UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SOBRE UMA CLASSE DE TEORIAS DA MECÂNICA

Jayme Vaz Jr.

SBI-IFUSP
305M810T1698

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO INSTITUTO DE FÍSICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS.

ORIENTADOR: **Prof. Dr. Newton Bernardes.**

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1698
e.1
INSTITUTO DE FÍSICA

N. Bernardes
Francisco Antonio Bezerra Coutinho
Mauro Dorfman

SÃO PAULO
1990

Defesa: 04.09.90

530.12
V393s
M
e.1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Vaz Júnior, Jayme
Sobre uma classe de teorias da mecânica.
São Paulo, 1990.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física dos Materiais e Mecânica.
Área de Concentração: Física do Estado Sólido.
Orientador: Profº Dr. Newton Bernardes

Unitermos: 1.Teorias da mecânica; 2.Mecânica clássica; 3.Mecânica quântica; 4.Generalização.

USP/IF/SBI - 21/90

aos meus nonni

Vitório Morandi (1912-1978)

e

Filomena Portoneri Giuliani (1894-1989),

com muito amor, respeito e saudade.

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. Dr. Newton Bernardes, pela orientação e por abrir um imenso horizonte de idéias.

- À todos os companheiros do IFUSP, particularmente Valdir Okano, pelas impagáveis ajudas, e Paschoal R. Peduto, pela sua paciência em me ensinar a usar o chi-writer, e aos da mesa do bar, à minha família e à Patrícia Longo, pelo constante incentivo.

- Às secretárias do IFUSP, Cláudia e Ellen, da pós-graduação, Rose e Bia, do departamento, Enza e Cláudia, da diretoria, e Rita, ex-secretária da pós-graduação, pelos inúmeros " galhos quebrados ".

- Ao Prof. Dr. Waldyr A. Rodrigues Jr., pela inestimável ajuda e hospitalidade no IMECC-UNICAMP.

- Aos companheiros Alexandre L. T. de Carvalho e Vilson Tonin-Zanchin, do IMECC-UNICAMP, pela solução dos vários problemas que enfrentei com os micros no período da redação final deste trabalho.

- À Igor Stravinsky (1882-1971), pelas suas composições, especialmente " Le Sacre du Printemps ", ao som das quais as palavras naturalmente fluiram da cabeça para o papel.

- Ao CNPq, pela bolsa de estudos sem a qual este trabalho nunca poderia realizar-se.

Jayme Vaz Jr., julho de 1990.

ÍNDICE

PREFÁCIO.....iii
RESUMO.....vii
ABSTRACT.....viii
PARTE I. FUNDAMENTOS.....1
1. O MOVIMENTO.....2
2. OS CONCEITOS DE CONJUNÇÃO E CONVOLUÇÃO.....5
3. CONJUNÇÃO E CONVOLUÇÃO NA MECÂNICA.....9
4. MECÂNICA CLÁSSICA E MECÂNICA GENERALIZADA.....20
PARTE II. A TEORIA CLÁSSICA DA MECÂNICA.....28
5. FORMALISMOS LAGRANGEANO E HAMILTONIANO.
TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS.....29
6. A LINGUAGEM E OS CONCEITOS MATEMÁTICOS DA
MECÂNICA CLÁSSICA.....36
PARTE III. TEORIAS GERAIS DA MECÂNICA.....50
7. FORMALISMO LAGRANGEANO.....51
8. VARIÁVEIS DINÂMICAS: DEFINIÇÃO.....58
9. VARIÁVEIS DINÂMICAS: EXTENSÃO.....70
10. VARIÁVEIS DINÂMICAS: GENERALIZAÇÃO.....82
11. FORMALISMO HAMILTONIANO.....102
12. TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS.....110
PARTE IV. EXEMPLO DE UMA TEORIA NÃO-CLÁSSICA DA MECÂNICA....124
13. DEFINICÃO DE DINÂMICA QUÂNTICA.....125
14. EXPLICITAÇÃO E PARTICULARIDADES DA MECÂNICA
GENERALIZADA.....140
15. MECÂNICA GENERALIZADA, MECÂNICA QUÂNTICA E
TEORIA QUÂNTICA.....165
PARTE V. CONCLUSÃO.....177
APÊNDICE. LINGUAGEM E ISOMORFISMO.....178
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....183

• PREFÁCIO •

Desde a década de 20, quando formulada, a Mecânica Quântica sempre foi objeto de intenso debate. Talvez o seu auge tenha se dado nos diálogos entre Bohr e Einstein mas não menos importantes são os que ainda hoje invadem as páginas das revistas especializadas. Felizmente, o debate continua vivo e questões como paradoxo E.P.R., teoria da medição, variáveis escondidas, etc., são exemplos que mostram estar a Física Quântica longe de um fim.

Fim este que parecia estar próximo para a Física Clássica não fossem as experiências realizadas em 1887 por Hertz e por Michelson e Morley que atingiram a Física Clássica pelos dois lados, o quântico e o relativístico. Caída no esquecimento, por vezes o estudo da Mecânica Clássica motivou-se por um certo aspecto histórico.

Quando em 1983 entrei na USP no curso de Química, ainda não estava certo do que gostaria de fazer. Passaram-se dois anos para eu ter a resposta: Mecânica. A Mecânica Quântica, com suas infindáveis questões, e a Mecânica Clássica, com a sua beleza formal, me fascinavam. Vim, em 1985, para o IFUSP trazendo na bagagem a grata experiência de um curso de Termodinâmica ministrado pelo prof. Bernardes no IQUSP em 1984.

Os anos de graduação no IFUSP serviram ainda mais para aumentar o meu fascínio pela Mecânica. Em 1987 procurei, interessado em trabalhar com os fundamentos da Mecânica Quântica, o prof. Bernardes para ser o meu orientador de mestrado no IFUSP. Daí em diante as coisas aconteceram sem que eu possa ordená-las cronologicamente.

Já há alguns anos, o prof. Bernardes desenvolve uma linha de pesquisa centrada, se posso assim dizer, na sua formulação da Termodinâmica Generalizada sob a forma Holotrópica. Embora o meu interesse por Termodinâmica fosse grande, assim como por outras áreas da Física, de modo algum suplantava aquele pela Mecânica, ou mesmo chegava perto. Um certo dia, porém, na biblioteca, deparei-me com um artigo de de Broglie publicado no primeiro número da Foundations of Physics na qual ele igualava a ação dividida pela constante de Planck

à entropia dividida pela constante de Boltzmann. Esse artigo, como se vê, até hoje não saiu da minha cabeça, e por muito tempo me questionei acerca do verdadeiro sentido dessa igualdade. Hoje, pelo menos hoje, eu a vejo metaforicamente.

A Termodinâmica Generalizada sob a forma Holotrópica envolve não apenas um aspecto formal mas também um forte conteúdo ideológico. Preocupado com esse conteúdo ideológico não apenas dentro da Termodinâmica e sabendo do meu interesse por Mecânica, o prof. Bernardes me propôs desenvolver uma pesquisa nessa linha dentro da Mecânica. Na mesma hora, não só aceitei, mas também sabia, senão a resposta, pelo menos por onde começar: a misteriosa igualdade de de Broglie. Embora nada do trabalho desenvolvido se relacione com essa igualdade, tampouco pretendia-se fazer algo nessa direção, ela foi para mim o ponto de partida. Os resultados que serão expostos me fazem vê-la pelo conteúdo ideológico.

A importância da formulação que apresento da Mecânica Generalizada deve ser vista por dois lados. Um envolve a sua relação ideológica com a Termodinâmica Generalizada sob a forma Holotrópica, que confirmam a generalidade das idéias do prof. Bernardes. O outro envolve a própria Mecânica Generalizada. Entre outras coisas, a sua relação com a Mecânica Quântica e a Mecânica Clássica é fundamental e abrange a Mecânica Quântica em si, a sua relação com a Mecânica Clássica e vice-versa, e esta mesma.

O meu objetivo ao escrever este trabalho, fora a satisfação pessoal e obter o grau de Mestre em Ciências, foi fazê-lo com uma grande preocupação didática. Contra isso, infelizmente, existem dois pontos: 1) nunca consegui ser muito didático, e, 2) o próprio tamanho deste trabalho.

Se é verdade que pau que nasce torto morre torto então nunca conseguirei resolvê-los. Principalmente o segundo, pois quando olho para este trabalho eu não consigo dizer que existem muitas coisas mas sim que faltam muitas coisas que poderiam ter sido discutidas. E se isso é exagero a minha desculpa está no sangue. De qualquer forma, se não é fácil ler um trabalho deste tamanho garanto que escrevê-lo foi mais difícil.

A ordem de exposição poderia ser modificada mas em sua essência acredito que esta seja, senão a mais fluente, a mais didática. Dividi o trabalho em quatro partes. Na primeira são apresentados e discutidos os fundamentos da Mecânica. Mostra-se que é possível formular a partir das leis da Mecânica outras teorias além da Clássica. É esta classe de teorias que denomina-se Mecânica Generalizada. Por ser um caso particular trivial desta a Mecânica Clássica é exposta na segunda parte, preparando o caminho para a formulação da Mecânica Generalizada na terceira parte. Na quarta é apresentado um exemplo não-trivial destas e conclui-se este trabalho discutindo a sua relação com a Mecânica Quântica, uma vez que estas são formalmente idênticas.

Hoje, eu reescreveria quase tudo. Não mudaria na ordem da exposição mas sim as palavras. E quando este prefácio estiver sendo lido, com certeza vou estar acreditando que seria melhor reescrever este trabalho de uma maneira diferente da que agora me refiro. Felizmente, esse é um processo natural, dinâmico.

Jayme Vaz Jr.

São Paulo, julho de 1990.

" Não há nenhuma última casa nesta rua;

é sempre possível construir mais uma ".

Wittgenstein (1889-1951),

em " Investigações Filosóficas ".

• RESUMO •

Neste trabalho mostra-se que uma devida reinterpretação das leis da Mecânica quando formuladas como um princípio variacional define uma classe de funcionais que as satisfazem. Cada funcional define uma teoria da Mecânica, chamada Mecânica Generalizada, que descreve uma particular dinâmica. A Mecânica Clássica, que descreve uma dinâmica chamada conjuntiva, baseia-se em uma escolha trivial deste funcional. Escolhas não-triviais definem teorias que descrevem dinâmicas chamadas convolutivas. Uma dessas escolhas não-triviais define uma teoria que descreve uma dinâmica convolutiva que se pode chamar quântica. Essa teoria é formalmente idêntica à Mecânica Quântica mas apresenta um conteúdo epistemológico diferente. A interpretação probabilística da Mecânica Quântica surge como uma interpretação suficiente mas não necessária desse formalismo.

• ABSTRACT •

In this work it is shown that a proper reinterpretation of the laws of Mechanics when formulated as a variational principle defines a class of functionals which satisfies them. Each functional defines one theory of Mechanics, called Generalized Mechanics, which describes a particular dynamics. The Classical Mechanics, which describes the so called conjunctive dynamics, is based on a trivial choice of this functional. Non-trivial choices define theories which describe the so called convolutive dynamics. One of these non-trivial choices defines a convolutive theory which may be called quantic. This theory is formally identical to Quantum Mechanics but it displays a different epistemological content. The probabilistic interpretation of Quantum Mechanics emerges as a sufficient but not necessary interpretation of this formalism.

SOBRE UMA CLASSE DE TEORIAS DA MECÂNICA *

* *Nesse trabalho serão considerados, salvo em algumas exceções, apenas os SISTEMAS COM UM GRAU DE LIBERDADE. O motivo é que já nesses casos a notação encontra-se sobrecarregada. O tratamento formal de sistemas com mais de um grau de liberdade constitui-se numa extensão trivial do que será exposto. Evita-se assim a possibilidade de obscurecer o conteúdo pelo formalismo.*

- PARTE I -

• FUNDAMENTOS •

Nesta parte pretende-se discutir os fundamentos da Mecânica começando pelo próprio conceito de movimento. Isso será feito no cap. 1. No cap. 2 são discutidos os conceitos de conjunção e convolução introduzidos por Bernardes dentro do contexto da Termodinâmica. No cap. 3 estas idéias são colocadas dentro do contexto da Mecânica. Com isso não se pretende estabelecer qualquer relação entre a Termodinâmica e a Mecânica que não seja uma relação entre idéias. Finalmente, no cap. 4, a Mecânica Clássica é vista sobre esse prisma, que mostra existir a possibilidade de formular outras teorias da Mecânica que não esta, o que é feito adiante.

1. O MOVIMENTO.

A Mecânica é a parte da Física que estuda o movimento dos corpos, procurando descrevê-lo através do ideal do conceito de ponto material ou partícula. Para isso é necessário que o seu objeto de estudo, o movimento, esteja precisamente definido. A realidade do movimento é, entretanto, uma questão que suscitou muitas discussões ao longo da história, como entre os gregos sobre a " kínesis ". Uma posição bem conhecida a esse respeito é a de Parménides, defendida por Zeno através de seus quatro argumentos, da negação da realidade do movimento. À parte das digressões filosóficas, situando-se apenas na esfera física, a questão do movimento possui pontos que não podem ser ocultados, onde a percepção do movimento é o enraizamento comum destes.

As leis do movimento de Newton, precisamente a primeira, não distinguem o movimento (uniforme) e o repouso, e o conceito newtoniano de movimento absoluto perde o seu sentido a partir do momento em que os conceitos de espaço e tempo absolutos mostram-se inadequados. O despencar desses conceitos remete o contraste entre o movimento e o repouso, entre o móvel e o imóvel, para um ato de percepção da parte de um observador em um sistema de referência, a percepção da ordem do movimento. A generalidade de uma descrição ou de uma teoria deve-se à abstração de algo relevante em uma coleção de fenômenos para desse modo descrevê-los sob o mesmo leque. Esse algo, aqui denominado ordem, é na Mecânica a ordem do movimento[1].

A percepção do movimento se dá quando, em um mesmo referêncial, um corpo situa-se em diferentes posições passado um intervalo de tempo, isto é, situa-se na posição $x_1 = x(t_1)$ no instante t_1 e na posição $x_2 = x(t_2)$ no instante t_2[2]. Implicitamente isso requer o

---

[1] Como tal a ordem do movimento sempre existe, quer o corpo esteja em movimento ou em repouso, pois é justamente a existência dessa ordem que permite dizer se o corpo está em movimento ou em repouso. Completamente distinta é a questão da relevância ou não de uma ordem. Ver Bohm (1980).

[2] Os casos nos quais o corpo move-se após o instante inicial

estabelecimento de duas relações matemáticas de ordem, isto é, uma relação transitiva e assimétrica entre os elementos de um conjunto. São necessárias uma ordem temporal e uma ordem espacial para que se possa falar, por exemplo, em *antes* e *depois* de um dado instante ou de uma dada posição. O que a descrita percepção do movimento faz é estabelecer uma correspondência biunívoca entre as ordens espacial e temporal. Contudo, existe uma arbitrariedade[3]. De fato, devido à reversibilidade temporal de suas leis, apenas contrapõe-se o *antes* e o *depois*, sem definí-los, de modo que na Mecânica, bastando querer, pode-se trocar o *antes* pelo *depois* e vice-versa que nada muda, caracterizando assim um tempo mecânico paramétrico desprovido de um conteúdo evolutivo, no sentido em que o *antes* precede o *depois*.

Por outro lado, deve-se notar que tal percepção envolve um contexto global onde não cabe uma definição de um estado de movimento em um dado instante. Mesmo assim, essa idéia é rica o suficiente para permitir que o estado do movimento seja definido de maneira rigorosa através da utilização da linguagem do cálculo diferencial e integral. Tomando-se o intervalo de tempo (t_2-t_1) infinitamente pequeno, considerando para isso que t_2 tende no limite a t_1, pode-se computar o valor da razão $(x_2-x_1)/(t_2-t_1)$ nesse limite, definida como a velocidade em um instante entre t_1 e t_2. O estado do movimento de um sistema mecânico em um dado instante é completamente definido pela sua posição e velocidade, supondo obviamente que o limite exista e seja bem definido.

À noção de estado do movimento relaciona-se a noção de dinâmica ou estado dinâmico do movimento. Classicamente, a dinâmica de um sistema mecânico consiste em fornecer a posição em função do tempo, ou seja, é descrita por uma função $x = x(t)$. Para que se possa estabelecer a dinâmica de um sistema mecânico através das leis do

---

retornando à sua posição inicial no instante final, dentre os quais os movimentos periódicos, são incluídos através da consideração de diferentes intervalos de tempo.

[3] Menos importante é a arbitrariedade envolvida na ordenação do plano e do espaço, contornável pelo conceito de trajetória, e que inexiste na ordenação da reta.

movimento é necessário que a definição de estado do movimento em um dado instante seja precisa e completa pois é a sua especificação que permite determinar a dinâmica através das leis do movimento. De fato, é justamente isso que está envolvido na segunda lei do movimento de Newton.

Resumindo, é possível determinar a dinâmica do movimento a partir de duas possibilidades: 1) do conhecimento das posições x_1 e x_2 ocupadas pelo corpo em dois instantes t_1 e t_2 distintos; 2) do conhecimento do estado do movimento , ou seja, a posição e a velocidade , do corpo em um dado instante. Dentro desse contexto é inegável a equivalência dessas duas possibilidades. Porém, o estabelecimento de uma diferenciação entre elas , além de esclarecedora, é que permitirá abrir as portas por onde deseja-se passar.

2. OS CONCEITOS DE CONJUNÇÃO E CONVOLUÇÃO.[1]

Dentro da relevância da ordem do movimento descrita no capítulo precedente definiu-se claramente o objeto de estudo da Mecânica. Isso implica, por exemplo, que não importa para o estudo do movimento de uma partícula a natureza da matéria que a compõe, e caso algum dia um fato empírico prove o contrário então tal ordem do movimento será irrelevante. A determinação da dinâmica do movimento se faz a partir das duas possibilidades expostas. Qualquer destas encerram por completo o conhecimento do estado dinâmico do movimento. Por outro lado, ambas requerem o conhecimento de variáveis de estado, cuja natureza será discutida adiante, especificadas como condições de contorno.

As variáveis de estado são adjetivos que qualificam o estado do substantivo, nesse caso o *movimento*, podendo ser quantitativos (variáveis extensivas) ou qualitativos (variáveis intensivas). A posição de uma partícula é uma variável extensiva pois é a distância entre um ponto e a origem de um sistema de coordenadas. A medição da distância é um exemplo de um processo de medição de grandezas extensivas cujos valores são expressos por números cardinais. Os números cardinais exprimem o quociente entre o valor da grandeza do objeto e o valor da mesma grandeza de um objeto-padrão tomado como unidade de medida, nesse caso, por exemplo, um metro-padrão, e uma de suas propriedades é a *aditividade*. Dizer, por exemplo, que a distância é de dez metros significa dizer que se estabeleceu uma correspondência biunívoca com dez réplicas do metro-padrão e que o conjunto dessas réplicas tem a cardinalidade dez, ou em outras palavras, que a realização do processo de medição fragmentou a distância como um todo em dez partes individuais e distinguíveis pondo-as em correspondência biunívoca com dez réplicas do metro-padrão. Do mesmo modo, um instante é uma variável extensiva pois é o intervalo de tempo a partir de um dado instante tomado como origem do tempo.

---

[1] O conteúdo dessa seção basela-se nas notas de aula do prof. Bernardes (1989) .

Já a velocidade " não " é uma variável extensiva. Desprovida da possibilidade de cardinalização à velocidade como variável intensiva não cabe a propriedade de aditividade. De fato, o conceito de " adição " de velocidades surge no contexto da transformação de referênciais e não em um mesmo referêncial onde se tem o conceito de *velocidade relativa*. Isso reflete a propriedade que as variáveis intensivas possuem de se permitirem a ordenação, no sentido matemático da relação de ordem exposta na capítulo anterior. Pode-se nesse caso falar em *maior*, *menor* e *diferença* mas não em *soma* . Não restam dúvidas de que os valores das variáveis intensivas são expressos por números ordinais. Essa diferença na natureza dos números evidencia-se quando se considera o processo através do qual atribui-se um valor numérico a uma variável. Quando se trata de uma variável extensiva faz-se realmente uma medição de acordo com uma pré-estabelecida teoria das variáveis extensivas. De fato, a Mecânica deve supor que existam réguas e relógios mas não que existam velocímetros. A " medição ", e certamente esta não é a palavra correta, de uma variável intensiva não se procede da mesma maneira, sendo assim parte integrante da própria teoria à qual ela pertence. Não é necessária a Mecânica para se dizer que a distância é dez metros, o intervalo de tempo é dois segundos, e que a partícula percorreu dez metros em dois segundos, mas é necessária a Mecânica para se dizer que a velocidade dessa partícula é cinco metros por segundo. Do mesmo modo, a Mecânica não é necessária para se construir uma régua ou um relógio, mas o é para se construir um velocímetro. Nesse ponto uma analogia é bem-vinda: a temperatura é uma variável intensiva, pode-se falar em diferença de temperaturas mas não em soma de temperaturas e a " medição " da temperatura e construção de um termômetro fazem parte da própria Termodinâmica.

A razão de ser dessa discussão é questionar uma sutil suposição feita que aparentemente é óbvia e trivial, mas apenas aparentemente. Voltando às variáveis extensivas, vê-se que a aditividade " é " uma das propriedades dos números cardinais que expressam o valor de uma medição destas " se " a propriedade que elas exprimem é uma *propriedade conjuntiva*. Enquanto que o fundamento do " é " está na Teoria dos Conjuntos, o fundamento do " se " é puramente empírico, sendo esta a suposição que precisa ser esclarecida. Sejam i objetos

empíricos com uma propriedade expressa por uma dada variável extensiva. O valor assumido por essa variável extensiva é a cardinalidade do conjunto de objetos-padrão postos em correspondência biunívoca com tal objeto empírico através do processo de medição, conforme visto no parágrafo precedente, e que muito simplificadamente quer dizer que o objeto contém um dado número de padrões. Assim sendo, cada um desses objetos i contém um dado número n_i de padrões. Suponha agora que esses objetos sejam justapostos de modo a formar um novo objeto único agregado, o conjunto desses objetos. O conjunto desses objetos contém um certo número N de padrões. Se o objeto novo global que é esse conjunto demonstrar a propriedade empírica de que ele contém um número de padrões que é a soma dos números de padrões de cada um dos objetos separados, ou seja, $N = \sum n_i$, então se dirá que a propriedade desses objetos expressa por essa variável extensiva é uma propriedade conjuntiva.

Por exemplo, ao contrário do que se imaginava, as experiências com partículas sub-atômicas no século XX demonstraram que a propriedade que os corpos possuem de serem massivos, expressa pela sua massa como variável extensiva, não é uma propriedade conjuntiva. A aditividade da massa só é aceitável em um limite onde a massa apresenta-se aproximadamente bem como uma propriedade conjuntiva mas onde ela deve ser vista como uma propriedade onde o aspecto não-conjuntivo torna-se desprezível.

Evidencia-se agora o motivo pelo qual se diz que a aditividade é uma das propriedades dos números cardinais que expressam o valor da medida cardinal de uma variável extensiva dos objetos se a propriedade que eles exprimem é uma propriedade conjuntiva. A soma é uma operação pertinente dentro do contexto da formação de um conjunto a partir da conjunção e que só é válida se os objetos desse conjunto forem conjuntivos. Há aqui a necessidade de que o processo de conjunção seja reversível através do processo de disjunção, de modo que se os dados objetos forem conjuntados e posteriormente disjuntados e ao final as suas propriedades forem as mesmas que possuiam no início então esses objetos são conjuntivos.

Três pontos devem ser ressaltados. Primeiro: os processos de conjunção e de disjunção não são necessariamente espaciais. Segundo:

pode ocorrer que certas propriedades não sejam as mesmas ao final mas mesmo assim o objeto possa ser considerado conjuntivo desde que essas propriedades sejam irrelevantes dentro do contexto de interesse, o que remete a questão para a relevância ou não de uma ordem. Terceiro: esse aspecto conjuntivo-disjuntivo de um objeto determina uma linguagem que se refere a uma coleção de objetos através do uso do elemento linguístico conjuntivo-disjuntivo *e/ou* .

Evidente está a essas alturas a importância das propriedades não-conjuntivas. Faz-se necessário o uso de um termo para exprimir a idéia de um imbricamento irreversível. Bernardes, por razões etimológicas, denominou uma propriedade não-conjuntiva uma *propriedade convolutiva*, contrapondo dessa maneira os conceitos de conjunção como uma reunião justapositiva reversível de objetos e convolução como uma reunião não-justapositiva irreversível de objetos[2].Se da conjunção resulta a soma como operação fundamental então da convolução resultará uma operação fundamental que no limite onde o aspecto convolutivo torna-se desprezível ela tenderá à soma. Vale lembrar que o aspecto conjuntivo ou convolutivo de uma propriedade limita-se às propriedades expressas por variáveis extensivas pois estas pertencem à uma pré-estabelecida teoria sendo dessa forma exteriores à teoria que delas se utiliza, ao contrário do que ocorre com as variáveis intensivas que pertencem exclusivamente ao domínio da teoria da qual fazem parte.

---

2 É interessante notar que a lingua portuguesa obscurece essa discussão, ao contrário, por exemplo, da lingua inglesa, onde as palavras CONJUNTO, CONJUNÇÃO e CONVOLUÇÃO correspondem respectivamente a SET, CONJUNCTION and FOLDING.

3. CONJUNÇÃO E CONVOLUÇÃO NA MECÂNICA.

A desmitificação da aditividade como uma propriedade fundamental e intocável abre um leque muito amplo de possibilidades especulativas. São as experiências quem, entretanto, revelam a natureza conjuntiva ou convolutiva de uma dada propriedade. No século XX o advento da Física Moderna mostrou ser necessária uma revisão de certos conceitos clássicos. Dentro desse espírito revisionista é natural centrar as atenções nos conceitos mecânicos sob o prisma da discussão anterior, tarefa para a qual as variáveis apropriadas são as extensivas . Sendo assim, deve-se considerar, com uma ligeira mudança de notação em relação aos capítulos anteriores, as posições x_0 e x_n em dois instantes t_0 e t_n distintos como caracterização do movimento de uma partícula.

O objetivo é estudar a dinâmica do movimento que se dá entre a posição x_0 no instante t_0, resumida por $P_0 = (t_0, x_0)$, e a posição x_n no instante t_n, resumida por $P_n = (t_n, x_n)$. A descrição clássica da dinâmica baseia-se em dois princípios ideológicos [1] segundo os quais o *todo* pode ser descrito em termos de suas *partes* (princípio ideológico da fragmentação) e que o *todo* é a soma de suas *partes* (princípio ideológico da conjunção), cujo uso inquestionável limita-se apenas aos objetos que apresentam propriedades conjuntivas. O princípio da conjunção diz que o estado de um todo é descrito pela conjunção dos estados de suas partes, definindo assim um estado conjuntivo do todo especificado pela conjunção dos estados das suas partes. O uso do princípio ideológico da fragmentação autoriza a descrição da dinâmica do movimento em termos de partes $P_j = (t_j, x_j)$ ($j = 0,1,\ldots,n$). O estado dinâmico clássico é definido como um estado conjuntivo a partir da conjunção dos P_j's, ou seja, pela conjunção de $P_0 = (t_0, x_0)$,

---

[1] No sentido em que nenhum fato empírico o comprova ou desaprova , pois quaisquer dificuldades possíveis podem ser contornadas através de um conveniente conceito de estado, refletindo assim um modo de pensar e um uso de uma linguagem acerca de um objeto. A palavra ideologia é usada na seguinte acepção :modo de pensar ou conteúdo do pensamento característico de um indivíduo ou de uma coletividade. Ver Bernardes (1988).

$P_1 = (t_1,x_1)$, ..., $P_n = (t_n,x_n)$. No limite em que $\Delta t_i \to 0$, onde $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, ($i = 0,1,\ldots,n-1$), tem-se uma trajetória no chamado espaço de configurações (EC) do sistema, isto é, uma função $x = x(t)$ para $t_0 \leq t \leq t_n$ com $x_i = x(t_i)$. Assim, a dinâmica clássica ou conjuntiva é descrita por uma função $x = x(t)$ representada como uma trajetória entre os pontos P_0 e P_n no EC.

Por outro lado, dados P_0 e P_n, existem inúmeras trajetórias ou caminhos possíveis entre esses dois pontos. Qual deles representa a dinâmica clássica, o caminho efetivo, pode ser determinado, como se sabe, a partir de um princípio variacional (PV). Por ora não interessa, entretanto, considerar a forma desse PV, sendo melhor inclusive ignorá-la. O interesse agora reside sobre generalidades e para tal basta supor a existência de um PV que determine a dinâmica.

A aceitação do princípio da fragmentação não será questionada. Supõe-se, portanto, que uma linguagem que se utiliza do conceito de caminhos ou trajetórias no EC é apta para descrever a dinâmica do movimento de um sistema mecânico. Contudo, isso não significa que a dinâmica deva ser representada por um dado caminho específico no EC. São as leis clássicas baseadas no princípio ideológico da conjunção que determinam uma dinâmica conjuntiva convenientemente descrita por essa linguagem como um caminho, o caminho efetivo, nesse espaço. É necessário, em vista disso, fazer um uso distinto das palavras " caminho " e " dinâmica ", inclusive na notação. O mesmo também para os conceitos de variável dinâmica (VD) e variável independente (VI), a primeira descrevendo a dinâmica do movimento do sistema e a segunda a posição do sistema.

Nesse ponto entra o PV que será tomado como o princípio fundamental da Mecânica pois a utilização de variáveis extensivas permite ampliar as possibilidades especulativas e a consideração do movimento como um todo está em estreita relação com a sua percepção. Suponha conhecidas as posições da partícula em dois instantes distintos, ou seja, conhecidos $P_0 = (t_0,x_0)$ e $P_n = (t_n,x_n)$. Pretende-se determinar a dinâmica do movimento que se dá entre esses dois pontos. O uso do princípio da fragmentação autoriza a falar-se em caminhos entre esses dois pontos. Cada caminho $\gamma : x = x(t)$ com $x(t_0) = x_0$ e $x(t_n) = x_n$ é uma conjunção das partes $P_j = (t_j,x_j)$ ($j = 0,1,\ldots,n$)

no limite em que $\Delta t_i \to 0$ ($i = 0,1,\ldots,n-1$). O primeiro passo consiste em associar a cada um desses caminhos um número A. Deve-se ter, portanto, um funcional $A[\gamma]$, que é o objeto matemático que associa a uma função um número. Um funcional pode ser pensado como uma função de infinitas variáveis, ou seja, uma função $A(x_0,\ldots,x_n)$ de $x_0,\ldots,x_n$ no limite em que $\Delta t_i \to 0$. Por ser mais intuitivo se adotará essa visão e para facilitar se usará $\Delta t_i = \varepsilon$ ($i = 0,1,\ldots,n-1$). Porém, para um dado caminho γ, A é uma função dos pontos terminais P_0 e P_n, ou seja, $A = A(x_n,t_n;x_0,t_0) \equiv A(n,0)$, função esta diferente para diferentes caminhos. Além disso, A deve depender da própria natureza do sistema mecânico considerado. Esse número A será suposto ser um número adimensional pois não existem quaisquer razões físicas, apenas talvez metafísicas, que inspirem e justifiquem uma interpretação a priori acerca da natureza dimensional desse número, o que permite que a sua interpretação pertença exclusivamente ao próprio formalismo sucedente.

Da mesma maneira, associa-se aos diferentes estados dinâmicos um número $\hat{A} = \hat{A}(x_n,t_n;x_0,t_0) \equiv \hat{A}(n,0)$, igualmente adimensional, onde a notação " ^ " foi usada para distinguir dinâmica e caminho. Como a hipótese feita acerca da validade do princípio da fragmentação implica que é possível descrever a dinâmica através do conceito de caminhos no EC então o número $\hat{A}$ pode ser obtido a partir dos números A's através de uma regra.

Pelo mesmo motivo é possível falar-se em variação de um caminho, ou seja, a variação δ de uma função. O conceito de variação de uma função é simples. Dado um caminho $\gamma : x = x(t)$ a sua variação $\delta x(t)$ é uma mudança infinitesimal de $x(t)$ que produz uma *nova* função $x'(t) = x(t) + \delta x(t) = x(t) + \sigma\eta(t)$. Esta variação é infinitesimal pois $\sigma \to 0$, virtual pois $\eta(t)$ é arbitrária, e feita em um dado t fixo, diferente, portanto, da variação infinitesimal $dx(t)$ causada pela variação infinitesimal dt do parâmetro t. O conceito de variação de um funcional também é simples. Seja γ: $x = x(t)$ e γ': $x = x'(t)$ com $x'(t) = x(t) + \delta x(t) = x(t) + \sigma\eta(t)$. Fixado γ, $\Delta A[c] = \Delta A[\gamma;c] = A[\gamma'] - A[\gamma] = A[\gamma+c] - A[\gamma]$ é um funcional de $c = \delta x(t) = \sigma\eta(t)$. Define-se $\delta A[c] = \delta A[\gamma;c]$ como sendo a

parte linear de $\Delta A[c]$ [2]. Embora $\Delta A[c]$ seja em geral um funcional não-linear, por definição $\delta A[c]$ é um funcional linear, $\delta A[a_1c_1 + a_2c_2] = a_1\delta A[c_1] + a_2\delta A[c_2]$. Quando o funcional é pensado como uma função de infinitas variáveis, a sua variação δA deveria ser escrita como o limite em que $\Delta t_i \to 0$ de $\delta_0 \delta_1 \ldots \delta_n A(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, onde $\delta_i x(t_i) = x'(t_i) - x(t_i) = \sigma\eta(t_i)$, ou considerando os extremos fixos $\delta_1 \ldots \delta_{n-1} A(x_0,x_1,\ldots,x_n)$, mas uma vez compreendido o significado da variação δ essa notação não é necessária.

Agora, é possível formular o PV fundamental da Mecânica que diz que a dinâmica do movimento entre P_0 e P_n é determinada pelas condições $\delta\hat{A}(n,0) = 0$ e $\delta A(n,0) = 0$, ou seja, os valores de $\hat{A}(n,0)$ e $A(n,0)$ são estacionários. Isso nada mais é do que uma versão desembaralhada do PV clássico onde os conceitos de dinâmica e caminho se confundem, ou seja, classicamente $\hat{A}(n,0) = A(n,0)$, e já que tendo sido mostrado necessário distinguir dinâmica e caminho então exige-se uma condição sobre cada um separadamente. Para que o princípio fundamental da Mecânica esteja completamente definido é preciso que a regra citada, que permite calcular $\hat{A}$ a partir dos A's, esteja definida pois a variação δ age sobre os caminhos aos quais estão associados os A's. Porém, como esse PV foi tomado como um princípio fundamental a regra citada não pode ser arbitrária. Sendo assim, como deve existir essa regra, deve ser possível estabelecer apenas uma condição de modo que a própria natureza dessa regra impõe a outra condição. É esse, agora, o centro das atenções.

Inicialmente deve-se perguntar qual é a forma mais geral possível da regra acima citada. Note que existem infinitos caminhos γ's entre P_0 e P_n e a cada um destes está associado um A, existindo, portanto, infinitos A's. Como cada caminho pode ser considerado como uma conjunção dos $P_0,P_1,\ldots,P_n$ então pode-se associar a cada trecho do caminho correspondente a um intervalo de tempo $\varepsilon = t_{i+1} - t_i$ um número $A_i \equiv A(i+1,i) = A(x_{i+1},t_{i+1};x_i,t_i)$ ($i = 0,1,\ldots,n-1$) e daí considerar a função dos A's como uma função dos $A(i+1,i)$ no limite em que $\varepsilon \to 0$. Por outro lado, nada foi dito sobre como escrever

---

[2] Ver Gelfand & Fomin (1963).

$A(x_0,\ldots,x_n)$ em termos dos $A(i+1,i)$. De fato, ele não foi definido, e apenas foram feitas exigências que devem ser satisfeitas pela sua definição, dentre elas $\delta A(n,0) = 0$, que se refere à variação do caminho como um todo. Logo, considerando-se a variação $\delta A(i+1,i)$ em cada trecho, a exigência acima deve traduzir-se em $\sum_{i=0}^{n-1}\delta A(i+1,i) = 0$ pois as variações em cada trecho não são independentes visto que os extremos x_0 e x_n estão fixos. Em outras palavras, $\delta A(1,0)$ pode ser arbitrária mesmo com x_0 fixo, assim como $\delta A(2,1)$ e assim por diante até $\delta A(n-1,n-2)$, mas uma vez escolhida esta última então $\delta A(n,n-1)$ está determinada pois x_n está fixado[3], de sorte que deve-se exigir que $\sum_{i=0}^{n-1}\delta A(i+1,i) = 0$ e não $\delta A(i+1,i) = 0$ para todos os i's. Isso significa que não é necessário para que $\delta A(n,0) = 0$ que $\delta A(i+1,i) = 0$ em cada trecho, mas, sim, que as variações $\delta A(i+1,i)$ em cada trecho se compensem de modo que $\sum_{i=0}^{n-1}\delta A(i+1,i) = 0$. Enfim, ao invés de considerar uma função dos A's e a condição $\delta A(n,0) = 0$, pode-se considerar uma função de $A(1,0)$, $A(2,1),\ldots,$ $A(n,n-1)$ e a condição $\sum_{i=0}^{n-1}\delta A(i+1,i) = 0$ no limite em que $\varepsilon \to 0$.

Por outro lado, como apenas x_0 e x_n estão fixados, a especificação de $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ determina um caminho no limite $\varepsilon \to 0$ e qualquer operação sobre os caminhos pode ser considerada como uma operação sobre $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$. A regra mais geral possível consiste da combinação da função e da operação acima descritas. É fácil ver que qualquer regra por mais geral que seja pode ser escrita nessa forma. Denotando essa operação por Ω de modo que Ω_k é uma operação definida sobre x_k ($k = 1,\ldots,n-1$) e a função por ω pode-se escrever

$$\hat{A}(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_{n-1}\omega[A(1,0),A(2,1),\ldots,A(n,n-1)] \; . \qquad (1)$$

Está claro que a operação Ω e a função ω não podem ser arbitrárias, afinal elas devem ser tais que o PV $\delta\hat{A}(n,0) = 0$ e $\delta A(n,0) = 0$ seja satisfeito com uma condição implicando na outra. Para

---

[3] Não é demais lembrar que se está trabalhando com um número n finito e nesse caso a afirmação acima está correta; para a variação de um caminho no EC considera-se o limite $\varepsilon\to 0$ quando o número de pontos $N = (tn-t0)/\varepsilon$ tende a infinito ($N\to\infty$).

calcular $\delta\hat{A}(n,0) = 0$ a partir de (1) é necessário fazer algumas hipóteses acerca de Ω e de sua relação com δ.

A mais simples e que a princípio satisfaz essas necessidades é supor que o efeito das operações δ e Ω seja o mesmo indiferentemente à sua ordem de aplicação e que se $\Omega x = 0$ então $x = 0$. Essas duas hipóteses implicam nas condições do PV mas são muito restritas. De fato, discute-se no próximo capítulo as consequências dessas hipóteses, sendo possível ver o grau de restrição imposto a estas operações através destas hipóteses. Uma hipótese muito mais geral que a primeira e que a inclui como um caso particular é

$$\delta\Omega A = H_1\Omega H_2(\delta A) \quad , \tag{2a}$$

onde H_1 e H_2 são operações que a princípio podem depender de A e ΩA e que no limite $\Omega = 1$ devem ser tais que $H_1H_2x = x$. O caso particular trivial $H_1 = H_2 = 1$ corresponde à primeira hipótese. Portanto, enquanto a hipótese inicial correspondia a $\delta\Omega = \Omega\delta$ a hipótese (2a) corresponde a $\delta\Omega = \Omega'\delta$ com $\Omega' = H_1\Omega H_2$, ou seja, ao trocar a ordem das operações em $\delta\Omega$ a operação Ω transforma-se em $\Omega' = H_1\Omega H_2$, $\delta\Omega = \Omega'\delta = H_1\Omega H_2\delta$. Essa generalização mostra como proceder em relação à segunda hipótese, ou seja,

$$H_1\Omega H_2(\delta A) = 0 \;\Rightarrow\; \delta A = 0 \quad . \tag{2b}$$

É importante notar que essa hipótese é muito mais geral do que aparenta. De fato, δA é um funcional de γ: $x = x(t)$ e $c = \gamma' - \gamma$, γ': $x = x'(t) = x(t) + \delta x(t) = x(t) + \sigma\eta(t)$, $\delta A[\gamma;c]$, onde $\eta(t)$ é uma função arbitrária. Logo, (2b) diz que se $H_1\Omega H_2(\delta A) = 0$ para um $\eta(t)$ arbitrário então $\delta A = 0$, o que não significa que se $H_1\Omega H_2x = 0$ então $x = 0$, a menos que $x[\gamma] = x[\gamma;c]$ onde $c = \sigma\eta(t)$. As hipóteses (2) são muito mais gerais, o que permite fazer algumas restrições mantendo ainda assim uma discussão ampla. Para não desviar agora do assunto corrente essa questão será discutida quase no final do próximo capítulo. Agora, com a ajuda dessas hipóteses é possível calcular $\delta\hat{A}(n,0)$. Usando (1) com a ajuda da hipótese (2a) obtém-se

$$0 = \delta\hat{A}(n,0) = \delta \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_{n-1} \omega[A(1,0),\ldots,A(n,n-1)] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} H_1 \left[\Omega_1 \Omega_2 \ldots \Omega_{n-1} \left[H_2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial A(1,0)}\delta A(1,0) + \frac{\partial \omega}{\partial A(2,1)}\delta A(2,1) + \ldots + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\partial \omega}{\partial A(n,n-1)}\delta A(n,n-1)\right)\right]\right] = 0 ,$$

e através de (2b),

$$\frac{\partial \omega}{\partial A(1,0)}\delta A(1,0) + \frac{\partial \omega}{\partial A(2,1)}\delta A(2,1) + \ldots + \frac{\partial \omega}{\partial A(n,n-1)}\delta A(n,n-1) = 0$$

onde usando $\sum_{i=0}^{n-1}\delta A(i+1,i) = 0$,

$$\left[\frac{\partial \omega}{\partial A(2,1)} - \frac{\partial \omega}{\partial A(1,0)}\right]\delta A(2,1) + \left[\frac{\partial \omega}{\partial A(3,2)} - \frac{\partial \omega}{\partial A(1,0)}\right]\delta A(3,2) +$$

$$+ \ldots + \left[\frac{\partial \omega}{\partial A(n,n-1)} - \frac{\partial \omega}{\partial A(1,0)}\right]\delta A(n,n-1) = 0 .$$

Como $\delta A(i+1,i) \neq 0$ segue-se que ω deve satisfazer o sistema de (n-1) equações diferenciais abaixo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial A(1,0)} &= \frac{\partial \omega}{\partial A(2,1)} , \\ \frac{\partial \omega}{\partial A(1,0)} &= \frac{\partial \omega}{\partial A(3,2)} , \\ &\ldots\ldots \\ \frac{\partial \omega}{\partial A(1,0)} &= \frac{\partial \omega}{\partial A(n,n-1)} . \end{aligned} \tag{3}$$

A solução geral do sistema (3) pode ser facilmente obtida a partir de uma mudança de variáveis, das n variáveis $A(1,0),\ldots,A(n,n-1)$ para as n variáveis $\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}$,

$$\xi_0 = A(1,0) + A(2,1) + \ldots + A(n,n-1),$$

$$\xi_1 = A(1,0) - A(2,1) ,$$

$$\ldots\ldots$$

$$\xi_{n-1} = A(1,0) - A(n,n-1) .$$

Em termos das variáveis $\xi_0,\ldots,\xi_{n-1}$ a função ω escreve-se W e as derivadas ficam

$$\frac{\partial\,\omega}{\partial A(1,0)} = \frac{\partial\,W}{\partial\xi_0} + \frac{\partial\,W}{\partial\xi_1} + \ldots + \frac{\partial\,W}{\partial\xi_{n-1}}$$

$$\frac{\partial\,\omega}{\partial A(2,1)} = \frac{\partial\,W}{\partial\xi_0} \quad \frac{\partial\,W}{\partial\xi_1}$$

$$\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\,\omega}{\partial A(n,n-1)} = \frac{\partial\,W}{\partial\xi_0} \quad \frac{\partial\,W}{\partial\xi_{n-1}}$$

Substituindo as expressões para as derivadas em (3) e fazendo os cancelamentos possíveis obtém-se

$$\begin{aligned} 2\,\frac{\partial\,W}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\,W}{\partial\xi_2} + \ldots + \frac{\partial\,W}{\partial\xi_{n-1}} &= 0 \\ \frac{\partial\,W}{\partial\xi_1} + 2\,\frac{\partial\,W}{\partial\xi_2} + \ldots + \frac{\partial\,W}{\partial\xi_{n-1}} &= 0 \\ \ldots\ldots \\ \frac{\partial\,W}{\partial\xi_1} + \frac{\partial\,W}{\partial\xi_2} + \ldots + 2\frac{\partial\,W}{\partial\xi_{n-1}} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Como o determinante da matriz formada pelos coeficientes em (4) é não-nulo a única solução é a solução trivial ,

$$\frac{\partial\,W}{\partial\xi_1} = \frac{\partial\,W}{\partial\xi_2} = \ldots = \frac{\partial\,W}{\partial\xi_{n-1}} = 0 \quad . \tag{5}$$

A solução geral de (3) é função apenas de ξ_0, isto é, $\omega = \omega[A(1,0) + A(2,1) + \ldots + A(n,n-1)]$ e (1) escreve-se

$$\hat{A}(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_1\,\Omega_2 \ldots \Omega_{n-1}\,\omega[A(1,0) + A(2,1) + \ldots + A(n,n-1)] \ ,$$

$$\hat{A}(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_1\,\Omega_2 \ldots \Omega_{n-1}\,\omega\Big[\sum_{i=0}^{n-1} A(i+1,i)\Big] \quad . \tag{6}$$

A equação (6) diz como definir $A(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ em termos de $A(i+1,i)$ e, no limite $\varepsilon \to 0$, $A[\gamma]$. Define-se

$$A(x_0,x_1,\ldots,x_n) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} A(i+1,i) \quad , \tag{7}$$

$$A[\gamma] = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} A(i+1,i) \quad , \tag{8}$$

de modo que o funcional $A[\gamma]$ é um funcional local [4]. Resta, entretanto, uma outra questão a ser discutida que é sobre o limite $\varepsilon \to 0$ em (8), ou seja, $A(i+1,i)$ deve ser definido de modo que (8) exista. Daí, a procura por uma medida $\mu(\varepsilon)$ de ε.

Como se sabe [5], uma função monótona não-decrescente $F(t)$ é a função geratriz de uma medida de Lebesgue-Stieltjes $\mu_F(t)$, de modo que $\mu_F(\Delta t_i) = F(t_{i+1}) - F(t_i)$. Assim, se adotará como a medida $\mu(\varepsilon)$ de ε uma medida de Lebesgue-Stieltjes $\mu_F(\varepsilon)$. Visto que $A(i+1,i)$ deve depender da natureza do sistema mecânico considerado define-se

$$A(i+1,i) = \ell_i^0 \, \mu_F(\varepsilon)$$

onde ℓ_i^0 ($i = 0,1,\ldots,n-1$) é o valor assumido por uma função $\mathcal{L}^0$, suposta contínua, em um ponto x_i' entre x_i e x_{i+1}. É a função $\mathcal{L}^0$ que caracteriza o sistema mecânico. Como o movimento de um sistema mecânico é especificado por sua posição em dois instantes distintos então $\mathcal{L}^0$ deve ser função de x e de sua derivada $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ e talvez também de t, isto é, $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L}^0(x,\dot{x},t)$. Assim, a equação (8) escreve-se

$$A[\gamma] = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} A(i+1,i) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \ell_i^0 \mu_F(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_n} \mathcal{L}^0(x,\dot{x},t)\, d\mu_F(t)$$

onde $d\mu_F(t) = dF(t)$ [6]. Supondo $F(t)$ absolutamente contínua tem-se

---

[4] Ver, por exemplo, Gelfand & Fomim (1963).

[5] A Teoria da Medida é exposta detalhadamente em Kolmogorov & Fomim (1978).

[6] Conforme definida essa integral é uma integral de Stieltjes. Sobre

$dF(t) = F'(t)\,dt$ e define-se [7]

$$A[\gamma] = \int_{t0}^{tn} \mathcal{L}^0(x,\dot{x},t)F'(t)dt \equiv \int_{t0}^{tn} \mathcal{L}(x,\dot{x},t)dt \quad , \tag{9}$$

onde $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}^0\, F'(t)$ tem a dimensão de inverso de tempo. A função $\mathcal{L}(x,\dot{x},t)$ que caracteriza o sistema mecânico é chamada função de Lagrange ou lagrangeana. As propriedades do sistema, tais como as de simetria, devem estar contidas nessa lagrangeana. Por outro lado, pode-se também escrever $\mathcal{L} = \alpha L$ onde $L = L(x,\dot{x},t)$ é a mesma função $\mathcal{L}(x,\dot{x},t)$ apenas que em qualquer outra dimensão desejada e α é uma constante com a dimensão inversa do produto entre tempo e dimensão de L , ou seja,

$$A[\gamma] = \alpha\int_{t0}^{tn} L(x,\dot{x},t)dt = \alpha S[\gamma] \quad , \tag{10}$$

$$S[\gamma] \equiv \int_{t0}^{tn} L(x,\dot{x},t)dt \quad , \tag{11}$$

onde S tem a dimensão inversa de α .

Finalmente (6) escreve-se como

$$\hat{A}(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_1\, \Omega_2 \ldots \Omega_{n-1}\, \omega[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon L(x'_i,\dot{x}'_i,t')] \quad , \tag{12}$$

resumida por

---

esse ponto, ver Riesz & Sz-Nagy (1965). Nessa referência faz-se uma discussão sobre a integral de Stieltjes, sobre a sua relação com as integrais de Riemann e de Lebesgue, e sobre as suas generalizações, as integrais de Riemann-Stieltjes e Lebesgue-Stieltjes.

[7] Do ponto de vista matemático falta especificar o conjunto de funções no qual o funcional $A[\gamma]$ está definido, o que depende das particularidades do sistema considerado, ou seja, da função $\mathcal{L}^0$. A princípio $A[\gamma]$ está definido sobre o domínio da classe das funções $x = x(t)$ contínuas e com a primeira derivada contínua, e com x_0 e x_n fixos.

$$\hat{A}(n,0) = \alpha\hat{S}(n,0) = {}_{[\gamma]}\Omega\,\omega(A[\gamma]) = {}_{[\gamma]}\Omega\,\omega(\alpha S[\gamma]) \quad , \tag{13}$$

onde $\hat{S}$ apresenta a mesma dimensão de S. Note que ao escrever-se $\hat{S}$ em termos de S através de (13) não se pode cancelar a constante dimensional α pois nem a operação nem a função estão definidas. Inclusive, elas podem ser tais que não permitam o cancelamento. De fato, α deve ser tal que (12-13) exista[8].

É fácil ver que através das condições impostas sobre a operação Ω a condição $\delta\hat{A}(n,0) = 0$ implica em $\delta A(n,0) = 0$. Pode-se então reformular o princípio fundamental da Mecânica como o " princípio do " $\hat{A}$ " estacionário " que diz que a dinâmica do movimento entre P_0 e P_n é aquela para a qual o valor de $\hat{A}$ é estacionário, ou seja, $\delta\hat{A}(n,0) = 0$. Note que é necessário primeiro definir a operação Ω e a função ω para que possa ser atribuído algum significado físico às grandezas acima.

---

[8] Este assunto será revisto no cap. 13.

4. MECÂNICA CLÁSSICA E MECÂNICA GENERALIZADA.

Não restam dúvidas agora quanto à natureza das leis clássicas. Essas leis, que definem uma dinâmica conjuntiva descrita como um caminho no EC do sistema, correspondem às escolhas triviais $\Omega = 1$ e ω = constante escolhida igual a 1 [1], e desse modo $\hat{A}(n,0) = A(n,0)$. A dinâmica conjuntiva ou clássica reflete-se na aditividade de $\hat{A}(n,0) = A(n,0)$ e o princípio do " $\hat{A}$ " estacionário é o PV clássico. Entretanto, esta não é uma escolha necessária. A correta reinterpretação das leis mecânicas conduz a uma classe de possibilidades dentre as quais a escolha clássica trivial é uma delas, correspondendo à uma dinâmica conjuntiva. A classe geral de possibilidades $\Omega \neq 1$ e/ou $\omega \neq 1$ correspondem à uma dinâmica não-conjuntiva, ou seja, uma dinâmica *convolutiva*.

Desse modo, inúmeras teorias podem ser construídas a partir da escolha de uma operação Ω e/ou de uma função ω, para então serem submetidas ao julgamento pelas experiências. É preciso, contudo, estar claro o que se entende por uma teoria. Por teoria física entende-se[2] um esquema geral que permite enunciar um conjunto de proposições acerca das propriedades empiricamente observáveis de um objeto. Esse esquema geral baseia-se em proposições axiomáticas que, necessariamente, envolvem pelo menos uma propriedade não-observável. Uma autêntica teoria diferencia-se, portanto, da fenomenologia pela presença de pelo menos um elemento não-observável. Logo, diferentes Ω e/ou ω definem diferentes elementos não-observáveis, diferentes teorias da Mecânica.

Deve-se notar, no entanto, que a teoria clássica baseada nas escolhas triviais é uma descrição adequada dentro do limite das experiências humanas. Ocorre que toda a discussão feita exige que, em vista disso, duas possibilidades sejam examinadas, a saber: 1) se as escolhas triviais são as únicas possíveis, ou seja, as propriedades

---

[1] Dois funcionais A e cA , onde c é uma constante diferente de zero, são equivalentes pois apresentam a mesma solução para o princípio variacional. Por isso escolhe-se c=1 . Ver Gelfand & Fomim (1963).

[2] Ver Bernardes (1990).

dinâmicas são propriedades conjuntivas; 2) se $\Omega = 1$ e $\omega = 1$ são limites de uma outra operação e/ou função mais gerais, ou seja, o aspecto conjuntivo da dinâmica corresponde a um limite onde o aspecto convolutivo torna-se desprezível.

Não se faz necessário invocar de antemão os fatos experimentais para daí optar pela segunda possibilidade. De fato, além da própria natureza especulativa do espírito científico, o próprio bom senso sugere essa escolha, remetendo o juízo para as experiências. Essa segunda possibilidade corresponde a definir uma classe de teorias da Mecânica tais que em um certo limite específico tem-se $\Omega \to 1$ e $\omega \to 1$, limite este que depende da própria operação e função escolhidas. As teorias pertencentes a esta classe apresentam uma dinâmica convolutiva que em um certo limite definido dentro de cada teoria, onde o aspecto convolutivo torna-se desprezível, correspondem à dinâmica clássica, conjuntiva [3].

Agora, resta uma questão: como formular tais teorias ? Para formulá-las será exigido que as equações dessas teorias tenham a mesma forma das equações clássicas, ou em outras palavras, que essa classe de teorias seja *isomorfa* à Mecânica Clássica[4]. As razões que levam à exigência do isomorfismo são discutidas no apêndice, e referem-se ao uso de uma linguagem. Embora exija-se o isomorfismo entre essa classe de teorias da Mecânica com a Mecânica Clássica, mesmo assim elas apresentam um conteúdo epistemológico radicalmente diferente. A interpretação física depende das escolhas de Ω e ω .

Várias sub-classes de teorias da Mecânica podem ser definidas. Além da clássica, $\Omega = 1$ e $\omega = 1$, pode-se ter $\Omega \neq 1$ e $\omega = 1$, $\Omega = 1$ e $\omega \neq 1$, e $\Omega \neq 1$ e $\omega \neq 1$. Mesmo excluindo as duas últimas possibilidades

---

[3] Define-se assim uma postura ideológica acerca das propriedades dinâmicas onde não há lugar para a conjunção a não ser em um limite como uma aproximação da convolução. Nesse limite pode-se usar as escolhas triviais como uma regra para os cálculos mas não a postura ideológica decorrente dessa possível escolha de antemão.

[4] A mesma exigência em relação a Termodinâmica Clássica é feita por Bernardes (1989) para a formulação das Teorias Holotrópicas da Termodinâmica.

ao se fazer $\omega = 1$, ainda assim há uma ampla classe de possibilidades a serem exploradas pela escolha de Ω. Como não há perda de generalidade, ω será escolhido igual a 1. Resta agora, portanto, formular essas teorias. À essa classe de teorias da Mecânica será dada a denominação de *Mecânica Generalizada*. A própria Mecânica Clássica pode ser considerada uma Mecânica Generalizada trivial, isto é, com $\Omega = 1$. A escolha de uma operação Ω não-trivial, que deve satisfazer as hipóteses feitas sobre ela e mais algumas possíveis, e que em um certo limite tende à trivial, define uma Mecânica Generalizada cuja formulação será guiada pelo isomorfismo. Por isso a próxima parte será dedicada à uma breve exposição da Mecânica Clássica para na parte III ser formulada a Mecânica Generalizada. Nesse caso ficará claro que as equações do movimento são a solução do princípio do " $\hat{A}$ " estacionário $\delta\hat{A}(n,0) = 0$. Devido a (2a) essa variação escreve-se

$$\delta\hat{A} = \delta \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_1 \ldots \Omega_{n-1} A = \lim_{\varepsilon\to 0} H_1[\Omega_1 \ldots \Omega_{n-1}[H_2(\delta A)]] =$$
$$= H_1[\Omega_{[\gamma]}[H_2(\delta A[\gamma])]] \ ,$$

que não é uma forma muito apropriada, o que se deve à hipótese (3.2a). Voltando um pouco atrás, é bom rediscutir os motivos que levaram à essa hipótese.

A primeira hipótese pensada foi que o efeito das operações Ω e δ fosse indiferente à sua ordem de aplicação. Note, entretanto, que se esta fosse aceita então a operação Ω estaria restrita à classe de operações lineares. De fato, se $\delta\Omega = \Omega\delta$,

$$\delta\hat{A} = \delta\Omega A = \Omega\delta A \ .$$

Como $\delta A = \delta A[\gamma;c] = A[\gamma+c] - A[\gamma]$, explicitando c,

$$\delta\hat{A}_c = \Omega_{[\gamma]}\delta A[\gamma;c] = \Omega\delta A[c] \ .$$

Agora lembrando que esses funcionais são lineares em c por definição,

$$\delta A[a_1c_1 + a_2c_2] = a_1\delta A[c_1] + a_2\delta A[c_2],$$

$$\delta\hat{A}_{a_1c_1 + a_2c_2} = a_1\delta\hat{A}_{c_1} + a_2\delta\hat{A}_{c_2} \quad ,$$

a expressão acima escreve-se

$$\delta\hat{A}_{a_1c_1 + a_2c_2} = a_1\delta\hat{A}_{c_1} + a_2\delta\hat{A}_{c_2} = \Omega\delta A[a_1c_1 + a_2c_2] =$$

$$= \Omega(a_1\delta A[c_1] + a_2\delta A[c_2]) \quad ,$$

onde usando $\delta\Omega = \Omega\delta$,

$$a_1\Omega\delta A[c_1] + a_2\Omega\delta A[c_2] = \Omega(a_1\delta A[c_1] + a_2\delta A[c_2]) \quad ,$$

que mostra que a operação Ω é linear se $\delta\Omega = \Omega\delta$.

Conseqüentemente, se fosse feita a hipótese $\delta\Omega = \Omega\delta$ as operações Ω estariam sendo restritas à classe de operações lineares. A hipótese (3.2a) inclui, portanto, operações não-lineares. Contudo, se a classe de operações lineares já é ampla, a de operações não-lineares é maior ainda. É possível fazer algumas restrições que facilitam a manipulação das equações envolvendo Ω, mantendo essa classe ainda ampla, a partir da hipótese (3.2a). A única exigência feita sobre as operações H_1 e H_2 foi que no limite $\Omega = 1$ $H_1H_2x = x$, ou seja, a operação H_1 é a operação inversa de H_2, $H_1 = H_2^{-1}$. Isso não significa que a operação H_2 deva possuir uma inversa e nem que H_1 seja igual a esta para qualquer Ω, mas sim apenas para $\Omega = 1$. É natural supor também que nesse limite exista H_1^{-1} e $H_2 = H_1^{-1}$ pois nesse caso $\delta\hat{A} = \delta A = H_1H_2\delta A$ deve ser inversível, o que não é sustentável se $\Omega \neq 1$.

Dada uma operação Ω é fácil escrever H_1 e H_2. Para a classe geral de operações Ω consideradas isto já não é possível. Porém, pode-se considerar dentro deste trabalho uma certa classe de operações Ω não-lineares para as quais isto é possível. Suponha que a operação Ω seja tal que se possa definir uma operação linear Ω^L através da transformação $\Omega^L = T_1\Omega T_2$. Para que essa transformação seja inversível devem existir T_1^{-1} e T_2^{-1}. Mais ainda, deseja-se que $\Omega = 1$ implique em $\Omega^L = 1$ e vice-versa, ou seja, $T_1 = T_2^{-1}$, $T_2 = T_1^{-1}$. Portanto, para esta

classe de operações Ω é possível definir uma operação $\overset{L}{\Omega}$ linear através de $\Omega^L = T\Omega T^{-1}$ ou $\Omega = T^{-1}\Omega^L T$. Esta classe de operações é muito ampla e pode-se considerar apenas as operações Ω pertencentes a ela. Nesse trabalho, entretanto, se fará uma restrição a mais supondo que $T(A[\gamma]) = \theta(A[\gamma])$ onde $\theta = \theta(x)$ é uma função inversível com sua inversa denotada por $\theta^{-1}(x)$. Logo, serão consideradas apenas as operações não-lineares Ω às quais é possível associar uma operação linear Ω^L através da transformação

$$\Omega^L = \theta\Omega\theta^{-1} \quad , \tag{1a}$$

$$\Omega = \theta^{-1}\Omega^L\theta \quad , \tag{1b}$$

onde θ é uma função inversível. Se Ω é linear, obviamente $\theta = 1$. Por outro lado, usando $\delta\Omega^L = \Omega^L\delta$ é fácil chegar à seguinte expressão para H_1 e H_2,

$$H_2(\delta A) = \theta^{-1}([\theta(A)]'\delta A) \quad ,$$

$$H_1[\Omega[H_2(\delta A)]] = [\theta^{-1}(\theta(\Omega A))]'\theta(\Omega(H_2(\delta A))),$$

onde o sinal ' indica a derivação da função em relação ao seu argumento. Para $\Omega = 1$, $H_1H_2\delta A = \delta A$. Para esta classe de operações Ω é muito mais natural usar a operação $\overset{L}{\Omega}$. A linearidade, embora não seja uma propriedade necessária, é uma propriedade desejável. Em termos desta, de (3.13),

$$\hat{A}(n,0) = \underset{[\gamma]}{\Omega} A[\gamma] = \theta^{-1} \underset{[\gamma]}{\Omega^L} \theta A[\gamma] \quad , \tag{2}$$

que mostra ser conveniente usar a função θ para definir

$$\Theta = \theta(x) \quad , \quad x = \theta^{-1}(\Theta) \quad , \tag{3}$$

em termos da qual (2) escreve-se

$$\hat{\Theta}(n,0) = \underset{[\gamma]}{\Omega^L} \Theta[\gamma] \quad .$$

A única questão é ser preciso conhecer $\theta(x)$ para poder expressar $\delta\Theta = \delta\theta(A)$ em termos de δA. Isso não é um problema pois é uma particularidade de cada diferente teoria da Mecânica definida a partir de uma diferente escolha da operação Ω. Para operações Ω lineares é conveniente usar $\theta = 1$, ou seja, $\Theta = A$, mas para operações Ω não-lineares pertencentes à classe aqui considerada sugere-se naturalmente o uso de $\Theta = \theta(A)$ ao invés de A para formular a teoria pois em termos desta o formalismo assume a sua " forma natural ". Classicamente, como $\Omega = 1$ e, portanto, para qualquer θ verifica-se $\Omega^L = 1$, essa observação não faz muito sentido, mas em um outro caso ela será conveniente.

Em função de um exemplo particularmente importante dado na parte IV se mostrará conveniente usar[5] $\Theta = \theta(x) = e^x$. Nesse caso define-se a operação

$$\Omega^L = \exp \Omega_{\nu} \ln$$

com $\Theta[\gamma] \equiv \Phi[\gamma] = e^{A[\gamma]}$ e $\hat{\Theta}(n,0) \equiv \hat{\Phi}(n,0) = e^{\hat{A}(n,0)}$, de modo que

$$\hat{\Phi}(n,0) = \underset{[\gamma]}{\Omega^L} \Phi[\gamma] \quad .$$

Essa não é uma função apropriada para discutir a Mecânica Clássica mas é a apropriada para o caso que será apresentado como um exemplo não-trivial de Mecânica Generalizada. Logo, em função do isomorfismo deve-se escrever as equações da Mecânica Clássica em termos de Φ, o que será feito na próxima parte na cap. 6. Entendido esse ponto, daqui em diante se usará a *mesma* notação para as operações Ω e Ω^L, afinal isso não deve provocar uma confusão uma vez que o uso de Φ ou de A indica qual a operação a que se refere. Em termos de Φ as equações (3.12-13) escrevem-se

$$\hat{\Phi}(n,0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \Omega_1 \ldots \Omega_{n-1} \exp[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)] \quad , \tag{4}$$

---

[5] O que também ocorre na Termodinâmica. Ver Bernardes (1989 - 1990).

resumida por

$$\hat{\Phi}(n,0) = \underset{[\gamma]}{\Omega}\Phi[\gamma] \quad , \tag{5}$$

onde $S(i+1,i) \equiv \epsilon L(x'_i,\dot{x}'_i,t'_i)$, com a dinâmica determinada a partir do PV

$$\delta\hat{\Phi}(n,0) = 0 \ . \tag{6}$$

Finalmente, é preciso fazer duas observações. Uma está relacionada com as propriedades da operação Ω. Além da propriedade de linearidade,

$$\begin{aligned} &\underset{[\gamma]}{\Omega}(a_1\Theta_1[\gamma] + a_2\Theta_2[\gamma]) = a_1\underset{[\gamma]}{\Omega}\Theta_1[\gamma] + a_2\underset{[\gamma]}{\Omega}\Theta_2[\gamma] \ , \\ &\underset{i}{\Omega}(a_1\Theta_1(x_i) + a_2\Theta_2(x_i)) = a_1\underset{i}{\Omega}\Theta_1(x_i) + a_2\underset{i}{\Omega}\Theta_2(x_i), \end{aligned} \tag{7a}$$

é preciso atribuir uma outra propriedade a Ω. O motivo é que implicitamente assumiu-se que as operações Ω tem um sinal definido escolhido como o positivo. Em outras palavras, a operação clássica poderia ter sido perfeitamente escolhida como sendo $\Omega = -1$, para isto bastando redefinir algumas quantidades e equações. Ao assumir que a operação clássica é $\Omega = 1$, a condição do limite clássico força a exigência de que as operações Ω possuam a propriedade

$$\begin{aligned} &\Theta[\gamma] \geq 0 \Rightarrow \underset{[\gamma]}{\Omega}\Theta[\gamma] \geq 0 \ , \\ &\Theta(x_i) \geq 0 \Rightarrow \underset{i}{\Omega}\Theta(x_i) \geq 0, \end{aligned} \tag{7b}$$

caso contrário o limite clássico teria que ser redefinido.

A outra observação se refere à relação entre a constante α introduzida através de (3.10) relaciona-se com o que foi discutido. Com efeito, em (3.10) a constante α foi introduzida a partir da escolha de uma dimensão para a lagrangeana L, onde $\mathcal{L} = \alpha L$, mas poderia ter sido igualmente introduzida através da função F(t) usada como função geratriz da medida $\mu_F(t)$. Nesse caso, ao invés de englobar F'(t) em $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0 F'(t)$ definiria-se $F'(t) = \alpha F'_1(t)$ e $L = \mathcal{L}^0 F'_1(t)$, o que resulta em $\mathcal{L} = \alpha L$. O que foi visto agora mostra que a constante α

poderia também ter sido introduzida através da definição da função $\theta(x)$. No exemplo utilizado bastaria definir $\theta(x) = e^{\alpha x}$ e não seria necessário utilizar de início A mas sim S, ignorando completamente a questão dimensional pois nesse caso α estaria relacionada com a própria definição da operação Ω. Essa observação já foi feita quando dito que a constante α deve ser tal que (3.12-13) exista. Como se vê, as três situações estão relacionadas. A natureza de α engloba a definição de uma dimensão para as grandezas físicas, a de uma medida $\mu_F(t)$ e a de uma operação Ω. Quanto ao último caso a questão remonta ainda à não-linearidade de Ω. Estas três questões são, portanto, inseparáveis, formando na realidade uma única questão que é a constante α. Certamente seria mais justo defini-la como $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3$, onde $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ seriam introduzidas nas três diferentes situações, mas essa questão é vazia uma vez que é a constante α e a relação entre essas questões que interessa. Isso ficará claro com os dois exemplos que serão dados.

-PARTE II -

• A TEORIA CLÁSSICA DA MECÂNICA •[1]

Nesta parte será feita uma breve exposição da MC (C de Clássica ou Conjuntiva). Essa exposição justifica-se pelo aspecto didático uma vez que a MC é um caso particular trivial de MG. Aqui não se pretende entrar em grandes detalhes, tampouco considerar os sofisticados métodos encontrados nas formulações modernas [2].

No cap. 5 os pontos básicos da MC serão expostos e no cap. 6 revistos visando a formulação da MG via isomorfismo.

---

[1] A revisão de certos pontos da Mecânica Clássica só serão feitos quando absolutamente indispensáveis. Caso contrário, há uma vasta bibliografia a disposição como, por exemplo, Goldstein (1950) , Sudarshan & Mukunda (1974) , Saletan & Cromer (1971) , Landau & Lifshitz (1960), etc.

[2] Por exemplo, Arnold (1987) ou Abraham (1967).

5. FORMALISMOS LAGRANGEANO E HAMILTONIANO. TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS.

A escolha clássica $\Omega = 1$ implica em $\hat{A}(n,0) = A(n,0)$ com a dinâmica clássica descrita por uma função $x = x(t)$ representada como um caminho entre os pontos dados $P_0 = (t_0, x_0)$ e $P_n = (t_n, x_n)$ no EC do sistema. Essa escolha confunde os conceitos de dinâmica e caminho, de modo que conceitos distintos como o de VD x e VI x são os mesmos dentro da MC. A dinâmica conjuntiva reflete-se na aditividade de $\hat{A}(n,0) = A(n,0)$.

Além disso, como $\hat{A}(n,0) = \alpha\hat{S}(n,0)$ e $A(n,0) = \alpha S(n,0)$, tem-se $\hat{S}(n,0) = S(n,0)$, ou seja, a constante α não está determinada. Qualquer valor de $\alpha \neq 0$ é possível dentro da MC e essa indeterminação certamente não pode ser transmitida aos resultados. Assim, o PV que determina a dinâmica clássica pode ser formulado em qualquer dimensão desejada, quer seja $\delta A(n,0) = 0$ ou $\delta S(n,0) = 0$. A constante α é desprovida de qualquer conteúdo físico na MC.

Como se sabe [3] a variação δA de um funcional

$$A[\gamma] = \int_{t0}^{tn} dt\mathcal{L}(x,\dot{x},t) \ ,$$

γ: $x = x(t)$, $t_0 \leq t \leq t_n$, $x_0 = x(t_0)$, $x_n = x(t_n)$, é dada por

$$\delta A = \int_{t0}^{tn} \left[- \frac{d}{dt}\left(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}\right) + \partial\mathcal{L}/\partial x\right]\delta x(t)dt + \left(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}\right)\delta x\Big|_{t0}^{tn} + \\ + \left[\mathcal{L} - \left(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}\right)\dot{x}\right]\delta t\Big|_{t0}^{tn} . \tag{1}$$

O PV afirma que a dinâmica, nesse caso o caminho efetivo, é aquele para o qual $\delta A = 0$ dentre os caminhos possíveis entre os extremos $P_0 = (x_0, t_0)$ e $P_n = (x_n, t_n)$ considerados fixos. A sua solução é dada a partir de (1) por

$$- \frac{d}{dt}\left(\partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}\right) + \left(\partial\mathcal{L}/\partial x\right) = 0 \ , \tag{2}$$

---

[3] Ver Gelfand & Fomin (1963).

que é a equação de Lagrange que deve ser satisfeita pelo caminho efetivo $x = \bar{x}(t)$.

A equação de Lagrange possui interessantes propriedades de invariância discutidas nas referências citadas. A partir destas pode-se mostrar[4] com a ajuda do princípio da relatividade de Galilei que a lagrangeana de uma partícula livre é da forma

$$\mathcal{L} = a'\dot{x}^2 , \tag{3}$$

onde $a' \neq 0$ é uma constante. A constante a' não possui um significado físico, apenas a relação entre essas constantes para diferentes partículas. Por motivos históricos escolheu-se trabalhar com L,

$$L = \alpha\mathcal{L} \quad , \quad a' = \alpha a \quad , \quad a = m/2 \quad ,$$

$$L = m\dot{x}^2/2 , \tag{4}$$

onde m é chamada massa da partícula, e S, ação.

A forma completa da lagrangeana é dada supondo (o que é válido dentro do princípio da relatividade de Galilei) que existe uma função $V = V(x,\dot{x},t)$ (a energia potencial) que descreve a interação entre partículas ou com agentes externos (campos), i.e.,

$$L = T - V , \tag{5}$$

onde T é a energia cinética, $T = m\dot{x}^2/2$ e $V = V(x,\dot{x},t)$ a energia potencial.

A partir de (5) pode-se escrever a lagrangeana em termos de coordenadas generalizadas q a partir de $q = q(x)$ assim como a equação de Lagrange cuja forma é a mesma em termos de q pois o valor extremo de um funcional é dado por um certo caminho e não depende das coordenadas que são usadas para descrever esse caminho. Daqui em

---

4 Ver, por exemplo, Landau & Lifshitz (1960) ou Saletan & Cromer (1971).

diante serão usadas coordenadas generalizadas e considerados apenas os sistemas do tipo padrão[5], ou seja, para os quais $\partial^2 L/\partial \dot{q}^2 \neq 0$, condição análoga a $m \neq 0$.

Outra questão de interesse é acerca da natureza do valor estacionário da ação S. Pode-se mostrar [6] que para intervalos de tempo ($t_n - t_0$) suficientemente pequenos a ação S é um mínimo para o caminho efetivo. Caso contrário e para certos sistemas ela pode não ser nem um mínimo nem um máximo, enquanto que para outros como uma partícula livre ela é sempre um mínimo. Certamente o mínimo está relacionado com a escolha $m > 0$ pois para a escolha $m < 0$ teria-se um máximo. A escolha do sinal da massa é arbitrária uma vez que apenas a relação entre as massas é que possui significado físico. De qualquer forma, a afirmação de que a ação é um mínimo para o caminho efetivo não é correta, limitando-se apenas à condição acima. Mesmo assim, dentro de uma atitude pouco cuidadosa, chama-se às vezes o PV de princípio da mínima ou da menor ação. Essa denominação carrega em si vários aspectos históricos. Esse princípio dentro da MC foi formulado em sua forma final por Hamilton, por isso também denominado princípio de Hamilton. Julgando essa denominação mais apropriada e como a MC baseia-se na escolha trivial $\Omega = 1$ [7] que conduz a esse princípio então nada mais justo do que denominá-la operação de Hamilton , $\Omega_H = 1$. A MC é portanto uma Mecânica Generalizada onde a operação Ω é a operação de Hamilton, $\Omega = \Omega_H = 1$. Pode parecer um excesso de rigor mas essa observação se justificará adiante. Como o princípio de Hamilton fornece o valor estacionário de S a operação de Hamilton Ω_H pode ser escrita como

$$\Omega_H = \underset{\gamma}{\text{ext}} ,$$

---

[5] A esse respeito ver Sudarshan & Mukunda (1974).

[6] Ver, por exemplo, Whittaker (1944) e Ozório de Almeida (1982).

[7] Claro está que nesse trabalho ignora-se por completo qualquer questão relacionada com a natureza do valor estacionário da ação.

de modo que $S = \underset{\gamma}{\text{ext}} S[\gamma]$, onde a operação $\underset{\gamma}{\text{ext}}$ consiste em tomar o caminho γ tal que o valor de $S[\gamma]$ seja um extremo, ou seja, o seu valor seja estacionário. A rigor o correto seria então dizer que a MC baseia-se na escolha da operação Ω como sendo $\Omega_H = \underset{\gamma}{\text{ext}}$, mas como o PV $\delta S = 0$ na MC consiste justamente em calcular $\underset{\gamma}{\text{ext}}\, S[\gamma]$ não é preciso dar muita importância a isso. Contudo, em vários momentos esse rigor se mostrará, não como excessivo, mas sim como útil. Enquanto isso não ocorre se continuará usando $\Omega_H = 1$.

A passagem para o formalismo hamiltoniano é simples e encontra-se em qualquer referência. Ela é sugerida lembrando que o caminho efetivo $\bar{\gamma}$: $x = \bar{x}(t)$ satisfaz (2). Desse modo, para uma variação $\delta t_n = t'_n - t_n$, pode-se usar (1) para $\gamma = \bar{\gamma}$, que em termos do funcional S e omitindo o índice n escreve-se

$$\begin{aligned} \delta S[\bar{\gamma}] &= \left(\partial L/\partial \dot{q}\right)\delta q + \left[L - \left(\partial L/\partial \dot{q}\right)\dot{q}\right]\delta t = \\ &= \left(\partial S/\partial q\right)\delta q + \left(\partial S/\partial t\right)\delta t \quad , \end{aligned} \tag{6}$$

que sugere definir

$$p = p(q,\dot{q},t) \equiv \left(\partial L/\partial \dot{q}\right) \quad , \tag{7}$$

$$-H = -H(q,\dot{q},t) \equiv \left[L - \left(\partial L/\partial \dot{q}\right)\dot{q}\right] \quad , \tag{8}$$

respectivamente o momentum e a função de Hamilton, e de (6),

$$\left(\partial S/\partial q\right) = p \quad , \ (\text{ para } \gamma = \bar{\gamma}\ ), \tag{9}$$

$$\left(\partial S/\partial t\right) = -H \quad , \ (\text{ para } \gamma = \bar{\gamma}\ ). \tag{10}$$

É importante notar que $\partial S/\partial q$ não é igual a p dado por (7) mas sim a p dado por (7) *mais* a introdução nesta de $q = \bar{q}(t)$, que é o que diz a expressão (9).

Basicamente a passagem do formalismo lagrangeano para o hamiltoniano se deve ao fato de qualquer sistema de n equações diferenciais de segunda ordem poder ser escrito como um sistema de 2n

equações diferenciais de primeira ordem. Porém, essas novas equações possuem um forma mais simples, uma forma canônica, quando esta equação é a de Lagrange por ser esta a solução de um PV. Considerando p dado por (7) como uma VI, o que se faz eliminando $\dot{q}$ em favor de p a partir de (7), as equações de Hamilton são

$$\dot{q} = \partial H/\partial p \quad , \tag{11a}$$

$$\dot{p} = - \partial H/\partial q \quad , \tag{11b}$$

onde H é a hamiltoniana obtida introduzindo $\dot{q} = \dot{q}(q,p,t)$ de (7) na função de Hamilton (8), ou seja, é uma transformada de Legendre de L,

$$-H = -H(q,p,t) = L(q,\dot{q}(q,p,t),t) - p\dot{q}(q,p,t) \quad . \tag{12}$$

O fato da equação de Lagrange ser a solução de um problema variacional possibilita não apenas escrevê-la como um sistema de equações canônicas, as equações de Hamilton, mas também escrevê-la em uma forma integrada, quando solúvel, muito mais simples, concisa e elegante. Esta é a equação de Hamilton-Jacobi, que pode ser obtida introduzindo (9) em H(q,p,t) em (10), ou seja,

$$H(q,\partial S/\partial q,t) + \partial S/\partial t = 0 \quad . \tag{13}$$

Da solução $S(q,t;q_0,t_0)$ tem-se de $p_0 = -\partial S/\partial q_0$ uma expressão $p_0 = p_0(q,t;q_0,t_0)$ da qual se obtém $q = q(q_0,p_0,t_0;t) = \bar{q}(t)$ que em $p = \partial S/\partial q = p(q,t;q_0,t_0)$ fornece $p = p(q_0,p_0,t_0;t) = \bar{p}(t)$, as expressões procuradas.

A transformação de coordenadas, ou seja, VI, constitui-se numa poderosa técnica para a investigação e solução de um sistema de equações diferenciais. Infelizmente dentro do formalismo lagrangeano não é possível formular nenhum procedimento sistemático para a integração via transformações de coordenadas. Devido a sua forma peculiar isso já é possível dentro do formalismo hamiltoniano. Porém, como essa forma advém do fato da equação de Lagrange ser a solução de um PV as transformações de coordenadas q e p dentro do formalismo

hamiltoniano devem ser tais que preservem a forma das equações de Hamilton, as equações canônicas. Daí denominadas transformações canônicas (TC). Novamente aqui remete-se a questão em sua profundidade para as referências.

O modo mais simples de chegar a uma expressão para as TC se faz usando o fato que, se dois funcionais diferem entre si por uma constante, eles são equivalentes, ou seja, fornecem a mesma equação para a solução do PV formulado em termos destes funcionais. Exige-se, portanto, como condição suficiente que os funcionais escritos em termos das antigas VI q e p e das novas Q e P sejam equivalentes e escreve-se a constante como função dos extremos fixos.

Se essa função chamada função geratriz ou gerador da TC é do tipo $F_1(Q,q,t)$ mostra-se facilmente que as expressões

$$P = \partial F_1/\partial Q \quad , \tag{14a}$$

$$p = \partial F_1/\partial q \quad , \tag{14b}$$

$$K = H + \partial F_1/\partial t \quad , \tag{14c}$$

definem implicitamente e completamente a TC. O mesmo mostra-se facilmente para as outras possibilidades $F_2(q,P,t)$, $F_3(p,Q,t)$ e $F_4(p,P,t)$.

Visando a formulação da MG é interessante chegar explicitamente a estas expressões mas por um caminho diferente dos usuais. Da definição de $S[\gamma]$ escreve-se

$$\underset{\gamma}{\text{ext}}\ S[\gamma] = \underset{q}{\text{ext}}\ [\ \underset{\gamma_A}{\text{ext}}\ S[\gamma_A] + \underset{\gamma_B}{\text{ext}}\ S[\gamma_B]\ ] \quad ,$$

onde γ, γ_A, γ_B são caminhos $q = q(\tau)$ tais que $t_0 \leq \tau \leq t'$, $t_0 \leq \tau \leq t$, $t \leq \tau \leq t'$, respectivamente, com $q(t_0) = q_0$, $q(t) = q$ e $q(t') = q'$. Como foi visto, os funcionais $S[\gamma_B]$ e $S[\gamma_B] + F$ são equivalentes se F é uma função dos extremos fixos (t,q) e (t',q'). Logo

$$\underset{\gamma}{\text{ext}}\ S[\gamma] = \underset{q}{\text{ext}}\ [\ \underset{\gamma_A}{\text{ext}}\ S[\gamma_A] + \underset{\gamma_B}{\text{ext}}\ S[\gamma_B] - F(q',t';q,t)\ ] \ .$$

Agora, fazendo $t' \to t$ tem-se $S[\gamma_B] = 0$, de modo que

$$S(q',t) = \underset{q}{\text{ext}} \; [\; -F(q',q,t) + S(q,t) \;] \quad ,$$

onde explicitou-se o resultado da operação $\underset{\gamma}{\text{ext}}$ além de não incluir na notação q_0 e t_0 cuja consideração é imediata. É fácil ver que a expressão acima corresponde à realização de uma TC, pois escrevendo $q' = Q$,

$$S(Q,t) = \underset{q}{\text{ext}} \; [\; -F(Q,q,t) + S(q,t) \;] \quad , \tag{15}$$

da qual obtém-se imediatamente as expressões (14a-c).

Além das equações canônicas existem outros invariantes por TC. De fundamental importância é o colchete de Poisson

$$\{f,g\} = (\partial f/\partial q)\,(\partial g/\partial p) - (\partial g/\partial q)\,(\partial f/\partial p) \tag{16}$$

que fornece $\frac{df}{dt}$ através de

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\} + \partial f/\partial t \quad . \tag{17}$$

Uma importante TC consiste em tomar as novas Q e P como os valores de q e p em um instante inicial t_0, ou seja, q_0 e p_0 (transformação do tipo F_1). Nesse caso o novo hamiltoniano é $K = 0$ e a equação que define essa TC, ou seja, a equação para o gerador, é justamente a equação de Hamilton-Jacobi (13). Isso pode ser encontrado nas referências. Como nesse caso é $S(q,t;q_0,t_0)$ o gerador da TC de q e p para q_0 e p_0 então $S(q,t;q_0,t_0)$ é o gerador da TC que se processa para trás no tempo no movimento do sistema. A dinâmica do movimento pode, portanto, ser vista como um contínuo desdobramento de uma TC, sendo completamente especificada a partir do gerador $S(q,t;q_0,t_0)$, o gerador do movimento.

6. A LINGUAGEM E OS CONCEITOS MATEMÁTICOS DA MECÂNICA CLÁSSICA.

Se houvesse a necessidade de exprimir a problemática deste trabalho[1] em uma só palavra esta, sem dúvida, seria " linguagem ". De fato, a origem dos principais pontos discutidos (a necessidade de distinguir os conceitos de dinâmica e caminho, VD e VI e a exigência do isomorfismo) estão fundamentados na linguagem. É também na linguagem que residem essencialmente os fundamentos desta seção. Nesse ponto a discussão feita no apêndice é proveitosa, embora superficial.

Sem querer entrar demais no âmago da questão, pode-se dizer que, através da Matemática, é possível fazer um uso rigoroso e coerente da linguagem, ou melhor, dos elementos pertinentes desta, para descrever o mundo físico. Diferentes metalinguagens se dão em função de diferentes " matematizações " desses elementos da linguagem relacionados com o mundo físico. Entretanto, a adequação destas é uma questão exterior a elas. Em outras palavras, certos conceitos matemáticos podem ser adequados ao estudo de uma certa classe de fenômenos mas não de outra, ou seja, as suas leis podem ser adequadamente formuladas em termos de certos conceitos matemáticos em um caso, mas não em outro, que normalmente requer diferentes conceitos matemáticos. A arte consiste em procurar conceitos em termos dos quais ambos os casos se acomodem. Isso não significa de modo algum que certos conceitos mesmo que inadequados não possam ser utilizados. Pode ocorrer que além de inadequados eles sejam também errados mas a inadequação implica a princípio apenas no obscurecimento. A adequação de uma linguagem para descrever a MC é o que se pretende discutir neste capítulo.

Muito se insistiu na necessidade de distinguir os conceitos de dinâmica e caminho. Na MC eles se confundem. A dinâmica é representada como um caminho no EC, ou seja, uma função. Mais ainda, a dinâmica do movimento pode ser vista como um contínuo desdobramento de uma TC cujo

---

[1] Obviamente não só deste trabalho mas também dentro da Termodinâmica com a qual este trabalho mantém uma relação ideológica. Ver Bernardes (1989).

gerador é a função $S(q,t;q_0,t_0)$. O conceito matemático de função é, portanto, um conceito adequado à descrição da dinâmica do movimento. A VD q é uma função q(t), significando que para cada valor do parâmetro t existe uma regra que associa a este número um outro número q. Uma VD arbitrária f é no caso mais geral uma função dos valores de q e p e do parâmetro t, uma função $f(t) = f(q(t),p(t),t)$.

Infelizmente, o conceito de função obscurece a distinção que se quer enfatizar entre caminho e dinâmica, entre VD e VI. Mesmo assim ele é adequado pois classicamente esta distinção não se faz necessária. Não o sendo, não há motivo para não utilizá-lo na MC, ainda mais se considerada a sua simplicidade.

Já a definição de $S[\gamma]$ como um funcional sugere a utilidade deste conceito. Ignorando as questões " técnicas " pretende-se ver se o conceito de funcional é mais adequado ou não que o de função. Usando $\Omega_H = \underset{\gamma}{\text{ext}}$, o que esta operação faz é introduzir no operando a função $\bar{q}(t)$ que fornece o valor estacionário de $S[\gamma]$, ou seja, a solução da equação de Lagrange. Assim $S(q,t;q_0,t_0) = \underset{\gamma}{\text{ext}}\, S[\gamma]$ e Ω_1 consiste em introduzir no operando o $q_1 = \bar{q}(t_1)$. Sejam os conjuntos $\{t\}$ dos valores possíveis de $t \in [t_0,t_n]$ e $\{q\}$ da VI q determinado pela natureza do sistema mecânico e por vínculos impostos a este. Uma correspondência entre esses conjuntos pode ser feita não apenas através de uma função. Seja um dado t_1 e um funcional $F_1[q] = q(t_1)$. Esse funcional estabelece uma correspondência entre um t_1 e diferentes valores da VI q através de diferentes funções $q(t_1)$. Para a VD q no instante t_1 pode-se escrever $q = q_{t_1} = \underset{1}{\text{ext}}\, F_1[q] = \underset{1}{\text{ext}}\, q(t_1) = \bar{q}(t_1)$. Definido este funcional para um t qualquer tem-se para a VD $q = \underset{q}{\text{ext}}\, F_t[q] = \bar{q}(t)$. O mesmo estende-se para outras VD. Como pode-se ver, embora o conceito de funcional não seja tão simples quanto ao de função é às custas desse refinamento na linguagem que se consegue exprimir satisfatoriamente a distinção entre VD e VI.

Agora, é importante notar que por trás de tudo isto está o funcional $S[\gamma]$. Se ao invés deste tivesse sido usado $\Phi[\gamma] = e^{\alpha S[\gamma]}$ (equação (4.7)) então as vantagens do conceito de funcional seriam ainda maiores, ou seja, esse conceito seria mais adequado. Mas, devido à forma de Φ, uma exponencial, e por conter uma constante, α, sem

significado físico dentro da MC, existe um outro conceito ainda mais conveniente, um conceito adequado à descrição da MC em termos de $\Phi[\gamma]$. Este conceito é o de operador[2].

Primeiro, é preciso lembrar que se pretende formular a MG em termos de Φ em função do exemplo não-trivial de MG apresentado na parte IV. Logo, devido ao isomorfismo, deveria-se formular a MC em termos de Φ. Isso representaria dezenas de páginas adicionais, pouco ganho, e um desvio dos objetivos. Na verdade nem é necessário ter as equações à mão; basta usar um raciocínio a princípio análogo. Mesmo assim será feita uma resumida discussão sobre os pontos principais.

Reformular a MC em termos de Φ não é uma tarefa difícil, apenas exige alguns cuidados. De fato, isso pode ser feito por completo[3]. O principal cuidado que se deve tomar relaciona-se com o fato de estar sendo utilizada a constante α em $\Phi = e^{\alpha S}$ e esta constante não apresentar significado físico dentro da MC. Tem-se, portanto, que pagar um preço por não utilizar a navalha de Ockham (*Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem*). Esse preço é, entretanto, pequeno. Pode-se mostrar que ele consiste em tomar o limite $\alpha \to \infty$ ao final dos cálculos. Embora pareça artificial esse procedimento é operacionalmente legítimo dentro da MC uma vez que α não possui significado físico nesta e o seu valor é indeterminado.

Quando é usado Φ o conceito naturalmente sugerido é o de operador. Para convencer-se disto basta tomar as equações da MC assim como as das VD dadas em termos de S e tentar reescrevê-las em termos de Φ. Aqui se limitará à apresentação dos resultados. Inicialmente, suponha conhecida a função $\Phi = e^{\alpha S}$ através, por exemplo, da solução da equação de Hamilton-Jacobi para S. A *VD* p, ou em um caso geral p^n, é dada por

---

2 Isso não é uma particularidade da MC. Também na Termodinâmica Clássica isso ocorre, conforme notificado por Bernardes (1990) na sua formulação das teorias holotrópicas da Termodinâmica.

3 Em Vaz Jr. (1989). Para o restante deste capítulo tudo o que não for feito explicitamente remete-se para essa referência.

$$p^n = \lim_{\alpha\to\infty} \operatorname*{ext}_q \Phi^* p^n \Phi \quad , \tag{1}$$

onde $\Phi = \Phi(q,t;q_0,t_0)$ e

$$\Phi^* = \Phi^*(q,t;q_0,t_0) \equiv \Phi(q_0,t_0;q,t) \quad , \tag{2}$$

tal que, devido a $\int_t^{t_0} L dt = - \int_{t_0}^{t} L dt$, que corresponde a fazer $\alpha \to -\alpha$ em Φ (denominada operação de conjugação e Φ^* função conjugada de Φ), tem-se

$$\Phi^*(q,t;q_0,t_0)\Phi(q,t;q_0,t_0) = \Phi^{-1}(q,t;q_0,t_0)\Phi(q,t;q_0,t_0) = 1 \ , \tag{3}$$

e onde $\mathbf{p}^n$ é o operador

$$\mathbf{p}^n = \frac{1}{\alpha^n} \frac{\partial^n}{\partial q^n} \ . \tag{4}$$

É fácil ver que no caso $n = 1$ a expressão (1) corresponde exatamente a $p = \partial S/\partial q$ e o limite $\alpha \to \infty$ é desnecessário. Para $n = 2,3,\ldots$ existem termos adicionais além de $(\partial S/\partial q)^n$ e o limite $\alpha \to \infty$ mostra-se imprescindível. Uma expressão análoga escreve-se para p_0 da qual obtém-se $q = \bar{q}(t)$ que é usada na operação $\operatorname*{ext}_q$.

Como a VD q é igual a VI q na MC pode-se também escrever uma expressão para estas que embora aparentemente trivial satisfaz elegantemente a exigência da distinção entre VD e VI. Em um caso geral esta é

$$q^n = \lim_{\alpha\to\infty} \operatorname*{ext}_q \Phi^* \mathbf{q}^n \Phi \quad , \tag{5}$$

onde o limite $\alpha \to \infty$ é desnecessário mas é escrito para obter uma forma simétrica em relação a (1) e onde o operador $\mathbf{q}^n$ é

$$\mathbf{q}^n = q^n \ . \tag{6}$$

O que (1) e (5) mostram é que a distinção entre VD e VI atinge um

grau de clareza notável através do uso do conceito de operadores. Os operadores **p** e **q** definidos em (4) e (6) são definidos em termos da VI q assim como a função sobre a qual eles atuam. Também, obviamente, o é $\underset{q}{\text{ext.}}$ O resultado de (1) e (5) são, entretanto, o valor numérico de uma VD.

Em função de (1) e (5) pode-se dizer que as VD q^n e p^n são *representadas* por operadores definidos em termos das VI e que atuam sobre uma função das VI. As VD são representadas pelos operadores; os operadores de modo algum são as VD.

Existem sérias questões envolvidas com estes operadores. Fora as questões extremamente " técnicas " deu-se uma resposta satisfatória a todas estas quase sempre envolvendo o limite $\alpha \to \infty$. Uma destas ainda relaciona-se com (1) e (5). Enquanto (5) classicamente é na verdade uma identidade entre a VD q e a VI q e não envolve α a expressão (1) contém termos da ordem de α^{-1}, α^{-2},..., até $\alpha^{-(n-1)}$ em p^n. Apenas no caso n = 1 ela é exata. Nos demais ela apresenta no mínimo um desvio da ordem de α^{-1}. Além disso será visto adiante uma situação onde este termo é importante. Felizmente é possível encontrar uma expressão correta até esta ordem. Realizando o cálculo explicitamente a partir da definição de $\mathbf{p}^n$ chega-se ao resultado

$$\mathbf{p}^n\Phi = (\partial S/\partial q)^n\Phi + \alpha^{-1}L_1^n\Phi + \mathcal{O}(\alpha^{-2})\Phi \quad , \tag{7}$$

$$L_1^n = \begin{cases} 0 \quad , & (n=1) \, , \\ [1+2+\ldots+(n-1)](\partial S/\partial q)^{n-2}(\partial^2 S/\partial q^2) \, , & (n\geq 2) \, , \end{cases}$$

que implica em

$$(\mathbf{p}^n\Phi)^* = (\partial S/\partial q)^n\Phi^* - \alpha^{-1}L_1^n\Phi^* + \mathcal{O}(\alpha^{-2})\Phi^* \quad . \tag{8}$$

Usando (7) e (8) vê-se que definindo os operadores

$$\Phi^*\overrightarrow{\mathbf{p}^n}\Phi \equiv \Phi^*(\mathbf{p}^n\Phi) \quad , \tag{9a}$$

$$\Phi^*\overleftarrow{\mathbf{p}^n}\Phi \equiv (\mathbf{p}^n\Phi)^*\Phi \quad , \tag{9b}$$

$$\overleftrightarrow{p}^n = (\overleftarrow{p}^n + \overrightarrow{p}^n)/2 \quad , \tag{10}$$

chega-se a uma expressão correta até α^{-1}, ou seja,

$$p^n = \lim_{\alpha\to\infty} \operatorname*{ext}_q \Phi^* \overleftrightarrow{p}^n \Phi \quad , \tag{11}$$

onde os desvios em $\Phi^* \overleftrightarrow{p}^n \Phi$ são maiores ou iguais a α^{-2} e eliminados por $\alpha \to \infty$. Também q^n pode ser escrita de modo trivial nesta notação,

$$q^n = \lim_{\alpha\to\infty} \operatorname*{ext}_q \Phi^* \overleftrightarrow{q}^n \Phi \quad . \tag{12}$$

Existem muitas colocações a serem feitas. Primeiro, pode-se mostrar que embora $\mathbf{q}^n$ e $\mathbf{p}^n$ sejam operadores lineares não faz sentido escrever Φ como uma combinação linear. Isso reflete-se principalmente em uma situação. Uma vez que o uso de Φ ou de Φ^* é equivalente devido a (2) pode-se definir os operadores como agindo sobre Φ^*. Isso conduz à definição de operador adjunto. Supondo que Φ possa ser escrita como uma combinação linear as questões envolvidas com esse ponto (obviamente com o operador $\mathbf{p}^n$ pois com $\mathbf{q}^n$ não há problema) embaralham-se de modo a observar-se um erro da ordem de α^{-1} nessas expressões. Na verdade essas questões refletem a inadequação do conceito de operadores, ou melhor, da função Φ na MC. Em relação à questão do operador adjunto clássico pode-se mostrar que não se deve usar uma definição forte

$$\operatorname*{ext}_q (\mathbf{f}^+\Phi)^* \Phi = \operatorname*{ext}_q \Phi^* (\mathbf{f}\Phi) \tag{13}$$

mas sim uma definição fraca

$$\lim_{\alpha\to\infty} \operatorname*{ext}_q (\mathbf{f}^+\Phi)^* \Phi = \lim_{\alpha\to\infty} \operatorname*{ext}_q \Phi^* (\mathbf{f}\Phi) \quad , \tag{14}$$

na qual os erros são aceitos. Melhor que tudo isso é usar um operador $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}$ de acordo com (10), o que será visto adiante. Usando a definição

fraca permite-se escrever Φ como uma combinação linear arbitrária pois o erro em α^{-1} desaparece no final. De qualquer forma é algo pouco " natural ".

Por enquanto colocou-se apenas as VD que são potências de q e p. É preciso também considerar VD arbitrárias. Para isso é proveitoso retornar um pouco à linguagem das funções. Dadas duas funções $f_1(q,p,t)$ e $f_2(q,p,t)$ das VI q e p e do parâmetro t às quais estão associadas as VD f_1 e f_2 é possível definir uma terceira VD g a partir de operações sobre $f_1(q,p,t)$ e $f_2(q,p,t)$, operações estas que tenham um significado canonicamente invariante. São estas: 1) a combinação linear de $f_1(q,p,t)$ e $f_2(q,p,t)$, 2) a multiplicação de $f_1(q,p,t)$ e $f_2(q,p,t)$ e 3) o colchete de Poisson de $f_1(q,p,t)$ e $f_2(q,p,t)$. A partir das operações 1 e 2 é possível definir as VD

$$f_1(q) = \sum_n a_n q^n \ , \ (a_n \in \mathbb{R}) \ ,$$

$$f_2(p) = \sum_n b_n p^n \ , \ (b_n \in \mathbb{R}) \ ,$$

$$f_3(q,p) = \sum_{m,n} A_{nm} q^n p^m = \sum_{m,n} A_{mn} p^m q^n \ , \ (A_{mn} = A_{nm} \in \mathbb{R}) \ ,$$

onde supõe-se a convergência das séries, ou seja, que as funções são analíticas, e com uma possível dependência dessas funções no parâmetro t contida nos coeficientes a_n, b_n e A_{nm}. Os casos particulares $f_1 = q^n$ e $f_2 = p^n$ já foram vistos em termos de operadores. Faltam os demais.

Como foi dito, o uso de Φ é pouco natural dentro da MC. Para considerar VD arbitrárias é preciso ver como são essas operações em termos de operadores e também lembrar da equivalência entre Φ e Φ^* na hora de escrever as VD. Considerando o caso mais geral $\sum_{m,n} A_{nm} q^n p^m$ é fácil convencer-se que uma expressão satisfatória para esta e que irá satisfazer as necessidades de definir a operação 3 em termos de operadores é

$$f = \lim_{\alpha \to \infty} \operatorname*{ext}_q \Phi^{*} \overleftrightarrow{f} \Phi \ , \qquad (15)$$

$$\overleftrightarrow{f} = \sum_{m,n} A_{nm} \overleftrightarrow{q^n p^m} \quad , \tag{16}$$

$$\overleftrightarrow{q^n p^m} \equiv (\overleftarrow{q^n p^m} + \overrightarrow{q^n p^m})/2 \quad , \tag{17}$$

$$\Phi^* \overrightarrow{q^n p^m} \Phi \equiv \Phi^* (q^n p^m \Phi) \quad , \quad \Phi^* \overleftarrow{q^n p^m} \Phi \equiv (q^n p^m \Phi)^* \Phi \ . \tag{18}$$

A utilidade destes operadores é impressionante. Uma interessante propriedade que segue da definição mais (7) é

$$\begin{aligned} \Phi^* \overleftarrow{q^n p^m} \Phi &= (q^n p^m \Phi)^* \Phi = \Phi^* (p^m q^n + \mathcal{O}(\alpha^{-1})) \Phi = \\ &= \Phi^* (q^n p^m \Phi) + \Phi^* ([p^m, q^n] + \mathcal{O}(\alpha^{-1})) \Phi \ , \end{aligned}$$

e como $[p^m, q^n]$ é pelo menos da ordem de α^{-1},

$$\overleftarrow{q^n p^m} = \overrightarrow{q^n p^m} + \mathcal{O}(1)[p^m, q^n] \quad , \tag{19}$$

onde $\mathcal{O}(1)$ indica um erro da ordem de $[p^m, q^n]$, ou seja, pelo menos α^{-1}. Outra segue da própria definição forte do adjunto clássico, expressão (13), ou seja,

$$\overrightarrow{q^n p^m} = \overleftarrow{(q^n p^m)^+} \quad . \tag{20}$$

Usando-a chega-se facilmente a

$$\overleftrightarrow{(q^n p^m)^+} = \overleftrightarrow{q^n p^m} \quad . \tag{21}$$

Resumindo, a operação 1 mantém o mesmo significado em termos de operadores enquanto 2 deve ser vista como uma multiplicação entre operadores definidos como (17), ou seja, $\overleftrightarrow{f}$. Quanto à operação 3 ela será considerada ao final, pois para chegar a esta, é melhor discutir antes outra questão. Esta é sobre a equação de Hamilton-Jacobi.

Da definição de Φ verifica-se imediatamente que

$$\Phi(n+1,0) = \underset{n}{\mathrm{ext}}\ \Phi(n+1,n)\Phi(n,0) \quad ,$$

onde $\Phi(n+1,n) = e^{\alpha S(n+1,n)}$. Mas $S(n+1,n)$ é δS em $t = t_n$ que pode ser calculada a partir de (5.6) e (5.9-10), ou seja, $\delta S = p\delta q_n - H\delta t_n$. Essa expressão, mais uma expansão em série de Taylor, fornece

$$\Phi(n+1,0) \simeq (1 + \alpha p\delta q_n - \alpha H\delta t_n)\Phi(n,0)$$

da qual identifica-se de imediato

$$\partial\Phi(n,0)/\partial q_n = \alpha p\Phi(n,0) \ , \ \partial\Phi(n,0)/\partial t_n = -\alpha H\Phi(n,0) \ .$$

O mesmo raciocínio usado para estas permite escrever a equação de Hamilton-Jacobi como

$$H(q,\Phi^*(\alpha^{-1}\partial\Phi/\partial q),t) = \Phi^*(-\alpha^{-1}\partial\Phi/\partial t) \quad , \tag{22a}$$

$$H(q,\Phi^*(\alpha^{-1}\partial\Phi/\partial q),t)\Phi = -\alpha^{-1}\partial\Phi/\partial t \quad . \tag{22b}$$

Agora, em função do limite $\alpha \to \infty$ nas expressões para as VD existem outras formas possíveis para esta equação. Melhor dizendo, como os desvios em α^{-1} ou maiores são eliminados, existem outros Φ que são soluções de outras equações e que são equivalentes ao Φ que é solução de (22), ou seja, os resultados numéricos são os mesmos no limite $\alpha \to \infty$. Mostra-se na referência citada que essas equações são da forma

$$H(q,\alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial q},t)\Phi + \alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\Phi = f(\alpha)\Phi \quad , \tag{23}$$

onde $\lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha) = 0$, podendo inclusive $f(\alpha)$ depender de Φ desde que $\lim_{\alpha\to\infty} f(\alpha,\Phi) = 0$ para qualquer Φ.

Chamando (22) de equação forte de Hamilton-Jacobi e (23) de equação fraca de Hamilton-Jacobi pode-se mostrar que se Φ é solução da equação forte de Hamilton-Jacobi então ela também é solução de uma

equação fraca de Hamilton-Jacobi para uma escolha conveniente de $\ell(\alpha)$ estando sujeita esta solução a uma condição suplementar que não aparece na equação fraca. Para o caso em que $V = V(x)$ esta condição é $V(x) \leq E$ (energia total) e para $V = V(x,t)$ ela é $V(x,t) \leq \Phi^*(-\alpha^{-1}\partial\Phi/\partial t)$. Além disso, como todas as equações fracas são equivalentes então a equação forte é equivalente a estas, em particular à convenientemente escolhida com $\ell(\alpha) = 0$, ou seja,

$$H(q,\alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial q},t)\Phi = -\alpha^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\Phi \quad . \tag{24}$$

Também aqui não se pretende discutir maiores detalhes. Quanto, por exemplo, às TC é imediato que (5.15) escreve-se como

$$\Phi(Q,t) = \underset{q}{\text{ext}}\ e^{-\alpha F_1(Q,q,t)}\Phi(q,t) \quad , \tag{25}$$

o que se estende imediatamente aos demais casos.

Resta discutir as VD definidas a partir da operação 3, o que é mais proveitoso se feito dentro do contexto da equação (5.17). Seja f uma VD arbitrária cujo valor no instante t dentro da linguagem das funções é dado por $f_t = f(q(t),p(t),t)$. A variação de f, δf, resulta das variações δq e δp e de δt, de modo que a variação total em relação a t, $\delta f_t = (df_t/dt)\delta t$, resulta do uso de $\delta q = \dot{q}\delta t$ e $\delta p = \dot{p}\delta t$ com $\dot{q} = \partial H/\partial p$ e $\dot{p} = -\partial H/\partial q$. Isso dentro da linguagem dos operadores requer um certo cuidado pois a distinção entre VD e VI está bem estabelecida em termos desta. Nesse caso o seu valor no instante t é dado por (15) onde os operadores **q** e **p** e a função Φ são dados em termos da VI q e do parâmetro t. A variação de Φ envolve δq e δt. Agora, se na linguagem das funções a VD q é dada diretamente em termos da VI q o mesmo não ocorre na linguagem das funções, expressão (12), e muito menos com a sua variação. Sendo assim, em $\delta\Phi = (\delta_q\Phi)\delta q + (\delta_t\Phi)\delta t$ é a variação $\delta_t\Phi = (\partial\Phi/\partial t)$ que deve ser considerada para calcular a variação total de f em relação a t. O resultado que se obtém com a ajuda de (24) é

$$\frac{df_t}{dt} = \underset{\alpha\to\infty}{\ell im}\ \underset{q}{\text{ext}}\left[-\alpha\Phi^*[\overleftrightarrow{f},\overleftrightarrow{H}]\Phi + \Phi^*(\partial\overleftrightarrow{f}/\partial t)\Phi \right] \quad , \tag{26}$$

onde se usou os operadores dados por (16) uma vez que o comutador aparece multiplicado por α, mostrando a necessidade do uso de expressões corretas em α^{-1}.

Comparando (26) e (5.17) conclui-se que

$$\{f,H\} = \lim_{\alpha\to\infty} \operatorname*{ext}_{q} \Phi^*(-\alpha[\overleftrightarrow{f},\overleftrightarrow{H}])\Phi \quad . \tag{27}$$

Embora não seja difícil demonstrar (26) prefere-se fazer o caminho inverso, ou seja, partindo do lado direito de (27) para chegar ao esquerdo. Com isso ilustra-se as propriedades do operadores dados por (16).

Primeiro, sejam operadores arbitrários $\overleftrightarrow{f}$ e $\overleftrightarrow{H}$,

$$\overleftrightarrow{H} = \frac{1}{2}\sum A_{mn}\left(\overleftarrow{q^n p^m} + \overrightarrow{q^n p^m}\right) , \quad \overleftrightarrow{f} = \frac{1}{2}\sum B_{rs}\left(\overleftarrow{q^r p^s} + \overrightarrow{q^r p^s}\right) .$$

Utilizando-os para calcular $\Phi^*\overleftrightarrow{f}\times\overleftrightarrow{H}\Phi$ e $\Phi^*\overleftrightarrow{H}\times\overleftrightarrow{f}\Phi$ obtém-se

$$\Phi^*[\overleftrightarrow{f},\overleftrightarrow{H}]\Phi = \frac{1}{4}\sum A_{mn}B_{rs}(\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2) ,$$

$$\mathcal{R}_1 = \Phi^*\left(\overleftarrow{q^r p^s}\,\overleftarrow{q^n p^m} + \overrightarrow{q^r p^s}\,\overrightarrow{q^n p^m} - \overleftarrow{q^n p^m}\,\overleftarrow{q^r p^s} - \overrightarrow{q^n p^m}\,\overrightarrow{q^r p^s}\right)\Phi ,$$

$$\mathcal{R}_2 = \Phi^*\left(\overleftarrow{q^r p^s}\,\overrightarrow{q^n p^m} + \overrightarrow{q^r p^s}\,\overleftarrow{q^n p^m} - \overleftarrow{q^n p^m}\,\overrightarrow{q^r p^s} - \overrightarrow{q^n p^m}\,\overleftarrow{q^r p^s}\right)\Phi .$$

Por outro lado, usando a propriedade (19),

$$\overrightarrow{q^r p^s}\,\overleftarrow{q^n p^m} = \overrightarrow{q^r p^s}\,\overrightarrow{q^n p^m} + \overrightarrow{q^r p^s}\mathcal{O}(1)[p^m,q^n] ,$$

$$\overleftarrow{q^r p^s}\,\overrightarrow{q^n p^m} = \overleftarrow{q^r p^s}\,\overleftarrow{q^n p^m} + \overleftarrow{q^r p^s}\mathcal{O}(1)[q^n,p^m] ,$$

$$\overrightarrow{q^n p^m}\,\overleftarrow{q^r p^s} = \overrightarrow{q^n p^m}\,\overrightarrow{q^r p^s} + \overrightarrow{q^n p^m}\mathcal{O}(1)[p^s,q^r] ,$$

$$\overleftarrow{q^n p^m}\,\overrightarrow{q^r p^s} = \overleftarrow{q^n p^m}\,\overleftarrow{q^r p^s} + \overleftarrow{q^n p^m}\mathcal{O}(1)[q^r,p^s] ,$$

que usados em $\mathcal{R}_2$ fornecem

$$\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 + \Phi^*\left[\left(\overleftarrow{q^r p^s} - \overrightarrow{q^r p^s}\right)\mathcal{O}(1)[q^n,p^m] - \left(\overleftarrow{q^n p^m} - \overrightarrow{q^n p^m}\right)\mathcal{O}(1)[q^r,p^s]\right]\Phi,$$

onde novamente usando (19)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 &= \mathcal{R}_1 + \Phi^*\left[\mathcal{O}(1)[p^s,q^r][q^n,p^m] - \mathcal{O}(1)[p^m,q^n][q^r,p^s]\right]\Phi = \\ &= \mathcal{R}_1 + \Phi^*\mathcal{O}(1)\left[[q^n,p^m],[q^r,p^s]\right]\Phi \quad ,\end{aligned}$$

de modo que

$$\Phi[\overleftarrow{f},\overleftarrow{H}]\Phi = \frac{1}{2}\sum A_{mn}B_{rs}\mathcal{R}_1 + \mathcal{O}(\alpha^{-1})\,\frac{1}{4}\sum A_{mn}B_{rs}\Phi^*\left[[q^n,p^m],[q^r,p^s]\right]\Phi.$$

Agora, como $[q,p] = -\alpha^{-1}$, o termo de mais baixa ordem em $[q^n,p^m]$ e $[q^r,p^s]$ é da ordem de α^{-1}, logo $\left[[q^n,p^m],[q^r,p^s]\right]$ é da ordem de α^{-2} e a sua contribuição anula-se no limite $\alpha \to \infty$, sendo desnecessário calcula-la. Logo,

$$\Phi[\overleftarrow{f},\overleftarrow{H}]\Phi = \frac{1}{2}\sum A_{mn}B_{rs}\mathcal{R}_1 + \mathcal{O}(\alpha^{-2}) \quad .$$

Pela definição dos operadores a quantidade $\mathcal{R}_1$ escreve-se

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 = &\left(\overrightarrow{q^n p^m}\;\overrightarrow{q^r p^s}\;\Phi\right)^*\Phi - \left(\overrightarrow{q^r p^s}\overrightarrow{q^n p^m}\Phi\right)^*\Phi + \Phi^*\left(\overrightarrow{q^r p^s}\overrightarrow{q^n p^m}\Phi\right) - \\ &- \Phi^*\left(\overrightarrow{q^n p^m}\;\overrightarrow{q^r p^s}\;\Phi\right) \quad ,\end{aligned}$$

Todos esses termos envolvem o cálculo de $\overrightarrow{q^l p^k}\overrightarrow{q^j p^l}\Phi$. Usando (7) tem-se

$$\overrightarrow{q^l p^k}\;\overrightarrow{q^j p^l}\Phi = \overrightarrow{q^l p^k}\left[\; q^j\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^l\Phi + \alpha^{-1}L^l_1 q^j\Phi + \mathcal{O}(\alpha^{-2})\Phi\;\right] \quad ,$$

onde usando a regra de Leibnitz para as derivadas de um produto obtém-se até a primeira ordem em α^{-1}

$$\overrightarrow{q^j p^k}\,\overrightarrow{q^j p^l}\Phi = q^{l+j}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{k+l}\Phi + \alpha^{-1}L_1^k q^{l+j}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{l}\Phi +$$
$$+ \alpha^{-1}kN_1^l q^{l+j}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{k-1}\Phi + \alpha^{-1}kM_1^j q^l\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{k+l-1}\Phi +$$
$$+ \alpha^{-1}L_1^l q^{l+j}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{k}\Phi + \mathcal{O}(\alpha^{-2}) \quad ,$$

onde $M_1^j = jq^{j-1}$ e $N_1^l = i(\partial S/\partial q)^{l-1}(\partial^2 S/\partial q^2)$. Usando estes resultados obtem-se após os cancelamentos possíveis

$$\Phi^*[\overleftrightarrow{f},\overleftrightarrow{H}]\Phi = \frac{1}{2}\sum A_{mn}B_{rs}\Big[\,2\alpha^{-1}sN_1^m q^{n+r}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{s-1} +$$
$$+ 2\alpha^{-1}sM_1^n q^r\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{m+s-1} - 2\alpha^{-1}mN_1^s q^{n+r}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{m-1} -$$
$$- 2\alpha^{-1}mM_1^r q^n\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{m+s-1} + \mathcal{O}(\alpha^{-2})\Big] + \mathcal{O}(\alpha^{-2}) \quad ,$$

onde usando as definições de M_1^j e N_1^j vê-se que os termos que contém este último cancelam-se restando

$$\Phi^*[\overleftrightarrow{f},\overleftrightarrow{H}]\Phi = \sum A_{mn}B_{rs}\alpha^{-1}\Big[\,snq^{n+r-1}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{m+s-1} -$$
$$- mrq^{n+r-1}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{m+s-1} + \mathcal{O}(\alpha^{-1})\Big] + \mathcal{O}(\alpha^{-1}) \quad . \tag{28}$$

Finalmente, usando essa expressão,

$$\lim_{\alpha\to\infty}\operatorname*{ext}_q\left[-\alpha\Phi^*[\overleftrightarrow{f},\overleftrightarrow{H}]\Phi\right] = \lim_{\alpha\to\infty}\operatorname*{ext}_q\Big\{\sum A_{mn}B_{rs}\Big[mrq^{n+r-1}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{m+s-1} -$$
$$- snq^{n+r-1}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^{m+s-1} + \mathcal{O}(\alpha^{-1})\Big] + \mathcal{O}(\alpha^{-1})\Big\} =$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty}\Big\{\sum A_{mn}B_{rs}\Big[\,mrq^{n+r-1}p^{m+s-1} -$$
$$-snq^{n+r-1}p^{m+s-1} + \mathcal{O}(\alpha^{-1})\Big] + \mathcal{O}(\alpha^{-1})\Big\} =$$

$$= \sum A_{mn}B_{rs}\Big[\,mrq^{n+r-1}p^{m+s-1} - snq^{n+r-1}p^{m+s-1}\Big] =$$

$$= \sum A_{mn} B_{rs} \left[\frac{\partial(q^r p^s)}{\partial q} \frac{\partial(q^n p^m)}{\partial p} - \frac{\partial(q^n p^m)}{\partial q} \frac{\partial(q^r p^s)}{\partial p} \right] =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial f}{\partial p} = \{f,H\} \quad , \tag{29}$$

onde $H(q,p,t) = \sum A_{mn} q^n p^m$ e $f(q,p,t) = \sum B_{rs} q^r p^s$, mostrando que (27) é de fato correta.

Sendo assim, dados dois operadores $\overleftrightarrow{f}_1$ e $\overleftrightarrow{f}_2$ que representam as VD f_1 e f_2 pode-se associar um outro operador $\overleftrightarrow{g}$ de acordo com

$$\overleftrightarrow{g} = -\alpha[\overleftrightarrow{f}_1 , \overleftrightarrow{f}_2] = -\alpha(\overleftrightarrow{f}_1 \overleftrightarrow{f}_2 - \overleftrightarrow{f}_2 \overleftrightarrow{f}_1) \tag{30}$$

ao qual está associada a VD g e que é dentro da linguagem dos operadores justamente a operação do colchete de Poisson de f_1 e f_2 na linguagem das funções.

Com isso não se pretende permanecer mais nesses pontos. Embora uma discussão mais completa pudesse ser feita o que foi discutido já é mais do que suficiente para a MG e para a comparação dos formalismos.

PARTE III

• TEORIAS GERAIS DA MECÂNICA •

MG é a denominação genérica dada a uma classe de teorias da Mecânica cujos fundamentos foram apresentados na parte I, particularmente nos cap. 3 e 4.

A escolha de uma operação Ω define uma MG cujas equações são determinadas a partir do PV (4.6) com os extremos $P_0 = (t_0, x_0)$ e $P_n = (t_n, x_n)$ fixos e $\hat{\Phi}(n,0)$ dado por (4.4). As VD da teoria da Mecânica que descreve no caso uma dinâmica convolutiva, definidas, assim como as equações, pelo isomorfismo, serão diferentes das clássicas que descrevem uma dinâmica conjuntiva.

São dois, portanto, os objetivos principais desta parte. Primeiro: escrever as equações de uma MG a partir do PV (4.6) que leva a um formalismo lagrangeano descrito no cap. 7 e a um formalismo hamiltoniano descrito no cap. 11. Segundo: definir as VD, a ser feito nos cap. 8,9 e 10. No cap. 12 estudam-se as TC dentro de uma MG.

Volta-se a insistir que a formulação geral a ser apresentada se faz em função de $\hat{\Phi}(n,0)$ e não de $\hat{S}(n,0)$ apenas devido a um exemplo particularmente importante de uma MG não-trivial, a ser apresentado na próxima parte, no qual as equações são naturalmente escritas em termos de $\hat{\Phi}(n,0)$ devido à particular escolha de Ω .

7. FORMALISMO LAGRANGEANO DA MECÂNICA GENERALIZADA.

Seja $\hat{\Phi}(n,0)$ dado por (4.4) reescrita abaixo agora em termos de coordenadas generalizadas,

$$\hat{\Phi}(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_1 \ldots \Omega_{n-1} \exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right] = \Omega_{[\gamma]} e^{\alpha S[\gamma]} , \qquad (1)$$

onde $S(i+1,i) = \varepsilon L(q'_i, \dot{q}'_i, t'_i)$.

A generalização desta equação para um sistema com k graus de liberdade é imediata. É preciso, entretanto, realizar uma mudança na notação, ou melhor, estendê-la coerentemente. Na equação acima tem-se $\Omega_m = \Omega_{q_m} = \Omega_{q(t_m)}$. Escrevendo $\overset{l}{\Omega}_m$ para denotar que a operação Ω age sobre $q_l(t_m)$ ($l = 1,\ldots,k$; $m = 1,\ldots,n-1$) então (1) pode ser generalizada para k graus de liberdade como

$$\hat{\Phi}(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\prod_{l=1}^{k} \prod_{m=1}^{n-1} \overset{l}{\Omega}_m\right) \exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right] , \qquad (2)$$

onde $\overset{l}{\Omega}_m$ está definida sobre $q_l(t_m)$ e $S(i+1,i)$ é dado por

$$S(i+1,i) = \varepsilon L\left(q'_1(t_i),\ldots,q'_k(t_i);\dot{q}'_1(t_i),\ldots,\dot{q}'_k(t_i);t'_i\right) .$$

Nos cap. 3 e 5 discutiu-se o significado da variação δA de um funcional A. Escrever a variação $\delta\hat{\Phi}(n,0)$ é uma tarefa simples para a classe de operações Ω consideradas, ou seja, aquelas para as quais o efeito das operações Ω ($\Omega^{\perp}$) e δ são indiferentes à ordem em que são efetuadas. Sem dúvida, essa classe de operações Ω é muito ampla, mesmo se considerada a outra condição imposta sobre elas no cap. 3. Logo, uma escolha sábia da operação Ω deve ser guiada pela intuição física acima de tudo. Para essa classe de operações, usando a equação (1), tem-se

$$\delta\hat{\Phi}(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Omega_1 \ldots \Omega_{n-1} \delta \exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right] . \qquad (3)$$

Por outro lado, como

$$\delta\exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right] = \exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\alpha\delta\left(\sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right) \tag{4}$$

faz-se necessário calcular $\delta S(n,0) = \delta\sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)$, dada, no limite em que $\varepsilon \to 0$, por (5.1). Para que esta seja aplicável é necessário dividir o intervalo de tempo $(t_n - t_0)$ em sub-intervalos $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \varepsilon$ ($i = 0,1,\ldots,n-1$) e escrever

$$\int_{t_0}^{t_n} dt\,\delta q(t)\left[-\frac{d}{dt}\left(\partial L/\partial \dot{q}\right) + \partial L/\partial q\right] =$$

$$= \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i\,\delta q_i\left[-\Delta\left(\partial L/\partial \dot{q}\right)/\Delta t + \partial L/\partial q\right]_{t=t_i},$$

onde $\delta q_i = \delta q(t_i)$, $\Delta\left(\partial L/\partial \dot{q}\right)_{t=t_i} = \left(\partial L/\partial \dot{q}\right)_{t=t_{i+1}} - \left(\partial L/\partial \dot{q}\right)_{t=t_i}$.

Desse modo, considerando os extremos fixos,

$$\delta \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i\,\delta q_i\left[-\Delta\left(\partial L/\partial \dot{q}\right)/\Delta t + \partial L/\partial q\right]_{t=t_i}, \tag{5}$$

onde $\Delta t_i = \varepsilon$ para todos os i's. A introdução de (5) em (4) e por sua vez em (3) resulta na seguinte expressão para $\delta\hat{\Phi}(n,0)$:

$$\delta\hat{\Phi}(n,0) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \Omega_1 \ldots \Omega_{n-1} \exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\alpha \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i\,\delta q_i\left[-\Delta\left(\partial L/\partial \dot{q}\right)/\Delta t + \partial L/\partial q\right]_{t=t_i},$$

$$\delta\hat{\Phi}(n,0) = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t_i\,\delta q_i\,\alpha\left[\Omega_1 \ldots \Omega_{n-1} \exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right] \cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[-\Delta\left(\partial L/\partial \dot{q}\right)/\Delta t + \partial L/\partial q\right]_{t=t_i}\right]. \tag{6}$$

Esta é a expressão procurada para $\delta\hat{\Phi}(n,0)$. Como δq_i são arbitrárias a solução do PV $\delta\hat{\Phi}(n,0) = 0$ é dada por

$$\underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left(\exp\left[\alpha\sum_{i=0}^{n-1}S(i+1,i)\right]\right).\left[-\Delta\left(\partial L/\partial\dot{q}\right)/\Delta t+\partial L/\partial q\right]_{t=t_i}=0\ ,$$

$$(\ i=0,1,\ldots,n-1\ ).\qquad(7)$$

No limite em que $\Delta t_i = \varepsilon \to 0$ pode-se escrever

$$\underset{[\gamma]}{\Omega}e^{\alpha S[\gamma]}\Lambda_t=0\ ,\ (\ t_0<t<t_n\ )\ ,\qquad(8)$$

$$\Lambda_t\equiv-\frac{d}{dt}\left(\partial L/\partial\dot{q}\right)+\partial L/\partial q\ .\qquad(9)$$

A equação (7) ou (8) é a solução do PV da MG. Compare a equação (8) com a equação de Lagrange da MC, equação (5.2). Esta é justamente a equação à qual se reduz (8) para $\Omega = 1$. A equação (8) é, para um $\Omega \neq 1$, isomorfa à equação de Lagrange, e o seu papel é o mesmo desta dentro da MG. Portanto, nada mais justo do que denominar a equação (8) de equação *generalizada* de Lagrange. Por outro lado, no caso de um sistema com k graus de liberdade é fácil ver que a generalização de (6) é dada por

$$\begin{aligned}\delta\hat{\Phi}(n,0)=\lim_{\Delta t_i\to 0}\sum_{r=1}^{k}\sum_{i=0}^{n-1}\Delta t_i\,\delta q_r(t_i)\,\alpha\Bigg[\left(\prod_{l=1}^{k}\prod_{m=1}^{n-1}\underset{m}{\Omega}^{l}\right)\cdot\\ \cdot\left(\exp\left[\alpha\sum_{i=0}^{n-1}S(i+1,i)\right]\right).\left[-\Delta\left(\partial L/\partial\dot{q}_r\right)/\Delta t+\partial L/\partial q_r\right]_{t=t_i}\Bigg]\end{aligned}\qquad(10)$$

Logo, a solução do PV escreve-se

$$\left(\prod_{l=1}^{k}\prod_{m=1}^{n-1}\underset{m}{\Omega}^{l}\right)\left(\exp\left[\alpha\sum_{i=0}^{n-1}S(i+1,i)\right]\right)\left[-\Delta\left(\partial L/\partial\dot{q}_r\right)/\Delta t+\partial L/\partial q_r\right]_{t=t_i}=0$$

$$(\ i=0,1,\ldots,n-1\ ;\ r=1,\ldots,k\ ).\qquad(11)$$

Essa equação é a generalização da equação (7) para um sistema com k graus de liberdade. Quanto a (8) basta tomar o limite $\Delta t_i = \varepsilon \to 0$ em (11) para obter um sistema de k equações generalizadas de Lagrange

$$\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} \Lambda_t^r = 0 \quad , \; (t_0 < t < t_n) \quad , \tag{12}$$

$$\Lambda_t^r \equiv - \frac{d}{dt}\left(\partial L/\partial \dot{q}_r\right) + \partial L/\partial q_r \; .$$

Surge aqui, entretanto, uma questão. Na MC a equação de Lagrange (5.2), $\Lambda_t = 0$, é uma equação diferencial que deve ser satisfeita pelo caminho γ: $x = x(t)$ que representa a dinâmica clássica ou conjuntiva, ou seja, é uma equação diferencial para a VD $x = x(t)$. É nesse ponto que se questiona o sentido da equação generalizada de Lagrange, equação (8). Para respondê-la é necessário, portanto, definir as VD generalizadas, ou seja, as VD de uma MG que descrevem uma dinâmica geralmente convolutiva. Estas definições dependem da escolha da operação Ω em função da qual são possíveis escrevê-las guiando-se pelo isomorfismo. Conforme foi dito, isso será feito na próximo capítulo. Contudo, cabem antes algumas considerações.

Voltando um pouco atrás, a explicitação da equação generalizada de Lagrange para um caso particular permite escrever a VD que descreve essa dinâmica convolutiva e que satisfaz essa equação. Note que a equação generalizada de Lagrange (7) pode ser escrita como

$$\underset{1}{\Omega} \ldots \underset{n-1}{\Omega} \left(\exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right) \cdot \left[- \frac{(\partial L/\partial \dot{q})_{t_{i+1}}}{\Delta t_i} + \frac{(\partial L/\partial \dot{q})_{t_i}}{\Delta t_i} + \right.$$

$$\left. + (\partial L/\partial q)_{t_i} \right] = - \frac{1}{\Delta t} \left[\underset{1}{\Omega} \ldots \underset{n-1}{\Omega} \left(\exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right) (\partial L/\partial \dot{q})_t \; - \right.$$

$$\left. - \underset{1}{\Omega} \ldots \underset{n-1}{\Omega} \left(\exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right) (\partial L/\partial \dot{q})_{t_i} \right] +$$

$$+ \underset{1}{\Omega} \ldots \underset{n-1}{\Omega} \left(\exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right) (\partial L/\partial q)_{t_i} =$$

$$= \frac{- \Delta \left[\underset{1}{\Omega} \ldots \underset{n-1}{\Omega} \left(\exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right) \; (\partial L/\partial \dot{q}) \right]_{t_i}}{\Delta t_i} +$$

$$+ \underset{1}{\Omega} \ldots \underset{n-1}{\Omega} \left(\exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right) (\partial L/\partial q)_{t_i} = 0 \; ,$$

$$(\; i = 0,1,\ldots,n-1 \;). \tag{13}$$

Considere a lagrangeana $L = m\dot{x}^2/2 - V(x)$. Nesse caso $\partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$

e $\partial L/\partial x = -\partial V/\partial x$ e $(\dot{x})_{tl}$ pode ser escrito como $(\dot{x})_{tl} = (x_{l+1} - x_l)/\Delta t_l$, que em (13),

$$-\frac{\Delta}{\Delta t_l}\left[\underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left(\exp\left[\alpha\sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right) m\left(\frac{x_{l+1}-x_l}{\Delta t_l}\right)\right]+$$

$$+\underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left(\exp\left[\alpha\sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right)\left(-\partial V/\partial x\right)_{t_l} =$$

$$=-\frac{\Delta}{\Delta t_l}\left[\frac{\Delta}{\Delta t_l}\left(\underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left(\exp\left[\alpha\sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right) mx\right)_{t_l}\right]+$$

$$+\underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left(\exp\left[\alpha\sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right)\left(-\partial V/\partial x\right)_{t_l} = 0 \ ,$$

$$m\frac{\Delta}{\Delta t_l}\left[\frac{\Delta}{\Delta t_l}\left(\underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left(\exp\left[\alpha\sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right) x\right)_{t_l}\right]=$$

$$=-\left(\underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left(\exp\left[\alpha\sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right)\left(\partial V/\partial x\right)\right)_{t_l} \ ,$$

$$(\ i = 0,1,\ldots,n-1\ ). \qquad (14)$$

No limite em que $\Delta t_l \to 0$ a equação (14) é uma equação diferencial para

$$\underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left(\exp\left[\alpha\sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right)x_l \ , \ (\ t_0 < t_l < t_n\ ) \ , \qquad (15)$$

nesse limite e que se constitui numa generalização da equação $md^2x/dt^2 = -\partial V/\partial x$ na MC para $x = x(t)$. Logo, o papel da VD dentro da MG isomorfa à VD x na MC é dado pela quantidade (15). Para lagrangeanas mais gerais pode-se utilizar o mesmo procedimento clássico definindo a partir de (13) a quantidade

$$\underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left(\exp\left[\alpha\sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i)\right]\right)\left(\partial L/\partial \dot{q}\right)_{t_l} \ , \ (t_0<t_l<t_n) \ . \qquad (16)$$

O problema é interpretar (16). No caso clássico a quantidade isomorfa a esta é $\partial L/\partial \dot{q}$, que é uma função de $q,\dot{q},t$. Por sua vez ela é usada para definir uma nova VI $\partial L/\partial \dot{q} \equiv p = p(q,\dot{q},t)$ em termos da qual

elimina-se $\dot{q} = \dot{q}(q,p,t)$. Já a VD p é dada por $\partial L/\partial\dot{q}$ para $q = \bar{q}(t)$, onde $\bar{q}(t)$ é a solução da equação de Lagrange. Portanto, (16) deve relacionar-se não só com uma VD mas também deve ser usada para definir a VI p, fundamental para a formulação hamiltoniana da Mecânica. Sendo assim, note que

$$\underset{k}{\Omega}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\underset{k+1}{\Omega}\cdots\underset{n-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{l=k}^{n-1}S(i+1,i)]\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_k}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\underset{1}{\Omega}\cdots\underset{k-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{l=0}^{k-1}S(i+1,i)]\right\}=$$

$$=\underset{k}{\Omega}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\underset{k+1}{\Omega}\cdots\underset{n-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{l=k}^{n-1}S(i+1,i)]\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\alpha}\lim_{\Delta q_k\to 0}\frac{\Delta}{\Delta q_k}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\underset{1}{\Omega}\cdots\underset{k-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{l=0}^{k-1}S(i+1,i)]\right\}=$$

$$=\underset{k}{\Omega}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\underset{k+1}{\Omega}\cdots\underset{n-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{l=k}^{n-1}S(i+1,i)]\right\}\cdot$$

$$\cdot\lim_{\Delta q_k\to 0}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\underset{1}{\Omega}\cdots\underset{k-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{l=0}^{k-1}S(i+1,i)]\,\frac{\Delta S(k^{=},k)}{\Delta q_k}\right\},$$

onde $\Delta q_k = q_k^{=} - q_k$. Uma expressão para $\dfrac{\Delta S(k^{=},k)}{\Delta q_k}$ pode ser facilmente encontrada a partir da expressão geral (5.1) considerando nesta $\delta q_0 = \delta t_0 = \delta t_n = 0$ e $t_n = t_0$, de modo que na notação empregada

$$\Delta S(k^{=},k) = \left(\partial L/\partial\dot{q}\right)_k \Delta q_k,$$

a partir da qual chega-se à expressão

$$\underset{k}{\Omega}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\underset{k+1}{\Omega}\cdots\underset{n-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{l=k}^{n-1}S(i+1,i)]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left(\partial L/\partial\dot{q}\right)_k\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\underset{1}{\Omega}\cdots\underset{k-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{l=0}^{k-1}S(i+1,i)]\right\}= \tag{17}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\underset{1}{\Omega}\cdots\underset{n-1}{\Omega}\left[\exp[\alpha\sum_{l=0}^{n-1}S(i+1,i)]\right]\left(\partial L/\partial\dot{q}\right)_k .$$

O que a expressão (17) mostra é que naturalmente pode-se associar um operador $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_k}$ à quantidade $\partial L/\partial \dot{q}_k$. Esse operador já surgiu dentro do cap. 6 e ao longo dos próximos a sua importância será evidenciada. Por outro lado, não basta (17) para definir a VI p. Essa expressão precisa ser generalizada para dar conta das propriedades da operação Ω. Isso também será discutido no cap. 11. Por ora a questão que precisa ser enfatizada é a distinção entre VD e VI, assunto dos próximos capítulos. Isso representará uma antecipação do formalismo hamiltoniano mas acredita-se que não só isso como também os demais pontos que serão discutidos nos próximos três capítulos justificam interromper o que está sendo discutido para retomá-lo no cap. 11.

Como uma última observação deve-se notar que por se tratar da solução de um PV espera-se que, assim como a equação de Lagrange é invariante sob certas transformações, a equação generalizada de Lagrange também o seja. Isso de fato ocorre, sendo fácil convencer-se disso.

Agora, passando ao próximo capítulo, a preocupação residirá sobre a importante questão das VD em uma MG que descrevem uma dinâmica convolutiva.

8. VARIÁVEIS DINÂMICAS: DEFINIÇÃO.

A questão sobre quais são as VD de uma MG que descreve uma dinâmica convolutiva é tão fundamental quanto, ou mais, a questão da equação do movimento desta. Responder a esta questão não é uma tarefa difícil. Basta ter o isomorfismo como guia. Sobre isso reside a preocupação deste capítulo.

Inicialmente, é melhor primeiro estabelecer alguns resultados para serem posteriormente utilizados. Dentre estes é de fundamental importância demonstrar que

$$\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_0,t_0) = \underset{q_n}{\Omega}\, \hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) \quad . \tag{1}$$

Para tal basta usar a expressão (7.1), ou seja,

$$\hat{\Phi}(s,0) \equiv \hat{\Phi}(q_s,t_s;q_0,t_0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \underset{1}{\Omega} \cdots \underset{s-1}{\Omega} \exp[\alpha \sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i)] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \underset{1}{\Omega} \cdots \underset{n-1}{\Omega}\, \underset{n}{\Omega}\, \underset{n+1}{\Omega} \cdots \underset{s-1}{\Omega} \exp[\alpha \sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i) + \alpha \sum_{l=n}^{s-1} S(i+1,i)] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \underset{n}{\Omega} \left[\underset{n+1}{\Omega} \cdots \underset{s-1}{\Omega} \exp[\alpha \sum_{l=n}^{s-1} S(i+1,i)]\right] \left[\underset{1}{\Omega} \cdots \underset{n-1}{\Omega} \exp[\alpha \sum_{l=0}^{n-1} S(i+1,i)]\right] =$$

$$= \underset{n}{\Omega}\, \hat{\Phi}(s,n)\hat{\Phi}(n,0) = \underset{q_n}{\Omega}\, \hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) \quad .$$

Cabe agora questionar qual o comportamento de $\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_0,t_0)$ no limite em que $t_s \to t_0$. Nesse caso a equação (7.1) não pode ser utilizada diretamente pois ela foi deduzida para um intervalo de tempo $(t_s - t_0)$ finito, embora a sua utilização indireta via equação (1) faça sentido. Primeiro, note que nesse caso tem-se $S \to 0$ e $\Phi = e^{\alpha S} \to 1$, além de $q_s \to q_0$ correspondendo às condições iniciais fixadas. Isso não significa, entretanto, que nesse limite seja legítimo escrever $\hat{\Phi} \to 1$, ou pelo menos entendê-la no sentido literal. Em função de (1) vê-se que o correto nesse caso consiste em escrever

$$\lim_{t_s\to t_0} \hat{\Phi}(q_s,t_s;q_0,t_0) = \hat{\Phi}(q_s,t_0;q_0,t_0) = \hat{1}(q_s,q_0) \quad , \tag{2}$$

cujo sentido é dado pela sua introdução em (1). Esta equação relaciona as quantidades $\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0)$ e $\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)$ calculadas entre os extremos fixos $P_0 = (t_0,q_0)$ e $P_n = (t_n,q_n)$ no primeiro caso e $P_n = (t_n,q_n)$ e $P_s = (t_s,q_s)$ no outro com $\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_0,t_0)$ calculada entre os extremos fixos P_s e P_0 através de uma operação sobre q_n, nesse caso não mais considerado fixo. A VI q_n é uma variável muda. Logo, no limite em que $t_s \to t_n$, com $q_s \to q_n$ correspondendo a $P_s \to P_n$, pode-se escrever

$$\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) = \underset{q_n}{\Omega}, \hat{\Phi}(q_n,t_n;q'_n,t_n)\hat{\Phi}(q'_n,t_n;q_0,t_0) \quad ,$$

onde introduzindo (2) chega-se a

$$\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) = \underset{q_n}{\Omega}, \hat{1}(q_n,q'_n)\hat{\Phi}(q'_n,t_n;q_0,t_0) \quad . \tag{3}$$

Esta equação é de fundamental importância. Nela está contido o significado do símbolo $\hat{1}(q_n,q'_n)$, justificando o seu uso através desta " definição operacional ", mostrando inclusive que a sua definição como um objeto matemático depende da definição de $\underset{qn}{\Omega}$,. A equação (2) não possui, portanto, nenhum significado matemático concreto no sentido da definição de $\hat{1}(q_n,q'_n)$ como um objeto matemático, o que se encontra na dependência da definição de $\underset{qn}{\Omega}$,, embora o seu uso em um sentido abstrato esteja plenamente justificado em função de (3).

Outra propriedade interessante de $\hat{1}(q_n,q'_n)$ pode ser obtida tomando $q_s \to q''_n$, $t_s \to t_n$, $q_0 \to q'_n$ e $t_0 \to t_n$ em (1) e usando (2). É fácil ver que

$$\hat{1}(q''_n,q'_n) = \underset{q_n}{\Omega} \hat{1}(q''_n,q_n)\hat{1}(q_n,q'_n) \quad . \tag{4}$$

Finalmente, tomando o limite $t_s \to t_0$ em (1) e usando (2) obtém-se

$$\underset{q_n}{\Omega} \hat{\Phi}(q_s,t_0;q_n,t_n)\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) = \hat{1}(q_s,q_0) \quad ,$$

que pode ser escrita como

$$\underset{q_n}{\Omega}\, \hat{\Phi}^*(q_n,t_n;q_s,t_0)\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) = \hat{1}(q_s,q_0) \quad , \tag{5}$$

onde define-se $\hat{\Phi}^*(q_n,t_n;q_0,t_0)$ em conformidade com (6.2) como

$$\hat{\Phi}^*(q_n,t_n;q_0,t_0) \equiv \hat{\Phi}(q_0,t_0;q_n,t_n) \quad . \tag{6}$$

É interessante notar que o uso do símbolo $\hat{1}(q_s,q_0)$ se vê assim justificado e que face à (6) tem-se

$$\hat{1}^*(q_n,q'_n) = \hat{1}(q'_n,q_n) \quad . \tag{7}$$

Note que o conjunto dos $\hat{\Phi}$ formam um grupo. De fato, a equação (1) define a lei de composição do grupo, evidentemente associativa, e a existência do elemento neutro e do inverso, dados por (2) e (6), estão comprovadas por (3) e (5), respectivamente. Falta, entretanto, definir os elementos desse grupo, o que depende da escolha de Ω que os define como objetos matemáticos, mas essas são particularidades de uma dada MG que definem o próprio conteúdo físico desses elementos.

Por outro lado, $\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0)$ é uma função dos extremos $P_n = (t_n,q_n)$ e $P_0 = (t_0,q_0)$ considerados fixos. Dados os valores das condições iniciais, ou seja, dados t_0 e q_0, as suas introduções em $\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0)$ fornecem uma função apenas do extremo P_n, função esta denotada por $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$. Sendo assim, se os valores de t_0 e q_0 são respectivamente $t_0^{\#}$ e $q_0^{\#}$, define-se

$$\hat{\varphi}(q_n,t_n) \equiv \hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0)\big|_{(t_0,q_0)=(t_0^{\#},q_0^{\#})} \quad , \tag{8}$$

com uma óbvia extensão para $\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)$ em função de (6). Em termos de $\hat{\varphi}$ a equação (1) escreve-se

$$\hat{\varphi}(q_s,t_s) = \underset{q_n}{\Omega}\, \hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n) \quad , \tag{9}$$

enquanto que para (3) tem-se

$$\hat{\varphi}(q_n,t_n) = \Omega_{q_n'} \hat{1}(q_n,q_n')\hat{\varphi}(q_n',t_n) \quad . \tag{10}$$

Já usando (5), (9-10) nesta ordem pode-se escrever

$$\Omega_{q_s} \hat{\varphi}^*(q_s,t_s)\hat{\varphi}(q_s,t_s) =$$

$$= \Omega_{q_s}\Omega_{q_n}\Omega_{q_n'}\hat{\varphi}^*(q_n',t_n)\hat{\Phi}^*(q_s,t_s;q_n',t_n)\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n) =$$

$$= \Omega_{q_n}\Omega_{q_n'}\hat{\varphi}^*(q_n',t_n)\hat{1}(q_n',q_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n) = \Omega_{q_n}\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n) \quad .$$

Segue-se daí que essa quantidade é independente de q_n e t_n, ou seja,

$$\Omega_{q_n}\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n) = N^2 \quad , \tag{11a}$$

onde N^2 é uma constante escolhida positiva devido a (4.7b). Note que a expressão (10), ou equivalentemente (3), é crucial para a validade de (11). Redefinindo $\hat{\varphi}$ como $\hat{\varphi}/N$

$$\Omega_{q_n}\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n) = 1 \quad . \tag{11b}$$

Está claro que é a expressão (5) e não (11) que é a equação que apresenta uma isomorfa clássica. Certamente poderia ser definida uma função $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ na MC mas isso não apresentaria nenhuma utilidade.

Embora existam outros resultados interessantes que podem ser apresentados não se pode esquecer que o objetivo desta seção é determinar as VD de uma MG e para isso eles são mais do que suficientes. Numa primeira instância a preocupação será determinar as VD $\hat{p}$ e $\hat{H}$ isomorfas às VD p e H na MC para depois determinar as demais.

Primeiro deve-se recordar que as VD p e H definidas na MC são obtidas à partir do cálculo de δS, ou seja,

$$\delta S = S(q_{n+1},t_{n+1};q_0,t_0) - S(q_n,t_n;q_0,q_0) \quad ,$$

no limite em que $\delta q_n \to 0$ e $\delta t_n \to 0$. Para isso basta expandir $S(q_{n+1},t_{n+1};q_0,t_0) \equiv S(n+1,0)$ em torno de $S(q_n,t_n;q_0,q_0) \equiv S(n,0)$,

$$S(n+1,0) = S(n,0) + \left(\partial S(n,0)/\partial q_n\right)\delta q_n + \left(\partial S(n,0)/\partial t_n\right)\delta t_n \quad ,$$

que obtém-se (5.6) com (5.9-10). O mesmo raciocínio vale se for usado Φ, exceto que nesse caso é necessário o uso da propriedade (6.3),

$$\begin{aligned}
\ln\Phi(n+1,0) &= \ln[\Phi(n,0) + \left(\partial\Phi(n,0)/\partial q_n\right)\delta q_n + \left(\partial\Phi(n,0)/\partial t_n\right)\delta t_n] = \\
&= \ln\Big[\Phi(n,0)\ [\ 1 + \Phi^*(n,0)\left(\partial\Phi(n,0)/\partial q_n\right)\delta q_n + \\
&+ \Phi^*(n,0)\left(\partial\Phi(n,0)/\partial t_n\right)\delta t_n]\Big] = \ln\Phi(n,0) + \\
&+ \Phi^*(n,0)\left(\partial\Phi(n,0)/\partial q_n\right)\delta q_n + \Phi^*(n,0)\left(\partial\Phi(n,0)/\partial t_n\right)\delta t_n \quad .
\end{aligned}$$

Logo, ao procurar escrever $\delta\hat{S}$ em termos de $\hat{\Phi}$ deve-se tomar o cuidado de contornar o problema que surge em função da propriedade isomorfa a (6.3) ser dada por (5), o que não representa uma dificuldade intransponível.

Seja $\hat{\Phi}(q_{n+1},t_{n+1};q_0,t_0) \equiv \hat{\Phi}(n+1,0)$ e $\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) \equiv \hat{\Phi}(n,0)$. Deseja-se escrever $\hat{\Phi}(n+1,0)$ em termos de $\hat{\Phi}(n,0)$. O uso da equação (1) requer um exame de sua demonstração, o qual mostra que não é correto nesse caso usar $(q_s,t_s) = (q_n,t_n)$ escrevendo $\hat{\Phi}(q_{n+1},t_{n+1};q_n,t_n)$ no lado direito desta. Neste caso (1) deve ser escrita como

$$\hat{\Phi}(q_{n+1},t_{n+1};q_0,t_0) = \underset{q_n}{\Omega}\ e^{\alpha S(q_{n+1},t_{n+1};q_n,t_n)}.\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) \ ,$$

onde $S(q_{n+1},t_{n+1};q_n,t_n) = \varepsilon L(q'_n,\dot{q}'_n,t'_n)$, ou simplesmente

$$\hat{\Phi}(n+1,0) = \underset{n}{\Omega}\ e^{\alpha S(n+1,n)}\hat{\Phi}(n,0) \quad . \tag{12}$$

Agora é preciso examinar o que acontece em (12) à medida em que $\delta t_n \to 0$ e $\delta q_n \to 0$. Obviamente, muitas propriedades desse comportamento dependem da escolha específica de Ω. Porém, isso não impede que a discussão situe-se num plano bem geral.

Uma primeira exigência imediata é consequência direta de (12),

que implica nesse limite em

$$\lim_{n+1\to n} \underset{n}{\Omega}\, e^{\alpha S(n+1,n)}\hat{\Phi}(n,0) = \hat{\Phi}(n,0) \quad . \tag{13}$$

A questão agora é sobre como se dá o limite no lado esquerdo da equação acima. Introduzindo uma exigência a mais supõe-se que nesse caso tem-se

$$\lim_{n+1\to n} \underset{n}{\Omega}\, e^{\alpha S(n+1,n)}\hat{\Phi}(n,0) = \hat{\Phi}(n,0) \lim_{n+1\to n} \underset{n}{\Omega}\, e^{\alpha S(n+1,n)} \quad . \tag{14}$$

A equação (14) não implica diretamente numa exigência sobre Ω visto o limite referir-se à quantidade como um todo. Entretanto, em função do que foi discutido, que implica num comportamento bem definido de $e^{\alpha S(n+1,n)}$ e $\hat{\Phi}(n,0)$ nesse limite, a equação (14) acaba por ser uma exigência adicional sobre Ω. Essa exigência de modo algum limita os resultados pois a classe de operações Ω permanece ampla. Apenas chegou-se a um ponto onde o caminho a ser seguido depende da escolha específica de Ω. O caminho escolhido permitirá escrever as VD sobre uma forma talvez não adequada a outros casos. Está em jogo, portanto, apenas o aspecto formal visto que a definição das VD via isomorfismo é a mesma, quaisquer que sejam as operações Ω aqui consideradas. Sendo assim, para as operações Ω que satisfazem essa exigência as equações (13-14) implicam em

$$\lim_{n+1\to n} \underset{n}{\Omega}\, e^{\alpha S(n+1,n)} = 1 \quad . \tag{15}$$

Conseqüentemente, $\hat{\Phi}(n+1,0)$ pode ser escrito nesse limite, em função de (12) e (14) , como

$$\hat{\Phi}(n+1,0) \simeq \hat{\Phi}(n,0)\, \underset{n}{\Omega}\, e^{\alpha S(n+1,n)} \quad . \tag{16}$$

Por outro lado, através de uma expansão em série de Taylor obtém-se

$$\hat{\Phi}(n+1,0) \simeq \hat{\Phi}(n,0) + \left(\partial\hat{\Phi}(n,0)/\partial q_n\right)\delta q + \left(\partial\hat{\Phi}(n,0)/\partial t_n\right)\delta t_n =$$
$$= \left[1 + \delta q_n \frac{\partial}{\partial q_n} + \delta t_n \frac{\partial}{\partial t_n} \right] \hat{\Phi}(n,0) \ . \tag{17}$$

Estas não são, ainda, formas adequadas para escrever $\hat{\Phi}(n+1,0)$. Multiplicando (16) por $\hat{\Phi}^*(n,0)$ e aplicando a operação Ω obtém-se

$$\underset{n}{\Omega}\hat{\Phi}^*(n,0)\hat{\Phi}(n+1,0) \simeq \underset{n}{\Omega}\hat{\Phi}^*(n,0)\hat{\Phi}(n,0)\ \underset{n}{\Omega} e^{\alpha S(n+1,n)} \ . \tag{18}$$

Finalmente, introduzindo (17) em (18) e esta por sua vez em (16) chega-se à forma procurada, ou seja,

$$\hat{\Phi}(n+1,0) \simeq \hat{\Phi}(n,0) \left[\frac{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}^*(n,0)\left[1 + \delta q_n \frac{\partial}{\partial q_n} + \delta t_n \frac{\partial}{\partial t_n} \right]\hat{\Phi}(n,0)}{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}^*(n,0)\hat{\Phi}(n,0)} \right] \tag{19}$$

Seja agora $\delta\hat{S}$ dada por

$$\delta\hat{S} = \frac{1}{\alpha}\left[\ln\hat{\Phi}(n+1,0) - \ln\hat{\Phi}(n,0)\right] \ .$$

Usando (19) para $\hat{\Phi}(n+1,0)$ e lembrando que o efeito das operações Ω e δ independe da sua ordem de aplicação obtém-se

$$\delta\hat{S} = \frac{1}{\alpha}\left[\ln\hat{\Phi}(n,0) + \ln\left(1 + \delta q_n . \frac{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}^*(n,0)\frac{\partial}{\partial q_n}\hat{\Phi}(n,0)}{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}^*(n,0)\hat{\Phi}(n,0)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \delta t_n . \frac{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}^*(n,0)\frac{\partial}{\partial t_n}\hat{\Phi}(n,0)}{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}^*(n,0)\hat{\Phi}(n,0)} \right) - \ln\hat{\Phi}(n,0) \right] ,$$

$$\delta\hat{S} = \delta q_n . \frac{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}^*(n,0)\frac{\partial}{\partial q_n}\hat{\Phi}(n,0)}{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}^*(n,0)\hat{\Phi}(n,0)} + \delta t_n . \frac{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}^*(n,0)\frac{\partial}{\partial t_n}\hat{\Phi}(n,0)}{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}^*(n,0)\hat{\Phi}(n,0)} \ . \tag{20}$$

Em função do isomorfismo as variáveis dinâmicas $\hat{p}$ e $\hat{H}$ são definidas como

$$\delta\hat{S} = \hat{p}\delta q - \hat{H}\delta t \quad . \tag{21}$$

Comparando (20) e (21) para $t = t_n$ e $q = q_n$ chega-se ao resultado procurado. Omitindo daqui em diante o índice n, as VD $\hat{p}$ e $\hat{H}$ são dadas a partir de

$$\hat{p} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\Phi}^*(q,t;q_0,t_0)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q}\right)\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\Phi}^*(q,t;q_0,t_0)\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)} \quad , \tag{22}$$

$$\hat{H} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\Phi}^*(q,t;q_0,t_0)\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\Phi}^*(q,t;q_0,t_0)\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)} \quad . \tag{23}$$

Além disso, o isomorfismo requer que a VD $\hat{q}$, à qual a VD $\hat{p}$ é conjugada, seja dada a partir de

$$\hat{q} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\Phi}^*(q,t;q_0,t_0)\; q\; \hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\Phi}^*(q,t;q_0,t_0)\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)} \quad . \tag{24}$$

Note que nos dois últimos parágrafos cuidadosamente escreveu-se " ...a partir de... " pois o significado de (22-24) ainda não está bem estabelecido. Na busca de uma melhor compreensão destas a recorrência ao caso clássico é proveitosa.

No caso clássico $\Omega = 1$ as equações (22) e (24) reduzem-se, respectivamente, às equações (6.1) e (6.5) com n = 1. Na primeira a VD p, igual à VI p, aparece como função de q,q_0,t. Já a segunda diz apenas que a VD q é igual à VI q. Além disso, uma equação similar a (6.1) expressa p_0 como função de q,q_0,t. De posse destas é possível através da inversão da equação para p_0 escrever q em função das condições iniciais q_0,p_0,t_0 e do parâmetro t e daí o mesmo para p. O conhecimento das condições iniciais permite escrever uma expressão para as VD $q = q(t)$ e $p = p(t)$. Portanto, as equações (6.1) e (6.5) com n = 1 representam um duplo papel, ou seja, fornecem um procedimento que permite calcular as VD a partir de $\Phi = e^{\alpha S}$, onde S é

a solução da equação de Hamilton-Jacobi, e implicitamente definem essas VD pois a introdução dos valores das condições iniciais se faz após a realização desse procedimento.

A situação representada pelas equações (22) e (24) é, entretanto, diferente. Enquanto que no caso clássico a equação (6.5) à qual se reduz (24) é, diga-se, uma identidade, requerendo daí uma outra equação, a equação para p_0, para junto com (6.1) fornecer duas equações com duas incógnitas, a equação (24) para um $\Omega \neq 1$ já é uma equação para a VD $\hat{q}$. Não é necessária uma outra equação e esta nem faria sentido pois mesmo escrevendo uma equação similar a (22) para $\hat{p}_0$, primeiro, devido à generalidade de Ω talvez não fosse possível escrever como no caso clássico q em termos de $\hat{p}_0, q_0, t_0$ e t, e, segundo, isso de nada adiantaria pois q não é uma VD dentro da MG, ou seja, o que interessa é $\hat{q}$ que conforme mostra (24) é obtida a partir de uma operação sobre a VI q. Sendo assim, a partir do conhecimento de $\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)$ é possível expressar diretamente as VD $\hat{q}$ e $\hat{p}$, restando apenas para isso a especificação das condições iniciais. Uma vez especificadas, $\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)$ escreve-se, conforme a definição (8), $\hat{\varphi}(q,t)$ e as VD $\hat{p}$ e $\hat{q}$ são, agora, dadas por

$$\hat{p} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q}\right)\hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle p \rangle \quad , \tag{25}$$

$$\hat{q} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)\; q\; \hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle q \rangle \quad . \tag{26}$$

Nas equações acima deve-se tomar o cuidado de não confundir os símbolos. Nestas, $\hat{p}$ e $\hat{q}$ são as VD de uma MG e <p> e <q> são os resultados (numéricos) das operações definidas em (25) e (26), respectivamente, que devem ser feitas para obtê-las. O uso da notação <p> e <q> nestas equações não faz muito sentido classicamente pois (26) não define operação alguma nesse caso; entretanto, após a manipulação algébrica descrita no parágrafo precedente o uso dessa notação readquire o seu sentido.

É interessante notar o significado, por exemplo, de (26). Ela diz que no caso de uma dinâmica convolutiva a VI q não é uma VD. Nesse caso, a VD é $\hat{q}$, obtida através de uma operação sobre a VI q conforme (26) e cujo resultado, o valor numérico, é <q>. A possibilidade da VD $\hat{q}$ poder ser obtida através de uma operação sobre a VI q já estava embutida quando da aceitação do princípio da fragmentação na formulação das leis da Mecânica, cap. 3. O mesmo vale, obviamente, para (25). Esta, entretanto, não possui o mesmo problema implícito em (26), problema este que não é de natureza física ou matemática.

Classicamente diz-se que p é o momentum (generalizado) conjugado à coordenada (generalizada) q, não distingüindo " VD p conjugada à VD q " de " VI (coordenada) p conjugada à VI (coordenada) q ". Na MC esta distinção não se faz necessária, ao contrário do que ocorre na MG onde está clara a distinção entre " VD $\hat{p}$ conjugada à VD $\hat{q}$ " e " VI (coordenada) p conjugada à VI (coordenada) q "[1]. Uma denominação criteriosa dessas quantidades se deve dar em função da necessidade de distinção destas. Num primeiro caso é natural reservar a denominação de momentum às VD, de modo que a VD $\hat{p}$ é denominada *momentum* (generalizado) *generalizado* e a VD p *momentum* (generalizado)[2], contrastando com a VI coordenada p.

O referido problema surge quando considerado o outro caso. Suponha que a coordenada generalizada q seja uma coordenada retangular x descrevendo a posição de uma partícula num dado sistema de coordenadas. Se a VD x for denominada, por exemplo, posição, em contraste com a VI ou coordenada x, a situação dentro da MC torna-se

---

1 Embora o tratamento de p como variável independente faça parte do formalismo Hamiltoniano, a discussão em conjunto dessa questão torna-a mais clara e elimina a necessidade da repetição dos argumentos quando da formulação deste.

2 O generalizado escrito em itálico é usado para referir-se a uma variável dinâmica dentro da MG pois como tais ambos são momentum, um na MG, outro na MC, devido ao isomorfismo, ao contrario do generalizado entre colchetes que refere-se à extensão de um conceito dentro de uma mesma teoria. A referência a este último será muitas vezes abandonada.

clara, ou seja, a posição é a coordenada x. O uso dessa denominação dentro da MG torna-se, entretanto, inadequado, pois a VD $\hat{x}$ seria denominada posição generalizada. Basta olhar para (26) para ver que $\hat{x}$ não guarda em si nada do sentido geométrico contido na palavra posição. Além disso, via de regra, a coordenada generalizada q não é uma coordenada retangular e nem a VD q é uma posição, muitas vezes, inclusive, sendo de natureza completamente distinta. Esse problema simplesmente não ocorre ao usar-se a denominação de momentum no caso anterior.

A necessidade manifesta de se procurar uma denominação adequada acaba sendo um problema em virtude da sua generalidade. A inexistência dessa necessidade dentro da MC e a interpretação precipitada de casos mais gerais não permitiu a sua feitura ao longo da História. Sendo assim, em consonância com o latim *momentum* sugere-se o uso do latim *situs*[3], que será usado ao longo deste trabalho. Logo, a VD $\hat{q}$ é denominada *situs* (generalizado) *generalizado* e a VD q *situs* (generalizado), contrastando com a VI ou coordenada q.

Resumindo, as equações (25-26) definem, respectivamente, as VD $\hat{p}$ e $\hat{q}$, o momentum generalizado e o situs generalizado, através de uma operação definida nessas equações sobre a VI q e cujo resultado é <p> e <q>. Ainda, utilizando a definição dos operadores **q** e **p** dados por (6.4) e (6.6) as equações (25-26) podem ser escritas como

$$\hat{p} = \frac{\int_{\Omega_q} \hat{\varphi}^*(q,t)\ \mathbf{p}\ \hat{\varphi}(q,t)}{\int_{\Omega_q} \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle p \rangle \quad , \tag{27}$$

$$\hat{q} = \frac{\int_{\Omega_q} \hat{\varphi}^*(q,t)\ \mathbf{q}\ \hat{\varphi}(q,t)}{\int_{\Omega_q} \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle q \rangle \quad . \tag{28}$$

Uma vez bem entendido o significado de (27-28) pode-se dizer que

---

3 Segundo Cretella Jr. & Cintra (1953) na acepção do orador romano Cicero " momentum " significa movimento, momento, etc., e " situs " posição, situação, sítio, etc.

os operadores **q** e **p** representam as VD $\hat{q}$ e $\hat{p}$, ou seja, os operadores não são as VD mas as representam através das operações definidas acima. Obviamente, uma equação análoga às (27-28) para (22)e (24) pode ser escrita a partir de (23). É mais interessante, porém, considerar uma VD arbitrária. Entretanto, a consideração destas suscita certas questões que só podem ser respondidas com a ajuda de outros elementos. Em vista disso, é melhor encerrar esse capítulo para, no próximo, discuti-los cuidadosamente, pois, além disso, a própria elucidação da equação generalizada de Lagrange, equação (7.8), requer novos elementos.

9. VARIÁVEIS DINÂMICAS: EXTENSÃO.

O objetivo do capítulo anterior foi atingido apenas em parte. Embora tenha-se chegado a uma expressão para as VD $\hat{q}$ e $\hat{p}$ muito ainda há por se fazer. Esta é a preocupação deste capítulo, ao longo do qual estes pontos serão colocados.

O primeiro que se deseja discutir é importante não só em si mesmo mas também por auxiliar na solução de futuras questões. Ao longo desta parte optou-se por usar $\hat{\Phi}$, chegando às definições (8.25-26) das VD $\hat{q}$ e $\hat{p}$ que naturalmente sugere a adequação do conceito de operadores à sua discussão. Nada há de surpreendente nisso visto que mesmo na MC o uso da função Φ sugere a conveniência deste conceito. Caso tivesse sido usada a função $\hat{S}$ um conceito como o de funcional poderia ser mais adequado.

A adequação da linguagem dos operadores a uma particular MG segue o seguinte raciocínio: uma dada MG é definida a partir da definição da operação Ω e, devido às suas particularidades, manifesta-se a conveniência do uso de $\hat{S}$ ou de $\hat{\Phi}$ ou de uma outra função $\hat{\Theta}$ conforme discutido no cap. 4; uma vez que para uma operação Ω particular, Ω^L na notação do cap. 4, o uso da função $\hat{\Phi}$ é conveniente então o seu uso sugere naturalmente o conceito de operadores para discutir as VD. Embora não muito adequado à discussão das VD na MC o conceito de operadores pode ser utilizado, conduzindo a certas propriedades expostas no cap. 6. Estas devem apresentar uma generalização dentro da MG e por isso é importante discuti-las, começando pela generalização da definição do operador adjunto.

Assim como na MC, no capítulo anterior deu-se preferência ao uso de $\hat{\Phi}$ embora a definição (7.6) mostre que o uso de $\hat{\Phi}^*$ é equivalente. O cálculo de $\delta\hat{S}$ poderia ser feito usando Φ^*, nesse caso

$$\delta\hat{S} = -\frac{1}{\alpha}\left[\ \ln \hat{\Phi}^*(n+1,0) - \ln \hat{\Phi}^*(n,0)\ \right] ,$$

onde o sinal negativo deve-se à definição (7.6). Com as óbvias modificações em relação ao procedimento utilizado na seção anterior o cálculo acima é imediato. É fácil ver que as equações (7.16-17)

escrevem-se, respectivamente,

$$\hat{\Phi}^*(n+1,0) \simeq \hat{\Phi}^*(n,0) \underset{n}{\Omega} e^{-\alpha S(n+1,n)} ,$$

$$\hat{\Phi}^*(n+1,0) \simeq \left[1 + \delta q_n \frac{\partial}{\partial q_n} + \delta t_n \frac{\partial}{\partial t_n} \right] \hat{\Phi}^*(n,0) .$$

Multiplicando a primeira equação por $\hat{\Phi}(n,0)$, aplicando a esta a operação Ω, introduzindo nesse resultado a segunda equação e usando-a na primeira obtém-se ao invés de (7.19),

$$\hat{\Phi}^*(n+1,0) \simeq \hat{\Phi}^*(n,0) \left[\frac{\underset{n}{\Omega} \left[\left[1 + \delta q_n \frac{\partial}{\partial q_n} + \delta t_n \frac{\partial}{\partial t_n} \right] \hat{\Phi}^*(n,0) \right] \hat{\Phi}(n,0)}{\underset{n}{\Omega} \hat{\Phi}^*(n,0) \hat{\Phi}(n,0)} \right], \qquad (1)$$

a partir da qual pode-se calcular $\delta\hat{S}$. Nesse caso, ao invés de (7.20),

$$\delta\hat{S} = \delta q_n \frac{\underset{n}{\Omega} \left[\left(-\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q_n} \right) \hat{\Phi}^*(n,0) \right] \hat{\Phi}(n,0)}{\underset{n}{\Omega} \hat{\Phi}^*(n,0) \hat{\Phi}(n,0)} + \delta t_n \frac{\underset{n}{\Omega} \left[\left(-\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t_n} \right) \hat{\Phi}^*(n,0) \right] \hat{\Phi}(n,0)}{\underset{n}{\Omega} \hat{\Phi}^*(n,0) \hat{\Phi}(n,0)} . \qquad (2)$$

Os cálculos de $\delta\hat{S}$ fornecidos por (7.20) ou (2) são equivalentes. Conseqüentemente, o mesmo raciocínio que conduz, por exemplo, de (22) a (25) implica em

$$\hat{p} = \frac{\underset{q}{\Omega} \left[\left(-\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q} \right) \hat{\varphi}^*(q,t) \right] \hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega} \hat{\varphi}^*(q,t) \hat{\varphi}(q,t)} = \frac{\underset{q}{\Omega} \hat{\varphi}^*(q,t) \left[\left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q} \right) \hat{\varphi}(q,t) \right]}{\underset{q}{\Omega} \hat{\varphi}^*(q,t) \hat{\varphi}(q,t)} = \langle p \rangle , \qquad (3)$$

onde a primeira operação resulta de (2), a segunda é (7.25) e a igualdade entre elas decorre da equivalência dos dois procedimentos usados para calcular $\delta\hat{S}$. Como a operação de conjugação definida por (7.6) corresponde a fazer $\alpha \to -\alpha$, a equação (3) pode ser escrita como

$$\hat{p} = \frac{\underset{q}{\Omega} \left[\mathbf{p}\hat{\varphi}(q,t) \right]^* \hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega} \hat{\varphi}^*(q,t) \hat{\varphi}(q,t)} = \frac{\underset{q}{\Omega} \hat{\varphi}^*(q,t) \left[\mathbf{p}\hat{\varphi}(q,t) \right]}{\underset{q}{\Omega} \hat{\varphi}^*(q,t) \hat{\varphi}(q,t)} = \langle p \rangle , \qquad (4)$$

onde se usou a definição (6.4) do operador $\mathbf{p} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q}$. Já a expressão (7.26) para a VD $\hat{q}$ pode ser escrita a partir da definição (6.6) do operador $\mathbf{q} = q$ como

$$\hat{q} = \frac{\underset{q}{\Omega}\,[\mathbf{q}\hat{\varphi}(q,t)]^{*}\hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\,\hat{\varphi}^{*}(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \frac{\underset{q}{\Omega}\,\hat{\varphi}^{*}(q,t)[\mathbf{q}\hat{\varphi}(q,t)]}{\underset{q}{\Omega}\,\hat{\varphi}^{*}(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle q\rangle \quad . \tag{5}$$

O conteúdo das equações (4-5) depende da maneira que elas são vistas, pois conforme colocadas elas são apenas consequências da equivalência entre $\hat{\Phi}$ e $\hat{\Phi}^{*}$ manifestada pela equação (7.6). Sendo assim, considerando um caso geral, seja $\mathbf{f}$ um operador qualquer que age sobre a função $\hat{\varphi}(q,t)$ através de uma operação que envolve a VI q, do qual os operadores $\mathbf{p} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q}$ e $\mathbf{q} = q$ são casos particulares. Define-se o operador $\mathbf{f}^{+}$, chamado adjunto generalizado de $\mathbf{f}$, de modo que se observe[1]

$$\underset{q}{\Omega}\,[\mathbf{f}^{+}\hat{\varphi}(q,t)]^{*}\hat{\varphi}(q,t) = \underset{q}{\Omega}\,\hat{\varphi}^{*}(q,t)[\mathbf{f}\hat{\varphi}(q,t)] \tag{6}$$

como conseqüência da equivalência entre $\hat{\Phi}$ e $\hat{\Phi}^{*}$. O que as equações (4-5) mostram é que, devido à definição (6), os operadores $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$ são auto-adjuntos generalizados, ou seja, $\mathbf{p}^{+} = \mathbf{p}$ e $\mathbf{q}^{+} = \mathbf{q}$.

O fato dos operadores $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$ serem tanto auto-adjuntos clássicos quanto generalizados levanta a suspeita de que pelo menos algumas das considerações expostas no cap 6 possam ser aqui aproveitadas. Todas certamente não, pois muitas são conseqüências do limite $\alpha \to \infty$. A questão é saber até que ponto elas chegam.

Inicialmente, tomando a VD q na MC como exemplo, devido às propriedades (6.3) e $(q_{op})^{n} = (q^{n})_{op}$ mais $\Omega = 1 = \underset{q}{\mathrm{ext}}$ tem-se

$$q^{2} = (\Phi^{*}q\Phi)^{2} = \Phi^{*}q^{2}\Phi \quad ,$$

---

[1] Compare (6) e (6.13). Esta comparação mostra que a definição do operador adjunto depende da operação Ω, por isso denominá-lo adjunto generalizado neste caso e adjunto clássico no outro.

ou seja, a VD q^2 é igual ao quadrado da VD q. O mesmo vale para a VD p e funções arbitrárias destas, convenientemente tomado o limite $\alpha \to \infty$ no final. Agora, seja a VD $\hat{q}$ na MG, isomorfa à VD q na MC, dada por (5). Pelo isomorfismo, se ao operador **q** estão associadas as VD q na MC e $\hat{q}$ na MG então ao operador $\mathbf{q}^2$ ao qual está associada a VD q^2 na MC deve estar associada uma VD $\widehat{q^2}$ na MG. Logo, define-se a VD $\widehat{q^2}$ como

$$\widehat{q^2} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)\mathbf{q}^2\hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle q^2 \rangle \quad , \tag{7}$$

sendo o operador $\mathbf{q}^2$ auto-adjunto generalizado e $\langle q^2 \rangle$ o resultado numérico da operação definida em (7). Por outro lado, de (5),

$$(\hat{q})^2 = \left[\frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)\mathbf{q}\hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)}\right]^2 = \langle q \rangle^2 \ . \tag{8}$$

Comparando (7) e (8) conclui-se que para uma operação Ω não-trivial em geral os resultados numéricos das operações definidas por estas operações são diferentes, ou seja, $\langle q^2 \rangle \neq \langle q \rangle^2$. De fato,

$$\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 = \frac{\left[\underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}^*\mathbf{q}^2\hat{\varphi}\right]\left[\underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}^*\hat{\varphi}\right] - \left[\underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}^*\mathbf{q}\hat{\varphi}\right]^2}{\left[\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*\hat{\varphi}\right]^2} \ ,$$

onde $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(q,t)$, que pode ser escrita usando a propriedade (4.7b) de linearidade da operação Ω como

$$\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(\mathbf{q} - \langle q \rangle)^2\hat{\varphi}}{\left[\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*\hat{\varphi}\right]^2} \quad , \tag{9}$$

onde a propriedade (4.7b) de Ω e a não-negatividade de $(q - \langle q \rangle)^2$ e $\hat{\varphi}^*\hat{\varphi}$ implicam em

$$\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 \geq 0 \quad , \tag{10}$$

mostrando que em geral $\langle q^2\rangle \neq \langle q\rangle^2$ com $\langle q^2\rangle \geq \langle q\rangle^2$. Para que a igualdade se verifique é necessário que $q = \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}^* q\hat{\varphi}$, o que certamente é sempre satisfeito se $\underset{q}{\Omega} = \underset{q}{\text{ext}} = 1$ pois na MC $\langle q^2\rangle = \langle q\rangle^2 = q^2$. Mas existem casos com $\Omega \neq 1$ em que isso ocorre. De fato, se $\mathbf{q}\hat{\varphi} = q\hat{\varphi} = C\hat{\varphi}$, onde C é uma constante chamada autovalor do operador **q**, então $\langle q\rangle = C$, $\langle q^2\rangle = C^2$ e $\langle q^2\rangle = \langle q\rangle^2 = C^2$.

Conseqüentemente, como em geral $\langle q^2\rangle \neq \langle q\rangle^2$, só há uma interpretação possível e coerente para isso. De fato, é preciso interpretar as VD $\widehat{q^2}$ e $\hat{q}^2$ como sendo VD *diferentes*. Seria uma insensatez dizer que $\widehat{q^2}$ é uma VD enquanto $\hat{q}^2$ não, ou vice-versa, embora esta última o seja no caso $\Omega = 1$ e igual à primeira. Também o seria dizer que não faz sentido a multiplicação das VD como em $\hat{q}^2 = \hat{q}\,\hat{q}$ pois se c é uma constante então para a VD $\widehat{cq}$ tem-se $\widehat{cq} = c\hat{q} = \hat{c}\hat{q}$; também, pelo mesmo motivo, para a multiplicação de operadores como em $\mathbf{q}^2 = \mathbf{qq}$. Poderia-se pensar que talvez existisse uma VD $\widehat{\bar{q}^2} = \hat{q}^2$ mas este também não é o caso; de fato, denotando o lado direito de (9) por $\langle\Delta q^2\rangle$, esta poderia ser $\widehat{\bar{q}^2} = \widehat{q^2} - \widehat{\Delta q^2}$ mas não seria possível definir um operador nesse caso pois este dependeria de $\langle q\rangle$ que por sua vez depende de $\hat{\varphi}(q,t)$.

A única saída realmente coerente é interpretar $\hat{q}^2$ e $\widehat{q^2}$ como VD diferentes. No caso $\Omega = 1$ elas degeneram-se na VD q^2 mas no caso geral elas são diferentes e os seus valores obedecem a relação $\langle q^2\rangle \geq \langle q\rangle^2$. O que esse exemplo já ilustra bem é o quanto a MG é mais rica que a MC. Na MC mostrou-se que as VD podem ser construídas através de operações de combinação linear e multiplicação igualmente descritas em termos de funções e operadores. Na MG as VD podem igualmente ser obtidas através de combinações lineares e multiplicações mas já não se verifica a mesma equivalência pois a VD $f(\hat{q}) = \sum a_n \hat{q}^n$ é diferente da VD $\underset{q}{\Omega}\,\hat{\varphi}^* f(\mathbf{q})\hat{\varphi} = \sum a_n \widehat{q^n}$.

Para estender o mesmo raciocínio às VD $\hat{p}^2$ e $\widehat{p^2}$, o que em si é imediato, é preciso antes enfrentar um problema que já foi encontrado na formulação da MC, cap. 6. Este problema é definir um operador $\mathbf{p}^2$.

Lembrando o que foi discutido no cap. 6, mostrou-se que ao definir a VD p^2 como $\Phi^* \mathbf{p}^2 \Phi$, onde $\mathbf{p}^2 = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2}{\partial q^2}$, comete-se um desvio da ordem de α^{-1} que se anula no limite $\alpha \to \infty$. Uma expressão correta até a ordem de α^{-2} deve ser escrita com a ajuda de (6.11), ou seja, $p^2 = \Phi^* \overleftrightarrow{\mathbf{p}^2} \Phi = [(\mathbf{p}^2\Phi)^*\Phi + \Phi^*(\mathbf{p}^2\Phi)]/2$. É esta expressão que deve ser tomada como ponto de partida para que a VD na MG seja definida através do isomorfismo. Como foi visto, é usando esta expressão que o comutador no limite $\alpha \to \infty$ é o colchete de Poisson na MC.

Agora, utilizando os operadores com flechas pode-se escrever uma expressão para $\widehat{q^n}$, o que se faz apenas para manter uma notação coerente, que é

$$\widehat{q^n} = \frac{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\overleftrightarrow{\mathbf{q}^n}\hat{\varphi}(q,t)}{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \frac{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\left[(\overleftarrow{\mathbf{q}^n} + \overrightarrow{\mathbf{q}^n})/2\right]\hat{\varphi}(q,t)}{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle q^n \rangle , \quad (11)$$

onde $\hat{\varphi}^*\overleftarrow{\mathbf{q}^n}\hat{\varphi} = (\mathbf{q}^n\hat{\varphi})^*\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}^*\overrightarrow{\mathbf{q}^n}\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^*(\mathbf{q}^n\hat{\varphi})$, $\Omega_q(\mathbf{q}^n\hat{\varphi})^*\hat{\varphi} = \Omega_q\hat{\varphi}^*(\mathbf{q}^n\hat{\varphi})$ e $\overleftrightarrow{(\mathbf{q}^n)^+} = \overleftrightarrow{\mathbf{q}^n}$. Portanto, para a VD $\widehat{p^n}$,

$$\widehat{p^n} = \frac{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\overleftrightarrow{\mathbf{p}^n}\hat{\varphi}(q,t)}{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \frac{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\left[(\overleftarrow{\mathbf{p}^n} + \overrightarrow{\mathbf{p}^n})/2\right]\hat{\varphi}(q,t)}{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle p^n \rangle , \quad (12)$$

onde $\hat{\varphi}^*\overleftarrow{\mathbf{p}^n}\hat{\varphi} = (\mathbf{p}^n\hat{\varphi})^*\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}^*\overrightarrow{\mathbf{p}^n}\hat{\varphi} = \hat{\varphi}^*(\mathbf{p}^n\hat{\varphi})$, e, ao contrário do caso anterior, $\Omega_q(\mathbf{p}^n\hat{\varphi})^*\hat{\varphi}$ não é a princípio igual a $\Omega_q\hat{\varphi}^*(\mathbf{p}^n\hat{\varphi})$. Esta, no caso $\Omega = 1$ escreve-se como uma igualdade com um desvio da ordem de α^{-1}, mas pode também ocorrer que para uma escolha de Ω elas sejam exatamente iguais. De qualquer forma, a definição (12) de $\widehat{p^n}$ no limite clássico contém um desvio da ordem de α^{-2}. Fora isso, o raciocínio anterior aplica-se igualmente a esta VD. Dadas as VD $\widehat{p^2}$ e $\hat{p}^2$ os seus valores numéricos são diferentes. Usando a definição de $\overleftrightarrow{\mathbf{p}^2}$ e os mesmos argumentos anteriores chega-se facilmente a

$$\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{\frac{1}{2}\underset{q}{\Omega}\left[\left[(p-\langle p\rangle)^2\hat{\varphi}\right]^*\hat{\varphi} + \hat{\varphi}^*\left[(p-\langle p\rangle)^2\hat{\varphi}\right]\right]}{\left[\underset{q}{\Omega}\,\hat{\varphi}^*\hat{\varphi}\right]^2} , \tag{13}$$

$$\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 \geq 0 , \tag{14}$$

ou seja, as VD $\widehat{p^2}$ e $\hat{p}^2$ são diferentes. Como no caso anterior, se $\Omega = 1$ elas degeneram-se na VD p^2 mas no caso geral elas são diferentes e os seus valores obedecem a relação $\langle p^2\rangle \geq \langle p^2\rangle$. Aqui também a igualdade se verifica para $\Omega \neq 1$ se $\mathbf{p}\hat{\varphi} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q}\hat{\varphi}(q,t) = C'\hat{\varphi}$, onde a constante C' é o autovalor do operador $\mathbf{p}$, pois $\langle p^2\rangle = \langle p\rangle^2 = C'^2$.

Quanto ao fato de $\underset{q}{\Omega}(\mathbf{p}^n\hat{\varphi})^*\hat{\varphi}$ não ser a princípio igual a $\underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}^*(\mathbf{p}^n\hat{\varphi})$ e aparentemente causar um problema por impedir de dizer que $\mathbf{p}^n$ é auto-adjunto generalizado, o uso de $\overleftrightarrow{\mathbf{p}^n}$ permite dizer que $\overleftrightarrow{(\mathbf{p}^n)^+} = \overleftrightarrow{\mathbf{p}^n}$. Isso já foi visto no cap. 6; basta usar a definição do adjunto generalizado e $\mathbf{p}^n = ((\mathbf{p}^n)^+)^+$ para ver que $\overleftrightarrow{(\mathbf{p}^n)^+} = \overleftrightarrow{\mathbf{p}^n}$.

Também neste capítulo foram considerados detalhadamente operadores arbitrários que envolvem $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$, de modo que não é necessário estender-se demais para escrever a generalização de (11-12). Dada uma função $f(q,p,t) = \sum A_{mn}q^n p^m$ com a dependência em t contida em A_{mn} e o operador $\overleftrightarrow{\mathbf{q}^n\mathbf{p}^m}$,

$$\overleftrightarrow{\mathbf{q}^n\mathbf{p}^m} = \left[\overleftarrow{\mathbf{q}^n\mathbf{p}^m} + \overrightarrow{\mathbf{q}^n\mathbf{p}^m}\right]/2 ,$$

define-se a VD $\hat{f}$ como

$$\hat{f} = \frac{\underset{q}{\Omega}\,\hat{\varphi}^*(q,t)\overleftrightarrow{f}\hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\,\hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \frac{\underset{q}{\Omega}\,\hat{\varphi}^*(q,t)\left[\sum A_{mn}\overleftrightarrow{\mathbf{q}^n\mathbf{p}^m}\right]\hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\,\hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \tag{15}$$

$$= \sum A_{mn}\,\widehat{\mathbf{q}^n\mathbf{p}^m} = \langle f\rangle ,$$

$$\widehat{q^n p^m} = \frac{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\overleftrightarrow{q^n p^m}\hat{\varphi}(q,t)}{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \frac{\frac{1}{2}\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)[\overleftarrow{q^n p^m} + \overrightarrow{q^n p^m}]\hat{\varphi}(q,t)}{\Omega_q \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \tag{16}$$

$$= \langle q^n p^m \rangle \quad ,$$

notando sempre que as VD $\sum A_{mn}\widehat{q^n p^m}$ e $\sum A_{mn}\hat{q}^n\hat{p}^m$, assim como outras como $\sum A_{mn}\hat{q}^n\widehat{p^m}$, são diferentes, e no caso clássico degeneram-se em $\sum A_{mn}q^n p^m$.

Nesse caso geral cabem dois breves comentários. Como a ambigüidade existente em representar a VD $\widehat{q^2 p^2}$, por exemplo, tanto por $\overleftrightarrow{q^2 p^2}$ como $(\overleftrightarrow{qp})^2$ reflete-se numa diferença da ordem de α^{-2} não faz sentido interpretá-las como VD diferentes, visto que as expressões consideradas são exatas apenas até α^{-1}, ou seja, essas VD são degeneradas na ordem de α^{-1}. Para retirar a degenerescência seria necessário entrar no domínio de termos em α^{-2}, o que se pode mostrar[2] em relação ao que foi discutido no cap. 6 ser um domínio não-linear onde é preciso considerar operadores não-lineares. Como isto não está sendo considerado então não é preciso interpretá-las como VD diferentes. O segundo comentário é sobre o operador adjunto generalizado de $\overleftrightarrow{q^n p^m}$. No cap. 6 mostrou-se que

$$(\overleftrightarrow{q^n p^m})^+ = (\overleftrightarrow{q^n p^m})$$

Essa expressão permanece válida na MG uma vez que é conseqüência da definição (6).

Uma outra consideração pode ser feita a partir dessa mesma definição. Escrevendo $\hat{\varphi}(q,t)$ como uma combinação linear arbitrária $\hat{\varphi} = c_1\hat{\varphi}_1 + c_2\hat{\varphi}_2$ e introduzindo-a em (6) chega-se à expressão

$$c_1^* c_2[\Omega_q(f^+\hat{\varphi}_1)^*\hat{\varphi}_2 - \Omega_q\hat{\varphi}_1^*(f\hat{\varphi}_2)] = c_2^* c_1[\Omega_q(f^+\hat{\varphi}_2)^*\hat{\varphi}_1 - \Omega_q\hat{\varphi}_2^*(f\hat{\varphi}_1)] \quad ,$$

---

[2] Em Vaz Jr. (1989).

que precisa ser cuidadosamente analisada para tirar uma conclusão. Esse cuidado precisa ser tomado para não incorrer em alguns erros como os citados no cap 6, i.e., onde se mostrou ser errado escrever uma combinação linear se $\Omega = 1$. Como a operação Ω não foi ainda definida é preciso analisar essa expressão por vias indiretas. Primeiro, note que a expressão a ser analisada pode ser escrita como

$$c_1^* c_2 \left[[\underset{q}{\Omega}(f^+\hat{\varphi}_1)^* \hat{\varphi}_2 + \underset{q}{\Omega}(f\hat{\varphi}_1)^* \hat{\varphi}_2] - [\underset{q}{\Omega}(f\hat{\varphi}_1)^* \hat{\varphi}_2 + \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_1^*(f\hat{\varphi}_2)] \right] =$$
$$= c_2^* c_1 \left[[\underset{q}{\Omega}(f^+\hat{\varphi}_2)^* \hat{\varphi}_1 + \underset{q}{\Omega}(f\hat{\varphi}_2)^* \hat{\varphi}_1] - [\underset{q}{\Omega}(f\hat{\varphi}_2)^* \hat{\varphi}_1 + \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_2^*(f\hat{\varphi}_1)] \right],$$

a partir da qual, com $c_1^* c_2 \neq c_2^* c_1$,

$$\underset{q}{\Omega}(f^+\hat{\varphi}_1)^* \hat{\varphi}_2 + \underset{q}{\Omega}(f\hat{\varphi}_1)^* \hat{\varphi}_2 = \underset{q}{\Omega}(f\hat{\varphi}_1)^* \hat{\varphi}_2 + \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_1^*(f\hat{\varphi}_2).$$

Agora, se $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}$, essa equação diz que

$$\underset{q}{\Omega}(f^+\hat{\varphi})^* \hat{\varphi} + \underset{q}{\Omega}(f\hat{\varphi})^* \hat{\varphi} = 2\, \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}^* \overleftrightarrow{f} \hat{\varphi} \quad ,$$

que de fato é a expressão correta pois $\underset{q}{\Omega}(f^+\hat{\varphi})^* \hat{\varphi} = \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}^* f\hat{\varphi}$. A expressão obtida pode, portanto, ser tomada como uma definição de $\underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_1^* \overleftrightarrow{f} \hat{\varphi}_2$,

$$\underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_1^* \overleftrightarrow{f} \hat{\varphi}_2 = \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_1^* \left(\frac{\overleftarrow{f} + \overrightarrow{f}}{2} \right) \hat{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \left[\underset{q}{\Omega}(f\hat{\varphi}_1)^* \hat{\varphi}_2 + \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_1^*(f\hat{\varphi}_2) \right] \quad ,$$

ou ainda,

$$\underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_1^* \overleftrightarrow{f} \hat{\varphi}_2 = \frac{1}{2} \left[\underset{q}{\Omega}(f^+\hat{\varphi}_1)^* \hat{\varphi}_2 + \underset{q}{\Omega}(f\hat{\varphi}_1)^* \hat{\varphi}_2 \right] \quad ,$$

donde segue-se que

$$\underset{q}{\Omega}(f^+\hat{\varphi}_1)^* \hat{\varphi}_2 = \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_1^*(f\hat{\varphi}_2) \quad .$$

Usando esse resultado e $p^+ = p$ é fácil mostrar que $(p^2)^+ = p^2$, a partir do qual com $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}$,

$$\underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}^{*}\overleftrightarrow{p^{2}}\hat{\varphi} = \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}^{*}p^{2}\hat{\varphi} = \underset{q}{\Omega}(p^{2}\hat{\varphi})^{*}\hat{\varphi} \quad ,$$

apresentando um desvio de primeira ordem em α^{-1} na definição da VD a partir do isomorfismo com a clássica. A conclusão chegada,

$$\underset{q}{\Omega}(f^{+}\hat{\varphi}_{1})^{*}\hat{\varphi}_{2} = \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_{1}^{*}(f\hat{\varphi}_{2}) \quad ,$$

contém em si um desvio da ordem de α^{-1}. Logo, a hipótese feita sobre escrever $\hat{\varphi}$ como uma combinação linear arbitrária de $\hat{\varphi}_1$ e $\hat{\varphi}_2$ não deve ser válida, isto é, ou não faz sentido escrever $\hat{\varphi}$ como uma combinação linear ou esta não pode ser completamente arbitrária, o que depende do Ω particular.

Contudo, esses resultados mostram que se Ω for tal que $\Omega = \tilde{\Omega}$ onde

$$\underset{q}{\tilde{\Omega}}\,\hat{\varphi}^{*}(p^{n}\hat{\varphi}) = \underset{q}{\tilde{\Omega}}(p^{n}\hat{\varphi})^{*}\hat{\varphi}$$

então as conclusões chegadas não são contraditórias.

Nesse caso, o desvio não mais é da ordem de α^{-1} em relação às definições via isomorfismo com a clássica mas, sim, da ordem de α^{-2}, que é o considerado. De fato, se $\Omega = \tilde{\Omega}$ então

$$\underset{q}{\tilde{\Omega}}\,\hat{\varphi}^{*}\overleftrightarrow{p^{n}}\hat{\varphi} = \underset{q}{\tilde{\Omega}}\,\hat{\varphi}^{*}(p^{n}\hat{\varphi}) = \underset{q}{\tilde{\Omega}}(p^{n}\hat{\varphi})^{*}\hat{\varphi} \quad .$$

Portanto, se $\Omega = \tilde{\Omega}$ as conclusões chegadas são corretas, das quais é fácil mostrar que

$$\underset{q}{\tilde{\Omega}}\,\hat{\varphi}^{*}(f_{1}f_{2}\hat{\varphi}) = \underset{q}{\tilde{\Omega}}\,[(f_{1}f_{2})^{+}\hat{\varphi}]^{*}\hat{\varphi} = \underset{q}{\tilde{\Omega}}\,(f_{2}^{+}f_{1}^{+}\hat{\varphi})^{*}\hat{\varphi} \quad .$$

Usando $f_1 = f_2 = p$ esta implica em $(p^2)^+ = p^2$ e assim por diante até $(p^n)^+ = p^n$, se $\Omega = \tilde{\Omega}$.

É preciso estar claro que as conclusões chegadas são matematicamente corretas e deste ponto de vista não há nenhum problema com elas. O problema é que as hipóteses utilizadas podem ou não serem inteiramente válidas. Quando não, o seu uso introduz um desvio;

caso contrário, não há problema, que é o caso se $\Omega = \tilde{\Omega}$. Sendo assim, as duas conclusões chegadas podem ser escritas como

$$\underset{q}{\Omega}(f^{+}\hat{\varphi}_1)^{*}\hat{\varphi}_2 = \underset{q}{\Omega}\hat{\varphi}_1^{*}(f\hat{\varphi}_2) \quad , \quad \mathcal{O}(\alpha^{-n(\Omega)}) \quad , \tag{18a}$$

$$(f_1 f_2)^{+} = f_2^{+} f_1^{+} \quad , \quad \mathcal{O}(\alpha^{-n(\Omega)}) \quad , \tag{18b}$$

$$n(\Omega) = \begin{cases} 2 & \text{se } \Omega = \tilde{\Omega} \\ 1 & \text{se } \Omega \neq \tilde{\Omega} \end{cases} ,$$

$$\underset{q}{\tilde{\Omega}}\,\hat{\varphi}^{*}(p^{n}\hat{\varphi}) = \underset{q}{\tilde{\Omega}}(p^{n}\hat{\varphi})^{*}\hat{\varphi} \quad ,$$

indicando que essas expressões são do ponto de vista matemático corretas, mas baseiam-se em hipóteses que nem sempre são satisfeitas; se elas forem utilizadas em um caso, onde não as forem, então o desvio refletido na definição das VD é da ordem de α^{-1}, enquanto se as hipóteses forem satisfeitas isso não ocorre.

O último ponto que se pretende discutir neste capítulo é sobre os autovalores de **q** e **p**. Para que as VD $\widehat{q^2}$ e $\hat{q}^2$ tenham o mesmo valor numérico é necessário que $\Omega = 1$ ou $\mathbf{q}\hat{\varphi} = C\hat{\varphi}$ se $\Omega \neq 1$, e o mesmo para $\widehat{p^2}$ e $\hat{p}^2$, $\Omega = 1$ ou $\mathbf{p}\hat{\varphi} = C'\hat{\varphi}$ se $\Omega \neq 1$. É fácil ver que as condições $\mathbf{q}\hat{\varphi} = C\hat{\varphi}$ e $\mathbf{p}\hat{\varphi} = C'\hat{\varphi}$ não podem ser satisfeitas ao mesmo tempo pois $[\mathbf{q},\mathbf{p}] = -\alpha^{-1}$.

De fato, assumindo que essas condições sejam satisfeitas tem-se $[\mathbf{q},\mathbf{p}]\hat{\varphi} = (CC' - C'C)\hat{\varphi} = -\alpha^{-1}\hat{\varphi}$, que só é satisfeita se $\alpha \to \infty$. A contradição que isso representaria no caso clássico onde essas VD degeneram-se em q^2 e p^2 é eliminada, como muitas outras, conforme visto no cap 6, às custas do limite $\alpha \to \infty$. No caso $\Omega \neq 1$ isso representa, entretanto, um elemento novo a mais. Além das VD $\widehat{q^2}$ e $\hat{q}^2$ por um lado e $\widehat{p^2}$ e $\hat{p}^2$ do outro serem diferentes, assim como, em geral, os seus valores numéricos $\langle q^2\rangle \geq \langle q\rangle^2$ e $\langle p^2\rangle \geq \langle p\rangle^2$, as situações em que essas igualdades podem verificar-se não são concomitantes.

O caso $\alpha \to \infty$ dentro de uma MG não-trivial é essencialmente diferente do clássico, pois neste esta constante não tem significado

físico, enquanto que, em uma MG, a operação $\Omega \neq 1$ pode ser tal que essa constante tenha um significado físico bem definido, do qual depende a interpretação do significado desse limite. O que se discute não são os resultados, que nesse limite serão os mesmos, mas sim a interpretação do significado do limite $\alpha \to \infty$ dentro dessa MG.

A constatação de que as igualdades dos valores dessas VD não podem ser concomitantes deve ser encarada como um grande elemento novo de uma MG não-trivial que a diferencia da MC. Na MG as VD $\widehat{q^2}$ e $\hat{q}^2$ são diferentes assim como $\widehat{p^2}$ e $\hat{p}^2$. Existem situações *excepcionais* onde essas VD tem o mesmo valor numérico, $\langle q^2 \rangle = \langle q \rangle^2$ num caso e $\langle p^2 \rangle = \langle p \rangle^2$ no outro. O que se mostrou a partir da não-comutatividade dos operadores **q** e **p** é que essas situações já excepcionais, onde essas igualdades se verificam, não podem se realizar ao mesmo tempo. Se isso fosse possível teria-se um ar de excepcionalidade ainda maior, o que está reservado à situação $\alpha \to \infty$, cuja possibilidade de interpretação depende da definição de Ω.

Se dentro dessa seção já foi possível mostrar que existem muitos elementos novos que distinguem uma MG não-trivial da trivial, a dinâmica convolutiva da conjuntiva, no próximo capítulo serão vistos outros, ainda relacionados com as VD, pois entre outros pontos ainda está por se estabelecer a relação entre (11-12) e (7.15-16).

10. VARIÁVEIS DINÂMICAS: GENERALIZAÇÃO.

As equações (9.11-12) obtidas no capítulo anterior definem, respectivamente, as VD $\widehat{q^n}$ e $\widehat{p^n}$ exibindo a operação que deve ser realizada para obtê-las e cujo valor numérico é $\langle q^n \rangle$ e $\langle p^n \rangle$. Para uma VD arbitrária essa equação é (9.16). Definida uma operação $\underset{q}{\Omega}$ a ser efetuada sobre a VI q basta conhecer a função $\hat{\varphi}(q,t)$ para obter esses valores numéricos. Esta função, definida por (8.8), pode ser conhecida através do cálculo de $\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)$ considerando os extremos (t_0,q_0) e (t,q) fixos, equação (7.1), e introduzindo nesse resultado os valores $(t_0^{\#},q_0^{\#})$, ou através do estabelecimento de uma equação diferencial para $\hat{\varphi}(q,t)$ com certas condições de contorno no instante t_0, o que será discutido no próximo capítulo.

Essas expressões para as VD são o resultado de uma análise das equações (8.22-24) e, nessa ocasião, concluiu-se que as expressões obtidas são válidas para o caso $\Omega \neq 1$. No caso clássico as expressões (8.22-24) devem ser diretamente utilizadas e (8.24) particularmente diz, nesse caso, apenas que a VD q é a VI q. Fora o procedimento, muitas outras diferenças foram vistas ao longo dos dois últimos capítulos. Além das já explicitamente constatadas, há uma outra relacionada com a generalidade de Ω.

Para melhor visualizá-la considere a VD $\hat{q}$. Definida uma operação Ω é possível calcular $\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)$ e daí $\hat{\varphi}(q,t)$. A operação que deve ser efetuada para obter $\hat{q}$ é uma operação $\underset{q}{\Omega}$ sobre a VI q em $\hat{\varphi}(q,t)$. Entretanto, essa operação pode, a princípio, envolver mais de um valor possível de q. Na MC, a dinâmica conjuntiva é descrita por um caminho no EC, de modo que, dados (t_0,q_0) e (t,q), que a princípio podem ser escolhidos independentemente, as equações do movimento fornecem, em geral, um único caminho ligando esses dois extremos, ou seja, da operação $\underset{\gamma}{\text{ext}}$ resulta um único caminho γ ou de $\underset{q}{\text{ext}}$ resulta um único ponto $q = q_c$ ou um único valor q_c da VI q, ou ainda, dadas as condições iniciais em t_0 determina-se um único caminho $\bar{q}(t)$ tal que $q_c = \bar{q}(t)$. De qualquer forma essa operação envolve todos os caminhos γ através do cálculo de $S[\gamma]$ para cada um e selecionando aquele cujo valor é estacionário. Em uma MG pode-se definir uma operação Ω tal que

esta envolva, ou melhor, selecione, mais de um particular valor da VI q.

Essa possibilidade exige que se considerem outros pontos que foram até agora ignorados. Por exemplo, seja a VD q dada por (6.12) e $t = t_n$, de modo que

$$q_{t_n} = \underset{n}{\mathrm{ext}}\ \Phi^*(q_n,t_n;q_0,t_0)q_n\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0)$$

onde explicitou-se o seu significado para $t = t_n$ e não escreveu-se o limite $\alpha \to \infty$ por ser desnecessário nesse caso e para não carregar a notação. Como classicamente tem-se um caminho $\bar{q}(t)$ o resultado desta operação é

$$q_{t_n} = \Phi^*(q_n,t_n;q_0,t_0)\bar{q}(t_n)\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0) = \bar{q}(t_n) \quad ,$$

ou seja, um único valor de $q_c = \bar{q}(t)$ em $t = t_n$. Seja agora $t = t_s$ e $q_s = q_{ts} = \bar{q}(t_s)$. A VD q_{tn} pode ser escrita como

$$q_{t_n} = \frac{\underset{n}{\mathrm{ext}}\ \Phi(q_s,t_s;q_n,t_n)q_n\Phi(q_n,t_n;q_0t_0)}{\underset{n}{\mathrm{ext}}\ \Phi(q_s,t_s;q_n,t_n)\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0)} \quad ,$$

$$q_{t_n} = \frac{\Phi(q_s,t_s;q_n,t_n)\bar{q}(t_n)\Phi(q_n,t_n;q_0t_0)}{\Phi(q_s,t_s;q_n,t_n)\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0)} = \bar{q}(t_n) \quad ,$$

sendo as duas expressões completamente equivalentes uma vez que $q_n = \bar{q}(t_n)$ e $q_s = \bar{q}(t_s)$. Para compará-las basta usar $t_s = t_0$ e $q_0 = \bar{q}(t_0)$ com as equações (6.2-3). Do mesmo modo, de (t_0,q_0) e (t_s,q_s) chega-se a $\bar{q}(t)$ e o resultado de $\underset{n}{\mathrm{ext}}$ será $q_{tn} = \bar{q}(t_n)$. Certamente isso estende-se às demais VD mas é pouco aconselhável uma vez que $\overset{\leftrightarrow}{p}_n$, por exemplo, envolve operações em diferentes funções e $\underset{n}{\mathrm{ext}}$ por sua vez exige que sejam feitas mais manipulações algébricas do que o necessário.

Por outro lado, se a operação Ω relaciona mais de um valor da VI q então o seu resultado não será simplesmente, por exemplo, esse valor

$q_{tn} = \bar{q}(t_n)$. O que é ou deixa de ser é uma questão que exige um estudo, pois conceitualmente existe uma grande diferença entre as duas situações. Se existe uma diferença de fato, essa análise mostrará e isso será feito agora com um raciocínio adaptado da análise feita no cap. 8 que conduziu às expressões para as VD na MG.

Sejam os instantes $t_0 < t_n < t_s$. Fixados os extremos (t_0,q_0) e (t_n,q_n), (t_n,q_n) e (t_s,q_s), (t_0,q_0) e (t_s,q_s) tem-se, respectivamente, $\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0)$, $\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)$ e $\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_0,t_0)$, relacionadas por (8.1),

$$\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_0,t_0) = \underset{n}{\Omega}\, \hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) \quad . \tag{1}$$

Para instantes entre t_0 e t_n a dinâmica convolutiva descrita por essa MG é determinada a partir de $\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0)$ enquanto para instantes entre t_n e t_s por $\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)$. Suponha que os valores de t_0 e q_0 e de t_s e q_s sejam conhecidos e iguais respectivamente a $t_0^{\#}$, $q_0^{\#}$ e $t_s^{\#}$ e $q_s^{\#}$. Em conformidade com define-se

$$\hat{\vartheta}(q_n,t_n) \equiv \hat{\Phi}(q_n,t_n;q_s,t_s)\big|_{(t_s,q_s)=(t_s^{\#},q_s^{\#})} \ , \tag{2a}$$

$$\hat{\vartheta}^{*}(q_n,t_n) \equiv \hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)\big|_{(t_s,q_s)=(t_s^{\#},q_s^{\#})} \ , \tag{2b}$$

onde as funções $\hat{\vartheta}$ e $\hat{\varphi}$ são diferentes pois $(t_0^{\#},q_0^{\#}) \neq (t_s^{\#},q_s^{\#})$ e $\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n) = \hat{\Phi}^{*}(q_n,t_n;q_s,t_s)$ de acordo com (8.6).

Agora, seja o instante t_k tal que $t_0 < t_k < t_n$. Nesse caso $\delta\hat{S}$ pode ser calculada segundo o mesmo procedimento realizado no cap. 8, chegando a uma expressão para esta análoga a (8.20) com as óbvias modificações. Toda a discussão feita repete-se integralmente de modo que as VD $\widehat{q^n}$ e $\widehat{p^n}$ são dadas a partir de (9.10-11),

$$\widehat{q^n} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^{*}(q,t)\, \overleftrightarrow{q^n}\, \hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^{*}(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle q^n \rangle \quad , \ (t=t_k, t_0<t_k<t_n) \ , \tag{3}$$

$$\widehat{p^n} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)\, \overleftrightarrow{p^n}\, \hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle p^n \rangle \quad , \ (t=t_k, t_0<t_k<t_n) \ , \tag{4}$$

assim como para uma VD arbitrária a partir de (8.16).

Já para um instante t_r tal que $t_n < t_r < t_s$ a única diferença em relação a t_k é que os valores dados dos extremos são nesse caso o do extremo (t_s,q_s) onde $t_s > t_r$ enquanto que no anterior eram os do extremo (t_0,q_0) onde $t_0 < t_k$. Isso não muda em nada o raciocínio, que repetido integralmente acarreta na simples mudança de $\hat{\varphi}(q,t)$ por $\hat{\vartheta}^*(q,t)$ e $\hat{\varphi}^*(q,t)$ por $\hat{\vartheta}(q,t)$ pois no caso anterior usa-se $\hat{\Phi}(k,0)$ e nesse $\hat{\Phi}(s,r) = \hat{\Phi}^*(r,s)$ com as definições (2). A expressão para as VD podem ser escritas na mesma forma das anteriores lembrando (9.6), nesse caso escrita para $\hat{\vartheta}(q,t)$, com a propriedade $\overleftrightarrow{(q^n)^+} = \overleftrightarrow{q^n}$ e $\overleftrightarrow{(p^n)^+} = \overleftrightarrow{p^n}$,

$$\widehat{q^n} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(q,t)\, \overleftrightarrow{q^n}\, \hat{\vartheta}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(q,t)\hat{\vartheta}(q,t)} = \langle q^n \rangle \quad , \ (t=t_r, t_n<t_r<t_s) \ , \tag{5}$$

$$\widehat{p^n} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(q,t)\, \overleftrightarrow{p^n}\, \hat{\vartheta}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(q,t)\hat{\vartheta}(q,t)} = \langle p^n \rangle \quad , \ (t=t_r, t_n<t_r<t_s) \ , \tag{6}$$

assim como para VD arbitrárias. De fato, para t_k ($t_0 < t_k < t_n$) e t_r ($t_n < t_r < t_s$) não há nenhuma diferença entre as VD nesse caso e o descrito nas seções anteriores.

O problema, e aí que surge a diferença, é quando se procura escrever as VD em $t = t_n$, afinal para $t < t_n$ usa-se $\hat{\varphi}(q,t)$ e para $t > t_n$ $\hat{\vartheta}(q,t)$, possibilitando exprimir $\delta\hat{S}$ em termos da mesma função, enquanto para $t = t_n$ isso não é possível. Embora em $t = t_n$ possa ser utilizada tanto $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ quanto $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$, a parametrização utilizada, tal que $\delta t > 0$, utiliza-se de $\varphi(q,t)$ até $t = t_n$ pois usa-se $\hat{\varphi}(q+\delta q,t+\delta t)$ em $t + \delta t = t_n$ para estabelecer a validade de (3-4) para $t_0 < t_k < t_n$, de modo que para $t = t_n$ a função a ser utilizada é

$\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ mas para $t_n + \delta t_n$ é $\hat{\vartheta}(q_n+\delta q_n, t_n+\delta t_n)$. Sendo assim, para estabelecer uma expressão para as VD em $t = t_n$ é preciso uma certa cautela em relação ao procedimento utilizado nos demais casos. A expressão (8.12) para $\hat{\Phi}(n+1,0)$ não deixa de ser válida, assim como (8.16) que já contém a hipótese (8.14) sobre Ω. A questão é que se for utilizada (8.16) então deve-se expressar $\underset{n}{\Omega}\, e^{\alpha S(n+1,n)}$ em termos de $\hat{\Phi}(s,n)$. A própria expressão obtida para $\hat{\Phi}(n+1,0)$, que resulta de (8.1), sugere pela análise do seu denominador que isso se consiga através de uma simples modificação no procedimento, modificação esta que consiste em, ao invés de multiplicar (8.16) por $\hat{\Phi}^*(n,0) = \hat{\Phi}(0,n)$, esta multiplicação seja por $\hat{\Phi}(s,n)$. Procedendo da mesma forma, ao invés de (8.19), obtém-se a expressão

$$\hat{\Phi}(n+1,0) \simeq \hat{\Phi}(n,0)\left[\frac{\underset{n}{\Omega}\,\hat{\Phi}(s,n)\left(1 + \delta q_n \frac{\partial}{\partial q_n} + \delta t_n \frac{\partial}{\partial t_n}\right)\hat{\Phi}(n,0)}{\underset{n}{\Omega}\,\hat{\Phi}(s,n)\hat{\Phi}(n,0)}\right], \tag{7}$$

de modo que o restante passa a ser uma simples repetição dos argumentos já utilizados. Logo, encontra-se a seguinte expressão para as VD $\hat{q}$ e $\hat{p}$ em $t = t_n$,

$$\hat{q}_{t_n} = \frac{\underset{n}{\Omega}\,\hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)q_n\,\hat{\varphi}(q_n,t_n)}{\underset{n}{\Omega}\,\hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n)} = \langle q\rangle_{t_n}, \tag{8}$$

$$\hat{p}_{t_n} = \frac{\underset{n}{\Omega}\,\hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_n}\right)\hat{\varphi}(q_n,t_n)}{\underset{n}{\Omega}\,\hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n)} = \langle p\rangle_{t_n}, \tag{9}$$

desde que $\underset{n}{\Omega}\,\hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n) \neq 0$, ou seja, de (1),

$$\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_0,t_0)\Big|_{\substack{(t_0,q_0)=(t_0^{\#},q_0^{\#})\\(t_s,q_s)=(t_s^{\#},q_s^{\#})}} = \underset{n}{\Omega}\,\hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n) \neq 0, \tag{10}$$

A condição (10) apresenta uma importante e significativa interpretação que será considerada adiante junto com outras que

aparecerão. Agora, para escrever a generalização de (8-9) para $\hat{q}^n$ e $\hat{p}^n$ e um $\hat{f}$ arbitrário são precisos alguns outros elementos. Estes elementos podem ser encontrados notando que $\delta\hat{S}$ pode ser escrita de um outro modo, procedendo em uma análise como a feita no cap. 8. Nesse caso, porém, a situação exige uma certa atenção. As expressões encontradas para as VD são o resultado da definição de $\delta\hat{S}$ como

$$\delta\hat{S} = \frac{1}{\alpha}\,[\ \ln\hat{\Phi}(n+1,0) - \ln\hat{\Phi}(n,0)\ ]\ ,$$

mas existem outros modos de escrever $\delta\hat{S}$. Enquanto nesse caso ela foi escrita em termos de $\hat{\Phi}(n,0)$ para depois serem introduzidos os valores $(t_0^{\#},q_0^{\#})$ é perfeitamente possível e equivalente escrever $\delta\hat{S}$ em termos de $\hat{\Phi}(s,n)$ para depois introduzir os valores $(t_s^{\#},q_s^{\#})$ nessa expressão. Não há nada de diferente nisto pois o mesmo ocorre classicamente. A partir da expressão clássica conclui-se que no caso generalizado esta expressão para $\delta\hat{S}$ é

$$\delta\hat{S} = \frac{1}{\alpha}\,[\ \ln\hat{\Phi}(s,n) - \ln\hat{\Phi}(s,n+1)\ ]\ .$$

Resta encontrar uma expressão para $\hat{\Phi}(s,n+1)$. Na verdade essa expressão para $\delta\hat{S}$ já foi utilizada pois se trata justamente da expressão a que se refere a discussão que leva às expressões (5-6). Novamente, a única diferença encontra-se em $t = t_n$. Sendo assim,

$$\hat{\Phi}(s,n) = \underset{n+1}{\Omega}\hat{\Phi}(s,n+1)\ e^{\alpha S(n+1,n)} \simeq \hat{\Phi}(s,n+1)\underset{n+1}{\Omega}\ e^{\alpha S(n+1,n)},$$

onde fez-se o uso da hipótese (8.14) acerca de $\underset{n+1}{\Omega}$ no limite em que $n+1 \to n$. Agora é $\underset{n+1}{\Omega}e^{\alpha S(n+1,n)}$ que precisa ser expressa em termos de $\hat{\Phi}(n,0)$. Após a expansão de $\hat{\Phi}(s,n+1)$ em série de Taylor, multiplicação nesse caso por $\hat{\Phi}(n,0)$ e algumas substituições obtém-se no lugar de (7) a expressão para $\hat{\Phi}(s,n+1)$,

$$\hat{\Phi}(s,n+1) \simeq \hat{\Phi}(s,n)\left[\frac{\underset{n}{\Omega}\left[\left(1 + \delta q_n\frac{\partial}{\partial q_n} + \delta t_n\frac{\partial}{\partial t_n}\right)\hat{\Phi}(s,n)\right]\hat{\Phi}(n,0)}{\underset{n}{\Omega}\ \hat{\Phi}(s,n)\hat{\Phi}(n,0)}\right]\ , \qquad (11)$$

que fornece segundo os mesmos argumentos já utilizados mais a definição (2b) as expressões para as VD $\hat{q}$ e $\hat{p}$,

$$\hat{q}_{t_n} = \frac{\Omega_n \left(q_n \hat{\vartheta}(q_n,t_n) \right)^* \hat{\varphi}(q_n,t_n)}{\Omega_n \hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n)} = \langle q \rangle_{t_n} , \tag{12}$$

$$\hat{p}_{t_n} = \frac{\Omega_n \left[\left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q_n} \right) \hat{\vartheta}(q_n,t_n) \right]^* \hat{\varphi}(q_n,t_n)}{\Omega_n \hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n)} = \langle p \rangle_{t_n} , \tag{13}$$

desde que satisfeita a condição (10).

Da comparação de (12-13) com (8-9) saem os referidos elementos necessários para escrever uma expressão para as VD arbitrárias. Se entre (8) e (12) a igualdade é imediatamente verificada, o mesmo não se pode dizer acerca de (9) e (13), embora elas tenham que ser iguais em $t = t_n$. Para concluir algo sobre a igualdade entre (9) e (13) é preciso lembrar o que foi discutido no final do capítulo anterior, em especial o que concerne à equação (9.18). Usando as conclusões chegadas nessa ocasião para o exemplo específico aqui considerado, a igualdade

$$\Omega_n \left[\left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q_n} \right) \hat{\vartheta}(q_n,t_n) \right]^* \hat{\varphi}(q_n,t_n) = \Omega_n \hat{\vartheta}^*(q_n,t_n) \left[\left(\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q_n} \right) \hat{\varphi}(q_n,t_n) \right] \tag{14}$$

só é válida na ordem considerada, ou seja, α^{-2}, se $\Omega = \tilde{\Omega}$. Caso contrário concluiu-se que o desvio era da ordem de α^{-1} e o motivo era o fato de $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$ e $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ não poderem ser arbitrárias ou completamente arbitrárias. Sendo assim, se a igualdade (14) deve ser válida e se $\Omega \neq \tilde{\Omega}$ então deve haver uma relação entre $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$ e $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$. Só quando $\Omega = \tilde{\Omega}$ é que $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$ e $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ podem ser consideradas como independentes. Caso contrário, deve existir uma relação entre $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$ e $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$, relação esta que depende do próprio Ω.

Deixando as implicações desta questão para serem discutidas adiante, é possível agora escrever uma expressão para as VD

arbitrárias. As igualdades discutidas foram justamente o ponto de partida no caso em que $\hat{\vartheta}(q_n,t_n) = \hat{\varphi}(q_n,t_n)$ das expressões para as VD arbitrárias obtidas no capítulo anterior, de modo que essa generalização faz-se naturalmente sem precisar utilizar argumentos que não os já utilizados. Logo, para uma VD arbitrária $\hat{f}$ em $t = t_n$,

$$\hat{f}_{t_n} = \frac{\Omega_n \hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)\, \overleftrightarrow{f}_n\, \hat{\varphi}(q_n,t_n)}{\Omega_n \hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)\hat{\varphi}(q_n,t_n)} = \langle f\rangle_{t_n} \quad , \tag{15}$$

onde $\overleftrightarrow{f}_n = \sum A_{ij}\, \overleftrightarrow{q_n^i\, p_n^j}$ com a possível dependência de A_{ij} no parâmetro t especificada para $t = t_n$, desde que satisfeitas as condições (10) e (14).

Sobre o cálculo de $\delta\hat{S}$ existem outros pontos a serem considerados cuja importância em relação ao caso discutido anteriormente nos cap. 8-9 era menor, mas que aqui, são fundamentais. Começando pelo caso anterior, suponha que seja feita uma reparametrização de modo a descrever o sistema em termos do parâmetro $t' = -t$. Para utilizar os resultados obtidos basta prestar atenção ao fato que, se em termos do parâmetro t tem-se $t_{i+1} > t_i$, em termos de t' tem-se $t'_{i+1} < t'_i$, $-t_{i+1} < -t_i$. Uma vez que $\int_{t0}^{tn} L dt = -\int_{-tn}^{-t0} L d(-t)$ segue-se das definições que

$$\Phi(q,t) = \Phi^*(q,-t) \quad , \quad \hat{\Phi}(q,t) = \hat{\Phi}^*(q,-t) \quad .$$

Agora, em termos desse novo parâmetro, $\delta\hat{S}$ pode ser escrita de uma maneira equivalente como

$$\delta\hat{S} = \frac{1}{\alpha}\,[\ \ln\hat{\Phi}(n,0;-t) - \ln\hat{\Phi}(n+1,0;-t)\ ] \quad ,$$

pois $-t_{i+1} < -t_i$, onde usando $\hat{\Phi}(q,-t) = \hat{\Phi}^*(q,t)$,

$$\delta\hat{S} = -\frac{1}{\alpha}\,[\ \ln\hat{\Phi}^*(n+1,0;t) - \ln\hat{\Phi}^*(n,0;t)\ ] \quad ,$$

que é justamente a expressão usada no cap. 9 para calcular $\delta\hat{S}$. Essa

equivalência pode, portanto, ser reinterpretada dentro do contexto em que $\hat{\Phi}^*(q,t) = \hat{\Phi}(q,-t)$. Contudo, essa reparametrização quando feita no caso aqui considerado conduz a conseqüências interessantes no caso em que $t = t_n$. Fazendo a reparametrização $t \to -t$ pode-se calcular $\delta\hat{S}$ de acordo com a última expressão ou usando $\hat{\Phi}(s,n)$ como

$$\delta\hat{S} = \frac{1}{\alpha}\left[\ \ln\hat{\Phi}(s,n+1;-t) - \ln\hat{\Phi}(s,n;-t)\ \right]$$

pelo mesmo motivo anterior de modo que

$$\delta\hat{S} = -\frac{1}{\alpha}\left[\ \ln\hat{\Phi}^*(s,n;t) - \ln\hat{\Phi}^*(s,n+1;t)\ \right] .$$

Utilizando as expressões (7) e (11) em termos de $\hat{\Phi}^*(n+1,0)$ e $\hat{\Phi}^*(s,n+1)$ a primeira permite escrever uma expressão para $\delta\hat{S}$ a partir da qual seguem-se as VD

$$\hat{q}_{t_n} = \frac{\Omega_n\ \hat{\vartheta}(q_n,t_n)\ q_n\ \hat{\varphi}^*(q_n,t_n)}{\Omega_n\ \hat{\vartheta}(q_n,t_n)\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)} = \langle q\rangle_{t_n} , \tag{16}$$

$$\hat{p}_{t_n} = \frac{\Omega_n\ \hat{\vartheta}(q_n,t_n)\left[\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_n}\right)\hat{\varphi}(q_n,t_n)\right]^*}{\Omega_n\ \hat{\vartheta}(q_n,t_n)\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)} = \langle p\rangle_{t_n} , \tag{17}$$

enquanto que a partir de $\delta\hat{S}$ escrito em termos da outra seguem-se as expressões

$$\hat{q}_{t_n} = \frac{\Omega_n\ q_n\hat{\vartheta}(q_n,t_n)\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)}{\Omega_n\ \hat{\vartheta}(q_n,t_n)\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)} = \langle q\rangle_{t_n} , \tag{18}$$

$$\hat{p}_{t_n} = \frac{\Omega_n\left[\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_n}\right)\hat{\vartheta}(q_n,t_n)\right]\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)}{\Omega_n\ \hat{\vartheta}(q_n,t_n)\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)} = \langle p\rangle_{t_n} , \tag{19}$$

onde em ambos os casos a condição

$$\hat{\Phi}^*(q_s,t_s;q_0,t_0)\Big|_{\substack{(t_0,q_0)=(t_0^{\#},q_0^{\#})\\(t_s,q_s)=(t_s^{\#},q_s^{\#})}} = \Omega_n\,\hat{\vartheta}(q_n,t_n)\hat{\varphi}^*(q_n,t_n) \neq 0, \tag{20}$$

deve ser satisfeita, além da igualdade

$$\Omega_n\left[\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_n}\right)\hat{\vartheta}(q_n,t_n)\right]\hat{\varphi}^*(q_n,t_n) = \Omega_n\hat{\vartheta}(q_n,t_n)\left[\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_n}\right)\hat{\varphi}(q_n,t_n)\right]^* \tag{21}$$

pelos mesmos motivos que levam a (14) com a mesma interpretação. A partir destas é possível escrever uma expressão para uma VD arbitrária utilizando os mesmos argumentos anteriores que é

$$\hat{f}_{t_n} = \frac{\Omega_n\,\hat{\vartheta}(q_n,t_n)\overleftrightarrow{f}_n\,\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)}{\Omega_n\,\hat{\vartheta}(q_n,t_n)\hat{\varphi}^*(q_n,t_n)} = \langle f\rangle_{t_n} . \tag{22}$$

Agora, comparando as expressões para as VD, por exemplo, (15) e (22), vê-se que em geral elas não são iguais. Em primeiro lugar, compare os denominadores destas expressões que devem satisfazer as condições (10) e (20). Para que elas sejam iguais é necessário que se verifique a igualdade entre $\hat{\Phi}(s,0)$ e $\hat{\Phi}^*(s,0)$, o que a própria definição destes mostra ser um caso extremamente excepcional. Menos ainda deve-se esperar acerca dos numeradores. Entretanto, não é necessária a igualdade destes para verificar-se a igualdade entre (15) e (22), por exemplo, quando $\overleftrightarrow{f}$ é uma constante. A igualdade certamente verifica-se quando $\Omega = 1 = \underset{q}{\mathrm{ext}}$, lembrando que nesse caso deve-se usar $\hat{\Phi}(n,0)$ e $\hat{\Phi}(s,n)$ nessas expressões no lugar de $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ e $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$ e realizar um pouco mais de trabalho em função do cálculo de $\underset{q}{\mathrm{ext}}$ para cada termo. Logo, para VD arbitrárias e $\Omega \neq 1$ as expressões (15) e (22) fornecem resultados diferentes. Essa é, portanto, mais uma característica de uma MG não-trivial. A sua interpretação está diretamente relacionada com a natureza convolutiva dessa dinâmica. Esta interpretação e as demais serão agora consideradas.

Começando por (14), esta pode ser interpretada como uma condição de " continuidade " e por isso impõe uma certa relação entre $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$

e $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$, a menos que $\Omega = \tilde{\Omega}$. A consideração da situação clássica ajuda na interpretação. Primeiro, classicamente os valores dos extremos devem ser introduzidos apenas no final de modo que (14) escreve-se

$$\underset{q_n}{\text{ext}} \left[\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_n}\right)\Phi(q_s,t_s;q_n,t_n)\right]\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0) =$$
$$= \underset{q_n}{\text{ext}}\ \Phi(q_s,t_s;q_n,t_n)\left[\left(\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_n}\right)\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0)\right] .$$

Para que se tenha o conhecimento de $\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0)$ é preciso resolver as equações do movimento, a equação de Lagrange que fornece $\bar{\gamma}$: $q = \bar{q}(t)$ e usar $S(q_n,t_n;q_0,t_0) = \underset{\gamma}{\text{ext}}\ S[\gamma] = S[\bar{\gamma}]$ ou resolver a equação de Hamilton-Jacobi para $S(q_n,t_n;q_0,t_0)$ não sendo necessário, obviamente, que estes dois métodos forneçam funções $S(q_n,t_n;q_0,t_0)$ iguais. Uma vez conhecido $\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0)$ tem-se $q_c = \bar{q}(t)$ usando as condições em t_0. Do conhecimento de $q_c = \bar{q}(t)$ tem-se $q_n = q_{n,c} = \bar{q}(t_n)$ e uma vez conhecido $\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0)$ determina-se $\Phi(q_s,t_s;q_n,t_n)$ pois os valores de q_n e q_s são $q_{n,c} = \bar{q}(t_n)$ e $q_{s,c} = \bar{q}(t_s)$ e $\gamma = \bar{\gamma}$.

As funções $\Phi(n,0)$ e $\Phi(n,s)$ são diferentes mas o conhecimento de uma implica no da outra e vice-versa e $\Phi(s,0) = \underset{n}{\text{ext}}\Phi(s,n)\Phi(n,0) = \Phi(q_s,t_s;q_{n,c},t_n)\Phi(q_{n,c},t_n;q_0,t_0)$. Em $t = t_n$ o momentum é dado por $p_n = \partial S(q_n,t_n;q_0,t_0)/\partial q_n$ ou $p_n = -\partial S(q_s,t_s;q_n,t_n)/\partial q_n$ que fornecem os mesmos resultados pois os valores de q_0 e q_s são $q_0 = \bar{q}(t_0)$ e $q_s = \bar{q}(t_s)$.

É esta igualdade a que se refere à equação (14) no caso clássico onde $\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0)$ e $\Phi(q_s,t_s;q_n,t_n)$ estão diretamente relacionadas uma com a outra, com o conhecimento de uma implicando no conhecimento da outra. Em termos das funções φ isso significa que para $\varphi(q_n,t_n) = \Phi(q_n,t_n;q_0,t_0)$ para $(t_0,q_0) = (t_0^{\#},q_0^{\#})$ só existe uma função $\vartheta^*(q_n,t_n) = \Phi(q_s,t_s;q_n,t_n)$ para $(t_s,q_s) = (t_s^{\#},q_s^{\#})$ que satisfaz essa igualdade e que é aquela para a qual $q_s^{\#} = \bar{q}(t_s^{\#})$ onde $q_c = \bar{q}(t)$ é determinado a partir de $\Phi(q_n,t_n;q_0,t_0)$. O fato de existir apenas *um* valor de $q_s^{\#}$ já determinado é uma característica da dinâmica conjuntiva descrita pela MC e que é representada como um caminho no EC.

No caso $\Omega \neq 1$, ou seja, de uma dinâmica convolutiva, isso não é

necessariamente verdadeiro. Se $\Omega = 1$ uma vez dado $\varphi(q_n,t_n)$ só existe um $\vartheta^*(q_n,t_n)$ que satisfaz (14) em sua versão clássica. Entretanto, se $\Omega \neq 1$ nada implica que uma vez dado $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ deva existir apenas uma função $\hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)$ que satisfaça (14). A resposta à esta questão depende da definição de Ω. Dependendo da definição de Ω podem existir uma, duas, três, etc., funções $\hat{\vartheta}^*(q_n,t_n)$ que satisfazem (14), podendo inclusive esse número depender de $\varphi(q_n,t_n)$.

Esta é justamente a relação discutida sobre a possibilidade de uma escolha independente de $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ e $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$. Essa relação só não existe se $\Omega = \tilde{\Omega}$. Para explicitar que esse número depende de Ω denota-se o conjunto das funções que satisfazem (14) por $\mathcal{E}(\Omega)$. Como os diferentes elementos deste conjunto, se existirem, diferem pelo valor de q_s, ou seja, se $q^{\#}_{s,1}$ e $q^{\#}_{s,2}$ são dois valores diferentes de q_s,

$$\hat{\vartheta}^*_1(q_n,t_n) = \hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)\Big|_{(t_s,q_s)=(t^{\#}_s,q^{\#}_{s1})} ,$$

$$\hat{\vartheta}^*_2(q_n,t_n) = \hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)\Big|_{(t_s,q_s)=(t^{\#}_s,q^{\#}_{s2})} ,$$

então se existe mais de uma função $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$ que satisfaz (14) existe mais de um valor possível para q_s. O conjunto $\mathcal{E}(\Omega)$ define, portanto, um conjunto $Q_s(\Omega)$ dos valores possíveis de q_s. Isso significa que o conhecimento de $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ por si só não determina $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$, ou seja, o valor de q_s. Na MC o conhecimento de $\varphi(q_n,t_n)$, ou melhor, $\Phi(q_n.t_n;q_0,t_0)$, determina univocamente $\Phi(q_s,t_s;q_0,t_0)$, ou seja, o valor de q_s que é $\bar{q}(t^{\#}_s)$. Numa MG, dependendo da definição de Ω, o conhecimento de $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ determina um conjunto $\mathcal{E}(\Omega)$ de funções $\hat{\vartheta}(q_n,t_n)$, e não apenas uma como no caso clássico, e este por sua vez o conjunto $Q_s(\Omega)$ dos valores de q_s.

Obviamente isso não significa que em $t = t_s$ a VI q_s assume diferentes valores $q^{\#}_{s1}$, $q^{\#}_{s2}$, etc.. Como tal ela assume um valor $q^{\#}_{si}$ e define uma função $\hat{\vartheta}_i(q_n,t_n)$. O que ocorre é que não é possível determinar a partir do conhecimento de $\hat{\varphi}(q_n,t_n)$ uma das funções $\hat{\vartheta}_1(q_n,t_n)$, $\hat{\vartheta}_2(q_n,t_n)$, ..., $\hat{\vartheta}_i(q_n,t_n)$, ..., possíveis pertencentes a $\mathcal{E}(\Omega)$, ou seja, não é possível dizer qual dos valores $q^{\#}_{s1}$, $q^{\#}_{s2}$, ...,

$q^{\#}_{s1}$, ... , é o valor assumido pela VI q_s em $t = t_s$. Isso não é. entretanto, nenhuma falha ou incompleteza do formalismo da MG pois q_s não é uma VD. A dinâmica do movimento é descrita por VD enquanto que o sistema é descrito por VI; no caso de uma dinâmica conjuntiva, descrita pela MC, as VD são iguais às VI mas no caso de uma dinâmica convolutiva, descrita por uma MG não-trivial, as VD não são iguais às VI. O que a Mecânica como uma teoria do *movimento* deve fazer é dar respostas sobre as VD, que são as que descrevem o movimento, e não sobre as VI, que descrevem o sistema, e isso de fato ocorre.

Lembrando o que foi discutido no cap. 2 a VI q é uma variável extensiva e como tal o seu conhecimento é assumido como ponto de partida da formulação do problema. A MG, como uma teoria da Mecânica, deve fornecer, e fornece, respostas sobre as VD. Conhecida a função $\hat{\varphi}(q,t)$,

$$\hat{\varphi}(q,t) \equiv \hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)\Big|_{(t_0,q_0)=(t^{\#}_0,q^{\#}_0)} ,$$

o valor de uma VD arbitrária $\hat{f}$ é dado por (9.16) para qualquer instante $t > t_0$. Os seus valores são todos bem definidos e possuem propriedades interessantes, discutidas na seção anterior, características da dinâmica convolutiva que essa teoria descreve. A única coisa que esta diz e é preciso dizer sobre as VI é que as VD são obtidas a partir das VI através de uma operação sobre elas definida por (8.16). Desse modo, essa dinâmica convolutiva está definida e determinada para qualquer instante $t > t_0$, e o valor da VI, por exemplo q_s que descreve o sistema no instante t_s, é um dos valores possíveis pertencentes ao conjunto $Q_s(\Omega)$. Pode ocorrer que $\Omega \neq 1$ seja tal que esse conjunto tenha um só elemento para todo instante t ou apenas para este t_s específico, mas isso é um caso particular.

Agora, suponha que através de um processo de medição o valor de q_s seja conhecido e igual a $q^{\#}_{s1}$, definindo uma função $\hat{\vartheta}_1(q,t)$,

$$\hat{\vartheta}^{*}_1(q,t) \equiv \hat{\Phi}(q_s,t_s;q,t)\Big|_{(t_s,q_s)=(t^{\#}_s,q^{\#}_{s1})} .$$

Se o conjunto $Q_s(\Omega)$ contém mais de um elemento, outro valor além de $q^{\#}_{s1}$, ou seja, o conjunto $\mathcal{E}(\Omega)$ contém uma ou mais funções além de $\hat{\vartheta}_1(q,t)$, então tem-se pela frente uma situação essencialmente diferente da clássica, sendo preciso conciliar a descrição em termos de duas funções $\hat{\varphi}(q,t)$ e $\hat{\vartheta}_1(q,t)$ diferentes. Foi com esse intuito que a discussão anterior foi feita. Essa conciliação pode ser feita escrevendo as VD de acordo com (3-4) usando $\hat{\varphi}(q,t)$ para $t = t_k$ ($t_0 < t_k < t_n$), com (5-6) usando $\hat{\vartheta}(q,t)$ para $t = t_r$ ($t_n < t_r < t_s$) (abandonando daqui em diante o uso do índice i na notação) e (15) para $t = t_n$. Tudo estaria resolvido se não restasse ainda a indefinição do instante t_n, o que exige uma certa cautela em relação à essa interpretação. De fato, conforme colocada essa discussão, o instante t_n entre t_0 e t_s é completamente arbitrário. Para que a sua interpretação e determinação seja coerente é preciso distinguir duas situações.

Na primeira (I) são dados os valores dos extremos, $(t^{\#}_0,q^{\#}_0)$ e $(t^{\#}_s,q^{\#}_s)$, e pergunta-se pelas VD que descrevem uma dinâmica convolutiva entre esses pontos. Como o instante t_n pode ser qualquer um entre t_0 e t_s nessa situação é preciso considerar não um instante particular apenas mas sim todos os pertencentes a este intervalo. Logo, a expressão (15) deve ser usada nos instantes $t_1,t_2,\ldots,t_n,\ldots$, ou seja,

$$\hat{f}_t = \frac{\int_{\Omega_q} \hat{\vartheta}^*(q,t) \overleftrightarrow{f} \hat{\varphi}(q,t)}{\int_{\Omega_q} \hat{\vartheta}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle f\rangle_t \quad , \ (t_0<t<t_n) \ . \tag{23}$$

É importante perceber que dentro dessa situação a questão colocada é ligeiramente diferente da anterior sobre a relação entre $\hat{\vartheta}(q,t)$ e $\hat{\varphi}(q,t)$. Nessa tinha-se $\hat{\varphi}(q,t)$ e perguntava-se por $\hat{\vartheta}(q,t)$. A princípio, a única resposta possível é que $\hat{\vartheta}(q,t)$ é um elemento do conjunto $\mathcal{E}(\Omega)$. Agora, porém, $\hat{\varphi}(q,t)$ e $\hat{\vartheta}(q,t)$ são dados, ou seja, é dado um elemento desse conjunto $\mathcal{E}(\Omega)$, de modo que (14) deve ser satisfeita para estas funções.

Na outra situação (II) conhece-se ou pelo cálculo direto ou pela solução de alguma equação diferencial a função $\hat{\varphi}(q,t)$ ($t > t_0$). Se $t = t_1 > t_0$ e pergunta-se pelo valor de uma VD neste instante, a

resposta é dada por (9.16) em $t = t_1$. Agora, suponha que em um instante t_s ($t_s > t_1 > t_0$) resolva-se fazer uma medição da VI q_s obtendo como resultado $q_s^{\#}$ para daí perguntar sobre as VD para $t < t_s$, $t = t_s$, $t > t_s$. Nesse caso, o instante t_n não pode ser considerado nem como um instante entre t_0 e t_s nem como todos os instantes desse intervalo como na situação I. O motivo, no primeiro caso, é que este instante tanto poderia ser t_n' ou t_n'' e entre estes a dinâmica convolutiva poderia ser descrita por duas funções $\hat{\varphi}(q,t)$ e $\hat{\vartheta}(q,t)$ diferentes, enquanto, no segundo caso, para $t_0 < t < t_1$ ela é descrita por $\hat{\varphi}(q,t)$ e as VD dadas por (9.16). Resta supor que $t_n = t_s$ e ver as conseqüências. O conhecimento de $q_s^{\#}$ permite determinar $\vartheta(q,t)$ para $t > t_s$, logo as VD por (9.16) com $\hat{\vartheta}(q,t)$ no lugar de $\hat{\varphi}(q,t)$ para $t > t_s$. Considerando $t_n = t_s$ mais essas expressões para $t < t_s$ e $t > t_s$ obtém-se resultados formalmente iguais aos anteriores, mas com um conteúdo diferente, uma vez que o instante $t_n = t_s$ está agora definido não mais de maneira ambígüa. Nestas expressões basta substituir (q_n,t_n) por (q_s,t_s) e (q_s,t_s) por (q,t), onde $t > t_s$, e a partir de (15) tem-se para $t = t_s$,

$$\hat{f}_{t_s} = \frac{\Omega_s \hat{\vartheta}^*(q_s,t_s) \overleftrightarrow{f}_s \hat{\varphi}(q_s,t_s)}{\Omega_s \hat{\vartheta}^*(q_s,t_s)\hat{\varphi}(q_s,t_s)} = \langle f \rangle_{t_s} \quad , \tag{24}$$

sendo t_s o instante em que é realizada a medição. Note que o valor obtido $q_s^{\#}$ é usado a princípio apenas para obter a função $\hat{\vartheta}(q,t)$ pois Ω_s não está ainda definida.

Sem dúvida a interpretação das situações I e II acaba sendo prejudicada uma vez que a operação Ω não está ainda definida e nem estas situações são distintas no caso de uma dinâmica conjuntiva, como o são no caso convolutivo. Para que tudo isso não cause futuramente uma confusão é preciso ter em mente a distinção fundamental que envolve as funções $\hat{\varphi}(q,t)$ e $\hat{\vartheta}(q,t)$ nas duas situações. Na situação I são dadas $\hat{\varphi}(q,t)$ e $\hat{\vartheta}(q,t)$, ou seja, é dado um elemento do conjunto $\mathcal{E}(\Omega)$, enquanto na situação II é dado $\hat{\varphi}(q,t)$ e pergunta-se por $\hat{\vartheta}(q,t)$, que pode ser qualquer um dos elementos de $\mathcal{E}(\Omega)$. Quanto aos resultados formais obtidos na discussão anterior e que conduziram à expressão

(15) não há problema algum; a questão é de interpretação destes à luz das duas situações expostas que, conforme colocadas, apresentam as dadas interpretações. De qualquer forma, para a validade de (23-24) é necessário que seja satisfeita a condição (10),

$$\Omega_q \hat{\vartheta}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t) \neq 0 \quad .$$

Se uma VD, por exemplo $\hat{q}$, deve estar definida em qualquer instante, o que se assume ser verdadeiro, e se para $t < t_s$ a dinâmica convolutiva é descrita por $\hat{\varphi}(q,t)$ e para $t > t_s$ por $\hat{\vartheta}(q,t)$ essa condição deve ser satisfeita, pois caso contrário essa VD não estaria definida em $t = t_s$. Do mesmo modo, se para $t < t_s$ a dinâmica convolutiva é descrita por $\hat{\varphi}(q,t)$ e essa condição não é satisfeita para uma função $\hat{\vartheta}(q,t)$ em $t = t_s$ então a dinâmica para $t > t_s$ não pode ser descrita por $\hat{\vartheta}(q,t)$. É fundamental, portanto, tomar como princípio, para chegar-se a estas conclusões, que as VD devem estar definidas durante todos os instantes do movimento.

Desse modo, se a dinâmica é descrita por $\hat{\varphi}(q,t)$ para $t < t_s$ e essa condição para uma função $\hat{\vartheta}(q,t)$ não é satisfeita, então a " transição " da dinâmica descrita por $\hat{\varphi}(q,t)$ para $t < t_s$ para a dinâmica descrita por $\hat{\vartheta}(q,t)$ para $t > t_s$ não é possível. Caso ela seja satisfeita, essa transição é possível. Denotando o conjunto das funções $\hat{\vartheta}(q,t)$ para os quais essa transição é possível por $\mathcal{C}^0(\Omega)$ e o respectivo conjunto de valores possíveis de q_s por $\mathcal{Q}_s^0(\Omega)$ conclui-se que os conjuntos $\mathcal{C}(\Omega)$ e $\mathcal{Q}_s(\Omega)$ são sub-conjuntos destes pois para que se possa escrever a expressão (14) é necessário supor que a condição (10) seja satisfeita, ou seja, que $\hat{\vartheta}(q,t)$ pertença a $\mathcal{C}^0(\Omega)$.

Resta discutir mais um ponto considerado nesta seção que é a questão da reparametrização $t \to -t$. O que a análise feita mostrou é que as parametrizações t e $t' = -t$ levam aos mesmos resultados para as VD quando estas descrevem uma dinâmica convolutiva com $\hat{\varphi}(q,t)$ para $t < t_s$ e $\hat{\vartheta}(q,t)$ para $t > t_s$ mas, em geral, a diferentes resultados para as VD em $t = t_s$, ou seja,

$$\frac{\Omega_s \hat{\vartheta}^*(q_s,t_s) \overleftrightarrow{f}_s \hat{\varphi}(q_s,t_s)}{\Omega_s \hat{\vartheta}^*(q_s,t_s)\hat{\varphi}(q_s,t_s)} \neq \frac{\Omega_s \hat{\vartheta}(q_s,t_s) \overleftrightarrow{f}_s \hat{\varphi}^*(q_s,t_s)}{\Omega_s \hat{\vartheta}(q_s,t_s)\hat{\varphi}^*(q_s,t_s)},$$

onde o lado esquerdo é a expressão obtida utilizando t como parâmetro com $\hat{\varphi}(q,t)$ $(t < t_s)$ e $\hat{\vartheta}(q,t)$ $(t > t_s)$ enquanto a do lado direito é a obtida utilizando -t como parâmetro com $\hat{\vartheta}(q,t)$ $(-t < -t_s)$ e $\hat{\varphi}(q,t)$ $(-t > -t_s)$, $\hat{\varphi}(q,t) = \hat{\varphi}^*(q,-t)$, $\hat{\vartheta}(q,t) = \hat{\vartheta}^*(q,-t)$. Para interpretar esse resultado é proveitoso lembrar que o termo convolução foi cunhado para exprimir a idéia de um imbricamento irreversível. Conjunção e convolução são, respectivamente, reuniões justapositiva reversível e não-justapositiva irreversível de objetos. Em outras palavras, um conjunto [set] pode ser formado por conjunção [conjunction] ou convolução [folding] mas apenas no primeiro caso o processo é reversível através da disjunção [disjunction]. Sendo assim, não apenas é convolutiva a dinâmica em si mas também a transição entre dinâmicas convolutivas. A evolução de uma dinâmica convolutiva em relação ao parâmetro t é um processo nitidamente conjuntivo, uma vez que este é reversível pela reparametrização $t \to -t$, mas a transição entre dinâmicas convolutivas é um processo convolutivo, uma vez que este não é reversível pela reparametrização $t \to -t$ pois o valor das VD em $t = t_n$ são diferentes. Nesse caso é preciso interpretar a transição das dinâmicas convolutivas de $\hat{\varphi}(q,t)$ para $\hat{\vartheta}(q,t)$ e a de $\hat{\vartheta}(q,t)$ para $\hat{\varphi}(q,t)$ como processos diferentes e convolutivos, irreversíveis. Mais ainda, o elemento de irreversibilidade dentro desta interpretação é justamente o processo de medição em $t = t_s$, o que traz a discussão de volta às situações I e II.

Estas situações são de fato distintas mas, no caso de uma dinâmica conjuntiva, elas não conduzem a resultados diferentes em função da natureza dessa dinâmica. Pela própria natureza de uma dinâmica convolutiva estas situações, além de distintas, conduzem a resultados diferentes. A interpretação da situação II é dada em função da sua objetividade e coerência, uma vez que em $t = t_1$ não é possível saber que será feita uma medição em $t = t_s$ $(t_s > t_1)$ e nem $t = t_n$ pode ser escolhido além de $t_n = t_s$ pois, mesmo que t_n seja escolhido em uma

vizinhança infinitamente próxima deste, esta pode ser $t_s - dt_s$ ou $t_s - dt_s/2$ de modo que nesse intervalo a dinâmica seria descrita por duas funções diferentes.

O significado do processo de medição como o referido elemento de irreversibilidade é claro e objetivo. Se nas situações A e B a dinâmica é descrita por $\hat{\varphi}(q,t)$ ($t > t_0$) e em A realiza-se uma medição em $t = t_s$ de modo que para $t > t_s$ a dinâmica é descrita por $\hat{\vartheta}(q,t)$ então as dinâmicas para $t > t_s$ em A e B são descritas respectivamente por $\hat{\vartheta}(q,t)$ e $\hat{\varphi}(q,t)$, ou seja, são diferentes dinâmicas convolutivas, sendo a transição na situação A irreversível.

É fundamental ter em mente a distinção entre VD e VI. O processo de medição fornece o valor de uma VI que descreve o sistema, mas não a sua dinâmica e, como tal, é uma condição de contorno do problema. A cada realização do processo de medição corresponde a introdução de um contorno a mais no problema, definindo por sua vez um novo problema a cada medição. O estabelecimento de uma equação diferencial para a evolução da dinâmica convolutiva em relação a t permite visualizar bem esse problema, uma vez que ela só esta definida em conjunto com as condições de contorno e, diferentes condições de contorno, definem diferentes problemas. É interessante notar que embora as VD em $t = t_n$ sejam diferentes, elas estão relacionadas pela operação de conjugação $\alpha \to -\alpha$, assim como os seus denominadores que se relacionam com as possibilidades das transições de acordo com as condições (10) e (20). Isto significa que, mesmo sendo diferentes, se a transição de $\hat{\varphi}(q,t)$ para $\hat{\vartheta}(q,t)$ é possível, também o é a transição de $\hat{\vartheta}(q,t)$ para $\hat{\varphi}(q,t)$.

Ao longo das últimas seções muito foi dito acerca das VD e quase nada sobre as equações do movimento. Certamente as VD são um assunto sobre o qual é possível estender-se em importantes e interessantes discussões, mas é preciso colocar um ponto final nesta discussão, uma vez que ela é mais do que suficiente. Quanto às equações do movimento, no cap. 7, chegou-se às equações generalizadas de Lagrange, mas uma questão ficou para ser respondida, sobre a relação entre as expressões (7.15-16) e o que foi aqui discutido.

A equação generalizada de Lagrange é a solução de um PV que, pela sua própria natureza, encaixa-se na situação I discutida. Nesse caso

uma VD $\hat{f}_t$ é dada por (23) para um instante t tal que $t_0 < t < t_n$, usando t_n ao invés de t_β em (23) para manter uma notação coerente com a do cap. 7. Considere $f = \hat{x}$,

$$\hat{x}_t = \frac{\Omega_x \hat{\vartheta}^*(x,t)\, x\, \hat{\varphi}(x,t)}{\Omega_x \hat{\vartheta}^*(x,t)\hat{\varphi}(x,t)} = \langle x\rangle_t \quad , \quad (t_0<t<t_n) \; . \tag{25}$$

Essa expressão pode, com a ajuda das definições de $\hat{\varphi}(q,t)$ e $\hat{\vartheta}(q,t)$, ser escrita de outra maneira. Fazendo isso com o numerador tem-se para $t = t_1$,

$$\Omega_{x_1} \hat{\vartheta}^*(x_1,t_1)x_1\hat{\varphi}(x_1,t_1) =$$

$$= \Omega_{x_1} \hat{\Phi}(x_n,t_n;x_1,t_1)x_1\hat{\Phi}(x_1,t_1;x_0,t_0)\Big|_{\substack{(t_0,x_0)=(t_0^\#,x_0^\#)\\ (t_n,x_n)=(t_n^\#,x_n^\#)}} ,$$

onde usou-se (8.8) e (2). Usando (7.1) e para os valores dos extremos a notação mais simples $0^\#$ e $n^\#$,

$$\Omega_{x_1} \hat{\vartheta}^*(x_1,t_1)x_1\hat{\varphi}(x_1,t_1) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big\{ \Omega_1\Big[\Omega_{1+1}\ldots\Omega_{n-1}\exp\Big[\alpha\sum_{k=1}^{n-1} S(k+1,k)\Big]\Big]x_1 \cdot$$

$$\cdot\Big[\Omega_1\ldots\Omega_{1-1}\exp\Big[\alpha\sum_{k=0}^{1-1} S(k+1,k)\Big]\Big]\Big\}\Big|_{0^\#,n^\#} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\, \Omega_1\ldots\Omega_1\ldots\Omega_{n-1}\; x_1\; \exp\Big[\alpha\sum_{k=0}^{n-1} S(k+1,k)\Big]\Big|_{0^\#,n^\#} , \tag{26}$$

que é justamente a expressão (7.15). Essa identificação mostra que é conveniente introduzir uma notação para essa quantidade. Define-se, portanto,

$$\langle\hat{\vartheta}(t)|\mathbf{q}|\hat{\varphi}(t)\rangle \equiv \Omega_q\, \hat{\vartheta}(q,t)q\hat{\varphi}(q,t) \quad , \tag{27}$$

de modo que

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1698
e.1
INSTITUTO DE FÍSICA

$$<\hat{\vartheta}(t_1)|\mathbf{q}|\hat{\varphi}(t_1)> = \Omega_1 \hat{\vartheta}(q_1,t_1) q_1 \hat{\varphi}(q_1,t_1) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \Omega_1 \ldots \Omega_1 \ldots \Omega_{n-1} \; q_1 \exp\left[\alpha \sum_{k=0}^{n-1} S(k+1,k)\right] \Big|_{0^\#,n^\#},$$

$$<\hat{\vartheta}(t_1)|\mathbf{q}|\hat{\varphi}(t_1)> = \Omega_{[\gamma]} \; q_1 e^{\alpha S[\gamma]} \Big|_{0^\#,n^\#} \quad . \tag{28}$$

Segundo essa notação, usando 1 no lugar de $\mathbf{q}$,

$$<\hat{\vartheta}(t)|1|\hat{\varphi}(t)> = <\hat{\vartheta}(t)|\hat{\varphi}(t)> = \Omega_q \; \hat{\vartheta}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t) \quad ,$$

que permite escrever as VD numa forma mais simples e elegante,

$$\hat{f}_t = \frac{<\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{f}|\hat{\varphi}(t)>}{<\hat{\vartheta}(t)|\hat{\varphi}(t)>} = <f>_t \quad , \; (t_0<t<t_n) \; . \tag{29}$$

Também as VD (9.16) que devem ser consideradas na outra situação descrita assumem uma forma conveniente nessa notação, ou seja,

$$\hat{f}_t = \frac{<\hat{\varphi}(t)|\overleftrightarrow{f}|\hat{\varphi}(t)>}{<\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)>} = <f>_t \quad , \; (t>t_0) \; . \tag{30}$$

Usando o resultado obtido com 1 vê-se que

$$\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) = <\hat{\vartheta}(t)|\hat{\varphi}(t)> = \Omega_{[\gamma]} e^{\alpha S[\gamma]} \quad , \tag{31}$$

mostrando o quão conveniente é a notação $<\hat{\vartheta}(t)|\hat{\varphi}(t)>$. Um caso particular interessante de (30) é

$$<\hat{\vartheta}(t_k)|\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_k}|\hat{\varphi}(t_k)> = \Omega_{q_k} \hat{\vartheta}^*(q_k,t_k)\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q}\hat{\varphi}(q_k,t_k) \quad . \tag{32}$$

que fornece a variável dinâmica $\hat{p}_k$ após a sua divisão por (31) em $t = t_k$. Essa é justamente a quantidade (7.16).

Na próximo capítulo, o uso desta notação se mostrará extremamente útil. Neste, a equação do movimento será reconsiderada e sua a relação com os resultados das últimas seções pormenorizadas.

11. FORMALISMO HAMILTONIANO.

Durante os três últimos capítulos a atenção voltou-se para as VD em uma MG não-trivial que descreve uma dinâmica convolutiva. Agora é preciso determinar como elas evoluem em relação ao parâmetro t.

O primeiro passo nessa direção foi dado no cap 7, onde se chegou à equação generalizada de Lagrange como sendo a solução do PV na MG. Nessa ocasião mostrou-se que essa equação para $L = m\dot{x}^2/2 - V(x)$ é uma equação para $\langle\hat{\vartheta}(t)|\mathbf{x}|\hat{\varphi}(t)\rangle$, ou seja, para a VD $\hat{x}$ para t entre t_0 e t_n. Antes, porém, de considerar VD arbitrárias é preciso analisar a equação generalizada de Lagrange à luz do que foi discutido nos últimos capítulos.

Na notação introduzida no final do capítulo anterior a equação generalizada de Lagrange (7.8) escreve-se

$$\langle\hat{\vartheta}(t_n)|\Lambda_t|\hat{\varphi}(t_0)\rangle = \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]}\Lambda_t = 0 \quad , \quad (t_0 < t < t_n) \ , \tag{1}$$

ou usando a definição de Λ_t,

$$\langle\hat{\vartheta}(t_n)|-\frac{d}{dt}\left(\partial L/\partial\dot{q}\right) + \partial L/\partial q|\hat{\varphi}(t_0)\rangle = 0 \quad , \quad (t_0<t<t_n) \ . \tag{2}$$

As equações (1-2) mostram que é conveniente interpretá-las como uma equação entre operadores, mas para isso é preciso determinar as relações de comutação envolvidas. Mais ainda, antes é preciso compreender o significado destes operadores. Quanto a (1) o seu significado é claro uma vez que é o limite $\varepsilon \to 0$ de (7.7). Por isso mesmo vê-se que ela pode ser colocada numa forma mais adequada que é (7.13). Também no cap. 7 notou-se a importância de

$$\underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left(\partial L/\partial\dot{q}\right)_k \exp[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)]$$

e mostrou-se que no limite $\varepsilon \to 0$ vale (7.17). Dentro da nova notação escreve-se

$$\langle\hat{\vartheta}(t_k)|\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q_k}|\hat{\varphi}(t_k)\rangle =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \underset{1}{\Omega}\cdots\underset{n-1}{\Omega}\left[\exp[\alpha\sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)]\right](\partial L/\partial\dot{q})_k . \tag{3}$$

O isomorfismo existente entre a equação de Lagrange e a equação generalizada de Lagrange sugere a separação desta de acordo com o mesmo procedimento utilizado quando da consideração da primeira. A princípio bastaria definir, de (3),

$$\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} p_k = \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} (\partial L/\partial\dot{q})_k \quad , \ (t_0 < t < t_n) \ ,$$

mas a situação é um pouco mais delicada. De fato, a partir destas, tem-se

$$\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]}\left(p_k - (\partial L/\partial\dot{q})_k\right) = 0 \quad , (t_0 < t < t_n) \ ,$$

da qual não se conclui que $p_k = (\partial L/\partial\dot{q})_k$ pois as hipóteses feitas sobre a operação Ω (cap. 3 e 4) exigem apenas que $\Omega x = 0$ implique em $x = 0$ se $x = x[\gamma;c]$ onde c é arbitrário. Essa conclusão é necessária uma vez que se pretende usar p como uma VI, pois desta é possível expressar $\dot{q} = \dot{q}(q,p,t)$ para os sistemas padrão considerados. Para que essa conclusão seja possível, é preciso introduzir nesta definição uma função arbitrária. Sendo assim,

$$\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} W[\gamma]\left(p_k - (\partial L/\partial\dot{q})_K\right) = 0 \quad , \ W[\gamma] \neq 0, \ (t_0 < t_k < t_n), \tag{4}$$

onde $W[\gamma]$ é um funcional arbitrário, da qual se conclui que

$$p_k = (\partial L/\partial\dot{q})_k = p_k(q_k,\dot{q}_k,t_k) \quad ,$$

que pode ser invertida para escrever

$$\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_k,p_k,t_k) \quad ,$$

desde que $W \neq 0$. Para o caso em que $W = 1$, tem-se usando (3)

$$\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} p_k = \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} \left(\partial L/\partial \dot{q}\right)_k = \langle \hat{\vartheta}(t_k) | \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q_k} | \hat{\varphi}(t_k) \rangle \tag{5}$$

que define o operador **p**,

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q} \quad . \tag{6}$$

Uma vez definido esse operador a consideração de p como uma VI realiza-se facilmente. De $p_k = \left(\partial L/\partial \dot{q}\right)_k$ escreve-se $\dot{q}_k = \dot{q}_k(q_k, p_k, t_k)$ que, introduzida nas expressões contendo $q_k, \dot{q}_k, t_k$, permite escrevê-las em termos de q_k, p_k, t_k, nas quais finalmente substitui-se p_k pelo correspondente operador $\mathbf{p}_k = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q_k}$. Portanto, o operador **p** desempenha o papel da VI p. Por outro lado, diz que a VD $\hat{p}$ é representada pelo operador **p**.

Esta é a versão generalizada da situação clássica. Aqui, a VD $\hat{p}$ é diferente da VI p mas há uma relação entre elas dada pelo operador **p** que de um lado representa a VD e do outro a VI. A VD $\hat{p}$ não é o operador **p** mas é representada por este, o que significa que o seu valor numérico pode ser obtido através de uma operação sobre as VI representadas pelo operador **p** que define uma operação sobre a VI q, a operação $\frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q}$. Pensando bem, na MC isso também ocorre pois $\partial L/\partial \dot{q} = p = p(q, \dot{q}, t)$ é a definição da VI p e a VD p dada por $p = \partial S/\partial q$ não é igual a $\partial L/\partial \dot{q}$ mas sim a $\partial L/\partial \dot{q}\big|_{q=\bar{q}(t)} = \underset{q}{\text{ext}}\ \partial L/\partial \dot{q}$. Essa situação na MG é uma versão da clássica, apenas mais delicada pois envolve o operador **p**.

Voltando à questão da equação generalizada de Lagrange o que foi discutido permite enxergá-la como uma equação entre operadores,

$$-\frac{d}{dt}\left(\partial L/\partial \dot{\mathbf{q}}\right) + \partial L/\partial \mathbf{q} = 0 \quad , \ (t_0 < t < t_n) \ , \tag{7}$$

com a relação de comutação

$$\mathbf{q}\left(\partial L/\partial \dot{\mathbf{q}}\right) - \left(\partial L/\partial \dot{\mathbf{q}}\right)\mathbf{q} = -\frac{1}{\alpha} \ , \tag{8}$$

conseqüência de $\mathbf{p} = \partial L/\partial \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q}$ e $\mathbf{q} = q$. Essa definição permite

também escrever a equação generalizada de Lagrange como

$$\langle\hat{\vartheta}(t_k)|p_k|\hat{\varphi}(t_k)\rangle = \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]}\left(\partial L/\partial\dot{q}\right)_k \quad , \quad (t_0<t_k<t_n) \ , \tag{9a}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\vartheta}(t_k)|p_k|\hat{\varphi}(t_k)\rangle = \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]}\left(\partial L/\partial q\right)_k \quad , \quad (t_0<t_k<t_n) \ , \tag{9b}$$

onde (9a) é um caso particular de (4).

Esse procedimento ganha muita força se for notado que

$$\langle\hat{\vartheta}(t_k)|\ \frac{1\partial}{\alpha\partial t_k}\ |\hat{\varphi}(t_k)\rangle = \underset{k}{\Omega}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\ \underset{k+1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left[\exp[\alpha\sum_{i=k}^{n-1} S(i+1,i)]\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\ \frac{1}{\alpha}\lim_{\Delta t_k\to 0}\frac{\Delta}{\Delta t_k}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\ \underset{1}{\Omega}\ldots\underset{k-1}{\Omega}\left[\exp[\alpha\sum_{i=0}^{k-1} S(i+1,i)]\right]\right\} =$$

$$= \underset{k}{\Omega}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\ \underset{k+1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{i=k}^{n-1} S(i+1,i)]\right\}\cdot$$

$$\cdot\lim_{\Delta t_k\to 0}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\ \underset{1}{\Omega}\ldots\underset{k-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{i=0}^{k-1} S(i+1,i)]\ \frac{\Delta S(k^{=},k)}{\Delta t_k}\right\},$$

onde agora $\Delta S(k^{=},k)$ introduzido no cap 7 é dado por

$$\Delta S(k^{=},k) = \left[L - \left(\partial L/\partial\dot{q}\right)\dot{q}\right]_k \Delta t_k \quad ,$$

expressão esta obtida de (5.1) considerando $\delta q_0 = \delta q_n = \delta t_0 = 0$ e $t_0 = t_n$, cujo uso fornece

$$\langle\hat{\vartheta}(t_k)|\frac{1}{\alpha}\ \frac{\partial}{\partial t_k}\ |\hat{\varphi}(t_k)\rangle = \underset{k}{\Omega}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\ \underset{k+1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{i=k}^{n-1} S(i+1,i)]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left(L - \left(\partial L/\partial\dot{q}\right)\dot{q}\right)_k\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\ \underset{1}{\Omega}\ldots\underset{k-1}{\Omega}\exp[\alpha\sum_{i=0}^{k-1} S(i+1,i)]\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\ \underset{1}{\Omega}\ldots\underset{n-1}{\Omega}\left[\exp[\alpha\sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)]\right]\left(L - \left(\partial L/\partial\dot{q}\right)\dot{q}\right)_k \ . \tag{10}$$

Utilizando a sugestão dada por (10) a equação generalizada de Lagrange pode ser escrita numa forma mais conveniente considerando p_k

como VI. Na expressão $-H(q,\dot{q},t) = L - (\partial L/\partial\dot{q})\dot{q}$, ($t = t_k$, $t_0 < t_k < t_n$), que é a função de Hamilton, o uso de $\dot{q} = \dot{q}(q,p,t)$ permite escrever H em termos de q,p,t, a hamiltoniana $-H(q,p,t) = L(q,\dot{q}(q,p,t),t) - p\dot{q}(q,p,t)$. Nesse caso,

$$\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} \left[\partial H(q,p,t)/\partial p\right]_k = \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} \left[(\partial L/\partial\dot{q})(\partial\dot{q}/\partial p) - \dot{q} - p(\partial\dot{q}/\partial p)\right]_k =$$

$$= -\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} \dot{q}_k \ ,$$

onde se usou (4) sendo $W[\gamma] = \partial\dot{q}/\partial p \neq 0$ (satisfeita se o sistema é padrão). Mas, escrevendo $\dot{q}_k = (q_{k+1} - q_k)/\varepsilon$,

$$\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} \dot{q}_k = \frac{1}{\varepsilon}\left[\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} q_{k+1} - \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} q_k\right] =$$

$$= \Delta\left[\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} q_k\right] / \ \varepsilon = \frac{d}{dt} \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} q_k \ ,$$

de modo que

$$\frac{d}{dt} \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} q_k = \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} \left[\partial H(q,p,t)/\partial p\right]_k \ . \tag{11a}$$

Seguindo o mesmo raciocínio,

$$-\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} \left[\partial H(q,p,t)/\partial q\right]_k = \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} \left[\partial L/\partial q \ + \right.$$

$$\left. + (\partial L/\partial\dot{q})(\partial\dot{q}/\partial q) - p(\partial\dot{q}/\partial q)\right]_k = \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} (\partial L/\partial q)_k ,$$

onde novamente usou-se (4) supondo $\partial\dot{q}/\partial q \neq 0$, de modo que usando (9b),

$$\frac{d}{dt} \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} p_k = \underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} (\partial L/\partial q)_k =$$

$$= -\underset{[\gamma]}{\Omega} e^{\alpha S[\gamma]} \left[\partial H(q,p,t)/\partial q\right]_k \ . \tag{11b}$$

Utilizando (11a) como uma equação do movimento e não como conseqüência da definição (4) em conjunto com (11b) tem-se uma nova forma para as equações do movimento onde p é considerado como VI,

sendo para isso necessário exprimí-lo em termos do operador $\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q}$ conforme mostra (5). Portanto, é dentro do sentido dado por (5) que as equações (11a-b) devem ser compreendidas, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\vartheta}(t)|\mathbf{q}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \langle\hat{\vartheta}(t_n)|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}|\hat{\varphi}(t_0)\rangle \quad , \ (t_0 < t < t_n) \ , \tag{12a}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\vartheta}(t)|\mathbf{p}|\hat{\varphi}(t)\rangle = - \langle\hat{\vartheta}(t_n)|\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}|\hat{\varphi}(t_0)\rangle \quad , \ (t_0 < t < t_n) \ , \tag{12b}$$

onde $\partial\mathbf{H}/\partial\mathbf{q}$ e $\partial\mathbf{H}/\partial\mathbf{p}$ devem ser vistos como operadores substituindo q por **q** e p por **p**. É claro que o fato dos operadores **q** e **p** não comutarem é um problema adicional em (12) mas isso já foi discutido. Finalmente, as formas finais nas quais essas expressões devem ser vistas é

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{q}}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}}|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad , \ (t_0 < t < t_n), \tag{13a}$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{p}}|\hat{\varphi}(t)\rangle = - \langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}}|\hat{\varphi}(t)\rangle \ , \ (t_0 < t < t_n), \tag{13b}$$

numa notação coerente com o que foi discutido e $\partial\mathbf{H}/\partial\mathbf{p}$ é o operador que se obtém substituindo p em $\partial H/\partial p$ por **p**, o mesmo para $\partial\mathbf{H}/\partial\mathbf{q}$. Comparando-as com (5.11) vê-se que estas são isomorfas às equações de Hamilton e por isso serão denominadas equações *generalizadas* de Hamilton.

Por ser a solução de um PV a equação de Lagrange na MC pode ser escrita numa forma integrada (a equação de Hamilton-Jacobi). Na MG isso não deve ser diferente uma vez que a equação generalizada de Lagrange é a solução de um PV. Para escrevê-la basta usar um raciocínio semelhante ao usado na MC tomando os devidos cuidados já discutidos. Eliminando $\dot{q}$ em termos de $\partial L/\partial\dot{q}$ pode-se definir o operador **H** como

$$\langle\hat{\vartheta}(t)|\mathbf{H}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \int_{[\gamma]}\Omega\, e^{\alpha S[\gamma]}\left[\left(\partial L/\partial\dot{q}\right)\dot{q} - L\right] \quad , (t_0 < t < t_n), \tag{14}$$

onde $H(q,p,t) = p\dot{q}(q,p,t) - L(q,\dot{q}(q,p,t),t)$, $p = \partial L/\partial\dot{q}$ e **H** é um operador escrito em termos de **p** e **q**, $\mathbf{H} = H(\mathbf{q},\mathbf{p})$, sujeito a todas as

observações feitas ao longo deste capítulo e dos últimos, em particular a ordenação dos operadores e a definição de $\mathbf{p}^n$. Essa operação é análoga a usar $p = \partial S/\partial q$ em $H(q,p,t)$ na MC a partir da qual obtém-se a equação de Hamilton-Jacobi escrevendo $H = -\partial S/\partial t$. Do mesmo modo, usando (10) obtém-se

$$\begin{aligned} \langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}}|\hat{\varphi}(t)\rangle &= \langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{H}}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \\ &= \langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{H(\mathbf{q},\mathbf{p})}|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad , \qquad (t_0 < t < t_n) \end{aligned} \tag{15}$$

onde se usou $\langle\hat{\vartheta}(t)|\overrightarrow{-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftarrow{-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}}|\hat{\varphi}(t)\rangle$, que pode ser facilmente verificada, e que deve ser vista como uma equação entre operadores,

$$\overleftrightarrow{-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}} = \overleftrightarrow{\mathbf{H}} = \overleftrightarrow{H(\mathbf{q},\mathbf{p})} \quad . \tag{16}$$

A princípio esta é a única interpretação que pode ser dada de imediato à equação (16) uma vez que para ser vista como uma equação para $\hat{\varphi}(q,t)$,

$$\underset{q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(q,t)\left(\overleftrightarrow{-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}}\right)\hat{\varphi}(q,t) = \underset{q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(q,t)\overleftrightarrow{H(\mathbf{q},\mathbf{p})}\,\hat{\varphi}(q,t) \quad ,$$

é necessário que $\overleftarrow{-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}} = \overrightarrow{-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}}$, o que é verdadeiro, e $\overleftarrow{H(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \overrightarrow{H(\mathbf{q},\mathbf{p})}$, que, conforme discutido, é uma propriedade que, em um caso geral, depende de Ω, e, mesmo que isso seja satisfeito, é necessário também que a partir de

$$\underset{q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(q,t)\left(-\frac{1\partial}{\alpha\partial t}\,\hat{\varphi}(q,t) - H(\mathbf{q},\mathbf{p})\,\hat{\varphi}(q,t)\right) = 0 \quad ,$$

onde se supõe satisfeitas as hipóteses acima, seja possível concluir que

$$-\frac{1\partial}{\alpha\partial t}\,\hat{\varphi}(q,t) - H(\mathbf{q},\mathbf{p})\,\hat{\varphi}(q,t) = 0 \quad ,$$

o que também depende de Ω uma vez que é a sua escolha que determina o quão arbitrária ou não é $\hat{\vartheta}(q,t)$ pois só é possível concluir que $x = 0$ a partir de $\Omega x = 0$ se $x = x[\gamma;c]$ onde c é arbitrária.

Lembrando que o caso onde isso é possível é aquele para o qual $\Omega = \tilde{\Omega}$, mesmo quando $\Omega \neq \tilde{\Omega}$ há uma relação entre essas funções de modo que escrevendo-a explicitamente tem-se uma equação para $\hat{\varphi}(q,t)$, pelo menos implicitamente. Formalmente pode-se, portanto, escrever essa equação como

$$\overleftrightarrow{-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}}\,|\hat{\varphi}(t)\rangle = \overleftrightarrow{H}\,|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad , \; (t_0 < t < t_n) \; , \tag{17a}$$

$$\langle\hat{\vartheta}(t)|\,\overleftrightarrow{-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}} = \langle\hat{\vartheta}(t)|\,\overleftrightarrow{H} \quad , \; (t_0 < t < t_n) \; , \tag{17b}$$

compreendidas as observações feitas. De qualquer forma, independente de sua interpretação, o isomorfismo sugere denominar a equação (15) ou (16) como equação *generalizada* de Hamilton-Jacobi.

Para dar um exemplo específico de Ω faltam dois assuntos importantes a serem discutidos no próximo capítulo: as transformações canônicas e a variação de uma variável dinâmica em relação ao parâmetro t .

12. TRANSFORMAÇÕES CANÔNICAS.

Antes de encerrar a discussão feita nessa parte acerca da formulação da MG, pretende-se, nesse capítulo, considerar as TC e a variação de uma VD arbitrária em relação ao parâmetro t. Depois do que já foi discutido nessa parte, estas questões não devem apresentar dificuldades, embora ainda exijam uma certa sutileza em suas formulações, em particular as TC.

No cap. 5 as TC na MC foram introduzidas de duas diferentes maneiras. Se há algo a ser notado sobre essa diferença, esse algo são os diferentes raciocínios que conduzem a estas expressões. Embora não tão comum na literatura quanto o primeiro, é justamente o segundo raciocínio, que conduz a (5.15), que permite chegar naturalmente a uma expressão para as TC na MG. É essa sútil diferença que será considerada.

O ponto de partida é novamente a equação (8.1). Considere, porém, ao invés de $S[\gamma]$ para $t_n \leq t \leq t_s$ o funcional equivalente $S[\gamma] - F(q_s,t_s;q_n,t_n)$. Nesse caso (8.1) escreve-se

$$\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_0,t_0) = \underset{n}{\Omega}\, e^{-\alpha F(q_s,t_s;q_n,t_n)}\hat{\Phi}(q_s,t_s;q_n,t_n)\cdot$$
$$\cdot\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) \quad .$$

Agora, tomando o limite $t_s \to t_n$ e usando (8.2),

$$\hat{\Phi}(q_s,t_n;q_0,t_0) = \underset{n}{\Omega}\, e^{-\alpha F(q_s,q_n,t_n)}\hat{1}(q_s,q_n)\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) \quad , \tag{1a}$$

$$\hat{\Phi}(q_s,t_n;q_0,t_0) = \underset{n}{\Omega}\, e^{-\alpha \hat{F}(q_s,q_n,t_n)}\hat{\Phi}(q_n,t_n;q_0,t_0) \quad , \tag{1b}$$

onde definiu-se

$$e^{-\alpha \hat{F}(q_s,q_n,t_n)} \equiv \hat{1}(q_s,q_n)e^{-\alpha F(q_s,q_n,t_n)} \quad . \tag{1c}$$

Introduzindo nessa expressão os valores de t_0 e q_0 e considerando q_s como uma nova VI Q a equação (1b) escreve-se, omitindo o índice n,

$$\hat{\varphi}(Q,t) = \underset{q}{\Omega}\, e^{-\alpha\hat{F}(Q,q,t)}\hat{\varphi}(q,t) \quad , \tag{2}$$

imediatamente verificada como a generalização de (5.15), ou melhor, de (6.25), equivalente a esta, dentro da MG. Note que o uso do símbolo " ^ " em $\hat{F}(Q,q,t)$ é de fundamental importância embora a função F seja a mesma da MC para lembrar que essa é uma expressão generalizada e que $\hat{F}(Q,q,t)$ satisfaz certas propriedades características da MG. Se $Q = q'$ tem-se

$$e^{-\alpha\hat{F}(q',q,t)} = \hat{1}(q',q)e^{-\alpha F(q',q,t)} \quad , \tag{3}$$

o que mostra a necessidade de usar o " ^ " e respeitar a ordem em que são escritos Q e q pois $e^{-\alpha\hat{F}(Q,q,t)}$ deve satisfazer as mesmas propriedades de $\hat{1}(q',q)$. Isso é verificado adiante. Logo, a transformação inversa de (2) é expressa através de

$$\hat{\varphi}(q,t) = \underset{Q}{\Omega}\, e^{-\alpha\hat{F}(q,Q,t)}\hat{\varphi}(Q,t) \quad . \tag{4}$$

As transformações dadas por (2) ou (4) são a generalização do conceito de TC na MG, daí denominadas transformações canônicas generalizadas (TCG). É fácil ver que as propriedades das TC são satisfeitas pelas TCG, em particular a relacionada com a sua própria definicão, ou seja, a invariância das equações do movimento.

Como se sabe o conjunto das TC na MC formam um grupo, o mesmo devendo ocorrer com as TCG. Quanto às TCG, usando $F(Q,q,t) = 0$ a expressão (3) define o elemento neutro, (4) o inverso, e a lei de composição do grupo segue de

$$\hat{\varphi}(Q,t) = \underset{q}{\Omega}\, e^{-\alpha\hat{F}(Q,q,t)}\hat{\varphi}(q,t) \quad ,$$

$$\hat{\varphi}(\zeta,t) = \underset{Q}{\Omega}\, e^{-\alpha\hat{F}(\zeta,Q,t)}\hat{\varphi}(Q,t) \quad ,$$

de modo que $\hat{\varphi}(\zeta,t)$ relaciona-se com $\hat{\varphi}(q,t)$ por

$$\hat{\varphi}(\zeta,t) = \underset{q}{\Omega}\, e^{-\alpha\hat{F}(\zeta,q,t)}\hat{\varphi}(q,t) \quad ,$$

a partir da qual a lei de composição escreve-se

$$e^{-\alpha\hat{F}(\zeta,q,t)} = \underset{Q}{\Omega}\, e^{-\alpha\hat{F}(\zeta,Q,t)}\, e^{-\alpha\hat{F}(Q,q,t)} \quad , \tag{5}$$

facilmente verificável como sendo associativa.

As expressões (2) e (4) mostram que é conveniente definir um operador $\hat{T}(Q,q)$ como

$$\hat{\varphi}(Q,t) = \hat{T}(Q,q)\hat{\varphi}(q,t) \equiv \underset{q}{\Omega}\, e^{-\alpha\hat{F}(Q,q,t)}\hat{\varphi}(q,t) \quad , \tag{6a}$$

$$\hat{\varphi}(q,t) = \hat{T}(q,Q)\hat{\varphi}(Q,t) \equiv \underset{Q}{\Omega}\, e^{-\alpha\hat{F}(q,Q,t)}\hat{\varphi}(Q,t) \quad , \tag{6b}$$

com as propriedades

$$\hat{T}(q,Q)\hat{T}(Q,q) = \hat{1} \quad , \tag{7a}$$

$$\hat{T}(\zeta,Q)\hat{T}(Q,q) = \hat{T}(\zeta,q) \quad , \tag{7b}$$

que seguem de (5), onde $\hat{1}$ é definido como

$$\hat{1}\hat{\varphi}(q,t) = \underset{q}{\Omega}\,\hat{1}(q,q')\hat{\varphi}(q',t) \quad , \tag{8}$$

definindo também o operador $\hat{T}^{-1}(Q,q)$ como

$$\hat{T}^{-1}(Q,q) = \hat{T}(q,Q) \quad . \tag{9}$$

Outras propriedades interessantes seguem da definição de $\hat{\varphi}^*(q,t)$. Em termos de $\hat{\varphi}^*(q,t)$ o mesmo raciocínio que conduz a (2) e (4) fornece

$$\hat{\varphi}^*(q',t) = \underset{q}{\Omega}\, e^{\alpha F(q',q,t)}\hat{1}(q,q')\hat{\varphi}^*(q,t) =$$
$$= \underset{q}{\Omega}\,\hat{1}^*(q',q)e^{\alpha F(q',q,t)}\hat{\varphi}^*(q,t) \quad ,$$

onde se usou (8.7), e que sugere definir

$$e^{\alpha\hat{F}^*(q',q,t)} \equiv \hat{1}^*(q',q)e^{\alpha F(q',q,t)} \quad . \tag{10}$$

Considerando q' uma nova VI Q tem-se uma TCG relacionada com (2),

$$\hat{\varphi}^*(Q,t) = \underset{q}{\Omega}\, e^{\alpha\hat{F}^*(Q,q,t)}\hat{\varphi}^*(q,t) \quad , \tag{11}$$

assim como para a TCG inversa ,

$$\hat{\varphi}^*(q,t) = \underset{Q}{\Omega}\, e^{\alpha\hat{F}^*(q,Q,t)}\hat{\varphi}^*(Q,t) \quad . \tag{12}$$

Como as mesmas propriedades devem ser satisfeitas quando q' é uma nova VI Q então

$$e^{-\alpha\hat{F}(q,Q,t)} = e^{\alpha\hat{F}^*(Q,q,t)} \quad . \tag{13}$$

Tudo isso fica bem resumido definindo o operador $\hat{T}^*(Q,q)$,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^*(Q,t) &= \hat{T}^*(Q,q)\hat{\varphi}^*(q,t) = \underset{q}{\Omega}\, e^{\alpha\hat{F}^*(Q,q,t)}\hat{\varphi}^*(q,t) = \\ &= \underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(q,t)e^{-\alpha\hat{F}(q,Q,t)} = \hat{\varphi}^*(q,t)\hat{T}(q,Q) \ , \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^*(q,t) &= \hat{T}^*(q,Q)\hat{\varphi}^*(Q,t) = \underset{q}{\Omega}\, e^{\alpha\hat{F}^*(q,Q,t)}\hat{\varphi}^*(Q,t) = \\ &= \underset{q}{\Omega}\, \hat{\varphi}^*(Q,t)e^{-\alpha\hat{F}(Q,q,t)} = \hat{\varphi}^*(Q,t)\hat{T}(Q,q) \ , \end{aligned} \tag{15}$$

que satisfaz as mesmas propriedades do operador $\hat{T}(q,Q)$ mais a que segue dessas e de (9) e (13),

$$\hat{T}^*(Q,q) = \hat{T}^{-1}(Q,q) = \hat{T}(q,Q) \quad . \tag{16}$$

Verificadas essas várias propriedades das TCG é preciso considerá-las em relação às VD. Seja a VD $\hat{q}$ cujo valor numérico <q> é

dado a partir de uma operação sobre a VI q. Seja uma outra VI Q dada por Q = Q(q). Essa expressão permite escrever a operação definida sobre q em termos de Q de modo que o valor numérico <Q> dessa mesma VD pode ser igualmente calculado a partir dessa operação sobre a VI Q. Denotando nesse caso a VD por $\hat{Q}$, embora seja a *mesma* VD $\hat{q}$, tem-se nesse caso,

$$\hat{q} = \frac{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(q,t)\mathbf{q}\hat{\varphi}(q,t)}{\underset{q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} = \langle q\rangle = \langle Q\rangle = \frac{\underset{Q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(Q,t)\mathbf{Q}\hat{\varphi}(Q,t)}{\underset{Q}{\Omega}\, \hat{\vartheta}^*(Q,t)\hat{\varphi}(Q,t)} = \hat{Q} \quad ,$$

onde **q** = q e **Q** = Q. Usando as definições das TCG constata-se imediatamente a igualdade dos denominadores, o que exige a igualdade dos numeradores para a verificação dessa expressão. Para que isso ocorra é necessário que o operador **Q** transforme-se no operador **q** e vice-versa através de uma TCG. De fato,

$$\underset{Q}{\Omega}\hat{\vartheta}^*(Q,t)\mathbf{Q}\hat{\varphi}(Q,t) =$$
$$= \underset{Q}{\Omega}\, \underset{q}{\Omega}, \underset{q}{\Omega},, \hat{\vartheta}^*(q',t)e^{\alpha\hat{F}^*(q',Q,t)}\mathbf{Q}e^{-\alpha\hat{F}(Q,q'',t)}\hat{\varphi}(q'',t),$$

de modo que se deve ter

$$\underset{Q}{\Omega}\, e^{\alpha\hat{F}^*(q',Q,t)}\mathbf{Q}\; e^{-\alpha\hat{F}(Q,q'',t)} = \mathbf{q}'\hat{1}(q',q'') \quad , \tag{17}$$

cujo lado direito sugere reescrevê-la como

$$\underset{Q}{\Omega}, \underset{Q'}{\Omega},, e^{\alpha\hat{F}^*(q',Q',t)}\mathbf{Q}'\hat{1}(Q',Q'')\; e^{-\alpha\hat{F}(Q'',q'',t)} = \mathbf{q}'\hat{1}(q',q''). \tag{18}$$

O que essas expressões mostram é que o operador **q** ou **Q** deve ser visto como um operador que assume essas formas em termos das diferentes VI. Elas exibem a transformação desse operador frente a essa TCG. Do mesmo modo, para a VD $\hat{p}$ cujo valor numérico <p> pode ser obtido através de uma operação sobre a VI q, sendo representada pelo operador **p**, ou sobre a VI Q, nesse caso escrevendo $\hat{P}$ para essa VD que é a *mesma* $\hat{p}$, <P> para o seu valor numérico e **P** para o operador, a lei

de transformação é

$$\underset{Q'}{\Omega}\underset{Q''}{\Omega}\, e^{\alpha\hat{F}^*(q',Q',t)}\mathbf{P}'\hat{1}(Q',Q'')\; e^{-\alpha\hat{F}(Q'',q'',t)} = \mathbf{p}'\hat{1}(q',q''), \tag{19}$$

onde $\mathbf{P}' = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial Q''}$, $\mathbf{p}' = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q''}$. A generalização de (18-19) para uma VD arbitrária é imediata. Porém, é mais proveitoso escrevê-la introduzindo uma notação para as TCG. Por exemplo, a expressão da qual segue-se (17), ou seja, a igualdade de <q> e <Q>, pode ser escrita como

$$\langle\hat{\vartheta}(t)|\mathbf{Q}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \langle\hat{\vartheta}(t)|\mathbf{q}|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad .$$

Para que as TCG possam ser escritas nessa notação define-se

$$\hat{\varphi}(q,t) \equiv \langle q|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad , \tag{20a}$$

$$\hat{\varphi}^*(q,t) \equiv \langle\hat{\varphi}(t)|q\rangle \quad , \tag{20b}$$

mais a propriedade

$$\underset{q}{\Omega}\; |q\rangle\langle q| = 1 \quad , \tag{21}$$

de modo que se define[1]

$$e^{-\alpha\hat{F}(Q'',q'',t)} \equiv \langle Q''|q''\rangle \quad , \tag{22a}$$

$$e^{\alpha\hat{F}^*(q',Q',t)} \equiv \langle q'|Q'\rangle \quad . \tag{22b}$$

Note que essa notação é bem mais conveniente que (6-7) e (14-15), pois

$$\langle\hat{\vartheta}(t)|\mathbf{Q}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \underset{Q'}{\Omega}\underset{Q''}{\Omega}\langle\hat{\vartheta}(t)|Q'\rangle\langle Q'|\mathbf{Q}|Q''\rangle\langle Q''|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad ,$$

---

1 Subentende-se no lado direito dessas expressões a presença de t. Quando não for necessário explicitá-lo isso não será feito.

onde tem-se

$$\langle Q'|\mathbf{Q}|Q''\rangle = Q'\langle Q'|Q''\rangle = Q'\hat{1}(Q',Q'') \quad , \tag{23}$$

e que ainda pode ser escrita como

$$\langle\hat{\vartheta}(t)|\mathbf{q}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \underset{q}{\Omega}\underset{q}{\Omega}\underset{Q}{\Omega}\underset{Q}{\Omega}\langle\hat{\vartheta}(t)|Q'\rangle\langle Q'|q'\rangle\langle q'|\mathbf{Q}|q''\rangle\cdot$$

$$\cdot\langle q''|Q''\rangle\langle Q''|\hat{\varphi}(t)\rangle = \underset{q}{\Omega}\underset{q}{\Omega}\langle\hat{\vartheta}(t)|q'\rangle\langle q'|\mathbf{q}|q''\rangle\langle q''|\hat{\varphi}(t)\rangle =$$

$$= \underset{Q}{\Omega}\underset{Q}{\Omega}\langle\hat{\vartheta}(t)|Q'\rangle\langle Q'|\mathbf{Q}|Q''\rangle\langle Q''|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad ,$$

que é justamente (23),

$$\langle Q'|\mathbf{q}|Q''\rangle = \underset{q}{\Omega}\underset{q}{\Omega}\langle Q'|q'\rangle\langle q'|\mathbf{Q}|q''\rangle\langle q''|Q''\rangle \quad ,$$

mostrando que não é necessário usar uma notação diferente para esse operador, isto é, **q** e **Q**. De fato, é melhor, às vezes, usar a mesma notação. Também segundo essa notação,

$$\langle q'|q\rangle = \hat{1}(q',q)e^{-\alpha F(q',q,t)} \quad ,$$

ou simplesmente

$$\langle q'|q\rangle = \hat{1}(q',q) \quad .$$

Mais ainda, (2) e (11) escrevem-se

$$\langle Q|\hat{\varphi}(t)\rangle = \underset{q}{\Omega}\langle Q|q\rangle\langle q|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad , \tag{24a}$$

$$\langle\hat{\varphi}(t)|Q\rangle = \underset{Q}{\Omega}\langle\hat{\varphi}(t)|q\rangle\langle q|Q\rangle \quad . \tag{24b}$$

A generalização de (17-18) nessa notação faz-se de maneira natural. Seja $\hat{f}$ uma VD arbitrária representada por um operador $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}$, ou seja,

$$\hat{f} = \frac{\langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{f}|\hat{\varphi}(t)\rangle}{\langle\hat{\vartheta}(t)|\hat{\varphi}(t)\rangle} = \langle f\rangle \ .$$

O valor numérico <f> pode ser obtido através de uma operação sobre a VI q ou Q. No primeiro caso,

$$\langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{f}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \underset{q}{\Omega}\,\underset{q}{\Omega}'\langle\hat{\vartheta}(t)|q\rangle\langle q|\overleftrightarrow{f}|q'\rangle\langle q'|\hat{\varphi}(t)\rangle \ , \tag{25a}$$

enquanto no segundo,

$$\langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{f}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \underset{Q}{\Omega}\,\underset{Q}{\Omega}'\langle\hat{\vartheta}(t)|Q\rangle\langle Q|\overleftrightarrow{f}|Q'\rangle\langle Q'|\hat{\varphi}(t)\rangle \ , \tag{25b}$$

com a relação entre o $\overleftrightarrow{f}$ escrito em termos das VI q e Q dada por

$$\langle Q|\overleftrightarrow{f}|Q'\rangle = \underset{q}{\Omega}\,\underset{q}{\Omega}'\langle Q|q\rangle\langle q|\overleftrightarrow{f}|q'\rangle\langle q'|Q'\rangle \ , \tag{26}$$

onde a expressão para $\overleftrightarrow{f}$ é

$$\langle q|\overleftrightarrow{f}|q'\rangle = \hat{1}(q,q')\sum A_{mn}\overleftrightarrow{\mathbf{q}^n\mathbf{p}^m}, \quad \mathbf{q} = q \ , \ \mathbf{p} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q} \ , \tag{27a}$$

$$\langle Q|\overleftrightarrow{f}|Q'\rangle = \hat{1}(Q,Q')\sum A_{mn}\overleftrightarrow{\mathbf{Q}^n\mathbf{P}^m}, \quad \mathbf{Q} = Q \ , \ \mathbf{P} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial Q} \ . \tag{27b}$$

A grande vantagem dessa notação para escrever as TCG é que através dela a invariância das equações do movimento perante as TCG é naturalmente exibida. De fato, ela permite escrevê-las numa forma que não contém explicitamente as VI, manifestando imediatamente a invariância destas perante as TCG. Assim como acontece com as TC, as TCG são completamente especificadas pela função F(Q,q,t), ou seja, $e^{-\alpha\hat{F}} = \langle Q|q\rangle$. Portanto, por apresentar-se como uma generalização da função geratriz F da TC na MC, denomina-se $\hat{F}(Q,q,t)$ função geratriz generalizada ou gerador generalizado da TCG na MG, especificando-a por completo. Também estas podem ser de vários tipos dependendo da nova VI escolhida.

Outra questão importante que precisa ser vista é sobre como se

transforma o hamiltoniano perante uma TCG. Primeiro, as equações generalizadas de Hamilton (11.13) podem ser escritas como

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{q}}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}}}|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad ,$$

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{p}}|\hat{\varphi}(t)\rangle = -\langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{q}}}|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad .$$

Nestas expressões os operadores devem ser pensados numa forma que não contém explicitamente as VI. Esta explicitação deve-se fazer através do uso de (21). Por exemplo, em termos das VI q e Q deve-se compreender $\langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{p}}|\hat{\varphi}(t)\rangle$ de acordo com (27). Abusando um pouco da notação face ao que foi dito, para o caso específico do hamiltoniano pode-se escrevê-lo como $\overleftrightarrow{H(q, \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial q})}$ e $\overleftrightarrow{K(Q, \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial Q})}$, ou simplesmente $\overleftrightarrow{\mathbf{H}}$ e $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}$. Agora, seja uma TCG especificada pelo gerador generalizado $\hat{F}(Q,q,t)$. Quer-se saber como se relacionam os hamiltonianos $\overleftrightarrow{\mathbf{H}}$ e $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}$. Usando (24), com $\langle\,|\overleftrightarrow{-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}}|\,\rangle = \langle\,|\,\rangle\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)$, para q ou Q, tem-se

$$\langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{K}}|\hat{\varphi}(t)\rangle = \underset{Q}{\Omega}\,\underset{q}{\Omega}\,\underset{q}{\Omega},\langle\hat{\vartheta}(t)|q\rangle\langle q|Q\rangle\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\right)\langle Q|q'\rangle\langle q'|\hat{\varphi}(t)\rangle =$$

$$= \underset{Q}{\Omega}\,\underset{q}{\Omega}\,\underset{q}{\Omega},\langle\hat{\vartheta}(t)|q\rangle\langle q|Q\rangle\left[\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle Q|q'\rangle\right)\langle q'|\hat{\varphi}(t)\rangle + \right.$$

$$\left. + \langle Q|q'\rangle\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle q'|\hat{\varphi}(t)\rangle\right)\right] =$$

$$= \underset{Q}{\Omega}\,\underset{q}{\Omega},\langle\hat{\vartheta}(t)|Q\rangle\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle Q|q'\rangle\right)\langle q'|\hat{\varphi}(t)\rangle + \langle\hat{\vartheta}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{H}}|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad ,$$

que se constitui em uma generalização de (5.14c). Esta, entretanto, deve ser vista em termos de operadores, ou seja,

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}} = \overleftrightarrow{\mathbf{H}} + \underset{Q}{\Omega}\,\underset{q}{\Omega}\,|Q\rangle\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle Q|q\rangle\right)\langle q| \quad , \tag{28}$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}}\langle Q|q\rangle = \overleftrightarrow{\mathbf{H}}\langle Q|q\rangle + \left(-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle Q|q\rangle\right) \quad , \tag{29}$$

onde $\langle Q|q\rangle = e^{-\alpha\hat{F}(Q,q,t)}$. Agora, se em termos da nova VI Q o

hamiltoniano é nulo, então as equações generalizadas do movimento são diretamente integradas, o que se constitui justamente na teoria da equação de Hamilton-Jacobi na MC introduzida via TC. Na MG isso é feito supondo que a TCG leva a $\overleftrightarrow{K} = 0$, de modo que

$$\overleftrightarrow{H}\langle Q|q\rangle = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle Q|q\rangle \quad ,$$

ou ainda,

$$\overleftrightarrow{H}\langle q|Q\rangle = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle q|Q\rangle \quad , \tag{30}$$

que é a equação generalizada de Hamilton-Jacobi. Olhando para (11.17) e notando que ela pode ser escrita como

$$\overleftrightarrow{H}\langle q|\hat{\varphi}(t)\rangle = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle q|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad ,$$

vê-se que a interpretação dada no cap. 5 estende-se por completo à MG. Nesse caso $\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0)$, ou em termos dos valores iniciais $\langle q|\hat{\varphi}(t)\rangle$, pode ser vista como o gerador generalizado de uma TCG cujo contínuo desdobramento representa a dinâmica, no caso convolutiva, do movimento do sistema. Essa interpretação, de fato, é o cerne do raciocínio que conduz às expressões (5.15) para as TC na MC e (2) para as TCG na MG. De fato,

$$\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0) = e^{-\alpha\hat{F}(q,q_0,t)} = \langle q|q_0\rangle \quad . \tag{31a}$$

Note que aqui a presença de t e t_0 na notação torna mais clara a situação,

$$\hat{\Phi}(q,t;q_0,t_0) = \langle q,t|q_0,t_0\rangle \quad . \tag{31b}$$

Esta reflete-se em (30) em uma equação para $\langle q|q_0\rangle$, ou seja, $\langle q|\hat{\varphi}(t)\rangle$, que é (11.17). Como esta, (30) deve ser vista sobre um aspecto formal.

A interpretação que a teoria das TCG fornece à evolução da dinâmica é de uma riqueza que merece destaque. Note, porém, que a

possibilidade de interpretar a evolução de uma dinâmica convolutiva em relação a t como um contínuo desdobramento de uma TCG deve-se ao fato dessa evolução ser um processo conjuntivo, conforme a discussão do cap. 10. Pode-se, portanto, dividir as TCG em duas classes: esta, relacionada com um processo conjuntivo, daí denominada TCG conjuntiva, e as que se dão na transição entre dinâmicas convolutivas, que por ser este um processo convolutivo são denominadas TCG convolutivas. Que ambas são TCG é imediato, uma vez que elas mantêm invariante a forma da equação do movimento. A consideração das TCG convolutivas com maior destaque seria extremamente interessante mas foge dos objetivos deste trabalho. Sobre esta interpretação cabe uma última observação. Note que o desdobramento das TC pode realizar-se tanto sobre $|\hat{\varphi}(t)>$ quanto sobre os operadores, de modo que se tem dois diferentes quadros [pictures] sobre os quais pode ser vista a evolução[2] em relação a t da dinâmica convolutiva, por ser, obviamente, um processo conjuntivo.

Finalmente, o último ponto que se pretende discutir é a variação de uma VD arbitrária em relação a t, escrevendo uma expressão para esta. Seja $\hat{f}$ uma VD arbitrária,

$$\hat{f}_t = \frac{<\hat{\varphi}(t)|\overleftrightarrow{f}|\hat{\varphi}(t)>}{<\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)>} = <f>_t \quad .$$

O uso desta notação para escrever $\hat{f}_t$ é extremamente conveniente uma vez que a VI q não aparece explicitamente. De acordo com a discussão feita no cap. 6 a variação total de $\hat{f}_t$ em relação a t é um efeito da variação de $\hat{\varphi}(q,t)$ em relação a t e não em relação à VI q. Desse modo,

---

2 Esta nota só não foi colocada antes pois esperou-se pela plena colocação das idéias. Ao longo de quase toda a literatura essa situação é descrita como uma evolução em relação a t. Porém, a palavra evolução tem um sentido de irreversibilidade e tanto na MC quanto na MG essa referida " evolução " é um processo conjuntivo, logo, reversível. A palavra correta que deve ser usada é progresso uma vez que ela carrega um sentido de reversibilidade, ou seja, o regresso. A palavra evolução deveria ser usada exclusivamente no contexto da transição entre dinâmicas convolutivas que por ser irreversível e onde realmente apresenta-se uma evolução.

de $\delta\hat{\varphi} = \delta_q\hat{\varphi} + \delta_t\hat{\varphi}$ apenas $\delta_t\hat{\varphi}$ deve ser considerada. Por isso o uso dessa expressão para $\hat{f}_t$ é conveniente, por não fazer referência alguma a qual VI é utilizada. Para expressar $\delta_t\hat{\varphi}$ pode ser usada a expressão (11.17a). Logo,

$$\delta_t\hat{\varphi} = \delta t\frac{\partial\hat{\varphi}(q,t)}{\partial t} = \delta t\frac{\partial\langle q|\hat{\varphi}(t)\rangle}{\partial t} = \delta t\langle q|\frac{\partial}{\partial t}|\hat{\varphi}(t)\rangle =$$

$$= \delta t(-\alpha)\overleftrightarrow{\mathbf{H}}\langle q|\hat{\varphi}(t)\rangle = -\alpha\delta t\langle q|\overleftrightarrow{\mathbf{H}}|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad ,$$

$$\delta_t|\hat{\varphi}(t)\rangle = \delta t\frac{\partial|\hat{\varphi}(t)\rangle}{\partial t} = -\alpha\delta t\overleftrightarrow{\mathbf{H}}|\hat{\varphi}(t)\rangle \quad , \tag{32a}$$

enquanto o cálculo de $\delta_t\hat{\varphi}^*(q,t) = \delta_t\langle\hat{\varphi}(t)|q\rangle$ implica em

$$\delta_t\langle\hat{\varphi}(t)| = \delta t\frac{\partial\langle\hat{\varphi}(t)|}{\partial t} = \alpha\delta t\langle\hat{\varphi}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{H}} \quad , \tag{32b}$$

onde a diferença no sinal deve-se a $\hat{\varphi}^*(q,t)$ e segue de (11.17b) pois $\langle\hat{\varphi}(t)|-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}\langle\hat{\varphi}(t)|$, o que é facilmente verificado. Uma vez que a quantidade $\langle\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)\rangle$ no denominador é constante, tem-se

$$\delta_t\hat{f}_t = \delta_t\langle f\rangle_t = \frac{d\langle f\rangle}{dt}_t\delta t = \delta t\Big\{\alpha\langle\hat{\varphi}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{H}}\times\overleftrightarrow{\mathbf{f}}|\hat{\varphi}(t)\rangle -$$

$$- \alpha\langle\hat{\varphi}(t)|\overleftrightarrow{\mathbf{f}}\times\overleftrightarrow{\mathbf{H}}|\hat{\varphi}(t)\rangle + \langle\hat{\varphi}(t)|\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{f}}}{\partial t}|\hat{\varphi}(t)\rangle\Big\}\Big/\langle\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)\rangle,$$

$$\frac{d\langle f\rangle}{dt}_t = \frac{-\alpha\langle\hat{\varphi}(t)|[\overleftrightarrow{\mathbf{f}},\overleftrightarrow{\mathbf{H}}]|\hat{\varphi}(t)\rangle + \langle\hat{\varphi}(t)|\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{f}}}{\partial t}|\hat{\varphi}(t)\rangle}{\langle\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)\rangle} , \tag{33}$$

que é a expressão procurada. Explicitando-a para a VI q,

$$\frac{d\langle f\rangle}{dt}_t = \frac{-\alpha\int_q\hat{\varphi}^*(q,t)[\overleftrightarrow{\mathbf{f}},\overleftrightarrow{\mathbf{H}}]\hat{\varphi}(q,t) + \int_q\hat{\varphi}^*(q,t)\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{f}}}{\partial t}\hat{\varphi}(q,t)}{\int_q\hat{\varphi}^*(q,t)\hat{\varphi}(q,t)} , \tag{34}$$

imediatamente verificada como a generalização da expressão (6.26) na MC. Por isso, define-se

$$\widehat{\{\hat{f},\hat{H}\}} \equiv \frac{-\alpha\langle\hat{\varphi}(t)|[\overleftrightarrow{f},\overleftrightarrow{H}]|\hat{\varphi}(t)\rangle}{\langle\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)\rangle} = -\alpha\langle[\overleftrightarrow{f},\overleftrightarrow{H}]\rangle \quad , \tag{35}$$

$$\widehat{\frac{\partial\overleftrightarrow{f}}{\partial t}} \equiv \frac{\langle\hat{\varphi}(t)|\frac{\partial\overleftrightarrow{f}}{\partial t}|\hat{\varphi}(t)\rangle}{\langle\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)\rangle} = \left\langle\frac{\partial\overleftrightarrow{f}}{\partial t}\right\rangle \quad , \tag{36}$$

onde (35) é o colchete generalizado de Poisson cujo valor numérico é $-\alpha\langle[\overleftrightarrow{f},\overleftrightarrow{H}]\rangle$, de modo que

$$\frac{d\hat{f}}{dt}t = \frac{d\langle f\rangle}{dt}t = \widehat{\{\hat{f},\hat{H}\}} + \widehat{\frac{\partial f}{\partial t}} = \hat{\dot{f}}_t = \langle\dot{f}\rangle_t \quad . \tag{37}$$

O significado desta expressão é o seguinte: através dela define-se a VD $\hat{\dot{f}}$ cujo valor numérico $\langle\dot{f}\rangle_t$ no instante t é igual à variação em relação a t do valor numérico $\langle f\rangle_t$ no instante t da VD $\hat{f}_t$. Obviamente, não é a VD mas sim o seu valor numérico que apresenta uma variação em relação a t. Ao escrever $\frac{d\hat{f}}{dt}t$ deve-se, portanto, compreender que o seu significado é $\frac{d\hat{f}}{dt}t = \hat{\dot{f}}_t$, onde $\hat{\dot{f}}_t$, esta sim, é uma VD, e cujo valor numérico é tal que $\langle\dot{f}\rangle_t = \frac{d\langle f\rangle}{dt}t$.

Isso tudo mostra que também na MG dadas duas VD

$$\hat{f}_1 = \frac{\langle\hat{\varphi}(t)|\overleftrightarrow{f}_1|\hat{\varphi}(t)\rangle}{\langle\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)\rangle}, \quad \hat{f}_2 = \frac{\langle\hat{\varphi}(t)|\overleftrightarrow{f}_2|\hat{\varphi}(t)\rangle}{\langle\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)\rangle},$$

pode-se definir uma terceira VD $\hat{g}$ através do colchete generalizado de Poisson,

$$\hat{g} = \widehat{\{\hat{f}_1,\hat{f}_2\}} \quad , \tag{38}$$

$$\widehat{\{\hat{f}_1,\hat{f}_2\}} = \frac{\langle\hat{\varphi}(t)|-\alpha[\overleftrightarrow{f}_1,\overleftrightarrow{f}_2]|\hat{\varphi}(t)\rangle}{\langle\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)\rangle} \quad , \tag{39}$$

$$\hat{g} = \frac{\langle\hat{\varphi}(t)|\overleftrightarrow{g}|\hat{\varphi}(t)\rangle}{\langle\hat{\varphi}(t)|\hat{\varphi}(t)\rangle} \quad , \quad \overleftrightarrow{g} = -\alpha[\overleftrightarrow{f}_1, \overleftrightarrow{f}_2] \quad , \tag{40}$$

ou seja, dados dois operadores $\overleftrightarrow{f}_1$ e $\overleftrightarrow{f}_2$ que representam as VD $\hat{f}_1$ e $\hat{f}_2$ pode-se associar um outro operador $\overleftrightarrow{g}$ através de

$$\overleftrightarrow{g} = -\alpha[\overleftrightarrow{f}_1, \overleftrightarrow{f}_2]$$

ao qual está associada a VD $\hat{g}$. Particularmente, se $\overleftrightarrow{f}_2$ é o operador hamiltoniano $\overleftrightarrow{H}$ então a VD $\hat{g}$ é a VD $\hat{\dot{f}}$ cujo valor numérico $\langle\dot{f}\rangle_t$ no instante t é igual à variação em relação a t, $\frac{d\langle f\rangle}{dt}_t$, do valor numérico $\langle f\rangle_t$ no instante t da VD $\hat{f}_t$ (a menos da dependência explícita em t).

Depois de tanta discussão em torno de uma MG não-trivial já é mais que hora de considerar um exemplo específico desta. Frente ao objetivo de fazer uma formulação geral da MG o conteúdo desta parte parece satisfatório. Sem dúvida, dentro da infinidade de questões envolvidas sempre existirão algumas ignoradas e outras que mesmo quando consideradas o são de modo superficial. Entretanto, como será visto no exemplo adiante, além de satisfatório, o conteúdo desta parte também é mais do que suficiente. Os resultados que serão obtidos justificarão todo o trabalho até agora realizado.

PARTE IV

• EXEMPLO DE UMA TEORIA NÃO-CLÁSSICA DA MECÂNICA •

Depois de tantas discussões parece, enfim, que os objetivos deste trabalho serão finalmente alcançados. Porém, estes já o foram. O objetivo era mostrar que existem outras teorias da Mecânica que não a MC que satisfazem as leis da Mecânica e daí formulá-las. Isso foi feito nas partes I e III , respectivamente. Na parte II mostrou-se que a MC é um caso particular trivial desta classe de teorias denominada MG. Essa classe geral de teorias foi discutida e convenientemente interpretada, e por si só representa um grande ganho uma vez que fornece uma mais profunda visão das leis da Mecânica.

Falta, porém, dar um exemplo específico de uma teoria não-clássica da Mecânica. Essa MG deve basear-se em uma escolha não-trivial de Ω, o que será feito no cap. 13. No cap. 14 discute-se as particularidades dessa MG e através da sua explicitação mostra-se que ela é formalmente idêntica à Mecânica Quântica. No cap. 15 a relação entre elas é discutida.

13. DEFINIÇÃO DE DINÂMICA QUÂNTICA.

Restaria apenas o interesse acadêmico se, dentro da classe de teorias da Mecânica discutida até agora, não existisse pelo menos uma além da MC que encontrasse um respaldo experimental, ou, em palavras perigosas, que " correspondesse à realidade ".

Dentro da visão deste trabalho não cabe questionar se a MC é ou não uma teoria correta. Ela é uma teoria correta para descrever uma dinâmica conjuntiva. Cabe questionar, sim, se a dinâmica do movimento apresenta aspectos convolutivos dos quais os conjuntivos devem ser vistos como limites. Nesse domínio a dinâmica do movimento deve ser descrita por uma MG não-trivial.

Seja essa MG definida por uma operação $\Omega = \Omega_F$, cujo índice lembra " folding ". Esse Ω_F específico descreve uma dinâmica convolutiva em um certo domínio. Suponha, o que não é necessário, mas é de grande valor dentro do exemplo a ser considerado, que o aspecto convolutivo da dinâmica apresente um limite extremo de " máxima " convolução, além do limite extremo oposto onde ele se apresenta como conjuntivo, e que, nesse domínio de " máxima " convolução, a dinâmica é descrita por uma MG definida por Ω_F^∞. Entre esse domínio de " máxima " convolução e o conjuntivo existe obviamente uma infinidade de outros domínios nos quais a dinâmica é descrita por outras MG definidas por Ω_F^j. No caso conjuntivo, $j = 0$, $\Omega_F^0 = \Omega_H$. Como foi feita a hipótese que em um certo limite específico que depende de Ω tem-se $\Omega \to \Omega_H = 1$ então todas essas operações Ω_F^j podem ser obtidas a partir de Ω_F^∞. Como estas devem relacionar-se de maneira contínua, é correto escrever $\Omega_F^\gamma = \Omega_F^\infty(v)$, onde v é um parâmetro contínuo cuja definição depende da definição de Ω_F^∞, de modo que $\lim_{v \to 0} \Omega_F^\infty(v) = 1$, mas é mais fácil usar Ω_F^j e depois considerar um limite.

Resta, portanto, definir uma operação Ω_F^∞ que satisfaça todas as hipóteses feitas até agora e esperar que as experiências lancem sobre ela um juízo positivo. Porém, ao invés de simplesmente defini-la, pode-se procurar argumentos que justifiquem sua definição. Sendo assim, escrevendo a operação Ω_H como $\Omega_H = \underset{\gamma}{\text{ext}}$, note que Ω_H envolve na verdade *todos* os caminhos γ's. O seu significado é o seguinte: dado

$S[\gamma]$ calcula-se o valor deste funcional para todos os caminhos γ 's entre os extremos fixos e toma-se dentre estes o caminho $\bar{\gamma}$ para o qual o valor de $S[\bar{\gamma}]$ difere do valor de $S[\gamma]$ para um caminho γ na vizinhança de $\bar{\gamma}$ por uma quantidade de segunda ordem em relação à distância entre γ e $\bar{\gamma}$. Embora a natureza deste valor estacionário não esteja sendo considerada, suponha, por exemplo, para facilitar, que ele seja um máximo[1]. Se esse valor de $S[\bar{\gamma}]$ é muito maior que a soma dos demais $S[\gamma]$ a operação $\underset{\gamma}{\text{ext}}$ pode ser substituída com um erro pequeno pela soma sobre todos os caminhos γ 's de $S[\gamma]$, onde a parcela $S[\bar{\gamma}]$ é a que contribui efetivamente.

Deixando um pouco de lado o problema da convergência desta soma, assim como outros de origem matemática, note que esse erro aumenta à medida em que as outras parcelas dessa soma tornam-se comparáveis a $S[\gamma]$. A existência de um limite definido convenientemente, de modo que apenas a parcela $S[\bar{\gamma}]$ seja significativa neste limite, contorna esse problema, aproximando o resultado desta operação cada vez mais de $S[\bar{\gamma}]$ à medida em que ele vai se realizando. Note, também, que não é necessário usar o funcional $S[\gamma]$. Como a função exponencial é monotônica é até mais conveniente pelo que foi discutido usar $\Phi[\gamma] = e^{\alpha S[\gamma]}$.

Ocorre que é justamente em termos desse funcional $\Phi[\gamma]$ que a operação Ω utilizada na parte III está definida. Portanto, dentro da aproximação utilizada, a operação $\underset{\gamma}{\text{ext}}$ pode ser substituída pela operação α^{-1} vezes o logaritmo da soma sobre todos os caminhos γ's de $e^{\alpha S[\gamma]}$. O referido limite onde o resultado dessa operação aproxima-se do clássico é facilmente verificado como sendo $\alpha \to \infty$ [2]. De fato, numa notação pouco rigorosa,

---

[1] Tanto faz considerar um máximo ou um mínimo. Lembre-se da observação feita no cap. 5.

[2] A importância desse limite já foi antecipada no cap.6.

$$\underset{\gamma}{\text{ext}}\ S[\gamma] = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \ln \sum_{\gamma} e^{\alpha S[\gamma]} = \lim_{\alpha\to\infty} \ln\left(e^{\alpha S[\bar{\gamma}]} + \sum_{\gamma\neq\bar{\gamma}} e^{\alpha S[\gamma]}\right)^{\alpha^{-1}} =$$

$$= \lim_{\alpha\to\infty} \ln\left[e^{\alpha S[\bar{\gamma}]}\left(1 + \sum_{\gamma\neq\bar{\gamma}} e^{\alpha(S[\gamma]-S[\bar{\gamma}])}\right)\right]^{\alpha^{-1}} =$$

$$= S[\bar{\gamma}] + \lim_{\alpha\to\infty} \ln\left(1 + \sum_{\gamma\neq\bar{\gamma}} e^{\alpha(S[\gamma]-S[\bar{\gamma}])}\right)^{\alpha^{-1}} = S[\bar{\gamma}] \ ,$$

pois por hipótese $S[\bar{\gamma}] > S[\gamma]$. Agora, analisando a expressão $\ln \sum_{\gamma} \exp$ vê-se que ela satisfaz todas as hipóteses feitas sobre Ω ou sobre Ω^{+} igual a $\sum_{\gamma}$. Pode-se, portanto, escolher essa operação como a operação procurada, mais ainda, como Ω_F^{∞}, pois ela representa uma soma sobre *todos* os caminhos. Justifica-se, assim, a escolha que será feita, agora colocando-a com um pouco mais de rigor.

Sendo assim, deseja-se definir a operação $\underset{[\gamma]}{\Omega}$ como[3]

$$\underset{[\gamma]}{\Omega} \equiv \ln \sum_{[\gamma]} \exp \ ,$$

de modo que

$$\hat{A}(n,0) = \ln \sum_{[\gamma]} \exp A[\gamma] \ .$$

Primeiro, a operação de soma pode ser definida sobre os caminhos dados em termos de quaisquer VI e dependendo destas cada caminho pode ser considerado com uma contribuição maior ou não. Escrevendo $A = A(q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, q_n)$ essa soma deve ser pensada como sendo realizada sobre os q_i. Agora, em termos de coordenadas retangulares, por serem os seus coeficientes métricos constantes, todos os valores de x_i contribuem igualmente, refletindo a hipótese da validade do princípio da isotropia e homogeneidade do espaço físico. Logo, em termos de x_i,

---

3 Na formulação de Bernardes (1989 - 1990) das teorias holotrópicas da Termodinâmica uma escolha análoga corresponde à versão exemplar por esse autor denominada Termodinâmica Laplaciana.

$$\hat{A}(n,0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \sum_1 \sum_2 \cdots \sum_{n-1} \exp\left(\sum_{i=0}^{n-1} A(i+1,i) \right) , \tag{1}$$

onde a soma $\sum_i$ estende-se sobre *todos* os valores de x_i *permitidos* pelas condições de contorno do problema. Por condições de contorno deve-se entender não só os contornos propriamente ditos, mas também as condições impostas pelos princípios físicos que se supõe satisfeitos. Nesse caso, se não existem vínculos além dos extremos fixos e supondo válidos os princípios físicos contidos no princípio da relatividade de Galilei tem-se $-\infty < x_i < \infty$. Esse conjunto de valores permitidos de x_i será denotado X_i.

Note que essa operação de fato pertence à classe considerada, ou seja, das operações não-lineares que podem ser linearizadas por uma transformação dada por (4.1a) onde, conforme já foi antecipado, $\theta(x) = e^x$. A operação, desse modo linearizada, certamente satisfaz todas as hipóteses feitas sobre ela, o que é facilmente verificável. Reescrevendo (1) em termos de $\hat{\Phi}$ e usando S,

$$\hat{\Phi}(n,0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sum_1 \cdots \sum_{n-1} \exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i,i+1) \right] , \tag{2}$$

que é uma forma conveniente.

Existem duas considerações que precisam ser feitas para que a operação esteja definida. A primeira é que x_i é uma VI. Logo, se os vínculos impostos ao sistema permitem que x_i possa assumir mais de um valor pertencente a um intervalo na reta real $X_i = [x_i^-, x_i^+]$, inclusive $-\infty < x_i < \infty$, então a soma deve ser substituída pela integral,

$$\sum_i \longrightarrow \int \frac{dx_i}{A_i} , \tag{3}$$

onde os extremos de integração são os limites deste intervalo e onde A_i é um fator de normalização que assegura a dimensão correta da integral e que está por ser determinado. Espera-se, porém, que todos os A_i sejam iguais, não dependendo de x_i uma vez que as coordenadas utilizadas são retangulares. Mesmo assim, se manterá essa notação.

A segunda é sobre a existência do limite $\varepsilon \to 0$. De fato, na passagem da soma para a integral em (3) é necessário introduzir $\Delta x_i / A_i$ para assegurar a convergência da soma para $\Delta x_i \to 0$. Obtém-se assim (N - 1) integrais em $x_1, \ldots, x_{n-1}$, onde $N = (t_n - t_0)/\varepsilon$. Nada garante, porém, que para $N \to \infty$ exista um limite. A hipótese que se faz é que existe um fator de normalização, nesse caso dependente de $\Delta t_i = \varepsilon$, que assegura a convergência nesse limite. Não é do conhecimento uma regra geral que determine qual é esse fator de normalização, mas em um grande número de casos, particularmente os que serão vistos, esse fator é justamente A_i. Embora seja a princípio conveniente definir esse fator como adimensional, isso não é importante pois as expressões para as VD envolvem essa quantidade tanto no numerador quanto no denominador, podendo daí ser definida nas mesmas dimensões de A_i, inverso do comprimento, e denotada por A_0.

É interessante notar que, a princípio, não é necessário que este limite esteja bem definido. De fato, as expressões para as VD envolvem essa quantidade tanto no numerador quanto no denominador, e o que precisa estar bem definida é esta razão. Além disso, lembrando o que foi discutido no cap. 4 sobre o que se entende por uma teoria física, a questão da existência é vazia pois a quantidade que está sendo considerada é não-observável. Entretanto, para não fugir do hábito tradicional e para não levantar outras questões, ela será considerada de modo que o limite exista.

Desse modo, as expressões (1-2) escrevem-se

$$\hat{A}(n,0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{1}{A_0} \int_{X_1} \frac{dx_1}{A_1} \ldots \int_{X_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{A_{n-1}} \exp\left[\sum_{i=0}^{n-1} A(i+1,i)\right] \equiv$$

$$\equiv \ln \int_{x_0 < x < x_n} \mathcal{D}[x] \exp A[\gamma] \,, \tag{4}$$

$$\hat{\Phi}(n,0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln \frac{1}{A_0} \int_{X_1} \frac{dx_1}{A_1} \ldots \int_{X_{n-1}} \frac{dx_{n-1}}{A_{n-1}} \exp\left[\alpha \sum_{i=0}^{n-1} S(i+1,i)\right] \equiv$$

$$\equiv \ln \int_{x_0<x<x_n} \mathcal{D}[x] \exp(\alpha S[\gamma]) \quad , \tag{5}$$

$$\int_{x_0<x<x_n} \mathcal{D}[x] \equiv \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{A_0} \int_{X_i} \frac{dx_i}{A_i} \quad . \tag{6}$$

Essas expressões, particularmente (5), são conhecidas na literatura como integrais de Feynman ou integrais de caminho ou trajetória e formam a base da formulação de Feynman da teoria quântica (TQ)[4]. A sua completa identificação será vista adiante. Por isso, nada mais justo do que denominar a operação

$$\Omega_F^{\infty} = \ln \int_{x_0<x<x_n} \mathcal{D}[x] \exp = \Omega_F \tag{7}$$

de operação de Feynman, denotada por Ω_F, e

$$\Omega_F^{L\infty} = \int_{x_0<x<x_n} \mathcal{D}[x] = \Omega_F^L \tag{8}$$

de operação linearizada de Feynman[5]. Também a dinâmica convolutiva descrita pela MG definida por Ω_F^L, ou simplesmente Ω_F daqui em diante,

---

[4] Ver Feynman (1948) e Feynman & Hibbs (1965).

[5] Obviamente, essa denominação procura fazer justiça dentro do contexto em que está sendo colocada, a Mecânica. Dentro da Termodinâmica a história é diferente e essa denominação sem sentido. Por isso, a operação análoga a esta dentro das teorias holotrópicas da Termodinâmica é denominada por Bernardes (1990) " transformada de Laplace ", por motivos óbvios.

e denotada por MGF, pode ser denominada dinâmica convolutiva quântica ou simplesmente dinâmica quântica. Note que foi escrito MGF e não Mecânica Quântica (MQ) pois futuramente será exigido um uso distinto de MGF, MQ e TQ. Reconhece-se agora que a formulação da MG não é de interesse apenas acadêmico. A expressão (5) é o ponto de partida utilizado por Feynman para descrever uma dinâmica quântica, cuja existência está plenamente confirmada pelas experiências. Contudo, antes de interpretá-la à luz da MG, é interessante ver dois exemplos específicos encontrados na literatura do uso de (5) que mostrarão não estar ainda completamente definida essa expressão. Para lembrar que se trata de uma MG específica, será usada daqui em diante a seguinte notação:

$$\hat{\Phi}(x_n,t_n;x_0,t_0) \equiv K(x_n,t_n;x_0,t_0) \quad , \tag{9}$$

$$\hat{\varphi}(x_n,t_n) \equiv \Psi(x_n,t_n) \quad , \tag{10}$$

ou seja,

$$\Psi(x_n,t_n) \equiv K(x_n,t_n;x_0,t_0)\Big|_{(t_0,x_0)=(t_0^{\#},x_0^{\#})} \quad . \tag{11}$$

Seja uma partícula livre, $L = m\dot{x}^2/2$. Usando (5),

$$K(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{A_0} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_1}{A_1}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx_{n-1}}{A_{n-1}} \exp\left[\frac{\alpha\varepsilon m}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{\varepsilon}\right)^2\right] ,$$

que pode ser calculada com a ajuda de[6]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-a(x_1-x)^2} e^{-b(x_2-x)^2} = \left(\frac{\pi}{a+b}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{ab}{a+b}(x_1-x_2)^2\right] .$$

A integração em x_1 , por exemplo, fornece

---

[6] Feynman & Hibbs (1965).

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \exp\left[\frac{\alpha m}{2\varepsilon}(x_1-x_0)^2-\frac{\alpha m}{2\varepsilon}(x_2-x_1)^2\right] = \left(-\frac{2\pi\varepsilon}{\alpha m 2}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{\alpha m}{2(2\varepsilon)}(x_2-x_0)^2\right]$$

da qual pode-se realizar a integração em x_2, resultando em

$$\left(\frac{-2\pi\varepsilon}{\alpha m 3/2}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{\alpha m}{2(3\varepsilon)}(x_3-x_0)^2\right] ,$$

e assim por diante até x_{n-1}, cujo resultado é

$$\left(\frac{-2\pi\varepsilon}{\alpha m(n/n-1)}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{\alpha m}{2(n\varepsilon)}(x_n-x_0)^2\right] .$$

Finalmente, agrupando todos os termos envolvendo a raiz quadrada em um só obtém-se

$$K(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{A_0}\frac{1}{A_1}\cdots\frac{1}{A_{n-1}}\left[\left(\frac{-2\pi\varepsilon}{\alpha m}\right)^{n-1}\frac{1}{n}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{\alpha m}{2(n\varepsilon)}(x_n-x_0)^2\right].$$

A definição dos A_i para esse exemplo é imediata, assim como de A_0 responsável pela convergência para $\varepsilon \to 0$,

$$A_i = A = \left(\frac{-2\pi\varepsilon}{\alpha m}\right)^{1/2} , \tag{12}$$

de modo que a expressão para K(n,0) escreve-se, lembrando que $n\varepsilon = t_n - t_0$, como

$$K(n,0) = \left[\frac{-\alpha m}{2\pi(t_n - t_0)}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{\alpha m}{2(t_n - t_0)}(x_n - x_0)^2\right] . \tag{13}$$

Note que se o fator $A_0 = A$ não fosse introduzido o resultado da operação seria nulo pois $\varepsilon \to 0$ corresponde a $n \to \infty$.

Olhando para (13) e sendo $t_n > t_0$ conclui-se que α deve ser tal que $\alpha < 0$. Deve-se notar, entretanto, que no cálculo de K(n,0) considerou-se $\dot{x}_i' = (x_{i+1}-x_i)/(t_{i+1}-t_i)$, ou seja, supôs-se que $\dot{x} = v > 0$. Mas se $\dot{x} = v < 0$ então $\dot{x}_i' = (x_i-x_{i+1})/(t_{i+1}-t_i) = -(x_{i+1}-x_i)/(t_{i+1}-t_i)$. Nesse caso, usando a mesma notação anterior, o

cálculo de K(n,0) fornece ao invés de (13),

$$K(n,0) = \left[\frac{\alpha m}{2\pi(t_n - t_0)}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{-\alpha m}{2(t_n - t_0)}(x_n - x_0)^2\right] , \qquad (14)$$

onde A é definido como

$$A = \left(\frac{2\pi\varepsilon}{\alpha m}\right)^{1/2} , \qquad (15)$$

da qual conclui-se que a constante α deve ser tal que $\alpha > 0$. Para que seja feita a conciliação destas conclusões resta supor que α seja um número imaginário *puro*. É conveniente, portanto, escrever

$$\alpha \equiv \frac{2\pi i}{h} \equiv \frac{i}{\hbar} , \qquad (16)$$

onde $\hbar$ é uma constante com a dimensão escolhida para $S[\gamma]$. De acordo com essa definição a operação de conjugação, que consiste em fazer $\alpha \to -\alpha$, passa a ser vista como uma operação de conjugação complexa, $i \to -i$.

A situação, envolvendo a constante α nesse MG, representada pelas expressões (13-14) e (16) é completamente diferente da mesma na MC onde a constante α não apresenta nenhum significado físico. Nessa MG os seus resultados e conseqüências estão diretamente relacionados com α pois a existência de K(n,0) é determinada pela do fator de normalização A que depende explicitamente de α. De nada adianta escrever $K(n,0) = e^{\alpha\hat{S}(n,0)}$ com a esperança que a constante α cancele-se, pois ela se encontra presente em $[\alpha m/2\pi(t_n - t_0)]^{1/2}$. Além disso, há ainda (16). A natureza imaginária pura de α pode ser pensada como parte da própria definição de Ω, mas isso não muda nada, uma vez que a dependência direta agora escreve-se sobre $\hbar$, assim como se fosse considerado $i/\hbar$ na definição de Ω. De qualquer forma, com as mudanças adequadas pode-se definir a operação de Feynman como Ω_F dado por (7) ou como

$$\Omega'_F = -i \ln \int_{x_0<x<x_n} \mathcal{D}[x] \exp i \quad , \tag{17a}$$

$$\Omega''_F = \frac{\hbar}{i} \ln \int_{x_0<x<x_n} \mathcal{D}[x] \exp \frac{i}{\hbar} \quad , \tag{17b}$$

o que remete o problema para o discutido ao final do cap. 4 acerca da constante α. Note que a referida identificação completa entre a expressão (5) e as integrais de Feynman é agora possível uma vez utilizada a definição de α como $\alpha = i/\hbar$.

Um outro exemplo importante consiste no oscilador harmônico. Para $L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2$, $k = m\omega^2$, de (5),

$$K(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{A_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{A_1} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_{n-1}}{A_{n-1}} \exp\left[\frac{\alpha\varepsilon m}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{x_{l+1}-x_l}{\varepsilon}\right)^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha m\omega^2\varepsilon}{2} \sum_{l=0}^{n-1} \left(\frac{x_{l+1}+x_l}{2}\right)^2\right] \quad ,$$

que pode ser escrita como

$$K(n,0) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{A_0}\frac{1}{A_1}\ldots\frac{1}{A_{n-1}} I_n \quad ,$$

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} \exp\left[\mathcal{K}_0(x_0^2+x_n^2) - 2\mathcal{K}_1(x_0x_1+x_{n-1}x_n) - \right.$$
$$\left. - \sum_{l,j=1}^{n-1} a_{lj}x_lx_j\right] \quad ,$$

$$\mathcal{K}_0 = \frac{\alpha m}{2\varepsilon}(1 - \omega^2\varepsilon^2/4) \quad , \quad \mathcal{K}_1 = \frac{\alpha m}{2\varepsilon}(1 + \omega^2\varepsilon^2/4) \quad ,$$

$$a_{lj} = \begin{pmatrix} -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 & 0 & 0 \ldots \\ +\mathcal{K}_1 & -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 & 0 \ldots \\ 0 & +\mathcal{K}_1 & -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} .$$

A integral I_n pode ser calculada com a ajuda de[7]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_{n-1} F\left(\sum_{j=1}^{n-1} b_j x_j\right) \exp\left[-\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} x_i x_j\right] =$$

$$= \frac{\pi^{(n-2)/2}}{[c^2 \det A]^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-u^2/c^2} du \quad ,$$

onde $c^2 = \sum_{i,j} a^{-1}_{ij} b_i b_j$, A é a matriz $\{a_{ij}\}$ e a^{-1}_{ij} é o elemento i,j da matriz inversa de A. No caso considerado tem-se $F(u) = e^u$ e $b_1 = -2\mathcal{K}_1 x_0$, $b_2 = \ldots = b_{n-2} = 0$ e $b_{n-1} = -2\mathcal{K}_1 x_n$, de modo que

$$I_n = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{[c^2 \det A]^{1/2}} e^{\mathcal{K}_0 (x_0^2 + x_n^2)} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-u^2/c^2} du =$$

$$= \frac{\pi^{(n-1)/2}}{[\det A]^{1/2}} \exp\left[c^2/4 + \mathcal{K}_0 (x_0^2 + x_n^2)\right] \quad .$$

Resta calcular det A. Definindo $\kappa = \mathcal{K}_1/2\mathcal{K}_0$ tem-se

$$\det A = (-2\mathcal{K}_0)^{n-1} \det A' \quad ,$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa & 0 & 0 & \ldots \\ -\kappa & 1 & -\kappa & 0 & \ldots \\ 0 & -\kappa & 1 & -\kappa & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \quad .$$

Como A' é uma matriz (n-1)x(n-1), denota-se

$$\det A' = D_{n-1}(\kappa) \quad ,$$

de modo que a partir do desenvolvimento de $D_{n-1}(\kappa)$ verifica-se a relação de recorrência

$$D_m(\kappa) = D_{m-1}(\kappa) - \kappa^2 D_{m-2}(\kappa) \quad , \quad D_0(\kappa) = D_1(\kappa) = 1 \ .$$

---

[7] Gelfand & Yaglom (1960) .

A análise dessa relação de recorrência pode ser feita escrevendo-a em termos de ε de modo que em $\varepsilon \to 0$ obtém-se uma equação diferencial para $D_m(\kappa)$ para $m \to \infty$. A outra possibilidade é escrevê-la como

$$\begin{pmatrix} D_m(\kappa) \\ D_{m-1}(\kappa) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{m-1}(\kappa) \\ D_{m-2}(\kappa) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\kappa^2 \\ 1 \quad 0 \end{pmatrix}^{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= V^{m-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = YW^{m-1}Y^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

onde $W = Y^{-1}VY$ é a matriz V diagonalizada. Os autovalores de V são

$$\lambda_+ = \frac{1+(1-4\kappa^2)^{1/2}}{2} , \quad \lambda_- = \frac{1-(1-4\kappa^2)^{1/2}}{2} ,$$

e as matrizes Y e Y^{-1},

$$Y = \begin{pmatrix} \lambda_+ & \lambda_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad Y^{-1} = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_- \\ -1 & \lambda_+ \end{pmatrix} ,$$

de modo que

$$YW^{m-1}Y^{-1} = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} \lambda_+ & \lambda_- \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_+^{m-1} & 0 \\ 0 & \lambda_-^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_- \\ -1 & \lambda_+ \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \begin{pmatrix} (\lambda_+^m - \lambda_-^m) & (\lambda_+^{m+1} - \lambda_-^{m+1} - (\lambda_+^m - \lambda_-^m)) \\ (\lambda_+^{m-1} - \lambda_-^{m-1}) & (\lambda_+^m - \lambda_-^m - (\lambda_+^{m-1} - \lambda_-^{m-1})) \end{pmatrix} ,$$

que resulta em

$$D_{n-1}(\kappa) = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+ - \lambda_-} ; \quad \lambda_+ = \frac{1+i(4\kappa^2-1)^{1/2}}{2} , \quad \lambda_- = \frac{1-i(4\kappa^2-1)^{1/2}}{2} .$$

Usando a definição de κ,

$$4\kappa^2 - 1 = 4[(1+\omega^2\varepsilon^2/4)/(1-\omega^2\varepsilon^2/4)]^2/4-1 \simeq$$

$$\simeq (1+\omega^2\varepsilon^2/2)^2 - 1 \simeq \omega^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4) \quad ,$$

que permite escrever para $n \to \infty$, $n = (t_n - t_0)/\varepsilon = \Delta t/\varepsilon$,

$$\lambda_+ \simeq (1+i\omega\varepsilon)/2 \quad , \quad \lambda_- \simeq (1-i\omega\varepsilon)/2 \quad .$$

Como nesse limite cos $\omega\varepsilon \simeq 1$, sin $\omega\varepsilon \simeq \omega\varepsilon$,

$$\lambda_+ \simeq \frac{1}{2}e^{+i\omega\varepsilon} \quad , \quad \lambda_- \simeq \frac{1}{2}e^{-i\omega\varepsilon} \quad ,$$

de modo que para $D_{n-1}(\kappa)$,

$$D_{n-1}(\kappa) \simeq \frac{1}{2^n}\,\frac{e^{i\omega n\varepsilon} - e^{-i\omega n\varepsilon}}{e^{i\omega\varepsilon} - e^{-i\omega\varepsilon}} = \frac{n}{2^{n-1}}\,\frac{\sin\,\omega\Delta t}{\omega\Delta t} \quad .$$

Obtida a expressão para det A falta ainda calcular c^2. Usando a sua definição mais os valores dos b_i's obtém-se

$$c^2 = (-2\mathcal{K}_1)^2(a^{-1}_{11}x_0^2 + a^{-1}_{1,n-1}x_0x_n + a^{-1}_{n-1,1}x_nx_0 + a^{-1}_{n-1,n-1}x_n^2).$$

Agora, como é sabido,

$$a^{-1}_{ij} = \frac{1}{\det A}\,(\mathrm{adj}\ A)_{ij} = \frac{1}{\det A}\,|A_{ji}| \quad ,$$

onde adj A é a matriz adjunta de A, $|A_{ji}|$ é o cofator de a_{ji} no det A que é $(-1)^{j+i}$ vezes o determinante da matriz obtida retirando a linha j e a coluna i . Logo,

$$a^{-1}_{ij} = |A_{ji}|/(-2\mathcal{K}_0)^{n-1}D_{n-1}(\kappa) \quad ,$$

o que implica em

$$|A_{11}| = \det\begin{pmatrix} -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 & 0 & 0 \dots \\ +\mathcal{K}_1 & -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 & 0 \dots \\ 0 & +\mathcal{K}_1 & -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = (-2\mathcal{K}_0)^{n-2} D_{n-2}(\kappa),$$

$$|A_{1,n-1}| = (-1)^n \det\begin{pmatrix} +\mathcal{K}_1 & 0 & 0 & 0 \dots \\ -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 & 0 & 0 \dots \\ +\mathcal{K}_1 & -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 & 0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = (-1)^n \mathcal{K}_1^{n-2},$$

$$|A_{n-1,1}| = (-1)^n \mathcal{K}_1^{n-2} ,$$

$$|A_{n-1,n-1}| = \det\begin{pmatrix} -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 & 0 & 0 \dots \\ +\mathcal{K}_1 & -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 & 0 \dots \\ 0 & +\mathcal{K}_1 & -2\mathcal{K}_0 & +\mathcal{K}_1 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = (-2\mathcal{K}_0)^{n-2} D_{n-2}(\kappa)$$

de modo que c^2 escreve-se

$$c^2 = \mathcal{K}_1[-\kappa\ (x_0^2+x_n^2)D_{n-2}(\kappa)/D_{n-1}(\kappa) - 2\kappa^{n-1}x_0x_n/D_{n-1}(\kappa)] .$$

Usando a expressão obtida para $D_m(\kappa)$,

$$\begin{aligned} &\mathcal{K}_1\kappa\ D_{n-2}(\kappa)/D_{n-1}(\kappa) \simeq \\ &\simeq \frac{\alpha m}{2\varepsilon}\ (1+3\omega^2\varepsilon^2/4)\ [1-i\omega\varepsilon(e^{i\omega n\varepsilon}+e^{-i\omega n\varepsilon})/(e^{i\omega n\varepsilon}-e^{-i\omega n\varepsilon})] \simeq \\ &\simeq \frac{\alpha m}{2\varepsilon}\ [1 - \omega\varepsilon\ \cot\omega\Delta t] \quad , \end{aligned}$$

$$\mathcal{K}_1\kappa^{n-1}/D_{n-1}(\kappa) = \frac{\alpha m\omega}{2}\ \frac{1}{\sin\omega\Delta t} \quad ,$$

chegando ao resultado final para I_n ,

$$I_n \simeq \left(\frac{\pi 2\varepsilon}{-\alpha m}\right)^{(n-1)/2} \frac{1}{n^{1/2}} \left(\frac{\omega\Delta t}{\sin\omega\Delta t}\right)^{1/2} \cdot$$

$$\cdot \exp\left[\frac{\alpha m}{2}\left((x_0^2+x_n^2)\omega\cot\omega\Delta t - \omega 2x_0x_n/\sin\omega\Delta t\right)\right].$$

Para que exista o limite $\varepsilon \to 0$ deve-se definir $A_0 = A_1 = A$,

$$A \equiv \left(\frac{2\pi\varepsilon}{-\alpha m}\right)^{1/2} ,$$

que é justamente (12), de modo que usando (16),

$$K(n,0) = \left[\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega\Delta t}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin \omega\Delta t}\left(-2x_0x_n + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (x_0^2+x_n^2) \cos \omega\Delta t\right)\right] . \tag{18}$$

Esses dois exemplos ilustram bem a técnica do cálculo das integrais de Feynman. Contudo, deixando os resultados em si um pouco de lado, os fundamentos de uma teoria das integrais de Feynman é um assunto delicado. De fato, essa situação envolve uma medida $\mathcal{D}[x]$ complexa em um espaço de funções contínuas e um integrando que é uma função oscilatória. Muitas vezes esse é um assunto que foge do interesse físico mas é extremamente interessante do ponto de vista matemático. Mesmo para o físico, porém, a sua conexão com a medida de Wiener que surge no estudo do movimento browniano estimula a sua consideração. Para isso o trabalho de Gelfand & Yaglom (1960) citado oferece uma boa introdução ao assunto. Não se pretende, obviamente, discutir tais questões; sugere-se, portanto, essa referência. Pretende-se, sim, discutir na próxima seção a estrutura geral dessa MGF, assunto este trivial face aos resultados já obtidos, mas que reservará algumas surpresas, sobretudo devido à escolha feita da operação $\Omega = \Omega_F$.

14. EXPLICITAÇÃO E PARTICULARIDADES DA MECÂNICA GENERALIZADA.

Neste capítulo pretende-se discutir o formalismo desta MGF. Este, assim como a sua interpretação, reservada ao próximo capítulo, é um assunto quase inteiramente esgotado na parte anterior. Entretanto, a particularidade da escolha $\Omega = \Omega_F$ requer algumas considerações.

Por definição Ω_F consiste na soma sobre todos os valores permitidos da VI. Se esta VI é x então uma vez conhecida $\Psi(x,t)$ para $t > t_0$ as VD $\hat{x}$ e $\hat{p}$ da MGF que descreve essa dinâmica quântica são dadas por

$$\hat{x} = \frac{\int \frac{dx}{A}\, \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)}{\int \frac{dx}{A}\, \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)} = \frac{\int dx\, \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)}{\int dx\, \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)} = \langle x \rangle \quad , \tag{1}$$

$$\hat{p} = \frac{\int \frac{dx}{A}\, \Psi^*(x,t)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)}{\int \frac{dx}{A}\, \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)} = \frac{\int dx\, \Psi^*(x,t)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)}{\int dx\, \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)} = \langle p \rangle \quad , \tag{2}$$

onde $\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ devido a (13.16) e onde supôs-se que A não depende de x. Adiante será visto que isso é verdadeiro se q = x. A integração em x obviamente se faz no conjunto X. Também devido a (13.16) a função $\Psi(x,t)$ é uma função complexa e $\Psi^*(x,t)$ é obtida tomando o complexo conjugado de $\Psi(x,t)$. Para uma VD arbitrária $\hat{f}$ foi visto como escrever uma expressão para esta, bastando usar o operador $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}$. Porém, a definição de Ω_F reserva uma interessante surpresa. Primeiro, é preciso lembrar que o denominador destas expressões satisfaz (8.11). Colocando de outro modo, a definição de Ω_F impõe uma condição sobre as funções $\Psi(x,t)$,

$$\int_X dx\, \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = N^2 \ ,$$

onde N^2 é uma constante finita e não-nula para que as VD estejam definidas. Quando o intervalo X consiste em toda a reta real tem-se

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|\Psi(x,t)|^2 = N^2 < \infty ,$$

onde $|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$. Esta condição implica que $\Psi(x,t)$ deve pertencer ao conjunto das funções de quadrado integrável, conhecida na literatura matemática como o espaço $L_2(X,x)$ ou simplesmente L_2, reservado para o caso $X = \mathbb{R}$ [1]. Logo, $\Psi(x,t)$ deve satisfazer a condição necessária

$$\Psi(x,t) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0 \tag{3}$$

para que haja a convergência da integral. Agora, se as VD $\hat{x}$ e $\hat{p}$ devem ter valores bem definidos, a mesma condição necessária deve também ser satisfeita pelas funções $x|\Psi(x,t)|^2$ e $\Psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)$. Evidentemente, o mesmo raciocínio cabe às VD $\widehat{x^n}$ e $\widehat{p^n}$, ou seja, $\Psi(x,t)$ deve satisfazer as condições necessárias

$$x^n\Psi(x,t) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0 , \tag{4a}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\Psi(x,t) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0 . \tag{4b}$$

De posse destas condições uma interessante propriedade pode ser verificada. De fato, fazendo uma integração por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\Psi^*(x,t)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t) = \frac{\hbar}{i}\,\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi^*(x,t)\right)\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi(x,t)\right)^*\Psi(x,t),$$

ou ainda, em um caso geral,

---

[1] Sobre isso e algumas outras questões matemáticas que se seguem ver as referências já citadas, Riesz & Sz-Nagy (1965) ou Kolmogorov & Fomin (1978).

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^*(x,t) \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Psi(x,t)\right]^* \Psi(x,t) \ . \tag{5}$$

Para que essa propriedade seja de alguma utilidade ela deve verificar-se também em um caso geral, onde X consiste não em toda a reta real mas em um segmento $[x^-,x^+]$ desta. Assumindo

$$\Psi(x,t)\big|_{x^+} = \Psi(x,t)\big|_{x^-} = 0 \ , \tag{6a}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\Psi(x,t)\big|_{x^-} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\Psi(x,t)\big|_{x^+} = 0 \ , \tag{6b}$$

é possível escrever em um caso geral que

$$\int_X dx \Psi^*(x,t) \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Psi(x,t) = \int_X dx \left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \Psi(x,t)\right]^* \Psi(x,t) \ . \tag{7}$$

Mais ainda, vê-se também que

$$\int_X dx \Psi^*(x,t) x^n \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \Psi(x,t) = \int_X dx \left[\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^m x^n \Psi(x,t)\right]^* \Psi(x,t) \ . \tag{8}$$

As expressões (7-8) mostram bem a particularidade que a MGF apresenta. Na nova notação elas escrevem-se

$$\langle\Psi(t)|\overrightarrow{\mathbf{p}^n}|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(t)|\overleftarrow{\mathbf{p}^n}|\Psi(t)\rangle \ , \tag{9a}$$

$$\langle\Psi(t)|\overrightarrow{\mathbf{x}^n\mathbf{p}^m}|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(t)|\overleftarrow{\mathbf{p}^m\mathbf{x}^n}|\Psi(t)\rangle \ . \tag{9b}$$

Verifica-se também que estes estendem-se ao caso em que $\chi^*(x,t)$,

$$\chi(x,t) \equiv \hat{\vartheta}(x,t) \ , \tag{10}$$

é usado no lugar de $\Psi^*(x,t)$,

$$\langle\chi(t)|\overrightarrow{p^n}|\Psi(t)\rangle = \langle\chi(t)|\overleftarrow{p^n}|\Psi(t)\rangle \quad , \tag{11a}$$

$$\langle\chi(t)|\overrightarrow{x^n p^m}|\Psi(t)\rangle = \langle\chi(t)|\overleftarrow{p^m x^n}|\Psi(t)\rangle \quad . \tag{11b}$$

Sendo assim, os operadores $\overleftrightarrow{p^n}$ e $\overleftrightarrow{x^n p^m}$ podem ser escritos como

$$\overleftrightarrow{p^n} = \overrightarrow{p^n} = \overleftarrow{p^n} \quad , \tag{12a}$$

$$\overleftrightarrow{x^n p^m} = (\overrightarrow{p^m x^n} + \overrightarrow{x^n p^m})/2 = (\overleftarrow{x^n p^m} + \overleftarrow{p^m x^n})/2 \ , \tag{12b}$$

de modo que as VD $\widehat{q^n}$ e $\widehat{p^n}$ na MGF são

$$\widehat{x^n} = \frac{\langle\Psi(t)|x^n|\Psi(t)\rangle}{\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle} = \langle x^n\rangle \quad , \tag{13}$$

$$\widehat{p^n} = \frac{\langle\Psi(t)|p^n|\Psi(t)\rangle}{\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle} = \langle p^n\rangle \quad , \tag{14}$$

o mesmo usando $\chi^*(x,t)$, e onde os operadores x^n e p^n podem ser pensados como agindo ou à direita ou à esquerda uma vez que os resultados são iguais. Isso também vale para uma VD arbitrária $\hat{f}$,

$$\hat{f} = \frac{\langle\Psi(t)|f|\Psi(t)\rangle}{\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle} = \langle f\rangle \quad , \tag{15}$$

onde agora f é dado por

$$f = \sum A_{mn}\left(\frac{x^n p^m + p^m x^n}{2}\right) \quad . \tag{16}$$

Nessa MG não é preciso usar os operadores com flechas. Para um operador arbitrário pode-se utilizar a ordenação simétrica (16). Além disso, em função da propriedade geral destes operadores, expressão (6.20), dentro da MGF tem-se

$$f^{+} = f.$$

Esta expressão limita-se à MGF. Em um caso geral ela só é válida com as flechas.

A extrema particularidade da MGF pode ser vista notando que a operação Ω_F consiste justamente na operação $\tilde{\Omega}$ definida no cap 9 $\tilde{\Omega}\hat{\varphi}^{*}(p^{n}\hat{\varphi}) = \tilde{\Omega}(p^{n}\hat{\varphi})^{*}\hat{\varphi}$. A interpretação e conseqüência disso são muito interessantes, inclusive com algumas já antecipadas no cap. 9. Antes de passar a esta questão é conveniente introduzir alguns elementos baseados nas condições impostas sobre $\Psi(x,t)$, elementos estes matemáticos que fornecem uma linguagem apropriada à MGF.

Como é sabido, o espaço $L_2(X,x)$ constitui-se em um exemplo de um espaço de Hilbert. Os conceitos envolvidos na teoria do espaço de Hilbert podem, portanto, serem usados na MGF. Porém, existe um importante teorema que diz que dois espaços de Hilbert quaisquer são isomorfos. Daí, o espaço $L_2(X,x)$ deve ser visto como uma realização de um espaço de Hilbert abstrato. Isso implica em olhar para $\Psi(x,t)$ não como um elemento de $L_2(X,x)$ mas sim como um elemento de um espaço de Hilbert abstrato $\mathcal{H}$. De fato, essa visão é muito mais conveniente uma vez que se *elimina* a referência explícita às VI, o que se mostrou, no cap. 12, ser adequado em relação aos operadores e que se mostra agora em relação à função sobre a qual eles agem. É natural, portanto, usar uma linguagem onde os operadores agem sobre elementos de um espaço de Hilbert abstrato, dos quais os operadores apresentados e a função $\Psi(x,t)$ são realizações destes no sentido em que $L_2(X,x)$ é uma realização de $\mathcal{H}$.

Mais ainda, o uso da nova notação encaixa-se perfeitamente nessa interpretação. Como $\Psi(x,t)$ é um elemento de $L_2(X,x)$ e segundo (12.20a) $\Psi(x,t) = \langle x|\Psi(t)\rangle$ então $|\Psi(t)\rangle$ pode ser visto como um elemento de $\mathcal{H}$. Agora, a questão é saber se é possível definir esse espaço de Hilbert, afinal apenas concluiu-se que $\Psi(x,t)$ deve pertencer a $L_2(X,x)$ e não que os elementos de $L_2(X,x)$ devam ser tais funções. De fato, isto é possível, e chegar a esta conclusão não é difícil. Basta lembrar o que foi discutido no cap. 10.

Seja uma dinâmica quântica descrita por $\Psi(x,t)$ para $t > t_0$.

Concluiu-se que uma medição da VI x em um instante $t_s > t_0$ fornecendo o valor $x^{\#}$ define uma transição entre, no caso, dinâmicas quânticas descritas por $\Psi(x,t)$ para $\chi(x,t)$, onde

$$\chi(x,t) \equiv K(x,t;x_s,t_s)\Big|_{(t_s,x_s)=(t_s^{\#},x_s^{\#})} .$$

Concluiu-se também que isso só era possível se

$$\int dx\chi^*(x,t)\Psi(x,t) \neq 0 \quad ,$$

definindo um conjunto de funções $\mathcal{E}^0(\Omega_F)$ que descrevem dinâmicas quânticas para as quais a transição pode ocorrer, assim como um conjunto $\mathcal{X}_s(\Omega_F)$ de valores possíveis de x em $t = t_s$.

A relação existente entre o conjunto de valores possíveis $\mathcal{X}$ e o conjunto de valores permitidos X é facilmente constatada. De fato, viu-se que dado $\hat{\varphi}(x,t)$, a escolha de $\hat{\vartheta}(x,t)$ é completamente independente de $\hat{\varphi}(x,t)$ no caso em que $\Omega = \tilde{\Omega}$. Como $\Omega_F = \tilde{\Omega}$, então $\Psi(x,t)$ e $\chi(x,t)$ são independentes no sentido em que uma combinação linear arbitrária de $\Psi(x,t)$ e $\chi(x,t)$ define uma função $\phi(x,t) = \hat{\upsilon}(x,t)$ que descreve uma dinâmica quântica. Como a escolha de $\chi(x,t)$ é independente de $\Psi(x,t)$ então os valores possíveis de x em $t = t_s$ serão justamente os valores permitidos de x_s, ou seja, $\mathcal{X} = X$.

Do mesmo modo, o conjunto $\mathcal{X}^{\perp}$ dos valores impossíveis de x, aqueles para os quais

$$\int dx\nu^*(x,t)\Psi(x,t) = 0 \quad ,$$

$\nu(x,t)$ pertencente a $\mathcal{E}^{0\perp}(\Omega_F)$, é igual ao conjunto $X^{\perp}$ dos valores de x que não são permitidos. Obviamente a união de X e $X^{\perp}$ consiste na reta real, $X \cup X^{\perp} = \mathbb{R}$.

Agora, note que o conjunto obtido pela união de $\mathcal{E}^0(\Omega_F)$ e $\mathcal{E}^{0\perp}(\Omega_F)$ constitui-se exatamente em $L_2(X,x)$ com um produto escalar definido por

$$(\sigma,\Psi) = \int dx\ \sigma^*(x,t)\Psi(x,t) \quad . \tag{17}$$

Que essa união constitui-se em $L_2(X,x)$ é devido à definição deste. Já que o espaço $L_2(X,x)$ com o produto escalar (17) constitui-se em um espaço de Hilbert é uma demonstração contida em várias referências dentre as quais as citadas. Sendo assi, uma função $\Psi(x,t)$ pode ser pensada como um elemento, um vetor $|\Psi(t)\rangle$, de um espaço de Hilbert abstrato $\mathcal{H}$, fornecendo uma interpretação muito rica ao formalismo da MGF.

Seja uma partícula cujo movimento apresenta uma dinâmica quântica descrita pela MGF. O movimento desta partícula pode ser visto em um espaço de Hilbert abstrato $\mathcal{H}$ cujos elementos $|\Psi(t)\rangle$, $|\chi(t)\rangle$,..., etc, descrevem as diferentes dinâmicas quânticas desse movimento. Para uma dessas dinâmicas, por exemplo a descrita por $|\Psi(t)\rangle$ para $t > t_0$, estão associadas VD cujo valor numérico pode ser obtido através da ação de um operador sobre $|\Psi(t)\rangle$ dada por

$$\hat{f} = \frac{\langle\Psi(t)|\mathbf{f}|\Psi(t)\rangle}{\langle\Psi(t)|\Psi(t)\rangle} = \langle f\rangle \quad .$$

Nessa expressão $\hat{f}$ é a VD e $\langle f\rangle$ o seu valor numérico obtido através da operação acima definida. Diz-se que a VD $\hat{f}$ é representada pelo operador $\mathbf{f}$. Sendo clara a situação não é necessário usar uma notação específica para estes operadores. Nesse caso, é até melhor dizer, por exemplo, que a VD $\hat{p}$ é representada por um operador ρ_{op} que age sobre $|\Psi(t)\rangle$ tal que $\langle x|\rho_{op}|x'\rangle = \langle x|x'\rangle\mathbf{p} = \hat{1}(x,x')\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$. Uma vez que $\overleftrightarrow{\mathbf{f}}^{+} = \overleftrightarrow{\mathbf{f}}$ e de $\Omega = \Omega_F$ $\overleftrightarrow{\mathbf{f}} = \overrightarrow{\mathbf{f}} = \overleftarrow{\mathbf{f}}$ então esses operadores possuem a propriedade de serem auto-adjuntos, ou seja, $\mathbf{f}^{+} = \mathbf{f}$. Contudo, a definição do operador adjunto depende da definição de Ω e, para fazer uma referência explícita ao uso de Ω_F, o operador $\mathbf{f}^{+}$ será chamado conjugado hermitiano e quando $\mathbf{f}^{+} = \mathbf{f}$ será dito que o operador $\mathbf{f}$ é hermitiano [2]. Com isso, conhecido $|\Psi(t)\rangle$, é possível dar uma descrição

---

[2] Aqui operador conjugado hermitiano e operador hermitiano devem ser tomados como sinônimos de operador Ω_F-adjunto e operador Ω_F-auto-adjunto. Na literatura matemática é feita uma distinção entre operadores adjunto e auto-adjunto de conjugado hermitiano e hermitiano e ainda de simétrico. Muitas vezes na literatura física isso é

completa da dinâmica quântica para os instantes $t > t_0$ atribuíndo às VD valores bem definidos.

Agora, suponha que em um instante $t_s > t_0$ seja realizada uma medição da VI x fornecendo como resultado $x_s^{\#}$. Tem-se assim uma situação completamente distinta, uma vez que esse *novo* contorno do problema define um *novo* problema para $t > t_s$ onde a dinâmica quântica é descrita por $|\chi(t)\rangle$, por exemplo. No entanto, é possível fornecer uma continuidade à descrição da dinâmica uma vez que em $t = t_s$ tem-se para as VD

$$\hat{f} = \frac{\langle\chi(t)|f|\Psi(t)\rangle}{\langle\chi(t)|\Psi(t)\rangle} = \langle f\rangle_{t_s} ,$$

onde $\langle\chi(t)|\Psi(t)\rangle \neq 0$. Diz-se que houve uma transição da dinâmica quântica descrita por $|\Psi(t)\rangle$ para a descrita por $|\chi(t)\rangle$, de modo que essa transição contém um elemento de irreversibilidade intrínseco, característico de um processo convolutivo. Por outro lado, se $\langle\chi(t)|\Psi(t)\rangle = 0$ então essa transição não é possível e tal valor de x pertence ao conjunto dos valores que não são permitidos. Nesse caso os vetores $|\Psi(t)\rangle$ e $|\chi(t)\rangle$ são ditos ortogonais.

Uma vez que esses vetores de $\mathcal{H}$ especificam por completo a dinâmica quântica ou o estado dinâmico quântico do movimento, esses podem ser denominados vetores da dinâmica quântica ou, simplesmente, vetores dinâmicos ou ainda vetores do estado dinâmico quântico ou, simplesmente, vetores de estado, embora esta seja um tanto inadequada. Acredita-se, porém, que é melhor denominar $|\Psi(t)\rangle$ um vetor " ket " uma vez que o risco de más interpretações está assim ausente. Além disso, o vetor $\langle\Psi(t)|$ definido no espaço dual pode ser convenientemente denominado um vetor " bra ". Não é necessário persistir demais nesses pontos. O importante é que agora se tem uma descrição completa da dinâmica quântica colocada em termos de uma linguagem que não faz uma

---

ignorado e nesse trabalho ela o será uma vez que de nada interessa essa discussão e a introdução desses elementos carregaria demais a nomenclatura.

referência explícita às VI. A explicitação se faz através de (12.21), nesse caso

$$\int_X dx \; |x\rangle\langle x| = 1 \quad . \tag{18}$$

Antes de fazer mais algumas considerações explícitas sobre a MGF gostaria-se de discutir mais um aspecto matemático deixado em aberto na parte anterior. Este refere-se à natureza do símbolo $\hat{1}(x,x')$ como um objeto matemático. Recordando que o seu significado é dado pela expressão (8.3) a definição de Ω_F mostra que

$$\hat{1}(x,x') = \delta(x-x') \quad , \; (\; \Omega = \Omega_F \;) \quad , \tag{19}$$

que é a função delta de Dirac. Rigorosamente falando esta é a distribuição de Dirac e em função de (8.2) $K(q,t;q_0,t_0)$ deve ser vista como uma distribuição ou uma função generalizada [3]. Não se pretende, contudo, discutir essas questões, mas é sempre interessante chamar a atenção para elas. É claro que se a VI $q = \rho$ não for contínua mas sim discreta as expressões (18-19) devem ser substituídas respectivamente por

$$\sum_\rho |\rho\rangle\langle\rho| = 1 \quad , \tag{20}$$

$$\hat{1}(\rho,\rho') = \delta_\rho^{\rho'} \quad , \tag{21}$$

onde $\delta_\rho^{\rho'}$ é agora o delta de Kronecker.

A expressão (18) não apenas é responsável pela explicitação da VI x, ou seja, pela realização das expressões definidas em $\mathcal{H}$, como também ao lado de uma mesma expressão em termos de uma outra VI define as expressões ds TCG entre elas. Para isso basta conhecer $\langle x|\xi\rangle$, onde ξ é a outra VI. Isso já foi visto no caso geral no cap. 12 sendo desnecessário repeti-lo para essa MG.

---

[3] Ver, por exemplo, Schwartz (1961).

Em relação a esta MGF gostaria-se de explicitar mais um ponto, entre os discutidos no caso geral apresentado na parte anterior. Este é a equação do movimento. Como foi visto, pela definição da operação Ω_F as funções $\Psi(x,t)$ e $\chi(x,t)$ são independentes, de sorte que agora é possível concluir que, por exemplo, se

$$\int dx\ \chi^*(x,t)\Psi(x,t) = 0$$

para qualquer $\chi(x,t)$ então $\Psi(x,t) = 0$. Sendo assim, as equações tomadas como formais nos cap. 11 e 12 podem ser agora vistas como equações para $\Psi(x,t)$, ou melhor ainda, para $|\Psi(t)\rangle$. Estas são na MGF autênticas equações do movimento. Obviamente esta observação não se refere às equações generalizadas de Lagrange e de Hamilton uma vez que estas são equações para as VD $\hat{x}$ na primeira e $\hat{x}$ e $\hat{p}$ na segunda, embora para esta tenha-se agora uma autêntica equação entre operadores,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \tag{22a}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad , \tag{22b}$$

mas sim à equação generalizada de Hamilton-Jacobi. De fato, uma vez que $|\Psi(t)\rangle$ e $|\chi(t)\rangle$ são independentes conclui-se que se (11.16) deve ser válida para qualquer $|\chi(t)\rangle$ então $|\Psi(t)\rangle$ deve satisfazer

$$\mathbf{H}|\Psi(t)\rangle = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle \quad , \ (t > t_0) \ , \tag{23}$$

que pode ser formalmente integrada fornecendo

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\mathbf{H}(t-t_0)/\hbar}|\Psi(t)\rangle \quad , \ (t > t_0) \ . \tag{24}$$

A explicitação de (23) em termos da VI x escreve-se facilmente. Usando (18-19) e $\langle x|\mathbf{H}|x'\rangle = H(\mathbf{x},\mathbf{p})\delta(x-x')$,

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p})\Psi(x,t) = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) \quad . \tag{25}$$

Por exemplo, se $H = p^2/2m + V(x)$,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) \quad , \tag{26}$$

que juntamente com as condições de contorno em $t = t_0$ constituem-se em uma equação diferencial parcial para $\Psi(x,t)$.

Assim como (11.16) pode ser vista como uma equação para $|\Psi(t)\rangle$ o mesmo vale para (12.30) uma vez que $\langle q|\hat{\varphi}(t)\rangle$ pode ser visto como o gerador generalizado de uma TCG cujo contínuo desdobramento representa nesse caso essa dinâmica quântica. Esta pode ser representada pela expressão (24), uma vez que, de

$$K(q_n,t_n;q_0,t_0) = \langle\chi(t)|\Psi(t)\rangle \ ,$$

$$|\Psi(t)\rangle = e^{iH(t-t_0)/\hbar}|\Psi(t_0)\rangle \quad , \quad \langle\chi(t)| = \langle\chi(t_n)|e^{iH(t_n-t)/\hbar} \ ,$$

escreve-se

$$\langle\chi(t)|\Psi(t)\rangle = \langle\chi(t_n)|e^{-iH(t_n-t_0)/\hbar}|\Psi(t_0)\rangle \quad ,$$

que comparada com (12.31b) resulta em

$$|q_0,t_0\rangle = e^{iHt_0/\hbar}|\Psi(t_0)\rangle \quad ,$$

$$\langle q_n,t_n| = \langle\chi(t_n)|e^{iHt_n/\hbar} \quad .$$

Sendo assim, o operador

$$U(t,t_0) \equiv e^{iH(t-t_0)/\hbar} \quad , \tag{27}$$

denominado operador de evolução, ou melhor, operador de progresso, tem um papel fundamental. O contínuo desdobramento da TCG que representa a dinâmica quântica pode ser vista através da ação de **U** em um vetor $|\Psi(t_0)\rangle$ de $\mathcal{H}$,

$$|\Psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\Psi(t_0)\rangle = e^{iH(t-t_0)/\hbar}|\Psi(t_0)\rangle \quad ,$$

ou através de sua ação sobre os operadores,

$$\begin{aligned} &\langle\Psi(t)|f|\Psi(t)\rangle = \\ &= \langle\Psi(t_0)|e^{-iH(t-t_0)/\hbar}\, f\, e^{iH(t-t_0)/\hbar}|\Psi(t_0)\rangle = \\ &= \langle\Psi(t_0)|f(t)|\Psi(t_0)\rangle \quad , \end{aligned} \tag{28}$$

$$f(t) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}\, f\, e^{iH(t-t_0)/\hbar} \quad , \tag{29}$$

o que consiste justamente nos dois " pictures " discutidos. No último caso, a equação do movimento deve ser vista como sendo (12.34), que expressa a variação em relação a t de uma VD arbitrária. É interessante notar que, devido à definição de Ω_F, não é preciso se preocupar com a variação δ_x de $\Psi(x,t)$ em relação à VI x. Uma vez que Ω_F consiste na soma sobre todos os valores permitidos de x, então a variação δ_t de $\Psi(x,t)$ em relação a t é a única que colabora para a variação total de $\hat{f}$. De fato,

$$\frac{d}{dt}\int dx\Psi^*(x,t)f\Psi(x,t) = \int dx\, \frac{\partial}{\partial t}[\Psi^*(x,t)f\Psi(x,t)] \quad ,$$

que fornece como resultado a equação (12.34), na qual usando (24),

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\langle\Psi(t_0)|e^{-iH(t-t_0)/\hbar}\, f\, e^{iH(t-t_0)/\hbar}|\Psi(t_0)\rangle = \\ &= \langle\Psi(t_0)|e^{-iH(t-t_0)/\hbar}(-\frac{\hbar}{i}[f,H] + \partial f/\partial t)e^{iH(t-t_0)/\hbar}|\Psi(t_0)\rangle, \end{aligned}$$

da qual obtém-se a equação do movimento como uma equação entre operadores,

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{\hbar}{i}[f(t),H(t)] + \frac{\partial f(t)}{\partial t} \quad , \tag{30}$$

$$f(t) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}\, f\, e^{iH(t-t_0)/\hbar} \quad ,$$

$$H(t) = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}\, H\, e^{iH(t-t_0)/\hbar} \quad ,$$

$$\frac{\partial f(t)}{\partial t} = e^{-iH(t-t_0)/\hbar}\, \frac{\partial f}{\partial t}\, e^{iH(t-t_0)/\hbar} \quad .$$

Há ainda mais um ponto dos discutidos na parte anterior cuja explicitação na MGF merece uma atenção particular. No cap. 9 concluiu-se que as VD $\widehat{x^2}$ e $\hat{x}^2$ assim como $\widehat{p^2}$ e $\hat{p}^2$ devem ser vistas como VD diferentes, uma vez que os seus respectivos valores $\langle x^2\rangle$, $\langle x\rangle^2$ e $\langle p^2\rangle$, $\langle p\rangle^2$ são diferentes e tais que $\langle x^2\rangle \geq \langle x\rangle^2$ e $\langle p^2\rangle \geq \langle p\rangle^2$. Apenas na MC esses valores são sempre iguais e estas VD podem ser vistas como as mesmas. Concluiu-se também que mesmo em uma MG não-trivial como a MGF existem situações *excepcionais* onde esses valores são iguais. Nesse caso esses valores particulares são constantes C e C', respectivamente os autovalores dos operadores **x** e **p**.

Porém, no final deste mesmo capítulo mostrou-se que, devido à não-comutatividade destes operadores, essas situações excepcionais não podem ocorrer concomitantemente. Novamente, chama-se a atenção para o fato de não haver nada de errado com isso, uma vez que, se essas situações pudessem ser concomitantes, aí sim poderia-se estranhar algo, visto que, nesse caso, teria-se um ar de excepcionalidade ainda maior.

Agora, existe uma relação muito interessante entre esses valores dessas VD. Essa relação preferiu-se optar por apresentá-la aqui, uma vez que a sua demonstração faz-se naturalmente, usando uma conhecida propriedade de Ω_F. Essa propriedade é a desigualdade de Schwartz,

$$\left|\int dx\ f^*(x)g(x)\right|^2 \leq \int dx\ f^*(x)f(x) \int dx\ g^*(x)g(x) \quad ,$$

onde a integração é sobre X. Usando nesta desigualdade

$$f(x) = (\mathbf{x}-\langle x\rangle)\Psi(x,t) \quad , \quad g(x) = (\mathbf{p}-\langle p\rangle)\Psi(x,t) \quad ,$$

obtém-se, lembrando (9.9), (9.13) e $[\mathbf{x},\mathbf{p}] = -\frac{\hbar}{i}$,

$$(\langle p^2\rangle-\langle p\rangle^2)(\langle x^2\rangle-\langle x\rangle^2) \geq \left|\int dx\ \Psi^*(x,t)(I_1+I_2)\Psi(x,t)\right|^2 ,$$

$$I_1 = [(\mathbf{p}-\langle p\rangle)(\mathbf{x}-\langle x\rangle) + (\mathbf{x}-\langle x\rangle)(\mathbf{p}-\langle p\rangle)]/2 \quad ,$$

$$I_2 = [(\mathbf{p}-\langle p\rangle)(\mathbf{x}-\langle x\rangle) - (\mathbf{x}-\langle x\rangle)(\mathbf{p}-\langle p\rangle)]/2 \quad .$$

É fácil ver que $I_1^+ = I_1$ e $I_2^+ = -I_2$, de modo que o desenvolvimento do lado direito fornece

$$\left|\int dx\ \Psi^*(x,t) I_1 \Psi(x,t)\right|^2 + \left|\int dx\ \Psi^*(x,t) I_2 \Psi(x,t)\right|^2 ,$$

e como ao omitir a primeira parcela apenas reforça-se a desigualdade, tem-se, uma vez que $I_2 = [p,x]/2$,

$$(\langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2)(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2) \geq \hbar^2/4 \quad . \tag{31}$$

A primeira observação que pode ser feita sobre essa relação é que ela confirma a observação anterior sobre a impossibilidade de ocorrência simultânea das situações onde $\langle x^2\rangle = \langle x\rangle^2$ e $\langle p^2\rangle = \langle p\rangle^2$. De fato, essa relação também é uma conseqüência da não-comutatividade de **x** e **p**. Além disso ela mostra que, se uma dessas situações ocorre, por exemplo, $\langle p^2\rangle = \langle p\rangle^2$, então $\langle x^2\rangle \to \infty$ enquanto $\langle x\rangle^2$ é finito. É preciso lembrar, para que não haja más interpretações, que a VD $\hat{x}$, logo também $\widehat{x^2}$, não é uma posição. Isso já foi discutido e, inclusive, sugeriu-se denominá-la situs generalizado. Portanto, quando as diferentes VD $\widehat{p^2}$ e $\hat{p}^2$ possuem o mesmo valor numérico, a VD $\hat{x}$ apresenta um valor finito enquanto o valor numérico de $\widehat{x^2}$ é infinito, ou seja, $\int dx\ \Psi^*(x,t) x^2 \Psi(x,t)$ diverge, e vice-versa.

Realmente, se as VD devem apresentar valores numéricos bem definidos, tem-se pela frente um problema. Este, infelizmente, é um problema cuja consideração exigiria um outro trabalho inteiramente dedicado à procura de sua solução. De fato, é possível levantar algumas hipóteses que precisariam ser consideradas em um outro trabalho. Primeiro, na desigualdade de Schwartz, $\int dx\ f^*(x) f(x)$ é a norma de um vetor em $L_2(X,x)$. Uma norma é, por definição [4], um funcional convexo finito que satisfaz certas propriedades, as quais não interessa considerar. Importa apenas que os seus valores são

---

[4] Ver Kolmogorov & Fomin (1978).

finitos. Ao usar $f(x) = (x-\langle x\rangle)\Psi(x,t)$ na desigualdade de Schwartz supõe-se, portanto, que $\int dx\ \Psi^*(x,t)x^2\Psi(x,t)$ é finita. O resultado chegado é, portanto, contraditório com as hipóteses feitas. Supondo que, nesse caso, não vale a desigualdade de Schwartz, também não (31). Certamente um pouco mais de reflexão permitiria enxergar outras possibilidades que deveriam ser consideradas, mas, definitivamente isso foge aos objetivos deste trabalho. Estas deverão ser consideradas em um próximo.

De qualquer forma, a expressão (31) é vista relacionada com a impossibilidade das situações onde $\widehat{x^2}$ e $\hat{x}^2$ por um lado e $\widehat{p^2}$ e $\hat{p}^2$ do outro possuirem o mesmo valor numérico serem concomitantes. Ela também reflete uma segunda propriedade. Os valores numéricos destas diferentes VD são diferentes, mas o são de uma maneira particular, ou seja, $\langle x^2\rangle \geq \langle x\rangle^2$ e $\langle p^2\rangle \geq \langle p\rangle^2$. Seja $(\Delta x)^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 > 0$ e $(\Delta p)^2 = \langle p^2\rangle - \langle p\rangle^2 > 0$ a diferença entre esses valores. A relação (31) mostra que esses valores $(\Delta x)^2$ e $(\Delta p)^2$ estão relacionados por

$$(\Delta x)^2(\Delta p)^2 \geq \hbar^2/4 \quad ,$$

ou seja, se forem calculados $\langle p^2\rangle$ e $\langle p\rangle^2$ e a diferença é $(\Delta p)^2 > 0$ então a diferença $(\Delta x)^2$ entre os valores de $\langle x^2\rangle$ e $\langle x\rangle^2$, embora ainda não conhecidos, sabe-se ser maior ou igual a $\hbar^2/4(\Delta p)^2 = (\Delta x)^2_{min}$. Pode ocorrer que, calculada essa diferença, ela seja exatamente $(\Delta x)^2 = (\Delta x)^2_{min}$, mas nunca menor. Acrescenta-se desse modo mais um elemento novo aos já considerados.

Não há mais nenhum ponto dos apresentados na formulação geral da MG cuja explicitação nessa MGF apresente interesse. É mais interessante agora considerar uma situação específica e descrever a dinâmica quântica apresentada pelo movimento de uma partícula nessa situação de acordo com a MGF. A situação que se pretende discutir é a chamada experiência das duas fendas, por apresentar uma vasta gama de elementos não-triviais.

Seja um arranjo experimental localizado no plano $y = 0$ em um sistema de coordenadas retangulares de modo que três anteparos A,B e C estão localizados nas retas (x,z''), (x,z') e $(x,0)$, respectivamente.

No anteparo B existem duas fendas 1 e 2 localizadas, a primeira, entre (x'_2,z') e (x'_1,z'), onde $x'_2 > x'_1$, e, a segunda, entre $(-x'_1,z')$ e $(-x'_2,z')$, com larguras $x'_2-x'_1$. Uma partícula está inicialmente localizada ($t = t_0$) no ponto $(0,z'')$ no anteparo A. Em $t = t_n$ é realizada uma medição da posição da partícula no anteparo C encontrando como resultado $(x,0)$.

Dependendo da natureza dessa partícula a dinâmica pode ser conjuntiva ou convolutiva e, por isso, é ilustrativo considerar primeiro a possibilidade de uma dinâmica conjuntiva para, depois, considerar uma dinâmica convolutiva. Para isso é útil definir os pontos $(x_2,0)$, $(x_1,0)$, $(-x_1,0)$, $(-x_2,0)$ como os pontos onde as retas que passam por $(0,z'')$ em A e por (x'_2,z'), (x'_1,z'), $(-x'_1,z')$ e $(-x'_2,z')$, respectivamente, em B encontram o anteparo C.

Suponha que a dinâmica seja conjuntiva, logo, descrita pela MC. Nesse caso ela é determinada a partir de

$$\Phi_{CA}(x,0,t_n;0,z'',t_0) = \underset{\gamma}{\text{ext}}\ e^{\alpha S[\gamma]}$$

onde $S[\gamma] = \int_{tn}^{t0} L dt$ e preferiu-se usar Φ_{CA} ao invés de S_{CA} a título de comparação futura. A existência das fendas 1 e 2 em B é uma condição de contorno que limita os caminhos possíveis entre A e C aos que passam por essas fendas, ou seja, os valores permitidos de x' pertencem aos intervalos $[x'_1,x'_2]$ e $[-x'_2,-x'_1]$. A solução de $\underset{\gamma}{\text{ext}}\ e^{\alpha S[\gamma]}$ para $L = m(\dot{x}^2+\dot{z}^2)/2$ é dada pelo caminho $\bar{\gamma}$,

$$\bar{\gamma}:\ x = v_x t,\ z = v_z t,\ \text{com}\ t_0 < t < t_n,\ x' \in [x'_1,x'_2]\ \text{ou}\ [-x'_2,-x'_1]$$

onde $v_x = (x_n-x_0)/(t_n-t_0) = x/\Delta t$, $v_z = (z_n-z_0)/(t_n-t_0) = z''/\Delta t$. Logo, para que essa solução exista deve-se ter

$$x' \in [x'_1,x'_2]\ \text{ou}\ x' \in [-x'_2,-x'_1]\ ,$$

e nesse caso

$$\Phi_{CA}(x,0,t_n;0,z'',t_0) = \exp\left[\frac{\alpha m}{2\Delta t}(x^2+ z''^2)\right]\ ,$$

da qual pode-se calcular as VD desejadas.

Suponha, agora, que a dinâmica seja convolutiva, especificamente uma dinâmica quântica, descrita pela MGF. Nesse caso a expressão a ser usada é (15.5), com uma óbvia generalização para duas dimensões. Devido à forma de L,

$$S[\gamma] = \int_{t_0}^{t_n} dt m\dot{x}^2/2 + \int_{t_0}^{t_n} dt m\dot{z}^2/2 = S[x(t)] + S[z(t)] ,$$

de modo que

$$K_{CA}(x,0,t_n;0,z'',t_0) = K_{CA}(x,t_n;0,t_0)K_{CA}(0,t_n,z'',t_0) ,$$

$$K_{CA}(x,t_n;0,t_0) = \int_{x_0<x<x_n} \mathcal{D}[x]e^{iS[x(t)]/\hbar} , (x_0 = 0, x_n = x) ,$$

$$K_{CA}(0,t_n,z'',t_0) = \int_{z_0<z<z_n} \mathcal{D}[z]e^{iS[z(t)]/\hbar} , (z_0 = z'',z_n = 0).$$

Essa fatoração, em uma parte que só depende de x e outra que só depende de z, é devido à forma da lagrangeana. Destas só interessa a parte que depende de x. As condições de contorno do problema entram no cálculo de K_{CA} impondo restrições sob os caminhos possíveis. A condição de contorno imposta pela existência das duas fendas em B implica que os valores permitidos de x' são os contidos nos intervalos $[x'_1,x'_2]$ e $[-x'_2,-x'_1]$ enquanto para os entre A e B e entre B e C são toda a reta real. Quanto a z ela está limitada a $[z'',0]$.

A definição de Ω_F envolve uma soma sobre todos os valores permitidos de x e z e fornecerão como resultado (13.13) no caso de x, exceto na soma sobre os valores de x'. Essa soma pode ser dividida em uma soma para os $x' \in [x'_1,x'_2]$ (fenda 1) e $x' \in [-x'_2,-x'_1]$ (fenda 2). Assim

$$\int_{x_0<x<x_n} \mathcal{D}[x]e^{iS[x(t)]/\hbar} =$$

$$= \int_{\substack{x_0<x<x_n \\ x'\in [x_1',x_2']}} \mathcal{D}[x]e^{iS[x(t)]/\hbar} + \int_{\substack{x_0<x<x_n \\ x'\in [-x_2',-x_1']}} \mathcal{D}[x]e^{iS[x(t)]/\hbar} ,$$

$$K_{CA}(x,t_n;0,t_0) = K_{CA}^{(1)}(x,t_n;0,t_0) + K_{CA}^{(2)}(x,t_n;0,t_0) , \tag{32}$$

onde 1 e 2 referem-se aos valores de x' nessas respectivas fendas. Essas expressões podem também ser escritas como

$$K_{CA}^{(1)}(x,t_n;0,t_0) =$$

$$= \int_{x'\in [x_1',x_2']} \frac{dx'}{A} \int_{x_0<x<x'} \mathcal{D}[x] \int_{x'<x<x_n} \mathcal{D}[x]e^{iS[x(t)]/\hbar} = \tag{33}$$

$$= \int_{x'\in [x_1',x_2']} \frac{dx'}{A} K_{CB}(x,t_n;x',t')K_{BA}(x',t';0,t_0) ,$$

onde K_{CB} e K_{BA} são dados por (13.13). Uma expressão análoga escreve-se para $K_{CA}^{(2)}$. Note que supostas as fendas pontuais essas expressões são imediatamente explicitadas.

A situação aqui é, portanto, inteiramente diferente da anterior. No caso de uma dinâmica conjuntiva só existe solução para o problema se $x \in [x_1,x_2]$ ou se $x \in [-x_2,-x_1]$, ou seja, o resultado de um processo de medição de x fornecerá como resultado apenas valores de x nesse intervalo. No caso de uma dinâmica quântica, entretanto, o problema encontra solução para qualquer valor de x, ou seja, o resultado de um processo de medição de x fornecerá como resultado qualquer $x \in \mathbb{R}$. Isso se deve ao fato de uma dinâmica quântica não ser representada como um caminho específico, como a conjuntiva, mas, sim, a partir de uma operação sobre os caminhos.

Obviamente isto não quer dizer que uma partícula percorre todos os caminhos possíveis. O que é preciso ter em mente é que uma vez

efetuada essa operação sobre os caminhos obtém-se algo que não é nem um caminho nem uma coleção de caminhos. Esse algo é algo novo, resultado de uma convolução dos caminhos, e a dinâmica quântica é representada por esse algo. Pensado cada caminho como uma " parte ", esse algo é um " todo " que não é a conjunção dessas " partes ", mas, sim, a sua convolução.

A possibilidade de descrever esse todo em termos de partes, ou seja, de falar em partes, é baseada na aceitação do princípio da fragmentação. Sendo assim, não faz sentido pensar em uma dinâmica quântica como um caminho ou uma coleção de caminhos pois esta é, por definição, convolutiva. A operação de convolução, esta sim, é definida em termos de caminhos, mas a dinâmica quântica é representada pelo novo que resulta desta operação, e como ela é irreversível, uma vez realizada já não é mais possível falar de caminhos. Quando mal interpretada essa colocação é fácil incorrer em atitudes precipitadas. Não faz sentido, por exemplo, perguntar por qual das duas fendas a partícula passou. Essa questão é indecidível, pois uma vez dada a dinâmica quântica, não faz mais sentido falar em caminhos.

Mais ainda, se é feita uma medição para decidir por qual das duas fendas a partícula passou, introduz-se uma nova condição de contorno, o que representa um outro problema. Se é feita uma medição que verifique, por exemplo, que a partícula passou pela fenda 1, então os valores permitidos de x' são exclusivamente os pertencentes ao intervalo $[x'_1,x'_2]$, de modo que

$$K'_{CA}(x,t_n;0,t_0) = K^{(1)}_{CA}(x,t_n;0,t_0) \quad , \tag{34}$$

diferente, portanto, de (32). Esse problema equivale, portanto, a fechar a fenda 2.

Segundo a denominação usada nos cap. 10 e 11 a situação acima descrita é do tipo I. A mesma experiência deve ser também analisada dentro do contexto da situação II. Suponha conhecida $\Psi(x,t)$ que entre B e C é dada por (32) substituindo, nesta, os valores iniciais e usando x e t no lugar de x_n e t_n. Esta fornece uma descrição completa da dinâmica. Agora, suponha que em $t = t_n$ é realizada uma medição de x

encontrando o valor $x^{\#}$. Esta medição define uma função $\chi(x,t)$ e interpreta-se essa situação como uma transição entre dinâmicas convolutivas uma vez que

$$\int_X dx\ \chi^*(x,t)\Psi(x,t) = c \neq 0 \quad .$$

A mesma experiência pode ser repetida e desta vez pode-se encontrar um outro valor de x que define uma outra função. Numa outra experiência pode ser encontrado um valor igual ou diferente destes e assim por diante. Denotando os resultados dessas medições por $x_k^{\#}$, onde k é um parâmetro contínuo, mas que será considerado discreto para facilitar, definem-se funções $\chi_k(x,t)$ tais que

$$\int_X dx\ \chi_k^*(x,t)\Psi(x,t) = c_k \tag{35}$$

onde $c_k \neq 0$ depende implicitamente de $x_k^{\#}$. Agora, suponha que após N realizações desse processo de medição tenha-se encontrado um certo número $\#_N\{x_k^{\#}\}$ de vezes o valor $x_k^{\#}$. Nesse caso pode-se computar, experiência após experiência, o valor da razão $\#_N\{x_k^{\#}\}/N$. Uma vez que o conjunto $\mathcal{X}$ dos valores possíveis é igual ao conjunto X dos valores permitidos tal que $X = \mathbb{R}$ espera-se que, após um número muito grande de experiências, $N \to \infty$, todos esses valores de x sejam encontrados. Espera-se também que nesse limite a razão $\#_N\{x_k^{\#}\}/N$ tenda a um limite

$$f_k = \lim_{N\to\infty} [\ \#_N\{x_k^{\#}\}/N\ ] \quad , \quad \sum_k f_k = 1 \quad .$$

Agora, devido a (8.5),

$$\sum_k \chi_k^*(x',t)\chi_k(x,t) = \delta(x-x') \ , \ \int dx\ \chi_k^*(x,t)\chi_{k'}(x,t) = \delta_k^{k'} \quad ,$$

que usada em (35),

$$\sum_k \int dx \chi_k(x',t)\chi_k^*(x,t)\Psi(x,t) = \sum_k c_k \chi_k(x',t) =$$

$$= \int dx \delta(x-x')\Psi(x,t) = \Psi(x',t) \ ,$$

$$\Psi(x,t) = \sum_k c_k \chi_k(x,t) \ . \tag{36}$$

Finalmente, usando (8.11b),

$$1 = \int dx \ \Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = \sum_k \sum_{k'} \int dx c_k^* c_{k'} \chi_k^*(x,t)\chi_{k'}(x,t) =$$

$$= \sum_k \sum_{k'} c_k^* c_{k'} \delta_k^{k'} = \sum_k |c_k|^2 \ .$$

Como c_k depende implicitamente de $x_k^\#$ e apenas deste valor, então de $\sum_k f_k = 1$ e $\sum_k |c_k|^2 = 1$ conclui-se que

$$|c_k|^2 = f_k = \lim_{N\to\infty} [\#_N\{x_k^\#\}/N] \ . \tag{37}$$

Além disso,

$$\int dx |\Psi(x,t)|^2 \longrightarrow \sum_k |\Psi(x_k^\#,t)|^2 = \sum_k |c_k|^2 \ ,$$

de modo que

$$|\Psi(x,t)|^2 dx \Big|_{x=x_k^\#} = f_k = \lim_{N\to\infty} [\#_N\{x_k^\#\}/N] \ . \tag{38}$$

Esse resultado é muito importante. Evidentemente ele nada diz acerca de uma medição, duas, três, etc. Apenas quando essa experiência é repetida $N \to \infty$ vezes é que (38) diz que $|\Psi(x,t)|^2$ fornece uma medida da partição dos resultados dessas medições[5]. Feita a hipótese de que

---

[5] Esse ponto corresponde aquilo que Bernardes (1988 - 1989B), na sua análise geral das limitações do pensamento científico, denomina " irracionalidade do evento único " ou a sua " indizibilidade ".

são equivalentes a realização de $N \to \infty$ processos de medição sobre uma partícula nas mesmas condições experimentais para cada uma destas e a realização desse processo de medição sobre $N \to \infty$ partículas simultaneamente nas mesmas condições, então (38) fornece uma medida da partição desses resultados para as partículas deste ensemble.

Considerando, portanto, que essa experiência é realizada com um ensemble de partículas, pode-se usar a interpretação fornecida por (38) na situação representada por (32), na qual as duas fendas estão abertas, e na situação representada por (34), na qual uma das fendas está fechada ou onde é realizada uma medição que detecte a passagem de uma partícula pela outra. Desse modo,

$$|\Psi_{CA}(x,t)|^2 = |\Psi_{CA}^{(1)}(x,t_n) + \Psi_{CA}^{(2)}(x,t_n)|^2 =$$

$$= |\Psi_{CA}^{(1)}|^2 + |\Psi_{CA}^{(2)}|^2 + (\Psi_{CA}^{(1)*}\Psi_{CA}^{(2)} + \Psi_{CA}^{(1)}\Psi_{CA}^{(2)*}) = |\Psi_{CA}^{(1)}|^2 +$$

$$+ |\Psi_{CA}^{(2)}|^2 + |\Psi_{CA}^{(1)}||\Psi_{CA}^{(2)}|(e^{i(\theta_{CA}^{(1)}-\theta_{CA}^{(2)})} + e^{-i(\theta_{CA}^{(1)}-\theta_{CA}^{(2)})}) ,$$

$$|\Psi_{CA}|^2 = |\Psi_{CA}^{(1)}|^2 + |\Psi_{CA}^{(2)}|^2 + 2|\Psi_{CA}^{(1)}||\Psi_{CA}^{(2)}|\cos(\theta_{CA}^{(1)}-\theta_{CA}^{(2)}) \quad . \tag{39}$$

Por outro lado, usando (34),

$$|\Psi'_{CA}|^2 = |\Psi_{CA}^{(1)}|^2 \quad , \tag{40}$$

onde considera-se a fenda 2 fechada. Se a fenda 1 for a que estiver fechada,

$$|\Psi''_{CA}|^2 = |\Psi_{CA}^{(2)}|^2 \quad . \tag{41}$$

Somando esses resultados,

$$|\Psi_{CA}|^2 = |\Psi_{CA}^{(1)}|^2 + |\Psi_{CA}^{(2)}|^2 \quad , \tag{42}$$

que difere de (39) devido à presença nesta do termo

$$\mathcal{I} = 2|\Psi_{CA}^{(1)}||\Psi_{CA}^{(2)}|\cos(\theta_{CA}^{(1)}-\theta_{CA}^{(2)}) \quad . \tag{43}$$

O termo $\mathcal{I}$ é função de x não apenas através de $|\Psi_{CA}^{(1)}|$ e $|\Psi_{CA}^{(2)}|$ mas também de $(\theta_{CA}^{(1)} - \theta_{CA}^{(2)})$ de modo que a presença da função co-seno implica que $\mathcal{I}$ apresenta máximos e mínimos para diferentes valores de x. Logo, o termo $\mathcal{I}$ é um termo de interferência, típico dos fenômenos ondulatórios. Este apresenta-se experimentalmente *apenas* quando se considera um ensemble com $N \to \infty$ partículas ou quando se considera $N \to \infty$ medições sobre uma partícula ou réplicas desta nas mesmas condições experimentais, não importando, portanto, o intervalo de tempo que as separa. Esse comportamento ondulatório é característico, portanto, não de um evento individual, mas sim de uma coleção de eventos.

Em outras palavras, a dinâmica quântica do movimento de $N \to \infty$ partículas apresenta um comportamento ondulatório que não é exibido na dinâmica quântica do movimento de cada uma delas separadamente. Esse fenômeno é comumente chamado dualidade onda-partícula, embora o correto fosse chamá-lo dualidade onda-ensemble de partículas.

Se ao ensemble está associado um comportamento típico dos fenômenos ondulatórios, então pode-se usar a linguagem da teoria ondulatória para descrever as suas características. Desse modo, à dinâmica quântica do ensemble de partículas pode-se associar um comprimento de onda, freqüência, etc. É fácil ver que para uma partícula livre

$$\Psi(x,t) = C\exp\left[i(2mE)^{1/2}x/\hbar - iEt/\hbar\right] \quad ,$$

onde C é uma constante. A forma de $\Psi(x,t)$ é exatamente a de uma onda plana que se propaga na direção x com vetor de onda k e freqüência angular ω, $e^{i(kx-\omega t)}$. Desse modo, o comportamento ondulatório exibido pela dinâmica quântica do movimento de um ensemble de partículas livres com energia E e momentum $p = (2mE)^{1/2}$ é descrito na linguagem ondulatória como ondas planas com vetor de onda k (comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$) e freqüência angular ω (período $T = 2\pi/\omega$) onde

$$p = \hbar k = h/\lambda \quad , \; E = \hbar\omega = h\nu = h/T \quad . \tag{44}$$

Essas equações são a ponte que liga as linguagens ondulatória e mecânica. Segundo Bohr, essas descrições são complementares.

Além disso, em vista da linguagem ondulatória, a experiência das duas fendas pode ser reformulada em termos desta. A situação experimental é justamente a da experiência de Young[6] sob o fenômeno de interferência em uma experiência de duas fendas. Os máximos do espectro de interferência são dados por

$$d\sin\phi = m\lambda \quad , \; (\; m = 0,1,2,... \;) \; ,$$

onde d é a distância entre as duas fendas e $\sin\phi = x/\overline{BC}$, onde $\overline{BC}$ é a distância entre o plano B e o plano C. Por outro lado, de (13.13), pode-se escrever, com $t_0 = 0$, $\Psi^{(1)}_{CB}$ e $\Psi^{(2)}_{CB}$ como

$$\left[\frac{m}{2\pi\hbar i t}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\,\frac{m}{2t}(x-a)^2\right] \quad ,$$

$$\left[\frac{m}{2\pi\hbar i t}\right]^{1/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\,\frac{m}{2t}(x+a)^2\right] \quad ,$$

respectivamente, supondo para isso que as fendas 1 e 2 são pontuais e localizadas em +a e -a. O termo de interferência $\mathcal{I}$ depende de $\cos(\theta^{(1)}_{CB}-\theta^{(2)}_{CB})$, onde

$$\theta^{(1)}_{CB}-\theta^{(2)}_{CB} = \frac{1}{\hbar}\,\frac{m}{2t}\,[(x-a)^2 - (x+a)^2] = -\,2mxa/\hbar 2t = -p_x d/\hbar \; .$$

Os máximos do espectro de interferência são dados por

$$\theta^{(1)}_{CB}-\theta^{(2)}_{CB} = 2\pi m \;\Rightarrow\; p_x d/\hbar = 2\pi m \quad , \; (\; m = 0,1,2,... \;) \; .$$

Como $p_x = p\sin\phi$, onde $\sin\phi = x/\overline{BC}$, e usando $p = h/\lambda$, obtém-se

---

[6] Ver Halliday & Resnick (1984).

$$d\sin\phi = \lambda m \quad , \ (\ m = 0,1,2,... \ ) \quad ,$$

que é justamente a condição obtida usando a teoria ondulatória. O aspecto ondulatório e mecânico não são de modo algum contraditórios.

Certamente existem muitos outros pontos interessantes cuja discussão seria proveitosa. Infelizmente existem outras prioridades que não apenas esta. É preciso concluir este trabalho discutindo a relação entre o que foi apresentado nesta parte e a MQ e a TQ, o que será feito na próxima e última seção.

15. MECÂNICA GENERALIZADA, MECÂNICA QUÂNTICA E TEORIA QUÂNTICA.

Certamente durante a formulação da MG na parte III o leitor já pode notar a profunda relação formal existente entre esta e a MQ, explicitada nas duas seções anteriores através da escolha de uma operação $\Omega = \Omega_F$ que define uma MG denominada MGF formalmente idêntica à MQ[1]. Para discutir a relação entre elas é bom fazer um uso distinto de MQ e TQ reservando a segunda para a interpretação, notadamente a probabilística da escola de Copenhagen personificada sobretudo em Niels Bohr[2], do formalismo da MQ. Com essa discussão pretende-se encerrar este trabalho.

A MGF e a MQ são mais do que isomorfas no sentido discutido no apêndice. Do ponto de vista matemático elas são idênticas, no sentido pleno do termo. Pode-se reconhecer imediatamente que a equação generalizada de Hamilton-Jacobi (14.25) é a equação de Schrödinger enquanto (14.30) é a equação de Heisenberg nos respectivos " pictures ". Na MQ a função $\Psi(x,t)$ é a função de onda e $|\Psi(t)\rangle$ o vetor de estado ou vetor " ket ", e assim por diante. Idênticas também o são, obviamente, as expressões para as VD mas, nesse ponto, uma outra discussão se faz necessária.

A interpretação dada à MGF a distingue da TQ. *Em momento algum até agora falou-se em probabilidade.* Na TQ, como se sabe, este é o conceito-chave. A origem desta interpretação está, entretanto, bem clara em função do que foi apresentado. Na verdade, no cap. 3 mostrou-se que existe uma ampla classe de funcionais que satisfazem as leis da Mecânica que não apenas o funcional trivial. A partir destes outros funcionais pode-se formular outras teorias da Mecânica. A formulação destas baseou-se na exigência de que fossem *isomorfas* à MC.

---

1 A literatura envolvendo a MQ é muita vasta. Dentre estas pode-se destacar Landau & Lifshitz (1978), Bohm (1951), Messiah (1958), Sakurai (1985), etc.

2 Esta pode ser resumida na coletânea de trabalhos Bohr (1958) e Bohr (1963) ou em Heisenberg (1958).

Contudo, pode-se notar que a classe de teorias da Mecânica assim obtidas não são apenas isomorfas à MC; elas são *também isomorfas ao cálculo de probabilidades*[3]. Logo, nada mais natural do que usar a linguagem do cálculo de probabilidades na MGF[4].

Certas propriedades da MGF de fato tornam o seu uso conveniente. Entre estas destaca-se a operação que deve ser feita para obter o valor numérico de uma VD e as propriedades satisfeitas por $\Psi(x,t)$, ou melhor, $|\Psi(x,t)|^2$. Entretanto, é de fundamental importância, para que o uso dessa linguagem seja conveniente, que $\Psi(x,t)$ e $\chi(x,t)$ sejam independentes. De fato, foi visto na seção anterior que para $\Omega = \Omega_F$ estas funções são independentes, ou, em outras palavras, o conjunto $\mathfrak{X}$ dos valores possíveis de x são independentes de $\Psi(x,t)$ e igual ao conjunto X dos valores permitidos de x.

A conveniência é evidente, uma vez que um espaço de eventos definido em termos de $\mathfrak{X}$ pode ser definido em termos de X. Mas, entre usar a linguagem do cálculo de probabilidades e interpretar a MGF em termos de probabilidades há uma distância muito grande pois nesse caso entra-se no domínio da *teoria de probabilidades*[5]. Uma vez nesse

---

3 Por cálculo de probabilidades entende-se o conjunto de axiomas a partir dos quais é possível calcular a probabilidade de um evento, a chamada formulação axiomática. Esta consiste em definir um conjunto, chamado espaço de eventos, e uma função, que satisfaz três axiomas, que a cada evento associa um número entre zero e um, a probabilidade deste evento. Esse conjunto mais esta função define o espaço de probabilidades a partir do qual definem-se distribuições, esperanças,etc. Ver, por exemplo, Kolmogorov (1950).

4 Isso não é exclusividade da MGF. De fato, Bernardes já demonstrou isso no seu desenvolvimento das teorias holotrópicas da Termodinâmica, chamando a atenção que isso, não só na Termodinâmica, mas em toda a Física, é uma decorrência do uso de conceitos relativos a "fragmentos" em situações onde o princípio da fragmentação (cap 3) não é justificável. Ver Bernardes (1989 - 1990).

5 Enquanto cálculo de probabilidades refere-se a uma estrutura puramente matemática e que não necessita de uma interpretação particular, a teoria de probabilidades preocupa-se com a aplicação dessa estrutura formal a problemas concretos, dentre eles problemas específicos da Física, cuja justificativa é parte essencial da teoria de probabilidades.

domínio, o problema passa a ser não apenas o de uma interpretação concreta da situação onde o cálculo de probabilidades é aplicado, mas também o de uma interpretação do próprio conceito de *probabilidade*.

Via de regra as interpretações do conceito de probabilidade caem em duas classes denominadas materialista e conceptualista por Venn. Probabilidade é algo de fato, concreto, segundo a visão materialista, a proporção de casos favoráveis de um evento em relação a todos os possíveis. Já enxergar a probabilidade como sendo o grau de confiança que deve ser associado a uma proposição é uma visão conceptualista. Nas palavras de Peirce[6], " a maioria dos estudiosos misturou as duas concepções ", e conclui que " o ponto de vista conceptualista, embora forneça respostas satisfatórias em alguns casos, é bastante inadequado ". A estas palavras acrescenta-se aqui que falar em probabilidade dentro de uma visão conceptualista é falar *nada*. Qualquer interpretação que possa ser dada dentro dessa concepção é uma interpretação subjetiva. O resultado do lançamento de um dado é um resultado indefinido, desconhecido, " indizível " nas palavras de Bernardes (1989 B). Dizer que " há uma probabilidade igual a 1/6 de que o resultado seja face 1 " diz menos do que " o resultado pode ser face 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 ".

Na verdade esta última é a única coisa que pode ser dita acerca do resultado do lançamento de *um* dado. Contudo, dentro da visão materialista, pode ser dado um sentido à primeira como " após 6×10^{10} lançamentos de um dado, aproximadamente 1×10^{10} vezes o resultado será face 1, aproximadamente 1×10^{10} a face 2, e assim por diante ", onde o " aproximadamente " possui um sentido concreto uma vez que " o erro tende a zero à medida em que o número N de lançamentos é tal que $N \to \infty$ ". Agora, " probabilidade igual a 1/6 " significa que $\lim_{N\to\infty} [\#_N\{\text{face } 1\}/N] = 1/6$, onde $\#_N\{\text{face } 1\}$ é o número de vezes que o lançamento de N dados deu como resultado a face 1. Logo, probabilidade é um conceito que diz algo concreto e objetivo apenas dentro da visão materialista, envolvendo, portanto, um número $N \to \infty$ de

---

[6] Em Peirce (1983). Nesse trabalho é feita a citação à classificação utilizada por Venn.

experiências. Esta é visualizável, por exemplo, através da idéia de um ensemble onde, por detrás destes pontos, existe a questão, usando o mesmo exemplo, da equivalência entre os lançamentos sincrônicos e diacrônicos dos dados.

Sendo assim, se na MGF a linguagem do cálculo de probabilidades quiser ser usada não há problema algum, mas a sua interpretação, à luz da teoria de probabilidades, deve envolver um contexto materialista. De fato, é apenas e tão somente dentro desta visão que a MGF pode ser interpretada, bastando para se convencer disto lembrar a discussão do capítulo anterior envolvendo a experiência das duas fendas, resumida nas expressões (14.37-38).

O que a expressão (14.38) diz é que a probabilidade de que no processo de medição de x o valor obtido seja $x_k^{\#}$ é dada por $|\Psi(x,t)|^2 dx$ calculada em $x = x_k^{\#}$, ou seja, após um número N muito grande de medições de x aproximadamente $N|\Psi(x,t)|^2 dx$ calculada em $x = x_k^{\#}$ destas resultarão em $x = x_k^{\#}$ e esse erro tende a zero à medida em que $N \to \infty$. Apenas a interpretação materialista é possível. Quanto a uma experiência em si nada pode ser dito acerca do valor a se obter, a não ser que este é um dos valores possíveis, no caso, permitidos. É impossível pensar em outra interpretação além desta, uma vez que o *conceito de probabilidade* é o *mesmo*, quer estejam sendo considerados dados, elétrons ou estrelas. O que é diferente é o cálculo da probabilidade, nunca o conceito.

Logo, acerca de uma medição, de um evento individual, nada pode ser dito[7]. Qualquer interpretação em termos da teoria de probabilidades só pode se referir ao ensemble de partículas. É preciso estar claro que isso não se deve nem à MGF nem à dinâmica quântica que ela descreve, mas, sim ao conceito de probabilidade em si. Um evento individual pode perfeitamente ser descrito em termos do cálculo de probabilidades. Isso não é necessário, mas é conveniente, em função do isomorfismo. Agora, a interpretação em termos da teoria de probabilidades refere-se não a um evento individual mas sim à coleção

---

[7] Ver Bernardes (1988).

desses eventos individuais, à coletividade, devido à própria natureza desse conceito. Novamente, *essa não é uma interpretação necessária, mas sim suficiente*, em função da conveniência exibida pelo isomorfismo. Note que a referência à coleção dos eventos individuais, ao ensemble, se faz não apenas através do conceito de probabilidade em si, mas também em $|\Psi(x,t)|^2$ pois a validade de (14.37-38) verifica-se apenas no limite $N \to \infty$.

A utilização da linguagem do cálculo de probabilidades e a interpretação em termos da teoria de probabilidades pode exibir sérios problemas, sobretudo conceituais, caso ela seja feita frouxamente. Seja a VD $\hat{x}$,

$$\hat{x} = \frac{\int_X dx\ \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)}{\int_X dx\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)} = \langle x \rangle \quad ,$$

onde $\langle x \rangle$ é o valor numérico de $\hat{x}$ e que é o resultado da operação definida acima. Já para expressão (8.11b)

$$\int_X dx\Psi^*(x,t)\Psi(x,t) = 1$$

junto com $|\Psi(x,t)|^2 \geq 0$ mostra que $|\Psi(x,t)|^2$ pode ser vista como uma densidade de probabilidades.

Dentro da linguagem do cálculo de probabilidades, dada uma variável aleatória (VA)[8], por exemplo, $X = x$, define-se o valor esperado, médio ou esperança de X como

$$\mathcal{E}(x) = \bar{x} = \frac{\int_X dx\ xp(x)}{\int_X dx\ p(x)} \quad ,$$

---

8 Uma função definida no espaço de probabilidades é uma variável aleatória.

onde p(x) é a densidade de probabilidade. Para distingüir entre o cálculo e a teoria de probabilidades será usado esperança (matemática) $\mathcal{E}(x)$ numa referência ao primeiro e valor esperado ou médio $\bar{x}$ ao outro. Agora, identificando $p(x) = |\Psi(x,t)|^2$ pode-se escrever

$$\langle x \rangle = \mathcal{E}(x) \quad . \tag{1}$$

Essa expressão, se mal interpretada, pode levar a conclusões precipitadas. Usando a linguagem do cálculo de probabilidades pode-se dizer que o valor numérico $\langle x \rangle$ da VD $\hat{x}$ é igual à esperança matemática da VA $\mathbf{X} = x$. Note que não é o valor x da VA $\mathbf{X} = x$ que é igual ao valor da VD $\hat{x}$ mas sim a sua esperança matemática $\mathcal{E}(x)$. A expressão (1) faz sentido quer esteja sendo considerada uma, duas, três partículas, etc. A sua interpretação, em termos da teoria de probabilidades, entretanto, só faz sentido quando considerado um ensemble. Realmente, a questão é sutil. Sejam duas partículas, 1 e 2, cujo movimento apresenta uma dinâmica quântica. Se as condições de contorno são as mesmas, então, os valores das VD também o são. Por exemplo,

$$\langle x \rangle_1 = \langle x \rangle_2 = \mathcal{E}(x) \quad , \tag{2}$$

onde na última igualdade usou-se a linguagem do cálculo de probabilidades. Agora, seja um emsemble destas partículas. Nas mesmas condições,

$$\langle x \rangle_1 = \langle x \rangle_2 = \ldots = \langle x \rangle_N \equiv \langle x \rangle_{E(N)} = \mathcal{E}(x) \quad , \tag{3}$$

onde E(N) refere-se a um ensemble de N partículas. Contudo, a interpretação em termos da teoria de probabilidades se faz apenas em termos desse ensemble com $N \to \infty$ partículas,

$$\mathcal{E}(x) = \bar{x} \tag{4}$$

onde $\bar{x}$ é o valor médio de x nesse ensemble com $N \to \infty$ partículas. Sendo

assim, de (3-4) pode-se escrever

$$\langle x \rangle_{E(N)} = \bar{x} \tag{5}$$

mas *não*

$$\langle x \rangle = \bar{x} \tag{6}$$

pois apenas em (5) está sendo considerado um ensemble ao contrário de (6) onde se tem apenas uma partícula. Pode-se, sim, escrever

$$\langle x \rangle_1 = \langle x \rangle_2 = \ldots = \langle x \rangle_N = \bar{x} \tag{7}$$

mas não a expressão (6) embora $\langle x \rangle = \langle x \rangle_i$ ($i = 1,2,\ldots,N \to \infty$). O que é preciso ter em mente é que, conceitualmente, se está diante de situações completamente distintas. A mera igualdade numérica não justifica um embaralhamento conceitual.

Com a devida cautela a expressão (5) pode, portanto, ser interpretada à luz da teoria de probabilidades. Ela diz que o valor numérico $\langle x \rangle_{E(N)}$ da VD $\hat{x}$ em um ensemble de $N \to \infty$ partículas é igual ao valor médio $\bar{x}$ da VA $X = x$ nesse ensemble. Tão importante quanto não confundir (5) e (6) é ter em mente que *a VD não é a VA* $X = x$ *que é a VI dentro da linguagem anterior.* A operação que é preciso ser feita sobre a VI x para obter o valor numérico $\langle x \rangle$ da VD $\hat{x}$ é a *mesma* que é feita para obter a esperança matemática $\mathcal{E}(x)$ da VA $X = x$. Porém, pela interpretação desta operação do cálculo de probabilidades em termos da teoria de probabilidades esse valor é igual ao valor médio $\bar{x}$ da VA $X = x$ em um ensemble de $N \to \infty$ partículas. *O perigo está em interpretar erroneamente o valor médio de* $X = x$ *como significando que a VD é* x. É preciso, portanto, tomar um certo cuidado.

Esse cuidado não é, porém, excessivo. O descuido, com certeza, leva a conclusões precipitadas. Exemplo maior disto envolve a relação (14.31). Nos livros de MQ ela é denominada relação (ou princípio) de

incerteza ou de indeterminação de Heisenberg[9]. De todas as denominações a mais apropriada é relação de Heisenberg. De fato, não há nenhuma incerteza ou indeterminação dentro do contexto em que ela foi introduzida, pois ela é uma relação entre os valores numéricos de *diferentes* VD cujos operadores não comutam. Contudo, na MQ, ou melhor, na TQ, ela é interpretada como

$$(\delta x)^2(\delta p)^2 \geq \hbar^2/4 \quad , \tag{8}$$

onde δx é a incerteza em relação à posição da partícula e δp a incerteza em relação ao momentum. Nas palavras de Heisenberg[10]: " ... deu lugar a limitações no uso de conceitos que tinham sido, desde Newton, básicos na física clássica. [...] nada impede que se fale em posição e velocidade do elétron [...] mas não se pode medir simultaneamente aquelas grandezas com alta precisão arbitrariamente. De fato, o produto das duas imprecisões, em suas medidas, resultou não ser menor (que o dado por (8)). [...] os velhos conceitos não se adequam à Natureza de maneira exata ".

Algumas observações sobre essas devem ser feitas. Primeiro: se existe alguma limitação, esta envolve a indevida identificação entre os conceitos de VD e VI e não o conceito em si. Segundo: uma medição se faz sobre uma VI, sendo incluída no problema como uma condição de contorno, e não sobre uma VD, e o interesse recai sobre as VD quando se pretende descrever o *movimento* de um sistema. Terceiro: devidamente compreendidos, os velhos conceitos rejuvenescem como VD em uma MG exibindo valores bem determinados e exatos. Finalmente, a referida incerteza carece de uma definição precisa. Esta não é, entretanto, uma dificuldade adicional uma vez que em função de (3) e

---

9 Nas referências citadas ela é denominada de incerteza por Messiah (1958), Sakurai (1985) e Bohm (1951) assim como na grande maioria de outros textos. É interessante notar que em Bohm (1980) ela já é chamada de indeterminação assim como em Landau & Lifshitz (1978).

10 Em Heisenberg (1958).

(5) tem-se

$$\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \mathcal{E}(x^2) - [\mathcal{E}(x)]^2 \equiv \mathcal{V}^2(x)$$

onde $\mathcal{V}^2(x)$ é a variança da VA $\mathbf{X} = x$. Na linguagem do cálculo de probabilidades a diferença entre os valores numéricos $\langle x^2\rangle$ e $\langle x\rangle^2$ das VD $\widehat{x^2}$ e $\hat{x}^2$ pode ser vista como a variança $\mathcal{V}^2(x)$ da VA $\mathbf{X} = x$. Interpretada em termos da teoria de probabilidades tem-se

$$\mathcal{V}^2(x) = (\delta x)^2$$

onde $(\delta x)^2$ é a dispersão da VA $\mathbf{X} = x$ em um ensemble de $N \to \infty$ partículas,

$$(\delta x)^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \quad .$$

Sendo assim, dentro da linguagem do cálculo de probabilidades a relação (14.31) pode ser escrita como

$$\mathcal{V}^2(x)\mathcal{V}^2(p) \geq \hbar^2/4$$

e interpretada como

$$(\delta x)^2(\delta p)^2 \geq \hbar^2/4$$

dentro da teoria de probabilidades onde a " incerteza " é interpretada como a raiz quadrada da dispersão de uma VA em um ensemble de $N \to \infty$ partículas.

É importante lembrar, entretanto, que essa interpretação envolve na antiga linguagem as VI e não as VD. De qualquer forma, *essa interpretação não é uma interpretação necessária, apenas suficiente.* O formalismo da MGF pode ser descrito em termos da linguagem do cálculo de probabilidades por ser isomorfo a este, mas, insistindo, isso não é necessário, com a sua interpretação se fazendo em função da teoria

de probabilidades.

Outra questão interessante relaciona-se com o que foi discutido no cap. 9 acerca da VD $\widehat{q^2p^2}$. Devido à definição de $\Omega = \Omega_F$ ela pode ser representada tanto por $(p^2x^2+x^2p^2)/2$ quanto $[(xp+px)/2]^2$ com uma diferença entre elas da ordem de $\hbar^2$. Nesta ocasião discutiu-se os motivos pelos quais isso ocorre e como retirar essa " degenerescência ". Esse problema dentro da MQ é poucas vezes chamado à atenção [11]. O tratamento dado nesse trabalho deixa, entretanto, muito clara a sua origem. Enquanto Bohm e Messiah são obrigados a colocar a questão para ser decidida empiricamente, em relação a qual dos operadores apresenta a correta ordenação, nesse trabalho esse problema não ocorre pois a interpretação da MGF é muito clara nesse ponto.

O último ponto que se gostaria de discutir nesse trabalho é sobre a relação entre a MGF e a MC. Repetindo uma observação feita anteriormente, sobre o ponto de vista deste trabalho, ambas as teorias são corretas, apenas que uma descreve uma dinâmica convolutiva, a quântica, e, a outra, uma dinâmica conjuntiva. Como os aspectos convolutivos da dinâmica em um certo limite tornam-se desprezíveis, apresentando-se como conjuntivos, a MGF deve, portanto, em um certo limite, apresentar-se como a MC, afinal ela foi construída de certa forma nesse sentido. Esse limite evidentemente consiste no limite $\alpha \to \infty$, ou seja, $\hbar \to 0$, mas tem-se na realidade dois limites distintos, o da dinâmica e o da teoria. O limite, de fato, é o limite relacionado com a dinâmica. Tomando como exemplo a partícula livre, é fácil ver a partir da expressão para K(n,0), (13.13), que se αm é muito grande, então a soma pode ser substituída com um erro pequeno que tende a zero à medida em que $\alpha m \to \infty$ (lembrar a discussão feita no início do cap. 13) pelo valor máximo desta soma, ou melhor, pelo extremo de $e^{\alpha S[\gamma]}$. Essa operação é a operação trivial Ω_H.

Logo, se uma partícula livre apresenta αm, ou melhor, $m/\hbar$, muito grande, a operação Ω_F pode ser substituída por Ω_H com o referido erro.

---

[11] Das referências citadas ele é discutido por Bohm (1951) e Messiah (1958).

A distinção entre os limites fica bem clara, uma vez que o limite onde os aspectos convolutivos da dinâmica de uma partícula livre apresentam-se como conjuntivos é dado por $m/\hbar \to \infty$, enquanto o limite onde a MGF apresenta-se como a MC, ou seja, as suas equações e VD são as mesmas (embora não ideologicamente), é dado por $\hbar \to 0$. Para domínios intermediários, próximos destes, tem-se dinâmicas quasi-conjuntivas e MG quasi-clássicas. Nesses domínios (os das chamadas aproximações semi-clássicas da MQ), podem ser definidas uma infinidade de operações Ω, por exemplo, a partir da expansão de Volterra[12] para o funcional $S[\gamma]$. Escrevendo $S[\bar{\gamma}] = S[\bar{x}(t)]$ a expansão de Volterra fornece para $S[x(t)] = \int dt L(x,\dot{x},t)$ a expressão

$$S[x(t)] = S[\bar{x}(t)] + \int dt \left.\frac{\delta S}{\delta x(t)}\right|_{x=\bar{x}} (x(t)-\bar{x}(t)) + \\ + \frac{1}{2!}\int dt dt' (x(t)-\bar{x}(t)) \frac{\delta S}{\delta x(t)\delta x(t')} (x(t')-\bar{x}(t')) + \ldots \tag{9}$$

onde o primeiro termo é tal que

$$\left.\frac{\delta S}{\delta x(t)}\right|_{x=\bar{x}} = \Lambda_t = 0 \quad , \; (\gamma = \bar{\gamma}) \quad ,$$

definindo daí uma operação que toma o termo de ordem zero $S[\bar{x}(t)]$ mais o segundo, uma outra com estes mais o terceiro e assim por diante.

Para finalizar, gostaria-se de lembrar que essa relação entre a MGF e a MC como casos particulares da MG reforça ainda mais a classificação da MQ como uma meta-teoria, explicitada, por exemplo, por Landau[13] e por Schönberg[14], e numa extensão das idéias de Bernardes[15].

---

12 Em Rosen (1969).

13 Em Landau & Lifshitz (1978).

14 Notas de aula do curso de História da Ciência do prof. Mario Schonberg - IFUSP.

15 Bernardes (1988), nos seus cursos de Termodinâmica, tem sempre chamado a atenção para os aspectos de meta-aparelho e meta-linguagem nas diferentes abordagens (essencialmente Clausius-Kelvin versus Gibbs) da Teoria Clássica da Termodinâmica.

Isso fica claro nas palavras de Landau, " o duplo papel da MC, como caso limite e, ao mesmo tempo, como fundamento da MQ ", e nas de Schönberg, " é interessante notar que a MQ é uma meta-teoria pois nega a MC e ao mesmo tempo não pode dispensar a MC pois necessita de algum ente (o aparelho de medida) que não se comporte quanticamente para que ela própria, a MQ, possa existir ".

PARTE V

• CONCLUSÃO •

Muitas coisas podem ser ditas na ocasião de uma conclusão. A maioria os próprios resultados já o fizeram. Por isso, retomá-los e estender-se, agora, é desnecessário, e pretende-se ser o mais breve possível. Desse modo, talvez a melhor conclusão que possa ser dada envolve a explicitação de dois pontos essenciais contidos nesse trabalho.

Em relacão à Mecânica em si, a consideração do aspecto histórico as resume bem. A História dos PV dentro da Mecânica é muito interessante[16]. Desde Maupertuis, a classe de situações englobadas sob a forma de um PV mostrou-se cada vez mais ampla. Com a definição de ação dada por Euler e Lagrange ($\int pdq$) o PV englobava apenas os sistemas conservativos. A extensão se deu através da definição de Hamilton ($\int Ldt$). O que este trabalho mostrou é que existe uma infinidade de definições de ação mais gerais do que esta, a partir das quais constroem-se teorias que englobam um maior espectro de fenômenos. Isso se deve à extensão da definição do elemento não-observável das teorias da Mecânica.

O outro se refere não só à relação deste trabalho com a Termodinâmica. Fora o ponto acima considerado, a relação ideológica estabelecida entre a Mecânica e a Termodinâmica ensina, ou melhor, reafirma, aquilo que Bernardes há muito tempo diz. Em suas palavras: " a relação de postura ideológica coerente que deve preceder a atividade pessoal de qualquer cientista ".

---

16 Ver Yourgrau & Mandelstam (1968).

APÊNDICE : LINGUAGEM E ISOMORFISMO.

O homem, há muito tempo, apercebeu-se da importância da linguagem. Os antigos gregos questionavam-se acerca da natureza das palavras e da organização da linguagem. Também os antigos hindus preocupavam-se com a linguagem, só que devido a motivos religiosos. Essa preocupação estendeu-se por séculos até desembocar no início do século XX onde o seu estudo adquiriu um caráter científico pelas mãos de de Saussure (1857-1913), considerado o fundador da Linguística Moderna[1].

O interesse pela linguagem, entretanto, não se restringe à Linguística, sendo um importante objeto de investigação filosófica, merecendo destaque, por exemplo, os trabalhos de Wittgenstein (1889-1951). Claro está que este trabalho não se propõe a aprofundar-se em proposições linguísticas ou filosóficas mas, necessariamente, deve passar pela discussão do papel da linguagem ordinária e das metalinguagens dentro das Ciências. Embora esta seja uma questão complexa, intratável em algumas linhas, é preferível pecar pela superficialidade do que pela omissão.

Antigamente a linguagem era vista apenas como o meio necessário da investigação filosófica. A Filosofia Moderna, por outro lado, passou a considerar a linguagem como objeto da sua investigação, entendendo que aquilo que só pode ser compreendido através da linguagem deve ser inseparável da linguagem. Essa moderna visão coloca-se cepticamente perante a crença na realidade independente da linguagem, formando assim um forte elo entre a linguagem e a individualidade humana. Apresenta-se assim uma forte convergência dessas idéias com as idéias modernas acerca da Ciência, sobretudo da Física[2].

---

1 Como introdução ao assunto ver Orlandi (1986).

2 Uma referência muito esclarecedora nesse sentido é Bernardes (1989B). Recentemente, o papel da linguagem nas ações humanas tem sido repetidamente sallentado por Bernardes, que fundamenta o seu ponto de vista naquilo que ele denomina " o tripé fundamental "

Tradicionalmente, um fato, para ser considerado científico, requer essencialmente objetividade e reprodutibilidade, ou seja, um fato só é científico se a relação entre o sujeito e o objeto não depender do sujeito individual e se for reprodutível por qualquer sujeito. Pressupõe-se a existência de uma linguagem para a descrição dos fenômenos e comunicação das experiências. Essa linguagem é o elo de ligação entre indivíduos de uma coletividade ideologicamente coerente. Na última instância essa linguagem é a linguagem comum ou ordinária.

A linguagem ordinária contém elementos linguísticos básicos, conceitos não perfeitamente definidos e delimitados, incorporados a ela a partir de certas experiências e fenômenos básicos, dos quais evoluem os conceitos abstratos das metalinguagens. Construir uma metalinguagem é usar a linguagem para falar da própria linguagem. Toda Ciência tem uma metalinguagem pela qual estabelece as suas definições, conceitos, etc., podendo ser formal (por usar símbolos abstratos como, por exemplo, a Física) ou não-formal (por usar a linguagem ordinária como, por exemplo, a História). As metalinguagens formais usadas na Física são linguagens matematizadas consistentes e a explanação última dos símbolos matemáticos e das operações pertencem à própria linguagem ordinária. Por exemplo, a relação de ordem matemática citada no capítulo 1 requer uma linguagem que contenha o elemento linguístico " entre (between) " (distinto do " entre (among) ")[3].

Tais metalinguagens requerem a validade de partes elementares da linguagem ordinária, constituindo-se em um refinamento e em uma extensão lógica dessas partes através de conceitos ideais relacionados de uma forma definível logicamente. Conceitos ordinários, como o de posição e velocidade, são transformados em quantidades ideais através de definições formais. Para isso requer-se a utilização de um sistema

---

formado pelo imbricamento inextricável entre Fenômeno, Ideologia e Linguagem. Ver também Bernardes (1988).

[3] Em Bernardes (1989A).

de coordenadas munido de uma regua e um relógio. Mas a utilização de um sistema de coordenadas já é uma introdução de um conhecimento básico acerca do mundo físico. Por exemplo, a especificação da coordenada de posição de uma partícula contém um conhecimento das propriedades espaciais do mundo físico não podendo ser comunicada independentemente desse conhecimento sobre o espaço físico.

A ênfase na linguagem ordinária mostrou-se fundamental a partir do advento da Física Quântica, vendo-se reforçada na interpretação de Copenhagen da Mecânica Quântica, preconizada nos trabalhos de Niels Bohr (1885-1962), sobretudo quanto ao conceito de complementaridade[4]. Entretanto, para não fugir dos objetivos, é melhor não se adentrar na complexidade das questões aí envolvidas. Os interesses remetem a discussão para o princípio da correspondência.

Em 1923 Bohr formulou de modo claro o princípio da correspondência[5]. Sua grande utilidade era a de pilar da velha teoria quântica [old quantum theory]. O seu papel na atual teoria quântica pode-se dizer é paradoxal, como pode ser visto pela sua presença nos livros-texto: alguns (Messiah (1958)) dedicam-lhe um bom espaço, outros (Bohm (1951)) dedicam um capítulo inteiro a questões envolvidas por ele, enquanto que outros (Sakurai (1985), Landau & Lifshitz (1962)) sequer dedicam-lhe uma linha.

O princípio da correspondência pode ser formulado, de maneira pouco pretensiosa, como: a Mecânica Quântica deve conter a Mecânica Clássica como um limite (cuja especificação não é importante para o que se segue). A importância desse princípio é muito maior do que aparenta, sobretudo no contexto epistemológico. A necessidade da Mecânica Clássica ser correta nesse limite é de fundamental importância para a Mecânica Quântica[6], inclusive sendo classificada

---

4 Uma coletânea dos trabalhos de Bohr pode ser encontrada em Bohr (1958) e Bohr (1963). Um trabalho interessante é Bohr (1948). Ver tambem Bergstein (1972).

5 Em Bohr (1923).

6 Essencialmente no que concerne à teoria da medição dentro da Teoria

por Landau e por Schönberg (cap. 15) como uma metateoria.

Bohr sempre enfatizou a necessidade da descrição não-ambígua dos fenômenos físicos, em particular os quânticos, em termos da linguagem ordinária. De fato, conforme discutido, a linguagem ordinária permite, através de seus elementos linguísticos básicos, a diferenciação das experiências pertencentes ao " mundo privado " das experiências pertencentes ao " mundo exterior " e a comunicação destas em uma coletividade ideologicamente coerente, isto é, objetividade e reprodutibilidade. Como a Mecânica Clássica apresenta uma matematização da linguagem ordinária que torna o seu uso não-ambíguo, o papel do princípio da correspondência consiste em afirmar que tal linguagem pode ser consistentemente aplicada como uma espécie de " sistema de referência ", visto que a manifestação última de um fenômeno quântico é o seu registro em um instrumento de medida que obedece as leis da Mecânica Clássica, ou seja, que apresenta uma dinâmica conjuntiva, o qual, portanto, pode ser descrito objetivamente através desta linguagem e daí ser comunicado e reproduzido, condições essenciais para ser considerado científico.

Enfim, isso conduz à necessidade de supor que a linguagem ordinária através da matematização de seus conceitos básicos que se referem ao " mundo físico " permaneça válida não só na Mecânica Quântica como em qualquer outra teoria da Mecânica. Isso significa supor que, embora as equações destas teorias sejam diferentes, as suas formas devem ser as mesmas, mesmo que apresentando um conteúdo epistemológico radicalmente diferente[7]. Em outras palavras, se classicamente uma dada grandeza é obtida a partir de uma operação sobre uma outra grandeza, então a correspondente grandeza nessa outra teoria deve ser obtida pela *mesma* operação sobre a outra grandeza correspondente.

Essa imposição implica na correspondência propriamente dita através do princípio da correspondência como um caso particular.

Quântica. Ver Bohm (1951), cap. 22.

[7] Obviamente, o mesmo com a Termodinâmica, na qual essa exigência é introduzida através de Bernardes (1989 - 1990).

É justo, portanto, usar uma palavra diferente para designar a diferença de natureza entre elas, daí denominá-la " isomorfismo "[8] ou " congruência "[9]. Logo, exigir que uma teoria seja isomorfa à Mecânica Clássica significa que as equações, incluindo as variáveis dinâmicas, destas teorias devem ter a mesma forma e daí ser possível fazer um uso coerente de uma linguagem através da qual são possíveis a objetividade e reprodutibilidade e onde faz sentido, por exemplo, o uso de conceitos como energia e momentum.

---

8 Usado por Bernardes dentro da Termodinâmica. Dos elementos gregos " Isos " = igual e " morpho " = forma.

9 Do latim " congruentia " significando harmonia, coerência.

• REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS •

Abraham, R. (1967), Foundations of Classical Mechanics, The Benjamin/Cummings Publ. Co., Inc.

Arnold, V.I. (1987), Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica, Editora Mir Moscovo.

Bergstein, T. (1972), Quantum Physics and Ordinary Language, The MacMillan Press, Ltd.

Bernardes, N. (1988), Ciência e Cultura, 40, 473.

Bernardes, N. (1989), Notas de Aula do Curso de Termodinâmica, IFUSP.

Bernardes, N. (1989A), Seminário apresentado no CLE - UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, em 20 de abril de 1989.

Bernardes, N. (1989B), Artigo publicado no Caderno de Ciências da Folha de S.Paulo, em 16 de junho de 1989.

Bernardes, N. (1990), Holotropic Theories of Thermodynamics, a ser publicado.

Bohm, D. (1951), Quantum Theory, Prentice-Hall, Inc.

Bohm, D. (1980), Wholeness and The Implicate Order, Routledge & Kegan Paul, Inc.

Bohr, N. (1923), Z. Physik, 13, 117.

Bohr, N. (1948), Dialéctica, 2, 312.

Bohr, N. (1958), Atomic Physics and Human Knowledge, John Wiley & Sons, Inc.

Bohr, N. (1963), Essays 1958-1962 on Atomic Physics and Human Knowledge, Interscience Publishers.

Cretella Jr., J. & Cintra, G.U. (1953), Dicionário Latino-Português, Companhia Editora Nacional.

Feynman, R.P. (1948), Rev. Mod. Phys., 20, 367.

Feynman, R.P. & Hibbs, A.H. (1965), Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, Inc.

Gelfand, I.M. & Fomín, S.V. (1963), Calculus of Variations, Prentice-Hall, Inc.

Gelfand, I.M. & Yaglom, A.M. (1960), J. of Math. Phys., 1, 48.

Goldstein, H. (1950), Classical Mechanics,
Addison-Wesley Publ. Co., Inc.

Halliday, D. & Resnick. R. (1960), Physics,
Tradução: Física, quarta edição, 1984,
LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.

Heisenberg, W. (1958), Physics and Philosophy,
Tradução: Física e Filosofia, segunda edição, 1987,
Editora Universidade de Brasília.

Kolmogórov, A.N. (1950), Foundations of the Theory of Probability,
Chelsea Press.

Kolmogórov, A.N. & Fomín, S.V. (1978), Elementos de la Teoría de
Funciones y del análisis funcional, Editorial Mir-Moscú.

Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. (1978), Mecánica Cuántica-
Teoría no-relativista, Editorial Reverté S.A.

Messiah, A. (1958), Quantum Mechanics,
North-Holland Publ. Co., Inc.

Orlandi, E.P. (1986), O que é Linguística, Terceira Edição, 1989,
Editora Brasiliense.

Ozório de Almeida, A.M. (1982), Rev. Bras. Fís., 12, 788.

Peirce, C.S. (1983), Escritos Coligidos - Elementos de
Lógica (1878), Coleção Os Pensadores, Abril Cultural.

Rosen, G. (1969), Foundations of Classical and Quantum Dynamical
Theory, Academic Press, Inc.

Riesz, F. & Sz-Nagy, B. (1965), Functional Analysis,
Frederick Ungar Publ. Co.

Sakurai, J.J., (1985), Modern Quantum Mechanics,
The Benjamin/Cummings Publ. Co., Inc.

Saletan, E.J. & Cromer, A.H. (1971), Theoretical Mechanics,
John Wiley & Sons, Inc.

Schönberg, M. , Notas de Aula do Curso de História da Ciência,
Biblioteca do IFUSP.

Schwartz, L. (1961), Méthodes Mathématiques pour les Sciences
Physiques, Hermann, Paris.

Sudarshan, E.C.G. & Mukunda, N. (1974), Classical Dynamics: A Modern Perspective, John Wiley & Sons, Inc.

Vaz Jr., J. (1989), Seminários sobre Princípios Variacionais em Física, IFUSP.

Whittaker, E.T. (1944), A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, Dover Publications, Inc.

Yourgrau, W. & Mandelstam, S. (1968), Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory, Dover Publications, Inc.