Universidade de São Paulo
Instituto de Física

SBI-IFUSP

305M810T2943

Superposição Generalizada de Dois Estados Comprimidos Arbitrários

Yuri Alexandrovish Barbosa
Orientador: Dr. Gil da Costa Marques

Banca Examinadora

Prof. Dr. Gil da Costa Marques (orientador)
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Adilson José da Silva
Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Prof. Dr. Diógenes Galetti
Instituto de Física Teórica (I.F.T.)

Dissertação apresentada ao Instituto
de Física da Universidade de São
Paulo, para a obtenção do título de
Mestre em Física Básica

defesa 17/03

São Paulo
1999

Prof. Sylbio Roberto Accioly Canuto
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

537.12
B238.1
M
ex 1

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Barbosa, Yuri Alexandrovich

Superposição Generalizada de Dois Estados Comprimidos
Arbitrários. São Paulo, 1999.

Dissertação (Mestrado) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Experimental.

Orientador: Prof. Dr. Gil da Costa Marques
Área de Concentração: Física de Partículas

Unitermos: 1. Estados Comprimidos;
2. Superposição de Estados Comprimidos;
3. Squeezed States.

USP/IF/SBI-017/99

Agradecimentos

Caiano, Mestre Caiano...

A minha família: Cláudio (pai), Ivete (mãe), Damaris (irmã) e Magdalena (avó), pelo apoio de sempre;

Ao Orientador Gil pelo incentivo na pesquisa;

Ao Prof. Basílio Baseia pelo auxílio na elaboração deste trabalho;

A Grande Amiga de Sempre, Regiane que palavras não encontro para mostrar minha gratidão e respeito;

Aos Professores, Aécio, Célia Dantas, Henrique Fleming, Marcelo Marchioli, Vanderlei Bagnato e Miled;

A todos os amigos que me acompanharam no trabalho direta ou indiretamente;

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Índice

Lista de Figuras	i
Resumo	iv
Abstract	v
1. Introdução	1
2. Quantização de Campo Eletromagnético	11
2.1. Quantização do Campo	12
2.2. Estado de Fock	16
2.3. Estados Coerentes	18
2.3.1. Propriedades matemáticas dos estados coerentes	19
2.3.2. Representação dos estados coerentes	20
2.4. Estados Comprimidos	22
2.4.1. Estado coerente de dois ftons	22
2.4.2. Estados comprimidos ideais	24
3. Interferência no espaço de fase	26
3.1. Intersecção no espaço de fase	26
3.2. Interferência no espaço de fase para um estado	29
4. Superposição Generalizada de dois Estados Comprimidos Arbitrários	31
4.1. Propriedades Estatísticas	31
4.1.1. Distribuição de probabilidade de número de ftons	31
4.1.2. Estatística sub-Poissoniana	36
4.2. Efeito de compressão nas quadraturas	44
5. Geração da Superposição de dois Estados Comprimidos Arbitrários	48
5.1. Acoplamento ressonante	48
5.1.1. Geração de estados usando acoplamento ressonante	52
5.1.2. Geração de estados usando acoplamento dispersivo	55
6. Conclusão	58
Apêndice A	60
Dedução da Eq.(97a)	60
Transformação unitária	61
Apêndice B	63
Referências	66

Lista de Figuras

1.	Representação de um estado coerente, em um espaço de fase	21
2.	Representação de um estado coerente de dois ftons, em um espaço de fase	23
3.	Representação de um estado comprimido ideal, em um espaço de fase	25
4.	Representação, no espaço de fase:	27
	(a) Estado de número;	
	(b) Intersecção de um estado coerente com um estado de número;	
	(c) Intersecção de um estado comprimido com um estado de número.	
5.	Estado coerente interseccionando as bandas de Planck-Bohr-Sommerfeld	27
6.	Estado comprimido interseccionando duas regiões de uma mesma banda de Planck-Bohr-Sommerfeld	29
7.	Representações de dois estados comprimidos, interseccionando o estado de número no espaço de fase	30
8.	Gráficos da distribuição do número de ftons em função de n , com: $R_1=R_2=5$; $r_1=r_2=0.5$; $\theta_1=0$; $\theta_2=\pi$; $\phi_1=\phi_2=0$ e $\gamma=0$, variando os seguintes valores de ξ :	32
	(a) $\xi=0$ ou 1 ;	
	(b) $\xi=0.05$ ou 0.95 ;	
	(c) $\xi=0.5$	
9.	Gráficos da distribuição do número de ftons em função de n , com: $R_1=R_2=5$; $r_1=r_2=0.5$; $\theta_1=0$; $\theta_2=\pi$; $\phi_1=\phi_2=0$ e $\xi=0.5$, variando os seguintes valores de γ :	33
	(a) $\gamma=0$;	
	(b) $\gamma=\pi$.	
10.	Gráficos da distribuição do número de ftons em função de n , com: $r_1=r_2=0.5$; $\theta_1=0$; $\theta_2=\pi$; $\phi_1=\phi_2=0$; $\xi=0.5$ e $\gamma=0$, variando os seguintes valores de $R_1=R_2$:	34
	(a) $R_1=R_2=4$;	
	(b) $R_1=R_2=5$;	
	(c) $R_1=R_2=6$.	
11.	Gráficos da distribuição do número de ftons em função de n , com: $R_2=5$; $r_1=r_2=0.5$; $\theta_1=0$; $\theta_2=\pi$; $\phi_1=\phi_2=0$; $\xi=0.5$ e $\gamma=0$, variando os seguintes valores de R_1 :	35
	(a) $R_1=2$;	
	(b) $R_1=3.7$;	
	(c) $R_1=5$.	

12. Gráficos da **distribuição do número de ftons** em função de **n**, com: $R1=R2=3$; 36
 $\theta1=\theta2=0$; $\phi1=\phi2=0$; $\xi=1$ e $\gamma=0$, variando os seguintes valores de γ :
 (a) $r1=r2=0.5$;
 (b) $r1=r2=1.0$;
 (d) $r1=r2=1.5$.
13. Gráfico do **fator de Mandel** em função de **R (R1=R2)** para os seguintes valores: 38
 $r1=r2=0.5$; $\theta1=0$; $\theta2=\pi$; $\phi1=0$; $\xi=0.5$ e $\gamma=0$, onde $\phi2$ assume os seguintes valores:
 (a) $\phi2=0$;
 (b) $\phi2=\pi/2$;
 (c) $\phi2=\pi$.
14. Gráfico do **fator de Mandel** em função de **R (R1=R2)** para os seguintes valores: 38
 $r1=r2=0.5$; $\theta1=0$; $\theta2=\pi$; $\phi1=\phi2=0$ e $\xi=0.5$, onde γ assume os seguintes valores:
 (a) $\gamma=0$;
 (b) $\gamma=\pi/2$;
 (c) $\gamma=\pi$.
15. Gráficos do **fator de Mandel** em função de **r (r1=r2)** para os seguintes valores: 39
 $R1=R2=3$; $\theta1=0$; $\phi1=\phi2=0$; $\xi=0.5$ e $\gamma=0$, onde γ assume os seguintes valores: $\theta2=0, \pi/4, \pi/2$
16. Gráficos do **fator de Mandel** em função de $\phi2$ para os seguintes valores: $R1=R2=3$ 39
 $\theta1=0$; $\theta1=\pi$; $\phi1=0$; $\xi=0.5$ e $\gamma=0$, onde r ($r1=r2$) = 0.1, 0.3, 0.6.
17. Gráficos do **fator de Mandel** em função de ξ para os seguintes valores: $r1=r2=0.3$; 40
 $\theta1=0$; $\theta1=\pi$; $\phi1=\phi2=0$; e $\gamma=0$, onde $R(R1=R2)=1.0; 1.1; 1.3$ e 1.8 .
18. Gráficos do **fator de Mandel** em função de ξ e r para os seguintes valores: $R1=R2=3.5$, 41
 $\theta1=0$; $\theta1=\pi$; $\phi1=\phi2=0$ e $\gamma=0$.
19. Gráficos do **fator de Mandel** em função de ξ para os seguintes valores: $R1=R2=3.5$, 41
 $r1=r2=0.6$, $\phi1=\phi2=0$, e $\gamma=0$, onde:
 (a) $\theta1=0, \pi/4, 3\pi/4$ e $\pi/2$; para $\theta2=0$;
 (b) $\theta2=\pi, \pi/4, 3\pi/4$ e $\pi/2$; para $\theta1=0$.
20. Gráficos do **fator de Mandel** em função de ξ e γ para os seguintes valores: 42
 $R1=R2=3.5$; $r1=r2=0.4$; $\theta1=0$; $\theta2=\pi/6$; $\phi1=0$ e $\phi2=\pi/5$, onde (b) e (c) são visões laterais de (a)
21. Gráficos do **fator de Mandel** em função de ξ e γ para os seguintes valores: 43
 $R1=R2=0.55$, $r1=r2=0.12$, $\theta1=0$, $\theta2=\pi$, $\phi1=\phi2=0$
22. Gráficos do **fator de Mandel** em função de ξ e γ (Estado de Vácuo Comprimido) para 43
 Os seguintes valores: $R1=R2=0$, $r1=r2=0.1$, $\theta1=0$, $\theta2=\pi$, $\phi1=0$, $\phi2=\pi/2$
23. Gráfico da **variância** $\langle \Delta X_1^2 \rangle$ em função de ξ e γ para os seguintes valores: $R1=R2=0.5$, 46
 $r1=r2=0.1$; $\theta1=0$; $\theta2=\pi$ e $\phi1=\phi2=0$

24. Gráfico da **variância** $\langle \Delta X_2^2 \rangle$ em função de ξ e γ para os seguintes valores: $R_1=R_2=0.5$, $r_1=r_2=0.1$; $\theta_1=0$; $\theta_2=\pi$ e $\phi_1=\phi_2=0$ 46
25. Gráfico da **variância** $\langle \Delta X_1^2 \rangle$, para o estado de vácuo comprimido em função de ξ e γ 47
Para os seguintes valores: $R_1=R_2=0$; $r_1=r_2=0.1$; $\theta_1=0$; $\theta_2=\pi$; $\phi_1=0$ e $\phi_2=\pi/2$
26. Gráfico da **variância** $\langle \Delta X_2^2 \rangle$, para o estado de vácuo comprimido em função de ξ e γ 47
para os seguintes valores: $R_1=R_2=0$; $r_1=r_2=0.1$; $\theta_1=0$; $\theta_2=\pi$; $\phi_1=0$ e $\phi_2=\pi/2$
27. Figura do arranjo experimental, para a geração do estado desejado, utilizando Hamiltoniano ressonante 53
28. Figura do arranjo experimental, para a geração do estado desejado, utilizando Hamiltoniano dispersivo 55

Resumo

Dentre os diversos estados do campo de radiação quantizado, apresentamos uma superposição generalizada que interpola entre dois estados comprimidos arbitrários. Propriedades não clássicas deste estado intermediário são investigadas, tais como, oscilações na estatística dos ftons, P_n , estatística sub-poissoniana, e efeito de compressão de ruído quântico. Mostramos que resultados previamente encontrados na literatura reduzem-se a casos particulares do nosso. Propostas experimentais para geração desse estado superposto são também discutidas.

Abstract

Among the various states of the quantized radiation field, we introduce a generalized superposition state which interpolates between two arbitrary squeezed states. Nonclassical properties of this state, such as oscillations in the photon number, P_n , sub-Poissonian statistics and the squeezing effect, are studied. It is shown that many results found in the literature emerge as a particularization of ours. Experimental proposals to generate this state are also discussed.

Gênesis

1. No princípio criou Deus os céus e a Terra.
2. E a Terra era sem forma e vazia; e havia trevas sobre a face do abismo; e o Espírito de Deus se movia sobre a face das águas.
3. E disse Deus: -Haja luz! E houve luz.
4. E viu Deus que era boa a luz; e fez Deus separação entre a luz e as trevas.
5. E Deus chamou à luz Dia; e às trevas Noite. E foi a tarde e a manhã o dia primeiro.

“Mas através dos milênios a Natureza e a suas leis estavam veladas.

Então disse Deus : - Faça-se Newton! E tudo se iluminou ...” *

* Alexander Pope (1688-1744).

1. Introdução

...e foi Isaac Newton (1642-1727), em 1663, a elaborar uma teoria que explicasse a natureza da luz.

O palco do universo de Newton, no qual se desdobravam todos os fenômenos físicos, era o espaço tridimensional da geometria euclidiana clássica, onde, do seu ponto de vista, a luz era um fluxo de partículas dotadas de massa, possuindo uma velocidade “infinita”. Em 1676, o cientista holandês Olaus Roemer (1644-1710) mediu a velocidade da luz, e mais tarde, em 1801, Thomas Young (1773-1829) demonstrou experimentalmente que a luz era um fenômeno ondulatório, obtendo pela primeira vez uma medida direta do comprimento de onda da luz. Com isso o pensamento newtoniano estava reformulado. Posteriormente, em 1887 Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) realizou a experiência que pela primeira vez confirmou a existência de ondas eletromagnéticas, e, portanto, a teoria de Maxwell sobre a propagação da luz. Mas foi em 1905 que Albert Einstein (1879-1955) colocou em questão a teoria clássica da luz, propondo uma nova teoria, citando o efeito fotoelétrico como uma aplicação que poderia testar qual teoria estava correta. Max Karl Ernest Ludwig Planck (1858-1947) acreditava que a energia eletromagnética uma vez irradiada, se distribuía pelo espaço da mesma forma que as ondas de água se propagam no mar. Em vez disso, Einstein propôs que a energia radiante estivesse quantizada em pacotes concentrados, que mais tarde (1926) foram chamados fons¹.

Enquanto Young demonstrou que a luz era um fenômeno puramente ondulatório, Arthur Holly Compton (1892-1962) confirmou experimentalmente em 1923 a natureza corpuscular da radiação. Os físicos estavam buscando um caminho para entender a dualidade onda-partícula, quando surge Niels Henrik David Bohr (1885-1962) com o *princípio da complementaridade*, na qual propõe que, se uma medida prova o caráter ondulatório da radiação, ou da matéria, então é impossível provar o caráter corpuscular da mesma medida, e vice-versa. Em outras palavras poderíamos dizer que são “medidas canônicas complementares”.

¹Esse nome foi sugerido pelo químico G. N. Lewis [1]

1. Introdução

...e foi Isaac Newton (1642-1727), em 1663, a elaborar uma teoria que explicasse a natureza da luz.

O palco do universo de Newton, no qual se desdobravam todos os fenômenos físicos, era o espaço tridimensional da geometria euclidiana clássica, onde, do seu ponto de vista, a luz era um fluxo de partículas dotadas de massa, possuindo uma velocidade “infinita”. Em 1676, o cientista holandês Olaus Roemer (1644-1710) mediu a velocidade da luz, e mais tarde, em 1801, Thomas Young (1773-1829) demonstrou experimentalmente que a luz era um fenômeno ondulatório, obtendo pela primeira vez uma medida direta do comprimento de onda da luz. Com isso o pensamento newtoniano estava reformulado. Posteriormente, em 1887 Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894) realizou a experiência que pela primeira vez confirmou a existência de ondas eletromagnéticas, e, portanto, a teoria de Maxwell sobre a propagação da luz. Mas foi em 1905 que Albert Einstein (1879-1955) colocou em questão a teoria clássica da luz, propondo uma nova teoria, citando o efeito fotoelétrico como uma aplicação que poderia testar qual teoria estava correta. Max Karl Ernest Ludwig Planck (1858-1947) acreditava que a energia eletromagnética uma vez irradiada, se distribuía pelo espaço da mesma forma que as ondas de água se propagam no mar. Em vez disso, Einstein propôs que a energia radiante estivesse quantizada em pacotes concentrados, que mais tarde (1926) foram chamados fons¹.

Enquanto Young demonstrou que a luz era um fenômeno puramente ondulatório, Arthur Holly Compton (1892-1962) confirmou experimentalmente em 1923 a natureza corpuscular da radiação. Os físicos estavam buscando um caminho para entender a dualidade onda-partícula. Quando surge Niels Henrik David Bohr (1885-1962) com o *princípio da complementaridade*, o qual propõe que, se uma medida prova o caráter ondulatório da radiação, ou então é impossível provar o caráter corpuscular da mesma medida, e vice-versa. Poderíamos dizer que são “medidas canônicas complementares”.

[1] Citação feita pelo químico G. N. Lewis [1]

Em 1927, Paul A. M. Dirac (1902-1984) propôs a teoria quântica de campos e a partir de então acreditou-se que todos os fenômenos relativos a interação átomo-campo estavam bem conhecidos e que podiam ser explicados em termos de uma teoria semi-clássica. Mas foi em 1977 quando Kimble, Dagenais e Mandel [2], baseados no trabalho teórico de Carmichael e Walls [3], mediram a função de correlação de segunda ordem, $g^2(\tau)$, observando o efeito “anti-agrupamento de ftons” (*photon anti-bunching*), ou seja, através de uma luz fluorescente emitida por átomos de sódio, excitados por um feixe de laser, obtiveram um resultado notável: $g^2(\tau) < 1$, significando que a probabilidade de detectar um segundo fóton logo após a detecção do primeiro era menor em relação à luz coerente do laser. Este foi o primeiro efeito óptico não-clássico onde foi necessário aplicar uma teoria quântica. Desta forma surgia a Óptica Quântica e com ela um grande número de estados do campo de radiação, que apresentavam efeitos não-clássicos, começaram a ser investigados. Entre os mais conhecidos podemos citar:

- Os *Estados de Número* $|n\rangle$, que são auto estados do operador número $\mathbf{n} |n\rangle = n |n\rangle$, representados por

$$|n\rangle = \sum_{n'=0}^{\infty} \delta_{n,n'} |n'\rangle, \quad (1)$$

cuja geração foi estudada por Mandel [4] entre outros.

- Os *Estados Coerentes* $|\alpha\rangle$ [5], são estados pseudoclássico, sendo auto estados do operador de aniquilação, $\mathbf{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$, e representados por

$$|\alpha\rangle = \mathbf{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (\alpha = R e^{i\theta}), \quad (2)$$

onde $\mathbf{D}(\alpha) = \exp(\alpha \mathbf{a}^\dagger - \alpha^* \mathbf{a})$ é o operador de deslocamento unitário ($\mathbf{D} \mathbf{D}^\dagger = \mathbf{D}^\dagger \mathbf{D} = \mathbf{1}$), R , a amplitude de deslocamento, e o número médio de ftons $\langle \mathbf{n} \rangle = |\alpha|^2 = R^2$.

- Os *Estados Comprimidos* $|\beta\rangle = \mathbf{S}(z) |\alpha\rangle$ [6] são obtidos a partir da aplicação do operador de compressão

$$S(z) = \exp \left[(z a^{\dagger 2} - z^* a^2) / 2 \right] \quad (z = r e^{i\phi}), \quad (3)$$

num estado coerente ou no estado de vácuo $|0\rangle$ [7]:

$$|\beta\rangle = |z, \alpha\rangle = S(z) D(\alpha) |0\rangle = \exp \left[\frac{-|\beta|^2}{2} + \left(\frac{\nu^*}{2\mu} \right) \beta^2 \right] \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu/2\mu)^{n/2}}{\sqrt{n!}} H_n \left(\frac{\beta}{\sqrt{2\nu\mu}} \right) |n\rangle, \quad (4)$$

sendo $H_n(\frac{\beta}{\sqrt{2\nu\mu}})$ um polinômio de Hermite e

$$\beta = \mu\alpha + \nu\alpha^*, \quad (5)$$

com

$$\mu = \cosh(r) \quad \text{e} \quad \nu = \sinh(r) e^{i\phi}, \quad (6a)$$

tal que r é o parâmetro de compressão.

• *Os Estados de Fase* $|\theta\rangle$, investigados por Dirac [8] e posteriormente por Susskind e Glogower [9], são auto estados do operador de fase ϕ . Atualmente escrevemos este operador na forma estabelecida por Pegg e Barnett [10],

$$\phi = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m |\theta_m\rangle \langle \theta_m|, \quad (7)$$

e o estado de fase [11],

$$|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \sum_{n=0}^M e^{in\theta_m} |n\rangle, \quad (8)$$

e θ_m é a fase de referência dada por:

$$\theta_m = \theta_0 + \left(\frac{2\pi}{M+1} \right) m.$$

Agora, com base no princípio da superposição linear da Mecânica Quântica, ao considerarmos Ψ_1 e Ψ_2 soluções da equação de Schrödinger, a combinação dessas soluções também é solução ($\Psi = C_1\Psi_1 + C_2\Psi_2$). Assim sendo, um grande número de estados em Óptica Quântica podem ser gerados através de combinação conveniente de estados, tais como:

I) *Estado de Superposição de dois Estados de Número*, um dos primeiros estados de superposição a serem investigados, como no trabalho de Wodkiewicz *et al.* [12].

$$|\Psi_1\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (9)$$

$$|\Psi_2\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|2\rangle. \quad (10)$$

onde α e β são as amplitudes de probabilidade, com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

II) *Estados Coerentes Par* $|\Psi_+\rangle$ e *Ímpar* $|\Psi_-\rangle$ [13], são definidos como

$$|\Psi_+\rangle = \mathcal{N}_+ [|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle] \quad (11a)$$

$$|\Psi_-\rangle = \mathcal{N}_- [|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle], \quad (11b)$$

sendo $|\alpha\rangle$ e $|-\alpha\rangle$ dois estados coerentes e $\mathcal{N}_\pm$ as constantes de normalização, dadas por:

$$\mathcal{N}_\pm = \{2 [1 \pm \exp(-2|\alpha|^2)]\}^{-1/2} \quad (12a)$$

III) *Superposição de Dois Estados de Número Deslocado* [14], é definido como

$$|\Psi(\varphi)\rangle = \mathcal{N} \{ |n, \alpha e^{i\varphi/2}\rangle + |n, \alpha e^{-i\varphi/2}\rangle \}, \quad (13)$$

sendo

$$\mathcal{N} = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} |C_m|^2 \cos^2 [(m-n)\varphi/2] \right\}^{-1/2}, \quad (14)$$

a constante de normalização, em que

$$C_m = \langle m|0, z \rangle = (m!\mu)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\nu}{2\mu} \right)^{\frac{m}{2}} H_m(0), \quad (15)$$

onde μ e ν foram dados nas Eqs.(6a); $|\alpha_i, n\rangle = D(\alpha_i)|n\rangle$ o estado de número deslocado, sendo o operador deslocamento unitário.

IV) *Estado de Superposição de dois Estados Comprimidos* [15], definido como

$$|\zeta, \alpha, \theta\rangle = \mathcal{N} [S(\zeta)|\alpha\rangle + \exp(i\theta)S(\zeta)|-\alpha\rangle], \quad (16)$$

no qual,

$$\mathcal{N} = \exp \left[\frac{-1}{2} |\alpha|^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 e^{-i\theta} \tanh(r) \right] \quad (17)$$

é a constante de normalização, $S(\zeta) = \exp \left[\frac{1}{2} (\zeta a^{\dagger 2} - \zeta^* a^2) \right]$ o operador de compressão atuando nos estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle$, e $\exp(i\theta)$ uma fase qualquer. Para $\theta = 0$ temos o estado comprimido par, e para $\theta = \pi$ temos o estado comprimido ímpar.

V) *Estado de Superposição de Dois Estados de Vácuo Comprimido*, introduzido por Sanders [16], definido como

$$|re^{i\theta}, r'e^{i\theta'}; e^{i\psi}\rangle = \mathcal{N} \left(|re^{i\theta}\rangle + e^{i\psi} |r'e^{i\theta'}\rangle \right), \quad (18)$$

sendo o fator de normalização

$$\mathcal{N} = \left\{ 2 + 2\Re_e \left[e^{-r^2(1-e^{2i\theta})} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}} \quad (19)$$

e $|re^{i\theta}\rangle$ e $|r'e^{i\theta'}\rangle$ os estados de vácuo comprimido, dados por

$$|re^{i\theta}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu/2\mu)^{n/2}}{\sqrt{n!\mu}} H_n(0) |n\rangle.$$

VI) *Estado Intermediário Número-Coerente*, investigado por Baseia *et al.* [17], definido por,

$$|\Psi\rangle = \eta(\xi, \phi) \left[\sqrt{\xi} |n\rangle + e^{i\phi} \sqrt{1-\xi} |\alpha\rangle \right], \quad (20)$$

onde

$$\eta(\xi, \phi) = \left[1 + \frac{2\sqrt{\xi(1-\xi)} e^{-|\alpha|^2/2} |\alpha|^m \cos(\phi + m\theta)}{\sqrt{m!}} \right]^{-1/2}, \quad (21)$$

é a constante de normalização e $\xi \in [0, 1]$. Podemos observar que este estado interpola entre os mesmos estados limites do estado binomial, sendo um estado interpolador alternativo.

VII) *Estado Intermediário Número-Fase*, estudado por Lima *et al.* [18], definido como

$$|\xi, M\rangle = \sum_{n=0}^M \beta_n^M(\xi) |n\rangle \quad (22)$$

onde

$$\beta_n^M(\xi) = (s^2 + M)^{-1/2} (1 + \xi' \delta_{n',M}) \exp[i\theta_m(n - Mr)], \quad (23)$$

com

$$r = \xi'/s, \quad (24a)$$

$$s = 1 + \xi, \quad (24b)$$

$$\xi' = \xi + \frac{1}{M}, \quad (24c)$$

$$\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{S+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, S \quad (24d)$$

sendo $\xi \in [0, \infty]$ e M , um número inteiro compreendido no intervalo $[0, \infty]$.

VIII) *Estado Intermediário Coerente-Coerente*, estudado por Ragi *et al.* [19], definido como

$$|\Psi(\xi, \theta)\rangle = \eta(\xi, \theta) \left[\sqrt{\xi} |\alpha_1\rangle + e^{i\theta} \sqrt{1-\xi} |\alpha_2\rangle \right] \quad (25)$$

onde $\xi \in [0, 1]$, $|\alpha_j\rangle$ é um estado coerente, $j = 1, 2$, e $\eta(\xi, \theta)$ é o fator de normalização

$$\eta(\xi, \theta) = \left[1 + 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \Re_e(e^{i\theta} \langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle) \right]^{-1/2}. \quad (26)$$

IX) *Estado Intermediário Número-Comprimido*, estudado por G. Marques *et al.* [20], interpola o estado de número $|n\rangle$ e o estado comprimido $|\beta\rangle$, definido como

$$|\Psi(\xi, \gamma)\rangle = \eta(\xi, \gamma) \left[\sqrt{\xi} |n\rangle + e^{i\gamma} \sqrt{1-\xi} |\beta\rangle \right] \quad (27)$$

onde o fator de normalização é dado por

$$\eta(\xi, \gamma) = \left[1 + 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \Re_e(e^{i\gamma} \langle n | \beta \rangle) \right]^{-1/2}. \quad (28)$$

X) *Estado Binomial*², introduzido por Stoler [21], o qual interpola entre o estado de número $|n\rangle$ e o estado coerente $|\alpha\rangle$,

$$|\eta, M\rangle = \sum_{n=0}^M \beta_n^M(\eta) |n\rangle, \quad (29)$$

sendo

$$\beta_n^M(\eta) = \left[\binom{M}{n} \eta^n (1-\eta)^{M-n} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (30)$$

os coeficientes binomiais, e $\eta \in [0, 1]$ o parâmetro interpolador. Os coeficientes binomiais $\beta_n^M(\eta)$ levam a situações limites para certos valores de η [22], de modo que quando $\eta = 1$ recuperamos o estado de número

$$|1, M\rangle = |n\rangle, \quad (31)$$

e quando $\eta \rightarrow 0$ e $M \rightarrow \infty$ (com $\eta M = |\alpha|^2$) temos o estado coerente.

Apresentaremos sucintamente na tabela 1 as informações descritas acima, para melhor compreensão de alguns estados quânticos do campo de radiação.

²O *Estado Binomial* não é um estado formado pela superposição de dois estados, mas tem a propriedade de ser um estado interpolador.

Propostas para novos estados do campo de radiação que apresentam efeitos não clássicos aparecem na literatura, mas o desafio maior está na geração de tais estados. Até então, poucos foram produzidos em laboratório, como por exemplo: *os estados de número* [23] (de difícil geração, é produzido para n muito pequeno, $n \approx 1$); *os estados coerentes* (representados por um laser ideal) e *os estados comprimidos* [24]. Novas propostas de geração, para outros estados, vêm surgindo, como é o caso do *estado binomial recíproco* [25] e *estado binomial negativo* [26]. Neste trabalho, estudaremos um novo estado do campo de radiação luminoso, o qual é formado pela superposição de dois estados comprimidos arbitrários, $|\beta_1\rangle = |z_1, \alpha_1\rangle$ e $|\beta_2\rangle = |z_2, \alpha_2\rangle$. Utilizamos um parâmetro interpolador ξ que regula a contribuição de cada estado para o estado superposto e um parâmetro interpolador de fase γ . Denominamos tal estado de *Superposição Generalizada de dois Estados Comprimidos Arbitrários* (SGCC). Trata-se, portanto, de um estado generalizado que envolve a superposição de dois estados comprimidos.

Os capítulos seguintes, apresentados neste trabalho, estão dispostos da seguinte forma: no Capítulo 2 discorremos sobre a quantização do campo eletromagnético e apresentamos os estados de Fock, estados coerentes e estados comprimidos. No Capítulo 3, estudamos a interferência no espaço de fase explicando porque, em alguns casos, a distribuição de probabilidade do número de fons pode apresentar um comportamento oscilatório. No Capítulo 4, introduzimos o SGCC e estudamos suas propriedades estatísticas, verificando como os parâmetros envolvidos influenciam a estatística. No Capítulo 5, consideramos propostas para a geração do SGCC, comparando vantagens e desvantagens a serem empregadas. Finalmente, no Capítulo 6 apresentamos os comentários e conclusões.

Tabela 1

Estado	Representação na base de número	Características
Número $ n\rangle$ [4]	$ n\rangle = \sum_{n'=0}^{\infty} \delta_{n',n} n'\rangle$	Apresenta anti-bunching $g^2(\tau) = 1 - \frac{1}{N}$ Apresenta máxima estatística sub-Poissoniana ($Q = -1$)
Coerente $ \alpha\rangle$ [5]	$ \alpha\rangle = e^{-\frac{ \alpha ^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} n\rangle$ $\alpha = Re^{i\theta}$	Chamado de estado <i>pseudoclássico</i> Apresenta estatística poissoniana ($Q = 0$) Mesma compressão em ambas as quadraturas $\langle \Delta X_1^2 \rangle = \langle \Delta X_2^2 \rangle = \frac{1}{4}$
Comprimido $ \beta\rangle$ [6-7]	$ \beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{\nu}{2\mu})^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} \exp\left[\frac{- \beta ^2}{2} + \left(\frac{\nu^*}{2\mu}\right) \beta^2\right] H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right) n\rangle$ $\beta = \mu\alpha + \nu\alpha^*$ $\mu = \cosh(r)$ $\nu = e^{i\phi} \sinh(r)$	Apresenta estatística sub-poissoniana Apresenta efeito de compressão, com $\langle \Delta X_1^2 \rangle < \frac{1}{4}$ ou $\langle \Delta X_2^2 \rangle > \frac{1}{4}$ Apresenta efeito anti-Bunching.
Fase $ \theta\rangle$ [11]	$ \theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{M+1}} \sum_{n=0}^M e^{in\theta_m} n\rangle$ $\theta_m = \theta_0 + \left(\frac{2\pi}{M+1}\right) m$	Apresenta variância infinita no número
Estado de superposição de dois estados de Número [12]	$ \Psi_1\rangle = \alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$ $ \Psi_2\rangle = \alpha 0\rangle + \beta 2\rangle$	Estatística sub-poissoniana Efeito de compressão Efeito anti-Bunching
Estado Coerente Par $ \Psi_+\rangle$ [13]	$ \Psi_+\rangle = \mathcal{N}_+ [\alpha\rangle + -\alpha\rangle]$	Efeito de compressão
Estado Coerente Ímpar $ \Psi_-\rangle$ [13]	$ \Psi_-\rangle = \mathcal{N}_- [\alpha\rangle - -\alpha\rangle]$	Estatística sub-poissoniana
Superposição de dois estados de Número Deslocado [14]	$ \Psi(\varphi)\rangle = \mathcal{N} \left\{ n, \alpha e^{i\varphi/2}\rangle + n, \alpha e^{-i\varphi/2}\rangle \right\}$ $\mathcal{N} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_m ^2 \cos^2[m - n] \varphi/2 \right\}^{-1/2}$ $C_m = (m!\mu)^{-1/2} \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^{\frac{m}{2}} H_m(0)$	Estatística sub-poissoniana Efeito de compressão Efeito anti-Bunching Oscilações na P_n
Superposição de dois estados Comprimidos [15]	$ \zeta, \alpha, \theta\rangle = \mathcal{N} [\mathbf{S}(\zeta) \alpha\rangle + \exp(i\theta) \mathbf{S}(\zeta) -\alpha\rangle]$ $\mathcal{N} = \exp\left[\frac{-1}{2} \alpha ^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 e^{-i\theta} \tanh(r)\right]$ $\mathbf{S}(\zeta) = \exp\left[\frac{1}{2} (\zeta \mathbf{a}^{\dagger 2} - \zeta^* \mathbf{a}^2)\right]$	Estatística sub-poissoniana Efeito de compressão Efeito anti-Bunching Oscilações na P_n

Tabela 1 (continuação)

Estado	Representação na base de número	Características
Superposição de dois estados de Vácuo Comprimido [16]	$\left re^{i\theta}, r'e^{i\theta'}; e^{i\psi}\right\rangle = \mathcal{N} \left(\left re^{i\theta}\right\rangle + e^{i\psi} \left r'e^{i\theta'}\right\rangle \right)$ $\mathcal{N} = \left\{ 2 + 2\Re_e \left[e^{-r^2(1-e^{2i\theta})} \right] \right\}^{-1/2}$ $\left re^{i\theta}\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu/2\mu)^{n/2}}{\sqrt{n!\mu}} H_n(0) n\rangle$	Estatística sub-poissoniana Efeito de compressão Efeito anti-Bunching Oscilações na P_n
Estado Intermediário Número Coerente [17]	$ \Psi\rangle = \eta(\xi, \phi) \left[\sqrt{\xi} n\rangle + e^{i\phi} \sqrt{1-\xi} \alpha\rangle \right]$ $\eta(\xi, \phi) = \left[1 + \frac{2\sqrt{\xi(1-\xi)} e^{- \alpha ^2/2} \alpha ^m \cos(\phi+m\theta)}{\sqrt{m!}} \right]^{-1/2}$	Estatística sub-poissoniana Efeito de compressão Efeito anti-Bunching
Estado Intermediário Número Fase [18]	$ \xi, M\rangle = \sum_{n=0}^M \beta_n^M(\xi) n\rangle$ $\beta_n^M(\xi) = (S^2 + M)^{-1/2} \times$ $(1 + \xi' \delta_{n',M}) \exp(i\theta_m(n - Mr))$ $r = \frac{\xi'}{s}$ $s = 1 + \xi$ $\xi' = \xi + \frac{1}{M}$ $\theta_m = \theta_0 + \frac{2\pi m}{S+1}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, S.$	Estatística sub-poissoniana Efeito de compressão Efeito anti-Bunching Oscilações na P_n
Estado Intermediário Coerente Coerente [19]	$ \Psi(\xi, \phi)\rangle = \eta(\xi, \phi) \left[\sqrt{\xi} \alpha_1\rangle + e^{i\theta} \sqrt{1-\xi} \alpha_2\rangle \right]$ $\eta(\xi, \phi) = \left[1 + 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \Re_e(e^{i\theta} \langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle) \right]^{-1/2}$ $ \alpha_j\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(j)} n\rangle$	Estatística sub-poissoniana Efeito de compressão Efeito anti-Bunching Oscilações na P_n
Estado Intermediário Número Comprimido [20]	$ \Psi(\xi, \gamma)\rangle = \eta(\xi, \gamma) \left[\sqrt{\xi} n\rangle + e^{i\gamma} \sqrt{1-\xi} \beta\rangle \right]$ $\eta(\xi, \gamma) = \left[1 + 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \Re_e(e^{i\gamma} \langle n \beta \rangle) \right]^{-1/2}.$	Estatística sub-poissoniana Efeito de compressão Efeito anti-Bunching
Estado Binomial [21]	$ \eta, M\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^M(\eta) n\rangle$ $\beta_n^M(\eta) = \left[\binom{M}{n} \eta^n (1-\eta)^{M-n} \right]^{\frac{1}{2}}$	Estatística sub-poissoniana Efeito de compressão Efeito anti-Bunching

2. Quantização do Campo Eletromagnético

As primeiras experiências estabelecendo uma relação entre os campos elétricos e magnéticos dependentes do tempo, foram realizados em 1831 por Michael Faraday (1791-1867), que observou a presença de correntes induzidas em circuitos sujeitos a campos magnéticos variáveis. Em 1865 James Clerk Maxwell (1831-1879), ao publicar o trabalho “Uma Teoria Dinâmica do Campo Eletromagnético”, mostrou a unificação das teorias do campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ com o campo magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$.

Enquanto a teoria clássica do eletromagnetismo estava atingindo o seu ápice, começaram a aparecer alguns resultados desconhecidos nos experimentos da interação radiativa. Experimentos realizados por Lenard, ao tentar explicar as observações realizadas por Hertz, mostravam que os elétrons escapavam de um metal quando este era exposto à luz ultravioleta, ganhando assim energia da radiação. Observou-se um acréscimo no número de elétrons à medida que aumentava a intensidade da luz. Mas a energia cinética somente aumentava com o acréscimo da frequência da luz incidente. Esta observação não tinha uma explicação clássica, pois até então, acreditava-se que a energia cinética dos elétrons dependia simplesmente da intensidade da radiação, mas não de sua frequência, conforme baseado na teoria clássica.

Outros experimentos também não podiam mais ser sustentados em termos de uma teoria clássica, por exemplo a radiação espectral do corpo negro à temperatura T , onde a previsão teórica de John Strutt, Lord Rayleigh (1842-1919) e Sir James Jeans (1877-1946) entrou em desacordo com o resultado experimental. Essa discrepância ficou conhecida como “catástrofe do ultra-violeta”.

Com o advento de laser, em 1960, a Óptica não linear deu um grande salto, com as novas propriedades estatísticas da luz estudadas, verificando-se em uma luz coerente (produzida em um laser ideal) um ruído quântico mínimo (ruído de vácuo), resultado este em acordo com o princípio da incerteza de Werner Heisenberg (1901-1971).

Em 1970 foi proposta uma nova classe de estados, os estados comprimidos [21], onde a

variância em uma das quadraturas é inferior à correspondente variância do estado de vácuo $|0\rangle$. Em 1977 [26], com a medição da função de correlação de segunda ordem, descobriu-se o efeito anti agrupamento de ftons (“photon anti-bunching”). Relacionado com estas descobertas estava um fenômeno de carácter puramente quântico, sem nenhum análogo clássico, fazendo-se necessário para entendê-lo, o apelo à quantização do campo eletromagnético.

2.1. Quantização do Campo

Consideramos um campo eletromagnético clássico no espaço vazio, livre de qualquer tipo de fontes como cargas ou correntes. O campo satisfaz às equações homogêneas de Maxwell, em unidades de SI [27],

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (32)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \quad (33)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0 \quad (34)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t). \quad (35)$$

Utilizando o gauge de Coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0, \quad (36)$$

representamos o campo elétrico e magnético através do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$, definido a partir das equações

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (37)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (38)$$

onde $\vec{A}(\vec{r}, t)$ obedece a equação de onda

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0. \quad (39)$$

Considerando o campo eletromagnético, no interior de uma caixa cúbica muito grande de lado L e escrevendo o potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$ em uma expansão de Fourier nos modos de ondas planas, temos

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (40)$$

onde ε_0 é a constante dielétrica do vácuo e $\vec{k}$ um vetor com as seguintes componentes

$$\begin{aligned} k_1 &= 2\pi n_1/L, & n_1 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ k_2 &= 2\pi n_2/L, & n_2 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \\ k_3 &= 2\pi n_3/L, & n_3 &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Utilizando a condição de transversalidade [Eq.(36)], temos

$$\sum_{\vec{k}} \vec{k} \cdot \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0 \quad (42)$$

e desta forma concluímos que

$$\vec{k} \cdot \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}(t) = 0. \quad (43)$$

Desde que $\vec{A}(\vec{r}, t)$ satisfaz a equação de onda

$$\sum_{\vec{k}} \left(-\kappa^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0, \quad (44)$$

temos que, para todo $\vec{r}$, $\vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}(t)$ satisfaz a equação de movimento

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega^2 \right) \vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}(t) = 0. \quad (45)$$

Aqui introduzimos a frequência angular $\omega_{\vec{k}} = c |\vec{k}|$, abreviada por ω . A solução desta equação será

$$\vec{\mathcal{A}}_{\vec{k}}(t) = \vec{c}_{\vec{k}} \hat{\varepsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} e^{-i\omega t} + \vec{c}_{\vec{k}}^* \hat{\varepsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)*} e^{i\omega t}, \quad (46)$$

no qual $\hat{\epsilon}^{(\lambda)}$ é o vetor de polarização unitário e λ o índice de polarização ($\lambda = 1, 2$).

Desta forma, o potencial vetor pode ser descrito da seguinte maneira

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\epsilon_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} \left(\vec{c}_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} e^{-i\omega t} + \vec{c}_{\vec{k}}^* \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)*} e^{i\omega t} \right) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (47)$$

Para quantizarmos o campo, introduzimos os operadores canonicamente conjugados $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$,

$$\mathbf{q}_{\vec{k}}(t) = (\mathbf{c}_{\vec{k}} e^{-i\omega \vec{k} t} + \mathbf{c}_{\vec{k}}^* e^{i\omega \vec{k} t}) \quad (48a)$$

$$\mathbf{p}_{\vec{k}}(t) = -i\omega (\mathbf{c}_{\vec{k}} e^{-i\omega \vec{k} t} - \mathbf{c}_{\vec{k}}^* e^{i\omega \vec{k} t}), \quad (48b)$$

onde, substituindo por operadores não-hermitanos,

$$\mathbf{a}_{\vec{k}}(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} [\omega \mathbf{q}_{\vec{k}}(t) + i \mathbf{p}_{\vec{k}}(t)] \quad (49a)$$

$$\mathbf{a}_{\vec{k}}^\dagger(t) = \frac{1}{(2\hbar\omega)^{1/2}} [\omega \mathbf{q}_{\vec{k}}(t) - i \mathbf{p}_{\vec{k}}(t)], \quad (49b)$$

podemos escrever a Eq.(47) na seguinte forma

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0} \right)^{1/2} \left[\mathbf{a}_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \mathbf{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)*} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right]. \quad (50)$$

Com o auxílio das Eqs.(37) e (38) podemos escrever as expressões para o campo elétrico e para o campo magnético

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0} \right)^{1/2} \left[i \mathbf{a}_{\vec{k}} \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} - i \mathbf{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)*} e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right], \quad (51)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0} \right)^{1/2} \left[i \mathbf{a}_{\vec{k}} (\vec{k} \times \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} - i \mathbf{a}_{\vec{k}}^\dagger (\vec{k} \times \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)*}) e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \right]. \quad (52)$$

A quantização do campo eletromagnético é acompanhada da escolha dos operadores $\mathbf{a}_{\vec{k}}$ e $\mathbf{a}_{\vec{k}}^\dagger$, onde as condições de comutação são dadas por

$$[\mathbf{a}_{\vec{k}}, \mathbf{a}_{\vec{k}'}] = [\mathbf{a}_{\vec{k}}^\dagger, \mathbf{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = 0 \quad \text{e} \quad [\mathbf{a}_{\vec{k}}, \mathbf{a}_{\vec{k}'}^\dagger] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \quad (53)$$

lembrando que

$$\mathbf{a}_{\vec{k}}(t) = \mathbf{a}_{\vec{k}} e^{-i\omega t} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_{\vec{k}}^\dagger(t) = \mathbf{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{i\omega t}. \quad (54)$$

2. O comportamento dinâmico das amplitudes eletromagnéticas pode ser descrito por um conjunto de osciladores independentes que obedecem às relações de comutação acima. O estado do campo em cada modo $\vec{k}$ pode ser descrito por um vetor $|\Psi_{\vec{k}}\rangle$ do espaço de Hilbert apropriado. Os estados do campo total são então definidos por um produto tensorial do espaço de Hilbert para todos os modos: $|\Psi\rangle = \otimes_{\vec{k}} |\Psi_{\vec{k}}\rangle$.

O hamiltoniano do sistema nos fornece a energia do campo eletromagnético,

$$H = \frac{1}{2} \int_{L^3} \left(\epsilon_0 E^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} B^2(\vec{r}, t) \right) d^3r. \quad (55)$$

Substituindo a expressão do campo elétrico (51) e a expressão equivalente para o campo magnético (52), o hamiltoniano acima se reduz à seguinte forma

$$H = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right), \quad (56)$$

sendo $\hbar \omega_{\vec{k}}$ a energia de um fóton, $n = a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$ o número de ftons e $\frac{1}{2} \hbar \omega_{\vec{k}}$ a energia do estado fundamental do modo k .

Podemos escrever a Eq.(51) em termos dos operadores de quadratura, hermitianos,

$$X_{1\vec{k}} = \frac{1}{2} (a_{\vec{k}} + a_{\vec{k}}^\dagger) \quad (57a)$$

$$X_{2\vec{k}} = -\frac{i}{2} (a_{\vec{k}} - a_{\vec{k}}^\dagger), \quad (57b)$$

resultando,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{k}} \left(\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0} \right)^{1/2} \hat{\epsilon}_{\vec{k}}^{(\lambda)} \left[X_{1\vec{k}} \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) - X_{2\vec{k}} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right]. \quad (58)$$

O nome “quadratura”, vem do fato de seno e cosseno serem funções em quadratura.

2.2. Estados de Fock

Os estados de Fock, ou estados de número $|n\rangle$, como também são chamados, são auto-estados do operador de número

$$\mathbf{n}|n\rangle = n|n\rangle \quad (59)$$

onde os auto-valores n correspondem a valores fixos inteiros, $n=0,1,2,\dots$ e o conjunto $\{|n\rangle\}$ forma a base do espaço de Hilbert para o oscilador harmônico [28], de modo que para lidar com as propriedades do oscilador harmônico é mais conveniente utilizar a base $|n\rangle$ do que a base usual $|x\rangle$ e $|p\rangle$, no espaço de coordenadas e momento, pois na referida base a equação de Schrödinger independente do tempo fica diagonal.

O oscilador harmônico simples é um dos mais importantes problemas na Mecânica Quântica, onde, de um ponto de vista prático, temos suas aplicações em diversos ramos da física moderna, tais como: espectroscopia molecular, física do estado sólido, estrutura nuclear, teoria de campos, óptica quântica, entre outros.

O operador número $\mathbf{n}$, é definido por

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}, \quad (60)$$

e seus auto-estados são ortonormais,

$$\langle n|n'\rangle = \delta_{n,n'} \quad (61)$$

formando ainda um conjunto completo

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = \mathbf{1}. \quad (62)$$

onde $\mathbf{1}$ é o operador identidade.

Os operadores de criação $a^\dagger$ e aniquilação a aplicados no estado de número, atuam da seguinte forma:

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (63)$$

$$a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (64)$$

$$a|0\rangle = 0, \quad (65)$$

sendo $|0\rangle$ o estado fundamental ou estado de vácuo.

O espectro do campo de radiação é igualmente espaçado, de um valor constante $\hbar\omega$, o qual sobe pela atuação do operador $a^\dagger$, e desce pela ação de a . Os estados de número podem ser expressos pela atuação do operador de criação no estado fundamental, como segue:

$$|n\rangle = (a^{\dagger n} / \sqrt{n!})|0\rangle. \quad (66)$$

Concluimos então que os auto-estados $|n\rangle$, de n são também auto-estados do Hamiltoniano, ou seja

$$H|n\rangle = \hbar\omega(n + 1/2)|n\rangle, \quad (67)$$

de modo que $H|n\rangle = E_n|n\rangle$ com auto valor E_n dado por

$$E_n = \hbar\omega(n + 1/2). \quad (68)$$

Com o auxílio da relação de completeza (62) podemos escrever qualquer estado $|\psi\rangle$, em termos das componentes $\{|n\rangle\}$, ou seja,

$$|\psi\rangle = \mathbf{1}|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle \quad (69)$$

em que $C_n = \langle n|\psi\rangle$. Tal fato também se aplica aos operadores de aniquilação e criação:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} |n-1\rangle \langle n|, \quad (70a)$$

$$a^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} |n+1\rangle \langle n|. \quad (70b)$$

A distribuição de probabilidade associada ao número de ftons é a função delta de Kronecker

$$P_m = |\langle m|n \rangle|^2 = \delta_{m,n}, \tag{71}$$

decorrente da condição de ortonormalidade do estado de número. Estes estados possuem o número de ftons bem definidos e com isso a variância no número de ftons para o estado de número é zero, $\langle (\Delta n)^2 \rangle = 0$, o que implica em uma fase completamente aleatória.

2.3. Estados Coerentes

Os estados coerentes foram introduzidos logo após o nascimento da Mecânica Quântica, quando por volta de 1926, Erwin Schrödinger (1887–1961) sugeriu a existência de um nova classe de estados que apresentavam o comportamento clássico de um oscilador. Com isso, podemos descrever uma fonte de luz coerente através dos estados coerentes de um oscilador harmônico [29].

Estas propriedades foram investigadas posteriormente por Klauder, em 1960 e por Bargmann, em 1961. A investigação dos estados coerentes, nome este sugerido por Glauber [5], foi muito importante em seu trabalho sobre Óptica Quântica, em 1963.

Os estados coerentes $|\alpha\rangle$ são definidos como auto-estados do operador de aniquilação a

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{72}$$

e sendo a um operador não hermitiano o que resulta em um α complexo.

Além disso, estes estados podem ser descritos em termos de uma expansão nos estados de Fock, Eq.(2).

O estado de número $|n\rangle$ representa um estado com um número exato de ftons. Podemos então obter, com o auxílio das Eqs.(71) e (2), a probabilidade P_n de encontrar n ftons num

campo em um estado coerente,

$$P_n = |\langle n|\alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (73)$$

O número médio de ftons, num estado coerente, pode ser obtido como

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | n | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \quad (74)$$

e similarmente,

$$\langle n^2 \rangle = \langle \alpha | n^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | a^\dagger (a^\dagger a + 1) a | \alpha \rangle = |\alpha|^4 + |\alpha|^2. \quad (75)$$

A partir das Eqs.(74) e (75), podemos escrever a variância do número médio de ftons para o estado coerente

$$(\Delta n^2) = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2. \quad (76)$$

Utilizando o resultado obtido na Eq.(74), podemos reescrever (73) como

$$P_n = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle} \quad (77)$$

que corresponde à distribuição de probabilidade de Poisson, com número médio de ftons $\langle n \rangle = |\alpha|^2$.

2.3.1. Propriedades matemáticas dos estados coerentes

Dentre as diversas propriedades matemáticas dos estados coerentes, utilizadas em situações onde o oscilador harmônico é um modelo, destacamos:

1) **Não-ortogonalidade:** Dois estados coerentes distintos $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ não são ortogonais, desta forma com o auxílio da Eq.(2) obtemos a seguinte expressão

$$\langle \alpha | \beta \rangle = e^{-(|\alpha|^2/2 + |\beta|^2/2 - \alpha^* \beta)} \quad (78)$$

e conseqüentemente,

$$|\langle \alpha | \beta \rangle|^2 = e^{-|\alpha - \beta|^2} \rightarrow 0, \text{ se } |\alpha - \beta| \rightarrow \infty. \quad (79)$$

O "overlap" $\langle \alpha | \beta \rangle$ tende a zero, apenas para condições limites, sendo também uma função contínua de variáveis α e β no plano complexo.

2) **Completeza de $\{|\alpha\rangle\}$:** O conjunto $\{|\alpha\rangle\}$ é super completo, ou seja:

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha| \frac{d^2\alpha}{\pi} = 1 \quad (80)$$

onde a integração é sobre todo o plano complexo.

Os estados coerentes estabelecem uma base alternativa (contínua, não-ortogonal) para o espaço de Hilbert do oscilador harmônico ou do campo eletromagnético. Em vista da completeza, qualquer vetor $|\psi\rangle$ do espaço de Hilbert pode ser expresso na base de estados coerentes. Utilizando a Eq.(80), temos

$$|\psi\rangle = \int |\alpha\rangle \langle \alpha | \psi \rangle \frac{d^2\alpha}{\pi}. \quad (81)$$

Em particular, para qualquer estado coerente $|\beta\rangle$, podemos escrevê-lo da seguinte forma

$$\begin{aligned} |\beta\rangle &= \int |\alpha\rangle \langle \alpha | \beta \rangle \frac{d^2\alpha}{\pi} \\ &= \int |\alpha\rangle e^{(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} + \alpha^* \beta)} \frac{d^2\alpha}{\pi} \end{aligned} \quad (82)$$

mostrando a dependência linear do conjunto infinito $\{|\alpha\rangle\}$.

2.3.2. Representação dos Estados Coerentes

Como o estado coerente é dito super completo, então é possível representá-lo de diversas maneiras. Uma delas é a *representação diagonal* ou *representação P de Glauber-Sudarshan*, ([30]-[31]), na qual um campo no estado ρ é representado como

$$\rho = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha. \quad (83)$$

Esta representação sugere que qualquer estado do campo eletromagnético possa ser representado por uma superposição de estados coerentes, com peso $P(\alpha)$. Impondo que ρ tenha um traço unitário, $P(\alpha)$ será normalizada da seguinte maneira

$$1 = \text{Tr } \rho = \text{Tr} \left(\int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \right) = \int P(\alpha) d^2\alpha. \quad (84)$$

Definimos para o estado clássico da luz, que $P(\alpha)$ é a densidade de probabilidade, porém sua interpretação é em geral mais complicada, pois há casos em que $P(\alpha)$ assume valores negativos, não podendo ser interpretada como uma distribuição de probabilidade clássica, recebendo então o nome de *função quasi probabilidade*. Como exemplo, consideramos o operador densidade para o estado coerente, $\rho = |\alpha\rangle \langle \alpha|$, caso em que $P(\alpha)$ é definida como

$$P(\alpha) = \delta^{(2)}(\alpha - \alpha'). \quad (85)$$

Uma outra propriedade dos estados coerentes é que eles são estados de mínima incerteza, satisfazendo a relação

$$(\Delta X_1)(\Delta X_2) = \hbar/2, \quad \text{com} \quad (86)$$

com a condição adicional

$$(\Delta X_1) = (\Delta X_2) = \sqrt{\hbar/2}$$

onde X_1 e X_2 são operadores de quadratura do campo luminoso Eqs.(57a)-(57b) e obedecem à relação de comutação:

$$[X_1, X_2] = i\hbar. \quad (87)$$

Figura 1: Representação de um Estado Coerente

2.4. Estados Comprimidos

2.4.1. Estado coerente de dois ftons

Em 1970, quando estudava estados de mínima incerteza, Stoler [21] descobriu um novo efeito ótico não-clássico, a compressão do ruído quântico, denominado posteriormente de estado comprimido da luz, também chamado de estado coerente de dois ftons [6] (ECDF). Mais tarde, em 1985, Slusher e colaboradores [34], conseguiram observar este efeito nos laboratórios da Bell, usando mistura de quatro ondas em cavidade óptica.

A vantagem desta descoberta possibilitaria, por exemplo, a detecção de ondas gravitacionais, pois até então a utilização de um outro tipo de radiação mascarava o sinal desejado devido ao ruído quântico do vácuo. Com os estados comprimidos, é possível reduzir o ruído abaixo do ruído do vácuo, possibilitando assim a observação de sinais abaixo do limite quântico.

Os estados comprimidos apresentam variâncias diferentes em cada quadratura,

$$(\Delta X_1) < \sqrt{\hbar/2} \text{ ou } (\Delta X_2) < \sqrt{\hbar/2} \quad (88)$$

com

$$(\Delta X_1)(\Delta X_2) \geq \hbar/2. \quad (89)$$

Se temos um feixe luminoso onde $(\Delta X_1) < \hbar/2$, isto corresponde a uma luz com ruído, abaixo daquele obtido pelo estado coerente (ou no estado de vácuo).

Em geral os ECDF são diferenciados dos estados coerentes por diversos motivos [6]: não possuem as mesmas propriedades estatísticas quânticas e são gerados por diferentes processos não lineares [35]; onde, basicamente, os estados coerentes são obtidos por um processo estimulado ideal, de um fóton e os ECDF por um processo estimulado de dois ftons, sendo estes dois ftons, do mesmo modo.

Figura 2: Representação de um estado coerente de dois fótons: deslocamos o vácuo e depois o comprimimos.

Os ECDF podem ser gerados matematicamente, aplicando-se o operador de compressão $S(z)$

$$S(z) = \exp \frac{1}{2}(z^* a^2 - z a^{\dagger 2}) \quad z = r e^{i\phi}, \quad (90)$$

no estado coerente, isto é

$$|z, \alpha\rangle = S(z)|\alpha\rangle = S(z)D(\alpha)|0\rangle = |\beta\rangle, \quad (91)$$

onde $S(z)$ satisfaz as propriedades de unitariedade,

$$S^\dagger(z) = S(-z) = S^{-1}(z) \Rightarrow S^\dagger(z)S(z) = 1. \quad (92)$$

Vimos que os estados coerentes são auto-estados do operador de aniquilação [Eq.(72)]. Analogamente, os ECDF são auto estados do operador b ,

$$b |\beta\rangle = \beta |\beta\rangle \quad (93)$$

definido como uma transformação unitária do operador a por $S(z)$ (Ver Apêndice A),

$$b(z) = S(z)aS^\dagger(z) = \mu a + \nu a^\dagger \quad (94a)$$

$$b^\dagger(z) = S(z)a^\dagger S^\dagger(z) = \mu a^\dagger + \nu^* a. \quad (94b)$$

Assim sendo, b pode ser escrito em termos dos operadores de criação $a^\dagger$ e aniquilação a .

Note que $[b, b^\dagger] = [a, a^\dagger] = 1$, para o caso em que $\mu^2 - |\nu|^2 = 1$.

O ECDF pode ser representado pela superposição de estados de número $|n\rangle$,

$$|\beta\rangle = |z, \alpha\rangle = S(z)|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(\xi, \gamma) |n\rangle \quad (95)$$

onde [6],

$$C_n = \langle n|\beta\rangle = \frac{(\nu/2\mu)^{n/2}}{\sqrt{n!\mu}} \exp\left[\frac{-|\beta|^2}{2} + \left(\frac{\nu^*}{2\mu}\right)\beta^2\right] H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\nu\mu}}\right) \quad (96)$$

sendo

$$\beta = \mu\alpha + \nu\alpha^* \quad \text{e} \quad \alpha = Re^{i\theta}. \quad (97)$$

2.4.2. Estados comprimidos ideais

Vimos que o estado coerente é obtido atuando o operador deslocamento no estado de vácuo, enquanto o estado comprimido, é obtido pela atuação do operador de compressão $S(z)$ num estado coerente. Caves [36] nos mostra uma nova fórmula do estado comprimido, chamado de estados coerentes ideais, onde atuamos primeiramente o operador de compressão no estado de vácuo, e em seguida aplicamos o operador deslocamento, $|\alpha, z\rangle = D(\alpha)S(z)|0\rangle$. A Fig.(3) nos dá uma visualização do que ocorre no espaço de fase após a aplicação sucessiva dos operadores $S(z)$ e $D(\alpha)$ no estado de vácuo.

Figura 3: Representação de um estado coerente ideal: comprimimos o vácuo e depois o deslocamos.

Apesar de $D(\alpha)$ e $S(z)$ não comutarem, os dois estados $|z, \alpha\rangle$ e $|\alpha, z\rangle$ estão ligados por uma transformação unitária (Ver Apêndice A). A igualdade porém pode ocorrer na forma

$$D(\alpha)S(z) = S(z)D(\beta). \quad (98)$$

3. Interferência quântica no espaço de fase

A seguir, investigaremos o comportamento oscilatório na distribuição do número de ftons P_n . Um estado arbitrário, pode ser representado da seguinte forma,

$$|\Psi\rangle = \sum_i C_i |\Psi_i\rangle, \quad (99)$$

em que C_i é uma amplitude de probabilidade: a probabilidade de encontrar o sistema no estado $|\Psi_i\rangle$ será dado por $|C_i|^2 = |\langle\Psi|\Psi_i\rangle|^2$. Então, ao projetarmos o estado $|\Psi\rangle$, no estado de número $|n\rangle$, teremos a distribuição de probabilidade de encontrarmos n ftons no referido estado,

$$P_n = |\langle n|\Psi\rangle|^2. \quad (100)$$

3.1. Intersecção no espaço de fase

Um único modo do campo eletromagnético no estado de número é equivalente a um oscilador harmônico, em que a energia do n -ésimo estado de número é dada por [32]:

$$n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2 \Rightarrow X_1^2 + X_2^2 = 2\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (101)$$

Logo, as trajetórias no espaço de fase (X_1, X_2) são círculos de raio $r = \sqrt{2(n + \frac{1}{2})}$, percorrendo o sentido horário.

O estado de número é representado no espaço de fase por uma banda de Planck-Bohr-Sommerfeld (PBS) cuja a área é dada por $A = \pi(r_{n+1}^2 - r_n^2) = 2\pi$, representando a incerteza na fase, com um raio interno, $r_n = \sqrt{2n}$ e raio externo, $r_{n+1} = \sqrt{2(n+1)}$. Portanto a área de intersecção no espaço de fase será o resultado da projeção de um estado genérico $|\Psi\rangle$ em um estado de número [ver Fig.(4)].

Figura 4: a) Representação no espaço de fase do estado de número; b) intersecção de um estado coerente com um estado de número; c) intersecção de um estado comprimido com um estado de número.

Para o estado de número, não existe área de intersecção, pois a banda de PBS é a representação do próprio estado, uma vez que a distribuição do número de ftons é uma delta de Kronecker, apresenta um valor nulo para $m \neq n$ [ver Eq.(71)]. Se considerarmos um estado coerente $|\alpha\rangle$, centrado em $x_0 = \sqrt{2}\alpha$ [33], representado em sua versão mais simples por um círculo de raio unitário [ver Fig.(5)],

$$(X_1 - \sqrt{2}\alpha)^2 + X_2^2 = 1. \quad (102)$$

Figura 5: Estado coerente interceptando as bandas de PBS.

A área de intersecção A_n entre a n -ésima e $n+1$ -ésima banda do círculo Fig.(5), é dada

por

$$A_n = \int \int \frac{dX_1 dX_2}{\pi}, \quad (103)$$

onde o fator π^{-1} foi introduzido para manter a constante de normalização.

Ao somar todas as áreas de intersecção que interceptam o estado, teremos:

$$\sum_n A_n = \frac{1}{\pi} \sum_n \int dX_1 \int dX_2 = \frac{1}{\pi} \left(\begin{array}{c} \text{área do estado} \\ \text{coerente} = \pi \end{array} \right) = 1. \quad (104)$$

Para valores de n compreendidos fora da região do círculo,

$$\sqrt{2}\alpha - 1 \leq \sqrt{2(n+1/2)} \leq \sqrt{2}\alpha + 1, \quad (105)$$

as bandas e o círculo não se sobrepõem, o que implica em $P_n = 0$. Por outro lado, no interior desta região, as bandas apresentam a área aproximadamente igual a

$$A_n \simeq \frac{1}{\pi} \Delta_n 2X_2(X_0), \quad (106)$$

em comum com o círculo. Aqui nós aproximamos a área do n -ésimo segmento em comum com a área de um retângulo de largura $\Delta_n = \sqrt{2(n+1)} - \sqrt{2n}$ e altura $2X_2$, calculada no centro da banda, no ponto $X_0 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{2n} \right)$. Assumindo $n \gg 1$, a largura do retângulo será

$$\Delta_n \simeq \sqrt{2n} \left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - 1 \right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2(n+\frac{1}{2})}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\alpha}. \quad (107)$$

Com o auxílio da Eq.(102), a expressão para a área se reduz a

$$A_n \simeq \frac{1}{\pi\alpha^2} \left\{ 2\alpha^2 - \left(n + \frac{1}{2} - \alpha^2 \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

3.2. Interferência no espaço de fase para um estado comprimido

O estado comprimido $|\beta\rangle$ pode ser formado pela compressão do estado coerente (estado coerente de dois fótons) ou pela compressão do estado de vácuo, seguida de um deslocamento (estado comprimido ideal) [ver Capítulo 2]. Feita a compressão em uma variável, por exemplo X_1 , automaticamente sua variável canonicamente conjugada, X_2 , expande. Para uma forte compressão [33] o estado comprimido toma uma forma alongada e fina, chamado de “charuto gaussiano” [ver Fig.(6)], podendo interceptar uma banda de PBS do n -ésimo estado de número em duas regiões distintas.

Figura 6: Estado comprimido interceptando duas regiões de uma mesma banda de PBS: “charuto gaussiano”.

A interferência no espaço de fase acarreta oscilações em P_n . As bandas de raio interno r_n e raio externo r_{n+1} interceptam regiões simetricamente opostas da banda de PBS; a amplitude de probabilidade total sendo a soma de cada uma das contribuições $\sqrt{A_n}e^{\pm i\theta}$, das áreas hachuradas.

Como na Mecânica Quântica não somamos probabilidades e sim amplitudes de probabilidades, a distribuição do número médio de fótons será dada por

$$P_n = \left| \sqrt{A_n}e^{i\theta_n} + \sqrt{A_n}e^{-i\theta_n} \right|^2 = 4A_n \cos^2(\theta_n). \quad (108)$$

Discutimos que a presença da oscilação na distribuição de probabilidade ocorre quando, no espaço de fase, o estado de número $|n\rangle$ é interceptado em duas regiões da banda de PBS por um estado $|\Psi\rangle$, mas ao estudarmos a superposição de dois estados, observamos que P_n pode apresentar oscilações, isso ocorre quando um anel é interceptado em duas regiões distintas por um estado superposto. A ilustração seguinte nos dá uma visualização do acontecimento.

Figura 7: Representação de dois estados comprimidos, no espaço de fase

Uma analogia com a interferência no espaço de fase pode ser feita usando o experimento de dupla fenda de Young, onde as fendas, podem ser entendidas como as áreas resultantes da intersecção do estado $|\Psi\rangle$ com o estado $|n\rangle$.

4. Superposição Generalizada de dois Estados Comprimidos Arbitrários (SGCC)

Neste capítulo introduzimos o estado SGCC, escrito na forma

$$|\Psi(\xi, \gamma)\rangle = \eta \left[\sqrt{\xi} |\beta_1\rangle + \sqrt{1-\xi} e^{i\gamma} |\beta_2\rangle \right] \quad (109)$$

onde η é o fator de normalização

$$\begin{aligned} \eta &= \left[1 + 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \operatorname{Re}(e^{i\gamma} \langle \beta_1 | \beta_2 \rangle) \right]^{-1/2} \\ &= \left[1 + 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \operatorname{Re} \left(e^{i\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)*} C_n^{(2)} \right) \right]^{-1/2}, \end{aligned} \quad (110)$$

C_n é dado pela Eq.(96), ξ e γ são os parâmetros interpoladores, com $\xi \in [0, 1]$ e $\gamma \in [0, 2\pi]$ permitindo-nos contruir uma variedade de estados a partir da superposição de dois estados comprimidos. Note que ξ e $1 - \xi$ dão os respectivos pesos dos estados, e no limite em que $z \rightarrow 0$ recuperamos o caso de superposição de dois estados coerentes, de modo que o presente formalismo corresponderá a uma extensão do caso anterior

$$|\beta_j\rangle = |\alpha_j, z_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \exp \left[-\frac{|\beta_j|^2}{2} + \left(\frac{\nu_j^*}{2\mu_j} \right) \beta_j^2 \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\nu_j/2\mu_j)^{n/2}}{\sqrt{n!}} H_n \left(\frac{\beta_j}{\sqrt{2\nu_j\mu_j}} \right) |n\rangle, \quad (111)$$

4.1. Propriedades Estatísticas.

4.1.1. Distribuição de probabilidade de número de fótons.

Ao projetarmos o estado $|\Psi(\xi, \gamma)\rangle$ na componente de número $|n\rangle$, obtemos a probabilidade $P_n(\xi, \gamma)$ de se encontrar n fótons em nosso estado,

$$\begin{aligned}
P_n(\xi, \gamma) &= |\langle n | \Psi(\xi, \gamma) \rangle|^2 \\
&= \eta^2 \left[\xi P_n^{(1)} + (1 - \xi) P_n^{(2)} + 2\sqrt{\xi(1 - \xi)} \Re(e^{i\gamma} C_n^{(1)*} C_n^{(2)}) \right], \quad (112)
\end{aligned}$$

onde $P_n^{(j)} = |C_n^{(j)}|^2$, $j = 1, 2$, dão as componentes da probabilidade.

No capítulo 3 vimos que devido a interferência no espaço de fase, a distribuição de probabilidade de número de ftons pode apresentar um comportamento oscilatório. Este comportamento aparece quando um estado de número, representado no espaço de fase, é interceptado em duas regiões distintas por representações dos estados do campo [ver Fig(7)]. De acordo com a Eq.(112), os responsáveis pela oscilação na distribuição de probabilidade são os parâmetros ξ e γ . A Fig.(8) mostra a influência do parâmetro ξ sobre a distribuição P_n em função de n , para os seguintes valores fixos : $R_1 = R_2 = 5$; $r_1 = r_2 = 0.5$; $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = \pi$; $\phi_1 = \phi_2 = 0$; $\gamma = 0$, onde para todos os gráficos que seguem temos que R_1 e R_2 são os chamados parâmetros de deslocamento, r_1 e r_2 é o parâmetro de compressão, θ_1 e θ_2 são os ângulos associados a cada deslocamento (R_1 e R_2 , respectivamente) e ϕ_1 e ϕ_2 são os ângulos associados às compressões (r_1 e r_2 , respectivamente).

Figura 8: A influência de ξ na P_n .

Em (8a) a curva é obtida para $\xi = 0$ ou $\xi = 1$, representando a contribuição de apenas um estado comprimido, $\xi = 1 \rightarrow P_n^{(1)}$ ou $\xi = 0 \rightarrow P_n^{(2)}$. Em (8b) um caráter oscilatório modula a curva sub-Poissoniana, obtida para $\xi = 0.05$ (ou $\xi = 0.95$). Em (8c) os pontos do gráfico correspondem aos picos e buracos no espaço de Fock: para $\xi = 0.5$, correspondendo a uma máxima interferência. Examinando estas três curvas podemos observar que a distribuição do número de fons tende a uma curva sub-Poissoniana quando $\xi \rightarrow 0$ (ou $\xi \rightarrow 1$) e que surgem picos e buracos na distribuição P_n , mais destacados quando $\xi \rightarrow 0.5$. Verificamos assim que o parâmetro ξ controla a profundidade dos buracos na distribuição de probabilidade P_n , a oscilação sendo máxima para $\xi = 0.5$, caso em que as componentes dos estados tem o mesmo peso.

A Fig.(9) relaciona o parâmetro γ com as oscilações em P_n , onde mantivemos os mesmos valores de $R_1, R_2, r_1, r_2, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$, da Fig.(8), para $\xi = 0.5$.

Figura 9: Gráfico de P_n em função de n , variando o parâmetro γ .

Para as Figs.(9a) e (9b) escolhemos $\gamma = 0$ e $\gamma = \pi$, respectivamente. Resulta para $\gamma = 0$: $P_{2n} \neq 0, P_{2n+1} = 0$ (estado comprimido par) e, para $\gamma = \pi$: $P_{2n} = 0, P_{2n+1} \neq 0$ (estado comprimido ímpar).

Um outro parâmetro de interesse é R (consideramos $R = R_1 = R_2$), sendo ele o res-

ponsável pela posição das envoltórias na distribuição de P_n . Podemos também observar que a medida que R aumenta, a amplitude de oscilações diminui enquanto a frequência de oscilações aumenta. A Fig.(10) nos dá uma melhor idéia da influência deste parâmetro, onde os seguintes parâmetros foram fixados $r_1 = r_2 = 0.5$; $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = \pi$; $\phi_1 = \phi_2 = 0$; $\xi = 0.5$ e $\gamma = 0$.

Figura 10: Em (a), (b) e (c) fizemos, respectivamente, $R = 4, 5, 6$.

No caso da Fig.(11) fixamos $R_2 = 5$ e variamos o parâmetro R_1 , com os demais parâmetros fixados como na figura anterior.

Figura 11: Gráficos da P_n em função de n , para distintos valores de R_1 .

A Fig.(11a) assume $R_1 = 2$. Com isso os dois estados comprimidos que compõem P_n não se localizam em uma mesma banda de PBS, apresentando duas regiões para a distribuição de probabilidade, uma para $|\beta_1\rangle$ e outra para $|\beta_2\rangle$. Na Fig.(11b) $R_1 = 3.7$, observamos que P_n começa a apresentar oscilações. Isso ocorre porque o estado $|\beta_1\rangle$, que compõe esta distribuição de probabilidade, está localizado numa banda próxima da posição de $|\beta_2\rangle$. Na Fig.(11c) $R_1 = 5$, e observamos que a P_n apresenta um comportamento totalmente oscilatório, devido a intersecção de duas áreas numa mesma banda de PBS.

Conforme mencionamos no capítulo 3, as oscilações em P_n podem ocorrer com a presença de apenas um estado comprimido. Para que isso ocorra é necessário comprimirmos o estado a tal ponto, em que ele intercepte duas regiões distintas de uma banda de PBS. Este é o caso do “charuto gaussiano” ver [Fig.(6)], onde r é o parâmetro responsável por essa compressão. Para os gráficos da Fig.(12) utilizamos os seguintes valores: $R_1 = 3$, $\theta_1 = 0$, $\phi_1 = 0$, $\xi = 1$ e $\gamma = 0$.

Figura 12: Gráfico de P_n versus n , para distintos valores de r .

Em (12a), (12b) e (12c) fixamos os seguintes parâmetros: $r = 0.5$, 1.0 e 1.5 , respectivamente. Observamos que o número de oscilações aumenta conforme aumenta o valor de r . Isso acontece porque com o aumento deste parâmetro a área interceptada no espaço de fase também aumenta, conseqüentemente a interferência também aumenta provocando um maior número de oscilações.

4.1.2. Estatística sub-Poissoniana

A estatística do campo de radiação pode ser determinada através do parâmetro Q , de Mandel,

$$Q = \frac{\langle \Delta n^2 \rangle - \langle n \rangle}{\langle n \rangle}, \quad (113)$$

no qual $\langle \Delta n^2 \rangle$ é a variância do operador número

$$\langle \Delta n^2 \rangle = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2. \quad (114)$$

Onde para os seguintes valores de Q temos as correspondentes estatísticas

$Q > 0 \Rightarrow$ estatística super-poissoniana;

$Q = 0 \Rightarrow$ estatística poissoniana;

$-1 \leq Q < 0 \Rightarrow$ estatística sub-poissoniana.

O número médio de ftons na superposição de dois estados comprimidos intermediários pode ser descrito matematicamente por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}(\xi, \gamma) \rangle &= \langle \Psi(\xi, \gamma) | \mathbf{n} | \Psi(\xi, \gamma) \rangle \\ &= \eta^2 \left(\sqrt{\xi} \langle \beta_1 | + \sqrt{1-\xi} e^{i\gamma} \langle \beta_2 | \right) \mathbf{n} \left(\sqrt{\xi} | \beta_1 \rangle + \sqrt{1-\xi} e^{i\gamma} | \beta_2 \rangle \right) \\ &= \eta^2 \left[\xi \langle \beta_1 | \mathbf{n} | \beta_1 \rangle + (1-\xi) \langle \beta_2 | \mathbf{n} | \beta_2 \rangle + 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \Re_e(e^{i\gamma} \langle \beta_1 | \mathbf{n} | \beta_2 \rangle) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}(\xi, \gamma) \rangle &= \eta^2 \left[\xi \sum_{n=0}^{\infty} n |C_n^{(1)}|^2 + (1-\xi) \sum_{n=0}^{\infty} n |C_n^{(2)}|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \Re_e(e^{i\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} n C_{n'}^{(1)*} C_n^{(2)} \delta_{n',n}) \right]. \end{aligned} \quad (115)$$

Similarmente, obtemos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}^2(\xi, \gamma) \rangle &= \langle \Psi(\xi, \gamma) | \mathbf{n}^2 | \Psi(\xi, \gamma) \rangle \\ &= \eta^2 \left[\sqrt{\xi} \langle \beta_1 | + \sqrt{1-\xi} e^{i\gamma} \langle \beta_2 | \right] \mathbf{n}^2 \left[\sqrt{\xi} | \beta_1 \rangle + \sqrt{1-\xi} e^{i\gamma} | \beta_2 \rangle \right] \\ &= \eta^2 \left[\xi \langle \beta_1 | \mathbf{n}^2 | \beta_1 \rangle + (1-\xi) \langle \beta_2 | \mathbf{n}^2 | \beta_2 \rangle + 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \Re_e(e^{i\gamma} \langle \beta_1 | \mathbf{n}^2 | \beta_2 \rangle) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n}^2(\xi, \gamma) \rangle &= \eta^2 \left[\xi \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |C_n^{(1)}|^2 + (1-\xi) \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |C_n^{(2)}|^2 \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{\xi(1-\xi)} \Re_e(e^{i\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 C_{n'}^{(1)*} C_n^{(2)} \delta_{n',n}) \right]. \end{aligned} \quad (116)$$

Substituindo as Eqs.(115)-(116) na Eq.(113), obtemos o fator Q de Mandel.

A seguir examinaremos a influência do parâmetro de deslocamento R sobre o fator Q de Mandel, onde observamos a dependência de uma estatística sub-poissoniana em relação ao ângulo de compressão ϕ_2 . Para os gráficos a seguir assumimos os seguintes valores fixos: $r = 0.5$; $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = \pi$; $\phi_1 = 0$; $\xi = 0.5$; $\gamma = 0$.

Figura 13: Gráficos do fator de Mandel em função de R , para diferentes valores de ϕ_2 .

Em (13a), (13b) e (13c) utilizamos os seguintes valores para o ângulo ϕ_2 , respectivamente, $\phi_2 = 0, \frac{\pi}{2}$ e π . Observamos que à medida que o valor deste parâmetro aumenta, nossa estatística tende de valores sub-poissoniano à super-poissoniano.

Vejam agora qual o comportamento de Q em função de R , variando o parâmetro γ e fixando os seguintes valores: $r = 0.5$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = 0$ e $\xi = 0.5$.

Figura 14: Gráficos de Q versus R , para diferentes valores de γ .

Em (14a), (14b) e (14c) o parâmetro γ assume os seguintes valores, respectivamente:

$0, \frac{\pi}{2}$ e π . À medida que γ aumenta temos uma maior região em R com o domínio de uma estatística sub-poissoniana. Observamos em $\gamma = \pi$ (para $R = 0.65$) uma estatística correspondendo a um $Q = -0.77$.

Uma outra análise a ser feita é com relação ao parâmetro θ_2 , onde para um mesmo conjunto de valores considerados na Fig.(15), para $\phi_2 = 0$, temos os seguintes gráficos,

Figura 15: Gráficos de Q versus r , para distintos valores de θ_2 .

A Fig.(15) apresenta regiões (em r) com uma maior domínio de estatística sub-poissoniana, à medida que $\theta_2 \rightarrow 0$, tendo esta estatística um valor cada vez mais acentuado, atingindo um maior valor negativo para $\theta_2 = 0$, onde $Q \simeq -0.6$ ($r = 0.6$).

Figura 16: Gráfico de Q versus ϕ_2 , para distintos valores de r .

Para a Fig.(16) temos o fator Q de Mandel em função de ϕ_2 , onde através de uma sequência de curvas, cada uma com um valor distinto de r , podemos observar a predominância de maiores regiões (em ϕ_2) com uma estatística sub-poissoniana, a medida que o valor de r diminui.

A seguir, analisaremos uma série de gráficos do fator Q de Mandel em função do parâmetro interpolador ξ , onde os seguintes valores fixos foram considerados: $r = 0.3$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ e $\gamma = 0$.

Figura 17: Gráfico de Q versus ξ , para distintos valores de R .

A Fig.(17) exhibe estatística sub-poissoniana mais acentuada. À medida que o valor de R aumenta, podemos observar que esta estatística tende a ficar independente de ξ .

Figura 18: Gráfico tridimensional de $Q \times \xi \times r$.

Para a Fig.(18), fixamos $R = 3.5$, onde podemos observar a variação da estatística em função de ξ e r . Neste gráfico observamos que cada valor de r está associado a um conjunto de valores de $\xi \in [0, 1]$. Observamos uma estatística mais sub-poissoniana quando r assume um valor correspondente à $r \simeq 0.7$, acarretando $Q = -0.63$. A partir deste valor a função Q assume valores maiores chegando uma estatística poissoniana em $r \simeq 1.2$.

Figura 19: Gráficos de Q versus ξ , variando θ_1 em (a) e θ_2 em (b).

Na Fig.(19a) fixamos $R = 3.5$ e $r = 0.6$, e variamos o valor de θ_1 (para $\theta_2 = 0$). Podemos observar um ponto em comum ($Q = -0.62$) para os diversos valores da variável, θ_1 , a medida

que $\xi \rightarrow 0$. Verificamos também que para $\theta_1 = 0 \Rightarrow Q = -0.62$, independentemente de ξ . A Fig.(19b) possui uma simetria especular com relação a Fig.(19a), neste caso mantivemos os mesmos valores de R e r , variando θ_2 (para $\theta_1 = 0$), onde observamos o mesmo ponto em comum ($Q = -0.62$) quando $\xi \rightarrow 1$.

Para Fig.(20) consideramos os seguintes conjuntos de parâmetros: $R = 3.5$, $r = 0.4$, $\theta_1 = 0$, $\phi_1 = 0$.

Figura 20: Gráfico de $Q \times \xi \times \gamma$.

Na Fig.(20) temos a presença de uma estatística sub-poissoniana mais acentuada em $\xi \approx 0.6$ e $\gamma \approx 5.2$, sendo $Q \approx -0.76$. Em (20b) e (20c), temos visões laterais de (20a). Consideramos $\theta_2 = \pi/6$ e $\phi_2 = \pi/5$. Observamos a presença de uma estatística mais sub-poissoniana para valores de ξ próximo de 0.5 e para valores de γ distantes de π .

Para convenientes valores escolhidos, as figuras a seguir apresentam regiões com maior estatística sub-poissoniana em maior intensidade.

Figura 21: Gráfico de $Q \times \xi \times \gamma$, (b) e (c) são visões laterais de (a).

A Fig.(21), mostra $Q \simeq -1$, para $\xi = 0.5$ e $\gamma = \pi$. Consideramos $R = 0.55$; $r = 0.12$; $\theta_1 = 0$; $\theta_2 = \pi$ e $\phi_1 = \phi_2 = 0$. Neste caso temos a presença da máxima estatística sub-poissoniana permitida.

Figura 22: Gráfico de $Q \times \xi \times \gamma$, (b) e (c) são visões laterais de (a).

Para a Fig.(22) temos o estado de vácuo comprimido, onde para $\xi = 0.5$ $\gamma = \pi$ temos uma estatística sub-poissoniana correspondendo a $Q \simeq -1$. Os seguintes valores foram considerados $R = 0$, $r_1 = r_2 = 0.1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\phi_1 = 0$ e $\phi_2 = \pi/2$.

4.2. Efeito de compressão nas quadraturas.

Dado o conjunto dos operadores de quadratura Eqs.(57a)-(57b) podemos calcular suas variâncias $\langle \Delta X_j^2 \rangle$ na superposição de estados $|\Psi(\xi, \gamma)\rangle$:

$$\langle \Delta X_j^2 \rangle = \langle X_j^2 \rangle - \langle X_j \rangle^2. \quad (117)$$

Portanto, vamos calcular inicialmente,

$$\begin{aligned} \langle X_1(\xi, \gamma) \rangle &= \langle \Psi(\xi, \gamma) | \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger}{2} | \Psi(\xi, \gamma) \rangle \\ &= \frac{\eta^2}{2} \left[\xi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} C_{n+1}^{(1)} C_n^{(1)*} + c.c. \right) \right. \\ &\quad \left. + (1-\xi) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} C_{n+1}^{(2)} C_n^{(2)*} + c.c. \right) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\xi(1-\xi)} \left(e^{i\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} \left(C_n^{(1)*} C_{n+1}^{(2)} + C_{n+1}^{(1)*} C_n^{(2)} \right) + c.c. \right) \right] \quad (118) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \langle X_1^2(\xi, \gamma) \rangle &= \langle \Psi(\xi, \gamma) | \left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}^\dagger}{2} \right)^2 | \Psi(\xi, \gamma) \rangle \\ &= \frac{\eta^2}{4} \left\{ \xi \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)*} C_{n+2}^{(1)} \sqrt{(n+1)(n+2)} + c.c. + \sum_{n=0}^{\infty} |C_n^{(1)}|^2 (2n+1) \right] \right. \\ &\quad \left. + (1-\xi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)*} C_{n+2}^{(2)} \sqrt{(n+1)(n+2)} + c.c. + \sum_{n=0}^{\infty} |C_n^{(2)}|^2 (2n+1) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\xi(1-\xi)} \Re e \left[e^{i\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} \left(C_n^{(1)*} C_{n+2}^{(2)} + C_{n+2}^{(1)*} C_n^{(2)} \right) \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) C_n^{(1)*} C_n^{(2)} \right) \right] \right\}. \quad (119) \end{aligned}$$

Substituindo as Eqs.(118)-(119) na (117) obtemos a variância da quadratura X_1 .

Similarmente podemos obter para X_2 ,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{X}_2(\xi, \gamma) \rangle &= \langle \Psi(\xi, \gamma) | \frac{\mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger}{2i} | \Psi(\xi, \gamma) \rangle \\
&= \frac{\eta^2}{2} \left[\xi \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{i} C_{n+1}^{(1)} C_n^{(1)*} - c.c. \right) \right. \\
&\quad + (1-\xi) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{i} C_{n+1}^{(2)} C_n^{(2)*} - c.c. \right) \\
&\quad \left. + \sqrt{\xi(1-\xi)} \left(e^{i\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1} (C_n^{(1)*} C_{n+1}^{(2)} - C_{n+1}^{(1)*} C_n^{(2)}) + c.c. \right) \right] \quad (120)
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{X}_2^2(\xi, \gamma) \rangle &= \langle \Psi(\xi, \gamma) | \left(\frac{\mathbf{a} - \mathbf{a}^\dagger}{2i} \right)^2 | \Psi(\xi, \gamma) \rangle \\
&= \frac{\eta^2}{4} \left\{ \xi \left[\sum_{n=0}^{\infty} |C_n^{(1)}|^2 (2n+1) - \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)*} C_{n+2}^{(1)} \sqrt{(n+1)(n+2)} + c.c. \right] \right. \\
&\quad + (1-\xi) \left[\sum_{n=0}^{\infty} |C_n^{(2)}|^2 (2n+1) - \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)*} C_{n+2}^{(2)} \sqrt{(n+1)(n+2)} + c.c. \right] \\
&\quad \left. + \sqrt{\xi(1-\xi)} \operatorname{Re} \left[e^{i\gamma} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) C_n^{(1)*} C_n^{(2)} - \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{(n+1)(n+2)} (C_n^{(1)*} C_{n+2}^{(2)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + C_{n+2}^{(1)*} C_n^{(2)} \right) \right) \right] \right\}. \quad (121)
\end{aligned}$$

As Figs.(23) e (24) mostram os efeitos de compressão para as variâncias $\langle \Delta \mathbf{X}_1^2 \rangle$ e $\langle \Delta \mathbf{X}_2^2 \rangle$, respectivamente, em função dos parâmetros ξ e γ , onde fixamos $R = 0.5$, $r = 0.1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $\phi_1 = \phi_2 = 0$.

Figura 23: Gráfico de $\langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle$ em função de ξ e γ . (b) e (c) apresentam visões laterais de (a).

O efeito de compressão ocorre quando $\langle \Delta \hat{X}_j^2 \rangle < 0.25$, com $j = 1, 2$. Para $\gamma \in [0, 2\pi]$ temos o efeito de compressão em $\langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle$ mais acentuado o efeito em $\xi \approx 0$ (ou $\xi \approx 1$) e $\gamma = \pi$, correspondendo a $\langle \Delta \hat{X}_1^2 \rangle = 0.16$.

Figura 24: Gráfico de $\langle \Delta \hat{X}_2^2 \rangle$ em função de ξ e γ . (b) e (c) apresentam visões laterais de (a).

Para $\langle \Delta \hat{X}_2^2 \rangle$, temos a presença do efeito de compressão em $\xi \in [0.04, 1.96]$ e $\gamma \in [0.6\pi, 1.4\pi]$, sendo maior esse efeito em $\xi = 0.5$ $\gamma = 0$ (ou $\gamma = \pi$), correspondendo a $\langle \Delta \hat{X}_2^2 \rangle \approx 0.16$.

As Fig.(25) e (26) mostram os efeitos de compressão para o estado de vácuo comprimido. Fixamos os seguintes valores para ambas figuras: $R = 0$, $r_1 = r_2 = 0.1$, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$,

$$\phi_1 = 0 \text{ e } \phi_2 = \pi/2.$$

Figura 25: Gráfico de $\langle \Delta X_1^2 \rangle$ em função de ξ e γ . (b) e (c) apresentam visões laterais de (a).

Para $\langle \Delta X_1^2 \rangle$ temos uma maior compressão em $\xi = 0.66$ e $\gamma \simeq 1.1\pi$, onde $\langle \Delta X_1^2 \rangle \simeq 0.14$.

Figura 26: Gráfico de $\langle \Delta X_2^2 \rangle$ em função de ξ e γ . (b) e (c) apresentam visões laterais de (a).

Uma maior compressão é obtida para $\langle \Delta X_2^2 \rangle$, para $\xi = 0.34$, $\gamma \approx 0.9\pi$, onde $\langle \Delta X_2^2 \rangle = 0.17$.

5. Geração da Superposição de dois Estados Comprimidos Arbitrários

Um dos principais objetivos da Óptica Quântica é a manipulação de propriedades quânticas do campo luminoso. Desde o sucesso da geração dos estados comprimidos [37], considerável esforço tem sido dedicado à produção de outros estados que possuam propriedades interessantes. Alguns desses trabalhos consistem em se fazer passar um campo conveniente por um meio não linear [38], como é o caso da geração de estados comprimidos, e outras propostas são apresentadas utilizando-se Engenharia de Estados Quânticos (EEQ) [39], onde os campos são gerados em cavidades. No primeiro caso, a onda é viajante (running wave), e a evolução temporal do campo, do estado inicial para o final, é unitária. No segundo caso, o campo é estacionário, e sua evolução temporal para o estado final desejado, é não unitária.

Com relação da EEQ, apresentamos neste capítulo, dois métodos para a geração da superposição de dois estados comprimidos arbitrários, um com a interação átomo-campo ressonante [40] e outra com a interação átomo-campo dispersiva [41]. Afim de introduzir cada um dos métodos, vamos primeiramente abordar o modelo da interação de Jaynes-Cummings.

5.1. Acoplamento ressonante

O modelo de Jaynes-Cummings é o sistema mais simples da Eletrodinâmica Quântica [40], no qual consiste em descrever a interação átomo campo, para tal utiliza-se único átomo de dois níveis com um estado fundamental $|g\rangle$ e um estado excitado $|e\rangle$ interagindo com um único modo do campo quantizado, na chamada *aproximação de onda girante (RWA)*³, onde o hamiltoniano para o sistema átomo-campo é descrito por

$$H = H_A + H_C + H_I \quad (122)$$

³Aproximação de Onda Girante-(*Rotating Wave Approximation-RWA*): Consiste em utilizar os termos da hamiltoniana que possuem solução exata.

com H_A o hamiltoniano do átomo

$$H_A = \hbar\omega\sigma_z, \quad (123)$$

H_C o hamiltoniano do campo

$$H_C = \hbar\omega a^\dagger a, \quad (124)$$

e H_I o hamiltoniano de interação

$$H_I = \hbar\lambda (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-), \quad (125)$$

sendo λ a constante de acoplamento, σ_- (σ_+) e o operador atômico de abaixamento (levantamento). Esses operadores são descritos como combinações lineares dos operadores de Pauli

$$\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y \quad (126)$$

$$\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y. \quad (127)$$

onde os operadores de Pauli, de pseudo-spin, são [42]

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (128)$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (129)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (130)$$

que obedecem às seguintes regras de comutação

$$[\sigma_+, \sigma_-] = 2\sigma_z \quad (131)$$

$$[\sigma_+, \sigma_z] = -\sigma_+ \quad (132)$$

$$[\sigma_-, \sigma_z] = +\sigma_- \quad (133)$$

Enquanto os operadores de criação $a^\dagger$ e aniquilação a são operadores de campo, os operadores de levantamento σ_+ e abaixamento σ_- são operadores atômicos. Temos ainda que os operadores também podem ser representados por

$$\sigma_+ = |e\rangle \langle g| \quad (134a)$$

$$\sigma_- = |g\rangle \langle e|, \quad (134b)$$

os quais satisfazem as relações,

$$\sigma_+ |g\rangle = |e\rangle, \quad \sigma_+ |e\rangle = 0 \quad (135a)$$

$$\sigma_- |e\rangle = |g\rangle, \quad \sigma_- |g\rangle = 0. \quad (135b)$$

Representamos o estado inicial átomo-campo como o produto interno do estado do campo com o estado do átomo,

$$|\Psi\rangle = |\Psi_C\rangle \otimes |\Psi_A\rangle. \quad (136)$$

Os autoestados do hamiltoniano livre são $|n, e\rangle$ e $|n+1, g\rangle$ onde $|n\rangle$ e $|n+1\rangle$ são os autoestados do campo e $|g\rangle$ e $|e\rangle$ são os autoestados do átomo. Ao aplicarmos H_I no estado átomo-campo temos

$$H_I |n, e\rangle = \hbar\Omega |n+1, g\rangle \quad (137a)$$

$$H_I |n+1, g\rangle = \hbar\Omega |n, e\rangle, \quad (137b)$$

onde

$$\Omega = \lambda\sqrt{n+1} \quad (138)$$

é a chamada frequência de Rabi.

Utilizando a notação matricial podemos escrever

$$\mathbf{H}_I \begin{pmatrix} |n+1, g\rangle \\ |n, e\rangle \end{pmatrix} = \hbar\Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |n+1, g\rangle \\ |n, e\rangle \end{pmatrix} \quad (139)$$

em que

$$\mathbf{H}_I = \hbar\Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hbar\Omega \sigma_x. \quad (140)$$

Podemos então encontrar os autovalores e os autovetores correspondentes através equação de autovalores

$$\mathbf{H}_I |\Psi\rangle = E_I |\Psi\rangle \quad (141)$$

onde $|\Psi\rangle$ o estado do sistema átomo campo é uma combinação linear dos estados da base $|n+1, g\rangle$ e $|n, e\rangle$,

$$|\Psi\rangle = C_1 |n+1, g\rangle + C_2 |n, e\rangle. \quad (142)$$

Assim, a Eq.(141) pode ser escrita como

$$\hbar\Omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = E_I \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad (143)$$

que resulta em

$$\begin{pmatrix} -E_I & \hbar\Omega \\ \hbar\Omega & -E_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (144)$$

e os autovalores de $\mathbf{H}_I$ são $E_I^{(1)} = \hbar\Omega$ e $E_I^{(2)} = -\hbar\Omega$, enquanto seus auto estados correspondentes são

$$|\phi^{(+)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, e\rangle + |n+1, g\rangle) \quad (145)$$

$$|\phi^{(-)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|n, e\rangle - |n+1, g\rangle). \quad (146)$$

os quais são denominados na literatura como “estados vestidos”.

De posse dos auto estados do hamiltoniano de interação, podemos aplicar o operador de evolução temporal no estado inicial

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-itH_I/\hbar} |\Psi(0)\rangle \quad (147)$$

e obter o estado do sistema para qualquer instante t . Considerando que o átomo se encontre inicialmente no estado excitado $|e\rangle$, temos, de acordo com a Eq.(142) $C_1(0) = 0$ e $C_2(0) = 1$.

$$|\Psi(0)\rangle = |n, e\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\phi^{(+)}\rangle + |\phi^{(-)}\rangle \right) \quad (148)$$

que, ao ser substituída na Eq.(147), resulta

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\Omega t} |\phi^{(+)}\rangle + e^{i\Omega t} |\phi^{(-)}\rangle \right) \quad (149)$$

ou

$$|\Psi(t)\rangle = \cos(\Omega t) |n, e\rangle - i \sin(\Omega t) |n+1, g\rangle. \quad (150)$$

Em particular para $n = 0$, temos que

$$|\Psi(t)\rangle = \cos(\lambda t) |0, e\rangle - i \sin(\lambda t) |1, g\rangle. \quad (151)$$

Através do modelo de Jaynes-Cummings, estudamos uma forma de interagir o campo com a matéria. A seção seguinte nos mostra uma forma de gerarmos nosso estado proposto, utilizando uma interação átomo-campo com um acoplamento ressonante.

5.1.1. Geração de estados usando acoplamento ressonante

A figura seguinte mostra o esquema para a geração do estado $|\Psi(\xi, \gamma)\rangle$: consiste em N átomos de dois níveis, uma zona de Ramsey R^4 , uma cavidade com alto fator de qualidade e um dectetor de ionização seletivo D_g . O átomo de dois níveis é considerado como um átomo circular de Rydberg, adequado para preparar e detectar correlações de longa vida do sistema

⁴ A zona de Ramsey é uma cavidade contendo em seu interior um campo clássico.

átomo-campo [43]. Eles apresentam um forte acoplamento à microondas e um decaimento radioativo muito longo, da ordem de um tempo de vida para a cavidade ($\tau \simeq 0.1$ s). Além do mais, os átomos de Rydberg são contados com alta eficiência pelos detectores de campo de ionização do estado seletivo [44].

Figura 27: Esquema experimental, para a geração de estados.

Os N átomos encontram-se no estado excitado $|e\rangle$ e, ao passarem, um a um, pela zona de Ramsey, o m -ésimo átomo é preparado na superposição desejada

$$C_g^{(m)} |g\rangle_m + e^{i\gamma} C_e^{(m)} |e\rangle_m. \quad (152)$$

Em seguida, atravessam a cavidade a qual contém um campo no estado $|0\rangle$. Após sua interação com o campo, o estado atômico é medido no detector.

Aqui consideramos átomos de dois níveis como átomos circulares de Rydberg, e uma vez que os N átomos tenham atravessado a cavidade, deixando seus fons, saem no estado fundamental. Desta maneira, o campo na cavidade evolui para um estado puro, dado por

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{m=0}^N \Lambda_m^{(N)} |m\rangle, \quad (153)$$

onde $\mathcal{N}$ é uma constante de normalização, e $\Lambda_m^{(N)}$ são coeficientes que podem ser obtidos a partir da fórmula de recorrência [45] (ver Apêndice B)

$$\Lambda_m^{(N)} = (1 - \delta_{m,0}) \Lambda_{m-1}^{(N-1)} C_e^{(N)} \sin(\sqrt{m} \lambda \tau_N) + (1 - \delta_{m,N}) \Lambda_m^{(N-1)} C_g^{(N)} \cos(\sqrt{m} \lambda \tau_N) \quad (154)$$

com $\Lambda_0^{(0)} = 1$. Para o estado do campo que queremos construir, temos

$$|\Psi(\xi, \gamma)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} C_m |m\rangle \quad (155)$$

em que, para o nosso caso,

$$C_m = \eta(\xi, \gamma) \left(\sqrt{\xi} C_m^{(1)} + e^{i\gamma} \sqrt{1-\xi} C_m^{(2)} \right) \quad (156)$$

onde $C_m^{(1)}$ e $C_m^{(2)}$, são dados pela Eq.(96).

Impondo que $\Lambda_m^{(N)} = C_m$, encontramos qual deve ser o estado de superposição atômico

$$C_g^{(m)} |g\rangle_m + e^{i\gamma} C_e^{(m)} |e\rangle_m, \quad (157)$$

no qual o m -ésimo átomo deve estar preparado para entrar na cavidade. Para ilustrar o procedimento, consideramos por exemplo $N = 2$. No caso $N > 2$ recaímos em equações algébricas cujo grau é de mais complicada solução, não havendo algoritmo resolvente quando $N > 5$. Assim, através da Eq.(154), temos

$$\Lambda_0^{(2)} = C_g^{(1)} C_g^{(2)} = C_0 \quad (158)$$

$$\Lambda_1^{(2)} = C_g^{(1)} C_e^{(2)} \sin(\lambda\tau_2) + C_g^{(2)} C_e^{(1)} \sin(\lambda\tau_1) \cos(\lambda\tau_2) = C_1 \quad (159)$$

$$\Lambda_2^{(2)} = C_e^{(1)} C_e^{(2)} \sin(\lambda\tau_1) \sin(\sqrt{2}\lambda\tau_2) = C_2. \quad (160)$$

Com a devida manipulação algébrica das Eqs.(158)-(160), recaímos em equações do segundo grau (para $N = 2$), nas incógnitas $x = \frac{C_e^{(1)}}{C_g^{(1)}}$ e $y = \frac{C_e^{(2)}}{C_g^{(2)}}$, resultando

$$\frac{C_e^{(1)}}{C_g^{(1)}} = \frac{2C_2 \sin(\lambda\tau_2)}{C_1 \sin(\lambda\tau_1) \sin(\sqrt{2}\lambda\tau_2)} \frac{1}{\eta(\tau_2)} \quad (161)$$

$$\frac{C_e^{(2)}}{C_g^{(2)}} = \frac{C_1}{2C_0 \sin(\lambda\tau_2)} \eta(\tau_2) \quad (162)$$

$$\eta(\tau_2) = 1 + \left(1 - \frac{2C_0 C_2 \sin(2\lambda\tau_2)}{C_1^2 \sin(\sqrt{2}\lambda\tau_2)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (163)$$

As Eqs.(161)-(163) mostram em qual estado de superposição deve estar preparado cada um dos dois átomos de forma a produzir os coeficientes C_m do nosso estado desejado, $|\Psi(\xi, \gamma)\rangle$.

A questão é que, na prática, $N \gg 2$, visto que para obtermos um melhor resultado é necessário que $N \gg \langle n \rangle$. Mas se isso acontece temos o problema da *decoerência*: o campo preparado vai se degenerando, se transformando em outro, perdendo sua identidade [46]. A razão dessa degeneração é que o campo aprisionado na cavidade nunca está realmente aprisionado, pois uma cavidade ideal não existe! Essa pequena interação, do campo com o seu “environment”, com o resto do universo, vai alterando o estado do campo, transformando $|\Psi(\xi, \gamma)\rangle$ em um estado de mistura. Por exemplo, se o espelho da cavidade (parede) não é perfeito e se o campo estava em um estado $|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle$, este perde um fóton, e conseqüentemente, vai para a $(|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle) \rightarrow \alpha(|\alpha\rangle - |-\alpha\rangle)$, ou seja: passa de gato-par para gato-ímpar. Este procedimento de geração exige a participação de muito átomos, sendo muito sensível à decoerência. Para o caso em questão, um método alternativo para contornar essa dificuldade é descrito na seção seguinte.

5.1.2. Geração de estados usando acoplamento dispersivo

Figura 28: Esquema do arranjo experimental para a geração de estados, utilizando o hamiltoniano dispersivo.

Neste caso, o arranjo experimental consiste em utilizar um único átomo de dois níveis ($|g\rangle$ e $|e\rangle$), uma primeira zona de Ramsey R_1 , uma cavidade com alto fator de qualidade, uma segunda zona de Ramsey R_2 e um detetor de estados seletivos D_g ou D_e , para estado fundamental $|g\rangle$ ou excitado $|e\rangle$.

Para prepararmos o estado desejado, o átomo no estado excitado $|e\rangle$ passa pela primeira

zona de Ramsey, o qual deixa o átomo no estado de superposição.

$$|\Psi_A(0)\rangle = (C_g |g\rangle + e^{i\gamma} C_e |e\rangle). \quad (164)$$

Em seguida, entra em uma cavidade, onde há um modo do campo previamente preparado no estado comprimido

$$|\Psi_C(0)\rangle = |\alpha, z\rangle. \quad (165)$$

Como resultado desta interação, a ação efetiva do hamiltoniano de interação dispersiva [41]

$$H_I = \hbar\lambda\sigma_z a^\dagger a \quad (166)$$

no qual

$$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|, \quad (167)$$

sobre o estado inicial de todo o sistema, [ver Eq.(136)], é dado por

$$|\Psi_{AC}(\tau)\rangle = (e^{-i\phi(\tau)n} |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|) |\Psi_A(0)\rangle |\alpha, z\rangle. \quad (168)$$

onde utilizando a igualdade [47]

$$e^{-i\phi(\tau)n} |\alpha, z\rangle = |e^{-i\phi(\tau)}\alpha, e^{-2i\phi(\tau)}z\rangle$$

a Eq.(168) pode ser descrita como

$$|\Psi_{AC}(\tau)\rangle = C_g |g\rangle |\alpha, z\rangle + e^{i\gamma} C_e |e\rangle |e^{-i\phi(\tau)}\alpha, e^{-2i\phi(\tau)}z\rangle. \quad (169)$$

Ao emergir da cavidade o átomo atravessa a segunda zona de Ramsey, sofrendo um pulso $\pi/2$, o qual leva o átomo no estado excitado $|e\rangle$ ao estado

$$|e\rangle \rightarrow |e\rangle + |g\rangle, \quad (170)$$

e o estado fundamental $|g\rangle$ ao estado

$$|g\rangle \rightarrow |g\rangle - |e\rangle.$$

Com isso a Eq.(169) torna-se,

$$\begin{aligned} |\Psi_{AC}(\tau)\rangle = & |g\rangle (C_g |\alpha, z\rangle + e^{i\gamma} C_e |e^{-i\phi(\tau)}\alpha, e^{-2i\phi(\tau)}z\rangle) \\ & - |e\rangle (C_g |\alpha, z\rangle - e^{i\gamma} C_e |e^{-i\phi(\tau)}\alpha, e^{-2i\phi(\tau)}z\rangle). \end{aligned} \quad (171)$$

Assim vemos que a detecção do átomo no estado fundamental $|g\rangle$ projeta o campo na cavidade no estado $|\Psi_{AC}^+(\tau)\rangle$. Agora, caso a detecção do átomo ocorra no estado excitado $|e\rangle$, o campo projetado na cavidade será $|\Psi_{AC}^-(\tau)\rangle$,

$$|\Psi_C^\pm(\tau)\rangle = \mathcal{N}^\pm (C_g |\alpha, z\rangle \pm e^{i\gamma} C_e |e^{-i\phi(\tau)}\alpha, e^{-2i\phi(\tau)}z\rangle). \quad (172)$$

O estado na Eq.(172) coincide com SGCC [Eq.(109)], desde que tenhamos

$$C_g = \sqrt{\xi}, \quad C_e = \sqrt{1-\xi}, \quad (173a)$$

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = e^{-i\phi(\tau)}\alpha, \quad (173b)$$

$$z_1 = z, \quad z_2 = e^{-2i\phi(\tau)}z. \quad (173c)$$

Um caso interessante ocorre quando $\xi = 1/2$, (pois neste caso $C_g = C_e = 1/\sqrt{2}$), $\gamma = 0$ e $\phi(\tau) = \pi$. Nessas condições, a Eq.(172) resulta em

$$|\Psi_C^\pm(\tau)\rangle = \frac{\mathcal{N}^\pm}{\sqrt{2}} (|\alpha, z\rangle \pm |-\alpha, z\rangle), \quad (174)$$

que é o estado comprimido par (+) ou ímpar (-), do tipo “gato de Schrödinger” [46]. Desta forma, podemos gerar vários estados estudados na literatura através dessa estratégia simples de medida, bastando conhecer alguns parâmetros iniciais.

6. Conclusão.

Apresentamos neste trabalho um novo estado do campo de radiação quantizado, denominado de Superposição Generalizada de Dois Estados Comprimidos Arbitrários (SGCC), propriedades não-clássicas do estado foram investigadas, tais como, oscilações na distribuição do número de fótons, estatística sub-poissoniana através do fator Q de Mandel, e efeito de compressão nos operadores de quadraturas $\langle \Delta X_1^2 \rangle$ e $\langle \Delta X_2^2 \rangle$. Além dessas propriedades não-clássicas estudadas, apresentamos dois métodos de geração para o estado proposto, uma utilizando acoplamento ressonante e outra usando acoplamento dispersivo.

O presente estado interpola dois estados comprimidos, onde o parâmetro ξ , que varia de $0 \rightarrow 1$, é o responsável pela contribuição de cada estado, sendo igual esta contribuição quando tomamos $\xi = 0.5$. Além disso, verificamos também qual influência que parâmetros envolvidos exercem sobre o SGCC. Para a distribuição de probabilidade, o parâmetro ξ controla o aparecimento de picos e buracos, cada vez mais acentuados à medida que $\xi \rightarrow 0.5$. Quando $\xi = 0$ ou $\xi = 1$ atinge uma distribuição sub-poissoniana. O parâmetro γ controla a posição dos picos e buracos, esses picos e buracos são máximos quando $\gamma = 0$ ou π . Por sua vez, o parâmetro R , controla a posição das envoltórias na P_n , diminuindo a amplitude e aumentando o número de oscilações para maiores valores de R e finalizando, através do parâmetro r podemos verificar, para um único estado comprimido aparecimento de picos e buracos na P_n .

Observamos também que estes parâmetros podem influenciar tanto a estatística quanto a compressão nos operadores de quadratura do SGCC onde a ocorrência desses efeitos pode ser igual ou mais acentuada do que para apenas um único estado. Como exemplo temos o estado superposto de vácuo comprimido que apresentou uma estatística sub-poissoniana muito mais significativa ($Q \simeq -1$),

Com respeito a geração da superposição do SGCC, verificamos que o método em que empregamos o acoplamento dispersivo é mais conveniente, pois problemas como a decoerência e detecção atômica são mais controlados, pelo fato de estarmos trabalhando com um único

átomo, caso que não ocorre quando utilizamos o acoplamento ressonante.

Apêndice A.

Dedução da Eq.(94a).

Sendo

$$b = SaS^\dagger$$

temos pela Eq.(90) que

$$b = e^{[\frac{1}{2}(z^*a^2 - za^{\dagger 2})]} a e^{[-\frac{1}{2}(z^*a^2 - za^{\dagger 2})]}.$$

Utilizando a expansão,

$$e^{(xA)} B e^{(-xA)} = B + x[A, B] + \frac{x^2}{2!}[A, [A, B]] + \frac{x^3}{3!}[A, [A, [A, B]]] + \dots \quad (175)$$

segue que

$$\begin{aligned} b = a + \frac{1}{2}[z^*a^2 - za^{\dagger 2}, a] + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2[z^*a^2 - za^{\dagger 2}, [z^*a^2 - za^{\dagger 2}, a]] \\ + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3[z^*a^2 - za^{\dagger 2}, [z^*a^2 - za^{\dagger 2}, [z^*a^2 - za^{\dagger 2}, a]]] + \dots \end{aligned} \quad (176)$$

onde,

$$[z^*a^2 - za^{\dagger 2}, a] = 2za^\dagger \quad (177a)$$

$$[z^*a^2 - za^{\dagger 2}, a^\dagger] = 2za, \quad (177b)$$

e

$$z = re^{i\phi}.$$

Assim, a Eq.(176) resulta em

$$\begin{aligned}
 b &= a + \frac{1}{2}2za^\dagger + \frac{1}{2!}\frac{1}{4}2z2z^*a + \frac{1}{3!}\frac{1}{8}2za^\dagger2z^*2z + \dots \\
 &= a\left(1 + \frac{1}{2!}r^2 + \dots\right) + a^\dagger e^{i\phi}\left(r + \frac{1}{3!}r^3 + \dots\right) \\
 &= a \cosh(r) + ae^{i\phi} \sinh(r) \\
 &= \mu a + \nu a^\dagger.
 \end{aligned}$$

Analogamente, podemos obter $b^\dagger$ [Eq.(94b)] como

$$S(z)a^\dagger S^\dagger(z) = b^\dagger = \mu a^\dagger + \nu^* a. \quad (178)$$

Transformação unitária

Podemos verificar que os estados $|z, \alpha\rangle$ e $|\alpha, z\rangle$ estão interligados por uma transformação unitária, da seguinte maneira:

$$S(z)D(\alpha) = [S(z)D(\alpha)S^\dagger(z)] S(z), \quad (179)$$

e utilizando as Eqs.(94a) e (178),

$$\begin{aligned}
 S(z)D(\alpha)S^\dagger(z) &= e^{\beta(\nu^*a + \mu a^\dagger) - \beta^*(\mu a + \nu a^\dagger)} \\
 &= e^{(\beta\nu^* - \beta^*\mu)a - (-\beta\mu + \beta^*\nu)a^\dagger}
 \end{aligned} \quad (180)$$

onde

$$\alpha = \beta\nu^* - \beta^*\mu \quad (181a)$$

$$\alpha^* = \beta^*\nu - \beta\mu, \quad (181b)$$

resulta para a Eq.(180)

$$SDS^\dagger = e^{\alpha a - \alpha^* a^\dagger} = D(\alpha). \quad (182)$$

Assim

$$|z, \alpha\rangle = S(z) D(\alpha) |0\rangle = [S(z) D(\alpha) S^\dagger(z)] S(z) |0\rangle = D(\alpha) S^\dagger(z) |0\rangle = |\alpha, z\rangle$$

Apêndice B.

Para deduzirmos da Eq.(154) consideramos primeiramente os estados iniciais $|e\rangle \otimes |n\rangle$ e $|g\rangle \otimes |n\rangle$; em seguida aplicamos em cada um desses estados o operador de evolução temporal

$$U = \exp[-itH_I/\hbar]$$

onde H_I é a hamiltoniana de interação ressonante, Eq.(125).

Desta forma

$$\begin{aligned} U |e\rangle |n\rangle &= \exp[-it\lambda (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)] |e\rangle |n\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-it\lambda)^k}{k!} (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)^k |e\rangle |n\rangle \end{aligned} \quad (183)$$

Sendo

$$\begin{aligned} (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)^{2k} |e\rangle |n\rangle &= (\sqrt{n+1})^{2k} |e\rangle |n\rangle \\ (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)^{2k+1} |e\rangle |n\rangle &= (\sqrt{n+1})^{2k+1} |g\rangle |n+1\rangle \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} U |e\rangle |n\rangle &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} (\lambda t \sqrt{n+1})^{2k} \right] |e\rangle |n\rangle \\ &\quad + \left[-i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (\lambda t \sqrt{n+1})^{2k+1} \right] |g\rangle |n+1\rangle \\ &= \cos(\lambda t \sqrt{n+1}) |e\rangle |n\rangle - i \operatorname{sen}(\lambda t \sqrt{n+1}) |g\rangle |n+1\rangle. \end{aligned} \quad (184)$$

Para o estado inicial $|g\rangle |n\rangle$, seguimos o mesmo procedimento, obtendo com o resultado

$$U |g\rangle |n\rangle = \cos(\lambda t \sqrt{n}) |g\rangle |n\rangle - i \operatorname{sen}(\lambda t \sqrt{n}) |e\rangle |n-1\rangle. \quad (185)$$

Após a passagem de um átomo no estado $C_g^{(1)} |g\rangle_1 + C_e^{(1)} |e\rangle_1$, pela cavidade (inicialmente no estado de vácuo), obtemos

$$(C_g^{(1)} |g\rangle_1 + C_e^{(1)} |e\rangle_1) |0\rangle \rightarrow (C_g^{(1)} |0\rangle - iC_e^{(1)} \text{sen}(\lambda t_1) |1\rangle) |g\rangle_1 + C_e^{(1)} \cos(\lambda t_1) |0\rangle |e\rangle_1. \quad (186)$$

O átomo 1, como todos os demais sucessivos, deve ser detectado no estado fundamental $|g\rangle_1$, de forma que o campo na cavidade será deixado no estado

$$\frac{1}{\mathcal{N}_1} (C_g^{(1)} |0\rangle - iC_e^{(1)} \text{sen}(\lambda t_1) |1\rangle) = \frac{1}{\mathcal{N}_1} (\Lambda_0^{(1)} |0\rangle + \Lambda_1^{(1)} e^{-i\pi/2} |1\rangle), \quad (187)$$

onde $\mathcal{N}_1$ é a constante de normalização, e

$$\begin{aligned} \Lambda_0^{(1)} &= C_g^{(1)}, \\ \Lambda_1^{(1)} &= C_e^{(1)} \text{sen}(\lambda t_1). \end{aligned}$$

Em seguida, o segundo átomo interage com o campo no estado deixado pelo primeiro átomo [ver Eq.(187)], resultando de maneira análoga em

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathcal{N}_1} (C_g^{(2)} |g\rangle_2 + C_e^{(2)} |e\rangle_2) (\Lambda_0^{(1)} |0\rangle + \Lambda_1^{(1)} e^{-i\pi/2} |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}_2} (\Lambda_0^2 |0\rangle + \Lambda_1^2 e^{-i\pi/2} |1\rangle + \Lambda_2^2 e^{-i\pi} |2\rangle), \end{aligned} \quad (188)$$

onde $\mathcal{N}_2$ é uma constante de normalização, e

$$\begin{aligned} \Lambda_0^{(2)} &= \Lambda_0^1 C_g^{(2)}, \\ \Lambda_1^{(2)} &= \Lambda_0^1 C_e^{(2)} \text{sen}(\lambda t_2) + \Lambda_1^1 C_g^{(2)} \cos(\lambda t_2), \\ \Lambda_2^{(2)} &= \Lambda_1^1 C_e^{(2)} \text{sen}(\sqrt{2}\lambda t_2). \end{aligned} \quad (189)$$

Em seguida, o terceiro átomo interage com o campo deixado pelo átomo 2

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mathcal{N}_2} (C_g^{(3)} |g\rangle_3 + C_e^{(3)} |e\rangle_3) (\Lambda_0^{(2)} |0\rangle + \Lambda_1^{(2)} e^{-i\pi/2} |1\rangle + \Lambda_2^{(2)} e^{-i\pi} |2\rangle) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}_3} (\Lambda_0^{(3)} |0\rangle + \Lambda_1^{(3)} e^{-i\pi/2} |1\rangle + \Lambda_2^{(3)} e^{-i\pi} |2\rangle + \Lambda_3^{(3)} e^{-i3\pi/2} |3\rangle), \end{aligned} \quad (190)$$

onde;

$$\begin{aligned}
 \Lambda_0^{(3)} &= \Lambda_0^{(2)} C_g^{(3)}, \\
 \Lambda_1^{(3)} &= \Lambda_0^{(2)} C_e^{(3)} \text{sen}(\lambda t_3) + \Lambda_1^{(2)} C_g^{(3)} \cos(\lambda t_3), \\
 \Lambda_2^{(3)} &= \Lambda_1^{(2)} C_e^{(3)} \text{sen}(\sqrt{2}\lambda t_3) + \Lambda_2^{(2)} C_g^{(3)} \cos(\sqrt{2}\lambda t_3), \\
 \Lambda_3^{(3)} &= \Lambda_2^{(2)} C_e^{(3)} \text{sen}(\sqrt{3}\lambda t_3).
 \end{aligned} \tag{191}$$

Assim, por inspeção chegamos à seguinte fórmula de recorrência (com $\Lambda_0^{(0)} = 1$),

$$\Lambda_k^{(N)} = (1 - \delta_{k,0}) \Lambda_{k-1}^{(N-1)} C_e^{(N)} \text{sen}(\sqrt{k}\lambda t_N) + (1 - \delta_{k,N}) \Lambda_k^{(N-1)} C_g^{(N)} \cos(\sqrt{k}\lambda t_N). \tag{192}$$

Observações:

I) O termo $\delta_{k,0}$ aparece, pois quando $k = 0$, apenas o termo $\Lambda_0^{(N-1)} C_g^{(N)}$ sobrevive, conforme mostrado nas Eqs.(186)-(190), com

$$\begin{aligned}
 \Lambda_0^{(3)} &= \Lambda_0^{(2)} C_g^{(3)}; \\
 \Lambda_0^{(2)} &= \Lambda_0^{(1)} C_g^{(2)}; \\
 \Lambda_0^{(1)} &= \Lambda_0^{(0)} C_g^{(1)} = C_g^{(1)};
 \end{aligned} \tag{193}$$

II) O termo $\delta_{k,N}$ deve aparcer porque, quando $k = N$, apenas o termo $\Lambda_{k-1}^{(N-1)} C_e^{(N)} \text{sen}(\sqrt{k}\lambda t_N)$ sobrevive.

III) Quando $k \neq 0$ e $k \neq N$, ambos os termos em seno e cosseno, sobrevivem.

Referências

- [1] G. N. Lewis, *Nature* **118**, 874 (1926).
- [2] H.J. Kimble, M. Dagenais and L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 691 (1977).
- [3] H.J. Carmichael and D.F. Walls, *J. Phys.*, **B9**, 1199 (1976).
- [4] L. Mandel, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 136 (1982);
J. M. Raimond et al, in *Laser Spectroscopy IX*, Ed. M. S. Feld, J.E. Thomas, and A. Mooradian (*Acad. Press*, NY, (1989)), 140;
G. Harel and G. Kurizki, *Phys. Rev.* **A54**, 5410 (1996);
S. Ya. Kilin and D. B. Horoshko, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5206 (1995);
S. M. Brune et al, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 976 (1990);
M. J. Holland, D. F. Walls and P. Zoller, *ibid.* **67**, 1716 (1991);
J. I. Cirac et al, *ibid.* **70**, 762 (1993);
H. Saito and M. Ueda, *Phys. Rev.* **79**, 3869 (1997);
O. Steuernagel, *Opt. Commun.* **138**, 71 (1997).
- [5] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **130**, 2529 (1963); ver também: H. M. Nussenzveig, *Introduction to Quantum Optics* (Gordon and Breach, N.Y., (1973)), Cap. 3.
- [6] H. P. Yuen, *Phys. Rev.* **A13**, 226 (1976).
- [7] H. P. Yuen, *Phys. Rev.* **A13**, 2226 (1976);
D. Stoler, *Phys. Rev.* **D1**, 3217 (1970);
D. F. Walls, *Nature* **306**, 141 (1983);
D. Stoler, *Phys. Rev.* **D4**, 1925 (1970).
R. Loudon and P. L. Knight, *J. Mod. Opt.* **34**, 709 (1987).
- [8] P. A. M. Dirac, *Proc. R. Soc. London, Ser.* **34**, 709 (1927).

- [9] L. Susskind and J. Glogower, *Physics* **1**, 49 (1964).
- [10] D. T. Pegg and S.M. Barnett, *Phys. Rev.* **A39**, 1665 (1989);
S. M. Barnett and D.T. Pegg, *J.Mod. Opt.* **36**, 7 (1989).
- [11] R. Loudon, *Quantum Theory of Light* (Oxford Univ. Press, Oxford (1973)), 1st Ed.
- [12] K. Wodkiewicz, P. L. Knight, S. J. Bucke and S. M. Barnett, *Phys. Rev.* **A35**, 2567 (1987).
- [13] I. A. Malkin and O. V. Man'ko, *Dynamical Symmetries and Coherent States of Quantum Systems* (Nauka, Moskow, 1979); M. Hillery, *Phys. Rev.* **A36**, 3796 (1987);
J. Perina, *Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Phenomena* (Reidel, Dordrencht, 1984) 78;
C. C. Gerry and E. Hach III, *Phys. Lett.* **A174**, p.185 (1993); *ibid.* **A179**, 1 (1993);
K. Zaheer and M. R. B. Wahiddin, *J. Mod. Opt.* **41**, 151 (1994);
V. V. Dodonov, I. A. Malkin e V. I. Man'ko, *Nuovo Cimento* **B24**, 46 (1974); *Physica (Amsterdan)* **72**, 597 (1974).
- [14] C. A. M. Dantas, J. R. Queiroz and B. Baseia, *J. Mod. Opt.* **45**, 1085(1998).
- [15] Edwin E. Hach III and Christopher C. Gerry, *J. Mod. Optics*, **40**, 2351 (1993).
- [16] Barry C. Sanders, *Phys. Rev.* **A39**, 4284 (1989).
- [17] B. Baseia, S.C.G. Granja and G. C. Marques, *Phys. Scripta* **55**, 719 (1997).
- [18] A. F. Lima, B. Baseia and G. C. Marques, *J. Mod. Opt.* **43**, 729;
A. F. Lima, B. Baseia and G. C. Marques, *Phys. Lett.* **A204**, 1 (1995).
- [19] R. Ragi, B. Baseia and V. Bagnato, *Intern. J. Mod. Phys. B*, **12**, n° 14, 1595 (1998);
- [20] *submetido*.
- [21] D. Stoler, *Phys. Rev.* **D1**, 3217 (1970).
- [22] D. Stoler, B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Optica Acta*, **55**, n° 3, 345 (1985).

- [36] Luiz Davidovich, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 127 (1996).
- [37] Ver Ref.[28], 1042.
- [38] R. E. Slusher, L. W. Holdeberg, B. Yurke, J. C. Mertz and J. F Valley, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2409 (1995);
 R. L. Robinson, *Science*, **230**, 972 (1986);
 R. M. Shelby, M. D. Leveson, S. H. Perlmutter, R. G. De Voe and D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 691 (1986);
 L. A. Wu, H.J. Kimble, J.L. Hall and H.Wu, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2520 (1986).
- [39] B. Yurke and D. Stoler, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 13 (1986);
 G. J. Milburn and C.A. Holmes, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2237 (1986);
 A. Mecozzi and P. Tombesi, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1055 (1987);
 M. Wolinsky and H. J. Carmichel, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1836 (1988);
 C. M. Savage and W. A. Cheng, *Opt. Commun.* **70**, 439 (1989);
 Barry. C. Sanders, *Phys. Rev.* **A39**, p.4284 (1998);
 J. J. Slosser, P.Meyestre and E. M. Wright, *Opt. Lett.* **15**, 233 (1990);
 J. Gea-Banacloche, *Phys. Rev.* **A44**, 5913 (1991).
- [40] K. Vogel V. M. Akulin and W. P. Schleich , *Phys. Rev.Lett* **71**, 1816 (1993);
 P. M. Zoller, O. Carnal and H. J. Kimble, *Phys. Rev.* **A51**, 1578 (1995);
 C. K. Law and J. H. Eberley, *Phys. Rev.Lett* **76**, 1055 (1996);
 M. Mousa e B. Baseia, *Phys. Lett.* **A238**, 223 (1998).
- [41] E. T. Jaynes and F. W. Cummings, *Proc. IEEE* **51**, 89 (1963).
- [42] L. Davidovich, M. Brune, J.M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev.* **A53**, 1295 (1996);
 D .F. Walls and G. J. Milburn, "*Quantum Optics* ", Sect.(17.4) (Springer-Velarg, Berlin (1994));

- [43] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, 164 (1994).
- [44] M. Brune, P. Nussenzveig, F. Schmidt-Kaler, F. Bernadot, A. Maali, J. M. Raimond and S. Haroche *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3339 (1994);
L. Davidovich, N. Zagury, M. Brune, J. M. Raimond and S. Haroche, *Phys. Rev.* **A50**, R895 (1994).
- [45] S. Haroche, in *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Les Houche, 1990; J. Dalibard, J. M. Raimond, J. Zinn-Justin, p.771 (Elsevier, N.Y.(1992)).
- [46] M. Moussa and B. Baseia, *Phys. Lett.* **A238**, 233 (1998).
- [47] Christopher C. Gerry and P. L. Knight, *Am. J. Phys.* **65**, 694 (1997).
Christopher C. Gerry and Edwin E. Hach III, *Phys. Lett.* **A174**, 2865 (1993).
- [48] B. C. Sanders and G. J. Milburn, *Phys. Rev.* **A39**, 649 (1989).