

29/8/95

Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Departamento de Física Matemática

Análise Quântica da Evolução de Inhomogeneidades em Espaços Curvos

Hugo Carneiro Reis

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Banca Examinadora : Prof. Dr. Oscar J. P. Éboli (USP)
Prof. Dr. Georges Matsas (IFT-UNESP)
Prof. Dr. Patricio Letelier (UNICAMP)
Prof. Dr. Adilson José da Silva (USP)
Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes (USP)



Orientador : Prof. Dr. Oscar J. P. Éboli

São Paulo
1995

Therese Luiz Caldeas

SBI-IFUSP



305M81JT2317



514
R375A
J
C. L.

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Reis, Hugo Carneiro

**Análise quântica da evolução de inomogeneidades em
espaços curvos. São Paulo, 1995.**

**Dissertação (Doutoramento) - Universidade de São
Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física
Matemática**

**Área de Concentração: Física de Partículas Elementares.
Orientador: Prof. Dr. Oscar José Pinto Éboli.**

**Unitermos: 1. Espaços Curvos; 2. Inomogeneidades;
3. Representação de Schrödinger; 4. Princípios
Variacionais; 5. Universo Primordial.**

USP/IF/SBI - 40/95

**Aos meus pais,
Hugo e Nilza**

**À Marcia
e à família Soriano**

Agradecimentos

ao Oscar, pela orientação e confiança.

aos amigos, sempre fundamentais em tudo que fazemos.

às secretárias do depto de Física Matemática, Kelma e Solange, e ao Emilio, sempre prestativos nas horas difíceis.

a todos que, de uma forma ou de outra, contribuíram na elaboração deste trabalho.

à FAPESP e ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Utilizando a representação funcional de Schrödinger e um *Ansatz* Gaussiano simples, obtemos um conjunto de equações finitas para a matéria e gravitação em espaços homogêneos e inhomogêneos.

Abstract

Using the formalism of functional Schrödinger representation and a simple *Ansatz*, we obtain a set of finite equations to the matter and gravitation in homogeneous and inhomogeneous spaces.

Índice

Introdução	4
1 Introdução à Cosmologia Inflacionária	7
1.1 O Modelo Cosmológico Padrão	7
1.2 Problemas do Modelo Padrão	10
1.2.1 O Problema do Flatness	11
1.2.2 O Problema do Horizonte	13
1.2.3 O Problema da Constante Cosmológica	14
1.2.4 Assimetria Matéria e Antimatéria	16
1.3 Introdução ao Universo Inflacionário	17
1.3.1 O Espaço de de Sitter	17
1.4 Soluções para Problemas do Modelo Padrão através do Universo Inflacionário	18
1.4.1 O Problema do Flatness	18
1.4.2 O Problema do Horizonte	19
1.5 O Universo Inflacionário Original	20
1.6 Problemas do Cenário Inflacionário Original	21
1.7 O Novo Universo Inflacionário	22
1.8 A Inflação Caótica	25
2 Representação Funcional de Schrödinger	27
2.1 Generalidades	28
2.2 Quantização do campo escalar em um espaço de Robertson-Walker	31

2.3	Outras Aplicações da Representação Funcional de Schrödinger	40
2.3.1	Mecânica Quântica de um Oscilador Upside-Down	40
2.3.2	Dinâmica Escalar no Novo Universo Inflacionário	45
3	Princípio Variacional Dependente do Tempo e a Ação Efetiva	50
3.1	Princípios Variacionais	50
3.2	Cálculo Ilustrativo	56
4	Aproximação Gaussiana Dependente do Tempo e sua Renormalização	61
4.1	Ação Efetiva e Equações de Movimento para Campo Homogêneo	62
4.2	Potencial Efetivo e sua Renormalização	64
4.3	Renormalização da Ação Efetiva na Métrica de Minkowski	69
4.4	Renormalização da Ação Efetiva na Métrica de Robertson-Walker	71
4.5	Renormalização do Tensor Energia-Momento	75
5	Dinâmica Escalar em Espaço Inomogêneo	80
5.1	O Modelo	80
5.2	Cálculo da Ação Efetiva	82
5.3	Renormalização da Ação Efetiva na Métrica de Centrella-Wilson	83
5.4	Renormalização do Tensor Energia-Momento em Espaço Inomogêneo	89
5.4.1	Renormalização das Componentes Diagonais do Tensor Energia-Momento	89
5.4.2	Renormalização das Componentes Não-Diagonais do Tensor Energia-Momento	97
5.5	O Acoplamento Conforme	99
	Conclusão	104

Referências

105

Introdução

Um dos campos mais ricos e instigantes da física, sem dúvida nenhuma, é o estudo do universo primordial, pois este é capaz de unir fortemente dois outros ramos da física aparentemente pouco relacionados: a *Física de Partículas e Campos* e a *Gravitação*. Segundo o modelo cosmológico padrão (*Big Bang*), o universo primordial encontrava-se em um estado de elevada temperatura sendo que para a descrição da matéria nesta condição é necessária a Física de Partículas. O significado disto é que a evolução do universo nos instantes iniciais dependerá, de alguma maneira, do conteúdo da física de partículas e suas interações. Em particular, a dinâmica de campos escalares pode ocasionar o surgimento de uma era inflacionária^[1], que ocorreu durante a evolução temporal destes campos durante e/ou após as diversas transições de fase que o universo experimentou.

Em geral o estudo destes cenários inflacionários é feito considerando-se apenas alguns aspectos da dinâmica de campo escalar, responsável pela existência de uma fase inflacionária. Encontramos na literatura trabalhos que investigam efeitos de inomogeneidades no campo em espaços inomogêneos^[2], porém levando em conta apenas aspectos clássicos da dinâmica. Outros trabalhos consideram efeitos quânticos na teoria^[3] mas não analisam as consequências da introdução de inomogeneidades no campo escalar ou se consideram, o fazem em espaços homogêneos^[4], o que é inconsistente.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar a evolução temporal do universo primordial levando em conta efeitos quânticos e também de inomogeneidades no campo escalar. Consideramos, para tanto, espaços in-

omogêneos, de forma a tornar nossa análise consistente. Além disso, fazemos uso da representação funcional de Schrödinger^[5] e as razões desta escolha são as seguintes: esta representação é adequada para descrever sistemas em que a condição inicial é um dado essencial para a análise e consiste da especificação de um estado puro ou de mistura. Outra razão para o uso desta representação vem do fato que ela nos permite usar a intuição e as ferramentas matemáticas desenvolvidas no estudo da Mecânica Quântica.

Uma vez que a resolução exata da evolução temporal de sistemas interagentes é impossível, já que estes são altamente não lineares, utilizaremos princípios variacionais^[6] considerando estados Gaussianos simples, os quais proporcionam equações tratáveis analiticamente. Apesar de trabalharmos apenas com esta classe restrita de estados, o uso de princípios variacionais permite-nos levar em conta alguns efeitos não-perturbativos que aparecem nas equações de auto-consistência.

Como sabemos da Teoria Quântica de Campos, modelos escalares apresentam divergências em consequência dos infinitos graus de liberdade do campo. Será necessário, então, isolar e remover estes infinitos através da redefinição das constantes da teoria. Com todos esses procedimentos, obtemos um conjunto de equações finitas para a matéria mais gravitação, considerando efeitos de inhomogeneidades, tanto nos campos escalares quanto na métrica que descreve o espaço.

Este trabalho encontra-se dividido da seguinte forma. No primeiro capítulo fazemos uma revisão sobre o modelo cosmológico padrão, seus problemas e possíveis soluções através dos modelos inflacionários. A função deste capítulo é servir de motivação para nossa análise posterior.

Em seguida, no capítulo 2, introduzimos o formalismo básico da representação funcional de Schrödinger para campos bosônicos. Aplicamos esta representação na quantização de um campo escalar livre no espaço-tempo com uma métrica do tipo Robertson-Walker, além de apresentar outros exemplos.

O capítulo 3 é dedicado aos princípios variacionais, através dos quais obtemos as equações de movimento para o sistema. Mostramos, também,

a dedução da expressão da ação efetiva através da aplicação destes princípios.

O capítulo 4 apresenta a aproximação Gaussiana por nós utilizada e a renormalização do potencial efetivo nesta aproximação, para um modelo $\lambda\Phi^4$. Através dos princípios variacionais, obtemos as equações de movimento e mostramos que a mesma prescrição de renormalização do caso estático torna as equações dinâmicas finitas, considerando espaços de Minkowski e Robertson-Walker. Em seguida procedemos a renormalização do tensor energia-momento com o intuito de obter a equação de Einstein semiclássica escrita de uma forma coerente. Da mesma forma que no caso estático, a prescrição de renormalização adotada é suficiente para remover os infinitos existentes no tensor energia-momento e fornecer uma expressão renormalizada do mesmo.

No último capítulo aplicamos o formalismo desenvolvido no capítulo anterior em espaços curvos, porém considerando inomogeneidades no campo escalar e na métrica de fundo. Da mesma forma que no capítulo 4, obtemos equações finitas para a matéria mais gravitação.

Capítulo 1

Introdução à Cosmologia Inflacionária

1.1 O Modelo Cosmológico Padrão

O modelo cosmológico padrão^[7], também conhecido como teoria do *Big Bang*, originou-se da tentativa de explicar os dados experimentais obtidos por *Hubble*^[8], no fim da década de 20, dados esses que mostram que as galáxias afastam-se umas das outras e que a velocidade de afastamento, ou velocidade de recessão, é diretamente proporcional à distância entre elas, ou seja,

$$v_{\text{rec.}} = Hd ,$$

onde H é a constante de Hubble ($H_0 = 40 - 100$ Km/seg. Mpc - o índice zero denota valores atuais das grandezas). Tal modelo, além de explicar os dados experimentais, previa a existência de uma radiação com temperatura em torno de 2,7 K, preenchendo todo universo. Em 1965, *Arno Penzias* e *Robert Wilson*^[9] encontram tal radiação de fundo, fazendo com que o modelo padrão ganhasse posição de destaque.

O ponto de partida deste modelo é a hipótese de que o universo é homogêneo e isotrópico sendo que dados observacionais confirmam esta hipótese em grande escala. A métrica que descreve o espaço com este alto grau de simetria é a métrica de Robertson-Walker^[10],

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] , \quad (1.1)$$

onde k é o índice de curvatura e determina se o universo é aberto ($k = -1$), fechado ($k = +1$) ou plano (*flat*) ($k = 0$). Para compreendermos melhor o universo descrito pela métrica de Robertson-Walker, podemos fazer a seguinte analogia: consideremos a superfície de um balão de gás. À medida que o balão infla, seu raio $R(t)$ aumenta e a distância r dos objetos na superfície do balão cresce junto com o raio.

As equações de Einstein relacionam o comportamento de $R(t)$ com o tensor energia-momento, o qual, pelas hipóteses de homogeneidade e isotropia que fizemos anteriormente, deve ter a forma $A g^{\mu\nu} + B u^\mu u^\nu$, onde $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$ é um vetor unitário apenas com a componente temporal. Consideremos a matéria que preenche o universo como sendo um gás ideal de partículas, podendo o tensor energia-momento ser escrito na forma de um fluido perfeito,

$$T^{\mu\nu} = p g^{\mu\nu} + (p + \rho) u^\mu u^\nu . \quad (1.2)$$

Em um referencial co-movente localmente inercial, (1.2) reduz-se a $T^{\mu\nu} = (-\rho, p, p, p)$. Identificamos ρ como sendo a densidade de energia, p como sendo a pressão e u^μ como a 4-velocidade do fluido.

Usando-se as equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (1.3)$$

obtemos as equações de movimento para $R(t)$:

$$\ddot{R} = -\frac{4\pi}{3} G (\rho + 3p) R , \quad (1.4)$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} \right) = H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho - \frac{k}{R^2} . \quad (1.5)$$

Combinando (1.4) e (1.5), temos a relação para a conservação de energia, escrita na forma

$$\frac{d}{dt} (\rho R^3) = -p \frac{d}{dt} (R^3) . \quad (1.6)$$

Nosso objetivo é analisar a evolução temporal de R e para que tenhamos sucesso, necessitamos de uma relação entre ρ e p , como podemos observar pelas equações (1.4) e (1.5). Em outras palavras, devemos encontrar uma equação de estado, $p = p(\rho)$, e para obtê-la devemos conhecer a densidade de energia ρ . Neste ponto fazemos a conexão entre a cosmologia e a física de partículas elementares, pois esta é capaz de especificar ρ , já que nos primeiros instantes (da ordem de 10^{-34} seg.) da história do universo, a temperatura (da ordem de 10^{19} GeV) e a densidade de matéria eram extremamente elevadas.

Podemos obter uma relação entre o raio do universo (R) e sua temperatura (T) através de uma outra hipótese do modelo padrão, que considera a expansão do universo adiabática, com uma densidade de energia (ρ) dominada, nos primórdios, pela radiação térmica de partículas relativísticas de massa nula:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} \left(N_b + \frac{7}{8} N_f \right) T^4 . \quad (1.7)$$

Aqui N_b é o n^o de graus de liberdade de spin de partículas bosônicas de massa nula (por exemplo, fótons contribuem com 2 graus) e N_f é o n^o de graus de liberdade de spin de partículas fermiônicas de massa nula (elétrons e pósitrons juntos contribuem com 4 graus). A densidade de entropia é dada por

$$s = \frac{2\pi^2}{45} \left(N_b + \frac{7}{8} N_f \right) T^3 . \quad (1.8)$$

Uma vez que o universo expande-se adiabaticamente, a entropia por volume co-movente ($S = sR^3$) é conservada. Isto é expresso por

$$\frac{d}{dt} (sR^3) = 0 . \quad (1.9)$$

Utilizando (1.8) temos a relação

$$R \propto T^{-1} , \quad (1.10)$$

e através de (1.7) encontra-se, quando o universo era dominado pela radiação,

$$\rho \propto R^{-4} , \quad (1.11)$$

a qual pode ser substituída em (1.5). Para o universo primordial R é bastante pequeno, o que nos permite ignorar o termo de curvatura, $-k/R^2$, produzindo a solução

$$R \propto \sqrt{t} . \quad (1.12)$$

Portanto, $H(t) = 1/2t$ e as equações (1.5) e (1.7) podem ser usadas para encontrar temperatura desta época,

$$T^2 = \sqrt{\frac{45}{\pi^3 (N_b + 7N_f/8)} \frac{M_P}{4t}} , \quad (1.13)$$

onde $M_P \equiv 1/\sqrt{G} = 1.2 \times 10^{-19} \text{GeV}$ é a massa de Planck.

O maior sucesso do modelo padrão não é a lei de Hubble, nem a radiação de fundo de 2.7 K. Podemos encarar estes fatos como conseqüências triviais do Big Bang. Sua maior realização é a previsão da abundância de hélio e núcleos leves produzidos cosmologicamente ^[11]. Apesar de todo sucesso, o modelo padrão apresenta problemas, como veremos a seguir.

1.2 Problemas do Modelo Padrão

Todas as conquistas do modelo padrão não são capazes de avaliá-lo quando nos dirigimos a instantes muito próximos do tempo zero (singularidade) e é exatamente neste ponto que a teoria apresenta falhas ^[12], impedindo-nos de construir um cenário coerente da evolução do universo. Dentre os vários problemas apresentados pelo modelo padrão, alguns deles tornam-se muito evidentes quanto mais nos aproximamos dos instantes

iniciais, tais como o problema do *flatness* e o problema do horizonte. Outros problemas que analisaremos no contexto do modelo padrão são o problema da constante cosmológica e a assimetria entre matéria e anti-matéria.

1.2.1 O Problema do Flatness

Uma das características mais importantes a respeito do universo que devemos conhecer é se ele é aberto, fechado ou plano e para isso necessitamos determinar seu índice de curvatura k . Quando consideramos o caso em que o universo é plano ($k = 0$), podemos encontrar a densidade de matéria através de (1.5),

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H^2 = 1,8 \times 10^{-29} \text{ g/cm}^3, \quad (1.14)$$

onde ρ_c é denominado “densidade crítica”, pois conhecendo-se a densidade de matéria atual do universo (ρ_0) conseguimos determinar se ele é aberto ($\rho_0 < \rho_c$), fechado ($\rho_0 > \rho_c$) ou plano ($\rho_0 = \rho_c$).

A relação entre a densidade atual de matéria e a densidade crítica (ρ_0/ρ_c) é denominada Ω_0 e seu valor atual é estimado na seguinte faixa:

$$0.1 \leq \Omega_0 \leq 1.0. \quad (1.15)$$

São exatamente estes valores para Ω_0 , tão próximos da unidade, que definem o chamado problema do flatness^[13]. Isto porque o valor $\Omega = 1$ é um ponto de equilíbrio instável na evolução do modelo padrão, como veremos a seguir.

A partir da equação de movimento para $R(t)$, (1.5), e da definição de ρ_c , (1.14), podemos obter a seguinte relação:

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} = \frac{3k}{8\pi G \rho R^2}. \quad (1.16)$$

O raio do universo pode ser eliminado da equação acima pois $S = sR^3$, o que nos leva a

$$\frac{\Omega - 1}{\Omega} = \frac{3ks^{2/3}}{8\pi G\rho S^{2/3}} . \quad (1.17)$$

Esta equação é bastante útil pois todas as quantidades envolvidas são facilmente calculadas: ρ e s são expressos em termos da temperatura pelas equações (1.7) e (1.8), sendo S constante à medida que o universo evolui. Para calcular S , podemos escrever, a partir de (1.5) e (1.14), a relação

$$R^2 = \frac{k}{H^2(\Omega - 1)} , \quad (1.18)$$

e, portanto,

$$S = \left[\frac{k}{H^2(\Omega - 1)} \right]^{3/2} s . \quad (1.19)$$

Para o presente tempo temos $H_0 \simeq (10^{10}\text{anos})^{-1}$, $|\Omega_0 - 1| < 1$ e $s = 2,8 \times 10^3/\text{cm}^3$, o que nos dá

$$S > 10^{87} , \quad (1.20)$$

o que é um número extremamente elevado. O fato de S ser de uma ordem de grandeza tão alta representa um enfoque alternativo para o problema do flatness. No contexto do modelo padrão, S é um parâmetro cujo valor é fixado pelas condições iniciais. Se S é constante, podemos calcular Ω quando a temperatura era da ordem de 1 MeV, quando o processo de nucleosíntese do Big Bang estava começando (em torno de 1 seg. após o Big Bang). Através da equação (1.17), encontramos o valor

$$\Omega = 1 \pm 10^{-15} . \quad (1.21)$$

Na época da transição de fase das teorias grande unificadas (GUT), quando a temperatura era da ordem de 10^{14}GeV (em torno de 10^{-49}seg.), tem-se

$$\Omega = 1 \pm 10^{-49} . \quad (1.22)$$

O problema do flatness é entender que processo físico ocorreu no universo primordial que ajustou Ω tão próximo da unidade. Este ajuste fino é assumido como condição inicial no modelo padrão, o que é extremamente incômodo.

1.2.2 O Problema do Horizonte

Outra questão que o modelo padrão não responde é conhecida como o problema do horizonte^[14]. Este problema envolve fatos como a uniformidade e a isotropia da radiação de fundo e o conceito de causalidade.

Dados observacionais indicam que a radiação de fundo é bastante isotrópica com relação à temperatura,

$$\frac{\delta T}{T} \propto 10^{-4} , \quad (1.23)$$

(descontado o movimento da Terra), mesmo quando as fontes de radiação no universo estão diametralmente opostas. A radiação de fundo hoje observada foi emitida na época da recombinação, quando a temperatura era da ordem de 4.000K (em torno de 100.000 anos após o Big Bang).

Tal uniformidade pode ser entendida de maneira natural para regiões que eram causalmente conexas na época da emissão da radiação. Resta sabermos se regiões diametralmente opostas nessa época se incluem nesta condição, ou seja, eram causalmente conexas.

Um sinal de luz viajando desde o início dos tempos ($t = 0$) terá percorrido, por um tempo t , a distância

$$h(t) = R(t) \int_0^t R^{-1}(t') dt' , \quad (1.24)$$

onde $h(t)$ é conhecido como horizonte de uma partícula, pois é a distância máxima que ela poderia viajar desde o princípio do universo. Devemos comparar o horizonte de uma partícula com o tamanho L do universo em um tempo t , que evolui para o universo hoje (t_0) observado:

$$L(t) = \frac{R(t)}{R(t_0)} L(t_0) . \quad (1.25)$$

Sendo $R \propto T^{-1}$, (1.10), teremos

$$L(t) = \frac{T(t_0)L(t_0)}{T(t)} . \quad (1.26)$$

Para um universo dominado pela radiação, sabemos que $R \propto t^{1/2}$, (1.12). Então, de (1.24) obtemos

$$h(t) = 2t . \quad (1.27)$$

Assim, se compararmos o tamanho do universo L , e o horizonte de uma partícula h , em um tempo t , podemos escrever,

$$\frac{L(t)}{h(t)} = T_0 \frac{L(t_0)}{2t T(t)} . \quad (1.28)$$

Na época em que a radiação de fundo foi emitida, $T(t_{em.}) \approx 4.000K$, $t_{em.} \approx 10^5$ anos e nos dias de hoje, $L(t_0) \approx 10^{10}$ anos, $T(t_0) \approx 2,7$ K. Assim,

$$\frac{L(t_{em.})}{h(t_{em.})} \approx 80 . \quad (1.29)$$

O problema do horizonte é entender como duas regiões separadas por 80 horizontes podem estar em equilíbrio térmico na época da emissão da radiação. Este problema fica cada vez mais crítico quanto mais nos aproximamos dos instantes iniciais. Novamente temos um problema de ajuste fino nas condições iniciais.

1.2.3 O Problema da Constante Cosmológica

Quando analisamos a equação de Einstein, (1.3), devemos compreender o que é o lado direito desta equação, ou seja, necessitamos definir o tensor energia-momento que descreve a matéria. Tal tensor é definido pela teoria quântica de campos. Sendo $|\psi\rangle$ o estado quântico do sistema, as densidades de energia e momento são dadas pelo valor esperado do tensor energia-momento^[15],

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \langle \psi | T_{\mu\nu} | \psi \rangle = \text{diag.}[-\rho, p, p, p] . \quad (1.30)$$

Porém, a expressão acima descreve a energia das flutuações mas não leva em conta a densidade de energia de ponto zero, constante, associada ao estado $|\psi\rangle$. Assim, o valor esperado do tensor energia-momento deve ser

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \text{diag.}[-\rho, p, p, p] + \rho_0 g_{\mu\nu} , \quad (1.31)$$

onde ρ_0 é a densidade de energia constante do estado $|\psi\rangle$. O segundo termo altera a equação de movimento (1.5), que passa a ser dada por

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \rho_0) - \frac{k}{R^2} . \quad (1.32)$$

Definindo a constante cosmológica Λ , como sendo

$$\Lambda \equiv \frac{8\pi G}{3}\rho_0 , \quad (1.33)$$

podemos calculá-la conhecendo a constante de Hubble ($H = \dot{R}/R$) e o parâmetro de desaceleração q_0 ($q_0 = -k/R^2 H^2$). Incertezas observacionais impõem-nos um limite superior para q_0 ($|q_0| < 5$), o que nos leva a ter um limite superior para Λ :

$$\begin{aligned} \frac{|\Lambda|}{m_P^2} = G |\Lambda| < 10^{-120} &\Rightarrow |\Lambda| < 10^{-82}(\text{GeV})^2 \\ &\Rightarrow \rho_0 \leq 10^{-44}(\text{GeV})^4 \approx 10^{-29}\text{g/cm}^3 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Para modelos de partículas, que descrevem a matéria a altíssimas temperaturas, esperamos um valor para ρ_0 incompatível com (1.34). Por exemplo, o modelo de Glashow-Weinberg-Salam, que descreve as interações eletrofracas, prevê um valor para ρ_0 da ordem de $(250 \text{ GeV})^4$. O problema da constante cosmológica é a incompatibilidade entre o limite superior atual de ρ_0 ($\rho_0 < 10^{-29}\text{g/cm}^3$) e o valor de ρ_0 calculado na época da quebra de simetria das interações eletrofracas. É preciso encontrar

um mecanismo que cancele as contribuições para Λ , oriundas das várias quebras de simetria pelas quais o universo passou.

Embora não conheçamos tal mecanismo capaz de anular a constante cosmológica hoje, o que fazemos é simplesmente subtrair essa densidade de energia ρ_0 da ação efetiva, satisfazendo, dessa forma, os dados observacionais obtidos com relação à constante cosmológica. Tal procedimento leva-nos a concluir que antes da quebra de simetria, a fase simétrica ($\phi = 0$) possuía uma densidade de energia ρ_0 (ou seja, uma constante cosmológica) diferente de zero. O chamado universo inflacionário impõe o mecanismo que anula Λ , como veremos posteriormente.

1.2.4 Assimetria Matéria e Antimatéria

O problema da assimetria entre matéria e antimatéria^[16] consiste em compreender porque o universo é feito, na sua quase totalidade, de matéria, não havendo quantidades apreciáveis de antimatéria. Ou ainda, se sabemos que a física que descreve o universo primordial é a física de altas energias, devemos entender o processo que fez com que houvesse um excesso de bárions sobre antibárions.

Tal processo físico deve ser capaz de violar as simetrias de carga (C) e de carga-paridade (CP) pois, caso contrário, as reações que geram as antipartículas ocorreriam na mesma proporção que as reações que geram as partículas, eliminando o excesso de matéria. E para que estas antireações não ocorram com a mesma probabilidade, as interações que dominam tais processos devem ocorrer fora do equilíbrio térmico, pois o excesso de bárions origina-se, principalmente, do decaimento de partículas superpesadas quando estas saem de equilíbrio térmico. Esta condição é satisfeita quando a taxa de ocorrência deste processo for menor que a taxa de expansão do universo. Veremos que o cenário inflacionário pode nos garantir esta condição.

Resta-nos, então, encontrar teorias que satisfaçam a violação das simetrias C e CP. De fato, teorias de grande unificação, como no caso do modelo de Georgi-Glashow ($SU(5)$), satisfazem este requisito.

A maioria dos problemas apresentados pelo modelo padrão seriam solu-

cionados se encontrássemos um modelo que fizesse, de forma coerente, a transição da fase das teorias grande unificadas (origem do universo) até a fase em que o modelo padrão é válido. Esse é o objetivo dos cenários inflacionários, que passaremos a analisar de agora em diante.

1.3 Introdução ao Universo Inflacionário

1.3.1 O Espaço de de Sitter

O espaço de de Sitter^[10] é uma das soluções das equações de movimento para $R(t)$, considerando o universo plano ($k = 0$) e vazio ($\rho = \rho_0$). Então, de (1.5) temos

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_0 . \quad (1.35)$$

Integrando a expressão acima, obtemos a evolução temporal para $R(t)$,

$$R(t) = e^{\chi t} , \quad (1.36)$$

onde χ é dado por

$$\chi = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho_0} . \quad (1.37)$$

A solução (1.36) nos diz que o fator de escala $R(t)$ cresce exponencialmente com o tempo. Os modelos de universo inflacionário utilizam esta característica da solução para resolver alguns dos problemas cruciais apresentados pelo modelo padrão.

Podemos ainda observar que este tipo de solução é coerente com a história do universo nos instantes iniciais. Podemos desprezar o termo de curvatura k/R^2 , da equação (1.5) pois, como já dissemos, o termo dominante é a densidade de energia, ρ . Portanto, o universo nos instantes iniciais pode ser considerado um espaço de de Sitter, se a maior contribuição para ρ provém de ρ_0

1.4 Soluções para Problemas do Modelo Padrão através do Universo Inflacionário

Nesta seção mostraremos como a existência de uma fase em que o fator de escala cresce exponencialmente (fase de de Sitter) soluciona alguns dos problemas do modelo padrão, tais como os problemas do flatness e do horizonte.

Nos modelos inflacionários considera-se que o universo passou até o presente instante por três fases distintas:

1. Na primeira fase, que vai da origem em $t = 0$ até um determinado instante que chamaremos de t_i , o universo encontra-se em algum estado quântico que é desconhecido;
2. A partir do instante t_i , algum mecanismo faz o universo ser descrito pelo espaço de de Sitter até um outro instante que denominamos t_f ;
3. A partir do instante t_f , o universo passa a ser descrito pelo modelo cosmológico padrão.

A descrição acima da evolução do universo permite-nos conservar os sucessos alcançados pelo modelo padrão, se o estado do universo no fim da segunda fase é “adequadamente” escolhido. Como veremos adiante, o fim desta segunda fase será fundamental para determinar a validade dos cenários inflacionários.

A partir deste ponto mostraremos como o universo descrito pelo espaço de de Sitter soluciona dois dos principais problemas do modelo padrão: os problemas do flatness e do horizonte.

1.4.1 O Problema do Flatness

Da equação (1.5), podemos escrever a seguinte relação:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c} = 1 + \frac{k}{R^2(t)H^2(t)} . \quad (1.38)$$

Assim teremos

$$\frac{\Omega(t_f) - 1}{\Omega(t_i) - 1} = \frac{R^2(t_i) H^2(t_i)}{R^2(t_f) H^2(t_f)} . \quad (1.39)$$

Considerando a fase de de Sitter,

$$R(t) = e^{\chi t} ; \quad t_i \leq t \leq t_f ,$$

podemos ainda, verificar que

$$H(t_i) = H(t_f) = \chi . \quad (1.40)$$

Finalmente, através de (1.36), (1.39) e (1.40) concluímos que

$$\Omega(t_f) - 1 = [\Omega(t_i) - 1] e^{-2\chi(t_f - t_i)} . \quad (1.41)$$

Como já dissemos, $|\Omega(t_f) - 1| = 10^{-49}$ para temperaturas da ordem de 10^{14} GeV:

$$[\Omega(t_i) - 1] e^{-2\chi(t_f - t_i)} = 10^{-49} . \quad (1.42)$$

Escolhemos a temperatura da ordem de 10^{14} GeV no final da fase de de Sitter para que possamos preservar os sucessos do modelo cosmológico padrão. Consideremos ainda que $\Omega(t_i) - 1$ seja da ordem da unidade. Isto nos leva a

$$\chi(t_f - t_i) \simeq 56 . \quad (1.43)$$

Solucionar o problema do flatness é encontrar o processo físico que ajustou Ω tal que $\Omega = 1 \pm 10^{-49}$. O cenário inflacionário mostra-se capaz de proporcionar tal ajuste fino nas condições iniciais, bastando para isso termos $\chi(t_f - t_i) \simeq 56$.

1.4.2 O Problema do Horizonte

O problema do horizonte consiste em entender como regiões do universo causalmente desconexas encontravam-se em equilíbrio térmico na época

da recombinação. Nesta época, o raio do universo era de aproximadamente 6 cm, enquanto que o tamanho do horizonte era da ordem de 10^{-28} cm, pelo modelo padrão. O mecanismo físico que colocou o universo inteiro em equilíbrio térmico deve ser capaz de tornar o tamanho do horizonte maior que o raio do universo.

Consideremos uma região do universo causalmente conexa no início da segunda fase (no instante t_i) com o tamanho do horizonte da ordem de χ^{-1} , ($\chi^{-1} \approx 10^{-24}$ cm). Calculando o horizonte do universo no fim do período inflacionário através de (1.24), obtemos

$$h(t_f) = \frac{e^{\chi(t_f - t_i)}}{\chi}, \quad (1.44)$$

onde $e^{\chi(t_f - t_i)} \ll 1$. Se o tamanho do horizonte no fim do período inflacionário for maior que o raio do universo, teremos colocado o universo inteiro dentro do mesmo cone de luz, resolvendo o problema do horizonte. Portanto, para satisfazer este vínculo ($h(t_f) \approx 6$ cm), devemos ter $\chi(t_f - t_i) \geq 57$. Podemos notar que a quantidade de inflação necessária para solucionar os dois problemas é praticamente a mesma.

1.5 O Universo Inflacionário Original

O modelo de universo inflacionário foi primeiramente proposto por Guth^[17] e apesar do próprio autor demonstrar sua inviabilidade, tal modelo mostrou-se fundamental pois nos indica o caminho a ser seguido para solucionar os problemas apresentados pelo modelo cosmológico padrão.

As hipóteses básicas necessárias para a realização de tal cenário são a existência de transições de fase de primeira ordem para teorias de grande unificação e a solução *ad hoc* para o problema da constante cosmológica, citado anteriormente. Vamos, agora, descrever este cenário inflacionário:

- Para temperaturas maiores que uma determinada temperatura crítica (T_c), o universo encontra-se em uma fase conhecida como vácuo simétrico ($\phi = 0$), que é um mínimo global do potencial efetivo;

- Quando $T = T_c$ temos outro mínimo global degenerado com o estado $\phi = 0$;
- Para $T < T_c$, o vácuo simétrico passa a ser um mínimo local, tornando o estado $\phi = 0$ metaestável. A transição de fase do vácuo simétrico para o novo mínimo global ($\phi \neq 0$) ocorre por efeito de tunelamento, já que a transição é de primeira ordem. O modelo inflacionário supõe que a transição de fase não ocorreu rapidamente, ou seja, o campo ϕ permanece no estado metaestável ($\phi = 0$) por um longo tempo;
- Após este longo período, o universo evolui para a fase de simetria quebrada, através da nucleação de bolhas da nova fase. A colisão entre as paredes das bolhas liberaria energia, reaquecendo o universo.

O cenário descrito acima é coerente com as duas hipóteses feitas anteriormente. Se a fase metaestável é suficientemente longa, haverá um instante na evolução do universo a partir do qual a constante cosmológica associada a este estado passa a ser, pela hipótese feita, a principal contribuição para a densidade de energia do universo. Com a transição de fase, o universo passa para o estado de simetria quebrada, onde a constante cosmológica é desprezível.

1.6 Problemas do Cenário Inflacionário Original

Embora o cenário original da inflação seja uma solução extremamente elegante para os problemas do modelo padrão, ele mesmo apresenta falhas, mostradas pelo próprio Guth, quando da sua implementação. O principal problema está relacionado com a formação de bolhas da nova fase. No modelo de Guth, a hipótese fundamental era que a transição do estado metaestável (falso vácuo) para o vácuo verdadeiro era uma transição de primeira ordem (descontínua), ocorrida por tunelamento do campo ϕ . Mas para que haja o período inflacionário é necessário que essa transição possua uma longa vida. As consequências da escolha desta hipótese são as seguintes:

- Se a razão entre a taxa de nucleação de bolhas por unidade de volume, $\epsilon \equiv \Gamma/\chi^4$ for menor que 10^{-6} teremos a formação de agrupamentos (*clusters*) de bolhas da nova fase. Tais agrupamentos seriam finitos e de diferentes tamanhos, tornando o universo altamente inhomogêneo, o que não é observado hoje. A razão física para este fato é que enquanto o universo expande-se exponencialmente, as bolhas da nova fase crescem apenas com a potência de t .
- Se ϵ é maior que 0.24, existe a possibilidade dos vários agrupamentos unirem-se para formar uma região infinita. Este processo é conhecido como *percolação*. Porém, neste caso, a inflação ocorrida não teria sido suficiente para resolver os problemas do modelo padrão.
- Se ϵ é da ordem de 4×10^{-3} , a temperatura atingida pelo universo após o seu reaquecimento seria muito baixa (muito menor que 10^{28}K), impossibilitando a explicação da assimetria entre matéria e antimatéria.

A formulação original do modelo inflacionário entra em conflito com os modelos existentes de física de partículas em consequência dos problemas citados. No artigo original, Guth questiona a viabilidade de seu cenário e diz que este deve ser modificado. Em seguida, é proposto um novo cenário que evita os problemas do modelo original, e que passou a ser conhecido como *novo universo inflacionário*.

1.7 O Novo Universo Inflacionário

A principal característica deste cenário, apresentado por *Linde* ^[18], *Albrecht* e *Steinhardt* ^[19] é propor uma outra transição de fase para o universo, com propriedades totalmente diferentes da transição existente no modelo original. Neste modelo ela ocorre não por tunelamento do campo de Higgs, mas por flutuações deste campo quando ele encontra-se na fase metaestável. Além disso, a transição se dá de forma gradual (transição de segunda ordem), com um longo tempo de vida, gerando o período

inflacionário. Para combinar tais características (transição suave por um longo tempo), o potencial efetivo para o campo de Higgs deve ter propriedades bem definidas. A principal delas é que o potencial deve ser quase plano, próximo à região $\phi = 0$ (fig.1).

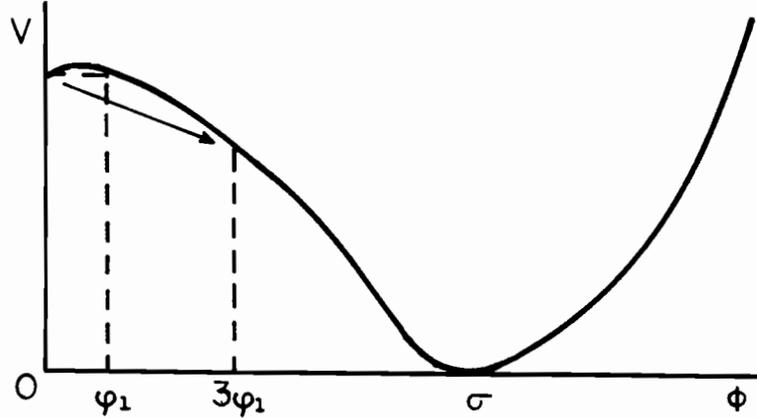


Fig. 1 - Potencial Coleman-Weinberg

Durante a transição, a evolução do campo escalar em direção à fase simétrica é lenta. Esta fase é conhecida como “slow rollover”. Um potencial que possui esta propriedade é o do tipo Coleman-Weinberg, para a quebra de simetria $SU(5) \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1)$:

$$V_{\text{eff.}}(\phi, T) = \left(\frac{18T^4}{\pi^2} \right) \int_0^\infty dx x^2 \ln \left\{ 1 - \exp \left[- \left(x^2 + \frac{25g^2\phi^2}{8T^2} \right) \right] \right\} + \left(\frac{5265}{512\pi^2} g^4 \right) \left[\phi^4 \ln \left(\frac{\phi}{\phi_0} \right) - \frac{\phi^4}{4} + \frac{\phi_0^4}{4} \right], \quad (1.45)$$

onde $\phi_0 \sim 10^{14} - 10^{15} \text{ GeV}$ e $g^2 \sim 1/3$ é o *gauge* da constante de acoplamento. Passamos, então, a analisar como seria a evolução do universo segundo o novo cenário.

Da mesma forma que no modelo original da inflação, inicialmente o campo de Higgs encontra-se na fase simétrica $\phi = 0$. Após o universo esfriar até uma temperatura $T < T_c$, o campo de Higgs fica preso ao estado metaestável $\phi = 0$ (falso vácuo). Passado algum tempo, ocorre uma flutuação no campo (o que corresponde ao aparecimento de uma bolha) fazendo com que este saia do falso vácuo e assumira um determinado valor ϕ' , próximo de $\phi = 0$. A escolha do potencial tipo Coleman-Weinberg faz com que o campo de Higgs evolua lentamente do valor ϕ' em direção ao vácuo de simetria quebrada σ (vácuo verdadeiro), pois o potencial é extremamente chato perto de $\phi = 0$. Esta lenta evolução já citada anteriormente, corresponde ao *slow rollover* e pode implicar em um tempo maior que $57\chi^{-1}$ para que o campo assumira o valor σ , ocasionando inflação durante este período e resolvendo problemas cruciais do modelo padrão. Podemos, ainda, questionar como o novo universo inflacionário resolve o problema de formação de bolhas da nova fase. Como já foi dito, a existência de uma flutuação do campo corresponde ao aparecimento de uma bolha da nova fase, na qual o universo que hoje observamos evoluiu, ou seja, dentro de uma única bolha. Este fato resolve o problema de um universo altamente inhomogêneo em consequência dos diferentes tamanhos das bolhas que aparecem no cenário original.

O campo de Higgs, durante a fase *slow rollover*, tem sua evolução temporal governada pela equação semiclássica,

$$\ddot{\phi} + 3\chi\dot{\phi} + \Gamma\dot{\phi} + \frac{\partial V_{\text{eff.}}}{\partial\phi} = 0 . \quad (1.46)$$

Vamos interpretar fisicamente a equação acima. O termo $3\chi\dot{\phi}$ representa o *red-shift* em consequência da expansão do universo. Já o termo $\Gamma\dot{\phi}$ é uma descrição fenomenológica^[20] da interação do campo de Higgs com outras partículas. Ele descreve a criação de partículas no universo primordial. Quando o campo de Higgs atinge o vácuo verdadeiro, ele oscila rapidamente em torno do valor $\phi = \sigma$. Então, o termo de interação faz com que o Higgs decaia em outras partículas, reaquecendo o universo e amortecendo a própria oscilação. Os termos $\Gamma\dot{\phi}$ e $3\chi\dot{\phi}$ devem assumir

valores tais que respeitem o vínculo de que a temperatura de reaquecimento do universo seja da ordem de 10^{14}GeV , para que conservemos os sucessos do modelo cosmológico padrão desde a bariogênese.

Então com este novo cenário conseguimos resolver os problemas da implementação do cenário inflacionário? A resposta é não. Podemos encarar o fato de necessitarmos de um potencial efetivo com características especiais (Coleman-Weinberg) como um novo ajuste fino, o que é indesejável. Além disso, no modelo $SU(5)$ com potencial efetivo do tipo Coleman-Weinberg, o campo de Higgs tende a evoluir para uma fase de simetria quebrada no grupo $SU(4) \times U(1)$, ficando preso a esta fase^[21]. Necessitamos, então, de mais uma quebra de simetria em direção ao grupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. O problema é que essa nova transição ocorre através da nucleação de bolhas da nova fase, tornando, novamente, o universo altamente inhomogêneo.

Para tentar solucionar o problema da necessidade de um potencial com características especiais como condição inicial, é proposto um novo cenário, conhecido como *inflação caótica*, como veremos a seguir.

1.8 A Inflação Caótica

O cenário caótico foi apresentado por Linde^[22] em 1983 e propõe que o universo inicialmente evoluiu de um estado onde o campo de Higgs assumiria, em princípio, qualquer valor tal que $\phi \gg M_P$, diferentemente do novo universo inflacionário, que tem como condição inicial um estado metaestável com $\phi = 0$. Comparando os dois modelos, é fácil observar que o cenário caótico tem condições iniciais mais gerais, como queremos. Além disso, o potencial escalar que descreve o modelo é do tipo $\lambda\phi^4$ (fig.2), sem a necessidade de características especiais, como no caso do potencial tipo Coleman-Weinberg.

A evolução do universo ocorre, segundo o cenário caótico, da seguinte forma. Inicialmente o universo encontra-se em algum estado quântico caótico. Uma descrição clássica ou semiclassical só é possível após a era de Planck ($t \sim t_P \sim M_P^{-1}$), quando a densidade de energia torna-se menor que M_P^4 . Neste estado caótico, o campo de Higgs encontra-se em alguma região onde $\phi \gg M_P$, passando a evoluir em direção ao vácuo (não existe *falso vácuo*).

De que forma, então, o universo experimenta uma fase de crescimento exponencial (inflação) dentro deste cenário? Vimos que o período inflacionário está relacionado com o tempo que o campo de Higgs leva para atingir o vácuo. No caso do cenário caótico, esta fase é longa pois o campo ϕ possui, inicialmente, um valor muito alto ($\phi \gg M_P$), o que faz com que ele demore a atingir o mínimo global do potencial.

Embora o cenário caótico possua condições iniciais mais gerais que o novo cenário inflacionário, ainda sim ele possui o vínculo $\phi \gg M_P$. Outros cenários inflacionários que apareceram posteriormente (*inflação natural, inflação soft, etc*)^[23] procuram, como o novo universo inflacionário, um potencial ideal, que apresente todos os requisitos para a geração de inflação. Dessa forma esbarram sempre no mesmo problema: o de necessitarem de um potencial com condições especiais. Por este motivo optamos por trabalhar com o cenário caótico, na medida em que analisaremos a dinâmica de campo escalar com um potencial tipo $\lambda\phi^4$, como veremos nos capítulos que se seguem.

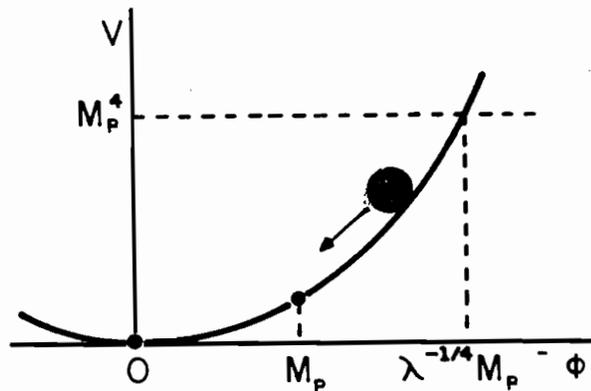


Fig. 2 - Inflação Caótica

Capítulo 2

Representação Funcional de Schrödinger

Neste capítulo vamos introduzir a representação funcional de Schrödinger para teoria quântica de campos (TQC). A formulação usual da TQC consiste no emprego da representação de Heisenberg e das funções de Green causais. Este método é muito útil para a análise de divergências, bem como para o desenvolvimento de métodos perturbativos. Contudo, esta formulação não é adequada para o tratamento de problemas com condição inicial. Para estes casos, é mais conveniente utilizar a representação funcional de Schrödinger. Outro motivo para o uso desta representação vem do fato de que ela nos permite usar a intuição e as ferramentas matemáticas desenvolvidas para problemas de Mecânica Quântica em aplicações da TQC.

O uso da representação de Schrödinger em TQC não é tão difundido quanto o da representação de Heisenberg pois esta possibilita-nos isolar e renormalizar os infinitos com maior facilidade. Contudo, a renormalizabilidade da representação funcional de Schrödinger para problemas estáticos foi demonstrada por Symanzik^[24] e o tratamento de infinitos dependentes do tempo foi desenvolvido pelos autores da ref. [25].

2.1 Generalidades

Na representação funcional de Schrödinger para teorias contendo somente campos bosônicos, estados são descritos por funcionais de onda $\Psi(\varphi)$ de configurações de campos clássicos (c-numbers) $\varphi(\mathbf{r})$. Para compreendermos isto, podemos comparar com a Mecânica Quântica ordinária de muitos corpos. O campo $\Phi(\mathbf{r})$ pode ser visto como uma coleção de variáveis mecânicas Q_i ($i = 1, \dots, N$) para N graus de liberdade, no limite em que N torna-se continuamente infinito: $Q_i \rightarrow \Phi$, $i \rightarrow \mathbf{r}$

$$\Psi(\varphi) = \langle \varphi | \Psi \rangle . \quad (2.1)$$

O produto interno de dois estados é definido através da seguinte integral funcional:

$$\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle = \int \mathcal{D}\varphi \Psi_1^*(\varphi) \Psi_2(\varphi) . \quad (2.2)$$

Operadores são representados por kernels funcionais $O(\varphi, \tilde{\varphi})$

$$O | \Psi \rangle \implies \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} O(\varphi, \tilde{\varphi}) \Psi(\tilde{\varphi}) . \quad (2.3)$$

Na representação de Schrödinger, os operadores são calculados no mesmo instante de tempo, sendo a relação de comutação fundamental dada por:

$$[\Phi(\mathbf{r}), \Pi(\mathbf{r}')] = i\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') . \quad (2.4)$$

A representação escolhida é tal que o kernel associado ao operador de campo $\Phi(\mathbf{r})$ é diagonal

$$\Phi(\mathbf{r}) \iff \varphi(\mathbf{r})\delta(\varphi - \tilde{\varphi}) . \quad (2.5)$$

O kernel associado ao momento canonicamente conjugado $\Pi(\mathbf{r})$ apresenta uma derivada funcional,

$$\Pi(\mathbf{r}) \iff \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{r})} \delta(\varphi - \tilde{\varphi}) . \quad (2.6)$$

Concluimos que a ação do operador Φ nos funcionais de onda é a multiplicação destes por φ , ao passo que a ação de Π é derivar funcionalmente o estado $\Psi(\varphi)$ com respeito a φ . A representação de qualquer operador construído através de Φ e Π é dada por

$$O(\Pi, \Phi) | \Psi; t \rangle \iff O \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi}, \varphi \right) \Psi(\varphi; t) . \quad (2.7)$$

A equação dinâmica fundamental nesta representação é a equação funcional de Schrödinger para um estado dependente do tempo $| \Psi; t \rangle \Rightarrow \Psi(\varphi; t)$. Esta equação fica determinada uma vez que a Hamiltoniana $H(\Pi, \Phi)$ do sistema é conhecida

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\varphi; t) = H \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi}, \varphi \right) \Psi(\varphi; t) . \quad (2.8)$$

Para sistemas com Hamiltonianas independentes do tempo é possível separar as variáveis, resultando em uma equação funcional de autovalores:

$$\Psi(\varphi; t) = e^{-iEt} \Psi_E(\varphi) , \quad (2.9)$$

$$H \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi}, \varphi \right) \Psi_E(\varphi) = E \Psi_E(\varphi) .$$

Como na Mecânica Quântica, esta equação funcional de autovalores tem solução analítica apenas para alguns casos especiais. Como exemplo, consideremos um sistema cuja a dinâmica é governada pela Hamiltoniana quadrática:

$$H = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} [\Pi^2(\mathbf{x}) + (\Phi h \Phi)(\mathbf{x})] , \quad (2.10)$$

onde h é um kernel real e simétrico. Em todo texto, $\int_{\mathbf{x}}$ representa a integral sobre todo espaço d -dimensional $\int_{\mathbf{x}} \equiv \int d^d \mathbf{x}$. Também utilizaremos a seguinte notação matricial: $(AB)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \int_{\mathbf{z}} A(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B(\mathbf{z}, \mathbf{y})$. Para que o modelo seja invariante por Poincaré, h deve assumir a forma $h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (-\nabla^2 + m^2) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. De forma mais explícita, a equação funcional de autovalores é dada por:

$$\int \left(-\frac{\delta^2}{\delta\varphi\delta\varphi} + \varphi h\varphi \right) \Psi_E(\varphi) = E\Psi_E(\varphi) . \quad (2.11)$$

O estado fundamental desta equação é dado por um funcional de onda Gaussiano

$$\Psi_0(\varphi) = \det^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\omega}{\pi} \right) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x},\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y}) \right] , \quad (2.12)$$

onde a covariância ω satisfaz

$$\omega^2 = h , \quad (2.13)$$

e o autovalor correspondente é

$$E_0 = \frac{1}{2} \text{tr } \omega . \quad (2.14)$$

A analogia com a Mecânica Quântica é clara: o estado fundamental de uma teoria com a Hamiltoniana quadrática nos graus de liberdade do sistema é uma exponencial de uma forma quadrática nestes. É possível observar, também, a existência de infinitos em TQC devido aos infinitos graus de liberdade. Para vermos isto, consideremos sistemas invariantes por Poincaré. Neste caso, a covariância ω é invariante por translações espaciais e dada por

$$\omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \omega(\mathbf{k}) , \quad (2.15)$$

onde a integral no espaço dos momentos representa $\int_{\mathbf{k}} \equiv \int \frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}$. A forma (2.15) acarreta que a normalização do funcional de onda (2.12)

$$\det^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\omega}{\pi} \right) = \exp \left[\frac{1}{4} \text{tr} \ln \left(\frac{\omega}{\pi} \right) \right] = \exp \left[\frac{V}{4} \int_{\mathbf{k}} \ln \left(\frac{\sqrt{k^2 + m^2}}{\pi} \right) \right] , \quad (2.16)$$

é divergente tanto no ultravioleta (por causa da integração sobre os momentos) como no infravermelho (por causa do aparecimento do volume espacial V).

A seguir usaremos a representação funcional de Schrödinger para TQC para discutir o problema da quantização do campo bosônico livre em um espaço de Robertson-Walker. Discutiremos o funcional de onda do vácuo e definiremos o vácuo adiabático.

2.2 Quantização do campo escalar em um espaço de Robertson-Walker

Consideremos um campo escalar livre propagando-se em um espaço de Robertson-Walker plano cujo sistema de coordenadas é tal que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) dx^2, \quad (2.17)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala. A dinâmica do campo escalar é regida pela ação clássica

$$I = \int d^n x \mathcal{L} = \int d^n x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} (\mu^2 + \xi R) \Phi^2 \right], \quad (2.18)$$

onde μ é a massa do campo escalar e ξ é o acoplamento entre o campo e o escalar de Ricci. Apesar de estarmos interessados no espaço físico, onde $n=3+1$, consideraremos $n=d+1$ como a dimensão do espaço-tempo. Esta continuação analítica na dimensão espacial será usada mais tarde para regularizar a teoria.

O momento canonicamente conjugado ao campo é dado por

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = a^d \dot{\Phi}, \quad (2.19)$$

e a Hamiltoniana do sistema é

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int_{\mathbf{x}} (\Pi \dot{\Phi} - \mathcal{L}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} a^d [a^{-2d} \Pi^2 + a^{-2} (\nabla \Phi)^2 + (\mu^2 + \xi R) \Phi^2]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Utilizando-se a Hamiltoniana acima, obtemos a equação de Schrödinger dependente do tempo, que rege a dinâmica deste modelo:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{x}} a^d \left\{ -a^{-2d} \frac{\delta^2}{\delta\varphi^2(\mathbf{x})} + a^{-2} [\nabla\varphi(\mathbf{x})]^2 + (\mu^2 + \xi R)\varphi^2(\mathbf{x}) \right\} \Psi . \quad (2.21)$$

Como mostraremos, o funcional de onda do vácuo (Ψ_0) é uma solução de (2.21), a qual é Gaussiana, e é aniquilado por uma combinação linear de Φ e Π , que é o operador de aniquilação:

$$\Psi_0 = N(t) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \varphi(\mathbf{x}) \Xi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \right] , \quad (2.22)$$

onde $N(t)$ é um fator de normalização dependente do tempo e Ξ é a covariância da Gaussiana, a qual pode ser separada em suas partes real e imaginária

$$\Xi \equiv \frac{1}{2} \Omega^{-1} - 2i\Sigma . \quad (2.23)$$

Para entendermos melhor o significado dos parâmetros deste funcional Gaussiano é conveniente considerarmos alguns valores esperados neste estado. Médias lineares anulam-se, ou seja, $\langle\Phi\rangle = \langle\Pi\rangle = 0$, enquanto médias de bilineares dos operadores Π e Φ produzem

$$\langle\Phi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y})\rangle = \Omega(\mathbf{x},\mathbf{y}) ,$$

$$\langle\Pi(\mathbf{x})\Pi(\mathbf{y})\rangle = \frac{1}{4} \Omega^{-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + 4(\Sigma\Omega\Sigma)(\mathbf{x},\mathbf{y}) , \quad (2.24)$$

$$\langle\Phi(\mathbf{x})\Pi(\mathbf{y})\rangle = \frac{i}{2} + 2(\Omega\Sigma)(\mathbf{x},\mathbf{y}) .$$

Uma vez que a dinâmica é invariante por translação e o vácuo tem esta propriedade, é conveniente usar a transformada de Fourier (TF), já que os kernels Ξ , Ω e Σ devem ser diagonais no espaço dos momentos. Definimos a TF de $\varphi(\mathbf{x})$ através de

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \varphi(\mathbf{k}) , \quad (2.25)$$

onde $\varphi(-\mathbf{k}) = \varphi^*(\mathbf{k})$. Desta definição obtemos

$$-i \frac{\delta}{\delta\varphi(\mathbf{x})} = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left[-i(2\pi)^d \frac{\delta}{\delta\varphi(-\mathbf{k})} \right] , \quad (2.26)$$

e para os operadores temos a seguinte realização

$$\Phi(\mathbf{k}) \iff \varphi(\mathbf{k})\delta(\varphi - \tilde{\varphi}) , \quad (2.27)$$

$$\Pi(\mathbf{k}) \iff -i(2\pi)^d \frac{\delta}{\delta\varphi(-\mathbf{k})} \delta(\varphi - \tilde{\varphi}) .$$

As relações de comutação para as TF de $\Phi(\mathbf{x})$ e $\Pi(\mathbf{x})$ são:

$$[\Phi(\mathbf{k}, t), \Phi(\mathbf{k}', t)] = [\Pi(\mathbf{k}, t), \Pi(\mathbf{k}', t)] = 0 , \quad (2.28)$$

$$[\Phi(\mathbf{k}, t), \Pi(\mathbf{k}', t)] = i(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} + \mathbf{k}') .$$

As TF de Ξ , Ω e Σ são

$$\begin{aligned} \Xi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \Xi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Xi(\mathbf{k}, t) , \\ \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \Omega(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Omega(\mathbf{k}, t) , \\ \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) &= \Sigma(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) = \int_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \Sigma(\mathbf{k}, t) . \end{aligned} \quad (2.29)$$

Utilizando-se as TF, a equação de Schrödinger funcional (2.21) transforma-se em

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} a^d \left[-a^{-2d} (2\pi)^{2d} \frac{\delta^2}{\delta\varphi(\mathbf{k})\delta\varphi(-\mathbf{k})} \right. \\ &\quad \left. + (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R) \varphi(\mathbf{k})\varphi(-\mathbf{k}) \right] \Psi . \end{aligned} \quad (2.30)$$

O funcional de onda Ψ_0 , o qual pode ser escrito como

$$\Psi_0 = N(t) \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{k}) \Xi(\mathbf{k}, t) \varphi(-\mathbf{k}) \right] , \quad (2.31)$$

é a solução da equação de Schrödinger, caso a covariância satisfaça a equação

$$\frac{\partial \Xi}{\partial t} = a^{-d} \Xi^2 - a^d (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R) , \quad (2.32)$$

ou seja, caso as partes real e imaginária satisfaçam

$$\dot{\Omega} = 4a^d \Omega \Sigma , \quad (2.33)$$

$$\dot{\Sigma} = \frac{1}{8} a^{-d} \Omega^{-2} - 2a^{-d} \Sigma^2 - \frac{1}{2} a^d (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R) . \quad (2.34)$$

A partir destas últimas equações, podemos obter uma equação de segunda ordem para Ω quando eliminamos Σ de (2.34) usando (2.33),

$$\ddot{\Omega} = \frac{1}{2} a^{-2d} \Omega^{-1} + \frac{1}{2} \Omega^{-1} \dot{\Omega}^2 - dH\dot{\Omega} - 2(k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R)\Omega . \quad (2.35)$$

As equações (2.32) e (2.35) são difíceis de serem resolvidas diretamente. Todavia, a equação de Ricatti (2.32) pode ser linearizada pela seguinte transformação:

$$\Xi = -ia^d \frac{\partial}{\partial t} \ln F^* , \quad (2.36)$$

o que implica que F satisfaz a equação de movimento do campo,

$$\ddot{F} + dH\dot{F} + (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R)F = 0 . \quad (2.37)$$

As soluções complexas desta equação podem ser normalizadas utilizando-se

$$F\dot{F}^* - \dot{F}F^* = ia^d . \quad (2.38)$$

Esta relação nada mais é do que o Wronskiano associado à equação (2.37). Dada uma solução normalizada F de (2.37), podemos obter Ξ :

$$\Xi = \frac{1}{2} |F|^2 \left[1 - ia^d \frac{\partial}{\partial t} |F|^2 \right] , \quad (2.39)$$

e, conseqüentemente, a solução de (2.35) é dada por

$$\Omega = |F|^2 . \quad (2.40)$$

Uma solução particular χ de (2.37) define um funcional de onda do vácuo através de (2.31) e (2.39). Esta solução pode ser obtida a partir de soluções particulares de (2.37) $\chi_{1(2)}(\mathbf{k}, t)$ e duas funções $d_{1(2)}(\mathbf{k})$, as quais são independentes do tempo,

$$\chi(\mathbf{k}, t) = d_1(\mathbf{k})\chi_1(\mathbf{k}, t) + d_2(\mathbf{k})\chi_2(\mathbf{k}, t) . \quad (2.41)$$

Esta arbitrariedade na escolha da solução χ é inerente à quantização em espaços curvos. Quando quantizamos um sistema no espaço de Minkowski, existe uma escolha natural para χ , já que este espaço possui um vetor de Killing $\partial/\partial t$, ortogonal às hipersuperfícies de t constante. Logo, é natural escolhermos as autofunções de $\partial/\partial t$ com autovalores $-i\omega$ com $\omega > 0$. Porém, espaços curvos, em geral, podem não exibir nenhum vetor de Killing com respeito ao qual podemos definir os modos de frequência positiva. Este fato está intimamente relacionado com o espírito da relatividade geral, o qual afirma que sistemas de coordenadas são fisicamente irrelevantes. Além disso, os espaços de Fock gerados por diferentes escolhas para χ não são equivalentes e com isso é difícil considerar-se o vácuo como o estado sem quantas ou mesmo definir o conceito de partícula^[26].

Podemos expressar os operadores de campo em termos de operadores de criação e aniquilação, onde estes são definidos através de

$$\begin{aligned} b(\mathbf{k}) &= -ia^d \dot{\chi}^* \Phi(\mathbf{k}) + i\chi^* \Pi(\mathbf{k}) \\ \Leftrightarrow & -ia^d \dot{\chi}^* \phi(\mathbf{k}) \delta(\varphi - \tilde{\varphi}) + (2\pi)^d \chi^* \frac{\delta}{\delta\varphi(-\mathbf{k})} \delta(\varphi - \tilde{\varphi}) , \end{aligned} \quad (2.42)$$

os quais satisfazem as seguintes relações de comutação:

$$[b(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] = [b^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = 0 \ , \quad (2.43)$$

$$[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \ .$$

Apesar destas relações de comutação serem verdadeiras para qualquer instante de tempo, $b(\mathbf{k})$ e $b^\dagger(\mathbf{k})$ não podem ser interpretados como operadores de criação e destruição de um estado de uma partícula, por causa de sua complicada dependência temporal. Para mostrarmos isto, vamos escrever os operadores $\Phi(\mathbf{k}, t)$ e $\Pi(\mathbf{k}, t)$ em termos de $b(\mathbf{k})$ e $b^\dagger(\mathbf{k})$ através da eq.(2.42) e seu complexo conjugado, o que nos leva a

$$\Phi(\mathbf{k}, t) = b(\mathbf{k})\chi + b^\dagger(-\mathbf{k})\chi^* \ , \quad (2.44)$$

$$\Pi(\mathbf{k}, t) = a^d [b(\mathbf{k})\dot{\chi} + b^\dagger(-\mathbf{k})\dot{\chi}^*] \ .$$

O próximo passo é escrever a Hamiltoniana (2.20) na representação dos momentos, através da TF dos operadores Φ e Π :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} a^d [a^{-2d} \Pi(\mathbf{k})\Pi(-\mathbf{k}) + (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R) \Phi(\mathbf{k})\Phi(-\mathbf{k})] \ . \quad (2.45)$$

Substituindo (2.44) em (2.45), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} a^d \{ b(-\mathbf{k})b(\mathbf{k})[\dot{\chi}^2 + (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R)\chi^2] \\ & + b(-\mathbf{k})b^\dagger(-\mathbf{k})[|\dot{\chi}|^2 + (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R)|\chi|^2] \\ & + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})[|\dot{\chi}|^2 + (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R)|\chi|^2] \\ & + b^\dagger(\mathbf{k})b^\dagger(-\mathbf{k})[\dot{\chi}^{*2} + (k^2 a^{-2} + \mu^2 + \xi R)\chi^{*2}] \} \ . \quad (2.46) \end{aligned}$$

Pela equação acima, vemos que não é possível expressar a Hamiltoniana do sistema como uma soma em \mathbf{k} de $b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})$.

Podemos facilmente verificar que estes operadores $b(\mathbf{k})$ anulam-se quando aplicados ao funcional de onda Ψ_0 , dado por (2.31). Portanto, o estado Ψ_0 pode ser interpretado como o vácuo de Fock do espaço gerado por $b(\mathbf{k})$ e $b^\dagger(\mathbf{k})$.

A escolha de uma solução particular χ pode ser feita através de imposição de uma condição inicial (ou final) a ser satisfeita pela equação de Schrödinger dependente do tempo. Em um espaço de Robertson-Walker é natural requerer que a solução χ comporte-se como um modo de frequência positiva, onde a taxa de expansão é muito menor que a frequência efetiva da teoria, o que geralmente ocorre em um dos limites $t \rightarrow -\infty$ ou $t \rightarrow +\infty$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \ll \omega_k^0 = \sqrt{k^2 a^{-2} + \mu^2} . \quad (2.47)$$

Neste limite, a variação da frequência é muito lenta (adiabática)

$$\frac{\dot{\omega}_k^0}{\omega_k^0} \simeq O(H) \ll \omega_k^0 , \quad (2.48)$$

e para um k fixo, o espaço-tempo pode ser considerado quase Minkowskiano. A maioria dos modelos cosmológicos enquadram-se nesta classe de espaços. Para discutir a forma assintótica da solução no limite $H \ll \omega_k^0$ é conveniente utilizar o tempo conforme η :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 = c(\eta)(d\eta^2 - dx^2) , \quad (2.49)$$

onde η é definido pela relação $d\eta/dt = 1/a(t)$ e $c(\eta) \equiv a^2(t)$. Utilizando-se as variáveis conformes

$$F(k, t) = c^{(1-d)/4} F_c(k, \eta) , \quad (2.50)$$

$$\Omega(k, t) = c^{(1-d)/2} \Omega_c(k, \eta) ,$$

as equações de movimento (2.35) e (2.37) tornam-se

$$F_c'' + (k^2 + c[\mu^2 + (\xi - \alpha_d)R])F_c = 0 , \quad (2.51)$$

$$\Omega_c'' = \frac{1}{2}\Omega_c^{-1} + \frac{1}{2}\Omega_c^{-1}\Omega_c'^2 - 2(k^2 + c[\mu^2 + (\xi - \alpha_d)R])\Omega_c = 0 \quad , \quad (2.52)$$

onde $\alpha_d \equiv (d-1)/4d$ e a linha significa diferenciação com respeito ao tempo conforme η . A condição de normalização (2.38) implica que F_c deve ser normalizado segundo

$$F_c F_c'^* - F_c' F_c^* = i \quad , \quad (2.53)$$

e para uma solução propriamente normalizada F_c de (2.51), temos que $\Omega_c = |F_c|^2$ é uma solução de (2.52). A solução de (2.51), que desempenha o papel de modo de frequência positiva no limite $k \rightarrow +\infty$, é

$$\chi_c \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta} \quad . \quad (2.54)$$

Para um k fixo, podemos obter uma expansão assintótica de χ_c utilizando uma solução formal do tipo WKB

$$\chi_c = \frac{1}{\sqrt{2W}} \exp \left[-i \int^\eta W(\eta') d\eta' \right] \quad , \quad (2.55)$$

onde a função $W(\eta)$ satisfaz

$$W^2 = k^2 + c[\mu^2 + (\xi - \alpha_d)R] - \frac{1}{2} \left(\frac{W''}{W} - \frac{3W'^2}{2W^2} \right) \quad . \quad (2.56)$$

Com o *Ansatz* (2.55) temos que $\Omega_c = (2W)^{-1}$. No limite das variações adiabáticas do fator de escala ($H \ll \omega_k^0$), W pode ser determinado iterativamente partindo-se da seguinte solução de ordem zero para (2.56):

$$W^{(0)} = (k^2 + c[\mu^2 + (\xi - \alpha_d)R])^{1/2} \quad . \quad (2.57)$$

Utilizando-se (2.56) podemos obter a solução de i -ésima ordem

$$[W^{(i)}]^2 = [W^{(i-1)}]^2 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{W''^{(i-1)}}{W^{(i-1)}} - \frac{3[W'^{(i-1)}]^2}{2[W^{(i-1)}]^2} \right\} \quad . \quad (2.58)$$

As correções para a solução de ordem zero podem ser expressas em termos de parâmetros pequenos, tais como H/ω_k^0 e suas derivadas temporais. Iterações de ordem mais alta contêm derivadas de ordem mais elevada do fator de escala. Termos que exibem até a n -ésima derivada temporal do fator de escala são chamados termos adiabáticos de ordem n .

A condição de contorno para Ω_c é dada para algum valor assintótico de η , onde $H \ll \omega_k^0$. Neste limite a solução possui um comportamento semelhante à solução para um espaço de Minkowski. A condição de contorno a ser adotada é que o comportamento assintótico de χ_c deve ser

$$\chi_c \sim \frac{1}{\sqrt{2(k^2 + c\mu^2)^{1/2}}} e^{-i \int^\eta (k^2 + c\mu^2)^{1/2} d\eta'} , \quad (2.59)$$

$$\Omega_c \sim \frac{1}{2\sqrt{k^2 + c\mu^2}} . \quad (2.60)$$

Neste limite, a covariância Ξ é bem aproximada por sua parte real,

$$\Xi = \frac{1}{2}\Omega^{-1} - 2i\Sigma \sim a^d \sqrt{k^2 a^{-2} + \mu^2} . \quad (2.61)$$

A solução de (2.51) que satisfaz (2.59) e (2.60) define o vácuo adiabático. Vamos, agora, mostrar que a Hamiltoniana dada por (2.46), pode ser escrita da mesma forma que a Hamiltoniana no espaço plano, ou seja, interpretando b e b^\dagger como operadores de criação e destruição respectivamente neste limite. No limite assintótico ($H \ll \omega_k^0$), termos que contém R podem ser desprezados

$$R = d[2\dot{H} + (d+1)H^2] \Rightarrow R \ll \omega_k^0 , \quad (2.62)$$

Com isso, podemos eliminar os termos com o escalar de Ricci em (2.46) e escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} a^d \{ b(-\mathbf{k})b(\mathbf{k})[\dot{\chi}^2 + (\omega_k^0)^2 \chi^2] \\ & + b(-\mathbf{k})b^\dagger(-\mathbf{k})[|\dot{\chi}|^2 + (\omega_k^0)^2 |\chi|^2] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})[|\dot{\chi}|^2 + (\omega_k^0)^2 |\chi|^2] \\
& + b^\dagger(\mathbf{k})b^\dagger(-\mathbf{k})[\dot{\chi}^{*2} + (\omega_k^0)^2 \chi^{*2}] \} . \quad (2.63)
\end{aligned}$$

Assumindo o comportamento assintótico de χ_c e escrevendo esta solução não mais em função das variáveis conformes, pode-se mostrar que a Hamiltoniana do sistema, neste limite, tem a forma^[6]

$$\mathcal{H} \sim \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \omega_k^0 [b(-\mathbf{k})b^\dagger(-\mathbf{k}) + b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})] , \quad (2.64)$$

e conseqüentemente, podemos interpretar b e b^\dagger como sendo operadores de destruição e criação de estados de uma partícula na região onde a aproximação adiabática é válida.

2.3 Outras Aplicações da Representação Funcional de Schrödinger

Como uma aplicação da representação funcional de Schrödinger, estudaremos a evolução temporal de um sistema em um potencial instável.

A característica do novo cenário inflacionário, como já dissemos, é uma transição de fase chamada slow rollover, na qual um campo escalar, que tem o papel de parâmetro de ordem, evolui suavemente pelo declive no seu diagrama de energia potencial (fig.3).

Usando a representação funcional de Schrödinger, estudaremos dois sistemas simples idealizados^[5] e mostraremos que na implementação do novo cenário inflacionário, o comportamento do campo escalar durante a fase slow rollover é clássico. Este fato é importante pois permite-nos calcular densidades de flutuações, as quais são necessárias para a formação de galáxias.

2.3.1 Mecânica Quântica de um Oscilador Upside-Down

Como um exemplo da aplicação da representação de Schrödinger, vamos analisar um problema de mecânica quântica unidimensional, o qual pos-

sui muitas características similares com o sistema em teoria quântica de campos que iremos estudar posteriormente. Consideremos uma partícula, sob a ação do potencial

$$V(x) = -\frac{1}{2}kx^2, \quad k > 0. \quad (2.65)$$

Em $t = 0$, a partícula é descrita por uma função de onda centrada em $x = 0$. Para simplificar o problema, trabalharemos com a função de onda sendo uma Gaussiana.

A evolução temporal da partícula é governada pela equação de Schrödinger,

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2}kx^2\psi. \quad (2.66)$$

A equação acima é satisfeita pela Gaussiana,

$$\psi(x, t) = A(t)e^{-B(t)x^2}, \quad (2.67)$$

o que nos dá as seguintes equações diferenciais para os parâmetros $A(t)$ e $B(t)$,

$$i\dot{A} = \frac{AB}{m}, \quad (2.68)$$

$$i\dot{B} = \frac{1}{2}k + \frac{2B^2}{m}. \quad (2.69)$$

Na solução de (2.68) e (2.69) é útil definir alguns parâmetros:

$$l_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{mk}}, \quad (2.70)$$

$$\omega^2 \equiv \frac{k}{m}.$$

O parâmetro l_0 descreve uma escala natural na mecânica quântica como o raio de Bohr do átomo de hidrogênio. O sistema comporta-se classicamente para grandes escalas, quando comparadas com l_0 . A solução para a equação em B , em termos destes parâmetros, é dada por

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2l_0^2} \tan(\phi - i\omega t) \\ &= \left[\frac{1}{2l_0^2} \frac{\sin(2\phi) - i \sinh(2\omega t)}{\cos(2\phi) + \cosh(2\omega t)} \right], \end{aligned} \quad (2.71)$$

onde ϕ é uma constante de integração real que está relacionada com o comprimento do pacote de onda em $t = 0$. A equação diferencial para o parâmetro B é satisfeita para valores complexos de ϕ . Porém, absorvemos a parte imaginária de ϕ na redefinição da origem de t . Dessa forma o pacote tem um comprimento mínimo em $t = 0$. Para uma função de onda apropriadamente normalizada, a solução da equação diferencial para o parâmetro A é

$$A = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} \sqrt{b \cos(\phi - i\omega t)}}, \quad (2.72)$$

onde

$$b = \frac{l_0}{\sqrt{\sin(2\phi)}}. \quad (2.73)$$

Estamos interessados no comportamento de $\psi(x, t)$ para grandes intervalos de tempo, o qual é dado por

$$\psi(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi b^2} \right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}(\omega t + i\phi)} \exp \left(-e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} + \frac{ix^2}{2l_0^2} \right). \quad (2.74)$$

A distribuição de probabilidades para x é gaussiana, com

$$\langle x^2 \rangle \rightarrow \frac{1}{4} b^2 e^{2\omega t}. \quad (2.75)$$

O objetivo deste exemplo é mostrar que as funções de onda da mecânica quântica para grandes intervalos de tempo são descritas pela física clássica. Para tanto, vamos calcular o comutador de x e p , onde $p = i\partial/\partial x$:

$$\begin{aligned} p\psi &= \frac{x}{l_0^2}\psi + O(e^{-2\omega t}) \\ &= \sqrt{mk}x\psi + O(e^{-2\omega t}) \quad , \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$xp\psi = \sqrt{mk}x^2\psi + O(e^{-2\omega t}) \quad , \quad (2.77)$$

$$px\psi = \sqrt{mk}x^2\psi - i\psi + O(e^{-2\omega t}) \quad . \quad (2.78)$$

O termo $-i\psi$ será desprezível quando comparado ao outro termo se $1 \ll \sqrt{mk}x^2$ ou, de forma equivalente, se $l_0^2 \ll x^2$. Para grandes intervalos de tempo, na região $l_0^2 \ll x^2$, o comutador $[x, p]$ torna-se desprezível, possibilitando a descrição clássica do sistema. A regra é que se a distância sobre a qual a fase da função de onda muda por 2π (ou seja, o comprimento de onda de de Broglie) é muito menor que qualquer outro comprimento relevante, então a física clássica é aplicável.

Podemos observar que a função de onda não possui um pico em torno de uma trajetória clássica particular. Portanto, o comportamento do sistema deve ser descrito não por uma trajetória clássica, mas por distribuição clássica de probabilidade:

$$\begin{aligned} f(x, p, t) &= |\psi(x, t)|^2 \delta(p - \sqrt{mk}x) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi b^2}} e^{-\omega t} \exp\left(-2e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2}\right) \delta(p - \sqrt{mk}x) \quad . \end{aligned} \quad (2.79)$$

Para mostrar que (2.79) descreve classicamente o sistema para grandes intervalos de tempo, pode-se verificar o seguinte:

- $f(x, p, t)$ descreve a física clássica, ou seja, ela obedece as equações clássicas de movimento:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{p} \frac{\partial f}{\partial p} = 0 ; \quad (2.80)$$

- Para qualquer variável dinâmica (por exemplo, $Q(x, p, t)$), o valor esperado pode ser calculado através da função de onda ψ da Mecânica Quântica ou usando a distribuição clássica de probabilidades f . Pode-se mostrar que

$$\langle Q \rangle_f = \langle Q \rangle_\psi [1 + O(e^{-2\omega t})] . \quad (2.81)$$

A distribuição de probabilidades descreve trajetórias clássicas as quais evoluem através do potencial, partindo do seu pico e do repouso. Estas trajetórias clássicas podem ser representadas pela parametrização

$$x(t) = Ce^{\omega t} , \quad (2.82)$$

onde a parametrização mantém o vínculo entre p e x através da função delta em (2.79). A distribuição da probabilidades para a constante C é dada por

$$P(C) = P(x) \frac{dx}{dC} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{b} e^{-2C^2/b^2} , \quad (2.83)$$

Dessa forma, para grandes intervalos de tempo, $x(t)$ é determinado por uma constante multiplicativa randômica, a qual obedece uma distribuição de probabilidades Gaussiana.

A interpretação física de C pode ser obtida definindo

$$C \equiv \pm e^{-\omega\tau} , \quad (2.84)$$

de modo que

$$x(t) = \pm be^{\omega(t-\tau)} . \quad (2.85)$$

O parâmetro τ representa o tempo de decaimento da solução clássica. A distribuição de probabilidades para τ é dada por

$$P(\tau) = 2P(C)\frac{dC}{d\tau} = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega e^{-\omega\tau} \exp(-2e^{-2\omega\tau}) , \quad (2.86)$$

onde o fator dois representa os dois valores de C (C e $-C$), correspondendo a cada valor de τ . Portanto, a partícula obedece uma trajetória clássica para intervalos de tempo grandes, descrita por uma distribuição clássica de probabilidades. Porém, o tempo em que a partícula começa a evoluir pelo declive do diagrama da energia potencial é determinado por processos quânticos.

2.3.2 Dinâmica Escalar no Novo Universo Inflacionário

Até este ponto analisamos o comportamento de um oscilador harmônico upside-down. Este sistema possui muitas semelhanças com o problema da inflação. O resultado obtido com este estudo nos mostra que a representação de Schrödinger nos proporciona uma descrição clara da evolução temporal do sistema.

Nosso objetivo agora é estudar um sistema idealizado em teoria quântica de campos no novo universo inflacionário. O modelo é livre e, portanto, exatamente solúvel. Embora não seja realístico, qualitativamente o sistema pode descrever a física correta.

Consideremos um único campo escalar minimamente acoplado ($\xi = 0$ em (2.18)) com uma massa dependente do tempo, em um espaço de de Sitter com a métrica

$$ds^2 = dt^2 - e^{2\chi t} d\mathbf{x}^2 . \quad (2.87)$$

A ação que descreve o sistema é

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \Phi \partial^\nu \Phi - V(\Phi) \right] , \quad (2.88)$$

onde o potencial $V(\Phi)$ é dado por

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2}\mu^2 (1 - c^2 e^{-2\chi t}) \phi^2 ; \mu^2, c^2 > 0 . \quad (2.89)$$

Este potencial tem um mínimo em $\Phi = 0$ e é estável para os instantes iniciais ($t < t_0$ onde $c^2 e^{-2\chi t_0} = 1$), mas torna-se instável para grandes intervalos de tempo.

A equação funcional de Schrödinger para o sistema é, de (2.30),

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}} \left[-e^{-6\chi t} (2\pi)^6 \frac{\delta^2}{\delta\varphi(\mathbf{k})\delta\varphi(-\mathbf{k})} + \left[(k^2 + \gamma^2)^{-2\chi t} - \mu^2 \right] \varphi(\mathbf{k})\varphi(-\mathbf{k}) \right] \Psi , \quad (2.90)$$

onde $\gamma^2 \equiv \mu^2 c^2 > 0$. Para instantes assintoticamente iniciais, (2.48) é satisfeita e os modos comportam-se como no espaço de Minkowski:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} H = \chi \ll \sqrt{k^2 + \gamma^2} e^{-\chi t} = \omega_{\mathbf{k}}^0(t) . \quad (2.91)$$

Neste limite, o potencial dado por (2.89) é estável. Isto nos permite definir um vácuo adiabático que satisfaz as condições de contorno (2.61). Podemos encontrar o funcional de onda gaussiano da forma dada por (2.42), resolvendo a equação clássica de movimento (2.37):

$$\ddot{F} + 3\chi\dot{F} + [(k^2 + \gamma^2) + \mu^2] F = 0 . \quad (2.92)$$

As soluções de (2.92) são dadas por

$$F(\mathbf{k}, t) \propto e^{-3\chi t/2} [J_p(z) + N_p(z)] , \quad (2.93)$$

onde

$$p = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{\mu^2}{\chi^2}} , \quad (2.94)$$

$$z = \frac{\sqrt{k^2 + \gamma^2}}{\chi} e^{-\chi t} \simeq \frac{H^{-1}}{\lambda} ,$$

e $J_p(z)$ e $N_p(z)$ são funções de Bessel de primeira e segunda espécie respectivamente. Aqui λ é o comprimento de onda efetivo. Quando $t \rightarrow -\infty$, onde (2.91) é satisfeita, esperamos que as soluções para a equação diferencial (2.92) comportem-se sinusoidalmente, exceto para as frequências que mudam suavemente. As funções de Hankel,

$$H_p^{(1)}(z) = J_p(z) + iN_p(z) , \quad (2.95)$$

$$H_p^{(2)}(z) = J_p(z) - iN_p(z) ,$$

tornam-se exponenciais complexas. Do comportamento das funções de Hankel para z assintoticamente grande obtem-se^[27]:

$$H_p^{(1)} \propto e^{-i\omega_{\mathbf{k}}^0(t_0)(t-t_0)} , \quad (2.96)$$

expandindo $z(t)$ em torno de $t \approx t_0$ para algum valor primordial de t_0 ($z(t_0) \ll 1$). Esta expansão é válida desde que $|\chi(t-t_0)| \gg 1$.

Usando a seguinte propriedade das funções de Hankel,

$$H_p^{(1)}(z) \frac{dH_p^{(2)}}{dz}(z) - \frac{dH_p^{(1)}}{dz}(z) H_p^{(2)}(z) = -\frac{4i}{\pi z} ,$$

nós obtemos as funções normalizadas $F(\mathbf{k}, t)$ de modo de frequência positiva, as quais, através de (2.36) ou (2.38), definem o vácuo funcional adiabático para o campo escalar no espaço de de Sitter, conhecido como vácuo de Bunch-Davies^[28],

$$\Psi_0 \propto \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{k}) \Xi(\mathbf{k}, t) \varphi(-\mathbf{k}) \right] , \quad (2.97)$$

$$\begin{aligned} \Xi(\mathbf{k}, t) &= -ie^{3\chi t} \frac{\partial}{\partial t} \ln F^*(\mathbf{k}, t) \\ &= \frac{1}{2 |F|^2} \left[1 - ie^{3\chi t} \frac{\partial}{\partial t} |F|^2 \right] , \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$F(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\chi}} e^{-3\chi t/2} H_p^{(1)}(z) . \quad (2.99)$$

O comportamento de Ψ_0 para $t \rightarrow -\infty$ é, de (2.96),

$$\Psi_0 \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{k}) [e^{3\chi t} \omega_{\mathbf{k}}^0(t)] \varphi(-\mathbf{k}) \right\} . \quad (2.100)$$

A função covariância da Gaussiana é dominada pela frequência efetiva real para cada modo.

Na descrição da representação de Schrödinger podemos mostrar explicitamente que o comportamento do sistema é clássico para grandes intervalos do tempo quando o potencial (2.89) é instável, como no exemplo de mecânica quântica unidimensional. Da propriedade das funções de Hankel^[29] para $z \ll 1$, obtém-se o comportamento da função covariância da Gaussiana para grandes intervalos de tempo,

$$-ie^{3\chi t} \frac{\partial}{\partial t} \ln F^* \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} e^{3\chi t} \left\{ \frac{2\pi\chi}{\Gamma^2(p)} \left[\frac{(k^2 + \gamma^2)}{4\chi^2} e^{-2\chi t} \right]^p - \frac{i}{2}(2p-3)\chi + O(z^2) \right\} . \quad (2.101)$$

O termo dominante é puramente imaginário, o que nos leva a

$$\Psi_0 \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \varphi(\mathbf{k}) \left[-\frac{1}{2} i e^{3\chi t} (2p-3)\chi + O(z^2) \right] \varphi(-\mathbf{k}) \right\} . \quad (2.102)$$

Atuando o operador do momento canônico sobre Ψ_0 para grandes intervalos de tempo tem-se

$$-i \frac{\delta \Psi_0}{\delta \varphi(-\mathbf{k})} = \frac{1}{2} (2p-3)\chi e^{3\chi t} \varphi(\mathbf{k}) \Psi_0 [1 + O(z^2)] . \quad (2.103)$$

O primeiro fator é o momento clássico

$$\Pi(\mathbf{k}, t) = e^{3\chi t} \dot{\varphi}(\mathbf{k}, t) , \quad (2.104)$$

$$\dot{\varphi}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2}(2p - 3)\chi\varphi(\mathbf{k}, t) ,$$

o qual é a solução clássica da equação de movimento para grandes intervalos de tempo. De (2.93), grandes intervalos de tempo são definidos por $z \ll 1$, que é o tempo para o qual o comprimento de onda efetivo torna-se maior que o horizonte $\chi^{-1} = H^{-1}$.

Portanto, este modelo de teoria de campos comporta-se classicamente para grandes intervalos de tempo. Aqui, como no exemplo anterior, o sistema é descrito não por uma trajetória, mas por uma distribuição clássica de probabilidades^[30].

Até agora trabalhamos com campos bosônicos livres. Ao introduzirmos interações para estes campos, introduziremos, também, não-linearidades em nossas equações o que nos impede de obter soluções exatas. Para contornar esta dificuldade, implementaremos princípios variacionais para podermos obter informações não perturbativas do sistema, como faremos no capítulo que se segue.

Capítulo 3

Princípio Variacional Dependente do Tempo e a Ação Efetiva

A equação de Schrödinger dependente do tempo não pode ser resolvida exatamente, exceto para problemas descritos por uma Hamiltoniana quadrática. Para obter informações sobre a dinâmica de um sistema não-linear (interagente), usamos uma aproximação variacional na qual o princípio variacional de Dirac é implementado.

3.1 Princípios Variacionais

Princípios variacionais são uma ferramenta muito útil em quase todas as áreas da Física. Na Mecânica Clássica, os métodos variacionais fornecem as equações de movimento de um sistema quer em situações estáticas, quer em processos dependentes do tempo. Soluções estáticas são aquelas que deixam a Hamiltoniana do sistema estacionária. Isto pode ser observado analisando-se as equações de Hamilton:

$$\dot{q} = 0 = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} , \quad (3.1)$$

$$-\dot{p} = 0 = \frac{\partial H(p, q)}{\partial q} . \quad (3.2)$$

As equações dinâmicas do sistema podem ser obtidas considerando-se o princípio variacional de Hamilton, o qual requer que a ação clássica I_{cl}

seja estacionária com respeito a variações da variável dinâmica $q(t)$

$$I_{cl} = \int dt L , \tag{3.3}$$

$$\frac{\delta I_{cl}(q)}{\delta q(t)} = 0 .$$

É sempre bom ressaltar que o princípio variacional estático não requer condições de contorno. No caso dinâmico, todavia, este deve ser complementado com a condição de que as variações devem anular-se nos extremos da integração sobre o tempo que define a ação.

Da mesma forma, encontramos dois princípios variacionais na Mecânica Quântica: um estático e outro dependente do tempo. O primeiro princípio diz-nos que o valor esperado da Hamiltoniana é estacionário, conduzindo à equação de Schrödinger independente do tempo

$$\begin{aligned} \delta \langle \Psi | H | \Psi \rangle &= 0 \text{ com } \langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \\ \Rightarrow H\Psi &= E\Psi . \end{aligned} \tag{3.4}$$

O segundo, embora pouco conhecido, é devido a Dirac e resulta na equação de Schrödinger dependente do tempo. Esta pode ser obtida considerando estados dependentes do tempo $|\Psi; t\rangle$ e requerendo que o elemento de matriz,

$$\int dt \langle \Psi; t | i\partial_t - H | \Psi; t \rangle \tag{3.5}$$

seja estacionário sob variações independentes de $|\Psi; t\rangle$ e $\langle \Psi; t |$. Este procedimento variacional representa o análogo quântico ao princípio de Hamilton da mínima ação.

Estes princípios variacionais, aplicados à TQC, além de produzirem as equações de Schrödinger funcionais, também fornecem valiosas informações sobre os funcionais geradores da teoria, desde que a implementação das variações seja feita em duas etapas. Na primeira, consideramos variações sujeitas a um vínculo, o qual é removido posteriormente para obter-se a teoria física.

Para o caso estático, definimos a *energia efetiva* $E(\phi)$ como sendo o valor esperado estacionário da Hamiltoniana do sistema, em um estado normalizado $|\Psi\rangle$, sujeito ao vínculo de que o valor esperado do operador de campo $\Phi(\mathbf{r})$ é dado pela função $\phi(\mathbf{r})$

$$E(\phi) = \langle \Psi | H | \Psi \rangle \Big|_{\text{estacionário}} , \quad (3.6)$$

onde

$$\langle \Psi | \Phi(\mathbf{r}) | \Psi \rangle = \phi(\mathbf{r}) , \quad (3.7)$$

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 . \quad (3.8)$$

O vínculo (3.7) é removido impondo-se que

$$\frac{\delta E(\phi)}{\delta \phi(\mathbf{r})} = 0 \quad (3.9)$$

e a solução desta equação fornece a teoria física do sistema em estudo. Impondo que o campo ϕ seja independente de \mathbf{r} , obtemos o *potencial efetivo* multiplicado pelo volume do espaço,

$$E(\phi) = V_{\text{eff}}(\phi) \int d^3x . \quad (3.10)$$

Mais ainda, pode-se mostrar que a energia efetiva é o funcional gerador das funções de Green 1PI a energia zero, enquanto que o potencial efetivo é o funcional gerador das funções de Green 1PI a momento e energia nulos.

Para estudarmos processos dinâmicos, é necessário introduzir o princípio variacional de Dirac sujeito a vínculos que definiremos a seguir. Definimos a *ação efetiva* Γ como sendo o valor estacionário da ação do princípio variacional de Dirac,

$$\Gamma(\phi) = \int dt \langle \Psi_-; t | i\partial_t - H | \Psi_+; t \rangle \Big|_{\text{estacionário}} , \quad (3.11)$$

onde impomos os seguintes vínculos:

$$\langle \Psi_-; t | \Phi(\mathbf{r}) | \Psi_+; t \rangle = \phi(\mathbf{r}, t) ,$$

(3.12)

$$\langle \Psi_-; t | \Psi_+; t \rangle = 1 .$$

Para que o princípio variacional dependente do tempo seja introduzido, necessitamos impor condições de contorno. Neste caso, impomos que os estados $|\Psi_{\pm}; t\rangle$ tendam ao estado fundamental $|0\rangle$ da Hamiltoniana H :

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} |\Psi_{\pm}; t\rangle = |0\rangle . \quad (3.13)$$

Podemos recuperar toda a teoria física removendo os vínculos no final do problema:

$$\frac{\delta\Gamma(\phi)}{\delta\phi(\mathbf{r}, \mathbf{t})} = 0 . \quad (3.14)$$

A partir das definições acima é possível mostrar^[31], como faremos a seguir, que Γ é o funcional gerador das funções de Green 1PI com momento e energia arbitrários.

A ação efetiva $\Gamma(\phi)$ é usualmente obtida através da transformada de Legendre de $W(J)$, onde $W(J)$ é o gerador funcional para funções de n -pontos conexas,

$$e^{iW(J)} = \langle 0 | T \exp[i \int (dx) J(x) \Phi(x)] | 0 \rangle . \quad (3.15)$$

De $W(J)$, um campo clássico é definido:

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J} = \phi, \quad (3.16)$$

e $\Gamma(\phi)$,

$$\Gamma(\phi) = W(J) - \int (dx) J\phi, \quad (3.17)$$

onde J é eliminado em favor de ϕ através de (3.16).

Mostraremos, agora, que ação efetiva, dada por (3.17), pode ser obtida por meio do princípio variacional dependente do tempo (3.11), com os vínculos (3.12). Portanto, vamos obter explicitamente $|\Psi_{\pm}; t\rangle$. Uma vez

que a variação deve satisfazer estes vínculos, multiplicadores de Lagrange são introduzidos. Para satisfazer (3.12), adicionamos em (3.11)

$$\int (dx) J(t, \mathbf{x}) \langle \Psi_-; t | \Phi(\mathbf{x}) | \Psi_+; t \rangle , \quad (3.18)$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dt w(t) \langle \Psi_-; t | \Psi_+; t \rangle , \quad (3.19)$$

o que nos leva a

$$\Gamma(\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \Psi_-; t | i\partial_t - H + \int dx J\Phi - w(t) | \Psi_+; t \rangle . \quad (3.20)$$

Variando os estados $|\Psi_-; t\rangle$ e $|\Psi_+; t\rangle$ independentemente em (3.20), obtemos duas equações:

$$(i\partial_t - H + \int dx J\Phi) |\Psi_+; t\rangle = w(t) |\Psi_+; t\rangle , \quad (3.21)$$

$$(i\partial_t - H + \int dx J\Phi) |\Psi_-; t\rangle = w^*(t) |\Psi_-; t\rangle , \quad (3.22)$$

onde uma integração por partes foi feita no termo $i\partial_t$, antes de variarmos o estado $|\Psi_+; t\rangle$. O termo de superfície desaparece em virtude de (3.13).

Podemos redefinir as funções de onda $|\Psi_{\pm}; t\rangle$ da seguinte forma:

$$|+; t\rangle = e^{i\int_{-\infty}^t dt' w(t')} |\Psi_+; t\rangle , \quad (3.23)$$

$$|-; t\rangle = e^{i\int_t^{\infty} dt' w(t')} |\Psi_-; t\rangle , \quad (3.24)$$

as quais satisfazem a equação de Schrödinger dependente do tempo com uma fonte,

$$(i\partial_t - H + \int dx J\Phi) |\pm; t\rangle = 0 . \quad (3.25)$$

As condições de contorno sobre $|\pm; t\rangle$ são determinadas por (3.13):

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} |\pm; t\rangle = |0\rangle . \quad (3.26)$$

O produto interno pode ser calculado a partir das definições (3.23) e (3.24) e dos vínculos (3.12):

$$\langle -; t | +; t \rangle = e^{iW} , \quad (3.27)$$

onde

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} dt w(t) . \quad (3.28)$$

Pela definição (3.15), podemos ver que W é gerador funcional para funções de n -pontos conexas. A expressão final para W é obtida de (3.21) e (3.28),

$$W(J) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \Psi_-; t | i\partial_t - H + \int dx J\Phi | \Psi_+; t \rangle . \quad (3.29)$$

Derivando W com relação à fonte J , temos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta J} &= \phi + \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\delta}{\delta J} \{ \langle \Psi_-; t | \} i\partial_t - H + \int dx J\Phi | \Psi_+; t \rangle \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \Psi_-; t | i\partial - H + \int dx J\Phi \frac{\delta}{\delta J} \{ | \Psi_-; t \rangle \} . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Usando (3.21), (3.22) e integrando por partes o último termo em (3.30), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta W}{\delta J} &= \phi + i \langle \Psi_-; t | \frac{\delta}{\delta J} | \Psi_+; t \rangle \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dt w(t) \frac{\delta}{\delta J} \{ \langle \Psi_-; t | \Psi_+; t \rangle \} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

O último termo torna-se nulo em virtude de (3.12). Logo,

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J} = \phi + i \langle \Psi_-; t | \frac{\delta}{\delta J} | \Psi_+; t \rangle \Big|_{-\infty}^{\infty} . \quad (3.32)$$

O segundo termo do lado direito da equação desaparece quando tomamos o limite inferior, pois $| \Psi_+; t \rangle$ torna-se $| 0 \rangle$ e, portanto, independente de J . No limite superior, podemos escrever o termo da seguinte forma:

$$i \frac{\delta}{\delta J} [\langle \Psi_-; t | \Psi_+; t \rangle] - i \frac{\delta (\langle \Psi_-; t |)}{\delta J} | \Psi_+; t \rangle . \quad (3.33)$$

O primeiro termo é nulo em virtude, novamente, de (3.12), enquanto que o segundo desaparece em $t = \infty$ uma vez que $\langle \Psi_-; t |$ torna-se $\langle 0 |$ e, novamente, independente de J . Logo,

$$\frac{\delta W(J)}{\delta J} = \phi , \quad (3.34)$$

Como dissemos anteriormente, $\Gamma(\phi)$ é a transformada de Legendre de $W(J)$ e, assim, o funcional gerador das funções de Green 1PI:

$$\begin{aligned} \Gamma(\phi) &= W(J) - \int (dx) J \phi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \Psi_-; t | i \partial_t - H | \Psi_+; t \rangle . \end{aligned} \quad (3.35)$$

3.2 Cálculo Ilustrativo

Para exemplificar a teoria geral em uma aplicação concreta e indicar um possível método de aproximação, analisaremos o oscilador harmônico, ou seja, TQC livre em $(0+1)$ dimensões. O que faremos é encontrar soluções de (3.21) e (3.22) e calcular as várias médias existentes no elemento de matriz (3.35). Para a Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} P^2 + \frac{1}{2} \omega^2 Q^2 - \frac{1}{2} \omega \hbar , \quad (3.36)$$

soluções de (3.21) e (3.22), com condições de contorno apropriadas, podem ser dadas explicitamente:

$$| \Psi_+; t \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\omega}{2\hbar} (Q - q)^2 + \frac{ip}{\hbar} (Q - q) + \frac{i}{2\hbar} pq \right] , \quad (3.37)$$

$$\langle \Psi_-; t | = \left(\frac{\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left[-\frac{\omega}{2\hbar} (Q - q)^2 - \frac{ip}{\hbar} (Q - q) - \frac{i}{2\hbar} pq \right] ,$$

$$q = \frac{1}{2}i \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{-i\omega|t-t'|} J(t') , \quad (3.38)$$

$$p = \dot{q} ,$$

onde,

$$w(t) = Jq ,$$

$$W(J) = \int_{-\infty}^{\infty} dt w(t) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \frac{\mathcal{J}(k)\mathcal{J}(-k)}{k^2 - \omega^2 + i\epsilon} , \quad (3.39)$$

$$\mathcal{J}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ikt} J(t) .$$

Assim, com os estados dados por (3.37), teremos

$$\langle \Psi_-; t | Q | \Psi_+; t \rangle = q ,$$

$$\langle \Psi_-; t | P | \Psi_+; t \rangle = p ,$$

$$\langle \Psi_-; t | i\hbar\partial_t | \Psi_+; t \rangle = \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q) . \quad (3.40)$$

Para a Hamiltoniana do oscilador harmônico,

$$\langle \Psi_-; t | H | \Psi_+; t \rangle = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 . \quad (3.41)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \Psi_-; t | i\hbar\partial_t - H | \Psi_+; t \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{2}(p\dot{q} - \dot{p}q - p^2 - \omega^2 q^2) = \int_{-\infty}^{\infty} dt L(t) , \end{aligned} \quad (3.42)$$

a qual é, na verdade, a ação efetiva correta. Neste exemplo ela coincide com a ação clássica. No entanto, só obtivemos uma solução exata para o cálculo acima porque as equações dependentes do tempo, (3.21) e (3.22), podem ser explicitamente resolvidas para este problema específico. Para o caso geral,

$$H = P^2 + V(Q), \quad (3.43)$$

não conseguimos encontrar uma solução, mas podemos obter um método aproximativo usando o exemplo acima. Ao invés de tentar uma solução exata, definimos funcionais de onda tentativa $|\Psi_{\pm}; t\rangle_V$, as quais dependem de parâmetros. Dessa forma, substituímos a equação de Schrödinger exata por uma equação variacional, obedecendo ao vínculo que uma aproximação variacional de Γ ,

$$\Gamma_V = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, {}_V\langle\Psi_-; t | i\partial_t - H | \Psi_+; t\rangle_V, \quad (3.44)$$

deve ser estacionária quando variamos os parâmetros.

Os estados que devemos usar são os mesmos que os dados por (3.37), porém com p e q não mais satisfazendo (3.38), mas sendo quantidades arbitrárias. Além disso pode-se considerar ω como sendo um parâmetro variacional dependente do tempo. Essas condições são satisfeitas se consideramos os estados

$$\begin{aligned} |\Psi_+; t\rangle_V &= (2\pi\hbar G)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}(Q - q)^2 \left(\frac{1}{2}G^{-1} - 2i\Pi\right) + \frac{i}{\hbar}p(Q - q)\right\}, \\ {}_V\langle\Psi_-; t| &= (2\pi\hbar G)^{-1/4} \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}(Q - q)^2 \left(\frac{1}{2}G^{-1} + 2i\Pi\right) - \frac{i}{\hbar}p(Q - q)\right\}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

G e Π são funções do tempo t e generalizam ω . O significado de G pode ser obtido calculando-se o elemento de matriz de Q^2 :

$${}_V\langle\Psi_-; t | Q^2 | \Psi_+; t\rangle_V = q^2 + \hbar G, \quad (3.46)$$

$${}_V\langle\Psi_-; t | i\hbar\partial_t | \Psi_+; t\rangle_V = p\dot{q} - \hbar\dot{\Pi}G. \quad (3.47)$$

Os elementos de matriz de P e Q continuam sendo dados por (3.40). A ação efetiva aproximada é

$$\Gamma_V = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ p\dot{q} + \hbar\Pi\dot{G} - \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{8}G^{-1} - 2\hbar G\Pi^2 - \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} V(q + (2\hbar G)^{1/2}x) \right\} . \quad (3.48)$$

Até $O(\hbar)$, a expressão acima é dada por

$$\Gamma_V \approx \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ p\dot{q} - \frac{1}{2}p^2 - V(q) + \hbar\Pi\dot{G} - \frac{1}{8}G^{-1} - 2\hbar G\Pi^2 - \frac{1}{2}\hbar GV^{(2)}(q) \right\} . \quad (3.49)$$

Variando Γ_V com relação a p e Π e igualando a zero, teremos os momentos em função de \dot{q} e \dot{G} . Então, variando com relação a q e G , obtemos as equações de movimento para estas quantidades. Estas equações foram obtidas para um potencial com um termo quártico e solucionadas numericamente por *Cooper et al*^[32],

$$\frac{\delta\Gamma_V}{\delta p} = 0 \rightarrow \dot{q} = \frac{1}{m} p ,$$

$$\frac{\delta\Gamma_V}{\delta \Pi} = 0 \rightarrow \dot{G} = 4G\Pi ,$$

$$\frac{\delta\Gamma_V}{\delta q} = 0 \rightarrow \dot{p} = -V^{(1)}(q) - \frac{1}{2}\hbar GV^{(3)}(q) ,$$

$$\frac{\delta\Gamma_V}{\delta G} = 0 \rightarrow \dot{\Pi} = \frac{1}{8}G^{-2} - 2\Pi^2 - \frac{1}{2}V^{(2)}(q) - \frac{1}{4}V^{(4)}(q)G . \quad (3.50)$$

Comparando as soluções obtidas classicamente e na aproximação com a solução exata (figuras 3 e 4), é fácil ver que o método variacional proporciona ótimos resultados para a fase inicial da evolução do sistema.

Nesta aproximação, recuperamos a mecânica clássica tomando o limite $\hbar \rightarrow 0$, enquanto que uma descrição semiclássica pode ser obtida quando termos de $O(\hbar)$ são mantidos.

Este método pode ser aplicado à TQC, proporcionando resultados similares quando tratamos de sistemas com infinitos graus de liberdade.

$$V(Q) = \frac{\lambda}{24}(Q^2 - 5^2)^2$$

$$\lambda = 3.84 : \lambda' = 0.06$$

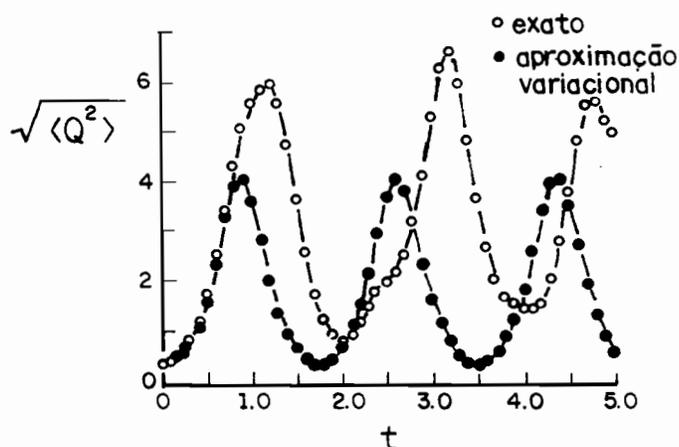


Fig. 3 - Comparação do resultado exato com a aproximação variacional para $\lambda = 3.84$; $\lambda' = 0.06$.

$$V(Q) = \frac{\lambda}{24}(Q^2 - 5^2)^2$$

$$\lambda = 3.84 : \lambda' = 0.06$$

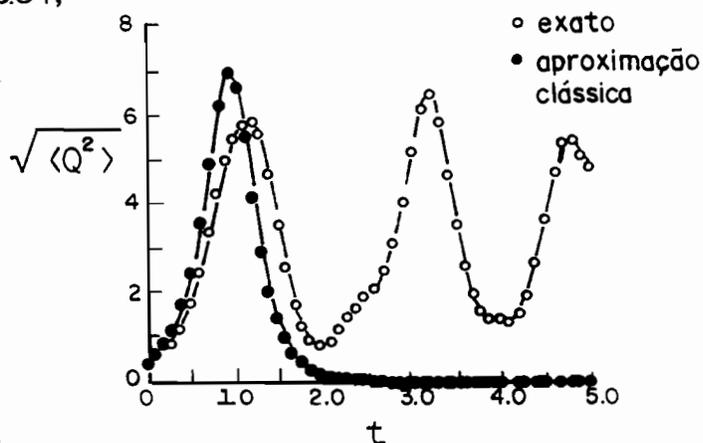


Fig. 4 - Comparação do resultado exato com a aproximação clássica para $\lambda = 3.84$; $\lambda' = 0.06$.

Capítulo 4

Aproximação Gaussiana Dependente do Tempo e sua Renormalização

Neste capítulo utilizamos o método variacional com um *Ansatz* Gaussiano para obter as equações de movimento renormalizadas do modelo $\lambda\Phi^4$ em espaços homogêneos e isotrópicos. Por consistência, o valor esperado do campo deve ser homogêneo e a métrica adequada para a descrição desse sistema é a métrica de Robertson- Walker, (2.17). Para analisarmos a renormalização deste modelo, inicialmente estudamos o potencial efetivo e removemos as divergências nele existentes. Generalizamos este procedimento para a ação efetiva, isto é, para o caso dependente do tempo, de modo a não acrescentar novas divergências além daquelas contidas no caso estático. Desta forma, podemos adotar a mesma prescrição de renormalização do potencial efetivo. Aplicando novamente o método variacional na ação efetiva renormalizada, obtemos as equações de movimento finitas para o modelo $\lambda\Phi^4$. Em seguida, utilizando o procedimento acima descrito, renormalizamos o tensor energia-momento que aparece na equação semiclássica de Einstein

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle_R .$$

Desta forma, teremos um conjunto de equações (equações de movimento mais equação semiclássica) que nos permite estudar a dinâmica de campo escalar para o acoplamento entre matéria e gravitação.

4.1 Ação Efetiva e Equações de Movimento para Campo Homogêneo

A equação funcional de Schrödinger, a qual nos diz como um dado estado inicial evolui com o tempo, pode ser obtida considerando a ação efetiva (3.11),

$$\Gamma = \int dt \langle \Psi; t | i\partial_t - H | \Psi; t \rangle . \quad (4.1)$$

Estudemos um campo escalar auto-interagente em um espaço de Robertson -Walker descrito pela métrica (2.17), cuja dinâmica é dada pela seguinte Hamiltoniana \mathcal{H} ,

$$\mathcal{H} = \int_{\mathbf{x}} a^d \left\{ \frac{1}{2} [a^{-2d} \Pi^2 + a^{-2} (\nabla \Phi)^2] + U(\Phi) \right\} , \quad (4.2)$$

sendo o potencial $U(\Phi)$ dado por

$$U(\Phi) = V(\Phi) + \frac{1}{2} \xi R \Phi^2 ,$$

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \Phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \Phi^4 . \quad (4.3)$$

A constante ξ , em $U(\Phi)$, representa o acoplamento entre o campo Φ e o escalar de Ricci, como já dissemos.

Nossa análise é feita utilizando o método variacional no qual um *Ansatz* Gaussiano é tomado para o funcional de onda,

$$\begin{aligned} \Psi(\phi; t) = & N(t) \exp \left\{ i \int_{\mathbf{x}} \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) [\phi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}, t)] \right\} \\ & \times \exp \left\{ - \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} [\phi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}, t)] \left[\frac{1}{4} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) - i \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right] \right. \\ & \left. \times [\phi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{y}, t)] \right\} . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Os parâmetros variacionais neste funcional são φ , $\hat{\pi}$, Ω e Σ e a sua interpretação física pode ser vista através dos valores esperados calculados abaixo:

$$\langle \phi(\mathbf{x}) \rangle = \varphi(\mathbf{x}, t) ,$$

$$\langle \Pi(\mathbf{x}) \rangle = \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) ,$$

$$\langle \Phi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}) \rangle = \varphi(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{y}, t) + \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) ,$$

$$\langle \Pi(\mathbf{x})\Pi(\mathbf{y}) \rangle = \hat{\pi}(\mathbf{x}, t)\hat{\pi}(\mathbf{y}, t) + \frac{1}{4}\Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + 4(\Sigma\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) ,$$

$$\langle \Pi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}) \rangle = \hat{\pi}(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{y}, t) + \frac{i}{2}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + 2(\Sigma\Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) ,$$

$$\langle i\partial_t \rangle = \int_{\mathbf{x}} \hat{\pi}(\mathbf{x}, t)\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) + \int_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)\dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) . \quad (4.5)$$

Das relações acima, identificamos Ψ como um funcional de onda Gaussiano centrado em φ com a largura dada por $\sqrt{\Omega}$. Através do valor esperado $\langle i\partial_t \rangle$, interpretamos $\hat{\pi}$ como sendo o momento conjugado de φ e podemos, da mesma forma, dizer que Σ faz o papel de momento conjugado de Ω .

A partir das equações (4.2) e (4.3) e dos valores esperados (4.5), obtemos a ação efetiva (4.1)^[3]

$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi, \hat{\pi}, \Omega, \Sigma) = & \int dt \int_{\mathbf{x}} \left\{ \left[\hat{\pi}\dot{\varphi} - a^d \left(\frac{1}{2}a^{-2d}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}a^{-2}(\nabla\varphi)^2 + U(\varphi) \right) \right] \right. \\ & + \hbar \left[(\Sigma\dot{\Omega})(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \frac{1}{8}a^{-d}\Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - 2a^{-d}(\Sigma\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right. \\ & - \left. \frac{1}{2}a^d(-a^{-2}\nabla_{\mathbf{x}}^2\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + U^{(2)}(\varphi)\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)) \right] \\ & \left. - \frac{\hbar^2}{8}U^{(4)}(\varphi)a^d\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right\} , \quad (4.6) \end{aligned}$$

onde $U^{(n)} \equiv d^n U / d\varphi^n$. Através da equação (4.6), observamos que os termos colocados no primeiro colchete correspondem aos termos existentes na ação clássica, enquanto que o segundo colchete contém as correções quânticas de $O(\hbar)$. O último termo da ação efetiva corresponde a uma parte das correções quânticas de $O(\hbar^2)$. Neste ponto, devemos ressaltar o fato de que a expansão em termos de \hbar é apenas formal, pois o kernel Ω contém todas as ordens de \hbar . Somente em (4.6) não fizemos $\hbar = 1$. As equações variacionais são, então, dadas por

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi(\mathbf{x}, t)} = 0 \Rightarrow \hat{\pi}(\mathbf{x}, t) = a^d \dot{\varphi}(\mathbf{x}, t) ,$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{\pi}(\mathbf{x}, t)} = 0 \Rightarrow \dot{\hat{\pi}} = a^d \left[a^{-2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 - U^{(1)}(\varphi) - \frac{1}{2} U^{(3)}(\varphi) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right] \varphi ,$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)} = 0 \Rightarrow \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = 2a^d [(\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + (\Sigma\Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)] ,$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma}{\delta\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)} = 0 \Rightarrow \dot{\Sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = a^d \left\{ \frac{1}{8} a^{-2d} \Omega^{-2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) - 2a^{-2d} \Sigma^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[-a^{-2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + U^{(2)}(\varphi) + \frac{1}{2} U^{(4)}(\varphi) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right] \right. \\ \left. \times \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} . \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2 Potencial Efetivo e sua Renormalização

Como exemplo de aplicação da aproximação Gaussiana e da forma de sua renormalização, calcularemos o potencial efetivo renormalizado nesta aproximação. Para isto, consideremos a ação efetiva em uma situação estática no espaço de Minkowski, o que nos permite obter o potencial efetivo V_{eff} através da equação (3.10),

$$\Gamma(\varphi, \hat{\pi}, \Sigma, \Omega)|_{\text{estático}} = -V_{\text{eff}} \int_{\mathbf{x}} . \quad (4.8)$$

Eliminando os termos que possuem derivadas temporais em (4.6) e fazendo $a(t)=1$, temos que

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}} = & \frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 \\
& + \frac{1}{8}\Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2(\Sigma\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}}^2\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\
& + \frac{1}{2}\left(\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2\right)\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{8}\lambda\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \ , \quad (4.9)
\end{aligned}$$

onde φ é tomado como sendo homogêneo (independente de \mathbf{x}). Minimizando V_{eff} com relação aos parâmetros variacionais, obtemos:

$$\frac{\delta V_{\text{eff}}}{\delta\varphi} = 0 \Rightarrow \mu^2\varphi + \frac{1}{6}\lambda\varphi^3 + \frac{1}{2}\lambda\varphi\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0 \ ,$$

$$\frac{\delta V_{\text{eff}}}{\delta\hat{\pi}} = 0 \Rightarrow \hat{\pi} = 0 \ ,$$

$$\frac{\delta V_{\text{eff}}}{\delta\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = 0 \Rightarrow (\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\Sigma\Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \ , \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta V_{\text{eff}}}{\delta\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = 0 & \Rightarrow \frac{1}{8}\Omega^{-2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 2\Sigma^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\
& = \frac{1}{2}\left[-\nabla_{\mathbf{x}}^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})\right] \\
& \times \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \ . \quad (4.11)
\end{aligned}$$

As equações para a TF de Σ e Ω são:

$$\Omega(\mathbf{k})\Sigma(\mathbf{k}) = 0 \ , \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{8}\Omega^{-2}(\mathbf{k}) - 2\Sigma^2(\mathbf{k}) = \frac{1}{2}\left[k^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda\int_{\mathbf{k}}\Omega(\mathbf{k})\right] \ , \quad (4.13)$$

cujas soluções são dadas por

$$\Sigma(\mathbf{k}) = 0 , \quad (4.14)$$

$$\Omega(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\sqrt{k^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda \int_{\mathbf{k}'} \Omega(\mathbf{k}')}} . \quad (4.15)$$

onde (4.15) é uma equação de auto-consistência para $\Omega(\mathbf{k})$. Utilizando as equações (4.10) e (4.11), a expressão para o potencial efetivo na aproximação Gaussiana torna-se

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\varphi, \Omega) &= \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 + \frac{1}{8}\Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{x}}^2\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y})|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2\right)\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + \frac{1}{8}\lambda\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x})\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Substituindo em (4.16) a TF de Ω , obtemos

$$\begin{aligned} V_{\text{eff}}(\varphi, \Omega) &= \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 + \frac{1}{8}\int_{\mathbf{k}}\Omega^{-1}(\mathbf{k}) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathbf{k}}\left(k^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2\right)\Omega(\mathbf{k}) \\ &+ \frac{1}{8}\lambda\int_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}\Omega(\mathbf{k})\Omega(\mathbf{k}') . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Neste ponto, reescrevemos (4.15) como

$$\Omega(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\sqrt{k^2 + \alpha}} , \quad (4.18)$$

onde

$$\alpha = \mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda\int_{\mathbf{k}}\Omega(\mathbf{k}) . \quad (4.19)$$

Substituindo (4.18) em (4.17), obtemos

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}(\varphi) &= \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 + \frac{1}{4}\int_{\mathbf{k}}\sqrt{k^2 + \alpha} \\
&+ \frac{1}{4}\int_{\mathbf{k}}\left(k^2 + \mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2\right)\frac{1}{\sqrt{k^2 + \alpha}} \\
&+ \frac{1}{32}\lambda\int_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\frac{1}{\sqrt{k^2 + \alpha}}\frac{1}{\sqrt{k'^2 + \alpha}}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Todas as integrais em (4.20) são divergentes. Devemos, então, utilizar um método de regularização para que possamos removê-las. O método utilizado é o método de regularização dimensional^[33] para tornar as integrais em (4.20) finitas. Desta forma, podemos isolar e remover as divergências contidas em $V_{\text{eff}}(\varphi)$. O fato de estarmos considerando um espaço com d dimensões permite-nos aplicar a regularização dimensional diretamente, justificando a observação feita quando estudamos quantização de um campo escalar livre em um espaço de Robertson-Walker. Resolvendo as integrais em (4.20), temos que

$$\begin{aligned}
V_{\text{eff}}(\varphi) &= \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 + \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}(1-d)}\left(\frac{\alpha}{\Lambda^2}\right)^{(d-3)/2}\Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \\
&\times \left\{ \frac{2\alpha^2}{(1+d)} - \alpha^2 + \left(\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2\right)\alpha \right. \\
&\left. + \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}(1-d)}\frac{\lambda\alpha^2}{2}\left(\frac{\alpha}{\Lambda^2}\right)^{(d-3)/2}\Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \right\}, \tag{4.21}
\end{aligned}$$

onde Λ é uma escala de massa, tradicionalmente introduzida quando utilizamos o método de regularização dimensional.

Para estudarmos a forma de renormalização de $V_{\text{eff}}(\varphi)$, devemos ressaltar que a aproximação Gaussiana é muito semelhante à aproximação $1/N$, onde funções de n -pontos são expressas em termos de funções de 1 e 2-pontos somente^[34]. As quantidades renormalizadas (indicadas com subscrito R) são definidas por

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} \equiv \mu_R^2, \tag{4.22}$$

$$\left. \frac{d^4 V_{\text{eff}}}{d\varphi^4} \right|_{\varphi=0} \equiv \lambda_R , \quad (4.23)$$

o que nos leva à seguinte prescrição de renormalização:

$$\frac{\mu^2}{\lambda} = \frac{\mu_R^2}{\lambda_R} ,$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_R} - \frac{2}{(4\pi)^{(d+1)/2} (d-1)(3-d)} . \quad (4.24)$$

Prosseguindo com a renormalização de μ e λ no limite $d \rightarrow 3$, podemos reescrever a expressão para λ da seguinte maneira:

$$\lim_{d \rightarrow 3} \lambda = -16\pi^2(3-d) \left\{ 1 + \frac{16\pi^2(3-d)}{\lambda_R} + O[(3-d)^2] \right\}; \lambda_R \neq 0 , \quad (4.25)$$

e utilizar a expansão

$$\left(\frac{\alpha}{\Lambda^2} \right)^{(d-3)/2} \Gamma\left(\frac{3-d}{2} \right) \sim \frac{2}{(3-d)} + \gamma - \ln\left(\frac{\alpha}{\Lambda^2} \right) + O(d-3) , \quad (4.26)$$

onde γ é a constante de Euler. Substituindo as expansões (4.25) e (4.26) em (4.21) e desprezando termos de $O(d-3)$ em (4.25), obtemos a seguinte expressão para $V_{\text{eff}}(\varphi)$ em termos das quantidades renormalizadas μ_R e λ_R , no limite $d \rightarrow 3$:

$$V_{\text{eff}}^R(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2\alpha - \frac{1}{64\pi^2}\gamma\alpha^2 + \frac{1}{64\pi^2}\alpha^2 \ln\left(\frac{\alpha}{\Lambda^2} \right) + \frac{\mu_R^4}{\lambda_R} - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\lambda_R} . \quad (4.27)$$

Escolhendo a escala de massa Λ para ser

$$\Lambda^2 = \mu_R^2 e^{-(\gamma-1/2)} , \quad (4.28)$$

a expressão final para $V_{\text{eff}}^R(\varphi)$ é dada por^[35]

$$V_{\text{eff}}^R(\varphi) = \frac{1}{2}\alpha\varphi^2 + \frac{1}{64\pi^2}\alpha^2 \left[\ln\left(\frac{\alpha}{\mu_R^2}\right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} + \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} . \quad (4.29)$$

Minimizando $V_{\text{eff}}^R(\varphi)$ com respeito ao parâmetro α , temos a equação para este, renormalizada:

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}^R(\varphi)}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \mu_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_R\varphi^2 + \frac{1}{32\pi^2}\lambda_R\alpha \ln\left(\frac{\alpha}{\mu_R^2}\right) , \quad (4.30)$$

que é a expressão renormalizada de (4.19), o que mostra a coerência do procedimento por nós adotado.

4.3 Renormalização da Ação Efetiva na Métrica de Minkowski

Vamos analisar, a partir deste ponto, as divergências existentes em (4.6) quando $a(t) = 1$. Com esta consideração, a ação efetiva é escrita como

$$\begin{aligned} \Gamma = & \int dt \int_{\mathbf{x}} \left\{ \hat{\pi}\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\hat{\pi}^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 \right. \\ & + (\Sigma\dot{\Omega})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) - \frac{1}{8}\Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - 2(\Sigma\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\ & - \frac{1}{2} \left[\nabla_{\mathbf{x}}^2\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + \left(\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right] \\ & \left. - \frac{1}{8}\lambda(\varphi)\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right\} , \end{aligned} \quad (4.31)$$

o que nos leva às equações variacionais (4.7), com $a(t) = 1$.

Para renormalizar a ação efetiva, adotaremos o mesmo procedimento utilizado por nós na renormalização do potencial efetivo e introduzindo a TF de (4.31):

$$\begin{aligned}
\Gamma = & \int dt \int_{\mathbf{x}} \left[\hat{\pi} \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \hat{\pi}^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 \right. \\
& + \int_{\mathbf{k}} \Sigma(\mathbf{k}, t) \dot{\Omega}(\mathbf{k}, t) - 2 \int_{\mathbf{k}} \Sigma^2(\mathbf{k}, t) \Omega(\mathbf{k}, t) \frac{1}{8} \int_{\mathbf{k}} \Omega^{-1}(\mathbf{k}, t) \\
& - \frac{1}{2} \int_{\mathbf{k}} \left(k^2 + \mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{k}, t) \\
& \left. - \frac{1}{8} \lambda \int_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \Omega(\mathbf{k}, t) \Omega(\mathbf{k}', t) \right] . \tag{4.32}
\end{aligned}$$

É fácil verificar que, no caso dinâmico, a dependência em \mathbf{k} do kernel $\Omega(\mathbf{k}, t)$ não pode ser obtida da TF das equações para Ω e Σ . Neste ponto restringimos nosso *ansatz* fazendo $\Omega(\mathbf{k}, t)$ ter a mesma forma que a obtida no caso estático, (4.18), com o parâmetro variacional α dependente do tempo, $\alpha = \alpha(t)$:

$$\Omega(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2\sqrt{k^2 + \alpha(t)}} , \tag{4.33}$$

A TF para a equação de $\dot{\Omega}$ em (4.7), sugere que a forma do kernel $\Sigma(\mathbf{k}, t)$ é dada por

$$\Sigma(\mathbf{k}, t) = -\frac{\beta}{8(k^2 + \alpha)} , \tag{4.34}$$

onde $\beta = \dot{\alpha}$. **É importante, neste ponto, observar que estamos trocando os parâmetros variacionais Ω e Σ por α e β , de forma a tornar nossa análise tratável.** Qualquer outra forma mais complexa para Ω e Σ a tornaria extremamente difícil. Com esta escolha, os três últimos termos em (4.32) representam o potencial efetivo renormalizado. Assim, substituindo (4.33) e (4.34) em (4.32), obtemos

$$\Gamma = \int dt \int_{\mathbf{x}} \left[\hat{\pi} \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{64} \beta (2\dot{\alpha} - \beta) \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{(k^2 + \alpha)^{5/2}} - V_{\text{eff}}^R(\varphi) \right] . \tag{4.35}$$

A integral acima é finita,

$$\int_{\mathbf{k}} \frac{1}{(k^2 + \alpha)^{5/2}} = \frac{1}{6\pi^2 \alpha} . \quad (4.36)$$

Assim, temos a ação efetiva renormalizada quando consideramos o espaço descrito pela métrica plana de Minkowski:

$$\begin{aligned} \Gamma_R = \int dt \int_{\mathbf{x}} \left\{ \hat{\pi} \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{192\pi^2 \alpha} \left(\dot{\alpha} \beta - \frac{1}{2} \beta^2 \right) - \frac{1}{2} \alpha \varphi^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} - \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right\} . \quad (4.37) \end{aligned}$$

Através da variação de Γ_R em relação aos parâmetros φ , $\hat{\pi}$, α , β , obtemos as equações de movimento variacionais:

$$\dot{\hat{\pi}} = -\alpha \varphi ;$$

$$\dot{\varphi} = \hat{\pi} ;$$

$$\dot{\alpha} = \beta ;$$

$$\dot{\beta} = 192\pi^2 \alpha \left[-\frac{1}{2} \varphi^2 - \frac{1}{32\pi^2} \alpha \ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{(\alpha - \mu_R^2)}{\lambda_R} \right] - \frac{\beta^2}{2\alpha} . \quad (4.38)$$

onde podemos observar que β faz o papel de “momento conjugado” ao parâmetro α .

Até este ponto analisamos o comportamento do campo escalar sob condições especiais, ou seja, considerando os casos estático e dinâmico em uma métrica de fundo do tipo Minkowski. Devemos, então, generalizar a análise desta dinâmica escalar, quando o espaço é descrito pela métrica de Robertson-Walker.

4.4 Renormalização da Ação Efetiva na Métrica de Robertson-Walker

Nosso próximo passo será estudar a renormalização da ação efetiva (4.6) na métrica de Robertson-Walker e , posteriormente, aplicar os princípios

variacionais e obter as equações de movimento como em (4.38), porém, já renormalizadas. Mas por agora, nosso objetivo é generalizar o procedimento adotado na seção anterior para uma situação dependente do tempo sem incluir nenhuma divergência além das contidas no potencial efetivo. Para que isto seja feito, escrevemos os seguintes *Ansätze*:

$$\Omega(\mathbf{k}, t) = \frac{a^{1-d}}{2\sqrt{k^2 + a^2\alpha(t)}} , \quad (4.39)$$

$$\Sigma(\mathbf{k}, t) = -\frac{a^m\beta}{8[k^2 + a^2\alpha(t)]^n} , \quad (4.40)$$

onde n é uma potência a ser escolhidas para não adicionarmos novos infinitos à ação efetiva e α e β são parâmetros variacionais.

Mais uma vez, escrevemos (4.6) em função da TF dos kernels Σ e Ω :

$$\begin{aligned} \Gamma = & \int dt \int_{\mathbf{x}} \left\{ \hat{\pi}\dot{\varphi} - a^d \left[\frac{1}{2}a^{-2d}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\mu^2 + \xi R)\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 \right] \right. \\ & + \int_{\mathbf{k}} \Sigma(\mathbf{k}, t)\dot{\Omega}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{2}a^d \int_{\mathbf{k}} \left(k^2a^{-2} + \mu^2 + \xi R + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{k}, t) \\ & - \frac{1}{8}a^{-d} \int_{\mathbf{k}} \Omega^{-1}(\mathbf{k}, t) - 2a^d \int_{\mathbf{k}} \Sigma^2(\mathbf{k}, t)\Omega(\mathbf{k}, t) \\ & \left. - \frac{1}{8}\lambda \int_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \Omega(\mathbf{k}, t)\Omega(\mathbf{k}', t) \right\} . \quad (4.41) \end{aligned}$$

É interessante notar que fazendo $a = 1$, recuperamos o caso anterior, quando calculamos a ação efetiva na métrica plana de Minkowski. Substituindo (4.39) e (4.40) em (4.41), teremos

$$\begin{aligned} \Gamma = & \int dt \int_{\mathbf{x}} \left\{ \hat{\pi}\dot{\varphi} - a^d \left[\frac{1}{2}a^{-2d}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\mu^2 + \xi R)\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 \right] \right. \\ & - \frac{1}{16}(1-d)a^{m-d+1}H\beta \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{(k^2 + a^2\alpha)^{n+1/2}} \\ & \left. + \frac{1}{32}a^{m-d+3}\beta(2H\alpha + \dot{\alpha}) \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{(k^2 + a^2\alpha)^{n+3/2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{64} a^{m-d+3} \beta^2 \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{(k^2 + a^2 \alpha)^{2n+1/2}} \\
& - \frac{1}{2} a^{-1} \int_{\mathbf{k}} \sqrt{k^2 + a^2 \alpha} + \frac{1}{4} a \alpha \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} \\
& - \frac{1}{4} a \left(\mu^2 + \xi R + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} \\
& + \left. \frac{1}{32} \lambda a^{2-d} \int_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} \frac{1}{\sqrt{k'^2 + a^2 \alpha}} \right\} . \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Podemos observar pela equação acima que, se impusermos $n > 1$, não acrescentaremos infinitos à ação efetiva, além daqueles contidos em V_{eff} e nem à ação efetiva no espaço de Minkowski, pois naquele caso $n = 1$. Separando (4.42) em função das integrais divergentes mais termos finitos, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma & = \int dt \int_{\mathbf{x}} \left[\frac{1}{4} a \alpha \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} - \frac{1}{2} a^{-1} \int_{\mathbf{k}} \sqrt{k^2 + a^2 \alpha} \right. \\
& - \frac{1}{4} a \left(\mu^2 + \xi R + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} \\
& + \left. \frac{1}{32} \lambda a^{2-d} \int_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} \frac{1}{\sqrt{k'^2 + a^2 \alpha}} \right] \\
& + \text{termos finitos} . \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Novamente as integrais em (4.43) podem ser regularizadas dimensionalmente:

$$\begin{aligned}
\Gamma & = \int dt \int_{\mathbf{x}} \frac{a^d}{(4\pi)^{(d+1)/2} (1-d)} \left(\frac{\alpha}{\Lambda^2} \right)^{(d-3)/2} \\
& \times \left[\frac{(1-d)}{(1+d)} \alpha^2 + \left(\mu^2 + \xi R + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \alpha \right. \\
& + \left. \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2} (1-d)} \frac{\alpha^2 \lambda}{2} \left(\frac{\alpha}{\Lambda^2} \right)^{(d-3)/2} \Gamma \left(\frac{3-d}{2} \right) \right] \\
& + \text{termos finitos} , \tag{4.44}
\end{aligned}$$

onde introduzimos a escala de massa Λ , como fizemos na seção anterior. Para prosseguirmos com a renormalização da ação efetiva, devemos acrescentar mais uma quantidade renormalizada, ξ_R , em consequência do acoplamento entre o campo escalar e o campo gravitacional

$$\frac{\xi}{\lambda} = \frac{\xi_R}{\lambda_R} , \quad (4.45)$$

pois estamos considerando espaços curvos e, para isto, temos que renormalizar mais uma constante de acoplamento. A eq. (4.45) é coerente com a forma de renormalização que utilizamos para as constantes μ e λ . Procedendo da mesma maneira que no potencial efetivo, isto é, usando a mesma prescrição de renormalização (4.24), acrescida de (4.45), e a mesma expansão (4.26), obtemos a ação efetiva renormalizada,

$$\begin{aligned} \Gamma_R = & \int dt \int_{\mathbf{x}} \left\{ \hat{\pi} \dot{\varphi} - \frac{1}{2} a^{-3} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{8} a^{m-2} H \beta I_{n+1/2} \right. \\ & + \frac{1}{32} a^m \beta (2H\alpha + \dot{\alpha}) I_{n+3/2} - \frac{1}{64} a^{2m-5} \beta^2 I_{2n+1/2} \\ & - a^3 \left[\left(\frac{\xi_R}{\lambda_R} R + \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \alpha + \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left\{ \ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right\} \right. \\ & \left. \left. - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} + \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right] \right\} , \quad (4.46) \end{aligned}$$

onde I_j é definido por

$$I_j \equiv \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{(k^2 + a^2 \alpha)^j} = \frac{1}{2^d \pi^{d/2}} (a^2 \alpha)^{(d-2j)/2} \frac{\Gamma(j - d/2)}{\Gamma(j)} . \quad (4.47)$$

Como dissemos anteriormente, com $n > 1$, todas as integrais restantes são finitas. As equações de movimento renormalizadas são dadas, então, aplicando-se os princípios variacionais

$$\frac{\delta \Gamma_R}{\delta \varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\hat{\pi}} = -a^3 \alpha \varphi ,$$

$$\frac{\delta\Gamma_R}{\delta\hat{\pi}} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = a^{-3}\hat{\pi} \ ,$$

$$\frac{\delta\Gamma_R}{\delta\beta} = 0 \Rightarrow \dot{\alpha} = a^{-m}I_{n+3/2}^{-1}(a^{2m-5}\beta I_{2n+1/2} - 4a^{m-2}HI_{n+1/2} - 2a^m H\alpha I_{n+3/2}) \ ,$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma_R}{\delta\alpha} = 0 \Rightarrow \dot{\beta} = a^{-m}I_{n+3/2}^{-1} & \left\{ \frac{1}{2}a^{2m-3}\beta^2 \left(2n + \frac{1}{2}\right) I_{2n+3/2} \right. \\ & - 32a^3 \left[\frac{\xi_R}{\lambda_R}R + \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{32\pi^2}\alpha \ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{(\alpha - \mu_R^2)}{\lambda_R} \right] \Big\} \\ & - (m + 4n)H\beta \ . \end{aligned} \tag{4.48}$$

Podemos notar que se fizermos $a(t)=1$ na equação para $\dot{\alpha}$, os termos que contém a constante de Hubble H tornam-se nulos. Desta forma, $\dot{\alpha}$ é proporcional a β ,

$$\dot{\alpha} = f(\alpha)\beta \ ,$$

e interpretamos β como o “momento conjugado” de α , como fizemos anteriormente.

Obtivémos, assim, um conjunto de equações simples e finitas para a matéria. Passemos, agora, à análise do tensor energia-momento.

4.5 Renormalização do Tensor Energia-Momento

Nosso objetivo, a partir deste ponto, é construirmos um tensor energia-momento renormalizado na aproximação Gaussiana, utilizando a representação funcional de Schrödinger para um campo escalar. Com este resultado, podemos dar sentido à equação de Einstein semiclássica $G_{\mu\nu} = -8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle_R$ que, juntamente com as equações de movimento para a matéria obtidas na seção anterior, proporcionam-nos um conjunto

de equações acopladas e finitas para a dinâmica do campo de matéria mais gravitação. Podemos, assim, fazer uma análise detalhada das condições iniciais do universo primordial que favorecem o aparecimento de um período inflacionário.

O tensor energia-momento para um campo escalar é obtido variando a ação

$$I = \int d^n x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} (\mu^2 + \xi R) \Phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \Phi^4 \right] , \quad (4.49)$$

com respeito a $g^{\mu\nu}$, resultando em

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I}{\delta g^{\mu\nu}} \\ &= \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \Phi \partial_\beta \Phi - \frac{1}{2} \mu^2 \Phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \Phi^4 \right) \\ &\quad - \xi (G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta + D_\mu D_\nu) \Phi^2 , \end{aligned} \quad (4.50)$$

onde $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$ é o tensor de Einstein e a notação D_μ denota a derivada covariante com respeito ao índice do espaço-tempo μ . Na representação funcional de Schrödinger, expressamos o tensor energia-momento em termos do operador de campo $[\Phi(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \phi(\mathbf{x}) \delta(\phi - \phi')]$ e seu momento canonicamente conjugado $[\Pi(\mathbf{x}) \Leftrightarrow -i(\delta/\delta\phi(\mathbf{x})) \delta(\phi - \phi')]$ e calculamos o valor esperado em um dado estado.

Na métrica de Robertson-Walker (2.17), o valor esperado de $T_{\mu\nu}$, no estado Gaussiano invariante por translação (4.4), tem a forma

$$\begin{aligned} \langle T_{tt} \rangle &= \frac{1}{2} a^{-2d} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 - \xi (G_{tt} \varphi^2 - 2a^{-d} dH \varphi \hat{\pi}) \\ &\quad + \frac{1}{8} a^{-2d} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + 2a^{-d} dH (\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[-a^{-2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + \mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 + \frac{1}{2} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\ &\quad - \xi [G_{tt} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - 4dH a^{-d} (\Sigma \Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)] \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{8} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) , \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{ij} \rangle = & a^2 \delta_{ij} \left\{ \frac{1}{2} a^{-2d} \hat{\pi}^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 \right. \\ & - \xi \left[a^{-2} \frac{1}{d} \delta^{nm} G_{nm} \varphi^2 + 2a^{-d} (d-1) H \varphi \hat{\pi} + \partial_t^2 \varphi^2 \right] \\ & + \frac{1}{8} a^{-2d} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + 2a^{-2d} (\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\ & - \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2}{d} \right) a^{-2} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + \mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 + \frac{1}{2} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\ & - \xi \left[\frac{a^{-2d}}{d} \delta^{nm} G_{nm} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + 4a^{-d} (d-1) H (\Sigma \Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right] \\ & \left. + \frac{1}{8} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right\} , \quad (4.52) \end{aligned}$$

$$\langle T_{ii} \rangle = 0 . \quad (4.53)$$

Ao considerarmos a métrica de Robertson-Walker em nosso estudo, assumimos a homogeneidade e isotropia do espaço. Por este motivo, em (4.51) e (4.52), φ e $\hat{\pi}$ são homogêneos, isto é, independentes de \mathbf{x} mas dependentes apenas do tempo.

Procederemos, em primeiro lugar, a renormalização da componente temporal do tensor energia-momento. Isto será feito da mesma forma que na renormalização da ação efetiva, ou seja, esta componente do tensor será regularizada dimensionalmente e expressa em função do pólo no limite $d \rightarrow 3$. Para tanto, escrevemos (4.51) na representação dos momentos, através da TF dos kernels Ω e Σ :

$$\begin{aligned} \langle T_{tt} \rangle = & \frac{1}{2} a^{-2d} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 - \xi (G_{tt} \varphi^2 - 2a^{-d} d H \varphi \hat{\pi}) \\ & + \frac{1}{2} a^{-(d+1)} \int_{\mathbf{k}} \Omega^{-1}(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{64} a^{2m-3d+1} \beta^2 I_{2n+1/2} \\ & - \frac{1}{4} a^{1-d} \alpha \int_{\mathbf{k}} \Omega(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{4} a^{1-d} \int_{\mathbf{k}} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{k}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \xi \left[\frac{1}{2} a^{1-d} G_{tt} \int_{\mathbf{k}} \Omega(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{4} d H a^{m-2d+1} \beta \int_{\mathbf{k}} \Omega(\mathbf{k}, t) \right] \\
& + \frac{1}{32} \lambda a^{2(1-d)} \int_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \Omega(\mathbf{k}, t) \Omega(\mathbf{k}', t) .
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Substituindo os *Ansätze* (4.39) e (4.40) em (4.54), temos que

$$\begin{aligned}
\langle T_{tt} \rangle & = \frac{1}{2} a^{-2d} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 - \xi (G_{tt} \varphi^2 - 2a^{-d} d H \varphi \hat{\pi}) \\
& + \frac{1}{2} a^{-(d+1)} \int_{\mathbf{k}} \sqrt{k^2 + a^2 \alpha} + \frac{1}{64} a^{2m-3d+1} \beta^2 I_{2n+1/2} \\
& - \frac{1}{4} a^{1-d} \alpha \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} + \frac{1}{4} a^{1-d} \int_{\mathbf{k}} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} \\
& - \xi \left(\frac{1}{2} a^{1-d} G_{tt} \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} + \frac{1}{4} d H a^{m-2d+1} \beta \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} \right) \\
& + \frac{1}{32} \lambda a^{2(1-d)} \int_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{k^2 + a^2 \alpha}} \frac{1}{\sqrt{k'^2 + a^2 \alpha}} .
\end{aligned} \tag{4.55}$$

As integrais em (4.55) são regularizadas dimensionalmente. Desta forma, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\langle T_{tt} \rangle & = \frac{1}{2} a^{-2d} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 \\
& - \xi (G_{tt} \varphi^2 - 2a^{-d} d H \varphi \hat{\pi}) + \frac{1}{64} a^{2m-3d+1} \beta^2 I_{2n+1/2} \\
& - \xi \left[\frac{8 G_{tt} \alpha}{(4\pi)^{(d+1)/2} (1-d)} \left(\frac{\alpha}{\Lambda^2} \right)^{(d-3)/2} \Gamma \left(\frac{3-d}{2} \right) + \frac{1}{4} d H a^{m-2d+1} \beta I_{n+1/2} \right] \\
& + \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2} (1-d)} \left(\frac{\alpha}{\Lambda^2} \right)^{(d-3)/2} \Gamma \left(\frac{3-d}{2} \right) \left[\frac{2}{(1+d)} \alpha^2 - \alpha^2 \right. \\
& + \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \alpha + \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2} (1-d)} \frac{\alpha^2 \lambda}{2} \\
& \left. \times \left(\frac{\alpha}{\Lambda^2} \right)^{(d-3)/2} \Gamma \left(\frac{3-d}{2} \right) \right] .
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Substituindo a prescrição de renormalização, (4.24) e (4.45), além da

expansão (4.26), podemos verificar que o coeficiente associado ao pólo em $d \rightarrow 3$ torna-se nulo, removendo os infinitos existentes em $\langle T_{tt} \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle T_{tt} \rangle_R &= \frac{1}{2} a^{-6} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{64} a^{2m-8} \beta^2 I_{2n+1/2} + \frac{1}{2} \varphi^2 \alpha \\ &+ \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} + \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \\ &- 2 \frac{\xi_R}{\lambda_R} G_{tt} \alpha , \end{aligned} \quad (4.57)$$

O mesmo procedimento pode ser usado para calcularmos a componente espacial do tensor momento-energia, o que nos leva a

$$\begin{aligned} \langle T_{ij} \rangle_R &= a^2 \delta_{ij} \left\{ \frac{1}{2} a^{-6} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{64} a^{2m-8} \beta^2 I_{2n+1/2} \right. \\ &- \frac{1}{2} \varphi^2 \alpha - \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} - \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \\ &\left. - 2 \frac{\xi_R}{\lambda_R} \alpha \left(\frac{a^{-2} \delta^{nm}}{3} G_{nm} + \ddot{\alpha} \alpha^{-1} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4.58)$$

É interessante notar que os resultados obtidos para o tensor energia-momento são finitos, isto é, não é necessária nenhuma subtração para tornar o tensor energia-momento renormalizado, sendo suficiente redefinir as constantes μ^2 , ξ e λ como

$$\frac{\mu^2}{\lambda} = \frac{\mu_R^2}{\lambda_R} , \quad \frac{\xi}{\lambda} = \frac{\xi_R}{\lambda_R} ,$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_R} - \frac{2}{(4\pi)^{(d+1)/2} (d-1)(3-d)} .$$

Isto permite-nos obter, diretamente, a equação de Einstein semiclássica

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle_R . \quad (4.59)$$

Capítulo 5

Dinâmica Escalar em Espaço Inomogêneo

Nosso objetivo neste capítulo é analisar o comportamento de campos escalares em um espaço no qual a hipótese de homogeneidade em uma das dimensões espaciais é abandonada. O procedimento utilizado é o mesmo quando do estudo da dinâmica escalar com as métricas de Minkowski e Robertson-Walker: calculamos o valor esperado da ação efetiva e do tensor energia-momento em um espaço descrito pela métrica de *Centrella-Wilson*, própria para descrever a situação física acima. Em seguida, utilizando *ansätze* simplificados, conseguimos isolar e remover os infinitos existentes na ação e no tensor energia-momento para espaço inomogêneo através da mesma prescrição de renormalização usada nas situações anteriores (estática e homogênea).

5.1 O Modelo

Sabemos que a métrica de Robertson-Walker é a métrica adequada para descrever o espaço quando levamos em conta as hipóteses de homogeneidade e isotropia. Se queremos abandonar estas hipóteses, devemos considerar uma métrica de fundo capaz de descrever o espaço. No nosso modelo consideramos o espaço como sendo inomogêneo apenas em uma direção (direção z). Esta situação é descrita por um tensor métrico do tipo *Centrella-Wilson*^[2],

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\sigma^2 + A^2\beta^{x^2} + A^2\beta^{z^2} & A^2\beta^x & 0 & A^2\beta^z \\ A^2\beta^x & A^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^2l^2 & 0 \\ A^2\beta^z & 0 & 0 & A^2 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

onde todas as quantidades presentes no tensor são funções da coordenada z e do tempo. Além disso, $\sqrt{-g} = \sigma\sqrt{\epsilon} = \sigma A^3l$.

No nosso modelo, ação clássica ¹ é descrita por

$$I = \int d^n x \mathcal{L} = - \int d^n x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \frac{1}{2} (\mu^2 + \xi R) \Phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \Phi^4 \right], \quad (5.2)$$

sendo que o momento canonicamente conjugado ao campo Φ é

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}} = -\sqrt{-g} (g^{tt} \dot{\Phi} + g^{ti} \partial_i \Phi). \quad (5.3)$$

Desta forma, podemos calcular a Hamiltoniana do sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\Pi, \Phi) = \int_{\mathbf{x}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \Pi^2 + \sigma^2 g^{it} \Pi \partial_i \Phi + \frac{1}{2\sigma\sqrt{\epsilon}} (g^{ij} + \sigma^2 g^{it} g^{jt}) \partial_i \Phi \partial_j \Phi \right. \\ \left. + \frac{1}{\sigma\sqrt{\epsilon}} \left[\frac{1}{2} (\mu^2 + \xi R) \Phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \Phi^4 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Neste modelo, além da representação funcional de Schrödinger, utilizamos o método variacional descrito no cap. 3 para obtermos a ação efetiva e as equações de movimento variacionais. Para tanto, introduzimos um *ansatz* Gaussiano simplificado como em (4.4), mas com Ω e Σ dados por

$$\Omega(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon} [A^{-2} (k_x^2 + l^{-2} k_y^2 + k_z^2) + \alpha]}, \quad (5.5)$$

¹Consideramos a ação clássica (5.2) trocando o sinal do termo cinético $g_{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi$, pois a assinatura da métrica de (5.1) é $(-, +, +, +)$, enquanto que a assinatura da métrica (2.17) é $(+, -, -, -)$. Assim, teremos a Hamiltoniana do sistema definida positivamente.

$$\Sigma(\mathbf{k}, t) = \frac{\beta}{8 \left\{ \epsilon \left[A^{-2} (k_x^2 + l^{-2} k_y^2 + k_z^2) + \alpha \right] \right\}^n} . \quad (5.6)$$

Como no caso homogêneo, (5.5) e (5.6) são escritos em termos dos parâmetros variacionais α e β , com o objetivo de tornar nossa análise tratável.

5.2 Cálculo da Ação Efetiva

Da mesma forma que no caso homogêneo, a ação efetiva é obtida através do elemento de matriz (4.1) na representação funcional de Schrödinger, onde $|\psi; t\rangle$ é o funcional de onda (4.4). Porém, com a escolha da métrica (5.1) novos termos aparecem na Hamiltoniana do sistema. Seus valores esperados são dados por

$$\langle (\partial_j \Phi) \Pi \rangle = -\hat{\pi} \partial_j \varphi + 2i (G \partial_j \Omega) (\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) ,$$

$$\langle \Pi \partial_j \Phi \rangle = -\hat{\pi} \partial_j \varphi - i \partial_j^{(x)} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + 2i (G \partial_j \Omega) (\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) ,$$

$$\langle \partial_i \Phi \partial_j \Phi \rangle = (\partial_i \varphi) (\partial_j \varphi) - \partial_i^{(x)} \partial_i^{(y)} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} , \quad (5.7)$$

onde

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \frac{1}{4} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + 4i \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) . \quad (5.8)$$

A partir deste ponto conhecemos os valores esperados de todos os termos do elemento de matriz (4.1), o que nos permite escrever a ação efetiva Γ , onde consideramos $\varphi = \varphi(z, t)$:

$$\begin{aligned} \Gamma = & \int dt \int_{\mathbf{x}} \left\{ \left[\hat{\pi} \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \hat{\pi}^2 - \beta^z \hat{\pi} \partial_z \varphi - \alpha \sqrt{\epsilon} \left\{ \frac{1}{2A^2} (\partial_z \varphi)^2 - U(\varphi) \right\} \right] \right. \\ & \left. + i \beta^z \left[\partial_z^{(x)} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} - \int_{\mathbf{y}} \left\{ \frac{1}{4} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + 4i \Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \partial_z^{(x)} \Omega(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + i\beta^z \left[\partial_z^{(x)} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} - \int_{\mathbf{y}} \left\{ \frac{1}{4} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + 4i\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \partial_z^{(x)} \Omega(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) \right] \\
& + \hbar \left[(\Sigma \dot{\Omega})(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha}} \left\{ -\frac{1}{8} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + 2(\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right\} \right. \\
& + \frac{1}{2A^2} \sigma \sqrt{\epsilon} \left(\left\{ \partial_x^{(x)2} + l^{-2} \partial_y^{(x)2} + \partial_z^{(x)2} \right\} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \right. \\
& \left. \left. - U^{(2)}(\varphi) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right) \right] - \frac{\hbar^2}{8} U^{(4)}(\varphi) \sigma \sqrt{\epsilon} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Big\} . \quad (5.9)
\end{aligned}$$

Como no caso homogêneo, só não fizemos $\hbar = 1$ em (5.9). Da mesma forma que em (4.6), a ação efetiva para espaço inhomogêneo possui correções quânticas até $O(\hbar^2)$. Nosso próximo passo, seguindo o procedimento utilizado nos casos estático e homogêneo, é renormalizar a ação efetiva. Para tanto, devemos verificar se os novos termos em (5.9) não introduzem divergências, além das já conhecidas dos casos anteriores. **Também mostraremos que a prescrição de renormalização (4.24) e (4.45) é suficiente para remover os infinitos presentes na ação efetiva e , como veremos mais adiante, no tensor energia-momento.**

5.3 Renormalização da Ação Efetiva na Métrica de Centrella-Wilson

Concentremo-nos, inicialmente, apenas nos termos potencialmente divergentes da ação efetiva:

$$\begin{aligned}
D_1 & = -\frac{1}{8} \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \frac{1}{2A^2} \sigma \sqrt{\epsilon} \left[\partial_x^{(x)2} + l^{-2} \partial_y^{(x)2} + \partial_z^{(x)2} \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\
& - \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\epsilon} \left(\mu^2 + \xi R + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
& - \frac{1}{8} \sigma \sqrt{\epsilon} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) . \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Escrevendo a expressão (5.10) no espaço dos momentos, teremos

$$\begin{aligned}
D_1 &= -\frac{1}{8} \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\mathbf{k}} \Omega^{-1}(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{2A^2} \sigma \sqrt{\epsilon} \int_{\mathbf{k}} [k_x^2 + l^{-2}k_y^2 + k_z^2] \Omega(\mathbf{k}, t) \\
&- \frac{1}{2} \sigma \sqrt{\epsilon} \left(\mu^2 + \xi R + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \int_{\mathbf{k}} \Omega(\mathbf{k}, t) \\
&- \frac{1}{8} \sigma \sqrt{\epsilon} \lambda \int_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \Omega(\mathbf{k}, t) \Omega(\mathbf{k}', t) .
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Substituindo (5.5) e (5.6) em (5.11), obtem-se

$$\begin{aligned}
D_1 &= -\frac{1}{4} \sigma \left\{ \int_{\mathbf{k}} \sqrt{A^{-2} (k_x^2 + l^{-2}k_y^2 + k_z^2) + \alpha} \right. \\
&+ \frac{1}{A^2} \int_{\mathbf{k}} \frac{(k_x^2 + l^{-2}k_y^2 + k_z^2)}{\sqrt{A^{-2} (k_x^2 + l^{-2}k_y^2 + k_z^2) + \alpha}} \\
&+ \left(\mu^2 + \xi R + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \int_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{A^{-2} (k_x^2 + l^{-2}k_y^2 + k_z^2) + \alpha}} \\
&+ \frac{1}{8} \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \int_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{1}{\sqrt{A^{-2} (k_x^2 + l^{-2}k_y^2 + k_z^2) + \alpha}} \\
&\left. \times \frac{1}{\sqrt{A^{-2} (k_x'^2 + l^{-2}k_y'^2 + k_z'^2) + \alpha}} \right\} .
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Contudo, estamos utilizando coordenadas *co-moventes* para descrever nosso *ansatz* $\Omega(\mathbf{k}, t)$. É conveniente aplicar a transformação que nos faz voltar às coordenadas do espaço físico real,

$$\begin{aligned}
p_x &= k_x/A , \\
p_y &= k_y/Al , \\
p_z &= k_z/A .
\end{aligned} \tag{5.13}$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned}
D_1 = & -\sigma\sqrt{\epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbf{p}} \sqrt{p^2 + \alpha} - \frac{1}{4} \int_{\mathbf{p}} \frac{\alpha}{\sqrt{p^2 + \alpha}} \right. \\
& + \frac{1}{4} \left(\mu^2 + \xi R + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \int_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha}} \\
& \left. + \frac{1}{32} \lambda \int_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} \frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha}} \frac{1}{\sqrt{p'^2 + \alpha}} \right\} . \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Da mesma forma que nos casos estático e homogêneo, as integrais em (5.14) são regularizadas dimensionalmente, produzindo

$$\begin{aligned}
D_1 = & \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}(1-d)} \sigma\sqrt{\epsilon} \alpha^{(d-3)/2} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \\
& \times \left\{ -\frac{2\alpha^2}{(1+d)} + \alpha^2 \left(\mu^2 + \xi R + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \alpha \right. \\
& \left. - \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}(1-d)} \frac{\lambda\alpha^2}{2} \alpha^{(d-3)/2} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \right\} . \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Devemos, então, substituir as constantes μ^2 , ξ e λ em (5.15) por suas quantidades renormalizadas μ_R^2 , ξ_R e λ_R , através de (4.24) e (4.45), e utilizar as expansões (4.25) e (4.26), no limite $d \rightarrow 3$. Este procedimento remove os pólos existentes em (5.15), tornando a ação efetiva finita:

$$\begin{aligned}
D_1^R = & - \left\{ \left(\frac{\xi_R}{\lambda_R} R + \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \alpha + \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln\left(\frac{\alpha}{\mu_R^2}\right) - \frac{1}{2} \right] \right. \\
& \left. - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} + \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right\} . \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Existem outros termos na ação efetiva que devemos verificar se são divergentes ou não:

$$D_2 = i\beta^x \left[\partial_x^{(x)} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} - \int_{\mathbf{y}} \left\{ \frac{1}{4} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + 4i\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \partial_x^{(y)} \Omega(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) \right]$$

$$\begin{aligned}
& + i\beta^z \left[\partial_z^{(x)} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} - \int_{\mathbf{y}} \left\{ \frac{1}{4} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + 4i\Sigma(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \right\} \partial_z^{(y)} \Omega(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t) \right] \\
& - 2 \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} (\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + (\Sigma \dot{\Omega})(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) .
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Escrevendo D_2 no espaço dos momentos, teremos

$$\begin{aligned}
D_2 & = \int_{\mathbf{k}} \left\{ \beta^z k_z \left[i - \frac{1}{2} - i\Sigma(\mathbf{k}, t)\Omega(\mathbf{k}, t) \right] + \beta^z k_z \left[i - \frac{1}{2} - i\Sigma(\mathbf{k}, t)\Omega(\mathbf{k}, t) \right] \right. \\
& \left. - \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \Sigma^2(\mathbf{k}, t)\Omega(\mathbf{k}, t) + \Sigma(\mathbf{k}, t)\dot{\Omega}(\mathbf{k}, t) \right\} .
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Substituindo (5.5) e (5.6) em (5.18) e aplicando a transformação (5.13), teremos

$$\begin{aligned}
D_2 & = \sqrt{\epsilon} \int_{\mathbf{p}} \left\{ A\beta^z p_z \left[i - \frac{1}{2} - \frac{i}{16 \epsilon^n} \frac{\beta}{(p^2 + \alpha)^{n+1/2}} \right] \right. \\
& + A\beta^z p_z \left[i - \frac{1}{2} - \frac{i}{16 \epsilon^n} \frac{\beta}{(p^2 + \alpha)^{n+1/2}} \right] - \frac{1}{8} \frac{\sigma \beta^2}{\epsilon^{2n+1}} \frac{1}{(p^2 + \alpha)^{2n+1/2}} \\
& + \frac{\beta}{32 \epsilon^{n+3/2}} \left[\left\{ 2A^{-1}\dot{A} + \frac{1}{3} (1 + 2l^{-1}l) A\sqrt{\epsilon} \right\} \frac{1}{(p^2 + \alpha)^{n-1/2}} \right. \\
& - \alpha \left\{ 2A^{-1}\dot{A} + \frac{1}{3} (1 + 2l^{-1}l) A\sqrt{\epsilon} + \alpha^{-1}\dot{\alpha} \right\} \\
& \left. \times \frac{1}{(p^2 + \alpha)^{n+1/2}} \right\} ,
\end{aligned} \tag{5.19}$$

onde temos calculado $\dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$ no espaço dos momentos:

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) & = \int_{\mathbf{k}} \dot{\Omega}(\mathbf{k}, t) \\
& = \frac{1}{4} \dot{\epsilon} \left\{ \left[2A^{-1}\dot{A} + \frac{1}{3} (1 + 2l^{-1}l) A\sqrt{\epsilon} \right] \int_{\mathbf{p}} \sqrt{p^2 + \alpha} \right. \\
& \left. - \alpha \left[2A^{-1}\dot{A} + \frac{1}{3} (1 + 2l^{-1}l) A\sqrt{\epsilon} + \alpha^{-1}\dot{\alpha} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\times \int_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha}} \} . \quad (5.20)$$

Integrais do tipo $\int_{\mathbf{p}} p^i$ são nulas^[33], enquanto as duas últimas integrais são finitas se escolhermos $n > 2$ para Σ , de forma a não introduzir divergências em (5.19). As integrais que restam são calculadas através do seguinte resultado^[36]:

$$\int_{\mathbf{p}} \frac{p_\mu}{(p^2 + 2p \cdot P - M^2)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{i\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha) (-P^2 - M^2)^{\alpha-n/2}} \times \left\{ -P_\mu \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right) \right\} \quad (5.21)$$

No nosso caso, $P = 0$, o que nos leva a

$$\int_{\mathbf{p}} \frac{p_i}{(p^2 + \alpha)^{n+1/2}} = 0 . \quad (5.22)$$

Portanto, (5.19) não possui divergências com $n > 2$. Então, podemos escrever no limite $d \rightarrow 3$,

$$\begin{aligned} D_2^{\text{finito}} &= -\frac{\sigma\beta^2}{64\pi^3 \epsilon^{2n+1/2}} I_{2n+1/2} \\ &+ \frac{\beta}{256\pi^3 \epsilon^{n+1/2}} \left\{ \left[2A^{-1}\dot{A} + \frac{1}{3}(1 + 2l^{-1}i) A\sqrt{\epsilon} \right] I_{n-1/2} \right. \\ &\left. - \alpha \left[2A^{-1}\dot{A} + \frac{1}{3}(1 + 2l^{-1}i) A\sqrt{\epsilon} + \alpha^{-1}\dot{\alpha} \right] I_{n+1/2} \right\} . \quad (5.23) \end{aligned}$$

Aqui, como no caso homogêneo, temos definido

$$I_n \equiv \int_{\mathbf{p}} \frac{1}{(p^2 + \alpha)^n} . \quad (5.24)$$

Finalmente, através de (5.16) e (5.23), temos a ação efetiva (5.9) renormalizada:

$$\begin{aligned}
\Gamma_R &= \int dt \int_{\mathbf{x}} \left\{ \hat{\pi} \dot{\varphi} - \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \sigma \hat{\pi}^2 + \beta^z \hat{\pi} \partial_z \varphi - \frac{1}{2A^2} \sigma \sqrt{\epsilon} (\partial_z \varphi)^2 + D_2^{\text{finito}} + D_1^R \right\} \\
&= \int dt \int_{\mathbf{x}} \left\{ \hat{\pi} \dot{\varphi} - \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \sigma \hat{\pi}^2 + \beta^z \hat{\pi} \partial_z \varphi - \frac{1}{2A^2} \sigma \sqrt{\epsilon} (\partial_z \varphi)^2 \right. \\
&\quad - \frac{\sigma \beta^2}{64\pi^3 \epsilon^{2n+1/2}} I_{2n+1/2} + \frac{\beta}{256\pi^3 \epsilon^{n+1/2}} \left[\left\{ 2A^{-1} \dot{A} + \frac{1}{3} (1 + 2l^{-1} \dot{l}) A \sqrt{\epsilon} \right\} I_{n-1/2} \right. \\
&\quad - \left. \alpha \left\{ 2A^{-1} \dot{A} + \frac{1}{3} (1 + l^{-1} \dot{l} A \sqrt{\epsilon}) + \alpha^{-1} \dot{\alpha} \right\} I_{n+1/2} \right] - \sigma \sqrt{\epsilon} \left[\left(\frac{\xi_R}{\lambda_R} R + \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \alpha \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left\{ \ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right\} - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} + \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right] \right\} . \quad (5.25)
\end{aligned}$$

Variando-se (5.25) em relação aos parâmetros $\hat{\pi}, \varphi, \beta$ e α obtemos as equações variacionais renormalizadas,

$$\frac{\delta \Gamma_R}{\delta \varphi} = 0 \Rightarrow \dot{\hat{\pi}} = -\sigma \sqrt{\epsilon} \alpha \varphi ,$$

$$\frac{\delta \Gamma_R}{\delta \hat{\pi}} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \beta^z \partial_z \varphi - \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} \sigma \hat{\pi} ,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Gamma_R}{\delta \beta} = 0 \Rightarrow \dot{\alpha} &= I_{n+1/2}^{-1} \left\{ \left[2A^{-1} \dot{A} + \frac{1}{3} (1 + 2l^{-1} \dot{l}) A \sqrt{\epsilon} \right] \right. \\
&\quad \left. \times (\alpha I_{n+1/2} - I_{n-1/2}) - 8\sigma \epsilon^{-n} I_{2n+1/2} \right\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \Gamma_R}{\delta \alpha} = 0 \Rightarrow \dot{\beta} &= \epsilon^{-(n+1/2)} I_{n+1/2}^{-1} \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \beta (\epsilon^{-1} \dot{\epsilon} I_{n+1/2} + \dot{\alpha} I_{n+3/2}) \right. \\
&\quad + 4\beta^2 \sigma \epsilon^{-n} \left(2n + \frac{1}{2} \right) I_{2n+3/2} + \beta \gamma \left(n - \frac{1}{2} \right) I_{n+1/2} \\
&\quad + \alpha^{-1} \dot{\alpha} (1 - \alpha^{-1}) I_{n+1/2} - \left(n + \frac{1}{2} \right) \alpha (\gamma + \alpha^{-1} \dot{\alpha}) I_{n+3/2} \\
&\quad \left. - \sigma \sqrt{\epsilon} \left[\frac{\xi_R}{\lambda_R} R + \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{32\pi^2} \alpha \ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{(\alpha - \mu_R^2)}{\lambda_R} \right] \right\} . \quad (5.26)
\end{aligned}$$

onde γ é definido por

$$\gamma \equiv 2A^{-1}\dot{A} + \frac{1}{3}(1 + 2l^{-1}\dot{l})A\sqrt{\epsilon} .$$

5.4 Renormalização do Tensor Energia-Momento em Espaço Inomogêneo

O tensor energia-momento é obtido pela variação da ação (5.2) em relação a $g^{\mu\nu}$, o que nos dá

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & \partial_\mu\Phi\partial_\nu\Phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\Phi\partial_\beta\Phi + \frac{1}{2}\mu^2\Phi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\Phi^4 \right] \\ & + \xi (G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}D_\alpha D_\beta + D_\mu D_\nu) \Phi^2 . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Inicialmente não analisaremos os termos associados ao acoplamento conforme. A razão disto é o fato de que o valor esperado dos termos em ξ são dados pelo valor esperado de Φ^2 , possuindo um pólo simples no limite $d \rightarrow 3$. Portanto, a renormalização da constante de acoplamento conforme, ξ , será suficiente para eliminar os pólos que aparecem em consequência de $\langle\Phi^2\rangle$, o que não é o caso de $\langle\Phi^4\rangle$, que possui um pólo duplo no termo $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$. Como primeiro passo, calcularemos o valor esperado das componentes diagonais de $T_{\mu\nu}$ e procederemos à sua renormalização.

5.4.1 Renormalização das Componentes Diagonais do Tensor Energia-Momento

O valor esperado de $T_{\mu\nu}$, quando $\mu = \nu$, no estado Gaussiano (4.4), é escrito na forma

$$\begin{aligned} \langle T_{tt} \rangle = & \frac{1}{\epsilon}\hat{\pi}^2 + \beta_z^2(\partial_z\varphi)^2 + \frac{2\sigma}{\sqrt{\epsilon}}\beta^z\hat{\pi}\partial_z\varphi \\ & - (-\sigma^2 + A^2\beta^{z^2} + A^2\beta^{z^2}) \left(-\frac{1}{2\epsilon}\hat{\pi}^2 + \frac{1}{2}(\partial_z\varphi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \beta^x [-i \partial_x^{(x)} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + 4i (G \partial_x \Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)] \\
& - \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \beta^z [-i \partial_z^{(x)} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + 4i (G \partial_z \Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)] \\
& + (-\sigma^2 + A^2 \beta^{x^2} + A^2 \beta^{z^2}) \left\{ \frac{1}{2A^2} [\partial_x^{(x)^2} + l^{-2} \partial_y^{(x)^2} + \partial_z^{(x)^2}] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \right. \\
& - \frac{1}{8\epsilon} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \frac{1}{8} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \left. \right\} \\
& - \left[\beta^{x^2} \partial_x^{(x)^2} + \beta^{z^2} \partial_z^{(x)^2} + 2\beta^x \beta^z \partial_x^{(x)} \partial_z^{(x)} \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + \frac{1}{4\epsilon} \sigma^2 \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
& + \frac{2}{\epsilon} (\sigma^2 + A^2 \beta^{x^2} + A^2 \beta^{z^2}) (\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
& + \langle \text{termos em } \xi \rangle ; \tag{5.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle T_{xx} \rangle & = -A^2 \left\{ -\frac{1}{2\epsilon} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2A^2} \beta_z^2 (\partial_z \varphi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 \right. \\
& - \frac{1}{2A^2} [\partial_x^{(x)^2} + l^{-2} \partial_y^{(x)^2} + \partial_z^{(x)^2}] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + \frac{1}{8\epsilon} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
& + \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \frac{1}{8} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
& - \frac{2}{\epsilon} (\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \left. \right\} - \partial_x^{(x)^2} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\
& + \langle \text{termos em } \xi \rangle ; \tag{5.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle T_{yy} \rangle & = -(Al)^2 \left\{ -\frac{1}{2\epsilon} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2A^2} \beta_z^2 (\partial_z \varphi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 \right. \\
& - \frac{1}{2A^2} [\partial_x^{(x)^2} + l^{-2} \partial_y^{(x)^2} + \partial_z^{(x)^2}] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + \frac{1}{8\epsilon} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
& + \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \frac{1}{8} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
& - \frac{2}{\epsilon} (\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \left. \right\} - l^{-2} \partial_y^{(x)^2} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\
& + \langle \text{termos em } \xi \rangle ; \tag{5.30}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle T_{zz} \rangle = & -A^2 \left\{ -\frac{1}{2\epsilon} \hat{\pi}^2 - \frac{1}{2A^2} \beta_z^2 (\partial_z \varphi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 \right. \\
& - \frac{1}{2A^2} \left[\partial_x^{(x)^2} + l^{-2} \partial_y^{(x)^2} + \partial_z^{(x)^2} \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + \frac{1}{8\epsilon} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
& + \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + \frac{1}{8} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \\
& \left. - \frac{2}{\epsilon} (\Sigma \Omega \Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right\} - \partial_z^{(x)^2} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\
& + \langle \text{termos em } \xi \rangle . \tag{5.31}
\end{aligned}$$

Os termos divergentes que são comuns às quatro componentes diagonais são dados por

$$\begin{aligned}
D_{\mu\mu} \equiv & g_{\mu\mu} \left\{ \frac{1}{2A^2} \left[\partial_x^{(x)^2} + l^{-2} \partial_y^{(x)^2} + \partial_z^{(x)^2} \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} - \frac{1}{8\epsilon} \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \frac{1}{8} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right\} , \tag{5.32}
\end{aligned}$$

onde não existe soma no índice μ . Escrevendo (5.32) no espaço dos momentos, temos

$$\begin{aligned}
D_{\mu\mu} = & g_{\mu\mu} \left\{ \frac{1}{2A^2} \int_{\mathbf{k}} [k_x^2 + l^{-2} k_y^2 + k_z^2] \Omega(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{8\epsilon} \int_{\mathbf{k}} \Omega^{-1}(\mathbf{k}, t) \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \int_{\mathbf{k}} \Omega(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{8} \lambda \int_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \Omega(\mathbf{k}, t) \Omega(\mathbf{k}', t) \right\} . \tag{5.33}
\end{aligned}$$

Substituindo o *ansatz* (5.5) e aplicando a transformação que nos faz voltar ao espaço físico real, (5.13), podemos escrever

$$\begin{aligned}
D_{\mu\mu} = & g_{\mu\mu} \left\{ \frac{1}{4} \alpha - \frac{1}{4} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{32} \lambda \int_{\mathbf{p}'} \frac{1}{\sqrt{p'^2 + \alpha}} \right\} \int_{\mathbf{p}} \frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha}} . \tag{5.34}
\end{aligned}$$

Utilizando, mais uma vez, o método de regularização dimensional para explicitar o pólo no limite $d \rightarrow 3$, teremos a seguinte expressão:

$$D_{\mu\mu} = \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}(1-d)} g_{\mu\mu} \alpha^{(d-3)/2} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \left\{ \alpha^2 - \left(\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2\right) \alpha - \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2}(1-d)} \frac{\lambda\alpha^2}{2} \alpha^{(d-3)/2} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right) \right\} . \quad (5.35)$$

Neste ponto expandimos a função gama através de (4.26), no limite $d \rightarrow 3$:

$$D_{\mu\mu} = \frac{1}{32\pi^2} g_{\mu\mu} \left[\frac{2}{(3-d)} + \gamma - \ln\left(\frac{\alpha}{\Lambda^2}\right) + O(d-3) \right] \times \left\{ \alpha^2 - \left(\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2\right) \alpha + \frac{1}{64\pi^2} \lambda\alpha^2 \left[\frac{2}{(3-d)} + \gamma - \ln\left(\frac{\alpha}{\Lambda^2}\right) + O(d-3) \right] \right\} . \quad (5.36)$$

A prescrição de renormalização das constantes μ^2 e λ é dada por (4.24). Substituindo esta prescrição e lembrando que a escala, Λ , é dada por (4.28), os únicos termos que sobrevivem no limite $d \rightarrow 3$ são

$$D_{\mu\mu} = -\frac{1}{32\pi^2} g_{\mu\mu} \left[\frac{1}{(3-d)} \alpha^2 + 32\pi^2 \left(\frac{\mu_R^2}{\lambda_R} + \frac{1}{2}\varphi^2 \right) \alpha - 16\pi^2 \frac{\alpha^2}{\lambda_R} \right] . \quad (5.37)$$

Porém, existem outras divergências em (5.28), (5.29), (5.30) e (5.31). Devemos verificar se cancelam com o pólo existente em (5.37). No caso de $\langle T_{tt} \rangle$, os termos divergentes são

$$- \left[\beta^{x^2} \partial_x^{(x)^2} + \beta^{z^2} \partial_z^{(x)^2} \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + \frac{1}{4\epsilon} \sigma^2 \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) . \quad (5.38)$$

Vamos calcular o primeiro termo em (5.38):

$$\begin{aligned}
D_3 &\equiv - \left[\beta^{x^2} \partial_x^{(x)^2} + \beta^{z^2} \partial_z^{(x)^2} \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\
&= \beta^{x^2} \int_{\mathbf{k}} k_x^2 \Omega(\mathbf{k}, t) + \beta^{z^2} \int_{\mathbf{k}} k_z^2 \Omega(\mathbf{k}, t) .
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Já conhecemos a sequência de passos para calcular as integrais acima: substituímos o *ansatz* (5.5) e aplicamos a transformação (5.13), o que nos leva a escrever a expressão

$$D_3 = \frac{1}{2} A^2 \int_{\mathbf{p}} [\beta^{x^2} p_x^2 + \beta^{z^2} p_z^2] \frac{1}{\sqrt{p^2 + \alpha}} . \tag{5.40}$$

Por simetria, as integrais em (5.40) podem ser escritas em uma só forma:

$$\int_{\mathbf{p}} \frac{p_i^2}{\sqrt{p^2 + \alpha}} = \frac{1}{d} \int_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + \alpha}} . \tag{5.41}$$

O resultado desta integral em função do pólo no limite $d \rightarrow 3$ é dado por

$$\begin{aligned}
\frac{1}{d} \int_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + \alpha}} &= - \frac{1}{(4\pi)^{(d+1)/2} (1-d)(1+d)} \alpha^2 \\
&\times \left\{ \frac{2}{(3-d)} - \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Voltando a (5.40) e tomando o limite $d \rightarrow 3$, teremos

$$D_3 = \frac{1}{32\pi^2} A^2 (\beta^{x^2} + \beta^{z^2}) \alpha^2 \left\{ \frac{1}{(3-d)} - \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} . \tag{5.43}$$

Vamos, agora, calcular o segundo termo em (5.38):

$$D_4 \equiv \frac{1}{4\epsilon} \sigma^2 \Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\epsilon} \sigma^2 \int_{\mathbf{k}} \Omega^{-1}(\mathbf{k}, t) , \tag{5.44}$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned}
D_4 &= \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{\mathbf{p}} \sqrt{p^2 + \alpha} \\
&= \frac{1}{32\pi^2}(\sigma\alpha)^2 \left\{ \frac{1}{(3-d)} - \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} . \quad (5.45)
\end{aligned}$$

Somando (5.37), (5.43) e (5.45), podemos observar que os coeficientes do pólo no limite $d \rightarrow 3$ se cancelam, quando $\mu = \nu = t$:

$$\begin{aligned}
D_{tt} + D_3 + D_4 &= (-\sigma^2 + A^2\beta^{x^2} + A^2\beta^{z^2}) \left\{ -\frac{1}{2}\varphi^2\alpha \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{64\pi^2}\alpha^2 \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] + \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} - \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right\} \quad (5.46)
\end{aligned}$$

Com relação aos outros termos, já vimos, através do cálculo de (5.17), que

$$-i\partial_j^{(x)}\delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + (4iG\partial_j)\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) , \quad (5.47)$$

produzem integrais nulas no espaço dos momentos. Da mesma forma, o termo $(\Sigma\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$ é finito se adotarmos $n > 2$ em (5.28):

$$(\Sigma\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) = \frac{\beta^2}{128\pi^3\epsilon^{2n}} I_{2n+1/2} . \quad (5.48)$$

Resta-nos apenas o termo

$$-2\beta^x\beta^z\partial_x^{(x)}\partial_z^{(y)}\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} . \quad (5.49)$$

Escrevendo (5.49) no espaço dos momentos,

$$\begin{aligned}
-2\beta^x\beta^z\partial_x^{(x)}\partial_z^{(y)}\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} &= -2 \int_{\mathbf{k}} k_x k_z \Omega(\mathbf{k}, t) \\
&= \beta^x\beta^z \int_{\mathbf{p}} \frac{p_x p_z}{\sqrt{p^2 + \alpha}} . \quad (5.50)
\end{aligned}$$

A integral acima pode ser calculada através da seguinte integral^[36]:

$$\int_{\mathbf{p}} \frac{P_\mu P_\nu}{(p^2 + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{P} - M^2)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{i\pi^{n/2}}{\Gamma(\alpha) (-P^2 - M^2)^{\alpha-n/2}} \left\{ P_\mu P_\nu \Gamma\left(\alpha - \frac{n}{2}\right) + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (-P^2 - M^2) \Gamma\left(\alpha - 1 - \frac{n}{2}\right) \right\} . \quad (5.51)$$

De novo, $P = 0$ e na métrica (5.1), $g_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Assim,

$$\int_{\mathbf{p}} \frac{p_x p_x}{\sqrt{p^2 + \alpha}} = 0 . \quad (5.52)$$

Finalmente, podemos escrever $\langle T_{tt} \rangle$ em função das constantes renormalizadas μ_R^2 e λ_R :

$$\begin{aligned} \langle T_{tt} \rangle &= \frac{1}{\epsilon} \hat{\pi}^2 + \beta^{z^2} (\partial_z \varphi)^2 + \frac{2\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \beta^z \hat{\pi} \partial_z \varphi \\ &- (-\sigma^2 + A^2 \beta^{x^2} + A^2 \beta^{z^2}) \left\{ -\frac{1}{2\epsilon} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\partial_z \varphi)^2 \right. \\ &+ \frac{1}{2} \varphi^2 \alpha + \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln\left(\frac{\alpha}{\mu_R^2}\right) + \frac{1}{2} \right] - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} + \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \left. \right\} \\ &+ \frac{\beta^2}{64\pi^3 \epsilon^{2n-1}} (\sigma^2 + A^2 \beta^{x^2} + A^2 \beta^{z^2}) I_{2n+1/2} \\ &+ \langle \text{termos em } \xi \rangle . \end{aligned} \quad (5.53)$$

As divergências presentes nas componentes espaciais de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, quando $i = j$ podem ser escritas como

$$D_{ii} - g_{ii} \partial_i^{(x)^2} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} , \quad (5.54)$$

não existindo soma no índice i . Já calculamos D_{ii} em função do pólo no limite $d \rightarrow 3$. O segundo termo, no espaço dos momentos, produz a integral

$$g_{ii} \partial_i^{(x)^2} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} = -\frac{1}{2d} g_{ii} \int_{\mathbf{p}} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + \alpha}} , \quad (5.55)$$

cujo resultado é dado por (5.42) no limite $d \rightarrow 3$:

$$\frac{1}{2d} g_{ii} \int_{\mathbb{P}} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + \alpha}} = \frac{1}{32\pi^2} g_{ii} \alpha^2 \left\{ \frac{1}{(3-d)} - \frac{1}{2} \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} . \quad (5.56)$$

Assim, os pólos existentes em (5.54) se cancelam:

$$\begin{aligned} D_{ii} - g_{ii} \partial_i^{(x)^2} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} &= g_{ii} \left\{ -\frac{1}{2} \varphi^2 \alpha - \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} - \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right\} . \end{aligned} \quad (5.57)$$

As componentes diagonais espaciais, em função das constantes renormalizadas μ_R^2 e λ_R , são dadas por

$$\begin{aligned} \langle T_{zz} \rangle &= -A^2 \left\{ -\frac{1}{2\epsilon} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2A^2} \beta_z^2 (\partial_z \varphi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 - \frac{\beta^2}{64\pi^3 \epsilon^{2n-1}} I_{2n+1/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varphi^2 \alpha + \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} - \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right\} \\ &\quad + \langle \text{termos em } \xi \rangle . \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} \langle T_{yy} \rangle &= -(Al)^2 \left\{ -\frac{1}{2\epsilon} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2A^2} \beta_z^2 (\partial_z \varphi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 - \frac{\beta^2}{64\pi^3 \epsilon^{2n-1}} I_{2n+1/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \varphi^2 \alpha + \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} - \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right\} \\ &\quad + \langle \text{termos em } \xi \rangle . \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\langle T_{zz} \rangle = -A^2 \left\{ -\frac{1}{2\epsilon} \hat{\pi}^2 - \frac{1}{2A^2} \beta_z^2 (\partial_z \varphi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \varphi^4 - \frac{\beta^2}{64\pi^3 \epsilon^{2n-1}} I_{2n+1/2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2}\varphi^2\alpha + \frac{1}{64\pi^2}\alpha^2 \left[\ln\left(\frac{\alpha}{\mu_R^2}\right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} - \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \Big\} \\
& + \langle \text{termos em } \xi \rangle .
\end{aligned} \tag{5.60}$$

5.4.2 Renormalização das Componentes Não-Diagonais do Tensor Energia-Momento

Primeiramente vamos analisar os elementos não-diagonais de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$, quando um de seus índices é dado pelo tempo t . No estado Gaussiano (4.4), estes valores esperados são dados por

$$\begin{aligned}
\langle T_{xt} \rangle &= -\frac{1}{2\epsilon}\hat{\pi}^2 + A^2\beta^z \left[-\frac{1}{2A^2}(\partial_z\varphi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 \right] \\
& - \frac{2i\sigma}{\sqrt{\epsilon}}(G\partial_x\Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + A^2\beta^z \left\{ \frac{2}{\epsilon}(\Sigma\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \frac{1}{8}\Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right. \\
& + \frac{1}{2A^2} \left[\partial_x^{(x)2} + l^{-2}\partial_y^{(x)2} + \partial_z^{(x)2} - 2A^2\beta^z\partial_x^{(x)}\partial_z^{(y)} \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\
& - \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{1}{2}\lambda\varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \frac{1}{8}\lambda\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Big\} \\
& - \beta^z\partial_x^{(x)2}\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + \langle \text{termos em } \xi \rangle ;
\end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
\langle T_{yt} \rangle &= -\frac{2i\sigma}{\sqrt{\epsilon}}(G\partial_y\Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - [\beta^x\partial_y^{(x)}\partial_x^{(y)} + \beta^z\partial_y^{(x)}\partial_z^{(y)}] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} \\
& + \langle \text{termos em } \xi \rangle ;
\end{aligned} \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned}
\langle T_{zt} \rangle &= \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}}\hat{\pi}\partial_z\varphi - \frac{1}{2\epsilon}\hat{\pi}^2 + A^2\beta^z \left[-\frac{1}{2A^2}(\partial_z\varphi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4!}\lambda\varphi^4 \right] \\
& - \frac{2i\sigma}{\sqrt{\epsilon}}(G\partial_z\Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + A^2\beta^z \left\{ \frac{2}{\epsilon}A^2(\Sigma\Omega\Sigma)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \frac{1}{8}\Omega^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right. \\
& + \frac{1}{2A^2} \left[\partial_x^{(x)2} + l^{-2}\partial_y^{(x)2} + \partial_z^{(x)2} - 2A^2\beta^z\partial_x^{(x)}\partial_z^{(y)} \right] \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \left(\mu^2 + \frac{1}{2} \lambda \varphi^2 \right) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \frac{1}{8} \lambda \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \Big\} \\
& - \beta^z \partial_z^{(x)^2} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + \langle \text{termos em } \xi \rangle ; \quad (5.63)
\end{aligned}$$

Em consequência dos valores esperados dados por (5.7), $\langle T_{ij} \rangle$ pode ser escrito como

$$\langle T_{ij} \rangle = \frac{i\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \partial_j^{(x)} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + \langle T_{jt} \rangle . \quad (5.64)$$

Analisando (5.61), (5.62) e (5.63), sabemos que termos do tipo

$$(G \partial_j \Omega)(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) ; \partial_i^{(x)} \partial_j^{(y)} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} ; \partial_j^{(x)} \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} , \quad (5.65)$$

produzem integrais nulas no espaço dos momentos, mantendo a simetria de (5.64). As divergências em (5.61) e (5.63) são dadas por

$$D_{ij} - g_{ij} \partial_i^{(x)^2} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} ; \quad (5.66)$$

para $i \neq j$ (mais uma vez, não existe soma em i), as quais já temos calculado em (5.57), o que nos dá

$$\begin{aligned}
D_{ij} - g_{ij} \partial_i^{(x)^2} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} &= g_{ij} \left\{ -\frac{1}{2} \varphi^2 \alpha - \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} - \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right\} . \quad (5.67)
\end{aligned}$$

Escrevendo (5.61) e (5.63) em função das constantes renormalizadas μ_R^2 e λ_R , obtemos

$$\begin{aligned}
\langle T_{xt} \rangle = \langle T_{tx} \rangle &= -\frac{1}{2\epsilon} \hat{\pi}^2 + A^2 \beta^x \left\{ -\frac{1}{2A^2} (\partial_z \varphi)^2 + \frac{\beta^2}{64\pi^3 \epsilon^{2n-1}} I_{2n+1/2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \varphi^2 \alpha - \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} - \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right\} \\
&+ \langle \text{termos em } \xi \rangle ; \quad (5.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle T_{zt} \rangle = \langle T_{tz} \rangle &= \frac{\sigma}{\sqrt{\epsilon}} \hat{\pi} \partial_z \varphi - \frac{1}{2\epsilon} \hat{\pi}^2 + A^2 \beta^z \left\{ -\frac{1}{2A^2} (\partial_z \varphi)^2 + \frac{\beta^2}{64\pi^3 \epsilon^{2n-1}} I_{2n+1/2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \varphi^2 \alpha - \frac{1}{64\pi^2} \alpha^2 \left[\ln \left(\frac{\alpha}{\mu_R^2} \right) - \frac{1}{2} \right] - \frac{(\alpha - \mu_R^2)^2}{2\lambda_R} - \frac{\mu_R^4}{2\lambda_R} \right\} \\
&\quad + \langle \text{termos em } \xi \rangle , \tag{5.69}
\end{aligned}$$

enquanto que $\langle T_{yt} \rangle$ produz simplesmente

$$\langle T_{yt} \rangle = \langle \text{termos em } \xi \rangle . \tag{5.70}$$

As componentes espaciais dos elementos não-diagonais de $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ são facilmente calculadas:

$$\langle T_{ij} \rangle = \langle T_{ji} \rangle = \partial_i^{(x)} \partial_j^{(y)} \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) |_{\mathbf{x}=\mathbf{y}} + \langle \text{termos em } \xi \rangle . \tag{5.71}$$

Desta forma, $\langle T_{ij} \rangle$ é escrito como (5.70):

$$\langle T_{ij} \rangle = \langle \text{termos em } \xi \rangle . \tag{5.72}$$

5.5 O Acoplamento Conforme

Os termos que envolvem o acoplamento conforme, ξ , são dados por (5.27):

$$\xi (G_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta + D_\mu D_\nu) \Phi^2 . \tag{5.73}$$

Portanto, o valor esperado dos termos em ξ são dados pelo valor esperado de Φ^2 :

$$\langle \Phi^2 \rangle = \varphi^2 + \Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) . \tag{5.74}$$

Os termos em φ^2 são nulos pois não possuem pólos no limite $d \rightarrow 3$. Devemos nos preocupar com os termos em $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$. O primeiro termo, $\xi G_{\mu\nu} \langle \Phi^2 \rangle$, em função da constante de acoplamento conforme renormalizada, ξ_R , como em (4.57), nos dá

$$\xi G_{\mu\nu}\langle\Phi^2\rangle|_R = 2 \frac{\xi_R}{\lambda_R} G_{\mu\nu}\alpha . \quad (5.75)$$

No segundo termo, $\xi g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \langle\Phi^2\rangle$, devemos calcular as derivadas covariantes de $\ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$, em relação aos índices α e β :

$$\begin{aligned} \xi g^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta \langle\Phi^2\rangle &= \xi \sigma^{-2} \left\{ -\ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) + [\sigma^{-1} \dot{\sigma} + \beta^z \partial_z (A + \beta^z) \right. \\ &- A^{-2} (\partial_t + \beta^z \partial_z) A + \frac{1}{2} \sigma^{-2} A^2 \beta^z (1 + \beta^z) \partial_z \beta^z \\ &- A^{-1} (\partial_t - \beta^z \partial_z) A - l^{-1} (\partial_t - \beta^z \partial_z) l \\ &- \sigma^{-1} \beta^z \partial_z \sigma - \sigma^{-2} A \beta^{z^2} (1 + \beta^z) (\partial_z - \beta^z \partial_z) A \\ &+ A^{-1} \beta^z \partial_t A - \sigma^{-2} A^2 \beta^{z^2} (1 + \beta^z) \partial_z \beta^z - \beta^z \partial_z \beta^z \\ &\left. - \sigma^2 A^3 \partial_z A \right] \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \} . \quad (5.76) \end{aligned}$$

Em relação ao termo $\xi D_\mu D_\nu \langle\Phi^2\rangle$, as componentes diagonais são dadas por

$$\begin{aligned} \xi D_t D_t \langle\Phi^2\rangle &= \xi \left\{ \ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) - \sigma^{-2} [\sigma (\partial_t + \beta^z \partial_z) \sigma + A (\beta^{z^2} + \beta^{z^2}) \right. \\ &\times (\partial_t - \beta^z \partial_z) A - A^2 \beta^z \beta^z \partial_z \beta^z - A^2 \beta^{z^2} \partial_z \beta^z] \\ &\left. \times \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right\} ; \quad (5.77) \end{aligned}$$

$$\xi D_x D_x \langle\Phi^2\rangle = -\xi \sigma^{-2} A (\partial_t A - \beta^z \partial_z A) \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) ; \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} \xi D_y D_y \langle\Phi^2\rangle &= -\xi \sigma^{-2} A l [l (\partial_t + \beta^z \partial_z) A \\ &+ A (\partial_t + \beta^z \partial_z) l] \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) ; \quad (5.79) \end{aligned}$$

$$\xi D_z D_z \langle\Phi^2\rangle = \sigma^{-2} A [(\partial_t - \beta^z \partial_z) A - A \partial_z \beta^z] \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) ; \quad (5.80)$$

As componentes não-diagonais produzem



$$\begin{aligned} \xi D_x D_t \langle \Phi^2 \rangle = \xi D_t D_x \langle \Phi^2 \rangle &= -\xi \sigma^{-2} [A \beta^x (\partial_t - \beta^z \partial_z) A \\ &- \frac{1}{2} A^2 \beta^z \partial_z \beta^x] \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) ; \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$\xi D_y D_t \langle \Phi^2 \rangle = \xi D_t D_y \langle \Phi^2 \rangle = 0 ; \quad (5.82)$$

$$\begin{aligned} \xi D_z D_t \langle \Phi^2 \rangle &= \xi D_t D_z \langle \Phi^2 \rangle \\ &= -\xi \sigma^{-2} [\sigma \partial_z \sigma + A \beta^z (\partial_t - \beta^z \partial_z) A \\ &- \frac{1}{2} A^2 \beta^x \partial_z \beta^x - A^2 \beta^z \partial_z \beta^z] \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) ; \end{aligned} \quad (5.83)$$

$$\xi D_x D_y \langle \Phi^2 \rangle = \xi D_y D_x \langle \Phi^2 \rangle = 0 ; \quad (5.84)$$

$$\xi D_x D_z \langle \Phi^2 \rangle = \xi D_z D_x \langle \Phi^2 \rangle = \frac{1}{2} \xi \sigma^{-2} A^2 \partial_z \beta^x \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) ; \quad (5.85)$$

$$\xi D_y D_z \langle \Phi^2 \rangle = \xi D_z D_y \langle \Phi^2 \rangle = 0 . \quad (5.86)$$

Todas as componentes do termo $\xi D_\mu D_\nu \langle \Phi^2 \rangle$ dependem de $\dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$ e $\ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$. Devemos, então, escrever estas duas quantidades em função do pólo no limite $d \rightarrow 3$ e mostrar que a renormalização da constante ξ é suficiente para torná-las finitas. Sabemos que $\dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$ é dado por (5.20). Resolvendo as integrais $I_{1/2}$ e $I_{-1/2}$ e substituindo a prescrição de renormalização (4.46), obtemos

$$\xi \dot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)_R = \frac{1}{4} \dot{\epsilon} \alpha \frac{\xi_R}{\lambda_R} (\chi_1 - 4\chi_2) , \quad (5.87)$$

onde temos definido

$$\chi_1 \equiv 2A^{-1} \dot{A} + \frac{1}{3} (1 + 2l^{-1} \dot{l}) A^2 l^{-1} ; \quad (5.88)$$

$$\chi_2 \equiv \alpha (\chi_1 + \alpha^{-1} \dot{\alpha}) . \quad (5.89)$$

Calculando $\ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$, tem-se

$$\begin{aligned} \ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) = & \frac{1}{8\pi^3} \sqrt{\epsilon} A^2 \left\{ \left(\chi_3 + \frac{1}{3} \chi_5 - \frac{1}{8 \sqrt{\epsilon}} A^2 \dot{\epsilon} \alpha \chi_6 \chi_7 \right) I_{-1/2} \right. \\ & + \left[\chi_4 - \alpha \chi_3 - \frac{1}{3} \alpha \chi_5 - \frac{1}{8 \epsilon^{3/2}} \dot{\epsilon} (2A^2 \epsilon \alpha \chi_6 \chi_7 - \dot{\alpha} \chi_6) \right] I_{1/2} \\ & \left. + \frac{1}{8 \sqrt{\epsilon}} A^2 \dot{\epsilon} \chi_6 \chi_7 I_{-3/2} - \frac{1}{8 \epsilon^{3/2}} \dot{\epsilon} (\alpha \dot{\alpha} - \epsilon \dot{\epsilon}^2) I_{3/2} \right\} , \quad (5.90) \end{aligned}$$

e também temos definido

$$\begin{aligned} \chi_3 \equiv & -\frac{1}{4 \epsilon^{3/2}} \left\{ A^{-2} \epsilon (1 - 2A^{-1} \dot{A}) \left(\ddot{\epsilon} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^{5/2}} \right) \right. \\ & - \dot{\epsilon} [2A^{-2} \epsilon (A^{-2} \dot{A}^2 - A^{-1} \ddot{A}) \\ & \left. + A^{-2} (1 - 2A^{-1} \dot{A}) (\epsilon + \dot{\epsilon} + A^{-1} \dot{A}) \right] \} ; \quad (5.91) \end{aligned}$$

$$\chi_4 \equiv -\frac{1}{4 \epsilon^{3/2}} \left[\epsilon \dot{\alpha} \left(\ddot{\epsilon} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^{5/2}} \right) - \dot{\epsilon} (\dot{\epsilon} \dot{\alpha} + \epsilon \ddot{\alpha}) \right] ; \quad (5.92)$$

$$\begin{aligned} \chi_5 \equiv & \frac{1}{4 \epsilon^{3/2}} \left\{ A^{-2} \epsilon (1 + 2l^{-1} \dot{l}) \left(\ddot{\epsilon} - \frac{3}{2} \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon^{5/2}} \right) \right. \\ & + \dot{\epsilon} [2A^{-2} \epsilon (l^{-2} \dot{l} + l^{-1} \dot{l}^2) \\ & + (1 + 2l^{-1} \dot{l}) (2A^{-3} \dot{A} \epsilon + A^{-2} \dot{\epsilon}) \\ & \left. - A^{-2} \epsilon (1 - 2A^{-1} \dot{A}) (1 + 2l^{-1} \dot{l}) \right] \} ; \quad (5.93) \end{aligned}$$

$$\chi_6 \equiv 1 - 2A^{-1} \dot{A} - \frac{1}{3} (1 + 2l^{-1} \dot{l}) ; \quad (5.94)$$

$$\chi_7 \equiv 1 + 2A^{-1} \dot{A} - \frac{1}{3} (1 + 2l^{-1} \dot{l}) . \quad (5.95)$$

Escrevendo $\xi\ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)$ em função do pólo no limite $d \rightarrow 3$ e substituindo a prescrição de renormalização (4.45), encontramos

$$\begin{aligned} \xi\ddot{\Omega}(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t)_R &= \frac{1}{8} \sqrt{\epsilon} A^2 \frac{\xi_R}{\lambda_R} \left\{ 8\alpha^2 \left(\chi_3 + \frac{1}{3}\chi_5 - \frac{1}{8\sqrt{\epsilon}} A^2 \dot{\epsilon} \alpha \chi_6 \chi_7 \right) \right. \\ &+ 16\alpha \left[\chi_4 - \alpha \chi_3 - \frac{1}{3}\alpha \chi_5 - \frac{1}{8\epsilon^{3/2}} \dot{\epsilon} (2A^2 \epsilon \alpha \chi_6 \chi_7 - \dot{\alpha} \chi_6) \right] \\ &\left. + \frac{1}{4\sqrt{\epsilon}\lambda_R} \xi_R A^2 \dot{\epsilon} \alpha^3 \chi_6 \chi_7 - \frac{8}{\epsilon^{3/2}} \dot{\epsilon} (\alpha\dot{\alpha} - \epsilon \dot{\epsilon}^2) \right\} . \quad (5.96) \end{aligned}$$

Desta forma, todas as divergências presentes em (5.73) são removidas, tornando os termos associados ao acoplamento conforme, ξ , finitos. Assim, temos calculado todas as componentes do valor esperado do tensor energia-momento, o que nos permite, como no caso homogêneo, obter a equação semiclássica de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle_R .$$

Conclusão

Neste trabalho aplicamos a representação funcional de Schrödinger para um campo escalar com o objetivo de estudar sua evolução temporal, já que esta representação é adequada para o tratamento de problemas com condição inicial.

No capítulo 4 estudamos a renormalização de um modelo tipo $\lambda\Phi^4$, utilizando aproximação Gaussiana. Como uma primeira etapa, renormalizamos o potencial efetivo nesta aproximação. Generalizando este procedimento para situações dinâmicas, utilizamos a mesma prescrição de renormalização adotada no caso estático e mostramos que esta é suficiente para remover os infinitos existentes na ação efetiva, bem como o tensor energia-momento, para espaços descritos pela métrica de Robertson-Walker.

O capítulo 5 foi dedicado ao estudo da renormalização da ação efetiva e do tensor momento-energia para o campo escalar em espaços curvos, levando em conta efeitos de inomogeneidades no valor esperado do campo e na métrica de fundo. Adotando o mesmo procedimento do capítulo 4, mostramos que a expressão para o tensor é finita utilizando a mesma prescrição de renormalização do caso estático. Devemos ressaltar que não foi necessário subtrair infinitos na renormalização do tensor pois a própria expressão obtida é finita. Com isto, podemos escrever diretamente a equação de Einstein semiclássica,

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G_N \langle T_{\mu\nu} \rangle_R .$$

Portanto, obtivemos um conjunto de equações coerentes para a matéria mais gravitação considerando efeitos de inomogeneidades.

Referências

- [1] Para revisão veja L. Abbott e S.-Y. Pi, *Inflationary Cosmology* (World Scientific, Singapore, 1986).
- [2] H. K.-Suonio, J. Centrella, R. A. Matzner e J. R. Wilson, *Phys. Rev. D* **35** (1987) 435.
- [3] O. Éboli, S.-Y. Pi e M. Samiullah, *Ann. Phys.* **193** (1989) 102.
- [4] A. Albrecht, R. H. Brandenberger e R. Matzner, *Phys. Rev. D* **32** (1985) 1280.
- [5] Para revisão veja R. Jackiw, *Proceedings of the V Jorge André Swieca Summer School*, O.Éboli, M. Gomes, A. Santoro editores (World Scientific, Singapore, 1990); S.-Y. Pi, *ibidem*..
- [6] O. Éboli, R. Jackiw e S.-Y. Pi, *Phys. Rev. D* **37** (1988) 3557.
- [7] P. J. E. Peebles, *Physical Cosmology* (Princeton Univ. Press, 1971); Ya. B. Zel'dovich, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 1.
- [8] E. Hubble, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15** (1929) 168.
- [9] A. A. Penzias e R. W. Wilson, *Ap. J.* **142** (1965) 419.
- [10] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, 1972).
- [11] G. Gamow, *Phys. Rev.* **70** (1946) 572; R. A. Alpher, J. W. Follin Jr. e R. C. Herman, *Phys. Rev.* **92** (1953) 1347; K. A. Olive, D. N. Schramm, G. Steigman, H. S. Turner e J. Yang, *Astrophys. J.* **246** (1981) 557.

- [12] A. H. Guth, em *Asymptotic Realms of Physics*, A.H. Guth, K. Huang, R. Jaffe editores (MIT Press, 1983).
- [13] R. H. Dicke e P. J. E. Peebles, em *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, S. W. Hawking, W. Israel (Cambridge Univ. Press, 1979).
- [14] W. Rindler, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **116** (1956) 663, S. Weinberg (ref. 10) pp 489-490 e 525-526.
- [15] S. W. Hawking, *Phyl. Trans. R. Soc. Lond.* **A310** (1983) 303.
- [16] Para uma revisão veja P. Langacker, *Phys. Rep.* **72** (1981) 185.
- [17] A. H. Guth, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 347.
- [18] A. D. Linde, *Phys. Lett.* **108B** (1982) 389.
- [19] A. Albrecht e Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1220.
- [20] R. H. Brandenberger, *Rev. Mod. Phys.* **57** (1985) 1.
- [21] J. D. Breit, S. Grupta e A. Zaks, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1007.
- [22] A. D. Linde, *Phys. Lett.* **129B** (1983) 177.
- [23] F. C. Adams, J. R. Bond, K. Freese, J. Frieman e A. Olinto, *Phys. Rev* **D47** (1993) 426; A. L. Berkin, K. Maeda e J. Yokoyama, *Phys. Lett.* **65** (1990) 141.
- [24] K. Symanzik, *Nucl. Phys.* **B190** (1983) 1.
- [25] S.-Y. Pi e M. Samiullah, *Phys. Rev.* **D36** (1987) 3128.
- [26] N.D. Birrel e P.C.W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, 1982).
- [27] O comportamento da função de Hankel para z assintoticamente grande é dado por

$$H_p^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{\pi}{2}p - \frac{\pi}{4})} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right] . \quad (5.97)$$

[28] T. S. Bunch e P. C. W. Davies, *Proc. R. Soc. London* **A360** (1978) 117.

[29] Para z pequeno, o comportamento assintótico das funções de Hankel pode ser obtido de

$$J_p(z) \sim \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^p [1 + O(z^2)] , \quad (5.98)$$

$$N_p(z) \sim -\frac{\Gamma(p)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-p} [1 + O(z^2)] + O(z^p) . \quad (5.99)$$

[30] A. H. Guth e S. Y.-Pi, *Phys. Rev.* **D32** (1985) 1899.

[31] R. Jackiw e A. Kerman, *Phys. Lett.* **A71** (1979) 158.

[32] F. Cooper, S. Y.-Pi e P. Stancioff, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 3841.

[33] J. Collins, *Renormalization* (Cambridge University Press, 1984).

[34] S. Coleman, R. Jackiw e D. Politzer, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2491.

[35] P. M. Stevenson, *Phys. Rev.* **D32** (1985) 1389.

[36] P. H. Frampton, *Gauge Field Theories* (Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1987).