UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

A ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA E OS ASPECTOS CLÁSSICOS DA TEORIA QUÂNTICA

Kaled Dechoum

SBI-IFUSP

305M810T2789

Tese apresentada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo como
parte dos requisitos para obtenção
do título de Doutor em Ciências

Banca examinadora:

Prof. Dr. Humberto de Menezes França (orientador) - IF/USP

Profa. Dra. Coraci Pereira Malta - IF/USP

Prof. Dr. Djalma Mirabelli Redondo - IFQ/USP-São Carlos

Prof. Dr. Antonio Vidiella Barranco - IF/UNICAMP

Prof. Dr. Carlos Farina - IF/UFRJ

Sylvio Canuto
Prof. Sylvio Roberto Accioly Canuto
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

SÃO PAULO
1998

S 37.6
D 943
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Dechoum, Kaled

A Eletrodinâmica Estocástica e os Aspectos Clássicos da
Teoria Quântica. São Paulo, 1998.

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática.

Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
Orientador: Prof. Dr. Humberto de Menezes França

Unitermos: 1. Eletrodinâmica Clássica; 2. Movimento Browniano;
3. Processos Estocásticos; 4. Fundamentos de Física.

USP/IF/SBI - 004/98

*À pequena e bela Mariam,
a Nelson Mandela
e ao Zé Roberto (o cego).*

"Sou quem falhei ser"

Fernando Pessoa

Agradecimentos

São muitas as pessoas com quem convivi neste instituto nos muitos anos que passei por aqui. Agradeço a todos indistintamente por terem propiciado toda essa história. Em particular, é preciso citar :

O Prof. Humberto M. França, que me fez olhar para o vazio e suscitou-me o gosto por vestir fantasmas, sou-lhe muito grato.

O Dr. Bolina e a bela Thaís, pelas leituras atentas.

O CNPq, pelo suporte financeiro.

resumo

Apresentamos uma tentativa de estender o alcance da teoria clássica na previsão de fenômenos microscópicos. Baseamos nosso enfoque na hipótese de que a mecânica quântica é uma teoria estocástica cujas origens são as flutuações eletromagnéticas de ponto zero.

Discutimos uma abordagem nova para a descrição do movimento browniano, clássico e quântico, através de uma equação clássica estocástica do tipo Schrödinger. A eficiência dessa equação é testada para sistemas lineares em contato com diferentes reservatórios de ruídos. Ambientes diferentes do espaço vazio levam naturalmente a interações do tipo força de Casimir.

Para a descrição de rotações intrínsecas introduzimos na teoria clássica a representação espinorial e obtemos uma equação do tipo Pauli-Schrödinger, com flutuação e dissipação, que nos permite gerar distribuições no espaço de fase para partículas com spin arbitrário.

Concluimos que a eletrodinâmica estocástica é uma teoria clássica apta a descrever os processos quânticos que se originam das flutuações do vácuo.

abstract

We present an attempt to extend the range of the classical theory in the description of microscopic phenomena. We base our point of view in the hypothesis that quantum mechanics is a stochastic theory whose origin is in the electromagnetic zero-point fluctuations.

We discuss a new approach for the description of Brownian motion, both classical and quantum, with a stochastic Schrödinger type equation. The effectiveness of this equation is tested for linear systems in contact with different noise reservoirs. Environments different from the vacuum lead naturally to the Casimir force interaction.

For the description of particles with spin we introduce in the classical theory a spinorial representation for rotations and obtain a Pauli-Schrödinger type equation, with fluctuation and dissipation, that allows us to generate phase space distributions for particles with arbitrary spin. We conclude that stochastic electrodynamics is a classical theory that is able to describe those quantum processes whose origins are in the vacuum fluctuations.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	3
2	A ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA	7
2.1	Flutuações Eletromagnéticas de Ponto Zero	8
2.1.1	Campos Eletromagnéticos Aleatórios	10
2.1.2	Analogia com a Eletrodinâmica Quântica	12
2.2	Métodos Matemáticos na SED	14
2.2.1	A Equação de Langevin	14
2.2.2	A Equação de Fokker-Planck	16
2.2.3	A Equação de Schrödinger Estocástica	18
3	EVOLUÇÃO CLÁSSICA DE SISTEMAS QUÂNTICOS SIMPLES	21
3.1	O Oscilador Harmônico na SED	22
3.1.1	Evolução no Espaço de Fase	23
3.1.2	Relações de Comutação	26
3.2	O Método da Equação de Schrödinger Estocástica	28
3.2.1	Análise Perturbativa	30
3.2.2	Solução Exata e Estados Não-Heisenberg	34
4	ELETRODINÂMICA DE CAVIDADES NO CONTEXTO DA SED	38
4.1	Caracterização do Sistema Dinâmico	39
4.1.1	Equações de Movimento	40

4.1.2	Flutuações e Espectros	41
4.2	Estudo da Interação do Solenóide com o Oscilador	44
4.2.1	Propriedades Relativas ao Oscilador	45
4.2.2	Emissão Espontânea	47
4.2.3	Força de Casimir	50
4.2.4	Distribuição Espectral das Flutuações da Voltagem no Circuito	52
4.3	O Método da Equação de Schrödinger Estocástica	54
4.3.1	Análise Perturbativa	55
4.3.2	Flutuações das Correntes e o Efeito Aharonov-Bohm	56
5	PARTÍCULAS CLÁSSICAS COM MOMENTO ANGULAR INTRÍNSECO	60
5.1	Teoria Clássica	61
5.1.1	Precessão de Larmor	62
5.1.2	Inclusão da Flutuação e Dissipação	65
5.2	Evolução no Espaço de Fase	67
5.2.1	Equação Clássica do Tipo Pauli-Schrödinger (Partículas Neutras)	67
5.2.2	Descrição Clássica do Experimento de Stern-Gerlach	69
6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	73
A	Dedução da Equação do Tipo Schrödinger Estocástica	76
B	Cálculo Perturbativo da Emissão Espontânea de um Oscilador Eletrizado	81
C	Campos de Interação do sistema Dipolo Elétrico-Solenóide	86
D	Cálculo da Energia e da Força de Casimir	89
E	Momento Magnético Anômalo	98
	Bibliografia	102
	Figuras	109

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Toda boa teoria física deve fazer previsões detalhadas. Para uma dada experiência bem definida, a teoria deve especificar corretamente o resultado ou ao menos revelar as probabilidades corretas de todos os resultados possíveis. Espera-se ainda que essa teoria traga alguma compreensão sobre os eventos físicos que presumivelmente sustentam os resultados observados. Desse ponto de vista, apesar de ser uma teoria muito bem sucedida, a mecânica quântica e, em particular, a eletrodinâmica quântica tem suscitado enormes debates, desde suas origens, acerca de suas interpretações.

Ainda que até o presente momento não haja contradição entre os resultados experimentais e as previsões teóricas da mecânica quântica, inúmeros autores sentem a necessidade de estudar teorias clássicas alternativas à teoria quântica, tanto para tentar estender o universo previsível da teoria clássica, quanto para buscar bases epistemológicas consistentes à teoria quântica. Em geral essas teorias alternativas trazem um caráter incompleto e, fenomenologicamente, são tão obscuras quanto a própria teoria quântica. É o caso, por exemplo, da mecânica estocástica de Nelson [1], que impõe ao espaço uma propriedade difusiva para o movimento clássico das partículas, ou da teoria de Bohm [2], que introduz na teoria clássica o potencial quântico para preservar o conceito de trajetória e ao mesmo tempo gerar a “difusão quântica”. O “ruído” incluído não é definido de forma única nem é independente do estado do sistema e, portanto, não tem caráter universal.

Dentre as teorias estocásticas alternativas à teoria quântica ressurgiu, na década de sessenta, a

eletrodinâmica estocástica (SED) [3], que na verdade é um resgate das idéias originais de Planck (1911), Einstein (1913) e Nernst (1916), entre outros [4]. Nessa teoria a origem do caráter probabilístico dos processos microscópicos vem do fato de haver um campo eletromagnético de fundo, presente em todo o universo e que equivale à versão clássica do campo de vácuo da eletrodinâmica quântica [5], que surge mais tarde, no final da década de 1920. O elemento central dessa teoria (SED) é a radiação eletromagnética de ponto zero, que é considerada real e puramente aleatória e cuja intensidade das flutuações é medida em termos da constante de Planck, que aparece como uma nova constante universal da natureza.

A introdução consistente do campo de radiação do vácuo ampliou o alcance da teoria clássica sem contradizer seus fundamentos. A hipótese dos fenômenos quânticos terem sua origem na interação da matéria com a radiação eletromagnética de ponto zero tem sido investigada pela teoria da eletrodinâmica estocástica com relativo grau de sucesso [3].

O objetivo dessa tese é mostrar que a teoria clássica quando formulada adequadamente e quando acrescida de novos elementos da realidade física (radiação de ponto zero nesse caso), pode ser usada para exibir propriedades da mecânica quântica não relativística. Muitos problemas complexos em mecânica quântica podem ser resolvidos dentro de uma formulação completamente clássica (veja referência [3] e referências internas).

A maneira que usamos para aproximar a mecânica quântica de uma descrição clássica mais intuitiva é baseada numa modificação apropriada da representação de Wigner, que nos permite expressar a mecânica quântica no formalismo do espaço de fase [6]. Essa descrição utiliza o máximo da linguagem clássica permitindo lidar com “números clássicos” em vez de operadores e aí reside o seu grande apelo. Para potenciais quadráticos, com coeficientes dependentes do tempo, a dinâmica descrita pela equação de Schrödinger é idêntica à dinâmica descrita pela equação de Liouville para a função de densidade de probabilidades no espaço de fase. Nesse caso, a abordagem clássica simplifica enormemente a compreensão de problemas quânticos, pois são usadas equações clássicas mais intuitivas.

Em certas circunstâncias, a correspondência entre a equação de Liouville e a representação de Wigner da mecânica quântica pode ser estendida para qualquer potencial. Mostramos também que, para sistemas abertos, uma equação de Liouville que carrega os efeitos de flutuação e

dissipação leva a uma formulação da mecânica quântica cuja descrição é feita por uma equação do tipo Schrödinger clássica estocástica.

A exposição dessas idéias e algumas aplicações são organizadas na seguinte forma. No Capítulo 2, fazemos uma breve introdução à eletrodinâmica estocástica. Mostramos como se introduzem as flutuações eletromagnéticas de ponto zero na teoria clássica através de um campo aleatório de média nula e de distribuição espectral conhecida. Apresentamos o enfoque padrão para o movimento browniano e desenvolvemos uma nova técnica, a partir das idéias de Wigner, para deduzir uma equação do tipo Schrödinger estocástica, que se mostra útil no tratamento de sistemas microscópicos em presença de ruídos eletromagnéticos de espectro arbitrário.

No Capítulo 3, discutimos os papéis exercidos pelas flutuações térmicas e de ponto zero, e pela dissipação por reação da radiação em sistemas lineares, clássicos e quânticos, mostrando a similaridade entre as descrições e como a teoria clássica pode gerar corretamente os resultados da mecânica quântica. Uma clara distinção entre as incertezas geradas pelas flutuações do vácuo, associadas ao princípio de incerteza de Heisenberg, e as incertezas associadas ao "ensemble" no seu estado inicial, é feita verificando que a primeira é a que prevalece no estado de equilíbrio.

Discutimos no Capítulo 4 a interação de um indutor com partículas polarizáveis como protótipo de um problema de eletrodinâmica de circuitos ou de cavidades resolvido no contexto da eletrodinâmica estocástica. O solenóide (indutor) pertence a um circuito RLC que está sujeito a flutuações térmicas e de ponto zero (ruído de Nyquist). A partícula polarizável é colocada na região externa ao solenóide e modelada como um dipolo elétrico oscilante. Observa-se que o espectro eletromagnético, que surge quando o sistema se acopla, é diferente daquele observado quando as partes do sistema se encontram separadas, o que gera uma interação do tipo força de Casimir entre os constituintes do sistema. Um vasto conjunto de fenômenos é descrito como, por exemplo, a alteração da vida média dos estados excitados do oscilador, força de Casimir entre o dipolo e o solenóide e a alteração do espectro do ruído do circuito (ruído de Nyquist anômalo). Esses fenômenos podem vir a ser observados experimentalmente e são previsões novas e originais da SED.

Usamos também o enfoque da equação de Schrödinger estocástica para descrever os mesmos fenômenos, deduzindo soluções exatas e perturbativas dessa equação. Também são feitas con-

siderações a respeito do efeito Aharonov-Bohm tendo em conta as flutuações reais na corrente do circuito. Utilizamos o dipolo elétrico como detector de campos eletromagnéticos provenientes do solenóide. Mostramos que estes campos existem mesmo no limite de o solenóide ser infinito.

No Capítulo 5, introduzimos o conceito de espinor para descrever, do ponto de vista operacional, a interação de partículas que têm momento magnético com o campo magnético externo. Deduzimos uma equação do tipo Pauli-Schrödinger no espaço de configurações a partir da equação clássica de Liouville para partículas com "spin" e momento de dipolo magnético de magnitude arbitrária. Interpretamos classicamente os resultados de experiências do tipo Stern-Gerlach e feixes moleculares de Rabi em termos de trajetórias contínuas e bem definidas, e também de variações contínuas do ângulo formado entre o vetor de momento angular intrínseco e o campo magnético externo.

Verificamos ainda que os campos de flutuações de ponto zero e reação da radiação exercem uma influência fundamental quando a partícula se encontra em estado de equilíbrio, sugerindo a idéia de "quantização do espaço" e explicando o comportamento paramagnético das partículas dotadas de dipolo magnético. Apresentamos também, no apêndice final, uma dedução clássica do momento magnético anômalo do elétron, num cálculo não relativístico, onde as flutuações eletromagnéticas de ponto zero são, de novo, o ingrediente essencial.

Capítulo 2

A ELETRODINÂMICA ESTOCÁSTICA

A teoria clássica da eletrodinâmica, com a hipótese da existência de um campo de radiação de fundo (flutuações de ponto zero ou flutuações do vácuo) de caráter aleatório, universal e atérmico, cujo espectro é invariante por transformações de Lorentz, é chamada de eletrodinâmica estocástica (SED) [3, 7, 8].

A SED permite ampliar os domínios de previsibilidade da teoria clássica para escalas antes exclusivas da teoria quântica. Forças de van der Waals entre partículas polarizáveis ou entre corpos neutros macroscópicos (forças de Casimir), o comportamento “quântico” de sistemas simples, como partícula livre e oscilador harmônico, propriedades magnéticas da matéria, como o diamagnetismo e o paramagnetismo, entre vários outros fenômenos (veja referência [3] e referências internas), podem ser explicados no âmbito da física clássica desde que se incluam nessa teoria as flutuações eletromagnéticas de ponto zero.

Do lado conceitual a SED oferece uma explicação elementar e coerente de certos processos fundamentais da mecânica quântica (MQ). O princípio da incerteza é associado à interação incontrolável entre a matéria e o campo aleatório de ponto zero, a estabilidade do estado fundamental de sistemas atômicos pode ser entendida como resultado do equilíbrio dinâmico entre a potência emitida pela matéria por irradiação e a potência absorvida das flutuações de ponto

zero. Há ainda uma perspectiva de se responder a questões de natureza física com interesse crescente na MQ como a dinâmica de transição para o equilíbrio de sistemas abertos, que talvez seja um dos resultados mais importantes que a SED pode oferecer.

A visão conceitual oferecida pela SED e seus resultados concretos sugerem a possibilidade de se ter uma teoria alternativa à MQ ou, mais precisamente, à eletrodinâmica quântica não relativística, com a vantagem de termos cálculos mais simplificados em certos casos particulares.

Na seção 2.1, introduzimos o postulado fundamental da existência das flutuações de ponto zero e suas propriedades estatísticas. Veremos como a constante de Planck entra na teoria como escala das flutuações do vácuo. Mostramos como a densidade espectral dessas flutuações coincide com a previsão da QED para o estado do campo não excitado. Na seção 2.2 descrevemos alguns métodos matemáticos da SED e veremos que a distribuição de equilíbrio no espaço de fase de um “ensemble” na SED coincide com a representação de Wigner da MQ, surgindo aí uma dedução de uma equação do tipo Schrödinger, a partir da equação de Liouville estocástica, que chamaremos de equação de Schrödinger estocástica.

2.1 Flutuações Eletromagnéticas de Ponto Zero

Uma das conseqüências mais intrigantes na teoria do corpo negro desenvolvida por Planck (1911), em sua segunda teoria [9], foi o aparecimento do termo que não dependia da temperatura na função de densidade espectral (e que mais tarde apareceria também na teoria quântica)

$$\rho(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \left(\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1} \right) \quad (2.1)$$

O pré-fator no segundo membro refere-se à densidade de estados numa cavidade (número de modos normais do campo eletromagnético, dentro da cavidade, por unidade de volume e por intervalo de freqüências) e o termo entre parênteses representa a energia média, do modo normal de freqüência ω do campo eletromagnético, à temperatura T . O primeiro termo da expressão acima refere-se ao espectro de ponto zero e o segundo termo está associado à parte térmica do espectro. À temperatura zero, cada modo normal do campo eletromagnético possui uma energia média de $\hbar\omega/2$.

Mesmo sem ir além da termodinâmica e da teoria clássica da radiação, é possível inferir a existência do espectro de flutuações de ponto zero a partir da lei de deslocamento de Wien. Essa lei diz respeito ao comportamento da função densidade espectral que descreve a radiação contida num recipiente, com paredes perfeitamente refletoras, onde se realiza uma compressão adiabática quase estática. Para que a função densidade espectral seja coerente com a termodinâmica, ela deve obedecer à equação diferencial:

$$T \frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial T} = 3\rho(\omega, T) - \omega \frac{\partial \rho(\omega, T)}{\partial \omega} \quad (2.2)$$

cujas solução geral é da forma $\rho(\omega, T) = \omega^3 f(\omega/T)$, sendo f uma função arbitrária.

Em temperatura nula, a solução (além da trivial $\rho(\omega, T = 0) = 0$) é

$$\rho(\omega, T = 0) = \alpha \omega^3 = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} \quad (2.3)$$

Nesse contexto, a constante de Planck seria um fator de escala das flutuações do campo eletromagnético que ocorrem mesmo em temperatura nula.

O próprio espectro de Planck foi deduzido por argumentos inteiramente clássicos, sem a hipótese da quantização dos níveis de energia do oscilador. Essa dedução [10, 11] é baseada na seguinte fórmula de Einstein-Gibbs para as flutuações da energia térmica de um sistema fechado em contato diatérmico com um reservatório à temperatura T :

$$kT^2 \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial T} = [\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2]_{termica} = [\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2]_{total} - [\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2]_{ponto\ zero} \quad (2.4)$$

Onde $\langle \epsilon \rangle$ é a energia média de um dos osciladores que compõem as paredes da cavidade. Essa energia é proporcional à função densidade espectral que descreve a radiação no interior da cavidade

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{3\pi^2 c^3}{\omega_0^2} \rho(\omega_0, T) \quad (2.5)$$

sendo ω_0 a frequência de ressonância do oscilador tridimensional.

É ainda possível mostrar que a média quadrática das flutuações da energia dos osciladores em equilíbrio com a radiação é tal que [11]

$$\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2 = \frac{1}{3} \langle \epsilon \rangle^2 \quad (2.6)$$

Substituindo as equações (2.5), (2.6) em (2.4), obtém-se a seguinte equação diferencial para a função densidade espectral total:

$$kT^2 \frac{\partial \rho(\omega_0, T)}{\partial T} = \frac{\pi^2 c^3}{\omega_0^2} \left[\rho^2(\omega_0, T) - \left(\frac{\hbar \omega_0^3}{2\pi^2 c^3} \right)^2 \right] \quad (2.7)$$

onde se utilizou a expressão (2.3) para as flutuações de ponto zero. A equação acima pode ser facilmente integrada, e o resultado será a fórmula de Rayleigh-Jeans quando $\hbar = 0$, ou seja, vácuo sem radiação, mas será a fórmula de Planck (eq.(2.1)) se o espectro de radiação de ponto zero for levado em conta.

Vale ressaltar que, como o espectro de radiação de ponto zero é isotrópico e homogêneo em todos os sistemas de referências inerciais, a expressão (2.3) é invariante por transformações de Lorentz [10]. Isso não ocorre com o espectro térmico.

Para um observador em um referencial movendo-se com aceleração constante, o espectro de ponto zero se transforma em espectro térmico associado a um corpo negro à temperatura T que se relaciona com a aceleração a do referencial pela expressão $kT = \hbar a / 2\pi c$ [12]. Esse é o mesmo efeito térmico gerado por referenciais acelerados descoberto por Davies [13] e Unruh [14] no contexto da teoria quântica de campos.

2.1.1 Campos Eletromagnéticos Aleatórios

Caracterizamos o campo de radiação eletromagnética aleatório, de origem térmica e de ponto zero, no espaço livre ou dentro de uma cavidade, da maneira introduzida por Einstein e Hopf [4], cujo objetivo era estudar a interação entre a matéria e a radiação gerada por um número muito grande de fontes emitindo incoerentemente.

O campo eletromagnético no espaço livre satisfaz as equações homogêneas de Maxwell, portanto permite uma expansão em termos de ondas planas transversais de frequências $\omega = c|\vec{k}|$ sendo $\vec{k}$ o vetor de onda. A componente elétrica do campo num dado ponto $\vec{r}$ num instante t é dada pela expansão:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} \left[\frac{c^3 \rho(\omega, T)}{\omega^2} \right]^{\frac{1}{2}} \hat{e}(\vec{k}, \lambda) \cos [\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \theta(\vec{k}, \lambda)] \quad (2.8)$$

onde $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$ é o vetor de polarização de cada onda satisfazendo as condições:

$$\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) = 0$$

$$\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) \cdot \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$\sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}_i(\vec{k}, \lambda) \vec{\epsilon}_j(\vec{k}, \lambda) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (2.9)$$

Na expansão (2.8) todos os comprimentos de onda estão presentes com fases aleatórias $\theta(\vec{k}, \lambda)$ uniformemente distribuídas de 0 a 2π , e $\rho(\omega, T)$ é a função de densidade espectral da cavidade considerada, que caracteriza a distribuição de energia eletromagnética por intervalo de frequências (expressão (2.1)). A componente magnética $\vec{B}(\vec{r}, t)$ desse campo de radiação é obtida por relação semelhante.

As propriedades estatísticas dos campos são devidas ao caráter aleatório das fases pois as fontes são incoerentes (estatisticamente independentes). Propriedades físicas importantes serão obtidas calculando médias no "ensemble" de todas as possíveis realizações do campo estocástico $\vec{E}(\vec{r}, t)$, o que corresponde a calcular médias sobre as fases aleatórias $\theta(\vec{k}, \lambda)$.

As fases $\theta(\vec{k}, \lambda)$, correspondentes aos diferentes modos do campo livre, são estatisticamente independentes com média nula

$$\langle \cos \theta(\vec{k}, \lambda) \rangle = \langle \sin \theta(\vec{k}, \lambda) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta = 0 \quad (2.10)$$

Em consequência, o valor médio (primeiro momento da distribuição) do campo aleatório $\vec{E}(\vec{r}, t)$ é nulo

$$\langle \vec{E}(\vec{r}, t) \rangle = 0 \quad (2.11)$$

As flutuações do campo eletromagnético podem ser em parte caracterizadas pela função de correlação calculada em dois pontos diferentes do espaço e do tempo para as diferentes componentes do campo. Usando o espectro de ponto zero na expressão (2.8) obtém-se

$$\langle E_i(\vec{r}_1, t_1) E_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle = \int d^3 \vec{k} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{\hbar \omega}{4\pi^2} \cos [\vec{k} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - \omega(t_1 - t_2)] \quad (2.12)$$

onde se utilizaram as relações (2.9) e as seguintes médias (ver ref. [8])

$$\langle \cos \theta(\vec{k}_1, \lambda_1) \cos \theta(\vec{k}_2, \lambda_2) \rangle = \langle \sin \theta(\vec{k}_1, \lambda_1) \sin \theta(\vec{k}_2, \lambda_2) \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta^3(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \quad (2.13)$$

e também

$$\langle \cos \theta(\vec{k}_1, \lambda_1) \sin \theta(\vec{k}_2, \lambda_2) \rangle = 0 \quad . \quad (2.14)$$

Supondo que a direção do eixo polar do vetor $\vec{k}$ coincide com a direção de $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$, a integração angular na expressão (2.12) é realizada com o auxílio da expressão

$$\int \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) d\Omega_k = \frac{8\pi}{3} \delta_{ij} \quad , \quad (2.15)$$

sendo $d\Omega_k$ o elemento de ângulo sólido no espaço dos vetores de ondas. Obtemos, após a mudança de variável $\omega = ck$, a função de correlação de dois pontos

$$\langle E_i(\vec{r}_1, t_1) E_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle = \delta_{ij} \int_0^\infty d\omega \frac{2\hbar\omega^3}{3\pi c^3} \cos \left[\omega \left(t_1 - t_2 - \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{c} \right) \right] \quad . \quad (2.16)$$

Na aproximação não relativística, quando o efeito de retardo pode ser desprezado, a expressão (2.12) acima pode ser aproximada para

$$\langle E_i(\vec{r}_1, t_1) E_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle = \delta_{ij} \int_0^\infty d\omega S(\omega) \cos \omega (t_1 - t_2) \quad . \quad (2.17)$$

Essa é uma forma particular do teorema de Wiener-Khintchine, que relaciona o espectro de frequências $S(\omega) = 2\hbar\omega^3/3\pi c^3$ com a transformada de Fourier da função de correlação de dois pontos.

É possível mostrar que o campo $\vec{E}(\vec{r}, t)$ fica completamente determinado pelos seus dois primeiros momentos [15], caracterizando assim um processo estocástico gaussiano de média nula.

2.1.2 Analogia com a Eletrodinâmica Quântica

Para se fazer uma comparação entre os campos descritos na SED com os operadores de campos da QED, escrevemos a expressão (2.8) na forma simétrica (ver ref. [16])

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \lambda} H(\vec{k}, T) \hat{e}(\vec{k}, \lambda) \left[a_{\vec{k}\lambda} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + a_{\vec{k}\lambda}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right] \quad , \quad (2.18)$$

e resultado similar para $\vec{B}(\vec{r}, t)$. A amplitude $H(\vec{k}, T)$ está relacionada com a função densidade espectral (veja eq.(2.8)) e, por simplicidade, para $T = 0$ temos

$$H(\vec{k}, 0) = H_0(\vec{k}) = \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V} \right)^{1/2} \quad , \quad (2.19)$$

onde V representa o volume da cavidade e os coeficientes $a_{\vec{k}\lambda}$ e $a_{\vec{k}\lambda}^*$ são definidos em termos das fases aleatórias

$$a_{\vec{k}\lambda} = e^{i\theta(\vec{k},\lambda)} \quad , \quad a_{\vec{k}\lambda}^* = e^{-i\theta(\vec{k},\lambda)} \quad , \quad (2.20)$$

e satisfazem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \langle a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}'\lambda'} \rangle &= \langle a_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}'\lambda'}^* \rangle = 0 \\ \langle a_{\vec{k}\lambda} a_{\vec{k}'\lambda'}^* \rangle &= \langle a_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}'\lambda'} \rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda\lambda'} \quad . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Essas expressões são interessantes porque levam a considerar as amplitudes a e a^* como sendo os análogos estocásticos dos operadores de criação e aniquilação usados na QED.

A energia média do campo eletromagnético no interior da cavidade de volume V é

$$\epsilon \equiv \frac{1}{8\pi} \int_V d^3\vec{r} (E^2 + B^2) = \frac{V}{2\pi} \sum_{\vec{k}\lambda} H_0^2(\vec{k}) a_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}\lambda} \quad . \quad (2.22)$$

De (2.21) e (2.22) podemos escrever a energia média do campo em temperatura nula como

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{V}{2\pi} \sum_{\vec{k}\lambda} H_0^2(\vec{k}) \langle a_{\vec{k}\lambda}^* a_{\vec{k}\lambda} \rangle = \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} \quad , \quad (2.23)$$

que é o mesmo resultado da QED para o valor esperado da hamiltoniana $\mathcal{H}$ do campo no estado de vácuo

$$\langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle = \sum_{\vec{k}\lambda} \frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}} \quad . \quad (2.24)$$

A função de correlação na SED coincide com o valor esperado no vácuo do produto simetrizado da função de dois pontos das componentes do operador de campo elétrico [16]

$$\langle 0 | \frac{1}{2} [\hat{E}_i(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}_j(\vec{r}_2, t_2) + \hat{E}_j(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}_i(\vec{r}_1, t_1)] | 0 \rangle = \langle E_i(\vec{r}_1, t_1) E_j(\vec{r}_2, t_2) \rangle \quad , \quad (2.25)$$

onde o segundo membro é dado por (2.12).

Em geral as funções de correlação de N-pontos dos campos livres, ordenados de forma simetrizada na QED, coincidirão com todos os correspondentes momentos da distribuição dos campos aleatórios da SED [15, 16].

2.2 Métodos Matemáticos na SED

Apresentamos nessa seção algumas técnicas usuais no tratamento do movimento browniano e sugerimos uma nova técnica que pode mostrar-se útil dentro do contexto da teoria dos processos estocásticos bem como da mecânica quântica de sistemas abertos. Mostramos que, nesse caso, a teoria quântica, dinamicamente representada por uma equação tipo Schrödinger estocástica, não necessariamente markoviana, revela duas fontes de indeterminação, uma ligada ao desconhecimento das condições iniciais (distribuição inicial do "ensemble") e outra de caráter aleatório, ligada aos ruídos térmico e de ponto zero.

2.2.1 A Equação de Langevin

A interação entre a radiação e a matéria na eletrodinâmica estocástica é inteiramente clássica. Os campos são descritos pelas soluções das equações de Maxwell, incluindo as flutuações de ponto zero e o movimento das partículas por meio da equação de Newton com a expressão da força de Lorentz.

No caso de uma das forças que agem sobre a partícula ser aleatória, a equação de Newton dá origem a uma equação estocástica conhecida como equação de Langevin. A solução de uma equação desse tipo fornece meios para calcularmos médias e variâncias associadas à posição e ao momento da partícula, os quais são utilizados para determinarmos a distribuição de probabilidades no espaço de fase.

A abordagem via equação de Langevin é largamente usada com o propósito de se encontrar efeitos de flutuações em sistemas mesoscópicos ou em sistemas microscópicos sujeitos a processos radiativos em que a função de correlação do ruído é conhecida.

O movimento unidimensional não relativístico de uma partícula de carga e e massa m , sujeita a um potencial externo determinístico, é descrito pela equação de Abraham-Lorentz [17]

$$m\ddot{x} = f(x) + m\tau \ddot{x} + eE_x(t) \quad , \quad (2.26)$$

onde $\tau = 2e^2/3mc^3$ e o termo $m\tau \ddot{x}$ representa a força de reação da radiação para uma partícula extensa, muito pequena [11, 17]. A aproximação de dipolo e a não inclusão da força magnética são

consistentes com o tratamento não relativístico e, portanto, a componente x do campo elétrico aleatório E_x é função apenas do tempo, cujas propriedades estatísticas foram desenvolvidas na seção anterior.

Embora a equação (2.26) contenha derivadas temporais de ordem superior a dois, gerando possíveis soluções indesejadas, é possível aproximar essa equação para obter uma outra de segunda ordem, que descreve as correções radioativas de forma a apresentar aproximações sucessivas ao termo de reação da radiação.

A equação (2.26) pode ser integrada mediante o uso de um fator integrante, fazendo

$$\dot{v}(t) = \ddot{x}(t) = e^{t/\tau} u(t) \quad , \quad (2.27)$$

e reescrevendo-a como

$$m\dot{u}(t) = -\frac{1}{\tau} e^{t/\tau} [f(x(t)) + eE_x(t)] \quad . \quad (2.28)$$

Integrando essa última equação e usando a equação (2.27), obtemos

$$m\dot{u}(t) = \frac{e^{t/\tau}}{\tau} \int_t^\infty dt' e^{-t'/\tau} [f(x(t')) + eE_x(t')] \quad . \quad (2.29)$$

As soluções dessa equação são as soluções físicas de (2.26), como pode ser visto diferenciando-a diretamente em relação ao tempo. No entanto (2.29) apresenta violação da causalidade uma vez que a aceleração depende dos valores das forças em instantes futuros. Entretanto a equação íntegro-diferencial (2.29) pode ser aproximada para uma equação diferencial de segunda ordem, expandindo $f(x(t'))$ em série de Taylor em torno de $x(t)$, uma vez que τ é muito pequeno (para o elétron $\tau = 10^{-22} s$). Tomando os dois primeiros termos da expansão, obtemos

$$m\ddot{x} = f(x) + \tau \dot{x} f'(x) + eE_m(t) \quad (2.30)$$

onde $f'(x) = df(x)/dx$ e o campo flutuante modificado

$$E_m(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^\infty e^{(t-t')/\tau} E_x(t') dt' \quad (2.31)$$

tem sua densidade espectral modificada para [3]

$$\rho_m(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3 (1 + \tau^2 \omega^2)} \quad . \quad (2.32)$$

Essa densidade espectral é menos divergente quando $\omega \rightarrow \infty$. Entretanto a equação (2.30) é apenas aparentemente causal visto que $E_m(t)$ é definido por (2.31). Por isso muitos autores [3, 11] usam (2.30) com $E_x(t)$ no lugar de $E_m(t)$, e consideram $m\tau \ddot{x} \simeq \tau \dot{x} f'(x)$ como aproximação para a reação da radiação. Acreditamos que o procedimento mais adequado é considerar a carga extensa [11]. Nesse caso não há divergências nem violação da causalidade.

2.2.2 A Equação de Fokker-Planck

Desejamos agora contruir uma descrição estatística em termos de uma equação do tipo Fokker-Planck para a densidade de probabilidades no espaço de fase. A equação de Fokker-Planck é um tipo especial de equação mestra. O problema de construir a equação de Fokker-Planck na SED torna-se muito difícil para o caso geral de forças arbitrárias devido ao caráter fortemente colorido do ruído de ponto zero (as frequências não contribuem igualmente para a função de correlação), que acaba gerando processos estocásticos gaussianos não markovianos.

Em problemas nos quais é possível fazer a aproximação markoviana para a distribuição de probabilidade (forças determinísticas lineares, partícula carregada no campo magnético uniforme), pode-se utilizar os métodos desenvolvidos por Chandrasekhar [18], que obtém a equação de Fokker-Planck como resultado de uma generalização do teorema de Liouville com inclusão do movimento browniano, gerado por flutuações, onde cada partícula tem seu movimento regido por uma equação de Langevin do tipo (2.30).

Supondo que o movimento browniano pode ser idealizado como um processo markoviano, a distribuição de probabilidade no espaço de fase no instante futuro $W(x, p, t)$ é derivada da distribuição no instante inicial $W(x_0, p_0)$ por meio da integral

$$W(x, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 Q(x, p, t | x_0, p_0) W(x_0, p_0) \quad , \quad (2.33)$$

onde $Q(x, p, t | x_0, p_0) dx dp$ é a probabilidade de transição dos valores iniciais x_0 e p_0 para os valores x e p , decorrido um intervalo de tempo t . Essa transição se dá devido à ação de todas as forças (aleatórias e determinísticas) que atuam na partícula. O conhecimento da função $Q(x, p, t | x_0, p_0)$ possibilita uma descrição completa do problema.

Essa probabilidade de transição satisfaz a equação de Fokker-Planck no espaço de fase, conhecida também como equação de Liouville generalizada. Para o caso unidimensional, pode-se mostrar [18] que ela é escrita como

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p} \left[f(x) + \frac{\tau}{m} f'(x)p \right] Q = D \frac{\partial^2 Q}{\partial p^2} \quad (2.34)$$

com a constante de difusão D definida por

$$D = \frac{e^2}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{\Delta t} dt'' \langle E_x(t') E_x(t'') \rangle \quad (2.35)$$

A obtenção da equação de Fokker-Planck geral na SED, para processos que possuem memória (não markovianos), foi desenvolvida por de la Peña e Cetto [19, 20]. O ponto de partida para construir a equação de Fokker-Planck é a equação da continuidade

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\dot{x}W) + \frac{\partial}{\partial p} (\dot{p}W) = 0 \quad (2.36)$$

sendo $\dot{p}$ dado pela equação de Abraham-Lorentz (2.30)

$$p = m\dot{x} \quad , \quad \dot{p} = f(x) + \tau f'(x)p + eE_x(t) \quad (2.37)$$

onde tomamos $E_x(t)$ no lugar do campo modificado (não causal). A equação (2.36), com a expressão (2.37), pode ser reconhecida como uma equação de Liouville estocástica. A equação de Fokker-Planck derivada da equação (2.36) por la Peña e Cetto [19] tem a seguinte estrutura

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p} \left[f(x) + \frac{\tau}{m} f'(x)p \right] Q = \frac{\partial^2}{\partial p^2} \hat{D}_{pp} Q + \frac{\partial^2}{\partial x \partial p} \hat{D}_{xp} Q \quad (2.38)$$

com a condição $Q(x, p, t = 0 | x_0, p_0) = \delta(x - x_0) \delta(p - p_0)$.

Na expressão acima $\hat{D}_{pp}$ e $\hat{D}_{xp}$ são operadores integrais chamados de operadores de difusão e são definidos pelas expressões

$$\begin{aligned} \hat{D}_{pp} Q(x, p, t) &= e^2 \int_{-\infty}^t dt' \langle E_x(t) E_x(t') \rangle \frac{\partial \bar{p}(t)}{\partial \bar{p}(t')} Q(x, p, t') \\ \hat{D}_{xp} Q(x, p, t) &= e^2 \int_{-\infty}^t dt' \langle E_x(t) E_x(t') \rangle \frac{\partial \bar{x}(t)}{\partial \bar{p}(t')} Q(x, p, t') \quad , \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde $\bar{x}(t')$ e $\bar{p}(t')$ representam variáveis causais (não estocásticas) que se obtêm a partir de $x(t)$ e $p(t)$ fazendo anular a força estocástica $eE_x(t)$ na expressão (2.37). Como se pode ver, os

operadores de difusão são dependentes da história do sistema. No caso em que a função de correlação é uma função delta de Dirac (ruído branco), a expressão (2.38) dá origem à equação (2.34), que descreve processos markovianos.

O caráter não markoviano da equação (2.38) está associado ao fato de uma mudança em Q no instante t depender de valores prévios de Q como mostram as relações (2.39), que envolvem integração sobre o passado. Esse caráter não markoviano é uma consequência direta da duração finita da autocorrelação do campo explicitado na equação (2.16).

Uma descrição detalhada no espaço de fase baseada na equação (2.38) deve envolver dificuldades matemáticas sérias para o caso de uma força $f(x)$ qualquer. Muitas propriedades do sistema, porém, podem ser investigadas fazendo uma conexão direta entre a equação (2.36) com uma equação do tipo Schrödinger em vez da equação de Fokker-Planck (2.38), o que possibilita utilizar técnicas da MQ para resolver a equação de Liouville estocástica (2.36), como veremos a seguir.

2.2.3 A Equação de Schrödinger Estocástica

A descrição dos fenômenos pela mecânica estatística clássica é baseada no conceito de espaço de fase. A distribuição de probabilidades $W(x, p, t)$ obedece à equação (2.36) e o valor médio de qualquer variável $A(x, p, t)$ é calculado de acordo com a relação

$$\langle A \rangle = \int A(x, p, t) W(x, p, t) dx dp \quad (2.40)$$

Muitas vezes esbarramos em dificuldades sérias ao tentarmos resolver a equação Liouville (2.36) ou a equação de Fokker-Planck (2.38) para potenciais arbitrários, que são mais facilmente resolvidos pela MQ. Devido à similaridade entre as teorias, é natural pensarmos em usar técnicas matemáticas da MQ para resolver problemas da SED.

Com o intuito de mostrar que a dinâmica fornecida pela equação de Liouville pode incorporar a dinâmica quântica como aproximação (no limite de tempos longos os resultados da SED forneceriam os resultados da QED), iremos apresentar uma dedução simples de uma equação do tipo Schrödinger, que nos permitirá intercambiar técnicas de ambas as teorias. Por introduzir transientes com decaimento para o equilíbrio, a equação a ser deduzida torna possível

compreender melhor os conceitos de limite clássico e limite quântico.

A partir da equação de Liouville construiremos uma equação generalizada de Schrödinger, que inclui efeitos de dissipação por reação da radiação e flutuações térmicas e de ponto zero ou qualquer outra forma de ruído (ôhmico, por exemplo). Iremos também distinguir, claramente, incertezas sistemáticas relacionadas com a distribuição inicial do "ensemble", cujas variâncias satisfazem a relação

$$\Delta x \Delta p = \hbar' \quad , \quad (2.41)$$

sendo $\hbar'$ um parâmetro livre com dimensão de ação, de incertezas de origem não controladas, aleatórias, geradas pelas flutuações do vazio e que satisfazem, no equilíbrio, a desigualdade de Heisenberg

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad . \quad (2.42)$$

sendo $\hbar$ a constante de Planck que atua como escala das flutuações do vácuo. Note que o limite $\hbar' \rightarrow 0$ pode ser tomado, já que a SED é uma teoria clássica.

Para isso é conveniente introduzir a transformada de Fourier da densidade de probabilidades $W(x, p, t)$ em relação à variável p

$$\bar{W}(x, y, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p, t) \exp \left(-\frac{2ipy}{\hbar'} \right) \quad , \quad (2.43)$$

onde y é uma coordenada auxiliar. Vale lembrar que a constante de Planck $\hbar$ aparece no termo do campo flutuante e $\hbar'$ está relacionado à distribuição inicial do "ensemble" clássico. É fácil ver que a equação satisfeita por $\bar{W}(x, y, t)$, uma vez que $W(x, p, t)$ satisfaz a equação da continuidade (2.36), é

$$-i\hbar' \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{(\hbar')^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \bar{W} + 2y[eE_x(t) - V'(x)]\bar{W} = 0 \quad , \quad (2.44)$$

onde usamos a equação de movimento unidimensional

$$\dot{p} = m\ddot{x} = -V'(x) + e[E_{VF}(t) + E_{RR}(t)] = -V'(x) + eE_x(t) \quad , \quad (2.45)$$

sendo que E_{VF} é a componente x do campo elétrico proveniente das flutuações do vácuo e eE_{RR} representa a força de reação da radiação.

A equação (2.44) pode ser colocada numa forma similar à equação de Schrödinger. Para isso é necessário introduzir funções complexas auxiliares $\psi(x, t)$. Vamos considerar apenas transformadas de Fourier $\bar{W}(x, y, t)$, que podem ser escritas na forma

$$\bar{W}(x, y, t) \equiv \psi^*(x + y, t)\psi(x - y, t) \quad . \quad (2.46)$$

Fazendo uma mudança de variáveis

$$s = x - y \quad , \quad r = x + y \quad , \quad (2.47)$$

a equação (2.44) torna-se

$$-i\hbar' \frac{\partial}{\partial t} [\psi^*(r)\psi(s)] + \frac{(\hbar')^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \psi^*(r)\psi(s) + (r-s) \left[eE(t) - V'\left(\frac{r+s}{2}\right) \right] \psi^*(r)\psi(s) = 0 \quad . \quad (2.48)$$

Para o caso particular em que o potencial é quadrático com coeficientes dependentes do tempo

$$V(x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \quad , \quad (2.49)$$

que engloba uma vasta gama de problemas importantes em física, incluindo o oscilador paramétrico ou qualquer problema que possa ser modelado pelo potencial acima (inclusive o átomo de hidrogênio [21]), obtém-se exatamente, após fatoração

$$i\hbar' \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{(\hbar')^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + V(r)\psi - er [E_{VF}(t) + E_{RR}(t)] \psi \quad . \quad (2.50)$$

Alguns autores [22, 23] utilizam procedimentos parecidos para incluir potenciais mais gerais. No apêndice A, é feita uma dedução mais completa da equação de Schrödinger estocástica válida para uma força não linear qualquer. Isso é possível porque o parâmetro $\hbar'$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno.

A descrição via equação de Schrödinger estocástica incorpora em seus fundamentos o aspecto estatístico da teoria quântica, reconhecendo nas flutuações do vácuo o ruído fundamental, gerador do princípio de incerteza de Heisenberg, e inclui também o desconhecimento do estado inicial do “ensemble” que descreve o sistema. Veremos nos próximos capítulos algumas soluções de (2.50) para o caso de potenciais quadráticos e para diferentes ruídos.

Capítulo 3

EVOLUÇÃO CLÁSSICA DE SISTEMAS QUÂNTICOS SIMPLES

Salientamos no capítulo anterior que há uma correspondência exata, para sistemas lineares, entre a descrição clássica de um "ensemble" de partículas, que evolui segundo a equação de Liouville, e a descrição quântica via equação de Schrödinger para o movimento de uma partícula. Neste capítulo discutimos como os resultados da SED para o oscilador harmônico coincidem exatamente com a descrição da QED quando levamos em conta os efeitos das flutuações do vácuo e da reação da radiação.

Desenvolvemos uma nova descrição baseada na equação de Schrödinger estocástica, corroborando resultados anteriores e mostrando aspectos novos que transcendem alguns resultados da MQ. Estados proibidos pela MQ podem ser reconhecidos nessa nova abordagem uma vez que há uma clara distinção entre as incertezas associadas à construção do "ensemble" inicial e as incertezas geradas pelas flutuações de ponto zero (e térmica), esta última determinando a distribuição final de equilíbrio.

O oscilador harmônico fornece uma oportunidade única de estudar, sem grandes dificuldades matemáticas, as propriedades adquiridas por um sistema mecânico em contato permanente com as flutuações do vácuo mostrando como uma partícula clássica "torna-se", com essa interação, um "objeto quântico".

Os sistemas lineares podem ser resolvidos exatamente pelos três métodos descritos no Capítulo 1. Na seção 3.1, mostramos a solução tradicional do oscilador na SED pelo método da equação de Fokker-Planck, e nessa perspectiva fazemos uma releitura das relações de comutação e do princípio de incerteza de Heisenberg através da análise do papel exercido pelos campos acoplados à partícula. Na seção 3.2, apresentamos a equação de Schrödinger estocástica do oscilador e sua solução exata. Uma análise perturbativa também é obtida para descrever a transição de um estado excitado para o estado de equilíbrio, de forma a tornar a descrição da SED bem próxima à da QED.

3.1 O Oscilador Harmônico na SED

O objetivo principal desta seção é descrever a evolução temporal de um "ensemble" de osciladores harmônicos carregados, todos com a mesma massa m e frequência natural de oscilação ω_0 , que se encontram acoplados ao campo eletromagnético de ponto zero e aos campos próprios de radiação, usando a estrutura da teoria eletromagnética clássica.

Cada representante do "ensemble" tem seu movimento unidimensional descrito pela equação não relativística de Abraham-Lorentz, que pode ser aproximada por

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma\dot{x} + eE_{VF}(t) \quad (3.1)$$

A força dissipativa $m\gamma\dot{x}$ é a aproximação para a força de reação da radiação [24] e a constante γ dada por $(2e^2/3mc^3)\omega_0^2$. Aqui $E_{VF}(t)$ representa a componente x do campo elétrico de ponto zero na origem do sistema de coordenadas.

A partir de uma distribuição inicial no espaço de fase $W_{in}(x_0, p_0)$, onde x_0 e p_0 representam um ponto no espaço de fase no instante $t = 0$, queremos obter a distribuição num estado posterior $W(x, p, t)$ que nos revelará como o "ensemble" evolui para o equilíbrio no limite $(t \rightarrow \infty)$.

3.1.1 Evolução no Espaço de Fase

O método empregado aqui será o da equação de Fokker-Planck [25, 26], muito utilizado em teorias sobre o movimento browniano [27]. Apesar do espectro do ruído de ponto zero ser proporcional a ω^3 , constituindo assim um ruído colorido, o oscilador harmônico carrega a peculiaridade de ter uma frequência natural ω_0 e, dentre todos os modos do campo eletromagnético presentes, haverá ressonância apenas num intervalo muito curto de frequências em torno de ω_0 . Dessa forma pode-se fazer uma aproximação markoviana para esse processo estocástico, o que viabiliza o uso dessa técnica.

A equação de Fokker-Planck para a probabilidade de transição $Q(xpt|x_0p_0)$ (ou abreviadamente Q) de o sistema evoluir de um ponto do espaço de fase (x_0, p_0) para outro ponto (x, p) após um intervalo de tempo t é (veja eq. (2.34))

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{m} Q \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left[-(\gamma p + m\omega_0^2 x) + D \frac{\partial}{\partial p} \right] Q = 0 \quad , \quad (3.2)$$

sendo D o coeficiente de difusão dado por (veja equação (2.35) e ref. [3])

$$D = \frac{\hbar m \gamma \omega_0}{2} \quad , \quad (3.3)$$

quando $T = 0$.

A evolução temporal descrita pela equação (3.2) tem solução bem conhecida e seu procedimento pode ser encontrado em textos clássicos [27]. A probabilidade de transição que descreve a solução exata de (3.2) é dada pela expressão (ver, por exemplo, o artigo de Wang e Uhlenbeck na referência [27])

$$Q(xpt|x_0p_0) = \frac{1}{2\pi\alpha_1\alpha_2\sqrt{1-\xi^2}} \exp \left\{ - \left[\frac{(p-p_d)^2}{\alpha_1^2} + \frac{(x-x_d)^2}{\alpha_2^2} - \frac{2\xi}{\alpha_1\alpha_2} (p-p_d)(x-x_d) \right] / 2(1-\xi^2) \right\} \quad . \quad (3.4)$$

Trata-se de uma gaussiana bidimensional correlacionada centrada na trajetória determinística, isto é, x_d é a solução da equação (3.1) quando se faz $E_{VF} = 0$. Para o oscilador submetido a uma força externa com dependência temporal arbitrária, o resultado acima continua válido,

apenas exigindo que x_d seja a solução determinística do oscilador forçado. As condições iniciais x_0 e p_0 entram nas soluções x_d e p_d .

A variância relativa ao momento, definida por $\alpha_1^2 = \langle (p - p_d)^2 \rangle$, é dada pela expressão[28]

$$\alpha_1^2(t) = \frac{D}{\gamma} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{\gamma^2}{2\omega_1^2} \sin^2(\omega_1 t) - \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin(2\omega_1 t) \right] e^{-\gamma t} \right\} , \quad (3.5)$$

enquanto que a variância associada à posição, $\alpha_2^2 = \langle (x - x_d)^2 \rangle$, é dada por[28]

$$\alpha_2^2(t) = \frac{D}{m^2 \gamma \omega_0^2} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{\gamma^2}{2\omega_1^2} \sin^2(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin(2\omega_1 t) \right] e^{-\gamma t} \right\} , \quad (3.6)$$

com $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4$.

O parâmetro de correlação ξ é definido como $\xi \alpha_1 \alpha_2 \equiv \langle (x - x_d)(p - p_d) \rangle$ e expresso por

$$\xi \alpha_1 \alpha_2 = \frac{D}{m \omega_1^2} \sin^2(\omega_1 t) e^{-\gamma t} . \quad (3.7)$$

A correlação entre x e p se anula em $t = 0$ e no limite estacionário $t \rightarrow \infty$.

A probabilidade de transição $Q(xpt|x_0p_0)$ obtida acima fornece todas as informações sobre o movimento aleatório das partículas no espaço de fase que inicialmente estavam perfeitamente localizadas, ou seja,

$$\lim_{t \rightarrow 0} Q(xpt|x_0p_0) = \delta(x - x_0) \delta(p - p_0) . \quad (3.8)$$

Todos os resultados acima podem ser facilmente estendidos para temperaturas não nulas; para isso basta modificarmos o coeficiente de difusão para [16]

$$D = \frac{\hbar m \gamma \omega_0}{2} \coth(\hbar \omega_0 / 2kT) . \quad (3.9)$$

A evolução temporal da distribuição de probabilidades de um "ensemble" de partículas, que inicialmente é dada pela distribuição $W_{in}(x_0, p_0)$, é obtida da expressão

$$W(x, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 W_{in}(x_0, p_0) Q(xpt|x_0p_0) . \quad (3.10)$$

A situação em que a distribuição $W_{in}(x_0, p_0)$ é também uma distribuição gaussiana com variâncias genéricas foi amplamente discutida na dissertação de mestrado [28] onde obtivemos transições para o equilíbrio, a partir de uma certa distribuição inicial, na forma de estados comprimidos (squeezed states) [29] que decaem para estados coerentes.

Vamos aqui discutir uma situação um pouco mais simples porém rica o suficiente para mostrar evoluções para o regime quântico. Vamos supor que $W_{in}(x_0, p_0)$ é dada pela expressão

$$W_{in}(x_0, p_0) = \frac{1}{\pi \hbar'} \exp \left[-\frac{m\omega_0 x_0^2}{\hbar'} - \frac{p_0^2}{m\hbar'\omega_0} \right] \quad (3.11)$$

onde o parâmetro livre $\hbar'$ está associado à distribuição inicial através da seguinte relação

$$\langle (\Delta x_0)^2 \rangle \langle (\Delta p_0)^2 \rangle = \left(\frac{\hbar'}{2} \right)^2 \quad (3.12)$$

Vale salientar que $\hbar'$ pode assumir qualquer valor, inclusive zero, pois, em princípio, pode-se construir qualquer distribuição inicial, inclusive a que viole o princípio de incerteza de Heisenberg.

Vamos agora calcular a energia média $\mathcal{E}(t)$ como função do tempo definida pela expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \right) W(x, p, t) \\ &\equiv \overline{\frac{p^2}{2m}} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 \overline{x^2} \quad (3.13) \end{aligned}$$

sendo $W(x, p, t)$ dada por (3.10), com a solução (3.4) e a distribuição inicial (3.11). Assim, obtém-se [28]

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \frac{\hbar'}{2m\omega_0} \left[\cos^2(\omega_1 t) + \left(1 + \frac{\gamma^2}{4\omega_1^2} \right) \sin^2(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin(2\omega_1 t) \right] e^{-\gamma t} + \\ &\quad \frac{\hbar}{2m\omega_0} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{\gamma^2}{2\omega_1^2} \sin^2(\omega_1 t) + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin(2\omega_1 t) \right] e^{-\gamma t} \right\} \quad (3.14) \end{aligned}$$

e expressão análoga para $\overline{p^2}$. Note que o último termo depende da constante de Planck $\hbar$.

É interessante observar que $\overline{x^2} = \hbar'/2m\omega_0$ para $t = 0$. No entanto, para $\gamma t \gg 1$ obtém-se $\overline{x^2} = \hbar/2m\omega_0$, como esperado pela MQ, ou seja, após o transiente $\gamma t \gg 1$, estabelece-se o regime "quântico" regido pelo princípio de incerteza de Heisenberg,

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = (\hbar/2)^2 \quad (3.15)$$

O resultado final, para a energia média do oscilador como função do tempo, é dado pela expressão

$$\mathcal{E}(t) = \frac{\hbar\omega_0}{2} + \frac{(\hbar' - \hbar)\omega_0}{2} \left[1 + \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t) \right] e^{-\gamma t} \quad (3.16)$$

onde se desprezaram potências maiores que γ^4/ω_0^4 , visto que $\gamma/\omega_0 \ll 1$. É fácil observar que $\mathcal{E}(t)$ varia de $\mathcal{E}(0) = \hbar'\omega_0/2$, quando $t = 0$, para $\mathcal{E}(\infty) = \hbar\omega_0/2$, que é a energia média de equilíbrio do oscilador não excitado ($T = 0$). É ainda importante perceber que essa transição pode ser lenta, pois $\gamma \ll \omega_0$. Esse transiente não é previsto pela MQ pois nessa teoria se supõe que o princípio da incerteza de Heisenberg vale sempre. Isso corresponde a observar apenas o estado de equilíbrio, ignorando completamente como o sistema relaxa para esse estado.

3.1.2 Relações de Comutação

Uma das bases fundamentais da Mecânica Quântica é, sem dúvida, o princípio de incerteza, proposto inicialmente por Heisenberg, e que diz respeito à impossibilidade de determinação simultânea da posição e do momento conjugado. A hipótese aceita pelos representantes da escola de Copenhague de que o princípio de incerteza é o resultado da interação incontrollável entre o objeto de estudo e o aparelho de medida, ou então, de que esses operadores são associados a medições incompatíveis, não revela o significado físico dessa importante relação.

A obtenção da relação de comutação a partir da solução da equação de operadores de Heisenberg, para o caso particular do oscilador harmônico, foi sugerida por Wigner [32] e por Sokolov e Tumanov [30] e posteriormente por vários outros autores (veja [9] e referências internas).

O ponto de partida para a obtenção da relação de comutação é a equação de Heisenberg para o operador de posição

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) - \tau \ddot{x}(t) = \frac{e}{m} E_x(t) \quad , \quad (3.17)$$

sendo $E_x(t)$ a componente x do operador de campo elétrico quantizado que, na aproximação de dipolo, é dada por

$$E_x(t) = i \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V} \right)^{1/2} \hat{e}_x(\vec{k}, \lambda) \left[a_{\vec{k}\lambda} e^{-i\omega t} - a_{\vec{k}\lambda}^\dagger e^{i\omega t} \right] \quad . \quad (3.18)$$

Aqui $a_{\vec{k}\lambda}$ e $a_{\vec{k}\lambda}^\dagger$ representam os operadores de aniquilação e de criação de fótons cujo vetor de onda é $\vec{k}$ e cujo índice de polarização é λ . Esses operadores obedecem às seguintes relações de comutação:

$$[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'}$$

$$[a_{\vec{k}\lambda}, a_{\vec{k}'\lambda'}] = [a_{\vec{k}\lambda}^\dagger, a_{\vec{k}'\lambda'}^\dagger] = 0 \quad (3.19)$$

Para percebermos como as flutuações do campo eletromagnético de ponto zero geram as incertezas quânticas, veremos como o comutador $[x(t), m\dot{x}(t)]$ evolui no tempo a partir de uma situação hipotética em que os operadores de posição e momento mecânico comutam em $t = 0$.

Uma solução da equação (3.17), com a aproximação $-\tau \ddot{x} \simeq \tau \omega_0^2 \dot{x}$, é dada pela expressão

$$x(t) = \frac{e}{m} \int_0^t G(t-t') E_x(t') dt' \quad (3.20)$$

sendo $G(t-t')$ a função de Green do oscilador subamortecido. Dessa forma, a solução para (3.17) é dada por ($\gamma = \tau \omega_0^2$)

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e}{m\omega_0} \int_0^t dt' e^{-\gamma/2(t-t')} \left[\frac{e^{i\omega_0(t-t')} - e^{-i\omega_0(t-t')}}{2i} \right] \times \\ &\times i \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \left[e^{-i\omega_{\vec{k}}t} a_{\vec{k}\lambda} - e^{i\omega_{\vec{k}}t} a_{\vec{k}\lambda}^\dagger \right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

Integrando em t' e agrupando os termos, obtemos o seguinte resultado para o operador $x(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{e}{2m\omega_0} \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi\hbar\omega_{\vec{k}}}{V} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_x(\vec{k}, \lambda) \times \\ &\times \left\{ \frac{2i\omega_0 e^{i\omega_{\vec{k}}t} - [(2\omega + i\gamma) \sin \omega_0 t + 2i \cos \omega_0 t] e^{-\gamma/2t}}{(\omega_0^2 + \gamma^2/4 - \omega^2) - i\gamma\omega} a_{\vec{k}\lambda} + C.H. \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

O operador de momento mecânico $m\dot{x}(t)$ é obtido por derivação direta de (3.22) com relação ao tempo. A relação de comutação $[x(t), m\dot{x}(t)]$ pode ser, portanto, calculada com a ajuda das relações (3.19), fornecendo

$$[x(t), m\dot{x}(t)] = i\hbar \left[1 - \left(1 + \frac{\gamma}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t \right) e^{-\gamma t} \right] \quad (3.23)$$

onde se observam os seguintes limites assintóticos

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} [x(t), m\dot{x}(t)] &= 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} [x(t), m\dot{x}(t)] &= i\hbar \end{aligned} \quad (3.24)$$

A relação (3.23) sugere, portanto, que a origem do princípio de incerteza está diretamente ligada à estrutura do vácuo eletromagnético e essa mesma expressão mostra, em aproximação $0(\gamma^2/\omega_0^2)$, de que forma uma partícula newtoniana inicialmente localizada (no caso um oscilador) atinge o regime quântico.

A relação de comutação entre o operador de posição e o momento canônico mostra que as flutuações associadas ao campo eletromagnético são as fontes das incertezas quânticas. Da solução estacionária de (3.17) mostra-se que $(cE_x(t) = -\partial A_{VF}/\partial t)$

$$\left[x, m\dot{x} + \frac{e}{c} A_{VF} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} \right] = [x, m\dot{x}] =$$

$$= i \frac{8\pi e^2}{3m} \int_0^\infty d\omega \frac{\omega \rho_0(\omega)}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2e^2\omega^3/3mc^3)^2} = i\hbar \quad (3.25)$$

As fontes das flutuações quânticas do operador $x(t)$ vêm do campo $E_{VF}(t)$, que depende da constante de Planck. Observe que a última igualdade em (3.25) só será válida se a força de reação da radiação for exatamente $2e^2 \ddot{x} / 3c^3$. Esse resultado é bastante comentado por Milonni na referência [9] no que se refere à necessidade de se incluir as flutuações de ponto zero do campo eletromagnético na equação de movimento de Heisenberg (eq. (3.17)), de maneira a preservar a relação de comutação (eq. (3.25)) em todos os instantes.

3.2 O Método da Equação de Schrödinger Estocástica

Iremos agora utilizar as técnicas da equação de Schrödinger estocástica como um novo método matemático para resolver o mesmo problema da seção anterior, tendo em vista a possibilidade de introduzir na MQ efeitos de flutuação e dissipação, tão importantes em teorias de sistemas abertos [33, 34, 35, 36]. Esse problema tem sido analisado extensivamente na teoria quântica onde se tomam por base as equações de movimento de Heisenberg desempenhando o papel de equação de Langevin quântica (ver (3.17)). No entanto o mesmo problema não tem sido tratado via equação de Schrödinger. Dessa forma, mostraremos que, assim como ocorre uma correspondência entre as equações de Heisenberg e a equação clássica de Langevin, o mesmo ocorre entre a equação de Liouville e a equação de Schrödinger.

A transformação da equação de Liouville em outra equação do tipo Schrödinger é conhecida desde os trabalhos de Wigner [6]. Nosso propósito é discutir os efeitos dos campos flutuantes (ruídos) e da reação da radiação (dissipação) na evolução dos estados de um sistema microscópico, no espaço de fase, usando as idéias de Wigner num contexto diferente.

De acordo com a SED, a equação clássica estocástica, transformada a partir da equação de Liouville, tem a forma da equação de Schrödinger (veja eq. (2.50)) e é dada, para o caso particular do oscilador harmônico, com potencial $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$, pela expressão

$$i\hbar' \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{(\hbar')^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - ex(E_{VF}(t) + E_{RR}(t)) \right] \psi \quad (3.26)$$

Desejamos tomar $\hbar' \neq \hbar$ para salientar que $\hbar'$ não tem nenhum significado dinâmico. Nesse caso particular, essa constante é apenas um parâmetro associado à distribuição inicial, enquanto que $\hbar$ (constante de Planck), que aparece no termo $E_{VF}(t)$, tem significado dinâmico e determina o estado de equilíbrio do sistema.

A função auxiliar $\psi(x, t)$ depende da variável aleatória x , uma vez que $E_{VF}(t)$ representa o campo aleatório de ponto zero. Deve-se impor algumas restrições a $\psi(x, t)$ uma vez que a quantidade relevante $W(x, p, t)$, distribuição de probabilidades no espaço de fase, que se constrói a partir das equações (2.43) e (2.46), deve ser uma função positiva.

Veremos adiante que essa restrição nos faz considerar funções $\psi(x, t)$ com a forma de distribuições gaussianas deslocadas da origem (estados coerentes). Conseqüentemente, não há nenhuma perda de generalidade associada a esse enfoque, uma vez que os estados coerentes formam um conjunto completo de estados para o oscilador harmônico.

Vale ressaltar que a observação acima não nos impede de usarmos uma base completa qualquer para construir os estados físicos e assim todo conhecimento adquirido anteriormente pela teoria quântica pode ser útil na resolução de problemas no contexto da SED.

Certamente uma base natural para se construírem soluções da equação de Schrödinger estocástica é dada pelos auto-estados da hamiltoniana do oscilador harmônico

$$\phi_n(x) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar'} \right)^{1/4} \frac{\exp\left(-\frac{m\omega_0}{2\hbar'} x^2\right)}{(2^n n!)^{1/2}} H_n\left(x \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar'}}\right) \quad (3.27)$$

sendo $H_n(x)$ as funções de Hermite. Esses estados $\phi_n(x)$ formam um conjunto completo e ortonormal de funções, satisfazendo a condição

$$\sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^*(x) \phi_n(y) = \delta(x - y) \quad (3.28)$$

As funções $\phi_n(x) \exp(-i\epsilon_n t/\hbar')$ são soluções da equação (3.26) quando $e = 0$, com o conjunto de "energias" ϵ_n dadas por

$$\epsilon_n = \hbar' \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (3.29)$$

Podemos, portanto, escrever as soluções da equação de Schrödinger estocástica na forma

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) e^{-i\epsilon_n t/\hbar'} \quad (3.30)$$

e determinar os coeficientes $a_n(t)$ substituindo (3.27) em (3.26). Iremos a seguir discutir as soluções exatas e aproximadas da equação (3.26).

3.2.1 Análise Perturbativa

Na teoria quântica de Schrödinger, os auto-estados das hamiltonianas que descrevem sistemas físicos (oscilador, átomos,...) são estados estacionários estáveis. Um sistema excitado, portanto, não deveria decair segundo essa aproximação da teoria quântica. Quando se quer observar transições entre estados ou decaimento para o equilíbrio, invocam-se potenciais perturbativos ou dissipação incluídos *ad hoc*, que geram problemas com a conservação da corrente de probabilidades [36].

Na SED não há sistemas isolados. Os átomos encontram-se constantemente acoplados aos campos térmicos, aos de ponto zero e também aos campos próprios de irradiação, e ainda a alguma outra fonte de ruído gerado pela presença de ambientes circundantes diferentes do espaço vazio. Para se compreender melhor o mecanismo responsável pela emissão espontânea ou forçada de um sistema excitado e comparar os resultados da SED com a QED, faremos aqui uma análise que torna próximos os enfoques entre as teorias.

Estudaremos a transição para o equilíbrio de um "ensemble" de osciladores harmônicos carregados, todos identicamente preparados no mesmo estado de "energia" ϕ_t no instante $t = 0$.

A partir desse instante, "ligamos" os campos $E_{VF}(t)$ e $E_{RR}(t)$, que serão tratados perturbativamente, e observaremos o papel que cada um desses campos desempenha.

Vamos então introduzir a hipótese de que para $t = 0$ a função ψ seja dada por

$$\psi(x, 0) = \phi_\ell(x) \quad (3.31)$$

onde $\phi_\ell(x)$ é dado por (3.27) sendo ℓ um inteiro arbitrário. O procedimento padrão em teoria de perturbação dependente do tempo [37] fornece-nos a seguinte equação para os coeficientes $a_n(t)$ que aparecem na expansão (3.30)

$$a_n(t) \simeq \delta_{n\ell} + \frac{ie}{\hbar'} x_{n\ell} \int_0^t d\tau [E_{VF}(\tau) + E_{RR}(\tau)] e^{i\omega_{n\ell}\tau} + \dots \quad (3.32)$$

onde se definiu $\hbar'\omega_{n\ell} \equiv \epsilon_n - \epsilon_\ell$ e $x_{n\ell}$ é a notação para a expressão

$$x_{n\ell} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n^*(x) x \phi_\ell(x) \simeq -\frac{\ddot{x}_{n\ell}}{\omega_0^2} \quad (3.33)$$

A aproximação em (3.33) é válida se considerarmos a força harmônica muito maior que as forças eletromagnéticas que comparecem na equação (3.1). Note que o limite $\hbar' \rightarrow 0$ não pode ser tomado nesse tratamento perturbativo (veja expressão (3.32)).

A potência média absorvida ou emitida pelo oscilador, devido ao acoplamento com os campos de radiação, é expressa por

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_{tot}(\ell) &\equiv \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p, t) \frac{p}{m} e [E_{VF}(t) + E_{RR}(t)] \right\rangle \equiv \\ &\equiv \dot{\mathcal{E}}_{VF} + \dot{\mathcal{E}}_{RR} \quad (3.34) \end{aligned}$$

A distribuição clássica $W(x, p, t)$, solução da equação de Liouville, é obtida a partir da função auxiliar $\psi(x, t)$ calculada pelo método perturbativo. A média no "ensemble", indicada por $\langle \rangle$, tem exatamente o mesmo sentido daquele introduzido no capítulo 2, ou seja, são médias nas fases aleatórias que aparecem na expressão para $E_{VF}(t)$ e nas expressões que dependem desse campo. Nessa análise aproximada, iremos obter $\dot{\mathcal{E}}_{tot}(\ell)$ até ordem e^2 na série perturbativa.

A força de reação da radiação será aproximada por [24]

$$e E_{RR}(t) \simeq \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{x} \simeq -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^2 \dot{x} \equiv -\gamma p \quad (3.35)$$

Portanto, até ordem e^2 , a potência emitida pelo oscilador devido ao acoplamento deste com seu campo próprio de radiação será dada por (veja a expressão (3.34))

$$\dot{\mathcal{E}}_{RR} = \left\langle - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{\gamma}{m} p^2 W(x, p, t) \right\rangle = -2\gamma \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p^2}{2m} W(x, p, t) \right\rangle . \quad (3.36)$$

Concluimos, então, que a potência $\dot{\mathcal{E}}_{RR}$ pode ser expressa na seguinte forma simplificada

$$\dot{\mathcal{E}}_{RR} = -2\gamma \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = -2\gamma \left\langle \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right\rangle = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \omega_0^2 \omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\phi_t(x)|^2 , \quad (3.37)$$

onde se usou $\alpha_n \simeq \delta_{ln}$ (veja eq. (3.32)) em primeira aproximação, uma vez que a constante γ já é proporcional a e^2 .

Outra forma de obter a contribuição da reação da radiação para o processo de decaimento é partir diretamente da fórmula de Larmor [17] para a potência total irradiada

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}_{RR} &\equiv \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p, t) \left[-\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \langle \ddot{x} \rangle^2 \right] \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x, t) \left[-\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \langle \ddot{x} \rangle^2 \right] \psi(x, t) . \end{aligned} \quad (3.38)$$

De novo, a expressão acima já é da ordem de e^2 e, portanto, utiliza-se a aproximação $\psi(x, t) \simeq \phi_t(x) + 0(e)$.

Uma forma conveniente de escrever o resultado acima consiste em utilizar a relação de completeza (3.28) e expressar o resultado segundo a notação

$$\dot{\mathcal{E}}_{RR} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \langle \ell | \langle \ddot{x} \rangle^2 | \ell \rangle \equiv -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{x}_{\ell n} \ddot{x}_{\ell n} . \quad (3.39)$$

Esse resultado sinaliza que, se apenas a reação da radiação estiver presente, todos os estados do oscilador, inclusive o estado fundamental, serão instáveis pois o quadrado da aceleração tem média (valor esperado) não nula em todos os estados. Assim, o oscilador irá irradiar toda a energia eletromagnética até colapsar. Essa mesma conclusão já havia sido obtida no contexto da QED através das equações de Heisenberg [38].

Iremos obter uma expressão similar para $\dot{\mathcal{E}}_{VF}$. Como alguns passos preliminares necessários para clarificar a dedução são encontrados no apêndice B, tornaremos sucinta a exposição que se segue.

Definimos a corrente de probabilidades $J(x, t)$ e, com o auxílio de (2.43) e (2.46), obtemos (ver apêndice B)

$$J(x, t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dp p W(x, p, t) = \text{Re} \left[\psi^*(x, t) \left(-i\hbar' \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t) \right] \quad (3.40)$$

e, portanto, a potência associada às flutuações do vácuo será dada por (ver eq. (3.34))

$$\dot{\mathcal{E}}_{VF} = \left\langle \frac{e}{m} E_{VF}(t) \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x, t) \left(-i\hbar' \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi(x, t) \right\rangle \quad (3.41)$$

Considerando que $\langle E_{VF} \rangle = 0$ e que a função de correlação dos campos do vácuo eletromagnético é dada por (2.17), obtemos de (3.30), (3.32) e de (3.41) o seguinte resultado (ver Apêndice B)

$$\dot{\mathcal{E}}_{VF} \simeq 2 \frac{e^2}{\hbar'} \text{Re} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \omega_{nl} x_{nl} x_{nl} \int_0^t d\tau e^{-i\omega_{nl}\tau} \frac{2\pi}{3} \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} d\omega \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} |\omega|^3 e^{i\omega\tau} \right] \quad (3.42)$$

onde $\omega_{\max}$ é a frequência de corte, compatível com as aproximações de dipolo e movimentos não relativísticos usados nessa abordagem.

É bem conhecido que divergências surgem em cálculos de várias quantidades físicas (energia, momento, ...) associados com a interação da partícula puntual com o campo eletromagnético de ponto zero [38]. Essas divergências são provocadas pelas contribuições dos modos de altas frequências do campo. Um corte nas altas frequências é escolhido de maneira que a frequência não seja tão alta, respeitando a aproximação não relativística, porém que seja muito maior do que a frequência natural de oscilação ω_0 do dipolo elétrico

$$\omega_0 \ll \omega_{\max} \ll \frac{mc^2}{\hbar} \quad (3.43)$$

Supondo que $t|\omega - \omega_{nl}| \gg 1$, pode-se fazer a seguinte substituição

$$\int_0^t d\tau e^{i\tau(\omega - \omega_{nl})} \longrightarrow \int_0^{\infty} d\tau e^{i\tau(\omega - \omega_{nl})} = \frac{i}{\omega - \omega_{nl}} + \pi\delta(\omega - \omega_{nl}) \quad (3.44)$$

e, portanto, a expressão (3.42) assume a seguinte forma (detalhes no apêndice B) :

$$\dot{\mathcal{E}}_{VF} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\hbar}{\hbar'} \left[\sum_{n(>l)} \ddot{x}_{ln} \ddot{x}_{nl} - \sum_{n(<l)} \ddot{x}_{ln} \ddot{x}_{nl} \right] \quad (3.45)$$

desde que a aproximação (3.33) seja válida e lembrando ainda que $\omega_{n\ell} = -\omega_{\ell n}$.

Combinando as equações (3.39) e (3.45), pode-se expressar a equação (3.34) na seguinte forma

$$\dot{\mathcal{E}}_{tot}(\ell) \simeq -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left[\left(1 + \frac{\hbar}{\hbar'}\right) \sum_{n(<\ell)} \ddot{x}_{\ell n} \ddot{x}_{n\ell} + \left(1 - \frac{\hbar}{\hbar'}\right) \sum_{n(>\ell)} \ddot{x}_{\ell n} \ddot{x}_{n\ell} \right] , \quad (3.46)$$

que é o principal resultado desta seção.

O primeiro termo da expressão (3.46) representa transições de um “nível” ℓ para outros “níveis” n de menor “energia” $\epsilon_n < \epsilon_\ell = \hbar' \omega_0 \left(\ell + \frac{1}{2} \right)$ (transições para baixo). Por outro lado, uma vez que $\hbar'$ é um parâmetro livre, ambos os tipos de transições são permitidos. No entanto, se em particular $\hbar' = \hbar$, obtém-se:

$$\dot{\mathcal{E}}_{tot}(\ell) = -\frac{4}{3} \frac{e^2}{c^3} \sum_{n(<\ell)} \ddot{x}_{\ell n} \ddot{x}_{n\ell} = -\frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3} (\epsilon_\ell - \epsilon_0) , \quad (3.47)$$

que é um resultado conhecido na QED obtido por Dalibard et al. [38], através de um cálculo perturbativo, onde se usa o quadro de Heisenberg e $\hbar' = \hbar$.

Cálculos exatos (não perturbativos), para o caso geral de temperatura diferente de zero, admitem transições para cima e para baixo [40, 41]. Encontram-se, por exemplo, soluções do tipo estados coerentes comprimidos (squeezed states) com dissipação, para o caso em que $\hbar' < \hbar$ (estados sub-Heisenberg) [42].

É ainda possível concluir que o único estado estacionário é o de energia $\epsilon = \hbar \omega_0 / 2$ e que não pode ser estável na ausência das flutuações de ponto zero, que exatamente contrabalançam a energia perdida devido à reação da radiação. Assim, percebemos que é a energia do vácuo que proíbe que o oscilador (átomos) colapse para o núcleo.

3.2.2 Solução Exata e Estados Não-Heisenberg

Vamos agora verificar como é possível encontrar um conjunto de soluções exatas (não perturbativas) da equação de Schrödinger estocástica (3.26).

Usando um procedimento bem conhecido [43], procuramos soluções da equação (3.26) na forma de estados gaussianos

$$\psi_c(x, t) = \phi_0(x - x_c(t)) \exp \left[\frac{i}{\hbar'} (xp_c(t) - g(t)) \right] , \quad (3.48)$$

onde consideramos que $\hbar' \neq \hbar$ e $\phi_0(x)$ é dado por (3.27) quando $n = 0$. Vamos chamar essas amplitudes de distribuição de estados clássicos sub-Heisenberg se $\hbar' < \hbar$. As funções $x_c(t)$, $p_c(t)$ e $g(t)$ são obtidas substituindo a expressão (3.48) em (3.26).

Mostra-se diretamente que $p_c(t) = m\dot{x}_c(t)$ e $x_c(t)$ deve obedecer à equação clássica do movimento (3.1). Também não é difícil mostrar que a expressão para $g(t)$ é dada por [40]

$$g(t) = \frac{\hbar'\omega_0}{2}t + \int_0^t dt' \left[\frac{p_c^2(t')}{2m} - \frac{m\omega_0^2 x_c^2(t')}{2} \right] \quad (3.49)$$

Vamos considerar a solução da equação de movimento (3.1) na seguinte forma

$$x_c(t) \equiv x_d(t) + x_f(t) \quad , \quad (3.50)$$

onde $x_f(t)$ é a solução com o termo flutuante em (3.1) e $x_d(t)$ é a solução sem esse termo, que depende de x_0 (posição inicial do centro da distribuição gaussiana) e de p_0/m , que é a velocidade inicial do centro dessa distribuição. Mais explicitamente

$$x_d \equiv \left[x_0 \cos \omega_1 t + \left(\frac{m\gamma x_0 + 2p_0}{2m\omega_1} \right) \sin \omega_1 t \right] e^{-\frac{\gamma t}{2}} \quad , \quad (3.51)$$

onde $\omega_1 \simeq \omega_0$ pois $\gamma \ll \omega_0$ (ver (3.6)).

A parte flutuante $x_f(t)$, que sofre ação das flutuações do vácuo no termo $eE_{VF}(t)$, é dada por

$$x_f(t) \equiv \frac{e}{m\omega_1} \int_0^t dt' E_{VF}(t') \sin[\omega_1(t-t')] e^{\gamma(t-t')/2} \quad (3.52)$$

Com o conhecimento dessas soluções exatas $\psi_c(x, t)$, pode-se obter expressões exatas para os coeficientes $a_n(t)$, usados na fórmula (3.30) para expandir $\psi_c(x, t)$ numa base completa (no caso, os auto-estados do oscilador). Esses coeficientes já foram obtidos anteriormente [40, 44].

É interessante notar que, para cada par x_0 e p_0 (veja eq. (3.48)), temos um estado diferente. Pode-se, portanto, obter um conjunto de distribuições no espaço de fase $W(x, p, t)$ para diferentes $\psi_c(x, t)$. A completeza dessas funções foi discutida anteriormente [41, 45].

A função de Wigner, associada aos estados $\psi_c(x, t)$, também tem uma forma simples. Se substituirmos (3.48) em (2.46), usando (2.43), obtemos

$$W(x, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar'} \exp \left[-\frac{m\omega_0}{\hbar'}(x - x_c)^2 - \frac{(p - p_c)^2}{\hbar'm\omega_0} \right] \quad (3.53)$$

Note que $\psi_c(x, t)$ e $W(x, p, t)$ são funções flutuantes (estocásticas) para $t > 0$, já que $x_f(t)$ depende explicitamente de $E_{VF}(t)$ (veja (3.52)).

Uma vez que $\hbar'$ é, até essa altura, um parâmetro livre, podemos considerar, por exemplo, o caso particular

$$\lim_{\hbar' \rightarrow 0} W(x, p, t=0) = \delta(x - x_0) \delta(p - p_0) \quad , \quad (3.54)$$

que representa uma situação tipicamente determinística. Porém, com o passar do tempo, pode-se mostrar a partir da equação (3.53) que as médias estatísticas $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ e $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ são tais que

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p)^2 \rangle = (\hbar/2)^2 \quad . \quad (3.55)$$

para $t \rightarrow \infty$, onde $\hbar$ é a constante de Planck, somente se $\hbar' \rightarrow 0$. Para compreendermos isso, basta calcularmos o valor médio $\langle x^2 \rangle$ definido por

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &\equiv \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 |\psi(x, t)|^2 \right\rangle \equiv \\ &\equiv \left(\frac{m\omega_0}{\hbar'} \right)^{1/2} \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp \left[\frac{-2m\omega_0(x - x_c)^2}{\hbar'} \right] \left[(x - x_c)^2 + 2xx_c - x_c^2 \right] \right\rangle \\ &= \frac{\hbar'}{2m\omega_0} + \langle x_c^2 \rangle = \frac{(\hbar' + \hbar)}{2m\omega_0} \quad , \end{aligned} \quad (3.56)$$

já que $\phi_0(x)$, definido em (3.27), é um estado normalizado. Esse resultado somente coincide com o valor correto à temperatura zero ($\hbar/2m\omega_0$) se tomarmos $\hbar' \rightarrow 0$. O mesmo raciocínio vale para o cálculo de $\langle p^2 \rangle = m^2\omega_0^2 \langle x^2 \rangle$.

Esse resultado é sugestivo e pode mostrar a correspondência que existe entre a descrição de Schrödinger da MQ e a equação do tipo Schrödinger estocástica, deduzida da equação de Liouville com termos de flutuação e dissipação. A primeira foi construída para fornecer a evolução temporal das ondas de de Broglie e a segunda para fornecer, através de uma transformação de Wigner, a evolução temporal no espaço de fase de um "ensemble" de partículas.

O fato de tomarmos o limite de $\hbar'$ tendendo a zero na equação do tipo Schrödinger estocástica corresponde, tomando por base a MQ, a eliminar o caráter ondulatório da partícula e os efeitos quânticos que surgem do conceito de onda de de Broglie porém, preservando os efeitos quânticos, dependentes da constante de Planck, que surgem do termo de flutuação do vácuo. O fato de

vários resultados, no caso de sistemas lineares, coincidirem nas duas descrições sugere fortemente que as ondas de de Broglie podem ter suas origens nas flutuações eletromagnéticas de ponto zero, como tem sido sugerido por de la Peña e Cetto [46].

Capítulo 4

ELETRODINÂMICA DE CAVIDADES NO CONTEXTO DA SED

Efeitos da existência de um vácuo eletromagnético não trivial têm sido extensivamente estudados desde sua concepção no início deste século [4] até os dias atuais. Foram descobertos [47] importantes efeitos da radiação de ponto zero em sistemas físicos, como as correções radiativas nos níveis de energia dos átomos (deslocamento Lamb), o momento magnético anômalo [47, 48] e o efeito Casimir [49] — forças trocadas por átomos e objetos macroscópicos, intermediadas pelas flutuações do vácuo — que tem sido comprovado experimentalmente [50].

No final da década de quarenta, surge uma das principais idéias do que hoje chamamos eletrodinâmica de cavidades [51]. Purcell [52] sugere que a taxa de emissão espontânea associada a transições atômicas é significativamente estimulada na região da radiofrequência, quando se acopla o átomo a um circuito elétrico ressonante. Dessa maneira, conclui, os modos de radiação são modificados, em relação ao espaço livre, devido à presença do “ambiente” (circuito elétrico).

Em 1954, Bloembergen e Pound previram que o mesmo mecanismo deveria estimular as taxas de emissão espontânea coletiva em experiências de ressonância magnética onde momentos magnéticos são acoplados ao circuito ressonante (ou cavidade) [53]. Nesse mesmo ano, foi

descoberto o *maser* ao se fazer um feixe de moléculas de amônia passar por uma cavidade ressonante [54]. A partir de então, nota-se um interesse crescente no estudo da interação de átomos com campos eletromagnéticos em cavidades, onde se estudam as modificações nas propriedades radiativas dos átomos e as alterações produzidas no campo eletromagnético, tornando-se hoje uma área específica da QED [55, 56].

Um cálculo recente na SED, em eletrodinâmica de cavidades, surgiu num artigo intitulado "Spontaneous Emission in Confined Space According to Stochastic Electrodynamics" [57], onde os autores estudam o comportamento de átomos excitados entre espelhos (cavidade retangular), obtendo as modificações na emissão espontânea provocadas pelos novos contornos (diferentes do espaço livre). Uma comparação com resultados recentes [58] mostra perfeito acordo entre os resultados teóricos clássicos [57] e experimentais [58]. É importante lembrar que alguns cálculos apresentados na referência [57] já haviam sido obtidos na SED num contexto mais geral [59], assim como a própria força de Casimir entre placas [60] e forças de van der Waals (retardadas e não-retardadas) entre partículas polarizáveis e paredes metálicas (e também dielétricas) [61, 62]

Neste capítulo estudaremos um problema típico de eletrodinâmica de cavidades, motivados pelo sucesso da abordagem da SED e por um interesse (talvez novo) em se tentar controlar a emissão "espontânea" de átomos a partir de correntes macroscópicas externas geradas por circuito simples [63]. Analisaremos o problema segundo a teoria da SED com um enfoque tradicional baseado na equação de Langevin [63], utilizando uma linguagem clássica e fornecendo durante os cálculos uma imagem fisicamente transparente, e também a partir do novo enfoque baseado na equação de Schrödinger estocástica.

4.1 Caracterização do Sistema Dinâmico

O sistema físico que vamos estudar consiste em um longo solenóide (indutor) interagindo com um dipolo elétrico (átomos ou moléculas, por exemplo). O dipolo elétrico é um oscilador microscópico unidimensional (a extensão para três dimensões é natural) carregado com carga e e com massa m , que oscila com frequência natural ω_0 ao longo do eixo x e é colocado na origem do sistema de coordenadas. A uma distância y (no eixo y) desse dipolo há um longo solenóide de indutância

L cujo eixo é orientado paralelamente à direção z . Iremos considerar o solenóide constituído por um número grande N de espiras circulares de raio a que se estendem de $-\ell/2$ a $\ell/2$ na direção z . O solenóide ($L = 4\pi^2 N^2 a^2 / c^2 \ell$) é parte integrante de um circuito RLC. Vamos ainda supor que $a < y \ll \ell$, isto é, o solenóide pode ser considerado muito longo ("infinito") do ponto de vista do oscilador (veja Fig. 1).

O sistema se encontra imerso em radiação eletromagnética de origem térmica e de ponto zero. Para incorporar os efeitos radiativos presentes no sistema, usaremos o enfoque da SED que, para sistemas lineares, fornece resultados em acordo com a QED (ver capítulo 2).

4.1.1 Equações de Movimento

A equação clássica, não relativística, que determina o movimento do oscilador microscópico é dada por¹

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + e E_x(t) + m\tau \ddot{x} \quad , \quad (4.1)$$

onde $\tau = 2e^2/3mc^3$ e $E_x(t)$ é a componente x do campo elétrico externo total, na aproximação de dipolo, e é independente da posição x da carga (estamos supondo $|x| \ll y$). Nesse problema o campo $E_x(t)$ vem de três contribuições que denotaremos por

$$E_x(t) = E_{VF}(t) + E_{sol}(t) + E_d(t) \quad , \quad (4.2)$$

onde $E_{sol}(t)$ é a componente x do campo elétrico gerado pelas flutuações na corrente do solenóide ($c\vec{E}_{sol}(t) = -\partial\vec{A}_{sol}/\partial t$). Estamos denotando por $E_{VF}(t)$ a componente x do campo elétrico associado às flutuações do vácuo no espaço livre. Supomos ainda a existência de um campo elétrico externo determinístico, que vem de alguma outra fonte, e que estamos denotando por $E_d(t)$. Esse campo elétrico determinístico está sob controle de um experimentalista que fornece o mecanismo de excitação externa do oscilador.

A equação que governa a corrente elétrica no circuito RLC é dada por

$$L\dot{I}(t) + RI(t) + \frac{1}{C} \int^t I(t') dt' = \mathcal{E}(t) \quad , \quad (4.3)$$

¹Na QED a equação (4.1) também pode ser vista como uma equação para o operador $x(t)$, na representação de Heisenberg, e assim $E_x(t)$ simboliza a componente x do operador de campo elétrico (ver seção 3.1.2).

sendo $I(t)$ a corrente elétrica de origens determinísticas e estocásticas. Isso ocorre porque a força eletromotriz total, que denotamos por

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{NJ}(t) + \mathcal{E}_{ind}(t) + \mathcal{E}_{det}(t) \quad . \quad (4.4)$$

tem essas duas origens.

Na ausência de uma força eletromotriz advinda de uma bateria. $\mathcal{E}_{det}(t) = 0$, temos duas contribuições, uma gerada pelas flutuações térmicas e de ponto zero, conhecida como ruído de Nyquist-Jonhson [64], que denotamos por $\mathcal{E}_{NJ}(t)$, e outra, $\mathcal{E}_{ind}(t)$, que é a força eletromotriz induzida pelos campos gerados pelo dipolo oscilante em cada espira do solenóide.

4.1.2 Flutuações e Espectros

A função de correlação associada às flutuações térmicas e de ponto zero é dada pela média no "ensemble"

$$\langle E_{VF}(t) E_{VF}(0) \rangle = \frac{4\pi}{3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) e^{i\omega t} \quad , \quad (4.5)$$

onde T é a temperatura de todo o sistema (radiação e circuito).

Vamos denotar a transformada de Fourier de $E_{VF}(t)$ por $\tilde{E}_{VF}(\omega)$:

$$E_{VF}(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{E}_{VF}(\omega) e^{-i\omega t} \quad . \quad (4.6)$$

A função de correlação da transformada de Fourier de (4.6) é, então, dada por

$$\langle \tilde{E}_{VF}(\omega) \tilde{E}_{VF}(\omega') \rangle = \frac{\hbar\omega^3}{3\pi c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \delta(\omega + \omega') \quad . \quad (4.7)$$

A função de correlação associada à flutuação da corrente é bem conhecida no caso particular no qual o dipolo elétrico está muito longe do circuito (nenhuma interação). No caso do circuito RLC, a corrente flutuante que se origina devido ao ruído $\mathcal{E}_{NJ}(t)$ tem solução em termos da transformada de Fourier escrita na forma

$$\tilde{I}_f(\omega) = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{NJ}(\omega)}{Z(\omega)} \quad , \quad (4.8)$$

onde $Z(\omega) = R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$ é a impedância do circuito e $\tilde{\mathcal{E}}_{NJ}(\omega)$ é a transformada de Fourier do ruído $\mathcal{E}_{NJ}(t)$. Supondo que o comprimento de onda característico da radiação emitida ($\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$) seja grande comparado às dimensões do circuito, é possível mostrar [64], com base no teorema flutuação-dissipação [25], que relaciona as flutuações nas correntes com as propriedades dissipativas do sistema (com a resistência R do circuito) e no fato de o circuito RLC ser um oscilador elétrico $\Omega^{-1} = \sqrt{LC}$, cuja energia média a temperatura zero é $\frac{\hbar\Omega}{2}$, que o espectro das flutuações da voltagem (ruído de Nyquist-Jonhson) é expresso por

$$\langle \tilde{\mathcal{E}}_{NJ}(\omega) \tilde{\mathcal{E}}_{NJ}(\omega') \rangle = \frac{R\hbar\omega}{2\pi} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \delta(\omega + \omega') \quad (4.9)$$

Quando se acoplam os elementos do sistema (dipolo e circuito), esses objetos “percebem” que estão imersos num ruído alterado pelos novos contornos. O ruído adicional sentido pelo dipolo vem dos campos irradiados pelo solenóide ($E_{\text{sol}}(t)$ em (4.2)).

A componente x do campo elétrico retardado que se origina das flutuações na corrente do solenóide (veja Apêndice C para detalhes) é dada por

$$E_{\text{sol}}(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{\text{sol}}(t)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{I}(\omega) (-i\omega) \frac{b(\omega, y)}{c} e^{-i\omega t} \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} b(\omega, y) &\simeq \frac{2\pi Na^2}{\ell y} \int_0^{\ell/2y} d\alpha \exp\left(i \frac{\omega y}{c} \sqrt{1 + \alpha^2}\right) \times \\ &\times \left[(1 + \alpha^2)^{-3/2} - i \frac{\omega y}{c} (1 + \alpha^2)^{-1} \right] \simeq \\ &\simeq \frac{2\pi Na^2}{y\sqrt{\ell^2 + 4y^2}} \simeq \frac{2\pi Na^2}{\ell y} \quad (4.11) \end{aligned}$$

A integração em (4.11) aparece porque supusemos que as espiras circulares podem ser consideradas como uma linha de dipolos magnéticos uniformemente distribuídos (de $-\ell/2$ a $\ell/2$) ao longo do solenóide. A primeira aproximação em (4.11) é válida quando $a \ll y$, a segunda quando $\ell\omega \ll c$ (desprezam-se os efeitos de retardo) e o último quando $y \ll \ell$. No entanto pode-se mostrar que a última expressão também é válida para qualquer razão $y/a > 1$. Com essas aproximações, o resultado para $E_{\text{sol}}(t)$ adquire uma forma simples e familiar

$$E_{\text{sol}}(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_{\text{sol}}}{\partial t} \simeq -\frac{2\pi N a^2}{c^2 \ell y} \dot{I}(t) \quad (4.12)$$

Na expressão acima $I(t)$ representa a corrente de origem determinística e estocástica, e N/ℓ a densidade de espiras do solenóide.

A distribuição espectral das flutuações do vácuo (4.5) será modificada pela presença do solenóide. Vamos calcular essa modificação na hipótese de que as flutuações na corrente e as flutuações eletromagnéticas de ponto zero são estatisticamente independentes. Na ausência de interação (dipolo elétrico removido), as propriedades estatísticas de $E_{\text{sol}}(t)$ podem ser obtidas de (4.8), (4.9) e (4.12). Nesse caso, a função de correlação da parte flutuante do campo elétrico total, $E_f \equiv E_{VF} + E_{\text{sol}}$, é tal que

$$\langle E_f(t) E_f(0) \rangle = \frac{4\pi}{3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \rho(\omega, y) e^{i\omega t} \quad (4.13)$$

e é caracterizada pela distribuição espectral $\rho(\omega, y)$. Supondo que $\langle \tilde{E}_{VF}(\omega) \tilde{E}_{\text{sol}}(\omega') \rangle = 0$ mostra-se, usando (4.5), (4.8), (4.9) e (4.10), que

$$\rho(\omega, y) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) [1 + \beta(\omega, y)] \quad (4.14)$$

onde

$$\beta(\omega, y) = \frac{3}{2} \frac{R|b(\omega, y)|^2}{c|Z(\omega)|^2} \simeq \frac{3}{2} \frac{R \left(\frac{2\pi N a^2}{\ell y}\right)^2}{c|Z(\omega)|^2} \quad (4.15)$$

A distribuição espectral (4.14) é muito diferente daquela observada no espaço livre devido à presença do solenóide. A modificação em $\rho(\omega, y)$ é significativa em frequências ω próximas à frequência de ressonância Ω do circuito. Essa modificação é essencial para entender a interação de Casimir entre o dipolo e o solenóide (veja [9] para outros exemplos de interação de Casimir).

Vamos considerar agora a força eletromotriz $\mathcal{E}_{\text{ind}}(t)$ induzida pelos campos gerados pelo dipolo elétrico em cada espira do solenóide. Consideremos o dipolo elétrico na origem do sistema de coordenadas a uma distância y do solenóide. A carga oscilante gera campos eletromagnéticos que se propagam no espaço e atingem o solenóide. A componente z do campo magnético $\vec{B}$ no ponto $(0, y, z)$ é dada por [17]

$$B_z \simeq \frac{y e \dot{x}(t - r/c)}{cr^3} + \frac{y e \ddot{x}(t - r/c)}{c^2 r^2} \quad (4.16)$$

sendo $r^2 = y^2 + z^2$ e $x(t)$ a solução da equação (4.1).

De acordo com a lei de Faraday, esse campo magnético dependente do tempo produzirá uma voltagem flutuante em cada espira do solenóide devido às flutuações em $x(t)$. Como consequência, a força eletromotriz que age no circuito será diferente de $\mathcal{E}_{NJ}(t)$. A força eletromotriz flutuante total será a soma de $\mathcal{E}_{NJ}(t)$ com a contribuição proveniente da taxa de variação temporal do fluxo magnético que vem de (4.16) em cada espira. Um cálculo padrão da variação temporal do fluxo fornece (veja Apêndice C)

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{NJ}(t) + e \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{x}(\omega) \frac{b(\omega, y)}{c^2} (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} , \quad (4.17)$$

onde a função $b(\omega, y)$ é a mesma introduzida em (4.11) e $-i\omega \tilde{x}(\omega)$ é a transformada de Fourier de $\dot{x}(t)$. Uma expressão simplificada de $\mathcal{E}(t)$ é

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_{NJ}(t) + \frac{2\pi a^2 N}{c^2 \ell y} e \dot{x}(t) , \quad (4.18)$$

que pode ser usada quando os efeitos de retardo são desprezados e $y \ll \ell$.

4.2 Estudo da Interação do Solenóide com o Oscilador

Se denotarmos por $\tilde{I}(\omega)$, $\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$, $\tilde{E}_{VF}(\omega)$, $\tilde{E}_d(\omega)$ e $\tilde{x}(\omega)$ as transformadas de Fourier das respectivas grandezas, obtemos equações algébricas acopladas para o sistema interagente. Para o dipolo, a equação (4.1) se transforma em

$$(\omega_0^2 - \omega^2 - i r \omega^3) \tilde{x}(\omega) = \frac{e}{m} \left[\tilde{E}_{VF}(\omega) + \tilde{E}_d(\omega) - \frac{i\omega b(\omega, y)}{c^2} \tilde{I}(\omega) \right] , \quad (4.19)$$

onde o último termo corresponde à transformada de Fourier de $E_{sol}(t)$. Para a corrente elétrica, a equação (4.3) se transforma em

$$Z(\omega) \tilde{I}(\omega) = \tilde{\mathcal{E}}_{NJ}(\omega) + \tilde{\mathcal{E}}_d(\omega) - \frac{e}{c^2} \omega^2 b(\omega, y) \tilde{x}(\omega) \quad (4.20)$$

As equações lineares acopladas (4.19) e (4.20) serão resolvidas exatamente mais adiante. Vamos agora descrever uma série de novos efeitos dinâmicos que resultam do sistema de equações (4.19) e (4.20).

4.2.1 Propriedades Relativas ao Oscilador

A partir da solução das equações acopladas (4.19) e (4.20), é possível determinar diversas propriedades do oscilador que eventualmente se diferenciam daquelas obtidas quando o dipolo se encontra no espaço livre. De (4.19) e (4.20) obtém-se

$$\tilde{x}(\omega) = \left(\frac{e}{m}\right) \frac{\left[\tilde{E}_{VF}(\omega) + \tilde{E}_d(\omega) - i \frac{\omega b(\omega, y)}{c^2 Z(\omega)} \tilde{\mathcal{E}}(\omega)\right]}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega^3 \tau \left[1 + \frac{3b^2(\omega, y)}{2cZ(\omega)}\right]} \equiv \frac{\frac{e}{m} \left(\tilde{E}_{VF} + \tilde{E}_d - i \frac{\omega b}{c^2 Z} \tilde{\mathcal{E}}\right)}{D(\omega)} \quad (4.21)$$

A função $D(\omega)$, introduzida acima, pode ser escrita como

$$D(\omega) = \omega_0^2 + \tau\omega^3 \Delta_2(\omega, y) - \omega^2 - i\tau\omega^3 [1 + \Delta_1(\omega, y)] \quad (4.22)$$

onde $\Delta_1(\omega, y)$ e $\Delta_2(\omega, y)$ são funções reais definidas pela expressão $\Delta_1 + i\Delta_2 \equiv 3b^2/2c^2 Z$ onde

$$\Delta_1(\omega, y) \cong \frac{\frac{3}{2} \frac{a^2}{y^2} \frac{c}{\omega \ell} \frac{R}{\omega L}}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{R}{\omega L}\right)^2} \quad \text{e} \quad \Delta_2(\omega, y) \cong \frac{\omega L}{R} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}\right) \Delta_1(\omega, y) \quad (4.23)$$

quando os efeitos de retardo são desprezíveis.

No equilíbrio, o deslocamento quadrático médio do oscilador pode ser obtido de (4.21) fazendo $\tilde{E}_d(\omega) = 0$, que corresponde a remover o campo determinístico externo. Vamos supor que $\Delta_1(\omega, y)$ e $\Delta_2(\omega, y)$, definidos acima, sejam funções suaves de ω . Portanto, de acordo com procedimento padrão [16], mostra-se que

$$\langle x^2 \rangle \simeq \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{m^2} \int_0^\infty d\omega \frac{\frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) [1 + \beta(\omega, y)]}{\left(\omega^2 - \omega_0'^2\right)^2 + \tau^2 \omega^6 [1 + \Delta_1(\omega, y)]^2} \quad (4.24)$$

sendo que ω_0' é definida pela expressão

$$\left(\frac{\omega_0'}{\omega_0}\right)^2 \simeq 1 + \tau\omega_0 \Delta_2(\omega_0, y) \equiv 1 + \tau\omega_0 \left[\frac{\frac{3}{2} \frac{a^2}{y^2} \left(\frac{c}{\omega_0 \ell}\right)}{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{R}{L\omega_0}\right)^2} \right] \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}\right) \quad (4.25)$$

É fácil ver que $\omega'_0 \simeq \omega_0$ uma vez que $\tau\omega_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar\omega_0}{mc^2} \ll 1$.

No caso limite em que o oscilador está muito distante do circuito, ou seja, $\beta(\omega, y \rightarrow \infty) = 0 = \Delta_1(\omega, y \rightarrow \infty)$, a expressão (4.24) torna-se o resultado familiar de $\langle x^2 \rangle$ associado com o oscilador livre, isto é, interagindo com as flutuações do vácuo (térmicas e de ponto zero). É ainda possível reconhecer em (4.24) que a presença do solenóide modifica a distribuição espectral das flutuações eletromagnéticas. Essa modificação aparece no fator $1 + \beta(\omega, y)$ no numerador de (4.24). No entanto, uma vez que as equações (4.19) e (4.20) são acopladas, também a dissipação do sistema (oscilador mais solenóide) é afetada pela presença da função $\Delta_1(\omega, y)$. Essa é a razão pela qual o fator $1 + \Delta_1$ aparece no denominador de (4.24). Por outro lado, como $\tau\omega_0$ é muito pequeno, o denominador é uma função fortemente concentrada em $\omega'_0 \approx \omega_0$ e assim aproximações de ressonância podem ser usadas [16]. Fazendo $\Delta_1(\omega, y) \simeq \Delta_1(\omega_0, y)$ e $\beta(\omega, y) \simeq \beta(\omega_0, y)$, obtemos com boa aproximação

$$\langle x^2 \rangle \simeq \frac{\pi^2 c^3}{m \omega_0^3} \left[\frac{\rho(\omega_0, y)}{1 + \Delta_1(\omega_0, y)} \right] \simeq \frac{\hbar}{2m\omega_0} \coth \left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right) \left[\frac{1 + \beta(\omega_0, y)}{1 + \Delta_1(\omega_0, y)} \right] \quad (4.26)$$

Essa expressão pode ser simplificada se $\omega y/c \ll 1$, de maneira que os efeitos de retardo são completamente desprezados. Então

$$\Delta_1(\omega, y) \simeq \frac{3}{2} \frac{R}{c|Z(\omega)|^2} \left(\frac{2\pi N a^2}{\ell y} \right)^2 \simeq \beta(\omega, y) \quad (4.27)$$

como pode ser facilmente visto a partir de (4.23), (4.15) e (4.11). Isso implica que (4.26) pode ser escrita como

$$\langle x^2 \rangle \simeq \frac{\hbar}{2m\omega_0} \coth \left(\frac{\hbar\omega_0}{2kT} \right) \quad (4.28)$$

A energia média de ponto zero do oscilador microscópico pode ser calculada a partir da expressão

$$\langle U \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right\rangle \quad (4.29)$$

Essa energia pode ser expressa por uma integral sobre frequências

$$\langle U \rangle = \int_0^\infty d\omega (\omega^2 + \omega_0^2) S(\omega) \quad (4.30)$$

onde a expressão para a função espectral $S(\omega)$ é definida por

$$S(\omega) = \frac{\hbar\omega^3\tau[1 + \beta(\omega, y)]}{2\pi|D(\omega)|^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right). \quad (4.31)$$

A integração de (4.30) é feita até ordem mais baixa de $\epsilon = \tau\omega_0$ no Apêndice D fornecendo

$$\langle U \rangle \simeq \frac{1}{2}\hbar\omega_0 [1 + O(\epsilon)] , \quad (4.32)$$

quando $T = 0$. Esse é essencialmente o resultado para o oscilador no espaço livre em equilíbrio com a radiação de ponto zero.

Esse exemplo é muito parecido com aquele encontrado quando o oscilador se acha entre dois espelhos perfeitos e paralelos [57]. Nesse caso há uma mudança drástica na distribuição espectral dentro da cavidade provocada pelos contornos. No entanto a mesma mudança aparece na dissipação do oscilador. Como resultado, a energia e a distribuição de probabilidades do oscilador mantêm-se quase as mesmas do espaço livre. Ocorrem, todavia, importantes modificações no tempo de vida média dos estados excitados do oscilador. Essas modificações, como anisotropia dos campos irradiados com estimulação ou supressão na emissão espontânea, têm sido observadas experimentalmente [58] e explicadas teoricamente [57]. Nós sugerimos que um fenômeno análogo deve ocorrer quando átomos são colocados próximos a um longo solenóide.

4.2.2 Emissão Espontânea

O ponto de partida para o estudo detalhado da excitação e decaimento dos estados excitados do oscilador é nossa equação (4.21) onde observamos que existem dois tipos de excitação determinística do oscilador. Vamos chamar de "excitação externa" a excitação determinística gerada por $\tilde{E}_d(\omega)$ na equação (4.21). Um segundo tipo de excitação é obtido quando adicionamos uma voltagem determinística na expressão para $\tilde{E}(\omega)$ em (4.21). Voltagens determinísticas com dependência temporal aplicadas ao circuito geram campos eletromagnéticos que se propagam para fora do circuito. Esses campos podem excitar o oscilador como mostra a equação (4.12). Vamos chamar esse processo de excitação de "excitação voltaica". Vamos a seguir discutir esses dois tipos de excitação.

No espaço livre a força de reação da radiação que age sobre o oscilador pode ser aproximada por $2e^2 \ddot{x} / 3c^3 \simeq -m\Gamma \dot{x}$. Portanto $\Gamma \equiv 2e^2\omega_0^2/3mc^3$ é a constante de amortecimento do oscilador no espaço livre (aqui $\Gamma \equiv \gamma$ do capítulo anterior). Quando o oscilador está próximo ao indutor e sofre uma excitação externa gerada por um simples pulso determinístico tal que $E_d(t) = \alpha\delta(t)$, a posição média do oscilador pode ser facilmente obtida.

De acordo com (4.21), obtém-se

$$\langle x \rangle = \frac{e\alpha}{2\pi m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{D(\omega)} \simeq \frac{e\alpha}{m\omega_0} \sin(\omega_0 t) e^{-\frac{\Gamma'}{2}t}, \quad (4.33)$$

onde $D(\omega)$ foi introduzido em (4.22) e Γ' é definida como

$$\Gamma' \equiv \Gamma [1 + \Delta_1(\omega_0, y)] \simeq \Gamma [1 + \beta(\omega_0, y)] \quad (4.34)$$

O resultado acima para a integral (4.33) foi obtido tomando-se em conta o valor aproximado $\pm \omega_0 - i \Gamma'/2$ para os pólos do integrando. Isso está de acordo com (4.26) onde se usou a hipótese de que $\Delta_1(\omega, y)$ é uma função suave em ω e de que ω_0 é a frequência relevante para o oscilador mecânico.

Essa nova constante de amortecimento Γ' difere do valor encontrado para o espaço livre pela presença da função $\Delta_1(\omega_0, y)$. Assim, o tempo de vida média dos estados excitados será diferente dependendo da distância y que o dipolo se encontra em relação ao solenóide e também da orientação do dipolo, causando um estímulo e anisotropia na emissão espontânea. Essa é uma nova previsão que pode ser eventualmente testada em laboratórios.

Faremos uma estimativa da ordem de magnitude desse efeito considerando uma situação concreta. A ordem de grandeza de Δ_1 pode ser obtida usando como exemplo realístico o solenóide de Möllenstedt e Bayh [65] para mostrar o efeito Aharonov-Bohm [66] (discutiremos esse efeito adiante). Nesses experimentos [65] a resistência do solenóide é aproximadamente $4 \times 10^{-10} \text{ s/cm}$ (quase 400 ohm), $\ell \simeq 0,5 \text{ cm}$, $N \simeq 1000$, $a \simeq 7 \times 10^{-4} \text{ cm}$ e a indutância $L \simeq 5 \times 10^{-20} \text{ s}^2/\text{cm}$. Assim, introduzindo esses valores em (4.27) e considerando $\omega_0 = \Omega$, obtém-se o valor máximo para Δ_1 , que é

$$\Delta_1 = \frac{3a^2 c L}{2y^2 \ell R} \simeq 10 \frac{a^2}{y^2} \quad (4.35)$$

e, portanto, para a nova constante de amortecimento obtém-se

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma} \simeq 1 + 10 \frac{a^2}{y^2} \quad (4.36)$$

de acordo com o resultado (4.34). A modificação na constante de amortecimento do oscilador microscópico é apreciável quando o dipolo está próximo o suficiente do solenóide e quando o circuito tem um grande fator de qualidade $L\Omega/R$.

Retornemos à equação (4.21) no sentido de discutir a "excitação voltaica" do oscilador. Vamos supor que ela é gerada por uma perturbação determinística $\mathcal{E}_d(t)$ na voltagem do circuito (veja eq. (4.4)). Por simplicidade, consideramos que $\tilde{\mathcal{E}}_d(\omega)$ tem valor constante $A_0/2\pi$. Essa hipótese corresponde a gerar um pulso no circuito na forma

$$\mathcal{E}_d(t) = A_0 \delta(t) \quad (4.37)$$

De acordo com (4.21) e (4.37), a posição média do oscilador será dada por

$$\begin{aligned} x_d(t) &= \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \frac{(-i\omega b) A_0/2\pi}{c^2 Z(\omega) D(\omega)} \simeq \\ &\simeq -\frac{A_0}{2\pi} \frac{b}{c^2 L} \frac{e}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\omega^2 e^{-i\omega t}}{(\Omega^2 - \omega^2 - iR/L\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma'\omega)} \end{aligned} \quad (4.38)$$

sendo Γ' dada por (4.34). Considerando que $\Gamma' \ll \omega_0$ e $R/L \ll \Omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$, pode-se mostrar que os pólos do integrando são $\pm\omega_0 - i\Gamma'/2$ e $\pm\Omega - iR/2L$. Portanto uma expressão analítica para o deslocamento médio $\langle x \rangle$ pode ser obtida de (4.38), fornecendo

$$\langle x \rangle \simeq \frac{2\pi N a^2}{\ell y} \frac{A_0}{c^2 L} \frac{e/m}{\rho_+ \rho_-} \left[-\Omega \sin(\Omega t) \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right) + \omega_0 \sin(\omega_0 t) \exp\left(-\frac{\Gamma'}{2}t\right) \right] \quad (4.39)$$

onde

$$\rho_{\pm} \equiv \sqrt{(\Omega \pm \omega_0)^2 + [(R/2L) - \Gamma'/2]^2} \quad .$$

É interessante notar que o primeiro termo em (4.39), que não está presente em (4.33), é uma característica peculiar da "excitação voltaica" do oscilador. De acordo com (4.39) a vida média dos estados do oscilador pode ser "controlada" por um experimentalista que pode modificar os parâmetros associados ao circuito.

Para se ter uma idéia qualitativa da vida média associada ao primeiro termo em (4.39), quando comparado ao espaço livre, vamos considerar que $\omega_0 \simeq 10^{11}$ Hz e $\tau\omega_0 \simeq 10^{-16}$. Esses dois valores são característicos das oscilações associadas à molécula de amônia. Usando os valores numéricos para R e L considerados acima, obtemos $R/L\Gamma = R/L\tau\omega_0^2 \simeq 10^{15}$. Esse valor surpreendentemente grande, obtido para esse exemplo particular, revela um novo mecanismo para estimular a emissão espontânea dos átomos que se encontram próximos ao solenóide. Em nossa opinião, essa previsão teórica é muito interessante e deve merecer alguma atenção no âmbito experimental (veja referência [63]).

4.2.3 Força de Casimir

Como temos visto, devido à interação entre o dipolo elétrico e o indutor do circuito RLC, ruídos adicionais são gerados permeando todo o sistema e variando com a distância entre os objetos. Quando estes estão muito afastados, prevalece o ruído de ponto zero convencional (Planck 1911). Estamos, portanto, diante de um novo exemplo de interação de Casimir.

A força eletromagnética trocada entre o solenóide e o dipolo elétrico microscópico $\vec{p}(t)$ é dada pela média no "ensemble" [62]

$$\vec{F} = \langle (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{sol} \rangle + \left\langle \frac{\vec{p}}{c} \times \vec{B}_{sol} \right\rangle \quad (4.40)$$

Somente a componente x do momento de dipolo elétrico $p_x(t) = e x(t)$ irá interessar-nos pois o dipolo se encontra orientado nessa direção. A transformada de Fourier de $x(t)$ é dada pela expressão (4.21), o campo elétrico gerado pelo solenóide $\vec{E}_{sol}(t)$ foi obtido anteriormente, com sua componente x dada por (4.12), e $\vec{B}_{sol} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{sol}$ tem a direção z . Pode-se mostrar que $|\vec{B}_{sol}| = |\vec{E}_{sol}|$ e que $\vec{F}$ tem a direção do eixo y (veja Fig.1).

O primeiro termo em (4.40), que chamaremos de F_1 , é a contribuição devido ao campo elétrico gerado na parte exterior ao solenóide. F_1 é dada por

$$F_1 \equiv \langle (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{sol} \rangle_y = -2\pi \frac{a^2 N}{c^2 \ell y^2} e \langle x \dot{I} \rangle \quad (4.41)$$

para $\ell \gg y$.

A corrente $I(t)$ tem sua transformada de Fourier dada pela solução do sistema de equações algébricas (4.19) e (4.20) para o caso em que os campos determinísticos são nulos, ou seja, $E_d = \mathcal{E}_d = 0$,

$$Z(\omega) \tilde{I}(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - 1\tau\omega^3}{D(\omega)} \tilde{\mathcal{E}}(\omega) - \frac{3}{2} \frac{cb\tau\omega^2}{D(\omega)} \tilde{E}_{VF}(\omega) \quad (4.42)$$

Substituindo (4.21) e (4.42) em (4.41) e ainda lembrando dos resultados (4.5) e (4.9), mostra-se que F_1 é dada pela seguinte integral

$$F_1 = 3\pi(\tau\omega_0)(\hbar\omega_0) \frac{N^2 a^4}{l^2 y^3} \int_{-\omega_{\max}}^{\omega_{\max}} d\omega \left(\frac{cR}{\omega_0^2} \right) \frac{\omega^3 \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)}{|cZ(\omega)|^2 |D(\omega)|^2} \times \quad (4.43)$$

$$\times \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + \tau\omega \frac{L\omega}{R} (\Omega^2 - \omega^2) \right]$$

sendo $\omega_{\max}$ a frequência máxima compatível com a aproximação de comprimento de onda longo ($\omega_{\max} \simeq c/\ell$).

O resultado acima é a principal contribuição para a força de Casimir. Pode-se mostrar que o segundo termo da expressão (4.40), a componente magnética da força, torna-se irrelevante numa análise não relativística, como a que empregamos aqui. Além disso, como essa força é, em primeira aproximação, proporcional a $\langle \dot{x}(t) \dot{I}(t) \rangle$, pois $\vec{B}_{\text{sol}}$ é proporcional a $\dot{I}$, pode-se mostrar que essa média é igual a zero.

A integral na expressão (4.43) pode ser calculada para qualquer valor de temperatura T . Vamos primeiro comentar o resultado para $kT \ll \hbar\Omega$ e $kT \ll \hbar\omega_0$, que pode ser obtido trocando $\omega^3 \coth(\hbar\omega/2kT)$ por $|\omega|^3$. Nesse caso, o resultado será

$$F = -\frac{3}{4\pi} \frac{a^2}{y^3} (\hbar\omega_0) \left(\frac{c\tau}{\ell} \right) \left\{ 2\gamma\epsilon' \ln\left(\frac{c}{\ell\omega_0}\right) + \frac{\pi(1-\gamma^2)}{(1-\gamma^2)^2 + \epsilon'^2\gamma^2} + \right. \quad (4.44)$$

$$\left. + \frac{2\gamma^3\epsilon'(2-\gamma^2-\epsilon'^2)\ln\gamma + 4\gamma^3[\gamma^2(1-\epsilon'^2/2) - (\frac{\epsilon'^4-4\epsilon'^2+2}{2})\psi(\epsilon')]}{(1-\gamma^2)^2 + \epsilon'^2\gamma^2} \right\}$$

onde $\psi(\epsilon') \equiv (4-\epsilon'^2)^{-1/2} \arctan(\sqrt{4-\epsilon'^2}/\epsilon')$. Os parâmetros adimensionais ϵ , ϵ' e γ são definidos por

$$\epsilon \equiv \tau\omega_0 \quad \epsilon' \equiv \frac{R}{L\Omega} \quad \gamma = \frac{\Omega}{\omega_0} \quad (4.45)$$

Esse resultado é válido em primeira ordem de $\epsilon = \tau\omega_0$ com a condição de ω_0 e Ω serem muito menores que c/ℓ . Veja Apêndice D para os detalhes dos cálculos.

No caso particular $\epsilon' \ll 1$, circuito com alto fator de qualidade, a expressão entre colchetes em (4.44) assume uma forma simples

$$F = -\frac{3}{4} \frac{a^2}{y^3} (\hbar\omega_0) \left(\frac{c\tau}{\ell} \right) \left[1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \right] . \quad (4.46)$$

É ainda notável que o resultado acima, para baixas temperaturas, seja válido para $|1 - \gamma| \gg \epsilon'$ e $|1 - \gamma| \simeq \epsilon'$.

Outro caso interessante ocorre quando a temperatura é tal que $kT \gg \hbar\omega_{\max}$. Podemos substituir na expressão (4.42) $\hbar\omega \coth(\hbar\omega/2kT)$ por kT , e a força de Casimir será dada por uma expressão muito mais simples (ver Apêndice D)

$$F = -\frac{3}{4} \frac{a^2}{y^3} \left(\frac{c\tau}{\ell} \right) kT . \quad (4.47)$$

De acordo com esse resultado, a força é repulsiva, cresce linearmente com a temperatura e é independente da frequência ω_0 do oscilador mecânico. Finalmente, se $\omega_0 \gg \omega_{\max}$, a força calculada em (4.44) é muito pequena.

4.2.4 Distribuição Espectral das Flutuações da Voltagem no Circuito

De acordo com a expressão (4.18), as flutuações espontâneas da força eletromotriz $\mathcal{E}(t)$ que atua no circuito têm duas contribuições fundamentais. A primeira indicada por $\mathcal{E}_{NJ}(t)$ é simplesmente devida ao ruído térmico e de ponto zero em circuitos resistivos, e sua densidade espectral é dada por (4.9). A segunda contribuição é gerada pelas flutuações do dipolo elétrico, e é proporcional a $\ddot{x}(t)$, de acordo com (4.18).

De acordo com o teorema de Wiener-Khintchine, o espectro de frequências $S_V(\omega)$ é dado em termos da transformada de Fourier da função de correlação de $\mathcal{E}(t)$

$$\langle \tilde{\mathcal{E}}(\omega) \tilde{\mathcal{E}}(\omega') \rangle = S_V(\omega) \delta(\omega + \omega') . \quad (4.48)$$

As duas contribuições para $S_V(\omega)$ discutidas acima podem facilmente ser obtidas a partir

das expressões (4.9), (4.18) e (4.21). Um cálculo direto nos fornece

$$S_V(\omega) \simeq \frac{\hbar\omega}{2\pi} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \left\{ R + \frac{(\tau\omega)^2}{c} \frac{3}{2} \left(\frac{2\pi a^2}{\ell y} N \right)^2 \frac{\omega^4 [1 + \Delta_1(\omega, y)]}{(\omega_0'^2 - \omega^2)^2 + \tau^2 \omega^6 [1 + \Delta_1(\omega, y)]^2} \right\} \quad (4.49)$$

sendo que $\omega_0' \simeq \omega_0$ foi introduzida anteriormente na expressão (4.25).

O segundo termo em (4.49) provém das flutuações do campo magnético geradas pelo movimento aleatório do dipolo oscilante. Essa contribuição para a densidade espectral $S_V(\omega)$ é pequena num grande intervalo do espectro devido ao fator $(\tau\omega)^2$. Vale mencionar, entretanto, que, para frequências muito próximas de ω_0' (ou ω_0), o segundo termo em (4.49) tem um pico acentuado de ordem zero em τ , gerando no circuito um ruído intenso nessa frequência [68]. Uma possível observação experimental desse pico merece ser comentada uma vez que o espectro (4.49), sem o segundo termo, foi medido com bastante precisão (veja R.H. Koch et al. na referência [64] e a Fig.2).

Como o produto $\tau\omega_0$ é extremamente pequeno, podemos usar a seguinte aproximação

$$\frac{\omega^4 [1 + \Delta_1(\omega, y)]}{(\omega^2 - \omega_0'^2)^2 + \tau^2 \omega^6 [1 + \Delta_1(\omega, y)]^2} \simeq \frac{\pi}{2\tau} \delta(\omega - \omega_0) \quad (4.50)$$

Assim, o espectro (4.49) poderá ser escrito como

$$S_V(\omega) \simeq \frac{\hbar\omega}{2\pi} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) L\Omega \left\{ \epsilon' + \frac{3\pi}{4} (\tau\omega_0) \frac{\omega_0 c a^2}{\Omega \ell y^2} \delta(\omega - \omega_0) \right\} \quad (4.51)$$

O pico acentuado no espectro de frequências do ruído no circuito elétrico na frequência ω_0 tem uma largura e uma intensidade que devem ser determinadas pela resolução do aparelho de medida. Se $\Delta\omega$ for a resolução, devemos observar a média do termo entre chaves da expressão (4.51) no intervalo $[\omega_0 - (\Delta\omega)/2, \omega_0 + (\Delta\omega)/2]$, o que fornece

$$\epsilon' + \frac{3\pi}{4} (\tau\omega_0) \frac{\omega_0}{(\Delta\omega)} \frac{c}{\Omega \ell} \frac{a^2}{y^2}, \quad (4.52)$$

para ω dentro desse intervalo. Mesmo quando o oscilador se encontra muito próximo do solenóide ($y \simeq a$), obtemos para o segundo termo em (4.51) um valor em torno de 10^{-14} se comparado com $\epsilon' (\simeq 1/20)$, usando $(\Delta\omega)/\omega_0 \simeq 10^{-2}$ e os parâmetros do solenóide de Möllenstedt-Bayh e da molécula de amônia (oscilador microscópico), cuja frequência de inversão corresponde a um

comprimento de onda $\lambda = 1.3\text{cm}$. Podemos considerar, todavia, não uma única molécula mas um solenóide imerso num cilindro de raio l e altura l com gás amônia. Nesse caso, um cálculo direto mostra que o segundo termo de (4.52) deve ser multiplicado por

$$\frac{2\pi}{3} n a^2 l \ln \left(\frac{l}{a} \right), \quad (4.53)$$

onde n é o número de moléculas por unidade de volume ($2.7 \times 10^{19} \text{cm}^{-3}$ em temperatura ambiente). Prevemos um pico pronunciado em torno de cinco vezes maior do que o ruído de fundo (térmico e de ponto zero) para freqüências próximas à da inversão da amônia (veja Fig. 2).

4.3 O Método da Equação de Schrödinger Estocástica

Tratamos aqui o problema da interação entre o dipolo elétrico e o solenóide com o enfoque da equação de Schrödinger estocástica. Sabemos que a descrição completa do sistema se faz pelo conjunto das equações acopladas (4.19) e (4.20). No entanto, é possível obter os efeitos do solenóide sobre o oscilador utilizando uma única equação efetiva (fenomenológica) para o oscilador

$$\dot{p} = m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + e[E_x(t) + E_d(t)] + m\tau' \ddot{x} \quad (4.54)$$

onde $\tau' = \tau[1 + \Delta_1(\omega_0, y)]$ sendo $m\tau' \ddot{x} \equiv eE_{RR}(t)$ a força de reação da radiação efetiva que substitui a expressão para o espaço livre $m\tau \ddot{x}$. O campo elétrico flutuante $E_x(t) = E_{VF}(t) + E_{sol}(t)$ tem sua função densidade espectral dada por (4.14) e $E_d(t)$ é o campo determinístico controlável.

Conforme vimos nas seções 2.2.3 e 3.2, a equação de Schrödinger estocástica que descreve a "amplitude" de probabilidades de um "ensemble" de osciladores (interagindo com o solenóide) é dada pela expressão

$$i\hbar' \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{(\hbar')^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \psi - ex[E_x(t) + E_{RR}(t)], \quad (4.55)$$

onde o parâmetro $\hbar'$ ainda não foi fixado.

A função auxiliar $\psi(x, t)$ será obtida com a intenção de se construir a distribuição de probabilidades no espaço de fase $W(x, p, t)$ através da transformação

$$W(x, p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi \hbar'} \psi^*(x + y, t) \psi(x - y, t) e^{2ipy/\hbar'} \quad (4.56)$$

Uma vez que $W(x, p, t)$ é uma distribuição clássica de probabilidades as funções $\psi(x, t)$ devem gerar densidades de probabilidades positivas, $W(x, p, t) \geq 0$. Note que $\psi(x, t)$ e $W(x, p, t)$ são funções estocásticas flutuantes.

4.3.1 Análise Perturbativa

O procedimento que se aplica aqui é o mesmo usado no Capítulo 3, com a diferença de que nos termos tratados perturbativamente temos alterações na flutuação e na dissipação, e portanto as taxas de transições ficam alteradas em relação ao resultado do espaço livre.

A potência associada à força de reação da radiação é

$$P_{\text{em}} = \left\langle \int dx \int dp e \dot{x} E_{RR}(t) W(x, p, t) \right\rangle \quad (4.57)$$

onde agora a força de reação da radiação é dada por

$$e E_{RR}(t) \simeq m \tau' \ddot{x} \simeq -\tau' \omega_0^2 \dot{x} \equiv -\Gamma' p \quad (4.58)$$

onde $\Gamma' = \Gamma[1 + \beta(\omega_0, y)]$ é a mesma constante obtida anteriormente (veja (4.34)). Assim a expressão (4.57) fornece a fórmula de Larmor para a potência associada à força de reação da radiação

$$P_{\text{em}} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} [1 + \beta(\omega_0, y)] \sum_{n=0}^{\infty} \langle \ell | \ddot{x} | n \rangle \langle n | \ddot{x} | \ell \rangle \quad , \quad (4.59)$$

conforme a notação da seção 3.2.1, isto é $\psi(x, t)$ é escrita como (3.30). Essa potência é maior do que a correspondente ao espaço livre pelo fator $1 + \beta(\omega_0, y)$.

A potência associada aos campos flutuantes $E_x(t) = E_{VF}(t) + E_{\text{sol}}(t)$ é expressa por

$$P_{\text{abs}} = \left\langle \int dx \int dp e E_x(t) \frac{p}{m} W(x, p, t) \right\rangle = \left\langle e E_x(t) \int_{-\infty}^{\infty} dx J(x, t) \right\rangle \quad , \quad (4.60)$$

sendo a corrente de probabilidades definida por

$$J(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p}{m} W(x, p, t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi \hbar'} \psi^*(x + y, t) \psi(x - y, t) e^{2ipy/\hbar'} \quad (4.61)$$

e $\psi(x, t)$ é a solução perturbativa de (4.55). O cálculo perturbativo (veja Apêndice B) fornece o seguinte resultado (para o caso particular de $\hbar' = \hbar$ visto que, nesse caso, não podemos tomar $\hbar' \rightarrow 0$)

$$P_{\text{abs}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} [1 + \beta(\omega_0, y)] \left\{ \sum_{n(>\ell)} \langle \ell | \ddot{x} | n \rangle \langle n | \ddot{x} | \ell \rangle - \sum_{n(<\ell)} \langle \ell | \ddot{x} | n \rangle \langle n | \ddot{x} | \ell \rangle \right\} , \quad (4.62)$$

e portanto para a potência total ($P = P_{\text{abs}} + P_{\text{em}}$) é

$$\begin{aligned} P &= -\frac{4}{3} \frac{e^2}{c^3} [1 + \beta(\omega_0, y)] \sum_{n<\ell} \langle \ell | \ddot{x} | n \rangle \langle n | \ddot{x} | \ell \rangle = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{e^2 \omega_0^2}{mc^3} [1 + \beta(\omega_0, y)] (\epsilon_\ell - \epsilon_0) . \end{aligned} \quad (4.63)$$

Portanto esse cálculo perturbativo corrobora o resultado exato (4.33).

4.3.2 Flutuações das Correntes e o Efeito Aharonov-Bohm

Na teoria clássica do eletromagnetismo os campos são considerados como as quantidades fundamentais e os potenciais como quantidades matemáticas auxiliares. No entanto, Aharonov e Bohm [66] propuseram que a visão acima não é correta, e que uma nova interpretação para os potenciais era necessária na MQ. De acordo com esses autores o padrão de interferência numa experiência de difração em fendas duplas, sendo que entre as fendas se confina um fluxo magnético, é modificado quando as partículas se movem em regiões supostamente livres de campos eletromagnéticos [67].

A confirmação experimental [65] do efeito Aharonov-Bohm (AB) iniciou uma controvérsia que perdura até os dias atuais [67, 69, 70]. Deve-se mencionar que Boyer [71] interpreta o efeito AB a partir dos campos eletromagnéticos e das leis de conservação (energia, momento e momento angular) concluindo que o efeito AB ocorre devido a um atraso sofrido pelas partículas que passam por um lado do solenóide em relação às partículas que passam pelo lado oposto. É importante lembrar que o deslocamento das franjas de interferência não depende de $\hbar$.

Motivados pelas controvérsias que ainda perduram, decidimos estudar esse efeito usando como detector de campos originados no solenóide, o dipolo elétrico que se encontra próximo a ele. Discutiremos o papel que o potencial vetor desempenha na teoria eletromagnética em conexão

com a existência das flutuações eletromagnéticas de ponto zero e da interação de Casimir. Essas flutuações, as flutuações de Nyquist e o fato de a corrente no solenóide ser feita por cargas discretas implicam que as fontes de campos (e potenciais) são sempre dependentes do tempo do ponto de vista microscópico [72].

Uma solução exata da equação (4.55) pode ser obtida com a hipótese de que os campos $E_x(t)$ e $E_{RR}(t)$ são somente dependentes do tempo. Nesse caso pode-se mostrar que

$$\psi(x, t) = \left(\frac{\hbar'}{m\omega_0} \right)^{-1/4} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar'} [x p_c(t) - g(t)] - \frac{(x - x_c(t))^2}{\hbar'/m\omega_0} \right\} , \quad (4.64)$$

é uma solução exata da equação (4.55). Note que devemos tomar $\hbar' \rightarrow 0$, no final dos cálculos, conforme mostramos na seção 3.2.2.

Mostra-se diretamente que $p_c(t) = m\dot{x}_c(t)$ e $x_c(t)$ devem ser solução da equação (4.54) e portanto podemos obter aproximadamente a expressão para $x_c(t)$ fazendo $e E_{RR} \simeq -m\gamma'\dot{x}_c$. O resultado explícito da integração de (4.54) é

$$\begin{aligned} x_c(t) = & \left[x_0 \cos(\omega_1 t) + \left(\frac{m\gamma'x_0 + 2p_0}{2m\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t) \right] \exp(-\gamma't/2) + \\ & + \frac{e}{m\omega_1} \int_0^t dt' E_x(t') \sin[\omega_1(t-t')] \exp[-\gamma'(t-t')] , \end{aligned} \quad (4.65)$$

onde $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma'^2/4$, $x_0 = x_c(0)$ e $p_0 = m\dot{x}_c(0)$, isto é, x_0 é a posição inicial do centro da função Gaussiana (4.64). É possível mostrar por substituição direta de (4.64) em (4.55) que o fator de fase $g(t)$ é dado por

$$g(t) = \int_0^t dt' \left[\frac{p_c^2(t')}{2m} - \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_c^2(t') \right] + \frac{\hbar'\omega_0}{2} t . \quad (4.66)$$

Repare que o efeito do campo é completamente manifesto em (4.64) quando se insere nessa solução a expressão (4.65).

Considere agora outra função auxiliar $\psi'(x, t)$ tal que

$$\psi'(x, t) \equiv \exp \left(i \frac{ex}{\hbar'} A_x(t) \right) \psi(x, t) , \quad (4.67)$$

sendo que $A_x(t) = A_{VF} + A_{sol} + A_{RR}$ é a componente x do potencial vetor total na posição do dipolo elétrico onde aparecem as contribuições das flutuações do vácuo, o efeito da corrente no solenóide e da reação da radiação. Substituindo (4.67) em (4.55) obtemos

$$i\hbar' \frac{\partial \psi'(x, t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar' \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 \right] \psi'(x, t) , \quad (4.68)$$

como é fácil verificar ($c E_x(t) = -\partial A_x(t)/\partial t$).

Portanto podemos concluir que toda região próxima do solenóide é acessível aos campos eletromagnéticos que podem ser detetados pelo oscilador carregado. Essa equação (e também a equação equivalente (4.55)) pode ser resolvida exatamente. Os resultados físicos estatísticos dela extraídos, tomando a média das grandezas flutuantes, somente serão corretos se também tomarmos, no final dos cálculos, o limite $\hbar' \rightarrow 0$ (ver referências [42, 68] e seção 3.3.2).

Gostaríamos de concluir essa seção calculando a intensidade das flutuações $\Phi - \langle \Phi \rangle$ associadas ao fluxo magnético no solenóide $\Phi(t)$ gerado pela corrente total (determinística e flutuante). Essas flutuações serão comparadas com a unidade padrão de fluxo magnético $\Phi_0 \equiv 2\pi\hbar c/e$. O valor típico de $\langle \Phi \rangle$ usado na primeira verificação experimental do efeito Bohm-Aharonov é $\langle \Phi \rangle \simeq 400 \Phi_0$.

De acordo com a discussão apresentada na seção 4.1, o fluxo $\Phi(t)$ é dado por

$$\Phi(t) = \frac{4\pi^2 a^2 N}{c\ell} I(t) , \quad (4.69)$$

onde $I(t)$ é a solução da equação (4.3), que implica na seguinte expressão para as flutuações na corrente ($\Omega^2 = 1/LC$)

$$L \langle (I - \langle I \rangle)^2 \rangle = \frac{\hbar\Omega}{2} \coth \left(\frac{\hbar\Omega}{2kT} \right) \simeq kT , \quad (4.70)$$

onde a última aproximação é válida para altas temperaturas. Portanto, as flutuações térmicas no fluxo do solenóide são tais que

$$\frac{\langle (\Phi - \langle \Phi \rangle)^2 \rangle}{\Phi_0^2} \simeq \frac{1}{137} \left(\frac{a}{\ell} \right) \left(\frac{akT}{\hbar c} \right) . \quad (4.71)$$

Tomando os valores usados na referência [65] para a e ℓ podemos mostrar que $\langle (\Phi - \langle \Phi \rangle)^2 \rangle \ll \Phi_0^2$ mesmo em altas temperaturas, e portanto o efeito AB é estável com relação

à flutuações térmicas na corrente. No entanto vemos que a região externa ao solenóide não é livre de campos eletromagnéticos, mesmo quando a corrente macroscópica é nula.

Capítulo 5

PARTÍCULAS CLÁSSICAS COM MOMENTO ANGULAR INTRÍNSECO

O propósito deste capítulo é discutir a dinâmica clássica não relativística de partículas que possuem momento de dipolo magnético, associado a uma distribuição de cargas em rotação intrínseca (spin), sujeitas a campos externos, determinísticos e flutuantes, e também aos campos próprios de reação da radiação. Entre as alternativas matemáticas de que dispomos para exprimir as equações de movimento, destacam-se o cálculo vetorial e a forma matricial do cálculo com espinores.

O vasto uso de espinores na teoria quântica gera uma impressão errônea de que esse tipo de cálculo seja ferramenta exclusiva da MQ, aparecendo eventualmente na teoria clássica com o propósito de, por exemplo, descrever estados de polarização de ondas planas monocromáticas [73]. Aqui propomos um enfoque onde os espinores são introduzidos de maneira a representar orientações no espaço real [74, 75] e identificar as matrizes de Pauli como ferramentas úteis para definir o movimento de precessão do vetor associado ao dipolo magnético.

Analisamos brevemente o comportamento paramagnético de partículas com spin em estado ligado, onde as flutuações térmicas e de ponto zero bem como a reação da radiação exercem papéis

fundamentais, obtendo resultados clássicos em acordo com a MQ (e com os dados experimentais) associados à idéia da “quantização” do espaço [76, 77, 78]. O momento magnético anômalo é discutido no Apêndice E.

Quando estudamos partículas magnéticas em estado de espalhamento (experimento de Stern-Gerlach) percebemos que esses campos (flutuação e dissipação) não exercem tanta influência e podem ser omitidos. As dispersões sofridas pelas distribuições de probabilidades (e pela “função de onda”) apresentam resultados quase idênticos na MQ e na mecânica clássica, ambos em acordo com a experiência.

Um método aproximado para se construir funções de distribuições no espaço de fase, alternativo à equação de Liouville generalizada para partículas com spin, é deduzido resultando numa equação do tipo Pauli-Schrödinger com flutuação e dissipação. Entretanto a validade dessa equação é testada em apenas três exemplos importantes, de modo que sua validade no caso geral é ainda duvidosa e será objeto de estudos futuros.

5.1 Teoria Clássica

A idéia de se criar uma teoria clássica para partículas com spin remonta à descoberta dessa variável num artigo publicado por J. Frenkel [79], em 1925, onde introduz um tensor anti-simétrico como generalização relativística do momento angular intrínseco observado no referencial em que a partícula está em repouso. O fato é que hoje conhecemos vários modelos clássicos de partículas com spin e uma vasta literatura sobre o tema tem se desenvolvido [80], com especial atenção para modelos que incluem coordenadas internas às partículas [81, 82, 83, 84].

A discussão aqui partirá do pressuposto que as partículas possuem momento angular intrínseco $\vec{S}$ e sua orientação espacial pode ser descrita por dois ângulos polares. O momento de dipolo magnético pode ser paralelo ou antiparalelo ao vetor $\vec{S}$ e é dado pela expressão

$$\vec{\mu} = \bar{\gamma} \vec{S} = \frac{ge}{2mc} \vec{S} \quad , \quad (5.1)$$

sendo $\bar{\gamma}$ a razão giromagnética, m e e são respectivamente a massa e a carga do elétron e g o fator giromagnético. É importante observar que podemos ter partículas neutras com momento de

dipolo magnético (neutrons e átomos de prata). Estudaremos principalmente o caso de átomos neutros para os quais $\vec{\mu}$ e $\vec{S}$ são antiparalelos.

A trajetória clássica descrita por uma partícula carregada com momento de dipolo magnético é dada pela solução das equações

$$\dot{\vec{p}} = M\ddot{\vec{r}} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) + \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B}) \quad , \quad (5.2)$$

onde M é a massa total da partícula ($M \neq m$ para um átomo ou um ion) e

$$\dot{\vec{S}} = \vec{\mu} \times \vec{B} \quad . \quad (5.3)$$

O caso geral envolvendo o sistema de equações acopladas (5.2) e (5.3) não será estudado aqui devido a sua maior complexidade.

5.1.1 Precessão de Larmor

A equação de movimento de um átomo neutro com momento de dipolo magnético, em um referencial onde não há translação, pode ser escrita, de acordo com (5.3), na seguinte forma

$$\dot{\vec{S}} = \vec{\omega}_L \times \vec{S} \quad , \quad \vec{\omega}_L = -\frac{eg\vec{B}}{2mc} \quad . \quad (5.4)$$

Vamos considerar primeiramente o caso simples em que o campo magnético é uniforme, $\vec{B} = (0, 0, B_0)$. O caso mais geral será discutido adiante. A orientação do vetor $\vec{S}$ é dada, em coordenadas esféricas, pelas componentes (veja Fig. 3)

$$\vec{S} = S (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad , \quad (5.5)$$

sendo θ o ângulo formado entre $\vec{B}$ e $\vec{S}$. De acordo com a equação (5.4) o ângulo azimutal φ é uma função linear do tempo e é dado por

$$\varphi(t) = \frac{\mu B_0}{S} t + \varphi_0 \quad , \quad (5.6)$$

onde φ_0 é um ângulo arbitrário, $\mu = |\vec{\mu}|$ e $S = |\vec{S}|$. Esses ângulos variam continuamente no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Note que $|\vec{\omega}_L| = \mu|\vec{B}|/S$.

A equação clássica (5.4) pode ser reescrita num formalismo espinorial [74, 75], notando que o vetor $\vec{S}$ pode ser posto na forma

$$\vec{S} = S \chi^\dagger(\theta, \varphi) \vec{\sigma} \chi(\theta, \varphi) \quad , \quad (5.7)$$

onde introduzimos o espinor $\chi(\theta, \varphi)$, definido por

$$\chi(\theta, \varphi) = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_u + \chi_d \quad , \quad (5.8)$$

e $\vec{\sigma}$ é um "vetor" cujas componentes são as matrizes de Pauli

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \hat{i} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \hat{j} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \hat{k} \quad . \quad (5.9)$$

É fácil ver que a substituição de (5.8) e (5.9) em (5.7) gera (5.5).

Portanto é natural perguntar qual a equação obedecida pelo espinor $\chi(\theta, \varphi)$, uma vez que $\vec{S}$ obedece à equação (5.3). Para cada componente i do vetor $\vec{S}$, a equação (5.3) é escrita como

$$\frac{dS_i}{dt} = \bar{\gamma} \epsilon_{ijk} S_j B_k \quad , \quad (5.10)$$

sendo ϵ_{ijk} o tensor completamente anti-simétrico. Substituindo S_i por $S \chi^\dagger \sigma_i \chi$, a equação (5.10) torna-se

$$\frac{d}{dt}(\chi^\dagger \sigma_i \chi) = \bar{\gamma} \epsilon_{ijk} (\chi^\dagger \sigma_j \chi) B_k = \bar{\gamma} \chi^\dagger (\epsilon_{ijk} \sigma_j) \chi B_k \quad . \quad (5.11)$$

Utilizando a bem conhecida propriedade das matrizes de Pauli

$$\epsilon_{ijk} \sigma_j = \frac{i}{2} (\sigma_i \sigma_k - \sigma_k \sigma_i) \quad , \quad (5.12)$$

obtém-se

$$\frac{\partial \chi^\dagger}{\partial t} \sigma_i \chi + \chi^\dagger \sigma_i \frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{i\bar{\gamma}}{2} [\chi^\dagger \sigma_i \sigma_k \chi B_k - \chi^\dagger \sigma_k \sigma_i \chi B_k] \quad . \quad (5.13)$$

A equação (5.13) pode ser desmembrada em duas equações

$$(\chi^\dagger \sigma_i) \frac{\partial \chi}{\partial t} = (\chi^\dagger \sigma_i) \frac{i\bar{\gamma}}{2} (B_k \sigma_k) \chi \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial \chi^\dagger}{\partial t} (\sigma_i \chi) = -\frac{i\bar{\gamma}}{2} \chi^\dagger (B_k \sigma_k) (\sigma_i \chi) \quad (5.15)$$

Se usarmos para a razão giromagnética $\bar{\gamma}$ o valor $ge/2mc$, a equação (5.14) torna-se

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = i \frac{ge}{2mc} \vec{B} \cdot \left(\frac{\vec{\sigma}}{2} \chi \right) \quad (5.16)$$

A equação acima é completamente equivalente à equação (5.3) porém numa notação espinorial. Ela ainda pode ser colocada numa forma idêntica à equação de Pauli-Schrödinger para um dipolo magnético que precessa num campo magnético $\vec{B}$ no referencial em que a partícula não translada. Multiplicando ambos os lados de (5.16) por $i\hbar$, obtemos

$$i\hbar \frac{\partial \chi(\theta, \varphi)}{\partial t} = -\frac{eg}{2mc} \left(\frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \right) \cdot \vec{B} \chi(\theta, \varphi) \quad (5.17)$$

É notável que isso ocorra para uma magnitude arbitrária de $\vec{S}$ e que a equação (5.17) seja independente de $\hbar$, uma vez que foi obtida a partir da equação clássica que descreve a precessão de Larmor.

Se o campo magnético $\vec{B}$ varia no espaço, a força magnética $\vec{F}$ (veja eq. (5.2) para $e = 0$) é tal que

$$F_j = -\frac{\partial}{\partial x_j} [\mu \chi^\dagger(\theta, \varphi) \vec{\sigma} \chi(\theta, \varphi) \cdot \vec{B}] = -\mu \cos \theta \frac{\partial B}{\partial x_j} \quad (5.18)$$

onde $B = |\vec{B}|$ é a intensidade do campo magnético não uniforme.

De acordo com a notação espinorial, $\vec{F} \equiv \vec{F}_u + \vec{F}_d$ pois

$$\vec{F}_u \equiv -\mu (\chi_u^\dagger \sigma_3 \chi_u) \vec{\nabla} B = -\mu \cos^2 \frac{\theta}{2} \vec{\nabla} B \quad (5.19)$$

e

$$\vec{F}_d \equiv -\mu (\chi_d^\dagger \sigma_3 \chi_d) \vec{\nabla} B = +\mu \sin^2 \frac{\theta}{2} \vec{\nabla} B \quad (5.20)$$

É importante notar que $\vec{F}_u$ (e também $\vec{F}_d$) variam continuamente ($0 \leq |\vec{F}_u| \leq \mu |\vec{\nabla} B|$) porque $0 \leq \theta \leq \pi$. Outra observação é que $\vec{F}_u$ e $\vec{F}_d$ têm sempre sentidos opostos. De acordo com a

MQ os fatores $\cos^2 \theta/2$ e $\sin^2 \theta/2$ são interpretados, respectivamente, como "probabilidades de orientação", para cima e para baixo, do vetor $\vec{S}$ relativamente ao vetor $\vec{B}$. Aqui, no entanto, essa interpretação não é necessária.

5.1.2 Inclusão da Flutuação e Dissipação

Muitos resultados interessantes surgem quando se incluem na equação (5.3), que descreve a precessão do dipolo magnético, os campos aleatórios de origem térmica e de ponto zero e efeitos da emissão da radiação.

A equação de movimento para a precessão do dipolo magnético com a inclusão desses campos é chamada equação de Bhabha [85]

$$\dot{\vec{S}} = \vec{\mu} \times \vec{B}_0 - \frac{2}{3} \frac{\vec{\mu} \times \ddot{\vec{\mu}}}{c^3} + \vec{\mu} \times \vec{B}_{VF}(0, t) \quad (5.21)$$

O segundo termo do lado direito representa o torque da reação da radiação. Como o dipolo magnético emite radiação haverá uma tendência de alinhamento de $\vec{\mu}$ com $\vec{B}_0$, que só não será completa devido à ação dos campos flutuantes

$$\vec{B}_{VF}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int d^3\vec{k} \, \vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda) H(\vec{k}, \lambda) \cos[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t - \theta(\vec{k}, \lambda)] \quad (5.22)$$

sendo que $H^2(\vec{k}, \lambda)$ se relaciona com a densidade espectral da radiação, $\vec{\epsilon}(\vec{k}, \lambda)$ são os versores de polarização e $\theta(\vec{k}, \lambda)$ são fases aleatórias estatisticamente independentes (ver (2.8) e (2.9)).

A equação (5.21) é uma equação diferencial estocástica não linear. Ela foi resolvida por Boyer [76] por um método perturbativo ($\dot{\vec{S}} \simeq \vec{\mu} \times \vec{B}_0$), numa aproximação quase-markoviana, onde se constrói uma equação de Fokker-Planck para a densidade de probabilidades $P(\theta)$ do momento angular de spin $\vec{S}$ formar um ângulo θ com o eixo z determinado pelo campo $\vec{B}_0$ (por simplicidade Boyer considerou o vetor $\vec{S}$ paralelo ao vetor $\vec{\mu}$). No regime estacionário, a equação de Fokker-Planck é dada pela expressão

$$P(\theta) \frac{\langle \Delta\theta \rangle}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\langle (\Delta\theta)^2 \rangle}{\tau} P(\theta) \right] = 0 \quad (5.23)$$

onde $\Delta\theta \equiv \theta(t + \tau) - \theta(t)$, sendo τ um intervalo de tempo curto. Os valores médios $\langle \Delta\theta \rangle$ e $\langle (\Delta\theta)^2 \rangle$ foram calculados por Boyer [76] supondo que os ângulos θ e φ variam continuamente e

possuem flutuações estatísticas. Segundo Boyer

$$\langle \Delta\theta \rangle = \langle (\Delta\theta)_{RR} + (\Delta\theta)_{VF} \rangle = -\frac{2}{3} \frac{\mu^2 \eta^3}{c^3 S} (\sin\theta) \tau + \frac{2}{3} \frac{\pi^2 \mu^2 \eta^2 H^2(\eta, T)}{c^3 S^2} (\cot\theta) \tau \quad (5.24)$$

onde o primeiro termo é devido ao torque da reação da reação e $\eta = \mu B_0 / S$ é a frequência de precessão de Larmor. Além disso, Boyer mostrou que

$$\langle (\Delta\theta)^2 \rangle = \frac{4}{3} \frac{\pi^2}{c^3} \left(\frac{\mu}{S} \right)^2 \eta^2 H^2(\eta, T) \tau \quad (5.25)$$

A equação (5.23) tem solução exata e pode ser escrita na forma

$$P(\theta) = \text{cte} \times \sin\theta \exp \left[\frac{S\eta \cos\theta}{\pi^2 H^2(\eta, T)} \right] \quad (5.26)$$

A distribuição de probabilidades $P(\theta)$ pode ser usada para calcular o valor médio da componente do momento angular intrínseco ao longo de B_0

$$\langle S_z \rangle = \langle S \cos\theta \rangle = \frac{\int_0^\pi d\theta S \cos\theta P(\theta)}{\int_0^\pi d\theta P(\theta)} \quad (5.27)$$

Introduzindo em (5.26) o espectro de Planck com a radiação de ponto zero, ou seja, tomando

$$\pi^2 H^2(\omega) = \frac{1}{2} \hbar \omega \coth(\hbar \omega / 2kT) \quad (5.28)$$

e usando a expressão (5.27), obtém-se o seguinte valor médio

$$\langle S_z \rangle = S \left\{ \coth \left[\frac{2S}{\hbar \coth(\hbar \mu B_0 / 2SkT)} \right] - \frac{\hbar}{2S} \coth \left[\frac{\hbar \mu B_0}{2SkT} \right] \right\} \quad (5.29)$$

Em temperatura zero, a componente z do spin será dada por

$$\langle S_z \rangle = S \left[\coth \left(\frac{2S}{\hbar} \right) - \frac{\hbar}{2S} \right] \quad (5.30)$$

Essa expressão para $\langle S_z \rangle$ é independente do campo $\vec{B}_0$ e compatível com o resultado previsto pela MQ com o uso da hipótese de quantização do espaço. Barranco et al. [84] mostraram que (5.29) está em excelente acordo com os dados experimentais de várias amostras paramagnéticas, em temperaturas altas e baixas (veja Fig. 4).

5.2 Evolução no Espaço de Fase

A descrição clássica mais completa para a dinâmica das partículas é realizada no espaço de fase com oito variáveis $(\vec{r}, \vec{p}, \theta, \varphi)$, além do tempo. Consideraremos o caso mais simples de evolução temporal de um "ensemble" de partículas, descrito pela função densidade de probabilidades marginal que designamos por $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$, sendo que cada partícula do ensemble evolui segundo a equação (5.2) com $e = 0$. Em outras palavras, não descreveremos o movimento de precessão do vetor $\vec{S}$ e nem consideraremos variações apreciáveis do ângulo θ ("spin flipping"). Um método para construir as funções $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$ será apresentado a seguir.

5.2.1 Equação Clássica do Tipo Pauli-Schrödinger (Partículas Neutras)

A equação tipo Pauli-Schrödinger que pretendemos apresentar é uma forma de escrever a equação de Liouville desacoplando as equações (5.2) e (5.3), mas introduzindo a notação espinorial da seção 5.1.1.

A equação de Liouville (ou equação da continuidade no espaço de fase) é escrita como

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] W(\vec{r}, \vec{p}, t) = 0 \quad , \quad (5.31)$$

e está associada a uma partícula com ângulo θ_0 entre $\vec{S}$ e o campo $\vec{B}$ local (Fig. 5). Note também que $\dot{\vec{r}} = \vec{p}/M$. Baseados nas idéias originais de Wigner [6], definimos a transformada de Fourier $Q(\vec{r}, \vec{y}, t)$, que está relacionada com $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$ por

$$Q(\vec{r}, \vec{y}, t) = \int d^3\vec{p} W(\vec{r}, \vec{p}, t) e^{-2i\vec{p} \cdot \vec{y}/\hbar'} \quad . \quad (5.32)$$

Aqui $\vec{y}$ é um ponto no espaço de configuração e $\hbar'$ é o parâmetro livre, com dimensão de ação. Como consideramos o limite $\hbar' \rightarrow 0$, podemos concluir que $Q(\vec{r}, \vec{y}, t) \neq 0$ somente para valores muito pequenos de $|\vec{y}|$.

A equação para a evolução de $Q(\vec{r}, \vec{y}, t)$ pode ser obtida substituindo (5.32) em (5.31), resultando

$$\left\{ i\hbar' \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\hbar'^2}{2M} \frac{\partial^2 Q}{\partial \vec{r} \cdot \partial \vec{y}} + 2\vec{y} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} [\vec{\mu} \cdot \vec{B}] \right\} Q = 0 \quad , \quad (5.33)$$

onde se utilizou a equação de movimento (5.2) com $e = 0$ (veja Apêndice A para o caso em que $e = 0$ mas as partículas não possuem dipolo magnético).

Dado que $|\vec{y}|$ é pequeno, é então possível escrever, por exemplo,

$$2\vec{y} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} [B_j(\vec{r})] = B_j(\vec{r} + \vec{y}) - B_j(\vec{r} - \vec{y}) \quad (5.34)$$

e portanto

$$2\vec{y} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} [\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r})] \simeq -\mu [\chi^\dagger(\theta_0, \varphi_0) \vec{\sigma} \chi(\theta_0, \varphi_0)] \cdot [\vec{B}(\vec{r} + \vec{y}) - \vec{B}(\vec{r} - \vec{y})] \quad (5.35)$$

já que $\vec{S}$ e $\vec{\mu}$ são antiparalelos (átomos de prata, césio etc...).

Vamos introduzir funções espinoriais complexas $\psi(\vec{r}, t | \theta_0, \varphi_0)$ de maneira que possamos escrever

$$Q(\vec{r}, \vec{y}, t) = \psi^\dagger(\vec{r} + \vec{y}, t | \theta_0, \varphi_0) \psi(\vec{r} - \vec{y}, t | \theta_0, \varphi_0) \quad (5.36)$$

onde

$$\psi(\vec{r}, t | \theta_0, \varphi_0) \equiv \chi(\theta_0, \varphi_0) \phi(\vec{r}, t) \equiv \psi_u + \psi_d \quad (5.37)$$

e $\phi(\vec{r}, t)$ é uma função escalar. Os ângulos θ_0 e φ_0 são variáveis independentes associadas à orientação da partícula na entrada do magneto (Figs. 3 e 5).

Usando (5.33), (5.36) e (5.37) e as aproximações do tipo (5.35) chegamos à equação

$$\left[i\hbar' \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2M} (-i\hbar' \vec{\nabla})^2 - \mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t | \theta_0, \varphi_0) = 0 \quad (5.38)$$

É interessante notar que existe uma correspondência direta entre cada termo de (5.31) e (5.38). Por exemplo, o operador do tipo Schrödinger $1/2m (-i\hbar' \vec{\nabla})^2$ tem origem no operador de convecção $\vec{r} \cdot \partial / \partial \vec{r}$ da equação clássica de Liouville. Para $\hbar' = \hbar$ a equação acima é conhecida como equação de Pauli-Schrödinger.

As propriedades estatísticas de $\psi(\vec{r}, t | \theta_0, \varphi_0)$ são também obtidas da distribuição no espaço de fase $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$ e pela condição de normalização

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{r} \int d^3\vec{p} W(\vec{r}, \vec{p}, t) &= \int d^3\vec{r} |\psi(\vec{r}, t | \theta_0, \varphi_0)|^2 = \\ &= \int d^3\vec{r} (|\psi_u|^2 + |\psi_d|^2) = 1 \quad (5.39) \end{aligned}$$

A equação (5.38) é válida para qualquer $\vec{B}(\vec{r})$ e é importante lembrar que as flutuações eletromagnéticas térmicas e de ponto zero não estão incluídas em (5.38).

5.2.2 Descrição Clássica do Experimento de Stern-Gerlach

Desejamos obter aqui uma solução aproximada da equação clássica do tipo Pauli-Schrödinger para o caso particular de uma partícula neutra com dipolo magnético (neutron, átomos de prata) sujeita a um campo magnético da forma

$$\vec{B} = (-\beta x, 0, B_0 + \beta z) \quad (5.40)$$

numa região $0 \leq y \leq \ell$. O campo é suposto nulo fora dessa região.

Esse campo não-uniforme fornece uma descrição aproximada para a situação experimental encontrada em dispositivos do tipo Stern-Gerlach. Esse campo gera diferentes forças sobre as partículas do feixe, dependendo da posição na entrada do magneto e da orientação do vetor $\vec{S}$ (veja Fig. 5).

De acordo com (5.18) e (5.40) a aceleração na entrada do magneto é tal que

$$M\ddot{z} = -\mu \cos \theta_0 \frac{\partial B}{\partial z} = -\mu \cos \theta_0 \left(\frac{B_0 + B_z}{B} \right) \beta \quad (5.41)$$

e

$$M\ddot{x} = -\mu \cos \theta_0 \frac{\beta^2 x}{B} \quad (5.42)$$

com $B = |\vec{B}|$. As soluções dessas equações não lineares, com condições iniciais apropriadas para caracterizar o feixe [86], não serão discutidas aqui. Desejamos apenas construir uma solução aproximada da equação do tipo Pauli-Schrödinger desse problema

$$\left[i\hbar' \frac{\partial}{\partial t} + \frac{(\hbar')^2}{2M} \vec{\nabla}^2 - \mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}, t | \theta_0, \varphi_0) = 0 \quad (5.43)$$

A razão fundamental para termos uma solução relativamente simples para (5.43), e não para (5.31), é que (5.43) depende da energia $(-\vec{\mu} \cdot \vec{B})$ enquanto que a equação original de Liouville, eq. (5.31), depende da força não-linear com componentes dadas por (5.41) e (5.42).

Vamos agora supor que a partícula magnética seja pesada (um átomo de césio ou prata por exemplo) e que durante o voo do forno emissor ao anteparo ela passa pelo magneto durante um

curto intervalo de tempo ℓ/v_0 (v_0 é a velocidade das partículas na direção y). Portanto, dentro do magneto, podemos desprezar a dispersão da "função de onda" tomando a aproximação não convectiva

$$\frac{(\hbar')^2}{2M} \nabla^2 \psi_1 \simeq 0 \quad (5.44)$$

De acordo com (5.43) podemos escrever

$$i\hbar' \frac{\partial \psi_1(t)}{\partial t} = \mu \sigma_3 B \psi_1(t) \quad (5.45)$$

sendo $B = B(x, z) = |\vec{B}|$ e σ_3 é a matriz de Pauli. Aqui $\psi(t)$ é uma notação abreviada para $\psi(x, z, t)$ que é a "função de onda" associada ao movimento dentro do magneto, onde as partículas são aceleradas.

Considerando a expressão (5.37) e supondo que $\psi_1(0) = \chi(\theta_0, \varphi_0) \phi(x, z)$ a equação acima pode ser facilmente integrada fornecendo

$$\begin{aligned} \psi_1(t) = \phi(x, z) & \left\{ \cos \frac{\theta_0}{2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\varphi_0 + \frac{2\mu B t}{\hbar'} \right) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \right. \\ & \left. + \sin \frac{\theta_0}{2} \exp \left[\frac{i}{2} \left(\varphi_0 + \frac{2\mu B t}{\hbar'} \right) \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad (5.46) \end{aligned}$$

A função $\phi(x, z)$ está relacionada com a seção transversal do feixe de átomos, convenientemente preparado pelo experimentalista [86], e os ângulos θ_0 e φ_0 definem a polarização da partícula na entrada do magneto. Aqui, tomamos $0 \leq t \leq t_1 = \ell/v_0$. O anteparo está situado longe o suficiente do magneto tipo Stern-Gerlach de maneira a facilitar a separação do feixe.

A equação para ψ_2 , movimento livre do magneto ao anteparo, é dada por

$$i\hbar' \frac{\partial \psi_2(t)}{\partial t} = -\frac{(\hbar')^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_2(t) \simeq -\frac{(\hbar')^2}{2M} \frac{\partial^2 \psi_2(t)}{\partial z^2} \quad (5.47)$$

onde desprezamos a difusão em x (num experimento típico [86] o feixe é muito fino em z e largo em x).

Tomaremos $\psi_2(0) = \psi_1(t_1)$ onde $\psi_1(t)$ é dada por (5.46). Vamos supor que $B_0 \gg \beta|z|$ e $B_0 \gg \beta|x|$, isso é, $B \simeq B_0 + \beta z$. Portanto é possível tomar $\phi(x, z) \simeq (2\pi\alpha^2)^{-1/4} \exp(-z^2/4\alpha^2)$ na expressão (5.46). O parâmetro α está relacionado com a largura do feixe.

Usando essas aproximações, a integração de (5.47) é direta e o resultado é dado por

$$\begin{aligned} \psi_2(t) \simeq & \frac{\left(1 - \frac{i\hbar't}{2M\xi^2}\right)}{(2\pi\xi^2)^{1/4}} \left\{ \cos \frac{\theta_0}{2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\varphi_0 + \frac{2\mu B_0}{\hbar'} t_1 \right) - \frac{(z - z_c(t))^2}{4\xi^2} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \sin \frac{\theta_0}{2} \exp \left[\frac{i}{2} \left(\varphi_0 + \frac{2\mu B}{\hbar'} t_1 \right) - \frac{(z + z_c(t))^2}{4\xi^2} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (5.48)$$

onde $z_c(t) = \mu\beta t_1 t/M$ e $\xi^2 = \alpha^2 \left[1 + \left(\frac{\hbar't}{2M\alpha^2} \right)^2 \right]$ e podemos fazer $t = t_2 = D/v_0$, sendo D a distância do magneto ao anteparo. Neste caso temos $z_c = \mu\beta l D/Mv_0^2$.

Podemos calcular a distribuição de partículas no anteparo gerada por um feixe não polarizado

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta_0 \sin \theta_0 \lim_{\hbar' \rightarrow 0} |\psi_2(t_2)|^2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi\alpha^2}} \left\{ \exp \left[-\frac{(z - z_c)^2}{2\alpha^2} \right] + \exp \left[-\frac{(z + z_c)^2}{2\alpha^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.49)$$

Esse resultado, apesar das várias aproximações, está em bom acordo com o experimento descrito por French e Taylor [87] (veja Fig. 6).

É interessante observar que $P(z)$ não depende da constante de Planck $\hbar$. Portanto, em nossa opinião, o resultado do experimento de Stern-Gerlach não permite inferir a existência da "quantização do espaço" no interior do campo magnético. Além do mais, o resultado (5.49) é válido para qualquer magnitude do momento angular intrínseco $\vec{S}$.

A equação clássica (5.4), que na notação espinorial assume a forma da equação (5.17), é independente de $\hbar$ e é também válida para campos magnéticos dependentes do tempo [75, 88, 89, 90]. Vamos considerar que o campo magnético seja dado por

$$\vec{B} = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0) \quad , \quad (5.50)$$

onde ω , B_1 e B_0 são constantes. Usando (5.4) ou (5.17) e definindo $\omega_0 = \bar{\gamma} B_0$, é possível mostrar que o ângulo $\theta(t)$ entre $\vec{S}$ e o eixo z é dado por

$$\frac{S_z(t)}{S} = \cos \theta(t) = 1 - \left[\frac{2(\bar{\gamma} B_1)^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \bar{\gamma}^2 B_1^2} \right] \sin^2 \left(\frac{t}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \bar{\gamma}^2 B_1^2} \right) \quad (5.51)$$

Esse resultado foi deduzido por Rabi [88] e por Schwinger [89], em 1937, usando a equação de Pauli (5.17). No entanto, em 1954, Rabi, Ramsey e Schwinger [90] reconheceram que essas oscilações ressonantes de Rabi são igualmente obtidas no enfoque clássico [90]. A conclusão é que o vetor de dipolo magnético (e também o vetor de spin) tem orientação que varia continuamente com a direção do campo magnético aplicado.

Capítulo 6

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O principal resultado aqui obtido foi que, considerando não mais do que a mecânica e a eletrodinâmica clássicas, a descrição estatística de vários sistemas físicos, em termos da evolução de um "ensemble" no espaço de fase, é muito semelhante à descrição da mecânica quântica segundo a formulação de Wigner. A inclusão de flutuação e dissipação eletromagnéticas nas equações de movimento permitiu-nos formular uma descrição para o movimento browniano de cargas em termos da equação tipo Schrödinger estocástica, que sugere fortemente um caminho que poderia talvez unificar os tratamentos clássico e quântico.

Foi mostrado no capítulo 3, quando resolvemos o problema do movimento browniano para o oscilador harmônico, como o sistema atinge o equilíbrio, a partir de um estado excitado, devido aos efeitos das flutuações de ponto zero e da dissipação por reação da radiação. Nosso cálculo perturbativo gerou resultados que coincidem com outras abordagens (veja referência [38]), mostrando claramente o papel que cada campo exerce na relaxação do sistema. Observamos ainda que a solução exata, construída na base dos estados coerentes do oscilador, tem óbvia correspondência com a equação de Liouville. Identificamos claramente a diferença entre as incertezas quânticas geradas pelas flutuações do vácuo, onde a constante de Planck aparece como um fator de escala dessas flutuações, das incertezas sistemáticas associadas à distribuição inicial do "ensemble" com a introdução do parâmetro $\hbar'$, associado ao produto de incerteza no instante inicial, e que pode ser tomado arbitrariamente pequeno. Essa distinção pôde ser tornada consistente com a teoria quântica onde, usando o formalismo de Heisenberg, obtivemos a evolução

temporal do comutador de $\hat{x}$ e $\hat{p}$ a partir de uma situação hipotética em que o oscilador tivesse posição e momento nulos ($\hbar' = 0$), e que a partir de um dado instante começasse a interagir com o vácuo eletromagnético. Verificamos que a solução transiente de $[\hat{x}, \hat{p}]$ mostra-nos a forma e o intervalo de tempo em que o regime quântico é atingido ($[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$).

O limite clássico foi explicitamente apresentado tomando $\hbar'$ tendendo a zero retendo termos dependentes de $\hbar$ que puderam ser reconhecidos como a correção quântica à teoria clássica, correção essa que advém do acoplamento da partícula com o campo eletromagnético de ponto zero. Para potenciais genéricos, no entanto, a correspondência entre a equação de Liouville e a equação de Schrödinger só ocorre no limite de $\hbar'$ tendendo a zero. Nesse caso, o limite clássico apresentado é mais geral do que aqueles apresentados em textos padrões, pois as equações clássicas obtidas carregam correções em primeira ordem na constante de Planck. Assim constatamos que a SED é a teoria clássica apta para descrever sistemas quânticos até primeira ordem em $\hbar$.

No capítulo 4, resolvemos um problema original (oscilador próximo ao indutor do circuito *RLC*), típico em eletrodinâmica de cavidades, a partir do enfoque da equação de Langevin. Vimos claramente como a SED pode simplificar enormemente a solução, prevendo resultados importantes que, do ponto de vista da formulação de Schrödinger da MQ, seriam dificilmente obtidos. O enfoque que adotamos mostra como o espectro de ruído de ponto zero é modificado quando os objetos macroscópicos se encontram próximos a moléculas ou átomos, revelando muitos efeitos dinâmicos (forças de Casimir, modificação na emissão espontânea, ruído de Nyquist anômalo etc...). Apresentamos ainda uma equação fenomenológica de Schrödinger estocástica, baseada no teorema flutuação-dissipação, que pode ser aplicada para descrever o relaxamento para o equilíbrio de um oscilador excitado em presença de um ambiente circundante, diferente do espaço livre, abrindo uma grande perspectiva para a análise de outros problemas em eletrodinâmica de cavidades.

No capítulo 5, introduzimos nas equações clássicas de movimento o conceito de espinor para descrever o movimento de precessão de partículas com dipolo magnético em campos magnéticos externos. Obtivemos, a partir da equação de Liouville, uma equação do tipo Pauli-Schrödinger para partículas com spin na acepção clássica. Assim, problemas considerados tipicamente quânticos, como os experimentos de Stern-Gerlach e de feixes moleculares de Rabi, foram estuda-

dos com enfoques clássicos e em acordo com as previsões da MQ. A análise do paramagnetismo, como efeito da ação dos campos flutuantes e de reação da radiação, levou-nos à mesma conclusão.

As perspectivas que todos esses resultados obtidos geram são enormes. Pretendemos fazer uso da equação de Schrödinger estocástica para abordar sistemas não lineares que podem ser modelados pelo potencial $V(x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$. O átomo de hidrogênio (potencial coulombiano), por exemplo, pode ser modelado por dois osciladores harmônicos com frequência dependente do tempo no caso de trajetórias espirais, quase circulares [21, 96]. Pretendemos ainda introduzir as variáveis de Grassmann para descrever variáveis internas de partículas com spin estendendo ainda mais o nosso limite clássico e tentar entender a relação entre spin e estatística. Outros problemas em eletrodinâmica de cavidades, onde novas possibilidades de encontrar efeitos macroscópicos originados pelas flutuações de ponto zero e o efeito Casimir dinâmico [92], que tem sido sugerido para explicar o fenômeno da sonoluminescência [93, 94], fazem parte de planos de pesquisa futuros.

Como comentário final, gostaríamos de salientar que a idéia central deste trabalho foi baseada no fato de que as teorias clássica e quântica, juntas, explicam uma enorme quantidade de fenômenos físicos e que, no futuro, muito provavelmente será possível colocá-las numa forma em que não haja conflitos conceituais, revelando assim uma teoria física mais completa para a descrição do universo microscópico e macroscópico.

Apêndice A

Dedução da Equação do Tipo Schrödinger Estocástica

Pretende-se aqui deduzir a equação de Schrödinger estocástica para uma partícula carregada, sem spin, acoplada ao campo eletromagnético externo. A função de Lagrange desse problema é dada pela expressão

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} - e\phi \quad , \quad (\text{A.1})$$

onde o potencial vetor $\vec{A} = \vec{A}(\vec{x}, t)$ inclui os campos determinísticos, aleatórios e de reação da radiação na aproximação de dipolo elétrico, pois se está estudando o caso não relativístico.

O momento canônico, conjugado à variável $\vec{x}$, é definido por

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} \quad . \quad (\text{A.2})$$

Por conseguinte construímos a função de Hamilton

$$\mathcal{H} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \cdot \vec{v} - L = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi \quad . \quad (\text{A.3})$$

A equação de Liouville para um "ensemble" de partículas, descrita inicialmente por uma distribuição $W_{\text{in}}(\vec{x}_0, \vec{p}_0)$ no espaço de fase, é obtida da equação

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial t} + \{W, \mathcal{H}\} = 0 \quad , \quad (\text{A.4})$$

onde o símbolo $\{ \}$ representa os parênteses de Poisson. Resulta então

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \dot{\vec{x}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \vec{x}} + \dot{\vec{p}} \cdot \frac{\partial W}{\partial \vec{p}} = 0 \quad , \quad (\text{A.5})$$

onde $\dot{\vec{x}}$ e $\dot{\vec{p}}$ são obtidos da função de Hamilton por

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{1}{m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \quad , \quad (\text{A.6})$$

e

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{x}} = \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left[\frac{e}{mc} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{A} - e\phi \right] \quad . \quad (\text{A.7})$$

Definimos a seguinte transformada de Fourier

$$\widetilde{W}(\vec{x}, \vec{y}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \vec{p} W(\vec{x}, \vec{p}, t) \exp \left(-\frac{2i\vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) \quad . \quad (\text{A.8})$$

e a transformada inversa

$$W(\vec{x}, \vec{p}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} \widetilde{W}(\vec{x}, \vec{y}, t) \exp \left(\frac{2i\vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) \quad . \quad (\text{A.9})$$

O parâmetro $\hbar'$ tem dimensão de ação e será suposto muito pequeno ($\hbar' \ll \hbar$). Vamos escrever a equação de Liouville (A.5) em termos de $\widetilde{W}(\vec{x}, \vec{y}, t)$. Para cada termo da equação (A.5) temos

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial t} \exp \left(\frac{2i\vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) \quad , \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial W}{\partial \vec{x}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \vec{x}} \exp \left(\frac{2i\vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \vec{x}} \cdot \left(\frac{\hbar'}{2im} \right) \frac{\partial}{\partial \vec{y}} \left[\exp \left(\frac{2i\vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) \right] \\ &= -\frac{\hbar'}{2im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} \frac{\partial^2 \widetilde{W}}{\partial \vec{x} \cdot \partial \vec{y}} \exp \left(\frac{2i\vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

onde na última igualdade integramos por partes. Para os outros termos

$$-\frac{e}{mc} \vec{A}(\vec{x}, t) \frac{\partial W}{\partial \vec{x}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} \left[-\frac{e}{mc} \vec{A}(\vec{x}, t) \frac{\partial \widetilde{W}}{\partial \vec{x}} \right] \exp \left(\frac{2i\vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) \quad , \quad (\text{A.12})$$

e ainda

$$\begin{aligned}\vec{p} \cdot \frac{\partial W}{\partial \vec{p}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} \bar{W} \vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left[\exp \left(\frac{2i \vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} \bar{W} \vec{p} \cdot \left(\frac{2i \vec{y}}{\hbar'} \right) \exp \left(\frac{2i \vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) .\end{aligned}\quad (\text{A.13})$$

Substituindo (A.10), (A.11), (A.12), (A.13) em (A.5), obtemos após multiplicar a igualdade por $i\hbar'$ e usar (A.6) e (A.7)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} \exp \left(\frac{2i \vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) \left\{ i\hbar' \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} - \frac{\hbar'^2}{2m} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \vec{x} \cdot \partial \vec{y}} - \frac{ie\hbar'}{mc} \vec{A} \cdot \frac{\partial \bar{W}}{\partial \vec{x}} + \right. \\ \left. - 2\vec{y} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left[\frac{e}{mc} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{A} - e\phi \right] \bar{W} \right\} = 0 .\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

Note que, de acordo com (A.8), $\bar{W}(\vec{x}, \vec{p}, t) \neq 0$ apenas para valores muito pequenos de $|\vec{y}|$ se o limite $\hbar' \rightarrow 0$ for considerado. Considerando $|\vec{y}| \rightarrow 0$, obtemos

$$2\vec{y} \cdot \vec{\nabla}(-e\phi) = -[e\phi(\vec{x} + \vec{y}) - e\phi(\vec{x} - \vec{y})] , \quad (\text{A.15})$$

pois

$$\phi(\vec{x} + \vec{y}) = \phi(\vec{x}) + \vec{y} \cdot \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) , \quad (\text{A.16})$$

e, analogamente,

$$2\vec{y} \cdot \vec{\nabla} \left[\frac{e}{c} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{A} \right] = \frac{e}{mc} \vec{p} \cdot [\vec{A}(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{A}(\vec{x} - \vec{y})] - \frac{e}{2mc} [\vec{A}^2(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{A}^2(\vec{x} - \vec{y})] \quad (\text{A.17})$$

Assim, o termo em $\vec{p}$ que aparece em (A.14) se transforma em

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} 2\vec{y} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A} \right) \bar{W}(\vec{x}, \vec{y}, t) \exp \left(\frac{2i \vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3 \vec{y}}{(\pi \hbar')^3} \bar{W}(\vec{x}, \vec{y}, t) \frac{e}{mc} [\vec{A}(\vec{x} + \vec{y}) - \vec{A}(\vec{x} - \vec{y})] \cdot \\ \cdot \left(\frac{\hbar'}{2i} \right) \frac{\partial}{\partial \vec{y}} \exp \left(\frac{2i \vec{p} \cdot \vec{y}}{\hbar'} \right)\end{aligned}\quad (\text{A.18})$$

substituindo (A.15),(A.16),(A.17),(A.18) em (A.14) obtemos, após integração por partes

$$\begin{aligned}
& + i\hbar' \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} - \frac{\hbar'^2}{2m} \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{x} \cdot \partial \bar{y}} - \frac{ie\hbar'}{mc} \left[\frac{\bar{A}(\bar{x} + \bar{y}) + \bar{A}(\bar{x} - \bar{y})}{2} \right] \cdot \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{x}} + \\
& + \frac{ie\hbar'}{mc} [\bar{A}(\bar{x} + \bar{y}) - \bar{A}(\bar{x} - \bar{y})] \cdot \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{y}} + \frac{ie\hbar'}{mc} \bar{W} \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \cdot [\bar{A}(\bar{x} + \bar{y}) - \bar{A}(\bar{x} - \bar{y})] + \\
& + \frac{e^2}{2mc} [\bar{A}^2(\bar{x} + \bar{y}) - \bar{A}^2(\bar{x} - \bar{y})] \bar{W} + e [\phi(\bar{x} + \bar{y}) - \phi(\bar{x} - \bar{y})] \bar{W} = 0 \quad . \quad (A.19)
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$\bar{s} = \bar{x} - \bar{y} \quad , \quad \bar{r} = \bar{x} + \bar{y} \quad , \quad (A.20)$$

e considerando apenas os casos particulares em que $\bar{W}$ pode ser escrita como

$$\bar{W}(\bar{x}, \bar{y}, t) = \psi^*(\bar{x} + \bar{y}, t) \psi(\bar{x} - \bar{y}, t) = \psi^*(\bar{r}, t) \psi(\bar{s}, t) \quad , \quad (A.21)$$

onde $\psi(\bar{r}, t)$ são funções auxiliares de cálculo, obtemos a equação

$$\begin{aligned}
& \psi^*(\bar{r}, t) \left[i\hbar' \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{(\hbar')^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{ie\hbar'}{mc} \bar{A}(\bar{r}) \cdot \vec{\nabla} \psi - \frac{ie\hbar'}{2mc} \vec{\nabla} \cdot \bar{A} \psi - \right. \\
& \quad \left. - \frac{e^2}{2mc^2} \bar{A}^2(\bar{r}) \psi - e\phi(\bar{r}) \psi \right] + \\
& - \psi(\bar{s}, t) \left[i\hbar' \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \frac{(\hbar')^2}{2m} \nabla^2 \psi^* - \frac{ie\hbar'}{mc} \bar{A}(\bar{s}) \cdot \vec{\nabla} \psi^* - \frac{ie\hbar'}{2mc} \vec{\nabla} \cdot \bar{A} \psi^* - \right. \\
& \quad \left. + \frac{e^2}{2mc^2} \bar{A}^2(\bar{s}) \psi^* + e\phi(\bar{s}) \psi^* \right] = 0 \quad (A.22)
\end{aligned}$$

e portanto

$$i\hbar' \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar' \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \bar{A} \right)^2 \psi + e\phi \psi \quad , \quad (A.23)$$

sendo

$$\bar{A}(\bar{x}, t) = \bar{A}_{ext}(\bar{x}, t) + \bar{A}_{VF}(t) + \bar{A}_{RR}(t) \quad . \quad (A.24)$$

Uma das vantagens da eq. (A.23) é a possibilidade de se construir uma distribuição clássica no espaço de fase fazendo uso das técnicas já conhecidas de resolução da equação de Schrödinger. Isso é feito tomando-se o limite $\hbar' \rightarrow 0$ após de resolver a equação (A.23) para um potencial específico. Vale lembrar que a distribuição estocástica $W(\vec{x}, \vec{p}, t)$ contém informações acerca das flutuações do vácuo que aparece no termo $\bar{A}_{VF}(t)$ que carrega a constante de Planck. Por isso chamamos (A.23) de equação tipo Schrödinger estocástica.

Apêndice B

Cálculo Perturbativo da Emissão Espontânea de um Oscilador Eletrizado

Vamos calcular aqui, em primeira ordem na série perturbativa, as taxas médias de emissão e absorção de energia de um dipolo elétrico acoplado a um campo eletromagnético flutuante $E_f(t)$, cuja função de correlação é conhecida, e também aos campos próprios de radiação do dipolo $E_{RR}(t)$ no limite de comprimentos de onda longos (aproximação de dipolo).

A equação para o movimento unidimensional do dipolo elétrico é dada por

$$m\ddot{x} + m\omega_0^2 x = e[E_f(t) + E_{RR}(t)] \quad . \quad (B.1)$$

A equação de Liouville para o "ensemble" de osciladores que têm seus movimentos regidos pela equação (B.1) será portanto

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\dot{x}W) + \frac{\partial}{\partial p}(\dot{p}W) = 0 \quad , \quad (B.2)$$

onde $W = W(x, p, t)$ é a densidade de probabilidades no espaço de fase que descreve o "ensemble" com o passar do tempo.

Vamos definir funções auxiliares $\psi(x)$ que nos serão úteis para construir $W(x, p, t)$. Seguindo o procedimento explicado no apêndice A escrevemos

$$W(x, p, t) = \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi^*(x+y, t) \psi(x-y, t) e^{2ip y/\hbar} \quad . \quad (B.3)$$

Veremos que, no cálculo perturbativo, o limite $\hbar' \rightarrow 0$ não poderá ser tomado. O parâmetro $\hbar'$ permanecerá livre para que possamos comentar alguns resultados particulares.

As distribuições marginais $\rho_1(x)$ e $\rho_2(p)$ são obtidas de forma usual [97, 98]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p, t) = \rho_1(x, t) = |\psi(x, t)|^2, \quad (\text{B.4})$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx W(x, p, t) = \rho_2(p, t) = |\varphi(p, t)|^2, \quad (\text{B.5})$$

onde $\psi(x)$ e $\varphi(p)$ são relacionadas por uma transformada de Fourier.

A equação obedecida por $\psi(x, t)$, uma vez que $W(x, p, t)$ satisfaz a equação de Liouville estocástica, é

$$i\hbar' \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar'^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \psi - ex [E_f(t) + E_{RR}(t)] \psi, \quad (\text{B.6})$$

que é a equação de Schrödinger estocástica para o oscilador harmônico. Para potenciais quadráticos em x , se obtém (B.6) para qualquer valor do parâmetro $\hbar'$ [42]. Vale lembrar que o campo $E_f(t)$ consiste numa variável aleatória Gaussiana de média zero, e portanto médias no "ensemble" das realizações de $E_f(t)$ deverão ser efetuadas em algum momento apropriado.

Vamos tratar o "potencial" $\mathcal{H}_I = -ex [E_V(t) + E_{RR}(t)]$ como perturbação dependente do tempo e utilizar como conjunto completo de funções ortonormais os auto-estados do oscilador "quântico" (ver seção 3.2). Expandimos portanto a função $\psi(x, t)$ nessa base (ver (3.27)). Segundo procedimento padrão escrevemos

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) \phi_n(x) e^{-i\epsilon_n t/\hbar'} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) |n\rangle \quad (\text{B.7})$$

onde as "energias" ϵ_n são dadas por

$$\epsilon_n = \left(\frac{1}{2} + n\right) \hbar' \omega_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.8})$$

supondo que os coeficientes da expressão $a_n(t)$, que dependem de um parâmetro pequeno e (carga do elétron) podem ser escritos numa série de potências

$$a_n(t) = a_n^{(0)}(t) + e a_n^{(1)}(t) + e^2 a_n^{(2)}(t) + \dots \quad (\text{B.9})$$

Os coeficientes $a_n(t)$ são obtidos substituindo (B.9) em (B.7) e depois em (B.6). As equações para $a_n^{(s)}(t)$ serão

$$\begin{aligned}\dot{a}_k^{(0)} &= 0 \\ \dot{a}_k^{(s+1)} &= \frac{1}{i\hbar'} \sum_n \langle k | \mathcal{H}_I | n \rangle a_n^{(s)} e^{i\omega_{kn}t} \quad ,\end{aligned}\quad (\text{B.10})$$

onde usamos a notação

$$\langle n | \mathcal{H}_I | \ell \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n^*(x) \mathcal{H}_I \phi_\ell(x) = -e E_x(t) x_{n\ell} \quad . \quad (\text{B.11})$$

Como condição inicial consideramos o sistema num estado particular $\phi_\ell(x)$ de modo que $\psi(x, 0) = \phi_\ell(x)$ e portanto, $a_n^{(0)} = \delta_{n\ell}$ e a integração de (B.10) em primeira ordem será

$$a_k^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar'} \int_0^t d\tau \langle k | \mathcal{H}_I | \ell \rangle e^{i\omega_{k\ell}\tau} \quad , \quad (\text{B.12})$$

e assim o coeficiente $a_n(t)$ é dado por

$$a_n(t) = \delta_{n\ell} + \frac{ie}{\hbar'} x_{n\ell} \int_0^t d\tau [E_f(t) + E_{RR}(t)] e^{i\omega_{n\ell}\tau} + \dots \quad (\text{B.13})$$

sendo $\hbar'\omega_{n\ell} = \epsilon_n - \epsilon_\ell$.

Em princípio desejamos calcular as taxas de emissão e absorção de energia do oscilador devido ao acoplamento com os campos flutuantes e com os campos próprios, ou seja, queremos calcular

$$\langle \dot{\mathcal{E}}_{\text{tot}} \rangle = \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp W(x, p, t) \frac{p}{m} e E_x(t) \right\rangle \equiv \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} e E_x(t) J(x, t) dx \right\rangle \quad (\text{B.14})$$

onde $\langle \rangle$ representa média sobre as fases aleatórias associadas aos campos flutuantes, e $J(x, t)$ representa a corrente de probabilidade, que é definida como

$$\begin{aligned}J(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p}{m} W(x, p, t) = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi\hbar'} \psi^*(x+y, t) \psi(x-y, t) p e^{2ipy/\hbar'} \\ &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\pi\hbar'} \psi^*(x+y, t) \psi(x-y, t) \frac{\hbar'}{2i} \frac{\partial}{\partial y} [e^{2ipy/\hbar'}] \quad .\end{aligned}\quad (\text{B.15})$$

Integrando essa última expressão por partes, e levando em conta que a função ψ depende de $(x-y)$ ou $(x+y)$ de maneira que a derivada em y pode ser trocada pela derivada em x vem

$$J(x, t) = -\frac{1}{\pi\hbar'm} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{2} \left[i\hbar' \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \psi - \psi^* i\hbar' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] e^{2ipy/\hbar'} \quad (\text{B.16})$$

Assim, a integração em p pode ser imediatamente realizada com ajuda da relação

$$\frac{1}{\pi \hbar'} \int_{-\infty}^{\infty} dp e^{2ipy/\hbar'} = \delta(y) \quad (\text{B.17})$$

obtendo a expressão para a corrente de probabilidade

$$J(x, t) = -\frac{1}{2m} \left[\left(-i\hbar' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^* \psi + \left(-i\hbar' \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \psi^* \right] \equiv -\frac{1}{m} \text{Re} \{ \psi^* \hat{p} \psi \} \quad (\text{B.18})$$

onde definimos $\hat{p} = -i\hbar' \frac{\partial}{\partial x}$.

Dessa forma a potência total será dada por

$$\dot{\mathcal{E}}_{tot} = e E_x(t) \int_{-\infty}^{\infty} dx J(x, t) = -\frac{e}{m} E_x(t) \text{Re} \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^* \hat{p} \psi \right] \quad (\text{B.19})$$

substituindo a expressão (B.7) para $\psi(x)$ em (B.19)

$$\dot{\mathcal{E}}_{tot} = -\frac{e}{m} E_x(t) \text{Re} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} a_{n'}^*(t) a_n(t) \langle n' | \hat{p} | n \rangle \quad (\text{B.20})$$

Para o oscilador harmônico é válida a relação

$$\langle n | \hat{p} | n' \rangle = im \left(\frac{\epsilon_n - \epsilon_{n'}}{\hbar} \right) \langle n | x | n' \rangle \equiv im \omega_{nn'} x_{nn'} \quad (\text{B.21})$$

Usando a relação acima e a expressão para os coeficientes $a_n(t)$ (B.13) em (B.20) resulta para a potência média total do oscilador

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathcal{E}}_{tot} \rangle &= - \left\langle e E_x(t) \text{Re} \left\{ i \sum_n \sum_{n'} \omega_{nn'} x_{nn'} \times \right. \right. \\ &\quad \times \left[\delta_{\ell n'} - \frac{i}{\hbar} x_{n' \ell} \int_0^t dt' e^{-i\omega_{n' \ell} t'} e E_x(t') \right] \times \\ &\quad \times \left. \left[\delta_{\ell n} + \frac{1}{\hbar} x_{n \ell} \int_0^t dt' e^{i\omega_{n \ell} t'} e E_x(t') \right] \right\} \right\rangle \quad (\text{B.22}) \end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathcal{E}}_{tot} \rangle &= -\frac{e^2}{\hbar} \text{Re} \left\{ - \sum_n \sum_{n'} \omega_{nn'} x_{nn'} x_{n \ell} \delta_{\ell n'} \int_0^t e^{i\omega_{n \ell} t'} \langle E_x(t') E_x(t) \rangle + \right. \\ &\quad \left. \sum_n \sum_{n'} \omega_{nn'} x_{nn'} x_{n' \ell} \delta_{\ell n} \int_0^t e^{-i\omega_{n' \ell} t'} \langle E_x(t') E_x(t) \rangle \right\} \quad (\text{B.23}) \end{aligned}$$

Usando as propriedades da função delta de Kronecker e do fato de que $x_{n\ell} = x_{\ell n}$ e $\omega_{n\ell} = -\omega_{\ell n}$, obtemos

$$\langle \dot{\mathcal{E}}_{tot} \rangle = \frac{e^2}{\hbar} \text{Re} \left\{ \sum_n \omega_{n\ell} x_{\ell n} x_{n\ell} \int_0^t dt' \langle E_x(t') E_x(t) \rangle [e^{i\omega_{n\ell} t'} + e^{-i\omega_{n\ell} t'}] \right\} \quad (\text{B.24})$$

Até aqui não se utilizou nenhum campo flutuante específico, ou seja, não se especificou a natureza do ruído. Considerando em particular as flutuações de ponto zero, ou seja, $E_x(t) = E_{VF}(t) + E_{RR}(t)$, com $\langle E_{VF}(t') E_{VF}(t) \rangle$ dada por (2.17) pode-se calcular, a partir de (B.24), a contribuição das flutuações do vácuo pela expressão:

$$\langle \dot{\mathcal{E}}_{VF} \rangle = \frac{2e^2}{\hbar} \text{Re} \left\{ \sum_n \omega_{\ell n} x_{n\ell} x_{\ell n} \int_0^t dt' [e^{i\omega_{n\ell} t'} + e^{-i\omega_{n\ell} t'}] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{3} \frac{\hbar |\omega|^3}{2\pi^2 c^3} e^{i\omega t'} d\omega \right\} \quad (\text{B.25})$$

integrando em t' e tomando $t|\omega \pm \omega_{n\ell}| \gg 1$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau [e^{i\tau(\omega + \omega_{n\ell})} + e^{i\tau(\omega - \omega_{n\ell})}] &\rightarrow \\ \left(\frac{i}{\omega - \omega_{n\ell}} \right) + \pi \delta(\omega + \omega_{n\ell}) &+ \left(\frac{i}{\omega + \omega_{n\ell}} \right) + \pi \delta(\omega - \omega_{n\ell}) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Substituindo (B.26) em (B.25) encontramos

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathcal{E}}_{VF} \rangle &= \frac{e^2}{\hbar} \text{Re} \left\{ \sum_n \omega_{\ell n} x_{n\ell} x_{\ell n} \frac{2\pi}{3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\hbar |\omega|^3}{2\pi^2 c^3} [\pi \delta(\omega + \omega_{n\ell})] + \right. \\ &\quad \left. \sum_n \omega_{\ell n} x_{n\ell} x_{\ell n} \frac{2\pi}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar |\omega|^3}{2\pi^2 c^3} [\pi \delta(\omega - \omega_{n\ell})] \right\} \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \omega_{n\ell} |\omega_{n\ell}|^3 x_{\ell n} x_{n\ell} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Lembrando ainda que $\omega_{n\ell} = \frac{\epsilon_n - \epsilon_\ell}{\hbar} = \pm \omega_0$ e que para o oscilador vale $\ddot{x}_{n\ell} \simeq \omega_0^2 x_{n\ell}$ obtém-se finalmente

$$\langle \dot{\mathcal{E}}_{VF} \rangle = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{\hbar}{\hbar'} \left[\sum_{n(>\ell)} \langle \ell | \ddot{x} | n \rangle \langle n | \ddot{x} | \ell \rangle - \sum_{n(<\ell)} \langle \ell | \ddot{x} | n \rangle \langle n | \ddot{x} | \ell \rangle \right] \quad (\text{B.28})$$

Esse resultado coincide com o obtido por Cohen-Tannoudji et al. [38] no contexto da QED para o caso particular em que $\hbar' = \hbar$. Mais comentários são encontrados nas seções 3.2 e 4.3.1.

Apêndice C

Campos de Interação do sistema Dipolo Elétrico-Solenóide

C1 Campo Elétrico Gerado pelo Solenóide

Calcularemos aqui o campo (parte elétrica) que o solenóide irradia, mesmo quando não alimentado por baterias, uma vez que está sujeito a campos flutuantes (ruídos térmico, de ponto zero, ...), na região em que o dipolo elétrico se encontra (ver Fig.1).

O solenóide é considerado um conjunto de espiras (dipolos magnéticos) que se estende de $-\ell/2$ a $\ell/2$ no eixo z . O momento de dipolo magnético associado a uma quantidade de $\frac{N}{\ell} dz$ espiras de raio a , por onde circula uma corrente $I(t)$, é dado por

$$d\vec{\mu}(t) = \frac{1}{c} \left(\frac{N}{\ell} dz \right) \pi a^2 I(t) \hat{e}_z, \quad (C.1)$$

sendo $\hat{e}_z$ o versor na direção z .

Para um sistema de cargas e correntes variáveis no tempo é possível fazer uma análise de Fourier na dependência temporal e depois tratar cada componente separadamente. Assim vamos considerar que cada componente do potencial vetor possa ser escrita como

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}) e^{-i\omega t}. \quad (C.2)$$

Para o caso particular de um dipolo magnético, $\vec{A}(\vec{r})$ será dado por [17]

$$\vec{A}(\vec{r}) = ik(\hat{n} \times \vec{\mu}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \quad , \quad (\text{C.3})$$

onde $k = \omega/c$ é o número de onda e $\hat{n}$ é o vetor unitário que aponta na direção de $\vec{r}$. A expressão acima representa a componente de Fourier para a dependência temporal $e^{-i\omega t}$.

Substituindo a transformada de Fourier de (C.1) em (C.3) obtém-se

$$d\vec{A}(\vec{r}, \omega) = i \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{N}{\ell} dz \right) \pi a^2 \tilde{I}(\omega) (\hat{n} \times \hat{e}_z) \frac{e^{i\frac{\omega}{c}r}}{r} \left[1 - \frac{c}{i\omega r} \right] \quad , \quad (\text{C.4})$$

lembrando que $\hat{n} \times \hat{e}_z = \hat{e}_\phi$, versor polar, e $r^2 = y^2 + z^2$, pois queremos determinar o campo na região onde se encontra o dipolo (eixo y), reescrevemos

$$d\vec{A}(\vec{r}, \omega) = i \frac{\omega}{c^2} \left(\frac{N}{\ell} dz \right) \pi a^2 \tilde{I}(\omega) \sin \theta \frac{e^{i\frac{\omega}{c}\sqrt{y^2+z^2}}}{\sqrt{y^2+z^2}} \left[1 - \frac{c}{i\omega\sqrt{y^2+z^2}} \right] \hat{e}_\phi \quad , \quad (\text{C.5})$$

sendo θ o ângulo formado entre a direção z e o segmento que une a espira (que pode estar entre $-\ell/2$ e $\ell/2$) e o ponto onde se calcula o campo, ou seja, $\sin \theta = \frac{y}{(y^2 + z^2)^{1/2}}$.

Integrando a expressão (C.5) de $-\ell/2$ a $\ell/2$, obtém-se o potencial vetor gerado por todo o solenóide

$$\vec{A}(\vec{r}, \omega) = i \frac{\omega}{c^2} \pi a^2 \frac{N}{\ell} \tilde{I}(\omega) \int_{-\ell/2}^{\ell/2} dz \frac{y}{(y^2 + z^2)} e^{i\frac{\omega}{c}(y^2+z^2)^{1/2}} \left[1 - \frac{c}{i\omega(y^2 + z^2)^{1/2}} \right] \hat{e}_\phi \quad (\text{C.6})$$

fazendo a mudança de variável $z/y = \alpha$ obtemos

$$\vec{A}(y, \omega) = \frac{\pi N a^2}{c \ell y} \tilde{I}(\omega) \int_{-\ell/2y}^{\ell/2y} d\alpha e^{i\frac{\omega}{c}y\sqrt{1+\alpha^2}} \left[i\frac{\omega}{c}y(1+\alpha^2)^{-1} - (1+\alpha^2)^{-3/2} \right] \hat{e}_\phi \quad , \quad (\text{C.7})$$

que é a transformada de Fourier de $\vec{A}(y, t)$,

$$\vec{A}(y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \vec{A}(y, \omega) e^{-i\omega t} \quad (\text{C.8})$$

e daí segue que o campo elétrico na posição do dipolo será dada por

$$\vec{E}_{\text{sol}}(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{I}(\omega) (-i\omega) \frac{b(\omega, y)}{c^2} e^{-i\omega t} \hat{e}_\phi \quad , \quad (\text{C.9})$$

sendo $b(\omega, y)$ dado pela expressão

$$b(\omega, y) = \frac{\pi N a^2}{c y} \int_{-\ell/2y}^{\ell/2y} d\alpha e^{i\frac{\omega}{c}y\sqrt{1+\alpha^2}} \left[(1+\alpha^2)^{-3/2} - i\frac{\omega}{c}y(1+\alpha^2)^{-1} \right] \quad (\text{C.10})$$

C2 FEM Induzida pelo Dipolo Oscilante

A componente z do campo magnético irradiado pelo dipolo elétrico a uma distância $r^2 = y^2 + z^2$ é dado por [17]

$$B_z = \frac{ye\dot{x}(t-r/c)}{cr^3} + \frac{ye\ddot{x}(t-r/c)}{c^2r^2} \quad (C.11)$$

e a fem induzida é dada pela lei de Faraday

$$\mathcal{E}_{ind}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt} \quad (C.12)$$

onde o fluxo magnético em todo o solenóide vem dado pela expressão

$$\phi = \pi a^2 \int_{-l/2}^{l/2} B_z \frac{N}{\ell} dz = \frac{\pi a^2 N}{\ell} \int_{-l/2}^{l/2} \left[\frac{ye\dot{x}(t-r/c)}{c(y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{ye\ddot{x}(t-r/c)}{c^2(y^2+z^2)} \right] dz \quad (C.13)$$

com a ajuda da transformada de Fourier

$$x(t-r/c) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega(t-r/c)} = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{x}(\omega) e^{-i\omega t} e^{ikr} \quad (C.14)$$

obtém-se $\dot{x}(t-r/c)$ e $\ddot{x}(t-r/c)$ e que em (C.13) fornece

$$\phi = \frac{\pi N a^2}{\ell} e \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\tilde{x}(\omega)}{c^2} (-i\omega)^2 \int_{-l/2}^{l/2} dz \frac{y}{y^2+z^2} e^{i\frac{\omega}{c}(y^2+z^2)^{1/2}} \left[1 - \frac{c}{i\omega(y^2+z^2)^{1/2}} \right] \quad (C.15)$$

a integral em z , na expressão acima, é a mesma que aparece em (C.6) e portanto obtemos

$$\mathcal{E}_{ind}(t) = -\frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt} = e \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \tilde{x}(\omega) \frac{b(\omega, y)}{c^2} (-i\omega)^2 e^{-i\omega t} \quad (C.16)$$

onde $b(\omega, y)$ é dado por (C.10).

Apêndice D

Cálculo da Energia e da Força de Casimir

Apresentamos aqui os cálculos de várias quantidades que aparecem no capítulo 4 como a energia e a força de Casimir que age no dipolo em baixas e altas temperaturas. A finalidade desses cálculos é obter expressões que sejam válidas mesmo se Ω e ω_0 estiverem próximos (mais precisamente se $|\Omega - \omega_0| \leq \epsilon'$) pois nesse caso o método de “ressonância” [8, 9] para integração é falha, e um cálculo mais rigoroso é necessário.

A validade de nosso cálculo requer que se considere somente ondas cujo comprimento seja maior que o comprimento do solenóide, conseqüentemente devemos introduzir nos cálculos cortes em altas frequências dado por $\omega_{max} = c/l \ll 1/\tau$. Por outro lado, os limites de altas e baixas temperaturas T que consideramos dão origens às seguintes aproximações

$$\text{baixas } T: \quad \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \simeq 1 \quad (\text{D.1})$$

$$\text{altas } T: \quad \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \simeq \frac{2kT}{\hbar\omega} \quad (\text{D.2})$$

Entendemos por baixas temperaturas o fato de $kT/\hbar$ ser muito menor que as frequências relevantes, isto é, Ω e ω_0 , enquanto altas temperaturas significa $kT/\hbar \gg \omega_{max} = c/l$. Nesses casos as aproximações acima são válidas em toda a região de integração.

Dessa forma as quatro integrais que devemos calcular são as seguintes:

$$\langle U \rangle_s = \int_0^{\omega_{max}} d\omega (\omega^2 + \omega_0^2) \frac{\tau \hbar \omega^3}{2\pi} \frac{\left[1 + \frac{3b^2 R}{2c|Z(\omega)|^2}\right]}{|D(\omega)|^2}. \quad (D.3a)$$

$$\langle U \rangle_h = \int_0^{\omega_{max}} d\omega (\omega^2 + \omega_0^2) \frac{kT\tau\omega^2}{\pi} \frac{\left[1 + \frac{3b^2 R}{2c|Z(\omega)|^2}\right]}{|D(\omega)|^2}. \quad (D.3b)$$

$$\langle F \rangle_s = \frac{6\pi(\omega_0\tau)(\hbar\omega_0)N^2a^4}{\omega_0^2 l^2 y^3 c} \int_0^{\omega_{max}} d\omega \left[\frac{R\omega^3(\omega^2 - \omega_0^2) + \tau L\omega^5(\omega^2 - \Omega^2)}{|Z(\omega)|^2 |D(\omega)|^2} \right], \quad (D.4a)$$

$$\langle F \rangle_h = \frac{12\pi kT(\omega_0\tau)N^2a^4}{\omega_0 l^2 y^3 c} \int_0^{\omega_{max}} d\omega \left[\frac{R\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2) + \tau L\omega^4(\omega^2 - \Omega^2)}{|Z(\omega)|^2 |D(\omega)|^2} \right], \quad (D.4b)$$

Por conveniência introduzimos a variável de integração adimensional $x = \omega/\omega_0$. Com isso e os parâmetros definidos em (4.45), $|Z(\omega)|^2$ e $|D(\omega)|^2$ podem ser escritos como

$$|Z(\omega_0 x)|^2 = \frac{L^2 \omega_0^3}{x^2} \Delta_s(x), \quad (D.5)$$

$$|D(\omega_0 x)|^2 = \omega_0^4 \left\{ \left[1 - x^2 + \chi \epsilon \frac{x^4(x^2 - \gamma^2)}{\Delta_s(x)} \right]^2 + \epsilon^2 x^6 \left[1 + \frac{\chi \epsilon' \gamma x^2}{\Delta_s(x)} \right]^2 \right\}, \quad (D.6)$$

onde

$$\Delta_s(x) = (x^2 - \gamma^2)^2 + \epsilon'^2 \gamma^2 x^2, \quad (D.7)$$

e

$$\chi = \frac{1}{\epsilon' \gamma} \frac{6\pi^2 a^4 N^2 R}{cl^2 L^2 y^2 \omega_0^2} = \frac{3}{2} \frac{a^2}{y^2} \frac{c}{l \omega_0}, \quad (D.8)$$

onde as equações (4.22) e (4.23) foram usadas.

O produto $|Z(\omega)|^2 |D(\omega)|^2$ que aparece em todas as integrais torna-se

$$|Z(\omega_0 x)|^2 |D(\omega_0 x)|^2 = \frac{L^2 \omega_0^6}{x^2} \mathcal{D}_\epsilon(x), \quad (D.9)$$

com $\mathcal{D}_\epsilon(x)$ dado por

$$\mathcal{D}_\epsilon(x) = \Delta_s(x) \left[(1 - x^2)^2 + \epsilon^2 x^6 \right] + 2\chi \epsilon x^4 (1 - x^2)(x^2 - \gamma^2) + 2\epsilon^2 \chi \gamma \epsilon' x^8 + \chi^2 \epsilon^2 x^8, \quad (D.10)$$

onde deve-se prestar atenção ao fato do termo proporcional a Δ_s^{-1} estar ausente (veja D.6).

Assim, denotando $\omega_{\max}/\omega_0 = \Lambda$, as expressões (D.3ab) e (D.4ab) podem ser escritas na forma:

$$\langle U \rangle_s = \frac{\tau \hbar \omega_0^2}{2\pi} I_1, \quad (\text{D.11a})$$

$$\langle U \rangle_h = \frac{kT\omega_0\tau}{\pi} I_2, \quad (\text{D.11b})$$

$$\langle F \rangle_s = \frac{3a^2 c(\hbar\omega_0)(\omega_0\tau)}{2\pi y^3 l\omega_0} I_3, \quad (\text{D.11c})$$

$$\langle F \rangle_h = \frac{3a^2 ckT(\omega_0\tau)}{\pi y^3 l\omega_0} I_4, \quad (\text{D.11d})$$

onde

$$I_1 = \int_0^\Lambda dx \frac{x^3(x^2+1)(\Delta_s + \chi\epsilon'\gamma x^2)}{\mathcal{D}_\epsilon(x)}, \quad (\text{D.12a})$$

$$I_2 = \int_0^\Lambda dx \frac{x^2(x^2+1)(\Delta_s + \chi\epsilon'\gamma x^2)}{\mathcal{D}_\epsilon(x)}, \quad (\text{D.12b})$$

$$I_3 = \int_0^\Lambda dx \frac{\epsilon x^7(x^2 - \gamma^2) + \epsilon'\gamma x^5(x^2 - 1)}{\mathcal{D}_\epsilon(x)}, \quad (\text{D.12c})$$

$$I_4 = \int_0^\Lambda dx \frac{\epsilon x^6(x^2 - \gamma^2) + \epsilon'\gamma x^4(x^2 - 1)}{\mathcal{D}_\epsilon(x)}, \quad (\text{D.12d})$$

Devemos realizar uma série de integrações de quocientes polinomiais. O primeiro passo consiste em pesquisar os pólos do integrando. Isso não pode ser feito exatamente. Porém, como o parâmetro ϵ é extremamente pequeno, uma boa aproximação consiste em reter os primeiros termos na expansão nesse parâmetro para os cálculos de todas quantidades que precisamos. Particularmente, precisamos apenas conhecer os zeros de $\mathcal{D}_\epsilon$ para $\epsilon \ll 1$. Dado que $\mathcal{D}_\epsilon$ é um polinômio par de grau dez, devemos pesquisar dez raízes, sendo que cinco delas são o negativo das outras cinco. Além disso, uma vez que todos os coeficientes são reais, se um dos zeros for um número complexo seu conjugado também será. Em princípio, podemos obter, em ordem zero de ϵ , as raízes estudando os zeros do polinômio

$$\mathcal{D}_0(x) = \Delta_s(x)(1-x^2)^2. \quad (\text{D.13})$$

No entanto, $\mathcal{D}_0$ é de grau oito, enquanto a potência mais alta em $\mathcal{D}_\epsilon(x)$ é $\epsilon^2 x^{10}$, o que significa que ele tem um zero da ordem do inverso de alguma potência de ϵ . Levando tudo isso em conta é possível verificar que as raízes são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= i\frac{\rho}{\epsilon} & Z_1^* &= -i\frac{\rho}{\epsilon} \\
 Z_2 &= g + i\bar{g} & Z_2^* &= g - i\bar{g} \\
 Z_3 &= -Z_2 = -g - i\bar{g} & Z_3^* &= -Z_2^* = -g + i\bar{g} \\
 Z_4 &= \alpha + i\bar{\alpha} & Z_4^* &= \alpha - i\bar{\alpha} \\
 Z_5 &= -Z_4 = -\alpha - i\bar{\alpha} & Z_5^* &= -Z_4^* = -\alpha + i\bar{\alpha}
 \end{aligned} \tag{D.14}$$

onde

$$\rho = 1 - \chi\epsilon + 0(\epsilon^2) , \tag{D.15a}$$

$$g = 1 + \frac{1}{2}\epsilon \frac{\chi(1 - \gamma^2)}{\zeta} + 0(\epsilon^2) , \tag{D.15b}$$

$$\bar{g} = \frac{1}{2}\epsilon \left(1 + \frac{\chi\gamma\epsilon'}{\zeta} \right) + 0(\epsilon^2) = \epsilon h + 0(\epsilon^2) , \tag{D.15c}$$

$$\alpha = \gamma \sqrt{1 - \frac{\epsilon'^2}{4}} + 0(\epsilon) , \tag{D.15d}$$

$$\bar{\alpha} = \frac{\epsilon'\gamma}{2} + 0(\epsilon) , \tag{D.15e}$$

$$\text{e } \zeta = \Delta_+(1) = (1 - \gamma^2)^2 + \gamma^2\epsilon'^2.$$

Iremos agora estudar separadamente os casos em que o numerador do integrando é par e o caso em que ele é ímpar.

Caso A: O integrando é uma função ímpar de x

Isso corresponde ao limite de baixas temperaturas nos cálculos de energia e força de Casimir, equações (D.12a) e (D.12c). O fato do integrando ser uma função ímpar permite escrever a seguinte expansão em frações

$$\frac{P(x)}{\mathcal{D}_\epsilon(x)} = \frac{Ax}{\epsilon^2 x^2 + \rho^2} + \frac{B(x - g) + C}{(x - g)^2 + \bar{g}^2} + \frac{B(x + g) - C}{(x + g)^2 + \bar{g}^2} + \tag{D.16}$$

$$+ \frac{D(x - \alpha) + E}{(x - \alpha)^2 + \bar{\alpha}^2} + \frac{D(x + \alpha) - E}{(x + \alpha)^2 + \bar{\alpha}^2}$$

onde $P = P_a$, com $a = 1, 2, 3, 4$, representa os diferentes numeradores do integrando de acordo com as equações (D.12). O sub-índice a será eventualmente removido no sentido de simplificar a notação. A integração dessa expressão é direta e pode ser escrita em duas partes

$$I_a = T_a + L_a \quad a = 1, 3 \quad (\text{D.17})$$

$$T_a = \left\{ \frac{C}{\bar{g}} \arctan \left(\frac{x - g}{\bar{g}} \right) - \frac{C}{\bar{g}} \arctan \left(\frac{x + g}{\bar{g}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{E}{\bar{\alpha}} \arctan \left(\frac{x - \alpha}{\bar{\alpha}} \right) - \frac{E}{\bar{\alpha}} \arctan \left(\frac{x + \alpha}{\bar{\alpha}} \right) \right\} \Big|_0^\Lambda, \quad (\text{D.18a})$$

$$L_a = \left\{ \frac{A}{2\epsilon^2} \ln(\epsilon^2 x^2 + \rho^2) + \frac{B}{2} \ln[(x - g)^2 + \bar{g}^2] + \right. \\ \left. + \frac{B}{2} \ln[(x + g)^2 + \bar{g}^2] + \frac{D}{2} \ln[(x - \alpha)^2 + \bar{\alpha}^2] + \frac{D}{2} \ln[(x + \alpha)^2 + \bar{\alpha}^2] \right\} \Big|_0^\Lambda. \quad (\text{D.18b})$$

Agora usaremos as propriedades de Λ , ou seja, $1 \ll \Lambda \ll 1/\epsilon$, obtendo:

$$T_a = 2 \frac{C}{\bar{g}} \frac{\pi}{2} (1 + 0(\epsilon)) + 2 \frac{E}{\bar{\alpha}} \arctan \left(\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \right) + 0(\epsilon) + 0 \left(\frac{1}{\Lambda} \right), \quad (\text{D.19a})$$

$$L_a = \frac{A}{2\epsilon^2} \frac{\epsilon^2 \Lambda^2}{\rho^2} + 2(B + D) \ln \Lambda - B \ln(g^2 + \bar{g}^2) - D \ln(\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) + 0(\epsilon) + 0 \left(\frac{1}{\Lambda} \right). \quad (\text{D.19b})$$

Um bom caminho para o cálculo dos coeficientes em (D.16) é escrever o quociente $P/\mathcal{D}_\epsilon$ na forma

$$\frac{P(x)}{\mathcal{D}_\epsilon(x)} = \frac{Ax}{\epsilon^2 x^2 + \rho^2} + \frac{\alpha_2}{x - Z_2} + \frac{\alpha_2^*}{x - Z_2^*} + \frac{\alpha_3}{x - Z_3} + \frac{\alpha_3^*}{x - Z_3^*} + \\ + \frac{\alpha_4}{x - Z_4} + \frac{\alpha_4^*}{x - Z_4^*} + \frac{\alpha_5}{x - Z_5} + \frac{\alpha_5^*}{x - Z_5^*} \quad (\text{D.20})$$

e então obtemos

$$B = 2\text{Re}\alpha_2 \quad \frac{C}{\bar{g}} = -2\text{Im}\alpha_2 \\ D = 2\text{Re}\alpha_4 \quad \frac{E}{\bar{\alpha}} = -2\text{Im}\alpha_4 \quad (\text{D.21})$$

devido à expansão das raízes, equações (D.14) e o fato de P , $\alpha_2 = \alpha_3$ e $\alpha_4 = \alpha_5$ ser ímpar. Finalmente, os coeficientes da expansão (D.20) podem ser calculados através das seguintes fórmulas

$$\alpha_2 = \frac{P(Z_2)}{D'(Z_2)} \quad (D.22a)$$

$$\alpha_4 = \frac{P(Z_4)}{D'(Z_4)} \quad (D.22b)$$

Os coeficientes A é facilmente calculado estudando o comportamento do integrando no limite $x \rightarrow \infty$, ou seja,

$$\frac{A}{\epsilon^2} + 2B + 2D = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xP(x)}{D_\epsilon(x)} \quad (D.23)$$

Essas expressões nos permite calcular as integrais I_1 and I_3 .

Para I_1 nos temos:

$$A = 1 - 2\epsilon^2(B + D) \quad (D.24)$$

$$\frac{C}{\bar{g}} = \frac{1}{\epsilon} + 0(1)$$

$$B = 0(1)$$

$$D = 0(1)$$

$$\frac{E}{\bar{\alpha}} = 0(1)$$

$$L_1 = 0(1)$$

$$T_1 = \frac{\pi}{\epsilon} + 0(1) .$$

e por fim chegamos à expressão para o valor médio da energia

$$\langle U \rangle_\epsilon = \frac{\tau \hbar \omega_0^2}{2\pi} \left(\frac{\pi}{\epsilon} + 0(1) \right) = \frac{\hbar \omega_0}{2} + 0(\epsilon) ,$$

que é a expressão para a energia. Para I_3 temos

$$A = \epsilon - 2\epsilon^2(B + D) \quad (D.25)$$

$$C\bar{g} = \frac{1 - \gamma^2}{2\zeta} + 0(\epsilon)$$

$$B = \frac{\epsilon'\gamma}{2\zeta} + 0(\epsilon)$$

$$D = -\frac{\epsilon'(2 - \epsilon'^2 - \gamma^2)\gamma^3}{2\zeta} + 0(\epsilon)$$

$$\frac{E}{\bar{\alpha}} = -\frac{\gamma^3(1 - 2\epsilon'^2 + \frac{\epsilon'^4}{2} - \gamma^2(1 - \frac{\epsilon'^2}{2}))}{2\zeta\sqrt{1 - \frac{\epsilon'^2}{4}}} + 0(\epsilon)$$

$$L_3 = \epsilon'\gamma \ln\left(\frac{\omega_{max}}{\omega_0}\right) + \frac{\epsilon'\gamma^3(2 - \epsilon'^2 - \gamma^2)}{\zeta} \ln \gamma + 0(\epsilon) + 0\left(\frac{1}{\gamma}\right)$$

$$T_3 = \frac{(1 - \gamma^2)}{\zeta} \frac{\pi}{2} + \frac{\gamma^3[\gamma^2(1 - \frac{\epsilon'^2}{2}) - (1 - 2\epsilon'^2 + \frac{\epsilon'^4}{2})]}{\zeta\sqrt{1 - \frac{\epsilon'^2}{4}}} \arctan\left(\frac{\sqrt{4 - \epsilon'^2}}{\epsilon'}\right) + 0(\epsilon) + 0\left(\frac{1}{\gamma}\right)$$

levando à equação (4.44) para a força de Casimir a baixas temperaturas.

Caso B: O integrando é uma função par de x

Esse é o caso que corresponde ao limite de altas temperaturas e nos permitirá calcular as integrais (D.12b) e (D.12d).

A expansão em frações para o integrando par será agora

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{D_\epsilon(x)} &= \frac{A}{\epsilon^2 x^2 + \rho^2} + \frac{B(x - g) + C}{(x - g)^2 + \bar{g}^2} - \frac{B(x + g) - C}{(x + g)^2 + \bar{g}^2} + \\ &+ \frac{D(x - \alpha) + E}{(x - \alpha)^2 + \bar{\alpha}^2} - \frac{D(x + \alpha) - E}{(x + \alpha)^2 + \bar{\alpha}^2}, \end{aligned} \quad (D.26)$$

sendo os coeficientes diferentes daqueles do caso A, e P é P_a para $a = 2, 4$.

A integração de (D.26) fornece agora

$$I_a = T_a + L_a \quad a = 2, 4, \quad (D.27)$$

onde

$$\begin{aligned} T_a &= \left[\frac{A}{\epsilon\rho} \arctan\left(\frac{\epsilon x}{\rho}\right) + \frac{C}{\bar{g}} \arctan\left(\frac{x - g}{\bar{g}}\right) + \right. \\ &+ \left. \frac{C}{\bar{g}} \arctan\left(\frac{x + g}{\bar{g}}\right) + \frac{E}{\bar{\alpha}} \arctan\left(\frac{x - \alpha}{\bar{\alpha}}\right) + \frac{E}{\bar{\alpha}} \arctan\left(\frac{x + \alpha}{\bar{\alpha}}\right) \right] \Big|_0^\Lambda, \end{aligned} \quad (D.28a)$$

$$\begin{aligned} L_a &= \left\{ \frac{B}{2} \ln[(x - g)^2 + \bar{g}^2] - \frac{B}{2} \ln[(x + g)^2 + \bar{g}^2] + \right. \\ &+ \left. \frac{D}{2} \ln[(x - \alpha)^2 + \bar{\alpha}^2] - \frac{D}{2} \ln[(x + \alpha)^2 + \bar{\alpha}^2] \right\} \Big|_0^\Lambda, \end{aligned} \quad (A.28b)$$

Novamente, usando $1 \ll \Lambda \ll 1/\epsilon$, obtemos

$$T_a = \frac{A\Lambda}{\rho^2} + \frac{C}{\bar{g}} \left(\pi + 0\left(\frac{\epsilon}{\Lambda}\right) \right) + \frac{E}{\bar{\alpha}} \left(\pi + 0\left(\frac{1}{\Lambda}\right) \right)$$

$$L_a = 0\left(\frac{B}{\Lambda}\right) + 0\left(\frac{D}{\Lambda}\right).$$

Os cálculos dos coeficientes são feitos de um modo similar usado no caso A. A equação (D.20) é válida se trocarmos o primeiro termo do lado direito pelo correspondente termo da equação (D.26) e levando em conta que agora $\alpha_3 = -\alpha_2$ e $\alpha_5 = -\alpha_4$. E também as equações (D.21) e (D.21ab) são válidas. Do contrário, a equação (D.23) deve ser trocada por

$$\frac{A}{\epsilon^2} + 2(C + Bg) + (E + D\alpha) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 P(x)}{\mathcal{D}_\epsilon(x)} \quad (D.29)$$

Como consequência de tudo isso obtém-se os seguintes resultados para I_2 :

$$A = 1 - 2\epsilon^2(C + Bg + E + D\alpha) \quad (D.30)$$

$$B = 0(1)$$

$$\frac{C}{\bar{g}} = \frac{1}{\epsilon} + 0(1)$$

$$D = 0(1)$$

$$\frac{E}{\bar{\alpha}} = 0(1)$$

$$L_2 = 0\left(\frac{1}{\Lambda}\right)$$

$$T_2 = \frac{\pi}{\epsilon} + 0(1)$$

e finalmente

$$\langle U \rangle_h = kT + 0(\epsilon)$$

Para I_4 :

$$A = \epsilon - 2\epsilon^2(C + Bg + E + D\alpha) \quad (D.31)$$

$$B = \frac{\epsilon'\gamma}{2\zeta} + 0(\epsilon)$$

$$\frac{C}{\bar{g}} = \frac{1 - \gamma^2}{2\zeta} + 0(\epsilon)$$

$$D = -\frac{\epsilon' \gamma^2 (3 - \epsilon'^2 + \gamma^2)}{4\zeta \sqrt{1 - \frac{\epsilon'^2}{4}}} + 0(\epsilon)$$

$$\frac{E}{\bar{\alpha}} = -\frac{\gamma^2 (1 - \epsilon'^2 - \gamma^2)}{2\zeta} + 0(\epsilon)$$

$$L_4 = 0 \left(\frac{1}{\Lambda} \right)$$

$$T_4 = \frac{\pi}{2} + 0(\epsilon)$$

E finalmente em ordem mais baixa, a força de Casimir no limite de altas temperaturas será

$$\langle F \rangle_h = \frac{3}{2} \frac{a^2 c k T \omega_0 \tau}{y^3 l \omega_0}$$

Note que $(B + D)/\Lambda$ é sempre muito menor que 1 mesmo nas proximidades de $\gamma = 1$.

Apêndice E

Momento Magnético Anômalo

Apresentamos aqui um cálculo no contexto da SED dos efeitos das flutuações do campo eletromagnético sobre o momento magnético do elétron na teoria não relativística.

A equação de movimento que descreve a precessão de Larmor será escrita como

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = \frac{ge}{2mc} \vec{B} \times \vec{\mu} \quad , \quad (\text{E.1})$$

onde e representa a carga do elétron e usamos a relação

$$\vec{\mu} = \frac{ge}{2mc} \vec{S} \quad , \quad (\text{E.2})$$

ou seja, o momento magnético $\vec{\mu}$ é anti-paralelo ao momento angular intrínscio $\vec{S}$. O campo magnético $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{VF}(0, t)$ tem um termo que advém de um campo externo determinístico $\vec{B}_0$ e outro associado à componente magnética das flutuações do vácuo e será tomado como aproximação de dipolo do campo

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{\vec{k} \times \vec{E}_{VF}(\vec{r}, t)}{k} = i \sum_{\vec{k}, \lambda} \left(\frac{\pi \hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{i\theta(\vec{k}, \lambda)} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} e^{-i\theta(\vec{k}, \lambda)} \right] (\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}, \lambda}) \quad , \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

onde se usou a relação $c|\vec{k}| = \omega_k$.

Na SED os termos $\exp(i\theta_{\vec{k}, \lambda})$ e $\exp(-i\theta_{\vec{k}, \lambda})$, sendo $\theta_{\vec{k}, \lambda}$ fases aleatórias uniformemente distribuídas de 0 a 2π , aparecem, respectivamente, nos lugares dos operadores de criação e aniquilação de fótons da QED.

Não incluímos em (E.1) termos que dependem de derivadas superiores de $\vec{\mu}$, ou seja, não estamos incluindo a reação da radiação dos campos próprios de emissão. Se considerarmos o elétron livre fazendo $\vec{B}_0 = 0$, as expressões (E.1) e (E.3) resultam em

$$\frac{d\vec{\mu}}{dt} = i \frac{ge}{2mc} \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{\pi \hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} e^{i\theta(\vec{k}, \lambda)} - e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} e^{-i\theta(\vec{k}, \lambda)} \right] (\vec{k} \times \hat{e}_{\vec{k}\lambda}) \times \vec{\mu}(t) \quad (E.4)$$

Na ordem mais baixa de aproximação usamos $\mu(t) \simeq \mu(0)$ no lado direito de (E.4), cuja integração fornece

$$\Delta\vec{\mu} \equiv \vec{\mu}(t) - \vec{\mu}(0) \cong -\frac{ge}{2mc} \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{\pi \hbar c^2}{\omega_k V} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega_k} \left[e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} e^{i\theta(\vec{k}, \lambda)} + e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} e^{-i\theta(\vec{k}, \lambda)} \right] (\vec{k} \times \hat{e}_{\vec{k}\lambda}) \times \vec{\mu}(0) \quad (E.5)$$

Vamos agora calcular o valor médio $\langle (\Delta\vec{\mu})^2 \rangle$ escrevendo a expressão

$$\begin{aligned} \langle (\Delta\vec{\mu})^2 \rangle &= \left(\frac{ge}{2mc} \right)^2 \left\langle \sum_{\vec{k}\lambda} \sum_{\vec{k}'\lambda'} \frac{\pi \hbar c^2}{V} \frac{1}{\sqrt{\omega_k \omega_{k'}}} \frac{1}{\omega_k \omega_{k'}} \right. \\ &\quad \cdot 2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t + \theta_{\vec{k}\lambda}) 2 \cos(\vec{k}' \cdot \vec{r} - \omega_{k'} t + \theta_{\vec{k}'\lambda'}) \left. \right\rangle \\ &\quad \left[(\vec{k} \times \hat{e}_{\vec{k}\lambda}) \times \vec{\mu}(0) \right] \cdot \left[(\vec{k}' \times \hat{e}_{\vec{k}'\lambda'}) \times \vec{\mu}(0) \right] \quad (E.6) \end{aligned}$$

A média sobre as fases aleatórias é realizada com a ajuda da expressão

$$\langle 2 \cos \theta_{\vec{k}\lambda} 2 \cos \theta_{\vec{k}'\lambda'} \rangle = 4 \cdot \frac{1}{2} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \quad (E.7)$$

e assim

$$\langle (\Delta\vec{\mu})^2 \rangle = \left(\frac{e}{mc} \right)^2 \sum_{\vec{k}\lambda} \left(\frac{2\pi \hbar c^2}{V} \right) \frac{1}{\omega_k^3} \left[(\vec{k} \times \hat{e}_{\vec{k}\lambda}) \times \vec{\mu}(0) \right]^2 \quad (E.8)$$

Agora fazemos

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^2 \left[(\vec{k} \times \hat{e}_{\vec{k}\lambda}) \times \vec{\mu}(0) \right]^2 &= \sum_{\lambda=1}^2 \left[\vec{k} (\vec{\mu}(0) \cdot \hat{e}_{\vec{k}\lambda}) - \hat{e}_{\vec{k}\lambda} (\vec{k} \cdot \vec{\mu}(0)) \right]^2 = \\ &= k^2 \sum_{\lambda=1}^2 (\vec{\mu}(0) \cdot \hat{e}_{\vec{k}\lambda})^2 + (\vec{k} \cdot \vec{\mu}(0))^2 \sum_{\lambda=1}^2 (1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= k^2 \mu^2(0) - (\vec{\mu}(0) \cdot \vec{k})^2 + 2(\vec{k} \cdot \vec{\mu}(0))^2 = \\
&= k^2 \mu^2(0) + (\vec{k} \cdot \vec{\mu}(0))^2 \quad , \quad (E.9)
\end{aligned}$$

sendo que após a segunda igualdade usou-se o fato de $\vec{k}$ ser perpendicular aos versores de polarização $\hat{e}_{\vec{k}\lambda}$. Integrando sobre todo o ângulo sólido no espaço dos $\vec{k}$'s obtemos

$$\begin{aligned}
\int d\Omega_{\vec{k}} [k^2 \mu^2(0) + (\vec{k} \cdot \vec{\mu}(0))^2] &= 4\pi k^2 \mu^2(0) + \frac{4\pi}{3} k^2 \mu^2(0) = \\
&= \frac{16\pi}{3} k^2 \mu^2(0) \quad , \quad (E.10)
\end{aligned}$$

e assim a expressão (E.8) pode ser escrita como

$$\langle (\Delta \vec{\mu})^2 \rangle = \left(\frac{ge}{2mc} \right)^2 \sum_{\vec{k}} \left(\frac{2\pi \hbar c^2}{\omega_k V} \right) \frac{1}{\omega_k^2} \left[\frac{16\pi}{3} k^2 \mu^2(0) \right] \quad (E.11)$$

fazendo o limite para o contínuo através da troca

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow \left(\frac{V}{8\pi^3} \right) \int dk k^2 \int d\Omega_{\vec{k}} \quad ,$$

a expressão (E.11) se torna

$$\langle (\Delta \vec{\mu})^2 \rangle = \left(\frac{ge}{2mc} \right)^2 \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{k_{\max}} dk k^2 \left(\frac{2\pi \hbar c^2}{\omega} \right) \frac{1}{\omega^2} \frac{16\pi}{3} k^2 \mu^2(0) \quad (E.12)$$

e portanto

$$\frac{\langle (\Delta \vec{\mu})^2 \rangle}{\mu^2(0)} = \left(\frac{ge}{2mc} \right)^2 \frac{4\hbar}{3\pi c} \int_0^{k_{\max}} dk k = - \left(\frac{g}{2} \right)^2 \frac{4\alpha}{3\pi} \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \int_0^{k_{\max}} dk k \quad , \quad (E.13)$$

sendo $\alpha = e^2/\hbar c$ a constante de estrutura fina da eletrodinâmica e $k_{\max}$ representa o número de onda de corte uma vez que a integral acima se torna divergente se considerarmos todos os comprimentos de onda.

Se escolhermos $k_{\max} = k_{\text{compton}} = (mc/\hbar)$ a expressão (E.13) se torna

$$\frac{\langle (\Delta \vec{\mu})^2 \rangle}{\mu^2(0)} = \frac{2\alpha}{3\pi} \quad . \quad (E.14)$$

Seguindo Welton [48], definimos a flutuação no ângulo θ , de precessão, na presença de um campo externo $\vec{B}_0$, através da relação

$$\langle \Delta \theta^2 \rangle = \frac{\langle (\Delta \vec{\mu})^2 \rangle}{\langle \mu_0^2 \rangle} = \frac{2\alpha}{3\pi} \quad . \quad (E.15)$$

Vamos agora considerar o valor esperado da energia de interação entre o dipolo magnético e o campo determinístico $\vec{B}_0$

$$-\langle \vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 \rangle = -|\vec{\mu}| B_0 \langle \cos \theta \rangle \quad , \quad (\text{E.16})$$

onde θ é o ângulo formado entre $\vec{\mu}$ e $\vec{B}_0$.

A inclusão dos efeitos das flutuações do campo eletromagnético consiste em substituir $\cos \theta$ por

$$\langle \cos(\theta + \Delta\theta) \rangle \simeq \cos \theta \left[1 - \frac{1}{2} \langle \Delta\theta^2 \rangle \right] = \cos \theta \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \right] \quad , \quad (\text{E.17})$$

e portanto a expressão (E.16)

$$-\langle \vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 \rangle \rightarrow -|\vec{\mu}| B_0 \cos \theta \left[1 - \frac{\alpha}{3\pi} \right] \quad . \quad (\text{E.18})$$

Apesar da magnitude da correção do momento magnético anômalo ser correta, o sinal do efeito aparece trocado. Isso pode ser retificado se incluirmos os efeitos da reação de radiação cuja contribuição surge na massa renormalizada como sugerido pelos cálculos na QED[38, 91].

Bibliografia

- [1] E. Nelson, *Phys. Rev.* **150**, 1079 (1966). Veja também, do mesmo autor, "Quantum Fluctuations" (Princeton U.P., Princeton, 1985).
- [2] P.R. Holland em "The Quantum Theory of Motion" (Cambridge U.P., Cambridge, 1993).
- [3] Luis de la Penã e Ana Maria Cetto em "The Quantum Dice. An Introduction to Stochastic Electrodynamics", editado por A. van der Merwe (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996) e referências internas.
- [4] P.W. Milonni e M.L. Shih, "Zero point energy in the early quantum theory", *Am. J. Phys.* **59**, 684 (1991). Veja também, M.M.S. Bergia et al., "Zero Point Energy, Planck's Law and the Prehistory of Stochastic Electrodynamics", parte 1: "Einstein and Hopf's paper of 1910", *Ann. Fond. L. de Broglie* **4**, 295 (1979) e parte 2: "Einstein and Stern's paper of 1913", *ann. Fond. L. de Broglie* **5**, 39 (1980).
- [5] I.J.R. Aitchinson, *Contemp. Phys.* **26**, 333 (1985).
- [6] E. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932).
- [7] T.W. Marshall, *Proc. Royal Soc. (London)* **276A**, 475 (1963).
- [8] T.H. Boyer, *Phys. Rev. D* **11**, 790 (1975).
- [9] P.W. Milonni, "The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum electrodynamics", (Academic Press, inc. Boston, 1994).

- [10] T.H. Boyer, *Phys. Rev.* **182**, 1374 (1969) e *Phys. Rev.* **186**, 1304 (1969).
- [11] H.M. França e G.C. Santos, *Il Nuovo Cimento* **A48**, 65 (1978).
- [12] T.H. Boyer, *Phys. Rev.* **D21**, 2137 (1980).
- [13] P.C.W. Davies, *J. Phys.* **A8**, 609 (1975).
- [14] W.G. Unruh, *Phys. Rev.* **D14**, 870 (1975).
- [15] G.H. Goedecke, *Found. Phys.* **13**, 1101 (1983).
- [16] T.H. Boyer, *Phys. Rev.* **D11**, 809 (1975).
- [17] J.D. Jackson, "Classical Electrodynamics". 2nd edition (John Wiley and Sons. NY, 1975).
- [18] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.* **15**, 1 (1943).
- [19] L. de la Peña e A.M. Cetto, *J. Math. Phys.* **18**, 1612 (1977), e também *J. Math. Phys.* **20**, 469 (1979).
- [20] L. de la Peña e A.M. Cetto, *Found. Phys.* **12**, 1017 (1982).
- [21] I.M.S. Barnes, M. Nauenberg, M. Nockleby e S. Tomsovic, *J. Phys.* **A27**, 3299 (1994).
- [22] M. Surdin, *Int. J. Theor. Phys.* **4**, 117 (1971).
- [23] S. Hayakawa, *Suppl. Prog. Theor. Phys.*, Extra Number, 532 (1965).
- [24] L.D. Landau e E.M. Lifchitz, "The Classical Theory of Fields" (Pergamon, London, 1959).
- [25] N.G. Van Kampen, "Stochastic Processes in Physics and Chemistry" (Amsterdam, North-Holland, 1981).
- [26] H. Risken, "The Fokker-Planck Equation" (Berlin, Springer-Verlag, 1984).

- [27] N. Wax, "Selected papers on noise Stochastic Processes" (New York, Dover, 1954).
- [28] K. Dechoum, dissertação de mestrado, apresentada ao IFUSP com o título "Flutuações Eletromagnéticas de Ponto Zero, Reação da Radiação e os Estados Coerentes do Oscilador", 1992.
- [29] M.M. Nieto, Proceedings of Nato Advanced Study Institute: Frontiers of Non-equilibrium Statistical Physics, G.T. Moore e M.O. Scully, eds. (Plenum, New York, 1990).
- [30] A.A. Sokolov e V.S. Tumanov, *Sov. Phys. JETP* **3**, 958 (1957).
- [31] R. Schiller and H. Tesser, *Phys. Rev.* **A3**, 2035 (1971).
- [32] E. Wigner, *Phys. Rev.* **77**, 711 (1950).
- [33] W.G. Unruh e W.H. Zurek, *Phys. Rev.* **D40**, 1071 (1989).
- [34] A.O. Caldeira e A.J. Leggett, *Physica* **121A**, 587 (1983).
- [35] P.M.V.B. Barone e A.O. Caldeira, *Phys. Rev.* **A43**, 57 (1991).
- [36] H. Dekker, *Phys. Rep.* **80**, 1 (1981).
- [37] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, "Quantum Mechanics" (Wiley, New York, 1977).
- [38] J. Dalibard, J. Dupont-Roc and C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys. (Paris)* **43**, 1617 (1982).
E também Claude Cohen-Tannoudji, *Phys. Scr.* **T12**, 19 (1986).
- [39] P. Schramm and H. Grabert, *Phys. Rev.* **A34**, 4515 (1986).
- [40] H.M. França and M.T. Thomaz, *Phys. Rev.* **D31**, 1337 (1985); **D38**, 2651 (1988).
- [41] H.M. França and T.W. Marshall, *Phys. Rev.* **A38**, 3258 (1988).
- [42] K. Dechoum and H.M. França, *Found. Phys.* **25**, 1599 (1995); *Found. Phys.* **26**, 1573 (1996).

- [43] E. Schrödinger, "The continuous transition from micro to macro mechanics", em collected papers on wave mechanics by E. Schrödinger (Blackie, London, 1928).
- [44] G.H. Goedecke, *Found. Phys.* **14**, 41 (1984).
- [45] P. Carruthers e M.N. Nieto, *Am. J. Phys.* **33**, 537 (1965).
- [46] L. de la Peña e A.M. Cetto, *Found. Phys.* **24**, 753 (1994).
- [47] "Selected Papers on Quantum Electrodynamics", editado por J. Schwinger (Dover, New York, 1958).
- [48] T.A. Welton, *Phys. Rev.* **74**, 1157 (1948).
- [49] H.B.G. Casimir, *Proc. K. Ned. Akad. Wet.* **51**, 360 (1948); H.B.G. Casimir e D. Polder, *Phys. Rev.* **73**, 360 (1948). Veja também G. Plunien, B. Muller e W. Greiner, *Phys. Rep.* **134**, 87 (1986).
- [50] M.J. Sparnaay, *Physica (Amsterdam)* **24**, 751 (1958). Veja também S.K. Lamoreaux, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5 (1997) para novas medições da força de Casimir.
- [51] S. Haroche e D. Kleppner, *Phys. Today* **42**, 24 (1989).
- [52] E.M. Purcell, *Phys. Rev.* **69**, 681 (1946).
- [53] N. Bloembergen e R.V. Pound, *Phys. Rev.* **95**, 8 (1954).
- [54] J.P. Gordon, H.J. Zeighe e C.H. Townes, *Phys. Rev.* **95**, 282 (1954).
- [55] S. Haroche, "Cavity Quantum Electrodynamics", em *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Les Houches (1990).
- [56] Paul R. Berman, "Cavity Quantum Electrodynamics", em *Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Suppl. 2 1994, Academic Press, Inc.
- [57] H.M. França, T.W. Marshall e E. Santos, *Phys. Rev. A* **45**, 6436 (1992).

- [58] W. Jhe, A. Anderson, E.A. Hinds, D. Mesched, L. Moi e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 666 (1987).
- [59] T.W. Marshall, *Il Nuovo Cimento* **38**, 206 (1965).
- [60] T.H. Boyer, *Phys. Rev.* **180**, 19 (1969).
- [61] T.H. Boyer, *Phys. Rev. A* **5**, 1799 (1972); *Phys. Rev. A* **6**, 314 (1972); *Phys. Rev. A* **9**, 2078 (1974).
- [62] T.H. Boyer, *Phys. Rev. A* **7**, 1832 (1973).
- [63] R. Blanco, K. Dechoum, H.M. França e E. Santos, *Phys. Rev. A* **57**, 724 (1998).
- [64] V.L. Ginzburg em "Applications of Eletromagnetism in Theoretical Physics and Astrophysics" (Gordon and Breach Science Publishers, 1989). Cap. 14. Veja também observação experimental em R.H. Koch, D.J. Van Harlingen e J. Clarke. *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1216 (1981), e G.Y. Hu e R.F. O'Connell, *Phys. Rev. B* **46**, 14219 (1992).
- [65] G. Möllenstedt e W. Bayh, *Naturwissenschaften* **49**, 81 (1962).
- [66] Y. Aharonov e D. Bohm, *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [67] S. Olariu e J.J. Popescu, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 339 (1985).
- [68] K. Dechoum e H.M. França em "New Developments on Fundamental Problems in Quantum Physics", editado por M. Ferrero e A. van der Merwe, (Kluwer Academic Publishers, 1997), pgs. 109-114.
- [69] M. Peshkin, *Phys. Rev. A* **23**, 360 (1981) e *Physics Reports* **80**, 375 (1981).
- [70] M. Peshkin e A. Tonomura, "The Aharonov-Bohm effect" (Springer-Verlag, Berlin, 1989).
- [71] T.H. Boyer, *Il Nuovo Cimento* **100B**, 685 (1987) e referências internas.
- [72] K. Dechoum, H.M. França e A. Maia, *Il Nuovo Cimento* **113B**, 455 (1998).

- [73] F. Gori, S. Vicalci, M. Santasiera, F. Frezza, G. Schettini, S. Ambrosini e R. Borghi, *Eur. J. Phys.* **18**, 256 (1997). Veja também Jayme Vaz Jr., *Rev. Bras. Ensino de Física* **19**, 234 (1997).
- [74] D. Bohm, R. Schiller e J. Tiommo, *Nuovo Cimento Suppl.* **1**, 48 (1955).
- [75] Ralph Schiller, *Phys. Rev.* **125**, 1116 (1962).
- [76] T.H. Boyer, *Phys. Rev. A* **29**, 2389 (1984).
- [77] A.F. Ranãda e M.F. Ranãda, *J. Phys.* **A12**, 1419 (1979).
- [78] S. Sachidanandam, *Phys. Lett. A* **97**, 323 (1983).
- [79] O modelo de J. Frenkel é discutido por A.O. Barut em "Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles" pg. 73, Dover Edition.
- [80] H. Corben em "Classical and Quantum Theories of Spinning Particles" (Holden-Day, San Francisco, 1968).
- [81] R. Casalbuoni, *Nuovo Cimento A*, **33**, 115, 389 (1976).
- [82] F.A. Berezin e M.S. Marinov, *Ann. Phys.* **104**, 336 (1977).
- [83] A.O. Barut e N. Zanghi, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2009 (1984).
- [84] A.V. Barranco, S.A. Brunini e H.M. França, *Phys. Rev. A* **39**, 5492 (1989).
- [85] H.J. Bhabha, *Proc. R. Soc. (London)* **A178**, 314 (1941).
- [86] J.B. Taylor, *Phys. Rev.* **28**, 581 (1926). Veja também W. Gerlach e O. Stern, *Z. Phys.* **8**, 110 (1921) e *Z. Phys.* **9**, 349, (1922)
- [87] A.P. French e F. Taylor, "An Introduction to Quantum Physics", (Norton, New York, 1978), cap. 10.
- [88] I.I. Rabi *Phys. Rev.* **51**, 652 (1937).

- [89] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **51**, 648 (1937).
- [90] I.I. Rabi, N.F. Ramsey and J. Schwinger, *Rev. Mod. Phys.* **26**, 167 (1954).
- [91] H. Grotch e E. Kazes, *Am. J. Phys.* **45**, 618 (1977).
- [92] J. Schwinger, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **89** 4091 (1992), **89** 1118 (1992), **90** 958 (1993), **90** 4505 (1993), **90** 7285 (1993), **91** 6473 (1994).
- [93] B. Barber e S.J. Putterman, *Nature* **352**, 318 1991.
- [94] C. Eberlein, "Sonoluminescence as Quantum Vacuum Radiation",
quant-ph/9506023 e quant-ph/9610034.
- [95] K. Dechoum, H.M. França e C.P. Malta, "Classical Aspects of the Pauli-Schrödinger Equation", preprint ifusp.
- [96] H.M. França, H. Franco e C.P. Malta, *Eur. J. Phys.* **18**, 343 (1997).
- [97] T. Takabayasi, *Prog. Theor. Phys.* **11**, 341 (1954).
- [98] H.W. Lee, *Phys. Rep.* **259**, 148 (1995).

Figuras

FIGURA 1 : Representação esquemática do dipolo elétrico a uma distância y do eixo do solenóide onde indicamos os campos relevantes gerados pelo solenóide ($\vec{E}_{sol}$) e pelo dipolo oscilante ($\vec{E}_{dip}$). O solenóide usado por Möllenstedt e Bayh [65] são tais que $1.5 \times 10^{-4} \text{ cm} \leq \delta_1 \leq 4 \times 10^{-4} \text{ cm}$, $\delta_2 \simeq 3 \times 10^{-4} \text{ cm}$ e $a \simeq 7 \times 10^{-4} \text{ cm}$. O número de espiras sendo $N \simeq 10^3$ e o comprimento l varia de 0.5 cm a 0.7 cm .

FIGURA 2 : Ruído de Nyquist observado por Koch et al. [64]. A curva tracejada corresponde ao espectro do ruído sem as flutuações de ponto zero enquanto que a curva cheia inclui a contribuição de ponto zero. O pico pronunciado é a representação qualitativa do segundo termo da equação (4.49) e corresponde a uma medida hipotética realizada à temperatura $T = 4.2K$. A largura $\Delta\omega$ é associada à resolução experimental.

FIGURA 3 : Ângulos de orientação do vetor $\vec{S}(t)$ que precessa em torno do campo magnético.

FIGURA 4 : Variação da projeção do momento de dipolo magnético ao longo de $\vec{B}_0$ como função de B_0/T (referência [84]).

FIGURA 5 : Representação esquemática da precessão em um campo magnético não uniforme. As partículas do feixe (área escura), movem-se com velocidade v_0 na direção y .

FIGURA 6 : Imagem no anteparo de uma experiência tipo Stern-Gerlach obtida por J.R. Zacharias [87]. A curva (a) mostra o alargamento do feixe devido a um campo magnético de baixa intensidade. O gradiente do campo não é intenso o suficiente para gerar a separação do feixe. A curva (b) mostra a separação provocada por gradientes intensos ($z_c = \frac{\mu \beta H}{M v_0^2} \simeq 0.37 \text{ cm}$). Veja nossa expressão (5.49) para comparação.