UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP

305M810T1647

TEORIA QUANTICA DE CAMPOS EM TRÊS
DIMENSÕES: RENORMALIZABILIDADE E
TERMO DE CHERN-SIMONS

Farnezio Moreira de Carvalho Filho

[Handwritten signatures]

Orientador: Prof. Dr. Élcio Abdalla

Tese de Doutorado
apresentada no Instituto
de Física da Universidade
de São Paulo.

SÃO PAULO

1990

Defesa: 28/05/90

530.143

C3317

D

e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Carvalho Filho, Farnesio Moreira de
Teoria quântica de campos em três dimensões: re-
normalizabilidade e termo de Chern-Simons. São Pau-
lo, 1990.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Matemáti-
ca.

Área de Concentração: Física de Partículas Elemen-
tares

Orientador: Prof^º Dr. Elcio Abdalla

Unitermos: 1.Modelos sigma; 2.Cordas em campos de
fundo; 3.Renormalizabilidade; 4.Supersimetria; 5.Mem-
branas; 6.Teorias de gauge tridimensionais com termo
de Chern-Simons; 7.Expansão $1/N$ do modelo CPN-1

USP/IF/SBI - 07/90

AGRADECIMENTOS

- Ao Élcio Abdalla, pela orientação e amizade. Sou grato também, pela leitura crítica do manuscrito.
- A todos meus colegas e amigos da Universidade de São Paulo, especialmente ao Baeta, Brunelli, Eduardo Resek, Ricardo Viana, Rubens Freire, Maurício Baldan, Ângela e Bianor.
- Aos amigos da EFEI Agenor Pina e Seb Fernandes.
- À Escola Federal de Engenharia de Itajubá, por ter-me liberado das atividades didáticas durante a elaboração deste trabalho.
- À CAPES-EFEI, pelo apoio financeiro.

*À Luciene,
Ana Carolina,
Maristela e ao
Pablo.*

*"Nada seria mais perverso do que
querer esperar o que a ciência um dia es-
tabelecerá definitivamente sobre as coisas
primeiras e últimas e enquanto isso pensar
(e especialmente acreditar!) da maneira
tradicional—como tantas vezes se aconselha."*

Nietzsche

RESUMO

Modelos sigma não-lineares bidimensionais têm sido utilizados no estabelecimento de um programa consistente para se extrair a física de baixas energias de teorias de cordas. Quando definidos sobre variedades Riemannianas e em três dimensões, também, têm se mostrado relevantes em conexões com teorias de membranas. Neste trabalho nós mostramos, realizando cálculos perturbativos até ordem de dois "loops", via método de campo de fundo e expansão em coordenadas normais, que tais modelos são não-renormalizáveis, mesmo quando estendemos a supersimetria.

Em um outro contexto, o de teorias em três dimensões com termo topológico, nós estudamos o modelo CP^{N-1} na presença de um termo de Chern-Simons. Através da expansão $1/N$, verificamos o conteúdo de partículas da teoria em suas duas fases. Na fase não-quebrada o campo de gauge adquire massa e os "partons", inicialmente confinados se liberam, passando a interagir por uma força de curto alcance. Na fase quebrada, há um deslocamento do pólo do propagador.

ABSTRACT

Non linear sigma models in two dimensions have been used to establish a consistent program for obtaining the low energy physics of the string theories. When defined on Riemannian manifolds and in three dimensions, they have been relevant in connection with membrane theories. In this work we have shown, by means of perturbative calculations in the order of two loops, via background field method and normal coordinate expansion, that such models are not renormalizable, even when we enlarge supersymmetry.

In the context of three dimensional theories with topological terms, we have studied the CP^{N-1} model in the presence of a Chern-Simons term. Through the $1/N$ expansion, we have verified the particle content of the theory in its two phases. In the unbroken phase the gauge field acquires mass and the "partons", initially confined are liberated, beginning to interact through a short range force. In the broken phase, there is a shift of the propagator pole.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO 1	6
MODELOS SIGMA NÃO-LINEARES EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES RELACIONADOS COM (SUPER)CORDAS E (SUPER)MEMBRANAS	
1.1—Introdução	6
1.2—O Modelo Sigma Não-Linear Generalizado	7
1.3—Alguns Modelos Sigma Relacionados com (Super)Cordas ...	10
1.3.1—O Modelo Sigma Não-Linear e a Teoria de Cordas Fechadas	10
(a) O Modelo Bosônico	10
(b) O Modelo Bosônico com Termo de Wess–Zumino	12
(c) Teoria de Cordas Bosônicas Fechadas	13
(d) Cordas Bosônicas em Campos de Fundo	15
1.3.2—O Modelo Sigma Não-Linear Supersimétrico (1, 1)	18
1.3.3—O Modelo Sigma Não-Linear sobre uma Variedade de Kähler ...	21
1.4—Teorias de (Super)Membranas	24
1.4.1—Membranas de Dirac, Howe–Tucker e Supersimetrização	24
1.4.2—(Super) p-Branas	27
CAPÍTULO 2	30
MODELOS SIGMA NÃO-LINEARES BOSÔNICO E SUPERSIMÉTRICOS EM TRÊS DIMENSÕES: DIVERGÊNCIAS ULTRAVIOLETA E RENORMALIZABILIDADE	
2.1—Introdução	30

2.2—O Método do Campo de Fundo e a	
Expansão em Coordenadas Normais	31
2.2.1—O Modelo ϕ^4 em Quatro Dimensões	32
2.2.2—O Modelo Sigma Não-Linear e a Expansão	
em Coordenadas Normais	35
2.3—Divergências Ultravioleta do Modelo	
Sigma Não-Linear Bosônico	40
2.3.1—Cálculos de um “loop”	43
2.3.2—Cálculos de dois “loops”	47
2.4—Divergências Ultravioleta do Modelo	
Sigma Não-Linear Supersimétrico $\mathcal{N} = 1$	54
2.4.1—Cálculos de um “loop”	57
2.4.2—Cálculos de dois “loops”	59
2.5—Cálculos no Modelo Supersimétrico $\mathcal{N} = 2$	61
 CAPÍTULO 3	 65
TEORIAS DE CAMPOS COM TERMO	
DE CHERN-SIMONS	
3.1—Introdução	65
3.2—Teorias de Gauge com Termo Topológico	66
3.2.1—Teorias de Gauge Abelianas	67
3.2.2—Teorias de Yang-Mills	70
3.3—Alguns Comentários Gerais	72
 CAPÍTULO 4	 74
O MODELO CP^{N-1} COM FÉRMIONS E	
O TERMO DE CHERN-SIMONS	
4.1—Introdução	74
4.2—O Modelo	75
4.3—A Expansão $1/N$ e a Estrutura de Fases	76

4.4—As Regras de Feynman e o Conteúdo de Partículas	80
4.4.1—Fase “Não-Quebrada”: $SU(N)$	80
4.4.2—Fase “Quebrada”: $SU(N - 1)$	88
CONCLUSÃO	93
APÊNDICE A	96
ALGUMAS RELAÇÕES TENSORIAIS	
APÊNDICE B	98
CAMPOS DE “VIELBEIN” PARA O MODELO $O(N)$	
REFERÊNCIAS	101

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos o estudo de modelos em Teoria Quântica de Campos em dimensões mais baixas que as quatro do espaço-tempo tem apresentado notáveis resultados no sentido de aprofundar o nosso conhecimento e intuição dos fenômenos físicos ocorrendo na “arena” quadridimensional. Os modelos sigma não-lineares, por exemplo, desde que foram introduzidos na década de 60, por Gell-Mann e Lévy na descrição de píons [1], naquela época impondo vínculos sobre uma teoria linear mais simples, vêm se apresentando como modelos ricos em propriedades importantes e, portanto, fundamentais à teoria de campos. Quando descritos em um espaço-tempo bidimensional, tais modelos recuperam a renormalizabilidade perdida em quatro dimensões e se tornam ótimos simuladores ou “laboratórios teóricos” de teorias mais realistas como a teoria de Yang-Mills ($D = 4$) [2]. Dessa forma, procura-se explorar as analogias existentes, tais como: estrutura de renormalização, liberdade assintótica, existência de cargas topológicas, geração dinâmica de massa, etc.. Mostrou-se [3], ademais, que o modelo $O(N)$ em duas dimensões, além das propriedades anteriores possui também infinitas leis locais e não-locais mesmo no caso quântico, o que permite a construção de uma matriz S exata fatorizável e a proibição de produção de partículas [4].

É importante ressaltar que os modelos sigma voltaram a ser de interesse, novamente em $D = 4$, quando utilizados na descrição do setor de spin zero da Supergravidade estendida [5].

Recentemente, as propriedades quânticas dos modelos sigma não-lineares bidimensionais definidos sobre uma variedade-alvo Riemanniana [6] tem recebido considerável atenção, por causa da marcante relação entre esses modelos e as teorias de Supercordas [7], estas consideradas, no presente,

promissoras candidatas a uma teoria unificada de todas as interações fundamentais, incluindo a gravitação. A idéia básica é o estabelecimento de um programa consistente para se extrair a física de baixas energias [8], ou seja, uma "receita" para se estudar a propagação de cordas em campos de fundo. Em particular, a propagação em campos gravitacionais de fundo pode ser obtida acoplando a corda aos campos de gráviton g_{ij} e do dÍlaton Φ . A equivalência entre as condições de invariância conforme e as funções- β do correspondente modelo sigma é então usada para se descrever a dinâmica dos campos de fundo: $\beta_{ij} = 0$ dá as equações de movimento do campo gravitacional (setor de massa zero da corda), enquanto β^Φ fornece a Lagrangeana efetiva da corda da qual as equações podem ser obtidas. Assim, cálculos perturbativos são de suma importância para o conhecimento da finitude e renormalizabilidade dos diversos modelos envolvidos. Cálculos explícitos das funções- β até a ordem de vários loops têm sido realizados e sabe-se, hoje, que os modelos sigma não-lineares supersimétricos $\mathcal{N} = 1$ e $\mathcal{N} = 2$ são finitos até três "loops" para variedades Ricci-flat [9, 10]. No entanto, para o caso $\mathcal{N} = 2$, relevante para a compatificação de supercordas heteróticas [11] foi encontrado um contratermo em quatro "loops" [12], resultado esse, confirmado de teoria de cordas [13].

Na formulação tridimensional, os modelos sigma não-lineares generalizados têm apresentado também aspectos reveladores no contexto de teoria quântica de campos. Eles são especialmente importantes em teorias de membranas, que a exemplo da de cordas, é uma teoria de objetos estendidos, podendo vir a desempenhar também um papel de destaque como teoria de unificação. Entretanto, do ponto de vista da teoria de campos desses objetos (membranas), a invariância de Weyl (ou conforme) não tem o mesmo caráter daquela de teoria de cordas, ou seja, o grupo conforme é de dimensão finita e o estabelecimento de critérios para a consistência quântica torna-se uma tarefa difícil. Em outras palavras, além de duas dimensões, ainda não é uma

questão compreendida o análogo do cancelamento da anomalia conforme na dimensão crítica, para teorias de membranas. Porém, acreditamos que, na medida que estas questões forem resolvidas, torna-se-á fundamental, a exemplo do que acontece em teoria de cordas, conhecer detalhadamente as propriedades ultravioleta e renormalizabilidade dos modelos sigma não-lineares tridimensionais à elas relacionados. Em consequência, esperamos encontrar também para membranas, um programa consistente de obtenção da teoria efetiva. Contudo, ao contrário dos modelos sigma não-lineares descrevendo cordas, os modelos sigma de membranas são não-renormalizáveis, por contagem de potências. Embora sendo um resultado não desejável, a situação não é desesperadora como pode sugerir a primeira vista. Sabe-se [14], por exemplo, que interessantes cancelamentos acontecem quando os modelos $O(N)$ e CP^{N-1} são tratados via expansão $1/N$ tornando-os renormalizáveis. Além disso, podemos, perturbativamente isolar de uma maneira sistemática todas as divergências e introduzir contratermos locais. Num outro contexto, mas também em três dimensões, resultados importantes são obtidos, quando se formula modelos em teorias de campos com termo de Chern-Simons. Em particular, campos de gauge vetoriais se tornam massivos (uma única excitação de spin 1) e o conteúdo de partículas difere significativamente daquele de uma teoria de gauge massiva convencional (dois graus de liberdade de spin 1) [15]. Outro interessante resultado é que a gravitação de Einstein, trivial e sem propagação em três dimensões, torna-se uma teoria dinâmica [15] com a introdução do termo topológico.

Mais recentemente, esforços vem sendo realizados no sentido de se aprofundar a conexão existente entre certos modelos com termo de Chern-Simons e o comportamento supercondutor a altas temperaturas apresentado por determinados materiais. Isto é motivado por algumas de suas propriedades, em especial, a transmutação bóson-férmion que pode ocorrer em alguns modelos [16, 17].

No presente trabalho, investigamos dois aspectos relacionados aos temas de física tridimensional acima comentados.

O sucesso dos modelos sigma não-lineares em teorias de cordas como instrumento de obtenção da física de baixas energias e conseqüentemente a importância do conhecimento das propriedades quânticas dos mesmos serviu de motivação para o trabalho desenvolvido na primeira parte desta tese. Utilizando o método do campo de fundo e a expansão em coordenadas normais, realizamos cálculos perturbativos dos contratermos até ordem de dois "loops" para modelos sigma não-lineares em três dimensões, definidos sobre uma variedade-alvo Riemanniana arbitrária. Estudamos extensivamente as propriedades de renormalização ultravioleta dos modelos bosônico e supersimétrico ($\mathcal{N} = 1$ e $\mathcal{N} = 2$). Verificamos também, o que ocorre quando certas particularizações são feitas. Estudamos os casos de variedades Ricci-flat e localmente simétricas (modelo $O(N)$).

Na segunda parte do nosso trabalho, inspirados nos promissores resultados de modelos tridimensionais com termo de Chern-Simons, nós consideramos o modelo CP^{N-1} acoplado minimalmente a férmions (induzem o termo de Chern-Simons). Através da expansão $1/N$ encontramos as regras de Feynman e estudamos o conteúdo de partículas nas duas fases existentes nessa teoria.

Nós organizamos nosso trabalho como se segue: No capítulo 1, nós apresentamos os vários modelos relevantes às teorias de cordas e membranas. Exemplificamos, em alguns casos, a importância do conhecimento do comportamento ultravioleta e funções- β dos mesmos para o estudo da propagação de cordas em campos de fundo. Esta, como já dissemos, a motivação maior do nosso trabalho. No capítulo 2, estão todos os nossos resultados relativos a primeira parte. Usamos a seção 2.2 para apresentar o método do campo de fundo e a expansão em coordenadas normais, que são os ingredientes básicos para os cálculos. Nas seções seguintes apresentamos os

cálculos dos contratermos para os diversos casos e discutimos a renormalizabilidade. No capítulo 3, nós procuramos evidenciar a importância do termo de Chern-Simons em teoria de campos tridimensional e apresentamos, como preparação para o capítulo seguinte, alguns resultados relevantes do ponto de vista de partículas elementares. No capítulo 4, nós apresentamos nossos resultados relativos ao modelo CP^{N-1} com termo de Chern-Simons. A expansão $1/N$, as regras de Feynman e discussões são também apresentadas. As conclusões sobre o trabalho são deixadas para o final.

CAPÍTULO 1

MODELOS SIGMA NÃO-LINEARES EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES RELACIONADOS COM (SUPER)CORDAS E (SUPER)MEMBRANAS

1.1-INTRODUÇÃO

As propriedades quânticas de modelos sigma não-lineares, bosônicos e supersimétricos, em duas dimensões, têm apresentado aspectos reveladores no contexto das promissoras teorias de supercordas [7]. Os cálculos perturbativos, em várias ordens de "loops" [9, 10, 12, 18], têm permitido verificar, em alguns casos, a equivalência entre as condições de invariância conforme e a função- β do grupo de renormalização do correspondente modelo sigma. Uma outra questão importante em estudo atualmente, é a possibilidade de se formular teorias consistentes de outros objetos estendidos, as membranas. Estas, podendo vir a desempenhar, também, um papel importante em teorias de unificação. Neste caso, modelos sigma não-lineares, agora definidos em três dimensões, é que são relevantes.

Com o propósito de introduzir o assunto, servindo como uma preparação para o que discutiremos no capítulo 2, nós apresentaremos nas seções seguintes, um sumário dos vários resultados importantes sobre o tema, tais como, os diversos modelos sigma bidimensionais, a forte relação dos mesmos com a propagação de cordas em campos de fundo e, finalmente, alguns modelos de membranas.

1.2—O MODELO SIGMA NÃO-LINEAR GENERALIZADO

Nesta seção definiremos o modelo sigma não-linear mais geral para o nosso interesse e mostraremos como alguns dos modelos sigma usuais podem ser obtidos como casos particulares.

O modelo sigma não-linear geral pode ser definido como uma teoria consistindo de campos escalares ϕ sobre um espaço-base Σ (Minkowski ou Euclideano) cujos valores $\phi(x)$ encontram-se numa variedade diferenciável de dimensão finita M e uma ação da forma:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int dx g_{ij}(\phi(x)) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j \quad (1.1)$$

$$\phi : \Sigma \rightarrow M$$

onde g_{ij} é uma métrica Riemanniana sobre M , chamada acoplamento métrico [6]. Neste sentido dizemos que o modelo possui campos definidos sobre um espaço-base e tomando valores num espaço-alvo que é uma variedade Riemanniana arbitrária.

Os modelos sigma não-lineares usuais são casos especiais nos quais a variedade M é um espaço "coset" (G/H) de um grupo de Lie G por um subgrupo compacto H . Nestes casos g_{ij} é alguma métrica Riemanniana sobre M , invariante sob G ; que age como um grupo de simetria interna global. Em outras palavras o grupo G age sobre os campos ϕ de acordo com a lei de transformação:

$$\phi'(x) = g\phi(x), \quad g \in G \quad (1.2)$$

uma ação para tais campos, invariante sob (1.2) é:

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int dx \langle \partial_\mu \phi(x), \partial_\mu \phi(x) \rangle \quad (1.3)$$

onde $\partial_\mu \phi(x)$ é o vetor tangente à curva $p(t) = \phi(x + te_\mu)$ em G/H com $p(0) = \phi(x)$, e_μ um vetor unitário na direção μ e $\langle \partial_\mu \phi, \partial^\mu \phi \rangle$ denota o quadrado do comprimento de $\partial_\mu \phi$ com respeito à métrica escolhida sobre G/H .

Dependendo da escolha que se faça para G e H pode-se obter casos especiais úteis. Como exemplos temos:

(a) O Modelo $O(N)$

Aqui $G = O(N)$, $H = O(N-1)$ e então $M = S^{N-1} = \frac{O(N)}{O(N-1)}$. A ação

$$S = \frac{1}{2} \int dx g_{ij}(\varphi) \partial_\mu \varphi^i(x) \partial^\mu \varphi^j(x) \quad (1.4)$$

onde

$$g_{ij} = \delta_{ij} + (1 - \varphi^k \varphi^k)^{-1} \varphi_i \varphi_j, \quad i, j, k = 1, \dots, N \quad (1.5)$$

é a métrica da $(N-1)$ -esfera S^{N-1} .

Além disso,

$$\Gamma_{ij}^k = \varphi^k g_{ij} \quad (1.6)$$

$$R_{ijkl} = g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk} \quad (1.7a)$$

$$R_{ij} = (N-2)g_{ij} \quad (1.7b)$$

(b) O Modelo CP^{N-1}

Neste caso, $G = SU(N)$, $H = S(U(1) \times U(N-1))$ e agora $M = \frac{SU(N)}{U(N-1)} = CP^{N-1}$ é o espaço complexo projetivo $(N-1)$ -dimensional, isto é, o espaço de todas as classes de equivalência $[z]$ de vetores complexos

$(z_1, \dots, z_N) \neq 0$ onde dois vetores z e z' são equivalentes se $z' = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C}$. O grupo $SU(N)$ age sobre o CP^{N-1} por:

$$g \circ [z] = [gz], \quad (gz)_a = g_{ab} z_b, \quad g \in SU(N). \quad (1.8)$$

Para se construir uma ação para este modelo, é prática comum simplificar convenientemente a notação introduzindo-se campos de vetores complexos unitários $(z_1(x), \dots, z_N(x))$, $|z|^2 = |z_1|^2 + \dots + |z_N|^2 = 1$, no lugar dos campos $[z](x)$ e, ademais, considerar como campos equivalentes aqueles relacionados por uma transformação de gauge, isto é,

$$z'_a(x) = e^{i\Lambda(x)} z_a(x) \quad (1.9)$$

Dessa forma, pode-se definir um campo composto

$$A_\mu = \frac{i}{2} \bar{z} \cdot \overleftrightarrow{\partial}_\mu z = \frac{i}{2} [\bar{z}_a \partial_\mu z_a - (\partial_\mu \bar{z}_a) z_a] \quad (1.10)$$

se transformando sob (1.9) como um campo de gauge abeliano ($A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$).

Com tudo isso, uma ação invariante de gauge, descrevendo bem o modelo tratado, é escrita como:

$$S = \int dx \overline{D_\mu z} \cdot D^\mu z, \quad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \quad (1.11)$$

O modelo CP^{N-1} voltará a aparecer mais adiante (capítulo 4) no contexto da teoria quântica de campos em três dimensões com termos topológicos (termo de Chern-Simons). Naquele capítulo será tema de nosso estudo e daremos, portanto, uma atenção maior às suas propriedades.

1.3—ALGUNS MODELOS SIGMA RELACIONADOS RELACIONADOS COM (SUPER)CORDAS

Discutiremos agora alguns modelos sigma não-lineares bidimensionais e suas correspondentes teorias de (super)cordas. O objetivo é ilustrar a importante conexão existente entre tais modelos e (super)cordas se propagando em campos de fundo, que permite, como veremos nos exemplos seguintes, a obtenção de uma física de baixas energias e o encaminhamento de soluções relativas a problemas de compactificações.

Por questão de brevidade, descreveremos aqui apenas os casos de modelos bosônicos e aqueles com supersimetrias $(1, 1)$ e $(2, 2)$ que são suficientemente ilustrativos e de interesse para o capítulo seguinte onde os discutiremos no contexto de teorias tridimensionais. Omitiremos também, nesse ponto, os cálculos perturbativos das funções- β do grupo de renormalização associadas a cada caso e necessários à compreensão da referida conexão, já que mais tarde (capítulo 2) apresentaremos cálculos similares ao fazermos renormalização utilizando o método do campo de fundo, tornando-os assim mais transparentes.

1.3.1—O MODELO SIGMA-NÃO LINEAR E A TEORIA DE CORDAS FECHADAS

(a) O Modelo Bosônico

Como já vimos a ação de um modelo sigma não-linear bosônico bidimensional é dada por (1.1), isto é

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int dx g_{ij}(\phi(x)) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j, \quad i = 1, \dots, N \quad (1.12)$$

$$\phi : \Sigma \rightarrow M$$

Esta ação apresenta algumas simetrias (clássicas) tais como invariância por reparametrização, isometrias da métrica, invariância de escala rígida e invariância conforme local. Vamos falar um pouco sobre estas duas últimas.

Sejam

$$x \rightarrow x'^{\mu} = ax^{\mu} \quad (1.13a)$$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) \quad (1.13b)$$

"a" é um parâmetro constante e a simetria chamada de invariância de escala rígida.

Redefinindo as coordenadas do espaço-tempo por

$$x^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1) \quad (\text{Coordenadas do cone-de-luz})$$

a invariância de escala rígida se torna um subconjunto da simetria local $x^{\pm} \rightarrow x'^{\pm}(x^{\pm})$ chamada pseudo-conforme. Quando efetuamos a rotação de Wick da teoria obtendo um espaço Euclideano $D = 2$, as coordenadas do cone-de-luz, $x^{\pm}$, passam a ser variáveis complexas z , $\bar{z}$ e o grupo conforme, o grupo das transformações analíticas (anti-analíticas) de coordenadas.

Em geral, estas simetrias do espaço-tempo são quebradas por correções quânticas. Em particular renormalizações da constante de acoplamento quebram a invariância de escala ($\beta \neq 0$). Fazendo-se cálculos perturbativos encontra-se $\beta_{ij} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g_{ij}^R$, relacionada à renormalização da métrica g_{ij} , dada por[†] [6].

$$\beta_{ij}(\phi) = -\frac{f^2}{2\pi} R_{ij}(\phi) - \frac{f^4}{8\pi^2} R_{iklm} R_j{}^{klm} + O(f^6) \quad (1.14)$$

[†] f^2 aparecendo em (1.14) é uma constante de acoplamento introduzida para fins de cálculo perturbativo. Mais tarde a indentificaremos com $(2\pi\alpha')$, sendo $(\alpha')^{-1}$ a tensão de uma corda.

(b) O Modelo Bosônico com Termo de Wess-Zumino

Um outro importante modelo pode ser obtido quando adicionamos à ação (1.1) um termo de interação, consistente com as invariâncias por reparametrizações e escalas rígidas, chamado "termo de Wess-Zumino":

$$S_{WZ} = \frac{1}{2} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} B_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial_\nu \phi^j \quad (1.15)$$

com

$$\begin{aligned} \epsilon^{01} &= -\epsilon^{10} = +1 \\ \epsilon^{00} &= \epsilon^{11} = 0 \end{aligned}$$

O objeto $B_{ij}(\phi)$ é um tensor de segunda ordem ou bi-forma. Para se entender o seu significado geométrico escrevemos a ação $S = S_\sigma + S_{WZ}$ em coordenadas do cone-de-luz

$$S = \int dx^+ dx^- [g_{ij}(\phi) - B_{ij}(\phi)] \partial_+ \phi^i \partial_- \phi^j \quad (1.16)$$

As equações de Euler-Lagrange dessa teoria são

$$\begin{aligned} \partial_+ \partial_- \phi^i + [\Gamma_{jk}^i(\phi) + H_{jk}^i(\phi)] \partial_+ \phi^j \partial_- \phi^k = \\ = \hat{D}_+ \partial_- \phi^i = \hat{D}_- \partial_+ \phi^i = 0 \end{aligned} \quad (1.17)$$

onde $\Gamma_{jk}^i(\phi)$ é o símbolo de Christoffel usual e

$$\begin{aligned} H_{ijk}(\phi) &\equiv \frac{1}{2} (B_{ij,k} + B_{jk,i} + B_{ki,j}) \\ (\hat{D}_+)_k^i &\equiv \partial_+ \delta_k^i + (\Gamma_{jk}^i + H_{jk}^i) \partial_+ \phi^j = \partial_+ \delta_k^i + \hat{\Gamma}_{+jk}^i \partial_+ \phi^j \\ (\hat{D}_-)_k^i &\equiv \partial_- \delta_k^i + (\Gamma_{jk}^i - H_{jk}^i) \partial_- \phi^j = \partial_- \delta_k^i + \hat{\Gamma}_{-jk}^i \partial_- \phi^j \end{aligned} \quad (1.18)$$

Vemos, portanto, que $\hat{D}_\pm$ contêm as conexões afim

$$\hat{\Gamma}_{jk}^i(\pm) = \Gamma_{jk}^i \pm H_{jk}^i \quad (1.19)$$

Podemos dizer então que, geometricamente, o rotacional da bi-forma de Wess–Zumino dá a torção sobre a variedade, H_{ijk} , que é um tensor totalmente anti-simétrico.

A função β_{ij} para esse modelo é [19]:

$$\beta_{ij}(\phi) = -\frac{f^2}{2\pi} \hat{R}_{ij}(\phi) - \frac{f^4}{6\pi^2} R_{mkti}(\phi) R_j^{(kl)m}(\phi) + \mathcal{O}(f^6) \quad (1.20)$$

onde

$$\hat{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - H_{\mu\rho\sigma} H_{\nu}^{\rho\sigma}$$

(c) Teoria de Cordas Bosônicas Fechadas

Consideremos agora uma teoria de cordas bosônicas fechadas em sua formulação primeiro-quantizada. A construção dessa teoria é feita tomando um espaço-tempo D -dimensional M com coordenadas X^μ ($\mu = 0, 1, \dots, D-1$) e métrica $g_{\mu\nu}(X)$. A posição de uma corda em M é dada por uma curva $X^\mu(\sigma)$ parametrizada por σ . Esta corda quando se propaga varre uma superfície bidimensional, a “folha-mundo”, $X^\mu(\sigma, \tau) \equiv X^\mu(\xi)$, parametrizada por σ e τ (ou ξ^a , $a = 0, 1$; $\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \sigma$).

É natural então, definir a seguinte ação para essa teoria:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \gamma^{ab} g_{\mu\nu} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \quad (1.21)$$

onde $\gamma_{ab}(\xi)$ é a métrica da folha-mundo e α' é um parâmetro dimensional relacionado com a tensão da corda, chamado declividade de Regge. A ação (1.21) pode ser interpretada como uma teoria de campos bidimensional com campos escalares $X^\mu(\xi)$ tomando valores sobre a variedade M , ou seja, um modelo sigma não-linear com espaço-alvo M .

Um passo além pode ser dado nesse ponto observando que (1.21) é invariante sob transformações gerais de coordenadas (invariância por reparametrizações)

$$\begin{aligned}\xi^a &\rightarrow \xi'^a(\xi) \\ \gamma_{ab}(\xi) &\rightarrow \gamma'_{ab}(\xi') = \frac{\partial \xi^c}{\partial \xi'^a} \frac{\partial \xi^d}{\partial \xi'^b} \gamma_{cd}(\xi)\end{aligned}\quad (1.22)$$

e de Weyl local sobre a folha-mundo

$$\gamma_{ab}(\xi) \rightarrow e^{\lambda(\xi)} \gamma_{ab}(\xi) \quad (1.23)$$

onde $\lambda(\xi)$ é uma função arbitrária local. Assim, com a liberdade por reparametrizações na folha-mundo oferecida pelo modelo, pode-se escolher um gauge no qual a métrica γ_{ab} seja chata e portanto (omitiremos detalhes) $M = M_2 \times L$ sendo

$M_2 \rightarrow$ espaço de Minkowski bidimensional com coordenadas $X^\pm$,
 $L \rightarrow$ espaço curvo com coordenadas X^i ($i = 1, 2, \dots, 24$).

Finalmente, é possível então, encontrar a seguinte ação no gauge de cone-de-luz:

$$S_{LC} = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\sigma d\tau g_{ij}(X) \partial_+ X^i \partial_- X^j \quad (1.24)$$

que descreve um modelo sigma não-linear cujo espaço-alvo é o espaço "transverso L " com métrica definida positiva g_{ij} . Essa ação é agora manifestamente invariante sob o grupo de Lorentz $SO(24)$ que gera as rotações entre os 24 X^i 's. Entretanto, o grupo completo $SO(25, 1)$, pode ainda ser construído e a álgebra se fecha.

Fazendo expansão em modos obtém-se que o espectro dessa teoria de cordas contém uma torre infinita de estados massivos e um setor de massa zero. Este último, consistindo de grávitons sem massa $g_{ij}(X)$ (tensor de 2ª ordem simétrico), campo de gauge $B_{ij}(X)$ (tensor de 2ª ordem anti-simétrico) e um campo escalar chamado dílaton.

(d) Cordas Bosônicas em Campos de Fundo

A descrição de uma única corda se propagando em campos de fundo (variedade do espaço-tempo e os campos de matéria) é feita supondo que os campos tenham valores esperados no vácuo dados por $g_{\mu\nu}(X)$, $B_{\mu\nu}(X)$, $\Phi(X)$ e $C(X)$ (para o táquion). A ação (1.24) é então modificada para:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \left[\gamma^{ab} g_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \epsilon^{ab} B_{\mu\nu}(X) \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \Phi(X) R^{(\gamma)} + C(X) \right] \quad (1.25)$$

ϵ^{ab} é o tensor de Lévi-Civita e $R^{(\gamma)}$ é a curvatura escalar relacionada à métrica γ_{ab} . O termo $S_{dil} = 1/4\pi\alpha' \int d^2\xi \sqrt{\gamma} \Phi(X) R^{(\gamma)}$, introduzido por Fradkin e Tseytlin [20], embora não seja invariante de Weyl, garante a renormalizabilidade da teoria. É interessante agora, por questão de simplicidade, considerar como campos de fundo apenas o campo gravitacional $g_{\mu\nu}(X)$ e o campo tensorial anti-simétrico $B_{\mu\nu}(X)$; com isso a ação (1.25), escrita num "gauge conforme" ($g_{ab} = e^\lambda \delta_{ab}$), fica

$$S_{gB} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2\xi [g_{\mu\nu}(X) - B_{\mu\nu}(X)] \partial_+ X^\mu \partial_- X^\nu \quad (1.26)$$

que como podemos observar, com as devidas modificações na notação, é equivalente a ação (1.16) de um modelo sigma não-linear com termo de Wess-Zumino.

Voltemos agora a um ponto importante: sabe-se [7] que ao quantizar a teoria, a liberdade de reparametrizações permite a fixação de um gauge $\gamma_{ab} = e^\lambda \delta_{ab}$, chamado gauge conforme. Sabe-se também que no caso em consideração a invariância de Weyl faz com que o modo conforme $\lambda(\xi)$ se desacople clássica e quanticamente somente em $D = 26$. A questão que surge agora é a de se saber quando o modo conforme desacopla-se quanticamente

na presença de campos de fundo. A resposta é que isso ocorrerá [21] se e somente se a simetria de Weyl for mantida no nível quântico. Porém, como sabemos, o grupo de Weyl tem como subgrupo a invariância de escala

$$\gamma_{ab}(\xi) \rightarrow a\gamma_{ab}(\xi)$$

Esse grupo, como já dissemos antes, é quebrado pelas funções- β do grupo de renormalização. Então, uma condição necessária para que se ter a propagação consistente de cordas em campos de fundo é que as funções- β do modelo sigma se anulem [8]. Isso nos permite, então, encontrar ações efetivas e conseqüentemente física a baixas energias. Olhemos os seguintes exemplos:

- (i) *Tomemos o caso mais simples: $g_{\mu\nu}$ descrevendo uma variedade curva sem torção ($B_{\mu\nu} = 0$). Nesse caso observamos que, em ordem de um loop (ver (1.14)), a condição para o anulamento de β é $R_{\mu\nu} = 0$.*

Pois bem, sabemos que ao considerarmos a gravitação de Einstein em 26 dimensões, a ação da teoria é

$$S_{E-H}^{26} = \int d^{26}x \sqrt{g} R(x) \quad (1.27)$$

cujas equações clássicas de movimento são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0$$

na ausência de matéria $R_{\mu\nu} = 0$.

Vemos então, que nessa ordem, a condição para o anulamento da função- β é, claramente, a equação clássica de movimento para o campo que descreve o modo do gráviton da corda. Esse resultado, colocado de outra forma, diz que a baixas energias, a gravitação de Einstein descreve a corda, fato esse já conhecido de outros cálculos (amplitudes de cordas). Se formos agora para

ordens superiores em loops (ver novamente (1.14)) no modelo sigma perceberemos que a condição de anulamento de β possui correções em potências de α' ($2\pi\alpha' \leftrightarrow f^2$). Dessa maneira se deduz que a ação de baixas energias, S_{E-H}^{26} , recebe também correções em (α') da forma:

$$\alpha' \int d^{26}x \sqrt{g} R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (1.28)$$

implicando correções às equações de Einstein.

(ii) Quando a variedade admite torção ($B_{\mu\nu} \neq 0$) temos uma teoria de Einstein-Cartan, cuja ação é:

$$S_{E-H}^{26} = \int d^{26}x \sqrt{g} \left(R - \frac{1}{3} H_{\mu\nu\rho} H^{\mu\nu\rho} \right) \quad (1.29)$$

Também nesse caso a condição de anulamento para a função- β (em ordem de um loop) $\hat{R}_{\mu\nu} = 0$ é equivalente às equações de movimento obtidas de (1.29).

(iii) No caso em que a ação é dada por (1.25) (sem o termo $C(X)$), Callan et al. [8] usando teoria de perturbação de campo de fundo encontraram os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \beta_{\mu\nu}^g &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H_\mu^{\lambda\sigma} H_{\nu\lambda\sigma} - \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + \mathcal{O}(\alpha') \\ \beta_{\mu\nu}^B &= \frac{1}{2} \nabla^\lambda H_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla^\lambda \Phi H_{\lambda\mu\nu} + \mathcal{O}(\alpha') \\ \beta^\Phi &= -R + \frac{1}{12} H^2 + 2\nabla^2 \Phi + (\nabla\Phi)^2 + \mathcal{O}(\alpha') \end{aligned}$$

Como antes, a condição de que as três funções- β se anulem dão o conjunto de equações de movimento para os campos de fundo.

A ação efetiva, da qual as equações podem ser obtidas são

$$\begin{aligned} S_{ef}^{fechada} &= \int d^D x \sqrt{g} e^\Phi \left[R - \frac{1}{12} H^2 - (\nabla \Phi)^2 - 2 \nabla^2 \Phi \right] = \\ &= - \int d^D x \sqrt{g} e^\Phi \beta^\Phi \end{aligned}$$

onde D é a dimensão do espaço-tempo.

Esses exemplos nos dão uma ótima ilustração de como o procedimento apresentado pode ser útil na obtenção de ações efetivas de teorias de campos para modos de cordas. O estudo das soluções das equações advindas daí podem levar a resultados interessantes em programas de compatificações de cordas [22].

1.3.2—O MODELO SIGMA NÃO-LINEAR SUPERSIMÉTRICO (1,1)

A ação (1.1) pode ser estendida para se incluir férmions (espinores) em sua descrição. Em duas dimensões (1 + 1), pode-se provar a existência de espinores de Weyl, Majorana e Majorana-Weyl. Ademais, nessa dimensão, a representação espinorial irredutível tem uma componente (representa um espinor de Majorana-Weyl) e os "boosts" de Lorentz que agem da seguinte forma

$$\begin{aligned} \partial_\pm \phi^i &\rightarrow e^{\pm \beta(x)} \partial_\pm \phi^i \\ \psi_\pm^i &\rightarrow e^{\pm \frac{1}{2} \beta(x)} \psi_\pm^i \end{aligned} \tag{1.30}$$

onde ψ_+^i, ψ_-^i representam espinores das duas quiralidades distintas.

Uma maneira de se fazer a extensão supersimétrica é tomar N campos escalares $\phi^i(x)$, $2N$ campos espinoriais (ψ_+^i, ψ_-^i), construir um supercampo e escrever uma ação explicitamente supersimétrica no superespaço. Postula-se

em seguida, a existência de uma única carga supersimétrica de cada quiralidade, $Q_{\pm}$, tal que

$$Q_+^2 = P_+ = -i \frac{\partial}{\partial x^+} = -i \partial_+$$

$$Q_-^2 = P_- = -i \frac{\partial}{\partial x^-} = -i \partial_-$$

$$\{Q_+, Q_-\} = 0 \quad (1.31)$$

Estas cargas podem ser realizadas por operadores diferenciais agindo sobre o superespaço consistindo de coordenadas $x^{\pm}$ e $\theta^{\pm}$ (variáveis de Grassmann), isto é,

$$Q_{\pm} = i \frac{\partial}{\partial \theta^{\mp}} - \theta^{\mp} \partial_{\pm} \quad (1.32)$$

Um supercampo escalar (de Lorentz) real, pode ser escrito como:

$$\Phi(x^{\pm}, \theta_{\pm}) = \phi(x) + i \theta_- \psi_+(x) + i \theta_+ \psi_-(x) + i \theta_+ \theta_- F(x) \quad (1.33)$$

O supermultiplete é formado por ϕ , ψ_+ e ψ_- , sendo $F(x)$ um campo escalar auxiliar que pode ser eliminado já que não possui dinâmica, isto é, satisfaz uma equação de movimento algébrica. A ação para o modelo sigma não-linear supersimétrico é então obtida, tomando no superespaço uma medida $dx^+ dx^- d\theta_+ d\theta_-$, N supercampos $\Phi(x, \theta)$ e um operador covariantemente supersimétrico

$$\tilde{D}_{\pm} \equiv i \frac{\partial}{\partial \theta^{\mp}} + \theta^{\mp} \partial_{\pm} \quad (1.34)$$

satisfazendo as relações $\{\tilde{D}_{\pm}, Q_{\pm}\} = 0$.

Dessa forma temos:

$$S_{\Psi}^{(1,1)} = \int dx^+ dx^- d\theta_+ d\theta_- g_{ij}(\Phi) \tilde{D}_+^i \Phi \tilde{D}_-^j \Phi \quad (1.35)$$

Essa ação descreve o modelo conhecido como modelo sigma não-linear supersimétrico (1,1) já que possui uma supercarga de cada quiralidade[†]. Para se escrever (1.35) em termos dos campos componentes devemos simplesmente inserir a expansão dos supercampos, realizar as integrações $\theta_{\pm}$ e eliminar os campos auxiliares $F^i(x)$ através de suas equações de movimento, assim encontramos

$$S_{\psi}^{(1,1)} = \int dx^+ dx^- \left[g_{ij}(\Phi) \partial_+ \phi^i \partial_- \phi^j + i \psi_+^a D_- \psi_+^a + i \psi_-^a D_+ \psi_-^a + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} R_{abcd}(\phi) \psi_+^a \psi_+^b \psi_-^c \psi_-^d \right] \quad (1.36)$$

Aqui os espinores foram referidos ao espaço tangente com a ajuda dos "vielbein"

$$e^a{}_i(\phi) e_{aj}(\phi) = g_{ij}(\phi)$$

$$\psi_{\pm}^a = e^a{}_i \psi_{\pm}^i$$

$$R_{abcd} \equiv e^i{}_a e^j{}_b R_{ijcd} = \text{tensor de curvatura}$$

$$R_{ijcd} \equiv \partial_i \omega_{jcd} - \partial_j \omega_{icd} + [\omega_i, \omega_j]_{cd}$$

$\omega_i{}^{ab}$ é a conexão de spin dos sistemas, aparecendo também em

$$D_{\pm} \psi^a \equiv \partial_{\pm} \psi^a + \omega_{\pm ab} \psi^b \quad \text{onde} \quad \omega_{\pm ab} \equiv \omega_{iab} \partial_{\pm} \phi^i$$

Este modelo possui também uma função $\beta_{ij}(\phi)$ útil na correspondência com supercordas, e é perturbativamente dada por [12]

$$\beta_{ij}(\phi) = -\frac{f^2}{2\pi} R_{ij} - \frac{f^8 \zeta(3)}{3(4\pi)^4} \tilde{T}_{(ij)}(\phi) \quad (1.37)$$

[†] Em $D = 2$ as supercargas Q_+ , Q_- de quiralidade positiva e negativa definem uma supersimetria (p, q) de acordo com Hull e Witten.

onde R_{ij} é o tensor de Ricci e $\tilde{T}_{ij}$ contém uma soma finita de produtos de tensores de Riemann e derivadas covariantes atuando sobre os mesmos, que não explicitaremos aqui.

Pode-se mostrar que a teoria de supercordas fechadas (tipo II) é a relevante nesse caso. Observando a expressão (1.37) dada acima notamos que não há contribuições das ordens de dois e três loops, isto significa que estão ausentes na ação de Einstein correções de $\mathcal{O}(\alpha'^2)$ e $\mathcal{O}(\alpha'^3)$ embora esteja presente $\mathcal{O}(\alpha'^4)$ [23]. Novamente esses resultados se apresentam como importantes para o estudo de compactificações [24].

1.3.3—O MODELO SIGMA NÃO-LINEAR SOBRE UMA VARIEDADE DE KÄHLER

Vamos apresentar agora uma breve discussão do modelo sigma não-linear supersimétrico $(2, 2)$.

Sob certas condições, o modelo sigma supersimétrico $\mathcal{N} = 1$ pode ser estendido e se tornar um modelo $\mathcal{N} = 2$. Zumino [25] provou que existirá um novo par de supersimetrias se e somente se o modelo $(1, 1)$ for definido sobre uma variedade de Kähler. Para melhor entender isso, é útil fazer uma breve revisão da geometria de variedades complexas e geometria de Kähler.

Uma variedade complexa n -dimensional pode sempre ser olhada como uma variedade de Riemann real com coordenadas ϕ^A , A percorrendo os n índices holomórficos, $i = 1, 2, \dots, n$ e os n índices anti-holomórficos $\bar{i} = 1, 2, \dots, n$. Temos também $\bar{\phi}^{\bar{i}} = \phi^{\bar{i}}$.

Um vetor V_A possui, portanto, $2n$ componentes $V_i, V_{\bar{i}}$; e todas as definições da geometria Riemanniana tais como conexão, curvatura, etc. ainda são válidas desde que expressas em termos dos índices $A, B, \dots$. Em particular,

existe um elemento de linha real tomando a forma

$$ds^2 = g_{AB} d\phi^A d\phi^B \quad \text{com} \quad g_{AB} = g_{BA} \quad (1.38)$$

A realidade é assegurada pelas condições

$$g_{ij} = \bar{g}_{\bar{i}\bar{j}} \quad \text{e} \quad g_{i\bar{j}} = \bar{g}_{j\bar{i}} \quad (1.39)$$

Fazendo-se agora uma restrição sobre a variedade complexa do tipo $g_{ij} = g_{\bar{i}\bar{j}} = 0$, o elemento ds^2 toma a forma Hermitiana $ds^2 = 2g_{i\bar{j}} d\phi^i d\bar{\phi}^{\bar{j}}$ e nós dizemos que a variedade é Hermitiana. Uma restrição adicional pode ser feita impondo à métrica as seguintes condições

$$\partial_k g_{i\bar{j}}(\phi, \bar{\phi}) = \partial_i g_{k\bar{j}}(\phi, \bar{\phi}) \quad (1.40a)$$

$$\partial_{\bar{k}} g_{i\bar{j}}(\phi, \bar{\phi}) = \partial_{\bar{j}} g_{i\bar{k}}(\phi, \bar{\phi}) \quad (1.40b)$$

chamadas de condições de Kähler. Nesse caso dizemos ter uma variedade de Kähler. Nessa geometria ocorrem importantes simplificações. Damos abaixo alguns exemplos:

(i) Γ_{BC}^A tem todas as componentes nulas exceto aquelas da forma $\bar{\Gamma}_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}}$.

(ii) O tensor de curvatura R_{ABCD} é tal que:

$$R_{i\bar{k}j\bar{l}} = \partial_j \partial_{\bar{l}} g_{i\bar{k}} - g^{m\bar{n}} \partial_j g_{i\bar{n}} \partial_{\bar{l}} g_{m\bar{k}} \quad (1.41)$$

chamado de curvatura de Kähler, que tem como únicas componentes não-nulas $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$, $R_{i\bar{j}\bar{k}l}$, $R_{i\bar{j}k\bar{l}}$ e $R_{i\bar{j}\bar{k}l}$.

(iii) As identidades cíclicas e de Bianchi se reduzem a

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{k\bar{j}i\bar{l}} \quad (1.42a)$$

$$R_{i\bar{j}k\bar{l}} = R_{i\bar{l}k\bar{j}} \quad (1.42b)$$

$$D_m R_{i\bar{j}k\bar{l}} = D_i R_{m\bar{j}k\bar{l}} \quad (1.43a)$$

$$D_{\bar{m}} R_{i\bar{j}k\bar{l}} = D_{\bar{j}} R_{i\bar{m}k\bar{l}} \quad (1.43b)$$

(iv) Um “tensor de Kähler”, é um tensor simétrico Hermitiano tal que $T_{ij} = T_{\bar{i}\bar{j}} = 0$, satisfazendo

$$\partial_k T_{i\bar{j}} = \partial_i T_{k\bar{j}}, \quad \partial_{\bar{k}} T_{i\bar{j}} = \partial_{\bar{j}} T_{i\bar{k}}. \quad (1.44)$$

Esse tensor define uma bi-forma $T = T_{i\bar{j}} d\phi^i \wedge d\bar{\phi}^{\bar{j}}$ e é localmente derivável de um potencial escalar S , isto é, $T_{i\bar{j}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} S(\phi, \bar{\phi})$

(v) O tensor de Ricci é um tensor de Kähler, ou seja,

$$R_{ij} = R_{\bar{i}\bar{j}} = 0 \quad \text{e} \quad R_{i\bar{j}} = g^{l\bar{k}} R_{i\bar{k}j\bar{l}} = \partial_i \partial_{\bar{j}} \ln(g_{m\bar{n}}) \quad (1.45)$$

A conexão entre geometria de Kähler e supersimetria foi então estudada por Zumino que encontrou a seguinte Lagrangeana no superespaço para o modelo sigma não-linear supersimétrico em $\mathcal{N} = 2$

$$\mathcal{L} = \int d^2\theta d^2\bar{\theta} K(\Phi^i \bar{\Phi}^{\bar{j}}) \quad (1.46)$$

onde K é o chamado potencial de Kähler.

Decompondo-se Φ , expandindo-se $K(\Phi^i \bar{\Phi}^{\bar{j}})$ e eliminando os campos auxiliares, obtém-se (1.46) em termos de campos componentes; deixaremos para apresentá-la mais tarde numa forma conveniente ao problema tratado.

Modelos descritos por (1.46) têm surgido em acoplamentos com supergravitação $\mathcal{N} = 1, 2$ [26, 27] e mais recentemente como relevantes para compatificações de teorias de cordas deca-dimensionais sobre espaços de Calabi-Yau (variedades de Kähler Ricci-flat). Questões sobre sua renormalizabilidade quando definidas em três dimensões serão discutidas por nós no capítulo 2.

1.4-TEORIAS DE (SUPER)MEMBRANAS

Nos últimos três anos uma extensiva discussão tem se realizado no sentido de se obter teorias de objetos estendidos, consistentes com a Mecânica Quântica, e que, além do mais, generalizem a teoria de cordas, ou que pelo menos desempenhe um papel importante na aplicação de tais teorias para a física de partículas, usando por exemplo, a supercorda tipo II [7] como um multiplete de grávitons e a (super)membrana como o setor de matéria [28]. Porém o atrativo maior para se estudar esses objetos estendidos foi a descoberta [29,30] de se poder formular uma teoria supersimétrica de membranas (2-branas) que as descrevesse quando se propagando em uma supergravitação de fundo 11-dimensional. Em outras palavras, descobriu-se que a ação de Green-Schwarz para a supercorda 10-dimensional podia ser generalizada de tal forma a incluir a supergravitação em onze dimensões.

1.4.1-MEMBRANAS DE DIRAC, HOWE-TUCKER E SUPERSIMETRIZAÇÃO

Historicamente, foi Dirac [31] em 1962, o primeiro a propor uma teoria envolvendo objetos estendidos. A idéia era considerar os elétrons como tais objetos e se ter uma teoria capaz de descrevê-los. Dirac propôs, então, uma ação de uma membrana relativística, isto é, uma ação para uma superfície bidimensional movendo-se no tempo. Contudo, nessa descrição, o spin intrínscico do elétron estendido não foi considerado, e a dinâmica era portanto, a de uma membrana bosônica obtida minimizando o volume-mundo varrido por ela

$$I_D = - \int d^3\xi \sqrt{\det(\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu})} \quad (1.47)$$

onde $\xi^i = (\tau, \sigma, \rho)$ ($i = 0, 1, 2$) são as três coordenadas sobre o volume-mundo

(τ parametriza a evolução temporal) e os campos X^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) dão a sua localização no espaço-tempo de Minkowski.

A experiência adquirida com a teoria de cordas sugere a existência de duas maneiras de se introduzir supersimetria em teorias de membranas: quando a supersimetria é definida no espaço-tempo mas não no volume-mundo obtém-se as chamadas "supermembranas", procedendo-se de outra forma, isto é, introduzindo a supersimetria no volume-mundo mas não no espaço-tempo obtém-se as chamadas "membranas com spin" ("spinning membrane"). É importante dizer que para partículas e cordas ambas as extensões supersimétricas já foram realizadas e sabe-se, além disso, que sob certas condições a "corda com spin" (spinning string) e a supercorda se tornam formulações equivalentes da mesma teoria. Essas construções e a possível equivalência no contexto de membranas ainda é uma questão em aberto.

A primeira tentativa de se construir uma membrana com spin foi feita por Howe e Tucker [32]. Eles primeiramente reescreveram a ação de Dirac (1.47) na forma:

$$I_{HT} = -\frac{1}{2} \int d^3\xi \left[\sqrt{-g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu} - \sqrt{-g} \right]$$

ou

$$I_{HT} = -\frac{1}{2} \int d^3\xi \sqrt{-g} (\text{tr}(A) - 1) \quad (1.48)$$

aqui g_{ij} é a métrica do volume-mundo e aparece como campos auxiliares (independentes),

$$g = \det(g^{ij}) \quad \text{e} \quad A_j^i = g^{ik} \partial_k X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (1.49)$$

A ação (1.48) é então considerada como uma teoria de campos tridimensional para campos escalares X^μ acoplados à gravitação.

Ao fazerem a extensão supersimétrica, Howe e Tucker notaram que os campos da supergravitação apareciam satisfazendo certas equações de vínculo diferenciais, com g_{ij} deixando de ser uma variável auxiliar e conseqüentemente tornando (1.48) inequivalente a (1.47). Por outro lado, ao liberarem os vínculos dos campos de supergravitação, a supersimetrização requeria a inclusão de um termo cosmológico $\sqrt{-g}R$ fazendo com que a parte bosônica da ação se tornasse inequivalente a (1.47).

O insucesso acima relatado, levou muitos pesquisadores na área a procurarem outros modelos de membranas com spin que fossem equivalentes a I_D após a eliminação dos campos auxiliares. Como exemplos, vale apenas citar as ações propostas por Dolan-Tchrakian [33] e Inami-Yahikozawa [34]

$$I_{DT} = -\frac{1}{2} \int d^3\xi \sqrt{-g} \left[\text{tr}(A) - \frac{1}{2} \text{tr}(A^2) + \frac{1}{2} (\text{tr}(A))^2 \right] \quad (1.50)$$

$$I_{IY} = \int d^3\xi \sqrt{-g} (\text{tr}(A))^{3/2} \quad (1.51)$$

Modelos descritos por (1.50) e (1.51) admitem soluções da equação de g_{ij} que conduzem a I_D .

Em resumo pode-se estabelecer a seguinte definição: Uma ação é dita ser uma ação de membranas com spin ("spinning membranes") se:

- (i) possuir uma supersimetria local no volume-mundo realizada linearmente.
- (ii) após a eliminação de todos os campos auxiliares e fazendo os férmions irem a zero se reduzir a I_D .

Utilizando-se destes critérios Bergshoeff et al. [35] provaram que a supersimetrização de qualquer ação bosônica equivalente a I_D implica na existência de uma supersimetrização de I_{HT} e que, apenas com o cálculo tensorial usual em três dimensões, esta ação (I_{HT}) não admite uma extensão do tipo "membranas com spin". Tudo isso, portanto, conseqüência do termo

cosmológico que não permite a supersimetrização no sentido da definição dada.

Apesar dos resultados acima, agora com "status" de "teorema no-go" [35], Lindstrom e Rock [36] conseguiram construir uma "membrana com spin" supersimetrizando a ao conformalmente invariante (1.51). Entretanto, deve-se ressaltar que estas transformaes so terrivelmente complicadas e fora do formalismo do clculo tensorial usual.

1.4.2—(SUPER) P-BRANAS

As aes (1.47), (1.48) podem ser generalizadas para objetos estendidos d -dimensionais: 1 tempo e $p = (d-1)$ dimenses espaciais movendo-se em um espao-tempo com 1 tempo e $(D-1)$ dimenses espaciais que por enquanto consideraremos como de Minkowski de mtrica $\eta_{\mu\nu}$, $\text{diag}(-, +, \dots, +)$. Esses objetos so agora chamados de " p -branas" ou simplesmente "membranas" e varrem um volume-mundo com coordenadas ξ^i ($i = 1, \dots, d$).

A ao I_D torna-se

$$I_{DNG} = -T \int d^d \xi \sqrt{-\det(\partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu})} \quad (1.52)$$

A constante T , introduzida aqui, caracteriza a tenso da p -brana e deixa I_{DNG} adimensional. Em $d = 3$ obtemos a ao de uma membrana, e, em $d = 2$, a ao de Nambu-Goto para uma corda.

A ao de Howe-Tucker (1.48) agora para p -branas tem a forma:

$$I_{HTP} = -\frac{1}{2}T \int d^d \xi [\sqrt{-g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu} - (d-2)\sqrt{-g}] \quad (1.53)$$

As equaes de movimento clssicas de ambas (1.52), (1.53) so equivalentes e obtidas pelas variaes das respectivas aes com relao a g_{ij} e aos

campos X^μ . Assim temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{ij} g^{kl} \partial_k X^\mu \partial_l X^\nu \eta_{\mu\nu} - \sqrt{-g} \partial_k X^\mu \partial_l X^\nu g^{ik} g^{jl} = \\ = \frac{1}{2} (d-2) \sqrt{-g} g^{ij} \end{aligned} \quad (1.54)$$

tomando-se o traço, obtém-se ($d \neq 0$)

$$\begin{aligned} g^{kl} \partial_k X^\mu \partial_l X^\nu \eta_{\mu\nu} = d \Rightarrow g_{ij} = \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu} = \\ = \text{métrica induzida sobre o volume mundo} \end{aligned} \quad (1.55)$$

também

$$\partial_i (\sqrt{-g} g^{ij} \partial_j X^\nu \eta_{\mu\nu}) = 0 \quad (1.56)$$

Quando $d = 2$, o termo cosmológico desaparece, e (1.53) possui uma simetria conforme fundamental em teorias de cordas mas ainda não satisfatoriamente entendida em teorias de membranas.

Para finalizar, devemos dizer que se pode substituir $\eta_{\mu\nu}$ por $G_{\mu\nu}(X)$, introduzir além disso, um tensor anti-simétrico $B_{\mu\nu\dots\rho}(X)$ de ordem d , acoplado-se via termo de Wess-Zumino e assim generalizar (1.53) para:

$$\begin{aligned} I = -\frac{1}{2} T \int d^d \xi \left[\sqrt{-g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X^\nu G_{\mu\nu}(X) - (d-2) \sqrt{-g} + \right. \\ \left. + \frac{2}{d!} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_d} \partial_{i_1} X^{\mu_1} \partial_{i_2} X^{\mu_2} \dots \partial_{i_d} X^{\mu_d} B_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d}(X) \right] \end{aligned} \quad (1.57)$$

que permite uma passagem mais direta para supermembranas [30].

A despeito do rápido progresso realizado até o presente, o fato é que a teoria ainda se encontra no seu "jardim de infância" e muitas questões estão ainda em aberto. Como exemplos, temos o problema, já referido anteriormente, de se encontrar uma equivalência de "membranas com spin" e supermembranas no mesmo sentido da equivalência entre as "cordas com spin"

de Neveu-Ramon-Schwarz e as supercordas de Green-Schwarz e também a possibilidade de supermembranas $D = 11$ vir a ser uma teoria que abrigue a gravitação quântica. Porém, existem no nosso entender, duas outras questões cruciais a se resolver. Uma delas se refere a falta de uma melhor compreensão do que é, e, qual é, o papel de uma invariância conforme sobre o volume-mundo ($d \geq 3$, o grupo conforme é de dimensão finita) e até que ponto é lícito usar tal invariância para se obter, por exemplo, dimensões críticas e físicas de baixas energias. O outro, é o problema relativo à sua não-renormalizabilidade. Este último será objeto de nosso estudo no capítulo seguinte onde apresentaremos cálculos perturbativos realizados em modelos sigma não-lineares tridimensionais.

CAPÍTULO 2

MODELOS SIGMA NÃO-LINEARES BOSÔNICO E SUPERSIMÉTRICOS EM TRÊS DIMENSÕES: DIVERGÊNCIAS ULTRAVIOLETA E RENORMALIZABILIDADE

2.1-INTRODUÇÃO

Como já enfatizado anteriormente, os modelos sigma não-lineares bidimensionais têm se revelado de grande utilidade em teorias de cordas. Em particular, as equações de movimento para os campos do setor sem massa das cordas podem ser obtidos de uma Lagrangeana efetiva de cordas a baixas energias. Esta importante relação tem provocado uma retomada a trabalhos anteriores a esta descoberta e a novos esforços no estudo das propriedades de renormalização dos modelos sigma de interesse. Um resultado especialmente importante é que os modelos sigma não-lineares supersimétricos ($D = 2$) definidos sobre variedades Ricci-flat são finitos até ordem de três "loops" [9, 10]. O caso $\mathcal{N} = 4$, finito em todas as ordens de perturbação [37].

No nosso entender, o estudo das propriedades ultravioleta desses modelos quando os campos são mapeamentos do espaço-tempo em variedades Riemannianas, deverá ser, também, de grande relevância na medida que o papel da invariância conforme em teorias de membranas for bem compreendido. Dentro desse enfoque, nós realizamos cálculos explícitos de diagramas de Feynman até a ordem de dois "loops", encontramos os contratermos e discutimos extensivamente a renormalizabilidade dos modelos bosônico e supersimétricos.

Neste capítulo nós apresentaremos os resultados obtidos, porém faremos, inicialmente, uma breve recapitulação do formalismo do campo de fundo e do método das coordenadas normais.

2.2—O MÉTODO DO CAMPO DE FUNDO E A EXPANSÃO EM COORDENADAS NORMAIS

O método de campo de fundo vem se tornando em teoria quântica de campos, uma técnica fundamental no tratamento de teorias de gauge, gravitação e modelos sigma. A grande vantagem de se usar este formalismo é a simplicidade dos cálculos; além disso, preservam-se também as invariâncias da teoria. Em teorias de gauge, por exemplo, a quantização se dá mantendo-se explicitamente a invariância de gauge. Por outro lado, em modelos sigma não-lineares, a invariância por reparametrizações dos campos escalares é que deve ser preservada. Neste caso, usa-se junto com esse método, a expansão em coordenadas normais que permite cálculos de correções radiativas de uma maneira manifestamente covariante.

A idéia central desse método[†] é a separação do campo “total” em uma parte de campo de fundo (clássica) e uma outra de campo quântico que deve ser integrada via integração funcional. Esse artifício foi introduzido por DeWitt em cálculos de um “loop” para teorias de Yang-Mills e gravitação quântica [38]. Em seguida foi modificado por Honerkamp para ser aplicável em modelos sigma não-lineares [39], também em processos de um “loop”. A extensão para todas as ordens em teoria de perturbação, foi realizada um pouco mais tarde por 'tHooft [40], DeWitt [41], Boulware [42] e Abbott [43].

Antes de apresentarmos a aplicação desse método ao modelo de nosso

[†] Historicamente este método foi primeiramente usado por Schwinger em 1951, no tratamento de correções radiativas do propagador do fóton.

interesse, daremos inicialmente uma ilustração do uso dessa técnica numa teoria de campo escalar mais simples.

2.2.1-O MODELO ϕ^4 EM QUATRO DIMENSÕES

Em teoria de campos a ação efetiva $\Gamma[\phi]$ desempenha um papel importante na construção da matriz S , que é a quantidade física realmente relevante. Como já comentado, o método do campo de fundo nos fornece uma maneira eficiente de calcular a ação efetiva. Dessa forma, dada uma ação $I[\phi]$ e uma fonte J , o funcional gerador para os gráficos desconexos, é dado por

$$Z[J] = \int [d\phi] \exp i (I[\phi] + J \cdot \phi)$$

O funcional gerador para as funções de Green conexas é definido por

$$e^{iW[J]} = \int [d\phi] \exp i (I[\phi] + J \cdot \phi) \equiv Z[J]$$

ou

$$W[J] = -i \ln Z[J]$$

que está relacionado ao funcional gerador para os gráficos 1PI ("one particle irreducible") por uma transformação de Legendre

$$W[J] = \Gamma[\bar{\phi}] + J \cdot \bar{\phi} \quad (2.1)$$

onde $\bar{\phi}$ é o valor esperado no vácuo do campo quântico ϕ na presença da fonte J , isto é,

$$\bar{\phi} = \frac{\delta W}{\delta J} \quad (2.2)$$

Nesse ponto, separa-se o campo total ϕ em uma parte de fundo φ e uma flutuação quântica π ,

$$\phi = \varphi + \pi$$

para, em seguida, definir um novo funcional gerador $\widetilde{W}$ por

$$e^{i\widetilde{W}[\varphi, J]} = \int [d\pi] \exp i (I[\varphi + \pi] + J \cdot \pi) \equiv \widetilde{Z}[J]$$

ou

$$\widetilde{W}[\varphi, J] = -i \ln \widetilde{Z}[J]$$

Notemos que

$$\widetilde{W}[\varphi, J] = W[J] - J \cdot \varphi \quad (2.3)$$

Tomando a transformada de Legendre com respeito a J , obtém-se um funcional $\widetilde{\Gamma}$ dado por

$$\widetilde{\Gamma}[\varphi, \widetilde{\pi}] = \widetilde{W}[\varphi, J] - J \cdot \widetilde{\pi} \quad (2.4)$$

com

$$\widetilde{\pi} = \frac{\delta \widetilde{W}}{\delta J}$$

Imediatamente vemos que $\widetilde{\pi} = \overline{\phi} - \varphi$. Finalmente de (2.1), (2.3) e (2.4) encontramos

$$\widetilde{\Gamma}[\varphi, \widetilde{\pi}] = W[J] - J \cdot \varphi - J \cdot (\overline{\phi} - \varphi) = \Gamma[\overline{\phi}]$$

De outro modo

$$\widetilde{\Gamma}[\widetilde{\pi}, \varphi] = \Gamma[\widetilde{\pi} + \varphi]$$

Em particular, para $\widetilde{\pi} = 0$, nós obtemos

$$\widetilde{\Gamma}[0, \varphi] = \Gamma[\varphi]$$

Esta equação significa que a ação efetiva 1PI usual pode ser encontrada calculando $\widetilde{\Gamma}[0, \varphi]$, que não apresenta dependência de $\widetilde{\pi}$. $\widetilde{\Gamma}[0, \varphi]$ é a soma

dos gráficos de vácuo 1PI na presença de $\varphi(x)$. Essa é, então, a grande vantagem do método do campo de fundo, ou seja, nos permite obter a ação efetiva calculando somente gráficos 1PI, sem linhas quânticas externas, isto é, com apenas linhas de campo de fundo externas.

A fórmula da integral funcional para $\Gamma[\varphi]$ é

$$e^{i\Gamma[\varphi]} = \int [d\pi] \exp i \left\{ I[\varphi + \pi] - \int \pi \frac{\delta I}{\delta \varphi}[\varphi] \right\}$$

Na realidade, é preciso dizer que existem duas maneiras diferentes de se calcular $\tilde{\Gamma}[0, \varphi]$. Uma delas se refere a campos quase constantes. Neste caso, trata-se φ como um campo exato e soma-se todos os gráficos de vácuo 1PI usando $I[\pi + \varphi]$ para gerar as regras de Feynman. Calcula-se o propagador de π exatamente, na presença do campo de fundo φ . Essa é a maneira usada, por exemplo, no cálculo do potencial efetivo de teorias de campo escalar [44, 45]. A segunda forma de se calcular a ação efetiva é usar o fato da constante de acoplamento envolvida ser pequena, com o propósito de tratar o campo de fundo perturbativamente. Com isso, consideram-se gráficos de vácuo 1PI do campo π com os campos φ aparecendo como linhas externas. Neste caso o campo de fundo é arbitrário. Novamente, usa-se $I[\varphi + \pi]$ para gerar as regras de Feynman. O propagador do campo π é obtido da parte quadrática em π , de I . Os outros termos (não quadráticos) são tratados como interações. Deste modo, cada gráfico de Feynman é um funcional dos campos de fundo.

No caso de uma teoria ϕ^4 com ação dada por

$$I = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]$$

O termo de interação expandido, é

$$\frac{\lambda}{4!} \phi^4 = \frac{\lambda}{4!} (\varphi^4 + 4\varphi^3 \pi + 6\varphi^2 \pi^2 + 4\varphi \pi^3 + \pi^4)$$

Observando a expressão acima notamos a existência de vários vértices envolvendo os campos quânticos π e de fundo φ . Dessa forma, um gráfico típico a se calcular, por exemplo, na ordem de dois "loops" seria

Agora, se quiséssemos calcular a função de 4-pontos 1PI para este modelo, um gráfico contribuindo para esta função de Green, em três loops, seria

2.2.2-O MODELO SIGMA NÃO-LINEAR E A EXPANSÃO EM COORDENADAS NORMAIS

Procuraremos agora, implementar o método descrito acima no modelo sigma não linear [39, 6, 9]. A discussão será realizada em três dimensões, pois é a que nos interessa por razões já comentadas antes, ou seja, questões de renormalizabilidade e possível relevância em teorias de membranas.

Nós consideraremos aqui, o caso de um conjunto de campos escalares bosônicos ϕ^i , cuja ação é aquela dada por

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x g_{ij}(\phi) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j \quad (2.5)$$

A tentativa de se fazer uma separação linear usual do campo total ϕ^i em um campo de fundo φ^i e um campo quântico π^i , $\phi^i = \varphi^i + \pi^i$, não nos

leva a um formalismo manifestamente covariante, portanto, inconveniente em cálculos perturbativos. A razão disso se deve ao fato de que π^i não pode ser interpretado como um vetor. Em outras palavras, como φ^i e $\varphi^i + \pi^i$ tomam valores sobre a variedade, a diferença π^i entre esses pontos vizinhos não se transforma como um vetor, mas de uma forma complicada, sob reparametrização da variedade. Logo, cálculos perturbativos, dentro desse contexto, embora corretos, não apresentam uma invariância manifesta sob tal transformação.

A solução para o problema acima é introduzir uma separação não-linear entre os campos de fundo e quântico. Na prática, a separação mais usada é aquela baseada em geodésicas [46, 47, 6, 9]. A idéia básica consiste em expressar $\pi^i(x)$ como uma série de potências em termos de um novo campo quântico $\xi^i(x)$ que se transforme como um vetor contravariante. Dessa maneira, já que $S[\varphi + \pi(\xi)]$ é um escalar, os coeficientes da expansão em $\xi^i(x)$ são covariantes, o que nos possibilita obter a ação efetiva em função dos campos de fundo, além de propriedades de renormalização, através de cálculos de diagramas manifestamente covariante. O algoritmo usado para se chegar a esse resultado é conhecido como “método das coordenadas normais” [6, 9].

Para ver como funciona este método, consideremos dois pontos sobre a variedade, $\varphi^i = \lambda(0)$, $\varphi^i + \pi^i = \lambda^i(1)$. Suponhamos, agora, que estes pontos estejam suficientemente próximos de tal maneira que exista apenas uma única geodésica, parametrizada por $\lambda^i(s)$, conectando-os. O vetor $\lambda^i(s)$ satisfaz a seguinte equação diferencial de uma geodésica sobre M .

$$\frac{d^2}{ds^2} \lambda^i(s) + \Gamma_{jk}^i(\lambda(s)) \frac{d\lambda^j}{ds} \frac{d\lambda^k}{ds} = 0 \quad (2.6)$$

onde s é um parâmetro proporcional ao comprimento de arco e Γ_{jk}^i é o símbolo de Christoffell que é definido em termos do tensor métrico g_{ij} , por

$$\Gamma_{jk}^i \equiv \frac{1}{2} g^{il} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial \varphi^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial \varphi^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial \varphi^l} \right)$$

A solução de (2.6) deve ser tal que

$$\lambda^i(0) = \varphi^i, \quad \lambda^i(1) = \varphi^i + \pi^i \quad \text{e} \quad \frac{d}{ds} \lambda^i(0) = \dot{\lambda}^i(0) = \xi^i$$

onde definimos um campo "velocidade" $\xi^i(x)$ com o significado geométrico de ser um vetor tangente à geodésica contendo os pontos φ^i e $\varphi^i + \pi^i$ com $l^2 = g_{ij} \xi^i \xi^j$. Notemos que o campo $\xi^i(x)$ se transforma como um vetor contravariante sob reparametrizações de M .

Para definirmos o sistema de coordenadas normais, nós primeiramente derivamos sucessivamente a equação da geodésica (2.6) e obtemos em seguida, uma solução na forma de série de potências

$$\lambda^i(s) = \varphi^i + \xi^i s - \frac{1}{2!} \Gamma_{j_1 j_2}^i \xi^{j_1} \xi^{j_2} s^2 - \frac{1}{3!} \Gamma_{j_1 j_2 j_3}^i \xi^{j_1} \xi^{j_2} \xi^{j_3} s^3 + \dots$$

ou

$$\lambda^i(s) = \varphi^i + \xi^i s - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma_{j_1 \dots j_n}^i \xi^{j_1} \dots \xi^{j_n} s^n \quad (2.7)$$

onde

$$\nabla_j \Gamma_{kl}^i = \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \Gamma_{kl}^i - \Gamma_{jk}^n \Gamma_{nl}^i - \Gamma_{jl}^n \Gamma_{kn}^i$$

e

$$\Gamma_{j_1 \dots j_n}^i = \nabla_{j_1} \dots \nabla_{j_{n-2}} \Gamma_{j_{n-1} j_n}^i$$

A derivada covariante ∇_j age somente sobre os índices inferiores dos Γ 's.

O passo seguinte é notar que a expansão (2.7) pode ser vista como definindo uma transformação de coordenadas entre um ponto $\varphi^i + \pi^i$ e novas coordenadas ξ^i . Se agora definirmos um sistema de coordenadas ξ^i no qual os coeficientes da expansão, $\bar{\Gamma}_{j_1 \dots j_n}^i$, se anulem quando simetrizados com respeito aos índices inferiores, isto é,

$$\bar{\Gamma}_{(j_1 j_2 \dots j_n)}^i(\varphi^i) = 0 \quad (2.8)$$

temos então, de (2.7), geodésicas como “linhas retas” da forma $\eta^i(s) = a^i s$. As coordenadas desse sistema são conhecidas como coordenadas normais Riemannianas [46, 47]

Neste sistema temos algumas relações muito úteis, tais como

$$\partial_{(j_1} \cdots \partial_{j_{n-2}} \bar{\Gamma}_{j_{n-1} j_n)}^i = 0 \quad (2.9a)$$

$$\bar{R}_{jkl}^i = \partial_k \bar{\Gamma}_{jk}^i - \partial_l \bar{\Gamma}_{jk}^i \quad (2.9b)$$

Esta última, (2.9b), é obtida pela simplificação de

$$R_{jkl}^i = \partial_k \Gamma_{jl}^i - \partial_l \Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jl}^n \Gamma_{nk}^i - \Gamma_{jk}^n \Gamma_{nl}^i$$

pois $\bar{\Gamma}_{jk}^i = 0$.

Além de (2.9a) e (2.9b) podemos ter ainda, combinando-as e fazendo $n = 3$, a seguinte relação

$$\partial_i \bar{\Gamma}_{jl}^i = \frac{1}{3} (\bar{R}_{jkl}^i + \bar{R}_{lkj}^i) \quad (2.10)$$

Usando novamente (2.9a) encontramos também que

$$\partial_{(j_1} \partial_{j_2} \bar{\Gamma}_{j_3)}^i = -\frac{1}{2} D_{j_1} R_{j_2 k j_3}^i \quad (2.11)$$

Para um tensor geral, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \bar{T}_{j_1 \dots j_n}(\phi) &= D_i \bar{T}_{j_1 \dots j_n}(\phi) \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^i \partial \xi^k} \bar{T}_{j_1 \dots j_n}(\phi) &= D_{(i} D_{k)} \bar{T}_{j_1 \dots j_n}(\phi) - \frac{1}{3} \sum_{p=1}^n R^l{}_{ij_p k} \bar{T}_{j_1 \dots j_{p-1} l j_{p+1} \dots j_n}(\phi) \end{aligned}$$

Usando as relações anteriores e continuando o procedimento acima pode-se obter uma expansão covariante para um tensor geral de ordem n . No caso

particular de um tensor de segunda ordem, omitindo as barras, podemos escrever

$$T_{ik}(\varphi + \pi) = T_{ik}(\varphi) + D_j T_{ik} \xi^j + \frac{1}{2} \left(D_j D_l T_{ik}(\varphi) - \frac{1}{3} R^n{}_{jil} T_{nk} - \frac{1}{3} R^n{}_{jkl} T_{ni} \right) \xi^j \xi^l + \dots \quad (2.12)$$

Todas as informações obtidas até aqui nos permite, então, estabelecer o método do campo de fundo para o nosso modelo sigma não-linear (2.5). Os ingredientes básicos são as expansões do tensor métrico $g_{ij}(\phi)$ e $\partial_\mu \phi$.

Especializando (2.12) para $g_{ij}(\phi)$ e lembrando que $D_k g_{ij} = 0$, encontramos

$$g_{ij}(\varphi + \pi) = g_{ij}(\varphi) - \frac{1}{3} R_{ik_1 j k_2}(\varphi) \xi^{k_1} \xi^{k_2} - \frac{1}{3!} D_{k_1} R_{ik_2 j k_3} \xi^{k_1} \xi^{k_2} \xi^{k_3} + \frac{1}{5!} \left(-6 D_{k_1} D_{k_2} R_{ik_3 j k_4} + \frac{16}{3} R_{k_1 j k_2}{}^m R_{k_3 i k_4 m} \right) \xi^{k_1} \xi^{k_2} \xi^{k_3} \xi^{k_4} + \dots \quad (2.13)$$

A expansão de $\partial_\mu(\varphi^i + \pi^i)$ em coordenadas normais, é obtida, derivando (2.7) em $s = 1$ e usando as relações anteriormente encontradas; o resultado é

$$\partial_\mu(\varphi^i + \pi^i) = \partial_\mu \varphi^i + D_\mu \xi^i + \left[\frac{1}{3} R^i{}_{k_1 k_2 j} \xi^{k_1} \xi^{k_2} + \frac{1}{12} D_{k_1} R^i{}_{k_2 k_3 j} \xi^{k_1} \xi^{k_2} \xi^{k_3} + \left(\frac{1}{60} D_{k_1} D_{k_2} R^i{}_{k_3 k_4 j} - \frac{1}{45} R^i{}_{k_1 k_2 m} R^m{}_{k_3 k_4 j} \right) \xi^{k_1} \xi^{k_2} \xi^{k_3} \xi^{k_4} \right] \partial_\mu \varphi^j$$

onde

$$D_\mu \xi^i = \partial_\mu \xi^i + \Gamma_{jk}^i \xi^j \partial_\mu \varphi^k$$

A expansão de campo de fundo para o modelo sigma não-linear bosônico (2.5) é então, dada por

$$\begin{aligned}
S[\varphi + \pi] = S[\varphi] + \int d^3x g_{ij} \partial^\mu \varphi^i D_\mu \xi^j + \\
+ \frac{1}{2} \int d^3x \left[g_{ij} D^\mu \xi^i D_\mu \xi^j + R_{ik_1 k_2 j} \xi^{k_1} \xi^{k_2} \partial^\mu \varphi^i \partial_\mu \varphi^j + \right. \\
+ \frac{1}{3} D_{k_1} R_{ik_2 k_3 j} \xi^{k_1} \xi^{k_2} \xi^{k_3} \partial^\mu \varphi^i \partial_\mu \varphi^j + \frac{4}{3} R_{ik_1 k_2 k_3} \xi^{k_1} \xi^{k_2} D_\mu \xi^{k_3} \partial^\mu \varphi^i + \\
+ \frac{1}{2} D_{k_1} R_{ik_2 k_3 k_4} \xi^{k_1} \xi^{k_2} \xi^{k_3} D_\mu \xi^{k_4} \partial_\mu \varphi^i + \frac{1}{3} R_{k_1 k_2 k_3 k_4} \xi^{k_2} \xi^{k_3} D_\mu \xi^{k_1} D^\mu \xi^{k_4} + \\
\left. + \frac{1}{12} (D_{k_1} D_{k_2} R_{ik_3 k_4 j} + 4 R^m{}_{k_1 k_2 i} R_{mk_3 k_4 j}) \xi^{k_1} \xi^{k_2} \xi^{k_3} \xi^{k_4} \partial^\mu \varphi^i \partial_\mu \varphi^j \right] \quad (2.14)
\end{aligned}$$

2.3-DIVERGÊNCIAS ULTRAVIOLETA DO MODELO SIGMA NÃO-LINEAR BOSÔNICO

Estamos agora interessados em usar o formalismo de campo de fundo para efetuar cálculos perturbativos e estudar a renormalizabilidade de nossos modelos. Consideraremos inicialmente o modelo bosônico, cuja expansão foi apresentada na seção anterior. De imediato, nós notamos que em três dimensões ele é não-renormalizável perturbativamente, pois apresenta constante de acoplamento dimensional. Entretanto, como já frisado anteriormente, a verificação mais cuidadosa deve ser feita ordem a ordem, incluindo termos de dimensões mais altas, descartados no caso bidimensional.

O nosso ponto de partida é escrever o funcional gerador como

$$\hat{Z}[\varphi] = \int [d\pi^i] \exp i \left\{ S[\varphi + \pi] - S[\varphi] - \frac{\delta S[\varphi]}{\delta \varphi^i} \pi^i \right\} \quad (2.15)$$

e usar a expressão (2.14).

Todos os efeitos quânticos são obtidos contraindo os monômios em ξ^i que aparecem na expansão e^{iS} . Para se obter as regras de Feynman para os campos quânticos, deve-se lembrar, entretanto, que em teoria de perturbação a contração de Wick básica de dois campos, que dá o propagador, é extraída do termo quadrático da ação. Então no nosso caso, o propagador de ξ deve ser encontrado olhando para a expansão (2.14). Entretanto, nós notamos que devido a presença de $g_{ij}(\varphi)$ nos termos cinéticos, o propagador assim obtido não se apresenta na forma usual. Este problema é resolvido, como em (1.36) introduzindo-se um "n-bein" ou "vielbein" $e_i^a(\varphi)$, onde n é a dimensão da variedade. Este objeto nos permite estabelecer uma conversão de quantidades da variedade Riemanniana para o espaço-tangente à variedade.

Dessa forma, definimos

$$\begin{aligned}\xi^a(x) &= e^a_i \xi^i(x), & \xi^i(x) &= e_a^i \xi^a(x) \\ \Gamma_{ab}^i(\varphi) &= \Gamma_{jk}^i(\varphi) e_a^j(\varphi) e_b^k(\varphi), & R_{iabj} &= e_a^{k_1} e_b^{k_2} R_{ik_1 k_2 j}\end{aligned}$$

com

$$e^a_i e^b_j g^{ij} = \delta^{ab}, \quad e^a_i e^b_j \delta_{ab} = g_{ij}$$

É importante, nesse ponto, introduzir também a quantidade ω_i^{ab} , chamada de conexão de spin, através do postulado do "vielbein" [48], isto é,

$$D_i e^a_j = e^a_{j;i} = \partial_i e^a_j + \omega_i^{ab}(e) e_{bj} - \Gamma_{ji}^k(g) e^a_k = 0$$

Logo,

$$\omega_i^{ab} = -e^{bj} \nabla_i e^a_j = -e^{bj} \partial_i e^a_j + e^{bj} \Gamma_{ij}^k e^a_k$$

Com tudo isso, podemos escrever ainda

$$(D_\mu \xi)^a = \partial_\mu \xi^a + \omega_i^{ab} \partial_\mu \varphi^i \xi^b = \partial_\mu \xi^a + A_\mu^{ab} \xi^b$$

onde

$$A_\mu^{ab} = \omega_i^{ab} \partial_\mu \varphi^i$$

que se transforma como potencial de gauge de Yang-Mills de $SO(n)$ sob rotações do sistema tangente local.

Todas estas definições e relações faz com que o termo cinético seja colocado na forma ordinária $(D_\mu \xi)^a (D^\mu \xi)^a$. A ação (2.14) pode ser reescrita agora em termos de objetos no espaço-tangente

$$S \equiv S^{(0)}[\varphi] + S^{(2)}[\varphi] + S^{(3)}[\varphi] + S^{(4)}[\varphi] + \dots \quad (2.16)$$

onde

$$\begin{aligned} S^{(2)} &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ [R_{iabj} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j - A_\mu^{ac} A^{\mu cb}] \xi^a \xi^b + \right. \\ &\quad \left. + \partial_\mu \xi^a \partial^\mu \xi^a - A_\mu^{ab} \xi^a \partial^\mu \xi^b \right\} \\ S^{(3)} &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \left[\frac{1}{3} D_a R_{ibcj} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j + \frac{4}{3} R_{iabd} A_\mu^{dc} \partial^\mu \varphi^i \right] \xi^a \xi^b \xi^c + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{3} R_{iabc} \partial_\mu \varphi^i \xi^a \xi^b \partial^\mu \xi^c \right\} \\ S^{(4)} &= \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ \left[\frac{1}{2} D_a R_{ibce} A_\mu^{ed} \partial^\mu \varphi^i + \frac{1}{3} R_{eabf} A_\mu^{ec} A^{\mu fd} + \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} D_a D_b R_{icdj} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j + \frac{1}{3} R^m_{abi} R_{medj} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \right] \xi^a \xi^b \xi^c \xi^d + \\ &\quad + \frac{1}{2} D_a R_{ibcd} \partial_\mu \varphi^i \xi^a \xi^b \xi^c \partial^\mu \xi^d + \frac{1}{3} R_{cabc} A_\mu^{ed} \xi^a \xi^b \partial^\mu \xi^c \xi^d + \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} R_{eabd} A_\mu^{ec} \xi^a \xi^b \xi^c \partial^\mu \xi^d + \frac{1}{3} R_{cabd} \xi^a \xi^b \partial_\mu \xi^c \partial^\mu \xi^d \right\} \end{aligned}$$

Nós omitimos na expressão acima o termo linear em $\xi^i(x)$, $S^{(1)}$, visto que ele se anula com o uso da equação de Euler-Lagrange. Isto também se

justifica na medida em que não estamos interessados em termos envolvendo redefinições de campo (renormalizações de função de onda).

Estamos agora em condições de levar em frente nosso programa de isolar as divergências e encontrar os contratermos necessários à renormalização da teoria. O que queremos dizer com isso, é que faremos cálculos perturbativos com diagramas de "loop" envolvendo integrais de momentum com divergências ultravioleta. O programa de renormalização separa essas divergências e as interpreta como renormalizações das quantidades físicas relevantes da Lagrangeana original (nua). A Lagrangeana nua é então escrita como uma soma da Lagrangeana renormalizada mais os contratermos.

2.3.1-CÁLCULOS DE UM "LOOP"

Para se calcular diagramas até a ordem de um "loop" é suficiente considerar a expansão (2.16) até segunda ordem em $\xi^a(x)$, ou seja, tomar $S^{(2)}$. De $S^{(2)}$, obtemos o propagador de Feynman de ξ , que é o de um campo bosônico

$$\begin{aligned}\langle 0|T\xi^a(x)\xi^b(y)|0\rangle &= \overline{\xi^a(x)}\xi^b(y) = \\ &= \delta^{ab}\Delta_F(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^3}\delta^{ab}\int d^3k \frac{e^{ik(x-y)}}{(k^2-\mu^2)}\end{aligned}\quad (2.17)$$

Na expressão acima μ é uma massa[†] introduzida com a exclusiva finalidade de distinguir as divergências infravermelhas, e a colocaremos igual a zero no final dos cálculos das divergências ultravioleta.

Os diagramas divergentes serão calculados tomando os campos $\varphi^i(x)$ como campos externos e fazendo, com o uso de (2.17), todas as possíveis contrações de Wick envolvendo os campos quânticos $\xi^a(x)$.

[†] Isto equivale a introduzir na ação (2.16) um termo do tipo $\frac{\mu^2}{2}\int d^3x \xi^a\xi^a$

A ação de interação, para esse fim, é definida por:

$$I_{int} = \int d^3x \mathcal{L}_{int}(\varphi, \xi) = S^{(2)}(\varphi, \xi) - \frac{1}{2} \int d^3x \partial_\mu \xi^a \partial^\mu \xi^a \quad (2.18)$$

com

$$\widetilde{W}[\varphi] = \langle 0 | e^{i \int d^3x \mathcal{L}_{int}(\varphi, \xi)} | 0 \rangle \quad (2.19)$$

gerando todos os diagramas de um "loop".

Os gráficos relevantes são então, nessa ordem, os da figura abaixo

Figura 2—Diagramas de um "loop" divergentes.

$$C_{aa} = R_{ij} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j.$$

Outros gráficos, além desses, ou são convergentes por contagem de potências, ou se anulam por integração simétrica. Os diagramas da figura 2 apresentam divergências ultravioleta lineares, que removeremos adicionando à ação original os correspondentes contratermos. Entretanto, no procedimento de renormalização, faz-se necessário usar um método de regularização para dar sentido às integrais infinitas nos passos intermediários. Uma possível maneira de fazer isso, seria aplicar a "consagrada" regularização dimensional, porém, em espaços de dimensão ímpar, ela faz desaparecer todas as divergências e torna finita a teoria, ou seja, ela de fato realiza uma renormalização. Como desejamos estudar em detalhes a estrutura de divergências, explicitando-as em contratermos, nós escolhemos trabalhar com o método de regularização de Pauli-Villars, que preserva a invariância de gauge.

Os diagramas (2b) e (2c) são obtidos das seguintes contrações

$$(2b) = \frac{i}{2} \int d^3x A_\mu^{ca}(x) A^{\mu cb}(x) \langle \xi^a(x) \xi^b(x) \rangle$$

$$(2c) = \frac{i^2}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \int d^3x \int d^3y A_\mu^{ab}(x) A_\nu^{cd}(y) \langle (\xi^a \vec{\partial}^\mu \xi^b)(x) \rangle \langle (\xi^c \vec{\partial}^\nu \xi^d)(y) \rangle$$

As integrais divergentes, aparecendo acima, são

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{(k^2 - \mu^2)}, \quad \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k (2k+p)_\mu (2k+p)_\nu}{(k^2 - \mu^2)[(k+p)^2 - \mu^2]}$$

Com o “corte” de Pauli-Villars é fácil ver que as divergências se cancelam. Isso corresponde a conhecida finitude da auto-energia para um campo de gauge A_μ , minimalmente acoplado.

O gráfico (2a) é o que realmente contribui à ação efetiva

$$\begin{aligned} D_1^{(2a)} &= \frac{1}{2} \int d^3x R_{iabj} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \overline{\xi^a(x)} \xi^b(x) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x R_{iabj} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \delta^{ab} \Delta_F(0) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x R_{iaaj} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{i}{(k^2 - \mu^2)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Fazendo uma rotação de Wick: $k^2 \rightarrow -k^2$, $d^3k \rightarrow i d^3k$, a integral em (2.20) pode ser realizada no espaço Euclideo. Assim:

$$D_1^{(2a)} = -\frac{\Lambda}{4\pi^2} \int d^3x R_{ij}(\varphi) \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \quad (2.21)$$

onde

$$R_{ij} = R_{aiaj} \quad \text{é o tensor de Ricci.}$$

A ação renormalizada em um "loop" é então, dada por

$$S_{eff}^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^3x \left(g_{ij}(\varphi) + \frac{\Lambda}{4\pi^2} R_{ij}(\varphi) \right) \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \quad (2.22)$$

Segundo a interpretação de Friedan [6], uma renormalização desse tipo, pode ser entendida redefinindo o tensor métrico, isto é,

$$g_{ij}^R = g_{ij} + \frac{\Lambda}{4\pi^2} R_{ij} \quad (2.23)$$

Neste sentido dizemos que o nosso modelo é renormalizável, com a renormalização se dando na geometria da variedade definida pelos campos escalares.

Podemos estudar agora dois casos especiais:

(i) *Espaços Ricci-flat* ($R_{ij} = 0$)

Neste caso, o contratermo (2.21) se anula e nós concluimos que o modelo é finito.

(ii) *Espaços localmente simétricos* ($D_m R_{ijkl} = 0$)

Exemplos de modelos localmente simétricos são $O(N)$ e CP^{N-1} . Especificamente para o $O(N)$ temos

$$R_{ij} = (N - 2)g_{ij}$$

Logo, o contratermo (2.21), torna-se

$$\Delta S_1^{(2a)} = \frac{(N - 2)}{4\pi^2} \Lambda \int d^3x g_{ij}(\varphi) \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \quad (2.24)$$

que se anula para $N = 2$, isto é, o modelo $O(2)$ também é finito nesta ordem. Contudo, para $N \neq 2$, este modelo ainda permanece renormalizável, porém, não é mais finito, visto que $\Delta S_1^{(2a)} \neq 0$.

2.3.2-CÁLCULOS DE DOIS "LOOPS"

Apresentaremos agora, os cálculos realizados na ordem de dois "loops". Nestes cálculos nós definimos I_{int} de maneira a incluir todos os termos de terceira e quarta ordens nos campos quânticos, $S^{(3)}$ e $S^{(4)}$, com os diagramas gerados através das contrações de Wick.

Os gráficos de Feynman irreduzíveis, contribuindo à ação efetiva são agora os da figura 3.

Figura 3-Diagramas de dois "loops" divergentes contribuindo à ação efetiva.

Observando $S^{(2)}$, $S^{(3)}$ e $S^{(4)}$, nós notamos que a dependência de campo de fundo dos vértices é muito complicada. Porém, se usarmos, após as contrações de Wick, as propriedades das quantidades tensoriais envolvidas (apêndice A) e o fato de haver integrações simétricas, conseguimos identificar muitos termos que se anulam, sendo possível dessa forma, selecionar apenas aqueles vértices que acompanharão as divergências, em princípio, não nulas.

O primeiro diagrama, (3a), advém do seguinte termo

$$(3a) \sim (DR\omega + R\omega\omega + DDR + RR)(\partial\varphi)^2 \langle (\xi^a \xi^b \xi^c \xi^d)(x) \rangle + \\ + R \langle (\xi^a \xi^b \partial_\mu \xi^c \partial^\mu \xi^d)(x) \rangle$$

Os coeficientes da expressão acima são tensores de curvatura e derivadas covariantes atuando sobre eles. Os deltas de Krönecker δ^{ab} dos diversos

propagadores nos conduzem a várias simplificações, pelo uso de identidades cíclicas e de Bianchi para os tensores de Riemann.

O diagrama (3a) é então facilmente calculado, já que as integrais de momenta divergentes aí aparecendo, são na realidade, potências da integral elementar de um "loop", o "tadpole". Assim, o contratermo correspondente a esse gráfico, pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \Delta S^{(3a)} = & \frac{\Lambda^2}{4\pi^4} \int d^3x \left[\frac{1}{4} (D_a R_{ib} - 3D_b R_{ia}) \omega_j^{ab} + \frac{1}{6} R_{ac} \omega_i^{ab} \omega_j^{bc} + \right. \\ & + \frac{1}{3} R_{c(ab)d} \omega_i^{cb} \omega_j^{da} + \frac{1}{12} D^a D_i R_{aj} - \frac{1}{8} D^a D_a R_{ij} + \frac{1}{4} R_{iabc} R_j^{abc} + \\ & \left. + \frac{1}{6} R_{ib} R_j^b \right] \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j - \frac{\Lambda^4}{72\pi^4} \int d^3x R \end{aligned} \quad (2.25)$$

Este contratermo é, essencialmente, do tipo um "loop" implicando ainda numa redefinição do vácuo. Ele contém também um "termo cosmológico", embora não no sentido usual (g_{ij} não se acopla à derivada espacial).

Os diagramas (3b) e (3c) são obtidos, respectivamente de

$$\begin{aligned} (3b) & \sim R\omega\omega (\partial\varphi)^2 \langle (\xi^a \xi^b \partial_\mu \xi^c \partial^\mu \xi^d) (\xi^e \xi^f) \rangle \\ (3c) & \sim RR (\partial\varphi)^2 \langle (\xi^a \xi^b \partial_\mu \xi^c \partial^\mu \xi^d) (\xi^e \xi^f) \rangle + [(DR\omega)(R) + \\ & + (R\omega\omega)(R) + (DDR)(R) + (RR)(R)] (\partial\varphi)^4 \langle (\xi^a \xi^b \xi^c \xi^d) (\xi^e \xi^f) \rangle \end{aligned}$$

As integrais de momenta de (3b) e (3c), oriundas das pertinentes contrações, são

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3k d^3l}{(k^2 + \mu^2)(l^2 + \mu^2)[(l+p)^2 + \mu^2]}, \\ & \int \frac{d^3k d^3l k^2}{(k^2 + \mu^2)(l^2 + \mu^2)[(l+p)^2 + \mu^2]}, \\ & \int \frac{d^3k d^3l l^2}{(k^2 + \mu^2)(l^2 + \mu^2)[(l+p)^2 + \mu^2]} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para isolar as divergências ultravioleta manifestas nas integrais, empregaremos daqui para frente um esquema “a la BPHZ” [49], mais precisamente BPH, pois em passos intermediários aplicamos um “cut-off” na integração dos momenta. Neste esquema, essencialmente o que se faz é subtrair as partes divergentes de um gráfico G mediante a aplicação de operadores de Taylor, $t_p^{d(G)}$, em torno do momento externo igual a zero. O integrando renormalizado é então dado pela fórmula

$$\begin{aligned} f \rightarrow \mathcal{R} = & f(p) - t_p^{d(G)} f(p) = f(p) - f(0) - \\ & - p^\mu \left(\frac{\partial}{\partial p^\mu} f(p) \right)_{p=0} - \frac{p^\mu p^\nu}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{\partial}{\partial p^\nu} f(p) \right)_{p=0} - \dots \\ & \dots - \frac{p^{\mu_1} \dots p^{\mu_{d(G)}}}{d(G)!} \left(\frac{\partial}{\partial p^{\mu_1}} \dots \frac{\partial}{\partial p^{\mu_{d(G)}}} f(p) \right)_{p=0} \end{aligned}$$

onde $t_p^{d(G)}$ é o operador de Taylor até a ordem $d(G)$ (grau de divergência superficial).

Aplicando esta técnica às integrais (2.26) e manipulando convenientemente os vértices tensoriais, encontramos

$$\begin{aligned} \Delta S^{(3b+3c)} = & \frac{1}{192\pi^4} \left(\frac{\pi}{3} \frac{\Lambda^3}{\mu} + 4\Lambda^2 \right) \int d^3x \left[R_{ab} \omega_i^{ca} \omega_j^{cb} + R^{ab} R_{iabj} \right] \times \\ & \times (\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j) + \frac{1}{32\pi^3} \frac{\Lambda}{\mu} \int d^3x X_{ijpq} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \partial_\nu \varphi^p \partial^\nu \varphi^q \quad (2.27) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
X_{ijpq} \equiv & \frac{1}{4} [(D_a R_{ic} + D_i R_{ac} - 2D_c R_{ia}) R_{p(cb)q} + \\
& + (D_b R_{idca} + D_d R_{ibca} + D_c R_{idba}) R_{p(dc)q}] \omega_j^{ab} + \\
& + \frac{1}{3} R_{a(bc)d} R_{p(be)q} (\omega_i^{ac} \omega_j^{de} + \omega_i^{ae} \omega_j^{dc}) - \\
& - \frac{1}{2} R_{ab} R_{pcdq} \omega_i^{ac} \omega_j^{bd} + \frac{1}{2} R_{abcd} R_{pbcd} \omega_i^{ae} \omega_j^{de} + \\
& + \frac{1}{48} [2D^2 R_{iabj} R_{pabq} + (4D_a D_i R_{jb} - 5D_a D_b R_{ij}) R_{pabq}] + \\
& + \frac{1}{3} [R_{abci} (R_{a(bd)j} R_{p(dc)q} + R_{a(ec)j} R_{p(be)q}) - R_{ai} R_{abcj} R_{p(bc)q}]
\end{aligned}$$

que representaremos compactamente por

$$\begin{aligned}
X_{ijpq} \sim & \left(\sum (DR)R + \sum (DR)R\omega + \right. \\
& \left. + \sum RR\omega\omega + \sum (DD)RR + \sum RRR \right)_{ijpq}
\end{aligned}$$

O contratermo (2.27), a despeito de possuir uma parte com estrutura quártica, $(\partial\varphi)^4$, ainda pode ser visto como remanescente de divergências de um “loop”.

A contribuição (3d) é realmente nova, e contém, de fato, o primeiro contratermo não-renormalizável. Por questão de comodidade nós vamos separá-la em duas partes

$$\begin{aligned}
D^{(3d/1)} & \sim [(DR)(DR) + (R\omega)(R\omega) + (DR)(DR) + \\
& + (R\omega)(DR)] (\partial\varphi)^4 \langle (\xi^a \xi^b \xi^c) (\xi^d \xi^e \xi^f) \rangle \\
D^{(3d/2)} & \sim RR (\partial\varphi)^2 \langle (\xi^a \xi^b \partial^\mu \xi^c) (\xi^d \xi^e \partial^\nu \xi^f) \rangle
\end{aligned}$$

Após as contrações de Wick, e escrevendo no espaço de Fourier, temos

$$\begin{aligned}
\Delta S^{(3d/1)} = & -\frac{1}{2(2\pi)^6} \int d^3x Y_{ijpq} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \partial_\nu \varphi^p \partial^\nu \varphi^q \times \\
& \times \int \frac{d^3k d^3l}{(k^2 + \mu^2)(l^2 + \mu^2)[(k+l+p)^2 + \mu^2]} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 Y_{ijpq} \equiv & \frac{1}{18} [D_a R_{ibcj} (D_a R_{pbcq} + D_b R_{pacq} + D_c R_{pabq}) + \\
 & + 4(D_a R_{pbcq} + D_b R_{pacq} + D_c R_{pabq}) R_{iabd} \omega_j^{dc} + \\
 & + 4(2D_a R_{p(bc)q} + D_c R_{pabq}) R_{i(ab)d} \omega_j^{dc} + \\
 & + 16R_{iabd} (R_{p(ab)e} \omega_j^{dc} \omega_q^{ec} + R_{p(ac)e} \omega_j^{dc} \omega_q^{eb} + R_{p(bc)i} \omega_j^{dc} \omega_q^{ea})] \sim \\
 & \sim \left(\sum (DR)(DR) + \sum (DR)R\omega + \sum RR\omega\omega \right)_{ijpq}
 \end{aligned}$$

Esta contribuição tem uma estrutura de vértice semelhante a do contratermo (2.27).

A segunda parte, $D^{(3d/2)}$, é dada por

$$\begin{aligned}
 \Delta S^{(3d/2)} = & -\frac{1}{3(2\pi)^6} \int d^3x R_{iabc} R_j^{abc} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \times \\
 & \times \int \frac{d^3k d^3l [2l_\mu l_\nu + l_\mu (k+p)_\nu]}{(k^2 + \mu^2)(l^2 + \mu^2)[(k+l+p)^2 + \mu^2]} \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

As divergências ultravioleta apresentadas pelas integrais em (2.28) e (2.29) são extraídas, como antes, via operador de Taylor. Na realização desse longo e tedioso cálculo fazemos, sob o sinal de integração, substituições do tipo

$$\begin{aligned}
 k_\mu k_\nu & \rightarrow \frac{k^2}{3} \eta_{\mu\nu}, \quad k_\mu k_\nu k_\rho k_\sigma \rightarrow \frac{k^4}{15} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) \\
 k_\mu, \quad k_\mu k_\nu k_\rho & \rightarrow 0 \\
 l_\mu l_\nu l_\rho l_\sigma & \rightarrow \frac{1}{15} (\eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} + \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) l^2 (l \cdot k) \\
 l_\mu l_\nu k_\rho k_\sigma & \rightarrow \left[\frac{2}{15} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} - \frac{1}{30} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) \right] l^2 k^2 + \\
 & + \left[\frac{1}{10} (\eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\rho}) - \frac{1}{15} \eta_{\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} \right] (l \cdot k)(l \cdot k)
 \end{aligned} \quad (2.30)$$

O resultado final, isolando todas as subdivergências das integrais em (2.28) e (2.29), é um contratermo que não corresponde a nenhum daqueles aparecendo na ação original, ou seja, nós realmente encontramos uma correção de dois "loops" genuinamente não-renormalizável à ação efetiva. Sua expressão é

$$\begin{aligned} \Delta S^{(3d)} = & -\frac{1}{192\pi^4} \left\{ \left[8\Lambda^2 - \frac{\pi^2}{5} p^2 \left(\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \frac{8}{3\pi} \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{4}{3\pi^2} \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right] \eta^{\mu\nu} + \right. \\ & + \frac{\pi^2}{5} p^\mu p^\nu \left(3 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \frac{4}{3\pi} \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{4}{3\pi^2} \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \left. \right\} \int d^3x R_{iabc} R_j^{abc} \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j - \\ & - \frac{1}{64\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \int d^3x Y_{ijpq} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \partial_\nu \varphi^p \partial^\nu \varphi^q \end{aligned} \quad (2.31)$$

Novamente vamos calcular explicitamente os contratermos nos casos de espaços Ricci-flat e localmente simétricos. No primeiro caso, (i), (2.25) e (2.27) simplificam-se muito. A expressão (2.25), por exemplo, embora não se anulando completamente, não apresenta mais o termo cosmológico. Em (2.27) e (2.31), contudo, a condição Ricci-flat não é suficiente para eliminar os termos não-renormalizáveis, que envolvem $(\partial\varphi)^4$, p^2 e $p_\mu p_\nu$. O contratermo pode então ser escrito como

$$\begin{aligned} \Delta S_{RC}^{(2)} = & \Delta S^{(3d)} + \frac{1}{32\pi^3} \frac{\Lambda}{\mu} \int d^3x X_{ijpq} (R_{ab} = 0) \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \partial_\nu \varphi^p \partial^\nu \varphi^q - \\ & - \frac{\Lambda^2}{8\pi^4} \int d^3x \left(R_{dabc} \omega_i^{db} \omega_j^{ac} - \frac{1}{2} R_{iabc} R_j^{abc} \right) \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \end{aligned} \quad (2.32)$$

Concluimos então, que o nosso modelo, neste caso específico, muito embora seja finito em um "loop", permanece não-renormalizável quando vamos a ordem seguinte.

No segundo caso, (ii), modelo sobre espaços localmente simétricos, a condição $D_i R_{jklm} = 0$, simplifica enormemente as expressões (2.25), (2.27)

e (2.31). Considerando então especificamente o modelo $O(N)$, nós encontramos

$$\begin{aligned} \Delta S_{O(N)}^{(2)} = & -\frac{1}{48\pi^4} \left\{ \left[\Lambda^2(3N - N^2 + 4) + \frac{\pi}{12} \frac{\Lambda^3}{\mu} (N^2 - 5N + 6) \right] \eta^{\mu\nu} + \right. \\ & + (N - 2) \frac{\pi^2}{10} \left[p^\mu p^\nu \left(3 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \frac{4}{3\pi} \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{4}{3\pi^2} \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) - \right. \\ & \left. \left. - \eta^{\mu\nu} p^2 \left(\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \frac{8}{3\pi} \frac{\Lambda}{\mu} - \frac{4}{3\pi^2} \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right] \right\} \int d^3x g_{ij} \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j + \\ & + \frac{1}{96\pi^3} \frac{\Lambda}{\mu} \int d^3x [(N^2 - 3N - 3)g_{ij}g_{pq} + (N + 3)g_{ip}g_{jq}] \times \\ & \times \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \partial_\nu \varphi^p \partial^\nu \varphi^q - \frac{(N + 1)}{72\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \int d^3x g_{ij}g_{pq} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \partial_\nu \varphi^p \partial^\nu \varphi^q \end{aligned} \quad (2.33)$$

A expressão acima apresenta uma forma na qual todos os objetos, tais com $\omega_i^{ab}\omega_{jab}$, $e_p^c e_{bq}\omega_i^{ab}\omega_{jac}$, etc., foram expressos em termos dos campos de fundo φ . Para isso, usamos as relações para o modelo $O(N)$ (dadas no capítulo 1) e o postulado do “vielbein”, com o mesmo dado por

$$e_i^a = \begin{cases} \delta_i^A, & A = 1, \dots, N - 1 \\ -\frac{\varphi^i}{\sqrt{1 - |\varphi|^2}}, & A = N \end{cases} \quad (2.34)$$

Estes resultados estão no apêndice B.

Por uma simples inspeção de (2.33), nós notamos que, embora ocorram cancelamentos importantes para $N = 2$ e 3 , não conseguimos para qualquer N , diferentes destes, destruir as contribuições não-renormalizáveis. Neste contexto, podemos dizer que, em um “loop”, o modelo $O(2)$ é finito e $O(N)$, $N \neq 2$, é renormalizável. Entretanto, em dois “loops” estas finitude e renormalizabilidade não são mantidas.

2.4-DIVERGÊNCIAS ULTRAVIOLETA DO MODELO SIGMA NÃO-LINEAR SUPERSIMÉTRICO $\mathcal{N} = 1$

Em virtude das notáveis propriedades de cancelamentos de divergências ultravioleta, apresentadas por modelos supersimétricos [50], nós somos conduzidos agora, a uma investigação do que ocorre com as propriedades de renormalização do nosso modelo se o estendemos para abrigar férmions supersimétricos. A extensão que usaremos aqui, é ligeiramente diferente daquela apresentada no capítulo 1. Nosso modelo será definido em três dimensões e conterá férmions de Majorana. A ação em termos de supercampos escalares é dada por

$$I_S = \int d^3x d^2\theta L(x, \theta) \quad (2.35)$$

onde

$$L(x, \theta) = \frac{1}{4i} g_{ij}(\Phi^k) \bar{D}\Phi^i D\Phi^j \quad (2.36)$$

sendo $D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i(\gamma^\mu \theta)_\alpha \partial_\mu$ a derivada supercovariante.

Os supercampos Φ^i contêm n campos escalares ϕ^i , n espinores de Majorana ψ^i e também n campos escalares auxiliares reais F^i , como coeficientes de polinômios na variável de Grassmann real θ , isto é

$$\Phi^i(x, \theta) = \phi^i(x) + \bar{\theta} \psi^i(x) + \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta F^i(x) \quad (2.37)$$

Como existe uma correspondência “um-a-um” [51] entre as componentes dos supercampos escalares em duas e três dimensões, os espinores de Majorana aparecendo em (2.37) são justamente como em duas dimensões, ou seja, cada um tem somente duas componentes reais.

Com a finalidade de ver mais claramente como a introdução dos campos fermiônicos afetam nossos resultados anteriores, faremos os cálculos dos gráficos de Feynman no formalismo de componentes.

Assim, fazendo a integração nas variáveis θ , de maneira usual, com $\int d\theta = 0$, $\int d^2\theta \bar{\theta}\theta = 2$, e eliminando os campos auxiliares, a ação supersimétrica (2.35) torna-se

$$I_S[\phi, \psi] = \frac{1}{2} \int d^3x \left\{ g_{ij}(\phi^k) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j + i g_{ij}(\phi^k) \bar{\psi}^i \gamma^\mu (D_\mu \psi^j) + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} R_{ijkl} (\bar{\psi}^i \psi^k) (\bar{\psi}^j \psi^l) \right\} \quad (2.38)$$

onde

$$(D_\mu \psi^j) = \partial_\mu \psi^j + \Gamma_{kl}^j \partial_\mu \phi^k \phi^l \quad (2.39)$$

Também, neste caso, a técnica de campo de fundo e o método das coordenadas normais funcionam igualmente bem; a expansão é obtida considerando os campos espinoriais ψ^i como flutuações quânticas, sem nenhum campo fermiônico de fundo. Dessa forma temos

$$g_{ij}(\phi) \bar{\psi}^i \not{D} \psi^j = \left(g_{ij}(\varphi) + \frac{1}{3} R_{iklj} \xi^k \xi^l \right) \bar{\psi}^i \not{D} \psi^j + \\ + \frac{1}{2} R_{ijkl} \partial_\mu \varphi^l \xi^k (\bar{\psi}^i \gamma^\mu \psi^j) \quad (2.40)$$

Fazendo novamente a conversão ao espaço-tangente, isto é

$$\xi^a(x) = e_i^a \xi^i(x), \quad \psi^a(x) = e_i^a \psi^i(x), \\ (D_\mu \psi)^a = \partial_\mu \psi^a + \omega_i^{ab} \partial_\mu \varphi^i \psi^b$$

podemos escrever a expansão envolvendo os férmions como

$$S_\psi[\psi] = S_\psi^{(0)}[\psi] + S_\psi^{(1)}[\psi] + S_\psi^{(2)}[\psi] + S_\psi^{(3)}[\psi] + S_\psi^{(4)}[\psi] + \dots \quad (2.41)$$

onde

$$\begin{aligned}
 S_{\psi}^{(0)} &= \frac{1}{2} \int d^3x [i\bar{\psi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \psi^a] \\
 S_{\psi}^{(1)} &= \frac{1}{2} \int d^3x [i\bar{\psi}^a \gamma^\mu A_\mu^{ab} \psi^b] \\
 S_{\psi}^{(2)} &= \frac{i}{6} \int d^3x R_{acdb} \xi^c \xi^d (\bar{\psi}^a \not{D} \psi^b) \\
 S_{\psi}^{(3)} &= \frac{i}{4} \int d^3x R_{abcb} \partial_\mu \varphi^i \xi^c (\bar{\psi}^a \gamma^\mu \psi^b) \\
 S_{\psi}^{(4)} &= \frac{1}{12} \int d^3x R_{abcd} (\bar{\psi}^a \psi^c) (\bar{\psi}^b \psi^d)
 \end{aligned}$$

O primeiro termo na expansão acima, $S_{\psi}^{(0)}$, serve para definir o propagador do espínor

$$\langle T \psi^a(x) \bar{\psi}^b(y) \rangle = \frac{i\delta^{ab}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k (\gamma^\mu k_\mu + m)}{(k^2 - m^2)} e^{ik(x-y)} = \delta^{ab} S_F(x-y)$$

no qual introduzimos, como no caso bosônico, um “cut-off” m , para trabalharmos com expressões finitas no infravermelho. Após a extração das divergências ultravioleta nós o faremos igual a zero.

O termo $S_{\psi}^{(1)}$ contribui para as divergências de um e dois “loops”. Os demais, $S_{\psi}^{(2)}$, $S_{\psi}^{(3)}$ e $S_{\psi}^{(4)}$ dão as contribuições em dois “loops”.

Para realizarmos os cálculos explicitamente, devemos lembrar que, em três dimensões, as matrizes de Dirac são 2×2 e satisfazem as seguintes relações [9, 51]

$$\begin{aligned}
 \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2\eta_{\mu\nu} 1, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2) \\
 \gamma_{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = i\epsilon_{\mu\nu\rho} \gamma^\rho \\
 \gamma_{\mu\nu\rho} &\equiv \frac{1}{2} \{\gamma_\mu, \gamma_{\nu\rho}\} = i\epsilon_{\mu\nu\rho} 1 \\
 \gamma^\mu \gamma_\nu \gamma_\mu &\equiv -\gamma_\nu, \quad C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \\
 C &= -C^T = \text{matriz de conjugação de carga}
 \end{aligned}$$

Uma particular representação matricial, satisfazendo as relações acima e que escolhemos usar, é a seguinte

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^2 = i\gamma^0\gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad C = \gamma^0$$

Nesta representação, um espinor de Majorana é real, isto é,

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^*, \quad \alpha = 1, 2$$

Portanto

$$\bar{\psi} = \psi^T \gamma^0, \quad \bar{\psi} \chi = \bar{\chi} \psi, \quad \bar{\psi} \gamma^\mu \chi = -\bar{\chi} \gamma^\mu \psi, \quad \bar{\psi} \gamma^2 \chi = -\bar{\chi} \gamma^2 \psi$$

onde χ é também um espinor de Majorana anti-comutante.

Com todas estas informações, é importante observar que, ao fazermos contrações de Wick, devemos considerar também $\bar{\psi} \bar{\psi}$ e $\psi \psi$, com os seus respectivos propagadores dados por

$$\langle T \bar{\psi}^a(x) \bar{\psi}^b(y) \rangle = -\gamma^0 \langle T \psi^a(x) \bar{\psi}^b(y) \rangle = -\gamma^0 \delta^{ab} S_F(x-y)$$

$$\langle T \psi^a(x) \psi^b(y) \rangle = \langle T \psi^a(x) \bar{\psi}^b(y) \rangle \gamma^0 = \delta^{ab} S_F(x-y) \gamma^0$$

2.4.1-CÁLCULOS DE UM "LOOP"

As contribuições nesta ordem são obtidas, considerando

$$\int d^3x \mathcal{L}_{int}^\psi = S_\psi^{(1)} \quad e \quad (2.42)$$

$$W_\psi[\psi] = \langle 0 | e^{iS_\psi^{(1)}} | 0 \rangle \quad (2.43)$$

As únicas divergências ultravioleta possíveis, são aquelas dos gráficos da figura 4

Figura 4—Possíveis contribuições espinoriais em um “loop”.

O diagrama (4a) é calculado de

$$\begin{aligned}
 D_{\psi}^{(4a)} &= -\frac{1}{2} \int d^3x \langle T(\bar{\psi}^a \gamma^\mu A_\mu^{ab} \psi^b)(x) \rangle = \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^3x \left[-\text{tr} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\gamma^\mu i(\not{k} + m)}{(k^2 - m^2)} \right] \delta^{ab} A_\mu^{ab}(x) \quad (2.44)
 \end{aligned}$$

Por invariância de Lorentz e o fato de que $\text{tr} \gamma^\mu = 0$ ele se anula, não contribuindo, portanto.

O segundo diagrama advém das contrações surgindo na expressão abaixo

$$D_{\psi}^{(b)} = \frac{1}{8} \int d^3x \int d^3y A_\mu^{ab}(x) A_\nu^{cd}(y) \langle T(\bar{\psi}^a \gamma^\mu \psi^b)(x) (\bar{\psi}^c \gamma^\nu \psi^d)(y) \rangle \quad (2.45)$$

No espaço dos momenta, a integral a se realizar é

$$\int d^3k \frac{\text{tr} [\gamma^\mu (\gamma^\rho k_\rho + m) \gamma^\nu ((k+p)^\sigma \gamma_\sigma + m)]}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \quad (2.46)$$

Esta integral apresenta uma divergência linear, mas que é removida com o uso de um regulador tipo Pauli-Villars. Em outras palavras, o diagrama (4b) não contribui á ação efetiva. Dessa forma, podemos afirmar que nessa ordem de perturbação, a introdução de férmions via supersimetria não altera a propriedade de renormalização da teoria, ou seja, o modelo continua renormalizável, com um contratermo (bosônico) que não é eliminado, exceto

quando a variedade é Ricci-flat, neste caso ele é finito. Em variedades localmente simétricas, também não há modificações e o resultado, para o modelo $O(N)$, é aquele dado por (2.24), isto é, finito somente quando $N = 2$.

2.4.2-CÁLCULOS DE DOIS "LOOPS"

Na ordem de dois "loops", as possíveis contribuições são as correspondentes aos gráficos mostrados na figura 5

Figura 5-Diagramas de dois "loops" divergentes envolvendo propagadores espinoriais.

No diagrama (4a) nós temos a participação de $S_\psi^{(2)}$, isto é,

$$\Delta S_\psi^{(5a)} = -\frac{1}{6} \int d^3x R_{acdb} \langle T[\xi^c \xi^d \bar{\psi}^a \gamma^\mu (D_\mu \psi)^b](x) \rangle \quad (2.47)$$

Após as contrações dos ξ 's e ψ 's, ficamos com

$$\Delta S_\psi^{(5a)} = \frac{\Lambda^4}{36\pi^4} \int d^3x R(x) \quad (2.48)$$

Este contratermo é o mesmo que aquele aparecendo como a última parcela de (2.25); porém, devido ao fator 2 em (2.48) não acontece o cancelamento.

Os diagramas (5b), (5c) e (5d), por um cálculo explícito, no qual as propriedades dos tensores são levadas em conta após as contrações, bem

como as propriedades das matrizes gama e integrações simétricas; têm todas as suas partes divergentes eliminadas.

Finalmente, o diagrama realmente relevante é o da figura (5e). Sua contribuição á ação efetiva é dada por

$$\Delta S_{\psi}^{(5e)} = -\frac{1}{32} \int d^3x \int d^3y R_{abcd}(x) R_{efgh}(y) \partial_{\mu} \varphi^d(x) \partial_{\nu} \varphi^h(y) \times \\ \times \langle T(\xi^c \bar{\psi}^a \gamma^{\mu} \psi^b)(x) (\xi^g \bar{\psi}^e \gamma^{\nu} \psi^f)(y) \rangle \quad (2.49)$$

As integrais divergentes surgindo das contrações acima estão contidas em $\mathcal{I}^{\mu\nu}$, dada por:

$$\mathcal{I}^{\mu\nu} = \int \frac{d^3k d^3l (k^{\mu} l^{\nu} + k^{\nu} l^{\mu})}{(k^2 - m^2)(l^2 - m^2)[(k+l+p)^2 - \mu^2]} + \\ + \eta^{\mu\nu} \int \frac{d^3k d^3l (m^2 - k \cdot l)}{(k^2 - m^2)(l^2 - m^2)[(k+l+p)^2 - \mu^2]} \quad (2.50)$$

Como antes, as partes divergentes de $\mathcal{I}^{\mu\nu}$, são isoladas dentro do “espírito” do esquema de subtração BPH. Novamente, usamos relações que são essencialmente as mesmas que (2.30). O resultado, após um cálculo tedioso é

$$\Delta S_{\psi}^{(5e)} = \frac{1}{192\pi^4} \left\{ \eta^{\mu\nu} \left[\Lambda^2 - \frac{\pi^2}{5} p^2 \left(3 \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \frac{4}{\pi} \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{8}{3\pi^2} \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{2}{15} \pi^2 p^{\mu} p^{\nu} \left(\ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{\Lambda}{4\pi^2 \mu} \right) \right\} \int d^3x R_{iabc} R_j^{abc} \partial_{\mu} \varphi^i \partial_{\nu} \varphi^j \quad (2.51)$$

Por uma simples inspeção vemos que o contratermo obtido[†] (2.51) a despeito da supersimetria, não é suficiente para eliminar as divergências do tipo bosônicas, tais como (2.31). Na verdade, além de não conseguirmos cancelar os contratermos não-renormalizáveis dos cálculos puramente bosônicos,

[†] Em (2.51), fizemos $\mu^2 = m^2$, já que o modelo é supersimétrico

ainda encontramos um outro que também não tem similar na ação original. Em outras palavras, continuamos com um modelo não-renormalizável, ou seja, não há melhora na renormalizabilidade com a introdução de férmions de uma supersimetria simples. Nos casos particulares estudados antes, não há nenhuma novidade para os modelos definidos em variedades Ricci-flat. Enquanto que, para espaços localmente simétricos, por exemplo o modelo $O(N)$, o contratermo (2.51) e algumas parcelas de (2.33) são proporcionais a $(N - 2)$, e conseqüentemente se anulam para $N = 2$. No entanto, ainda sobram outros termos não-renormalizáveis que são aqueles do tipo quárticos, isto é, $(\partial\varphi)^4$.

2.5-CÁLCULOS NO MODELO SUPERSIMÉTRICO $\mathcal{N} = 2$

Como uma última tentativa em se obter uma teoria que seja pelo menos renormalizável, nós estudaremos agora o modelo sigma não-linear tridimensional com supersimetria estendida $\mathcal{N} = 2$. O ingrediente necessário para esta extensão é a geometria de Kähler [25] que tem fortes implicações sobre a renormalizabilidade do mesmo. Este modelo já foi introduzido e comentado no capítulo anterior; dessa forma, nos utilizaremos de todos os resultados lá apresentados, principalmente aqueles relativos a manipulação com os tensores.

O teorema de Zumino [25] pode então ser usado e nós escrevemos a ação do modelo como [9]

$$\begin{aligned} \bar{S} = \int d^3x \left[g_{i\bar{j}}(\phi, \bar{\phi}) \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \bar{\phi}^{\bar{j}} + i g_{i\bar{j}} \bar{\chi}^i \gamma^\mu (D_\mu \chi)^{\bar{j}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} R_{i\bar{k}\bar{j}l} (\bar{\chi}^i \chi^k) (\bar{\chi}^{\bar{j}} \chi^l) \right] \end{aligned} \quad (2.52)$$

Em (2.52) os campos $\phi, \bar{\phi}$ são coordenadas complexas, bosônicas, e os cam-

pos de Fermi χ , $\bar{\chi}$ espinores de Dirac em duas dimensões.

A expansão de campo de fundo da ação (2.52) é, na forma, essencialmente a mesma que (2.16), porém, com as restrições da variedade de Kähler (1.40a, b).

Os cálculos em um "loop" são realizados de uma maneira similar fazendo contrações do tipo

$$\begin{aligned} & \langle (\bar{\xi}^a \xi^b)(x) \rangle, \quad A^{\mu \bar{a}}_{\bar{b}} A_{\mu \bar{a} c} \langle (\bar{\xi}^b \xi^c)(x) \rangle \\ & A_{\mu \bar{a} b}(x) A_{\nu \bar{c} d}(y) \langle (\bar{\xi}^a \vec{\partial}_{\mu} \xi^b)(x) (\bar{\xi}^c \vec{\partial}_{\nu} \xi^d)(y) \rangle, \\ & \langle (\bar{\chi}^a \gamma^{\mu} A_{\mu \bar{a} b} \chi^b)(x) \rangle, \\ & A_{\mu \bar{a} b}(x) A_{\nu \bar{c} d}(y) \langle (\bar{\chi}^a \gamma^{\mu} \chi^b)(x) (\bar{\chi}^c \gamma^{\nu} \chi^d)(y) \rangle \end{aligned}$$

Nesta ordem, encontramos o seguinte contratermo

$$\Delta \bar{S}^{(1)} = \frac{\Lambda}{4\pi} \int d^3x R_{i\bar{j}} \partial_{\mu} \varphi^i \partial^{\mu} \bar{\varphi}^{\bar{j}} \quad (2.53)$$

Logo, quando o modelo é definido sobre uma geometria Riemanniana ou de Kähler Ricci-flat o contratermo (2.53) se anula e ele se torna finito.

Os cálculos em dois "loops" são agora realizados considerando as seguintes contrações

$$\begin{aligned} & R_{c\bar{a}b\bar{d}}(x) R_{i\bar{e}f\bar{j}}(y) \partial_{\mu} \varphi^i(y) \partial^{\mu} \bar{\varphi}^{\bar{j}}(y) \langle (\bar{\xi}^a \xi^b \partial_{\nu} \xi^c \partial^{\nu} \bar{\xi}^d)(x) (\bar{\xi}^e \xi^f)(y) \rangle \\ & R_{i\bar{a}b\bar{c}}(x) R_{\bar{j}d\bar{e}f}(y) \partial_{\mu} \varphi^i(x) \partial^{\mu} \bar{\varphi}^{\bar{j}}(y) \langle (\bar{\xi}^a \xi^b \partial_{\mu} \bar{\xi}^c)(x) (\xi^d \bar{\xi}^e \partial_{\nu} \xi^f)(y) \rangle \\ & R_{c\bar{a}b\bar{d}}(x) A_{\mu}^{\bar{m}}_{\bar{e}}(y) A^{\mu}_{\bar{m}f}(y) \langle (\bar{\xi}^a \xi^b \partial_{\nu} \xi^c \partial^{\nu} \bar{\xi}^d)(x) (\bar{\xi}^e \xi^f)(y) \rangle \\ & R_{c\bar{a}b\bar{d}} \langle (\bar{\xi}^a \xi^b \partial_{\mu} \xi^c \partial^{\mu} \bar{\xi}^d)(x) \rangle \end{aligned}$$

e outras mais.

Os resultados são:

$$\begin{aligned}
 (a) &\sim \frac{1}{96\pi^4} \left(4\Lambda^2 + \frac{\pi}{3} \frac{\Lambda^3}{\mu} \right) \int d^3x R_{a\bar{b}} R_i^{a\bar{b}} \bar{j} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \bar{\varphi}^j \\
 (b) &\sim \frac{1}{96\pi^4} \left(4\Lambda^2 + \frac{\pi}{3} \frac{\Lambda^3}{\mu} \right) \int d^3x R_{a\bar{b}} \omega_i^{\bar{a}m} \omega_{\bar{j}m}^b \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \bar{\varphi}^j \\
 (c) &\sim \frac{\Lambda^4}{36\pi^4} \int d^3x R \\
 (d) &\sim \frac{8}{9} \int d^3x R_{i\bar{a}b\bar{c}} R_{\bar{j}}^{\bar{a}b\bar{c}} \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \bar{\varphi}^j \times \\
 &\quad \times \int \frac{d^3k d^3l [l^\mu (l^\nu + k^\nu)]}{(k^2 + \mu^2)(l^2 + \mu^2)[(k+l+p)^2 + \mu^2]} \\
 (e) &\sim \frac{\Lambda^2}{4\pi^4} \int d^3x \left(\frac{1}{3} R_{e\bar{b}a\bar{f}} \omega_i^{e\bar{b}} \omega_{\bar{j}}^{\bar{f}a} + \frac{1}{6} D^a D_i R_{a\bar{j}} - \frac{1}{4} D^a D_a R_{i\bar{j}} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} R_{i\bar{a}b\bar{c}} R_{\bar{j}}^{\bar{a}b\bar{c}} + \frac{1}{3} R_{i\bar{b}} R_{\bar{j}}^{\bar{b}} - \frac{3}{2} D_c R_{i\bar{e}} \omega_{\bar{j}}^{\bar{e}c} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3} R_{\bar{e}f} \omega_i^{\bar{e}c} \omega_{\bar{j}}^{\bar{f}c} \right) \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \bar{\varphi}^j \\
 (f) &\sim \frac{\Lambda}{16\pi^3 \mu} \int d^3x \left(A_{i\bar{j}p\bar{q}} + B_{i\bar{j}p\bar{q}} \right) \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \bar{\varphi}^j \partial_\nu \varphi^p \partial^\nu \bar{\varphi}^q \\
 (g) &\sim \frac{1}{32\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} \int d^3x C_{i\bar{j}p\bar{q}} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \bar{\varphi}^j \partial_\nu \varphi^p \partial^\nu \bar{\varphi}^q
 \end{aligned}$$

Acima,

$$A_{i\bar{j}p\bar{q}} \equiv \left(\sum (DR)R + (R)R\omega\omega + \sum DD(R)R + (R)RR \right)_{i\bar{j}p\bar{q}}$$

os termos em parêntese indicando tensores de Ricci Kähler,

$$\begin{aligned}
 B_{i\bar{j}p\bar{q}} &\equiv \left(\sum DRR\omega + RR\omega\omega + DDDR + \sum RRR \right)_{i\bar{j}p\bar{q}} \\
 C_{i\bar{j}p\bar{q}} &\equiv \left(\sum DRDR + \sum RDR\omega + \sum RR\omega\omega \right)_{i\bar{j}p\bar{q}}
 \end{aligned}$$

envolvem tensores de Riemann-Kähler.

Consideráveis simplificações ocorrem, quando consideramos uma geometria de Kähler Ricci-flat ($R_{a\bar{b}} = 0$), neste caso os contratermos a , b , c se anulam. Termos envolvendo $R_{a\bar{c}d\bar{e}}R_{\bar{b}}^{\bar{c}d\bar{e}}$ não constituem um tensor de Kähler [52] e também não contribuem. Contudo, a despeito das fortes implicações da geometria de Kähler, os termos quárticos f e g ainda sobrevivem.

É também possível construir modelos sigma não-lineares com supersimetria estendida $\mathcal{N} = 4$. Em duas dimensões, como já dissemos anteriormente, estes modelos são finitos em todas as ordens em teoria de perturbação [37]. O fato é que o aumento de supersimetrias e as restrições impostas pela geometria ($\mathcal{N} = 4$, HiperKähler) à renormalizabilidade, nos leva a conjecturar que, também em três dimensões, o passo seguinte no sentido de se ter uma teoria renormalizável é estender uma vez mais a supersimetria ($\mathcal{N} = 4$) e/ou introduzir termos do tipo Wess-Zumino. No entanto, não chegamos a realizar cálculos nesta direção.

CAPÍTULO 3

TEORIAS DE CAMPOS COM TERMO DE CHERN-SIMONS

3.1-INTRODUÇÃO

Como já comentado anteriormente, teorias de campos em três dimensões têm-se apresentado nos últimos anos como uma forte área de pesquisa, pois além de sua utilidade para as mencionadas teorias de membranas, elas têm se prestado também como um novo "laboratório teórico" para o que ocorre em outras dimensões, especialmente quando consideramos uma teoria de gauge. Neste caso, interessantes propriedades topológicas surgem, permitindo-se conexões com comportamentos de modelos em quatro dimensões.

A física de partículas elementares em interação em um espaço-tempo quadridimensional se apóia na realização não-abeliana de uma teoria de gauge. Entretanto, devido a sua complexidade somos motivados a estudar modelos mais simples em outras dimensões tais como: $(0+1)$, $(1+1)$ e agora $(2+1)$ (ou $D = 3$, Euclideano). O caso $(1+1)$ tem sido extensivamente discutido na literatura e como de sabe não existe grau de liberdade dinâmico associado ao campo de Maxwell, embora um "fóton" massivo possa emergir de um acoplamento com uma corrente como no modelo de Schwinger [53] (um campo de gauge $U(1)$ acoplado a Férmions). O caso $D = 3$, tem a vantagem de ter um grau fotônico, além do Coulombiano. Na realidade, isso está relacionado à possibilidade oferecida pelo tensor de Lévi-Civita em um espaço-tempo tridimensional de se ter o termo de Chern-Simons [15] que possibilita a existência de um termo de massa invariante de gauge para os campos de gauge. Tem-se obtido também interessantes resultados quando se

trata a gravitação de Einstein em $D = 3$ na presença de tal termo topológico [15, 54, 55], nesse caso a teoria antes trivial e sem propagação torna-se uma teoria dinâmica com uma partícula massiva de spin 2 que se propaga [15]. Contudo, nos últimos dois anos, a despeito das inúmeras propriedades relevantes do ponto de vista da teoria de campos, o interesse tem-se reavivado pela promissora possibilidade de que essas teorias possam vir a dar boas explicações a fenômenos de supercondutividade a altas temperaturas [16, 56]. Essa esperança se fundamenta no fato de ações (por exemplo de campos de gauge abelianos) incluindo termo de Chern-Simons poderem afetar o spin e a estatística de partículas carregadas [16, 17, 57, 58] e dessa maneira apresentar propriedades similares às aquelas das excitações elementares em modelos de materiais supercondutores.

Nas seções que se seguem faremos uma breve exposição de algumas propriedades cinemáticas de teoria de campos de gauge topologicamente massivas. Examinaremos mais adiante (capítulo 4), os aspectos dinâmicos, quando os campos de gauge aparecerão acoplados a Férmions massivos. Neste caso calcularemos a ação efetiva via expansão $1/N$ e estudaremos o conteúdo de partículas da teoria.

3.2—TEORIAS DE GAUGE COM TERMO TOPOLÓGICO

Como já enfatizado, teorias de campos em dimensões ímpares apresentam alguns resultados interessantes e diferentes daqueles obtidos em dimensões pares. Em particular, existe no primeiro caso, violação de paridade quando se procura preservar a invariância por uma transformação de gauge global [59]. Isto significa que a ação efetiva muda de $\pi|n|$ (n , o número de “winding”); em outras palavras

$$\det(-\not{D}) \rightarrow (-1)^{|n|} \det(-\not{D})$$

sob uma transformação de gauge homotopicamente não trivial U_n . Para se cancelar esta anomalia, deve-se adicionar um termo, chamado de termo de massa topológico ou termo de Chern-Simons, com o mesmo tipo de variação sob tal transformação.

3.2.1-TEORIAS DE GAUGE ABELIANAS

Em uma teoria de gauge abeliana tridimensional (espaço-tempo $(2+1)$ ou Euclideano $D=3$) o termo de Chern-Simons é dado por

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\mu}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho$$

Assim a Lagrangeana para a eletrodinâmica espinorial topologicamente massiva toma a forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\bar{\psi} \not{D} \psi - m\bar{\psi} \psi + \frac{\mu}{4} \epsilon^{\mu\nu\rho} F_{\mu\nu} A_\rho \quad (3.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $\not{D} = \not{\partial} - ie\not{A}$, μ é adimensional, enquanto e^2 e A_μ têm dimensão de massa igual a 1.

Da Lagrangeana (3.1) obtemos as seguintes equações de movimento

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} &= -e\bar{\psi} \gamma^\nu \psi \\ (i\not{\partial} + e\not{A} - m)\psi &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

que são invariantes sob as transformações de gauge

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda \\ \psi &\rightarrow e^{i\Lambda} \psi \end{aligned}$$

Entretanto

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \partial_\rho \left(\frac{\mu}{4e} \epsilon^{\rho\mu\nu} F_{\mu\nu} \Lambda \right)$$

ou seja, a menos de uma derivada total, a lagrangeana (3.1) pode ser colocada numa forma invariante de gauge.

Consideremos agora, o dual do tensor $F_{\mu\nu}$, isto é

$$*F^\mu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad F^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho} *F_\rho$$

Portanto, em três dimensões, ele se apresenta como um vetor e como é fácil verificar, satisfaz, quando a corrente é conservada, a identidade de Bianchi

$$\partial_\mu *F^\mu = 0 \quad (3.3)$$

Ademais, podemos também reescrever a equação (3.2) na forma dual

$$\partial_\mu *F_\nu - \partial_\nu *F_\mu - \mu F_{\mu\nu} = -\epsilon_{\mu\nu\rho} J^\rho$$

Tomando a divergência da expressão acima obtemos

$$(\square + \mu^2) *F^\mu = \mu \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{\mu} \epsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\rho \right) J_\nu \quad (3.4)$$

A equação (3.4) nos permite concluir que os modos do campo de gauge são massivos e não-taquiônicos. Porém, para se saber um pouco mais, como por exemplo, o número de excitações e o spin, deve-se proceder a quantização da teoria e uma cuidadosa análise do grupo de Lorentz completo $O(2, 1)$. Não apresentaremos detalhes aqui, mas pode-se mostrar que no caso $\mu = 0$ (conservando a paridade) o spin deve ser zero, enquanto que $\mu \neq 0$ (violando a paridade) um único grau de liberdade pode carregar spin não-nulo (+1 para $\mu > 0$ ou -1 para $\mu < 0$). Quando se considera dois graus de liberdade com

massas topológicas $\pm\mu$, ambos os spins ± 1 estão presentes, e a paridade[†] é conservada.

Finalmente, uma observação importante, nesse contexto, é o fato de a ação de Chern–Simons é radiativamente gerada por férmions acoplados minimalmente ao campo de gauge A_μ [59]. A ação efetiva para esse campo, gerada por um campo de férmion, é obtida calculando-se o determinante fermiônico, que é divergente ultravioleta. Um procedimento de regularização, torna-se então necessário. Diferentes regularizações podem ser escolhidas conduzindo-nos a ambigüidades, ou seja, a ação efetiva não é determinada de forma única, mas, depende do esquema de regularização empregado. O uso de um “corte” tipo Pauli–Villars, por exemplo, embora preservando a invariância de gauge não respeita a paridade. Recentemente, Coste e Lüscher [17], usando uma rede cúbica com regulador ultravioleta, invariante de gauge, calcularam a ação efetiva e encontraram que no limite onde o “cut-off” é removido, as várias regularizações caem em classes de universalidade classificadas por um determinado número n . Além disso, mostraram que, para qualquer valor de n , sempre existirá uma anomalia de paridade, isto é, no caso em que a massa é nula, a invariância de paridade da ação clássica é quebrada por efeitos quânticos. No entanto, quando $n = -1$ ocorre uma bosonização.

[†] Em $(2+1)$ -dimensões os campos A_μ e ψ se transformam da seguinte maneira sob uma transformação de paridade

$$\begin{aligned} \mathcal{P} A^0(t, x, y) \mathcal{P}^{-1} &= A^0(t, -x, y) & \mathcal{P} A^2(t, x, y) \mathcal{P}^{-1} &= A^2(t, -x, y) \\ \mathcal{P} A^1(t, x, y) \mathcal{P}^{-1} &= -A^1(t, -x, y) & \mathcal{P} \psi(t, x, y) \mathcal{P}^{-1} &= \sigma^1 \psi(t, -x, y) \end{aligned}$$

3.2.2—TEORIAS DE YANG-MILLS

Em uma teoria de gauge não-abeliana o termo de Chern-Simons pode ser generalizado e é dado por

$$\mathcal{L}_{CS} = -\frac{\mu}{2g^2} \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{tr} \left(F_{\mu\nu} A_\rho - \frac{2}{3} A_\mu A_\nu A_\rho \right)$$

onde tr é o traço sobre os índices internos, g é a constante de acoplamento de gauge, a razão μ/g^2 é adimensional e a notação matricial usada é a seguinte:

$$\begin{aligned} A_\mu &= gT^a A_\mu^a \\ F_{\mu\nu} &= gT^a F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \\ [T^a, T^b] &= f^{abc} T^c \end{aligned}$$

os T^a 's são as matrizes de representação e os f^{abc} as constantes de estrutura do grupo.

A Lagrangeana para a teoria é então:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{tr} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \mathcal{L}_{CS} \quad (3.5)$$

As equações de campo obtidas de (3.5) são:

$$\mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} + \frac{\mu}{2} \epsilon^{\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0 \quad (3.6)$$

onde

$$\mathcal{D}_\mu \equiv \partial_\mu + [A_\mu, \]$$

que na forma dual se apresentam como:

$$\mathcal{D}_\mu {}^*F_\nu - \mathcal{D}_\nu {}^*F_\mu - \mu F_{\mu\nu} = 0 \quad (3.7)$$

com $*F^\mu$ satisfazendo a identidade de Bianchi $\mathcal{D}_\mu *F^\mu = 0$. Novamente, tomando a divergência de (3.7), usando (3.6) e a identidade de Ricci, encontramos:

$$(\mathcal{D}_\rho \mathcal{D}^\rho + \mu^2) *F_\mu = \epsilon_{\mu\rho\sigma} [*F^\rho, *F^\sigma]$$

que são as análogas não-abelianas de (3.4), dando a massa aos campos.

Um resultado muito interessante ocorrendo em teoria de Yang-Mills tridimensional com termo topológico é que sob uma transformação de gauge global:

$$A_\mu \rightarrow U^{-1} A_\mu U + U^{-1} \partial_\mu U$$

a ação da teoria sofre uma mudança, isto é,

$$\int d^3x \mathcal{L} \rightarrow \int d^3x \mathcal{L} + \frac{\mu}{g^2} \int d^3x \epsilon^{\rho\mu\nu} \text{tr} \partial_\mu (A_\rho \partial_\nu U U^{-1}) + \mu \frac{8\pi^2}{g^2} \omega(U)$$

Na expressão acima o segundo termo do lado direito é o análogo não-abeliano da derivada total que aparece no caso abeliano e,

$$\omega(U) = \frac{1}{24\pi^2} \int d^3x \epsilon^{\mu\nu\rho} \text{tr} (\partial_\mu U U^{-1} \partial_\nu U U^{-1} \partial_\rho U U^{-1})$$

é o famoso número de "winding"[†]. O termo envolvendo esse número é proveniente da mudança da ação de Chern-Simons, $\int d^3x \mathcal{L}_{CS} \rightarrow \int d^3x \mathcal{L}_{CS} + \mu 8\pi^2/g^2 \omega(U)$.

É importante notar, então, que se considerarmos transformações de gauge, tais que, no infinito os campos vão a zero (o espaço-tempo é assintoticamente uniforme), ou seja, $U(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} I$, o segundo termo (dependente de A) desaparece ao usarmos o teorema de Gauss. Porém, mesmo com uma particular parametrização para U e transformando o termo com o número de

[†] $\omega(U)$ são inteiros, que em teorias Euclidianas, servem para caracterizar as classes de equivalência homotópicas.

“winding” numa derivada total, a correspondente integral de superfície não se anula, a menos que os U 's sejam homotopicamente triviais. Portanto, a ação completa não é invariante de gauge pois muda de $(\mu 8\pi^2/g^2) \omega(U)$. Contudo, se quisermos ser mais precisos devemos exigir, em virtude da formulação de integral funcional, que $\exp(i \int d^3x \mathcal{L}_{YM} + i \int d^3x \mathcal{L}_{CS})$ (ou $\exp(- \int d^3x \mathcal{L}_{YM} - \int d^3x \mathcal{L}_{CS})$) é que seja invariante de gauge e isso nos leva a uma condição de quantização sobre $(4\pi\mu/g^2)$, isto é,

$$4\pi \frac{\mu}{g^2} = n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

3.3-ALGUNS COMENTÁRIOS GERAIS

Para finalizar esse capítulo devemos ressaltar que o termo de Chern-Simons aparecendo numa teoria gravitacional é dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CS} &= -\frac{1}{4k^2\mu} \epsilon^{\mu\nu\rho} \left[R_{\mu\nu ab} \omega_\rho{}^{ab} + \frac{2}{3} \omega_{\mu b}{}^c \omega_{\nu c}{}^a \omega_{\rho a}{}^b \right] \\ R_{\mu\nu ab} &\equiv \partial_\mu \omega_{\nu ab} + \omega_{\mu a}{}^c \omega_{\nu cb} - (\mu \leftrightarrow \nu) \\ \omega_{\mu ab} &= -\omega_{\mu ba}, \quad \text{é a conexão de spín.} \end{aligned}$$

Embora, sem entrar em detalhes é importante dizer que esse termo como considerado acima tem o efeito de dar massa ao “gráviton”, tornando a gravitação, antes trivial, numa teoria dinâmica, cuja ação torna-se agora [15]

$$S = \frac{1}{k^2} \int d^3x \sqrt{g} R + \frac{1}{k^2\mu} \int d^3x \mathcal{L}_{CS}, \quad \sqrt{+g} = \sqrt{+\det g_{\mu\nu}}$$

Mais recentemente, Horne e Witten [60] mostraram que a gravitação conformalmente invariante em três dimensões é equivalente a teoria de gauge

não-abeliana do grupo conforme em três dimensões, com uma ação de Chern-Simons. Isto significa que a gravitação conforme é finita e exatamente solúvel.

Além desse, muitos outros modelos e problemas vem sendo pesquisados em três dimensões num esforço de se encontrar boas respostas a problemas mais realistas. Podemos destacar, como exemplo, a representação do comportamento crítico de um anti-ferromagneto de Heisenberg Fermionizado pela eletrodinâmica $(2 + 1)$ -dimensional contínua com matéria fermiônica e ação de gauge com termo de Chern-Simons [61]. Mostra-se que a matéria fermiônica da teoria quando interagindo com os campos de gauge topologicamente massivos, se tornam bósons relativísticos que coincidem com as ondas de spin bosônicas do anti-ferromagneto. Nesse caso dizemos que a presença do termo de Chern-Simons nessa teoria transmuta o spin e troca a estatística dos quanta, isto é, férmions se bosonizam.

Tem-se procurado também usar o modelo CP^1 ou o sigma não-linear $O(3)$ com $S = 1/2f \int d^3x \partial_\mu \eta^a \partial^\mu \eta^a$ e $\sum_1^3 \eta^a \eta^a = 1$ na descrição de anti-ferromagnetos $2D$ como $La_2CuO_4^\dagger$ [62 – 65]. Em particular, tem-se conjecturado a equivalência desses modelos, a baixas temperaturas, ao modelo de Heisenberg $2D$ [66]. É importante dizer que os anti-ferromagnetos como La_2CuO_4 quando especialmente dopados tornam-se supercondutores a uma temperatura crítica T_c notavelmente alta comparada a outros tipos de materiais supercondutores. Experimentos de espalhamento de neutrons [67] sobre esse composto vêm sendo realizados com boas perspectivas de haver concordância com os resultados teóricos.

[†] tetróxido cúprico dilantanídeo.

CAPÍTULO 4

O MODELO CP^{N-1} COM FÉRMIONS E O TERMO DE CHERN-SIMONS

4.1-INTRODUÇÃO

No capítulo 3 dedicamos alguma atenção às teorias de gauge tridimensionais com termos topológicos (Chern-Simons). Enfatizamos naquela ocasião a importância desse novo "laboratório teórico" como meio de avançarmos na compreensão e desenvolvimento de analogias com a física em quatro dimensões. O grande sucesso dos modelos bidimensionais para a física de partículas elementares (geração dinâmica de massa, sólitons, cordas, etc.), física do estado sólido e sistemas estatísticos, nos dá esperança de aprendermos muito, trabalhando também em três dimensões que é mais acessível que as quatro usuais. Nesse caso, como já foi dito antes, existem boas perspectivas, além daquelas de partículas ("fótons massivos"), de interessantes aplicações, como por exemplo, em supercondutividade a altas temperaturas.

Dentro desse quadro, um modelo muito rico em propriedades é o modelo CP^{N-1} . Este modelo apresentado no capítulo 1, descreve um vetor de $SU(N)$, carregado, e é renormalizável não perturbativamente [14].

Quando campos de Fermi (massivos ou não) se apresentam acoplados minimalmente ao campo composto (gauge) desse modelo, em três dimensões, um mecanismo técnico faz surgir um termo de Chern-Simons através do cálculo dos "loops" fermiônicos, pois nesse caso, o traço do produto de três matrizes gama (matrizes de Pauli 2×2) não é nulo, mas proporcional ao tensor anti-simétrico de Lévi-Civita.

No presente capítulo investigaremos as propriedades apresentadas na

situação acima, com particular interesse no efeito desse acoplamento (que induz o termo topológico) no conteúdo de partículas da teoria.

4.2—O MODELO

O modelo que trataremos aqui, objeto de nossa investigação, consistirá de uma Lagrangeana $\mathcal{L}$ escrita como $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{CP^{N-1}} + \mathcal{L}^F$, $\mathcal{L}^{CP^{N-1}}$ representa a Lagrangeana do modelo CP^{N-1} , e é, como já vimos, dada na forma euclideanizada, por:

$$\mathcal{L}^{CP^{N-1}} = (\partial_\mu \bar{z} \cdot \partial_\mu z) + \frac{1}{4} (\bar{z} \cdot \vec{\partial}_\mu z)^2 \quad (4.1)$$

onde $z(x) = (z_1(x), \dots, z_N(x))$ é um vetor unitário complexo N -dimensional com:

$$(\bar{z} \cdot z) = 1, \quad (4.2)$$

sendo

$$(\bar{z} \cdot \vec{\partial}_\mu z) \equiv \bar{z} \cdot \partial_\mu z - \partial_\mu \bar{z} \cdot z$$

A Lagrangeana (4.1) é invariante sob as transformações

$$z_j(x) \rightarrow z'_j(x) = e^{i\Lambda(x)} z_j(x) \quad (4.3)$$

Assim, introduzindo convenientemente um campo composto $A_\mu(x) = \frac{i}{2} (\bar{z} \cdot \vec{\partial}_\mu z)(x)$ se transformando sob (4.3) como um campo de gauge abeliano $A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda(x)$, a Lagrangeana $\mathcal{L}^{CP^{N-1}}$ toma a forma invariante de gauge

$$\mathcal{L}^{CP^{N-1}} = \overline{D_\mu z} \cdot D^\mu z \quad \text{onde} \quad D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \quad \text{sobre os bósons}$$

O outro termo de $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^F$, descreve o acoplamento minimal de férmions carregados com carga e (possivelmente diferente daquela dos campos z 's)[†] com o campo composto (gauge) A_μ acima introduzido, e sua forma é a de uma teoria de gauge usual:

$$\mathcal{L}^F = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi$$

onde

$$\not{D} \equiv \gamma^\mu D_\mu = \gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \quad \text{sobre os férmions}$$

4.3-A EXPANSÃO $1/N$ E A ESTRUTURA DE FASES

O modelo descrito na seção anterior faz parte de uma classe maior de modelos em que os campos pertencem a uma representação vetorial do grupo de simetria, no caso em questão $SU(N)$ ou um de seus subgrupos. Com isso pode-se obter a técnica de diagramas de Feynman tomando como parâmetro natural $1/N$, para se obter uma expansão perturbativa, onde N é o número de componentes do campo. Tal expressão foi usada pela primeira vez em mecânica estatística [68] e depois aplicada à teoria de campos [69].

O nosso ponto de partida é a construção do funcional gerador para as funções de Green Euclidianas dos campos do modelo. Então, convenientemente, nós modificamos o vínculo (4.2) para $|z|^2 = N/2f$, (f uma constante de acoplamento) e o implementamos na Lagrangeana através de um campo auxiliar $\alpha(x)$ desempenhando o papel de um multiplicador de Lagrange. Um outro campo dessa natureza, A_μ , é também introduzido com a finalidade de

[†] A escolha $q = e = 1$ e massas iguais para bósons e férmions é natural num modelo supersimétrico

transformar a interação quártica em quadrática. Com tudo isso, o funcional gerador pode ser escrito como:

$$Z[J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}, K_\mu] = \mathcal{Z} \int [dz d\bar{z} d\psi d\bar{\psi} d\alpha dA_\mu] \exp \int d^3x \left\{ -\partial_\mu \bar{z} \cdot \partial_\mu z - \right. \\ \left. - \frac{f}{2N} (\bar{z} \cdot \partial_\mu z)^2 - \alpha \left(|z|^2 - \frac{N}{2f} \right) - \frac{N}{2f} \left[A_\mu - \frac{if}{N} (\bar{z} \cdot \vec{\partial}_\mu z) \right]^2 - \right. \\ \left. - \bar{\psi} (\not{D} - m) \psi + \bar{J} \cdot z + \bar{z} \cdot J + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta + K_\mu A_\mu \right\}$$

$$Z[J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}, K_\mu] = \mathcal{Z} \int [dz d\bar{z} d\psi d\bar{\psi} d\alpha dA_\mu] \exp \int d^3x \left\{ -\partial_\mu \bar{z} \cdot \partial_\mu z - \right. \\ \left. - \alpha |z|^2 + \frac{N}{2f} \alpha - A_\mu A_\mu |z|^2 + i A_\mu (\bar{z} \cdot \vec{\partial}_\mu z) - \right. \\ \left. - \bar{\psi} (\not{D} - m) \psi + \bar{J} \cdot z + \bar{z} \cdot J + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta + K_\mu A_\mu \right\}$$

A fim de tornar mais evidente a análise da estrutura de fases da teoria, integraremos como Aref'va e Azakov [14] as $(N - 1)$ primeiras componentes dos campos z 's, escolhendo um sistema de coordenadas em que os campos sejam assintoticamente constantes ($z(x) \rightarrow z_0$, $\bar{z}(x) \rightarrow \bar{z}_0$, para $|x| \rightarrow \infty$) e tal que o eixo- N coincide com a direção de z_0 . Isto na realidade equivale a tomarmos uma direção na qual esperamos que haja uma quebra espontânea da simetria quiral. Finalmente, escolhendo o gauge de Lorentz ($\partial_\mu A_\mu = 0$), fazendo convenientes mudanças de variáveis, reescalando os campos ($z_N \rightarrow \sqrt{N} z_N$, $\bar{z}_N \rightarrow \sqrt{N} \bar{z}_N$) e realizando as integrações nas $(N - 1)$ componentes dos campos z 's e nas N dos campos ψ 's teremos a seguinte expressão para o funcional gerador completo

$$\begin{aligned}
Z[J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}, K_\mu] = & \mathcal{Z} \int [dz_N d\bar{z}_N d\alpha dA_\mu] \exp \left\{ -N \left[\text{tr} \ln \Delta_B - \text{tr} \ln \Delta_F + \right. \right. \\
& + \int d^3x \left(\partial_\mu \bar{z}_N \partial_\mu z_N + \alpha |z_N|^2 - \frac{\sigma}{2f} + A_\mu A_\mu |z_N|^2 - i A_\mu (\bar{z}_N \vec{\partial}_\mu z_N) \right) \Big] + \\
& + \text{tr} \ln \Delta_B + (\bar{J} \cdot \Delta_B^{-1} J) + (\bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} \eta) + \sqrt{N} \int d^3x (\bar{J}_N z_N + \bar{z}_N J_N) + \\
& \left. + \int d^3x K_\mu A_\mu \right\} = \mathcal{Z} \int [dz_N d\bar{z}_N d\alpha dA_\mu] e^{-I_{\text{eff}}} \quad (4.4)
\end{aligned}$$

onde tr significa o traço sobre as matrizes gama, índices de grupo e índices do espaço-tempo. Além disso

$$\begin{aligned}
\Delta_B &= -\partial^2 + \sigma - i A_\mu \vec{\partial}_\mu + A_\mu A_\mu \\
\Delta_F &= \not{\partial} + i e \not{A} - m
\end{aligned}$$

Estamos agora em condições de conhecer um pouco mais sobre o nosso modelo. Como pretendemos expandir I_{eff} em série de potências de $1/N$ em torno de um mínimo, devemos encontrar os pontos de sela constantes ($\bar{z}_{N_c}$, z_{N_c} , $A_\mu^c = 0$) do termo dominante correspondendo ao termo de ordem $\sqrt{N}$, ao expandir (4.4).

O sistema de equações que determina tais pontos é

$$\begin{cases} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + \alpha_c} - \frac{1}{2f} + |z_{N_c}|^2 = 0 \\ \bar{z}_{N_c} \alpha_c = z_{N_c} \alpha_c = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

A expressão (4.5) apresenta uma divergência linear que removemos usando um "corte" de Pauli-Villars, isto é,

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{k^2 + \alpha_c} - \frac{1}{k^2 + \Lambda^2} \right] - \frac{1}{2f} + |z_{N_c}|^2 = 0$$

logo:

$$\begin{cases} \frac{1}{4\pi} (\Lambda - \sqrt{\alpha_c}) - \frac{1}{2f} + |z_{N_c}|^2 = 0 \\ \bar{z}_{N_c} \alpha_c = z_{N_c} \alpha_c = 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

As soluções para o sistema (4.6) nos permite identificar duas fases para modelo:

(i) Fase “não-quebrada” ou superior:

$$f > f_c = \frac{2\pi}{\Lambda}, \quad \sqrt{\alpha_c} \equiv \mu = 2\pi \left(\frac{1}{f_c} - \frac{1}{f} \right) \quad \text{e} \quad \bar{z}_{N_c} = z_{N_c} = 0$$

Nesta fase a simetria $SU(N)$ é restaurada.

(ii) Fase “quebrada” ou inferior:

$$f < f_c, \quad \alpha_c = 0, \quad \text{e} \quad |z_{N_c}|^2 \equiv |\sigma|^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_c} \right)$$

Neste caso a simetria $SU(N)$ é quebrada para $SU(N-1)$.

Finalmente, dizemos que existe um ponto crítico quando $f = f_c$ e $\mu = z_{N_c} = \bar{z}_{N_c} = 0$, fora do qual qualquer uma das fase (i), (ii) pode ser realizada pelo sistema.

O acoplamento minimal com férmions não altera a estrutura de fases. É interessante lembrar, ademais, que no caso bidimensional [4] as duas fases acima se colapsam dando apenas uma, que é responsável pela geração dinâmica de massa para os campos z 's.

4.4-AS REGRAS DE FEYNMAN E O CONTEÚDO DE PARTÍCULAS

Estabeleceremos nesse ponto as regras de Feynman para o nosso modelo, que sabemos agora, pode existir em duas fases, procederemos logo após a análise do espectro de excitações.

Primeiramente realizaremos as integrações em $\bar{z}_N$ e z_N para expandirmos, em seguida, a ação efetiva assim obtida em torno dos pontos de sela. Isso, finalmente, nos conduzirá à expansão $1/N$ e à meta desejada. Vamos analisar, então, o que ocorre em cada fase separadamente:

4.4.1-FASE "NÃO-QUEBRADA": $SU(N)$ ($\alpha_c = \mu^2$)

Fazendo uma apropriada mudança de variáveis, substituindo $\alpha \rightarrow \alpha + \mu^2$ e realizando as integrações em $\bar{z}_N$ e z_N obtemos

$$\begin{aligned} Z[J, \bar{J}, \eta, \bar{\eta}, K_\mu] = \mathcal{Z} \int [dz_N d\bar{z}_N d\alpha dA_\mu] \exp \left\{ -N \left[\text{tr} \ln \Delta_B - \text{tr} \ln \Delta_F + \right. \right. \\ \left. \left. + \int d^3x \left(\partial_\mu \bar{z}_N \partial_\mu z_N + \alpha |z_N|^2 - \frac{\alpha}{2f} + A_\mu A_\mu |z_N|^2 - i A_\mu (\bar{z}_N \vec{\partial}_\mu z_N) \right) \right] + \right. \\ \left. + \text{tr} \ln \Delta_B + (\bar{J} \cdot \Delta_B^{-1} J) - (\bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} \eta) + \sqrt{N} \int d^3x (\bar{J}_N z_N + \bar{z}_N J_N) + \right. \\ \left. + \int d^3x K_\mu A_\mu \right\} \equiv \mathcal{Z} \int [d\alpha dA_\mu] e^{-S_{ef}} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} S_{ef} = N (\text{tr} \ln \Delta_B - \text{tr} \ln \Delta_F) - (\bar{J} \cdot \Delta_B^{-1} J) + \\ + (\bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} \eta) - \int d^3x \left(\frac{N\alpha}{2f} + K_\mu A_\mu \right) \end{aligned}$$

Para obtermos a expansão $1/N$, consideramos agora flutuações em torno da solução de ponto de sela e expandimos S_{ef} em uma série com respeito a α e A_μ . Nesta expansão, os termos lineares não contribuem por causa da condição de "tadpole" e invariância de Lorentz. Na verdade, são responsáveis pela geração da massa μ para os campos z 's nesta fase. O próximo termo não trivial envolve o quadrado dos campos auxiliares α e A_μ .

Portanto a parte quadrática de S_{ef} dando contribuições às funções de dois pontos pode ser escrita como:

$$S^{(2)} = \frac{1}{2} \int d^3x d^3y [\alpha(x) \Gamma^\alpha(x-y) \alpha(y) + A_\mu(x) \Gamma_{\mu\nu}(x-y) A_\nu(y)]$$

onde

$$\Gamma^\alpha = N \frac{\delta^2}{\delta \alpha(x) \delta \alpha(y)} \text{tr} \ln(-\partial^2 + \alpha + \mu^2) \Big|_{\alpha=0} \quad (4.7)$$

$$\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^B + \Gamma_{\mu\nu}^F, \quad \text{com}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^B = N \frac{\delta^2}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(y)} \text{tr} \ln(-\partial^2 + \mu^2 - i A_\mu \vec{\partial}_\mu + A_\mu A_\mu) \Big|_{A_\mu=0} \quad (4.8)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^F = -N \frac{\delta^2}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(y)} \text{tr} \ln(i \not{\partial} - e \not{A} - m) \Big|_{A_\mu=0} \quad (4.9)$$

Na linguagem de diagramas, os propagadores dos campos z 's e ψ 's, são obtidos tomando as derivadas funcionais com relação as respectivas fontes, dessa forma,

$$\langle z_N^i(p) \bar{z}_N^j(-p) \rangle = \tilde{D}^{ij}(p) = \frac{1}{p^2 + \mu^2} \delta^{ij} = \text{---}\bullet\text{---}$$

$$\langle \psi_i(p) \bar{\psi}_j(-p) \rangle = \tilde{S}_{ij}^F(p) = \frac{1}{i \not{p} - m} \delta_{ij} = \text{---}\bullet\text{---}$$

Ademais, transformando as expressões (4.7), (4.8) e (4.9) para o espaço de Fourier, temos:

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}^\alpha(p) &= N \mathcal{A}(p, \mu^2) = N \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + \mu^2)[(k+p)^2 + \mu^2]} = \\ &= \frac{N}{4\pi\sqrt{p^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{p^2}{4\mu^2}}\end{aligned}$$

Logo, o propagador para o campo auxiliar α é

$$\langle \alpha(p) \alpha(-p) \rangle = \tilde{G}(p) = -\frac{1}{N} [\mathcal{A}(p)]^{-1} = \text{-----}$$

que corresponde à proibição do diagrama . Agora temos,

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^B(p) = N \left[2\delta_{\mu\nu} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 + \mu^2)} - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(2k_\mu + p_\mu)(2k_\nu + p_\nu)}{(k^2 + \mu^2)[(k+p)^2 + \mu^2]} \right]$$

correspondendo aos diagramas , .

Vemos que ambas, as integrais de um "loop" aí aparecendo são linearmente divergentes. Entretanto, com a introdução de um "corte" nos momentos do tipo Pauli-Villars podemos eliminar tais divergências sem maiores problemas, o resultado assim obtido nos dá

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^B(p) &= N \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \left[\frac{1}{2} (p^2 + 4\mu^2) \mathcal{A}(p) - \frac{\mu}{4\pi} \right] \\ &= N \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) F(p)\end{aligned}$$

A outra contribuição à ação efetiva dos campos de gauge A_μ , $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^F$ é dada por

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^F(p) = N e^2 \operatorname{tr} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\gamma_\mu (i\not{k} + m) \gamma_\nu [i(\not{k} + \not{p}) + m]}{(k^2 + m^2)[(k+p)^2 + m^2]} \quad (4.10)$$

Por contagem de potências, observamos que (4.10) apresenta também divergências ultravioleta lineares. Vários procedimentos de regularização podem ser usados. Optamos, nesse ponto, por regularizar estas divergências introduzindo um campo regulador (fantasma) de Pauli-Villars com o objetivo explícito de preservarmos a invariância de gauge da teoria, muito embora sejamos levados à violação da paridade. Em teoria com férmions o método de Pauli-Villars regulariza os "loops" fermiônicos como um todo. No cálculo de (4.10) com o uso dessa técnica, devemos considerar, contudo, o fato de termos um acoplamento minimal em que os férmions podem ser massivos ou não. Dessa forma, definimos a regularização de (4.10) como:

$$\tilde{\Gamma}_R^F = \begin{cases} \tilde{\Gamma}^F(m=0) - \tilde{\Gamma}^F(M \rightarrow \infty) & (4.11) \\ \tilde{\Gamma}^F(m \neq 0) - \tilde{\Gamma}^F(M \rightarrow \infty) & (4.12) \end{cases}$$

nos casos não-massivos e massivos respectivamente. Deve-se notar então, que no primeiro caso uma massa para os férmions é gerada via regulador de Pauli-Villars.

O cálculo de (4.10) corresponde ao diagrama

Para realizarmos as integrações tridimensionais sobre os momenta usaremos

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu &= -\delta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho, & \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu &= -\gamma^\rho \\ \text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu &= -2\delta^{\mu\nu}, & \text{tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho &= -2\epsilon^{\mu\nu\rho} \\ \gamma_1 &= i\sigma_1, & \gamma_2 &= i\sigma_2, & \gamma_3 &= i\sigma_3 \end{aligned}$$

Com isso e fazendo parametrizações de Feynman obtemos:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^F(p) = \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(1)} + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)} + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(3)} + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(4)} + \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(5)}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{4Ne^2}{(2\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3k k_\mu k_\nu}{[k^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 + m^2]^2} \\
 \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(2)} &= -\frac{4Ne^2}{(2\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \alpha(1-\alpha) \int \frac{d^3k p_\mu p_\nu}{[k^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 + m^2]^2} \\
 \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(3)} &= -\frac{2Ne^2}{(2\pi)^3} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3k [k^2 - \alpha(1-\alpha)p^2] \delta_{\mu\nu}}{[k^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 + m^2]^2} \\
 \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(4)} &= \frac{2Nm^2e^2}{(2\pi)^3} \delta_{\mu\nu} \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3k}{[k^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 + m^2]^2} \\
 \tilde{\Pi}_{\mu\nu}^{(5)} &= \frac{2iNm}{(2\pi)^3} \epsilon_{\mu\nu\rho} p_\rho \int_0^1 d\alpha \int \frac{d^3k}{[k^2 + \alpha(1-\alpha)p^2 + m^2]^2}
 \end{aligned}$$

Usando as definições (4.11) e (4.12) eliminamos o termo não invariante de gauge (linear) e, omitindo algum algebrismo, encontramos:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^F = N \left[A(p^2) \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{p_\rho}{\sqrt{p^2}} + B(p^2) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \right] \quad (4.13)$$

com

$$\begin{aligned}
 A(p^2) &= -\frac{ie^2}{4\pi} m \sqrt{p^2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)p^2 + m^2}} + \\
 &\quad + \frac{ie^2}{4\pi} M \sqrt{p^2} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)p^2 + M^2}}
 \end{aligned}$$

e

$$B(p^2) = -\frac{e^2}{2\pi} p^2 \int_0^1 \frac{d\alpha \alpha(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)p^2 + m^2}} + \frac{e^2}{2\pi} p^2 \int_0^1 \frac{d\alpha \alpha(1-\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)p^2 + M^2}}$$

que resulta em

$$A(p) = \begin{cases} \frac{ie^2}{4\pi} \frac{M}{|M|} \sqrt{p^2}, & \text{férmions sem massa} \\ -\frac{ime^2}{2\pi} \text{arctg} \sqrt{\frac{p^2}{4m^2}} + \\ + \frac{ie^2}{4\pi} \frac{M}{|M|} \sqrt{p^2}, & \text{férmions massivos} \end{cases} \quad (4.14a)$$

$$(4.14b)$$

$$B(p) = \begin{cases} -\frac{e^2}{16} \sqrt{p^2}, & \text{férmions sem massa} \\ -\frac{e^2}{2\pi} \sqrt{p^2} \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{m^2}{p^2} \right) \arctg \sqrt{\frac{p^2}{4m^2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2}{p^2}} \right], & \text{férmions massivos} \end{cases} \quad (4.15a)$$

$$(4.15b)$$

Notemos que, o primeiro termo em (4.13) obtido via método de regularização é o termo de Chern-Simons e observando (4.14a) vemos que a massa do campo regulador de Pauli-Villars é que gera uma massa, de origem topológica, para os férmions.

A ação efetiva, na ordem dominante, para o campo de gauge pode então ser escrita como:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu} = \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^B + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^F = N \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) (F(p) + B(p)) + N A(p^2) \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{p_\rho}{\sqrt{p^2}} \quad (4.16)$$

Obtém-se o propagador para o campo A_μ "invertendo" $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}$. Num gauge transversal, o resultado é:

$$\langle A_\mu(p) A_\nu(-p) \rangle = \tilde{D}_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{N} \frac{F(p) + B(p)}{A^2(p) + (F(p) + B(p))^2} \times \\ \times \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) - \frac{A(p)}{F(p) + B(p)} \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{p_\rho}{\sqrt{p^2}} \right] = \text{~~~~~} \quad (4.17)$$

Ao se fazer cálculos levando-se em consideração as regras de Feynman acima obtidas deve-se ter em mente que os seguintes subdiagramas já foram levados em conta:

Ademais, devemos lembrar que os vértices da teoria são

A técnica diagramática desenvolvida até aqui para a expansão $1/N$, nos coloca agora em condições de dar uma interpretação física para os nossos resultados. Vamos estudar então, o comportamento a baixas energias da teoria. Consideremos o propagador (4.17) com $A(p)$ e $B(p)$ tomados para cada caso.

caso (i): férmions sem massa

$$A(p) = \frac{ie^2}{4\pi} \frac{M}{|M|} \sqrt{p^2} = \pm \frac{ie^2}{4\pi} \sqrt{p^2}$$

$$B(p) = -\frac{e^2}{16} \sqrt{p^2}$$

$$F(p) = \frac{1}{8\pi\sqrt{p^2}} (p^2 + 4\mu^2) \arctg \sqrt{\frac{p^2}{4\mu^2}} - \frac{\mu}{4\pi} \xrightarrow{p^2 \approx 0} \frac{1}{24\pi} \frac{p^2}{\sqrt{\mu^2}}$$

Assim:

$$F_0 + B_0 = \frac{1}{24\pi} \frac{p^2}{\sqrt{\mu^2}} - \frac{e^2}{16} \sqrt{p^2} \longrightarrow -\frac{e^2}{16} \sqrt{p^2}$$

$$A_0^2 + (F_0 + B_0)^2 = -\frac{e^4}{(4\pi)^2} p^2 + \frac{p^2}{(8)^2} \left(\frac{1}{3\pi} \sqrt{\frac{p^2}{\mu^2}} - \frac{e^2}{2} \right)^2 -$$

$$-\frac{e^4}{(4\pi)^2} p^2 + \frac{e^4}{(16)^2} p^2$$

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(p^2 \approx 0) = -\frac{16\pi^2}{N(\pi^2 - 16)e^2\sqrt{p^2}} \left[\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \pm \right.$$

$$\left. \pm \frac{4i}{\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{p_\rho}{\sqrt{p^2}} \right] \quad (4.18)$$

caso (ii): *férmions massivos*

Expandindo agora (4.13b) e (4.14b) em $p^2 \approx 0$, obtemos

$$A(p^2 \approx 0) = \frac{ie^2}{4\pi} \sqrt{p^2} \epsilon, \quad \text{onde } \epsilon = \frac{M}{|M|} - \frac{m}{|m|} = \begin{cases} 0 \\ \pm 2 \end{cases}$$

$$B(p^2 \approx 0) = -\frac{e^2}{12\pi} \frac{p^2}{\sqrt{m^2}}$$

$$F(p^2 \approx 0) = \frac{1}{24\pi} \frac{p^2}{\sqrt{\mu^2}}$$

Neste caso podemos ter:

$$F_0 + B_0 = \frac{1}{12\pi} p^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{\mu^2}} - \frac{e^2}{\sqrt{m^2}} \right)$$

$$A_0^2 + (B_0 + F_0)^2 = \begin{cases} \frac{p^4}{(12\pi)^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\mu^2}} - \frac{e^2}{\sqrt{m^2}} \right)^2, & p/\epsilon = 0 \\ -\frac{e^4}{4\pi^2} p^2 + \frac{p^4}{(12\pi)^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\mu^2}} - \frac{e^2}{\sqrt{m^2}} \right)^2, & p/\epsilon = \pm 2 \end{cases}$$

Dessa forma o propagador pode ser escrito como

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(p^2 \approx 0) = \begin{cases} \frac{12\pi}{Np^2} \left(\frac{1}{2\sqrt{\mu^2}} - \frac{e^2}{\sqrt{m^2}} \right)^{-1} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right), & p/\epsilon = 0 \quad (4.19a) \\ -\frac{4\pi^2}{Ne^4 \sqrt{p^2}} \left[\frac{1}{12\pi} \left(\frac{1}{2\sqrt{\mu^2}} - e^2 \sqrt{\frac{p^2}{m^2}} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \pm \frac{ie^2}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{p_\rho}{\sqrt{p^2}} \right], & p/\epsilon = \pm 2 \end{cases} \quad (4.19b)$$

Observando (4.18) e (4.19b) vemos que, em ambos os casos o propagador do campo A_μ não apresenta pólo em $p^2 \approx 0$. Isto significa, que este

campo torna-se agora massivo fazendo desaparecer a força de longo alcance, ou seja, o acoplamento com férmions dá origem a uma "blindagem", tornando a interação de curto alcance. Este é um resultado significativamente diferente daquele em que os férmions não estão presentes [14]. Neste último caso o campo A_μ existe assintoticamente e faz parte do espectro. No nosso caso ainda temos N partículas bosônicas massivas, N partículas fermiônicas (massivas ou não) porém a partícula associada ao campo de gauge sai do espectro.

4.4.2—FASE "QUEBRADA": $SU(N-1)$ ($f < f_c$, $\alpha_c = \mu^2 = 0$)

As regras de Feynman da expansão $1/N$ para esta fase são obtidas de uma maneira análoga àquela da fase simétrica, só que no presente caso, devemos considerar flutuações em torno dos pontos de sela σ e $\bar{\sigma}$, isto é

$$z_N \rightarrow \sigma + \frac{z_N}{\sqrt{N}}; \quad \bar{z}_N \rightarrow \bar{\sigma} + \frac{\bar{z}_N}{\sqrt{N}}$$

$$\begin{aligned} & -N \operatorname{tr} \ln \Delta_B + N \operatorname{tr} \ln \Delta_F - N \int d^3x \left[\partial_\mu \bar{z}_N \partial_\mu z_N + \alpha |z_N|^2 - \frac{\alpha}{2f} + \right. \\ & \quad \left. + A_\mu A_\mu |z_N|^2 - i A_\mu (\bar{z}_N \vec{\partial}_\mu z_N) \right] + \operatorname{tr} \ln \Delta_B + (\bar{J} \cdot \Delta_B^{-1} J) + \\ & \quad + (\bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} \eta) + \sqrt{N} \int d^3x (\bar{J}_N z_N + \bar{z}_N J_N) + \int d^3x K_\mu A_\mu = \\ & = -N \operatorname{tr} \ln \Delta_B + N \operatorname{tr} \ln \Delta_F + \operatorname{tr} \ln \Delta_B - \int d^3x \left[\bar{z}_N (-\partial^2 + \alpha + A_\mu A_\mu - \right. \\ & \quad \left. - i A_\mu \vec{\partial}_\mu) z_N \right] + (\bar{J} \cdot \Delta_B^{-1} J) + (\bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} \eta) + \int d^3x \left\{ \left[\bar{J}_N - \sqrt{N} (\alpha \bar{\sigma} + A_\mu A_\mu \bar{\sigma} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - i A_\mu \bar{\sigma} \partial_\mu) \right] z_N + \left[J_N - \sqrt{N} (\alpha \sigma + A_\mu A_\mu \sigma + i A_\mu \sigma \partial_\mu) \right] \bar{z}_N \right\} + \\ & \quad + \int d^3x \left[N \alpha \left(\frac{1}{2f} - |\sigma|^2 \right) + \sqrt{N} (\bar{J}_N \sigma + \bar{\sigma} J_N) + K_\mu A_\mu \right] \end{aligned}$$

Fazendo agora as mudanças de variáveis

$$z_N \rightarrow z_N + \Delta_B^{-1} \mathcal{J}, \quad \bar{z}_N \rightarrow \bar{z}_N + \bar{\mathcal{J}} \Delta_B^{-1}$$

onde

$$\mathcal{J} \equiv \mathcal{J}_N - \sqrt{N}(\alpha\sigma + A_\mu A_\mu \sigma + iA_\mu \sigma \partial_\mu)$$

$$\bar{\mathcal{J}} \equiv \bar{\mathcal{J}}_N - \sqrt{N}(\alpha\bar{\sigma} + A_\mu A_\mu \bar{\sigma} - iA_\mu \bar{\sigma} \partial_\mu)$$

e integrando sobre os campos z_N 's encontramos a seguinte ação efetiva:

$$\begin{aligned} S_{ef} = & N \operatorname{tr} \ln \Delta_B - N \operatorname{tr} \ln \Delta_F - (\bar{\mathcal{J}} \cdot \Delta_B^{-1} \mathcal{J}) + (\bar{\eta} \cdot \Delta_F^{-1} \eta) - \\ & - \left([\bar{\mathcal{J}}_N - \sqrt{N}(\alpha\bar{\sigma} + A_\mu A_\mu \bar{\sigma} - iA_\mu \bar{\sigma} \partial_\mu)] (-\partial^2 + \alpha + A_\mu A_\mu - iA_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu)^{-1} \times \right. \\ & \times [\mathcal{J}_N - \sqrt{N}(\alpha\sigma + A_\mu A_\mu \sigma + i\bar{\sigma} A_\mu \partial_\mu)] \Big) + \\ & + \int d^3x \left[N\alpha \left(\frac{1}{2f} - |\sigma|^2 \right) + \sqrt{N}(\bar{\mathcal{J}}_N \sigma + \bar{\sigma} \mathcal{J}_N) + K_\mu A_\mu \right] \end{aligned}$$

Como antes expande-se a expressão acima em série de potências de α e A_μ obtendo-se em seguida a técnica de diagramas da expansão $1/N$.

O propagador para o campo z , nessa fase, é não-massivo, isto é,

$$\tilde{D}_{ij}(p) = \frac{\delta_{ij}}{p^2} \quad (4.20)$$

O termo quadrático da expansão nos fornece o propagador para o campo α

$$\tilde{G}(p) = -\frac{1}{N} \frac{16p^2}{\left(\sqrt{p^2} + 16|\sigma|^2 \right)} \quad (4.21)$$

e para o campo A_μ ;

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{N} \frac{1}{[A^2 + (F + B)^2]} \left\{ (F + B) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) - \right. \\ \left. - A \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{p_\rho}{\sqrt{p^2}} \right\} \quad (4.22) \end{aligned}$$

onde $\underline{F} = \sqrt{p^2}/16 + |\sigma|^2$.

Além dos vértices anteriormente ilustrados, temos agora os seguintes:

Os subdiagramas proibidos adicionais, que entraram no cálculo de (4.21) e (4.22), são

caso (i): férmions sem massa

$$A(p^2 \approx 0) = \frac{ie^2}{4\pi} \frac{M}{|M|} \sqrt{p^2} = \pm \frac{ie^2}{4\pi} \sqrt{p^2}$$

$$B(p^2 \approx 0) = -\frac{e^2}{16} \sqrt{p^2}$$

$$\underline{F}(p^2 \approx 0) = \frac{\sqrt{p^2}}{16} + |\sigma|^2$$

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mu\nu}(p^2 \approx 0) = & \frac{1}{N} \frac{16\pi^2}{\sqrt{p^2} \left[-16e^4 + \pi^2 \left(1 - e^2 + \frac{16|\sigma|^2}{\sqrt{p^2}} \right)^2 \right]} \times \\ & \times \left\{ \left(1 - e^2 + \frac{16|\sigma|^2}{\sqrt{p^2}} \right) \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \mp \frac{4i}{\pi} e^2 \epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{p_\rho}{\sqrt{p^2}} \right\} \end{aligned}$$

caso (ii): *férmions massivos*

$$A(p^2 \approx 0) = \frac{ie^2}{4\pi} \sqrt{p^2} \epsilon = \begin{cases} 0 \\ \pm \frac{ie^2}{2\pi} \sqrt{p^2} \end{cases}$$

$$B(p^2 \approx 0) = -\frac{e^2}{12\pi} \frac{p^2}{\sqrt{m^2}}$$

$$\underline{F}(p^2 \approx 0) = \frac{\sqrt{p^2}}{16} + |\sigma|^2$$

$$\underline{F}_0 + B_0 = \frac{\sqrt{p^2}}{16} + |\sigma|^2 - \frac{e^2}{12\pi} \frac{p^2}{\sqrt{m^2}}$$

$$A_0^2 + (B_0 + \underline{F}_0)^2 = \begin{cases} \left(\frac{\sqrt{p^2}}{16} + |\sigma|^2 - \frac{e^2}{12\pi} \frac{p^2}{\sqrt{m^2}} \right)^2, & p/\epsilon = 0 \\ -\frac{e^4}{4\pi^2} p^2 + \left(\frac{\sqrt{p^2}}{16} + |\sigma|^2 - \frac{e^2}{12\pi} \frac{p^2}{\sqrt{m^2}} \right)^2, & p/\epsilon = \pm 2 \end{cases}$$

Logo,

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(p^2 \approx 0) = \begin{cases} \frac{16}{(\sqrt{p^2} + 16|\sigma|^2)} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right), & p/\epsilon = 0 \\ \frac{16\pi^2}{[-64e^4 p^2 + \pi^2(\sqrt{p^2} + 16|\sigma|^2)^2]} \left\{ (\sqrt{p^2} + 16|\sigma|^2) \times \right. \\ \left. \times \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \pm \frac{8i}{\pi} e^2 \epsilon_{\mu\nu\rho} p_\rho \right\}, & p/\epsilon = \pm 2 \end{cases}$$

O propagador para A_μ , a baixas energias, obtido nesta fase para ambos os casos ((i) e (ii)) não apresenta pólos em zero. A "partícula" de gauge não faz parte, portanto, do espectro. O acoplamento minimal com férmions não traz nenhuma informação nova, tudo acontece como se o modelo não os contivesse. Em outras palavras, os férmions se liberam, já que o pólo fora de zero faz desaparecer a força de longo alcance. Precisamente, a função dos

férmions neste caso, é a de deslocar o pólo do propagador. Deve-se ressaltar que, embora os campos z e ψ existam assintoticamente, a construção de estados de uma partícula para os férmions não é um problema simples, mesmo em duas dimensões [70].

CONCLUSÃO

Na primeira parte deste trabalho, nós estudamos as propriedades ultravioleta do modelo sigma não-linear bosônico em três dimensões tendo como espaço-alvo uma variedade Riemanniana arbitrária. Usando o método do campo de fundo e a expansão em coordenadas normais nós mostramos, através de cálculos perturbativos, que em um "loop" tal modelo é renormalizável, tornando-se finito quando a variedade é Ricci-flat ou quando consideramos o modelo $O(2)$. Em dois "loops", entretanto, acontece mudanças substanciais devido ao surgimento de gráficos cujas divergências ultravioleta não se cancelam e, além disso, dão origem a contratermos que não correspondem àqueles aparecendo na ação original. Em outras palavras a renormalizabilidade é completamente destruída.

Nos casos particulares estudados: modelos com variedades Ricci-flat e localmente simétricas como espaços-alvo acontecem cancelamentos importantes que no entanto não são suficientes para torná-los renormalizáveis.

Em virtude das boas propriedades de renormalização de modelos supersimétricos, decorrentes de cancelamentos de divergências ultravioleta oriundas de "loops" bosônicos e fermiônicos, nós estendemos o modelo tratado de modo a incluir férmions supersimétricos. Em um "loop", o contratermo bosônico não é afetado por estes férmions e o modelo continua com as mesmas propriedades de antes. Em dois "loops", a despeito de diversos cancelamentos que ocorrem, a teoria permanece não-renormalizável, mesmo fazendo as particularizações anteriormente estudadas. Estendendo uma vez mais a supersimetria, nós realizamos cálculos para o caso $\mathcal{N} = 2$. As fortes implicações da geometria de Kähler fazem com que alguns contratermos se anulem, porém alguns contratermos não-renormalizáveis ainda sobrevivem,

e nós continuamos com um modelo não-renormalizável. Dessa forma, quando vamos para a ordem de dois “loops” não conseguimos, em nenhum dos modelos considerados, manter a renormalizabilidade apresentada em um “loop”.

É importante apontar que os nossos resultados, obtidos através de Teoria de Perturbação, são significativamente diferentes daqueles não-perturbativos baseados no comportamento de N grande [14], que definem uma teoria renormalizável. Fazendo expansão $1/N$ do CP^{N-1} encontra-se duas fases para este modelo; uma com N partículas massivas e um campo de gauge abeliano sem massa, e a outra com $(N - 1)$ partículas sem massa e um campo de gauge cujo propagador não tem pólo. Nesses modelos sigma, o cancelamento de divergências são uma consequência da definição do propagador do campo auxiliar [71] e da identidade abaixo

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} < \infty$$

Dessa forma, esperamos que os modelos considerados possam vir a se tornarem renormalizáveis na medida que outras técnicas não-perturbativas venham a ser desenvolvidas. Porém, dentro do formalismo de teoria de perturbação, nós acreditamos que o caminho natural a ser seguido será o de fazer uma nova extensão supersimétrica, por exemplo $\mathcal{N} = 4$ (HiperKähler), e/ou inculir termos do tipo Wess–Zumino. Embora cálculos explícitos não tenham sido realizados, nós esperamos que estes casos sejam suficientemente restritivos para fornecer a renormalizabilidade desejada.

Os nossos resultados são, em certo sentido, mais “negativos” do que se esperava inicialmente, já que encontramos dificuldade em remover as di-

vergências logo nos primeiros “loops”. No entanto, pensando de uma maneira positiva, eles podem vir a ser usados como um guia na construção de teorias quânticas consistentes de membranas, evitando, a exemplo de cordas, uma proliferação de tais modelos.

Na segunda parte desse trabalho nós investigamos as modificações que ocorrem no espectro de partículas do modelo CP^{N-1} em três dimensões quando introduzimos férmions via acoplamento minimal com os campos de gauge do modelo o que faz originar o termo de Chern-Simons.

Através da expansão $1/N$ nós encontramos as regras de Feynman para as duas fases em que o modelo pode se realizar. Na fase “não-quebrada” ($SU(N)$) nós obtemos um espectro com N partículas bosônicas massivas e N partículas fermiônicas (massivas ou não). Entretanto a partícula associada ao campo de gauge, adquire uma massa, sai do espectro, e se torna responsável pelo desaparecimento da força de longo alcance. Em outras palavras, dizemos que acoplamento com férmions dá origem a um fenômeno de “blindagem”, a interação sendo, portanto, de curto alcance. Na fase “quebrada” ($SU(N-1)$), nós encontramos $(N-1)$ partículas bosônicas sem massa e N partículas fermiônicas (massivas ou não). Como no caso da fase “não-quebrada”, a “partícula” de gauge tem um pólo fora de zero e, portanto, não faz parte do espectro. A função dos férmions neste caso, é de apenas deslocar o pólo do propagador.

APÊNDICE A

ALGUMAS RELAÇÕES TENSORIAIS

Apresentamos nesse apêndice algumas relações tensoriais usadas na manipulação de estruturas de vértices dos tratados no capítulo 2.

Usamos basicamente as seguintes definições e relações:

$$(i) \quad \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} (\partial_j g_{mk} + \partial_k g_{jm} - \partial_m g_{jk}) \quad (\text{símbolo de Christoffel})$$

$$(ii) \quad R^i_{jkl} = -\partial_l \Gamma_{jk}^i + \partial_k \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{kn}^i \Gamma_{jl}^n - \Gamma_{ln}^i \Gamma_{jk}^n \quad (\text{tensor de Riemann})$$

cujas propriedades são:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}$$

$$R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0 \quad (\text{identidade cíclica})$$

$$(iii) \quad R_{ij} = g^{kl} R_{kilj} = R^k_{ikj} \quad (\text{tensor de Ricci})$$

$$R_{ij} = R_{ji} \quad \text{e} \quad R = R^{ij}_{ij} \quad (\text{curvatura escalar})$$

$$(iv) \quad D_m R_{ijkl} + D_l R_{ijmk} + D_k R_{ijlm} = 0 \quad (\text{identidade de Bianchi})$$

Alguns dos objetos de interesse calculados são:

$$(a) \quad R_{c(ab)c} R_{iabj} = -R_{ab} R_{iabj}$$

$$(b) \quad (D_a R_{ib} + D_i R_{ba} - 3D_b R_{ia}) A_\mu^{ab} \partial_\mu \varphi^i = \\ = (D_a R_{ib} - 3D_b R_{ia}) A_\mu^{ab} \partial_\mu \varphi^i$$

$$(c) \quad D_a D_b R_{i(ab)j} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j = 2(D_a D_i R_{aj} - D_a D_a R_{ij}) \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j$$

$$(d) \quad R_{iabc} R_{j(ab)c} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j = \frac{3}{4} R_{iabc} R_{jabc} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j$$

$$(e) \quad R_{c(ab)d} \omega_i^{cb} \omega_j^{da} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j = \frac{3}{2} R_{cabd} \omega_i^{cb} \omega_j^{da} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j$$

APÊNDICE B

CAMPOS DE "VIELBEIN" PARA O MODELO $O(N)$

No capítulo 2, usamos extensivamente certas relações tensoriais. Em particular, para o modelo $O(N)$, a estrutura de vértices foi escrita usando (1.6), (1.7a, b) e exprimindo os "vielbein" em termos dos campos.

Neste apêndice, nós mostramos como obtê-los para um tal modelo e apresentamos algumas expressões úteis calculadas a partir deles.

Consideremos inicialmente, um sistema formado por um campo bosônico de N componentes, com M vínculos e em D dimensões, isto é,

$$S = \frac{1}{2} \int d^D x \sum_{A=1}^N (\partial_\mu \Phi^A)^2$$

$$F^a = F^a(\Phi^A) = 0, \quad a = 1, 2, \dots, M$$

Resolvendo os vínculos acima, obtemos

$$S = \frac{1}{2} \int d^D x \sum_{i,j=1}^{N-M} g_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j \quad (B.1)$$

onde

$$g_{ij} = \sum_{A=1}^N \frac{\partial \Phi^A}{\partial \phi^i} \frac{\partial \Phi^A}{\partial \phi^j}$$

sendo ϕ^i ($i = 1, 2, \dots, N - M$) um conjunto de coordenadas gerais sobre a superfície vinculada $F^a(\Phi) = 0$ e g_{ij} uma métrica induzida sobre a superfície. A ação (B.1) é manifestamente invariante sob transformações de

coordenadas sobre a superfície e nós introduzimos o “vielbein” $e_i^A = \frac{\partial \Phi^A}{\partial \phi^i}$.
Dessa forma

$$g_{ij} = \sum_{A=1}^N e_i^A e_j^A$$

No caso em que o vínculo é dado por

$$F = \frac{1}{2} \left(\sum_{A=1}^N (\Phi^A)^2 - 1 \right) = 0 \quad (B.2)$$

nós temos o modelo sigma não-linear $O(N)$

Eliminando uma das componentes em (B.2), por exemplo Φ^n , encontramos

$$S = \frac{1}{2} \int d^D x \sum_{i,j=1}^{N-1} g_{ij} \partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^j \quad (B.3)$$

com

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\phi^i \phi^j}{(1 - |\phi|^2)} \quad (B.4)$$

Assim:

$$\sum_{A=1}^{N-1} (\Phi^A)^2 + (\Phi^n)^2 = 1 \quad \text{ou} \quad (\Phi^n)^2 = 1 - |\phi|^2$$

como

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \sum_{A=1}^N \frac{\partial \Phi^A}{\partial \phi^i} \frac{\partial \Phi^A}{\partial \phi^j} = \sum_{A=1}^N e_i^A e_j^A = \sum_{A=1}^{N-1} \frac{\partial \Phi^A}{\partial \phi^i} \frac{\partial \Phi^A}{\partial \phi^j} + \frac{\partial \Phi^n}{\partial \phi^i} \frac{\partial \Phi^n}{\partial \phi^j} \\ g_{ij} &= \sum_{A=1}^{N-1} \delta_i^A \delta_j^A + \left(-\frac{\phi_i}{\sqrt{1 - |\phi|^2}} \right) \left(-\frac{\phi_j}{\sqrt{1 - |\phi|^2}} \right) \end{aligned}$$

Logo

$$e_i^A = \begin{cases} \delta_i^A, & A = 1, \dots, N-1 \\ -\frac{\phi^i}{\sqrt{1 - |\phi|^2}}, & A = N \end{cases} \quad (B.5)$$

Abaixo damos algumas expressões aparecendo nos contratermos para o modelo $O(N)$

$$\begin{aligned}
 R_{ab}A_{\mu}{}^{ca}A^{\mu cb} &= (N-2)\omega_i^{ab}\omega_j^{ab}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j \\
 R_{ab}R_{iabj}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j &= -(N-2)^2g_{ij}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j \\
 R_{iabc}R_j{}^{abc}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j &= 2(N-2)g_{ij}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j \\
 R_{e(ab)f}\omega_i^{eb}\omega_j^{fa}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j &= -\frac{3}{2}\omega_i^{ab}\omega_j^{ab}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j \\
 R_{ab}R_{pcdq}\omega_i^{ac}\omega_j^{bd}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j\partial_{\nu}\varphi^p\partial^{\nu}\varphi^q &= \\
 &= (N-2)e^c{}_pe_{bq}\omega_i^{ab}\omega_{jac}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j\partial_{\nu}\varphi^p\partial^{\nu}\varphi^q
 \end{aligned}$$

outros objetos envolvidos são

$$\begin{aligned}
 g_{pq}\omega_i^{ab}\omega_{jab}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j\partial_{\nu}\varphi^p\partial^{\nu}\varphi^q, \\
 e^c{}_pe_{bi}\omega_j^{ab}\omega_{qac}\partial_{\mu}\varphi^i\partial^{\mu}\varphi^j\partial_{\nu}\varphi^p\partial^{\nu}\varphi^q
 \end{aligned}$$

Com ajuda do postulado do "vielbein", relação (1.6) e o resultado (B.5), encontra-se

$$\begin{aligned}
 \omega_i^{ab}\omega_{jab} &= g_{ij} \\
 e^c{}_pe_{bq}\omega_i^{ab}\omega_{jac} &= g_{ip}g_{jq} \\
 e^c{}_pe_{bi}\omega_j^{ab}\omega_{qac} &= g_{ip}g_{pq}
 \end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

- [1] M. Gell-Mann e M. Lévy, *Nuovo Cimento* **16**, 705(1960).
- [2] A. D'Adda, M. Lüscher e P. Di Vecchia, *Phys. Rep.* **49**, 239(1979).
- [3] E. Brézin, C. Itzykson, J. Zinn-Justin e J. B. Zuber, *Phys. Lett.* **82B**, 442(1979).
- [4] M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B135**, 1(1978).
- [5] E. Cremmer e B. Julia, *Nucl. Phys.* **B159**, 141(1979).
- [6] D. Friedan, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 1057(1980); *Ann. Phys. (N.Y)* **163**, 318(1985).
- [7] M. G. Green, J. H. Schwarz e E. Witten "Superstring Theory", Vol. I e II, (Cambridge Univ. press, 1987).
- [8] C. G. Callan, D. Friedan, E. J. Martinec e M. J. Perry, *Nucl. Phys.* **B262**, 539(1985);
- [9] L. Alvarez-Gaumé, D. Z. Freedman e S. Mukhi, *Ann. Phys. (N. Y.)* **134**, 85(1981).
- [10] T. Curtright e D. Z. Freedman, *Phys. Lett.* **90B**, 71(1980);
L. Alvarez-Gaumé e D. Z. Freedman, *Phys. Lett.* **94B**, 171(1980);
L. Alvarez-Gaumé, *Nucl. Phys.* **B184**, 180(1981).
- [11] D. Gross, J. Harvey, E. Martinec e R. Rohm, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 502(1985); *Nucl. Phys.* **B256**, 253(1985).
- [12] M. T. Grisaru, A. E. M. Van de Ven e D. Zanon, *Phys. Lett.* **173B**, 423(1986).
- [13] M. Freeman e C. N. Pope, *Phys. Lett.* **174B**, 48(1986).

- [14] I. Ya Aref'eva e S. I. Azakov, *Nucl. Phys.* **B162**, 298(1980).
- [15] W. Siegel, *Nucl. Phys.* **B156**, 135(1979);
S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton, *Ann. Phys. (N. Y.)* **140**, 372(1982).
- [16] A. M. Polyakov, *Mod. Phys. Lett.* **A3**, 325(1988);
- [17] A. Coste e M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B323**, 631(1989).
- [18] M. T. Grisaru, D. I. Kazakov e D. Zanon, *Nucl. Phys.* **B287**, 189(1987).
- [19] T. Curtright e C. K. Zachos, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1799(1984);
B. Fridling e A. E. M. Van de Ven, *Nucl. Phys.* **B268**, 719(1986).
- [20] E. S. Fradkin e A. A. Tseytlin, *Phys. Lett.* **158B**, 316(1985).
- [21] A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys.* **B294**, 383(1987).
- [22] P. Candelas, G. Horowitz, A. Strominger e E. Witten, *Nucl. Phys.* **B258**, 46(1985).
- [23] D. Gross e E. Witten, *Nucl. Phys.* **B277**, 1(1986).
- [24] D. Nemeschansky e A. Sen, *Phys. Lett.* **178B**, 365(1986).
- [25] B. Zumino, *Phys. Lett.* **87B**, 203(1979).
- [26] J. A. Bagger e E. Witten, *Phys. Lett.* **115B**, 202(1982).
S. V. Ketov, *Class. Quantum Grav.* **4**, 1163(1987).
- [27] M. T. Grisaru e D. Zanon, *Phys. Lett.* **184B**, 209(1987).
- [28] K. Fujikawa, *Phys. Lett.* **206B**, 18(1988).
- [29] J. Hughes, J. Liu e J. Polchinski, *Phys. Lett.* **180B**, 370(1986).
- [30] E. Bergshoeff, E. Sezgin e P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **189B**, 75(1987).
- [31] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A268**, 57(1962).
- [32] P. S. Howe e R. W. Tucker, *J. Phys.* **A10**, L155(1977).

- [33] B. P. Dolan e D. H. Tchrakian, *Phys. Lett.* **198B**, 447(1987).
- [34] T. Inami e S. Yashikosawa, comunicação particular.
- [35] E. Bergshoeff, E. Sezgin e P. K. Townsend, *Phys. Lett.* **209B**, 451(1988).
- [36] U. Lindstron e M. Rocěk, *Phys. Lett.* **B218**, 207(1989).
- [37] L. Alvarez-Gaumé e P. Ginsparg, *Commun. Math. Phys.* **102**, 311(1985).
- [38] B. S. DeWitt, *Phys. Rev.* **162**, 1195(1967); "Dynamical Theory of Groups and Fields", (Gordon and Breach, New York, 1965).
- [39] J. Honerkamp, *Nucl. Phys.* **B36**, 130(1972).
- [40] G. 'tHooft, "Proc. 12th Winter School of Theoretical Physics in Karpacz", *Acta Univ Wratisl.* **38**(1975).
- [41] B. S. DeWitt, "Quantum Gravity 2", eds. C. J. Isham, R. Penrose e D. W. Sciama, (Clarendon Press, Oxford, 1981).
- [42] D. G. Boulware, *Phys. Rev.* **D23**, 389(1981).
- [43] L. F. Abbott, *Nucl. Phys.* **B185**, 189(1981).
- [44] R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D9**, 1686(1974).
- [45] S. Coleman e E. Weinberg, *Phys. Rev.* **D7**, 1888(1973).
- [46] L. Eisenhart, "Riemannian Geometry", (Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1965).
- [47] V. I. Petrov, "Einstein Spaces", (Pergamon, Oxford, 1969).
- [48] P. Van Nieuwenhuizen, *Phys. Rep.* **68**, 189(1981).
- [49] M. Gomes, "Notas de Aula – Curso de Introdução à Teoria Quântica de Campos", (Universidade de São Paulo, 1981);

- C. Itzykson e J. B. Zuber, "Quantum Field Theory", (McGraw-Hill, Inc., 1980).
- [50] J. Gates, M. Grisaru, M. Rock e W. Siegel, "Superspace", (Benjamin, New York, 1983).
 - [51] T. L. Curtright e C. K. Zachos, "Supergravity", ed. P Van Nieuwenhuizen e D. Z. Freedman, (North-Holland, Amsterdam, 1979).
 - [52] L. Alvarez-Gaumn e D. Z. Freedman, *Phys. Rev. D* **22**, 846(1980).
 - [53] J. Schwinger, *Phys. Rev.* **128**, 2425(1962).
 - [54] R. Percacci, *Ann. Phys. (N. Y.)* **177**, 27(1987).
 - [55] S. Ojima, *Prog. Theor. Phys.* **81**, 512(1989).
 - [56] P. B. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 821(1988);
I. Dzyaloshinskii, A. M. Polyakov e P. B. Wiegmann, *Phys. Lett.* **127A**, 112(1988).
 - [57] M. Lscher, *Nucl. Phys.* **B326**, 557(1989).
 - [58] G. Semenoff, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 517(1988);
G. Semenoff e P. Sodano, *Nucl. Phys.* **B328**, 753(1989).
 - [59] A. N. Redlich, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 118(1984); *Phys. Rev. D* **29**, 2366(1984).
 - [60] J. H. Horne e E. Witten, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 501(1989).
 - [61] J. Ambjrn e G. W. Semenoff, *Phys. Lett.* **B226**, 107(1989).
 - [62] S. Chakravarty, B. I. Halperin e D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1057(1988); *Phys. Rev.* **B39**, 1057(1989).
 - [63] E. Manonaski e R. Salvador, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1310(1989) e artigo a ser publicado no *Phys. Rev. B*.
 - [64] E. C. Marino, Fsica-PUC/RJ – 32/89 – 1989, *preprint*.

- [65] S. Tyc, B. Halperin e S. Chakravarty, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 835(1989).
- [66] F. D. M. Haldane, *Phys. Lett.* **A93**, 464(1983); *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1153(1983).
- [67] G. Shirane et all, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1613(1987);
Y. Endoh et all, *Phys. Rev.* **B37**, 7443(1988).
- [68] H. E. Stanley, *Phys. Rev.* **176**, 718(1968).
- [69] K. Wilson, *Phys. Rev.* **D7**, 2911(1973);
S. Coleman, R. Jackiw e H. Politzer, *Phys. Rev.* **D10**, 2491(1974);
D. Gross e A. Neveu, *Phys. Rev.* **D10**, 3235(1974);
G. Parisi, *Nucl. Phys.* **B100**, 368(1975).
- [70] A. D'Adda, P. Di Vecchia e M. Lüscher, *Nucl. Phys.* **B152**, 125(1979).
- [71] E. Abdalla, M. Forger e A. Lima Santos, *Nucl. Phys.* **B256**, 145(1985).