\mathcal{I}) = 0 , \quad (4.24)$$

que pode ser obtida executando o valor esperado no vácuo da igualdade de operador

$$T\Phi(\check{\eta}) \exp \left(i \int \mathcal{I}_A(t') \check{\eta}^A(t') dt' \right) = 0$$

Podemos notar que o funcional $Z(\mathcal{I})$ difere de $Z_H(\mathcal{I})$ por o fator que não depende de $\mathcal{I}$, portanto, ele também satisfaz as equações (4.23,4.24).

4.2 Integrais Funcionais

Na teoria de campos é muito conveniente representar várias quantidades, em particular, o funcional gerador das funções de Green, na forma de *integrais funcionais* (*contínuas*). Uma integral funcional é uma extensão das integrais usuais multiplas no caso infinito-dimensional. Como distinção das integrais de dimensão finita, uma integral funcional não é tomada sobre funções, mas sobre funcionais. Não usando a definição das integrais funcionais na forma geral, notamos que para o propósito da teoria de campos (teoria de perturbação) é suficiente considerar as integrais funcionais de uma classe limitada de funcionais, que devemos chama-la de quase Gaussianas [47]. Devemos definir somente tais integrais e oferecer regras para manipula-las. Começaremos considerando o caso geral da integral funcional do funcional quase Gaussiano numa álgebra B.

O funcional Gaussiano na álgebra B será entendido como funcional da forma

$$\begin{aligned} F_G(z, \mathcal{I}) \\ = \exp \left[i \left(\frac{1}{2} \int z^a(t) M_{ab}(t, t') z^b(t') dt dt' + \int \mathcal{I}_a(t) z^a(t) dt \right) \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

Onde z e $\mathcal{I}$ são dois conjuntos de trajetórias com paridade definida numa álgebra B, $P_{z^a} = P_{\mathcal{I}_a}$ e M é uma supermatriz, a paridade dos índices na qual é determinada pela paridade das trajetórias correspondentes, M^{s_1} sendo não singular e independente de z e $\mathcal{I}$. As trajetórias $\mathcal{I}$ no funcional (4.25) será também chamada *fontes associadas com as variáveis z* .

A integral funcional $F_G(z, \mathcal{I})$ sobre as trajetórias z serão definidas como

$$\begin{aligned} \int F_G(z, \mathcal{I}) Dz &= \text{Sdet}^{-1/2} M^{s_1} \exp \left(-\frac{i}{2} \int \mathcal{I}_a(t) \Lambda_{ab}(t, t') \mathcal{I}_b(t') dt dt' \right), \\ \Lambda_{ab}(t, t') &= (M^{s_1})_{ab}^{-1}(t, t') (-1)^{P(b)}, \quad (\Lambda^{T_1} = \Lambda). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Além disso, devemos frequentemente omitir os fatores numéricos que realmente aparecem como resultado da integração pela definição (4.26) e não contêm parâmetros essenciais para a teoria. Isto está ligado ao fato que somente quantidades relativas (normalizadas) no qual estes fatores se anulam e são de interesse real para a teoria de campos.

Devemos assumir em seguida que a diferenciação com respeito as fontes $\mathcal{I}$ é comutativa com o sinal da integral. Isto é equivalente a definição das seguintes integrais funcionais

$$\begin{aligned}
& \int z^{a_1}(t_1) \dots z^{a_n}(t_n) F_G(z, \mathcal{I}) Dz \\
&= \frac{\delta_l^n}{\delta(i\mathcal{I}_{a_1}(t_1)) \dots \delta(i\mathcal{I}_{a_n}(t_n))} \int F_G(z, \mathcal{I}) Dz \\
&= \text{Sdet}^{-1/2} M^{s_1} \frac{\delta_l^n}{\delta(i\mathcal{I}_{a_1}(t_1)) \dots \delta(i\mathcal{I}_{a_n}(t_n))} \\
&\times \exp \left(-\frac{i}{2} \int \mathcal{I}_a(t) \Lambda_{ab}(t, t') \mathcal{I}_b(t') dt dt' \right) .
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Esta definição possibilita calcular integrais funcionais de *funcionais quase Gaussianos*

$$F_{qG}(z, \mathcal{I}) = F(z) F_G(z, \mathcal{I}) . \tag{4.28}$$

Onde $F(z)$ são funcionais que podem ser expandidos em séries de z

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \int F_{a_1 \dots a_n}(t_1, \dots, t_n) z^{a_1}(t_1) \dots z^{a_n}(t_n) dt_1 \dots dt_n .$$

isto é,

$$\begin{aligned}
& \int F_{qG}(z, \mathcal{I}) Dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int F_{a_1 \dots a_n}(t_1, \dots, t_n) \frac{\delta_l^n}{\delta(i\mathcal{I}_{a_1}(t_1)) \dots \delta(i\mathcal{I}_{a_n}(t_n))} dt_1 \dots dt_n \\
&\times \int F_G(z, \mathcal{I}) Dz = F\left(\frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I})}\right) \int F_G(z, \mathcal{I}) \\
&= \text{Sdet}^{-1/2} M^{s_1} \cdot F\left(\frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I})}\right) \\
&\times \exp \left(-\frac{i}{2} \int \mathcal{I}_a(t) \Lambda_{ab}(t, t') \mathcal{I}_b(t') dt dt' \right) .
\end{aligned} \tag{4.29}$$

As propriedades básicas das integrais funcionais introduzidas são listadas abaixo.

A integral (4.29) pode ser vista como repetida sobre índices discretos que indica a trajetória, e o resultado não depende da ordem de integração

$$\begin{aligned} & \int F_{qG}(z, \mathcal{I}) Dz^1 \dots Dz^k \\ &= \int \left(\int F_{qG}(z, \mathcal{I}) Dz^1 \dots Dz^m \right) Dz^{m+1} \dots Dz^k . \end{aligned} \quad (4.30)$$

A prova é baseada no fato que a integral funcional de um funcional quase Gaussiano. Consequentemente (4.30) pode ser verificada pelo cálculo direto dos lados direito e esquerdo.

A integral (4.29) é invariante sobre deslocamentos das variáveis de integração

$$\int F_{qG}(z + x, \mathcal{I}) Dz = \int F_{qG}(z, \mathcal{I}) Dz , \quad (4.31)$$

Onde x são algumas trajetórias independentes de z da álgebra B cuja paridade coincide com as trajetórias z ($P_{x^a} = P_{z^a} = P_{(a)}$). A validade desta asserção para a integral Gaussiana (4.26) é verificada pelo cálculo direto. Então a fórmula geral (4.31) segue da definição (4.29).

A integral da derivada total sobre qualquer trajetória de integração é igual a zero

$$\int \frac{\delta_{l,r}}{\delta z^a(t)} F_{qG}(z, \mathcal{I}) Dz = 0 . \quad (4.32)$$

Esta propriedade também pode ser obtida como uma consequência de uma invariância da integral funcional sobre deslocamentos de variáveis, como também pelo cálculo direto da integral (4.32) pela definição. Como uma consequência da propriedade (4.32), podemos deduzir fórmulas de integração por partes, que não apresentamos aqui.

Seja um funcional quase Gaussiano dependente do parametro α

$$F_{qG}(z, \mathcal{I}, \alpha) = F(z, \alpha) F_G(z, \mathcal{I}, \alpha) ;$$

Então a derivada com respeito ao parametro α é comutativa com o sinal da integral,

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int F_{qG}(z, \mathcal{I}, \alpha) Dz = \int \frac{\partial}{\partial \alpha} F_G(z, \mathcal{I}, \alpha) Dz . \quad (4.33)$$

de fato, para uma integral Gaussiana isto é verificado diretamente por meio da definição (4.26) (isto é permitido pelo fato que a supermatriz M sozinha pode depender de α)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \alpha} \int F_{qG}(z, \mathcal{I}, \alpha) Dz \\
&= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\text{Sdet}^{-1/2} M^{s_1} \exp \left(-\frac{i}{2} \int \mathcal{I} \Lambda \mathcal{I} dt dt' \right) \right] \\
&= -\frac{i}{2} \int \frac{\delta_l}{\delta \mathcal{I}_a(t)} \frac{\partial}{\partial \alpha} M_{ab}(t, t') \frac{\delta_l}{\delta \mathcal{I}_b(t)} dt dt' \\
&\quad \times \text{Sdet}^{-1/2} M^{s_1} \exp \left(-\frac{i}{2} \int \mathcal{I}_a(t) \Lambda_{ab}(t, t') \mathcal{I}_b(t') dt dt' \right) \\
&= -\frac{i}{2} \int \frac{\delta_l}{\delta \mathcal{I}_a(t)} \frac{\partial}{\partial \alpha} M_{ab}(t, t') \frac{\delta_l}{\delta \mathcal{I}_b(t)} dt dt' \int F_{qG}(z, \mathcal{I}, \alpha) Dz \\
&= \int \frac{\partial}{\partial \alpha} F_G(z, \mathcal{I}, \alpha) Dz .
\end{aligned}$$

Usando este resultado e a definição da integral quase Gaussiana (4.29), podemos facilmente confirmar que (4.33) é válida.

A fórmula para mudanças de variáveis é válida

$$\int F_{qG}(z, \mathcal{I}) Dz = \int F_{qG}(\varphi(z), \mathcal{I}) \text{Ber } \varphi(z) Dz . \quad (4.34)$$

Aqui os funcionais $\varphi(z)$ são tais que $P_{\varphi^a} = P_{z^a} = P_{(a)}$; As equações

$$y^a(t) = \varphi_t^a(z) \quad (4.35)$$

possuem um conjunto único de soluções

$$z^a(t) = \psi_t^a(y) , \quad (4.36)$$

onde φ e ψ podem ser expandidas em séries funcionais dos seus argumentos

$$\text{Ber } \varphi(z) = \text{Sdet } r = \text{Sdet } l ,$$

onde

$$r_{ab}(t, t') = \frac{\delta_r \varphi_t^a(z)}{\delta z^b(t')} , l_{ab} = \frac{\delta_l \varphi_{t'}^b(z)}{\delta z^a(t)} ,$$

são supermatrizes não singulares.

Para provar (4.34), devemos verificar que para um funcional arbitrário $F(z)$, a relação

$$F(\varphi(z)) \text{Ber } \varphi(z) - F(z) = \int \frac{\delta_r}{\delta z^a(t)} \mathcal{F}_t^a(z) dt, \quad (4.37)$$

é válida, onde F são alguns funcionais de z . Vamos representar $\varphi(z)$ como

$$\varphi_t^a(z) = z^a(t) + \bar{\varphi}_t^a(z),$$

e então introduzimos a família de funcionais

$$\varphi_t^a(z) = z^a(t) + \alpha \bar{\varphi}_t^a(z).$$

A solução das equações $y^a(t) = \varphi_t^a(z)$ será denotada por $z^a(t) = \psi_t^a(y)$.

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} \text{Ber } \varphi(z) &= \text{Ber } \varphi(z) \int \frac{\delta_r \psi_t^a(y)}{\delta y^b(t')} \frac{\delta_r \bar{\varphi}_{t'}^b(z)}{\delta z^a(t)} (-1)^{P_{(a)}} dt dt' \\ &= \int \left[\frac{\delta_r}{\delta z^a(t)} \left\{ (-1)^{P_{(a)}} \frac{\delta_r \psi_t^a(y)}{\delta y^b(t')} \bar{\varphi}_{t'}^b(z) \text{Ber } \varphi(z) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \text{Ber } \varphi(z) (-1)^{P_{(a)}+P_{(a)}P_{(b)}} \frac{\delta_r^2 \psi_t^a(y)}{\delta z^a(t) \delta^b(t')} \bar{\varphi}_{t'}^b(z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta_r \text{Ber } \varphi(z)}{\delta z^a(t)} \frac{\delta_r \psi_t^a(y)}{\delta y^b(t')} \bar{\varphi}_{t'}^b(z) \right] dt dt'. \end{aligned}$$

Os dois últimos termos nesta expressão são cancelados, devido a relação

$$\begin{aligned} \frac{\delta_r \text{Ber } \varphi(z)}{\delta z^a(t)} &= \text{Ber } \varphi(z) \int \frac{\delta_r \psi_{t'}^b(y)}{\delta y^c(t'')} \frac{\delta_r^2 \varphi_{t''}^c(z)}{\delta z^a(t) \delta z^b(t')} (-1)^{P_{(b)}} dt' dt'' \\ &= -\text{Ber } \varphi(z) \int \frac{\delta_r^2 \psi_{t'}^b(y)}{\delta z^b(t') \delta y^c(t'')} \\ &\quad \times \frac{\delta_r \varphi_{t''}^c(z)}{\delta z^a(t)} (-1)^{P_{(b)}+P_{(b)}P_{(c)}} dt' dt''. \end{aligned}$$

adicionalmente

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} F(\varphi(z)) = \int \frac{\delta_r F(\varphi(z))}{\delta z^a(t)} \frac{\delta_r \psi_t^a(y)}{\delta y^b(t')} \bar{\varphi}_{t'}^b(z) dt dt'.$$

Então

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} [F(\varphi) \text{Ber } \varphi(z)] \\ &= \int \frac{\delta_r}{\delta z^a(t)} \left[F(\varphi(z)) \frac{\delta_r \psi_t^a(y)}{\delta y^b(t')} \bar{\varphi}_{t'}^b(z) \text{Ber } \varphi(z) (-1)^{P(a)} \right] dt dt' , \end{aligned}$$

daí segue (4.37), onde

$$\mathcal{F}_t^a(z) = \int_0^1 d\alpha \int F(\varphi(z)) \frac{\delta_r \psi_t^a(y)}{\delta y^b(t')} \bar{\varphi}_{t'}^b(z) \text{Ber } \varphi(z) (-1)^{P(a)} dt' .$$

A relação (4.37), tendo em conta (4.32), prova a regra de mudança de variáveis (4.34). Deve-se notar aqui que a invariância da integral funcional sobre deslocamentos das variáveis de integração (4.31) é um caso particular de (4.34).

Na definição acima da integral funcional de um funcional quase Gaussiano, o último foi representado na forma (4.27), isto é, foi separado do funcional Gaussiano (4.25), cujos parâmetros (A matriz M) (4.29). Obviamente, o funcional Gaussiano pode ser separado do funcional F_{qG} em mais de uma maneira. Claramente, para definição ser consistente, devemos provar que o resultado da integração não depende da maneira na qual o funcional Gaussiano é separado. Podemos ver prontamente que isto reduz a prova da relação

$$\begin{aligned} & \int \exp \left[i \left(\frac{1}{2} z^a(t) M_{ab}(t, t') z^b(t') dt dt' + \int \mathcal{I}_a(t) z^a(t) dt \right) \right] Dz \\ &= \exp \left(\frac{i}{2} \int \frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I}_a(t))} \Delta M_{ab}(t, t') \frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I}_b(t))} dt dt' \right) \\ & \times \int \exp \left[i \left(\frac{1}{2} z^a(t) M_{ab}^0(t, t') z^b(t') dt dt' + \int \mathcal{I}_a(t) z^a(t) dt \right) \right] Dz , \end{aligned}$$

Onde $\Delta M = M - M^0$, e ambas integrais nos lados direito e esquerdo são vistas como integrais dos funcionais Gaussianos correspondentes.

Vamos introduzir a quantidade

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int \exp \left[i \left(\frac{1}{2} z^a(t) M_{ab}^\alpha(t, t') z^b(t') dt dt' + \int \mathcal{I}_a(t) z^a(t) dt \right) \right] Dz , \\ M^\alpha &= M^0 + \alpha \Delta M . \end{aligned} \tag{4.38}$$

A integral no lado direito de (4.38) serão vistas como Gaussianas como a matriz M^α . Pela propriedade (4.33) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} I(\alpha) &= \frac{i}{2} \int \left(\int z^a(t) \Delta M_{ab}(t, t') z^b(t') dt dt' \right) \\ &\times \exp \left[i \left(\frac{1}{2} \int z^a(t) M_{ab}^\alpha(t, t') z^b(t') dt dt' + \int \mathcal{I}_a(t) z^a(t) dt \right) \right] Dz \\ &= \frac{i}{2} \int \frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I}_a(t))} \Delta M_{ab}(t, t') \frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I}_b(t))} dt dt' \cdot I(\alpha) , \end{aligned}$$

Daí

$$I(\alpha) = \exp \left(\alpha \frac{i}{2} \int \frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I}_a(t))} \Delta M_{ab}(t, t') \frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I}_b(t))} dt dt' \right) I(0) , \quad (4.39)$$

Para $\alpha = 1$, o resultado segue de (4.39).

Vamos agora introduzir um funcional função δ , $\delta(\phi(z))$, onde o funcional $\phi(z)$ foi descrito na discussão da fórmula para mudanças de variáveis. De acordo com a definição temos

$$\int F_{qG}(z, \mathcal{I}) \delta(\phi(z)) Dz = \left[\text{Ber}^{-1} \phi(z) F_{qG}(z, \mathcal{I}) \right]_{z=z_0} \quad (4.40)$$

onde $z_0^a(t) = \psi_t^a(y)|_{y=0}$ ou $\varphi_t^a(z)|_{z=z_0} = 0$. Podemos assumir pela definição que introduz a função δ pode ser representada como uma integral funcional do funcional

$$\exp \left(i \int p_a(t) \varphi_t^a(z) dt \right)$$

sobre as trajetórias p

$$\delta(\phi(z)) = \int \exp \left(i \int p_a(t) \varphi_t^a(z) dt \right) Dp . \quad (4.41)$$

Podemos facilmente verificar que a representação (4.41) não contradiz com a definição da integral funcional dos funcionais quase Gaussianos dados acima. Isto é. se (4.41) é válido, a integral

$$I = \int F_{qG}(z, \mathcal{I}) \exp \left(i \int p_a(t) \varphi_t^a(z) dt \right) Dp Dz \quad (4.42)$$

não depende da ordem de integração.

Se no lado direito de (4.42) integrarmos primeiramente sobre p e depois sobre z , As definições (4.41,4.40) funcionam sucessivamente, e obtemos o resultado do lado direito de (4.40). Na ordem inversa de integração, primeiro sobre z e depois sobre p , a definição da integral quase Gaussiana surge. Devemos primeiramente considerar um caso particular no qual

$$\varphi_t^a(z) = z^a(t) - z_0^a(t) . \quad (4.43)$$

temos

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\int F_{qG}(z, \mathcal{I}) \exp \left(i \int p_a(t) [z^a(t) - z_0^a(t)] dt \right) Dz \right) Dp \\ &= F \left(\frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I})} \right) \int \left(\int F_G(z, \mathcal{I} + p) Dz \right) \exp \left(-i \int p_a(t) z_0^a(t) dt \right) Dp \\ &= F \left(\frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I})} \right) \text{Sdet}^{-1/2} M^{s_1} \int \exp \left[-i \left(\frac{1}{2} \int (\mathcal{I}_a(t) + p_a(t)) \Lambda_{ab}(t, t') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\mathcal{I}_b(t') + p_b(t')) dt dt' + \int p_a(t) z_0^a(t) dt \right) \right] Dp = F_{qG}(z_0, \mathcal{I}) . \end{aligned} \quad (4.44)$$

No caso geral, devemos fazer uma mudança de variáveis na integral (4.42)

$$z^a(t) = \psi_t^a(y) \quad (y^a(t) = \varphi_t^a(z)) . \quad (4.45)$$

Então chegamos em

$$I = \int F_{qG}(\psi(y), \mathcal{I}) \text{Ber } \psi(y) \exp \left(i \int p_a(t) z^a(t) dt \right) Dy Dp .$$

As mudanças de variáveis sobre consideração são tais que o funcional

$$F_{qG}(\psi(y), \mathcal{I}) \text{Ber } \psi(y)$$

é quase Gaussiano. Consequentemente, fazendo uso de (4.44), obtemos para I o resultado que coincide com o lado direito de (4.40).

Podemos notar que (4.41) é, de fato, a definição de um novo tipo de integrais funcionais, diferentes das quase Gaussianas. Entretanto, permanecendo na estrutura das integrais quase Gaussianas, poderíamos definir o funcional função δ como o limite

da integral

$$\begin{aligned} & \int \exp \left[i \left(\frac{\alpha}{2} \int p_a(t) M_{ab}(t, t') p_b(t') dt dt' + \int p_a(t) \varphi_t^a(z) dt \right) \right] \\ &= \text{Sdet}^{-1/2} M^{s_1} \exp \left(-\frac{i}{2\alpha} \int \varphi_t^a(z) \Lambda_{ab}(t, t') \varphi_{t'}^b(z) dt dt' \right) \end{aligned} \quad (4.46)$$

a medida que $\alpha \rightarrow 0$. Pode-se verificar que a construção é consistente e satisfaz (4.40).

Matrizes encontradas na teoria de campos são naturalmente representadas como $M = M^0 + \Delta M$, onde M^0 é uma supermatriz não singular que não contém parametros essenciais para teoria e ΔM é supermatriz “pequena”. Então $\text{Sdet } M$, pode ser escrito na representação

$$\begin{aligned} \text{Sdet } M &= \exp \left(\text{Str } \ln M^0 \right) \exp \left[\text{Str } \ln \left(1 + (M^0)^{-1} \Delta M \right) \right] \\ &= \text{Sdet } M^0 \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{Str} \left((M^0)^{-1} \Delta M \right)^n \right). \end{aligned} \quad (4.47)$$

$\text{Sdet } M^0$, que permanece indeterminado, usualmente desaparece ao considerarmos quantidades normalizadas (relativas). Algumas das supermatrizes em que os índices envolvem tempo possuem a forma especial

$$M_{ab}(t, t') = m_{ab}(t) \delta(t - t'). \quad (4.48)$$

Então os superdeterminantes de tais matrizes serão denotados como

$$\text{Sdet } M = \text{SDet } m.$$

que implica que o superdeterminante da supermatriz M deve ser calculado em termos do superdeterminante da supermatriz m pela fórmula

$$\begin{aligned} \text{Sdet } M_{ab}(t, t') &= \det K(t, t'), \\ K(t, t') &= \delta(t - t') \text{Sdet } m_{ab}(t). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Concluindo esta seção, devemos colocar a questão da representação dos superdeterminantes como integrais Gaussianas. De (4.26) segue que para a supermatriz M que é simétrica em T_1 , a relação

$$\begin{aligned} \text{Sdet}^{-1/2} M &= \int \exp \left(\frac{i}{2} \int z^a(t) M_{ab}(t, t') z^b(t') dt dt' \right) Dz, \\ M^{T_1} &= M, \end{aligned} \quad (4.50)$$

é válida, quando as paridades das trajetórias de integração z coincidem com índices correspondentes da supermatriz M .

Vamos considerar a supermatriz M anti-simétrica em T_2 . Levando em conta $\text{Sdet} M^P = \text{Sdet}^{-1} M$ e o fato que a supermatriz M^P é simétrica em T_1 (3.19) obtemos fazendo o uso de (4.50)

$$\begin{aligned} \text{Sdet}^{-1/2} M &= \int \exp \left(\frac{i}{2} \int z^a(t) M_{ab}^P(t, t') z^b(t') dt dt' \right) Dz , \\ M^{T_2} &= -M , \end{aligned} \quad (4.51)$$

Aqui as paridades das trajetórias de integração z coincidem com os índices correspondentes da supermatriz M^P e conseqüentemente são opostos em relação as paridades dos índices correspondentes da supermatriz M .

Se as supermatrizes em (4.50, 4.51) possuem a estrutura (4.48), estas fórmulas se tornam

$$\text{SDet}^{-1/2} m = \int \exp \left(\frac{i}{2} \int z^a(t) m_{ab} z^b(t) dt \right) Dz , \quad m^{T_1} = m , \quad (4.52)$$

$$\text{SDet}^{-1/2} m = \int \exp \left(\frac{i}{2} \int z^a(t) m_{ab}^P z^b(t) dt \right) Dz , \quad m^{T_2} = m , \quad (4.53)$$

4.3 Representação do Funcional Gerador das Funções de Green na Forma de uma Integral Funcional

Seja o funcional gerador $Z(\mathcal{I})$ das funções de Green de uma teoria não singular. $Z(\mathcal{I})$ pode ser representada como

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{I}) &= \exp \left(-i \int H_{\text{int}} \left(\frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I})} \right) dt \right) \\ &\times \exp \left(-\frac{i}{2} \int \mathcal{I}_A(t) \Lambda_{AB}(t, t') \mathcal{I}_B(t') dt dt' \right) , \end{aligned} \quad (4.54)$$

onde

$$\Lambda_{AB}(t, t') = -i \left\langle T \hat{\eta}^A(t) \hat{\eta}^B(t') \right\rangle_0 (-1)^{P(B)} . \quad (4.55)$$

Notamos que Λ é uma matriz c -number, e é fácil encontrar que $\Lambda_{AB} \approx \delta_{P(A)P(B)}$. Então, podemos concebê-la como uma supermatriz na qual a paridade dos índices é determinada pela paridade dos operadores correspondentes $\hat{\eta}$ em (4.55). Podemos verificar que a supermatriz Λ é T_1 -simétrica. Comparando (4.54, 4.55) com (4.29) e (4.15), podemos ver que o funcional $Z(\mathcal{I})$ pode ser escrito como uma integral funcional

$$Z(\mathcal{I}) = C \int \exp \left(i \int \left[\frac{1}{2} \eta^A(t) K_{AB} \eta^B(t) - H_{\text{int}}(\eta(t)) + \mathcal{I}_A(t) \eta^A(t) \right] dt \right) D\eta . \quad (4.56)$$

A supermatriz K é definida aqui por (4.14), e

$$C^{-1} = \int \exp \left(\frac{i}{2} \int \eta K \eta dt \right) D\eta = \text{Sdet}^{-1/2} K .$$

O multiplicador C não representa parâmetros essenciais para a teoria. Daqui em diante, como foi mencionado, tais multiplicadores serão omitidos.

Levando em conta a estrutura da supermatriz K , e depois da integração por partes, a parte do expoente quadrático η é reduzido a forma

$$\frac{1}{2} \int \eta K \eta dt = \int [p\dot{q} - H_0] dt .$$

Portanto, chegamos

$$Z(\mathcal{I}) = \int \exp \left[i \left(S + \int \mathcal{I} \eta dt \right) \right] D\eta . \quad (4.57)$$

Onde $S = \int [p\dot{q} - H] dt$ é uma ação Hamiltoniana clássica. A fórmula (4.57) expressa o funcional gerador das funções de Green de uma teoria não singular como uma integral funcional no espaço de fase.

Como mencionado acima, para os objetivos da teoria de campos é suficiente conhecer o funcional gerador $Z(j)$ das funções de Green. De acordo com (4.67) e (4.17), temos para $Z(j)$

$$Z(j) = \int \exp \left[i \left(S + \int j q dt \right) \right] D\eta \quad (4.58)$$

Devemos fazer um deslocamento na variável de integração na integral (4.58): $p \rightarrow p + \tilde{p}(q, \dot{q})$, onde $\tilde{p}(q, \dot{q})$ é a solução da equação

$$\dot{q} = \{q, H\} = \frac{\partial H}{\partial p} .$$

Se a Hamiltoniana H é construída a partir da Lagrangiana L , que é assumida aqui, então tal solução existe sempre. e

$$\tilde{p}(q, \dot{q}) = \frac{\partial_r L}{\partial \dot{q}} .$$

Portanto temos a identidade

$$(p\dot{q} - H)_{p=\tilde{p}} \equiv L(q, \dot{q}) . \quad (4.59)$$

Consequentemente

$$S|_{p \rightarrow p+\tilde{p}} = \int (L + \Delta H) dt , \quad (4.60)$$

onde

$$\Delta H = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} p^n \frac{\partial_l^n H}{\partial p^n} \Big|_{p=\tilde{p}} .$$

Fazendo uso de (4.60), podemos escrever

$$Z(j) = \int \exp \left(i \int (L + jq) dt \right) \Delta(q) Dq . \quad (4.61)$$

onde

$$\Delta(q) = \int \exp \left(i \int \Delta H dt \right) Dp . \quad (4.62)$$

a fórmula (4.61) expressa o funcional gerador $Z(j)$ de uma teoria não singular na forma de uma integral funcional no espaço de configuração. Adquirindo uma forma especialmente simples se a interação, L_{int} não contém derivadas temporais de coordenadas. Neste caso, H_{int} não contém momentos, tal que ΔH é uma forma quadrática nos momentos com coeficientes constantes. A integral (4.62) é efetuada facilmente e não depende de q . Consequentemente neste caso

$$Z(j) = \int \exp \left[i \int (L + jq) dt \right] Dq . \quad (4.63)$$

Finalmente apresentamos mais uma representação para o funcional gerador $Z(j)$. Para esta finalidade, seja a integral (4.58) da integração sobre p para integração sobre v são relacionadas como

$$p_a = \frac{\partial_r L^v}{\partial v^a} , \quad (L^v = L(q, \dot{q})|_{\dot{q}=v}) .$$

Fazendo uso de (4.59) onde $\dot{q}$ é substituída por v , verificamos que

$$[p\dot{q} - H]_{p=\partial_r L^v \partial/\partial v} = L^v + (\dot{q} - v) \frac{\partial_r L^v}{\partial v} .$$

Como resultado, a integral (4.58) adquire a forma

$$\begin{aligned} Z(j) &= \int \exp \left[i \int \left(L^v + (\dot{q} - v) \frac{\partial_r L^v}{\partial v} + j q \right) dt \right] \\ &\times \text{SDet} \frac{\partial_r^2 L^v}{\partial v \partial v} Dq Dv . \end{aligned} \quad (4.64)$$

Esta fórmula expressa o funcional gerador $Z(j)$ na forma de uma integral funcional sobre coordenadas e velocidades.

Vamos fazer na integral (4.64) um deslocamento das variáveis de integração $v \rightarrow v + \dot{q}$. Então

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q} + v) - \frac{\partial_r L(q, \dot{q} + v)}{\partial \dot{q}} v &= L(q, \dot{q}) + \Delta L , \\ \Delta L &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)}{n!} \frac{\partial_r^n L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}^n} v^n . \end{aligned}$$

Isto permite-nos obter a representação (4.61), onde $\Delta(q)$ é escrito como uma integral de velocidade

$$\Delta(q) = \int \exp \left(i \int \Delta L dt \right) \text{SDet} \frac{\delta_r^2 L(q, \dot{q} + v)}{\delta \dot{q} \delta \dot{q}} Dv . \quad (4.65)$$

A partir desta fórmula podemos ver facilmente que interação L_{int} não contém derivadas temporais das coordenadas (a matriz Hessiana é constante), a integral (4.65) não depende de q .

Agora discutiremos o caso de uma teoria singular com vínculos de segunda classe. Vamos primeiramente considerar a versão da teoria quântica correspondentes construída de acordo com o gauge $G^{(\omega)}$. O gauge $G^{(\omega)}$ é uma teoria não singular, tal que funcional gerador das funções de Green do tipo (4.6)

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\text{ph}}(A_1, t_1, \dots, A_n, t_n) &= \left\langle T \omega^{A_1}(t_1) \dots \omega^{A_n}(t_n) \exp \left(-i \int H_{\text{int}}^{\text{ph}}(\omega) dt \right) \right\rangle_0 , \\ H_{\text{ph}} &= H_0^{\text{ph}} + H_{\text{int}}^{\text{ph}} , \end{aligned}$$

que devemos denotar por $Z_{\text{ph}}(\mathcal{I}^\omega)$, pode ser representado como uma integral funcional

$$Z_{\text{ph}}(\mathcal{I}^\omega) = \int \exp \left[i \left(S_{\text{ph}} + \int \mathcal{I}^\omega \omega dt \right) \right] D\omega , \quad (4.66)$$

onde $S_{\text{ph}} = \int (\omega^{2a} \dot{\omega}^{1a} - H_{\text{ph}}) dt$. (Lembremos que o índice A é complexo : $A = (\zeta, a)$, $\zeta = 1, 2$; ω^{1a} sendo as coordenadas e ω^{2a} os momentos.)

Parece conveniente escrever a integral (4.66) em termos da ação (Hamiltoniana) nas variáveis iniciais. Lembrando da definição da Hamiltoniana física H_{ph} nas teorias de vínculos de segunda ordem

$$H_{\text{ph}} = \tilde{H}(\omega, \Omega)|_{\Omega=0} , \quad \tilde{H}(\omega, \Omega) = H(\eta) ,$$

devemos representar a integral (4.66) como

$$\begin{aligned} Z_{\text{ph}}(\mathcal{I}^\omega) &= \int \exp \left[i \int (\omega^2 \dot{\omega}^1 + \Omega^2 \dot{\Omega}^1 - \tilde{H}(\omega, \Omega) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{I}^\omega \omega + \mathcal{I}^\Omega \Omega) dt \right] \delta(\Omega) D\omega D\Omega = Z_{\text{ph}}(\mathcal{I}) , \\ \mathcal{I} &= (\mathcal{I}^\omega, \mathcal{I}^\Omega) . \end{aligned} \quad (4.67)$$

Devemos adicionar aqui a integração sobre as variáveis Ω do conjunto de variáveis canônicas (ω, Ω) e introduzir as fontes $\mathcal{I}^\Omega$ para as variáveis Ω .

O funcional função δ sobre o sinal da integral (4.67) pode ser representado como

$$\delta(\Omega) = \delta(\Phi) \text{SDet}^{1/2} \{ \Phi, \Phi \} , \quad (4.68)$$

onde Φ é o conjunto completo de vínculos da teoria original. Podemos verificar isto facilmente, se lembrarmos das fórmulas

$$\begin{aligned} \delta(\Phi) &= \text{SDet}^{-1} \frac{\partial_r \Phi}{\partial \Omega} \delta(\Omega) , \quad \Phi_l = u_{ll'} \Omega^{l'} , \quad u_{ll'}|_{\Omega=0} = \frac{\partial_r \Phi_l}{\partial \Omega^{l'}}|_{\Omega=0} = u_{ll'} , \\ \{ \Phi_l, \Phi'_l \}|_{\Omega=0} &= u_{lk} \{ \Omega^k, \Omega^m \} u_{m'l'}^{T_1} (-1)^{P(l')} = u_{lk} E^{km} u_{m'l'}^{T_1} (-1)^{P(l')} \end{aligned}$$

e também as propriedades

$$\text{Sdet} MN = \text{Sdet} M \text{Sdet} N$$

$$\text{Sdet} M^{T_\lambda} = (-1)^{[\alpha]} \text{Sdet} M$$

onde $\lambda = 1, 2$ e α = índice ímpar de M

do superdeterminante.

Fazendo a integração sobre as variáveis na integral (4.67). O Bereziniano da mudança de variáveis $(\omega, \Omega) \rightarrow \eta$ é igual a unidade desde que esta mudança é uma transformação canônica. Levando em conta a fórmula de mudanças de variáveis (4.34) e o fato que a ação S é um invariante canônico, isto é

$$S = \int [\omega^2 \dot{\omega}^1 + \Omega^2 \dot{\Omega}^1 - \tilde{H}(\omega, \Omega)] dt = \int [p\dot{q} - H(\eta)] dt$$

obtemos

$$Z_{\text{ph}}(\mathcal{I}) = \int \exp \left\{ i \left[S + \int (\mathcal{I}^\omega \omega(\eta) + \mathcal{I}^\Omega \Omega(\eta)) dt \right] \right\} \times \text{SDet}^{1/2} \{ \Phi, \Phi \} \delta(\Phi) D\eta. \quad (4.69)$$

Isto implica que as funções de Green dos operadores $(\tilde{\omega}, \tilde{\Omega})$ são expressas como algumas combinações das funções de Green dos operadores $\tilde{\eta}$, o funcional gerador do último é dado por

$$Z(\mathcal{I}) = \int \exp \left\{ i \left(S + \int \mathcal{I} \eta dt \right) \right\} \text{SDet}^{1/2} \{ \Phi, \Phi \} \delta(\Phi) D\eta. \quad (4.70)$$

Se desviarmos atenção do ordenamento do operador, então de (4.69) segue que a relação entre operadores $(\tilde{\omega}, \tilde{\Omega})$ e $\tilde{\eta}$ é a mesma que entre as variáveis clássicas (ω, Ω) e η . É natural esperar que os geradores funcionais (4.69, 4.70) correspondem a teorias quânticas fisicamente equivalentes. De fato, estas duas teorias são físicas. Isto segue do chamado *teorema da equivalência*¹ [55] que para o cálculo das quantidades físicas, fazemos a substituição

$$\mathcal{I}^\omega \omega(\eta) + \mathcal{I}^\Omega \Omega(\eta) \rightarrow \mathcal{I} \eta$$

No funcional gerador (4.69).

Por outro lado, podemos verificar que o funcional gerador (4.70) satisfaz as equações (4.23) e (4.24) para o funcional gerador da teoria de vínculos de segunda

¹A representação do teorema da equivalência está acima do escopo desta tese. Os argumentos qualitativos em favor deste teorema são que os vetores de estado no espaço de Fock são construídos usando os limites assintóticos do campo de operadores $t \rightarrow \pm\infty$. Nestes limites os campos tornam-se “pequenos”, tal que os termos não lineares em $\omega(\eta)$ e $\Omega(\eta)$ podem ser ignorados.

classe. Podemos então estabelecer que as teorias quânticas correspondem aos funcionais $Z_{\text{ph}}(\mathcal{I})$ e $Z(\mathcal{I})$ são contruídas de acordo com as teorias clássicas fisicamente equivalentes. Portanto, a equivalência destas teorias quânticas é natural.

Vamos fazer uma mudança de variáveis na integral (4.70)

$$\begin{aligned}\eta &\rightarrow \eta' = \eta + \delta\eta = \eta'(\eta) , \\ \delta\eta &= \{\eta, \delta W\}_{D(\Phi)} , \quad \delta W = \delta\varphi_A(t)\eta^A(t) = \delta\varphi\eta ,\end{aligned}\tag{4.71}$$

Onde $\delta\varphi$ são trajetórias arbitrariamente “pequenas” cuja paridade coincide com as de trajetória η .

Lembrando que

$$\text{SDet}^{1/2}\{\Phi, \Phi\}_{\eta \rightarrow \eta'(\eta)} \text{Ber } \eta'(\eta) D\eta = \text{SDet}^{1/2}\{\Phi, \Phi\} D\eta .\tag{4.72}$$

Esta fórmula implica a invariância da “medida” de integração $\text{Sdet}^{1/2}\{\Phi, \Phi\} D\eta$ que sofrendo as mudanças da forma (4.71), temos;

$$\mathcal{A}(\eta + \delta\eta) = \mathcal{A}(\eta) + \{\mathcal{A}, \delta W\}_{D(\Phi)} , \quad \delta(\Phi) \frac{d}{dt} \Phi = 0 .$$

Como resultado, chegamos em

$$\begin{aligned}Z(\mathcal{I}) &= \int \exp \left[i \left(S + \int \mathcal{I} \eta dt \right) \right] \text{SDet}^{1/2}\{\Phi, \Phi\} \delta(\Phi) \\ &\times \left[1 - i \int \delta\varphi_A \left(\frac{d}{dt} \eta^A - \{\eta^A, H\}_{D(\Phi)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathcal{I}_B \{\eta^B, \eta^A\}_{D(\Phi)} \right) dt \right] D\eta .\end{aligned}\tag{4.73}$$

Comparando (4.73) com (4.70), confirmamos que satisfaz (4.23). Verificamos diretamente que também satisfaz (4.24).

As equações clássicas do movimento da teoria com vínculos de segunda classe são invariantes sobre a mudança de todos os vínculos Φ . Em outras palavras, duas teorias clássicas com Hamiltonianas idênticas H e vínculos idênticos Φ e Ψ ($\Phi = \Lambda\Psi$) são fisicamente equivalentes no sentido clássico. A representação (4.70) de um funcional gerador mostra que as teorias quânticas correspondentes a estas teorias clássicas são também equivalentes. Isto pode ser mostrado considerando dois funcionais geradores

(4.70) com Hamiltonianas idênticas H e com vínculos equivalentes Φ e Ψ . Usando as relações

$$\delta(\Phi) = \text{SDet}^{-1} \Lambda \delta(\Psi), \quad \text{SDet}\{\Phi, \Phi\}|_{\Phi=0} = \text{SDet}^2 \Lambda \text{SDet}\{\Psi, \Psi\}|_{\Psi=0},$$

Vemos que estes funcionais simplesmente coincidem. Portanto, *o funcional gerador $Z(\mathcal{I})$ para uma teoria com vínculos de segunda classe é invariante com respeito a escolha de sistemas de vínculos equivalentes.*

A expressão obtida para o funcional gerador $Z(\mathcal{I})$ das teorias com vínculos de segunda classe permite-nos escrever imediatamente o resultado para o funcional gerador das teorias com vínculos de primeira classe (teorias de gauge) porque para estas teorias, um gauge canônico, que é uma teoria com vínculos de segunda classe, sempre existe.

Suponhamos que temos uma teoria com vínculos de primeira classe. Se haver uma divisão explícita em vínculos de primeira classe χ e de segunda classe φ , então $\Phi = (\chi, \varphi)$. Consideremos um gauge canônico $G^{(c)}$ com um conjunto de condições suplementares Φ^G . Esta é uma teoria com um conjunto completo de segundo-vínculos $\Phi = (\Phi, \Phi^G)$. O funcional gerador para tal teoria pode ser escrito como

$$\begin{aligned} Z^{(c)}(\mathcal{I}) &= \int \exp \left[i \left(S + \int \mathcal{I} \eta dt \right) \right] \text{SDet}^{1/2} \{ \Phi, \Phi \} \delta(\Phi) D\eta \\ &= \int \exp \left[i \left(S + \int \mathcal{I} \eta dt \right) \right] \text{SDet} \{ \Phi^G, \chi \} \\ &\quad \times \text{SDet}^{1/2} \{ \varphi, \varphi \} \delta(\Phi^G) \delta(\chi) \delta(\varphi) D\eta. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Usando (4.74), investigamos a dependência de $Z^{(c)}(\mathcal{I})$ na escolha do gauge. Isto é, determinamos a relação entre o funcional gerador $Z^{(c)}(\mathcal{I})$ e $Z^{(c)'}(\mathcal{I})$ em gauges canônicos infinitamente fechados $G^{(c)}$ e $G^{(c)'}$ com as condições suplementares Φ^G e $\Phi^{G'}$, respectivamente

$$\Phi^{G'} = \Phi^G + \delta\Phi. \quad (4.75)$$

Fazemos uma mudança de variáveis na integral (4.74)

$$\eta \rightarrow \eta' = \eta - \delta\eta. \quad (4.76)$$

Esta mudança de variáveis é uma transformação canônica infinitesimal. Consequentemente, o Bereziniano de tal mudança é igual a unidade. A ação não é somente invariante na forma sobre a mudança (4.76), como uma mudança canônica de variáveis, mas é também literalmente invariante por causa da presença da função δ dos vínculos sobre o sinal da integral. Levando isto em conta, escrevemos

$$Z^{(c)}(\mathcal{I}) = \int \exp \left[i \left(S + \int \mathcal{I}(\eta - \delta\eta) dt \right) \right] \times \text{SDet}^{1/2} \{ \Phi', \Phi' \} \delta(\Phi') D\eta. \quad (4.77)$$

O funcional $Z^{(c)}(\mathcal{I})$ escrito como (4.77) difere do funcional $Z^{(c)'}(\mathcal{I})$, que corresponde a um gauge canônico com vínculos Φ' , pela presença nas fontes de um termo não linear nos campos. Portanto, o funcional de Green de uma teoria depende geralmente da escolha do gauge canônico. Entretanto, pelo fato do teorema da equivalência mencionado acima, as quantidades físicas calculadas do funcional (4.77) não serão alterados pela mudança

$$\int \mathcal{I}(\eta - \delta\eta) dt \longrightarrow \int \mathcal{I}\eta dt.$$

Consequentemente, os funcionais $Z^{(c)}(\mathcal{I})$ e $Z^{(c)'}(\mathcal{I})$ são fisicamente equivalentes.

Seja a expressão geral (4.70) para o funcional gerador $Z(\mathcal{I})$ das teorias com vínculos de segunda classe. Em casos particulares, esta expressão pode ser simplificada se for feita a integração explícita sobre os momentos. Então o funcional gerador pode ser representado na chamada forma Lagrangiana, isto é, na forma de uma integral funcional somente sobre as coordenadas da expressão contendo uma certa ação efetiva que pode ser expressa através da Lagrangiana da teoria somente. Num caso geral isto não pode ser feito. Todavia, (4.70) pode ser reduzida para uma forma mais conveniente para cálculos na teoria de perturbação. Para esta finalidade, a função δ dos vínculos poderá ser escrita na forma de uma integral funcional (4.41). O fator $\text{Sdet}^{1/2} \{ \Phi, \Phi \}$ pode ser representado como uma integral funcional pela fórmula (4.53). A supermatriz $\{ \Phi, \Phi \}$ é T_2 anti-simétrica. Como um resultado, nós obtemos

$$Z(\mathcal{I}) = \int \exp \left[i \left(S + \int \left[\lambda^l \Phi_l + \frac{1}{2} c^l \{ \Phi_l, \Phi_{l'} \}^P c^{l'} + \mathcal{I}\eta \right] dt \right) \right] \times D\eta D\lambda Dc, \quad (4.78)$$

Onde as paridades das trajetórias λ coincidem com as dos vínculos Φ e as paridades das trajetórias c , frequentemente referidos como “fantasmas”, são opostas às dos vínculos Φ .

Num caso geral, o funcional gerador pode ser representado como

$$Z(\mathcal{I}) = \int \exp \left[i \left(S_{\text{eff}} + \int \mathcal{I} \varphi dt \right) \right] D\varphi, \quad (4.79)$$

Onde φ é um conjunto de trajetórias de integração, $\mathcal{I}$ são fontes sobre todos φ , e S_{eff} é um funcional de φ , chamado *ação efetiva* dos campos φ . Em particular, em (4.71), $\varphi = q$ e $S_{\text{eff}} = \int L dt - i \ln \Delta(q)$. Em (4.78), $\varphi = (\eta, \lambda, c)$ e $S_{\text{eff}} = S + \int [\lambda^l \Phi_l + \frac{1}{2} c^l \{\Phi_l, \Phi_{l'}\}^P c^{l'}] dt$.

Para reconstruir as regras de Feynman da teoria de perturbação a partir do funcional gerador $Z(\mathcal{I})$ da forma (4.79), separamos a parte que é quadrática nos campos, S_{eff}^0 ($S_{\text{eff}} + S_{\text{eff}}^0 + S_{\text{eff}}^{\text{int}}$) a partir da ação efetiva S_{eff} . Depois disto, o funcional gerador (4.79) torna-se

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{I}) &= \exp \left[i S_{\text{eff}}^{\text{int}} \left(\frac{\delta_l}{\delta(i\mathcal{I})} \right) \right] Z_0(\mathcal{I}), \\ Z_0(\mathcal{I}) &= \int \exp \left[i \left(S_{\text{eff}}^0 + \int \mathcal{I} \varphi dt \right) \right] D\varphi. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Calculando a integral Gaussiana em termos do funcional gerador $Z_0(\mathcal{I})$ é escrita, obtemos num caso geral

$$Z_0(\mathcal{I}) = \exp \left(-\frac{1}{2} \int \mathcal{I}_A(t) \mathcal{D}(A, t; B, t') (-1)^{P(B)} \mathcal{I}_B(t') dt dt' \right). \quad (4.81)$$

Como é conhecido da teoria de campos [22], a representação (4.80, 4.81) do funcional gerador significa que para o cálculo das funções de Green dos operadores $\check{\varphi}$ dentro da teoria de perturbação, as regras de Feynman usuais para o vértice $S_{\text{eff}}^{\text{int}}$ e o propagador $\mathcal{D}(A, t; B, t')$ são válidas.

Deve ser enfatizado que a representação do funcional gerador como uma integral funcional no sentido da teoria de perturbação é completamente equivalente a técnica usual dos diagramas de Feynman. Mas no referencial das integrais funcionais podemos descrever operações complicadas em termos dos diagramas de Feynman de uma maneira compacta. Demonstramos, de fato, a eficiência das integrais funcionais quando

transformamos o funcional gerador de uma teoria não singular da forma Hamiltoniana para forma Lagrangiana e quando provamos que a teoria quântica é independente da escolha de um conjunto de vínculos equivalentes ou um gauge. Apresentamos agora outro exemplo da eficiência da integral funcional na derivação das chamadas identidades de Ward.

Na integral (4.79) fazemos a mudança de variáveis

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \Delta\varphi , \quad (4.82)$$

Onde $\Delta\varphi$ são alguns funcionais “pequenos” das trajetórias φ . Então, em primeira ordem em $\Delta\varphi$ temos

$$\begin{aligned} Z(\mathcal{I}) &= \int \exp \left[i \left(S_{\text{eff}} + \int \mathcal{I} \varphi dt \right) \right] \\ &\times \left[1 + \text{Str} \frac{\delta_r \Delta\varphi}{\delta\varphi} + i \int \left(\frac{\delta_r S_{\text{eff}}}{\delta\varphi} + \mathcal{I} \right) \Delta\varphi dt \right] D\varphi . \end{aligned} \quad (4.83)$$

Comparando (4.73) com (4.79), vemos que

$$\left[\text{Str} \frac{\delta_r \Delta\varphi}{\delta\varphi} + i \int \left(\frac{\delta_r S_{\text{eff}}}{\delta\varphi} + \mathcal{I} \right) \Delta\varphi dt \right]_{\varphi \rightarrow \delta_l / \delta(i\mathcal{I})} Z(\mathcal{I}) = 0 , \quad (4.84)$$

ou

$$\int \Delta\varphi \left(\frac{\delta_r S_{\text{eff}}}{\delta\varphi} + \mathcal{I} \right) dt \Big|_{\varphi \rightarrow \delta_l / \delta(i\mathcal{I})} Z(\mathcal{I}) = 0 .$$

Se for escolhido um deslocamento das variáveis como uma mudança (4.82), isto é, Onde $\Delta\varphi = \alpha$ são trajetórias arbitrárias, obtemos

$$\left(\frac{\delta_r S_{\text{eff}}}{\delta\varphi} + \mathcal{I} \right)_{\varphi \rightarrow \delta_l / \delta(i\mathcal{I})} Z(\mathcal{I}) = 0 , \quad (4.85)$$

que é a *equação do movimento* para $Z(\mathcal{I})$. Num caso geral (4.84) não contém informação adicional como comparada com (4.85). Mas pela escolha apropriada do funcional $\Delta\varphi$, podemos obter relações importantes [que são uma consequência das equações do movimento (4.85)].

Seja, por exemplo, a mudança (4.82) uma transformação de simetria da ação efetiva S_{eff}

$$S_{\text{eff}}(\varphi') = S_{\text{eff}}(\varphi) ,$$

e seja o Berezianiano desta mudança igual a unidade. Então, (4.84) reduz a

$$\int \mathcal{I} \Delta \varphi dt \Big|_{\varphi \rightarrow \delta_l / \delta(i\mathcal{I})} Z(\mathcal{I}) = 0 . \quad (4.86)$$

Diferenciando (4.86) com respeito a $\mathcal{I}$ e assumindo $\mathcal{I} = 0$, obtemos algumas relações entre as funções de Green. Estas relações são chamadas *identidades de Ward*. As identidades de Ward podem ser empregadas como um dos testes de retificação da escolha das várias aproximações na teoria de perturbação.

Vamos considerar um funcional gerador

$$Z = \int \exp \left[i \left(S + \int j q dt \right) \right] \delta(U) \text{Sdet} \frac{\delta_r U}{\delta q} R D q , \quad (4.87)$$

onde $S = \int L dt$ é invariante de ação sobre a transformação de gauge que forma o grupo G , $U_\alpha(q)$ é um conjunto rígido de funcionais iguais em número aos parâmetros das transformações de gauge ν^α e R_α^a são geradores das transformações de gauge. Pela definição, o superdeterminante

$$\text{Sdet} \frac{\delta_r U_\alpha}{\delta q^a} R_\alpha^a$$

para um conjunto rígido de funcionais U .

Uma quantização canônica das teorias de campos físicas leva expressões da forma (4.87) para o funcional gerador.

A fórmula (4.87) descreve uma família inteira de funcionais geradores Z que dependem parametricamente da escolha dos funcionais U . Devemos mostrar que apesar dos geradores funcionais da forma (4.87) depender da escolha de U , as teorias quânticas correspondentes a eles são fisicamente equivalentes. Para esta finalidade é conveniente usar o chamado *truque de Faddeev-Popov* [56].

Vamos considerar um funcional $\Delta_U(q)$, que definimos como

$$\Delta_U(q) \int \delta \left(U(q^{(g)}) \right) dg = 1 , \quad (4.88)$$

onde $q^{(g)}$ é a órbita do grupo G , e a integração em (4.88) é realizada sobre o grupo G , $g \in G$. A integração sobre o grupo é tal que [57]

$$\int f(g) dg = \int f(g'g) dg = \int f(gg') dg = \int f(g^{-1}) dg , \quad g' \in G . \quad (4.89)$$

Para esta razão, o funcional $\delta_U(q)$ é por gauge, isto é

$$\Delta_U(q^{(g)}) = \Delta_U(q) . \quad (4.90)$$

Vamos calcular o funcional $\Delta_U(q)$ na superfície $U(q) = 0$. Esta superfície intercepta cada órbita do grupo somente uma vez, o sistemas de equação

$$U_\alpha(q^{(g)}) = 0 , \quad U_\alpha(q) = 0$$

possui uma solução única $g = 1$, ($\nu = 0$), e a integração em (4.88) é concentrada neste caso nas vizinhanças do elemento unitário. Nesta região, a medida de integração em (4.88) é

$$dg = D\nu^\alpha ,$$

e

$$\delta(U_\alpha(q^{(g)})) = \delta\left(\frac{\delta U_\alpha}{\delta q^a} R_\beta^\alpha \nu^\beta\right) , \quad (4.91)$$

Então, de acordo com (4.40), temos

$$\Delta_U(q)|_{U=0} = \left(\int \delta\left(\frac{\delta U_\alpha}{\delta q^a} R_\beta^\alpha \nu^\beta\right) D\nu\right)^{-1} = \text{Sdet} \frac{\delta U_\alpha}{\delta q^a} R_\beta^\alpha . \quad (4.92)$$

Agora vamos nos voltar diretamente para a integral (4.87). A integração contida nela é efetuada através da superfície $U(q) = 0$, pode ser escrito de acordo com (4.92) como

$$Z = \int \exp\left[i\left(S + \int j q dt\right)\right] \delta(U(q)) \Delta_U(q) Dq . \quad (4.93)$$

Vamos introduzir sobre o sinal da integral em (4.93) a unidade na forma (4.88), mas com um rígido conjunto de funcionais U' outro que U

$$1 = \Delta_{U'}(q) \int \delta(U'(q^{(g)})) dg .$$

Então

$$\begin{aligned} Z &= \int \exp\left[i\left(S + \int j q dt\right)\right] \delta(U(q)) \Delta_U(q) \\ &\quad \times \delta(U'(q^{(g)})) \Delta_{U'}(q) dg Dq . \end{aligned} \quad (4.94)$$

Na integral (4.94) devemos fazer uma mudança de variáveis $q \rightarrow q^{(g^{-1})}$ e então $g \rightarrow g^{-1}$. O Bereziniano da transformação $q \rightarrow q^g$ é assumido ser igual a unidade, pois para grupos localmente atuantes, ele pode diferir da unidade somente por termos proporcionais a $\delta(0)$, que na teoria de campos são iguais a zero no caso da escolha própria de regularização. Levando em conta a invariância de gauge dos funcionais S , $\Delta_U(q)$, $\Delta_{U'}(q)$ e as propriedades (4.89) da integral sobre o grupo, obtemos

$$Z = \int \exp \left[i \left(S + \int j q^{(g)} dt \right) \right] \delta(U'(q)) \Delta_{U'}(q) \times \delta(U(q^{(g)})) \Delta_U(q) dg Dq . \quad (4.95)$$

Finalmente, faremos o uso do teorema de equivalência, de acordo na qual podemos fazer a mudança

$$j q^{(g)} \rightarrow j q$$

em (4.95) sem alterar o significado físico da teoria que corresponde ao funcional (4.95). Neste caso, a integral de grupo no lado direito de (4.95) torna-se igual a unidade. e levando em conta (4.92), obtemos a expressão para Z , que difere de (4.87) pela mudança $U \rightarrow U'$

$$Z = \int \exp \left[i \left(S + \int j q dt \right) \right] \delta(U') \text{Sdet} \frac{\delta_r U'}{\delta q} R Dq .$$

Então, o conteúdo físico da teoria correspondente ao funcional gerador (4.87) não depende da escolha de U .

Vamos transformar o funcional (4.87). Como funcionais escolhemos

$$U_\alpha(q) = \chi_\alpha(q) - \lambda_\alpha ,$$

Onde λ_α são funções arbitrárias independentes de q , e χ é um conjunto rígido de funcionais. Então

$$Z = \int \exp \left[i \left(S + \int j q dt \right) \right] \delta(\chi - \lambda) \text{Sdet} \frac{\delta_r \chi}{\delta q} R Dq . \quad (4.96)$$

Segue do que foi dito acima que o conteúdo físico da teoria descrita pelo seu funcional não pode depender da escolha de λ . Portanto, integramos (4.96) sobre λ com um

funcional

$$\int \exp \left[i \int \left(\lambda_\alpha \mathcal{B}^\alpha + \frac{\alpha_0}{2} \mathcal{B}^\alpha \Lambda_{\alpha\beta} \mathcal{B}^\beta \right) dt \right] D\mathcal{B} ,$$

Onde $\mathcal{B}^\alpha$ é o conjunto de trajetórias de integração cuja paridade coincide com o de λ_α (a paridade de λ_α coincide com a paridade U_α , χ_α e com os parâmetros de transformação de gauge) e $\Lambda_{\alpha\beta}$ é uma supermatriz não singular independente de q e B em que o índice de paridade corresponde a paridade das trajetórias $\mathcal{B}^\alpha$. Então temos

$$\begin{aligned} Z = & \int \exp \left\{ i \left[S + \int \left[\chi_\alpha \mathcal{B}^\alpha + \frac{\alpha_0}{2} \mathcal{B}^\alpha \Lambda_{\alpha\beta} \mathcal{B}^\beta + jq \right] dt \right] \right\} \\ & \times \text{Sdet} \frac{\delta_r \chi}{\delta q} R Dq D\mathcal{B} . \end{aligned} \quad (4.97)$$

Finalmente, usando (4.51), representamos o superdeterminante no integrando (4.97) como uma integral funcional

$$\text{Sdet} \frac{\delta_r \chi_\alpha}{\delta q^a} R_\beta^a = \int \exp \left(i \int \bar{c}^\alpha \frac{\delta_r \chi_\alpha}{\delta q^a} R_\beta^a c^\beta dt \right) Dc D\bar{c} , \quad (4.98)$$

onde as trajetórias de integração $c^\alpha, \bar{c}^\beta$, chamados fantasmas e antifantasmas (*fantasmas de Faddeev-Popov*), possuem paridades opostas as dos parâmetros ν

$$P_{c^\alpha} = P_{\bar{c}^\alpha} = 1 + P_{\nu^\alpha} . \quad [c] = [\bar{c}] = [\nu] .$$

Depois disto, o funcional (4.97) pode ser representado na forma (4.79)

$$\begin{aligned} Z = & \int \exp \left\{ i \int \left[L_{\text{eff}} + jq + \sigma \mathcal{B} + \theta c + \bar{\theta} \bar{c} \right] dt \right\} \\ & \times Dq D\mathcal{B} Dc D\bar{c} , \end{aligned} \quad (4.99)$$

onde

$$L_{\text{eff}} = L + \mathcal{B}^\alpha \chi_\alpha + \frac{\alpha_0}{2} \mathcal{B}^\alpha \Lambda_{\alpha\beta} \mathcal{B}^\beta + \bar{c}^\alpha \frac{\delta_r \chi_\alpha}{\delta q^a} R_\beta^a c^\beta , \quad (4.100)$$

e $\sigma, \theta, \bar{\theta}$ são $\mathcal{B}, c, \bar{c}$, que é introduzido para simetria. Então, mostramos que o funcional (4.99) é fisicamente equivalente ao funcional (4.87) e estas diferentes escolhas de χ e Λ não muda o conteúdo físico da teoria que corresponde a este funcional.

Concluindo, voltaremos ao exemplo do campo vetorial massivo livre e construindo para esta teoria o funcional gerador das funções de Green, uma vez que encontramos a Hamiltoniana e os vínculos. A matriz $\{\Phi, \Phi\}$ neste caso não depende dos campos e consequentemente não precisamos escrever o determinante correspondente na integral funcional (4.70). Então o funcional gerador tem a forma (devemos notar que as variáveis $\mathcal{A}$ e p são pares neste caso)

$$Z = \int \exp \left[i \int (p_\mu \dot{\mathcal{A}}^\mu - \mathcal{H} + \mathcal{J}_i \mathcal{A}^i) dx \right] \times \delta(p_0) \delta(\partial_i p_i - m^2 \mathcal{A}^0) D\mathcal{A} Dp, \quad (4.101)$$

onde $\mathcal{H} = p_i^2/2 - p_i \partial_i \mathcal{A}^0 + F_{ik}^2/4 - m^2 \mathcal{A}^2/2$. Introduzimos fontes $\mathcal{J}$ somente para os campos $\mathcal{A}^i$, já que as funções Green correspondentes bastam para descrever todas quantidades físicas da teoria.

Vamos agora realizar algumas operações sobre a integral (4.101). Na Hamiltoniana $\mathcal{H}$ substituímos o termo $m^2 \mathcal{A}^0$ para $-p_i \partial_i \mathcal{A}^0$. Isto pode ser feito, devido a presença da função δ de vínculo no integrando em (4.101). Vamos representar esta função δ como

$$\int \exp \left[-i \int \mu (\partial_i p_i - m^2 \mathcal{A}^0) dx \right] D\mu,$$

e então integrar sobre p_0 e $\mathcal{A}^0$. O resultado pode ser escrito como (se μ é substituído por $\mathcal{A}^0$)

$$Z = \int \exp \left\{ i \int \left[-\frac{1}{2} p_i^2 + p_i (\dot{\mathcal{A}}^i + \partial_i \mathcal{A}^0) - \frac{1}{4} F_{ik}^2 + \frac{m^2}{2} \mathcal{A}^2 + \mathcal{J}_i \mathcal{A}^i \right] dx \right\} D\mathcal{A} Dp.$$

Agora a integral sobre os momentos pode ser facilmente calculada. Como um resultado

$$Z = \int \exp \left[i \int (\mathcal{L} + J_\mu \mathcal{A}^\mu) dx \right] D\mathcal{A}, \quad \mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} \mathcal{A}^2. \quad (4.102)$$

(Aqui novamente temos introduzido a fonte para o campo $\mathcal{A}^0$ para considerações de simetria.) Da (4.102) podemos ver que nos cálculos perturbativos das funções de Green

de coordenada no modelo em que as regras de Feynman simples são válidas. A forma explícita do propagador do campo vetorial é obtida calculando a integral (4.102)

$$\begin{aligned}
& \int \exp \left[i \int (\mathcal{L} + J_\mu \mathcal{A}^\mu) dx \right] D\mathcal{A} \\
&= \exp \left(-\frac{1}{2} \int \mathcal{J}^\mu(x) \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) \mathcal{J}^\nu(y) dx dy \right) , \\
& \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) = i(\eta_{\mu\nu} + m^{-2} \partial_\mu \partial_\nu) (\square + m^2)^{-1} \delta(x-y) . \quad (4.103)
\end{aligned}$$

Capítulo 5

Aplicações de Integrais de Trajetória para o Cálculo de Propagadores das Partículas Espinoriais

5.1 Introdução

Os propagadores das partículas relativísticas em campos externos (eletromagnético, não-Abeliano ou gravitacional) contêm uma informação importante sobre o comportamento quântico destas partículas. Além disso, se tais propagadores são conhecidos em campos arbitrários externos, podemos encontrar as funções de Green exatas de uma partícula em uma teoria de campos correspondente aplicando as integrais funcionais sobre todos campos externos. O propagador de Dirac num campo eletromagnético externo é distinguido de um de uma partícula escalar por uma estrutura espinorial complexa. O problema de sua representação por integrais de trajetória tem atraído a atenção de pesquisadores por muito tempo. Deste modo, Feynman que escreveu primeiro sua integral de trajetória para a amplitude de probabilidade na mecânica quântica não relativística [58] e depois uma integral de trajetória para função de Green causal da equação de Klein-Gordon (o propagador de uma partícula escalar) [59], também tentou deduzir uma representação para o propagador de Dirac através de uma integral de trajetória bosônica [60]. Depois da introdução da integral sobre as

variáveis de Grassmann por Berezin foi possível apresentar este propagador através das variáveis bosônicas e de Grassmann, sendo que esta última descreve os graus de liberdade do spin. Representações deste tipo têm sido discutidas na literatura por um longo tempo em diferentes contextos [61]. Contudo, tentativas para escrever o propagador de Dirac através somente de uma integral de trajetória bosônica ainda continuam. Deste modo, Polyakov [62] assumiu que o propagador de um elétron de Dirac livre com espaço-tempo Euclidiano com dimensão $D = 3$ pode ser apresentado através de uma integral de trajetória similar ao caso da partícula escalar, modificado pelo chamado fator de spin (SF). Esta idéia foi desenvolvida em [63], por exemplo, para escrever o SF para férmions de Dirac, interagindo com um campo de gauge não-Abeliano num espaço-tempo Euclidiano de dimensão D . Nestas representações o fator de spin SF foi apresentado através de algumas integrais de trajetórias adicionais e sua estrutura de matriz γ não foi definida explicitamente. Surpreendentemente, foi mostrado em [64] que todas integrações de Grassmann na representação do propagador de Dirac num campo externo arbitrário podem ser feitas em $3 + 1$ dimensões, tal que uma expressão para SF foi deduzida como um dado funcional de trajetórias bosônicas. Tendo esta representação com SF, podemos usa-la para calcular o propagador em alguns casos particulares de campos externos. Este procedimento de cálculo produz automaticamente uma estrutura espinorial explícita de propagadores que pode ser utilizada para cálculos concretos no quadro de Furry (veja por exemplo, [30, 32]).

No trabalho [66], o propagador de uma partícula com spin num campo externo foi apresentado através de uma integral de trajetória em dimensões arbitrárias. O problema possui diferentes soluções em dimensões pares e ímpares. Em dimensões pares a representação é a generalização do caso quadridimensional mencionado acima. Em dimensões ímpares, a solução foi apresentada pela primeira vez e difere essencialmente do caso de dimensão par. Usando a representação em dimensões ímpares podemos deduzir uma expressão para o SF fazendo as integrações de Grassmann similares ao caso quadridimensional [64].

Neste capítulo apresentamos problemas relacionados com o conceito de SF. Isto é, discutimos a dedução do SF em ambas as dimensões pares e ímpares nos exemplos

de casos de dimensões $3 + 1$ e $2 + 1$ e então usamos a representação de integrais de trajetória com SF para calcular propagadores em algumas configurações de campos externos. Seguindo o trabalho [67], em dimensões $3 + 1$ apresentamos uma dedução simples de SF evitando alguns passos desnecessários da carta original [64]. Deste modo, o significado da possibilidade surpreendente de uma integração completa sobre as variáveis de Grassmann torna-se clara. Então usamos a representação com SF para os cálculos de propagador em um campo eletromagnético uniforme constante e sua combinação com uma onda plana [31, 67, 69]. Devido ao fato de que este modo de cálculo automaticamente produz uma estrutura de matriz γ do propagador, as representações obtidas diferem das encontradas por meios de outros métodos, por exemplo elas diferem da conhecida fórmula de Schwinger num campo eletromagnético uniforme constante. Para comparar ambas representações, provamos no Apêndice B algumas decomposições complexas de funções das matrizes γ . Em dimensões $2 + 1$ a dedução do SF obtida é diferente do esperado. Calculamos então o propagador nestas dimensões num campo eletromagnético constante por meio da representação do SF. O resultado é novo e não pode ser deduzido a partir do caso de dimensão $3 + 1$ por meio da redução dimencional.

5.2 O Fator de Spin em $3 + 1$ Dimensões

5.2.1 Fazendo Integrais sobre Variáveis de Grassmann

O propagador de uma partícula relativística espinorial num campo externo eletromagnético $A_\mu(x)$ é a função de Green causal $S^c(x, y)$ da equação de Dirac neste campo

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - gA_\mu) - m] S^c(x, y) = -\delta^4(x - y) , \quad (5.1)$$

onde $x = (x^\mu)$, $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}$: $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$; $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$.

Dentro do artigo [68] a seguinte representação Lagrangiana da integral de trajetória para o propagador foi obtida em $3 + 1$ dimensões

$$S^c = S^c(x_{out}, x_{in}) = -\tilde{S}^c \gamma^5 , \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c = & \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\partial_\ell}{\partial \theta^n} \right\} \int_0^\infty de_0 \int d\chi_0 \int_{e_0} M(e) De \int_{\chi_0} D\chi \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx \int D\pi_e \int D\pi_\chi \\ & \times \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - \frac{e}{2} m^2 - g \dot{x}^\mu A_\mu + i e g F_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu \right. \right. \\ & \left. \left. + i \left(\frac{\dot{x}_\mu \psi^\mu}{e} - m \psi^5 \right) \chi - i \psi_n \dot{\psi}^n + \pi_e \dot{e} + \pi_\chi \dot{\chi} \right] d\tau + \psi_n(1) \psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{\gamma}^\mu = \gamma^5 \gamma^\mu$, $\tilde{\gamma}^5 = \tilde{\gamma}^0 \tilde{\gamma}^1 \tilde{\gamma}^2 \tilde{\gamma}^3 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \gamma^5$, $[\gamma^m, \gamma^n]_+ = 2\eta^{mn}$, $m, n = 0, 1, 2, 3, 5$, $\eta^{mn} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$; θ^n são variáveis auxiliares de Grassmann (ímpares), anticomutando por definição com as matrizes γ ; $x^\mu(\tau)$, $e(\tau)$, $\pi_e(\tau)$ são trajetórias bosônicas de integração; $\psi^n(\tau)$, $\chi(\tau)$, $\pi_\chi(\tau)$ são trajetórias ímpares de integração; condições de contorno

$$x(0) = x_{in}, \quad x(1) = x_{out}, \quad e(0) = e_0, \quad \psi^n(0) + \psi^n(1) = \theta^n, \quad \chi(0) = \chi_0$$

realizando-se; a medida $M(e)$ e $\mathcal{D}\psi$ temos a forma

$$M(e) = \int Dp \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 e p^2 d\tau \right\}, \quad \mathcal{D}\psi = D\psi \left[\int_{\psi(0)+\psi(1)=0} D\psi \exp \left\{ \int_0^1 \psi_n \dot{\psi}^n d\tau \right\} \right]^{-1}, \quad (5.3)$$

e $\frac{\partial_\ell}{\partial \theta^n}$ são derivadas a esquerda. Vamos demonstrar que o propagador (5.2) pode ser expresso somente através de uma integral de trajetória bosônica x . Para este propósito precisamos realizar várias integrações funcionais, em particular, para realizar todas as integrações de Grassmann. Primeiramente, podemos integrar sobre π_e e π_χ , então usando o aparecimento da função δ para remover a integração funcional sobre e e χ

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c = & - \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\partial_\ell}{\partial \theta^n} \right\} \int_0^\infty de_0 M(e_0) \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\psi \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}_\mu \psi^\mu}{e_0} - m \psi^5 \right) d\tau \\ & \times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e_0} - \frac{e_0}{2} m^2 - g \dot{x}^\mu A_\mu + i g e_0 F_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu - i \psi_n \dot{\psi}^n \right] d\tau + \psi_n(1) \psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0}. \end{aligned}$$

Então, mudando as variáveis de integração

$$\psi^n = \frac{1}{2} (\xi^n + \theta^n), \quad (5.4)$$

e introduzindo as fontes ímpares $\rho_n(\tau)$ para as novas variáveis $\xi^n(\tau)$, temos

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c = & -\frac{1}{2} \exp \left\{ i \tilde{\gamma}^n \frac{\partial_\ell}{\partial \theta^n} \right\} \int_0^\infty de_0 M(e_0) \\ & \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx \exp \left\{ -i \left[\frac{\dot{x}_\mu \star \dot{x}^\mu}{2e_0} + \frac{e_0}{2} m^2 + g \dot{x}^\mu \star A_\mu \right] - \frac{ge_0}{4} \theta^\mu \star \mathcal{F}_{\mu\nu} \star \theta^\nu \right\} \\ & \left[\frac{\dot{x}_\mu}{e_0} \star \left(\frac{\delta_\ell}{\delta \rho_\mu} + \theta^\mu \right) - m \star \left(\frac{\delta_\ell}{\delta \rho_5} + \theta^5 \right) \right] R[x, \rho, \theta] \Big|_{\rho=0, \theta=0}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde

$$\begin{aligned} R[x, \rho, \theta] = & \int_{\xi(0)+\xi(1)=0} \mathcal{D}\xi \exp \left\{ \frac{1}{4} \xi_n \star \dot{\xi}^n \right. \\ & \left. - \frac{ge_0}{4} \xi^\mu \star \mathcal{F}_{\mu\nu} \star \xi^\nu - \frac{ge_0}{2} \theta^\mu \star \mathcal{F}_{\mu\nu} \star \xi^\nu + \rho_n \star \xi^n \right\}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\mathcal{D}\xi = D\xi \left[\int_{\xi(0)+\xi(1)=0} D\xi \exp \left\{ \frac{1}{4} \xi_n \star \dot{\xi}^n \right\} \right]^{-1}. \quad (5.7)$$

Aqui são usadas notações condensadas na qual $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ é entendido como uma matriz com índices

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau, \tau') = F_{\mu\nu}(x(\tau)) \delta(\tau - \tau'), \quad (5.8)$$

e a integração sobre τ é denotada por uma estrela, por exemplo

$$\xi_n \star \dot{\xi}^n = \int_0^1 \xi_n(\tau) \dot{\xi}^n(\tau) d\tau.$$

Algumas vezes os índices discretos serão também omitidos. Neste caso todos tensores de segunda ordem devem ser entendidos como as matrizes com linhas marcadas pelos primeiros índices dos tensores, e com colunas marcadas pelos segundos índices covariantes dos tensores.

A integral de trajetória de Grassmann Gaussiana (5.6) podem ser avaliadas diretamente [36] sendo

$$R[x, \rho, \theta] = \left\{ \text{Det} \left[\mathcal{U}^{-1}(0) \mathcal{U}(g) \right] \right\}^{1/2} \exp \{ J^m \star \mathcal{W}_{mn} \star J^n \}, \quad (5.9)$$

onde as matrizes $\mathcal{W}(g)$ e $\mathcal{U}(g)$ possuem a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{mn}(g) &= \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{\mu\nu}(g) & 0 \\ 0 & -\delta'(\tau - \tau') \end{pmatrix}, \\ \mathcal{U}_{\mu\nu}(g) &= \eta_{\mu\nu} \delta'(\tau - \tau') - ge_0 \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau, \tau'), \end{aligned} \quad (5.10)$$

e

$$J_\mu = \rho_\mu + \frac{ge_0}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \star \theta^\nu, \quad J_5 = \rho_5.$$

O determinante em (5.9) pode ser entendido como

$$\begin{aligned} \text{Det} [\mathcal{U}^{-1}(0)\mathcal{U}(g)] &= \exp \text{Tr} [\log \mathcal{U}(g) - \log \mathcal{U}(0)] \\ &= \exp \left\{ -e_0 \text{Tr} \int_0^g dg' \mathcal{R}(g') \star \mathcal{F} \right\}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

onde $\mathcal{R}(g)$ é a inversa de $\mathcal{U}(g)$, considerada como um operador atuando no espaço das funções antiperiódicas

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \mathcal{R}_{\mu\nu}(g|\tau, \tau') - ge_0 F_\mu{}^\lambda(x(\tau)) \mathcal{R}_{\lambda\nu}(g|\tau, \tau') &= \eta_{\mu\nu} \delta(\tau - \tau'), \\ \mathcal{R}_{\mu\nu}(g|1, \tau) &= -\mathcal{R}_{\mu\nu}(g|0, \tau), \quad \forall \tau \in (0, 1). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Substituindo (5.9) e (5.11) em (5.5) e realizando então diferenciações funcionais com respeito a ρ_n , temos

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c &= -\frac{1}{2} \exp \left\{ i\tilde{\gamma}^n \frac{\partial_\ell}{\partial \theta^n} \right\} \int_0^\infty de_0 M(e_0) \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left[\frac{\dot{x}^\mu \star \dot{x}^\mu}{e_0} + e_0 m^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g\dot{x}^\mu A_\mu \right] \left[\frac{\dot{x}^\mu}{e_0} \star K_{\mu\nu} \theta^\nu - m\theta^5 \right] \left[1 - \frac{ge_0}{4} B_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta + \frac{g^2 e_0^2}{16} B_{\alpha\beta} B^{\alpha\beta} \theta^0 \theta^1 \theta^2 \theta^3 \right] \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^\infty dg' \text{Tr} \mathcal{R}(g') \star \mathcal{F} \right\} \Big|_{\theta=0}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde as seguintes notações são usadas

$$B_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda} \star K^\lambda{}_\nu, \quad B^{*\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} B_{\alpha\beta}, \quad K_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + ge_0 \mathcal{R}_{\mu\lambda}(g) \star F^\lambda{}_\nu, \quad (5.14)$$

e $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é símbolo Levi-Civita normalizado por $\epsilon^{0123} = 1$.

A diferenciação com respeito a θ^n na (5.13) substitui os produtos das variáveis θ^n pelos produtos anti-simetrizados correspondentes das matrizes $i\tilde{\gamma}^n$. Finalmente, passando para o propagador S^c e usando as identidades

$$\gamma^{[\lambda} \gamma^\mu \gamma^{\nu]} = \gamma^\lambda \gamma^{[\mu} \gamma^{\nu]} - 2\eta^{\lambda[\mu} \gamma^{\nu]}, \quad \sigma^{\mu\nu} = i\gamma^{[\mu} \gamma^{\nu]}, \quad (5.15)$$

onde a anti-simetrização sobre os conjuntos correspondentes de índices que são denotados por parênteses, logo temos

$$S^c(x_{out}, x_{in}) = \frac{i}{2} \int_0^\infty de_0 \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx M(e_0) \Phi[x, e_0] \exp \{iI[x, e_0]\}, \quad (5.16)$$

onde $I[x, e_0]$ é a ação de uma partícula relativística sem spin

$$I[x, e_0] = - \int_0^1 \left[\frac{\dot{x}^2}{2e_0} + \frac{e_0}{2} m^2 + g \dot{x} A(x) \right] d\tau, \quad (5.17)$$

e $\Phi[x, e_0]$ é o SF

$$\begin{aligned} \Phi[x, e_0] &= \left[m + (2e_0)^{-1} \dot{x}^\mu \star K_{\mu\lambda} \left(2\eta^{\lambda\kappa} - g e_0 B^{\lambda\kappa} \right) \gamma_\kappa - \frac{ig}{4} \left(m e_0 + \dot{x}^\mu \star K_{\mu\lambda} \gamma^\lambda \right) B_{\kappa\nu} \sigma^{\kappa\nu} \right. \\ &\quad \left. + m \frac{g^2 e_0^2}{16} B_{\alpha\beta}^* B^{\alpha\beta} \gamma^5 \right] \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} Q(g') \star \mathcal{F} \right\}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.2.2 O Propagador num Campo Constante Uniforme

Num caso de um campo constante uniforme ($F_{\mu\nu} = \text{const}$), que discutiremos nesta seção, os funcionais $\mathcal{R}$, K e B não dependem da trajetória x e podem ser calculados como segue

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(g) &= \frac{1}{2} \left(\eta \varepsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{g e_0 F}{2} \right) \exp \{ e_0 g F (\tau - \tau') \}, \\ K &= \left(\eta - \tanh \frac{g e_0 F}{2} \right) \exp (g e_0 F \tau), \quad B = \frac{2}{g e_0} \tanh \frac{g e_0 F}{2}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Usando-os em (5.18) e integrando sobre τ quando possível, obtemos SF num campo constante uniforme

$$\begin{aligned} \Phi[x, e_0] &= \left(\det \cosh \frac{g e_0 F}{2} \right)^{1/2} \left\{ m \left[1 - \frac{i}{2} \left(\tanh \frac{g e_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \left(\tanh \frac{g e_0 F}{2} \right)_{\mu\nu}^* \left(\tanh \frac{g e_0 F}{2} \right)^{\mu\nu} \gamma^5 \right] + \frac{1}{e_0} \left(\int_0^1 \dot{x} \exp(g e_0 F \tau) d\tau \right) \\ &\quad \left. \times \left(\eta - \tanh \frac{g e_0 F}{2} \right) \left[\left(\eta - \tanh \frac{g e_0 F}{2} \right) \gamma - \frac{i}{2} \gamma \left(\tanh \frac{g e_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Podemos ver que no campo sobre consideração o SF é linear na trajetória $x^\mu(\tau)$. Que facilita a integração bosônica na expressão (5.16).

Apesar do SF ser um objeto invariante por gauge, o propagador total não é. Isto é claro pela expressão (5.16) que precisamos escolher um gauge particular para os potenciais A_μ . Isto é, iremos usar os seguintes potenciais

$$A_\mu = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x^\nu, \quad (5.21)$$

para o campo constante uniforme $F_{\mu\nu} = \text{const.}$. Então podemos ver que a integral de trajetória (5.16) é quase Gaussiana no caso sobre consideração. Vamos fazer um deslocamento $x \rightarrow y + x_{cl}$, com x_{cl} uma solução das equações clássicas do movimento

$$\frac{\delta I}{\delta x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x}_\mu - ge_0 F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = 0 \quad (5.22)$$

sujeitas às condições de contorno $x_{cl}(0) = x_{in}$, $x_{cl}(1) = x_{out}$. Então as novas trajetórias de integração y obedecem às condições de contorno nulas, $y(0) = y(1) = 0$. Devido a estrutura quadrática da ação $I[x, e_0]$ e a linearidade de SF em x podemos fazer as seguintes substituições na integral de trajetória

$$\begin{aligned} I[y + x_{cl}, e_0] &\rightarrow I[x_{cl}, e_0] + I[y, e_0] + \frac{e_0}{2} m^2, \\ \Phi[y + x_{cl}, e_0] &\rightarrow \Phi[x_{cl}, e_0] = \Psi(x_{out}, x_{in}, e_0). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Fazendo também uma substituição de variáveis $p \rightarrow \frac{p}{\sqrt{e_0}}$, $y \rightarrow y\sqrt{e_0}$, temos

$$\begin{aligned} S^c &= \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \Psi(x_{out}, x_{in}, e_0) e^{iI[x_{cl}, e_0]} \\ &\times \int_0^0 Dy \int Dp \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 (p^2 - \dot{y}^2 - ge_0 y F \dot{y}) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Podemos verificar que a integral de trajetória em (5.24) é, de fato, o núcleo do propagador de Klein-Gordon na representação de tempo próprio. Esta integral de trajetória pode ser apresentada como

$$\begin{aligned} &\int_0^0 Dy \int Dp \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 (p^2 - \dot{y}^2 - ge_0 y F \dot{y}) d\tau \right\} = \\ &\left[\frac{\text{Det}(\eta_{\mu\nu} \partial_\tau^2 - ge_0 F_{\mu\nu} \partial_\tau)}{\text{Det}(\eta_{\mu\nu} \partial_\tau^2)} \right]^{-1/2} \int_0^0 Dy \int Dp \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 (p^2 - \dot{y}^2) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Cancelando o fator $\text{Det}(-\eta_{\mu\nu})$ na razão dos determinantes obtemos

$$\frac{\text{Det}(\eta_{\mu\nu} \partial_\tau^2 - ge_0 F_{\mu\nu} \partial_\tau)}{\text{Det}(\eta_{\mu\nu} \partial_\tau^2)} = \frac{\text{Det}(-\delta_\nu^\mu \partial_\tau^2 + ge_0 F^\mu{}_\nu \partial_\tau)}{\text{Det}(-\delta_\nu^\mu \partial_\tau^2)}. \quad (5.25)$$

Podemos também fazer a substituição

$$-\mathbf{I} \partial_\tau^2 + ge_0 F \partial_\tau \rightarrow -\mathbf{I} \partial_\tau^2 + \frac{g^2 e_0^2}{4} F^2, \quad (5.26)$$

onde $\mathbf{I}$ é uma matriz unitária 4×4 , no lado direito de (5.25) porque os espectros de ambos os operadores coincidem. De fato

$$-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + ge_0F\partial_\tau = \exp\left(\frac{ge_0}{2}F\tau\right) \left(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{g^2e_0^2}{4}F^2\right) \exp\left(-\frac{ge_0}{2}F\tau\right), \quad (5.27)$$

e as condições de contorno nulas são invariantes sob a transformação $y \rightarrow \exp(\frac{ge_0F\tau}{2})y$.

Usando (5.26) e o valor para a integral de trajetória livre [68]

$$\frac{i}{2} \int_0^0 Dy \int Dp \exp\left\{\frac{i}{2} \int d\tau (p^2 - \dot{y}^2)\right\} = \frac{1}{8\pi^2},$$

relacionada, de fato, pela definição de medida, obtemos

$$S^c = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \Psi(x_{out}, x_{in}, e_0) e^{iI[x_{cl}, e_0]} \left[\frac{\text{Det}(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{g^2e_0^2}{4}F^2)}{\text{Det}(-\mathbf{I}\partial_\tau^2)} \right]^{-1/2}. \quad (5.28)$$

A razão dos determinantes podem ser escritas agora como

$$\begin{aligned} \frac{\text{Det}(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{g^2e_0^2}{4}F^2)}{\text{Det}(-\mathbf{I}\partial_\tau^2)} &= \exp \text{Tr} \left[\ln \left(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{g^2e_0^2}{4}F^2 \right) - \ln(-\mathbf{I}\partial_\tau^2) \right] \\ &= \exp \text{Tr} \left[\frac{e_0^2}{2}F^2 \int_0^g d\lambda \lambda \left(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{\lambda^2e_0^2}{4}F^2 \right)^{-1} \right] \\ &= \exp \text{tr} \left[\frac{e_0^2}{2}F^2 \int_0^g d\lambda \lambda \sum_{n=1}^\infty \left(\pi^2 n^2 \mathbf{I} + \frac{\lambda^2e_0^2}{4}F^2 \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

O traço no espaço de dimensão infinita na segunda linha da equação (5.29) é tomado uma única vez no restante do espaço quadridimensional. Usando a fórmula

$$\sum_{n=1}^\infty (\pi^2 n^2 + \kappa^2)^{-1} = \frac{1}{2\kappa} \coth \kappa - \frac{1}{2\kappa^2},$$

que é também válida se κ é uma matriz arbitrária 4×4 , e integrando em (5.29), encontramos

$$\frac{\text{Det}(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{g^2e_0^2}{4}F^2)}{\text{Det}(-\mathbf{I}\partial_\tau^2)} = \det \left(\frac{\sinh \frac{ge_0F}{2}}{\frac{ge_0F}{2}} \right). \quad (5.30)$$

Então

$$S^c = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{e_0gF}{2}}{gF} \right)^{-\frac{1}{2}} \Psi(x_{out}, x_{in}, e_0) e^{iI[x_{cl}, e_0]}, \quad (5.31)$$

onde a função $\Psi(x_{out}, x_{in}, e_0)$ é SF na trajetória clássica x_{cl} . A última pode ser facilmente encontrada resolvendo a equação (5.22)

$$x_{cl} = (\exp(ge_0F) - \eta)^{-1} [\exp(ge_0F\tau)(x_{out} - x_{in}) + \exp(ge_0F)x_{in} - x_{out}] . \quad (5.32)$$

Substituindo (5.32) nas equações (5.23) e (5.31), obtemos

$$\begin{aligned} S^c &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{ge_0F}{2}}{gF} \right)^{-\frac{1}{2}} \Psi(x_{out}, x_{in}, e_0) \\ &\times \exp \left\{ \frac{ig}{2} x_{out} F x_{in} - \frac{i}{2} e_0 m^2 - \frac{ig}{4} (x_{out} - x_{in}) F \coth \left(\frac{ge_0F}{2} \right) (x_{out} - x_{in}) \right\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

onde

$$\begin{aligned} \Psi(x_{out}, x_{in}, e_0) &= \left[m + \frac{g}{2} (x_{out} - x_{in}) F \left(\coth \frac{ge_0F}{2} - 1 \right) \gamma \right] \\ &\times \sqrt{\det \cosh \frac{ge_0F}{2}} \left[1 - \frac{i}{2} \left(\tanh \frac{ge_0F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right. \\ &\left. + \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\tanh \frac{ge_0F}{2} \right)_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{ge_0F}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \right] . \end{aligned} \quad (5.34)$$

Agora vamos comparar a representação (5.33) com a fórmula de Schwinger [70], que foi deduzida no mesmo caso do campo constante por meio do método do tempo próprio. A representação de Schwinger tem a forma

$$\begin{aligned} S^c(x_{out}, x_{in}) &= \frac{1}{32\pi^2} \left[\gamma^\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x_{out}^\mu} - g A_\mu(x_{out}) \right) + m \right] \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{ge_0F}{2}}{gF} \right)^{-1/2} \times \exp \{ \\ &\frac{i}{2} \left[g x_{out} F x_{in} - e_0 m^2 - (x_{out} - x_{in}) \frac{gF}{2} \coth \frac{ge_0F}{2} (x_{out} - x_{in}) - \frac{ge_0}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Fazendo a diferenciação a respeito de x_{out}^μ nos transformamos a fórmula (5.35) para a forma que é conveniente para a comparação com a nossa representação (5.31)

$$\begin{aligned} S^c &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{ge_0F}{2}}{gF} \right)^{-1/2} \Psi_S(x_{out}, x_{in}, e_0) \\ &\times \exp \left\{ i \frac{g}{2} x_{out} F x_{in} - \frac{i}{2} e_0 m^2 - i \frac{g}{4} (x_{out} - x_{in}) F \coth \left(\frac{ge_0F}{2} \right) (x_{out} - x_{in}) \right\} , \end{aligned} \quad (5.36)$$

onde a função Ψ_S é dada por

$$\Psi_S(x_{out}, x_{in}, e_0) = \left[m + \frac{g}{2}(x_{out} - x_{in})F(\coth \frac{ge_0 F}{2} - 1)\gamma \right] \exp(-i \frac{e_0 g}{4} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}). \quad (5.37)$$

Então precisamos comparar somente as funções Ψ e Ψ_S . Elas coincidem, desde que a fórmula ocorra (veja Apêndice B), onde $\omega_{\mu\nu}$ é um tensor anti-simétrico arbitrário

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\right) &= \sqrt{\det \cosh \frac{\omega}{2}} \left[1 - \frac{i}{2} \left(\tanh \frac{\omega}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\tanh \frac{\omega}{2} \right)_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{\omega}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \right]. \end{aligned} \quad (5.38)$$

De fato, a última fórmula apresenta uma decomposição linear de uma transformação de Lorentz finita nas estruturas independentes de matrizes γ .

5.2.3 Propagador num Campo Uniforme e num Campo de Ondas Planas

O quadripotencial

$$A_\mu^{comb} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu + a_\mu(nx), \quad (5.39)$$

onde $a_\mu(\phi)$ é uma função vetorial com uma variável real ϕ e n é um vetor normalizado isotrópico $n^\mu = (1, \mathbf{n})$,

$$n^2 = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad (5.40)$$

produz o campo

$$F_{\mu\nu}^{comb}(nx) = F_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}(nx), \quad (5.41)$$

que é uma superposição do campo constante $F_{\mu\nu}$ e o campo da onda plana

$$f_{\mu\nu}(nx) = n_\mu a'_\nu(nx) - n_\nu a'_\mu(nx)$$

Sem perda de generalidade podemos escolher a_μ transversal

$$n^\mu a_\mu(\phi) = 0. \quad (5.42)$$

A dependência do SF $\Phi[x, e_0]$ na trajetória $x^\mu(\tau)$ é dupla. Em adição com a dependência direta (veja eq.(5.18)), há uma indireta através do campo externo. No

caso sobre consideração o campo depende de $x_\mu(\tau)$ somente através da combinação escalar $nx(\tau)$. Substituindo a última por uma trajetória escalar auxiliar $\phi(\tau)$ obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}[x, \phi, e_0] = & \left[m + (2e_0)^{-1} \dot{x}^\mu \star \tilde{K}_{\mu\lambda} \left(2\eta^{\lambda\kappa} - ge_0 \tilde{B}^{\lambda\kappa} \right) \gamma_\kappa \right. \\ & - \frac{ig}{4} \left(me_0 + \dot{x}^\mu \star \tilde{K}_{\mu\lambda} \gamma^\lambda \right) \tilde{B}_{\kappa\nu} \sigma^{\kappa\nu} + m \frac{g^2 e_0^2}{16} \tilde{B}_{\alpha\beta} \tilde{B}^{*\alpha\beta} \gamma^5 \Big] \\ & \times \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} \tilde{\mathcal{R}}(g') \star \mathcal{F}^{comb}(\phi) \right\}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{comb}(\phi|\tau - \tau') = [F_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}(\phi(\tau))]\delta(\tau, \tau')$ e

$$\tilde{B}_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda}^{comb}(\phi) \star \tilde{K}^\lambda{}_\nu, \quad \tilde{K}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + ge_0 \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu}(g) \star F^{comb}(\phi), \quad (5.44)$$

$$\left[\eta \frac{\partial}{\partial \tau} - ge_0 F^{comb}(\phi(\tau)) \right] \tilde{\mathcal{R}}(g|\tau, \tau') = \eta \delta(\tau, \tau'), \quad (5.45)$$

$$\tilde{\mathcal{R}}(g|1, \tau) = -\tilde{\mathcal{R}}(g|0, \tau), \quad \forall \tau \in (0, 1). \quad (5.46)$$

Obviamente

$$\tilde{\mathcal{R}}(g) \Big|_{\phi(\tau)=nx(\tau)} = \mathcal{R}(g), \quad \tilde{K} \Big|_{\phi(\tau)=nx(\tau)} = K, \quad \tilde{B} \Big|_{\phi(\tau)=nx(\tau)} = B, \quad (5.47)$$

e, consequentemente

$$\tilde{\Phi}[x, nx, e_0] = \Phi[x, e_0]. \quad (5.48)$$

Inserindo uma integral de função δ

$$\int D\phi D\lambda e^{i\lambda \star (\phi - nx)} = 1,$$

no lado direito da equação (5.16) e usando (5.48) transformamos a integral de trajetória (5.16) numa quase Gaussiana de forma simples

$$\begin{aligned} S^c(x_{out}, x_{in}) = & \frac{i}{2} \int_0^\infty de_0 \int D\phi D\lambda e^{i\lambda \star \phi} \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx M(e_0) \tilde{\Phi}[x, \phi, e_0] \\ & \times \exp\{i\tilde{I}[x, \phi, e_0] - i\lambda \star (nx)\}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

O funcional da ação

$$\tilde{I}[x, \phi, e_0] = -\frac{1}{2e_0} \dot{x} \star \dot{x} - \frac{e_0}{2} m^2 - \frac{g}{2} x \star \bar{\mathcal{F}} \star \dot{x} - ga(\phi) \star \dot{x} \quad (5.50)$$

(onde $\bar{\mathcal{F}}(\tau, \tau') = F\delta(\tau - \tau')$) contém termos lineares e bilineares em x (e a parte bilinear não depende do potencial da onda a_μ). O SF $\tilde{\Phi}[x, \phi, e_0]$ é linear em x e (seguindo o mesmo caminho de raciocínio como no caso de um campo constante) encontramos

$$S^c = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right)^{-\frac{1}{2}} \int D\phi D\lambda e^{i\lambda \star (\phi - nx_q)} \tilde{\Phi}[x_q, \phi, e_0] e^{i\tilde{I}[x_q, \phi, e_0]}, \quad (5.51)$$

onde x_q é solução da equação

$$\ddot{x}_q - ge_0 F \dot{x}_q = e_0 \lambda n - e_0 ga'(\phi) \dot{\phi}, \quad (5.52)$$

obedecendo às condições de contorno

$$x_q(0) = x_{in}, \quad x_q(1) = x_{out}. \quad (5.53)$$

Introduzindo uma função de Green apropriada $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\tau, \tau')$ para o operador de segunda ordem

$$\left[\eta \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - ge_0 F \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \mathcal{G}(\tau, \tau') = \eta \delta(\tau - \tau'), \quad (5.54)$$

$$\mathcal{G}(0, \tau) = \mathcal{G}(1, \tau) = \mathcal{G}(\tau, 0) = \mathcal{G}(\tau, 1) = 0, \quad \forall \tau \in (0, 1), \quad (5.55)$$

apresentamos esta solução da forma

$$x_q = x_{cl} + e_0 \mathcal{G} \star (\lambda n - ga'(\phi) \dot{\phi}). \quad (5.56)$$

O valor do funcional de ação $\tilde{I}[x, \phi, e_0]$ na solução x_q é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{I}[x_q, \phi, e_0] &= \bar{I}[x_{cl}, e_0] - ga(\phi) \star \dot{x}_{cl} \\ &\quad - \frac{e_0}{2} (ga'(\phi) \dot{\phi} - \lambda n) \star \mathcal{G} \star (ga'(\phi) \dot{\phi} - \lambda n) + \lambda n \star (x_q - x_{cl}), \end{aligned} \quad (5.57)$$

onde

$$\bar{I}[x, e_0] = -\frac{1}{2e_0} \dot{x} \star \dot{x} - \frac{e_0}{2} m^2 - \frac{g}{2} x \star \bar{\mathcal{F}} \star \dot{x} \quad (5.58)$$

é a ação num campo constante uniforme F .

A integral funcional sobre λ em (5.49) é uma quase Gaussiana de forma simples (vamos lembrar que x_q é linear em λ , vejamos a equação (5.56)) e a integração pode ser feita explicitamente. O resultado é uma fórmula para o propagador na qual somente a integração funcional é sobre a trajetória escalar $\phi(\tau)$. Entretanto, a última integração é dificilmente realizada explicitamente na forma geral (para um $a_\mu(\phi)$ arbitrária). Contudo, existe uma combinação [69] para qual a integração pode ser realizada e fórmulas explícitas para o propagador podem ser deduzidas. As últimas são comparáveis às do tipo de Schwinger [30, 71], que são explícitas neste caso.

Isto é, vamos escolher um vetor de onda n que coincida e com um autovetor da matriz F (veja Apêndice A)

$$F_{\mu\nu}n^\nu = -\mathcal{E}n_\mu, \quad n^2 = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad (5.59)$$

Neste caso $nx_q = nx_{cl}$, além disso, o funcional da ação (5.50) é invariante com respeito a deslocamentos longitudinais

$$x_q(\tau) \rightarrow x_q(\tau) + \alpha(\tau)n, \quad \alpha(0) = \alpha(1) = 0, \quad (5.60)$$

e pelo o valor de (5.59) e da transversalidade de (5.42) do potencial da onda a_μ . Então $\tilde{I}[x_q, \phi, e_0]$ não depende de λ ,

$$\tilde{I}[x_q, \phi, e_0] = \tilde{I}[x_{tr}, \phi, e_0] \quad (5.61)$$

onde

$$x_{tr} = x_{cl} - ge_0\mathcal{G} \star (a'(\phi)\dot{\phi}) \quad (5.62)$$

é uma solução para a equação

$$\ddot{x}_{tr} - ge_0F\dot{x}_{tr} = -ge_0a'(\phi)\dot{\phi}, \quad (5.63)$$

obedecendo às condições de contorno (5.52). Entretanto o SF $\tilde{\Phi}[x_q, \phi, e_0]$ não mostra esta invariância e, portanto, é dependente de λ . Apresentando x_q como uma soma $x_q = x_{tr} + e_0\mathcal{G}n \star \lambda$, e substituindo na expansão do SF nos produtos anti-simetrizados

das matrizes γ

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}[x, \phi, e_0] = & \left[e_0^{-1} \dot{x}^\mu \star \tilde{K}_{\mu\nu} \left(\gamma^\nu + \frac{ge_0}{4} \tilde{B}_{\alpha\beta} \gamma^{[\nu} \gamma^\alpha \gamma^{\beta]} \right) \right. \\ & \left. + m \left(1 + \frac{ge_0}{4} \tilde{B}_{\alpha\beta} \gamma^{[\alpha} \gamma^{\beta]} + \frac{g^2 e_0^2}{32} \tilde{B}_{\alpha\beta} \tilde{B}_{\mu\nu} \gamma^{[\alpha} \gamma^{\beta} \gamma^\mu \gamma^{\nu]} \right) \right] \Lambda[\phi, e_0], \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$\Lambda[\phi, e_0] = \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} \tilde{\mathcal{R}}(g') \star \mathcal{F}^{comb}(\phi) \right\}. \quad (5.65)$$

obtemos

$$\tilde{\Phi}[x_q, \phi, e_0] = \tilde{\Phi}[x_{tr}, \phi, e_0] + \lambda \star l[\phi, e_0], \quad (5.66)$$

$$l[\phi, e_0] = n^\kappa \mathcal{G}_{\kappa\mu}^{(r)} \star \tilde{K}^\mu{}_\nu \left(\gamma^\nu + \frac{ge_0}{4} \tilde{B}_{\alpha\beta} \gamma^{[\nu} \gamma^\alpha \gamma^{\beta]} \right) \Lambda[\phi, e_0], \quad (5.67)$$

$$\mathcal{G}^{(r)}(\tau, \tau') = \frac{\partial}{\partial \tau'} \mathcal{G}(\tau, \tau'). \quad (5.68)$$

Consequentemente $l[\phi, e_0]$ não depende de ϕ . Primeiramente, expandindo $\tilde{\mathcal{R}}$ em potências de f e usando (5.59) e (5.42) derivamos que $\Lambda[\phi, e_0]$ coincide com a expressão

$$\bar{\Lambda}(e_0) = \exp \left\{ \frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} \bar{\mathcal{R}}(g) \star \bar{\mathcal{F}} \right\}. \quad (5.69)$$

Segundo¹

$$n_\mu \tilde{K}^\mu{}_\nu = n_\mu \bar{K}^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} (n \bar{K} \bar{n}) n_\nu. \quad (5.70)$$

De fato, usando as definições (5.47) encontramos que $\tilde{K}$ satisfazem a equação

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} - ge_0(F + f(\phi(t))) \right] \tilde{K}(\tau) = 0, \quad (5.71)$$

e as condições de contorno

$$\tilde{K}(0) + \tilde{K}(1) = 2\eta. \quad (5.72)$$

Multiplicando (5.71) por n e usando as propriedades (5.59), (5.42) encontramos

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - ge_0 \mathcal{E} \right) n \tilde{K} = 0, \quad n \tilde{K}(0) + n \tilde{K}(1) = 2n. \quad (5.73)$$

Ao mesmo tempo $n \bar{K}$ obedece a (5.73). Consequentemente, $n \tilde{K}$ e $n \bar{K}$ coincidem. Então usando (5.42) e as propriedades de $n, \bar{n}$ (veja Apêndice A) obtemos (5.70).

¹Nesta seção denotamos $\bar{\mathcal{R}}(g)$, $\bar{K}$, $\bar{B}$ as quantidades dadas por (5.19), isto é, correspondendo ao caso de um campo constante uniforme F .

Terceiro, utilizando as mesmas propriedades do campo eletromagnético podemos derivar

$$\tilde{B}_{\alpha\beta} = \bar{B}_{\alpha\beta} + n_\alpha b_\beta - b_\alpha n_\beta, \quad (5.74)$$

onde b_α depende de ϕ e $\bar{B}$ é dado por (5.19). Substituindo (5.74) em (5.67) usando (5.59) encontramos

$$\begin{aligned} l[\phi, e_0] \\ = \frac{1}{4} \left(n \mathcal{G}^{(r)} \bar{n} \right) \star \left(n \bar{K} \bar{n} \right) \left[n_\nu \gamma^\nu + \frac{ge_0}{4} n_\nu \left(\bar{B}_{\alpha\beta} + n_\alpha b_\beta - b_\alpha n_\beta \right) \gamma^{[\nu} \gamma^\alpha \gamma^{\beta]} \right] \bar{\Lambda}(e_0). \end{aligned}$$

e a contribuição de termos dependentes de ϕ se anulam pelo fato da anti-simetria completa de $\gamma^{[\nu} \gamma^\alpha \gamma^{\beta]}$. Consequentemente $l[\phi, e_0]$ pode ser substituído por

$$\bar{l}(e_0) = n^\kappa \mathcal{G}_{\kappa\mu}^{(r)} \star \bar{K}^\mu{}_\nu \left(\gamma^\nu + \frac{ge_0}{4} \bar{B}_{\alpha\beta} \gamma^{[\nu} \gamma^\alpha \gamma^{\beta]} \right) \bar{\Lambda}(e_0). \quad (5.75)$$

Substituindo (5.75) em (5.66) e então em (5.51), usando (5.61) e

$$\lambda(\tau) e^{i\lambda\star\phi} = -i \frac{\delta}{\delta\phi(\tau)} e^{i\lambda\star\phi},$$

e integrando por partes encontramos

$$\begin{aligned} S^c &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right)^{-\frac{1}{2}} \int D\phi D\lambda e^{i\lambda\star(\phi - nx_{cl})} \\ &\times \left[\tilde{\Phi}[x_{tr}, \phi, e_0] - \left(\frac{\delta}{\delta\phi} \tilde{I}[x_{tr}, \phi, e_0] \right) \star \bar{l}(e_0) \right] \exp \left\{ i \tilde{I}[x_{tr}, \phi, e_0] \right\}. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Inserindo a derivada,

$$\frac{\delta}{\delta\phi} \tilde{I}[x_{tr}, \phi, e_0] = -a'(\phi) \dot{x}_{tr},$$

e usando (5.74), (5.67) transformamos (5.76) na seguinte forma

$$\begin{aligned} S^c &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right)^{-\frac{1}{2}} \int D\phi D\lambda e^{i\lambda\star(\phi - nx_{cl})} \\ &\times \tilde{\Phi}[\tilde{x}, \phi, e_0] \exp \left\{ i \tilde{I}[x_{tr}, \phi, e_0] \right\}, \end{aligned} \quad (5.77)$$

onde

$$\tilde{x}^\mu = x_{tr}^\mu + ge_0 n^\mu a'_\kappa(\phi) \dot{x}_{tr}^\kappa.$$

Podemos diretamente verificar que $\tilde{x}$ satisfaz a equação

$$\ddot{\tilde{x}}_\mu - ge_0 (F_{\mu\nu} + n_\mu a'_\nu(\phi)) \dot{\tilde{x}}^\nu = -ge_0 a'_\mu(\phi) \dot{\phi} \quad (5.78)$$

e as condições de contorno (5.52). A trajetória x_{tr} na ação $\tilde{I}$ pode ser substituída por $\tilde{x}$ devido a invariância da ação $\tilde{I}[x, \phi, e_0]$ sob deslocamentos longitudinais (5.60). A integração sobre λ e ϕ é direta agora. Precisamos somente levar em conta que $\tilde{x}|_{\phi=nx_{cl}} \equiv x_{comb}$ é solução (sujeitas às condições de contorno (5.52)) para a equação de movimento

$$\ddot{x}_{comb}^\mu - ge_0 (F + f(nx_{comb}))^\mu{}_\nu \dot{x}_{comb}^\nu = 0. \quad (5.79)$$

De fato, a equação (5.78) mostra-se ser equivalente à equação (5.79) onde $\phi = nx_{cl}$ e a relação $nx_{comb} = nx_{cl}$ é levada em conta. Consequentemente

$$\tilde{\Phi}[\tilde{x}, \phi, e_0] \Big|_{\phi=nx_{cl}} = \Phi[x_{comb}, e_0], \quad \tilde{I}[\tilde{x}, \phi, e_0] \Big|_{\phi=nx_{cl}} = I[x_{comb}, e_0]. \quad (5.80)$$

Finalmente, temos

$$S^c = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right)^{-\frac{1}{2}} \Phi[x_{comb}, e_0] e^{I[x_{comb}, e_0]}, \quad (5.81)$$

onde

$$\begin{aligned} \Phi[x_{comb}, e_0] = & \left[e_0^{-1} \dot{x}_{comb}^\mu \star K_{\mu\nu} \left(\gamma^\nu + \frac{ge_0}{4} B_{\alpha\beta} \gamma^{[\nu} \gamma^\alpha \gamma^{\beta]} \right) \right. \\ & \left. + m \left(1 + \frac{ge_0}{4} B_{\alpha\beta} \gamma^{[\alpha} \gamma^{\beta]} + \frac{g^2 e_0^2}{32} B_{\alpha\beta} B_{\mu\nu} \gamma^{[\alpha} \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^{\nu]} \right) \right] \bar{\Lambda}(e_0). \end{aligned} \quad (5.82)$$

O vetor $\dot{x}_{comb}$ satisfaz (5.79) e pode ser apresentado como

$$\dot{x}_{comb}(\tau) = T_A \exp \left\{ -ge_0 \int_\tau^1 F^{comb}(nx_{cl}(\tau)) d\tau \right\} \dot{x}(1), \quad (5.83)$$

onde T_A denota o produto anticronológico. Por outro lado, a trajetória $K(\tau)$ satisfaz (5.71) onde devemos substituir ϕ por nx_{cl} . Consequentemente

$$K(\tau) = T_A \exp \left\{ -ge_0 \int_\tau^1 F^{comb}(nx_{cl}) d\tau \right\} K(1), \quad (5.84)$$

e^2

$$\dot{x}_{comb} \star K = \dot{x}_{comb}(1)K(1). \quad (5.85)$$

Substituindo (5.85) em (5.82) e levando em conta a relação $B_{[\alpha\beta}B_{\mu\nu]} = \bar{B}_{[\alpha\beta}\bar{B}_{\mu\nu]}$ encontramos

$$\begin{aligned} \Phi[x_{comb}, e_0] &= \left[e_0^{-1} \dot{x}_{comb}^\mu(1) K_{\mu\nu}(1) \left(\gamma^\nu + \frac{ge_0}{4} B_{\alpha\beta} \gamma^{[\nu} \gamma^\alpha \gamma^{\beta]} \right) \right. \\ &\quad \left. + m \left(1 + \frac{ge_0}{4} B_{\alpha\beta} \gamma^{[\alpha} \gamma^{\beta]} + \frac{g^2 e_0^2}{32} \bar{B}_{\alpha\beta} \bar{B}_{\mu\nu} \gamma^{[\alpha} \gamma^{\beta} \gamma^\mu \gamma^{\nu]} \right) \right] \bar{\Lambda}(e_0). \end{aligned} \quad (5.86)$$

A representação para o propagador numa combinação de campo específico (caracterizada pela relação (5.59)) é dada [65, 30, 71] em termos da integral de tempo próprio somente. Uma outra representação mais complicada foi obtida antes em [69]. Em nossa notação a representação [65, 30] pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S^c(x_{out}, x_{in}) &= \left[\gamma^\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x_{out}^\mu} - g A_\mu^{comb}(nx_{out}) \right) + m \right] \\ &\quad \times \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{iI[x_{comb}, e_0]} \Delta[nx_{cl}, e_0], \end{aligned} \quad (5.87)$$

onde

$$\Delta[nx_{cl}, e_0] = T \exp \left\{ -\frac{ige_0}{4} \int_0^1 d\tau (F + f(nx_{cl}(\tau)))_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right\} \quad (5.88)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{ige_0}{4} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right\} - \frac{ige_0}{4} \int_0^1 d\tau \left(e^{\frac{ge_0}{2} F(1-2\tau)} f(nx_{cl}(\tau)) e^{-\frac{ge_0}{2} F(1-2\tau)} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}, \quad (5.89)$$

e T denota o produto cronológico. Fazendo a derivada em (5.87) podemos usar a relação

$$\frac{\partial}{\partial x_{out}^\mu} I[x_{comb}, e_0] = -p_\mu(1), \quad (5.90)$$

onde

$$p_\mu(\tau) = - \frac{\delta}{\delta \dot{x}^\mu} I[x, e_0] \Big|_{x=x_{comb}},$$

é o momento, em particular

$$p(1) = e_0^{-1} \dot{x}_{comb}(1) + ge_0 A^{comb}(nx_{out}). \quad (5.91)$$

²O operador $T_A \exp \left\{ -ge_0 \int_\tau^1 F^{comb}(nx_{cl}) d\tau \right\}$ preserva o produto escalar devido a anti-simetria do tensor intensidade do campo.

Por outro lado

$$\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_{out}^\mu} \Delta[nx_{cl}, e_0] = 0. \quad (5.92)$$

De fato, obtemos da equação (5.32), com ajuda da equação (5.59)

$$\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x_{out}^\mu} (nx_{cl}(\tau)) = \frac{e^{ge_0\mathcal{E}\tau} - 1}{e^{ge_0\mathcal{E}} - 1} n_\mu \gamma^\mu. \quad (5.93)$$

Usando a representação (5.89) para $\Delta[nx_{cl}, e_0]$, equações (5.40) e (5.42), e as propriedades das matrizes γ , derivamos facilmente (5.92). Diferenciando em (5.87), obtemos, com ajuda de (5.89), (5.90) e (5.92)

$$S^c(x_{out}, x_{in}) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right)^{-\frac{1}{2}} \Psi_S^{comb}(x_{out}, x_{in}, e_0) e^{iI[x_{comb}, e_0]}, \quad (5.94)$$

onde

$$\Psi_S^{comb}(x_{out}, x_{in}, e_0) = \left(e_0^{-1} \dot{x}_{comb}^\mu (1) \gamma_\mu + m \right) \Delta[nx_{cl}, e_0].$$

Usando as identidades (B.12) e (B.13) podemos verificar que

$$\Psi_S^{comb}(x_{out}, x_{in}, e_0) = \Phi[x_{comb}, e_0].$$

Portanto as representações (5.81) e (5.87) são equivalentes.

5.3 Fator de Spin em 2 + 1 Dimensões

5.3.1 Dedução do Fator de Spin

Em 2 + 1 dimensões a equação para o propagador de Dirac tem a forma

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - gA_\mu(x)) - m] S^c(x, y) = -\delta^3(x - y), \quad (5.95)$$

onde as matrizes γ em 2 + 1 dimensões podem serem trazidas, por exemplo, na forma $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^1 = i\sigma^2$, $\gamma^2 = -i\sigma^1$, $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}$, $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$, $\mu, \nu = 0, 1, 2$. Neste caso particular obedecem às relações

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\epsilon^{\mu\nu\lambda} \gamma_\lambda, \quad \gamma^\mu = \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} \gamma_\nu \gamma_\lambda. \quad (5.96)$$

No artigo [66] uma representação para o propagador de Dirac foi obtida em dimensões ímpares arbitrárias. Em particular, no caso em consideração esta representação pode ser escrita como

$$S^c = \frac{1}{2} \exp \left(i \gamma^\mu \frac{\partial_\ell}{\partial \theta^\mu} \right) \int_0^\infty de_0 \int d\chi_0 \int_{e_0} M(e) De \int_{\chi_0} D\chi \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx \int D\pi \int D\nu \\ \times \int_{\psi(0)+\psi(1)=\theta} \mathcal{D}\psi \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - \frac{e}{2} m^2 - g \dot{x}_\mu A^\mu + i e g F_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu \right. \right. \\ \left. \left. + \chi \left(\frac{2i}{e} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \dot{x}^\mu \psi^\nu \psi^\lambda - m \right) - i \psi_\mu \dot{\psi}^\mu + \pi \dot{e} + \nu \dot{\chi} \right] d\tau + \psi_\mu(1) \psi^\mu(0) \right\} \Big|_{\theta=0}, \quad (5.97)$$

onde $x(\tau)$, $p(\tau)$, $e(\tau)$, $\pi(\tau)$ são pares e $\psi(\tau)$, $\chi_1(\tau)$, $\chi_2(\tau)$, $\nu_1(\tau)$, $\nu_2(\tau)$ são trajetórias ímpares, obedecendo às condições de contorno $x(0) = x_{in}$, $x(1) = x_{out}$, $e(0) = e_0$, $\chi(0) = \chi_0$, $\psi(0) + \psi(1) = \theta$, e as notações usadas são

$$\chi = \chi_1 \chi_2, \quad \nu \dot{\chi} = \nu_1 \dot{\chi}_1 + \nu_2 \dot{\chi}_2, \quad d\chi = d\chi_1 d\chi_2, \quad D\chi = D\chi_1 D\chi_2, \quad D\nu = D\nu_1 D\nu_2.$$

A medida $M(e)$ é definida pela equação (5.3) nas dimensões correspondentes³, e

$$\mathcal{D}\psi = D\psi \left[\int_{\psi(0)+\psi(1)=0} D\psi \exp \left\{ \int_0^1 \psi_\mu \dot{\psi}^\mu d\tau \right\} \right]^{-1}.$$

Integrando sobre as variáveis de Grassmann de modo análogo ao caso de $3 + 1$ dimensões obtemos

$$S^c(x_{out}, x_{in}) = \frac{i}{2} \int_0^\infty de_0 M(e_0) \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx \Phi[x, e_0] \exp \{ i I[x, e_0] \}, \quad (5.98)$$

onde

$$\Phi[x, e_0] = \left[\left(m + \frac{i}{e_0} \int_0^1 d\tau \epsilon_{\mu\nu\lambda} \dot{x}^\mu(\tau) \mathcal{R}^{\nu\lambda}(g|\tau, \tau) \right) \left(1 + \frac{g e_0}{4} B_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right) \right] \\ + \frac{i}{2e_0} \int_0^1 d\tau \epsilon_{\mu\nu\lambda} \dot{x}^\mu(\tau) K^\nu{}_\alpha(\tau) K^\lambda{}_\beta(\tau) \gamma^\alpha \gamma^\beta \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} \mathcal{R}(g) \star \mathcal{F} \right\} \quad (5.99)$$

é o SF e $I[x, e_0]$, $\mathcal{R}(g) \equiv \mathcal{R}(g|\tau, \tau')$, $K \equiv K(\tau)$, B , $\mathcal{F}$ são definidos por (5.17), (5.14), e (5.8) respectivamente.

³Iremos nos referir a algumas fórmulas das seções previas sem especificar que os números de dimensões é agora $2 + 1$.

Devido as relações (5.96) podemos apresentar também o SF na forma

$$\begin{aligned} \Phi[x, e_0] = & \left\{ m + \frac{i}{e_0} \dot{x} \star r(g) + \left[\left(-i \frac{g e_0}{4} m + \frac{g}{4} \dot{x} \star r(g) \right) u_\alpha \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2e_0} (\dot{x} \star T)_\alpha \right] \gamma^\alpha \right\} \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr } \mathcal{R}(g') \star \mathcal{F} \right\}, \end{aligned} \quad (5.100)$$

onde

$$r_\mu(g) \equiv r_\mu(g|\tau) = \epsilon_{\mu\nu\lambda} \mathcal{R}^{\nu\lambda}(g|\tau, \tau), \quad u^\mu = \epsilon^{\mu\alpha\beta} B_{\alpha\beta}, \quad T_\mu{}^\rho = \epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon^{\rho\alpha\beta} K^\nu{}_\alpha K^\lambda{}_\beta.$$

5.3.2 O Propagador de Dirac num Campo Uniforme Constante em 2 + 1 Dimensões

No caso de um campo uniforme constante $F_{\mu\nu} = \text{const}$, podemos calcular o propagador explicitamente integrando sobre as trajetórias bosônicas. Seguindo o mesmo caminho da seção 5.2 e levando em conta que em 2 + 1 dimensões

$$\frac{i}{2} M(e_0) \int_0^0 Dx \exp \left\{ -\frac{i}{2e_0} \dot{x} \star \dot{x} \right\} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2(2\pi e_0)^{3/2}}$$

obtemos para o propagador (5.98)

$$S^c = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2(4\pi)^{3/2}} \int_0^\infty de_0 \left(\det \frac{\sinh \frac{g e_0 F}{2}}{g F} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{iI[x_{cl}, e_0]} \Phi[x_{cl}, e_0], \quad (5.101)$$

onde x_{cl} , $\mathcal{R}(g)$, K , B é dada por (5.32), (5.19).

As matrizes anti-simétricas $F_{\mu\nu}$ podem ser classificadas pelo valor do invariante φ (veja o Apêndice A). Neste caso $\varphi^2 > 0$ podemos encontrar um referencial de Lorentz em que o campo magnético se anula. Por outro lado, $\varphi^2 < 0$ implica que o campo magnético se anula num referencial de Lorentz apropriado. Neste caso $\varphi^2 = 0$, $F \neq 0$ corresponde a campos elétricos e magnéticos de magnitude igual (e esta propriedade é invariante pela transformação de Lorentz). Consideraremos o caso $\varphi^2 \neq 0$. O caso $\varphi^2 = 0$ pode ser tratado facilmente, por exemplo fazendo o limite $\varphi \rightarrow 0$.

Apresentando $\Phi[x_{cl}, e_0]$ no caso sob consideração, podemos evitar integrações explícitas sobre τ . De fato, devido a forma específica de $\mathcal{R}(g)$ o termo que o contém em (5.99) anula-se. Por outro lado

$$\left(\frac{d}{d\tau} - g e_0 F \right) K = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - g e_0 F \right) \dot{x}_{cl} = 0$$

implica

$$\dot{x}_{cl}(\tau) = e^{ge_0 F(\tau-1)} \dot{x}_{cl}(1), \quad K(\tau) = e^{ge_0 F(\tau-1)} K(1).$$

Levando em conta que $e^{ge_0 F(\tau-1)}$ é um operador que respeita o produto escalar, podemos facilmente realizar uma segunda integração sobre τ em (5.99). Finalmente, calculando determinantes envolvidos por meio de (A.12), obtemos

$$\begin{aligned} S^c &= \sqrt{\frac{i}{16(2\pi)^3}} \int_0^\infty \frac{de_0}{\sqrt{e_0}} \frac{g\varphi}{\sinh \frac{ge_0\varphi}{2}} e^{iI[x_{cl}, e_0]} \Phi[x_{cl}, e_0], \\ \Phi[x_{cl}, e_0] &= \\ &\left[m \left(1 + \frac{ge_0}{4} B_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right) + \frac{i}{2e_0} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \dot{x}^\mu(1) K^\nu{}_\alpha K^\lambda{}_\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta \right] \cosh \frac{ge_0\varphi}{2}. \end{aligned} \quad (5.102)$$

Por outro lado podemos obter uma representação para o propagador usando o método do tempo próprio de Schwinger (não apresentamos os cálculos aqui). Esta representação tem a forma

$$\begin{aligned} S^c(x_{out}, x_{in}) &= \left[\gamma^\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x_{out}^\mu} + g A_\mu(x_{out}) \right) + m \right] \\ &\times \sqrt{\frac{i}{16(2\pi)^3}} \int_0^\infty \frac{de_0}{\sqrt{e_0}} \frac{g\varphi}{\sinh \frac{ge_0\varphi}{2}} e^{iI[x_{cl}, e_0]} e^{\frac{ge_0}{4} F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta}. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Para comparar ambas representações, realizamos a derivada em (5.103) e usamos

$$\frac{\partial}{\partial x_{out}^\mu} I[x_{cl}, e_0] = -e_0^{-1} (\dot{x}_{cl})_\mu(1) - g A_\mu(x_{out}).$$

Então obtemos

$$S^c(x_{out}, x_{in}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{4(2\pi)^{3/2}} \int_0^\infty \frac{de_0}{\sqrt{e_0}} \frac{g\varphi}{\sinh \frac{ge_0\varphi}{2}} \Psi_S(x_{out}, x_{in}, e_0) e^{iI[x_{cl}, e_0]}, \quad (5.104)$$

onde

$$\Psi_S(x_{out}, x_{in}, e_0) = \left(e_0^{-1} \gamma_\mu \dot{x}_{cl}^\mu(1) + m \right) e^{\frac{ge_0}{4} F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta}. \quad (5.105)$$

Comparando (5.102) e (5.104) usando as identidades (veja o Apêndice B)

$$\exp \left\{ \frac{ge_0}{4} F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right\} = \left(1 + \frac{ge_0}{4} B_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right) \cosh \frac{ge_0\varphi}{2}, \quad (5.106)$$

$$\gamma_\mu \exp \left\{ \frac{ge_0}{4} F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right\} = \frac{i}{2e_0} \epsilon_{\mu\nu\lambda} K^\nu{}_\alpha(1) K^\lambda{}_\beta(1) \gamma^\alpha \gamma^\beta \cosh \frac{ge_0\varphi}{2}. \quad (5.107)$$

podemos verificar que ambas as representações coincidem.

Capítulo 6

Aplicação de Integrais de Trajetória Grassmannianas ao Cálculo de Operadores

6.1 Métodos Algébricos em Cálculo de Operadores

Como regra, as expressões de operadores são funções de alguns argumentos não comutativos. As regras de manipulação deles são complicadas. Abaixo iremos considerar algumas delas.

1) Seja uma função $f(\hat{a} + \hat{b})$ sobre a soma de dois operadores não comutativos $\hat{a}$ e $\hat{b}$ dados. Tal função é um objeto mais complicado que a função de duas variáveis. Nos cálculos com estas funções, as regras ordinárias tornam-se inválidas. Por exemplo

$$\begin{aligned}(\hat{a} + \hat{b})^2 &\neq \hat{a}^2 + 2\hat{a}\hat{b} + \hat{b}^2, \\ \exp(\hat{a} + \hat{b}) &\neq \exp(\hat{a}) \exp(\hat{b}) \neq \exp(\hat{b}) \exp(\hat{a}).\end{aligned}$$

As diferenças entre os lados direito e esquerdo destas expressões são funções dos comutadores $\hat{a}$ e $\hat{b}$. O objetivo do cálculo de operadores é uma reformulação das regras convencionais para encontrar as dependências correspondentes dos comutadores. Para esta finalidade usaremos o método que foi primeiramente proposto por Bloch [72] e desenvolvido depois em [73].

Para uma grande classe de funções $f(\hat{a} + \hat{b})$ é possível decompô-las em integrais

de Fourier (ou Laplace)

$$f(\hat{a} + \hat{b}) = \int d\tau \tilde{f}(\tau) \exp[\tau(\hat{a} + \hat{b})] , \quad (6.1)$$

onde τ é um parâmetro real ou complexo. Isto nos permite restringir por consideração da função exponencial somente

$$\hat{E}(\tau) = \exp[\tau(\hat{a} + \hat{b})] . \quad (6.2)$$

Se os operadores $\hat{a}$ e $\hat{b}$ comutam, então simplesmente

$$\hat{E}(\tau) = \exp \tau(\hat{a}) \exp \tau(\hat{b}) = \exp \tau(\hat{b}) \exp \tau(\hat{a}) .$$

Num caso geral isto não é verdadeiro, mas podemos levar em conta a sua anticomutatividade modificando a fórmula prévia da seguinte maneira

$$\hat{E}(\tau) = \exp(\tau\hat{b}) \hat{K}(\tau) \exp(\tau\hat{a}) . \quad (6.3)$$

Podemos selecionar qualquer ordem para os três operadores $\exp(\tau\hat{b})$, $\hat{K}$, e $\exp(\tau\hat{a})$ na expressão (6.3). Certamente a forma do operador $\hat{K}$ depende desta ordem. Vamos discutir como podemos encontrar o operador $\hat{K}$. Um caminho é escrever uma equação para ele. Diferenciando a equação (6.3) com respeito a τ , temos

$$\begin{aligned} (\hat{a} + \hat{b}) \exp(\tau\hat{b}) \hat{K} \exp(\tau\hat{a}) &= \hat{b} \exp(\tau\hat{b}) \hat{K} \exp(\tau\hat{a}) \\ &+ \exp(\tau\hat{b}) \frac{\partial \hat{K}}{\partial \tau} \exp(\tau\hat{a}) + \exp(\tau\hat{b}) \hat{K} \hat{a} \exp(\tau\hat{a}) , \end{aligned}$$

ou

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial \tau} = \exp(-\tau\hat{b}) \hat{a} \exp(\tau\hat{b}) \hat{K} - \hat{K} \hat{a} . \quad (6.4)$$

A combinação

$$\exp(-\tau\hat{b}) \hat{a} \exp(\tau\hat{b}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^n}{n!} \underbrace{[\hat{b}, [\hat{b}, \dots [\hat{b}, \hat{a}] \dots]]}_n \quad (6.5)$$

é expressa através dos comutadores de $\hat{a}$ e $\hat{b}$. Esta fórmula pode ser demonstrada pela decomposição do lado esquerdo (6.5) na série sobre τ . A equação (6.4) para $\hat{K}(\tau)$ tem a condição inicial

$$\hat{K}(0) = 1 , \quad (6.6)$$

que segue da definição (6.3).

Em alguns casos o lado direito de (6.4) pode ser simplificado tal que no lugar de uma série infinita obtemos uma expressão finita de operadores. Então a equação (6.4) pode ter soluções simples. Em seguida consideraremos vários exemplos importantes.

a) Seja o comutador $[\hat{a}, \hat{b}] = c$, onde c é um c -number. Neste caso existe um único comutador não nulo no lado direito de (6.5)

$$\exp(-\tau\hat{b})\hat{a}\exp(\tau\hat{b}) = \hat{a} - \tau[\hat{b}, \hat{a}] . \quad (6.7)$$

Portanto, a equação (6.4) se reduz a

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial \tau} = -\tau[\hat{b}, \hat{a}]\hat{K} + [\hat{a}, \hat{K}] . \quad (6.8)$$

A solução da equação de operadores (6.8), que obedece à condição (6.6), tem a forma

$$\hat{K}(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2} [\hat{b}, \hat{a}] \right\} . \quad (6.9)$$

Devido ao teorema de unicidade das soluções da equação do tipo (6.8), que é justamente a solução que estamos procurando. Então, temos o caso a fórmula bem conhecida [74]

$$\hat{E}(\tau) = \exp(\tau\hat{b}) \exp(\tau\hat{a}) \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2} [\hat{b}, \hat{a}] \right\} . \quad (6.10)$$

Esta fórmula é frequentemente chamada de Baker-Hausdorf ou de Glauber. b) Sejam os comutadores $[\hat{b}, [\hat{b}, \hat{a}]]$ e $[[\hat{b}, \hat{a}], \hat{a}]$ c -numbers. Então podemos verificar que a equação (6.4) tem uma solução

$$\hat{K}(\tau) = \exp \left\{ -\frac{\tau^2}{2} [\hat{b}, \hat{a}] \right\} \exp \left\{ \frac{\tau^3}{6} ([\hat{b}, [\hat{b}, \hat{a}]] + [[\hat{b}, \hat{a}], \hat{a}]) \right\} . \quad (6.11)$$

c) Sejam os comutadores $[\hat{b}, [\hat{b}, \dots [\hat{b}, \hat{a}] \dots]]$ diferentes de zero. Isto é, eles comutam entre si e com $\hat{a}$. Neste caso existe uma solução para $\hat{K}$, que comuta com $\hat{a}$. Para este $\hat{K}$ a equação (6.4) pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial \tau} = [\exp(-\tau\hat{b})\hat{a}\exp(\tau\hat{b}) - \hat{a}] \hat{K} .$$

Sua solução tem a forma

$$\hat{K}(\tau) = \exp(-\tau\hat{a}) \exp \left\{ \int_0^\tau dt \exp(-t\hat{b})\hat{a} \exp(t\hat{b}) \right\} . \quad (6.12)$$

Por exemplo, podemos aplicar o resultado acima no operador

$$\exp \{ \tau [\partial_x + F(x)] \} , \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x} .$$

Seja $\hat{a} = F(x)$ e $\hat{b} = \partial_x$. Então $[\hat{b}, \hat{a}] = F'(x)$, $[\hat{b}, [\hat{b}, \hat{a}]] = F''(x)$, e assim por diante. Todos $F^{(n)}(x)$ comutam entre si e com $F(x)$, que é $\hat{a}$. Usando o resultado obtido, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \exp \{ \tau [\partial_x + F(x)] \} \\ &= \exp(\tau\partial_x) \exp \left\{ \int_0^\tau dt \exp(-t\partial_x) F(x) \exp(t\partial_x) \right\} . \end{aligned} \quad (6.13)$$

Considerando a expressão

$$\begin{aligned} & \exp \{ \alpha \partial_x \} M(x) \exp \{ -\alpha \partial_x \} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \underbrace{[\partial_x, [\partial_x, \dots [\partial_x, M] \dots]]}_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} M^{(n)}(x) . \end{aligned}$$

Então temos uma fórmula útil

$$\exp \{ \alpha \partial_x \} M(x) \exp \{ -\alpha \partial_x \} = M(x + \alpha) . \quad (6.14)$$

Em particular, atuando na unidade em ambos lados de (6.14), temos

$$\exp \{ \alpha \partial_x \} M(x) = M(x + \alpha) . \quad (6.15)$$

O operador $\exp \{ \alpha \partial_x \}$ é chamado operador de deslocamento.

Por meio da equação (6.15), podemos encontrar a ação do operador $\exp \{ \alpha x \partial_x \}$ na função $M(x)$. Para esta finalidade lembramos que

$$x \partial_x = \frac{\partial}{\partial(\ln x)} .$$

Então

$$\exp \{ \alpha x \partial_x \} M(x) = \exp \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial(\ln x)} \right\} M(\exp[\ln x]) .$$

Aplicando a fórmula (6.15), podemos ver que o operador $\exp \{ \alpha x \partial_x \}$ faz o papel de operador de variação de escala

$$\exp \{ \alpha x \partial_x \} M(x) = M(x \exp \alpha) . \quad (6.16)$$

Agora podemos usar a fórmula (6.14) na equação (6.13) para obter

$$\begin{aligned} \exp \{ \tau [\partial_x + F(x)] \} &= \exp(\tau \partial_x) \exp \left\{ \int_0^\tau dt F(x-t) \right\} \\ &\exp \left\{ \int_0^\tau dt F(x+\tau-t) \right\} \exp(\tau \partial_x) . \end{aligned}$$

Fazendo uma substituição de variável na integral sobre t , chegamos a fórmula final

$$\exp \{ \tau [\partial_x + F(x)] \} = \exp \left\{ \int_x^{x+\tau} dy F(y) \right\} \exp(\tau \partial_x) . \quad (6.17)$$

d) Um caso particular corresponde as relações de comutação

$$[\hat{b}, \hat{a}] = \lambda \hat{a} .$$

Neste caso

$$\hat{E}(\tau) = \exp(\tau \hat{b}) \exp \left\{ \frac{1 - \exp(-\tau \lambda)}{\lambda} \hat{a} \right\} . \quad (6.18)$$

e) Mais complicado é o caso quando somente os comutadores $[\hat{a}, [\hat{a}, \dots, [\hat{a}, \hat{b}] \dots]]$ são diferentes de zero e comutam entre si. A equação para $\hat{K}$ fica com a forma

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial \tau} = [\hat{a}, \hat{K}] + \tau [\hat{a}, \hat{b}] \hat{K} .$$

podemos reduzi-la a uma equação para $\hat{L}$, conectada com $\hat{K}$ pela relação

$$\hat{K} = \exp(\tau \hat{a}) \hat{L} \exp(-\tau \hat{a}) ,$$

e resolvida com respeito a $\hat{L}$,

$$\hat{L} = \exp \left\{ \int_0^\tau t \exp(-t \hat{a}) [\hat{a}, \hat{b}] \exp(t \hat{a}) dt \right\} .$$

Em particular, se $[\hat{a}, \hat{b}] = \lambda \hat{b}$, então

$$\hat{L} = \exp \left\{ \frac{1 - \exp(-\lambda \tau)(1 + \lambda \tau)}{\lambda} \hat{b} \right\} .$$

neste último caso

$$\exp(\tau \hat{a}) f(\hat{b}) \exp(-\tau \hat{a}) = f(\hat{b} \exp(\lambda \tau)) ,$$

e

$$\hat{E}(\tau) = \exp \left\{ \frac{\exp(\lambda \tau) - 1}{\lambda} \hat{b} \right\} \exp(\tau \hat{a}) . \quad (6.19)$$

f) Mesmo que todos os comutadores sejam diferentes de zero, há casos que admitem soluções simples. Por exemplo, consideremos um caso onde estes comutadores formam uma álgebra de operadores com elementos geradores finitos. Neste caso podemos tentar encontrar todos os operadores envolvidos em termos de elementos geradores e o problema é reduzido ao de encontrar um número finito de coeficientes correspondentes de uma decomposição nos elementos geradores. Por enquanto, suponhamos ser válidas as seguintes relações

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{c}, \quad [\hat{a}, \hat{c}] = -\lambda \hat{a}, \quad [\hat{b}, \hat{c}] = \lambda \hat{b} . \quad (6.20)$$

Aqui $\hat{a}, \hat{b}$ e seus comutadores $\hat{c}$ são elementos geradores da álgebra. As relações de comutação (6.20) podem ser casadas com a identidade de Jacobi (6.20)

$$[[\hat{a}, \hat{b}], \hat{c}] + [[\hat{b}, \hat{c}], \hat{a}] + [[\hat{c}, \hat{a}], \hat{b}] = 0 .$$

Então vamos buscar uma solução para $\hat{E}(\tau)$ na forma seguinte

$$\hat{E}(\tau) = \exp[\alpha(\tau) \hat{b}] \exp[\beta(\tau) \hat{c}] \exp[\gamma(\tau) \hat{a}] , \quad (6.21)$$

onde $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, $\gamma(\tau)$ são funções desconhecidas τ . Diferenciando esta expressão com relação a τ , obtemos

$$\begin{aligned} \hat{a} + \hat{b} &= \alpha' \hat{b} + \beta' \exp(\alpha \hat{b}) \hat{c} \exp(-\alpha \hat{b}) + \\ &\gamma' \exp(\alpha \hat{b}) \exp(\beta \hat{c}) \hat{a} \exp(-\beta \hat{c}) \exp(-\alpha \hat{b}) . \end{aligned}$$

Usando a fórmula (6.5), As relações de comutação (6.20), e comparando os coeficientes em $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ em ambos os lados da equação, encontramos

$$\gamma' = \exp(-\lambda \beta), \quad \beta' = \alpha, \quad \alpha' = 1 - \lambda \alpha^2 / 2 .$$

Uma solução destas equações com condições iniciais

$$\alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0 ,$$

tem a forma

$$\alpha = \gamma = \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \tanh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \tau \right) , \quad \beta = \frac{2}{\lambda} \ln \cosh \left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}} \tau \right) . \quad (6.22)$$

As expressões (6.22) dão uma solução do problema em questão. g) Se um dos argumentos da função $\hat{E}(\tau)$ é num sentido “menor” do que o outro, então temos um problema similar ao da teoria de perturbação, isto é, como decompor uma função $f(\hat{a} + \hat{b})$ numa série sobre um dos argumentos $\hat{a}$ ou $\hat{b}$. A fórmula final vai diferenciar da decomposição por termos, que dependem dos comutadores.

Considere, por enquanto, a decomposição em $\hat{b}$. Escrevendo $\hat{E}$ na forma

$$\hat{E}(\tau) = \exp(\tau \hat{a}) \hat{S}(\tau) , \quad \hat{S}(0) = 1 , \quad (6.23)$$

e diferenciando esta relação com respeito a τ , obtemos uma equação para o operador $\hat{S}$

$$\frac{\partial \hat{S}}{\partial \tau} = \check{b}(\tau) \hat{S} , \quad \check{b} = \exp(-\tau \hat{a}) \hat{b} \exp(\tau \hat{a}) . \quad (6.24)$$

Uma solução desta equação pode ser escrita na forma seguinte

$$\hat{S}(\tau) = T \exp \left\{ \int_0^\tau \check{b}(\tau') d\tau' \right\} , \quad (6.25)$$

que dá, de fato, uma série perturbativa em potências do operador $\hat{b}$. Em primeira ordem com respeito a $\hat{b}$ obtemos

$$\hat{E}(\tau) = \exp(\tau \hat{a}) \left\{ 1 + \tau \hat{b} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau^{n+1}}{(n+1)!} \underbrace{[\hat{a}, [\hat{a}, \dots [\hat{a}, \hat{b}] \dots]]}_n + \dots \right\} . \quad (6.26)$$

2) Seja um operador $\hat{A}$, que depende de um parâmetro λ . Qual será o resultado da diferenciação da expressão $\exp(\hat{A})$ com respeito a λ ? Se a derivada $d\hat{A}/d\lambda$ não comuta com $\hat{A}$ no caso geral, as regras usuais de diferenciação não são mais válidas

$$\frac{d}{d\lambda} [\exp(\hat{A})] \neq [\exp(\hat{A})] \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \neq \frac{d\hat{A}}{d\lambda} [\exp(\hat{A})] .$$

Para obter um resultado para a derivada mencionada acima podemos usar o método de decomposição de operadores [75]. De acordo com este método vamos fixar um índice s ao operador $\hat{A}$. Deste modo, agora o operador $\hat{A}$ é uma função de λ e s , mas realmente depende somente de λ . Então podemos escrever

$$\exp(\hat{A}) = T_s \exp \left(\int_0^1 \hat{A} ds \right) , \quad (6.27)$$

onde T_s é um operador de ordenamento no parâmetro s . Agora todos os operadores podem ser considerados como variáveis ordinárias sob atuação do produto T_s . Logo podemos diferenciar (6.27) com respeito a λ para obter

$$\frac{d}{d\lambda} [\exp(\hat{A})] = T_s \left[\int_0^1 \frac{d\hat{A}}{d\lambda} ds \exp \left(\int_0^1 \hat{A} ds' \right) \right] . \quad (6.28)$$

Atuando por meio do operador T_s no lado direito de (6.28), e finalmente lembrando que, de fato, $\hat{A}$ não depende de s , podemos escrever

$$\begin{aligned} T_s \left[\int_0^1 \frac{d\hat{A}}{d\lambda} ds \exp \left(\int_0^1 \hat{A} ds' \right) \right] &= \int_0^1 \exp \left(\int_s^1 \hat{A} ds' \right) \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \exp \left(\int_0^s \hat{A} ds' \right) ds \\ &= \int_0^1 \exp \left[(1-s)\hat{A} \right] \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \exp(s\hat{A}) ds = \int_0^1 \exp(s\hat{A}) \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \exp[(1-s)\hat{A}] ds . \end{aligned}$$

Desta forma, o resultado final tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} [\exp(\hat{A})] &= \hat{K}_+ \exp(\hat{A}) = \exp(\hat{A}) \hat{K}_- , \\ \hat{K}_\pm &= \int_0^1 \exp(\pm s\hat{A}) \frac{d\hat{A}}{d\lambda} \exp(\mp s\hat{A}) ds . \end{aligned} \quad (6.29)$$

3) Para a função inversa $(\hat{A} + \hat{B})^{-1}$ podemos usar uma fórmula simples

$$(\hat{A} + \hat{B})^{-1} = (1 + \hat{A}^{-1}\hat{B})^{-1} \hat{A}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\hat{A}^{-1}\hat{B})^n \hat{A}^{-1} . \quad (6.30)$$

6.2 Aplicação de Integrais de Trajetória para o Cálculo de Funções da Álgebra de Clifford

Como dissemos na introdução, as integrais de trajetória são amplamente e frutiferamente aplicadas na física teórica contemporânea. As integrais sobre as variáveis de

Grassmann introduzidas por Berezin [36, 39, 40] tornaram possível definir as integrais de trajetórias correspondentes sobre as trajetórias ímpares de Grassmann (veja o Capítulo 3). Isto amplia ainda mais o campo de aplicação das integrais de trajetória (veja os Capítulos 4 e 5). Na seção presente gostaríamos de salientar a possibilidade de como podemos usar integrais de trajetória sobre trajetórias ímpares de Grassmann para desembaraçar funções complexas de operadores que não comutam [76, 77] (algumas regras de como lidar com tais funções são consideradas na seção prévia). Isto é, consideraremos funções de operadores da forma

$$R_k = \gamma^{\alpha_1} \cdots \gamma^{\alpha_k} \exp\{\omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu\}, \quad k < D, \quad (6.31)$$

onde ω é uma matriz anti-simétrica $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ e γ são matrizes de Dirac expandidas para D dimensões. Estas matrizes obedecem a uma álgebra de Clifford. O anticomutador destas matrizes é proporcional ao tensor métrico de Minkowski. Isto é

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (6.32)$$

Neste trabalho, consideraremos o caso inicial em que $k = 0$, portanto temos a expressão

$$R_0 = \exp\{\omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu\}. \quad (6.33)$$

Esta expressão pode ser escrita usando o operador de ordenamento T

$$R_0 = T \exp \left\{ \int_0^1 \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu(t) \gamma^\nu(t) dt \right\} \quad (6.34)$$

e este operador de ordenamento pode ser escrito pela expressão

$$\begin{aligned} T a^{\mu_1}(t_1) \cdots a^{\mu_n}(t_n) &= \sum_P \theta(t_{P(1)}, \dots, t_{P(n)}) a^{\mu_{P(1)}} \cdots a^{\mu_{P(n)}}, \\ T a^\mu &= a^\mu, \quad \theta(t_1, \dots, t_n) = \theta(t_1 - t_2) \cdots \theta(t_{n-1} - t_n), \end{aligned} \quad (6.35)$$

no caso “bosônico” e para o caso “fermiônico” podemos usar as matrizes γ . Como seus índices são diferentes temos que

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 0 \quad \mu \neq \nu, \quad (6.36)$$

logo obedecem a uma álgebra de Grassmann. Nesta álgebra temos portanto $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$, logo cada vez que invertermos um termo temos uma troca de sinal. Se tivermos o produto de n termos de matrizes γ : $\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}$ e permutarmos com uma permutação $\gamma^{\mu_{P(1)}} \dots \gamma^{\mu_{P(n)}}$, teremos que acrescentar um sinal que poderá ser positivo se a permutação for par ou negativo se a permutação for ímpar. Simbolizaremos este sinal por $(-)^{\text{sgn}(P)}$ onde $\text{sgn}(P)$ indica a paridade da permutação P . Assim, podemos modificar a fórmula do produto T de maneira eficiente acrescentando somente os termos $(-)^{\text{sgn}(P)}$ para o caso das matrizes γ . Portanto ficamos com a seguinte expressão

$$\begin{aligned} T\gamma^{\mu_1}(t_1) \dots \gamma^{\mu_n}(t_n) &= \sum_P (-)^{\text{sgn}(P)} \theta(t_{P(1)}, \dots, t_{P(n)}) \gamma^{\mu_{P(1)}} \dots \gamma^{\mu_{P(n)}}, \\ T\gamma^\mu &= \gamma^\mu, \quad \theta(t_1, \dots, t_n) = \theta(t_1 - t_2) \dots \theta(t_{n-1} - t_n), \end{aligned} \quad (6.37)$$

Os produtos T tem uma aplicação bastante significativa em física e foram introduzidos por Dyson em aplicações das matrizes de Espalhamento S . O ponto crucial deste trabalho é aplicação de uma forma especial do teorema de Wick [78]. Temos exemplos de aplicação do produto de Wick relacionando o produto T e o produto de ordenamento normal. No nosso caso no entanto trabalharemos com o teorema de Wick usando o produto T e o produto Sym (simétrico).

Consideraremos o caso para as matrizes γ que é um caso fermiônico, portanto o produto Sym é definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{Sym}\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n} &= \frac{1}{n!} \sum_P (-)^{\text{sgn}(P)} \gamma^{\mu_{P(1)}} \dots \gamma^{\mu_{P(n)}}, \\ \text{Sym}\gamma^\mu &= \gamma^\mu. \end{aligned} \quad (6.38)$$

O produto $\text{Sym}\gamma^0 \dots \gamma^{D-1}$ para o caso de D ímpar é idêntico ao operador unitário, devido as relações de anticomutação.

O produto $\text{Sym}\gamma^0 \dots \gamma^{D-1}$ para o caso de D par é definido como γ^D e distinto do operador unitário. Portanto chegamos a uma propriedade importante em qualquer dimensão D .

O operador identidade 1 e as matrizes

$$\text{Sym}\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_k}, \quad \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k \quad k = 1, 2, \dots, 2 \left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor, \quad (6.39)$$

formam uma álgebra associativa gerada por $\gamma^0, \dots, \gamma^{D-1}$.

Usamos na fórmula acima a seguinte notação: $[D/2] = D/2$ para D par e $[D/2] = (D-1)/2$ para D ímpar.

Usando o procedimento de Hori [79] podemos compactar em termos de notação o teorema de Wick que relaciona o produto T e o produto Sym [22]. Antes disso, vamos apresentar uma fórmula

$$T\gamma^{\mu_1}(t_1)\gamma^{\mu_2}(t_2) = \text{Sym}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} + \Delta^{\mu_1\mu_2}(t_1, t_2), \quad (6.40)$$

onde o termo $\Delta^{\mu_1\mu_2}(t_1, t_2)$ é o termo de contração do teorema de Wick.

Obtemos facilmente a expressão para $\Delta^{\mu_1\mu_2}(t_1, t_2)$ usando a definição de T

$$T\gamma^{\mu_1}(t_1)\gamma^{\mu_2}(t_2) = \theta(t_1 - t_2)\gamma^{\mu_1}(t_1)\gamma^{\mu_2}(t_2) - \theta(t_2 - t_1)\gamma^{\mu_2}(t_2)\gamma^{\mu_1}(t_1) \quad (6.41)$$

e para o produto Sym temos

$$\text{Sym}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} = \frac{1}{2}\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} - \frac{1}{2}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}, \quad (6.42)$$

fazendo a diferença destes dois termos obtemos

$$\Delta^{\mu_1\mu_2}(t_1, t_2) = \left(\theta(t_1 - t_2) - \frac{1}{2}\right)\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} - \left(\theta(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\right)\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}. \quad (6.43)$$

mas

$$\theta(t_2 - t_1) = -\theta(t_1 - t_2), \quad (6.44)$$

logo

$$\Delta^{\mu_1\mu_2} = \left(\theta(t_1 - t_2) - \frac{1}{2}\right)[\gamma^{\mu_1}, \gamma^{\mu_2}]_+ \quad (6.45)$$

mas podemos definir a função

$$\epsilon(t_1 - t_2) = 2\theta(t_1 - t_2) - 1 \quad (6.46)$$

e

$$[\gamma^{\mu_1}, \gamma^{\mu_2}]_+ = 2\eta^{\mu_1\mu_2}, \quad (6.47)$$

logo obtemos que

$$\Delta^{\mu_1\mu_2}(t_1, t_2) = \eta^{\mu_1\mu_2}\epsilon(t_1 - t_2). \quad (6.48)$$

Vamos agora definir uma classe de funcionais que depende do parâmetro n onde $n \geq 1$

$$f_n[\zeta] = \int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_n f_{\mu_1 \dots \mu_n}(t_1, \dots, t_n) \zeta_1^{\mu_1}(t_1) \cdots \zeta_n^{\mu_n}(t_n). \quad (6.49)$$

Vamos definir um novo funcional $F[\zeta] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n[\zeta]$ Seja o operador

$$\Omega = -\frac{1}{2} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \frac{\delta_l}{\delta \zeta^{\mu}(t_1)} \Delta^{\mu\nu}(t_1, t_2) \frac{\delta_l}{\delta \zeta^{\nu}(t_2)}, \quad (6.50)$$

onde $\frac{\delta_l}{\delta \zeta}$ são derivadas de Grassmann a esquerda. Queremos justificar que o teorema de Wick pode ser expresso por

$$TF[\gamma] = \text{Sym} \left[e^{\Omega} F[\zeta] |_{\zeta(t)=\gamma} \right], \quad (6.51)$$

seguiremos o artigo de Hori e inicialmente escreveremos o termo que possua uma contração

$$\text{Sym} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \Omega f_n[\zeta] |_{\zeta(t)=\gamma} \right]. \quad (6.52)$$

Escreveremos agora o termo que possua duas contrações

$$\text{Sym} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Omega^2}{2!} f_n[\zeta] |_{\zeta(t)=\gamma} \right]. \quad (6.53)$$

o fator $\frac{1}{2!}$ é necessário, porque temos mesmos termos com duas contrações de duas maneiras e finalmente o caso de r contrações tem a forma

$$\text{Sym} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Omega^r}{r!} f_n[\zeta] |_{\zeta(t)=\gamma} \right]. \quad (6.54)$$

Finalmente colecionando todos os casos temos

$$\text{Sym} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{\Omega^r}{r!} f_n[\zeta] |_{\zeta(t)=\gamma} \right]. \quad (6.55)$$

podemos impor que o limite $[\frac{n}{2}]$ vá para infinito então temos

$$\text{Sym} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{\Omega} f_n[\zeta] |_{\zeta(t)=\gamma} \right]. \quad (6.56)$$

então, temos o lado direito da expressão (6.51)

$$\text{Sym} \left[e^{\Omega} F[\zeta] |_{\zeta(t)=\gamma} \right]. \quad (6.57)$$

A aplicação de integrais Gaussianas no campo de integrais de trajetória é muito grande. Vamos exemplificar alguns casos de integrais Gaussianas. A integral Gaussiana mais simples é dada pela expressão

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (6.58)$$

Se introduzirmos um termo βx temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2 + \beta x} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left(\frac{\beta^2}{4\alpha} \right), \quad (6.59)$$

num caso n dimensional.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots dx_n \exp [-x K x + j x] = \frac{\pi^{n/2}}{\det K^{-1/2}} \exp \left(\frac{1}{4} j K^{-1} j \right). \quad (6.60)$$

Como já foi citado no Capítulo 2 da tese podemos fazer um estudo das integrais de trajetórias Gaussianas numa álgebra de Grassmann [47, 26, 27]. Escrevendo em analogia as fórmulas básicas citadas acima. Temos a integral de trajetória Gaussiana

$$\begin{aligned} I(K, \rho, E) &= \int_E D\xi \exp \left\{ \frac{1}{4} \xi^\mu \star K_{\mu\nu} \star \xi^\nu + \rho_\mu \star \xi^\mu \right\} \\ &= \Lambda \text{Det} K^{1/2} \exp \rho_\mu \star G^{\mu\nu} \star \rho_\nu, \end{aligned} \quad (6.61)$$

em que $\xi^\mu(t)$ são trajetórias de Grassmann ímpares de integração. $\rho(t)$ são fontes de Grassmann ímpares e K é uma matriz anti-simétrica de Grassmann. $K_{\mu\nu}$ é um núcleo e $K_{\mu\nu}(t, t') = -K_{\nu\mu}(t', t)$. $G^{\mu\nu}(t, t')$ é o núcleo inverso de $K_{\mu\nu}(t, t')$. Estamos lidando neste caso com variáveis de Grassmann e por isso aparece o expoente $\frac{1}{2}$ do determinante de K na fórmula (6.61) positivo e não negativo como seriam para variáveis ordinárias. Devemos também dizer que a integral de trajetória Gaussiana apresenta propriedades que já foram citadas nos Capítulo 2 da tese. No entanto, vamos rever algumas destas propriedades. Antes de falar em integrais de trajetórias quase Gaussianas, lembremos que $G^{\mu\nu}(t, t')$ é dado pela fórmula

$$\int_0^1 dt' K_{\mu\nu}(t, t') G^{\mu\lambda}(t', t'') = \delta_\mu^\lambda \delta(t - t''), \quad (6.62)$$

que significa que $G^{\mu\lambda}$ é inversa de $K_{\mu\nu}(t, t')$ no sentido funcional. $G^{\mu\lambda}$ é uma função de Green. Notamos que Λ é um fator numérico não relevante, pois faremos o quociente entre duas integrais de trajetória. A determinação da função de Green $G(t, t')$ implica em usarmos condição de contorno. No caso em que o núcleo K não é degenerado em E , isto é, a equação homogênea

$$\int_0^1 dt' K_{\mu\nu}(t, t') \xi^\nu(t') = 0, \quad (6.63)$$

não possui solução não trivial em E então a equação

$$\int_0^1 dt' K_{\nu\mu}(t, t') G^{\nu\lambda}(t', t'') = \delta_\nu^\lambda \delta(t - t'') \quad (6.64)$$

possui uma única solução. Podemos entender o espaço E como espaço das funções em que

$$\xi^\mu(t) = \int_0^1 dt' K_{\mu\nu}(t, t') \rho^\nu(t'), \quad (6.65)$$

onde ρ pertence aos espaços das fontes [22]. A integral de trajetória quase Gaussiana pode ser descrita pela seguinte fórmula

$$\int_E D\xi \exp \left\{ \frac{1}{4} \xi^\mu \star K_{\mu\nu} \star \xi^\nu + \rho_\mu \star \xi^\mu \right\} F[\xi] = F \left[\frac{\delta_l}{\delta \rho} \right] I(K, \rho, E), \quad (6.66)$$

onde $F[\xi]$ funcionais analíticos arbitrários em E e $\frac{\delta_l}{\delta \rho}$ é a derivada a esquerda para uma álgebra de Grassmann. As matrizes $K_{\mu\nu}(t, t')$ possuem índices discretos e contínuos. Para evitar o cálculo destes determinantes como também cancelar o fator numérico Λ , devemos fazer o quociente da expressão (6.61) e obteremos a seguinte fórmula

$$\frac{I(K, \rho, E)}{I(K_0, 0, E)} = \text{Det}(K/K_0)^{1/2} \exp\{\rho_\mu \star G^{\mu\nu} \star \rho_\nu\}. \quad (6.67)$$

Usaremos duas propriedades que serão demonstradas a seguir. A Primeira propriedade de uma integral Gaussiana pode ser escrita como uma integral quase Gaussiana. Seja a fórmula

$$I(K, \rho, E) = \exp \left\{ \frac{1}{4} \frac{\delta_l}{\delta \rho_\mu} \star (K - K_0)_{\mu\nu} \star \frac{\delta_l}{\delta \rho_\nu} \right\} I(K_0, \rho, E). \quad (6.68)$$

Esta expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned} I(K, \rho, E) &= F \left[\frac{\delta_l}{\delta \rho} \right] I(K_0, \rho, E) \\ &= I(K_0, \rho, E) F[\xi]. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Esta expressão pode ser expandida para seguinte expressão

$$\int_E D\xi \exp \left\{ \frac{1}{4} \xi^\nu \star (K_0)_{\mu\nu} \star \xi^\nu + \rho_\mu \star \xi^\mu \right\} \exp \left\{ \frac{1}{4} \xi^\mu \star (K - K_0)_{\mu\nu} \star \xi^\nu \right\}, \quad (6.70)$$

simplificando a expressão acima temos

$$\int_E D\xi \exp \left\{ \frac{1}{4} \xi^\nu \star K_{\mu\nu} \star \xi^\nu + \rho_\mu \star \xi^\mu \right\}, \quad (6.71)$$

obtemos a expressão inicial para $I(K, \rho, E)$. Notamos que usando esta fórmula relacionamos integrais Gaussianas e quase Gaussianas, podemos concluir que existe uma correspondência entre elas. A segunda propriedade indica que a integral quase Gaussiana é invariante por translações. Seja a fórmula

$$\begin{aligned} \int_E D\xi \exp \left\{ \frac{1}{4} (\xi + \zeta)^\mu \star K_{\mu\nu} \star (\xi + \zeta)^\nu \right\} F[\xi + \zeta] = \\ \int_E D\xi \exp \left\{ \frac{1}{4} \xi^\nu \star K_{\nu\mu} \star \xi^\nu \right\} F[\xi], \end{aligned} \quad (6.72)$$

onde ζ^ν é uma trajetória arbitrária de E . Introduzimos estas duas propriedades e agora seguiremos com a aplicação do teorema de Wick, mas antes vamos introduzir uma propriedade de integrais gaussianas.

$$\exp\{\rho_\mu \star G^{\mu\nu} \star \rho_\nu\} = \frac{I(K, \rho, E)}{I(K, 0, E)}, \quad (6.73)$$

com esta propriedade aplicaremos o teorema de Wick. Escolhendo um valor adequado para $G^{\mu\nu}(t, t')$

$$G^{\mu\nu}(t, t') = -\frac{1}{2} \Delta^{\mu\nu}(t, t') = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \epsilon(t - t'). \quad (6.74)$$

Podemos verificar facilmente que o núcleo $(K_0)_{\mu\nu}(t, t')$ é dado por

$$(K_0)_{\mu\nu}(t, t') = -\eta_{\mu\nu} \delta'(t - t'), \quad (6.75)$$

usando a propriedade de $\delta'(x)f(x) = -\delta(x)f'(x)$ e aplicando a fórmula

$$\int_0^1 dt' (K_0)_{\mu\nu}(t, t') G^{\nu\lambda}(t', t'') = \delta_\mu^\lambda \delta(t - t''), \quad (6.76)$$

podemos usar a seguinte relação

$$\frac{d}{dt} \delta(t - t') f(t') = \frac{d}{dt'} f(t') \delta(t - t'), \quad (6.77)$$

portanto obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dt' \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\lambda}(-) \delta(t - t') \frac{d}{dt'} \left[\frac{1}{2} - \theta(t' - t'') \right] \\ &= \int_0^1 dt' \delta_\mu^\lambda \delta(t - t') \delta(t' - t'') = \delta_\mu^\lambda \delta(t - t''). \end{aligned} \quad (6.78)$$

O espaço E é determinado pelas condições de contorno satisfeitas por $\Delta^{\mu\nu}(t, t')$

$$\Delta(0, t) + \Delta(1, t) = \eta^{\mu\nu} \epsilon(0 - t) + \eta^{\mu\nu} \epsilon(1 - t), \quad (6.79)$$

mas $0 < t < 1$ portanto $\epsilon(0 - t) = -1$ e $\epsilon(1 - t) = 1$ logo $\Delta(0, t) + \Delta(1, t) = 0$. De acordo com a definição dada E em (6.73) no espaço das trajetórias de Grassmann ímpares $\xi^\mu(t)$ obedece às condições antiperiódica de contorno $\xi(0) + \xi(1) = 0$.

No lado esquerdo da equação (6.73) temos os termos $-\frac{1}{4}\xi \star \dot{\xi}$ e $\rho_\mu \star \xi^\mu$ que comutam entre si e estão dentro da exponencial, portanto, esta exponencial pode ser escrita como um produto de exponenciais com os termos mencionados acima. A partir disto podemos fazer a seguinte substituição na expressão resultante: substituímos as fontes ímpares $\rho_\mu(t)$ pelas derivadas a esquerda e aplicamos o operador ao funcional $F[\zeta]$ e consequentemente obtemos

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\delta_l}{\delta \zeta^\mu} \star \Delta^{\mu\nu} \star \frac{\delta_l}{\delta \zeta^\nu} \right\} F[\zeta] \\ &= \int_{\xi(0)+\xi(1)=0} \mathcal{D}\xi \exp \left\{ -\frac{1}{4} \xi \star \dot{\xi} \right\} e^{\xi \star \frac{\delta_r}{\delta \zeta}} F[\zeta], \end{aligned}$$

usando a relação

$$e^{\xi \star \frac{\delta_r}{\delta \zeta}} F[\zeta] = F[\zeta + \xi],$$

portanto obtemos

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\delta_l}{\delta \zeta^\mu} \star \Delta^{\mu\nu} \star \frac{\delta_l}{\delta \zeta^\nu} \right\} F[\zeta] = \int_{\xi(0)+\xi(1)=0} \mathcal{D}\xi \exp \left\{ -\frac{1}{4} \xi \star \dot{\xi} \right\} F[\xi + \zeta], \quad (6.80)$$

onde

$$\mathcal{D}\xi = \frac{D\xi}{\int_{\xi(0)+\xi(1)=0} D\xi \exp \left\{ -\frac{1}{4} \xi \star \dot{\xi} \right\}}. \quad (6.81)$$

Portanto o teorema de Wick assume a seguinte forma

$$TF[\zeta] = \text{Sym} \left[\int_{\xi(0)+\xi(1)=0} \mathcal{D}\xi \exp \left\{ -\frac{1}{4} \xi \star \dot{\xi} \right\} F[\xi + \zeta] \Big|_{\zeta=\gamma} \right]. \quad (6.82)$$

Descobrimos que o produto T de um funcional $F(\gamma)$ pode ser escrito através de uma integral de trajetória. Isto nos permite obter resultados importantes voltando a expressão $R_0 = \exp\{\omega_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\}$ sabemos que ela pode ser escrita da forma $R_0 = T \exp \left\{ \int_0^1 dt \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu(t) \gamma^\nu(t) \right\}$ então com o resultado da expressão (6.82) que vamos reescrever aqui

$$TF[\zeta] = \text{Sym} \left[\int_{\xi(0)+\xi(1)=0} \mathcal{D}\xi \exp \left\{ -\frac{1}{4} \xi \star \dot{\xi} \right\} F[\xi + \zeta] \Big|_{\zeta=\gamma} \right], \quad (6.83)$$

Assim, já temos um método para calcular R_0 através do método de integrais de trajetória. Como veremos este método não é trivial e teremos várias passagens até obter o resultado. O primeiro passo é a escolha adequada de $F(\gamma)$ que neste caso é $F(\gamma) = \exp \left\{ \int_0^1 dt \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu(t) \gamma^\nu(t) \right\}$. Portanto temos $R_0 = TF(\gamma)$ isto é

$$R_0 = \text{Sym} \left[\int_{\xi(0)+\xi(1)=0} \mathcal{D}\xi \exp \left\{ -\frac{1}{4} \xi \star \dot{\xi} \right\} \exp \{ \omega_{\mu\nu} (\xi + \zeta)^\mu \star (\xi + \zeta)^\nu \} \Big|_{\zeta=\gamma} \right], \quad (6.84)$$

expandindo o termo $\omega_{\mu\nu} (\xi + \zeta)^\mu \star (\xi + \zeta)^\nu$ temos

$$\omega_{\mu\nu} \xi^\mu \star \xi^\nu + \omega_{\mu\nu} \xi^\mu \star \zeta^\nu + \omega_{\mu\nu} \zeta^\nu \star \xi^\mu + \omega_{\mu\nu} \zeta^\mu \star \zeta^\nu. \quad (6.85)$$

O primeiro termo $\omega_{\nu\mu} \xi^\mu \star \xi^\nu$ está dentro de uma exponencial e pode ser somado com o termo $-\frac{1}{4} \xi \star \dot{\xi}$ ficando

$$-\frac{1}{4} \xi_\mu \star \dot{\xi}^\mu + \omega_{\mu\nu} \xi^\mu \star \xi^\nu = \frac{1}{4} [\xi^\mu \star (K_\omega)_{\mu\nu} \star \xi^\nu], \quad (6.86)$$

onde

$$K_\omega(t, t') = -\eta\delta'(t - t') + 4\omega\delta(t - t'), \quad (6.87)$$

o termo $\omega_{\mu\nu}\xi^\mu \star \zeta^\nu$ é equivalente $\xi^\mu \star \rho_\nu$ e $\omega_{\mu\nu}\xi^\nu \star \zeta^\mu$ é equivalente a $\xi^\nu \star \rho_\mu$. Sendo que $\mathcal{D}\xi$ pode ser identificado como $\frac{D\xi}{I(K_0, 0, E)}$ ficando sobrando o termo que está dentro da exponencial $\omega_{\mu\nu}\zeta^\mu \star \zeta^\nu$, logo podemos escrever uma expressão sintética para R_0 , isto é

$$R_0 = \text{Sym} \left[\frac{I(K_\omega, 2\zeta\omega, E)}{I(K_0, 0, E)} \exp(\omega_{\mu\nu}\zeta^\nu \star \zeta^\mu)_{\zeta=\gamma} \right], \quad (6.88)$$

mas usando a expressão (6.67) temos

$$\left. \frac{I(K_\omega, 2\zeta\omega, E)}{I(K_0, 0, E)} \right|_{\zeta=\gamma} = \text{Det} \left(\frac{K_\omega}{K_0} \right)^{\frac{1}{2}} \exp[(-4\omega_{\mu\kappa} \star G_\omega^{\kappa\lambda} \star \omega_{\lambda\nu})\zeta^\mu \zeta^\nu]_{\zeta=\gamma}, \quad (6.89)$$

portanto podemos escrever

$$R_0 = \left(\text{Det} \frac{K_\omega}{K_0} \right)^{1/2} \text{Sym} [\exp (M_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu)]. \quad (6.90)$$

onde

$$M_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu} - 4\omega_{\mu\kappa} \star G_\omega^{\kappa\lambda} \star \omega_{\lambda\nu} \quad (6.91)$$

G_ω é a função de Green para K_ω e obedece às condições de contorno

$$G_\omega(0, t) + G_\omega(1, t) = 0 \quad (6.92)$$

G_ω satisfaz portanto a relação

$$\int_0^1 (K_\omega)_{\mu\nu}(t, t') G_\omega^{\nu\lambda}(t', t'') = \delta_\mu^\lambda \delta(t - t'') \quad (6.93)$$

Calculando-se G_ω temos

$$G_\omega(t, t') = -\frac{1}{2} e^{4\omega(t-t')} (\eta\epsilon(t - t') - \tanh 2\omega). \quad (6.94)$$

Vamos derivar a equação (6.94). A função de Green $G_\omega(t, t')$ satisfaz a equação

$$-\frac{d}{dt} G_\omega(t, t') + 4\omega G_\omega(t, t') = \eta\delta(t - t') \quad (6.95)$$

e às condições de contorno (6.79). A equação (6.95) pode ser apresentada da forma

$$e^{4\omega t} \left(-\frac{d}{dt} \right) e^{-4\omega t} G_\omega(t, t') = \eta \delta(t - t'). \quad (6.96)$$

Multiplicando por $e^{-4\omega t}$ pela esquerda e por $e^{4\omega t'}$ pela direita obtemos

$$-\frac{d}{dt} e^{-4\omega t} G_\omega(t, t') e^{4\omega t'} = \eta \delta(t - t'). \quad (6.97)$$

A equação (6.96) mostra que a função

$$\tilde{G}_0(t, t') \equiv e^{-4\omega t} G_\omega(t, t') e^{4\omega t'} \quad (6.98)$$

é uma função de Green para o operador K_0 . Ela não coincide com $G_0(t, t')$ porque ela obedece a uma condição de contorno diferente. De fato

$$\tilde{G}_0(1, t) = e^{-4\omega} G_\omega(1, t) e^{4\omega t}, \quad \tilde{G}_0(0, t) = G_\omega(0, t) e^{4\omega t},$$

e levando em conta que $G_\omega(t, t')$ obedece às equações de contorno dadas pela equação (6.79), encontramos

$$e^{4\omega} \tilde{G}_0(1, t) + \tilde{G}_0(0, t) = 0. \quad (6.99)$$

A diferença

$$h(t, t') = \tilde{G}(t, t') - G_0(t, t') \quad (6.100)$$

é a solução para a equação homogênea

$$-\frac{d}{dt} h(t, t') = 0,$$

então $h(t, t')$ não depende de t . $h(t, t') = h(t')$. Logo

$$\tilde{G}_0(t, t') = G_0(t, t') + h(t'). \quad (6.101)$$

A função $h(t)$ pode ser encontrada usando às condições de contorno (6.99) e expressões explícitas para $G_0(t, t')$. De fato, substituindo (6.101) em (6.99) encontramos

$$e^{4\omega} [G_0(1, t) + h(t)] + G_0(0, t) + h(t) = 0 \quad (6.102)$$

Resolvendo esta equação

$$h(t) = - \left(e^{4\omega} + \eta \right)^{-1} \left(e^{4\omega} G_0(1, t) + G_0(0, t) \right),$$

e usando a expressão explícita para $G_0(t, t')$

$$G_0(t, t') = -\frac{1}{2} \eta \epsilon(t - t'), \quad (6.103)$$

encontramos

$$h(t) = \frac{1}{2} \left(e^{4\omega} + \eta \right)^{-1} \left(e^{4\omega} - \eta \right) = \frac{1}{2} \tanh 2\omega. \quad (6.104)$$

Substituindo (6.104) em (6.101) e então usando (6.98) obtemos a Eq. (6.94). E substituindo a equação (6.94) em (6.90) encontramos

$$M = \frac{1}{2} \tanh 2\omega \quad (6.105)$$

Vamos agora passar para o cálculo do determinante $\text{Det}(K_\omega K_0^{-1})$: Assumimos que pela definição de um determinante de um operador, isto é, A que atua em algum espaço de dimensão infinita, é dado por

$$\text{Det } A = \exp \text{Tr } \ln A, \quad (6.106)$$

onde Tr significa o traço do operador. É claro, que a equação (6.106) possui significado somente se (i) $\ln A$ existe e (ii) $\text{Tr } \ln A$ existe, na qual assumimos no que segue. A equação (6.106) é uma generalização da relação bem conhecida

$$\det a = \exp \text{tr } \ln a, \quad (6.107)$$

onde a é uma matriz quadrada com um número finito de linhas e $\det a \neq 0$.

Fazendo uso da equação (6.106) encontramos

$$\begin{aligned} \text{Det } K_\omega K_0^{-1} &= \exp \text{Tr } \ln K_\omega K_0^{-1} \\ &= \exp \text{Tr} \left(4\omega \int_0^1 K_{s\omega}^{-1} ds \right). \end{aligned} \quad (6.108)$$

O núcleo de $K_{s\omega}^{-1}$ é $(G_{s\omega})^\mu{}_\nu(t, t')$. A operação de traço Tr pode ser efetuada em dois passos: (i) integrando sobre o índice contínuo, e (ii) fazendo a soma sobre o índice discreto, isto é

$$\text{Tr } 4\omega K_{s\omega}^{-1} = \int_0^1 4\omega^\mu{}_\nu (G_{s\omega})^\nu{}_\mu(t, t) dt. \quad (6.109)$$

Substituindo (6.109) em (6.108) e usando a expressão (6.94) encontramos

$$\begin{aligned}\text{Det } K_\omega K_0^{-1} &= \exp \text{tr } 4\omega \int_0^1 dt \int_0^1 ds G_{s\omega}(t, t) \\ &= \exp \text{tr } 2\omega \int_0^1 \tanh 2s\omega ds.\end{aligned}\quad (6.110)$$

Não há contribuição em (6.110) do primeiro termo no lado direito de (6.94) porque $\text{tr } \omega \eta = \text{tr } \omega = \omega^\mu{}_\mu = 0$. Integrando em (6.110) e usando (6.107) finalmente obtemos

$$\text{Det } K_\omega K_0^{-1} = \exp \text{tr } \ln \cosh 2\omega = \det \cosh 2\omega. \quad (6.111)$$

e substituindo (6.105), (6.111) em (6.90) finalmente temos

$$\begin{aligned}R_0 &= \exp \{ \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \} \\ &= (\det \cosh 2\omega)^{1/2} \text{Sym} \left[\exp \left(\frac{1}{2} (\tanh 2\omega)_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \right) \right].\end{aligned}\quad (6.112)$$

Uma propriedade muito importante da expressão acima citada é que ela contém um número finito de termos. De fato qualquer produto Sym com mais de $D\gamma$ matrizes é anulado.

Encontramos a decomposição explícita, que é válida em qualquer dimensão da representação espinorial da matriz $\exp \{ \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \}$ para a transformação de Lorentz $L = \exp 4\omega$ em termos das estruturas independentes de matrizes γ .

Para o caso de dimensão $D = 3$, podemos fazer $\gamma^0 = \sigma^3, \gamma^1 = i\sigma^1$ e $\gamma^2 = i\sigma^2$, neste caso existe três elementos geradores de uma álgebra de Grassmann e qualquer produto com mais de três elementos geradores, anulam-se. Então

$$\exp (M_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu) = 1 + M_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu, \quad D = 3. \quad (6.113)$$

logo temos

$$\begin{aligned}R_0 &= \exp \{ \omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \} \\ &= (\det \cosh 2\omega)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} (\tanh 2\omega)_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \right].\end{aligned}\quad (6.114)$$

No caso de dimensão $D = 4$ encontramos

$$\exp (M_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu) = 1 + M_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu + \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M_{\kappa\lambda} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\lambda, \quad D = 4. \quad (6.115)$$

Substituindo na equação (6.90) e levando em conta que

$$\text{Sym } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\kappa \gamma^\lambda = \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \gamma^5,$$

obtemos

$$\begin{aligned} R_0 &= \exp\{\omega_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu\} \\ &= (\det \cosh 2\omega)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2} (\tanh 2\omega)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{8} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} (\tanh 2\omega)_{\kappa\lambda} (\tanh 2\omega)_{\mu\nu} \gamma^5 \right], \end{aligned} \quad (6.116)$$

onde $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]_-$, $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ e $\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu}$ é o símbolo Levi-Civita normalizado por $\epsilon^{0123} = 1$. Expressões da forma (6.31) aparecem frequentemente em diferentes construções em teoria de campo. Suas decomposições em estruturas de matrizes γ independentes são necessárias para cálculos concretos. Um exemplo simples que nos fornece o propagador de Dirac de uma partícula com spin num campo eletromagnético uniforme e constante, calculado primeiramente por Schwinger [70] em quatro dimensões.

$$S_0^c(x_{out}, x_{in}) = \left[\gamma^\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x_{out}^\mu} - e A_\mu(x_{out}) \right) + m \right] \int_0^\infty ds g(x_{out}, x_{in}, s), \quad (6.117)$$

onde a função g de transformação tem a forma

$$\begin{aligned} g(x_{out}, x_{in}, s) &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\det \frac{\sinh eFs}{eF} \right)^{-1/2} \exp \left\{ i \frac{e}{2} x_{out} F x_{in} - i s m^2 \right. \\ &\quad \left. - i \frac{e}{4} (x_{out} - x_{in}) F \coth(eFs) (x_{out} - x_{in}) + \frac{es}{2} F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right\} \end{aligned} \quad (6.118)$$

e contém uma construção de operador da forma de R_0 . Usando a fórmula (6.116) podemos obter uma estrutura explícita de matrizes γ para a função de transformação

$$\begin{aligned} g(x_{out}, x_{in}, s) &= \frac{1}{16\pi^2} \left(\det \frac{\tanh eFs}{eF} \right)^{-1/2} \\ &\times \exp \left\{ i \frac{e}{2} x_{out} F x_{in} - i s m^2 - i \frac{e}{4} (x_{out} - x_{in}) F \coth(eFs) (x_{out} - x_{in}) \right\} \\ &\times \left[1 + \frac{1}{2} (\tanh eFs)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (\tanh eFs)_{\alpha\beta} (\tanh eFs)_{\mu\nu} \gamma^5 \right]. \end{aligned} \quad (6.119)$$

Apêndice A

Algumas Propriedades de Tensores Anti-simétricos

A.1 Tensores Anti-simétricos em $3 + 1$ Dimensões

A matriz anti-simétrica $F_{\mu\nu}$ formadas pelas componentes do tensor de intensidade de campo possui em geral uma classe de invariantes não nulos

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \mathbf{G} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

quatro autovetores isotrópicos. isto é

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} n^\nu &= -\mathcal{E} n_\mu, & F_{\mu\nu} \bar{n}^\nu &= \mathcal{E} \bar{n}_\mu, \\ F_{\mu\nu} m^\nu &= i\mathcal{H} m_\mu, & F_{\mu\nu} \bar{m}^\nu &= -i\mathcal{H} \bar{m}_\mu. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde

$$\mathcal{E} = \left[(\mathbf{F}^2 + \mathbf{G}^2)^{1/2} - \mathbf{F} \right]^{1/2}, \quad \mathcal{H} = \left[(\mathbf{F}^2 + \mathbf{G}^2)^{1/2} + \mathbf{F} \right]^{1/2}. \quad (\text{A.3})$$

Os autovetores são supostos normalizados

$$\bar{n}^\mu n_\mu = -\bar{m}^\mu m_\mu = 2. \quad (\text{A.4})$$

Enquanto todos os outros produtos escalares se anulam

$$n^2 = \bar{n}^2 = m^2 = \bar{m}^2 = nm = n\bar{m} = \bar{n}m = \bar{n}\bar{m} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Então F pode ser apresentada na forma

$$F_{\mu\nu} = \frac{\mathcal{E}}{2} (\bar{n}_\mu n_\nu - n_\mu \bar{n}_\nu) + \frac{i\mathcal{H}}{2} (\bar{m}_\mu m_\nu - m_\mu \bar{m}_\nu), \quad (\text{A.6})$$

e, portanto, F^2 possui a decomposição espectral

$$F^2 = \mathcal{E}^2 P_\mathcal{E} + \mathcal{H}^2 P_\mathcal{H} \quad (\text{A.7})$$

onde

$$(P_\mathcal{E})_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\bar{n}_\mu n_\nu + n_\mu \bar{n}_\nu), \quad (P_\mathcal{H})_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\bar{m}_\mu m_\nu + m_\mu \bar{m}_\nu) \quad (\text{A.8})$$

são operadores de projeção ortogonais em alguns sub-espacos bidimensionais

$$P_\mathcal{E}^2 = P_\mathcal{E}, \quad P_\mathcal{H}^2 = P_\mathcal{H}, \quad P_\mathcal{E} P_\mathcal{H} = P_\mathcal{H} P_\mathcal{E} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$P_\mathcal{E} + P_\mathcal{H} = \eta, \quad \text{tr} P_\mathcal{E} = \text{tr} P_\mathcal{H} = 2. \quad (\text{A.10})$$

A.2 Tensores Anti-simétricos em $2 + 1$ Dimensões

Seja $F_{\mu\nu}$ uma matriz anti-simétrica em $2 + 1$ dimensões. A anti-simetria implica $\text{tr} F = 0$, $\det F = 0$, tal que a soma e o produto dos autovalores se anulam. Os autovalores são 0 , φ , $-\varphi$, onde o número real φ^2 coincide com o invariante

$$\varphi^2 = \frac{1}{2} \text{tr} F^2.$$

Neste caso em que não se anula φ existe três autovetores de F , e F^2 é proporcional ao operador de projeção P em algum espaço bidimensional

$$F^2 = \varphi^2 P, \quad P^2 = P, \quad \text{tr} P = 2, \quad PF = FP = F. \quad (\text{A.11})$$

Então, para uma função par h

$$h(F) = h(0) (1 - P) + h(\varphi) P, \quad (\text{A.12})$$

Enquanto para uma ímpar

$$h(F) = \frac{F}{\varphi} h(\varphi). \quad (\text{A.13})$$

No caso de φ nulo (e $F \neq 0$) corresponde a uma matriz nilpotente, $F^3 = 0$.

Apêndice B

Algumas Identidades Envolvendo as Matrizes γ

B.1 As Estruturas das Matrizes-Gama da Transformação de Lorentz na Representação Espinorial

Vamos denotar por $M(\omega)$ a expressão no lado direito da equação(5.38). Verificamos que a função formada pela matriz $M(\lambda\omega)$ de um parâmetro real λ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{d\lambda}M(\lambda\omega) = -\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}M(\lambda\omega) \quad (\text{B.1})$$

e com condição inicial

$$M(0) = 1. \quad (\text{B.2})$$

Esta última condição é trivial, então vamos nos concentrar na prova da equação (B.1).

Com as derivadas

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\det \cosh \frac{\lambda\omega}{2} \right)^{1/2} &= \left(\det \cosh \frac{\lambda\omega}{2} \right) \text{tr} \left(\frac{\omega}{4} \tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right), \\ \frac{d}{d\lambda} \tanh \frac{\lambda\omega}{2} &= \frac{\omega}{2} \left(\eta - \tanh^2 \frac{\lambda\omega}{2} \right), \end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{d}{d\lambda}M(\lambda\omega) = \left(\det \cosh \frac{\lambda\omega}{2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{4} \text{tr} \left(\omega \tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{8} \left[\text{tr} \left(\omega \tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right) \tanh \frac{\lambda\omega}{2} + 2\omega \left(\eta - \tanh^2 \frac{\lambda\omega}{2} \right) \right]_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right)_{\alpha\beta} \left[\frac{1}{4} \text{tr} \left(\omega \tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right) \tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right. \\
& \left. + \omega \left(\eta - \tanh^2 \frac{\lambda\omega}{2} \right) \right]_{\mu\nu} \gamma^5 \Bigg\}. \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Então usando a identidade

$$4\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} (ST)_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} T_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} \text{tr } S, \tag{B.4}$$

que é válida para qualquer duas matrizes¹ S e T podemos por a derivada (B.3) na forma

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} M(\lambda\omega) &= \left(\det \cosh \frac{\lambda\omega}{2} \right)^{1/2} \left\{ \frac{1}{4} \text{tr} \left(\omega \tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right) \right. \\
& - \frac{i}{8} \left[\text{tr} \left(\omega \tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right) \tanh \frac{\lambda\omega}{2} + 2\omega \left(\eta - \tanh^2 \frac{\lambda\omega}{2} \right) \right]_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\
& \left. + \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \omega_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \right\}. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

A representação para o produto de duas matrizes σ

$$\begin{aligned}
\sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\mu\nu} &= \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} \\
& - i \left(\eta^{\alpha\mu} \sigma^{\beta\nu} + \eta^{\beta\nu} \sigma^{\alpha\mu} - \eta^{\alpha\nu} \sigma^{\beta\mu} - \eta^{\beta\mu} \sigma^{\alpha\nu} \right) - \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma^5, \tag{B.6}
\end{aligned}$$

é facilmente deduzida pelas identidades

$$\frac{1}{2} \{ \sigma^{\alpha\beta}, \sigma^{\mu\nu} \} = \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu} - \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma^5, \tag{B.7}$$

$$\frac{i}{2} [\sigma^{\alpha\beta}, \sigma^{\mu\nu}] = \eta^{\alpha\mu} \sigma^{\beta\nu} + \eta^{\beta\nu} \sigma^{\alpha\mu} - \eta^{\alpha\nu} \sigma^{\beta\mu} - \eta^{\beta\mu} \sigma^{\alpha\nu}. \tag{B.8}$$

Usando (B.6), a identidade bem conhecida²

$$\sigma^{\kappa\rho} \gamma^5 = \frac{1}{2} \epsilon^{\kappa\rho\tau\sigma} \sigma_{\tau\sigma}, \tag{B.9}$$

¹Lembremos que, de acordo com nossa notação, $\text{tr } S = S^\alpha{}_\alpha = \eta^{\alpha\beta} S_{\beta\alpha}$, etc.

²Lembremos que em nossa notação $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$.

e a propriedade de anti-simetria $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$, encontramos

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4}\omega\sigma^{\mu\nu}M(\lambda\omega) &= \left(\det \cosh \frac{\lambda\omega}{2}\right)^{1/2} \left[\frac{1}{4}\text{tr} \left(\omega \tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right) \right. \\ &\quad - \frac{i}{64}\epsilon^{\kappa\rho\mu\nu} \left(\tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right)_{\kappa\rho} \left(\tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right)_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\lambda\tau} \omega^{\alpha\beta} \sigma^{\lambda\tau} \\ &\quad \left. - \frac{i}{4}\omega_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta} + \frac{1}{8}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\omega_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Então, usando a identidade

$$\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\epsilon^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4} = -\sum_P (-1)^{[P]}\delta_{P(\alpha_1)}^{\beta_1}\delta_{P(\alpha_2)}^{\beta_2}\delta_{P(\alpha_3)}^{\beta_3}\delta_{P(\alpha_4)}^{\beta_4},$$

obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{i}{4}\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}M(\lambda\omega) &= \left(\det \cosh \frac{\lambda\omega}{2}\right)^{1/2} \left[\frac{1}{4}\text{tr} \left(\omega \tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right) \right. \\ &\quad - \frac{i}{8} \left[\text{tr} \left(\omega \tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right) \tanh \frac{\lambda\omega}{2} + 2\omega \left(\eta - \tanh^2 \frac{\lambda\omega}{2} \right) \right]_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\ &\quad \left. + \frac{1}{8}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\omega_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{\lambda\omega}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Os lados direitos de (B.5) e (B.11) coincidem. Consequentemente $M(\lambda\omega)$ obedece à equação (B.1). Isto completa a prova da fórmula (5.38).

B.2 Decomposição de Algumas Funções de Matrizes γ

Vamos considerar o expoente T (5.88) onde F é um campo constante uniforme, f é um campo de onda plana e (5.57) ocorre. Vamos provar as identidades

$$\Delta[nx_{cl}, e_0] = \left(1 + \frac{ge_0}{4}B_{\alpha\beta}\gamma^{[\alpha}\gamma^{\beta]} + \frac{g^2e_0^2}{16}\bar{B}_{\alpha\beta}\bar{B}^{*\alpha\beta}\gamma^5 \right) \bar{\Lambda}(e_0), \quad (\text{B.12})$$

$$\gamma^\mu \Delta[nx_{cl}, e_0] = K^\mu{}_\nu(1) \left(\gamma^\nu + \frac{ge_0}{4}B_{\alpha\beta}\gamma^{[\nu}\gamma^\alpha\gamma^{\beta]} \right) \bar{\Lambda}(e_0), \quad (\text{B.13})$$

onde B e K são definidas por (5.14) para combinação como foi descrita enquanto $\bar{B}$, correspondente ao caso de campo uniforme constante que foi dado por (5.19), e

$$\bar{\Lambda}(e_0) = \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} \bar{\mathcal{R}}(g') \star \bar{\mathcal{F}} \right\} = \cosh \frac{ge_0\mathcal{E}}{2} \cos \frac{ge_0\mathcal{H}}{2}.$$

Apresentando o expoente T na forma (5.89) e usando a equação (5.38) obtemos

$$\Delta[nx_{cl}, e_0] = \left(1 + \frac{ge_0}{4} B_{\alpha\beta} \gamma^{[\alpha} \gamma^{\beta]} + \frac{g^2 e_0^2}{16} \bar{B}_{\alpha\beta} \bar{B}^{*\alpha\beta} \gamma^5 \right) \bar{\Lambda}(e_0) + Q_{\alpha\beta} \gamma^{[\alpha} \gamma^{\beta]} \quad (\text{B.14})$$

onde

$$Q = \frac{ge_0}{4} \bar{\Lambda}(e_0) (\bar{B} - B) + \frac{1}{4} C, \quad (\text{B.15})$$

$$C = ge_0 \int_0^1 d\tau e^{\frac{ge_0}{2} F(1-2\tau)} f(nx_{cl}(\tau)) e^{-\frac{ge_0}{2} F(1-2\tau)}. \quad (\text{B.16})$$

No sentido de encontrar uma representação conveniente para B apresentamos K , como uma solução, obedecendo (5.52), para equação (5.71, para $\phi = nx_{cl}$) na forma

$$K(\tau) = 2V(\tau) (\eta + V(1))^{-1}, \quad (\text{B.17})$$

onde

$$V(\tau) = T \exp \left\{ ge_0 \int_0^\tau F^{comb}(nx_{cl}(\tau')) d\tau' \right\}. \quad (\text{B.18})$$

é solução, sujeita a (5.52), para equação

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} - ge_0 F - ge_0 f(nx_{cl}(\tau)) \right] V(\tau) = 0. \quad (\text{B.19})$$

Então, usando a equação definida (5.14) para B (na qual F precisa ser entendida como F^{comb}) e as equações (B.17), (B.18), derivamos

$$B = \frac{2}{ge_0} \left[\eta - 2 (\eta + V(1))^{-1} \right]. \quad (\text{B.20})$$

Correspondentemente, da equação (5.19) obtemos

$$\bar{B} = \frac{2}{ge_0} \left[\eta - 2 (\eta + V_0(1))^{-1} \right], \quad V_0(\tau) = e^{ge_0 F \tau}. \quad (\text{B.21})$$

Resolvendo a equação (B.19) encontramos

$$V(1) = V_0^{1/2}(1) \left(\eta + C + \frac{C^2}{2} \right) V_0^{1/2}(1), \quad (\text{B.22})$$

pelo fato da nilpotência [30] de C . Então substituímos (B.22) em (B.20) e depois de uma transformação direta obtemos

$$B - \bar{B} = \frac{1}{ge_0} \left(\cosh \frac{ge_0 F}{2} \right)^{-1} C \left(\cosh \frac{ge_0 F}{2} \right)^{-1}. \quad (\text{B.23})$$

Podemos verificar, usando a transversalidade (5.42) de a_μ , que³

$$C = P_{\mathcal{E}}CP_{\mathcal{H}} + P_{\mathcal{H}}CP_{\mathcal{E}}. \quad (\text{B.24})$$

Por outro lado, devido a igualdade da função,

$$\left(\cosh \frac{ge_0 F}{2}\right)^{-1} = \left(\cosh \frac{ge_0 \mathcal{E}}{2}\right)^{-1} P_{\mathcal{E}} + \left(\cos \frac{ge_0 \mathcal{H}}{2}\right)^{-1} P_{\mathcal{H}}. \quad (\text{B.25})$$

Substituímos (B.24) e (B.25) em (B.23) para obter, pelo fato das propriedades (A.9) dos operadores de projeção, $P_{\mathcal{E}}$ e $P_{\mathcal{H}}$

$$B - \bar{B} = \frac{1}{ge_0} \left(\cosh \frac{ge_0 \mathcal{E}}{2} \cos \frac{ge_0 \mathcal{H}}{2} \right)^{-1} C. \quad (\text{B.26})$$

Finalmente, inserindo (B.26) em (B.15) e usando

$$\bar{\Lambda}(e_0) = \left(\cosh \frac{ge_0 \mathcal{E}}{2} \cos \frac{ge_0 \mathcal{H}}{2} \right)^{-1}, \quad (\text{B.27})$$

encontramos que $Q = 0$ e a identidade (B.12) ocorre.

Agora trabalhando na identidade (B.13) usamos (B.12), (5.15), a identidade

$$\gamma^\mu \gamma^{\bar{5}} = -\frac{1}{3!} \epsilon^{\mu}{}_{\kappa\rho\sigma} \gamma^\kappa \gamma^\rho \gamma^\sigma$$

e a anti-simetria $B_{\alpha\beta} = B_{[\alpha\beta]}$ para trazer o lado esquerdo na forma

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \Delta[nx_{cl}, e_0] &= \left[\left(\eta^\mu{}_{\beta} + \frac{ge_0}{2} B^\mu{}_{\beta} \right) \gamma^\beta \right. \\ &\quad \left. + \frac{ge_0}{4} \left(\eta^\mu{}_{\nu} B_{\alpha\beta} - \frac{ge_0}{4!} B_{\rho\sigma} B^{*\rho\sigma} \epsilon^\mu{}_{\nu\alpha\beta} \right) \gamma^{[\nu} \gamma^\alpha \gamma^{\beta]} \right] \bar{\Lambda}(e_0). \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

de (B.17) e (B.20) obtemos

$$K(1) = \eta + \frac{ge_0}{2} B, \quad (\text{B.29})$$

$$K_{\mu[\nu}(1) B_{\alpha\beta]} = \eta_{\mu[\nu} B_{\alpha\beta]} + \frac{ge_0}{2} B_{\mu[\lambda} B_{\alpha\beta]}. \quad (\text{B.30})$$

Devido a anti-simetria de B

$$B_{\mu[\lambda} B_{\alpha\beta]} = B_{[\mu\nu} B_{\alpha\beta]} = -\frac{2}{4!} B_{\kappa\rho} B^{*\kappa\rho} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta},$$

e, substituindo em (B.30), obtemos

$$K_{\mu[\nu}(1) B_{\alpha\beta]} = \eta_{\mu[\nu} B_{\alpha\beta]} - \frac{ge_0}{4!} B_{\kappa\rho} B^{*\kappa\rho} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (\text{B.31})$$

Finalmente, usamos (B.29), (B.31) em (B.28) para obter (B.13).

³Os operadores de projeção $P_{\mathcal{E}}$ e $P_{\mathcal{H}}$ são definidos no Apêndice A.

B.3 Identidades Envolvendo Matrizes γ em $2 + 1$ Dimensões

Para provar a identidade (5.106) vamos introduzir

$$z^\mu = \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\nu\lambda}, \quad z^2 = -4\phi^2$$

e transformamos lado esquerdo de (5.106) usando (5.96)

$$\exp \left\{ \frac{ge_0}{4} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \right\} = \cosh \frac{ge_0\varphi}{2} \left(1 - \frac{iz\gamma}{2\varphi} \tanh \frac{ge_0\varphi}{2} \right).$$

Levando em conta as equações (5.14), (A.13) e a relação $iz\gamma = -\gamma F\gamma$, obtemos (5.106).

Multiplicando (5.107) por $K(1)$ e usando (5.96) transformamos (5.107) na identidade equivalente

$$K^\mu{}_\lambda(1) \gamma^\lambda e^{\frac{ge_0}{4} F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta} = \gamma^\mu \cosh \frac{ge_0\varphi}{2} \det K(1), \quad (\text{B.32})$$

que iremos provar. Levando em conta a identidade

$$\gamma^\lambda e^{\frac{ge_0}{4} F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta} = \left(e^{-\frac{ge_0}{2} F} \right)^\lambda{}_\rho \gamma^\rho,$$

que pode ser facilmente deduzida de (5.106) e usando (5.14) transformamos o lado esquerdo da (B.32)

$$K^\mu{}_\lambda(1) \gamma^\lambda e^{\frac{ge_0}{4} F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta} = \left(\cosh \frac{ge_0\varphi}{2} \right)^{-1} \gamma^\mu, \quad (\text{B.33})$$

Calculando o determinante

$$\det K(1) = \left(\cosh \frac{ge_0\varphi}{2} \right)^{-2},$$

encontramos que o lado direito de (B.33) coincide com o da (B.32).

Bibliografia

- [1] P.A.M. Dirac, *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*. **3** (1933) 1
- [2] R.P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20** (1948) 367
- [3] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, (McGraw-Hill, New York, 1965)
- [4] C. DeWitt-Morette, A. Maheshwari and B. Nelson. *Path Integration in Non-Relativistic Quantum Mechanics*. *Phys. Rep. (Phys. Lett. C)*. **50** (1979) 255
- [5] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View* (Springer-Verlag, Berlin, 1987)
- [6] L.S. Schulman. *Techniques and Applications of Path Integration* (A Willey-Interscience Publication, New York, 1981)
- [7] R. Stora, eds. *Feynman Path Integrals*, *Proc. Int. Colloq.*, (Springer-Verlag, New York, 1979)
- [8] I.M. Gel'fand and A.M. Yaglom, *Integration in Function Spaces and its Application in Quantum Physics*, *Uspekhi Mat.Nauk.* **11**, vip.1(67), (1956) 77-114
- [9] I.M. Gel'fand and A.M. Yaglom, *Integration in Function Space and its Application in Quantum Physics*, *J. Math. Phys.* **1** (1960) 48
- [10] S.A. Albeverio and R.J. Hoegh-Krohn, *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals*, *Lecture Notes in Mathematics*. Vol. 523, (Springer-Verlag, Berlin, 1979)

- [11] B. Simon, *Functional Integration in Quantum Physics*, (Academic Press, New York, 1979)
- [12] E.W. Montroll, *Markoff Chains, Wiener Integrals and Quantum Theory*, Commun. Pure and Appl. Math., **5** (1952) 415
- [13] S.G. Brush, *Functional Integrals and Statistical Physics*, Rev. Mod. Phys. **33** (1961) 79
- [14] E.S. Fradkin, *Green's Function Method in Quantized Field Theory and Quantum Statistics*, Proc. P.N. Lebedev Phys. Inst. **29** (Nauka, Moscow 1965) [English transl.: Consultants Bureau, N.Y. 1967]
- [15] F.W. Wiegel, *Path Integral Methods in Statistical Mechanics*, Phys. Rep. (Phys. Lett. C) **16** (1975) 57
- [16] P. Exner. *Open Quantum Systems and Feynman Integrals*, (D. Reidel, Dordrecht. 1985)
- [17] G.J. Papadopoulos and J.T. Devreese, Eds., *Path Integrals and their Applications in Quantum, Statistical and Solid State Physics*, Proc. NATO Adv. Study Ins.. Antwerp, 1977, (Plenum, New York, 1978)
- [18] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, (Claredon Press, Oxford, 1989)
- [19] F.W. Wiegel, *Introduction to Path-Integral Methods in Physics and Polymer Science*, (World Scientific, Singapore, 1986)
- [20] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics and Polymer Physics*, (World Scientific, Singapore, 1990) 1-664
- [21] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987)

- [22] A.N. Vasiliev, *Functional Methods in Quantum Field Theory and Statistics*, (Leningrad State University Press, Leningrad 1976)
- [23] M.S. Marinov, *Path Integrals in Quantum Theory: An Outlook of Basic Concepts*, Phys. Rept. **60** (1980) 1-57
- [24] F.A. Berezin and M.A. Shubin. *The Schrödinger Equation* (Moscow State University Press, Moscow 1983)
- [25] D.C. Khandekar, S.V. Lawande and K.V. Bhagwat *Path-Integral Methods and their Applications*, (World Scientific, Singapore, 1993)
- [26] A.A. Slavnov and L.D. Faddeev. *Introduction into Quantum Theory of Gauge Fields*, (Nauka, Moscow 1978)
- [27] D.M. Gitman and I. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*. (Springer-Verlag, Berlin 1991)
- [28] A.M. Arthurs, ed., *Functional Integration and its Applications*, (Clarendon Press, Oxford, 1975)
- [29] L.D. Faddeev and A.A. Slavnov. *Gauge Fields: Introduction to Quantum Theory*, (Benjamin/Cummings Pub.. MA, 1980)
- [30] E.S. Fradkin, D.M. Gitman and Sh.M. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum*, (Nauka. Moscow, 1991)
- [31] E.S. Fradkin, D.M. Gitman and Sh.M. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum*, (Springer-Verlag, Berlin, 1991) 1-289
- [32] I.L. Buchbinder, S.D. Odintsov and I.L. Shapiro, *Effective Action in Quantum Gravity*, (IOP Publishing. Bristol. 1992); S.D. Odintsov. Fortschr. Phys. **38** (1990) 371; *ibid.* **39** (1991) 621
- [33] B.S. deWitt, Rev. Mod. Phys. **29** (1957) 377

- [34] S.A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time*, (Cambridge Univ. Press, 1989)
- [35] B.L. Van der Waerden. *Algebra*, (Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1971)
- [36] F.A. Berezin, *the Method of Second Quantization* (Nauka, Moscow 1965)
- [37] D.A. Leites, Uspekhi Mat. Nauk **30** (1975) 156
- [38] F.A. Berezin, *Introduction to Algebra and Analysis with Anticommuting Variables* (Moscow State University Press, Moscow 1983)
- [39] F.A. Berezin, *Introduction to Superanalysis ed. by A. A. Kirillov* (D. Reidel, Dordrecht 1987)
- [40] B. DeWitt, *Supermanifolds* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985)
- [41] F.A. Berezin, M.S. Marinov, Pisma Zh. Eksp. Theor. Fiz. **21** (1975) 678 [JETP Lett. **21** (1975) 320]; Ann. Phys. (N.Y) **104** (1977) 336
- [42] R. Casalbuoni, Nuovo Cimento **A33** (1976) 115; 389
- [43] A. Barducci, R. Casalbuoni and L. Lusana, Nuovo Cimento **A35** (1976) 377
- [44] L. Brink, S. Deser, B. Zumino, P. di Vecchia and P. Howe, Phys. Lett. **B64** (1976) 435
- [45] L. Brink, P. di Vecchia and P. Howe, Nucl. Phys. **B118** (1977) 76
- [46] A.P. Balachandran, P. Salomonson, B. Skagerstam and J. Winnberg, Phys. Rev. **D15** (1977) 2308
- [47] A.A. Slavnov, Teor. Mat. Fiz. **22** (1975) 177
- [48] J.V. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer, Berlin 1932)
- [49] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, (Nauka, Moscow, 1974)

- [50] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloë, *Quantum mechanics*, v.1,2 (Wiley, New York, Paris 1977)
- [51] S.S. Schweber, *An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory* (Row, Peterson, Evanston, IL 1961)
- [52] F.A. Berezin, Uspekhi Fiz. Nauk **132** (1980) 497
- [53] E.S. Fradkin, Proc. of Tenth Winter School of Theoretical Physics in Karpacz, Acta Univ. Wratisl. **207** (1973)
- [54] E.S. Fradkin and G.A. Vilkovisky, Prepr. CERN, Ref TH. 2332 (1977)
- [55] R.E. Kallosh and I.V. Tyutin, Nucl. Phys. **17** (1973) 183
- [56] L.D. Faddeev and V.N. Popov, Phys. Lett. **25B**, 30 (1967)
- [57] M.A. Naimark, Theory of Group Representation (Nauka, Moscow 1976)
- [58] R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20** (1948) 367
- [59] R.P. Feynman, Phys. Rev. **80** (1950) 440
- [60] R.P. Feynman, Phys. Rev. **84** (1951) 108
- [61] E.S. Fradkin, *Green's Function Method in Quantum Field Theory and Quantum Statistics*, Proc. P.N. Lebedev Phys.Inst. **29** (1965) 7 (Nauka, Moscow, 1965); B.M. Barbashov, JETP **48** (1965) 607; I.A. Batalin, E.S. Fradkin, Teor. Mat. Fiz. **5** (1970) 190; M. Henneaux, C. Teitelboim. Ann. Phys. **143** (1982) 127; N.V. Borisov and P.P. Kulish, Teor. Math. Fiz. **51** (1982) 335; A.M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, (Harwood, Chur, Switzerland, 1987); V.Ya. Fainberg and A.V. Marshakov, JETP Lett. **47** (1988) 565; Phys. Lett. **211B** (1988) 81; Nucl. Phys. **B306** (1988) 659; Proc. PhIAN **201** (1990) 139 (Nauka, Moscow, 1991); J. Ambjorn, B. Durhuus and T. Jonsson, Nucl. Phys. **B330** (1990) 509; E.S. Fradkin, D.M. Gitman and Sh.M. Shvartsman, *Quantum Electrodynamics with Unstable Vacuum*, (Springer-Verlag, Berlin, 1991); E.S. Fradkin and D.M.

- Gitman, Phys. Rev. **D44** (1991) 3230; D.M. Gitman, A.V. Saa, Class. Quant. Grav. **10** (1993) 1447; T.M. Aliev, V.Ya. Fainberg and N.K. Pak, Nucl. Phys. **B429** (1994) 321; J.W. van Holten. NIKHEF-H/95-050
- [62] A.M. Polyakov, in *Fields, Strings and Critical Phenomena*, Proceedings of the Les Houches Summer School. Les Houches, France, 1988, edited by E. Brézin and J. Zinn-Justin, Les Houches Summer School Proceedings, Vol. 49 (North-Holland, Amsterdam, 1990); Gauge Fields and Strings (Harwood Academic, Chur, Switzerland, 1987); Mod.Phys.Lett. **A3** (1988) 325
- [63] G.M. Korchemsky, Phys. Lett. **B322** (1989) 334; Int. J. Mod. Phys. **A7** (1992) 339; J. Grundberg, T.H. Hansson and A. Karlhede, Phys. Rev. **D41** (1990) 2642; Nucl. Phys. **B347** (1990) 420; A.I. Karanikas and C.N. Ktorides, Phys. Rev. **D52** (1995) 5883
- [64] D.M. Gitman and Sh.M. Shvartsman, Phys. Lett. **B318** (1993) 122; Errata. Phys. Lett. **B331** (1994) 449
- [65] D.M. Gitman, M.D. Noskov and Sh.M. Shvartsman, Int. J. Mod. Phys. **A6** (1991) 4437
- [66] D.M. Gitman, Preprint IFUSP/P-1228, Agosto/1996
- [67] D.M. Gitman, S.I. Zlatev, Phys. Rev. **D55** (1997) 7701
- [68] E.S. Fradkin, D.M. Gitman, Phys. Rev. **D44** (1991) 3230
- [69] I.A. Batalin, E.S. Fradkin, Teor. Mat. Fiz. **5** (1970) 190
- [70] J. Schwinger, Phys. Rev. **82** (1951) 664
- [71] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman and Sh.M. Shvartsman, Sov. Journ. Nucl. Phys. **29** (1979) 567; **29** (1979) 715
- [72] F. Bloch, Zs. f. Phys. **74** (1932) 295

- [73] D.A. Kirznitz, Proc. P.N. Lebedev Phys. Inst., Vol. XVI, (1951) 3; Field Methods in the Theory of Many Particles, (Atomizdat, Moscow 1963)
- [74] R. Glauber, Phys. Rev. **84** (1951) 395
- [75] R.P. Feynman, *An operator calculus having applications in quantum electrodynamics*, Phys. Rev. **84** (1951) 108-128
- [76] D.M. Gitman, S.I. Zlatev and P.B. Barros, *Application of Path Integration to Operator Calculus*, J. Phys. A: Math Gen. **31** (1998) 7791-7799
- [77] D.M. Gitman, S.I. Zlatev and P.B. Barros, *Application of Path Integration to Operator Calculus*, in Proceedings of XIX Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, Caxambu. Brazil, August 1998
- [78] D. Wick, Phys. Rev.. **80** (1950) 268
- [79] S. Hori, Progr. Theor. Phys.. **7** (1952) 578