22/11/95

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

**Representações via Integrais de Trajetória de
Propagadores de Partículas Relativísticas**

WELLINGTON DA CRUZ

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Comissão Examinadora : Prof. Dr. Abraham H. Zimerman (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Carlos Farina (UFRJ)

Gitman

Prof. Dr. Dmitri M. Gitman (USP)

Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes (USP)

Prof. Dr. Victor O. Rivelles (USP)

Iberê Luiz Caldas

Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Orientador: Prof. Dr. Dmitri M. Gitman

São Paulo

1995

SBI-IFUSP

305M810T2344

Agradecimentos

Ao prof. Dmitri M. Gitman pela oportunidade deste trabalho; aos Profs. Shmaryu M. Shvartsman e Stoian I. Zlatev pela colaboração neste projeto; ao Dr. Alberto V. Saa pelas discussões a respeito do seu trabalho. Aos colegas do Departamento pelo auxílio nas questões relativas ao sistema computacional do Instituto. À Capes (PICD) e à Universidade Estadual de Londrina pelo apoio financeiro. Aos meus filhos *Rodrigo* e *Aline* e à minha esposa *Denise* por compreenderem a necessidade de minha ausência. A todos enfim, pela amizade ao longo dessa trajetória.

Dedico este trabalho
à memória de minha mãe, *Madá* ,
aos meus filhos e esposa.

Resumo

Neste trabalho, introduzimos integrais de trajetória sobre velocidades para partículas relativísticas. Nesta representação, a integração funcional sobre velocidades ocorre com condições de contorno iniciais e finais arbitrárias, e as matrizes inversas obtidas ao se resolver as integrais Gaussianas não contêm qualquer derivada em relação ao tempo. Podemos definir integrais Gaussianas e quase-Gaussianas sobre velocidades e regras de cálculo para resolvê-las. Esta técnica é usada para se obter uma expressão explícita do propagador causal da partícula escalar em um campo eletromagnético constante e em sua combinação com um campo de onda plana. No caso da partícula de Dirac, o fator espinorial foi calculado para campo constante. O propagador obtido neste caminho foi comparado com o da representação de Schwinger. Consideramos também, a partícula com momento magnético anômalo e para o cálculo do propagador levou-se em conta uma aproximação.

Abstract

In this work, we have introduced paths integrals over velocities for relativistic particles. In this representation we are integrating over velocities with arbitrary initial and final boundary conditions, and the matrices which have to be inverted in course of doing Gaussian integrals do not contain any derivatives in time. One can define Gaussian and quasi-Gaussian integrals over velocities and rules of handling them. This technique was applied for to obtain an explicit expression for the scalar propagator in a constant electromagnetic field and its combination with a plane wave field. In the case of the Dirac particle, the spin factor was found for constant field. The propagator found in this way was compared with the representation of Schwinger. We considered also, the particle with anomalous magnetic moment and the propagator was found taking into account an approximation.

Índice

I	Introdução	7
II	Representações via Integrais de Trajetória de Propagadores de Partículas Relativísticas num Campo Eletromagnético Externo	11
II.1	Partícula escalar	12
II.2	Partícula espinorial	16
II.3	Partícula espinorial com momento magnético anômalo	21
III	Cálculo dos Propagadores em algumas Configurações do Campo Eletromagnético Externo	26
III.1	Propagador da partícula escalar num campo eletromagnético constante	27
III.2	Propagador da partícula escalar num campo eletromagnético constante em combinação com um campo de onda plana . . .	35
IV	Fator Espinorial	41
IV.1	Propagador da partícula espinorial num campo eletromagnético externo	43
IV.2	Fator espinorial num campo constante	51
IV.3	Comparação com a representação de Schwinger	52
IV.4	Propagador da partícula espinorial com momento magnético anômalo	56

V Conclusão	65
A Procedimento de Discretização	67
B Cálculo do operador $\hat{\mathcal{H}}$	70
C Cálculo da expressão (II.30)	72
D Propriedades das Integrais quase-Gaussianas	75
D.1 Propriedades da integral de Berezin	76
D.1.1	76
D.1.2	77
D.1.3	77
D.1.4	78
D.1.5	78
D.1.6	80
D.1.7	81
E Cálculo da matriz inversa $\Omega(g, \tau, \tau')$	86
E.1 Cálculo de $Q(\tau') = \int_0^1 \Omega(\tau, \tau') d\tau$	87
E.2 Cálculo de $l(g) = \int d\tau d\tau' \Omega(g, \tau, \tau')$	88
E.3 Cálculo de $K(\tau, \tau')$	88
E.4 Cálculo do traço da quantidade AB	89
F Cálculo dos autovetores isotrópicos $n, \bar{n}, l, \bar{l}$	91
G Integração sobre as velocidades: caso da partícula espinorial	93
H Cálculo das funções $\Gamma_{\alpha\beta}(\tau, \tau')$ e $G_{\alpha\beta}(\tau, \tau')$	97
I Cálculo do fator espinorial	101

Capítulo I

Introdução

O estudo de representações, via integrais de trajetória, de propagadores de partículas relativísticas tem ganho ultimamente bastante atenção. Isto ocorre porque, através de tais construções, é possível se ter alguma idéia de como quantizar teorias mais complicadas, por exemplo, como teoria de cordas e gravitação. Por outro lado, tais representações são deveras interessantes por si só[4].

O estudo de tais representações, teve seu começo na procura de uma ação clássica para a partícula de Dirac. Com o surgimento do conceito de supersimetria e o desenvolvimento das teorias de cordas fermiônicas, onde variáveis de Grassmann foram introduzidas para a descrição de objetos clássicos com spin, descobriu-se que a ação para a partícula de Dirac é invariante por reparâmetrização (a física do sistema não deve ser alterada pela escolha de qualquer parâmetro) e possui uma supersimetria local (a invariância por supertransformação descarta do espectro físico os estados de norma negativa que podem ser induzidos pela componente temporal das variáveis de Grassmann). Tal ação foi identificada com a ação de uma teoria de supergravidade a uma dimensão (ver Brink-De Vecchia-Howe em [3]). A quantização

dessa ação via integral de trajetória foi e continua sendo tópico de muitos trabalhos[1].

Por outro lado, no contexto do método de quantização canônico, tem-se que, para formular uma teoria de partícula relativística, em primeira quantização, parte-se de uma ação clássica com simetria de gauge e supersimetria. Em seguida, usa-se o método operatorial Hamiltoniano para quantizar a ação e verifica-se se isto nos leva à equação de Schrödinger, que é considerada equivalente às equações das teorias de campos correspondentes, tais como as equações de Klein-Gordon ou Dirac. Isto significa que procuramos estabelecer a conexão entre uma dada teoria de campo com um dado modelo de partícula, ou seja, tal conexão é estabelecida notando-se que a amplitude de transição da partícula relativística é o propagador de Feynman para aqueles campos. A quantização, via integral de trajetória, nos fornece o propagador da partícula da teoria de campo correspondente (aqui os campos representam estados de uma única partícula), e isto nos leva, num certo sentido, à segunda quantização da teoria. Nessas formulações lidamos com o problema que envolve vínculos de primeira classe e Hamiltonianas nulas (sobre a superfície dos vínculos) devido, em particular, à invariância por reparâmetrização (ver Henneaux-Teitelboim em [3]).

Uma representação do propagador de Dirac, através de integrais de trajetória envolvendo variáveis de Grassmann adicionais foi obtida por Fradkin[2], onde a ação da partícula espinorial era não-degenerada e bem ajustada para cálculos, porém não-invariante por reparâmetrização. Contudo, uma ação invariante por reparâmetrização e supertransformação, extensão de[2], foi obtida por vários autores[3]. A abordagem de Fradkin deriva um modelo de partícula via representação de Schwinger do propagador em termos de uma integral sobre o tempo próprio. Isto leva a uma equação de Schrödinger para o kernel de Schwinger onde o tempo próprio faz o papel do tempo. A solução da equação de Schrödinger então é colocada na forma de uma integral de trajetória e a ação funcional é considerada como a ação de uma partícula,

cuja quantização leva ao propagador da teoria de campo.

Aqui, neste trabalho, vamos seguir Fradkin-Gitman[4] no cálculo de propagadores de partículas relativísticas. Eles partem de expressões bem conhecidas dos propagadores das teorias de campos correspondentes aos modelos de partículas e obtêm uma representação especial via integral de trajetória. Nessa representação a ação efetiva já é invariante por reparâmetrização e supertransformação, e pelo fato das ações das partículas relativísticas surgirem de maneira natural, eles têm esse caminho de cálculo como um método geral de derivação de Lagrangianas desse tipo. Observa-se que por essa via, melhor se compreende o papel dos campos suplementares de integração que deixam a ação invariante de gauge e as restrições sobre os intervalos das integrações funcionais podem ser consideradas como condições de gauge admissíveis. A medida de integração é obtida de maneira exata e a integral de trajetória na forma Hamiltoniana pode ser interpretada no contexto do método de quantização BFV, cuja característica básica é a ampliação do espaço de fase pela introdução de graus de liberdade não-físicos chamados fantasmas. Esse programa de quantização leva em conta as propriedades da invariância BRST do sistema, que é uma simetria global. Procura-se, portanto, pelo funcional gerador na forma covariante e prova-se a unitariedade da matriz de espalhamento que independe das funções fixadoras de gauge (consulte, por exemplo, o artigo de Henneaux-Teitelboim citado acima).

Sublinhamos que tais representações, por exemplo, para a partícula de Dirac num campo eletromagnético externo, podem em princípio facilitar o cálculo da função de Green total (observa-se que só para certa classe restrita de funções as integrações podem ser efetivamente realizadas), inclusive com correções radiativas ou mesmo simplificar a solução de muitos problemas (tem-se que para certas regiões de energia podemos estabelecer aproximações para as funções de Green e assim inferir o comportamento assintótico das quantidades físicas dentro da região de interesse). Agora, na literatura, reclama-se quanto aos diferentes métodos de quantização de tais sistemas,

um melhor entendimento da conexão entre eles (ver Aliev-Fainberg-Pak em [1]).

Neste ponto enfatizamos que, no nosso trabalho[5, 12], os propagadores são obtidos na forma de integrais de trajetória sobre velocidades, com condições iniciais e finais arbitrárias. Para implementar nossa abordagem, integrais quase-Gaussianas são definidas e regras de cálculo são introduzidas. Na representação obtida, temos uma teoria de perturbação em que a integral Gaussiana é considerada como uma aproximação de ordem zero. Observamos, então, que as integrais Gaussianas não contêm qualquer derivada em relação ao tempo e a medida de integração possui uma função- δ de $\int v d\tau$, que é incorporada na estrutura da Gaussiana usual.

O trabalho está organizado como segue. À parte este Capítulo introdutório em que situamos nosso estudo; no Capítulo II apresentamos o método de Fradkin-Gitman para o cálculo de propagadores em termos de integrais de trajetória; no Capítulo III o propagador da partícula escalar, num campo constante e em sua combinação com um campo de onda plana, é calculado em termos da técnica de integração sobre velocidades; no Capítulo IV calculamos o propagador da partícula de Dirac num campo constante levando em conta o fator espinorial e comparamos esta representação com a de Schwinger, observando sua equivalência, também consideramos a partícula com momento magnético anômalo e para uma dada aproximação, obtemos o propagador para este caso; no Capítulo V fazemos um resumo de nossos resultados e adiantamos outras possibilidades de estudo; por fim, nos Apêndices temos detalhado várias passagens do texto e introduzido mais alguns conceitos a título de completeza.

Capítulo II

Representações via Integrais de Trajetória de Propagadores de Partículas Relativísticas num Campo Eletromagnético Externo

Aqui, vamos considerar a partícula num campo eletromagnético externo $A_\mu(x)$, tal que as funções de Green causais $D^c(x, y)$, $S^c(x, y)$ das respectivas equações de uma partícula da teoria de campo correspondente são escritas como um elemento de matriz de um operador[4] :

$$D^c(x, y) = \langle x | D^c | y \rangle \quad (\text{II.1})$$

ou

$$S^c(x, y) = \langle x | S^c | y \rangle, \quad (\text{II.2})$$

onde $|x\rangle$ são autovetores de algum operador autoconjugado das coordenadas

X^μ e correspondentes operadores canônicos conjugados de momentos P^μ , tal que :

$$\begin{aligned}
X^\mu |x\rangle &= x^\mu |x\rangle, \\
\langle x|y\rangle &= \delta^4(x-y), \\
\int |x\rangle \langle x| dx &= I, \\
[P_\mu, X^\nu]_- &= -i\delta_\mu^\nu, \\
P_\mu |p\rangle &= p_\mu |p\rangle, \\
\langle p|p'\rangle &= \delta^4(p-p'), \\
\int |p\rangle \langle p| dp &= I, \\
\langle x|P_\mu|y\rangle &= -i\partial_\mu\delta^4(x-y), \\
\langle x|p\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^2} \exp ipx, \\
[\Pi_\mu, \Pi_\nu]_- &= -igF_{\mu\nu}, \\
\Pi_\mu &= -P_\mu - gA_\mu(x).
\end{aligned} \tag{II.3}$$

II.1 Partícula escalar

A função de Green causal $D^c(x, y)$ da equação de Klein-Gordon é o propagador da partícula escalar :

$$(P^2 - m^2 + i\epsilon) D^c(x, y) = -\delta^4(x - y), \tag{II.4}$$

onde $P_\mu = i\partial_\mu - gA_\mu$, g é a carga elétrica e $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ é o tensor de Minkowski.

A equação (II.4), nos dá a seguinte expressão para o operador D^c :

$$D^c = (m^2 - \pi^2 - i\epsilon)^{-1}. \tag{II.5}$$

Uma expressão inversa para este operador bosônico pode ser escrita por meio de uma integral sobre o tempo próprio λ ,

$$\begin{aligned} D^c &= i \int_0^\infty e^{-i\hat{\mathcal{H}}(\lambda, X, P)} d\lambda, \\ \hat{\mathcal{H}}(\lambda, X, P) &= \lambda (m^2 - \pi^2 - i\epsilon). \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

E assim, temos a forma matricial para o propagador (o termo infinitesimal ϵ , é introduzido como um fator de amortecimento para λ grande e daqui em diante será omitido):

$$D^c(x_{out}, x_{in}) = i \int_0^\infty \langle x_{out} | e^{-i\hat{\mathcal{H}}(\lambda, X, P)} | x_{in} \rangle d\lambda. \quad (\text{II.7})$$

No que segue, tal elemento de matriz é escrito via uma integral de trajetória no espaço de fase, tendo em conta o ordenamento de Weyl para operadores (ver Berezin-Marinov em [3]), os quais são escritos como funções clássicas sobre o espaço de fase, especificada uma lei de multiplicação apropriada:

$$\begin{aligned} D^c(x_{out}, x_{in}) &= i \int_0^\infty d\lambda_0 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty dx_1 \dots dx_{N-1} d\lambda_1 \dots d\lambda_N \\ &\times \langle x_{out} | e^{-i\mathcal{H}(\lambda_N, X, P)/N} | x_{N-1} \rangle \delta(\lambda_N - \lambda_{N-1}) \dots \\ &\times \langle x_i | e^{-i\mathcal{H}(\lambda_i, X, P)/N} | x_{i-1} \rangle \delta(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \dots \\ &\times \langle x_1 | e^{-i\mathcal{H}(\lambda_1, X, P)/N} | x_{in} \rangle \delta(\lambda_1 - \lambda_0) \\ &= i \int_0^\infty d\lambda_0 \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty dx_1 \dots dx_{N-1} \frac{dp_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{dp_N}{(2\pi)^4} \\ &\times d\lambda_1 \dots d\lambda_N \frac{d\pi_1}{(2\pi)} \dots \frac{d\pi_N}{(2\pi)} \\ &\times \exp \left\{ i \sum_{k=1}^N \left[p_k \frac{\Delta x_k}{\Delta \tau} - \mathcal{H}(\lambda_k, \bar{x}_k, p_k) + \pi_k \frac{\Delta \lambda_k}{\Delta \tau} \right] \Delta \tau \right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

onde $\Delta \tau = \frac{1}{N}$, $\bar{x}_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta \lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k-1}$.

E no limite, temos:

$$D^c(x_{out}, x_{in}) = i \int_0^\infty d\lambda_0 \int Dx Dp D\lambda D\pi \times \exp \left\{ i \int \left[\lambda (P^2 - m^2) + p\dot{x} + \pi\dot{\lambda} \right] d\tau \right\}, \quad (\text{II.9})$$

$P_\mu = -p_\mu - gA_\mu(x)$ e a integração se dá sobre as trajetórias $x_\mu(\tau)$, $p_\mu(\tau)$, $\lambda(\tau)$, $\pi_\mu(\tau)$, parametrizadas pelo parâmetro $\tau \in [0, 1]$ e satisfazendo as condições de contorno $x(0) = x_{in}$, $x(1) = x_{out}$, $\lambda(0) = \lambda_0$. Observamos aqui que, as funções $x(\tau)$ e $x(f(\tau))$, onde $f(\tau)$ é uma função monotônica para garantir a covariância geral do sistema, isto é, $\frac{df}{d\tau} > 0$ e com $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ os limites são conservados, descrevem a mesma trajetória. Portanto, existem muitas trajetórias que correspondem a um e ao mesmo estado físico, ou seja, a teoria é uma teoria de gauge.

A expressão (II.9) é a forma Hamiltoniana da integral de trajetória para o propagador da partícula escalar e a forma Lagrangiana é obtida integrando-se sobre os momentos p , fazendo-se o deslocamento $-p_\mu \rightarrow p_\mu + \left(\frac{x_\mu}{2\lambda} + gA_\mu(x)\right)$ e a substituição $e = 2\lambda$. Assim, chegamos à:

$$D^c(x_{out}, x_{in}) = \frac{i}{2} \int_0^\infty de_0 \int Dx De D\pi M(e) \times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - \frac{e}{2} m^2 - g\dot{x}A(x) + \pi\dot{e} \right] d\tau \right\}, \quad (\text{II.10})$$

onde as condições de contorno $x(0) = x_{in}$, $x(1) = x_{out}$, $e(0) = e_0$ são satisfeitas e a medida $M(e)$ tem a forma :

$$M(e) = \int Dp \exp \left(\frac{i}{2} \int_0^1 e p^2 d\tau \right). \quad (\text{II.11})$$

A ação Lagrangiana da partícula escalar consiste de duas partes. A primeira é uma ação invariante de gauge por reparametrização:

$$S = - \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2e} + \frac{e}{2} m^2 + g\dot{x}A(x) \right) d\tau, \quad (\text{II.12})$$

com as transformações de gauge na forma :

$$\begin{aligned}x(\tau) &\rightarrow x(f(\tau)) \\e(\tau) &\rightarrow e(f(\tau))\dot{f}(\tau) \\f(0) &= 0 \\f(1) &= 1\end{aligned}\tag{II.13}$$

ou em termos infinitesimais por:

$$\delta x = \dot{x}\epsilon, \delta e = \frac{d}{d\tau}(e\epsilon), \epsilon(0) = \epsilon(1) = 0.\tag{II.14}$$

A segunda parte é um termo de fixação de gauge:

$$S_{GF} = \int_0^1 \pi \dot{e} d\tau,\tag{II.15}$$

no gauge tempo próprio $\dot{e} = 0$.

Tem-se aqui que tal condição de gauge fixa a função arbitrária $f(\tau)$, dadas as duas condições de contorno. Isto é possível porque o gauge tempo próprio nos fornece uma equação diferencial de segunda ordem em $f(\tau)$, ou dito de outro modo, uma equação de primeira ordem em e . Para outras condições mais gerais, os campos fantasmas (no contexto do método de quantização BfV) podem não ser livres e a integração sobre eles pode gerar medidas de integração não-triviais. Por outro lado, a expressão (II.10) pode depender da escolha de gauge, contudo as quantidades físicas (amplitudes de espalhamento, etc.) que são calculadas via propagadores não dependem dessa escolha. A medida $M(e)$ contribui com um termo infinito em (II.10) que compensa outro que vem da integração sobre x . Podemos entender esse mecanismo de compensação, considerando o caso em que o campo externo é desligado. Como temos uma integração a mais em p , devido à invariância por translação, fazemos a seguinte mudança de variáveis $\sqrt{e}p \rightarrow p$, $\frac{x - x_{in} - \tau(x_{out} - x_{in})}{\sqrt{e}} \rightarrow x$, onde as novas trajetórias x têm valores nulos nos pontos terminais $x(0) = x(1) = 0$. Integrando-se sobre π , chegamos à expressão da função de Green causal da equação de Klein-Gordon

$$D^c(x_{out}, x_{in}) = C \int_0^\infty \frac{de}{e^2} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \left(em^2 + \frac{(x_{out} - x_{in})^2}{e} \right) \right\}, \quad (\text{II.16})$$

onde (ver Apêndice A)

$$C = \frac{i}{2} \int Dx Dp \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 (p^2 - \dot{x}^2) d\tau \right\} = \frac{1}{2(2\pi)^2}. \quad (\text{II.17})$$

II.2 Partícula espinorial

O propagador da partícula espinorial é a função de Green causal $S^c(x, y)$ da equação de Dirac :

$$(\not{H} - m) S^c(x, y) = -\delta^4(x - y), \quad (\text{II.18})$$

onde $\not{H} = P_\mu \gamma^\mu$, $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}$.

A representação supersimétrica da teoria é obtida definindo-se a função $\tilde{S}^c(x, y) = S^c \gamma^5$, com $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$. Esta última satisfaz

$$(P_\nu \tilde{\gamma}^\nu - \gamma^5 m) \tilde{S}^c(x, y) = \delta^4(x - y), \quad (\text{II.19})$$

onde $\tilde{\gamma}^\nu = \gamma^\nu \gamma^5$ (as matrizes $\tilde{\gamma}^\nu$ satisfazem as mesmas relações de comutação de γ^ν) e para todas as matrizes γ tem-se que $[\gamma^m, \gamma^n]_+ = 2\eta^{mn}$; $m, n = 0, 3, 5$; $\eta^{mn} = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$.

A representação matricial de $\tilde{S}^c(x, y)$ no espaço das coordenadas, com índices espinoriais escritos explicitamente tem a seguinte forma :

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}^c(x, y) = \langle x | \tilde{S}_{\alpha\beta}^c | y \rangle \quad (\text{II.20})$$

e da equação (II.19) segue que o operador $\tilde{S}^c$:

$$\tilde{S}^c = (\not{H} - \gamma^5 m)^{-1}. \quad (\text{II.21})$$

Tal operador pode ser colocado na forma de uma integração de uma exponencial com expoente par, isto é, dado um operador fermiônico (ímpar), temos que :

$$A^{-1} = \int_0^\infty d\lambda \int \exp \left\{ i \left[\lambda (A^2 + i\epsilon) + \chi A \right] \right\} d\chi, \quad (\text{II.22})$$

onde λ é uma variável par e χ é uma variável ímpar (Grassmanniana) que anticomuta com A por definição. O par (λ, χ) é considerado um super-tempo próprio. Usando (II.22) podemos escrever $\tilde{S}^c$ como (ver Apêndice B):

$$\tilde{S}^c = \int_0^\infty d\lambda \int e^{-i\hat{\mathcal{H}}} d\chi, \quad (\text{II.23})$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \lambda (m^2 - \Pi^2) + (\Pi - \gamma^5 m) \chi \\ &= \lambda \left[m^2 - \Pi^2 + \frac{ig}{2} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \right] \\ &\quad + (\Pi_\mu \gamma^\mu - \gamma^5 m) \chi. \end{aligned} \quad (\text{II.24})$$

Assim, o propagador (II.20) assume a seguinte forma :

$$\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = \int_0^\infty d\lambda \int \langle x_{out} | e^{-i\hat{\mathcal{H}}} | x_{in} \rangle d\chi, \quad (\text{II.25})$$

tal que o elemento de matriz aí inserido é agora expresso por uma integral de trajetória. Tem-se que a estrutura de matriz- γ do operador $\hat{\mathcal{H}}(\lambda, \chi)$ não impede de termos como no caso usual $\exp -i\hat{\mathcal{H}} = \left(\exp -i\hat{\mathcal{H}}/N \right)^N$ e, assim, introduz-se $(N-1)$ operadores identidades $\int |x\rangle \langle x| dx = I$ entre todos os operadores $\exp -i\hat{\mathcal{H}}/N$. Em adição, as integrais ordinárias sobre λ e χ são transformadas em integrais de trajetória, introduzindo-se N integrações sobre as trajetórias pares $\lambda(\tau)$ e as trajetórias ímpares $\chi(\tau)$:

$$\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty d\lambda_0 \int \prod_{k=1}^N \langle x_k | e^{-i\hat{\mathcal{H}}(\lambda_k, \chi_k) \Delta\tau} | x_{k-1} \rangle$$

$$\begin{aligned} & \times \delta(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \delta(\chi_k - \chi_{k-1}) \\ & \times d\chi_0 dx_1 \dots dx_{N-1} d\lambda_1 \dots d\lambda_N d\chi_1 \dots d\chi_N, \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

com as representações integrais para as funções- δ na forma :

$$\begin{aligned} & \delta(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \delta(\chi_k - \chi_{k-1}) = \\ & \frac{i}{2\pi} \int d\pi_k d\nu_k \exp i [\pi_k (\lambda_k - \lambda_{k-1}) + \nu_k (\chi_k - \chi_{k-1})] \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

onde os ν_k são variáveis ímpares. Observamos aqui que, as matrizes- γ não comutam e, portanto, para bem definir todas as expressões contidas no intervalo $[x_i - x_{i-1}]$ com $i = 1, \dots, N$ atribui-se, formalmente, às matrizes- γ um tempo próprio τ , conforme sua disposição. Introduz-se, então, um operador T que atua sobre as mesmas, o que nos permite considerá-las como variáveis de Grassmann. Sublinhamos também que os elementos de matriz em (II.26) apresentam ordenamento de Weyl no ponto médio $\bar{x}_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$. Assim, no processo limite a expressão (II.26) assume a seguinte forma :

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= T \int_0^\infty d\lambda_0 \int d\chi_0 D\mathbf{x} D\mathbf{p} D\lambda D\pi D\chi D\nu \\ &\times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda \left(P^2 - m^2 - \frac{ig}{2} F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \right) + (\gamma^5 m - P_\mu \gamma^\mu) \chi \right. \right. \\ &\left. \left. + p\dot{x} + \pi\dot{\lambda} + \nu\dot{\chi} \right] d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

onde x, p, λ, π são trajetórias pares e χ, ν trajetórias ímpares, satisfazendo as condições de contorno $x(0) = x_{in}, x(1) = x_{out}, \lambda(0) = \lambda_0, \chi(0) = \chi_0$.

Introduzindo, agora, cinco fontes Grassmannianas $\rho_n(\tau)$; $n = \overline{0, 3, 5}$; que anticomutam com as matrizes- γ por definição, temos que :

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= \int_0^\infty d\lambda_0 \int d\chi_0 \int D\mathbf{x} D\mathbf{p} D\lambda D\pi D\chi D\nu \\ &\times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda \left(P^2 - m^2 - \frac{ig}{2} F_{\mu\nu} \frac{\delta_l}{\delta\rho_\mu} \frac{\delta_l}{\delta\rho_\nu} \right) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(m \frac{\delta_l}{\delta \rho_5} - P_\mu \frac{\delta_l}{\delta \rho_\mu} \right) \chi + p\dot{x} + \pi\dot{\lambda} + \nu\dot{\chi} \Big] d\tau \Big\} \\
& \times T \exp \left(\int_0^1 \rho_n(\tau) \gamma^n d\tau \Big|_{\rho=0} \right). \quad (II.29)
\end{aligned}$$

Por outro lado, podemos representar $T e^{\int_0^1 \rho_n \gamma^n d\tau}$ na forma de uma integral de trajetória Grassmanniana, isto é (ver Apêndice C),

$$\begin{aligned}
T e^{\int_0^1 \rho_n(\tau) \gamma^n d\tau} &= \exp \left(i \gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \\
&\times \int \exp \left[\int_0^1 \left(\psi_n \dot{\psi}^n - 2i \rho_n \psi^n \right) d\tau + \psi_n(1) \psi^n(0) \right] D\psi \Big|_{\theta=0}. \quad (II.30)
\end{aligned}$$

Assim, chegamos à expressão da integral de trajetória Hamiltoniana para a função de Green (II.28) :

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= \exp \left(i \gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \int_0^\infty d\lambda_0 \int d\chi_0 \\
&\times \exp \left(i \int_0^1 \left[\lambda \left(P^2 - m^2 + 2ig F_{\mu\nu} \psi^\mu \psi^\nu \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2i \left(m\psi^5 - P_\mu \psi^\mu \right) \chi - i\psi_n \dot{\psi}^n + p\dot{x} + \pi\dot{\lambda} + \nu\dot{\chi} \right] d\tau \right. \\
&\quad \left. + \psi_n(1) \psi^n(0) \right) Dx Dp D\pi D\chi D\nu D\psi \Big|_{\theta=0}, \quad (II.31)
\end{aligned}$$

onde em adição temos as condições de contorno $\psi^n(1) + \psi^n(0) = \theta^n$, sendo os θ^n algumas variáveis ímpares.

Integrando agora, nos momentos p , obtemos a forma Lagrangiana da integral de trajetória :

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= \exp \left(i \gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \int_0^\infty de_0 \int d\chi_0 \\
&\times \int \exp \left(i \left\{ \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - e \frac{m^2}{2} - g\dot{x}A(x) + ieg F_{\mu\nu}(x) \psi^\mu \psi^\nu \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i \left(\frac{\dot{x}_\mu \psi^\mu}{e} - m\psi^5 \right) \chi - i\psi_n \dot{\psi}^n + \pi\dot{e} + \nu\dot{\chi} \right] d\tau + \psi_n(1) \psi^n(0) \right\} \right) \\
&\times M(e) Dx De D\pi D\chi D\nu D\psi \Big|_{\theta=0}, \quad (II.32)
\end{aligned}$$

onde a medida $M(e)$ é dada como no caso anterior e as condições de contorno são :

$$\begin{aligned}
 x(0) &= x_{in} \\
 x(1) &= x_{out} \\
 e(0) &= e_0 \\
 \chi(0) &= \chi_0 \\
 \psi(1) + \psi(0) &= \theta
 \end{aligned} \tag{II.33}$$

Verificamos aqui que a ação da partícula espinorial é constituída por um termo invariante por reparâmetrização e supertransformação, e outro de fixação de gauge :

$$S_{EF} = S + S_{GF}$$

$$\begin{aligned}
 S = \int_0^1 & \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - e\frac{m^2}{2} - g\dot{x}A(x) + iegF_{\mu\nu}(x)\psi^\mu\psi^\nu \right. \\
 & \left. + i\left(\frac{\dot{x}_\mu\psi^\mu}{e} - m\psi^5\right)\chi - \psi_n\dot{\psi}^n \right] d\tau
 \end{aligned} \tag{II.34}$$

e

$$S_{GF} = \int_0^1 (\pi\dot{e} + \nu\dot{\chi}) d\tau. \tag{II.35}$$

As transformações sob as quais S é invariante são, reparâmetrizações

$$\delta x = \dot{x}\xi, \delta e = \frac{d}{d\tau}(e\xi), \delta\psi^n = \dot{\psi}^n\xi, \delta\chi = \frac{d}{d\tau}(\chi\xi) \tag{II.36}$$

e supertransformações

$$\begin{aligned}
\delta x^\alpha &= i\psi^\alpha \epsilon \\
\delta e &= i\chi \epsilon \\
\delta \chi &= \dot{\epsilon} \\
\delta \psi^\alpha &= \frac{1}{2e}(\dot{x}^\alpha + i\chi \psi^\alpha) \epsilon \\
\delta \psi^5 &= \left[\frac{m}{2} - \frac{i}{me} \psi^5 (\dot{\psi}^5 - \frac{m}{2} \chi) \right] \epsilon,
\end{aligned} \tag{II.37}$$

onde ξ e ϵ são parâmetros par e ímpar, respectivamente, dependentes de τ .

II.3 Partícula espinorial com momento magnético anômalo

A função de Green causal $\tilde{S}^c(x, y)$ da equação de Dirac-Pauli é o propagador da partícula espinorial com momento magnético anômalo [6]:

$$\left(\hat{P}_\nu \tilde{\gamma}^\nu - m\gamma^5 - \frac{\mu}{2} \gamma^5 \tilde{\sigma}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \tilde{S}^c(x, y) = \delta^4(x - y), \tag{II.38}$$

onde $\tilde{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\tilde{\gamma}^\mu, \tilde{\gamma}^\nu]$ e μ é o momento magnético anômalo.

A representação matricial de $\tilde{S}_{\alpha\beta}^c(x, y)$ no espaço das coordenadas, é da seguinte forma:

$$\tilde{S}_{\alpha\beta}^c(x, y) = \langle x | \tilde{S}_{\alpha\beta}^c | y \rangle \tag{II.39}$$

e da equação (II.38) segue que $\tilde{S}^c$:

$$\tilde{S}^c = \left[\Pi_\nu \gamma^\nu - m\gamma^5 - \frac{\mu}{2} \gamma^5 \sigma^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right]^{-1}. \tag{II.40}$$

Usando, agora, a expressão (II.22) e com o operador fermiônico A na forma (ver Apêndice B):

$$A = \Pi_\nu \gamma^\nu - m\gamma^5 - i\frac{\mu}{2} \gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta, \tag{II.41}$$

temos que:

$$A^2 = \Pi^2 - m^2 - i \left(m\mu + \frac{g}{2} \right) F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta + \frac{\mu^2}{4} (F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta)^2 - i\mu \gamma^5 \gamma^\alpha [F_{\alpha\beta}, \Pi^\beta]_+, \quad (\text{II.42})$$

e

$$\tilde{S}^c = \int_0^\infty d\lambda \int e^{-i\hat{\mathcal{H}}(\lambda, \chi)} d\chi, \quad (\text{II.43})$$

onde

$$\hat{\mathcal{H}}(\lambda, \chi) = \lambda \left\{ m^2 - \Pi^2 + \left(m\mu + \frac{g}{2} \right) F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta - \frac{\mu^2}{4} (F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta)^2 + i\mu \gamma^5 \gamma^\alpha [F_{\alpha\beta}, \Pi^\beta]_+ \right\} + \left(\Pi_\nu \gamma^\nu - m\gamma^5 - i\frac{\mu}{2} \gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right) \chi. \quad (\text{II.44})$$

Observamos aqui que $\hat{\mathcal{H}}(\lambda_k, \chi_k)$ tem a forma simetrizada nos operadores $\hat{x}$ e $\hat{p}$, os quais aparecem nos termos $[\hat{p}_\alpha, A^\alpha(\hat{x})]_+$ e $[\hat{p}_\alpha, F^{\alpha\beta}(\hat{x})]_+$. Assim, $\mathcal{H}(\lambda, \chi, x, p)$ é considerado o símbolo de Weyl de $\hat{\mathcal{H}}$ no setor x, p :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\lambda, \chi, x, p) = & \lambda \left[m^2 - P^2 + i \left(m\mu + \frac{g}{2} \right) F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right. \\ & \left. + 2i\mu \gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha P^\beta - \frac{\mu^2}{4} (F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta)^2 \right] \\ & + \left(P_\nu \gamma^\nu - m\gamma^5 - i\frac{\mu}{2} \gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right) \chi \end{aligned} \quad (\text{II.45})$$

Neste caminho, a função de Green é escrita como:

$$\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = \int_0^\infty d\lambda \int \langle x_{out} | e^{-i\mathcal{H}(\lambda, \chi, x, p)} | x_{in} \rangle d\chi. \quad (\text{II.46})$$

A passagem para a representação integral de trajetória desta expressão leva em conta os mesmos argumentos do caso anterior, portanto, o propagador assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= T \int_0^\infty d\lambda_0 \int d\chi_0 \\
&\times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda \left\{ P^2 - m^2 - i \left(m\mu + \frac{g}{2} \right) F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta - 2i\mu\gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha P^\beta \right. \right. \right. \\
&+ \frac{\mu^2}{4} \left(F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right)^2 \left. \left. \right\} + \left(m\gamma^5 - P_\nu \gamma^\nu + i\frac{\mu}{2} \gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right) \chi \right. \\
&\left. + p\dot{x} + \pi\dot{\lambda} + \nu\dot{\chi} \right] d\tau \left. \right\} Dx Dp D\lambda D\pi D\chi D\nu, \tag{II.47}
\end{aligned}$$

onde x, p, λ, π são trajetórias pares e χ, ν trajetórias ímpares, satisfazendo as condições de contorno $x(0) = x_{in}$, $x(1) = x_{out}$, $\lambda(0) = \lambda_0$, $\chi(0) = \chi_0$. Dado que o operador T atua sobre as matrizes- γ e levando em conta as fontes $\rho_n(\tau)$, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= \\
&\int_0^\infty d\lambda_0 \int \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda \left\{ P^2 - m^2 - i \left(m\mu + \frac{g}{2} \right) F_{\alpha\beta} \frac{\delta_l}{\delta\rho_\alpha} \frac{\delta_l}{\delta\rho_\beta} \right. \right. \right. \\
&- 2i\mu F_{\alpha\beta} P^\beta \frac{\delta_l}{\delta\rho_5} \frac{\delta_l}{\delta\rho_\alpha} + \frac{\mu^2}{4} \left(F_{\alpha\beta} \frac{\delta_l}{\delta\rho_\alpha} \frac{\delta_l}{\delta\rho_\beta} \right)^2 \left. \left. \right\} + \left(m \frac{\delta_l}{\delta\rho_5} - P_\nu \frac{\delta_l}{\delta\rho_\nu} \right. \right. \\
&\left. \left. + i\frac{\mu}{2} F_{\alpha\beta} \frac{\delta_l}{\delta\rho_5} \frac{\delta_l}{\delta\rho_\alpha} \frac{\delta_l}{\delta\rho_\beta} \right) \chi + p\dot{x} + \pi\dot{\lambda} + \nu\dot{\chi} \right] d\tau \left. \right\} \\
&\times d\chi_0 Dx Dp D\lambda D\pi D\chi D\nu T \exp \int_0^1 \rho_n(\tau) \gamma^n d\tau \Big|_{\rho=0}. \tag{II.48}
\end{aligned}$$

A forma Hamiltoniana da integral de trajetória para a função de Green, após usarmos a representação (II.30), vem dada por:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= \\
&\exp \left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial\theta^n} \right) \int_0^\infty d\lambda_0 \int \exp \left\{ i \int_0^1 \left[\lambda \left\{ P^2 - 8i\mu\psi^5 F_{\alpha\beta} P^\alpha \psi^\beta \right. \right. \right. \\
&+ 2ig F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta - M^2 \left. \left. \right\} + 2i \left(P_\alpha \psi^\alpha - M\psi^5 \right) \chi \right. \\
&\left. - i\psi_n \dot{\psi}^n + p\dot{x} + \pi\dot{\lambda} + \nu\dot{\chi} \right] d\tau + \psi_n(1) \psi^n(0) \left. \right\} \\
&\times d\chi_0 Dx Dp D\lambda D\pi D\chi D\nu D\psi \Big|_{\theta=0}, \tag{II.49}
\end{aligned}$$

onde $M = m - 2i\mu F_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta$ e x, p, λ, π são trajetórias pares; χ, ν, ψ trajetórias ímpares, com condições de contorno $x(0) = x_{in}, x(1) = x_{out}, \chi(0) = \chi_0, \psi^n(1) + \psi^n(0) = \theta^n$.

Integrando sobre os momentos p , chegamos à forma Lagrangiana da integral de trajetória:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & \exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n}\right) \int_0^\infty de_0 \int \exp\left\{i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - e\frac{M^2}{2} - \dot{x}^\alpha (gA_\alpha \right. \right. \\ & + 4i\mu\psi^5 F_{\alpha\beta}\psi^\beta) + ig e F_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta + i\left(\frac{\dot{x}_\alpha\psi^\alpha}{e} - M^*\psi^5\right) \chi \\ & \left. \left. - i\psi_n\dot{\psi}^n + \pi\dot{e} + \nu\dot{\chi}\right] d\tau + \psi_n(1)\psi^n(0)\right\} \\ & \times M(e) d\chi_0 Dx De D\pi D\chi D\nu D\psi \big|_{\theta=0}, \end{aligned} \quad (II.50)$$

onde $M^* = m + 2i\mu F_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta$ e a medida $M(e)$ é definida como nos casos anteriores.

A ação efetiva, S_{EF} , da partícula espinorial com momento magnético anômalo é constituída de dois termos, isto é,

$$\begin{aligned} S = \int_0^1 & \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - e\frac{M^2}{2} - \dot{x}^\alpha (gA_\alpha + 4i\mu\psi^5 F_{\alpha\beta}\psi^\beta) \right. \\ & \left. + ig e F_{\alpha\beta}\psi^\alpha\psi^\beta + i\left(\frac{\dot{x}_\alpha\psi^\alpha}{e} - M^*\psi^5\right) \chi - i\psi_n\dot{\psi}^n \right] d\tau \end{aligned} \quad (II.51)$$

e

$$S_{GF} = \int_0^1 (\pi\dot{e} + \nu\dot{\chi}) d\tau, \quad (II.52)$$

no gauge tempo próprio $\dot{e} = \dot{\chi} = 0$. As transformações sob as quais S é invariante são, as reparâmetrizações dadas por (II.36) e as supertransformações

$$\delta x = i\psi\epsilon$$

$$\delta e = i\chi\epsilon$$

$$\delta\chi = \dot{\epsilon}$$

$$\delta\psi^\alpha = \frac{1}{2e}(\dot{x}^\alpha + i\chi\psi^\alpha)\epsilon$$

$$\delta\psi^5 = \left[\frac{M}{2} - \frac{i}{me}\psi^5 \left(\dot{\psi}^5 - 2\mu F_{\alpha\beta}\dot{x}^\alpha\psi^\beta - \frac{M^*}{2}\chi \right) \right] \epsilon. \quad (\text{II.53})$$

Capítulo III

Cálculo dos Propagadores em algumas Configurações do Campo Eletromagnético Externo

Enquanto que em teoria de campos, as regras para se lidar com integração funcional no contexto da teoria de perturbação são bem definidas, em mecânica quântica relativística e não-relativística existem alguns problemas, por exemplo, com a não unicidade na definição de integrais de trajetória e com as condições de contorno.

Neste trabalho, os propagadores são calculados na forma de integrais de trajetória sobre velocidades[5], com condições iniciais e finais arbitrárias . Para tanto, integrais Gaussianas e quase-Gaussianas são definidas e regras de cálculo são introduzidas. Uma boa característica dessa representação é que como em teoria de campos, as integrais sobre velocidades não contêm nenhuma condição de contorno para as trajetórias de integração e as matrizes inversas que são obtidas quando do cálculo de integrais Gaussianas não possui qualquer derivada em relação ao tempo. A medida de integração contém uma função- δ de $\int v d\tau$, que é incorporada na estrutura da Gaussiana usual.

III.1 Propagador da partícula escalar num campo eletromagnético constante

Vamos considerar a expressão (II.9), onde usamos a notação

$$\int d\tau = \int_0^1 d\tau .$$

A forma Lagrangiana de (II.9) é dada por (II.10) e integrando-se em π e e , isto é:

$$\int D\pi e^{i \int_0^1 \pi \dot{e} d\tau} = \delta(\dot{e}), \quad (\text{III.1})$$

com

$$\int De f(e) \delta(\dot{e}) = f(e_0), \quad (\text{III.2})$$

obtemos

$$D^c = \frac{i}{2} \int_0^\infty de_0 \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx \int Dp \quad (\text{III.3})$$

$$\times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e_0} + \frac{e_0}{2} (p^2 - m^2) - g\dot{x}A(x) \right] \right\} .$$

Fazendo as mudanças de variáveis:

$$\sqrt{e_0}p \rightarrow p, \quad \frac{x - x_{in} - \tau \Delta x}{\sqrt{e_0}} \rightarrow x, \quad \Delta x = x_{out} - x_{in},$$

tendo em conta a definição da integral (II.9) via processo de discretização, chegamos à expressão:

$$D^c = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right] \int_0^1 Dx \int Dp \quad (\text{III.4})$$

$$\times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{p^2}{2} - g(\sqrt{e_0}\dot{x} + \Delta x)A(\sqrt{e_0}x + x_{in} + \tau \Delta x) \right] \right\} ,$$

onde as trajetórias $x^\mu(\tau)$ satisfazem as condições de contorno,

$$x(0) = x(1) = 0. \quad (\text{III.5})$$

Neste ponto, substituímos as integrações sobre as trajetórias $x^\mu(\tau)$ pelas integrações sobre as velocidades $v^\mu(\tau)$,

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \int \theta(\tau - \tau') v(\tau') d\tau' = \int_0^\tau v(\tau') d\tau', \\ v(\tau) &= \dot{x}(\tau). \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

Formalmente, o Jacobiano pode ser escrito como

$$J = \text{Det } \theta(\tau - \tau')$$

e regularizado pelos procedimentos usuais, por exemplo, pelo método de discretização. Contudo vamos definir J de outra maneira. Observe que de (III.5), as trajetórias $v(\tau)$ devem obedecer as condições

$$\int v(\tau) d\tau = 0. \quad (\text{III.7})$$

Introduzindo funções- δ na integral de trajetória, esta condição é levada em conta. Assim,

$$\begin{aligned} D^c &= \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right] \\ &\times \int Dv J \int Dp \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} + \frac{p^2}{2} \right. \right. \\ &\left. \left. - g(\sqrt{e_0} v + \Delta x) A \left(\sqrt{e_0} \int_0^\tau v(\tau') d\tau' + x_{in} + \tau \Delta x \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

O Jacobiano J pode ser obtido de (III.8) desligando-se $A_\mu(x)$ e usando-se a expressão para a função de Green causal livre D_0^c ,

$$D_0^c = D_0^c(x_{out}, x_{in}) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right].$$

Formalmente, chegamos à expressão

$$J = \frac{1}{i(2\pi)^2} \left[\int Dv \int Dp \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \exp \left\{ i \int d\tau \left(-\frac{v^2}{2} + \frac{p^2}{2} \right) \right\} \right]^{-1}. \quad (\text{III.9})$$

Juntando estes resultados, escrevemos

$$D^c = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right] \Delta(e_0), \quad (\text{III.10})$$

$$\begin{aligned} \Delta(e_0) = & \int Dv \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} - g(\sqrt{e_0}v + \Delta x) \right. \right. \\ & \left. \left. \times A \left(\sqrt{e_0} \int_0^\tau v(\tau') d\tau' + x_{in} + \tau \Delta x \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

onde a nova medida Dv tem a forma

$$Dv = Dv \left[\int Dv \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \exp \left\{ i \int d\tau \left(-\frac{v^2}{2} \right) \right\} \right]^{-1}. \quad (\text{III.12})$$

Observamos, portanto, que $\Delta(e_0) = 1$ quando $A = 0$.

A medida (III.12) pode ser regularizada no contexto do método de discretização, contudo nossa abordagem considera outro método de resolução de integrais do tipo (III.11). Métodos de resolução de integrais de trajetória de forma geral até o momento são desconhecidos, por outro lado, integrais de trajetória Gaussianas tratadas de maneira conveniente podem ser feitas diretamente.

Para integrais de trajetória do tipo (III.11),

$$\int Dv \delta^4 \left(\int v d\tau \right) F[v], \quad (\text{III.13})$$

onde $F[v]$ é uma classe de funcionais chamada quase-Gaussiana, podemos formular algumas regras de cálculo sem recorrermos a cada passo à definição original. A restrição a tal classe de funcionais tem a ver com a teoria de perturbação em teoria de campos e isto, no nosso contexto, corresponde

a uma teoria de perturbação em que a integral de trajetória Gaussiana é considerada uma aproximação de ordem zero.

Introduzimos, agora, a funcional Gaussiana como:

$$F_G[v, I] \quad (III.14)$$

$$= \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' v^\mu(\tau) L_{\mu\nu}(g, \tau, \tau') v^\nu(\tau') - i \int d\tau I_\mu(\tau) v^\mu(\tau) \right\} ,$$

e a funcional quase-Gaussiana como:

$$F_qG[v, I] = F[v] F_G[v, I] , \quad (III.15)$$

onde $F[v]$ é um funcional, que pode ser expandido na forma de uma série funcional de v ,

$$F[v] = \sum_{n=0} \int d\tau_1 \dots d\tau_n F_{\mu_1 \dots \mu_n}(\tau_1 \dots \tau_n) v^{\mu_1}(\tau_1) \dots v^{\mu_n}(\tau_n) , \quad (III.16)$$

e I são fontes associadas às velocidades v . Em (III.14) a matriz $L_{\mu\nu}(g, \tau, \tau')$ é suposta ter a seguinte forma

$$L_{\mu\nu}(g, \tau, \tau') = \eta_{\mu\nu} \delta(\tau - \tau') + g M_{\mu\nu}(\tau, \tau') . \quad (III.17)$$

Definimos a integral de trajetória sobre as velocidades v da funcional Gaussiana como

$$\int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau \right) F_G[v, I] \quad (III.18)$$

$$= \left[\frac{\text{Det } L(g) \det l(g)}{\text{Det } L(0) \det l(0)} \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d\tau d\tau' I(\tau) K(\tau, \tau') I(\tau') \right\} ,$$

onde

$$K(\tau, \tau') = L^{-1}(g, \tau, \tau') - Q^T(\tau) l^{-1}(g) Q(\tau') ,$$

$$l(g) = \int d\tau d\tau' L^{-1}(g, \tau, \tau') , \quad Q(\tau) = \int d\tau' L^{-1}(g, \tau', \tau) . \quad (III.19)$$

A fórmula (III.18) pode ser considerada como uma generalização para dimensão infinita de resultados obtidos no contexto do procedimento de discretização, esboçados anteriormente. No processo de cálculo de integrais de dimensão infinita está implícito uma definição suplementar de integrais Gaussianas impróprias via continuação analítica nos elementos da matriz L não-singular.

Para o cálculo dos determinantes das matrizes $L(g)$ que aparecem em (III.18) e que possuem índices contínuos, usamos uma representação conveniente. Diferenciando a fórmula bem conhecida

$$\text{Det } L(g) = \exp [\text{Tr } \ln L(g)]$$

em relação a g , chegamos à equação

$$\frac{d}{dg} \text{Det } L(g) = \text{Det } L(g) \text{Tr } L^{-1}(g) \frac{dL(g)}{dg} = \text{Det } L(g) \text{Tr } L^{-1}(g) M ,$$

que pode ser resolvida na forma

$$\frac{\text{Det } L(g)}{\text{Det } L(0)} = \exp \left\{ \int_0^g dg' \text{Tr } L^{-1}(g') M \right\} . \quad (\text{III.20})$$

Uma vez que $\det l(0) = -1$, chegamos à seguinte expressão da integral de trajetória da funcional Gaussianiana

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}v \, \delta^4 \left(\int v d\tau \right) F_G[v, I] \\ &= [-\det l(g)]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d\tau d\tau' I(\tau) K(\tau, \tau') I(\tau') \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^g dg' \text{Tr } L^{-1}(g') M \right\} . \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

A integral de trajetória da funcional quase-Gaussianiana é definida através da funcional Gaussianiana

$$\int \mathcal{D}v \, \delta^4 \left(\int v d\tau \right) F_{qG}[v, I] = F \left(i \frac{\delta}{\delta I} \right) \int \mathcal{D}v \, \delta^4 \left(\int v d\tau \right) F_G[v, I]$$

$$= [-\det l(g)]^{-1/2} F\left(i\frac{\delta}{\delta I}\right) \exp\left\{\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' I(\tau) K(\tau, \tau') I(\tau') - \frac{1}{2} \int_0^g dg' \text{Tr } L^{-1}(g') M\right\}. \quad (\text{III.22})$$

Podemos derivar as regras de cálculo de funcionais quase-Gaussianas (ver Apêndice D), usando a fórmula (III.22). Por exemplo, a integral (III.21) é invariante sob deslocamentos das variáveis de integração,

$$\int \mathcal{D}v \delta^4\left(\int (v+u)d\tau\right) F_{qG}[v+u, I] = \int \mathcal{D}v \delta^4\left(\int v d\tau\right) F_{qG}[v, I]. \quad (\text{III.23})$$

A validade desta asserção para a integral Gaussiana (III.18) pode ser verificada diretamente. Então, a fórmula geral (III.23) segue da (III.22). Outra consequência da propriedade (III.23) é a seguinte generalização da fórmula (III.22),

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}v \delta^4\left(\int v d\tau - a\right) F_{qG}[v, I] \\ &= [-\det l(g)]^{-1/2} F\left(i\frac{\delta}{\delta I}\right) \exp\left\{\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' I(\tau) K(\tau, \tau') I(\tau') - \frac{i}{2} a l^{-1}(g) a - i a l^{-1}(g) \int Q(\tau) I(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^g dg' \text{Tr } L^{-1}(g') M\right\}, \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

onde a é um vetor constante. A integral da derivada total da funcional sobre $v^\mu(\tau)$ é igual a zero,

$$\int \mathcal{D}v \frac{\delta}{\delta v^\mu(\tau)} \delta^4\left(\int v d\tau\right) F_{qG}[v, I] = 0. \quad (\text{III.25})$$

Esta propriedade pode ser obtida como uma consequência da invariância da integral funcional sob deslocamentos de variáveis, bem como através do cálculo da integral (III.25). Fórmulas de integração por partes podem ser derivadas como consequência de (III.25). Se uma funcional quase-Gaussiana depende de um parâmetro α , então a derivada em relação a este parâmetro comuta com o sinal de integração

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau \right) F_{qG}[v, I, \alpha] = \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \frac{\partial}{\partial \alpha} F_{qG}[v, I, \alpha]. \quad (\text{III.26})$$

Por último temos a fórmula para a mudança de variáveis:

$$\int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau \right) F_{qG}[v, I] = \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int \phi d\tau \right) F_{qG}[\phi, I] \text{Det} \frac{\delta \phi_\tau(v)}{\delta v(\tau')}, \quad (\text{III.27})$$

onde $\phi_\tau(v)$ é um conjunto de funcionais de v , parametrizadas por τ .

Assim, verificamos que em mecânica quântica relativística no contexto da teoria de perturbação, podemos definir integrais de trajetória sobre velocidades e estabelecer regras para resolvê-las. Estas definições assemelham-se àquelas encontradas em teoria de campos. Tal analogia está afeta à circunstância de que como em teoria de campos as integrais sobre velocidades não contêm explicitamente qualquer condição de contorno para as trajetórias de integração. Após esta curta digressão a respeito de integrais Gaussianas e quase-Gaussianas, continuemos nossos cálculos do propagador de uma partícula escalar num campo eletromagnético constante.

Fazendo um deslocamento de variável na fórmula (III.11), temos:

$$\begin{aligned} \Delta(e_0) = & \exp \left(i \frac{\Delta x^2}{2e_0} \right) \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau - \frac{\Delta x}{\sqrt{e_0}} \right) \\ & \times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} - g\sqrt{e_0}vA \left(\sqrt{e_0} \int_0^\tau v(\tau') d\tau' + x_{in} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

O potencial do campo eletromagnético constante é dado por

$$A_\mu(x) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x^\nu \quad (\text{III.29})$$

e substituindo (III.29) em (III.28), encontramos

$$\Delta(e_0) = \exp \left(i \frac{\Delta x^2}{2e_0} \right) \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau - \frac{\Delta x}{\sqrt{e_0}} \right) \quad (\text{III.30})$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' v(\tau) L(g, \tau, \tau') v(\tau') - i \int \frac{g\sqrt{e_0}}{2} x_{in} F v d\tau \right\},$$

onde

$$L_{\mu\nu}(g, \tau, \tau') = \eta_{\mu\nu} \delta(\tau - \tau') - \frac{ge_0}{2} F_{\mu\nu} \epsilon(\tau - \tau'). \quad (\text{III.31})$$

A integral de trajetória (III.30) é do tipo Gaussiana (ver (III.24)). Neste ponto, precisamos calcular a matriz inversa $L^{-1}(g, \tau, \tau')$, que satisfaz a equação

$$\int L(g, \tau, \tau'') L^{-1}(g, \tau'', \tau') d\tau'' = \delta(\tau - \tau').$$

Esta equação é equivalente à equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial \tau} L^{-1}(g, \tau, \tau') - ge_0 F L^{-1}(g, \tau, \tau') = \delta'(\tau - \tau'), \quad (\text{III.32})$$

com condição inicial

$$L^{-1}(g, 0, \tau') + \frac{ge_0 F}{2} \int L^{-1}(g, \tau'', \tau') d\tau'' = \delta(\tau').$$

Sua solução tem a forma (ver Apêndice E)

$$\begin{aligned} L^{-1}(g, \tau, \tau') & \quad (\text{III.33}) \\ &= \delta(\tau - \tau') + \frac{ge_0 F}{2} \exp \{ ge_0(\tau - \tau') F \} \left[\epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{ge_0 F}{2} \right]. \end{aligned}$$

Usando (III.33), podemos estabelecer todos os termos da fórmula geral (III.24), com

$$a = -\frac{\Delta x}{\sqrt{e_0}}, \quad I(\tau) = \frac{g\sqrt{e_0}}{2} x_{in} F.$$

Assim,

$$\begin{aligned} K(\tau, \tau') & \quad (\text{III.34}) \\ &= \delta(\tau - \tau') + \frac{ge_0 F}{2} \exp \{ ge_0(\tau - \tau') F \} \left[\epsilon(\tau - \tau') - \coth \frac{ge_0 F}{2} \right], \\ \int d\tau d\tau' K(\tau, \tau') &= 0, \quad \int d\tau Q(\tau) = l(g), \quad l(g) = \frac{\tanh ge_0 F/2}{ge_0 F/2}, \\ M(\tau, \tau') &= -\frac{e_0}{2} F \epsilon(\tau - \tau'), \quad \int_0^g dg' \text{Tr} L^{-1}(g') M = \text{tr} \ln \cosh ge_0 F/2, \end{aligned}$$

onde o símbolo "tr" é tomado sobre índices quadri-dimensionais. Então,

$$\Delta(e_0) = \left[-\det \frac{\sinh ge_0 F/2}{gF/2} \right]^{-1/2} \quad (\text{III.35})$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{2} \left[\frac{\Delta x^2}{e_0} + g x_{out} F x_{in} - \frac{1}{2} \Delta x g F \coth \frac{ge_0 F}{2} \Delta x \right] \right\} .$$

Substituindo (III.35) em (III.10), chegamos à expressão final do propagador causal da partícula escalar num campo eletromagnético homogêneo:

$$D^c(x_{out}, x_{in}) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty de_0 \left[-\det \frac{\sinh ge_0 F/2}{gF/2} \right]^{-1/2} \quad (\text{III.36})$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{2} \left[g x_{out} F x_{in} - e_0 m^2 - \frac{1}{2} \Delta x g F \coth \frac{ge_0 F}{2} \Delta x \right] \right\} .$$

Este resultado coincide com o obtido por Schwinger[11] usando o método do tempo próprio.

III.2 Propagador da partícula escalar num campo eletromagnético constante em combinação com um campo de onda plana

Para este caso o potencial é escrito como

$$A_\mu(x) = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} x^\nu + f_\mu(nx) , \quad (\text{III.37})$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade de campo do campo eletromagnético constante com invariantes não nulos (ver Apêndice F)

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \neq 0 , \quad \mathcal{G} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} \neq 0 ,$$

($F_{\mu\nu}^* = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é um tensor totalmente antissimétrico), em termos dos quais seus autovalores $\mathcal{E}$ and $\mathcal{H}$ são expressos por

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}n^\nu &= -\mathcal{E}n_\mu, \quad F_{\mu\nu}\bar{n}^\nu = \mathcal{E}\bar{n}_\mu, \\
F_{\mu\nu}\ell^\nu &= i\mathcal{H}\ell_\mu, \quad F_{\mu\nu}\bar{\ell}^\nu = -i\mathcal{H}\bar{\ell}_\mu, \\
\mathcal{E} &= [(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{\frac{1}{2}} - \mathcal{F}]^{\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{H} = [(\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2)^{\frac{1}{2}} + \mathcal{F}]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{III.38}$$

Os autovetores n , $\bar{n}$, ℓ , $\bar{\ell}$ são isotrópicos e obedecem as condições

$$\begin{aligned}
n^2 &= \bar{n}^2 = \ell^2 = \bar{\ell}^2 = 0, \\
n\bar{n} &= 2, \quad \ell\bar{\ell} = -2, \quad n\ell = \bar{n}\ell = n\bar{\ell} = \bar{n}\bar{\ell} = 0.
\end{aligned}
\tag{III.39}$$

As funções $f_\mu(nx)$ são arbitrárias e estão sujeitas às condições

$$f_\mu(nx)n^\mu = f_\mu(nx)\bar{n}^\mu = 0. \tag{III.40}$$

O tensor intensidade de campo total para o potencial (III.37) é

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu} + \Psi_{\mu\nu}(nx), \quad \Psi_{\mu\nu}(nx) = n_\mu f'_\nu(nx) - n_\nu f'_\mu(nx). \tag{III.41}$$

Desde que os invariantes $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ do tensor $F_{\mu\nu}$ são não nulos, existe um sistema de referência especial, onde os campos elétrico e magnético, correspondentes a este tensor, são colineares um em relação ao outro e à parte espacial n do quadri-vetor n . Neste sistema de referência, $F_{\mu\nu}(x)$ é o campo total correspondente aos campos elétrico e magnético constantes e colineares, mais os da onda plana propagando-se ao longo deles; $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$, são as intensidades dos campos elétrico e magnético, respectivamente. Em termos dos autovetores definidos, o tensor $F_{\mu\nu}$ pode ser escrito como

$$F_{\mu\nu} = \frac{\mathcal{E}}{2} (\bar{n}_\mu n_\nu - n_\mu \bar{n}_\nu) + \frac{i\mathcal{H}}{2} (\bar{\ell}_\mu \ell_\nu - \ell_\mu \bar{\ell}_\nu), \tag{III.42}$$

e a relação de completude é satisfeita

$$\eta_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\bar{n}_\mu n_\nu + n_\mu \bar{n}_\nu - \bar{\ell}_\mu \ell_\nu - \ell_\mu \bar{\ell}_\nu) . \quad (\text{III.43})$$

Esta última nos permite escrever qualquer quadri-vetor u em termos dos autovetores (III.38),

$$\begin{aligned} u^\mu &= n^\mu u^{(1)} + \bar{n}^\mu u^{(2)} + \ell^\mu u^{(3)} + \bar{\ell}^\mu u^{(4)} , \\ u^{(1)} &= \frac{1}{2} \bar{n} u , \quad u^{(2)} = \frac{1}{2} n u , \quad u^{(3)} = -\frac{1}{2} \bar{\ell} u , \quad u^{(4)} = -\frac{1}{2} \ell u . \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

Substituindo, agora, o potencial (III.37) em (III.29),

$$\begin{aligned} \Delta(e_0) &= \exp \left(i \frac{\Delta x^2}{2e_0} \right) \int \mathcal{D}v \, \delta^4 \left(\int v d\tau - \frac{\Delta x}{\sqrt{e_0}} \right) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' v(\tau) L(g, \tau, \tau') v(\tau') - i \int \frac{g\sqrt{e_0}}{2} x_{in} F v d\tau \right. \\ &\left. - ig\sqrt{e_0} \int d\tau v(\tau) f \left(nx_{in} + \sqrt{e_0} \int_0^\tau n v(\tau') d\tau' \right) \right\} , \end{aligned} \quad (\text{III.45})$$

onde $L(g, \tau, \tau')$ é definido em (III.31). A integral (III.45) é quase-Gaussiana, o que está de acordo com a fórmula (III.24). Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \Delta(e_0) &= \exp \left\{ g\sqrt{e_0} \int d\tau f \left(nx_{in} + i\sqrt{e_0} \int_0^\tau n \frac{\delta}{\delta I(\tau')} d\tau' \right) \frac{\delta}{\delta I(\tau)} \right\} B(I) |_{I=0} , \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

onde

$$\begin{aligned} B(I) &= \exp \left(i \frac{\Delta x^2}{2e_0} \right) \int \mathcal{D}v \, \delta^4 \left(\int v d\tau - \frac{\Delta x}{\sqrt{e_0}} \right) \\ &\times \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int d\tau d\tau' v(\tau) L(g, \tau, \tau') v(\tau') \right. \\ &\left. - i \int \left(\frac{g\sqrt{e_0}}{2} x_{in} F + I(\tau) \right) v(\tau) d\tau \right\} . \end{aligned} \quad (\text{III.47})$$

Esta integral pode ser calculada de maneira similar a (III.30). Neste caminho, chegamos à expressão

$$B(I) \quad (III.48)$$

$$= \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d\tau d\tau' I(\tau) K(\tau, \tau') I(\tau') - i \int I(\tau) a(\tau) d\tau \right\} \Delta(e_0)|_{\Psi=0},$$

onde $\Delta(e_0)|_{\Psi=0}$ é dada por (III.35), $K(\tau, \tau')$ é definido em (III.34), e

$$a(\tau) = \frac{\Delta x}{2\sqrt{e_0}} (1 + \coth(ge_0 F/2)) ge_0 F \exp(-ge_0 F\tau).$$

Para obter a ação do operador, envolvido em (III.46), sobre o funcional $B(I)$, decompomos as fontes $I^\mu(\tau)$ nos autovetores (III.38), usando (III.44)

$$I^\mu(\tau) = \frac{1}{2} \left(n^\mu \bar{n}I(\tau) + \bar{n}^\mu nI(\tau) - \ell^\mu \bar{\ell}I(\tau) - \bar{\ell}^\mu \ell I(\tau) \right).$$

Então, é possível escrever

$$n \frac{\delta}{\delta I(\tau)} = 2 \frac{\delta}{\delta \bar{n}I(\tau)},$$

$$f \frac{\delta}{\delta I(\tau)} = \bar{\ell} f \frac{\delta}{\delta \bar{\ell}I(\tau)} + \ell f \frac{\delta}{\delta \ell I(\tau)}.$$

Usando isto, chegamos às expressões

$$\begin{aligned} & f \left(nx_{in} + i\sqrt{e_0} \int_0^\tau n \frac{\delta}{\delta I(\tau')} d\tau' \right) \frac{\delta}{\delta I(\tau)} \\ &= \bar{\ell} f \left(nx_{in} + i\sqrt{e_0} \int_0^\tau \frac{\delta}{\delta \bar{n}I(\tau')} d\tau' \right) \frac{\delta}{\delta \bar{\ell}I(\tau)} \\ &+ \ell f \left(nx_{in} + i\sqrt{e_0} \int_0^\tau \frac{\delta}{\delta \bar{n}I(\tau')} d\tau' \right) \frac{\delta}{\delta \ell I(\tau)}, \\ & \int d\tau d\tau' I(\tau) K(\tau, \tau') I(\tau') \\ &= \int d\tau d\tau' \left[\bar{n}I(\tau) nI(\tau') K(\tau, \tau', \mathcal{E}) - \bar{\ell}I(\tau) \ell I(\tau') K(\tau, \tau', i\mathcal{H}) \right], \\ & \int I(\tau) a(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int \left[\bar{n}I(\tau) na(\tau) + nI(\tau) \bar{n}a(\tau) - \bar{\ell}I(\tau) \ell a(\tau) - \ell I(\tau) \bar{\ell}a(\tau) \right] d\tau, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
K(\tau, \tau', \mathcal{E}) &= \delta(\tau - \tau') + \frac{ge_0 \mathcal{E}}{2} \exp \{ge_0(\tau - \tau') \mathcal{E}\} \left[\epsilon(\tau - \tau') - \coth \frac{ge_0 \mathcal{E}}{2} \right], \\
K(\tau, \tau', i\mathcal{H}) &= \delta(\tau - \tau') + \frac{ige_0 \mathcal{H}}{2} \exp \{ige_0(\tau - \tau') \mathcal{H}\} \left[\epsilon(\tau - \tau') + i \cot \frac{ge_0 \mathcal{H}}{2} \right].
\end{aligned}$$

Agora, o expoente do funcional $B[I]$ é linear em $nI(\tau)$, $\bar{n}I(\tau)$, $\ell I(\tau)$, $\bar{\ell}I(\tau)$. Desse modo, chegamos ao resultado

$$\begin{aligned}
\Delta(e_0) &= \exp \left\{ \frac{i}{2} g^2 e_0 \int d\tau d\tau' f(nx_{cl}(\tau)) K(\tau, \tau') f(nx_{cl}(\tau')) \right. \\
&\quad \left. + ig\sqrt{e_0} \int d\tau a(\tau) f(nx_{cl}(\tau)) \right\} \Delta(e_0)|_{\Psi=0}, \quad (III.49) \\
nx_{cl}(\tau) &= nx_{in} + \frac{1 - \exp(ge_0 \mathcal{E}\tau)}{1 - \exp(ge_0 \mathcal{E})} n\Delta x, \\
nx_{cl}(0) &= nx_{in}, \quad nx_{cl}(1) = nx_{out},
\end{aligned}$$

onde $x_{cl}(\tau)$ é a solução da equação de Lorentz no campo eletromagnético externo (III.37). Juntando (III.49) e (III.35), chegamos à

$$\begin{aligned}
\Delta(e_0) &= \left[-\det \frac{\sinh ge_0 F/2}{ge_0 F/2} \right]^{-1/2} \exp \left\{ \frac{i}{2} [gx_{out} F x_{in} \right. \\
&\quad - \frac{1}{2} (\Delta x + l(e_0, 1)) gF \coth(ge_0 F/2) (\Delta x + l(e_0, 1)) + 2\Phi(e_0) \\
&\quad \left. + \Delta x gFl(e_0, 1) + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right\}, \quad (III.50)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\Phi(e_0) &= e_0 \int gf(nx_{cl}(\tau)) [gf(nx_{cl}(\tau)) + gFl(e_0, \tau)] d\tau, \quad (III.51) \\
l(e_0, \tau) &= e_0 \int_0^\tau \exp \{ge_0(\tau - \tau') F\} gf(nx_{cl}(\tau')) d\tau'.
\end{aligned}$$

Substituindo (III.50) em (III.10), obtemos a expressão final do propagador causal da partícula escalar no campo eletromagnético externo (III.37):

$$D^c(x_{out}, x_{in}) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty de_0 \left[-\det \frac{\sinh ge_0 F/2}{gF/2} \right]^{-1/2} \quad (III.52)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{2} \left[gx_{out} F x_{in} - e_0 m^2 + \Delta x g F l(e_0, 1) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2} (\Delta x + l(e_0, 1)) g F \coth (ge_0 F/2) (\Delta x + l(e_0, 1)) + 2\Phi(e_0) \right] \right\} .$$

Este resultado coincide com o obtido por Gavrilov, Gitman e Shvartsman (ver ref.[45] citada em [5]) usando um outro método.

Capítulo IV

Fator Espinorial

O propagador de Dirac em um campo eletromagnético externo difere da partícula escalar por uma estrutura espinorial complicada. Como observado no começo de nosso estudo, a incorporação de graus de liberdade de spin na linguagem de integrais de trajetória tem sido motivo de atenção por muito tempo. Deve-se à Feymann o primeiro cálculo do propagador da partícula escalar via integral de trajetória bem como uma representação para o propagador de Dirac em termos de trajetórias bosônicas. Após Berezin ter introduzido integrais sobre variáveis Grassmannianas, uma representação para o propagador de Dirac envolvendo trajetórias bosônicas e fermiônicas, foi popularizada na literatura. Tais representações têm sido estudadas em diferentes contextos. Por exemplo, a duas e três dimensões em teorias quânticas de campos, o fenômeno de transmutação de estatística ocorre. Sob interações não-triviais bósons dão lugar a férmions livres. A equivalência desses sistemas é estudada através de representações via integrais de trajetória dos propagadores. Por outra, no cenário de teorias de cordas, representações envolvendo variáveis fermiônicas e bosônicas têm sido usadas para descrever tais objetos à semelhança dos férmions de Dirac. Contudo, quando a correspondência entre bósons em interação é considerada tal formulação não se mostra adequada. Daí porque a procura de uma representação envolvendo

somente variáveis bosônicas da partícula espinorial[9]. Mais recentemente, uma outra representação em termos de um fator espinorial foi considerada. Em[10] uma forma explícita do fator espinorial foi obtida, considerando-se uma representação do propagador de Dirac em um campo externo arbitrário via integrais de trajetórias bosônicas e fermiônicas, tal que as integrações sobre estas últimas foram todas realizadas e o fator espinorial foi dado como um funcional das trajetórias bosônicas.

Polyakov[8], introduziu o conceito de fator espinorial, no sentido da amplitude da partícula com spin poder ser escrita como a amplitude da partícula escalar com a inserção desse fator na integral de trajetória. Para trajetórias fechadas, a amplitude é dada por

$$F(x, x) = \sum_{P_{xx}} \exp [iS(P_{xx})] \Phi(P_{xx}),$$

onde $\Phi(P_{xx})$ é um fator espinorial que depende da dimensão do espaço-tempo.

Uma possível expressão desse fator espinorial é dada em termos de uma integral funcional fermiônica (com condições de contorno anti-periódicas):

$$\Phi(P) = \left\{ \text{Det}_{AP} \left[\frac{d}{ds} \delta_{ij} + C_{ij}(s) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \text{Tr} \left\{ \mathcal{P} \exp \int_0^L C_{ij}(s) \Sigma_{ij} ds \right\},$$

onde $i = 1, \dots, D - 1$. As quantidades $C_{ij}(s)$ podem ser interpretadas como potenciais de gauge para o grupo de rotação $O(D - 1)$ que atua sobre um plano ortogonal a um vetor tangente à curva e tem como geradores os objetos Σ_{ij} . A exponencial ordenada é um produto de rotações infinitesimais.

Vários significados têm sido associados a esse fator, por exemplo, ele pode ser interpretado, em qualquer dimensão, como uma fase geométrica. Esta fase está relacionada com curvas fechadas no espaço de Hilbert projetivo e assim, o fator espinorial pode ser expresso como um *loop* de Wilson onde a velocidade angular de precessão de Thomas exerce o papel de um potencial de gauge. A fase geométrica pode ser pensada como uma fase de Berry. Tem-se que, a cada ponto de uma dada trajetória, podemos decompor as

forças de vínculo que atuam sobre a partícula em uma componente paralela e outra perpendicular à velocidade. A função de onda da partícula, então, se transforma de acordo com a quantidade de rotação que ela experimenta durante toda sua evolução ao longo da trajetória. Isto leva ao fator de Wilson, que por sua vez, está associado ao grupo de Lorentz local. A quantidade de rotação depende da trajetória e, como tal, é um objeto geométrico, portanto clássico. A teoria quântica é obtida segundo a prescrição de Feynman de se somar sobre todas as trajetórias[9].

Neste trabalho, vamos considerar a expressão do fator espinorial obtida em[10] para calcular o propagador num campo constante. No caso em consideração, esta abordagem nos fornece de maneira direta a estrutura espinorial do propagador.

IV.1 Propagador da partícula espinorial num campo eletromagnético externo

Em algumas configurações do campo eletromagnético externo, a estrutura espinorial do propagador de Dirac pode ser obtida de maneira explícita. Por exemplo, num campo constante, num campo de onda plana ou na combinação de um e outro, etc.

Aqui, o propagador da partícula de Dirac num campo eletromagnético externo é obtido de maneira tal que sua estrutura de spin vem dada em termos de uma combinação de matrizes- γ . Verificamos que o fator espinorial $\Phi[x, e_0]$ distingue o propagador da partícula espinorial do propagador da partícula escalar e o mesmo é invariante de gauge, porque depende de $F_{\mu\nu}$.

Vamos considerar a função $\tilde{S}^c(x, y)$ dada por (II.32):

$$\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = \exp \left(i \gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \int_0^\infty de_0 \int d\chi_0$$

$$\begin{aligned}
& \times \int \exp \left(i \left\{ \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - \frac{em^2}{2} - g\dot{x}A(x) + iegF_{\mu\nu}(x)\psi^\mu\psi^\nu \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + i \left(\frac{\dot{x}_\mu\psi^\mu}{e} - m\psi^5 \right) \chi - i\psi_n\dot{\psi}^n + \pi\dot{e} + \nu\dot{\chi} \right] d\tau + \psi_n(1)\psi^n(0) \right\} \right) \\
& \times M(e)DxD\epsilon D\pi D\chi D\nu D\psi|_{\theta=0}, \tag{IV.1}
\end{aligned}$$

onde

$$D\psi = D\psi \left[\int_{\psi(1)+\psi(0)=\theta} D\psi \exp \left\{ \int_0^1 \psi_n\dot{\psi}^n d\tau \right\} \right]^{-1},$$

é a medida de integração sobre ψ .

Integrando em π e ν , obtemos:

$$\int D\epsilon \delta(\dot{e}) f(e) = f(e_0), \quad \int D\chi \delta(\dot{\chi}) f(\chi) = f(\chi_0).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= \exp \left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \int_0^\infty de_0 Dp d\chi_0 Dx D\psi \\
&\times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e_0} - \frac{e_0 m^2}{2} - g\dot{x}A + \frac{e_0 p^2}{2} \right] d\tau \right\} \\
&\times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[ieg_0 F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta + i \left(\frac{\dot{x}_\alpha \psi^\alpha}{e_0} - m\psi^5 \right) \chi_0 - i\psi_n\dot{\psi}^n \right] d\tau \right. \\
&\left. + \psi_n(1)\psi^n(0) \right\}|_{\theta=0}, \tag{IV.2}
\end{aligned}$$

e fazendo as mudanças de variáveis

$$\sqrt{e_0}p \rightarrow p, \quad \frac{x - x_{in} - \tau\Delta x}{\sqrt{e_0}} \rightarrow x, \quad \Delta x = x_{out} - x_{in},$$

temos as novas condições de contorno $x(0) = 0 = x(1)$.

Considere,

$$\begin{aligned}
\Delta(e_0) &= \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right] \int_0^0 Dx \int Dp \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \\
&\times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{p^2}{2} - g(\sqrt{e_0}\dot{x} + \Delta x) \right. \right. \\
&\left. \left. \times A(\sqrt{e_0}x + x_{in} + \tau\Delta x) \right] \right\}. \tag{IV.3}
\end{aligned}$$

e substituindo as trajetórias $x(\tau)$ pelas velocidades $v(\tau)$:

$$x(\tau) = \int_0^1 \theta(\tau - \tau') v(\tau') d\tau' = \int_0^\tau v(\tau') d\tau', \quad v(\tau) = \dot{x}(\tau), \quad J = \text{Det } \theta(\tau - \tau'),$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta(e_0) &= \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right] \int Dv J \int Dp \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \\ &\times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} + \frac{p^2}{2} - g(\sqrt{e_0} v + \Delta x) \right. \right. \\ &\times \left. \left. A \left(\sqrt{e_0} \int_0^\tau v(\tau') d\tau' + x_{in} + \tau \Delta x \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.4})$$

Por outro lado, sabemos que

$$J = \frac{1}{i(2\pi)^2} \left[\int Dv Dp \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} + \frac{p^2}{2} \right] \right\} \right]^{-1},$$

e substituindo esta expressão em (IV.4):

$$\begin{aligned} \Delta(e_0) &= \frac{1}{i(2\pi)^2} \int \frac{de_0}{e_0^2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right] \int Dv \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \\ &\times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} - g(\sqrt{e_0} v + \Delta x) \right. \right. \\ &\times \left. \left. A \left(\sqrt{e_0} \int_0^\tau v(\tau') d\tau' + x_{in} + \tau \Delta x \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.5})$$

Integrando agora em χ_0 , chegamos à:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= -\exp \left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \int \Delta(e_0) D\psi \int_0^1 \left[\frac{v_\alpha \psi^\alpha}{e_0} - m\psi^5 \right] d\tau \\ &\times \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left[i g e_0 F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta - i \psi_n \dot{\psi}^n \right] + \psi_n(1) \psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0}. \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

Neste ponto, trocamos as variáveis ψ pelas velocidades ω :

$$\psi(\tau'') = \frac{1}{2} \int \epsilon(\tau'' - \tau) \omega(\tau) d\tau + \frac{\theta}{2}, \quad \omega = \dot{\psi},$$

tal que nenhuma restrição existe sobre ω e as condições de contorno para ψ são satisfeitas.

Assim, a função propagação assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & -\exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right) \\ & \times \int \Delta(e_0) D\omega \int_0^1 d\tau'' \left[\frac{v_\mu}{e_0} \left(\int \epsilon(\tau'' - \tau) \omega^\mu(\tau) d\tau + \theta^\mu \right) \right. \\ & \left. - m \left(\int \epsilon(\tau'' - \tau) \omega^5(\tau) d\tau + \theta^5 \right) \right] \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \omega^n(\tau) \Lambda_{nm}(\tau, \tau') \omega^m(\tau') d\tau d\tau' + \int Q_n \omega^n d\tau - \frac{1}{4} g e_0 F_{\mu\nu} \theta^\mu \theta^\nu \right\} \Big|_{\theta=0}, \end{aligned} \quad (IV.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu\nu} &= \epsilon(\tau - \tau') \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g e_0 \epsilon F_{\mu\nu} \epsilon, \\ \Lambda_{55} &= \epsilon(\tau - \tau') \eta_{55}, \quad \eta_{55} = -1, \\ Q_5 &= 0, \quad Q_\mu = -\frac{1}{2} g e_0 \epsilon F_{\nu\mu} \theta^\nu, \\ \mathcal{D}\omega &= \frac{D\omega}{\int D\omega e^{-\frac{1}{2} \omega^n \epsilon \omega_n}}. \end{aligned} \quad (IV.8)$$

Introduzindo as fontes ρ associadas a ω , chegamos à:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & -\exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial\theta^n}\right) \\ & \times \int \Delta(e_0) \mathcal{D}\omega \left[\frac{v_\mu}{e_0} \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta\rho_\mu} + \theta^\mu \right) - m \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta\rho_5} + \theta^5 \right) \right] \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \omega^n \Lambda_{nm} \omega^m d\tau d\tau' + \int (Q_n + \rho_n) \omega^n d\tau \right\} \Big|_{\rho=0}, \end{aligned} \quad (IV.9)$$

e definimos

$$\begin{aligned} I_n &= \rho_n + Q_n, \\ I_5 &= \rho_5, \\ I_\mu &= \rho_\mu + \frac{1}{2} g e_0 F_{\mu\nu} \theta^\nu \epsilon. \end{aligned} \quad (IV.10)$$

Dado que para uma função $f(\theta)$ na álgebra de Grassmann vale a identidade (ver Apêndice C):

$$\begin{aligned} \exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n}\right) f(\theta) \Big|_{\theta=0} &= f\left(\frac{\partial_l}{\partial \zeta}\right) \exp(i\zeta_n \gamma^n) \Big|_{\zeta=0} \\ &= \sum_{k=0}^4 \sum_{n_1 \dots n_k} f_{n_1 \dots n_k} \frac{\partial_l}{\partial \zeta_{n_1}} \dots \frac{\partial_l}{\partial \zeta_{n_k}} \sum_{l=0}^4 \frac{i^l}{l!} (\zeta_n \gamma^n)^l \Big|_{\zeta=0}, \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

onde os ζ_n são variáveis ímpares, obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= - \int \mathcal{D}\omega \Delta(e_0) \\ &\times \left[\frac{v_\mu}{e_0} \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_\mu} + \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \right) - m \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_5} + i\gamma^5 \right) \right] \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{4} g e_0 F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right\} \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \Lambda_{nm} \omega^m + I_n \omega^n \right\} \exp(i\zeta_\lambda \gamma^\lambda) \Big|_{\zeta=0, \rho=0}. \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

Fazendo o deslocamento $\omega \rightarrow \omega + \Lambda^{-1} I$, podemos integrar em ω , e substituindo $\Delta(e_0)$, obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= -\frac{1}{2i(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \\ &\times \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right] \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \\ &\times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} - g(\sqrt{e_0} v + \Delta x) A \left(\sqrt{e_0} \int_0^\infty v(\tau') d\tau' + x_{in} + \tau \Delta x \right) \right] \right\} \\ &\times \left[\frac{\text{Det} \Lambda(g)}{\text{Det} \Lambda(0)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{v_\mu}{e_0} \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_\mu} + \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \right) - m \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_5} + i\gamma^5 \right) \right] \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{4} g e_0 F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} I \Lambda^{-1} I \right\} \exp(i\zeta_\lambda \gamma^\lambda) \Big|_{\rho=0, \zeta=0}, \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

e calculando a diferenciação funcional em relação a ρ , chegamos à:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & -\frac{1}{2i(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right] \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \\
& \times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} - g(\sqrt{e_0}v + \Delta x) A \left(\sqrt{e_0} \int_0^\tau v(\tau') d\tau' + \tau \Delta x \right) \right] \right\} \\
& \times \left[\frac{\text{Det}\Lambda(g)}{\text{Det}\Lambda(0)} \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \times \left[\frac{v^\mu}{e_0} K_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} - im\gamma^5 \right] \exp \left\{ -\frac{1}{4} g e_0 (FK)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right\} \exp(i\zeta_\lambda \gamma^\lambda) \Big|_{\zeta=0}, \quad (IV.14)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + g e_0 (GF)_{\mu\nu}, \\
G &= \frac{1}{2} \epsilon \Lambda^{-1} \epsilon. \quad (IV.15)
\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dg} \text{Det}\Lambda(g) &= \text{Det}\Lambda(g) \text{Tr} \Lambda^{-1}(g) \frac{d}{dg} \Lambda(g), \\
\frac{d}{dg} \Lambda(g) &= -\frac{1}{2} e_0 \epsilon F \epsilon, \quad (IV.16) \\
\left[\frac{\text{Det}\Lambda(g)}{\text{Det}\Lambda(0)} \right]^{\frac{1}{2}} &= \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g \text{Tr}(GF) dg' \right\}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & -\frac{1}{2i(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right] \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \\
& \times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} - g(\sqrt{e_0}v + \Delta x) A \left(\sqrt{e_0} \int_0^\tau v(\tau') d\tau' + x_{in} + \tau \Delta x \right) \right] \right\} \\
& \times \left[\frac{v^\mu}{e_0} K_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} - im\gamma^5 \right] \exp \left\{ -\frac{1}{4} e_0 g (FK)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g \text{Tr}(GF) dg' \right\} \exp(i\zeta_\lambda \gamma^\lambda) \Big|_{\zeta=0}, \quad (IV.17)
\end{aligned}$$

e calculando a diferenciação em relação a ζ (note também que o número finito de termos que aparecem na série de potências de ζ vem da natureza anti-comutativa desta variável), temos que:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(v, e_0) = & \quad (IV.18) \\ & \left[\frac{v^\mu}{e_0} K_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} - im\gamma^5 \right] \left[1 - \frac{1}{4} g e_0 (FK)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right. \\ & \left. - \frac{1}{16} e_0^2 g^2 (FK)_{\mu\nu} (FK)^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \right] \\ & \times \left[1 + i\zeta_\alpha \gamma^\alpha + \frac{i}{2!} \zeta_\alpha \zeta_\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta + \frac{i}{3!} \zeta_\alpha \zeta_\beta \zeta_\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma + \zeta_0 \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \gamma^5 \right] \\ & \times \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} (GF) \right\} \Big|_{\zeta=0}, \end{aligned}$$

onde

$$(FK)^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (FK)_{\alpha\beta}.$$

O propagador (IV.17) assume a seguinte forma

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & \\ & \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(e_0 m^2 + \frac{\Delta x^2}{e_0} \right) \right] \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \\ & \times \Phi(v, e_0) \gamma^5 \quad (IV.19) \\ & \times \exp \left\{ i \int \left[-\frac{v^2}{2} - g(\sqrt{e_0}v + \Delta x) A \left(\sqrt{e_0} \int_0^\tau v(\tau') d\tau' + x_{in} + \tau \Delta x \right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

isto é, $\tilde{S}^c = S^c \gamma^5$. Neste caminho,

$$\begin{aligned} \Phi(v, e_0) = & \\ & \left\{ m + \frac{1}{2\sqrt{e_0}} v K (2 - g e_0 FK) \gamma - \frac{i}{4} m g e_0 (FK)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right. \\ & \left. - \frac{i}{4} g \sqrt{e_0} v K \gamma (FK)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{16} m g^2 e_0^2 (FK)_{\mu\nu}^* (FK)^{\mu\nu} \gamma^5 \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} (GF) \right\}. \quad (IV.20) \end{aligned}$$

Portanto, temos aqui, a expressão (IV.19) do propagador de Dirac via integral de trajetória sobre velocidades (ver Apêndice G para campo constante).

Uma outra expressão para o propagador em um campo externo arbitrário via integrais de trajetórias fermiônicas e bosônicas, após a realização das primeiras, nos dá uma expressão para o fator espinorial como um funcional das trajetórias bosônicas[10]:

$$S^c = \frac{i}{2} \int_0^\infty de_0 \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx M(e_0) \Phi[x, e_0] \exp iI[x, e_0], \quad (IV.21)$$

onde a ação da partícula escalar é dada por

$$I[x, e_0] = - \int_0^1 d\tau \left[\frac{\dot{x}^2}{2e_0} + \frac{e_0}{2} m^2 + g\dot{x}A(x) \right]$$

e

$$\begin{aligned} \Phi[x, e_0] = & \left\{ m + \frac{1}{2e_0} \dot{x} K(x) (2 - ge_0 F(x) K(x)) \gamma - \frac{i}{4} g \dot{x} K(x) \gamma (F(x) K(x))_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right. \\ & \left. - \frac{i}{4} m g e_0 (F(x) K(x))_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{16} m g^2 e_0^2 (F(x) K(x))_{\mu\nu}^* (F(x) K(x))^{\mu\nu} \gamma^5 \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} (G(x) F(x)) \right\}, \end{aligned} \quad (IV.22)$$

é o fator espinorial da partícula de Dirac num campo eletromagnético externo.

Vamos escrever agora (IV.22) sob outra forma e estabelecer algumas notações

$$\begin{aligned} \Phi[x, e_0] = & \left\{ m + (2e_0)^{-1} \dot{x}^\mu \star K_{\mu\lambda} (2\eta^{\lambda\kappa} - ge_0 B^{\lambda\kappa}) \gamma^\kappa \right. \\ & \left. - \frac{i}{4} g (me_0 + \dot{x}^\mu \star K_{\mu\lambda} \gamma^\lambda) B_{\kappa\nu} \sigma^{\kappa\nu} + \frac{1}{16} m g^2 e_0^2 B_{\alpha\beta}^* B^{\alpha\beta} \gamma^5 \right\} \\ & \times \exp \left(-\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} Q(g') \star \mathcal{F} \right), \end{aligned} \quad (IV.23)$$

onde

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad \gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \\
B_{\mu\nu} &= F_{\mu\lambda} \star K_\nu^\lambda, \quad B^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} B_{\alpha\beta}, \\
K_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} + ge_0 Q_{\mu\lambda} \star F_\nu^\lambda, \\
Q_{\mu\nu}(g) &= \frac{1}{2}\epsilon \star \Lambda_{\mu\nu}^{-1} \star \epsilon, \quad \Lambda_{\mu\lambda}^{-1}(g) \star \Lambda^{\lambda\nu}(g) = \delta_\mu^\nu \delta(\tau - \tau'), \\
\Lambda_{\mu\nu}(g) &= \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}ge_0\epsilon \star \mathcal{F}_{\mu\nu} \star \epsilon.
\end{aligned} \tag{IV.24}$$

Nesta expressão $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é o símbolo de Levi-Civita com $\epsilon^{0123} = 1$; $\epsilon, \mathcal{F}_{\mu\nu}, \Lambda_{\mu\nu}$ e $Q_{\mu\nu}$ são matrizes com índices contínuos τ, τ' , e a integração sobre τ é indicada pelo símbolo $\star$, por exemplo,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau, \tau') &= F_{\mu\nu}(x(\tau))\delta(\tau - \tau'), \quad \epsilon(\tau, \tau') = \epsilon(\tau - \tau'), \\
\epsilon \star \mathcal{F}_{\mu\nu} \star \epsilon &= \int_0^1 d\tau_1 \int_0^1 d\tau_2 \epsilon(\tau, \tau_1) \mathcal{F}_{\mu\nu}(\tau_1, \tau_2) \epsilon(\tau_2, \tau').
\end{aligned}$$

Observamos que algumas vezes os índices de Lorentz serão omitidos. Neste caso, todos os tensores de segunda ordem serão entendidos como matrizes com os primeiros índices contravariantes do respectivo tensor indicando linhas e os segundos índices covariantes indicando colunas. Por $\mathbf{I}$ denotamos uma matriz unidade 4×4 .

IV.2 Fator espinorial num campo constante

Vamos calcular o fator espinorial num campo eletromagnético constante da seguinte forma $A_\mu = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu$. Para tanto, devemos substituir em (IV.22) as seguintes expressões de Q, K e B que não dependem da trajetória x [12]:

$$\begin{aligned}
Q(g) &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{I} \epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{ge_0 F}{2} \right) \exp(ge_0 F(\tau - \tau')), \\
K &= \left(\mathbf{I} - \tanh \frac{ge_0 F}{2} \right) \exp(ge_0 F), \quad B = \frac{2}{ge_0} \tanh \frac{ge_0 F}{2}.
\end{aligned} \tag{IV.25}$$

A expressão do fator espinorial obtida (ver Apêndice I) é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Phi[x, e_0] = & \left\{ \det \cosh \frac{ge_0 F}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ m \left[1 - \frac{i}{2} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right. \right. \\
& + \frac{1}{4} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)^{\mu\nu} \gamma^5 \Big] \\
& + \frac{1}{e_0} \left(\int_0^1 \dot{x} \exp(ge_0 F \tau) d\tau \right) \left(I - \tanh \frac{ge_0 F}{2} \right) \left[\left(I - \tanh \frac{ge_0 F}{2} \right) \gamma \right. \\
& \left. \left. - \frac{i}{2} \gamma \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \right\}. \quad (IV.26)
\end{aligned}$$

Observamos que no caso sob consideração o fator espinorial é linear na trajetória $x_\mu(\tau)$ e isto facilita o cálculo do propagador (IV.21).

IV.3 Comparação com a representação de Schwinger

Embora o fator espinorial seja um objeto invariante de gauge, o propagador total não é, daí a escolha muito particular do gauge para o potencial $A_\mu = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu$ para descrever o campo uniforme constante $F_{\mu\nu} = \text{const.}$ A integral (IV.21) é quase-Gaussiana no caso em estudo. Considere o deslocamento $x \rightarrow \xi + x_{cl}$ na integral de trajetória, tal que x_{cl} é solução da equação de movimento

$$\frac{\delta I}{\delta x} = 0 \leftrightarrow \ddot{x}_\mu - ge_0 F_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = 0$$

obedecendo as condições de contorno $x_{cl}(0) = x_{in}, x_{cl}(1) = x_{out}$. Para as novas trajetórias ξ temos agora as condições $\xi(0) = \xi(1) = 0$. Em razão da estrutura quadrática da ação $I[x, e_0]$ e da linearidade do fator espinorial $\Phi[x, e_0]$ podemos fazer as seguintes substituições na integral de trajetória:

$$\begin{aligned}
I[\xi + x_{cl}, e_0] & \rightarrow I[\xi, e_0] + I[x_{cl}, e_0], \\
\Phi[\xi + x_{cl}, e_0] & \rightarrow \Phi[x_{cl}, e_0] = \Psi(x_{out}, x_{in}, e_0). \quad (IV.27)
\end{aligned}$$

Fazendo as convenientes mudanças de variáveis $p \rightarrow \frac{p'}{\sqrt{e_0}}$, $\xi \rightarrow \xi\sqrt{e_0}$, chegamos à

$$S^c = \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \Psi(x_{out}, x_{in}, e_0) e^{iI[x_{cl}, e_0]} \times \int_0^1 D\xi \int Dp \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 (p^2 - \xi^2 - ge_0 \xi F \xi) d\tau \right\}. \quad (IV.28)$$

A integral de trajetória (IV.28) é o kernel do propagador de Klein-Gordon na representação do tempo próprio. O propagador em sua forma final é dado por (ver Apêndice I):

$$S^c(x_{out}, x_{in}) = \quad (IV.29)$$

$$\frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left[\det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right]^{-\frac{1}{2}} \Psi(x_{out}, x_{in}, e_0) \times \exp \left\{ \frac{i}{2} g x_{out} F x_{in} - \frac{i}{2} e_0 m^2 - \frac{i}{4} (x_{out} - x_{in}) g F \coth \left(\frac{ge_0 F}{2} \right) (x_{out} - x_{in}) \right\},$$

e sobre a trajetória clássica

$$x_{cl}(\tau) = (\exp(ge_0 F) - \mathbf{I})^{-1} [\exp(ge_0 F)(x_{out} - x_{in}) + \exp(ge_0 F)x_{in} - x_{out}],$$

o fator espinorial $\Psi(x_{out}, x_{in}, e_0)$ é escrito como

$$\Psi(x_{out}, x_{in}, e_0) = \left[m + \frac{g}{2} (x_{out} - x_{in}) F \left(\coth \frac{ge_0 F}{2} - 1 \right) \gamma \right] \times \left[\det \cosh \frac{ge_0 F}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{i}{2} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \right). \quad (IV.30)$$

Vamos comparar agora a representação do propagador da partícula de Dirac em um campo constante com a obtida por Schwinger via seu método do tempo próprio. A representação de Schwinger para o propagador é da seguinte forma[11]

$$\begin{aligned}
S^c(x_{out}, x_{in}) = & \quad (IV.31) \\
& \frac{1}{32\pi^2} \left[\gamma^\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x_{out}^\mu} - g A_\mu(x_{out}) \right) + m \right] \int_0^\infty de_0 \left\{ \det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right\}^{-\frac{1}{2}} \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \left[g x_{out} F x_{in} - e_0 m^2 - \frac{g}{2} (x_{out} - x_{in}) F \coth \frac{ge_0 F}{2} (x_{out} - x_{in}) - \frac{1}{2} g e_0 F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

A equação (IV.31) é colocada agora numa forma conveniente para compararmos com a nossa representação (IV.28),

$$\begin{aligned}
S^c = & \quad (IV.32) \\
& \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left\{ \det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right\}^{-\frac{1}{2}} \Psi_S(x_{out}, x_{in}, e_0) \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{2} g x_{out} F x_{in} - \frac{i}{2} e_0 m^2 - \frac{i}{4} g (x_{out} - x_{in}) F \coth \frac{ge_0 F}{2} (x_{out} - x_{in}) \right\},
\end{aligned}$$

onde a função Ψ_S é dada por

$$\begin{aligned}
\Psi_S(x_{out}, x_{in}, e_0) = & \quad (IV.33) \\
& \left[m + \frac{g}{2} (x_{out} - x_{in}) F \left(\coth \frac{ge_0 F}{2} - 1 \right) \gamma \right] \exp \left(-\frac{i}{4} g e_0 F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right).
\end{aligned}$$

Precisamos tão-somente comparar as funções Ψ e Ψ_S . Elas coincidem em razão da fórmula

$$\begin{aligned}
\exp \left(-\frac{i}{4} g e_0 F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) = & \left\{ \det \cosh \frac{ge_0 F}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{i}{2} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \right] \quad (IV.34)
\end{aligned}$$

ou de outro modo

$$\begin{aligned}
\exp \left(-\frac{i}{4} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right) = & \left\{ \det \cosh \frac{\omega}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{i}{2} \left(\tanh \frac{\omega}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\tanh \frac{\omega}{2} \right)_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{\omega}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \right], \quad (IV.35)
\end{aligned}$$

onde $\omega_{\mu\nu}$ é um tensor antissimétrico arbitrário.

Esta última fórmula apresenta uma decomposição linear de uma transformação de Lorentz finita em termos de matrizes- γ . A validade dessa expressão é verificada para alguns termos de ω . Podemos considerar as representações via integrais de trajetória obtidas em [4, 10] mais os cálculos aqui realizados como uma prova geral de (IV.35) via integração funcional (em comunicação oral o Prof. Gitman informou-me da existência de uma outra prova). Para uma prova com uns poucos termos de ω , considere os termos Φ_m e Ψ_m dados como (ver Apêndice I)

$$\Phi_m = \left[\det \cosh \frac{ge_0 F}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{i}{2} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \right\}$$

e

$$\Psi_m = \exp \left\{ -\frac{i}{4} ge_0 F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right\}. \quad (\text{IV.36})$$

Levando em conta a identidade

$$\{ \sigma^{\alpha\beta}, \sigma^{\mu\nu} \} = -2\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \gamma^5 + 2(\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu} \eta^{\beta\mu}), \quad (\text{IV.37})$$

encontramos

$$(F\sigma)^2 = 8\mathcal{F} + 8\mathcal{G}\gamma^5,$$

onde $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ são os invariantes

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \mathcal{G} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\Phi_m = & \left(1 - \frac{g^2 e_0^2}{4} \mathcal{F}\right) - i \left(\frac{g e_0}{4} - \frac{g^3 e_0^3}{16} \mathcal{F}\right) F \sigma \\ & + i \frac{g^3 e_0^3}{48} F^3 \sigma - \frac{1}{4} g^2 e_0^2 \mathcal{G} \gamma^5 + o(g^3),\end{aligned}\quad (\text{IV.38})$$

onde $F^3 \sigma = (F^3)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}$ e

$$\begin{aligned}\Psi_m = & \left(1 - \frac{g^2 e_0}{4} \mathcal{F}\right) + i \left(-\frac{g e_0}{4} + \frac{g^3 e_0^3}{48} \mathcal{F}\right) F \sigma \\ & + i \frac{g^3 e_0^3}{48} \mathcal{G} F^* \sigma - \frac{g^2 e_0^2}{4} \mathcal{G} \gamma^5 + o(g^3).\end{aligned}\quad (\text{IV.39})$$

A diferença é da seguinte ordem

$$\Phi_m - \Psi_m = o(g^3).$$

Portanto, a nossa representação para o propagador coincide com a de Schwinger.

IV.4 Propagador da partícula espinorial com momento magnético anômalo

Vamos considerar a função $\tilde{S}^c(x, y)$ dada por (II.50):

$$\begin{aligned}\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & \exp\left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n}\right) \int_0^\infty de_0 \int d\chi_0 \\ & \times \int \exp\left(i\left\{\int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e} - \frac{eM^2}{2} - \dot{x}^\alpha \left(gA_\alpha(x) + 4i\mu\psi^5 F_{\alpha\beta}(x)\psi^\beta\right) + iegF_{\alpha\beta}(x)\psi^\alpha\psi^\beta\right.\right.\right. \\ & \left.\left.+ i\left(\frac{\dot{x}_\alpha\psi^\alpha}{e} - M^*\psi^5\right)\chi - i\psi_n\dot{\psi}^n + \pi\dot{e} + \nu\dot{\chi}\right] d\tau + \psi_n(1)\psi^n(0)\right\}\right) \\ & \times M(e) Dx De D\pi D\chi D\nu D\psi \big|_{\theta=0}.\end{aligned}\quad (\text{IV.40})$$

Integrando em π e ν , obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & \exp \left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \int_0^\infty de_0 Dp d\chi_0 Dx \mathcal{D}\psi \\
& \times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e_0} - \frac{e_0 m^2}{2} - g\dot{x}A + \frac{e_0 p^2}{2} \right] d\tau \right\} \\
& \times \exp \left\{ i \int_0^1 \left[2e_0 \mu^2 F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta F_{\sigma\rho} \psi^\sigma \psi^\rho + 2ie_0 m \mu F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta \right. \right. \\
& - 4i\mu \dot{x}^\alpha \psi^5 F_{\alpha\beta} \psi^\beta + i g e_0 F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta \\
& \left. \left. + i \left(\frac{\dot{x}_\alpha \psi^\alpha}{e_0} - M^* \psi^5 \right) \chi_0 - i \psi_n \dot{\psi}^n \right] d\tau + \psi_n(1) \psi^n(0) \right\} \Big|_{\theta=0}. \quad (IV.41)
\end{aligned}$$

A integração em x se dá no mesmo caminho do cálculo anterior, portanto, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & \exp \left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \frac{1}{i(2\pi)^2} \int_0^\infty de_0 \quad (IV.42) \\
& \times \left[-\det \frac{\sinh \frac{g e_0 F}{2}}{\frac{g F}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \int d\chi_0 \mathcal{D}\psi \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{2} g x_{out} F x_{in} - \frac{i}{2} e_0 m^2 - \frac{i}{4} \Delta x g F \coth \frac{g e_0 F}{2} \Delta x \right\} \\
& \times \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left[2e_0 \mu^2 F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta F_{\sigma\rho} \psi^\sigma \psi^\rho + 2ie_0 m \mu F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta \right. \right. \\
& - 4i\mu \sqrt{e_0} \frac{\delta}{i\delta j_\alpha} \psi^5 F_{\alpha\beta} \psi^\beta + i g e_0 F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta \\
& \left. \left. + i \left(\frac{1}{\sqrt{e_0}} \frac{\delta}{i\delta j_\alpha} \psi^\alpha - M^* \psi^5 \right) \chi_0 - i \psi_n \dot{\psi}^n \right] + \psi_n(1) \psi^n(0) \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 j(\tau) K(\tau, \tau') j(\tau') d\tau d\tau' + i \int a(\tau) j(\tau) d\tau \right\} \Big|_{j=0, \theta=0},
\end{aligned}$$

ou sob outra forma:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & \frac{1}{i(2\pi)^2} \exp \left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \int de_0 I(e_0) \quad (IV.43) \\
& \times \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left[2e_0 \mu^2 F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta F_{\sigma\rho} \psi^\sigma \psi^\rho \right. \right. \\
& + 2ie_0 m \mu F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta - 4i\mu \sqrt{e_0} a^\alpha(\tau) \psi^5 F_{\alpha\beta} \psi^\beta + i g e_0 F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta \\
& \left. \left. + i \left(\frac{a_\alpha}{\sqrt{e_0}} \psi^\alpha - M^* \psi^5 \right) \chi_0 - i \psi_n \dot{\psi}^n \right] + \psi_n(1) \psi^n(0) \right\} d\chi_0 \mathcal{D}\psi \Big|_{\theta=0},
\end{aligned}$$

onde $I(e_0)$ é obviamente definido.

Neste ponto, substituímos as variáveis ψ pelas velocidades ω , e chegamos à:

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & \frac{1}{i(2\pi)^2} \exp \left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \int_0^\infty de_0 I(e_0) \\ & \times \exp \left\{ i \int \left[2e_0 \mu^2 (F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta)^2 + 2ie_0 m \mu F_{\alpha\beta} \psi^\alpha \psi^\beta \right. \right. \\ & \left. \left. + i \left(\frac{a_\alpha}{\sqrt{e_0}} \psi^\alpha - M^* \psi^5 \right) \chi_0 \right] d\tau \right\} \\ & \times \int \mathcal{D}\omega \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \omega^n(\tau) \Lambda_{nm}(\tau, \tau') \omega^m(\tau') d\tau d\tau' \right. \\ & \left. + \int \xi_n \omega^n d\tau - \mu \Delta x^\alpha \theta^5 F_{\alpha\beta} \theta^\beta - \frac{1}{4} g e_0 F_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta \right\} \Big|_{\theta=0}, \quad (IV.44) \end{aligned}$$

e temos que

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta} &= \epsilon(\tau - \tau') \eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g e_0 \epsilon F_{\alpha\beta} \epsilon, \\ \Lambda_{55} &= \epsilon(\tau - \tau') \eta_{55}, \quad \eta_{55} = -1, \\ \mathcal{D}\omega &= \frac{D\omega}{\int D\omega e^{-\frac{1}{2} \omega^n \epsilon \omega_n}}, \\ \xi_n &= \tilde{Q}_n + c_n, \\ \tilde{Q}_5 &= 0, \quad \tilde{Q}_\alpha = \frac{1}{2} g e_0 \int \epsilon(\tau'' - \tau) F_{\alpha\beta} \theta^\beta d\tau, \\ c_5 &= -\mu \sqrt{e_0} \int a^\alpha(\tau'') F_{\alpha\beta} \epsilon(\tau'' - \tau) \theta^\beta d\tau'' \\ c_\beta &= \mu \sqrt{e_0} \int a^\alpha(\tau'') F_{\alpha\beta} \epsilon(\tau'' - \tau) \theta^5 d\tau''. \end{aligned} \quad (IV.45)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & \frac{1}{i(2\pi)^2} \exp \left(i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right) \int_0^\infty de_0 I(e_0) \int \mathcal{D}\omega d\chi_0 \\ & \times \exp \left\{ i \left(i \left[\frac{a_\alpha}{\sqrt{e_0}} \psi^\alpha - M^* \psi^5 \right] \chi_0 \right) \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n (\Lambda_{nm} + 4e_0 m \mu L_{nm}) \omega^m + (\xi_n - 2e_0 m \mu Q_n) \omega^n \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4}e_0(2m\mu + g)F\theta\theta - \mu\Delta x^\alpha\theta^5 F_{\alpha\beta}\theta^\beta \Big\} \\
& \times \exp \left\{ 2ie_0\mu^2 \int L_{nm}L_{st}\omega^n\omega^m\omega^s\omega^t d\tau d\tau' d\tau'' d\tau''' \right. \\
& + 4ie_0\mu^2 \int L_{nm}Q_s\omega^n\omega^m\omega^s d\tau d\tau' d\tau'' \\
& - 2ie_0\mu^2 \int Q_{nm}\omega^n\omega^m d\tau d\tau' + ie_0\mu^2 F\theta\theta \int \omega^n L_{nm}\omega^m d\tau d\tau' \\
& \left. + ie_0\mu^2 F\theta\theta \int Q_n\omega^n d\tau + \frac{i}{8}e_0\mu^2 (F\theta\theta)^2 \right\} \Big|_{\theta=0}, \quad (IV.46)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{4} \int \epsilon(\tau - \tau'') F_{\alpha\beta} \epsilon(\tau'' - \tau') d\tau'', \\
L_{55} &= 0 = L_{5\beta}, \\
Q_\alpha &= -\frac{1}{2} \int \epsilon(\tau'' - \tau) F_{\alpha\beta} \theta^\beta d\tau'', \quad Q_5 = 0.
\end{aligned} \quad (IV.47)$$

Considere,

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega^n \tilde{\Lambda}_{nm} \omega^m + I_n \omega^n \right\},$$

tal que

$$I_n = \rho_n + \xi_n - 2e_0 m \mu Q_n + ie_0 \mu^2 F\theta\theta Q_n,$$

onde as fontes ρ associadas às velocidades ω foram introduzidas, e deslocando $\omega \rightarrow \omega + \tilde{\Lambda}^{-1} I$, obtemos o termo:

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega \tilde{\Lambda} \omega + \frac{1}{2} I \tilde{\Lambda}^{-1} I \right\}.$$

Voltando à expressão (IV.46) e integrando em χ_0 , tendo em conta a identidade definida anteriormente, encontramos:

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & -\frac{1}{2i(2\pi)^2} \int \mathcal{D}\omega de_0 I(e_0) \left[\frac{a^\alpha}{\sqrt{e_0}} \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \right) \right. \\
& -m \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_5} + i\gamma^5 \right) - i\mu F_{\alpha\beta} \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \right) \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_\beta} + \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} \right) \\
& \times \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_5} + i\gamma^5 \right) \left. \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega \tilde{\Lambda} \omega \right\} \right. \\
& \times \exp \left\{ -i\mu \Delta x^\alpha \gamma^5 F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} - \frac{e_0}{4} (2m\mu + g) F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right\} \\
& \times \exp \left\{ 2ie_0 \mu^2 L_{nm} L_{st} \frac{\partial}{\partial \rho_n} \frac{\partial}{\partial \rho_m} \frac{\partial}{\partial \rho_s} \frac{\partial}{\partial \rho_t} \right\} \exp \left\{ 4ie_0 \mu^2 L_{nm} Q_s \frac{\partial}{\partial \rho_n} \frac{\partial}{\partial \rho_m} \frac{\partial}{\partial \rho_s} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -2ie_0 \mu^2 Q_n Q_m \frac{\partial}{\partial \rho_n} \frac{\partial}{\partial \rho_m} \right\} \exp \left\{ ie_0 \mu^2 F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} L_{nm} \frac{\partial}{\partial \rho_n} \frac{\partial}{\partial \rho_m} \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{8} e_0 \mu^2 \left(F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right)^2 \right\} \exp \left\{ \frac{1}{2} I \tilde{\Lambda}^{-1} I \right\} \exp(i\zeta_\lambda \gamma^\lambda) \Big|_{\rho=0, \zeta=0},
\end{aligned} \tag{IV.48}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = & -\frac{1}{2i(2\pi)^2} \int \mathcal{D}\omega de_0 I(e_0) \left[\frac{a^\alpha}{\sqrt{e_0}} \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \right) \right. \\
& -m \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_5} + i\gamma^5 \right) - i\mu F_{\alpha\beta} \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \right) \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_\beta} + \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} \right) \left(\epsilon \frac{\delta}{\delta \rho_5} + i\gamma^5 \right) \left. \right] \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega \tilde{\Lambda} \omega \right\} \exp \left\{ -i\mu \Delta x^\alpha \gamma^5 F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} - \frac{e_0}{4} (2m\mu + g) F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -2ie_0 \mu^2 Q_\mu Q_\nu \frac{\partial}{\partial \rho_\mu} \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} \right\} \exp \left\{ ie_0 \mu^2 F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} L_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \rho_\mu} \frac{\partial}{\partial \rho_\nu} \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{8} e_0 \mu^2 \left(F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right)^2 \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{1}{2} I \tilde{\Lambda}^{-1} I \right\} \exp(i\zeta_\lambda \gamma^\lambda) \Big|_{\zeta=0, \rho=0}.
\end{aligned} \tag{IV.49}$$

Fazendo a diferenciação em relação a ρ , obtemos:

$$\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) = -\frac{1}{2i(2\pi)^2} \int \mathcal{D}\omega de_0 I(e_0) \left\{ \frac{a_\mu}{\sqrt{e_0}} \left\{ \epsilon [(\tilde{\Lambda}^{-1})^{\mu\beta} (\tilde{Q}_\beta + c_\beta) \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -(\tilde{\Lambda}^{-1})^{\mu\beta} \left(2e_0 m\mu - ie_0 \mu^2 F_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\rho} \right) Q_\beta \Bigg] \\
& + \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \Bigg\} - m \left(\epsilon(\tilde{\Lambda}^{-1})^{55} c_5 + i\gamma^5 \right) - i\mu F_{\mu\nu} \left\{ \epsilon [(\tilde{\Lambda}^{-1})^{\mu\beta} (\tilde{Q}_\beta + c_\beta) \right. \\
& - (\tilde{\Lambda}^{-1})^{\mu\beta} \left(2e_0 m\mu - ie_0 \mu^2 F_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\rho} \right) Q_\beta + \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \Bigg] \epsilon [(\tilde{\Lambda}^{-1})^{\beta\nu} (\tilde{Q}_\beta + c_\beta) \\
& - (\tilde{\Lambda}^{-1})^{\beta\nu} \left(2e_0 m\mu - ie_0 \mu^2 F_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\rho} \right) Q_\beta + \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \Bigg] \\
& \times \left[\epsilon(\tilde{\Lambda}^{-1})^{55} c_5 + i\gamma^5 \right] \Bigg\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \omega \tilde{\Lambda} \omega \right\} \\
& \times \exp \left\{ -i\mu \Delta x^\alpha \gamma^5 F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} - \frac{e_0}{4} (2m\mu + g) F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -2ie_0 \mu^2 Q_\mu Q_\nu (\tilde{\Lambda}^{-1})^{\mu\nu} \right\} \exp \left\{ ie_0 \mu^2 F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} L_{\mu\nu} (\tilde{\Lambda}^{-1})^{\mu\nu} \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{i}{8} e_0 \mu^2 \left(F_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right)^2 \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{1}{2} (\tilde{Q}_\alpha + c_\alpha) (\tilde{\Lambda}^{-1})^{\alpha\beta} (\tilde{Q}_\beta + c_\beta) \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{1}{2} c_5 (\tilde{\Lambda}^{-1})^{55} c_5 \right\} \exp \left\{ -(\tilde{Q}_\alpha + c_\alpha) (\tilde{\Lambda}^{-1})^{\alpha\beta} \right. \\
& \times \left. \left(2e_0 m\mu - ie_0 \mu^2 F_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\rho} \right) Q_\beta \right\} \\
& \times \exp \left\{ \frac{1}{2} \left(2e_0 m\mu - ie_0 \mu^2 F_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\rho} \right) \right. \\
& \times \left. Q_\alpha (\tilde{\Lambda}^{-1})^{\alpha\beta} \left(2e_0 m\mu - ie_0 \mu^2 F_{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\rho} \right) Q_\beta \right\} \\
& \times \exp (i\zeta_\lambda \gamma^\lambda) \Big|_{\zeta=0}. \tag{IV.50}
\end{aligned}$$

Assim, encontramos

$$\begin{aligned}
\tilde{S}^c(x_{out}, x_{in}) &= -\frac{1}{2i(2\pi)^2} \int_0^\infty de_0 \left[-\det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{\frac{gF}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \\
&\times \exp \left\{ \frac{i}{2} g x_{out} F x_{in} - \frac{i}{2} e_0 m^2 - \frac{i}{4} \Delta x g F \coth \frac{ge_0 F}{2} \Delta x \right\} \tilde{\Phi}(e_0) \Big|_{\zeta=0},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}(e_0) = & \left\{ \left[\frac{a^\mu}{\sqrt{e_0}} K_{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} - im\gamma^5 \right] - 2i\mu\gamma^5 a_\mu (GF)^{\mu\sigma} a_\sigma \right. \\
& + \left[2\sqrt{e_0} m \mu a_q (GF)^{q\sigma} + 2m\mu\sqrt{e_0} a_q (G^5 F)^{q\sigma} \right] \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \\
& - i\sqrt{e_0} \mu^2 F_{\alpha\beta} a_\mu (GF)^{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \\
& - i\mu F_{\mu\nu} \left[\left(A^{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} - 2i\mu\sqrt{e_0} \gamma^5 (GF)^{\mu\sigma} a_\sigma - ie_0 \mu^2 F_{\alpha\beta} (GF)^{\mu\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \right) \right. \\
& \times \left(A^{\nu\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} - 2i\mu\sqrt{e_0} \gamma^5 (GF)^{\nu\beta} a_\beta - ie_0 \mu^2 F_{st} (GF)^{\nu\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_s} \frac{\partial}{\partial \zeta_t} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} \right) \\
& \times \left. \left. \left(-i\gamma^5 - 2\mu\sqrt{e_0} a_\alpha (G^5 F)^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} \right) \right] \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{1}{4} e_0 (2m\mu + g) (FK)_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta_\nu} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -i\mu\gamma^5 \Delta x^\alpha F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} \right\} \exp \left\{ \left[i\mu\sqrt{e_0} \gamma^5 + i g e_0 \mu \sqrt{e_0} \gamma^5 \right] a_\alpha (GF)^{\alpha\beta} F_{\beta\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \right\} \\
& \times \exp \left\{ \left[\frac{i}{2} e_0 \mu^2 - g^2 e_0^4 \mu^2 m^2 - g e_0^2 m \mu \right] (GF)^{\alpha\beta} F_{\beta\sigma} \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \frac{\partial}{\partial \zeta_\sigma} \right\} \\
& \times \exp \left\{ \left[-\frac{i}{4} e_0 \mu^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (24ig^2 e_0^4 m \mu^3 + 12ig e_0^2 \mu^2) F_{01} (GF)^{2\nu} F_{\nu 3} \right] \frac{\partial}{\partial \zeta_0} \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \frac{\partial}{\partial \zeta_3} \right\} \\
& \times \exp \left\{ e_0 \mu^2 a_\mu (G^5 F)^{\mu\beta} F_{\nu\alpha} a^\nu \frac{\partial}{\partial \zeta_\beta} \frac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \right\} \\
& \times \exp \left\{ -e_0 \int_0^{\tilde{g}} Tr(GF) d\tilde{g}' \right\} \exp(i\zeta_\lambda \gamma^\lambda) \Big|_{\zeta=0}, \tag{IV.51}
\end{aligned}$$

onde (ver Apêndice H):

$$\begin{aligned}
\tilde{g} &= m\mu + \frac{g}{2} \\
G(\tau, \tau') &= \frac{\mathcal{F}}{4} \int e^{2e_0 \tilde{g} F(\tau-\lambda)} [\epsilon(\tau-\lambda) - \tanh \tilde{g} e_0 F] \epsilon(\lambda-\tau') d\lambda, \\
&= \frac{1}{2} e^{2e_0 \tilde{g} F(\tau-\tau')} [\epsilon(\tau-\tau') - \tanh \tilde{g} e_0 F] \\
K_{\mu\sigma} &= \eta_{\mu\sigma} + e_0 g (GF)_{\mu\sigma},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{\mu\sigma} &= K_{\mu\sigma} + 2e_0 m \mu (GF)_{\mu\sigma}, \\
G^{55} &= \frac{1}{2} \epsilon (\tilde{\Lambda}^{-1})^{55} \epsilon, \\
\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} &= \epsilon \eta_{\alpha\beta} - e_0 m \left(\mu + \frac{g}{2m} \right) \epsilon F_{\alpha\beta} \epsilon, \\
\tilde{\Lambda}_{55} &= \epsilon \eta_{55}, \quad \eta_{55} = -1, \\
\Gamma &= \delta(\tau - \tau') + \tilde{g} e_0 F e^{2\tilde{g} e_0 F(\tau - \tau')} [\epsilon(\tau - \tau') - \tanh \tilde{g} e_0 F].
\end{aligned} \tag{IV.52}$$

Finalmente, chegamos à expressão do propagador (em razão da estrutura bastante complexa de $\tilde{\Phi}(e_0)$, numa primeira análise, consideramos só termos que se assemelham com o caso anterior, isto é, não levamos em conta termos da ordem $o(\mu^2)$) :

$$\begin{aligned}
S^c(x_{out}, x_{in}) &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int_0^\infty de_0 \left[\det \frac{\sinh \frac{g e_0 F}{2}}{\frac{g F}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \\
&\times \varphi(\mu, g, e_0) \exp \left\{ \frac{i}{2} \left(g x_{out} F x_{in} - e_0 m^2 - \frac{1}{2} \Delta x g F \coth \frac{g e_0 F}{2} \Delta x \right) \right\},
\end{aligned} \tag{IV.53}$$

onde

$$\begin{aligned}
\varphi(\mu, g, e_0) &= \left\{ \det \cosh \left(\frac{g + 2m\mu}{2} \right) e_0 F \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ m + \frac{1}{2\sqrt{e_0}} a K \gamma [2 - (g + 2m\mu) e_0 (FK)] \right. \\
&\quad - \frac{i}{4} m (g + 2m\mu) e_0 (FK)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} - \frac{i}{4} (g + 2m\mu) \sqrt{e_0} a K \gamma (FK)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\
&\quad \left. + \frac{1}{16} m e_0^2 (g + 2m\mu)^2 (FK)_{\mu\nu}^* (FK)^{\mu\nu} \gamma^5 \right\}
\end{aligned}$$

e $g + 2m\mu$ é a carga corrigida pela presença do momento magnético anômalo.

O propagador na representação de Schwinger, neste caso particular e visto a equivalência entre as representações discutida anteriormente, supomos dado por:

$$S^c(x_{out}, x_{in}) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left[\det \frac{\sinh \frac{g e_0 F}{2}}{g F} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \left(g x_{out} F x_{in} - e_0 m^2 - \frac{1}{2} \Delta x g F \coth \frac{g e_0 F}{2} \Delta x \right) \right\} \\
& \times \exp \left\{ -\frac{i}{4} e_0 (g + 2m\mu) F_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right\}. \tag{IV.54}
\end{aligned}$$

Capítulo V

Conclusão

Neste trabalho, um método de integração funcional sobre velocidades foi introduzido[5]. Em tal construção, integrais Gaussianas e quase-Gaussianas sobre velocidades foram definidas, estabelecidas suas propriedades e regras de cálculo para resolvê-las. Aplicamos tal procedimento, no cálculo do propagador da partícula escalar em duas configurações do campo eletromagnético externo, isto é, para campo constante e em sua combinação com um campo de onda plana.

No caso da partícula com spin, o fator espinorial foi calculado para campo constante[12]. Comparamos o propagador obtido via nossa representação, com o estabelecido por Schwinger, e verificamos que tais representações coincidem, como deveria acontecer. De fato, soluções exatas só são obtidas para uns poucos casos, por exemplo, para onda plana eletromagnética, para a combinação de um campo constante com um campo de onda plana, etc. Em termos dessa representação para o propagador via integral bosônica com fator espinorial, podemos supor que tais casos podem ser tratados de maneira similar. Observamos as seguintes vantagens dessa representação; não precisamos nos preocupar com as integrações fermiônicas porque de antemão já foram realizadas; a estrutura de matriz- γ do fator espinorial aparece de forma explícita logo de saída. Por outra, talvez essa representação nos per-

mita obter o propagador de Dirac sem quaisquer integrações de trajetórias adicionais se a representação via tempo próprio do correspondente propagador de Klein-Gordon é conhecida. Consideramos também, a partícula com momento magnético anômalo e o propagador, neste caso, foi obtido levando-se em conta uma aproximação. No cálculo desse propagador observamos também a representação com fator espinorial.

Como já foi enfatizado, não existe ainda um método geral de resolução de integrais de trajetória. Portanto, técnicas de resolução de integração funcional são por si só importantes, uma vez que nos permitem avançar no entendimento da mesma. O caminho, neste sentido, está aberto a outras aplicações e assim, poderemos testar a potencialidade do método aqui ilustrado.

Apêndice A

Procedimento de Discretização

Neste apêndice, explicitamos o procedimento de discretização, calculando em detalhes a expressão (II.17). Considere

$$I = \int Dp D'x \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 (p^2 - \dot{x}^2) d\tau \right\}, \quad (\text{A.1})$$

e a integral na variável p , na forma discretizada

$$I_p = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4 p_N}{(2\pi)^4} \exp \left\{ \frac{i}{2} \Delta\tau \sum p_n^2 \right\},$$

tal que para um elemento característico temos

$$\begin{aligned} I_p &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \exp \left\{ \frac{i}{2} \Delta\tau p^2 \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int dp_0 d^3 p \exp \left\{ \frac{i}{2} \Delta\tau p_0^2 - \frac{i}{2} \Delta\tau p^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Levando em conta que

$$\int \exp \{ A\zeta^2 + B\zeta \} d^D \zeta = \left\{ \frac{\pi}{-A} \right\}^{\frac{D}{2}} \exp \left\{ -\frac{B^2}{4A} \right\},$$

obtemos

$$I_p = \frac{1}{(2\pi)^4} \left(\frac{2\pi}{-i\Delta\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2\pi}{i\Delta\tau} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{i(2\pi\Delta\tau)^2},$$

e para N termos

$$I_p = \left\{ \frac{1}{i(2\pi\Delta\tau)^2} \right\}^N. \quad (\text{A.3})$$

A integral na variável x , na forma discretizada é dada por:

$$I_x = \int d^4x_1 \dots d^4x_{N-1} \exp \left\{ \frac{i}{2\Delta\tau} \sum (\Delta x_n)^2 \right\},$$

com $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$, e para $N = 2$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int d^4x_1 \exp \left\{ -\frac{i}{2\Delta\tau} [(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_1)^2] \right\} \\ &= \int d^4x_1 \exp \left(-\frac{i}{2\Delta\tau} \left\{ (x_1 - x_0)^2 + [(x_2 - x_0) - (x_1 - x_0)]^2 \right\} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde no segundo termo da exponencial somamos e subtraímos x_0 , portanto, temos:

$$\begin{aligned} I_2 &= \exp \left\{ -\frac{i}{2\Delta\tau} (x_2 - x_0)^2 \right\} \int d^4x_1 \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{i}{2\Delta\tau} (x_1 - x_0)^2 + \frac{i}{\Delta\tau} (x_2 - x_0)(x_1 - x_0) \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{i}{2\Delta\tau} (x_2 - x_0)^2 \right\} \int d^4\zeta \exp \left\{ -\frac{i}{2\Delta\tau} \zeta^2 + \frac{i}{\Delta\tau} (x_2 - x_0)\zeta \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e dado que:

$$\int d^4\zeta \exp \{ -iA\zeta^2 + iB\zeta \} = \frac{\pi^2}{-iA^2} \exp \left\{ i\frac{B^2}{4A} \right\},$$

chegamos à :

$$I_2 = \frac{\pi^2(\Delta\tau)^2}{-i} \exp \left\{ -i\frac{(x_2 - x_0)^2}{2.2\Delta\tau} \right\}$$

Neste caminho, podemos verificar que para $k \geq 2$, temos a seguinte expressão:

$$I_k = \frac{(2\pi)^2(\Delta\tau)^2}{-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \exp\left\{-i\frac{(x_k - x_0)^2}{2.k\Delta\tau}\right\} \quad (\text{A.6})$$

Juntando os resultados das integrais em p e x , obtemos:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{i(2\pi\Delta\tau)^2} \right\}^N \prod_{k=2}^N \frac{(2\pi)^2(\Delta\tau)^2}{-i} \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \exp\left\{-i\frac{(x_k - x_0)^2}{2.k\Delta\tau}\right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{i(2\pi\Delta\tau)^2} \right\}^N \left\{ \frac{(2\pi)^2(\Delta\tau)^2}{-i} \right\}^{N-1} \prod_{k=2}^N \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \exp\left\{-i\frac{(x_k - x_0)^2}{2.k\Delta\tau}\right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{i(2\pi)^2} N^2 \prod_{k=2}^N \left(\frac{k-1}{k}\right)^2 \exp\left\{-i\frac{(x_k - x_0)^2}{2.k\Delta\tau}\right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{i(2\pi)^2} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \dots \left(\frac{N-2}{N-1}\right)^2 \left(\frac{N-1}{N}\right)^2 \right\} N^2 \\ &= \frac{1}{i(2\pi)^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Portanto, no processo de discretização, fica claro que no limite $N \rightarrow \infty$ a integração em p diverge, mas é compensada pela integração em x . Assim, a combinação dessas integrações produz um resultado finito para a integral de trajetória. A expressão (II-17) é, então, verificada.

Apêndice B

Cálculo do operador $\hat{\mathcal{H}}$

O operador A para a partícula espinorial tem a seguinte forma

$$A = \Pi_\nu \gamma^\nu - m\gamma^5,$$

então

$$\begin{aligned} A^2 &= (\Pi_\mu \gamma^\mu - m\gamma^5) (\Pi_\nu \gamma^\nu - m\gamma^5) \\ &= \Pi_\mu \gamma^\mu \Pi_\nu \gamma^\nu - m^2, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

onde usamos $[\gamma^\mu, \gamma^5]_+ = 0$ e $(\gamma^5)^2 = -1$. Escrevendo, agora, $\Pi_\mu \Pi_\nu$ e $\gamma^\mu \gamma^\nu$, em termos de uma parte simétrica e outra anti-simétrica, obtemos:

$$\begin{aligned} A^2 &= g^{\mu\nu} \Pi_\mu \Pi_\nu - m^2 - \frac{i}{2} g F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \\ &= \Pi^2 - m^2 - \frac{i}{2} g F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde usamos o resultado $[\Pi_\mu, \Pi_\nu]_- = -igF_{\mu\nu}$. Portanto, obtemos para o operador $\hat{\mathcal{H}}$ a expressão:

$$\hat{\mathcal{H}} = \lambda \left[m^2 - \Pi^2 + \frac{i}{2} g F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu \right] + (\Pi_\mu \gamma^\mu - m\gamma^5) \chi. \quad (\text{B.3})$$

Para a partícula com momento magnético anômalo, o operador A tem a seguinte forma $A = \Pi_\nu \gamma^\nu - m\gamma^5 - \frac{i}{2} \mu \gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta$, então:

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\Pi_\nu \gamma^\nu - m\gamma^5 - \frac{i}{2} \mu \gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right) \left(\Pi_\mu \gamma^\mu - m\gamma^5 - \frac{i}{2} \mu \gamma^5 F_{\xi\eta} \gamma^\xi \gamma^\eta \right) \\
&= \Pi_\mu \Pi_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - m^2 + \frac{\mu^2}{4} (F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta)^2 - i\mu m F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \\
&\quad - \frac{i}{2} \mu [\Pi_\nu \gamma^\nu, \gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta]_+,
\end{aligned} \tag{B.4}$$

mas $\Pi_\mu \Pi_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \Pi^2 - \frac{i}{2} g F_{\mu\nu} \gamma^\mu \gamma^\nu$ e $\frac{i}{2} \mu [\Pi_\nu \gamma^\nu, \gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta]_+ = i\mu \gamma^5 \gamma^\alpha [F_{\alpha\beta}, \Pi^\beta]_+$,
então:

$$\begin{aligned}
A^2 &= \Pi^2 - m^2 - i \left(m\mu + \frac{g}{2} \right) F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \\
&\quad + \frac{\mu^2}{4} (F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta)^2 - i\mu \gamma^5 \gamma^\alpha [F_{\alpha\beta}, \Pi^\beta]_+
\end{aligned} \tag{B.5}$$

e o operador $\hat{\mathcal{H}}$ vem dado por:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{H}} &= \lambda \left\{ m^2 - \Pi^2 + i \left(m\mu + \frac{g}{2} \right) F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mu^2}{4} (F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta)^2 + i\mu \gamma^5 \gamma^\alpha [F_{\alpha\beta}, \Pi^\beta]_+ \right\} \\
&\quad + \left(\Pi_\nu \gamma^\nu - m\gamma^5 - \frac{i}{2} \mu \gamma^5 F_{\alpha\beta} \gamma^\alpha \gamma^\beta \right) \chi.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Apêndice C

Cálculo da expressão (II.30)

A quantidade $T \exp \left\{ \int_0^1 \rho_n(\tau) \gamma^n d\tau \right\}$ é escrita em termos de uma integral de trajetória Grasmanniana, tendo-se em conta a seguinte versão do teorema de Wick: Considere um conjunto de operadores $\hat{\phi}(\tau)$ e algum funcional, $F(\hat{\phi})$ dos mesmos, então:

$$TF(\hat{\phi}) = \text{Sym} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int \frac{\delta_r}{\delta \phi(\tau_1)} K(\tau_1, \tau_2) \frac{\delta_r}{\delta \phi(\tau_2)} d\tau_1 d\tau_2 \right\} F(\phi) \Big|_{\phi=\hat{\phi}}, \quad (\text{C.1})$$

onde

$$K(\tau_1, \tau_2) = T\hat{\phi}(\tau_1)\hat{\phi}(\tau_2) - \text{Sym}\hat{\phi}(\tau_1)\hat{\phi}(\tau_2), \quad (\text{C.2})$$

com

$$\text{Sym}\hat{\phi}(\tau_1)\hat{\phi}(\tau_2) = \frac{1}{2} \left\{ \hat{\phi}(\tau_1)\hat{\phi}(\tau_2) + (-)^{\mathcal{P}(\hat{\phi}(\tau_1))\mathcal{P}(\hat{\phi}(\tau_2))} \hat{\phi}(\tau_1)\hat{\phi}(\tau_2) \right\}, \quad (\text{C.3})$$

$$T\hat{\phi}(\tau_1)\hat{\phi}(\tau_2) = \theta(\tau_1 - \tau_2)\hat{\phi}(\tau_1)\hat{\phi}(\tau_2) + (-)^{\mathcal{P}(\hat{\phi}(\tau_1))\mathcal{P}(\hat{\phi}(\tau_2))} \theta(\tau_2 - \tau_1)\hat{\phi}(\tau_2)\hat{\phi}(\tau_1) \quad (\text{C.4})$$

e $\mathcal{P}(\hat{\phi}(\tau))$ é a paridade do operador $\hat{\phi}(\tau)$.

No caso em consideração, $F(\hat{\phi}) = \exp \int_0^1 \hat{\phi}(\tau) d\tau$, $\hat{\phi}(\tau) = \rho_n(\tau) \gamma^n$ e introduzindo a função sinal $\epsilon(\tau_1 - \tau_2) = \theta(\tau_1 - \tau_2) - \theta(\tau_2 - \tau_1)$, temos que

$\theta(\tau_1 - \tau_2) = \frac{1}{2}[1 + \epsilon(\tau_1 - \tau_2)]$ e $\theta(\tau_2 - \tau_1) = \frac{1}{2}[1 - \epsilon(\tau_1 - \tau_2)]$ e como $\mathcal{P}(\dot{\phi}(\tau)) = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} K(\tau_1, \tau_2) &= -\frac{1}{2}\epsilon(\tau_1 - \tau_2) [\dot{\phi}(\tau_1), \dot{\phi}(\tau_2)]_+ \\ &= -\epsilon(\tau_1 - \tau_2)\rho_n(\tau_1)\rho^n(\tau_2). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Portanto,

$$\begin{aligned} T \exp \left\{ \int_0^1 \rho_n(\tau) \gamma^n d\tau \right\} &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \int_0^1 \rho(\tau_1) \epsilon(\tau_1 - \tau_2) \rho(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\} \\ &\times \exp \left\{ \int_0^1 \rho_n(\tau) \gamma^n d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

A exponencial quadrática é escrita agora, em termos de uma integral de trajetória Gaussiana sobre trajetórias Grassmannianas $\zeta^n(\tau)$, $n = \overline{03}, 5$:

$$\frac{J(\rho)}{J(0)} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int \int_0^1 \rho(\tau_1) \epsilon(\tau_1 - \tau_2) \rho(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right\}, \quad (\text{C.7})$$

$$J(\rho) = \int D\zeta \exp \left\{ \int_0^1 \left[\frac{1}{4} \zeta \dot{\zeta} - i\rho\zeta \right] d\tau \right\}, \quad (\text{C.8})$$

tal que a integral de trajetória é invariante sob deslocamentos das variáveis de integração, isto é, para $\zeta' = \zeta - i \int \epsilon(\tau - \tau') \rho(\tau') d\tau'$, temos que as condições de contorno $\zeta(0) + \zeta(1) = 0$ devem ser satisfeitas. Por outro lado, a expressão $\exp \left\{ \int_0^1 \rho_n(\tau) \gamma^n d\tau \right\}$ é escrita na forma:

$$\exp \left\{ \int_0^1 \rho_n(\tau) \gamma^n d\tau \right\} = \exp \left\{ i\gamma^n \frac{\partial_l}{\partial \theta^n} \right\} \exp \left\{ -i \int_0^1 \rho_n(\tau) \theta^n d\tau \right\} \Big|_{\theta=0}, \quad (\text{C.9})$$

onde os θ^n , $n = \overline{03}, 5$ são variáveis ímpares que anticomutam com as matrizes γ . Isto é,

$$\exp \{-\gamma\rho\} = \exp \left\{ i\gamma \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \exp \{-i\rho\theta\} \Big|_{\theta=0} \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ 1 + i\gamma^\alpha \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} + \frac{1}{2!} \gamma^\alpha \gamma^\beta \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} - \frac{i}{3!} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\xi \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \frac{\partial}{\partial \theta^\beta} \frac{\partial}{\partial \theta^\xi} \right. \\
&\quad \left. + \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \frac{\partial}{\partial \theta^0} \frac{\partial}{\partial \theta^1} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \frac{\partial}{\partial \theta^3} \right\} \\
&\times \left\{ 1 + i\theta^\mu \rho_\mu + \frac{1}{2!} \theta^\mu \theta^\nu \rho_\mu \rho_\nu - \frac{i}{3!} \theta^\mu \theta^\nu \theta^\eta \rho_\mu \rho_\nu \rho_\eta + \theta^0 \theta^1 \theta^2 \theta^3 \rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_3 \right\} \Big|_{\theta=0} \\
&= 1 - \gamma^\alpha \rho_\alpha + \frac{1}{2!} \gamma^\alpha \gamma^\beta \rho_\alpha \rho_\beta - \frac{1}{3!} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\xi \rho_\alpha \rho_\beta \rho_\xi + \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \rho_0 \rho_1 \rho_2 \rho_3.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Juntando as expressões e fazendo as mudanças de variáveis $\zeta^n(\tau) + \theta^n = 2\psi^n(\tau)$, a quantidade (C.6) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
T \exp \left\{ \int_0^1 \rho_n(\tau) \gamma^n d\tau \right\} &= \int D\psi \exp \left\{ \int_0^1 d\tau \left[\psi_n \dot{\psi}_n - \frac{1}{2} \theta_n \dot{\psi}_n - 2i\rho_n \psi_n + i\rho_n \theta^n \right] \right\} \\
&\times \exp \left\{ i\gamma^n \frac{\partial}{\partial \theta^n} \right\} \exp \left\{ -i \int_0^1 \rho_n \theta^n d\tau \right\} \Big|_{\theta=0}. \tag{C.12}
\end{aligned}$$

O termo $T = -\frac{1}{2} \int_0^1 \theta_n \dot{\psi}_n d\tau = -\frac{1}{2} \theta_n [\psi^n(1) - \psi^n(0)]$, mas $\zeta(0) = -\zeta(1)$, então $\theta = \psi(1) + \psi(0)$ e quando $\theta = 0$, $\psi(1) = -\psi(0)$. Assim, $T = \psi_n(1)\psi^n(0)$ e obtemos a expressão (II.30).

Apêndice D

Propriedades das Integrais quase-Gaussianas

A título de ilustração vamos estabelecer algumas propriedades das integrais quase-Gaussianas na álgebra de Berezin (ver [7] para maiores detalhes), mas antes consideremos a definição de integral nesta álgebra e suas propriedades. Introduzimos para isto, o símbolo dz^a e associamos uma paridade ao elemento z^a da álgebra. Por definição, temos

$$\begin{aligned} z^a dz^b &= (-1)^{\mathcal{P}_a \mathcal{P}_b} dz^b z^a, \\ dz^a dz^b &= (-1)^{\mathcal{P}_a \mathcal{P}_b} dz^b dz^a, \end{aligned} \quad (D.1)$$

com $\mathcal{P}_i = 1$, se o elemento for ímpar e $\mathcal{P}_i = 0$, se o elemento for par.

A integral de um elemento de uma álgebra-B, em relação aos elementos geradores $z^{a_1} \dots z^{a_k}$ é

$$I = \int b(z) dz^{a_1} \dots dz^{a_k}.$$

Cada um dos geradores tem uma paridade bem definida, que é a mesma da paridade do elemento diferencial. Dado que a integral é uma operação linear, consideramos separadamente as integrais sobre os elementos pares e ímpares. A integral sobre os elementos pares é a usual:

$$\int B(z) dx^i \dots dx^k$$

com $(-\infty < x^i < \infty)$.

A integral sobre os elementos ímpares é definida de acordo com Berezin, pelas regras

$$\int d\zeta^\alpha = 0, \quad \int \zeta^\alpha d\zeta^\alpha = 1.$$

Se B é um termo que não depende de ζ^{a_1} , indicamos $B(\zeta^{a_1})$, neste caso:

$$\int B(\zeta^{a_1}) d\zeta^{a_1} = 0, \quad \int B(\zeta^{a_1}) \zeta^{a_1} d\zeta^{a_1} = B.$$

D.1 Propriedades da integral de Berezin

D.1.1

A integral sobre geradores ímpares coincide com a derivada à direita. Considere

$$\int B(z) d\zeta^1,$$

e expandindo $B(z)$ em potências de ζ^1 : $B(z) = B_0(\zeta^{a_1}) + \zeta^1 B_1(\zeta^{a_1})$, temos que:

$$\begin{aligned} \int B(z) d\zeta^1 &= \int B_0 d\zeta^1 + \int \zeta^1 B_1 d\zeta^1 \\ &= \int (-1)^{P(B_1)} B_1 \zeta^1 d\zeta^1 \\ &= (-1)^{P(B_1)} B_1. \end{aligned} \tag{D.2}$$

A derivada à direita e à esquerda são definidas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^a} (B_1 B_2) &= (-1)^{P(B_2)P_a} \frac{\partial_r B_1}{\partial z^a} B_2 + B_1 \frac{\partial_r B_2}{\partial z^a}, \\ \frac{\partial_l}{\partial z^a} (B_1 B_2) &= \frac{\partial_l B_1}{\partial z^a} B_2 + (-1)^{P(B_1)P_a} B_1 \frac{\partial_l B_2}{\partial z^a}. \end{aligned} \tag{D.3}$$

Então,

$$\frac{\partial_r B}{\partial \zeta^1} = \frac{\partial_r}{\partial \zeta^1} (B_0 + \zeta^1 B_1) = (-1)^{p(B_1)} B_1$$

e temos que

$$\int B(z) d\zeta^1 = \frac{\partial_r B}{\partial \zeta^1}. \quad (D.4)$$

D.1.2

A integral da derivada total é nula. Para os geradores pares, temos

$$\int \frac{\partial B}{\partial x^i} dx^i = B \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

com ∂ denotando derivada à direita ou à esquerda e B é um termo de superfície que decresce rapidamente em relação a tais geradores. Para os geradores ímpares

$$\int \frac{\partial B}{\partial \zeta^1} d\zeta^1 = \int \frac{\partial}{\partial \zeta^1} (B_0 + \zeta^1 B_1) d\zeta^1,$$

e assim chegamos à

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial_r}{\partial \zeta^1} (B_0 + \zeta^1 B_1) d\zeta^1 &= \int (-1)^{p(B_1)} B_1 d\zeta^1 = 0, \\ \int \frac{\partial_l}{\partial \zeta^1} (B_0 + \zeta^1 B_1) d\zeta^1 &= \int B_1 d\zeta^1 = 0 \end{aligned} \quad (D.5)$$

D.1.3

A propriedade de integração por partes é satisfeita. Da propriedade dois e das definições de derivada à direita e à esquerda, seguem as fórmulas de integração por partes. Assim,

$$\int \frac{\partial_l}{\partial z^{a_1}} (B_1 B_2) dz^{a_1} = \int \frac{\partial_l B_1}{\partial z^{a_1}} B_2 dz^{a_1} + (-1)^{p_{a_1} p(B_1)} \int B_1 \frac{\partial_l B_2}{\partial z^{a_1}} dz^{a_1},$$

e usando a propriedade dois, obtemos

$$\int \frac{\partial_l B_1}{\partial z^{a_1}} B_2 dz^{a_1} = -(-1)^{P_{a_1} P(B_1)} \int B_1 \frac{\partial_l B_2}{\partial z^{a_1}} dz^{a_1}, \quad (D.6)$$

e para a derivada à direita, do mesmo modo, chegamos à

$$\int \frac{\partial_r B_1}{\partial z^{a_1}} B_2 dz^{a_1} = -(-1)^{P_{a_1} P(B_2)} \int B_1 \frac{\partial_r B_2}{\partial z^{a_1}} dz^{a_1}. \quad (D.7)$$

D.1.4

A integral é invariante sob deslocamentos das variáveis de integração. Considere

$$B(z + \gamma) - B(z) = \frac{\partial_r B(z)}{\partial z^a} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2),$$

com $\gamma(\neq 0)$. Os γ são tais que

$$\gamma^a \gamma^b = (-1)^{P_a P_b} \gamma^b \gamma^a, \quad \gamma^a z^b = (-1)^{P_a P_b} z^b \gamma^a.$$

Portanto, temos que

$$\int B(z^{a_1} + \gamma^{a_1}, \dots) dz^{a_1} = \int B(z^{a_1}, \dots) dz^{a_1} + \gamma^{a_1} \int \frac{\partial_r B}{\partial z^{a_1}} dz^{a_1}$$

e usando a propriedade dois, encontramos

$$\int B(z^{a_1} + \gamma^{a_1}, \dots) dz^{a_1} = \int B(z^{a_1}, \dots) dz^{a_1}. \quad (D.8)$$

D.1.5

A integral admite mudanças de variáveis. Considere a mudança de variável não-singular $z^a \rightarrow Z^a(z)$, e as matrizes

$$r_{ab} = \frac{\partial_r Z^a}{\partial z^b}, \quad l_{ab} = \frac{\partial_l Z^b}{\partial z^a},$$

tal que $r^{T_3} = l$ e $l^{T_4} = r$. As operações de transposição T_3 e T_4 são definidas sobre as super-matrizes M que carregam índices pares e ímpares, e têm como elementos: $(M_1)_{ij}$, $(M_2)_{i\beta}$, $(M_3)_{\alpha j}$ e $(M_4)_{\alpha\beta}$:

$$M_{ab}^{T_3} = (-1)^{\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_a \mathcal{P}_b} M_{ba}, \quad M_{ab}^{T_4} = (-1)^{\mathcal{P}_b + \mathcal{P}_a \mathcal{P}_b} M_{ba}.$$

Portanto,

$$\left(\frac{\partial_r Z^a}{\partial z^b} \right)^{T_3} = (-1)^{\mathcal{P}_a(\mathcal{P}_b+1)} \frac{\partial_r Z^b}{\partial z^a}$$

e tendo em conta a propriedade

$$\frac{\partial_l B}{\partial z^a} = \frac{\partial_r B}{\partial z^a} (-1)^{\mathcal{P}_a(\mathcal{P}(B)+1)},$$

obtemos

$$\left(\frac{\partial_r Z^a}{\partial z^b} \right)^{T_3} = \frac{\partial_l Z^b}{\partial z^a} = l_{ab}.$$

Por outro lado, temos a definição de super-traço da matriz M :

$$\text{Str } M^{T_\lambda} = \text{Str } M,$$

tal que para $\lambda = 3, 4$, tem-se que

$$\text{Str } r^{T_3} = \text{Str } r = \text{Str } l.$$

O super-determinante de M é definido

$$\text{Sdet } M = \exp(\text{Str } \ln M)$$

e temos, então

$$\text{Sdet } r = \text{Sdet } l.$$

O Bereziniano da transformação é definido como

$$\text{Ber } Z(z) = \text{Sdet } r = \text{Sdet } l,$$

que é uma extensão do Jacobiano nas integrais usuais, isto é,

$$\int B(z)dz = \int B\{Z(z)\} Ber Z(z)dz.$$

Para uma dupla mudança de variáveis $z^a \rightarrow Z^a(z)$, $Z^a \rightarrow U^a\{Z(z)\} = \varphi^a(z)$, temos que

$$\frac{\partial \varphi^a}{\partial z^b} = \frac{\partial_r U^a}{\partial Z^c} \frac{\partial_r Z^c}{\partial z^b}$$

e o Bereziniano da transformação é:

$$Ber \varphi(z) = Ber U(Z). Ber Z(z).$$

D.1.6

A definição da delta de Dirac é estabelecida. Considere a integral

$$\int \exp\{(z - \gamma)\zeta\} d\zeta$$

com z , γ e ζ ímpares. Expandindo em série de potências, obtemos

$$\int \exp\{(z - \gamma)\zeta\} d\zeta = \int [1 + (z - \gamma)\zeta] d\zeta = z - \gamma.$$

Por outro lado, dado a seguinte integral

$$\int B(z) \exp\{(z - \gamma)\zeta\} d\zeta dz,$$

e a mudança de variável $\bar{z} = z - \gamma$, e tendo em conta que $Ber \bar{z} = Sdet r = 1$, obtemos

$$\int B(z) \exp\{(z - \gamma)\zeta\} d\zeta dz = \int B(\bar{z} + \gamma) \exp\{\bar{z}\zeta\} d\zeta d\bar{z} = \int B(\bar{z} + \gamma) \bar{z} d\bar{z}.$$

Desenvolvendo em série

$$B(\bar{z} + \gamma) = B(\gamma) + \frac{\partial_r B}{\partial \bar{z}} \gamma + \mathcal{O}(\gamma^2),$$

chegamos à

$$I = B(\gamma) \int \bar{z} dz = B(\gamma).$$

Então,

$$I = \int B(z) \exp \{(z - \gamma)\zeta\} d\zeta dz = B(\gamma) = \int B(z) \delta(z - \gamma) dz,$$

e

$$\delta(z - \gamma) = \int \exp \{(z - \gamma)\zeta\} d\zeta = z - \gamma. \quad (\text{D.9})$$

D.1.7

Para a integral da exponencial de matriz entre elementos ímpares

$$I = \int \exp \left\{ \frac{1}{2} \zeta^\alpha A_{\alpha\beta} \zeta^\beta \right\} d\zeta,$$

onde $A_{\alpha\beta}$ é uma matriz com todos os elementos pares, pois $\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\beta = 1$ e $\mathcal{P}(A_{\alpha\beta}) = \mathcal{P}_\alpha + \mathcal{P}_\beta = 0 \pmod{2}$, podemos verificar que só a parte antissimétrica desta matriz contribui para a integral. Por outro lado, sabe-se que para uma matriz antissimétrica $A_{\alpha\beta}^a$ existe uma transformação ortonormal $\zeta \rightarrow \mathcal{O}\zeta$, tal que a matriz $A_0 = \mathcal{O}^T A \mathcal{O}$, obtida por uma transformação de similaridade, é uma matriz de blocos de matrizes 2×2 , com elementos λ e $-\lambda$ na diagonal secundária. A integral, portanto, se fatoriza e temos, por exemplo, para o primeiro fator

$$I_1 = \int d\zeta^1 d\zeta^2 \exp \{-\lambda_1 \zeta^1 \zeta^2\} = \lambda_1,$$

ou seja, $I_i = \lambda_i$ e $I = \prod \lambda_i$. Por outro lado, $\det A = \det A_0 = \prod_i \lambda_i^2$ e

$$I = \prod \lambda_i = \sqrt{\det A}. \quad (\text{D.10})$$

A integral Gaussiana na álgebra-B, pode ser obtida seguindo-se as regras acima de integração. Neste caso, temos

$$I_G(J) = \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} z^a M_{ab} z^b + J_a z^a \right\} Dz, \quad (D.11)$$

com $J_a J_b = (-1)^{p_a p_b} J_b J_a$, $z^a J_b = (-1)^{p_a p_b} J_b z^a$ e M_{ab} é uma super-matriz não-singular independente de z^a .

A parte de M que contribui é $M^{s_1} = \frac{M+M^{T_1}}{2}$, a qual tem os seguintes elementos M_1 , M_2 , $-M_2^T$ e M_4 , com T_1 e T_2 transposições definidas como $M_{ab}^{T_1} = (-1)^{p_a+p_b+p_a p_b} M_{ba}$, $M_{ab}^{T_2} = (-1)^{p_a p_b} M_{ba}$ e $M_1^T = M_1$, $M_4^T = M_4$. Por outro lado, fazendo o deslocamento $z^a = z^a + \Lambda^{ab} J_b$, com $\Lambda^{ab} = (M^{s_1})_{ab}^{-1} (-1)^{p_b}$, $\Lambda^{T_1} = \Lambda$ e $(M^{-1})^{T_2} = M^{-1}$, a integral Gaussiana se reduz à

$$I_G = \exp \left\{ \frac{1}{2} J \Lambda J \right\} I_0, \quad (D.12)$$

onde

$$I_0 = \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} z M z \right\} Dz.$$

Agora, levando-se em conta

$$I_0 = \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} x M_1 x - x M_2 \zeta - \frac{1}{2} \zeta M_4 \zeta \right\} Dz,$$

mais o deslocamento $y = x + (M_1)^{-1} M_2 \zeta$ e a definição $A = M_4 + M_2^T (M_1)^{-1} M_2 = M_4 - M_3 (M_1)^{-1} M_2 = -A^T$, chegamos ao seguinte resultado

$$\begin{aligned} I_0 &= \int \exp \left\{ -\frac{1}{2} y M y - \frac{1}{2} \zeta A \zeta \right\} Dz \\ &= (2\pi)^{\frac{\nu}{2}} \left(\frac{\det M_1}{\det A} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (2\pi)^{\frac{\nu}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det M^{s_1}}}, \end{aligned} \quad (D.13)$$

onde ν é o número de elementos geradores pares de z .

A integral Gaussiana na álgebra-B assume a seguinte forma

$$I_G = (2\pi)^{\frac{\nu}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det M^{s_1}}} \exp \left\{ \frac{1}{2} J \Lambda J \right\}. \quad (D.14)$$

Uma outra definição de integral funcional que é suficiente para teoria de perturbação em Teoria Quântica de Campos, com todas as propriedades da integral padrão, é a integral quase-Gaussiana:

$$\mathcal{Z}(J) = \int F(z) \exp \left\{ \frac{1}{2} z^a M_{ab} z^b + J_a z^a \right\} Dz, \quad (\text{D.15})$$

onde $F(z)$ é suposta poder ser escrita em série de potências de z :

$$F(z) = F_0 + F_a z^a + F_{ab} z^a z^b + \dots,$$

onde os coeficientes $F_0, F_a, F_{ab}, \dots$ não dependem de z^a e a super-matriz M é T_1 -simétrica e possui inversa. O índice $a = (A, t)$ é definido para A discreto e t contínuo. Assim, $z^a f_a = \int dt z^A(t) f_A(t)$. Se $F(z) = 1$, a integral é Gaussiana. De acordo com a definição, a integral $\mathcal{Z}$ é igual a

$$\mathcal{Z} = F \left(\frac{\delta_l}{i\delta J} \right) \mathcal{Z}_0, \quad (\text{D.16})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_0 &= \int \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2} z^a M_{ab} z^b + J_a z^a \right) \right\} Dz \\ &= \text{Sdet}^{-\frac{1}{2}} M \exp \left\{ -\frac{i}{2} J_a \Lambda^{ab} J_b \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

com $\Lambda^{ab} = \Sigma^{ab}(-1)^{P_b}$, $\Sigma^{ab} M_{bc} = \delta_c^a$ e $\delta_c^a = \delta_C^A \delta(t_1 - t_2)$ para $a = A, t_1$; $c = C, t_2$.

O fator numérico é omitido porque em T.Q.C lidamos somente com quantidades normalizadas. Supõem-se então, que a operação de diferenciação em relação a J_a comuta com o sinal da integral, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\delta_l}{i\delta J_a} \mathcal{Z}_0 &= \int \frac{\delta_l}{i\delta J_a} \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2} z^a M_{ab} z^b + J_a z^a \right) \right\} Dz \\ &= \int z^a \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2} z^a M_{ab} z^b + J_a z^a \right) \right\} Dz. \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

Então, temos:

$$\begin{aligned}
 F\left(\frac{\delta_l}{i\delta J}\right) Z_0 &= \int \left\{ F_0 + F_a \frac{\delta_l}{i\delta J_a} + F_{ab} \frac{\delta_l^2}{i\delta J_a i\delta J_b} + \dots \right\} \\
 &\quad \times \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2} z^a M_{ab} z^b + J_a z^a \right) \right\} Dz \\
 &= \int (F_0 + F_a z^a + F_{ab} z^a z^b + \dots) \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2} z^a M_{ab} z^b + J_a z^a \right) \right\} Dz \\
 &= \int F_{qG} Dz. \tag{D.19}
 \end{aligned}$$

Neste caminho, a integral quase-Gaussiana tem as seguintes propriedades:

1. A integral funcional pode ser considerada como uma integral múltipla, isto é,

$$\int F_{qG}(z_1, z_2, J) Dz_1 Dz_2 = \int \left(\int F_{qG}(z_1, z_2, J) Dz_1 \right) Dz_2. \tag{D.20}$$

2. A integral é invariante sob deslocamentos das variáveis de integração,

$$\int F_{qG}(z + \gamma, J) Dz = \int F_{qG}(z, J) Dz. \tag{D.21}$$

3. A integral da derivada total é nula,

$$\int \frac{\partial_{l,r}}{\partial z^a} F_{qG} Dz = 0. \tag{D.22}$$

4. Se o integrando depende de um parâmetro α , então

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int F_{qG}(z, J, \alpha) Dz = \int \frac{\partial}{\partial \alpha} F_{qG}(z, J, \alpha) Dz. \tag{D.23}$$

5. A fórmula de mudança de variável é satisfeita,

$$\int F_{qG}(z, J) Dz = \int F_{qG}\{Z(z), J\} Ber Z(z) Dz. \tag{D.24}$$

6. A definição da funcional não depende da maneira como separamos o fator Gaussiano, isto é, considere $M = M_1 + \Delta M$, $M_1^{T_1} = M_1$, M_1 possui inversa, então

$$\begin{aligned} F_{qG}(z, J) &= F(z) \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2} z M z + J z \right) \right\} \\ &= F_{1M_1}(z, J) \equiv F_1(z) \exp \left\{ i \left(\frac{1}{2} z M_1 z + J z \right) \right\}, \end{aligned} \quad (D.25)$$

onde

$$F_1(z) = F(z) \exp \left\{ \frac{i}{2} z \Delta M z \right\}.$$

Assim,

$$\int F_{qG}(z, J) Dz = \int F_{1M_1}(z, J) Dz. \quad (D.26)$$

7. A função $\delta(Z(z))$ é estabelecida de acordo com a expressão

$$\int F_{qG}(z, J) \delta(Z(z)) Dz = \frac{1}{\text{Ber} Z(z)} F_M(z, J) \Big|_{z=z_0}, \quad (D.27)$$

onde z_0 é uma solução da equação $Z(z) = 0$.

Segue a seguinte definição para a função- δ

$$\begin{aligned} \delta(Z(z)) &= \int \exp \{ i p_a Z^a(z) \} Dp \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int \exp \left\{ i \left(p_a Z^a(z) + \frac{\alpha}{2} p_a Q^{ab} p_b \right) \right\} Dp \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\text{Sdet } Q}} \exp \left\{ -\frac{i}{2\alpha} Z^a \Lambda_{ab} Z^b \right\}, \end{aligned} \quad (D.28)$$

onde Q é uma matriz não-singular, arbitrária e T_1 -simétrica, com $\Lambda_{ab}(-1)^{p_b} Q^{bc} = \delta_a^c$.

Apêndice E

Cálculo da matriz inversa $\Omega(g, \tau, \tau')$

Vamos calcular a matriz inversa de

$$L(\tau, \tau'') = \delta(\tau - \tau'') - \frac{\mathcal{F}}{2} \epsilon(\tau - \tau''), \quad (\text{E.1})$$

com $\mathcal{F} = ge_0 F$.

Dado que

$$\int_0^1 L_{\mu\nu}(\tau, \tau'') \Omega^{\nu\beta}(\tau'', \tau') d\tau'' = \delta_\mu^\beta \delta(\tau - \tau'), \quad (\text{E.2})$$

então:

$$\Omega_{\mu\nu}(\tau, \tau') - \frac{\mathcal{F}_\mu^\alpha}{2} \int_0^1 \epsilon(\tau - \tau'') \Omega_{\alpha\nu}(\tau'', \tau') d\tau'' = \eta_{\mu\nu} \delta(\tau - \tau') \quad (\text{E.3})$$

e para $\tau = 0$, temos

$$\Omega_{\mu\nu}(0, \tau') + \frac{\mathcal{F}_\mu^\alpha}{2} \int_0^1 \Omega_{\alpha\nu}(\tau'', \tau') d\tau'' = \eta_{\mu\nu} \delta(\tau'), \quad (\text{E.4})$$

como condição inicial da equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Omega_{\mu\nu}(\tau, \tau') - \mathcal{F}_\mu^\alpha \Omega_{\alpha\nu}(\tau, \tau') = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - \tau'), \quad (\text{E.5})$$

com solução para a equação homogênea dada por $\Omega_0 = \exp\{\mathcal{F}\tau\} c(\tau')$. A solução geral é do tipo $\Omega(\tau, \tau') = \exp\{\mathcal{F}\tau\} c(\tau, \tau')$, e substituindo esta última em (E.5), obtemos

$$c(\tau, \tau') = \int_0^\tau \exp\{-\mathcal{F}\tau''\} \frac{\partial}{\partial \tau''} \delta(\tau'' - \tau') d\tau'' + c(\tau') \quad (\text{E.6})$$

e como $\Omega(0, \tau') = c(\tau')$, chegamos à

$$\begin{aligned} \Omega(\tau, \tau') &= \exp\{\mathcal{F}\tau\} [c(\tau') - \delta(\tau')] + \delta(\tau - \tau') \\ &\quad + \mathcal{F}\theta(\tau - \tau') \exp\{\mathcal{F}(\tau - \tau')\}. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Substituindo (E.7) em (E.4), obtemos

$$c(\tau') - \delta(\tau') = -[1 + \exp\mathcal{F}]^{-1} \{\mathcal{F} \exp\mathcal{F}(\tau - \tau')\}, \quad (\text{E.8})$$

e (E.8) em (E.7), chegamos ao resultado

$$\Omega(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') + \frac{\mathcal{F}}{2} \exp\mathcal{F}(\tau - \tau') \left[\epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \right] \quad (\text{E.9})$$

Vamos aproveitar a oportunidade e calcular outras quantidades derivadas de $\Omega(\tau, \tau')$.

E.1 Cálculo de $Q(\tau') = \int_0^1 \Omega(\tau, \tau') d\tau$

Substituindo $\Omega(\tau, \tau')$, temos

$$\begin{aligned} Q(\tau') &= \int_0^1 \left\{ \delta(\tau - \tau') + \frac{\mathcal{F}}{2} \exp\mathcal{F}(\tau - \tau') \left[\epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \right] \right\} d\tau' \\ &= 1 + \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \sinh \frac{\mathcal{F}}{2} \exp\left\{\frac{\mathcal{F}}{2}\right\} \exp\{-\mathcal{F}\tau'\} \\ &\quad + \cosh \frac{\mathcal{F}}{2} \exp\left\{\frac{\mathcal{F}}{2}\right\} \exp\left\{-\frac{\mathcal{F}}{2}\right\} - 1 \\ &= \left\{ \cosh \frac{\mathcal{F}}{2} \right\}^{-1} \left[\exp\left\{\frac{\mathcal{F}}{2}\right\} \exp\{-\mathcal{F}\tau'\} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

E.2 Cálculo de $l(g) = \int d\tau d\tau' \Omega(g, \tau, \tau')$

Substituindo $\Omega(\tau, \tau')$, obtemos os seguintes termos:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int \int \delta(\tau - \tau') d\tau d\tau', \\
 T_2 &= \int \frac{\mathcal{F}}{2} \exp\{\mathcal{F}(\tau - \tau')\} \epsilon(\tau - \tau') d\tau d\tau' \\
 &= \int \int \frac{\mathcal{F}}{2} \exp\{\mathcal{F}(\tau - \tau')\} [\theta(\tau - \tau') - \theta(\tau' - \tau)] d\tau d\tau' \\
 &= \int_0^1 \int_0^\tau \frac{\mathcal{F}}{2} \exp\{\mathcal{F}(\tau - \tau')\} d\tau d\tau' - \int_0^1 \int_\tau^1 \frac{\mathcal{F}}{2} \exp\{\mathcal{F}(\tau - \tau')\} d\tau d\tau' \\
 &= (2\mathcal{F})^{-1} [\exp\{\mathcal{F}\} - \exp\{-\mathcal{F}\}] - 1, \\
 T_3 &= - \int \int \frac{\mathcal{F}}{2} \exp\{\mathcal{F}(\tau - \tau')\} \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} d\tau d\tau' \\
 &= -(2\mathcal{F})^{-1} \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \{\exp[\mathcal{F}] + \exp[-\mathcal{F}] - 2\}. \tag{E.11}
 \end{aligned}$$

Então, $l(g) = T_1 + T_2 + T_3$, isto é,

$$\begin{aligned}
 l(g) &= 1 + (2\mathcal{F})^{-1} [\exp\{\mathcal{F}\} - \exp\{-\mathcal{F}\}] - 1 \\
 &\quad - (2\mathcal{F})^{-1} [\exp\{\mathcal{F}\} + \exp\{-\mathcal{F}\}] \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \\
 &= (\mathcal{F})^{-1} \sinh \mathcal{F} \left[1 - \tanh^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \right] \\
 &= \left(\frac{\mathcal{F}}{2} \right)^{-1} \tanh \frac{\mathcal{F}}{2}, \tag{E.12}
 \end{aligned}$$

onde usamos a relação trigonométrica

$$1 - \tanh^2 \frac{x}{2} = 2[\sinh(x)]^{-1} \tanh \frac{x}{2}.$$

E.3 Cálculo de $K(\tau, \tau')$

Substituindo as expressões de $\Omega(\tau, \tau')$, $Q(\tau)$ e $l(g)$ em

$$K(\tau, \tau') = \Omega(\tau, \tau') - Q^T(\tau) l^{-1}(g) Q(\tau') \tag{E.13}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta(\tau - \tau') + \frac{\mathcal{F}}{2} \exp \{ \mathcal{F}(\tau - \tau') \} \left[\epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \right] \\
&\quad - \frac{\mathcal{F}}{2} \coth \frac{\mathcal{F}}{2} \left[\coth^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \right]^{-1} \exp \mathcal{F}(\tau - \tau') \\
&= \delta(\tau - \tau') + \frac{\mathcal{F}}{2} \exp \{ \mathcal{F}(\tau - \tau') \} \left\{ \epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \right. \\
&\quad \left. - \left[\cosh^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \right]^{-1} \coth \frac{\mathcal{F}}{2} \right\} \\
&= \delta(\tau - \tau') + \frac{\mathcal{F}}{2} \exp \{ \mathcal{F}(\tau - \tau') \} \left\{ \epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \right. \\
&\quad \left. - \coth \frac{\mathcal{F}}{2} \left[1 - \tanh^2 \frac{\mathcal{F}}{2} \right] \right\} \\
&= \delta(\tau - \tau') + \frac{\mathcal{F}}{2} \exp \{ \mathcal{F}(\tau - \tau') \} \left[\epsilon(\tau - \tau') - \coth \frac{\mathcal{F}}{2} \right].
\end{aligned} \tag{E.14}$$

E.4 Cálculo do traço da quantidade AB

O traço $\text{Tr } AB$ é definido como

$$\text{Tr } AB = \int d\tau d\tau' A(\tau, \tau') B(\tau', \tau),$$

onde $A = \Omega(\tau, \tau')$ e $B = M(\tau', \tau)$. Substituindo as expressões correspondentes, verificamos que o primeiro termo não contribui, o segundo termo resulta na expressão

$$E_2 = -(2g')^{-1} \tanh \frac{\mathcal{F}'}{2} \sinh \mathcal{F}' + \frac{e_0 F}{2} \tanh \frac{\mathcal{F}'}{2},$$

com $\mathcal{F}' = g' e_0 F$ e o terceiro resulta em

$$E_3 = (2g')^{-1} [1 - \cosh \mathcal{F}'].$$

Então,

$$\begin{aligned}
\text{Tr } AB &= -(2g')^{-1} \tanh \frac{\mathcal{F}'}{2} \sinh \mathcal{F}' + \frac{e_0 F}{2} \tanh \frac{\mathcal{F}'}{2} \\
&\quad + (2g')^{-1} [1 - \cosh \mathcal{F}'] \\
&= \frac{e_0 F}{2} \tanh \frac{g' e_0 F}{2}.
\end{aligned} \tag{E.15}$$

Assim, podemos calcular a quantidade

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{Det } L(g)}{\text{Det } L(0)} &= \exp \text{tr} \left\{ \int_0^g dg' \left(\frac{e_0 F}{2} \right) \tanh \frac{g' e_0 F}{2} \right\} \\
 &= \exp \text{tr} \ln \left[\cosh \frac{g e_0 F}{2} \right] \\
 &= \det \cosh \frac{g e_0 F}{2}.
 \end{aligned} \tag{E.16}$$

Apêndice F

Cálculo dos autovetores isotrópicos $n, \bar{n}, l, \bar{l}$

Dado que o vetor de onda n_μ satisfaz $F_{\mu\nu}n^\nu = Fn_\mu$, onde F é um autovetor do tensor $F_{\mu\nu}$, temos que

$$\det(F_{\mu\nu} - F\delta_{\mu\nu}) = 0,$$

então $F^4 + 2\mathcal{F}F^2 - \mathcal{G}^2 = 0$ e $F = \pm\sqrt{-\mathcal{F} \pm \sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2}}$, com $\mathcal{F} = \frac{1}{2}(H^2 - E^2)$ e $\mathcal{G} = E.H$.

Escolhendo, $n_3 = n_0 = 0$ e $n_1, n_2 \neq 0$, encontramos

$$Fn_0 = F_{00}n^j + F_{ij}n^j = F_{ij}n^j, \quad Fn_i = F_{i0}n^0 + F_{ij}n^j = F_{ij}n^j,$$

então

$$Fn_1 = F_{11}n^1 + F_{12}n^2 + F_{13}n^3 = \epsilon_{123}\mathcal{H}_3n^2 = \mathcal{H}_3n^2$$

e

$$Fn_2 = F_{21}n^1 + F_{22}n^2 + F_{23}n^3 = \epsilon_{213}\mathcal{H}_3n^1 = \mathcal{H}_3n^1,$$

onde usamos $F_{ij} = \epsilon_{ijk}\mathcal{H}_k$. Portanto, $n_2n^2 = -n_1n^1$, isto é, $n_y = \pm in_x$ e $F = \mp i\mathcal{H}$. Os autovetores l_μ tem componentes, $l_0 = 0$, $l_x = 1$, $l_y = \pm il_x = \pm i$, e $l_z = 0$.

Escolhendo, agora, $n_1 = n_2 = 0$ e $n_3, n_0 \neq 0$, temos

$$Fn_0 = F_{00}n^0 + F_{0j}n^j = F_{01}n^1 + F_{02}n^2 + F_{03}n^3 = F_{03}n^3,$$

$$Fn_i = F_{10}n^0 + F_{ij}n^j$$

$$\text{e } Fn_3 = F_{30}n^0 + F_{31}n^1 + F_{32}n^2 + F_{33}n^3 = F_{30}n^0.$$

Então, $Fn^0n_3 = F_{03}n^3n_3 = F_{30}(n_3)^2$ e $Fn_3n^0 = F_{30}(n_0)^2$, isto é, $n_z = \pm n_0$ e $F = \pm \mathcal{E}$. Os autovetores n_μ têm componentes, $n_0 = 1$, $n_x = 0$, $n_y = 0$ e $n_z = \pm n_0 = \pm 1$.

Os autovalores $F = +i\mathcal{H}$ e $F = +\mathcal{E}$, nos dá que para $F = i\sqrt{-\mathcal{F} \pm \sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2}}$, temos

$$F = +i\sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} + \mathcal{F}}$$

e

$$F = \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} - \mathcal{F}},$$

portanto, as intensidades dos campos são dadas por:

$$\mathcal{H} = \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} + \mathcal{F}}$$

e

$$\mathcal{E} = \sqrt{\sqrt{\mathcal{F}^2 + \mathcal{G}^2} - \mathcal{F}}.$$

Verificamos então que, para o sistema de referência escolhido, no qual as quantidades $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ não se anulam simultaneamente e o fluxo de energia é nulo, o autovetor l_μ tem componentes no plano perpendicular à direção dos campos elétrico e magnético. Como $l_0 = 0$, a componente imaginária de l_μ garante que o mesmo é isotrópico. Por outro lado, o autovetor n_μ , tem componente n_0 e uma componente ao longo da direção dos campos elétrico e magnético. Este autovetor é real e isotrópico. As condições (III.39) são, portanto, satisfeitas.

Apêndice G

Integração sobre as velocidades: caso da partícula espinorial

Para calcular o propagador num campo constante, considere agora, a seguinte expressão (observe que aqui detalhamos algumas passagens que também ocorrem no caso da partícula escalar):

$$I_v = \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau \right) \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} - g(\sqrt{e_0}v + \Delta x) A(\sqrt{e_0} \int v(\tau') d\tau' + x_{in} + \tau \Delta x) \right] \right\}$$

e deslocando $v \rightarrow v - \frac{\Delta x}{\sqrt{e_0}}$, obtemos

$$I_v = \exp \left(\frac{i\Delta x^2}{2e_0} \right) \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau - \frac{\Delta x}{\sqrt{e_0}} \right) \times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{v^2}{2} - g\sqrt{e_0}v A(\sqrt{e_0} \int_0^\tau v(\tau') d\tau' + x_{in}) \right] \right\}$$

Dado que o campo constante é da seguinte forma $A_\mu(x) = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu$. Então,

$$I_v = \exp \left(\frac{i\Delta x^2}{2e_0} \right) \int \mathcal{D}v \delta^4 \left(\int v d\tau - \frac{\Delta x}{\sqrt{e_0}} \right) \times \exp \left\{ i \int d\tau \left[-\frac{1}{2}v_\mu(\tau)v^\mu(\tau') + \frac{1}{4}ge_0v^\mu(\tau)F_{\mu\nu} \int \epsilon(\tau - \tau')v^\nu(\tau')d\tau' \right] \right\} \times \exp \left\{ \frac{i}{2}g\sqrt{e_0}F x_{in} \int v d\tau \right\},$$

e substituindo a função- δ por uma representação conveniente (omitimos o fator constante já que se cancela mais adiante):

$$I_v = \exp\left(\frac{i\Delta x^2}{2e_0}\right) \int dp \exp\left\{-i\frac{p\cdot\Delta x}{\sqrt{e_0}}\right\} \int \mathcal{D}v \exp\left\{-\frac{i}{2} \int v^\mu L_{\mu\nu} v^\nu d\tau d\tau'\right\} \\ \times \exp\left\{i \int \left(\frac{g\sqrt{e_0}}{2}(Fx_{in})_\mu + p_\mu\right)v^\mu d\tau\right\},$$

com

$$L_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\delta(\tau - \tau') - \frac{ge_0}{2}F_{\mu\nu}\epsilon(\tau - \tau').$$

Neste ponto, introduzimos as fontes j_μ associadas a v_μ :

$$I_v = \exp\left(\frac{i\Delta x^2}{2e_0}\right) \int dp \exp\left\{-i\frac{p\cdot\Delta x}{\sqrt{e_0}}\right\} \int \mathcal{D}v \exp\left\{-\frac{i}{2} \int v^\mu L_{\mu\nu} v^\nu d\tau d\tau'\right\} \\ \times \exp\left\{i \int (j_\mu + \pi_\mu)v^\mu d\tau\right\}\Big|_{j=0},$$

onde $\pi = p + \frac{1}{2}g\sqrt{e_0}(Fx_{in})$.

Portanto,

$$I_v = \exp\left(\frac{i\Delta x^2}{2e_0}\right) \int d\pi \exp\left\{-i\frac{\pi\cdot\Delta x}{\sqrt{e_0}}\right\} \int \mathcal{D}v \exp\left\{-\frac{i}{2} \int v^\mu L_{\mu\nu} v^\nu d\tau d\tau'\right\} \\ \times \exp\left\{\frac{i}{2}g\Delta x Fx_{in}\right\} \exp\left\{i \int (j_\mu + \pi_\mu)v^\mu d\tau\right\}\Big|_{j=0},$$

e fazendo o deslocamento $v \rightarrow v + L^{-1}(j + \pi)$, segue que:

$$I_v = \exp\left(\frac{i\Delta x^2}{2e_0}\right) \int d\pi \exp\left\{-i\frac{\pi\cdot\Delta x}{\sqrt{e_0}}\right\} \int \mathcal{D}v \exp\left\{-\frac{i}{2} \int v^\mu L_{\mu\nu} v^\nu d\tau d\tau'\right\} \\ \times \exp\left\{\frac{i}{2} \int (j_\mu + \pi_\mu)(L^{-1})^{\mu\nu}(j_\nu + \pi_\nu)d\tau d\tau'\right\} \exp\left\{\frac{i}{2}g\Delta x Fx_{in}\right\}\Big|_{j=0},$$

isto é,

$$I_v = \exp\left(\frac{i\Delta x^2}{2e_0}\right) \int \mathcal{D}v \exp\left\{-\frac{i}{2} \int v^\mu L_{\mu\nu} v^\nu d\tau d\tau'\right\} \int d\pi \\ \times \exp\left\{\frac{i}{2} \pi_\mu Q^{\mu\nu} \pi_\nu + i\pi_\mu f^\mu\right\} \exp\left\{\frac{i}{2} g x_{out} F x_{in}\right\} \Big|_{j=0},$$

onde

$$\pi_\mu Q^{\mu\nu} \pi_\nu = \int \pi_\mu(\tau) (L^{-1})^{\mu\nu}(\tau, \tau') \pi_\nu(\tau') d\tau d\tau'$$

e

$$\pi_\mu f^\mu = \int \pi_\mu(\tau) (L^{-1})^{\mu\nu}(\tau, \tau') j_\nu(\tau') d\tau d\tau',$$

são notações compactas assumidas daqui em diante.

Fazendo agora, o deslocamento $\pi \rightarrow \pi + Q^{-1}f$, obtemos:

$$I_v = \exp\left(\frac{i\Delta x^2}{2e_0}\right) \int \mathcal{D}v \exp\left\{-\frac{i}{2} \int v^\mu L_{\mu\nu} v^\nu d\tau d\tau'\right\} \int d\pi \exp\left\{\frac{i}{2} \pi Q \pi\right\} \\ \times \exp\left\{-\frac{i}{2} \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{e_0}} - \int_0^1 L^{-1}(\tau, \tau') j(\tau') d\tau d\tau'\right)\right. \\ \left. \times Q^{-1} \left(\frac{\Delta x}{\sqrt{e_0}} - \int_0^1 L^{-1}(\tau, \tau') j(\tau') d\tau d\tau'\right)\right\} \Big|_{j=0}.$$

Por outro lado, temos que:

$$Q = \int Q(\tau') d\tau' = \frac{2}{ge_0 F} \tanh \frac{ge_0 F}{2},$$

e

$$\int L^{-1}(\tau, \tau') j(\tau') d\tau d\tau' = \frac{e^{\frac{ge_0 F}{2}}}{\cosh \frac{ge_0 F}{2}} \int_0^1 e^{-ge_0 F \tau'} j(\tau') d\tau'.$$

Portanto,

$$I_v = \exp\left(\frac{i\Delta x^2}{2e_0}\right) \int \mathcal{D}v \exp\left\{-\frac{i}{2} \int v^\mu L_{\mu\nu} v^\nu d\tau d\tau'\right\} \int d\pi \exp\left\{\frac{i}{2} \pi Q \pi\right\} \\ \times \exp\left\{\frac{i}{2} g x_{out} F x_{in} - \frac{i}{2e_0} \Delta x Q^{-1} \Delta x\right\} \\ \times \exp\left\{\frac{i}{2} \int_0^1 j(\tau) K(\tau, \tau') j(\tau') d\tau d\tau' + i \int_0^1 a(\tau) j(\tau) d\tau\right\} \Big|_{j=0},$$

onde

$$K(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') + \frac{1}{2} g e_0 F e^{g e_0 F(\tau - \tau')} \left[\epsilon(\tau - \tau') - \coth \frac{g e_0 F}{2} \right]$$

e

$$a(\tau) = \frac{g e_0 F \Delta x}{2\sqrt{e_0}} \left(1 + \coth \frac{g e_0 F}{2} \right) e^{-g e_0 F \tau}.$$

A expressão final para I_v tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_v = & \exp \left(\frac{i \Delta x^2}{2 e_0} \right) \int \mathcal{D}v \exp \left\{ -\frac{i}{2} \int v^\mu L_{\mu\nu} v^\nu d\tau d\tau' \right\} \int d\pi \exp \left\{ \frac{i}{2} \pi Q \pi \right\} \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{2} g x_{out} F x_{in} - \frac{i}{4} \Delta x g F \coth \frac{g e_0 F}{2} \Delta x \right\} \\ & \times \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 j(\tau) K(\tau, \tau') j(\tau') d\tau d\tau' + i \int_0^1 a(\tau) j(\tau) d\tau \right\} \Big|_{j=0} \quad (G.1) \end{aligned}$$

Neste ponto observamos que, na expressão (IV.20), devemos substituir v_α por $\frac{\delta}{i\delta j_\alpha}$. Assim, (IV.20) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Phi(e_0) = & \left\{ m + \frac{1}{2\sqrt{e_0}} a K (2 - g e_0 F K) \gamma - \frac{i}{4} g m e_0 (F K)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right. \\ & \left. - \frac{i}{4} g \sqrt{e_0} a K \gamma (F K)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \frac{1}{16} m e_0^2 g^2 (F K)_{\mu\nu}^* (F K)^{\mu\nu} \gamma^5 \right\} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g \text{Tr}(GF) dg' \right\}. \quad (G.2) \end{aligned}$$

Apêndice H

Cálculo das funções $\Gamma_{\alpha\beta}(\tau, \tau')$ e $G_{\alpha\beta}(\tau, \tau')$

Aqui, a inversa de $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}$, é definida através da seguinte matriz:

$$\Gamma_{\alpha\beta}(\tau, \tau') = \int \epsilon(\tau - \lambda) (\tilde{\Lambda}^{-1})_{\alpha\beta}(\lambda, \tau') d\lambda \quad (\text{H.1})$$

e a função $G_{\alpha\beta}(\tau, \tau')$ é dada pela relação:

$$G_{\alpha\beta}(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \int \Gamma_{\alpha\beta}(\tau, \lambda') \epsilon(\lambda' - \tau') d\lambda', \quad (\text{H.2})$$

onde

$$\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta}(\tau, \tau') = \epsilon(\tau - \tau') \eta_{\alpha\beta} - e_0 \tilde{g} \int \epsilon(\tau - \tau'') F_{\alpha\beta} \epsilon(\tau'' - \tau') d\tau''. \quad (\text{H.3})$$

Uma vez que,

$$\int \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}(\tau, \tau'') (\tilde{\Lambda}^{-1})^{\nu\beta}(\tau'', \tau') d\tau'' = \delta_{\mu}^{\beta} \delta(\tau - \tau'), \quad (\text{H.4})$$

encontramos

$$\Gamma_{\mu\nu}(\tau, \tau') - e_0 \tilde{g} \int \epsilon(\tau - \lambda) F_{\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}(\lambda, \tau') d\lambda = \eta_{\mu\nu} \delta(\tau - \tau'). \quad (\text{H.5})$$

Esta equação é equivalente à equação diferencial

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma_{\mu\nu}(\tau, \tau') - 2e_0 \tilde{g} \int \delta(\tau - \lambda) F_{\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}(\lambda, \tau') d\lambda = \eta_{\mu\nu} \delta'(\tau - \tau'), \quad (\text{H.6})$$

com condição inicial dada por:

$$\Gamma_{\mu\nu}(0, \tau') + e_0 \tilde{g} \int_0^1 F_{\mu}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\nu}(\lambda, \tau') d\lambda = \eta_{\mu\nu} \delta(\tau). \quad (\text{H.7})$$

De (H.6), temos:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Gamma(\tau, \tau') - \mathcal{F} \Gamma(\tau, \tau') = \delta'(\tau - \tau'), \quad (\text{H.8})$$

onde $\mathcal{F} = 2e_0 \tilde{g} F$.

A solução da equação homogênea é $\Gamma_0(\tau, \tau') = e^{\mathcal{F}\tau} c(\tau')$ e como solução geral temos $\Gamma(\tau, \tau') = e^{\mathcal{F}\tau} c(\tau, \tau')$. Então, usando (H.8), encontramos:

$$c'(\tau, \tau') = e^{-\mathcal{F}\tau} \delta'(\tau - \tau')$$

e

$$c(\tau, \tau') = \int_0^{\tau} e^{-\mathcal{F}\tau''} \frac{\partial}{\partial \tau''} \delta(\tau'' - \tau') d\tau'' + c(\tau').$$

Assim, a solução $\Gamma(\tau, \tau')$, neste estágio, vem dada por:

$$\Gamma(\tau, \tau') = e^{\mathcal{F}\tau} c(\tau') + \delta(\tau - \tau') - e^{\mathcal{F}\tau} \delta(\tau') + \mathcal{F} e^{\mathcal{F}\tau} \int_0^{\tau} e^{-\mathcal{F}\tau''} \delta(\tau'' - \tau') d\tau'',$$

onde o último termo só contribui quando $\tau > \tau'$, portanto, obtemos

$$\Gamma(\tau'', \tau') = e^{\mathcal{F}\tau''} [c(\tau') - \delta(\tau')] + \delta(\tau'' - \tau') + \mathcal{F} \theta(\tau'' - \tau') e^{\mathcal{F}(\tau'' - \tau')}. \quad (\text{H.9})$$

Usando, agora, a condição inicial (H.7):

$$\Gamma(0, \tau') + \frac{\mathcal{F}}{2} \int_0^1 \Gamma(\tau'', \tau') d\tau'' = \delta(\tau'),$$

e tendo em conta que $\Gamma(0, \tau') = c(\tau')$, encontramos

$$c(\tau') - \delta(\tau') = -\frac{\mathcal{F}e^{\mathcal{F}}e^{-\mathcal{F}\tau'}}{1 + e^{\mathcal{F}}}. \quad (\text{H.10})$$

Substituindo (H.10) em (H.9), obtemos

$$\Gamma(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau') + \frac{\mathcal{F}}{2}e^{\mathcal{F}(\tau-\tau')} \left[\epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \right]. \quad (\text{H.11})$$

Substituindo, agora, (H.11) em (H.2), encontramos para a função $G(\tau, \tau')$ a expressão:

$$\begin{aligned} G(\tau, \tau') &= \frac{\mathcal{F}}{4} \int e^{\mathcal{F}(\tau-\lambda')} \left[\epsilon(\tau - \lambda') - \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \right] \epsilon(\lambda' - \tau') d\lambda' \\ &= \frac{1}{2}e^{\mathcal{F}(\tau-\tau')} \left[\epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \right], \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

onde este último resultado foi obtido integrando-se em λ , tal que no primeiro termo da expressão o mesmo varia nos intervalos $[\tau, \tau']$ e $[\tau', \tau]$, e dá a contribuição

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2}{\mathcal{F}}e^{\mathcal{F}(\tau-\tau')} [\theta(\tau - \tau') - \theta(\tau' - \tau)] \\ &= \frac{2}{\mathcal{F}}e^{\mathcal{F}(\tau-\tau')} \epsilon(\tau - \tau'), \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

e no segundo termo a variação de λ é a mesma, assim encontramos

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{2}{\mathcal{F}}e^{\mathcal{F}(\tau-\tau')} [\theta(\tau - \tau') + \theta(\tau' - \tau)] \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \\ &= \frac{2}{\mathcal{F}}e^{\mathcal{F}(\tau-\tau')} \tanh \frac{\mathcal{F}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

Observamos aqui que, se se toma a derivada parcial em relação a τ da expressão (H.1) temos que a inversa é dada por:

$$\tilde{\Lambda}^{-1}(\tau, \tau') = \frac{1}{2} \frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \delta(\tau - \tau') + \frac{\mathcal{F}^2}{4} e^{\mathcal{F}(\tau - \tau')} \left[\epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{\mathcal{F}}{2} \right] + \frac{\mathcal{F}}{2} e^{\mathcal{F}(\tau - \tau')} \delta(\tau - \tau'),$$

e a derivada parcial em relação a τ' da expressão (H.2) nos dá que:

$$\Gamma(\tau, \tau') = -\frac{\partial G}{\partial \tau'}.$$

O traço $\text{Tr } GF$ é obtido no seguinte caminho:

$$\text{Tr } GF = \frac{1}{2} \int \int F \Gamma(\tau, \lambda) \epsilon(\lambda - \tau) d\lambda d\tau$$

e substituindo a expressão (H.11), verificamos que

$$\text{Tr } GF = -\frac{F}{2} \tanh \tilde{g} e_0 F. \quad (\text{H.15})$$

Assim, a quantidade

$$\begin{aligned} \frac{\text{Det } \tilde{\Lambda}(\tilde{g})}{\text{Det } \tilde{\Lambda}(0)} &= \exp \left\{ \int_0^{\tilde{g}} d\tilde{g}' \text{Tr } \tilde{\Lambda}^{-1} \frac{d\tilde{\Lambda}}{d\tilde{g}'} \right\} \\ &= \exp \left\{ -2e_0 \int_0^{\tilde{g}} \text{Tr } GF d\tilde{g}' \right\} \\ &= \exp \{ \text{tr } \ln \cosh \tilde{g} e_0 F \} \\ &= \det \cosh \tilde{g} e_0 F. \end{aligned} \quad (\text{H.16})$$

Apêndice I

Cálculo do fator espinorial

Neste apêndice obtemos a expressão do propagador da partícula espinorial num campo eletromagnético constante por um método diferente da técnica de integração sobre velocidades justo para sublinharmos as diferenças entre um e outro. Neste caminho a expressão do fator espinorial é explicitada. Comparamos então o propagador na representação de Schwinger com o obtido via nossa representação. O propagador num campo eletromagnético externo é dado por[10]:

$$S^c = \frac{i}{2} \int_0^\infty \int_{x_{in}}^{x_{out}} Dx M(e_0) \Phi[x, e_0] \times \exp \left\{ i \int_0^1 d\tau \left[-\frac{\dot{x}^2}{2e_0} - \frac{e_0}{2} m^2 - gx A(x) \right] \right\} \quad (I.1)$$

e

$$\begin{aligned} \Phi[x, e_0] = & \left[m + (2e_0)^{-1} \dot{x} K(x) (2 - ge_0 F(x) K(x)) \gamma \right. \\ & - \frac{i}{4} m g e_0 (F(x) K(x))_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} - \frac{i}{4} (\dot{x} K(x) \gamma) (F(x) K(x))_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\ & \left. + \frac{1}{16} m g^2 e_0^2 (F(x) K(x))_{\mu\nu}^* (F(x) K(x))^{\mu\nu} \gamma^5 \right] \\ & \times \exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr } G(x, g') F(x) \right\}. \end{aligned} \quad (I.2)$$

Para campo constante

$$F_{\mu\nu} = \text{const}, \quad A_\mu = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}x^\nu,$$

a integral S^c é quase-Gaussiana e a variável $x(\tau)$ em $\Phi[x, e_0]$ pode ser substituída pela solução

$$x_{cl}(\tau) = (e^N - 1)^{-1} [e^{N\tau}(x - y) + e^N y - x] \quad (I.3)$$

da equação de movimento,

$$\frac{d^2}{d\tau^2}x_\mu - N_{\mu\nu}\frac{d}{d\tau}x^\nu = 0, \quad (I.4)$$

onde $N = ge_0F$.

A equação de movimento é obtida da Lagrangiana

$$L = -\frac{\dot{x}^2}{2e_0} + \frac{g}{2}\dot{x}Fx - \frac{e_0}{2}m^2.$$

Usando as equações de Euler-Lagrange, chegamos à

$$x(\tau) = \frac{c_2}{N}e^{N\tau} + c_1,$$

e dadas as condições de contorno $x = x_{out}$, $y = x_{in}$, temos que

$$c_2 = N(x - y)(e^N - 1)^{-1},$$

$$c_1 = x - (x - y)(e^N - 1)^{-1}e^N,$$

e assim obtemos a equação (I.3).

Considere agora as mudanças de variáveis

$$\sqrt{e_0}p \rightarrow p',$$

$$\frac{x - x_{cl}}{\sqrt{e_0}} \rightarrow \xi,$$

tal que o Jacobiano da transformação, nos dá

$$\det \frac{\delta p}{\delta p'} = \det \frac{1}{\sqrt{e_0}} = \frac{1}{e_0^2}.$$

Isto porque, pelo procedimento de discretização (ver Apêndice A), observamos uma integração a mais sobre p . Então,

$$x = \sqrt{e_0}\xi + x_{cl}, \quad \dot{x} = \sqrt{e_0}\dot{\xi} + \dot{x}_{cl},$$

e levando em conta as novas condições de contorno $\xi(0) = \xi(1) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{x}^2}{2e_0} &= -\frac{\dot{\xi}^2}{2} - \frac{1}{4e_0} N (e^N - 1)^{-2} (e^{2N} - 1) (x - y)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{e_0}} \dot{\xi} (e^N - 1)^{-1} N e^{N\tau} (x - y). \end{aligned}$$

O mesmo para,

$$A = -\frac{1}{2} F x = -\frac{F}{2} \left(\sqrt{e_0}\xi + (e^N - 1)^{-1} [e^{N\tau}(x - y) + e^N y - x] \right)$$

e

$$\begin{aligned} -g\dot{x}A &= -g \left(\sqrt{e_0}\dot{\xi} + (e^N - 1)^{-1} N e^{N\tau}(x - y) \right) \\ &\quad \times \left(-\frac{F}{2} \left\{ \sqrt{e_0}\xi + (e^N - 1)^{-1} [e^{N\tau}(x - y) + e^N y - x] \right\} \right) \\ &= -\frac{g}{2} e_0 \xi F \dot{\xi} - \frac{g}{2} \sqrt{e_0}(x - y) F \dot{\xi} e^{N\tau} - \frac{g}{2} \sqrt{e_0} \xi F (x - y) (e^N - 1)^{-1} N \\ &\quad - \frac{g}{2} (e^N - 1)^{-2} e^{N\tau} [e^{N\tau}(x - y) + e^N y - x] F (x - y). \end{aligned}$$

Juntando os termos

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{x}^2}{2e_0} - g\dot{x}A &= -\frac{\dot{\xi}^2}{2} - \frac{1}{4e_0} N (e^N - 1)^{-2} (e^{2N} - 1) (x - y)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{e_0}} \dot{\xi} (e^N - 1)^{-1} N e^{N\tau}(x - y) - \frac{g}{2} e_0 \xi F \dot{\xi} - \frac{g}{2} \sqrt{e_0}(x - y) F \dot{\xi} (e^N - 1)^{-1} e^{N\tau} \\ &\quad - \frac{g}{2} \sqrt{e_0} \xi F (x - y) (e^N - 1)^{-1} N e^{N\tau} - \frac{g}{2} (x - y) F (x - y) (e^N - 1)^{-2} N e^{2N\tau} \\ &\quad - \frac{g}{2} (e^N y - x) F (x - y) (e^N - 1) N e^{N\tau}, \end{aligned}$$

verificamos que o terceiro e o sétimo termos se anulam, o quinto e o sexto termos se cancelam, e o oitavo termo resulta em $\frac{1}{2}gx Fy$. Por outro lado, no segundo termo temos que

$$\begin{aligned} (e^N - 1)^{-2} (e^{2N} - 1) &= \frac{e^N (e^N - e^{-N})}{(e^N - 1)^2} \\ &= \frac{e^N (e^N - e^{-N})}{e^N (e^{\frac{N}{2}} - e^{-\frac{N}{2}})^2} \\ &= \frac{2 \sinh N}{4 \sinh^2 \frac{N}{2}} = \coth \frac{N}{2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &-\frac{\dot{x}^2}{2e_0} - g\dot{x}A - \frac{e_0}{2}m^2 \\ &= \frac{g}{2}x Fy - \frac{e_0}{2}m^2 - \frac{g}{4}F(x-y) \coth \frac{ge_0 F}{2}(x-y) \\ &-\frac{\dot{\xi}^2}{2} - \frac{g}{2}e_0 F \xi \dot{\xi} \end{aligned}$$

e

$$M(e_0) = \int Dp e^{\frac{i}{2} \int p^2 d\tau}.$$

Portanto, após as mudanças de variáveis, a expressão do propagador vem dada por

$$\begin{aligned} S^c &= \frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{de_0}{e_0^2} \Phi[x_{cl}, e_0] \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{2}gx Fy - \frac{i}{2}e_0 m^2 - \frac{i}{4}g(x-y)F \coth \frac{ge_0 F}{2}(x-y) \right. \\ &\left. \int_0^0 D\xi \int Dp \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 d\tau [p^2 - \dot{\xi}^2 - ge_0 F \xi \dot{\xi}] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (I.5)$$

Diagonalizamos a forma bilinear usando a expressão

$$\xi^\mu = \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right)_\nu^\mu u^\nu. \quad (\text{I.6})$$

Então,

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \left(\frac{ge_0 F}{2} \exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) u + \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \dot{u}, \\ ge_0 \xi F \dot{\xi} &= ge_0 \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) u F \left[\left(\frac{ge_0 F}{2} \exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) u + \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \dot{u} \right] \\ &= ge_0 u \left\{ \left(\exp -\frac{ge_0 F}{2} \tau \right) F \frac{ge_0 F}{2} \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \right\} u \\ &\quad + ge_0 u \left\{ \left(\exp -\frac{ge_0 F}{2} \tau \right) F \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \right\} \dot{u} \\ &= \frac{g^2 e_0^2}{2} u F^2 u + ge_0 u F \dot{u}, \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \left\{ \left(\frac{ge_0 F}{2} \exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) u + \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \dot{u} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \left(\frac{ge_0 F}{2} \exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) u + \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \dot{u} \right\} \\ &= \frac{g^2 e_0^2}{4} u \left\{ \left(\exp -\frac{ge_0 F}{2} \tau \right) F F \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \right\} u \\ &\quad + ge_0 u \left\{ F \left(\exp -\frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \right\} \dot{u} \\ &\quad + \dot{u} \left\{ \left(\exp -\frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \left(\exp \frac{ge_0 F}{2} \tau \right) \right\} \dot{u} \\ &= \frac{g^2 e_0^2}{4} u F^2 u + ge_0 \dot{u} F u + \dot{u}^2. \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

Assim,

$$p^2 - \dot{\xi}^2 - ge_0 \xi F \dot{\xi} = p^2 - \dot{u}^2 - \frac{g^2 e_0^2}{4} u F^2 u,$$

e para a integral funcional

$$\int_0^1 Du \int Dp \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_0^1 d\tau \left[p^2 - \dot{u}^2 - \frac{1}{4} g^2 e_0^2 u F^2 u \right] \right\},$$

obtida neste caminho ou seja, sob a transformação $\xi \rightarrow \exp\left(\frac{ge_0 F \tau}{2}\right) u$, as condições de contorno são invariantes e o espectro dos operadores

$$-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + ge_0 F \partial_\tau, \quad -\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{g^2 e_0^2}{4} F^2,$$

coincide. Na verdade,

$$-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + ge_0 F \partial_\tau = \exp\left(\frac{ge_0}{2} F \tau\right) \left(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{g^2 e_0^2}{4} F^2\right) \exp\left(-\frac{ge_0}{2} F \tau\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^0 Du e^{-\frac{i}{2} \int_0^1 \left(\dot{u}^2 + \frac{g^2 e_0^2}{4} F^2 u^2\right) d\tau} \\ &= \left\{ \frac{\text{Det}(\eta_{\mu\nu} \partial_\tau^2 - ge_0 F_{\mu\nu} \partial_\tau)}{\text{Det}(\eta_{\mu\nu} \partial_\tau^2)} \right\}^{-\frac{1}{2}} \int_0^0 Du e^{-\frac{i}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 d\tau} \\ &= \left\{ \frac{\text{Det}(-\delta_\nu^\mu \partial_\tau^2 + ge_0 F_\nu^\mu \partial_\tau)}{\text{Det}(-\delta_\nu^\mu \partial_\tau^2)} \right\}^{-\frac{1}{2}} \int_0^0 Du e^{-\frac{i}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 d\tau}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde cancelamos o fator $\text{Det}(-\eta_{\mu\nu})$ na razão dos determinantes. Por outro lado, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\text{Det}(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{g^2 e_0^2}{4} F^2)}{\text{Det}(-\mathbf{I}\partial_\tau^2)} &= \exp \text{Tr} \left[\ln \left(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{g^2 e_0^2}{4} F^2 \right) - \ln \left(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 \right) \right] \\ &= \exp \text{Tr} \ln \frac{\mathcal{K}(g)}{\mathcal{K}(0)} = \exp \text{Tr} \int_0^g d\lambda \frac{\partial \mathcal{K}(\lambda)}{\partial \lambda} \mathcal{K}^{-1}(\lambda) \\ &= \exp \text{Tr} \left[\frac{e_0^2}{2} F^2 \int_0^g d\lambda \lambda \mathcal{K}^{-1}(\lambda) \right] \\ &= \exp \text{Tr} \left[\frac{e_0^2}{2} F^2 \int_0^g d\lambda \lambda \left(-\mathbf{I}\partial_\tau^2 + \frac{\lambda^2 e_0^2}{4} F^2 \right)^{-1} \right] \\ &= \exp \text{tr} \left[\frac{e_0^2}{2} F^2 \int_0^g d\lambda \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left(\pi^2 n^2 \mathbf{I} + \frac{\lambda^2 e_0^2}{4} F^2 \right)^{-1} \right] \\ &= \exp \text{tr} \int_0^g \frac{d}{d\lambda} \left\{ \ln \left(\frac{\sinh \frac{\lambda e_0 F}{2}}{\frac{\lambda e_0 F}{2}} \right) \right\} d\lambda \end{aligned}$$

$$= \det \left(\frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{\frac{ge_0 F}{2}} \right), \quad (I.10)$$

onde usamos a fórmula

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\pi^2 n^2 + \kappa^2)^{-1} = \frac{1}{2\kappa} \coth \kappa - \frac{1}{\kappa^2}$$

(válida também se κ é uma matriz 4×4 arbitrária) e consideramos o traço no espaço de dimensão infinita. O traço que permanece na penúltima expressão de (I.10) é sobre o espaço quadri-dimensional.

Portanto, a integral funcional assume a seguinte forma

$$I = \left\{ \det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{\frac{ge_0 F}{2}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 Du e^{-\frac{i}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 d\tau}.$$

Isto é,

$$I = \frac{e_0^2}{4} \left\{ \det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right\}^{-\frac{1}{2}} \int_0^1 Du e^{-\frac{i}{2} \int_0^1 \dot{u}^2 d\tau}.$$

Por outro lado,

$$\frac{i}{2} \int_0^1 D\xi \int Dp \exp \left\{ \frac{i}{2} \int d\tau (p^2 - \xi^2) \right\} = \frac{1}{8\pi^2},$$

o que pode ser verificado pelo procedimento de discretização, onde observamos que a integração sobre ξ compensa a integração sobre p , portanto obtemos um resultado finito. Juntando todos os termos, chegamos à expressão:

$$S^c = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^\infty de_0 \left\{ \det \frac{\sinh \frac{ge_0 F}{2}}{gF} \right\}^{-\frac{1}{2}} \Phi[x_{cl}, e_0] \quad (I.11)$$

$$\times \exp \left\{ \frac{i}{2} g x F y - \frac{i}{2} e_0 m^2 - \frac{i}{4} g(x-y) F \coth \frac{ge_0 F}{2} (x-y) \right\}.$$

O fator espinorial

$$\Phi[x_{cl}, e_0] = \quad (I.12)$$

$$\left\{ \det \cosh \frac{ge_0 F}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left[m + \frac{\dot{x}K}{2e_0} (2 - ge_0 FK) \gamma - i \frac{mge_0}{4} (FK)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right.$$

$$\left. - \frac{ig}{4} (\dot{x}K \gamma) (FK)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} + \frac{mg^2 e_0^2}{16} (FK)_{\mu\nu}^* (FK)^{\mu\nu} \gamma^5 \right],$$

tendo em conta as expressões

$$K_{\mu\nu}(x, e_0, \tau) = \eta_{\mu\nu} + ge_0 \int_0^1 G_{\mu\lambda}(x, e_0, \tau, \tau') F_\nu^\lambda(x(\tau')) d\tau',$$

$$G(x, e_0, \tau, \tau') = \frac{1}{2} e^{ge_0 F(\tau - \tau')} \left[\epsilon(\tau - \tau') - \tanh \frac{ge_0 F}{2} \right],$$

(para esta última expressão ver Apêndice H), é obtido agora sob outra forma uma vez que estas últimas não dependem da trajetória x . Para tanto, considere os termos do fator espinorial

$$T_1 = \frac{im}{2} \frac{ge_0}{2} (FK)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu},$$

com

$$K(\tau) = \frac{2 \exp ge_0 F \tau}{1 + \exp ge_0 F}.$$

Por outro lado,

$$\int G_{\xi\alpha}(\tau, \tau') \delta(\tau - \tau') d\tau d\tau' = -\frac{1}{2} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\xi\alpha},$$

logo

$$\frac{ge_0}{2} (FK)_{\mu\nu} = \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu}$$

e

$$T_1 = \frac{im}{2} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}.$$

O segundo termo

$$T_2 = \frac{ig}{4} (\dot{x} K \gamma) (FK)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu},$$

com

$$(FK)_{\mu\nu} = \frac{2}{ge_0} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu},$$

mas

$$\dot{x} = \sqrt{e_0} \dot{\xi} + \dot{x}_{cl} = \sqrt{e_0} \dot{\xi} + (e^N - 1)^{-1} [N e^{N\tau} (x - y)],$$

e

$$\dot{x} K \gamma = (x - y) \frac{1}{\cosh \frac{g e_0 F}{2}} \gamma$$

(o termo proporcional a $\dot{\xi}$ não contribui devido às condições de contorno).

Assim chegamos à

$$T_2 = \frac{ig}{2} \left[(x - y) \frac{F}{\sinh g e_0 F} \gamma \right] \left(\tanh \frac{g e_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu}.$$

O terceiro termo,

$$T_3 = \frac{\dot{x} K}{2e_0} (2 - g e_0 F K) \gamma,$$

é escrito como

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{1}{2e_0} \frac{2(x - y)\gamma}{\cosh \frac{g e_0 F}{2}} \left[1 - \tanh \frac{g e_0 F}{2} \right] \\ &= \frac{1}{e_0} \frac{(x - y)\gamma}{\cosh \frac{g e_0 F}{2}} \left[1 - \tanh \frac{g e_0 F}{2} \right] \\ &= g(x - y) \frac{F e^{-\frac{g e_0 F}{2}} \gamma}{\sinh g e_0 F \cosh \frac{g e_0 F}{2}}. \end{aligned}$$

O quarto termo,

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{m g^2 e_0^2}{16} (F K)_{\mu\nu}^* (F K)^{\mu\nu} \gamma^5 \\ &= \frac{m g^2 e_0^2}{8} \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (F K)_{\alpha\beta} (F K)_{\mu\nu} \gamma^5 \\ &= \frac{m g^2 e_0^2}{8} \frac{1}{4} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\frac{2}{g e_0} \right)^2 \left(\tanh \frac{g e_0 F}{2} \right)_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{g e_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \\ &= \frac{m}{8} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\tanh \frac{g e_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \left(\tanh \frac{g e_0 F}{2} \right)_{\alpha\beta} \gamma^5. \end{aligned}$$

O fator espinorial (I.12) assume agora a seguinte forma

$$\begin{aligned} \Phi[x_{cl}, e_0] = & \quad (I.13) \\ & \left\{ \det \cosh \frac{ge_0 F}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left[m + g(x-y) \frac{F \exp(-\frac{ge_0 F}{2})}{\sinh ge_0 F \cosh \frac{ge_0 F}{2}} \gamma \right. \\ & - \frac{i}{2} m \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} - \frac{i}{2} g \left((x-y) \frac{F}{\sinh ge_0 F} \gamma \right) \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\ & \left. + \frac{m}{8} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \right]. \end{aligned}$$

Note que a expressão

$$\exp \left\{ -\frac{e_0}{2} \int_0^g dg' \text{Tr} (GF) \right\},$$

nos dá

$$\left\{ \det \cosh \frac{ge_0 F}{2} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Observe também que a expressão (G.2) nos fornece o mesmo resultado (I.13))

Vamos agora comparar as expressões de Φ e Ψ (consideramos para tanto alguns termos). A identidade (IV.37) pode ser provada se consideramos as que seguem:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \gamma^5, \quad \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -24, \quad \sigma^{\alpha\beta} = i\gamma^\alpha \gamma^\beta - i\gamma^\beta \gamma^\alpha.$$

Para a expressão de Φ_m (IV.36) considere:

$$\tanh \frac{ge_0 F}{2} = \frac{ge_0 F}{2} + \frac{1}{3} \frac{g^3 e_0^3 F^3}{8} + o(g^3),$$

após expansão em Taylor. Substituindo em T_1 (sem o fator m):

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{i}{2} \left(\frac{ge_0 F}{2} + \frac{1}{3} \frac{g^3 e_0^3 F^3}{8} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{ge_0}{2} - \frac{g^3 e_0^3 F^2}{24} \right) F \cdot \sigma, \end{aligned}$$

e no termo T_4 (sem o fator m):

$$\begin{aligned}
T_4 &= \frac{1}{8} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\alpha\beta} \left(\tanh \frac{ge_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{ge_0 F}{2} + \frac{g^3 e_0^3 F^3}{24} \right)_{\alpha\beta} \left(\frac{ge_0 F}{2} + \frac{g^3 e_0^3 F^3}{24} \right)_{\mu\nu} \gamma^5 \\
&= \frac{1}{8} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{g^2 e_0^2}{4} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \gamma^5 + o(g^3) \\
&= \frac{g^2 e_0^2}{32} 2 F^{\ast\mu\nu} F_{\mu\nu} \gamma^5 + o(g^3) \\
&= -\frac{g^2 e_0^2}{4} \mathcal{G} \gamma^5 + o(g^3).
\end{aligned}$$

Da equação [11]

$$F'^4 + 2\mathcal{F}F'^2 - \mathcal{G}^2 = 0,$$

que pode ser derivada das relações

$$F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu}^{\ast} = -\delta_{\mu\nu} \mathcal{G}, \quad F_{\mu\lambda}^{\ast} F_{\lambda\nu}^{\ast} - F_{\mu\lambda} F_{\lambda\nu} = 2\delta_{\mu\nu} \mathcal{F}, \quad F_{\mu\nu} \psi_\nu = F' \psi_\mu, \quad F_{\mu\nu}^{\ast} \psi_\nu = -\frac{1}{F'} \mathcal{G} \psi_\mu,$$

com soluções

$$F^{(1)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\mathcal{F} + i\mathcal{G}} + \sqrt{\mathcal{F} - i\mathcal{G}} \right\},$$

$$F^{(2)} = \frac{i}{\sqrt{2}} \left\{ \sqrt{\mathcal{F} + i\mathcal{G}} - \sqrt{\mathcal{F} - i\mathcal{G}} \right\},$$

obtemos que $F^{(1)2} = -H^2$ e $F^{(2)2} = E^2$, onde usamos o resultado $\mathcal{F} = \frac{1}{2}(H^2 - E^2)$ e $\mathcal{G} = E.H$. Escrevendo

$$\left\{ \det \cosh \frac{ge_0 F}{2} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

em termos de $F^{(1)}$ e $F^{(2)}$:

$$D = \left\{ \det \cosh \frac{ge_0 F}{2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \cosh \frac{ge_0 F^{(1)}}{2} \cosh \frac{ge_0 F^{(2)}}{2} \\
&= \left(1 + \frac{g^2 e_0 F^{(1)^2}}{8}\right) \left(1 + \frac{g^2 e_0^2 F^{(2)^2}}{8}\right) \\
&= 1 + \frac{g^2 e_0^2}{4} \left(\frac{F^{(1)^2} + F^{(2)^2}}{2}\right) + o(g^3),
\end{aligned}$$

com $\mathcal{F} = \frac{1}{2}(H^2 - E^2) = -\frac{1}{2}(F^{(1)^2} + F^{(2)^2})$ e $D = 1 - \frac{1}{4}g^2 e_0^2 \mathcal{F} + o(g^3)$.

Então,

$$\Phi_m = \left\{1 - \frac{g^2 e_0^2 \mathcal{F}}{4}\right\} \left\{1 - i \left(\frac{ge_0}{4} - \frac{g^3 e_0^3 \mathcal{F}}{12}\right) F \cdot \sigma - \frac{g^2 e_0^2}{4} \mathcal{G} \gamma^5\right\}. \quad (\text{I.14})$$

Definimos a função Ψ_S como:

$$\begin{aligned}
\Psi_S(x, y, e_0) &= \left[m + \frac{g}{2}(x - y)F \left(\coth \frac{ge_0 F}{2} - 1 \right) \gamma \right] \\
&\times \exp \left\{ -\frac{i}{4} ge_0 F \sigma \right\},
\end{aligned} \quad (\text{I.15})$$

e a parte Ψ_m é dada por

$$\begin{aligned}
\Psi_m &= e^{-\frac{ige_0}{4} F \cdot \sigma} \\
&= 1 - \frac{ige_0}{4} F \cdot \sigma - \frac{g^2 e_0^2}{32} (F \cdot \sigma)^2 + \frac{ig^3 e_0^3}{6.64} (F \cdot \sigma)^3,
\end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

onde

$$(F \sigma)^3 = 8\mathcal{F}(F \cdot \sigma) + 8\mathcal{G} \gamma^5 F \sigma.$$

O termo

$$T = \frac{ig^3 e_0^3}{6.64} \{8\mathcal{F}(F \cdot \sigma) + 8\mathcal{G} \gamma^5 F \cdot \sigma\},$$

com $\gamma^5 \sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta}$, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
T &= \frac{ig^3 e_0^3}{48} \mathcal{F}(F \cdot \sigma) + \frac{ig^3 e_0^3}{48} \mathcal{G} \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} F \\
&= \frac{ig^3 e_0^3}{48} \mathcal{F}(F \cdot \sigma) + \frac{ig^3 e_0^3}{48} \mathcal{G} F^* \sigma.
\end{aligned}$$

Colecionando todos os termos, obtemos a expressão

$$\begin{aligned}\Psi_m = & \left(1 - \frac{g^2 e_0^2}{4} \mathcal{F}\right) + i \left(-\frac{g e_0}{4} + \frac{g^3 e_0^3}{48} \mathcal{F}\right) F\sigma \\ & + i \frac{g^3 e_0^3}{48} \mathcal{G} F^* \sigma - \frac{g^2 e_0^2}{4} \mathcal{G} \gamma^5 + o(g^3)\end{aligned}\quad (I.17)$$

A diferença entre as partes Φ_m e Ψ_m , nos dá que

$$\Phi_m - \Psi_m = i \frac{g^3 e_0^3}{48} [2\mathcal{F}(F\sigma) + (F^3\sigma) - \mathcal{G}(F^*\sigma)] + o(g^3),$$

contudo

$$\begin{aligned}2\mathcal{F}(F\sigma) + F^3\sigma - \mathcal{G}(F^*\sigma) &= \frac{2F^2}{4}(F\sigma) + F^3\sigma - \mathcal{G}(F^*\sigma) \\ &= \frac{3}{2}(F^3\sigma) - \mathcal{G}(F^*\sigma) = \frac{3}{2}(F^3\sigma) + \frac{1}{4}FF^*(F^*\sigma) \\ &= \frac{3}{2}(F^3\sigma) + \frac{1}{16}F_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{3}{2}(F^3\sigma) - \frac{24}{16}(F^3\sigma) = 0.\end{aligned}$$

Em relação às partes Φ_γ e Ψ_γ , temos que:

$$\begin{aligned}\Phi_\gamma &= \left\{ \det \cosh \frac{g e_0 F}{2} \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{g(x-y)F e^{-\frac{g e_0 F}{2}} \gamma}{\sinh g e_0 F \cosh \frac{g e_0 F}{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{i g (x-y) F \gamma}{2 \sinh g e_0 F} \left(\tanh \frac{g e_0 F}{2} \right)_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \right\} \\ &= \frac{g}{2}(x-y)F \left(\coth \frac{g e_0 F}{2} - 1 \right) \gamma - \frac{i g}{4}(x-y)\gamma F\sigma\end{aligned}\quad (I.18)$$

e

$$\begin{aligned}\Psi_\gamma &= \frac{g}{2}(x-y)F \left(\coth \frac{g e_0 F}{2} - 1 \right) e^{-\frac{i g e_0}{4} F \cdot \sigma} \\ &= (\dots\dots) \left\{ 1 - \frac{g^2 e_0^2}{4} \mathcal{F} + i \left(-\frac{i g e_0}{4} + \frac{g^3 e_0^3}{48} \mathcal{F} \right) F \cdot \sigma \right. \\ &\quad \left. + \frac{i g^3 e_0^3}{48} \mathcal{G} F^* \gamma^5 - \frac{g^2 e_0^2}{4} \mathcal{G} \gamma^5 \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g}{2}(x-y)F \left(\coth \frac{ge_0F}{2} - 1 \right) \gamma + \frac{g}{2}(x-y)F \left(\coth \frac{ge_0F}{2} - 1 \right) \gamma \\
&\quad \times \left\{ -\frac{g^2e_0^2\mathcal{F}}{4} - \frac{ige_0}{4}F.\sigma \right\} \\
&= (\dots) + \frac{g}{2}(x-y)F \left(\frac{\cosh \frac{ge_0F}{2}}{\sinh \frac{ge_0F}{2}} - 1 \right) \gamma \left\{ -\frac{ige_0}{4}F.\sigma \right\} + o(g^3) \\
&= \frac{g}{2}(x-y)F \left(\coth \frac{ge_0F}{2} - 1 \right) \gamma - \frac{ig}{4}(x-y)\gamma F.\sigma + o(g^3). \quad (I.19)
\end{aligned}$$

Assim, chegamos à

$$\Phi_\gamma - \Psi_\gamma = o(g^3),$$

e a equivalência entre as representações é estabelecida.

Referências

- [1] Ver [5]; T.M.Aliev, V.Ya.Fainberg and N.K.Pak, Nucl.Phys **B429**, 321 (1994), Phys.Rev **D50**, 6594 (1994); K.W.Mak, Phys.Rev **D49**, 6939 (1994); J.H.Cho and J.K.Kim, Phys.Lett **B332**, 118 (1994)
- [2] E.S.Fradkin, Nucl.Phys. **76**, 588 (1966); E.S.Fradkin, U.Esposito and S.Termini, Riv. Nuovo Cimento, **4**, 498 (1970)
- [3] F.A.Berezin and Marinov, Pisma Zh.Eksp.Teor.Fiz. **21**, 678 (1975) [JETP Lett. **21**, 320 (1975)]; Ann.Phys **104**, 336 (1977); A.Barducci, R.Casalbuoni and L.Lusanna, Nuovo Cimento **A35**, 377 (1977); R.Casalbouni, Nuovo Cimento **A33**, 115 (1976); Phys.Lett **B62**, 49 (1976); L.Brink, P.De Vecchia and D.Howe, Phys.Lett **B64**, 435 (1976); Nucl.Phys **B118**, 76 (1977), M. Henneaux and C. Teitelboim, Ann.Phys **143**, 127 (1982)
- [4] E.S.Fradkin and D.M.Gitman, Phy.Rev. **44**, 3220 (1991)
- [5] D.M.Gitman, Sh.M.Shvartsman and W.da Cruz, Preprint.IFUSP/P-**1053**, June (1993), Brazilian Journal of Physics. Vol.24, N.4, 844 (1994)
- [6] D.M.Gitman and A.V.Saa, Class.Quantum. Grav.**10**, 1447 (1993)
- [7] D.M.Gitman and I.V.Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints* (Springer-Verlag 1990)

- [8] A.M.Polyakov, Mod.Phys.Lett **A3**, 325 (1988); In *Fields, strings and critical phenomena* , *Proc. Les Houches Summer School vol II*, ed. E. Brézin and J. Zinn-Justin (North-Holland 1990), 305; *Gauge Fields and Strings* (Harwood 1987); ver também, Vl.S.Dotsenko, Nucl.Phys. **B 285**[FS19], 45 (1987)
- [9] J.Grundberg, T.H.Hansson and A.Kalherde, Phys.Rev **D41**, 2642 (1990), Nucl.Phys. **B347**, 420 (1990); P.Batenburg and A.M.J.Schakel, Mod.Phys.Lett **A4**, 1355 (1989); T.Jacobson, Phys.Lett **B216**, 150 (1989); P.Orland, Int.J.Mod.Phys. **A4** 3615 (1989); G.P.Korchensky, Int.J.Mod.Phys. **A7**, 339 (1992); J.H.Cho, S.Hyun and H-jae Lee, Phys.Lett. **B327**, 274 (1994)
- [10] D.M.Gitman and Sh.M.Shvartsman, Phys.Lett **B318**, 122 (1993), Phys.Lett **B331**, 449 (1994)
- [11] J.Schwinger, Phys.Rev. **82**, 664 (1951)
- [12] D.M.Gitman, S.I.Zlatev and W.DaCruz, IFUSP/P-1172, September (1995), submetido ao Brazilian Journal of Physics