UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

TRATAMENTO $1/N$ DE DOIS MODELOS EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS: MODELO $O(N) \times O(N)$ E MODELO DE THIRRING

Rubens Freire Ribeiro

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1099
e.1
INSTITUTO DE FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva

Tese de Doutoramento apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

SÃO PAULO
1990

SBI-IFUSP
305M810T1694

Defesa: 24/09/90

530.143
R484t
D
ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Ribeiro, Rubens Freire
Tratamento 1/N de dois modelos em teoria quântica de campos: Modelo O(N) x O(N) e modelo de Thirring. São Paulo, 1990.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física e Matemática.
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
Orientador: Profº Dr. Adilson José da Silva

Unitermos: 1. Teoria quântica de campos; 2. Modelo O(N) x O(N); 3. Modelo de Thirring; 4. Expansão 1/N; 5. Renormalização.

USP/IF/SBI - 35/90

AGRADECIMENTOS

Terminado o trabalho constato que ele seria impossível de ser realizado sem a colaboração de muitos. Ao tentar agradecer a todos corro o risco de cometer injustiças. Mas, não vou fugir à regra. E gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Adilson José da Silva por ter me orientado, ao Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes pelas inúmeras sugestões dadas durante a realização desta tese, ao colega Renio Mendes com quem trabalhei mais constantemente e aos colegas e amigos José Carlos Brunelli, Silvia Brunini, Farnezio de Carvalho, César Meireles, Ricardo Viana que com as nossas discussões cotidianas, em busca do "i" perdido (o sinal menos também) me ajudaram a aprender um pouco (mas é o que sei) sobre TQC.

Agradeço a amiga Prof. Dr. Maria Ignes Ayala, menos pelas vírgulas e mais por ter me chamado atenção quanto a necessidade de profissionalizar-me .

Agradeço aos colegas do Departamento de Física do CCEN/UFPB pelos estímulos recebidos durante a realização deste trabalho e a CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

São vistos os modelos $O(N) \times O(N)$ e Thirring da Teoria Quântica de Campos na expansão $1/N$.

No modelo $O(N) \times O(N)$ construimos o potencial efetivo e determinamos o estado fundamental em duas e quatro dimensões. Ainda em quatro dimensões avaliamos os efeitos da temperatura sobre o modelo.

Tratamos o modelo de Thirring em $(2+1)$ dimensões nos aspectos concernentes à geração dinâmica do termo de Chern–Simons, espectro de partícula, solução da equação de Schwinger–Dyson para a auto–energia dos férmions e simetrias discretas e contínuas.

ABSTRACT

We study the models $O(N) \times O(N)$ and Thirring of the Quantum Field Theory in the context of the $1/N$ expansion.

In the $O(N) \times O(N)$ model we construct the effective potential and obtain the ground state in two and four dimensions. Also in four dimensions we study the temperature effects on the model.

We analyse the Thirring model in $(2+1)$ dimensions in the aspects that concerns to dynamic generation of the Chern–Simons term, particle spectrum, solutions of the Schwinger–Dyson equation for the fermions self-energy and discret and continous symmetries.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO I 3

MODELO $O(N) \times O(N)$

I1–Introdução 4
I2–O Modelo $O(N) \times O(N)$ 7
I3–O Potencial Efetivo 13
I3.1–Derivação via Integral Funcional do Potencial Efetivo 14
a) Notações e Definições 14
b) O Potencial Efetivo na Ordem Dominante em $1/N$ 16
I4–Quebra Espontânea de Simetria 21
I4.1–Em Duas Dimensões 21
I4.2–Em Quatro Dimensões e Temperatura Finita 25
I5–Conclusões 46
Apêndice IA 47
Bibliografia 49

CAPÍTULO II 52

O MODELO DE THIRRING EM 3D

II1–Introdução 53
II2–O Modelo 55
II3–A Ação Efetiva 60
II4–A Massa dos Férmions 75
II5–Simetrias, Correntes e Anomalias 81
II6–Conclusões 89
Bibliografia 90

INTRODUÇÃO

Nesta tese estudamos dois modelos em Teoria Quântica de Campos (TQC). O modelo $O(N) \times O(N)$ e o modelo de Thirring em três dimensões. Estudamos estes modelos em seus próprios contextos, sem nos importar com os aspectos "utilitários"—a associação deles a modelos fenomenológicos.

No modelo $O(N) \times O(N)$ estudamos aspectos relacionados com a determinação do estado fundamental, em duas e quatro dimensões, e a restauração de simetrias por conta da temperatura, investigando o comportamento do potencial efetivo. Isto, usando a expansão $1/N$. Os principais resultados deste trabalho já foram apresentados por Mendes (1988), na sua tese de mestrado. Resolvemos reproduzí-los aqui por dois motivos. O primeiro, foi a forma pedagógica que encontramos para fornecer ao leitor, sumariamente, a metodologia da expansão $1/N$ em TQC, dando os fundamentos para o entendimento da segunda parte desta tese. Segundo, foi que alguns detalhes, como por exemplo, o modelo em 2D, não foram tratados por Mendes.

Na sequência do trabalho de Gomes, da Silva e Rivelles (1990)*, onde é discutido o modelo com interação de quatro férmions, $(\overline{\psi}\psi)^2$, no que tange a quebra de paridade, estudamos o modelo de Thirring—modelo com interação corrente-corrente $(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi)^2$—considerando spinores de duas e quatro componentes. Estudamos os aspectos ligados ao conteúdo de partícula do campo auxiliar A_μ, introduzido pelo método da expansão $1/N$. Estudamos a auto-energia dos férmions, a geração do termo topológico de Chern–Simons e a conservação de várias correntes presentes no modelo.

---

* *Phys. Rev.* **D41**, 1363(1990).

A tese é portanto composta de duas partes, fechadas, aqui designadas pelos capítulos I e II, tendo como substrato comum a expansão $1/N$. Adotamos o sistema de unidades natural $\hbar = c = 1$.

CAPÍTULO I

MODELO $O(N) \times O(N)$

CAPÍTULO I

MODELO $O(N) \times O(N)$

I1–INTRODUÇÃO

Desde os trabalhos pioneiros de Weinberg (1974), Bernard (1974) e Dolan e Jackiw (1974), o comportamento de modelos em Teoria Quântica de Campos a Temperatura Finita (TQCTF) tem sido estudado e uma vasta literatura foi produzida sobre o tema. Hoje dispõe-se de várias formulações para a TQCTF agrupadas em duas linhas gerais.

A Formulação de Tempo Imaginário. Desenvolvida a partir do trabalho de Matsubara (1955), presente nos trabalhos citados acima, consiste basicamente em tratar a teoria de campos no espaço euclidiano com a variável "temporal" integrada no intervalo $[0, \beta = 1/kT]$. Esta formulação é bastante apropriada para que, entre outras coisas, transição de fases e restaurações de simetrias em TQC sejam estudadas a partir da obtenção do potencial efetivo a temperatura finita. Para o leitor interessado em detalhes, recomendamos as teses de doutoramento de Éboli (1985) e Bazeia (1985) e o artigo de revisão de Brandenberg (1985).

A Formulação de Tempo Real. Distingue-se da anterior por manter tanto o tempo, quanto a temperatura presentes. Este formalismo foi desenvolvido na mecânica estatística quântica por Bogoliubov e Tyablikov (1959) e Zubarev (1960). É brevemente tratado nos textos clássicos de teorias de muitos corpos de Abrikosov, Gorkov e Dzialoshinisqui e de Fetter e Waleka. Em TQC deve-se a Schwinger (1961), Craig (1968), Keldysh (1965) uma das primeiras formulações. Recentemente Umezawa e vários outros autores têm desenvolvido a "Thermo Field Dynamics" (TFD) como uma outra proposta

para a TQCTF no formalismo de tempo real. Estas formulações objetivam estudar sistemas fora do equilíbrio térmico, sistemas no equilíbrio térmico mas que tenham uma dinâmica a ser levada em conta—como, por exemplo, o espalhamento de neutrons térmicos em um líquido—sistemas para os quais a dinâmica não é invariante por inversão temporal (Schwinger, 1961).

Os métodos computacionais adotados em TQCTF são, na maioria das vezes, a expansão em "loop" melhorado como no trabalho de Weinberg (1974), o método varacional e a expansão em $1/N$. Esta última revista por Coleman (1981).

Aqui, para estudarmos o modelo $O(N) \times O(N)$ a temperatura finita, usamos a formulação de tempo imaginário e a expansão em $1/N$.

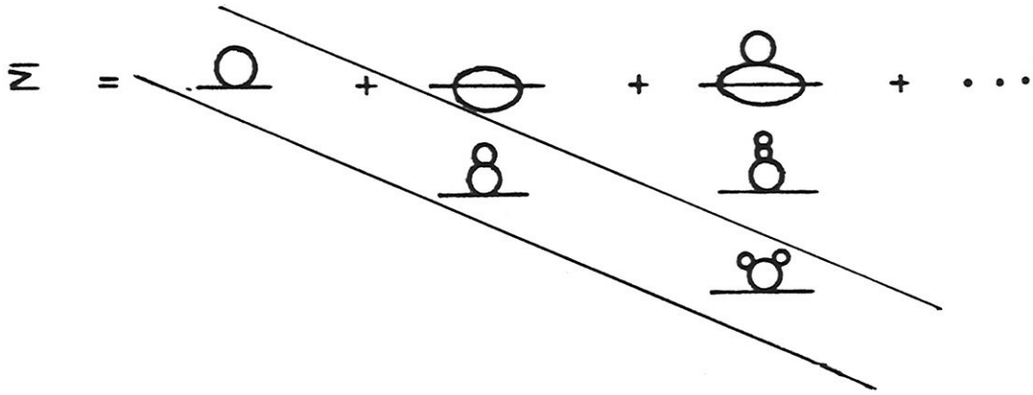
A expansão em $1/N$ revela, em mais profundidade, o caráter não linear dos modelos tratados do que os outros métodos referidos. Exemplificamos:

a) O modelo CP^{N-1} é uma TQC renormalizável em duas dimensões que exibe quebra espontânea de simetria quando estudado perturbativamente—expansão na constante de acoplamento. Já estudando-o em $1/N$, verifica-se que não há quebra espontânea de simetria. A expansão $1/N$ confirma um resultado fundamental—o teorema de Coleman-Mermin-Wagner—em duas dimensões não pode haver quebra espontânea de uma simetria associada a uma corrente local conservada.

b) O modelo de Thirring em três dimensões não é renormalizável se tratado perturbativamente. Ao estudá-lo em $1/N$ verifica-se a sua renormalizabilidade.

Em TQCTF, uma outra vantagem da expansão em $1/N$ é, justamente, que, no reordenamento da série perturbativa, introduzido pelo método, selecionam-se, de uma mesma ordem na constante de acoplamento, os gráficos mais relevantes para as análises dos efeitos térmicos. As margaridas e as supermargaridas (da Silva (1987), Fendley (1988), Fujimoto et al. (1987)).

Exemplificamos com o cálculo da massa no modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$.



Os gráficos demarcados no desenho são os que contribuem para a ordem dominante em $1/N$ e são os mais importantes para os efeitos térmicos em cada ordem na constante de acoplamento (da Silva (1987)).

A expansão em $1/N$ é apropriada, como veremos, para tratar modelos com simetrias contínuas do tipo $GL(C, N)$, quando podemos tomar N qualquer, desde que façamos uma redefinição conveniente dos parâmetros do modelo.

Este capítulo está dividido da seguinte forma: na seção I2 apresentamos o modelo $O(N) \times O(N)$ e as razões de porque o estudamos. Na seção I3 construiremos o potencial efetivo na ordem dominante em $1/N$ e obteremos as equações (de "gap") para as massas das partículas envolvidas. Na seção I4 estudaremos as questões referentes à quebra espontânea de simetria em duas e quatro dimensões. Finalmente, na seção I5, resumiremos os nossos resultados.

I2–O MODELO $O(N) \times O(N)$

O modelo $O(N) \times O(N)$ é definido, classicamente, no espaço euclidiano pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a + \frac{1}{2}\partial_\mu \psi^a \partial_\mu \psi^a + V[\phi^a, \psi^a] \qquad I2.1$$

onde

$$V[\phi^a, \psi^a] = \frac{1}{2}m_\phi^2 \phi^2 + \frac{1}{2}m_\psi^2 \psi^2 + \lambda_\phi (\phi^2)^2 + \lambda_\psi (\psi^2)^2 - 2\lambda_{\phi\psi}(\phi^2)(\psi^2)$$

$$\phi^2 = \sum_{a=1}^{N} \phi^a \phi^a \qquad \psi^2 = \sum_{a=1}^{N} \psi^a \psi^a$$

As constantes de acoplamento λ_ϕ e λ_ψ são positivas e escolhidas tais que

$$\sqrt{\lambda_\phi \lambda_\psi} > \lambda_{\phi\psi} \qquad I2.2$$

de modo a garantir que o potencial clássico seja limitado inferiormente.

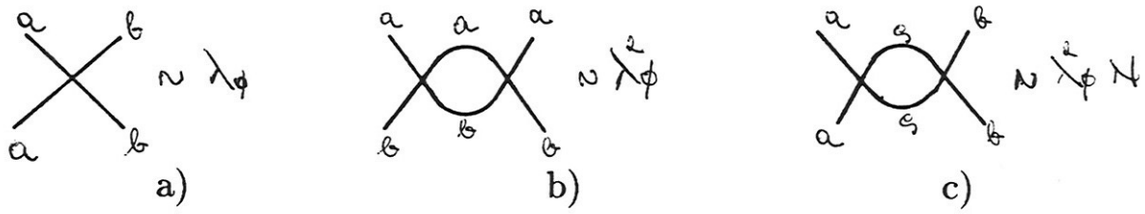
Como podemos ver, o modelo $O(N) \times O(N)$ consiste, fundamentalmente, de dois modelos $\lambda\phi^4 - O(N)$ acoplados através da constante $\lambda_{\phi\psi}$. Por conseguinte é natural que recorramos, ao modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$ ao longo desse capítulo, como referência. Em particular aos trabalhos de Coleman, Jackiw e Politzer (1974), Kobayashi e Kugo (1975), Abbott, Kang e Schnitzer (1976) e da Silva (1989).

Fomos motivados a estudar o modelo $O(N) \times O(N)$ devido a vários trabalhos não conclusivos existentes sobre o assunto. No primeiro deles (Weinberg, 1974), é mostrado que, partindo-se de uma fase com simetria $O(N) \times O(N)$ à temperatura zero e aumentando-se a temperatura, ocorre uma quebra espontânea de simetria indo para uma fase $O(N) \times O(N - 1)$. Isto é contrário ao comumente encontrado em TQCTF onde um efeito

relevante produzido pela temperatura é a restauração de simetria. Num segundo trabalho (Manesis e Sakakibara (1985)), usa-se o método do grupo de renormalização a temperatura finita e obtem-se que, a partir de uma dada temperatura, ocorre a restauração de simetria; ou seja, há duas transições de fase por conta da temperatura; na primeira, ocorre a quebra de simetria e na segunda, a restauração. Por último, Fujimoto e Sakakibara (1985) afirmam que este modelo não apresenta quebra de simetria a partir de uma temperatura suficientemente alta.

No nosso trabalho as equações de massa ("gap") que obtivemos são mais completas que as obtidas nos trabalhos citados, portanto, mais realistas. Mostramos que o mínimo do potencial efetivo sempre ocorrera para valores esperados dos campos ϕ^a e ψ^a nulos, em $2D$ e $4D$, mesmo à temperatura nula.

Para tratar o modelo na expansão $1/N$ devemos fazer algumas modificações na lagrangiana $I2.1$. Vejamos porque. Tomando-se alguns gráficos da função de quatro pontos dos campos ϕ^a, como por exemplo:



a) b) c)

Verificamos que o último deles não faz sentido no limite $N \to \infty$ (o fator N advém da soma em c, existem N gráficos iguais). Entretanto é um processo físico compatível com a teoria. Aparentemente o que está acontecendo é que ao modificarmos a teoria $\lambda_\phi \phi^4$ introduzindo a simetria $O(N)$ esquecemos de redefinir, de forma conveniente, os parâmetros da teoria inicial. Talvez seja mais fácil compreender o que se passa, partindo de uma teoria com N campos e tentar transformá-la numa teoria com um único campo.

De início temos

$$\phi^2 = (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + \cdots + (\phi^N)^2 \qquad I2.4$$

Admitindo que todas as componentes sejam equivalentes, temos

$$\phi^2 = N(\phi^i)^2 \qquad i \quad \text{é um dos índices}$$

de maneira que a teoria passa a ser representada por

$$\frac{\mathcal{L}}{N} \equiv \mathcal{L}^i = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^i\partial_\mu\phi^i + \frac{1}{2}m_\phi^2(\phi^i)^2 + \lambda_\phi N\left((\phi^i)^2\right)^2 + \cdots \qquad I2.5$$

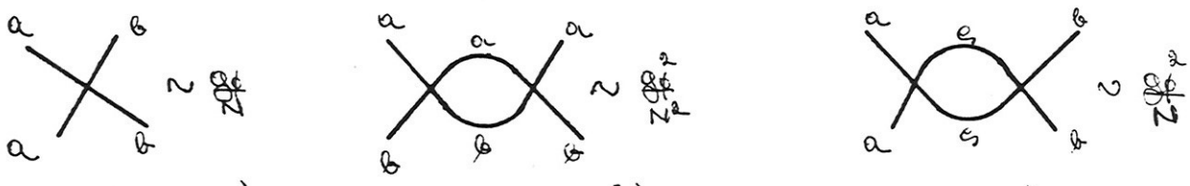
Reescalonando a constante de acoplamento λ_ϕ para g_ϕ/N, que permanece constante no limite $N \to \infty$, a teoria $\mathcal{L}^i$, para uma única componente ϕ^i, passa a ser

$$\mathcal{L}^i = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^i\partial_\mu\phi^i + \frac{1}{2}m_\phi^2(\phi^i)^2 + g_\phi\left((\phi^i)^2\right)^2 + \cdots \qquad I2.6$$

Reconstruimos a teoria original, usando $I2.4$. Assim

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a + \frac{1}{2}m_\phi^2(\phi^2) + \frac{g_\phi}{N}(\phi^2)^2 + \cdots \qquad I2.7$$

Com esta modificação, os gráficos mostrados anteriormente exibem outra dependência em N



a) b) c)

Agora os gráficos $a)$ e $c)$ tem a mesma ordem em $1/N$ como é de se esperar.

Uma segunda modificação é imposta por conta da dificuldade de demonstrarmos que, numa teoria como a representada em $I2.7$, não há gráficos proporcionais a potências positivas de N—é um desafio de análise combinatória. Esta dificuldade é superada, entretanto, eliminando os termos quárticos pela introdução na lagrangiana de campos auxiliares que não mudem a dinâmica do sistema, mas que reduzam as possibilidades combinatórias entre as peças básicas—propagadores e vértices—do modelo.

No modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$ este procedimento é o seguinte: partimos da lagrangiana clássica

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a + \frac{1}{2}m_\phi^2(\phi^2) + \frac{g_\phi}{8N}(\phi^2)^2 \qquad I2.8$$

e introduzimos um campo auxiliar σ tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \mathcal{L} - \frac{1}{2}\frac{N}{g_\phi}\left[\sigma - \frac{1}{2}\frac{g_\phi}{N}(\phi^2)\right]^2 \\ \mathcal{L}' &= \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a + \frac{1}{2}m_\phi^2(\phi^2) - \frac{1}{2}\frac{N}{g_\phi}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma(\phi^2) \end{aligned} \qquad I2.9$$

A equação de movimento para o campo σ

$$\sigma = \frac{g_\phi}{2N}(\phi^2) \qquad I2.10$$

é uma equação de vínculo que nos permite reobter a teoria original substituindo $\sigma = \sigma(\phi^2)$ solução de $I2.10$ em $I2.9$. Quanticamente a equação de vínculo é obtida a partir da ação efetiva

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\sigma} \equiv \frac{\delta\text{Ação Clássica}}{\delta\sigma} + \left\{\begin{matrix}\text{Correções}\\ \text{Radiativas}\end{matrix}\right\} = 0 \qquad I2.11$$

e reconstruimos a teoria original ao resolvermos $\chi = \langle\widehat{\chi}\rangle$ como função de $\phi = \langle\widehat{\phi}\rangle$ e substituirmos nas grandezas de interesse.

Para o modelo $O(N) \times O(N)$ este procedimento é mais laborioso (Mendes, 1988), com muitas manipulações algébricas, mas sem outras dificuldades conceituais. Obtemos para este modelo a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I \qquad I2.12$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi^a\partial_\mu\psi^a$$

$$\mathcal{L}_I = -N\left[\frac{\chi^2}{h_1} - 2\frac{\mu_1^2}{d}\chi - \frac{1}{2N}\chi(\phi^2) + \frac{\rho^2}{h_2} - \right.$$

$$\left. - 2\frac{\mu_2^2}{d}\rho - \frac{1}{2N}\rho(\psi^2) + 2\frac{\chi\rho}{h_{12}} + \frac{m^2}{d}\right] \qquad I2.13$$

onde

$$\frac{1}{h_1} = \frac{1}{4N}\frac{\lambda_\psi}{\lambda_\phi\lambda_\psi - \lambda_{\phi\psi}^2} \qquad \frac{2\mu_1^2}{d} = \frac{1}{4N}\frac{m_\phi^2\lambda_\psi + m_\psi^2\lambda_{\phi\psi}}{\lambda_\phi\lambda_\psi - \lambda_{\phi\psi}^2}$$

$$\frac{1}{h_2} = \frac{1}{4N}\frac{\lambda_\phi}{\lambda_\phi\lambda_\psi - \lambda_{\phi\psi}^2} \qquad \frac{2\mu_2^2}{d} = \frac{1}{4N}\frac{m_\psi^2\lambda_\phi + m_\phi^2\lambda_{\phi\psi}}{\lambda_\phi\lambda_\psi - \lambda_{\phi\psi}^2} \qquad I2.14$$

$$\frac{1}{h_{12}} = \frac{1}{4N}\frac{\lambda_{\phi\psi}}{\lambda_\phi\lambda_\psi - \lambda_{\phi\psi}^2} \qquad \frac{m^2}{d} = \frac{1}{4N}\frac{m_\phi^4\lambda_\phi + 2m_\phi^2 m_\psi^2\lambda_{\phi\psi} + m_\phi^4\lambda_\psi}{\lambda_\phi\lambda_\psi - \lambda_{\phi\psi}^2}$$

são as novas constantes do modelo. É com a lagrangiana acima que o quantizaremos. Observamos que a condição clássica para os dois $O(N)$'s se desacoplarem é $1/h_{12} = 0$; e as constantes $1/h_1$ e $1/h_2$ são positivas.

As equações de vínculos clássicas são

$$\frac{2}{h_1}\chi + \frac{2}{h_{12}}\rho = \frac{2\mu_1^2}{d} + \frac{1}{2N}\phi^2$$

$$\frac{2}{h_{12}}\chi + \frac{2}{h_2}\rho = \frac{2\mu_2^2}{d} + \frac{1}{2N}\psi^2 \qquad I2.15$$

E reobtemos a teoria original substituindo $\chi = \chi(\phi, \psi)$ e $\rho = \rho(\phi, \psi)$ soluções de $I2.15$ em $I2.12$. Mais uma vez, a exemplo do $\lambda\phi^4 - O(N)$, as equações quânticas de vínculo são

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi} &\equiv \frac{\delta \text{Ação Clássica}}{\delta\chi} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Correções} \\ \text{Radiativas} \end{array} \right\} = 0 \\ \frac{\delta\Gamma}{\delta\rho} &\equiv \frac{\delta \text{Ação Clássica}}{\delta\rho} + \left\{ \begin{array}{c} \text{Correções} \\ \text{Radiativas} \end{array} \right\} = 0 \end{aligned} \qquad I2.16$$

e reconstruimos a teoria quântica em termos dos campos originais—que é o que importa—ao resolvermos $\chi = \langle\widehat{\chi}\rangle$, $\rho = \langle\widehat{\rho}\rangle$ como função de $\phi = \langle\widehat{\phi}\rangle$ e $\psi = \langle\widehat{\psi}\rangle$ e substituirmos nas grandezas de interesse.

I3–O POTENCIAL EFETIVO

Para TQC com campos escalares, a ação efetiva é definida como a transformação de Legendre funcional do gerador das funções de Green conexas $W[J^a, \ldots]$. É o gerador funcional dos gráficos irredutíveis-de-uma-partícula (1PI) (Iliopopoulos, Itzykson e Martin (1975), Ramond (1983)). O potencial efetivo, $V_{Ef}[\phi^a, \ldots]$, é a ação efetiva para uma configuração de campos constantes

$$V_{Ef}[\phi_0^a] = \frac{1}{\text{Volume}} \text{ Ação Efetiva p/ } \phi^a \equiv \phi_0^a \qquad I3.1$$

é o gerador funcional dos gráficos 1PI com momento externo nulo e em muitos aspectos é o análogo quântico do potencial clássico.

O potencial efetivo tem sido largamente usado na análise do comportamento de modelos em TQC no que tange à quebra espontânea de simetria. Foi introduzido neste contexto por Goldstone, Salan e Weinberg (1962) entre outros autores. As propriedades gerais (convexidade, realidade, etc.) do potencial efetivo foram estudadas, por exemplo, por Fukuda (1976), Fujimoto, O'Raifeartaigh e Parravicini (1983). E na literatura existem vários métodos bem estabelecidos para a sua determinação: pelo cálculo da série infinita de gráficos de Feynman 1PI a momento zero como proposto por Coleman e Weinberg (1973), pelo método do "tadpole", como usado por Goldman (1985) e Baseia (1985), e o método funcional ("steepest descent"), desenvolvido a partir do trabalho de Jackiw (1974). Este último, mais apropriado para o cálculo das ordens superiores em "loops" ou ordens subdominantes em $1/N$, será adotado aqui.

I3.1–DERIVAÇÃO VIA INTEGRAL FUNCIONAL DO POTENCIAL EFETIVO

a) Notações e Definições

Algumas notações e definições preliminares são necessárias. Salvo onde explicitarmos, estaremos sempre trabalhando no espaço euclidiano. Reescalonaremos os campos ϕ^a e ψ^a, do modelo original, por $\sqrt{N}\phi^a$ e $\sqrt{N}\psi^a$, de modo que

$$\widehat{\mathcal{L}} = -N\left\{\frac{1}{2}\partial_\mu\phi^a\partial_\mu\phi^a + \frac{1}{2}\partial_\mu\psi^a\partial_\mu\psi^a - \frac{\chi^2}{h_1} + 2\frac{\mu_1^2}{d}\chi + \frac{1}{2}\chi(\phi^a\phi^a) - \right.$$
$$\left. - \frac{\rho^2}{h_2} + 2\frac{\mu_2^2}{d}\rho + \frac{1}{2}\rho(\psi^a\psi^a) - 2\frac{\chi\rho}{h_{12}} - \frac{m^2}{d}\right\} \qquad I3.2$$

$$\widehat{\mathcal{L}} = -N\mathcal{L} \qquad I3.3$$

Representaremos por Φ

$$\Phi = (\chi, \rho, \phi^1, \psi^1, \phi^2, \ldots, \phi^N, \psi^2, \ldots, \psi^N) \qquad I3.4$$

o multipleto de todos os campos presentes no modelo.

A ação clássica da teoria descrita pela lagrangiana $\widehat{\mathcal{L}}$ é

$$\widehat{A}[\Phi] = \int d^\nu x\, \widehat{\mathcal{L}}[\Phi] \qquad I3.5$$

o funcional gerador das funções de Green do modelo é

$$Z[J_a] = \mathcal{N}\int [d\Phi]\; \mathrm{e}^{-N\int d^\nu x\,(\mathcal{L}[\Phi] - J_a\Phi^a)} \qquad I3.6$$

ou em termos do gerador das funções de Green conexas $W[J_a]$

$$Z[J_a] = \mathrm{e}^{-NW[J_a]} \qquad I3.7$$

O fator N colocado como em $I3.6$ e $I3.7$ é bastante conveniente para identificar a expansão em $\hbar$ ("loops") usual no cálculo de $Z[J_a]$ ou da ação efetiva com a expansão em $1/N$ ($1/N$ faz o papel de $\hbar$).

As equações de movimento advindas da ação clássica modificada pela presença das fontes externas são

$$\frac{\delta A[\Phi]}{\delta \Phi^a} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi^a)} = J_a \qquad I3.8$$

E é evidente, a partir de $I3.8$, que $J_a = J_a[\Phi_0^a]$ onde Φ_0^a são os conjuntos de campos que satisfazem $I3.8$.

A possibilidade de solucionar $I3.8$ nos leva à possibilidade de construir o funcional $Z[J_a]$ como um funcional de Φ_0^a—os campos básicos da teoria. Portanto, numa forma mais apropriada para obter-se as quantidades físicas relevantes. Esta construção é feita a partir da transformada de Legendre funcional para $W[J_a]$. Para isso definimos um funcional $\Gamma[\Phi_0^a]$ tal que

$$\delta\Gamma[\Phi_0^a] = \int d^\nu x \, \frac{\delta\Gamma[\Phi_0^a]}{\delta\Phi^a} \, \delta\Phi^a \qquad I3.8a$$

$$\delta W[J_a] = \int d^\nu x \, \frac{\delta W[J_a]}{\delta J_a} \, \delta J_a \qquad I3.8b$$

impomos que

$$\frac{\delta\Gamma[\Phi_0^a]}{\delta\Phi_0^a} = J_a \qquad I3.9a$$

$$\frac{\delta W[J_a]}{\delta J_a} = -\Phi_0^a \qquad I3.9b$$

então

$$\delta\left\{\Gamma[\Phi_0^a] - W[J_a]\right\} = \int d^\nu x \, [J_a \, \delta\Phi_0^a + \Phi_0^a \, \delta J_a]$$

$$\Gamma[\Phi_0^a] = W[J_a] + \int d^\nu x \, J_a \Phi^a \qquad I3.10$$

A imposição $I3.9$, quando confrontada com as equações de movimento, identifica $\Gamma[\Phi_0^a]$ como uma ação efetiva para a teoria tratada (Ramond, 1983) e, a partir dela, usando $I3.1$, determinamos o potencial efetivo.

É interessante notar que para $\Phi_0^a \equiv 0$

$$\Gamma[0] = W[J_a]\Big|_{\Phi_0^a = -\frac{\delta W}{\delta J_a}} \qquad I3.11$$

que são os gráficos de vácuo conexos e 1PI.

b) O Potencial Efetivo na Ordem Dominante em $1/N$

Vamos calcular o potencial efetivo a partir da definição $I3.6$ para $Z[J_a]$, pelo método do "steepest descent" funcional.

De antemão supomos que exista uma solução Φ_0 para as equações de movimento clássicas. Substituindo em $I3.6$ Φ^a por $\Phi_0^a + \Phi^a$, como a medida da integração funcional é invariante por translação, temos

$$Z[J_a] = \mathcal{N} \int \prod_{a=1}^{2N+2} d\Phi^a \; \mathrm{e}^{-N\left\{A[\Phi_0^a + \Phi_0] - \int d^\nu x \, J_a \Phi^a\right\}} \qquad I3.12$$

Expandindo a ação em série de Taylor funcional em torno de Φ_0^a temos

$$\begin{aligned} Z[J_a] = \mathcal{N} \int \prod_{a=1}^{2N+2} d\Phi^a \; \exp -N \Bigg\{ & A[\Phi_0^a] + \int d^\nu x \, \frac{\delta A[\Phi^a]}{\delta \Phi^a}\Bigg|_{\Phi^a = \Phi_0^a} \Phi^a + \\ & + \frac{1}{2} \int d^\nu x \, d^\nu y \, \Phi^a(x) \frac{\delta^2 A[\Phi]}{\delta \Phi^a(x) \delta \Phi^b(y)}\Bigg|_{\substack{\Phi^a = \Phi_0^a \\ \Phi^b = \Phi_0^b}} \Phi^b(y) + \\ & + A_1[\Phi_o^a; \Phi^a] - \int d^\nu x \, J_a \Phi_0^a - \int d^\nu x \, J_a \Phi^a \Bigg\} \end{aligned} \qquad I3.13$$

usando o fato que

$$\left.\frac{\delta A[\Phi]}{\delta \Phi^a}\right|_{\Phi^a=\Phi_0^a} = J_a \qquad I3.14$$

a expressão $I3.13$ se tornará

$$Z[J_a] = \mathrm{e}^{-N\left\{A[\Phi_0^a]-\int d^\nu x\, J_a \Phi_0^a\right\}} \int \prod_{a=1}^{2N+2} d\Phi^a \times$$
$$\times\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int d^\nu x\, d^\nu y\, \Phi^a(x)\, D_{ab}^{-1}[\Phi_0;x,y]\, \Phi^b(y)}\, Z_2[J] \qquad I3.15$$

onde

$$D_{ab}^{-1}[\Phi_0;x,y] = -\left.\frac{\delta^2 A[\Phi]}{\delta\Phi^a(x)\delta\Phi^b(y)}\right|_{\substack{\Phi^a=\Phi_0^a\\ \Phi^b=\Phi_0^b}} \qquad I3.16$$

e

$$Z_2[J_a] = \frac{\int \prod_{a=1}^{2N+2} d\Phi^a\ \mathrm{e}^{-\left(\int d^\nu x\, d^\nu y\, \frac{N}{2}\Phi^a(x)\, D_{ab}^{-1}[\Phi_0;x,y]\, \Phi^b(y) + A_1[\Phi_0;\Phi]\right)}}{\int \prod_{a=1}^{2N+2} d\Phi^a\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int d^\nu x\, d^\nu y\, \Phi^a(x)\, D_{ab}^{-1}[\Phi_0;x,y]\, \Phi^b(y)}} \qquad I3.17$$

$Z_2[J_a]$ depende de J_a através de Φ_0. É o funcional gerador das funções de Green de uma teoria cuja ação é

$$A_0[\Phi_0;\Phi] = \frac{N}{2}\int d^\nu x\, d^\nu y\, \Phi^a(x)\, D_{ab}^{-1}[\Phi_0;x,y]\, \Phi^b(y) + A_1[\Phi_0;\Phi] \qquad I3.18$$

É uma teoria com vértices não-locais, pois dependem de $\Phi_0(x)$ em pontos distintos e o propagador não é invariante por translação.

Fazendo a integração funcional indicada em $I3.15$ e usando a definição $I3.7$ de $W[J_a]$, temos

$$W[J_a] = A[\Phi_0^a] - \int d^\nu x\, J_a \Phi_0^a + \frac{1}{2N}\ln\left(\det(D_{ab}^{-1})\right) - \frac{1}{N}\ln Z_2 \qquad I3.19$$

O cálculo de $1/2N \ln\left(\det(D_{ab}^{-1})\right)$ (Apêndice IA) mostra que a contribuição dominante em $1/N$ advém deste termo.

Efetuando a transformação de Legendre $I3.10$ a partir de $I3.19$ temos que a ação efetiva na ordem dominante em $1/N$ será

$$\Gamma[\Phi_0^a] = A[\Phi_0^a] + \frac{1}{2N} \ln\left(\det(D_{ab}^{-1}[\Phi_0^a; x, y])\right) \qquad I3.20$$

Para o cálculo do potencial efetivo vamos escolher a configuração de campos constantes

$$\Phi_0 = (\chi, \rho, \phi, \psi, 0, \ldots, 0) \qquad I3.21$$

Esta escolha não leva a uma perda de generalidade. Implica, simplesmente, em que estamos escolhendo de antemão as direções no espaço $O(N) \times O(N)$ onde possa vir a ocorrer uma quebra espontânea de simetria. Por outro lado simplifica bastante os cálculos. Assim

$$\begin{aligned}
V_{Ef} =& V_{Ef}[\chi, \rho, \phi, \psi] \\
V_{Ef} =& -\frac{1}{h_1}\chi^2 + \frac{2\mu_1^2}{d}\chi + \chi\phi^2 + \int \frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu} \ln\left(1 + \frac{\chi}{k^2}\right) - \\
& - \frac{1}{h_2}\rho^2 + \frac{2\mu_2^2}{d}\rho + \rho\psi^2 + \int \frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu} \ln\left(1 + \frac{\rho}{k^2}\right) + \\
& + \frac{2}{h_{12}}\chi\rho \qquad I3.22
\end{aligned}$$

A expressão $I3.22$, para o potencial efetivo, é apenas formal, pois contém para $\nu \geq 1$ divergências ultra-violetas que precisam ser tratadas. No entanto, ainda neste tópico—construção do potencial efetivo e equações de massa ("gap")—prosseguimos, mesmo que, apenas formalmente.

As equações de vínculos quânticas são

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\chi}\right|_{\Phi=\Phi_0} = 0 \qquad \phi^2 = \frac{2}{h_1}\chi - \frac{2\mu_1^2}{d} - \int \frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu}\frac{1}{k^2+\chi} - \frac{2}{h_{12}}\rho \qquad I3.23a$$

$$\left.\frac{\delta\Gamma[\Phi]}{\delta\rho}\right|_{\Phi=\Phi_0} = 0 \qquad \psi^2 = \frac{2}{h_2}\rho - \frac{2\mu_2^2}{d} - \int \frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu}\frac{1}{k^2+\rho} - \frac{2}{h_{12}}\chi \qquad I3.23b$$

Estas são difíceis de serem invertidas para obtermos $\chi = \chi(\phi,\psi)$ e $\rho = \rho(\phi,\psi)$ e assim obtermos o potencial efetivo $V_{Ef}\,[\chi[\phi,\psi],\rho[\phi,\psi],\phi,\psi]$ em termos dos campos básicos do modelo.

O estado fundamental da teoria é determinado pelo mínimo de $V_{Ef}[\phi,\psi]$. Buscamos este ponto a partir dos pontos estacionários de $V_{Ef}[\chi,\rho,\phi,\psi]$. Ou seja, das soluções do sistema de equações

$$\frac{\partial V_{Ef}}{\partial\chi} = 0 \qquad \phi^2 = \frac{2}{h_1}\chi - \frac{2\mu_1^2}{d} - \int \frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu}\frac{1}{k^2+\chi} - \frac{2}{h_{12}}\rho \qquad I3.24a$$

$$\frac{\partial V_{Ef}}{\partial\rho} = 0 \qquad \psi^2 = \frac{2}{h_2}\rho - \frac{2\mu_2^2}{d} - \int \frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu}\frac{1}{k^2+\rho} - \frac{2}{h_{12}}\chi \qquad I3.24b$$

$$\frac{\partial V_{Ef}}{\partial\phi} = 0 \qquad \chi\phi = 0 \qquad I3.24c$$

$$\frac{\partial V_{Ef}}{\partial\psi} = 0 \qquad \rho\psi = 0 \qquad I3.24d$$

Já que não conseguimos construir $V_{Ef}[\phi,\psi]$, construimos $V_{Ef}[\chi,\rho]$, substituindo $I3.23$ em $I3.22$, obtendo

$$V_{Ef}[\chi,\rho] = +\frac{1}{h_1}\chi^2 - \chi\int\frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu}\frac{1}{k^2+\chi} + \int\frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu}\ln\left(1+\frac{\chi}{k^2}\right) +$$
$$+\frac{1}{h_2}\rho^2 - \rho\int\frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu}\frac{1}{k^2+\rho} + \int\frac{d^\nu k}{(2\pi)^\nu}\ln\left(1+\frac{\rho}{k^2}\right) -$$
$$-\frac{2}{h_{12}}\chi\rho \qquad I3.25$$

De novo, se nos reportarmos aos trabalhos já citados sobre o modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$, verificaremos os dois $O(N)$'s acoplados. O acoplamento desaparece se fizermos $1/h_{12} = 0$

É o quadro das possíveis soluções do sistema de equações $I3.24$ que nos dirá sobre possíveis quebras espontâneas de simetria.

Simetria Inicial	Simetria Quebrada	Solução de $I3.24$
$O(N)\times O(N)$	$O(N-1)\times O(N)$ $O(N)\times O(N-1)$ $O(N-1)\times O(N-1)$	$\chi=0,\ \rho\neq0,\ \phi\neq0,\ \psi=0$ $\chi\neq0,\ \rho=0,\ \phi=0,\ \psi\neq0$ $\chi=0,\ \rho=0,\ \phi\neq0,\ \psi\neq0$
	Simetria Preservada	
$O(N)\times O(N)$	$O(N)\times O(N)$	$\chi\neq0,\ \rho\neq0,\ \phi=0,\ \psi=0$

Tabela I1–Possíveis soluções de $I3.24$.

Estas soluções são indicativas. Para caracterizá-las precisamos verificar se são pontos de mínimos estáveis do potencial efetivo. E aí, a exemplo do que foi feito para o modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$, a expressão $I3.25$ para $V_{Ef}[\chi,\rho]$ serve como balizamento nesta verificação.

I4–QUEBRA ESPONTÂNEA DE SIMETRIA
Soluções das Equações de Massa ("Gap")

Dispondo das expressões formais do potencial efetivo e das equações de "gap", passamos a analisar o modelo no que tange à quebra espontânea de simetria. $\phi^2 \geq 0$ e $\psi^2 \geq 0$ é uma restrição sempre presente nas nossas considerações.

I4.1–EM DUAS DIMENSÕES

As expressões formais contêm divergências ultra-violetas que precisam ser canceladas. Efetuamos estes cancelamentos, renormalizando os parâmetros nus, até agora presentes nas expressões $I3.22$, $I3.23$ e $I3.24$, da seguinte forma

$$\left.\frac{1}{h_1}\right|_{Ren} = \frac{1}{h_1} \qquad I4.1a$$

$$\left.\frac{2\mu_1^2}{d}\right|_{Ren} = \frac{2\mu_1^2}{d} + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{k^2+M^2} \qquad I4.1b$$

$$\left.\frac{1}{h_2}\right|_{Ren} = \frac{1}{h_2} \qquad I4.1c$$

$$\left.\frac{2\mu_2^2}{d}\right|_{Ren} = \frac{2\mu_2^2}{d} + \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{k^2+M^2} \qquad I4.1d$$

$$\left.\frac{1}{h_{12}}\right|_{Ren} = \frac{1}{h_{12}} \qquad I4.1e$$

onde M é o ponto de renormalização.

Em termos dos parâmetros renormalizados—vamos escrevê-los sem o subscrito "*Ren*" para não carregar a notação—o potencial efetivo será

$$V_{Ef} = -\frac{1}{h_1}\chi^2 - \frac{\chi}{4\pi}\ln\frac{\chi}{\chi_0(M)} + \chi\phi^2 - \frac{1}{h_2}\rho^2 - \\ - \frac{\rho}{4\pi}\ln\frac{\rho}{\rho_0(M)} + \rho\psi^2 + \frac{2}{h_{12}}\chi\rho \qquad I4.2$$

onde

$$\chi_0(M) = M^2 \exp\left(-1 - \frac{8\pi\mu_1^2}{d}\Big|_{Ren}\right) \qquad I4.3a$$

$$\rho_0(M) = M^2 \exp\left(-1 - \frac{8\pi\mu_2^2}{d}\Big|_{Ren}\right) \qquad I4.3b$$

Para evitar que o potencial efetivo desenvolva uma parte imaginária, desnecessária na determinação do estado fundamental, impomos que $\chi \geq 0$ e $\rho \geq 0$.

Em termos dos parâmetros renormalizados, o sistema de equações $I4.1$ será

$$\phi^2 = \frac{2}{h_1}\chi - \frac{2}{h_{12}}\rho + \frac{1}{4\pi}\ln\frac{e\chi}{\chi_0(M)} \qquad I4.4a$$

$$\psi^2 = \frac{2}{h_2}\rho - \frac{2}{h_{12}}\chi + \frac{1}{4\pi}\ln\frac{e\rho}{\rho_0(M)} \qquad I4.4b$$

$$\chi\phi = 0 \qquad I4.4c$$

$$\rho\psi = 0 \qquad I4.4d$$

E o potencial efetivo como função de χ e ρ é

$$V_{Ef}[\chi,\rho] = \frac{1}{h_1}\chi^2 + \frac{1}{4\pi}\chi + \frac{1}{h_2}\rho^2 + \frac{1}{4\pi}\rho - \frac{2}{h_{12}}\chi\rho \qquad I4.5$$

É facilmente verificável que $V_{Ef}[\chi,\rho]$ é uma função convexa cujo valor mínimo na região delimitada por $\chi \geq 0$ e $\rho \geq 0$ ocorre em $\chi = 0$ e $\rho = 0$ e então $V_{Ef}[0,0] = 0$.

Da tabela I1 das possíveis soluções para o sistema de equações $I4.4$, verificamos que nenhuma das possibilidades que implique em quebra espontânea da simetria contínua $O(N) \times O(N)$ satisfaz $I4.4$. Por exemplo a solução $\chi = 0$, $\rho \neq 0$, $\phi \neq 0$, $\psi = 0$ leva a que $\phi^2 \to -\infty$ e isto contradiz a imposição inicial de que $\phi^2 \geq 0$ e $\psi^2 \geq 0$. Este resultado é concordante com o teorema de Coleman-Mermin-Wagner.

Temos, no entanto, de mostrar que a solução $\chi \neq 0$, $\rho \neq 0$, $\phi = 0$, $\psi = 0$, para $I4.4$, existe e corresponde ao mínimo do potencial efetivo. Para facilitar esta tarefa consideraremos o modelo $O(N) \times O(N)$ com a simetria discreta

$$\phi \to \psi \qquad \text{e} \qquad \psi \to \phi$$

e portanto

$$\frac{1}{h_1} = \frac{1}{h_2} = \frac{1}{h} \qquad \chi_0(M) = \rho_0(M) = \alpha_0(M)$$

Assim, as equações $I4.4$ serão reduzidas a

$$\frac{2}{h}\chi - \frac{2}{h_{12}}\rho + \frac{1}{4\pi}\ln\frac{e\chi}{\alpha_0(M)} = 0 \qquad I4.6a$$

$$\frac{2}{h}\rho - \frac{2}{h_{12}}\chi + \frac{1}{4\pi}\ln\frac{e\rho}{\alpha_0(M)} = 0 \qquad I4.6b$$

Reescalonando $\chi \to \alpha_0(M)\chi/e$ e $\rho \to \alpha_0(M)\rho/e$ temos

$$a(M)\,\chi - b(M)\,\rho + \ln\chi = 0 \qquad I4.7a$$

$$a(M)\,\rho - b(M)\,\chi + \ln\rho = 0 \qquad I4.7b$$

Subtraindo $I4.7b$ de $I4.7a$, temos

$$(a(M) + b(M))\,(\chi - \rho) = \ln\rho/\chi \qquad I4.8$$

Esta equação indica que a solução para o sistema $I4.7$ está na reta $\chi = \rho$, pois se $\chi > \rho$ ou $\chi < \rho$ os dois lados de $I4.8$ são incompatíveis.

Esboçamos na figura I1 a solução gráfica do sistema de equações $I4.7$.

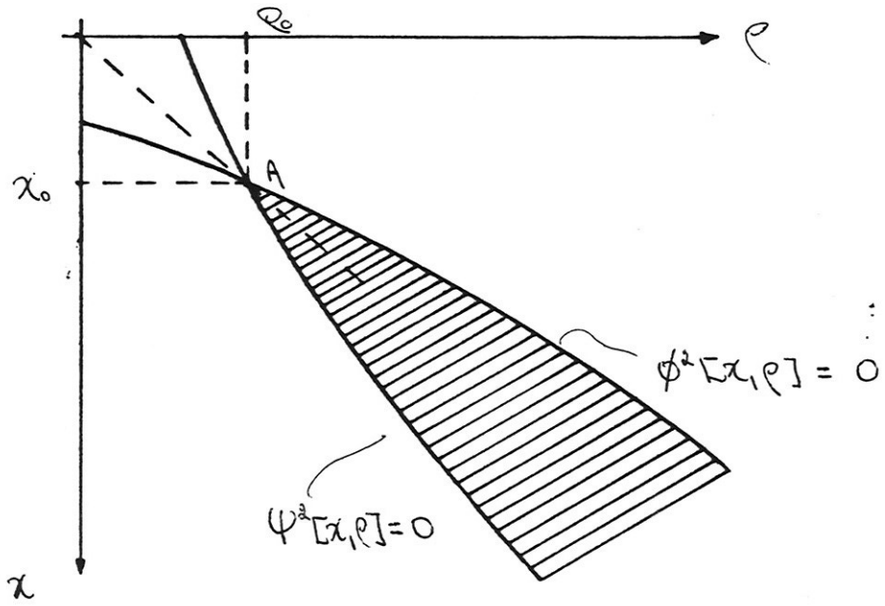


Figura I1–Solução gráfica do sistema de equações $I4.7$.

A condição imposta por $I4.8$ implica em que sempre haverá uma única solução para $I4.7$. É na região hachurada, inclusive a fronteira, que temos $\phi^2 \geq 0$ e/ou $\psi^2 \geq 0$ (é a região de validade do modelo). Como o menor valor do potencial ocorre no ponto mais próximo da origem, então, na região de validade, o mínimo do potencial ocorre no ponto A onde $\phi^2 = 0$ e $\psi^2 = 0$. Concluímos portanto que não há quebra espontânea de simetria. Como já era esperado.

I4.2–EM QUATRO DIMENSÕES A TEMPERATURA FINITA

Como já foi demonstrado, por vários autores, o procedimento para renormalizar uma TQCTF é o mesmo adotado para renormalizar a referida teoria a temperatura zero. As divergências ultra-violetas independem da temperatura. Assim eliminamos as divergências presentes nas expressões formais $I3.22$, $I3.23$ e $I3.24$, renormalizando os parâmetros nus da seguinte maneira

$$\frac{1}{h_1}\bigg|_{Ren} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{2}\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2(k^2+M^2)} \qquad I4.9a$$

$$\frac{2\mu_1^2}{d}\bigg|_{Ren} = \frac{2\mu_1^2}{d} + \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2} \qquad I4.9b$$

$$\frac{1}{h_2}\bigg|_{Ren} = \frac{1}{h_2} + \frac{1}{2}\int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2(k^2+M^2)} \qquad I4.9c$$

$$\frac{2\mu_2^2}{d}\bigg|_{Ren} = \frac{2\mu_2^2}{d} + \int^{\Lambda} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{k^2} \qquad I4.9d$$

$$\frac{1}{h_{12}}\bigg|_{Ren} = \frac{1}{h_{12}} \qquad I4.9e$$

onde M^2 é um parâmetro de escala associado ao ponto de renormalização e Λ o "cut off" ultravioleta usado na regularização das integrais.

É interessante observar que não há nescessidade de subtrair infinitos do parâmetro de acoplamento mútuo $1/h_{12}$. Ele já é finito. E, apesar de estarmos tratando o modelo numa ordem superior a um "loop", o fator de renormalização da função de onda é 1 (um).

O fato de usarmos as expressões $I4.9$ para renormalizar o modelo nos permite, de imediato, descrevê-lo em termos de parâmetros invariantes por mudanças no ponto de renormalização. É evidente que

$$\frac{2\mu_1^2}{d}\bigg|_{Ren} = -\phi_0^2 \qquad \frac{2\mu_2^2}{d}\bigg|_{Ren} = -\psi_0^2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{h_{12}}\bigg|_{Ren} = \frac{1}{h_{12}} \qquad I4.10$$

não dependem de M^2. Por outro lado, para $1/h_1\big|_{Ren}$ (o mesmo para $1/h_2\big|_{Ren}$) observamos que

$$\frac{1}{h_1(M)} - \frac{1}{h_1(M')} = \frac{1}{32\pi^2}\ln\left(\frac{M'}{M}\right)^2 \qquad I4.11$$

Então definimos

$$\chi_0 = M^2\, e^{\frac{32\pi^2}{h_1(M)}} \qquad \rho_0 = M^2\, e^{\frac{32\pi^2}{h_2(M)}} \qquad I4.12$$

estes são parâmetros positivos, independentes do ponto de renormalização M^2. São escalas naturais de massa com os quais redefinimos os campos

$$\chi \to \chi_0\chi \qquad \rho \to \rho_0\rho \qquad I4.13$$

Em termos destes novos parâmetros o potencial efetivo passa a ser

$$\begin{aligned} V_{Ef} = &+ \frac{\chi_0^2\chi^2}{32\pi^2}\ln\frac{\chi}{\sqrt{e}} + \chi_0\chi(\phi^2-\phi_0^2) + \frac{\pi^2}{45}T^4\left[1 - E\left(\frac{\chi_0\chi}{T^2}\right)\right] + \\ &+ \frac{\rho_0^2\rho^2}{32\pi^2}\ln\frac{\rho}{\sqrt{e}} + \rho_0\rho(\psi^2-\psi_0^2) + \frac{\pi^2}{45}T^4\left[1 - E\left(\frac{\rho_0\rho}{T^2}\right)\right] - \\ &- \frac{2}{h}\chi_0\rho_0\chi\rho \end{aligned} \qquad I4.14$$

e as equações de vínculo serão

$$\phi^2 = \phi_0^2 - \frac{\chi_0\chi}{16\pi^2}\ln\chi - \frac{T^2}{12}F\left(\frac{\chi_0\chi}{T^2}\right) + \frac{2}{h}\rho_0\rho \qquad I4.15a$$

$$\psi^2 = \psi_0^2 - \frac{\rho_0\rho}{16\pi^2}\ln\rho - \frac{T^2}{12}F\left(\frac{\rho_0\rho}{T^2}\right) + \frac{2}{h}\chi_0\chi \qquad I4.15b$$

$$\chi\phi = 0 \qquad I4.15c$$

$$\rho\psi = 0 \qquad I4.15d$$

onde

$$E(x) = -\frac{45}{\pi^4}\int_0^\infty dy\, y \ln\left(1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{y^2+x^2}}\right)$$

$$F(x) = -\frac{4\pi^2}{15}\frac{d}{dx}E(x)$$

são resultados, bastante conhecidos, dos cálculos do modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$ a temperatura finita.

Substituindo $I4.15a$ e b em $I4.14$, obtemos o potencial efetivo $V_{Ef}[\chi, \rho, \phi(\chi,\rho), \psi(\chi,\rho)]$ como função dos campos de χ e ρ

$$\begin{aligned} V_{Ef}[\chi,\rho] = &-\frac{\chi_0^2\chi^2}{32\pi^2}\ln\sqrt{e}\chi - \chi_0\chi\frac{T^2}{12}F\left(\frac{\chi_0\chi}{T^2}\right) + \frac{\pi^2}{45}T^4\left[1 - E\left(\frac{\chi_0\chi}{T^2}\right)\right] - \\ &-\frac{\rho_0^2\rho^2}{32\pi^2}\ln\sqrt{e}\rho - \rho_0\rho\frac{T^2}{12}F\left(\frac{\rho_0\rho}{T^2}\right) + \frac{\pi^2}{45}T^4\left[1 - E\left(\frac{\rho_0\rho}{T^2}\right)\right] + \\ &+\frac{2}{h}\chi_0\rho_0\chi\rho \end{aligned} \qquad I4.16$$

Da tabela I1 das possíveis soluções para o sistema de equações $I4.15$, verificamos que todas as possibilidades são factíveis a depender dos parâmetros ϕ_0^2, χ_0, ψ_0^2, ρ_0 e $1/h$. Por exemplo, a solução $\chi = 0$, $\rho = 0$, $\phi \neq 0$, $\psi \neq 0$, com quebra da simetria $O(N) \times O(N)$, indo para $O(N-1) \times O(N-1)$, leva o sistema $I4.15$ para

$$\begin{aligned} \phi^2 =& \phi_0^2 - T^2/12 \\ \psi^2 =& \psi_0^2 - T^2/12 \end{aligned} \qquad I4.17$$

Este, evidentemente tem solução real se $\phi_0^2 \geq T^2/12$ e $\psi_0^2 \geq T^2/12$. É interessante observar, já aqui, que a temperatura poderá restaurar a simetria levando $O(N-1) \times O(N-1)$ para $O(N) \times O(N-1)$ ou $O(N) \times O(N)$. Na situação particular em que tenhamos $\phi_0^2 = \psi_0^2$, haverá uma temperatura crítica $T_c = \sqrt{12\phi_0^2}$, que restaurará a simetria $O(N) \times O(N)$.

Do conjunto de soluções de $I4.15$ devemos extrair a que corresponda ao mínimo do potencial efetivo—o estado fundamental—e daí verificar a existência ou não de quebra espontânea de simetria.

Para a determinação do estado fundamental a temperatura finita, nos guiaremos pelo comportamento do modelo a temperatura zero, avaliando em cada passo os efeitos térmicos. Como o sistema de $I4.15a$ e b não pode ser resolvido analiticamente, para χ e ρ, analisamos o comportamento do potencial, como função de ϕ e ψ, $U_{Ef}[\phi^2, \psi^2; T]$, indiretamente através de $V_{Ef}[\chi, \rho, \phi^2, \psi^2; T]$, $V_{Ef}[\chi, \rho; T]$, $\phi^2[\chi, \rho; T]$ e $\psi^2[\chi, \rho; T]$. Este procedimento indireto já foi adotado para se estudar o modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$ e o modelo de Higgs abeliano.

Abrir Parêntesis: Relembremos o modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$

Neste ponto vamos fazer uma pequena pausa na análise do modelo $O(N) \times O(N)$ para relembrarmos aqueles aspectos do modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$ que achamos relevantes para o proseguimento do nosso estudo.

Um tratamento bastante detalhado deste modelo foi feito por da Silva na sua tese de livre-docência. Aqui faremos, simplesmente, uma releitura deste trabalho.

A oportunidade disto se deve ao fato de que o modelo $O(N) \times O(N)$ se reduz a um $\lambda\phi^4 - O(N)$ nos planos de corte $\chi = 0$ e $\rho = 0$. Poderemos, então, mais adiante, "compor" o modelo $O(N) \times O(N)$ a partir de suas "projeções" sobre os planos $\chi = 0$ e $\rho = 0$ e $\chi\rho$.

As expressões básicas para a determinação do estado fundamental do modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$ são: a expressão do potencial efetivo como função de χ e ϕ^2

$$V_{Ef}[\chi, \phi^2; T] = \frac{\chi_0^2 \chi^2}{32\pi^2} \ln \frac{\chi}{\sqrt{e}} + \chi_0 \chi(\phi^2 - \phi_0^2) + \frac{\pi^2}{45} T^4 \left[1 - E\left(\frac{\chi_0 \chi}{T^2}\right)\right] \quad I4.18$$

as equações de vínculos entre χ e ϕ^2

$$\chi\phi = 0 \qquad I4.19a$$

$$\phi^2 = \phi_0^2 - \frac{\chi_0\chi}{16\pi^2}\ln\chi - \frac{T^2}{12}F\left(\frac{\chi_0\chi}{T^2}\right) \qquad I4.19a$$

e o potencial efetivo como função de χ

$$V_{Ef}[\chi;T] = -\frac{\chi_0^2\chi^2}{32\pi^2}\ln\sqrt{e}\chi - \chi_0\chi\frac{T^2}{12}F\left(\frac{\chi_0\chi}{T^2}\right) + \frac{\pi^2}{45}T^4\left[1 - E\left(\frac{\chi_0\chi}{T^2}\right)\right] \qquad I4.20$$

Todas elas obtidas a partir das suas correspondente $I4.15$ e $I4.16$, tomando $\rho = 0$ (projetando sobre o plano $\rho = 0$).

Além das expressões acima, dois outros dados serão considerados: primeiro, suporemos uma temperatura suficientemente alta para que possamos tomar $F(\sim 0) = 1$ e $E(\sim 0) = 1$; segundo, nos restrigiremos a apenas valores reais para o potencial efetivo. Isto nos impõe valores de χ reais não negativos ($\chi \geq 0$) por conta do termo $\chi^2 \ln\chi$ em $I4.18$ e $I4.20$ e introduz limites ao valor máximo de $\phi^2[\chi;T]$. Estas restrições não são feitas por da Silva.

O comportamento de $\phi^2[\chi;T]$ é representado na figura I2 para $\phi_0^2 > 0$ e algumas temperaturas típicas

O modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$ é definido para $\phi^2 \geq 0$ real. Isto em conjunto com a imposição de que $\chi \geq 0$ estabelecem o valor máximo de ϕ^2 como sendo

$$\phi_{Max}^2 = \phi_0^2 - \frac{T^2}{12} + \frac{\chi_0}{16\pi^2}\frac{1}{e}$$

e a consequente relação entre os parâmetros χ_0 e ϕ_0^2 e a temperatura

$$\frac{16\pi^2}{\chi_0}\left(\phi_0^2 - \frac{T^2}{12}\right) \geq -\frac{1}{e} \quad (\text{de} \quad \phi_{Max}^2 \geq 0) \qquad I4.21$$

Há, também, um limite máximo para a temperatura, T_c,

$$T_c = \sqrt{12\phi_0^2 + \frac{3\chi_0}{4\pi^2}\frac{1}{e}}$$

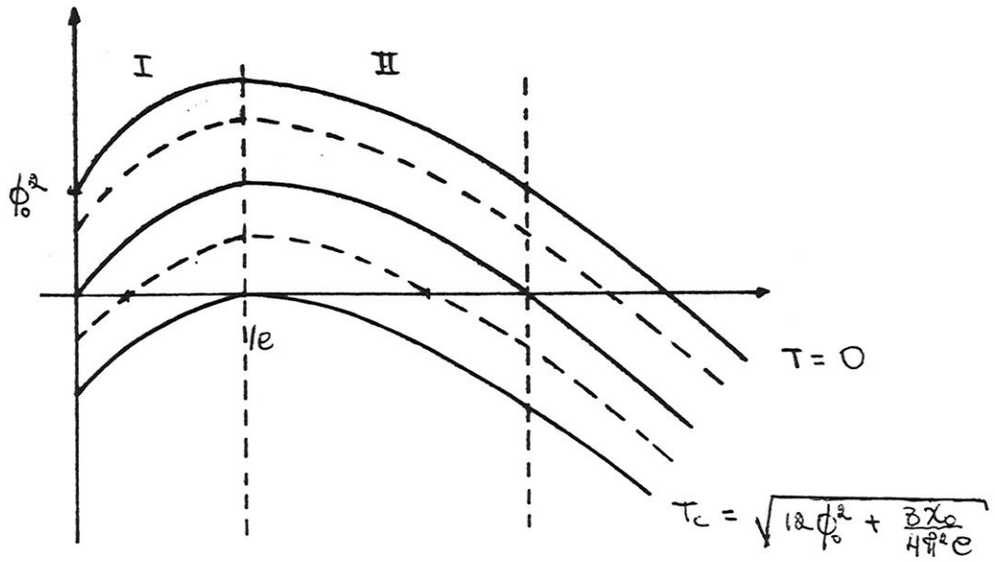


Figura I2–Esboços de gráficos de $\phi^2[\chi;T]$ para algumas temperaturas típicas. $\phi_0^2 > 0$ e $T_c > T > T^*$.

acima da qual o modelo não faz sentido, pois ϕ^2 torna-se negativo.

Como podemos ver dos gráficos da figura I2 , a um mesmo valor de $\phi^2 \geq 0$ correspondem dois valores de χ—$\chi_I < 1/e$ e $\chi_{II} > 1/e$—a não ser para ϕ^2_{Max} onde $\chi_I = \chi_{II} = 1/e$. Usando a expressão $I4.18$, percebemos que o potencial efetivo em termos do campo básico, ϕ, do modelo

$$U_{Ef}[\phi^2;T] = V_{Ef}\left[\chi[\phi^2],\phi^2;T\right]$$

é uma função bivalente (com dois ramos) de ϕ^2; sendo ϕ^2_{Max} o ponto de bifurcação.

Não dispomos de uma expressão analítica para $U_{Ef}[\phi^2;T]$, pois $I4.19b$ (lembre-se $F(0) = 1$) não é inversível—não podemos construir $\chi = \chi[\phi^2]$—no

entanto podemos inferir muito a cerca de $U_{Ef}[\phi^2;T]$, a partir de que

$$\begin{aligned} dU_{Ef}[\phi^2;T] &= dV_{Ef}\left[\chi[\phi^2],\phi^2;T\right] \\ &= \left[\frac{\partial V_{Ef}}{\partial \chi}\frac{d\chi}{d\phi^2} + \frac{\partial V_{Ef}}{\partial \phi^2}\right] d\phi^2 \end{aligned}$$

Usando a equação de movimento para o campo χ e a expressão $I4.18$, temos

$$\frac{\partial V_{Ef}}{\partial \chi} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial V_{Ef}}{\partial \phi^2} = \chi_0 \chi[\phi^2]$$

portanto

$$\frac{dU_{Ef}[\phi^2;T]}{d\phi^2} = \chi_0 \chi[\phi^2] \geq 0 \qquad I4.22$$

O potencial $U_{Ef}[\phi^2;T]$ é uma função crescente de ϕ^2 pelos dois ramos—$\chi_I[\phi^2]$ ou $\chi_{II}[\phi^2]$—independentemente da temperatura. Tem seu valor máximo em ϕ^2_{Max} e seu valor no ramo II é sempre menor que o correspondente no ramo I. De fato, a partir de $I4.22$

$$U_{Ef}[\phi^2;T] = U_{Ef}[\phi^2_{Max};T] - \int_{\phi^2}^{\phi^2_{Max}} d\phi^2\, \chi_0 \chi[\phi^2]$$

como o intervalo de integração e o integrando são positivos e $\chi_{II}[\phi^2] > \chi_I[\phi^2]$, temos

$$U_{Ef}[\phi^2_{Max};T] > U^I_{Ef}[\phi^2;T] > U^{II}_{Ef}[\phi^2;T] \qquad I4.23$$

Os pontos estacionários do potencial efetivo—os vácuos do modelo—entre os quais deve se encontrar o estado fundamental são obtidos de

$$\frac{dU_{Ef}[\phi^2;T]}{d\phi^2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \chi\phi = 0$$

e da relação de vínculo entre ϕ e χ

$$\frac{\partial V_{Ef}[\chi,\phi^2;T]}{\partial\chi}=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \phi^2=\phi_0^2-\frac{T^2}{12}-\frac{\chi_0\chi}{16\pi^2}\ln\chi$$

são, portanto, as soluções do sistema de equações de vínculo $I4.19a$ e b. Os vácuos são de duas naturezas: com quebra espontânea de simetria (QES) $\chi=0$, $\phi^2\neq 0$ e sem quebra espontânea de simetria (SQS) $\chi\neq 0$, $\phi^2=0$.

Na figura I2 vemos que para temperaturas e parâmetros compatíveis com a condição $I4.21$ sempre ocorre um vácuo SQS no ramo II. Já no ramo I tanto pode ocorrer vácuo com QES quanto SQS. Como no ramo II o potencial efetivo é menor que no ramo I ($I4.23$), o estado fundamental do modelo é o vácuo SQS do ramo II.

Estes foram argumentos extraídos dos trabalhos citados. Nós usamos um outro argumento para determinar o mínimo do potencial efetivo—o estado fundamental do modelo. Superpondo em um mesmo gráfico $\phi^2[\chi;T]$ e $V_{Ef}[\chi;T]$, verificamos, pela simples inspeção, que o menor valor do potencial ocorre exatamente para aquele valor de χ no ramo II que torna $\phi^2=0$. Portanto, o estado fundamental é o vácuo SQS do ramo II. Na figura I3, temos este procedimento exemplificado para $T=0$. É evidente que o menor valor do potencial ocorre para χ_A onde $\phi^2=0$. $V_{Ef}[\chi;T]$ é representado na figura I4 para algumas temperaturas.

Uma última observação: foi provado, analisando-se o comportamento da função de vértice de dois pontos (em da Silva, por exemplo), que o vácuo SQS do ramo II é estável e que o vácuo SQS que eventualmente ocorre no ramo I é instável—é um vácuo falso.

Fechar Parêntesis

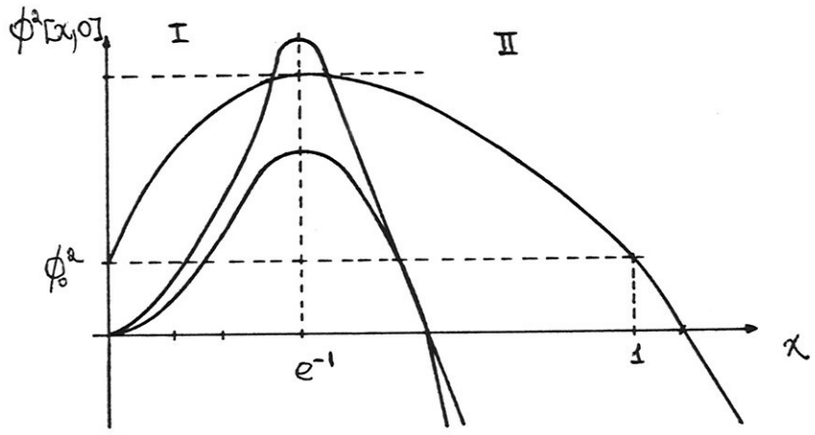


Figura I3–Curva 1 representa $\phi^2[\chi;0]$ para $\phi_0^2 > 0$. $V_{Ef}[\chi;0]$ é descrito na curva 2 para $\phi_{Max}^2 > \chi_0^2/64\pi^2e^2$ e na curva 3 para $\phi_{Max}^2 < \chi_0^2/64\pi^2e^2$; em qualquer caso, as raizes e os pontos críticos de $V_{Ef}[\chi;0]$ são sempre os mesmos.

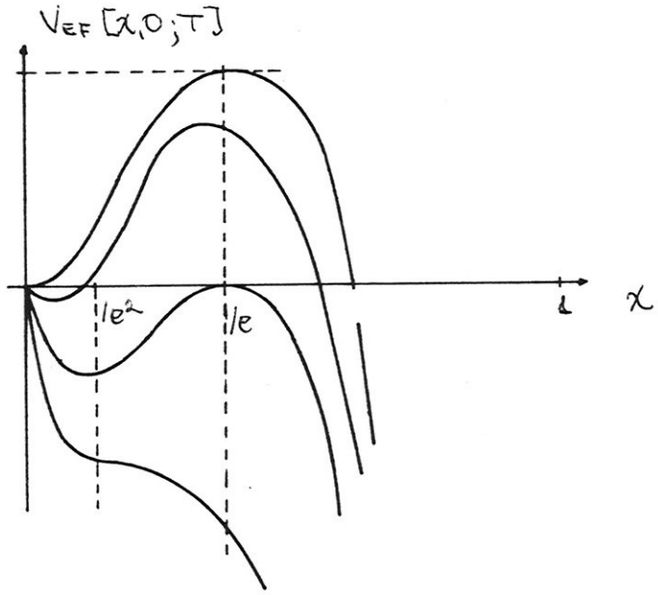


Figura I4–$V_{Ef}[\chi;T]$ para algumas temperaturas. A temperatura deforma $V_{Ef}[\chi;T]$, no entanto, não muda o ponto χ_A onde ocorre o seu menor valor.

Com o que foi dito acerca do modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$ em mente voltemos à determinação do estado fundamental do modelo $O(N) \times O(N)$.

Nas nossas análises, levaremos em conta que a temperatura é suficientemente elevada para que possamos tomar $F(\sim 0) = 1$ e $E(\sim 0) = 1$. As expressões básicas se tornarão: o potencial efetivo

$$\begin{aligned} V_{Ef}[\chi, \rho, \phi^2, \psi^2; T] = &+ \frac{\chi_0^2 \chi^2}{32\pi^2} \ln \frac{\chi}{\sqrt{e}} + \chi_0 \chi(\phi^2 - \phi_0^2) + \\ &+ \frac{\rho_0^2 \rho^2}{32\pi^2} \ln \frac{\rho}{\sqrt{e}} + \rho_0 \rho(\psi^2 - \psi_0^2) - \\ &- \frac{2}{h} \chi_0 \rho_0 \chi \rho \,, \end{aligned}$$

as equações de vínculos entre os campos

$$\phi^2 = \left(\phi_0^2 - \frac{T^2}{12}\right) - \frac{\chi_0 \chi}{16\pi^2} \ln \chi + \frac{2}{h} \rho_0 \rho \qquad I4.24a$$

$$\psi^2 = \left(\psi_0^2 - \frac{T^2}{12}\right) - \frac{\rho_0 \rho}{16\pi^2} \ln \rho + \frac{2}{h} \chi_0 \chi \qquad I4.24b$$

$$\chi\phi = 0 \qquad I4.24c$$

$$\rho\psi = 0 \qquad I4.24d$$

e o potencial efetivo como função dos campos auxiliares χ e ρ

$$\begin{aligned} V_{Ef}[\chi, \rho; T] = &- \frac{\chi_0^2 \chi^2}{32\pi^2} \ln \sqrt{e}\chi - \frac{T^2}{12} \chi_0 \chi + \\ &- \frac{\rho_0^2 \rho^2}{32\pi^2} \ln \sqrt{e}\rho - \frac{T^2}{12} \rho_0 \rho + \\ &+ \frac{2}{h} \chi_0 \rho_0 \chi \rho \end{aligned} \qquad I4.25$$

Observamos, nas equações $I4.24a$ e b, que a temperatura tem a função de modificar os valores dos parâmetros ϕ_0^2 e ψ_0^2.

Um tratamento algébrico do problema é impraticável. É impossível inverter o sistema de equações $I4.24a$ e b e obter $\chi[\phi^2, \psi^2; T]$ e $\rho[\phi^2, \psi^2; T]$ e assim construir o potencial efetivo em termos dos campos básicos, ϕ e ψ, a partir do qual encontramos o estado fundamental. Nos resta, então, a possibilidade de um tratamento qualitativo que faremos, analisando o comportamento de $\phi^2[\chi, \rho; T]$, $\psi^2[\chi, \rho; T]$ e $V_{Ef}[\chi, \rho; T]$ no plano $\chi\rho$. Relembramos que o estado fundamental do modelo é a solução do sistema de equações de vínculos (equações $I4.24$) que minimiza o potencial efetivo.

Vejamos algumas propriedades do potencial efetivo e das expressões de $\phi^2[\chi, \rho; T]$ e $\psi^2[\chi, \rho; T]$ que nos serão úteis para a determinação do estado fundamental do modelo.

Por conta do termo $\chi \ln \chi$ presente na expressão de $\phi^2[\chi, \rho; T]$, dois valores distintos de χ—$\chi_I < 1/e$ e $\chi_{II} > 1/e$—fixado ρ podem fornecer o mesmo valor de $\phi^2[\chi, \rho; T]$. Para $\psi^2[\chi, \rho; T]$ é o termo $\rho \ln \rho$ que gera esta situação; criando as regiões $\rho_I < 1/e$ e $\rho_{II} > 1/e$. Isto implicará em que o potencial efetivo, em termos dos campos básicos, ϕ e ψ, seja uma função multi-valente com uma estrutura de folhas bastante complexa (use a expressão $I4.23$).

Ainda devido aos termos logarítmicos, o potencial efetivo pode desenvolver uma parte imaginária inconveniente para as nossas análises. Desejamos evitar instabilidades associadas à criação e destruição de partículas. Isto nos obriga a que $\chi \geq 0$ e $\rho \geq 0$. Esta condição de realidade para o potencial, em conjunto com o fato de que o modelo $O(N) \times O(N)$ é definido para $\phi^2 \geq 0$ e $\psi^2 \geq 0$, nos levam a estabelecer o que chamaremos de região de validade do modelo no plano $\chi\rho$. Região onde $\phi^2 \geq 0$, $\psi^2 \geq 0$ e o potencial efetivo é real, simultaneamente.

O comportamento de $\phi^2[\chi, \rho; T]$ é descrito, graficamente, nas figuras I5a–I5d seguintes.

O comportamento de $\psi^2[\chi, \rho; T]$ é semelhante ao de $\phi^2[\chi, \rho; T]$. Para descrevê-lo, basta trocarmos nas figuras I5a a I5d χ por ρ e, evidentemente,

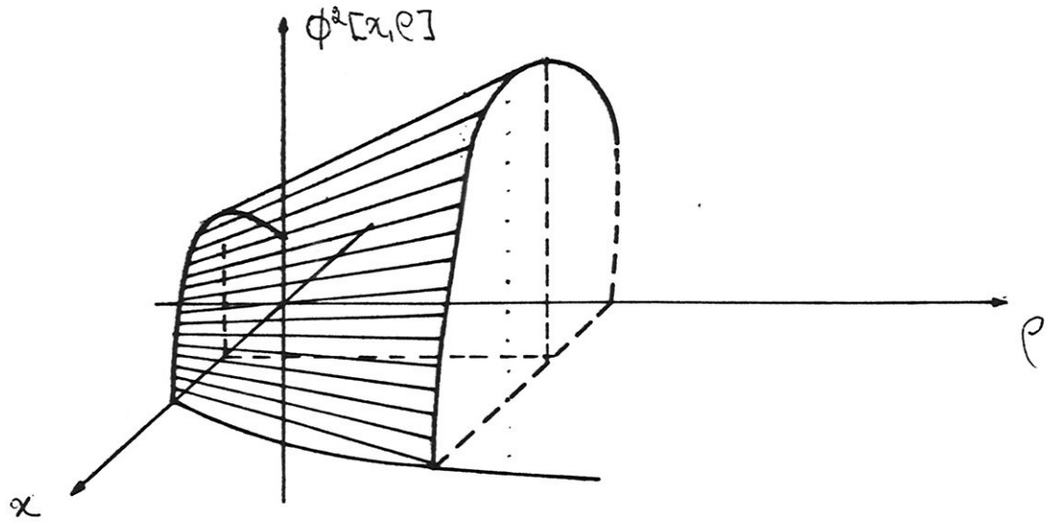


Figura I5a–Esboço da superfície $\phi^2[\chi,\rho;T]$ para $1/h > 0$. Na reta $\chi = 1/e$ estão os máximos para cada corte $\rho =$ const..

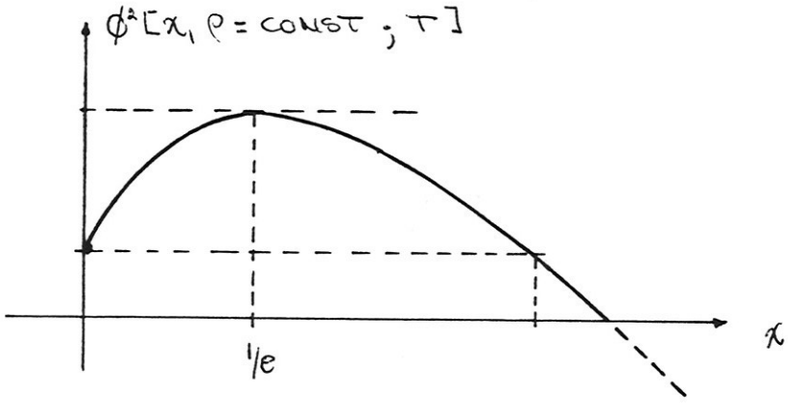


Figura I5b–Gráfico do corte $\phi^2[\chi,\rho;T]$ para $\rho =$ const.. Em cada um destes planos ϕ^2 comporta-se como no modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$. O ϕ^2_{Max} ocorre em $\chi = 1/e$.

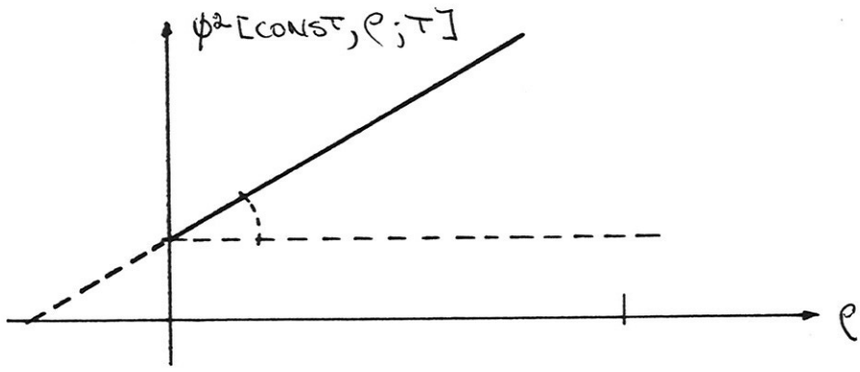


Figura I5c–Corte $\phi^2[\chi, \rho; T]$ no plano $\chi = \text{const.}$. É uma reta cuja declividade é proporcional a $1/h$. Para $1/h < 0$ a "calha" da figura I5a se volta para a esquerda.

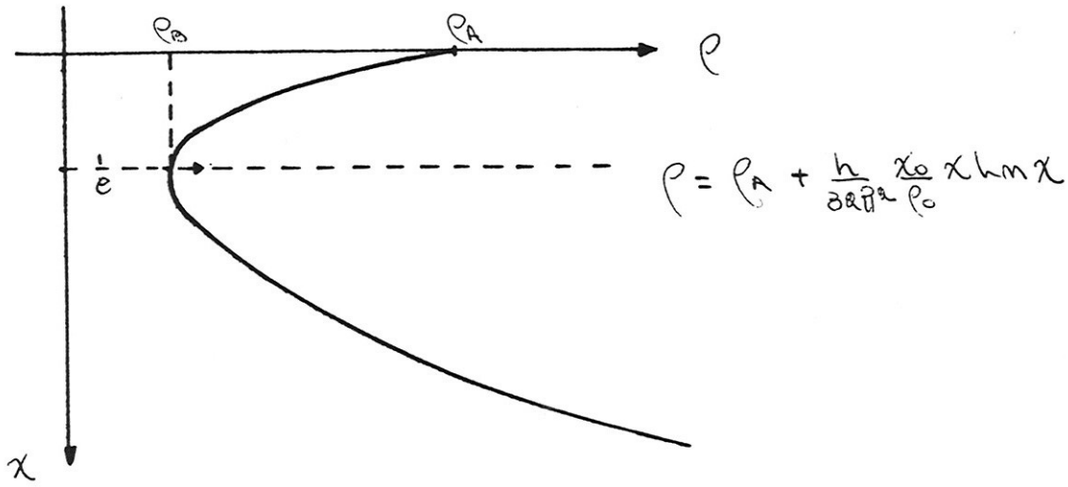


Figura I5d–Esboço da curva de nível $\phi^2[\chi, \rho; T] = \text{const.}$. O vértice está sempre na reta $\chi = 1/e$ quaisquer que sejam os valores dos parâmetros e da temperatura. A seta indica como a curva se desloca com o aumento da temperatura. Na região I $\phi^2[\chi, \rho; T] > \text{const.}$.

χ_0 por ρ_0 e ϕ_0^2 por ψ_0^2. Observe que o eixo das curvas $\psi^2[\chi, \rho; T] = \text{const.}$ é a reta $\rho = 1/e$.

As curvas $\phi^2[\chi, \rho; T] = 0$ e $\psi^2[\chi, \rho; T] = 0$ dividem o plano $\chi\rho$ em várias regiões (figuras I6). Na região I (inclusive fronteiras) $\phi^2 \geq 0$ e/ou $\psi^2 \geq 0$ para χ e ρ reais não-negativos. Esta é, portanto, a região de validade do modelo. Fora da região I $\phi^2[\chi, \rho; T]$ e $\psi^2[\chi, \rho; T]$ só serão positivos simultaneamente se um dos campos χ ou ρ ou os dois forem complexos. Isto introduzirá uma parte imaginária no potencial efetivo que, como já dissemos, pretendemos evitar.

Como podemos ver, nas figuras I6, a região de validade assume várias formas a depender dos parâmetros e da temperatura. Pode até colapsar; não existir. Estabelecem-se, assim, limites para os valores dos parâmetros e temperaturas fora dos quais o modelo não faz sentido, isso é, não se tem $\phi^2[\chi, \rho; T] \geq 0$ e $\psi^2[\chi, \rho; T] \geq 0$ simultaneamente. Diferentemente do caso do modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$, aqui não conseguimos determinar estes limites.

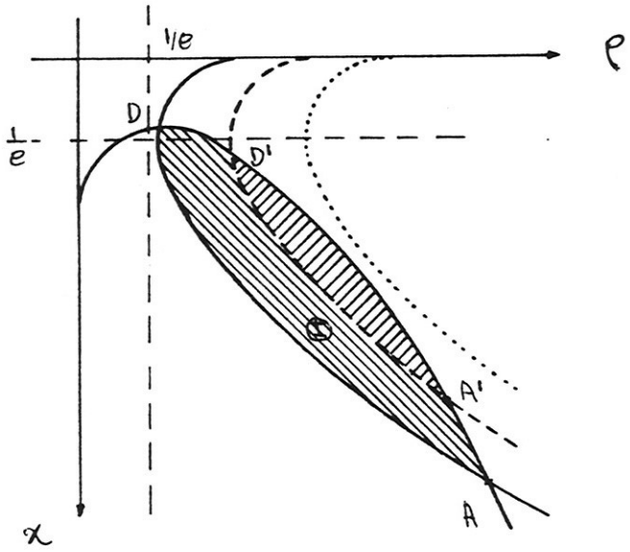


Figura I6a–Exemplos de regiões de validade do modelo para diferentes valores de ϕ_0^2 e/ou T, com $1/h > 0$.

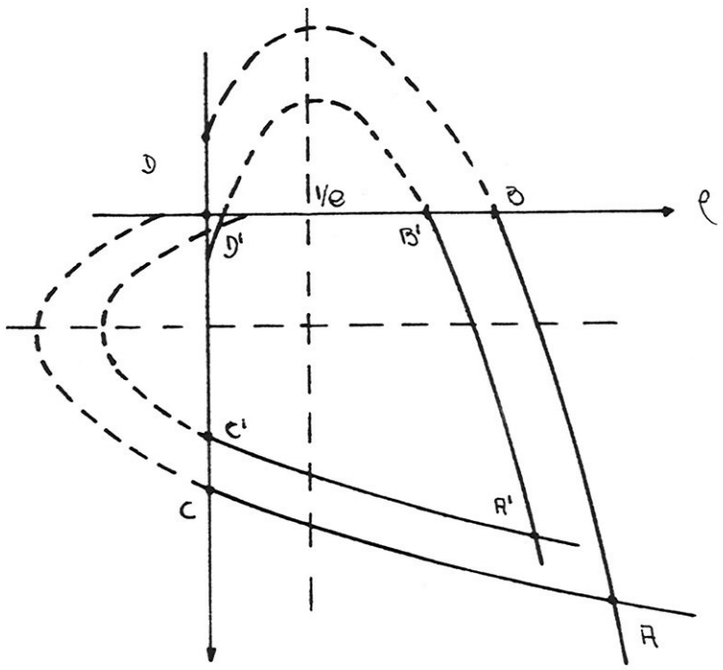


Figura I6b–Outros exemplos de regiões de validade do modelo para $1/h > 0$.

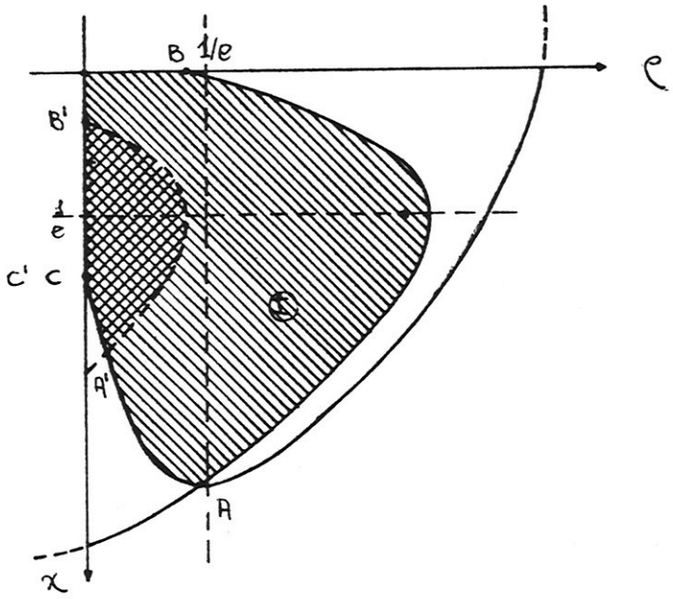


Figura I6c–Regiões de validade do modelo para $1/h < 0$.

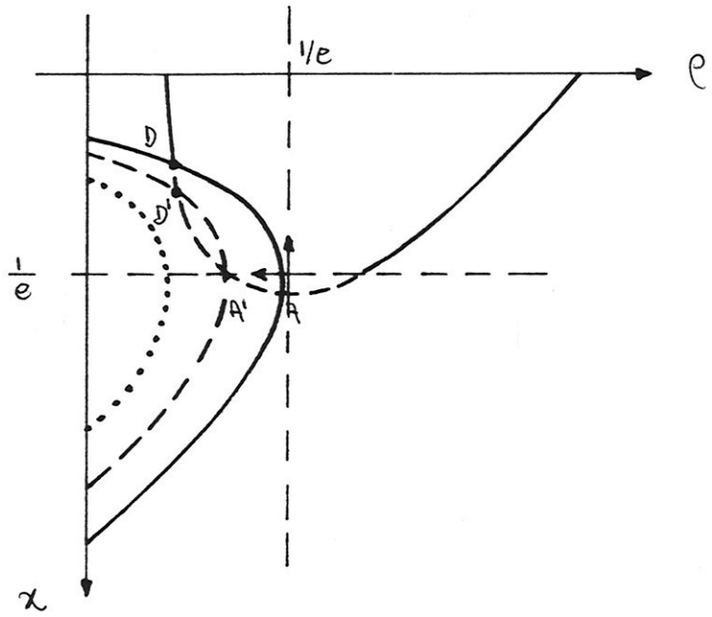


Figura I6d–Outros exemplos de regiões de validade do modelo para $1/h < 0$. As setas indicam como as curvas se deslocam com o aumento da temperatura.

Os pontos de interceção das curvas $\phi^2[\chi,\rho;T] = 0$ e $\psi^2[\chi,\rho;T] = 0$ entre si e com os eixos χ e ρ são as soluções do sistema de equações de vínculos (equações $I4.24$). São os pontos estacionários do potencial efetivo. Na tabela I2, descrevemos as simetrias destas soluções para os casos exemplificados nas figuras I6.

	$O(N)\times O(N)$	$O(N-1)\times O(N)$	$O(N)\times O(N-1)$	$O(N-1)\times O(N-1)$
a	A D A' D'			
b	A A' D'	B B'	C C'	D
c	A A'	B	C B' C'	D
d	A D A' D'			

Tabela I2–Simetrias dos pontos assinalados nas figuras I6.

Observamos ainda, nas figuras I6 (ou equações $I4.24$ se o leitor preferir), que, dado um conjunto de parâmetros ϕ_0^2, ψ_0^2, χ_0, ρ_0 e $1/h$ e uma temperatura T_0 para os quais o modelo faz sentido—a região de validade contém pelo menos um ponto—sempre ocorrerá uma solução SQS. Notamos também que o aumento da temperatura desloca as superfícies $\phi^2[\chi,\rho;T]$ e $\psi^2[\chi,\rho;T]$ nos sentidos indicados pelas setas, podendo desacoplá-las completamente. O aumento ilimitado da temperatura torna o modelo sem sentido. Numa situação não tão drástica o aumento, digamos, razoável da temperatura leva o modelo para uma fase simétrica (figuras I6a e d).

Sobre o potencial $V_{Ef}[\chi,\rho;T]$ observamos que para $T = 0$ e $1/h = 0$ $V_{Ef}[\chi,\rho;T]$ tem dois pontos estacionários. Um mínimo em $(0,0)$ e um máximo em $(1/e,1/e)$. Ao ligarmos o acoplamento mútuo, $1/h \neq 0$, o máximo ocorrerá em $(\overline{\chi} > 1/e, \overline{\rho} > 1/e)$ se $1/h > 0$ ou em $(\overline{\chi} < 1/e, \overline{\rho} < 1/e)$

se $1/h < 0$. A temperatura desloca o máximo e o mínimo na direção do ponto $(1/e^2, 1/e^2)$ e, a exemplo do que ocorre com o modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$, pode deformar o potencial $V_{Ef}[\chi, \rho; T]$ a ponto de suprimir os pontos estacionários.

O comportamento de $V_{Ef}[\chi, \rho; T]$ ao longo de qualquer plano vertical (ao plano $\chi\rho$) que passe pela origem é, qualitativamente, dado por

$$V_{Ef}[\chi, \rho; T] \sim -a\chi^2 \ln(b\chi) - T^2 c\chi \qquad (\text{faça } \rho = \alpha\chi)$$

Ou seja, reduz-se ao potencial do modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$. Portanto, o menor valor de $V_{Ef}[\chi, \alpha\chi; T]$, na região de validade do modelo, ocorrerá para o ponto mais afastado da origem.

Composto o quadro sobre $\phi^2[\chi, \rho; T]$, $\psi^2[\chi, \rho; T]$ e $V_{Ef}[\chi, \rho; T]$ passamos a tratar do potencial efetivo descrito em termos dos campos básicos, ϕ e ψ, do modelo. Apesar de não dispormos da expressão analítica para $U_{Ef}[\phi^2, \psi^2; T]$ sabemos que

$$U_{Ef}[\phi^2, \psi^2; T] = V_{Ef}\left[\chi[\phi^2, \psi^2], \rho[\phi^2, \psi^2], \phi^2, \psi^2; T\right] \qquad I4.26$$

Expressão que esclarece a multivalência do potencial $U_{Ef}[\phi^2, \psi^2; T]$. Vejamos como. Dado um par (ϕ^2, ψ^2) haverá, na região de validade do modelo, até quatro pontos—(χ_I, ρ_I), (χ_I, ρ_{II}), (χ_{II}, ρ_I) e (χ_{II}, ρ_{II})—que fornecem este par (por exemplo na figura I6a os pontos A e D fornecem $\phi^2 = \psi^2 = 0$). Com isso, $U_{Ef}[\phi^2, \psi^2; T]$ poderá assumir até quatro valores.

Ainda da expressão $I4.26$, temos que

$$\begin{aligned} dU_{Ef} &= dV_{Ef} \\ &= \left[\frac{\partial V_{Ef}}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial V_{Ef}}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \phi^2} + \frac{\partial V_{Ef}}{\partial \phi^2}\right] d\phi^2 + \\ &+ \left[\frac{\partial V_{Ef}}{\partial \chi}\frac{\partial \chi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial V_{Ef}}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \psi^2} + \frac{\partial V_{Ef}}{\partial \psi^2}\right] d\psi^2 \end{aligned}$$

Mas das equações de movimento para os campos auxiliares χ e ρ e das expressões $I4.24$, temos

$$\frac{\partial V_{Ef}}{\partial \chi} = 0 \qquad \frac{\partial V_{Ef}}{\partial \rho} = 0 \qquad \frac{\partial V_{Ef}}{\partial \phi^2} = \chi_0 \chi \geq 0 \qquad \frac{\partial V_{Ef}}{\partial \psi^2} = \rho_0 \rho \geq 0 \quad I4.27$$

logo

$$dU_{Ef} = \chi_0 \chi[\phi^2, \psi^2] d\phi^2 + \rho_0 \rho[\phi^2, \psi^2] d\psi^2 \qquad I4.28$$

A solução de $\vec{\nabla} U_{Ef}[\phi^2, \psi^2; T] = 0$, ou seja, de

$$\chi[\phi^2, \psi^2] = 0 \qquad \text{e} \qquad \rho[\phi^2, \psi^2] = 0$$

é o ponto $(\phi_A^2 = \phi_0^2 - T^2/12, \psi_A^2 = \psi_0^2 - T^2/12)$. Observamos que para $\phi^2 = \phi_A^2$ e $\psi^2 = \psi_A^2$ as equações $I4.24a$ e b serão

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\chi_0 \chi}{16\pi^2} \ln \chi + \frac{2}{h} \rho_0 \rho \\ 0 &= -\frac{\rho_0 \rho}{16\pi^2} \ln \rho + \frac{2}{h} \chi_0 \chi \end{aligned} \qquad I4.29$$

Com, evidentemente, duas soluções: uma $(\chi_A = 0, \rho_A = 0)$ e outra $(\chi'_A > 1/e, \rho'_A > 1/e)$.

O potencial $U_{Ef}[\phi_A^2, \psi_A^2; T]$ é bivalente. Para $\chi_A = 0$ e $\rho_A = 0$ (ϕ_A^2, ψ_A^2) é um ponto estacionário de $U_{Ef}[\phi^2, \psi^2; T]$, aliás é um vácuo com QES e $U_{Ef}[\phi_A^2, \psi_A^2; T] = 0$. Para $\chi'_A > 1/e$ e $\rho'_A > 1/e$ $U_{Ef}[\phi_A^2, \psi_A^2; T] \neq 0$. Infelizmente, diferente do modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$, aqui não temos como comparar os dois valores do potencial. Afora o ponto (ϕ_A^2, ψ_A^2) o potencial $U_{Ef}[\phi^2, \psi^2; T]$ é uma função crescente de ϕ^2 e ψ^2 sem máximos ou mínimos locais. A existência de um destes pontos implicaria no gradiente de $U_{Ef}[\phi^2, \psi^2; T]$ ter componentes negativas em pontos próximos do máximo ou mínimo, mas isto contradiz $I4.27$. Portanto, o máximo de $U_{Ef}[\phi^2, \psi^2; T]$ deve estar o

mais afastado da origem, enquanto o mínimo deve estar o mais próximo ou mesmo coincidir com a origem do plano $\phi^2\psi^2$.

Pelo que dissemos sobre $V_{Ef}[\chi,\rho;T]$ (página 44) e sobre $U_{Ef}[\phi^2,\psi^2;T]$, somos levados a concluir que o menor valor do potencial efetivo—o estado fundamental do modelo—ocorre para uma solução SQS do sistema de equações $I4.24$. O ponto mais afastado da origem do plano $\chi\rho$, na região de validade do modelo, é sempre uma solução SQS (figuras I6). A origem do plano $\phi^2\psi^2$ é uma solução SQS.

A determinação do estado fundamental do modelo $O(N)\times O(N)$ na situação mais geral, como fizemos, não é muito precisa. Entretanto, quando particularizamos os parâmetros, fazendo $\phi_0^2=\psi_0^2$ e $\chi_0=\rho_0$, este problema é resolvido completamente.

Neste caso, além da simetria $O(N)\times O(N)$ temos a simetria discreta $\phi\rightleftharpoons\psi$ ou em termos dos campos auxiliares o modelo é simétrico na troca de χ por ρ. Por conta desta simetria o máximo de $V_{Ef}[\chi,\rho;T]$, obrigatoriamente, ocorrerá no plano $\chi=\rho$. Também está neste plano a solução SQS (representada pelos pontos A e A' nas figuras I6). Diante destas peculiaridades, basta estudarmos o modelo ao longo deste plano.

No plano $\chi=\rho$ o modelo $O(N)\times O(N)$ reduz-se a um modelo $\lambda\phi^4-O(N)$ descrito pelas equações

$$V_{Ef}[\chi,\phi^2;T]=\frac{\chi_0^2\chi^2}{16\pi^2}\ln\left(\mathrm{e}^{-(32\pi^2/h+1/2)}\,\chi\right)+2\chi_0\chi(\phi^2-\phi_0^2) \qquad I4.30$$

$$\phi^2=\left(\phi_0^2-\frac{T^2}{12}\right)-\frac{\chi_0\chi}{16\pi^2}\ln\left(\mathrm{e}^{-32\pi^2/h}\,\chi\right) \qquad I4.31a$$

$$\chi\phi=0 \qquad I4.31b$$

$$V_{Ef}[\chi;T]=-\frac{\chi_0^2\chi^2}{16\pi^2}\ln\left(\mathrm{e}^{-(32\pi^2/h-1/2)}\,\chi\right)-\frac{T^2}{6}\chi_0\chi \qquad I4.32$$

Na figura I7 esboçamos, numa escala conveniente, os gráficos de $\phi^2[\chi;T]$ e $V_{Ef}[\chi;T]$ para $T=0$

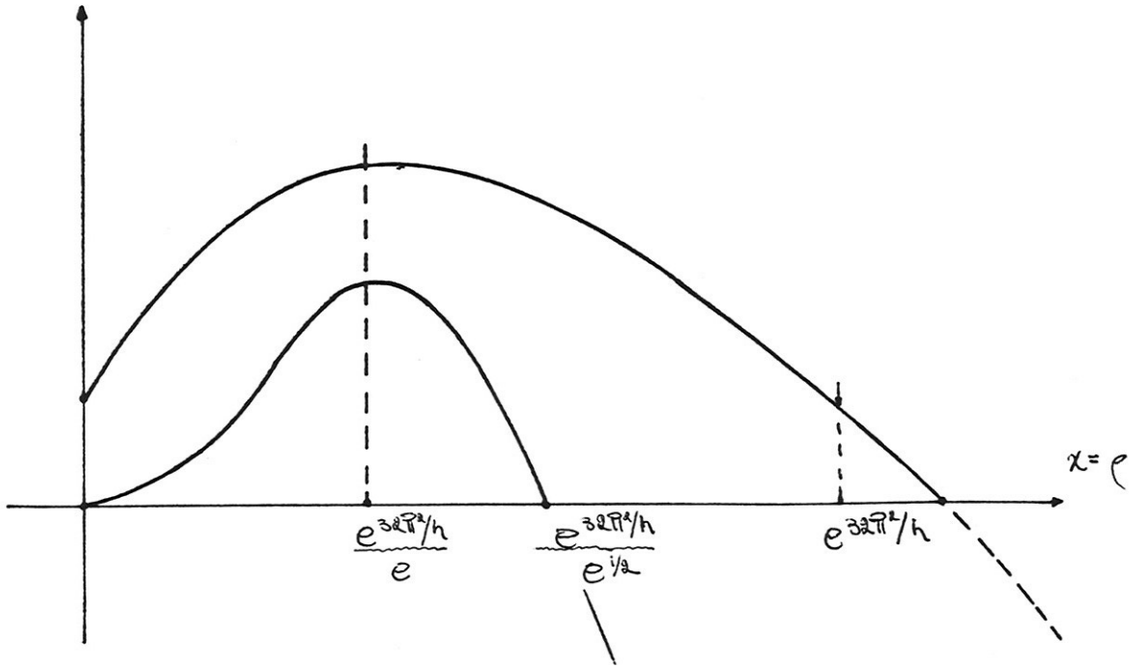


Figura I7–Gráficos de $\phi^2[\chi, \rho; T]$ e $V_{ef}[\chi, \rho; T]$ ao longo do plano $\chi = \rho$ para $T = 0$.

Como podemos ver, todos os "pontos notáveis" (pontos estacionários e raizes) das funções tem suas posições dependentes de uma única forma da constante de acoplamento mútuo $1/h$. Uma variação em $1/h$ muda a posição dos "pontos notáveis" concomitantemente.

Já tinhamos demonstrado que o estado fundamental do modelo $\lambda\phi^4 - O(N)$ é a solução SQS representada pelo ponto A na figura I7. Portanto, este é também o estado fundamental do modelo $O(N) \times O(N)$. Esta conclusão está de acordo com a encontrada, independentemente, por Klimenko (1989), que demonstrou que a solução SQS do modelo $O(N) \times O(N)$ é a única não taquiônica—representando um vácuo estável.

I5–CONCLUSÕES

Determinamos o estado fundamental do modelo $O(N) \times O(N)$, analisando, indiretamente, o comportamento do potencial efetivo em termos dos campos básicos, ϕ e ψ, a partir de $\phi^2[\chi, \rho; T]$, $\psi^2[\chi, \rho; T]$ e $V_{Ef}[\chi, \rho; T]$ em duas e quatro dimensões. Levamos em conta a simetria discreta $\phi \rightleftharpoons \psi$.

Em duas dimensões o modelo tem um único vácuo. Este é sem quebra de simetria e é o estado fundamental do modelo, confirmando o teorema de Coleman- Mermin-Wagner.

Em quatro dimensões, para um conjunto de parâmetros e temperatura para os quais o modelo faz sentido, poderão ocorrer vácuos com QES e sempre ocorrerá um vácuo sem QES. Este último é o estado fundamental. Portanto na região de validade do modelo não há possibilidade de que a simetria possa ser espontaneamente quebrada.

Ainda em 4-D o aumento razoável da temperatura leva o modelo para uma fase onde todos os vácuos tem simetria $O(N) \times O(N)$. Isto confirma os resultados de Fujimoto e Sakakibara (1985) e Manesis e Sakakibara (1985). No entanto, aqui observamos que o aumento ilimitado da temperatura torna o modelo sem sentido.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1694
ex. 1
INSTITUTO DE FÍSICA

APÊNDICE IA

Cálculo de $\det D^{-1}$ para a Teoria representada em $I2.12$

Para o cálculo de D^{-1} vamos admitir que apenas ϕ^1 e ψ^1 possam vir a ter soluções clássicas não nulas. Isto não implica em perda de generalidade mas, simplesmente, estamos estabelecendo de antemão as direções do espaço de $O(N) \times O(N)$ onde possa vir ocorrer quebra de simetria. Assim, a partir de $I3.15$

$$iD^{-1}_{ab} = \left.\frac{\delta^2 I}{\delta\phi_a(x)\delta\phi_b(y)}\right|_{\substack{\phi_a=\phi_a^{Clássico}\\ \phi_b=\phi_b^{Clássico}}} \qquad IA.1$$

temos

$$\begin{aligned}
iD^{-1}_{\chi\chi} &= 2N/h_1 & iD^{-1}_{\rho\rho} &= 2N/h_2 \\
iD^{-1}_{\chi\rho} &= 2N/h_{12} & & \\
iD^{-1}_{\phi_a\phi_b} &= (-\partial_\mu\partial^\mu - \chi)\delta_{ab} & iD^{-1}_{\psi_a\psi_b} &= (-\partial_\mu\partial^\mu - \rho)\delta_{ab} \\
iD^{-1}_{\phi_a\psi_b} &= 0 & & \\
iD^{-1}_{\chi\phi_a} &= -\sqrt{N}\phi\delta_{a1} & iD^{-1}_{\rho\phi_a} &= 0 \\
iD^{-1}_{\chi\psi_a} &= 0 & iD^{-1}_{\rho\psi_a} &= -\sqrt{N}\psi\delta_{a1}
\end{aligned} \qquad IA.2$$

A partir destas expressões, a matriz iD^{-1} será representada a seguir com

$$\begin{aligned}
\Delta_\phi &= (-\partial_\mu\partial^\mu - \chi) \\
\Delta_\psi &= (-\partial_\mu\partial^\mu - \rho)
\end{aligned} \qquad IA.3$$

$$
\begin{vmatrix}
2N/h_1 & 2N/h_{12} & -\sqrt{N}\phi & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
2N/h_{12} & 2N/h_2 & 0 & -\sqrt{N}\psi & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
-\sqrt{N}\phi & 0 & \Delta_\phi & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -\sqrt{N}\psi & 0 & \Delta_\psi & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_\phi & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \Delta_\phi & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \Delta_\psi & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \Delta_\psi
\end{vmatrix}
$$

$$= iD^{-1} \qquad IA.4$$

Portanto o terceiro termo da expressão $I3.19$ será

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2N}\ln\left(\det(D^{-1}_{ab})\right) = \\
&= \frac{1}{2N}\left\{N^2\Delta^N_\phi\Delta^N_\psi\left[-\frac{2}{h_2}\phi^2\Delta^{-1}_\phi - \frac{2}{h_1}\psi^2\Delta^{-1}_\psi + \phi^2\psi^2\Delta^{-1}_\phi\Delta^{-1}_\psi + \frac{1}{4d}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\ln\Delta_\phi + \frac{1}{2}\ln\Delta_\psi + \frac{1}{N}\ln N + \\
&\qquad + \frac{1}{2N}\ln\left[-\frac{2}{h_2}\phi^2\Delta^{-1}_\phi - \frac{2}{h_1}\psi^2\Delta^{-1}_\psi + \phi^2\psi^2\Delta^{-1}_\phi\Delta^{-1}_\psi + \frac{1}{4d}\right]
\end{aligned}
$$

Desprezando as ordens subdominantes em $1/N$ temos

$$\frac{1}{2N}\ln\left(\det(D^{-1}_{ab})\right) = \frac{1}{2}\ln\Delta_\phi + \frac{1}{2}\ln\Delta_\psi$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1694
ex. 1
INSTITUTO DE FÍSICA

BIBLIOGRAFIA

Abbot, L. F., Kang, J. S. e Schnitzer, H. J. (1976) — Bound states, tachyons, and restoration of symmetry in the $1/N$ expansion, *Phys. Rev.* **D13**, 2212.

Abrikosov, A. A., Gorkov, L. P. e Dzyaloshinski, I. E. — Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics, New York, Dover Publications, Inc., 1961, 352pp.

Bazeia, D. (1985) — Defeitos do Tipo Parede em Teorias de Campos a Temperatura Finita, Tese de Doutoramento, IFUSP/USP, São Paulo.

Bernard, C. (1974) — Feynman rules for gauge theories at finite temperature, *Phys. Rev.* **D9**, 3312.

Bogoliubov, N. N. e Tyablikov, V. (1959) — Retarded and Advanced Green's Functions in Statistical Physics, *Dok. Akad. Nauk–SSSR* **126**, 53.

Brandenberg, R. H. (1985) — Quantum field theories methods and inflationary universe models, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 1.

Coleman, S. e Weinberg, E. (1973) — Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking, *Phys. Rev.* **D7**, 1888.

Coleman, S., Jackiw, R. e Politzer, H. (1974) — Spontaneous symmetry breaking in the $O(N)$ model for large N, *Phys. Rev.* **D10**, 2491.

Coleman, S. (1981) — $1/N$, Erice Subnuclear 1979:11.

Craig, R. (1968) — Expansion for Real–Time Green's Functions, *Journ. Math. Phys.* **9**, 605.

Dolan, L. e Jackiw, R. (1974) — Symmetry behavior at finite temperature, *Phys. Rev.* **D9**, 3320.

Éboli, O. P. (1985) — Tópicos em Teoria de Campos a Temperatura Finita, Tese de Doutoramento, IFUSP/USP, São Paulo.

Fendley, P. (1988) — The Effective Potencial and the Coupling Constant at High Temperature, *Phys. Lett.* **196B**, 175.

Fetter, A. L. e Walecka, J. D., Quantum Theory of Many–Particle Systems, New York, McGraw–Hill Book Company, 1971, 601pp.

Fujimoto, Y., O'Raifeartaigh, L. e Parravicini, G. (1983) — Effective potencial for non–convex potentials , *Nucl. Phys.* **B212**, 268.

Fujimoto, Y. e Sakakibara, S. (1985) — On Symmetry non–restoration at high temperature, *Phys. Lett.* **B51**, 260.

Fujimoto, Y., Wipf, A. e Yoneyama, H. (1987) — Finite temperature $\lambda\phi^4$ theory in two and three dimensions and symmetry restoration, *Z. Phys.* **C35**, 351.

Fukuda, R. (1976) — The form of effective potencial, *Prog. Theor. Phys.* **56**, 258.

Goldman, M. (1985) — Potencial Efetivo pelo Método do "Tadpole" à Temperatura Finita, Dissertação de Mestrado, IFUSP/USP, São Paulo.

Goldstone, J., Salam, A. e Weinberg, S. (1962) — Broken Symmetries, *Phys. Rev.* **127**, 965.

Iliopopoulos, J., Itzykson, C. e Martin, A. (1975) — Functional Methods and Perturbation Theory, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 165.

Jackiw, R. (1974) — Functional evolution of the effective potencial, *Phys. Rev.* **D9**, 1686.

Keldysh, L. V. (1965) — Diagram technique for nonequilibrium processes, *Sov. Phys. JETP* **20**, 1018.

Kobayashy, M. e Kugo, T. (1975) — On the ground state of $O(N) - \lambda\phi^4$ model, *Prog. Theor. Phys.* **54**, 1537.

Manesis, E. e Sakakibara, S. (1985) — Temperature renormalization group approach to spontaneous symmetry breaking, *Phys. Lett.* **157B**, 389.

Matsubara, T. (1955) — A new approach to quantum–statistical mechanics, *Prog. Theor. Phys.* **14**, 351.

Mendes, R. S. (1988) — Alguns Aspectos da Expansão $1/N$ em Mecânica Quântica e Teoria de Campos, Tese de Mestrado, IFUSP/USP, São Paulo.

Ramond, P., Field Theory: A Modern Primer, London, The Benjamin Cummings Publishing Company, Inc., 1981, 395pp.

Schwinger, J. (1961) — Brownian motion of a quantum oscillator, *Journ. Math. Phys.* **2**, 407.

da Silva, A. J. (1989) — $O(N) - \lambda\phi^4$ à Temperatura Finita, Tese de Livre–Docência , IFUSP/USP, São Paulo.

Weinberg, S. (1974) — Gauge and global symmetries at high temperature, *Phys. Rev.* **D9**, 3357.

Zubarev, D. N. (1960) — Double time Green's function in statistical Physics, *Sov. Phys. Uspekhi* **3**, 320.

CAPÍTULO II

MODELO DE THIRRING EM 3D

CAPÍTULO II

MODELO DE THIRRING EM 3D

II1–INTRODUÇÃO

Teorias quânticas de campos em três dimensões têm se mostrado promissoras na explicação do efeito Hall quântico (Girvin e MacDonald (1987)) e da supercondutividade a altas temperaturas (Wiegman (1988)). Há ainda teorias que em três dimensões exibem aspectos interessantes como estatísticas exóticas, spin fracionário (Wilczek e Zee (1983)) e campos de "gauge" com massa (Schonfeld (1981), Deser, Jackiw e Templeton (1982)). Estas foram algumas das razões que nos motivaram a estudar o modelo de Thirring em 3D. No entanto, aqui neste trabalho nos ativemos ao contexto do próprio modelo—uma TQC.

O modelo de Thirring $U(N)$ é uma teoria de campos fermiônicos com um acoplamento corrente-corrente, $(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi)^2$, onde os férmions são N-pletos de $U(N)$. As exigências de renormalizabilidade, em 3D, nos obriga a tratá-lo na expansão $1/N$. Isto faz com que apareça um campo auxiliar vetorial massivo. O modelo assume a face de uma eletrodinâmica de Stuelckberg e muitos dos nossos resultados assemelham-se aos da QED e de outras teorias de "gauge", tratadas em três dimensões.

Em tês dimensões há duas representações inequivalentes das matrizes de Dirac. Em uma, as matrizes são 2×2 e na outra 4×4. Isto nos permite tratar o modelo considerando as possibilidades de termos férmions de duas ou de quatro componentes. As diferenças entre estas duas abordagens tornam-se relevantes quando as questões ligadas às simetrias do modelo são analisadas. Neste particular, temos a geração dinâmica do termo de Chern–Simons que

ocorre apenas para férmions de duas componentes. Já para férmions de quatro componentes, graças à riqueza da álgebra das matrizes de Dirac nesta representação, podemos construir duas outras correntes além das usuais: corrente vetorial, $\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$, e corrente "chiral", $\overline{\psi}\gamma^{5}\gamma^{\mu}\psi$.

Assim, levando em conta estas duas possibilidades de representar os férmions, estabelecemos, na seção II2, o modelo. Na seção II3, procedemos a quantização do modelo e analisamos o conteúdo de partícula do campo auxiliar. Na seção II4, determinamos a auto-energia dos férmions, solucionando, aproximadamente, o sistema de equações de Schwinger-Dyson do modelo. Na seção II5, estudamos as simetrias do modelo. Na última seção, procuramos resumir nossas conclusões e apontar algum desdobramento deste trabalho.

II2–O MODELO

O modelo de Thirring massivo é descrito usualmente pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\psi - \frac{g}{2}\left(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi\right)^2 \qquad II2.1$$

O índice de divergência do vértice é

$$\mathrm{d}(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi)^2 = \text{dimensão do espaço-tempo} - 2,$$

indicando que é renormalizável apenas em duas dimensões se for tratado perturbativamente. Aliás, em duas dimensões demonstrou-se, no final dos anos setenta, que este modelo é exatamente solúvel. Para isto, foi de grande importância o trabalho de Coleman (1975) estabelecendo a equivalência entre o modelo de Thirring massivo e o modelo de seno-Gordon: um campo escalar que satisfaz a equação de movimento

$$\Box\phi + \frac{\alpha}{\beta}\,\mathrm{sen}\,\beta\phi = 0$$

com os parâmetros α e β relacionados com g e com a massa dos férmions. Referências podem ser encontradas na tese de doutoramento de da Silva (1979).

Mais recentemente, ainda em duas dimensões, Gomes e da Silva (1986) estabeleceram a equivalência entre o modelo de Thirring e um modelo com campos fermiônicos interagindo via acoplamento derivativo com dois campos bosônicos. Yokota (1987) usou estes resultados para tratar o modelo a temperatura e densidade finitas. Por último Kovner e Popescu (1989) provaram a equivalência, clássica e quântica, com uma teoria de "gauge" $U(1)$, contendo o fermion de Thirring, o escalar de seno–Gordon e um campo vetorial como graus de liberdade fundamentais.

Em três dimensões do espaço-tempo há duas representações inequivalentes da álgebra de Dirac; uma para spinores de duas componentes e outra para spinores de quatro componentes.

Com as matrizes de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad II2.2$$

construímos a representação das matrizes de Dirac para spinores de duas componentes como sendo

$$\gamma^0 = \sigma^3 \qquad \gamma^1 = i\sigma^1 \qquad \gamma^2 = i\sigma^2 \qquad II2.3$$

Algumas propriedades destas matrizes relevantes para os cálculos futuros. Satisfazem a álgebra de Dirac

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \qquad \left(g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = 1\right) \qquad II2.4$$

fecham uma álgebra dada por

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i\epsilon^{\mu\nu\rho}\gamma_\rho \qquad (\epsilon^{\mu\nu\rho} \text{ símbolo de Levi–Civita}) \qquad II2.5$$

e mais

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}\gamma^\mu = 0 \\ &\operatorname{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} \\ &\operatorname{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = -2i\epsilon^{\mu\nu\rho} \\ &\operatorname{tr}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\lambda = 2\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\lambda} - g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda} + g^{\mu\lambda}g^{\nu\rho}\right) \end{aligned} \qquad II2.6$$

Para spinores de quatro componentes adotaremos uma representação das matrizes de Dirac na qual os férmions serão compostos por dois spinores de Pauli com massas de sinais opostos. Assim

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} \qquad II2.7$$

Além destas matrizes temos três outras

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\gamma^6 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad II2.8$$

independentes das primeiras. Estas seis matrizes satisfazem as seguintes relações algébricas

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} && \mu, \nu = 0, 1, 2 \\ \{\gamma^\mu, \gamma^i\} &= 0 && \mu = 0, 1, 2 \qquad i = 3, 5 \\ [\gamma^\mu, \gamma^6] &= 0 && \mu = 0, 1, 2 \\ [\gamma^i, \gamma^j] &= 2i\epsilon^{ijk}\gamma^k && i, j, k = 3, 5, 6 \quad \text{cíclico} \end{aligned} \qquad II2.9$$

Particularmente se definirmos

$$L^1 = \gamma^3/2 \qquad L^2 = \gamma^5/2 \qquad L^3 = \gamma^6/2$$

verificamos que L^1, L^2 e L^3 são geradores de $SU(2)$; fecham a álgebra

$$[L^i, L^j] = i\epsilon^{ijk}L^k$$

As matrizes γ^0, γ^1, γ^2 e γ^3, que nada mais são do que uma representação das matrizes de Dirac em quatro dimensões, satisfazem as regras usuais destas matrizes. Em particular, o traço do produto de um número ímpar delas é nulo.

Como veremos no desenvolver deste capítulo, o modelo é renormalizável em três dimensões se tratado na expansão $1/N$.

A construção da expansão $1/N$ para este modelo segue as mesmas etapas já adotadas no capítulo anterior. Inicialmente, ajustamos a constante

de acoplamento ao fato do campo fermiônico ser um multipleto de $U(N)$. A massa nua dos férmions contorna qualquer problema com divergências infravermelhas que venha a surgir nos cálculos subsequentes. Desta maneira, a lagrangiana do modelo passa a ser

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\psi - \frac{g}{2N}\left(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi\right)^2 \qquad II2.10$$

onde g é fixo (não depende de N) e o campo ψ tem cada componente representada por ψ^a_α—a é o índice de $U(N)$ $(a = 1, 2, \ldots, N)$ e α é o índice spinorial ($\alpha = 1, 2$ ou $\alpha = 1, 2, 3, 4$ a depender da representação adotada).

$$\overline{\psi}\psi = \overline{\psi}^a\psi^a \qquad \text{e} \qquad \overline{\psi}\gamma^\mu\psi = \overline{\psi}^a_\alpha\gamma^\mu_{\alpha\beta}\psi^a_\beta$$

com soma sobre os índices repetidos. Em seguida, introduzimos um campo auxiliar, vetorial, A_μ, de modo a eliminar a interação quártica em $II2.10$, mas não modificar o conteúdo físico do modelo. Assim

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\to \mathcal{L} + \frac{1}{2g}\left(A_\mu - \frac{g}{\sqrt{N}}\overline{\psi}\gamma_\mu\psi\right)^2 \\ \mathcal{L} &= \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - M - \frac{1}{\sqrt{N}}A\!\!\!/\right)\psi + \frac{1}{2g}A^2 \end{aligned} \qquad II2.11$$

onde a equação de movimento para o campo auxiliar A_μ se reduz a equação de vínculo

$$A_\mu = \frac{g}{\sqrt{N}}\overline{\psi}\gamma_\mu\psi$$

Um último ajuste na lagrangiana $II2.3$ se faz necessário por conta do comportamento ultra-violeta do propagador do campo A_μ. Como podemos ver,

$$D_{\mu\nu} = \frac{i}{1/g}g^{\mu\nu}$$

ou melhor

$$D_{\mu\nu} = \frac{i}{1/g}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) + \frac{i}{1/g}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$$

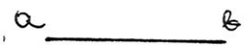
A parte longitudinal comporta-se como uma constante para $p \to \infty$. Isto faz com que a teoria não seja renormalizável. Melhoramos o comportamento ultra-violeta de $D_{\mu\nu}$, introduzindo na lagrangiana $II2.11$ um termo de fixação de "gauge", $\lambda(\partial \cdot A)^2$, e postulamos que as quantidades físicas são independentes de λ.

Com este novo termo a lagrangiana a partir da qual estudaremos o modelo é

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}\left(i\not{\partial} - M - \frac{1}{\sqrt{N}}\not{A}\right)\psi + \frac{1}{2g}A^2 - \frac{\lambda}{2}(\partial \cdot A)^2 \qquad II2.12$$

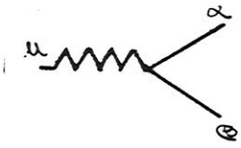
Lembra uma eletrodinâmica onde o campo vetorial A_μ é massivo e está acoplado a uma corrente fermiônica cuja carga "elétrica" é $1/\sqrt{N}$.

Para o leitor interessado as regras de Feynman, no espaço de Minkowski, da teoria representada por $II2.12$ são



$$= \frac{i}{\not{p} - M}\delta^{ab}$$

$$= \frac{i}{1/g}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) - \frac{i}{\lambda p^2 - 1/g}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \qquad II2.13$$



$$= -i\frac{1}{\sqrt{N}}\gamma^\mu_{\alpha\beta}$$

O propagador do campo A_μ tem a parte longitudinal comportando-se com $1/p^2$ no limite ultravioleta. Evidentemente a teoria original é recuperada para $\lambda = 0$.

A partir da lagrangiana $II2.12$ estabeleceremos, no próximo tópico deste capítulo, a expansão $1/N$ do modelo de Thirring, e discutiremos aspectos da renormalizabilidade do modelo em três dimensões.

II3–A AÇÃO EFETIVA

Há, pelo menos, duas maneiras equivalentes de proceder a quantização do modelo e gerar a expansão $1/N$. Somando a subsérie, na ordem dominante em $1/N$, de gráficos construídos a partir das regras de Feynman $II2.13$. Ou integrando, funcionalmente, os férmions. Preferimos o segundo método para manter o procedimento formal do capítulo anterior.

O funcional gerador das funções de Green é definido por

$$Z[\zeta^a, \overline{\zeta}^a, J_\mu] = \eta \int \prod_{a=1}^{N} d\psi^a \prod_{a=1}^{N} d\overline{\psi}^a \, dA_\mu \, \exp\Big\{ i \int d^3x \, \Big[\overline{\psi} S_F^{-1} \psi + \\ + 1/2 \, A^\mu \Delta_{\mu\nu}^{-1} A_\nu + \overline{\zeta}\psi + \overline{\psi}\zeta + JA \Big] \Big\} \qquad II3.1$$

onde ζ^a e $\overline{\zeta}^a$ são variáveis grassmanianas, fontes para os campos $\overline{\psi}^a$ e ψ^a respectivamente. J_μ é a fonte para o campo A_μ e

$$\Delta_{\mu\nu}^{-1} = \frac{1}{g} g^{\mu\nu} + \lambda \partial_\mu \partial_\nu \qquad II3.2a$$

$$\left(S_F^{-1}\right)^{ab} = \left(i\partial\!\!\!/ - M - \frac{1}{\sqrt{N}} A\!\!\!/ \right) \delta^{ab} \qquad II3.2b$$

Integrando nos férmions, obtemos

$$Z[\zeta^a, \overline{\zeta}^a, J_\mu] = \eta \int dA_\mu \, \exp\Big\{ N \operatorname{tr} \ln S_F^{-1} + i \int d^3x \, \Big[1/2 \, A^\mu \Delta_{\mu\nu}^{-1} A_\nu + \\ + \overline{\zeta}^a S_F^{ab} \zeta^b + JA \Big] \Big\} \qquad II3.3$$

onde tr $\mathcal{O}$ significa tr $\int d^3x \, \langle x | \mathcal{O} | x \rangle$; ou seja, o traço do operador $\mathcal{O}$ no espaço das configurações e o traço devido ao "loop" fermiônico e $S_F^{-1} = \left(i\partial\!\!\!/ - M - 1/\sqrt{N} A\!\!\!/ \right)$

A integração nos férmions nos leva a uma teoria efetiva descrita pela ação

$$S_{EF}[A_\mu] = \frac{1}{2}\int d^3x\, A^\mu \Delta^{-1}_{\mu\nu} A^\nu - iN \operatorname{tr}\ln S_F^{-1}$$

Formalmente,

$$\begin{aligned}\ln S_F^{-1} &= \ln\left[(i\partial\!\!\!/ - M)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{i\partial\!\!\!/ - M}A\!\!\!/\right)\right] \\ &= \ln(i\partial\!\!\!/ - M) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{i\partial\!\!\!/ - M}A\!\!\!/\right)^n\end{aligned}$$

portanto,

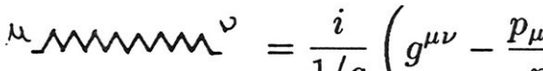
$$S_{EF}[A_\mu] = \frac{1}{2}\int d^3x\, A^\mu \Delta^{-1}_{\mu\nu} A^\nu + iN \operatorname{tr}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{1}{i\partial\!\!\!/ - M}A\!\!\!/\right)^n - \\ -iN \operatorname{tr}\ln(i\partial\!\!\!/ - M) \qquad II3.4$$

Esta teoria possui infinitos vértices. A ordem em $1/N$ de cada vértice é $N^{1-n/2}$, onde n é o número de pernas externas de A_μ do vértice.

Não sabemos como efetuar a integração funcional em A_μ. O que nos resta, portanto, de agora em diante é tratar o modelo "perturbativamente" em $1/N$, usando as regras de Feynman obtidas em $II3.4$.

Vamos apresentar e comentar algumas destas regras que achamos relevantes para a compreensão do modelo aqui tratado.

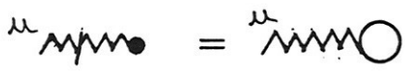
O propagador nu



$$= \frac{i}{1/g}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) - \frac{i}{\lambda p - 1/g}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$$

é de ordem zero em $1/N$.

O vértice monolinear



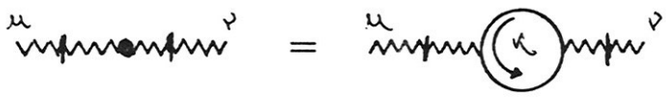
$$= i\sqrt{N}\,\mathrm{tr}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\not{k}-M}\gamma^\mu \qquad II3.5$$

A integral é nula, portanto este vértice não contribui para a teoria. Ressaltamos este resultado porque o valor esperado no vácuo do campo A_μ, dado por

$\langle A_\mu \rangle =$

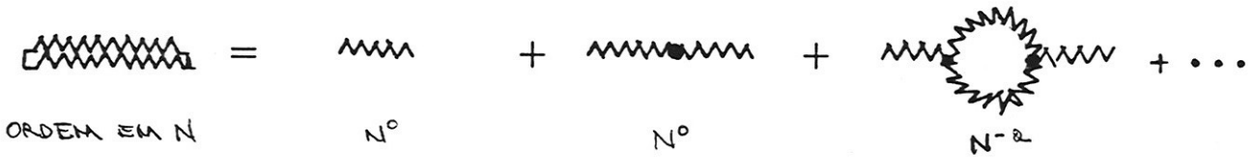
é nulo na ordem dominante em $1/N$. Isto é mais um dado a caracterizar A_μ como um campo vetorial.

O vértice bilinear



$$= \Pi^{\mu\nu}(p,M) = i\,\mathrm{tr}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\not{k}-M}\gamma^\mu\,\frac{1}{\not{k}+\not{p}-M}\gamma^\nu \qquad II3.6$$

é o tensor de polarização. Tem a mesma ordem em $1/N$ que o propagador nu (ordem zero). É, então, a contribuição dominante em $1/N$ para o propagador completo do campo A_μ,



Este vértice é fundamental para a determinação de propriedades do campo A_μ. Lembramos que o pólo do propagador nos dá a massa da partícula e o resíduo nos diz se é uma partícula ou um fantasma.

Calculando os traços dos produtos de matrizes γ presentes na expressão $II3.6$, obtemos

$$\Pi^{\mu\nu}(p,M) = (4-D)Mp_\alpha\epsilon^{\mu\alpha\nu}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]}+$$
$$+iD\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{k^\mu(k+p)^\nu+k^\nu(k+p)^\mu-k(k+p)g^{\mu\nu}+M^2g^{\mu\nu}}{(k^2-M^2)[(k+p)^2-M^2]} \qquad II3.7$$

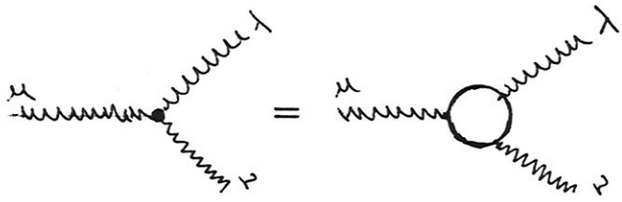
onde D é o número de componentes dos férmions considerados.

A primeira parcela de $\Pi^{\mu\nu}(p,M)$ que ocorre apenas para férmions de duas componentes é o termo de Chern–Simons. É relevante para a física de longas distâncias, causando a transmutação do spin do campo fermiônico. Em teorias de "gauge" ele quebra a paridade. Como é proporcional a M, ele mostra que a origem destas mudanças está na massa dos férmions (Deser, Jackiw e Templeton (1982), Niemi e Semenoff (1983)).

O termo de Chern–Simons no modelo aqui tratado é gerado dinamicamente. É um contratermo originalmente ausente da lagrangiana (ou ação) clássica, no entanto, por ser finito não compromete a renormalizabilidade da teoria. As consequências da presença deste termo para as simetrias do modelo serão consideradas mais adiante.

A expressão formal para $\Pi^{\mu\nu}(p,M)$ é linearmente divergente no ultravioleta. Ao eliminarmos esta divergência, verificaremos se a teoria é renormalizável. Vamos fazer isto mais adiante ao calcularmos explicitamente $\Pi^{\mu\nu}(p,M)$. Por enquanto, continuamos os comentários sobre as parcelas da ação efetiva $S_{EF}[A_\mu]$.

O vértice trilinear



$$= \frac{i}{\sqrt{N}} \operatorname{tr} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\not{k} - M} \gamma^\mu \frac{1}{\not{k} + \not{p} - M} \gamma^\nu \frac{1}{\not{k} - \not{q} - M} \gamma^\lambda$$

$II3.8$

é subdominante em $1/N$ (ordem $N^{-1/2}$) e logaritmicamente divergente no ultravioleta. Se no cálculo das quantidades físicas nos ativermos à ordem dominante em $1/N$, a divergência deste vértice não trará problemas. Mas a prova da renormalizabilidade da teoria será incompleta se não tratarmos deste gráfico. Adiantamos que a exigência de simetria do modelo por conjugação de carga cancela todas as contribuições com número ímpar de pernas externas de A_μ na ação efetiva.

A partir do vértice quadrilinear, as contribuições serão cada vez mais subdominantes em $1/N$. E todos os vértices são finitos no ultravioleta.

Restringindo-nos à ordem dominante em $1/N$, a ação efetiva (para as configurações de campos no espaço dos momentos) será

$$S_{EF}[\widetilde{A}_\mu] = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \widetilde{A}_\mu(p) \left[1/g\, g^{\mu\nu} - \lambda p^\mu p^\nu + \Pi^{\mu\nu}(p, M)\right] \widetilde{A}_\nu(-p) \quad II3.9$$

É uma expressão formal. Construímos a ação efetiva renormalizada, procedendo a regularização de $\Pi^{\mu\nu}(p, M)$, alternativamente, via "cut off", Pauli–Villars e dimensional. À semelhança do que ocorre em teorias de "gauge", a comparação destes três métodos facilita a compreensão da geração dinâmica do termo de Chern–Simons no modelo de Thirring.

Assim:

a) Via "cut off"

Regularizando as integrais divergentes presentes na expressão de $\Pi^{\mu\nu}(p,M)$, $II3.6$, com um "cut off" ultravioleta Λ, obtemos

$$\Pi^{\mu\nu}(p,M;\Lambda) = -\frac{D}{6\pi^2}\Lambda g^{\mu\nu} + i\frac{(4-D)}{8\pi}M\,F(p,M)p_\alpha\epsilon^{\mu\alpha\nu} + \\ +\frac{D}{8\pi}\left[M - \frac{(4M^2+p^2)}{4}F(p,M)\right]\left(g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \qquad II3.10$$

onde

$$F(p,M) = \int_0^1 dx\,\frac{1}{\sqrt{p^2x^2 - p^2x + M^2}} \qquad II3.11$$

Este método de regularização, apesar de inconveniente para teorias de "gauge", quebra a transversalidade de $\Pi^{\mu\nu}(p,M)$ ou, em outras palavras, o termo de massa $\sim \Lambda g^{\mu\nu}$ quebra a simetria de "gauge", aqui não causa problemas. Absorvemos o infinito, definindo a constante de Thirring renormalizada

$$\left.\frac{1}{g}\right|_{\text{Ren}} = \frac{1}{g} - \frac{D}{6\pi^2}\Delta \qquad II3.12$$

Isto torna a ação efetiva finita.

Tratando-se de uma teoria com massa nua para os férmion, M, nula, $M\,F(p,M) = 0$. O método de regularização não induz o termo de Chern–Simons.

b) Pauli–Villars

Este método preserva a transversalidade de $\Pi^{\mu\nu}(p,M)$. A exemplo do que foi feito por Redlich (1984) para teorias de "gauge", introduzimos um campo regulador de Pauli–Villars, com massa m, na teoria que estamos tratando. A ação efetiva renormalizada é construída com o tensor de polarização renormalizado

$$\Pi^{\mu\nu}_{\text{Ren}}(p,M;m) = \Pi^{\mu\nu}(p,M;\Lambda) - \lim_{m\to\infty}\Pi^{\mu\nu}(p,m;\Lambda) \qquad II3.13$$

E assim, obtemos

$$\Pi^{\mu\nu}_{\text{Ren}} = i\frac{(4-D)}{8\pi}\left[M\,F(p,M) - \text{sinal}(m)\right]p_\alpha\epsilon^{\mu\alpha\nu} + \\ + \frac{D}{8\pi}\left[M - \frac{(4M^2+p^2)}{4}F(p,M)\right]\left(g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \qquad II3.14$$

Este procedimento não impõe mudanças nos parâmetros originalmente presentes na ação. Podemos, então, considerá-los finitos. Mesmo se M for nula, há a geração do termo de Chern–Simons por conta do processo de renormalização. No entanto, para férmions massivos ($M > 0$), ocorre uma situação ambígua: no limite $p \to 0$ $M\,F(p,M) = \text{sinal}(M) = 1$, a existência do termo topológico fica na dependência do sinal da massa reguladora m.

c) Dimensional

Este método de regularização também preserva a transversalidade de $\Pi^{\mu\nu}(p,M)$. Em três dimensões é um método muito forte: todas as integrais em $II3.7$ se tornam finitas. Ou seja, o método de regularização dimensional de fato renormaliza a ação efetiva, pelo menos até a ordem em $1/N$ que estamos tratando, sem que haja necessidade de renormalizar os parâmetros originais do modelo. Com isto,

$$\Pi^{\mu\nu}_{\text{Ren}}(p,M) = i\frac{(4-D)}{8\pi}M\,F(p,M)p_\alpha\epsilon^{\mu\alpha\nu} + \\ + \frac{D}{8\pi}\left[M - \frac{(4M^2+p^2)}{4}F(p,M)\right]\left(g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \qquad II3.15$$

Como podemos ver, para a massa nua, M, nula, não há geração do termo topológico. No entanto, se $M \neq 0$, no limite $p \to 0$,

$$\Pi^{\mu\nu}_{\text{Ren}}(p,M) = i\frac{(4-D)}{8\pi}\text{sinal}(M)p_\alpha\epsilon^{\mu\alpha\nu} + \\ + \frac{D}{8\pi}\left[M - \frac{(4M^2+p^2)}{4}F(p,M)\right]\left(g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right) \qquad II3.16$$

Os três métodos de regularização adotados aqui nos permitem concluir que: primeiro, o modelo de Thirring em três dimensões, quando tratado na expansão $1/N$, é renormalizável; segundo, a presença do termo de Chern–Simons, para férmions de duas componentes, pode ocorrer por conta do procedimento de renormalização (Pauli–Villars). Partindo-se de uma teoria com férmions massivos, como fizemos, ocorrerá a geração dinâmica do termo de Chern–Simons, se procedermos a regularização dimensional.

A partir da ação efetiva renormalizada, via regularização dimensional, o propagador do campo A_μ, no espaço de Minkowski,

$$D_{\mu\nu}(p,M) = i\left[1/g\, g_{\mu\nu} - \lambda p_\mu p_\nu + \Pi^{\mathrm{Ren}}_{\mu\nu}(p,M)\right]^{-1} \qquad II3.17$$

será

$$D_{\mu\nu}(p,M) = \frac{8\pi(4-D)M\,F(p,M)}{\left[\left(\frac{8\pi}{g} + D\,G(p,M)\right)^2 - (4-D)^2M^2p^2F^2(p,M)\right]}p^\alpha\epsilon_{\mu\alpha\nu} +$$
$$+\frac{i8\pi\left(\frac{8\pi}{g} + D\,G(p,M)\right)}{\left[\left(\frac{8\pi}{g} + D\,G(p,M)\right)^2 - (4-D)^2M^2p^2F^2(p,M)\right]}\left(g^{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)$$
$$-\frac{i}{\lambda p^2 - 1/g}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \qquad II3.18$$

onde

$$G(p,M) = M - \frac{(4M^2+p^2)}{4}F(p,M) \qquad II3.19$$

Na sua construção consideramos p^2 positivo e abaixo do limiar de produção ($0 < p^2 < 4M^2$). É conveniente, nos cálculos, usar o adimensional $x^2 = p^2/4M^2$.

Para algumas situações é conveniente dispormos do propagador de A_μ na região euclidiana.

$$D_{\mu\nu}(p_E, M) = \frac{i8\pi(4-D)M\,F(p_E,M)}{\left[\left(\frac{8\pi}{g}+D\,G(p_E,M)\right)^2+(4-D)^2M^2p_E^2F^2(p_E,M)\right]}p_{E\alpha}\epsilon_{\mu\alpha\nu}+$$

$$+\frac{8\pi\left(\frac{8\pi}{g}+D\,G(p_E,M)\right)}{\left[\left(\frac{8\pi}{g}+D\,G(p_E,M)\right)^2+(4-D)^2M^2{p_E}^2F^2(p_E,M)\right]}\left(\delta^{\mu\nu}-\frac{p_{E\mu}p_{E\nu}}{{p_E}^2}\right)$$

$$+\frac{i}{\lambda{p_E}^2-1/g}\frac{p_{E\mu}p_{E\nu}}{{p_E}^2} \qquad II3.20$$

onde

$$G(p_E,M) = M - \frac{(4M^2-{p_E}^2)}{4}F(p_E,M) \qquad II3.21$$

Observamos ainda que, se tivessemos iniciado com o modelo de Thirring sem massa ($M=0$ na lagrangiana $II2.10$), o propagador do campo A_μ seria

$$\overline{D}_{\mu\nu}(p) = \frac{i32/D}{i\sqrt{p^2}+\frac{32}{D}\frac{1}{g}}\left(g^{\mu\nu}-\frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)-\frac{i}{\lambda p^2-1/g}\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \qquad II3.22$$

As expressões $II3.18$, 20 e 22 nos permitem investigar a natureza do campo auxiliar A_μ—o seu conteúdo de partícula—para diferentes regimes do momento, da constante de Thirring e nas duas representações dos férmions.

Trataremos, inicialmente, dos férmions de quatro componentes. Neste caso, os pólos do propagador do campo A_μ são as soluções de

$$\frac{2\pi}{g}+G(p,M)=0 \qquad II3.23$$

Supondo $0 < p^2 < 4M^2$, temos

$$\frac{2\pi}{Mg} + 1 = (1 + x^2)\frac{\text{arctgh}\, x}{x} \qquad \left(x^2 = \frac{p^2}{4M^2}\right) \qquad II3.24$$

cuja solução esboçamos na figura II1.

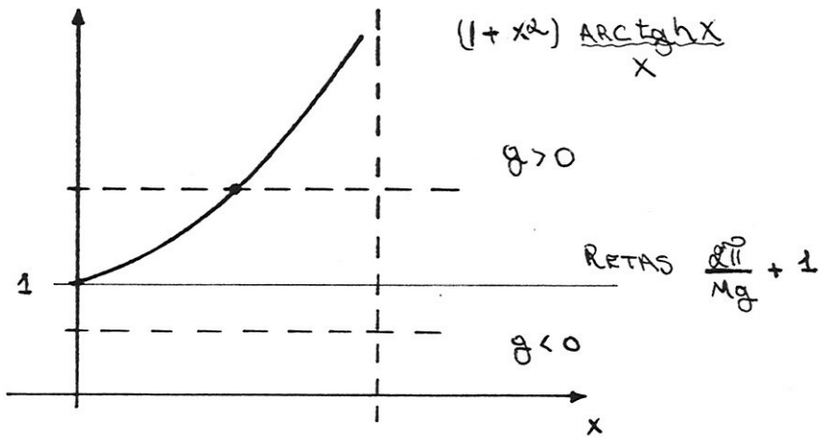


Figura II1–Solução gráfica da equação $II3.24$. Pólos do propagador do campo A_μ para férmions de 4 componentes na região $0 < p^2 < 4M^2$.

Como podemos ver, para $g > 0$ sempre haverá uma solução para $II3.24$ e a análise do resíduo do propagador, nesta situação, revela que o campo A_μ está associado a uma partícula. Representa um estado ligado. Já para $g < 0$ não há solução para $II3.24$ no regime de momentos considerado.

Considerando a região de momentos $p^2 < 0$, temos de $II3.23$

$$\frac{2\pi}{Mg} + 1 = (1 - x^2)\frac{\text{arctg}\ \ x}{x} \qquad \left(x = \frac{|p|}{2M}\right) \qquad II3.25$$

cuja solução esboçamos na figura II2.

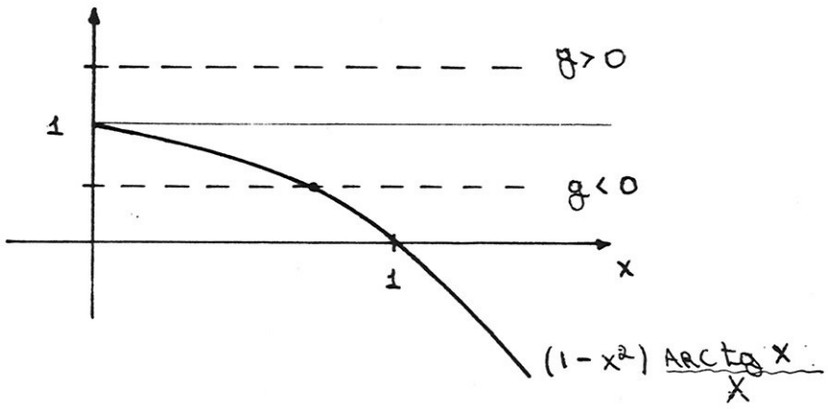


Figura II2–Solução gráfica da equação $II3.25$. Pólos do propagador do campo A_μ para férmions de 4 componentes na região $p^2 < 0$.

Agora o pólo do propagador do campo A_μ ocorre apenas para $g < 0$, indicando a existência de táquions nesta fase do modelo.

Resumindo. Para férmions de quatro componentes, na fase $g < 0$, o espectro do modelo contém um táquiom. Já na fase $g > 0$, observamos um estado ligado. Aliás, este estado ligado também ocorre quando o modelo de Thirring é tratado em duas dimensões.

Passamos a investigar a natureza do campo A_μ, supondo férmions de duas componentes.

A partir de $II3.18$, verificamos que os pólos do propagador do campo A_μ são os pólos de

$$\frac{8\pi\left(\frac{8\pi}{g} + 2G(p,M)\right)}{\left(\frac{8\pi}{g} + 2G(p,M)\right)^2 - 4M^2p^2F^2(p,M)} \qquad II3.26$$

Ou seja, são as soluções das duas equações abaixo

$$\frac{8\pi}{g} + 2G(p,M) \pm 2M\sqrt{p^2}F(p,M) = 0 \qquad II3.27$$

Na região $0 < p^2 < 4M^2$ temos de $II3.27$

$$\frac{4\pi}{Mg} + 1 = (1 + x^2 \mp 2x)\frac{\text{arctgh}\, x}{x} \qquad \left(x^2 = \frac{p^2}{4M^2}\right) \qquad II3.28$$

As soluções destas equações são esboçadas na figura II3.

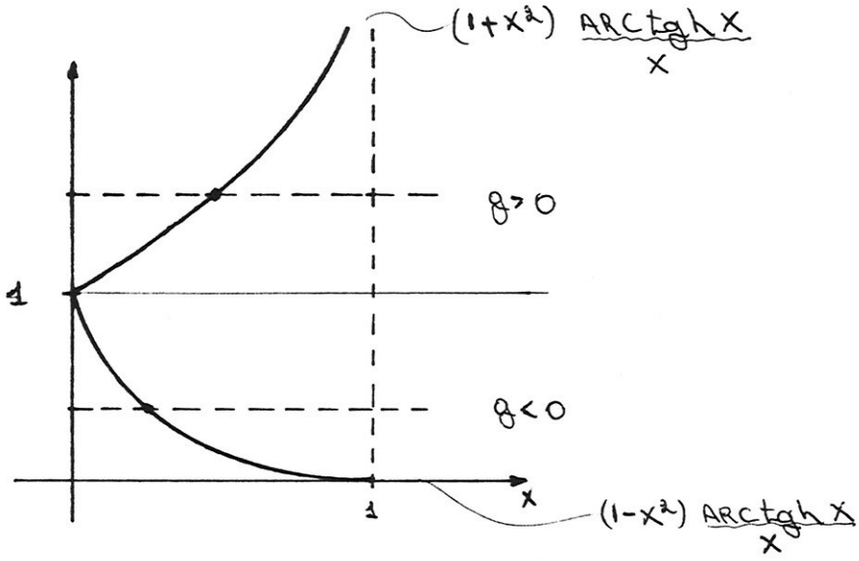


Figura II3–Solução gráfica da equação $II3.28$. Pólos do propagador do campo A_μ para férmions de 2 componentes na região $0 < p^2 < 4M^2$.

Os resultados mostrados na figura II3 e a análise do resíduo da expressão $II3.26$ indicam a existência de estados ligados. Um para $g > 0$ e outro para $0 > g > -4\pi/M$.

Já na região $p^2 < 0$, temos, a partir de $II3.27$, as equações

$$\frac{4\pi}{Mg} + 1 = (1 - x^2 \mp 2ix)\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \qquad \left(x = \frac{|p|}{2M}\right) \qquad II3.29$$

Estas não tem soluções reais.

Em resumo. Com férmions de duas componentes, o modelo exibe estados ligados tanto para a fase $g > 0$ quanto para a fase $g < 0$, desde que $g > -4\pi/M$. Diferentemente dos férmions de quatro componentes, aqui não ocorrem táquions. No entanto, a equação $II3.28$ tem solução na fase $g < 0$ se o momento, p, for complexo.

Uma síntese do que observamos sobre o conteúdo de partícula do campo A_μ, pode ser feita nos seguintes termos. Na fase $g > 0$, o espectro do modelo apresenta, além dos férmions, um estado ligado, não importando se estamos considerando férmions de quatro ou duas componentes. Já na fase $g < 0$, o quadro é bastante complexo. Ora o modelo apresenta táquions (para férmions de 4 componentes), ora "partículas" de massas complexas (para férmions de duas componentes). Estas são situações cujo tratamento detalhado foge ao objetivo deste nosso trabalho. Portanto, de agora em diante vamos nos ater apenas à fase $g > 0$, na qual o campo A_μ está associado a uma partícula—representa um estado ligado.

Evidentemente, é a presença do termo de Chern–Simons na ação efetiva que modifica a natureza do campo A_μ, quando passamos da representação com férmions de quatro componentes para a de duas. Isto nos leva a indagar o que ocorreria se essa transição fosse contínua. Dizendo melhor: se a presença do termo de Chern–Simons dependesse de um parâmetro que pudéssemos arbitrar, o que ocorreria com o modelo no que tange à existência de estados ligados?

Responder esta questão é tentar trazer alguma informação adicional sobre as possíveis conexões entre as duas situações físicas extremas: férmions

de quatro e de duas componentes. Para tal, vamos sintetizar as equações $II3.24$ e $II3.28$ numa única expressão. A saber

$$c(g) = (1 + x^2 \mp \alpha x)\frac{\operatorname{arctgh} x}{x} \qquad \left(x^2 = \frac{p^2}{4M^2} > 0\right) \qquad II3.30$$

onde $c(g)$ é uma constante para cada valor de g e α é o parâmetro que controla a influência do termo de Chern–Simons no propagador de A_μ. α varia entre 0 e 2.

Mostramos, na figura II4 e II5, soluções das equações $II3.30$ para alguns valores de α. Sempre comparando-as com a solução de $II3.30$ para $\alpha = 0$.

As soluções gráficas de $II3.30$, na fase $g > 0$, mostram que, na medida em que α varia de 0 a 2, o pólo do propagador de A_μ, que é único para $\alpha = 0$, se quebra em dois. Um à direita e outro à esquerda do original. Isto aguça a nossa imaginação. A idéia que nos ocorre: o termo de Chern–Simons levanta uma "degenerescência", cuja origem não sabemos a que atribuir, do modelo quando tratado com férmions de quatro componentes. É um espaço aberto para especulações. Finalmente, toda a investigação sobre a natureza do campo A_μ—existência ou não de estados ligados no modelo—foi feita supondo férmions massivos. Isto nos remete ao próximo tópico deste capítulo, que é verificar se há ou não geração dinâmica de massa para os férmions e as consequências que isto trará para o modelo.

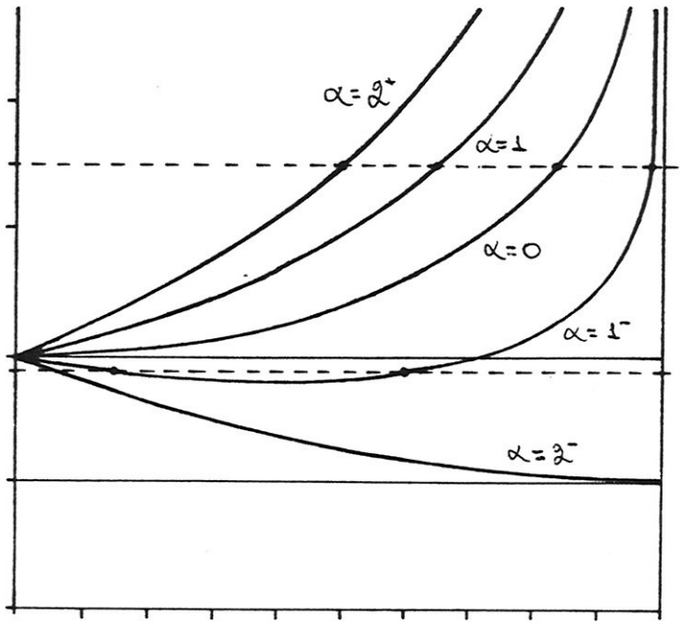


Figura I4a

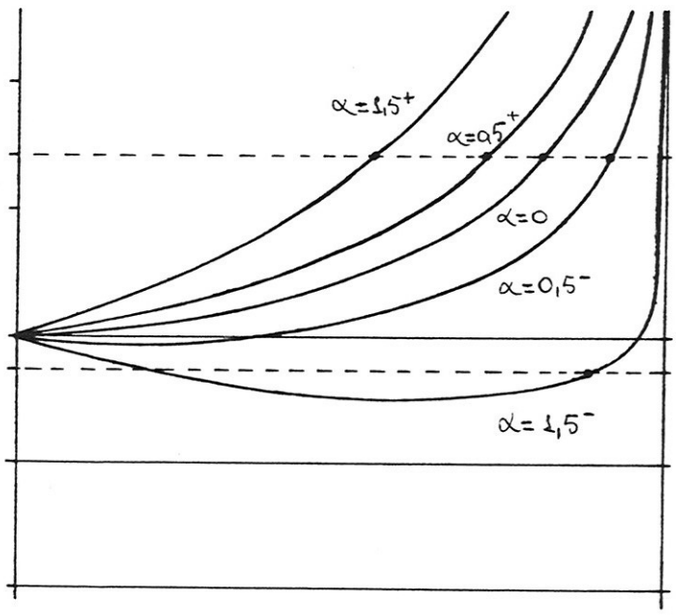


Figura I4b

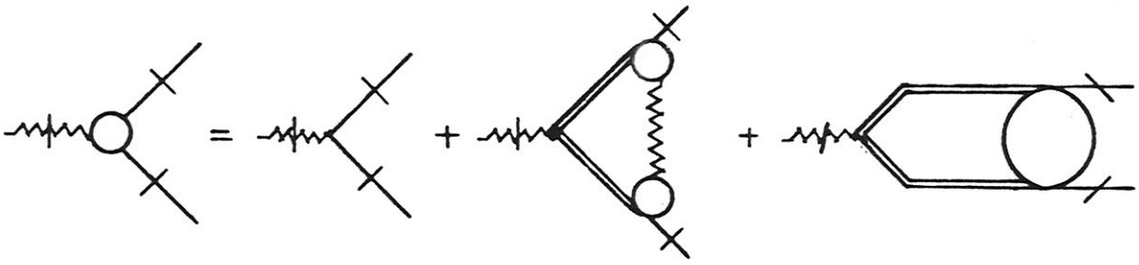
Figuras II4a e b–Soluções das equações $II3.30$ para alguns valores de α. Os índices $+$ e $-$ distinguem as duas curvas do lado direito de $II3.30$ que podem ser construídas para cada $\alpha \neq 0$.

II4–A MASSA DOS FÉRMIONS

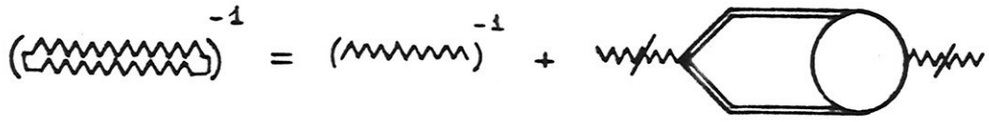
A geração dinâmica de massa para os férmions e suas implicações nas simetrias da teoria, notadamente simetria "chiral" e paridade, tem sido amplamente estudada no contexto da QED em três dimensões, na QCD e em outras teorias. Nas análises que procederemos aqui, tomamos por base: Pisarski (1984) que estudou a quebra de simetria "chiral" na QED_3; Appelquist et al. (1985 a e b, 1986 a e b, 1988 a e b), que nesta série de trabalhos estudaram a quebra da simetria "chiral" e da paridade na QED_3; Bhattacharyya (1987), que estudou o propagador do campo vetorial na ordem dominante em $1/N$, da QED_3; Almeida e Natale (1989), que estudaram a geração dinâmica de massa para os férmions na QED_3, a partir do potencial efetivo para o operador composto $\overline{\psi}\psi$ e Nash (1989), que estudou correções de ordem superior (a dominante em $1/N$) à equação de "gap" na QED_3.

O procedimento corrente para a determinação da massa dos férmions consiste em resolver, numa aproximação conveniente, o sistema de equações de Schwinger–Dyson do modelo.

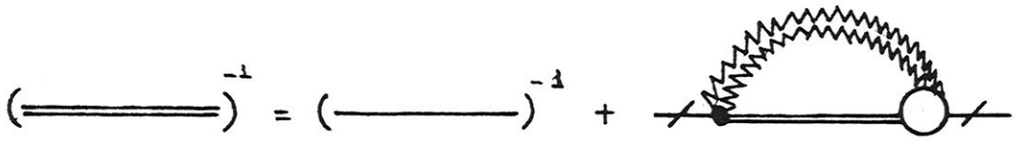
Usando as regras de Feynman convencionais, com as linhas duplas representando propagadores completos, simbolicamente, as equações de Schwinger–Dyson, do modelo de Thirring, representado pela lagrangiana $II2.11$, são



$II4.1a$



*II*4.1*b*



*II*4.1*c*

Na aproximação que iremos adotar, aliás, a mesma adotada pelos autores citados anteriormente, o vértice $\Gamma(p)$ se reduz ao vértice nu, portanto, da ordem $1/\sqrt{N}$. Além disto, como estamos interessados na geração dinâmica de massa, vamos considerar a massa dos férmions nua, M, nula. Assim, o sistema de equações de Schwinger–Dyson será

$$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(p) = -\frac{i}{\sqrt{N}}\gamma^{\mu}_{\alpha\beta} \qquad II4.2a$$

$$D_{\mu\nu}(p, \Sigma(p)) = \text{dado pela eq. } II3.18 \qquad II4.2b$$

$$\not{p}A(p) - \Sigma(p) = \frac{1}{N}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{[\gamma^{\mu}\gamma^{\alpha}\gamma^{\nu}k_{\alpha}(1+A(k)) - \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\Sigma(k)]}{k^2(1+A(k))^2 - \Sigma^2(k)}\times$$
$$\times D_{\mu\nu}(p-k, \Sigma(p-k)) \qquad II4.2c$$

onde $A(p)$ é a renormalização da função de onda dos férmions e $\Sigma(p)$ a auto-energia que pretendemos determinar.

A segunda etapa, corrente na literatura, das sucessivas aproximações que faremos para solucionar *II*4.2*c* consiste em tomarmos $A(p) = 0$ e $\Sigma(p) \ll p$. A validade deste procedimento, no modelo que estamos tratando, foi

analisada em Gomes et al. (1990). Na realidade $A(p)$ é da ordem $1/N$ e $\Sigma(p)$ é nulo no limite $N \to \infty$. Isto indica a existência de um N crítico abaixo do qual $\Sigma(p) \neq 0$, no entanto, $A(p)$ também é diferente de zero, o que dificulta enormemente a solução de $II4.2c$. É uma situação idêntica à encontrada pelos autores já citados na QED_3. Prosseguimos então com a aproximação e, tomando o traço da equação $II4.2c$, obtemos, no espaço euclidiano,

$$\Sigma(p) = \frac{1}{N}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2(k)}\left[\frac{2}{\frac{1}{g}+\frac{D}{32}|p-k|}+\frac{1}{\lambda|p-k|^2+\frac{1}{g}}\right] \qquad II4.3$$

Efetuando a integração angular, temos

$$\begin{aligned}\Sigma(p) = \frac{16}{\pi^2 D N}\frac{1}{p}\int_0^\infty dk\,\frac{k\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2(k)}\Bigg[&|p+k|-|p-k|+\\ &+\frac{32}{Dg}\ln\left(\frac{|p-k|+32/Dg}{|p+k|+32/Dg}\right)\Bigg]-\\ -\frac{g}{8\pi^2 N}\frac{1}{p}\int_0^\infty dk\,\frac{k\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2(k)}\frac{1}{\lambda g}&\ln\left(\frac{(p-k)^2+1/\lambda g}{(p+k)^2+1/\lambda g}\right)\end{aligned} \qquad II4.4$$

Para $g=0$, a equação $II4.4$ nos fornece $\Sigma(p,0,\lambda)=0$. É evidente. Com $g=0$ a teoria é livre, não há auto-interação, logo, não há como gerar massa para os férmions. Isto fica mais claro se fizermos em $II2.11$ $A_\mu \to \sqrt{g}A_\mu$. Este resultado é um indicador da consistência das aproximações feitas até agora.

Dando proseguimento no cálculo de $\Sigma(p)$ tomamos $\lambda = 0$. Eliminamos o termo fixador de "gauge" que foi introduzido artificialmente no modelo. Deste modo

$$\begin{aligned}\Sigma(p) = \frac{16}{\pi^2 D N}\Bigg\{\frac{1}{p}\int_0^\infty dk\,\frac{k\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2(k)}\left[|p+k|-|p-k|+\alpha\ln\left(\frac{|p-k|+\alpha}{|p+k|+\alpha}\right)\right]+\\ +\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty dk\,\frac{k^2\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2(k)}\Bigg\} \qquad (\alpha = 32/Dg)\end{aligned} \qquad II4.5$$

Ainda assim a equação integral $II4.5$ é muito difícil de ser tratada. Fazemos mais uma simplificação. Introduzimos α como parâmetro de escala e consideramos apenas a região onde $p \ll \alpha$. Então

$$\Sigma(p) = \frac{16}{\pi^2 D N}\left\{\int_0^p dk\, \frac{2k^2\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2(k)}\frac{1}{p+\alpha}+\right.$$

$$\left.+\int_p^\alpha dk\, \frac{2k^2\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2(k)}\frac{1}{k+\alpha}+\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha dk\, \frac{k^2\Sigma(k)}{k^2+\Sigma^2(k)}\right\} \qquad II4.6$$

Em substituição à equação integral $II4.6$, tentaremos resolver o problema equivalente constituído pela equação diferencial

$$\frac{d}{dp}\left((p+\alpha)^2\frac{d\Sigma(p)}{dp}\right) = -\frac{32}{\pi^2 N D}\frac{p^2\Sigma(p)}{p^2+\Sigma^2(p)} \qquad II4.7$$

(obtida derivando duas vezes $II4.6$) e pelas condições de contorno: infravermelha

$$0 \leq \Sigma(p) < \infty$$

e ultravioleta

$$4\alpha\frac{d\Sigma(p)}{dp}\bigg|_{p=\alpha} + \Sigma(p)\bigg|_{p=\alpha} = 0$$

Este procedimento é constante na literatura e a equação $II4.7$ assemelha-se à obtida por Appelquist e colaboradores nos trabalhos já citados.

Se impusermos $\alpha \gg \Sigma(p)$ haverá uma região $p \gg \Sigma(p)$ do intervalo $0 \leq p < \alpha$ na qual a equação $II4.7$ pode ser linearizada. Nestas condições

$$\frac{d}{dp}\left((p+\alpha)^2\frac{d\Sigma(p)}{dp}\right) = -\frac{32}{\pi^2 N D}\Sigma(p) \qquad II4.8$$

A solução desta equação é

$$\Sigma(p) = a_+(p+\alpha)^{-\frac{1+\omega}{2}} + a_-(p+\alpha)^{-\frac{1-\omega}{2}} \qquad II4.9$$

onde

$$\omega = \sqrt{1 - \frac{128}{\pi^2 M D}} \qquad II4.10$$

A compatibilização desta solução geral com as condições de contorno nos leva a analisar duas situações distintas. A primeira,

$$0 < \omega < 1 \qquad \text{ou} \qquad N > N_c = \frac{128}{\pi^2 D}$$

a solução

$$a_+(p+\alpha)^{-\frac{1+\omega}{2}} \qquad II4.11$$

é compatível com a condição de contorno infravermelha. No entanto, não satisfaz a condição ultravioleta, a não ser a solução trivial $\Sigma(p) = 0$. Na segunda situação,

$$\omega \quad \text{é imaginário ou} \quad N \leq N_c = \frac{128}{\pi^2 D}$$

A equação diferencial tem uma solução oscilatória dada por

$$\Sigma(p) = \frac{a}{\sqrt{p+\alpha}} \operatorname{sen}\left\{\frac{(2n+1)\pi}{2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{N_c}{N} - 1}\, \ln\left(\frac{p+\alpha}{2\alpha}\right)\right\} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad II4.12$$

Esta solução satisfaz as condições de contorno. Da condição infravermelha $\Sigma(\alpha) < \alpha$ estabelecemos que

$$-(2\alpha)^{3/2} < 2a < (2\alpha)^{3/2}$$

onde está incluída a solução trivial $\Sigma(p) = 0$.

O resultado expresso pela equação $II4.12$ já é suficiente para o que pretendíamos: a constatação da geração dinâmica de massa para os férmions.

Entretanto, devemos fazer algumas ressalvas. Ao estabelecermos a equação integral de Schwinger–Dyson para a autoenergia, $\Sigma(p)$, consideramos apenas a ordem dominante em $1/N$. Aproximação válida para N grande. No entanto, devido às sucessivas aproximações a solução não trivial para $\Sigma(p)$ ocorre para $N < 3$ ($N < 6$) (para férmions de quatro (duas) componentes). Surge a questão: será que as ordens subdominantes não alterarão este quadro? No caso da QED_3 a resposta é não. Aqui no modelo de Thirring acreditamos, dada a semelhança dos cálculos envolvidos com os da QED_3, que a resposta seja a mesma. De qualquer forma o problema está posto.

Como ocorre a geração dinâmica de massa para os férmions, a nossa preocupação passa a ser quais os efeitos que este termo de massa $\overline{\psi}\psi$ trará sobre as simetrias do modelo. Este é o assunto do próximo tópico deste capítulo.

II5–SIMETRIAS, CORRENTES E ANOMALIAS

O modelo que estamos estudando descrito originalmente pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M)\psi - \frac{g}{2N}\left(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)^2$$

não é, evidentemente, uma teoria de "gauge". É simétrico por transformações globais unitárias e pelas transformações discretas de paridade, conjugação de carga e inversão temporal. Estas tem realizações tanto para férmions de duas componentes, quanto para férmions de quatro componentes. O modelo é bastante modificado pelas correções quânticas. Surge um campo vetorial massivo, os férmions adquirem massa e é gerado um termo de Chern–Simons. Estas mudanças nos levam a descreve-lo, formalmente, pela lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{EF} = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - \Sigma - eA\!\!\!/\right)\psi - \frac{\mu^2}{2}A^2 + (D-4)a\epsilon^{\mu\alpha\nu}A_{\mu}\partial_{\alpha}A_{\nu} + \cdots \qquad II5.1$$

onde os parâmetros a, Σ (associado à solução da equação de Schwinger–Dyson), e e μ^2 são indicadores da presença de cada um dos termos correspondentes na teoria quantizada. Os efeitos destas modificações sobre as simetrias do modelo serão tratados em seguida.

A teoria descrita pela lagrangiana $II5.1$ assume a feição de uma eletrodinâmica massiva em três dimensões. Continua não sendo uma teoria de "gauge", a presença do termo $\mu^2 A^2$ quebra esta simetria. No que tange as outras simetrias vamos tratar, separadamente, cada componente do "isospinor" de $U(N)$ supondo que elas sejam férmions de duas ou de quatro componentes.

a) Férmions de Duas Componentes

Nesta situação não há como construir uma outra matriz 2×2 que anticomute com as matrizes de Dirac dadas em $II2.3$ – uma matriz γ^5. Não há,

portanto, nada para gerar uma transformação quiral, uma simetria quiral que possa ser quebrada pelo termo de massa $M\overline{\psi}\psi$ gerado dinamicamente.

Com relação as simetrias discretas temos o seguinte quadro. A transformação por PARIDADE é a inversão de apenas um eixo espacial, desde que a inversão dos dois eixos corresponde a uma rotação de π (é uma transformação contínua). Sob a transformação de paridade

$$\begin{aligned}(x^0, x^1, x^2) &\to (x^0, x^1, x^2)^P = (x^0, -x^1, x^2)\\ \psi(x) &\to \psi^P(x^P) = \sigma^1\psi(x^P)\\ (A^0, A^1, A^2)(x) &\to (A^0, A^1, A^2)^P(x^P) = (A^0, -A^1, A^2)(x^P)\end{aligned} \qquad II5.2$$

Por conseguinte a massa do férmion e a parcela da massa do campo A_μ associada ao termo de Chern–Simons quebram a paridade.

A transformação por INVERSÃO TEMPORAL é implementada tomando

$$\begin{aligned}(x^0, x^1, x^2) &\to (x^0, x^1, x^2)^T = (-x^0, x^1, x^2)\\ \psi(x) &\to \psi^T(x^T) = \sigma^2\psi(x^T)\\ (A^0, A^1, A^2)(x) &\to (A^0, A^1, A^2)^T(x^T) = (A^0, -A^1, -A^2)(x^T)\end{aligned} \qquad II5.3$$

Novamente, a massa do férmion e o termo de Chern–Simons quebram esta simetria.

Pela transformação de CONJUGAÇÃO DE CARGA, definida por

$$\begin{aligned}\psi(x) &\to \psi^C(x) = \sigma^2\overline{\psi}^t \quad (t = \text{transposto})\\ (A^0, A^1, A^2)(x) &\to (A^0, A^1, A^2)^C(x) = -(A^0, A^1, A^2)(x)\end{aligned} \qquad II5.4$$

a teoria é invariante.

Em síntese, observamos para o modelo de Thirring aqui tratado, uma quebra dinâmica das simetrias de paridade e de inversão temporal por conta

da geração dinâmica de massa para férmions e/ou do termo de Chern–Simons (massa para o campo auxiliar A_μ). Não ocorre quebra das simetrias PT e CPT.

b) Férmions de Quatro Componentes

Como veremos esta é uma situação bem distinta da anterior. Primeiro: não há geração do termo de Chern–Simons. Segundo: ao construirmos o spinor de quatro componentes fazemos de tal forma que ele é composto por dois spinores de duas componentes. Um com massa M e o outro $-M$. Como podemos definir as transformações por paridade e por inversão temporal de modo a intercambiar estes dois spinores, obtemos assim um sistema invariante por estas transformações. Não há quebra dinâmica de paridade ou inversão temporal. Por último, agora dispomos de três outras matrizes—γ^3, γ^5 e γ^6 (eq. $II2.8$)—além das matrizes de Dirac γ^0, γ^1 e γ^2 (eq. $II2.7$), com as quais construimos as transformações globais

$$\psi \to e^{i\alpha\gamma^3}\,\psi, \qquad \psi \to e^{i\beta\gamma^5}\,\psi \quad \text{e} \quad \psi \to e^{i\lambda\gamma^6}\,\psi$$

A teoria com campos fermiônicos sem massa ($M = 0$) é invariante por estas transformações. Cada spinor de quatro componentes tem, portanto, uma simetria $U(2)$ gerada pelas correntes

$$J^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad J^{\mu 3} = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^3\psi, \quad J^{\mu 5} = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \quad \text{e} \quad J^{\mu 6} = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^6\psi \qquad II5.5$$

A simetria total do "isospinor" será $U(2N)$. A presença do termo de massa $M\overline{\psi}\psi$ quebra esta simetria; a teoria massiva não é invariante pelas transformações geradas por $J^{\mu 3}$ e $J^{\mu 5}$.

Por conta da lagrangiana usar apenas três matrizes de Dirac, sobram matrizes com as quais podemos construir representações inequivalentes dos operadores associados as transformações discretas. O que é uma situação bem peculiar.

A transformação por PARIDADE é implementada por

$$P_\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \epsilon\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{com} \quad |\epsilon|^2 = 1 \qquad II5.6$$

Temos, portanto, infinitas representações inequivalentes rotuladas por ϵ. Em particular para $\epsilon = -1$ e $\epsilon = 1$.

$$P_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix} = -i\gamma^1\gamma^3$$
$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ \sigma^1 & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^1\gamma^5$$

Então

$$P_\epsilon = \frac{1+\epsilon}{2}P_1 + \frac{1-\epsilon}{2}P_{-1} \qquad II5.7$$

A transformação por CONJUGAÇÃO DE CARGA definida como

$$\psi \to \psi^C = C_n \overline{\psi}^t \quad (t = \text{transposto})$$
$$A_\mu \to A_\mu^C = -A_\mu$$

é implementada por

$$C_n = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & in\sigma^2 \end{pmatrix} \qquad \text{com} \quad |n|^2 = 1 \qquad II5.8$$

Mais uma vez, temos infinitas representações inequivalentes rotuladas por n. Em particular para $n = -1$ e $n = 1$

$$C_{-1} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & -i\sigma^2 \end{pmatrix} = \gamma^2 \qquad C_1 = \begin{pmatrix} i\sigma^2 & 0 \\ 0 & i\sigma^2 \end{pmatrix} = -1\gamma^0\gamma^1$$

Então

$$C_n = \frac{1+n}{2}C_1 + \frac{1-n}{2}C_{-1} \qquad II5.9$$

Por último, a transformação por INVERSÃO TEMPORAL também pode ser implementada por infinitas representações inequivalentes. Estas são definidas como

$$T_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \lambda\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{com} \quad |\lambda|^2 = 1 \qquad II5.10$$

Em particular para $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$

$$T_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = -i\gamma^2\gamma^5$$
$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix} = -\gamma^2\gamma^5$$

Portanto

$$T_\lambda = \frac{1+\lambda}{2}T_1 + \frac{1-\lambda}{2}T_{-1} \qquad II5.11$$

Para a discussão das simetrias do modelo que estamos estudando é conveniente sabermos como os bilineares que podemos construir com os campos fermiônicos se comportam frente às transformações discretas. Este é um ponto delicado. Alguns bilineares não se transformam como escalares, pseudoescalares, vetores ou pseudovetores se considerarmos as representações gerais de P_ϵ, C_n e T_λ. Poe exemplo, por PARIDADE,

$$\overline{\psi}\gamma^3\psi \rightarrow -\overline{\psi}\begin{pmatrix} \epsilon^* & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}\gamma^3\psi$$

O que significa que $\overline{\psi}\gamma^3\psi$ é um escalar se $\epsilon = -1$ ou pseudoescalar se $\epsilon = 1$. Já para outros valores de ϵ não é clara a natureza de $\overline{\psi}\gamma^3\psi$.

Um quadro geral do comportamento dos bilineares frente às transformações discretas é apresentado a seguir.

	Paridade			Conj. Carga			Inv. Temporal		
	P_ϵ	P_{-1}	P_1	C_n	C_{-1}	C_1	T_λ	T_{-1}	T_1
$\overline{\psi}\psi$	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$	V	V	V	V	V	V	V	V	V
$\overline{\psi}\gamma^3\psi$	?	+	−	?	+	−	?	+	−
$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^3\psi$	?	V	PV	?	V	PV	?	V	PV
$\overline{\psi}\gamma^5\psi$	?	−	+	?	−	+	?	−	+
$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	?	PV	V	?	PV	V	?	PV	V
$\overline{\psi}\gamma^6\psi$	−	−	−	+	+	+	−	−	−
$\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^6\psi$	PV	PV	PV	PV	PV	PV	PV	PV	PV

Tabela II1–V indica que o bilinear se transforma com A_μ, PV que se transforma como A_μ e muda de sinal, + o bilinear é par pela transformação, − é ímpar e ? não é clara a natureza do bilinear.

Dispondo do comportamento dos bilineares frente as transformações discretas, passamos a abordar a questão da conservação das correntes definidas em $II5.5$

Usando as equações de movimento clássicas obtemos, a partir de $II5.1$, para $D = 4$, que

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= 0 & \partial_\mu J^{\mu 3} &= i2M\overline{\psi}\gamma^3\psi \\ \partial_\mu J^{\mu 6} &= 0 & \partial_\mu J^{\mu 5} &= i2M\overline{\psi}\gamma^5\psi \end{aligned} \qquad II5.12$$

Portanto, no limite $M = 0$, todas as correntes são conservadas. Ao nível quântico , como iremos ver, este resultado permanece válido. Ou seja, não há anomalias na lei de conservação das correntes. Aliás, este resultado já foi citado por Pisarski (1985) quando estudou a QED_3.

A questão posta agora é, então,

$$\partial_\mu \langle 0 | (\psi\gamma^\mu\gamma\psi)(x) | 0 \rangle = ?$$

onde γ indica qualquer corrente.

Como sabemos, a anomalia de Adler–Bell–Jackiw está intimamente relacionada com as divergências ultra–violetas da teoria. O modelo que estamos tratando não é uma teoria de "gauge" e os férmions são massivos. Estes dois aspectos nos deixam a vontade para usarmos o método de BPHZ na subtração das divergências ultra–violetas presentes nas equações de movimento das correntes. Seguindo Lowenstein (1971, 1972) e Gomes (1990), as correntes são quantizadas com um produto normal N_2. Assim, sendo X um produto de campos básicos do modelo

$$X = \prod_{i=1}^{r} A_{\mu_i}(x_i) \prod_{j=1}^{s} \overline{\psi}(y_j) \prod_{k=1}^{t} \psi(z_k)$$

temos

$$\partial_\mu \langle 0|TN_2\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi\right)(x)X|0\rangle = \sum_{j=1}^{N} [\delta(x-y_j) - \delta(x-z_j)]\langle 0|TX|0\rangle$$

$$\partial_\mu \langle 0|TN_2\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^6\psi\right)(x)X|0\rangle = \sum_{j=1}^{N} [\gamma^6_{y_j}\delta(x-y_j) - \qquad II5.13$$

$$-(\gamma^6)^t\delta(x-z_j)]\langle 0|TX|0\rangle$$

As duas correntes, J^μ e $J^{\mu 6}$, são conservadas quanticamente.

Com um pouco mais de detalhes, para as outras correntes, temos

$$\partial_\mu \langle 0|TN_2\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma\psi\right)(x)X|0\rangle = \langle 0|TN_3\left(\partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma\psi\right)(x)\right)X|0\rangle$$

$$= 2iM\langle 0|TN_3\left(\overline{\psi}\gamma\psi\right)(x)X|0\rangle + \sum_{j=1}^{N} \gamma_{y_j}\delta(x-y_j) -$$

$$-(\gamma)^t_{z_j}\delta(x-z_j)]\langle 0|TX|0\rangle \qquad II5.14$$

$$= 2iM\langle 0|TN_2\left(\overline{\psi}\gamma\psi\right)(x)X|0\rangle + \sum_{j=1}^{N} [\gamma_{y_j}\delta(x-y_j) -$$

$$-(\gamma)^t_{z_j}\delta(x-z_j)]\langle 0|TX|0\rangle + 2iM\langle 0|T\left(N_3 - N_2\right)\left(\overline{\psi}\gamma\psi\right)(x)X|0\rangle \qquad II5.15$$

Onde γ representa γ^3 e γ^5. A anomalia é o termo que contém a diferença entre os produtos normais N_3 e N_2.

Agora, os produtos normais estão relacionados através das identidades de Zimmermann. E a anomalia deve ter os mesmos números quânticos dos termos já presentes na lei de conservação clássica. Isto impõe severas restrições a novos termos que possam surgir na equação quântica. Por exemplo, A_μ transforma-se por PARIDADE, CONJUGAÇÃO DE CARGA e INVERSÃO TEMPORAL independentemente dos parâmetros ϵ, n e λ segue-se daí que a anomalia não contém termos apenas em A_μ. Um outro dado: a dimensão canônica de $\partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma\psi$ é 3, portanto a anomalia deve ser um polinômio de dimensão canônica 3. Como bilineares contendo um campo A_μ não têm os mesmos números quânticos que a corrente não podem estar presentes na equação quântica. Restando, portanto, apenas bilineares dos campos fermiônicos. Para construi-los com dimensão canônica 3 devemos introduzir uma derivada. Assim da Tabela $II1$ verificamos que

$$(N_3 - N_2)\left[\overline{\psi}\gamma\psi\right] = aN_3\left[\partial_\mu\left(\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma\psi\right)\right] \qquad II5.16$$

onde a é determinado pelas condições de renormalização.

Usando $II5.16$ e $II5.15$ verificamos que a provável anomalia é de fato absorvida na renormalização da corrente. Portanto, as correntes $\overline{\psi}\gamma^\mu\gamma\psi$ também são conservadas.

II6–CONCLUSÕES

Apresentamos, agora, um resumo de nossas observações sobre o modelo de Thirring na expansão $1/N$.

A introdução do campo auxiliar, vetorial, A_μ, por conta do método computacional—expansão $1/N$—dá ao modelo as feições de uma eletrodinâmica massiva. No entanto, A_μ não é um campo de "gauge". De fato, ele representa um estado ligado com carater bosônico. Este estado ligado ocorre para férmions de quatro componentes se a constante de acoplamento, g, for positiva e para férmions de duas componentes se $g > -4\pi/M$.

Esta distinção, entre férmions de duas e quatro componentes, está ligada a presença do termo topológico de Chern–Simons (TCS), na ação efetiva, quando supomos férmions de duas componentes. Como é sabido, a geração dinâmica do TCS está ligada ao método de regularização do "loop" fermiônico e existência de massa para os férmions. Isto nos levou a solucionar, na ordem dominante em $1/N$, a equação de Schwinger–Dyson para a auto-energia dos férmions e constatamos uma solução não trivial.

Com isto a teoria passou a ser representada pela lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{EF} = \overline{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - \Sigma - eA\!\!\!/\right)\psi - \frac{\mu^2}{2}A^2 + (D-4)a\epsilon^{\mu\alpha\nu}A_\mu\partial_\alpha A_\nu + \cdots$$

E constatamos a quebra das simetrias discretas de paridade e inversão temporal para férmions de duas componentes. Já para férmions de quatro componentes as simetrias discretas são preservadas e mais ainda a simetria contínua $U(2N)$ é preservada no limite $\Sigma \to 0$.

Um comentário final. Uma continuação natural deste trabalho seria analisar o potencial efetivo, em termos dos campos básicos do modelo (o operador composto $\overline{\psi}\psi$); outra é tratar o modelo a temperatura finita buscando a dependência de Σ com a temperatura.

BIBLIOGRAFIA

Almeida, L. e Natale, A. (1989) — Chiral Symmetry Breaking in QED in Three-dimensions: Bifurcation of the Fermionic Selfenergy, *Eur. Phys. Lett.* **9**, 321.

Appelquist, T. et al. (1985a) — Chiral–symmetry Breaking in $2+1$ Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 1715.

Appelquist, T. et al. (1985b) — Chiral Symmetry Breaking in Quantum Field Theory , *Prog. Theor. Phys.Supp.* **85**, 244.

Appelquist, T. et al. (1986a) — Spontaneous chiral–symmetry breaking in three–dimensional QED, *Phys. Rev.* **D33**, 3704.

Appelquist, T. et al. (1986b) — Spontaneous breaking of Parity in $(2+1)$–dimensional QED, *Phys. Rev.* **D33**, 1774.

Appelquist, T., Nasha, D. e Wijewardhana, L. (1988a) — Critical Behavior in $(2+1)$–Dimensional QED, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2575.

Appelquist, T. et al. (1988b) — Numerical Studies of Enhanced Chiral Condensates, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1114.

Bhattacharyya, J. S. (1987) — Large–N expansion in massless three–dimensional QED, *Phys. Rev.* **D35**, 2049.

Coleman, S. (1975) — Quantum sine–Gordon equation as the massive Thirring model, *Phys. Rev.* **D11**, 2088.

da Silva, A. J. (1979) — Perturbação na massa no modelo de Thirring, Tese de Doutoramento, IFUSP/USP, São Paulo.

Deser, S., Jackiw, R. e Templeton, S. (1982) — Topological Massive Gauge

Theories, *Ann. Phys.* **140**, 372.

Girvin, S. M. e MacDonald, A. N. (1987) — Off–diagonal long–range order, oblique confinament and fractional Hall effect, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1252.

Gomes, M. e da Silva, A. J. (1986) — Equivalence between the Thirring model and a derivative coupling model, *Phys. Rev.* **D34**, 3916.

Gomes, M. et al. (1990) — Gauge Structure, Anomalies and Mass Generation in a Three Dimensional Thirring Model, preprint IFUSP/P–842.

Kovner, A. e Popescu, S. (1989) — Equivalence of the massive Thirring model with a $U(1)$ gauge theory, *Phys. Rev.* **D39**, 3766.

Lowenstein, J. H. (1971) — Normal–Product Quantization of Currents in Lagrangian Field Theory, *Phys. Rev.* **D4**, 2281.

Lowenstein, J. H. (1972) — Normal Product Methods in Renormalized Perturbation Theory, Thec. Rep. 73-068, University of Pittsburgh, Pittsburgh.

Nash, D. (1989) — Higher order corrections in $(2+1)$-dimensional QED, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2775.

Niemi, A. e Semenoff, G. (1983) — Axial–Anomaly–Induced Fermion Fractionization and Effective Gauge–Theory Action in Odd–Dimensional Space–Times, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2077.

Pisarski, R. (1984) — Chiral–symmetry breaking in three–dimensional electrodynamics, *Phys. Rev.* **D29**, 2423.

Redlich, A. N. (1984) — Parity violation and gauge noninvariance of the effective gauge field action in three dimensions, *Phys. Rev.* **D29**, 2366.

Schonfeld, J. F. (1981) — A mass term for three-dimensional gauge fields, *Nucl. Phys.* **B185**, 157.

Wiegman, P. B. (1988) — Superconductivity in strongly correlated eletronic

systems and confinement versus deconfinement phenomenon, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 821.

Wilczek, F. e Zee, A. (1983) — Linking Numbers, Spins and Statistic of Solitons, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2250.

Yokota, H. (1987) — The Thirring model at finite temperature and density: analysis based on a derivative-coupling model, *Prog. Theor. Phys.* **77**, 1450.