Universidade de São Paulo

Instituto de Física

YF

A.H.2

MT²

Vasselen
De

SBI-IFUSP

305M810T1743

"Identities de Jacobi generalizadas
em teorias de gauge"

Orientador:

Fernando Miguel Pacheco Chaves

Prof. Josif Frenkel

Tese de doutoramento apresen-
tada ao Instituto de Física
da U.S.P.

São Paulo 1990

539.7548

C512e

D

e.l

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Chaves, Fernando Miguel Pacheco
Identidades de Jacobi generalizadas em
teorias de gauge. São Paulo, 1990.

Tese (Doutorado) - Universidade de São
Paulo. Instituto de Física. Departamento
de Física e Matemática.

Área de Concentração: Física de Partí-
culas Elementares

Orientador: Prof^o Dr. Josif Frenkel

Unitermos: 1. Cromodinâmica quântica;
2. Identidade de Jacobi; 3. Teorias de
gauge.

USP/IF/SBI - 39/90

À memória de Ana Cristina, morta no
dia 12 de Dezembro de 1985, de desnutri-
ção, aos dois meses de idade, no bairro
América de Aracajú

À memória de meus pais, Elias Chaves Ne-
to e Júlia de Souza Pacheco Chaves, que de-
dicaram suas vidas à luta por uma socie-
dade justa e igualitária.

Errata

onde se lê

leia-se

pag. 2 linha 8 ; "compõe"

"compoem"

pag 14 linha 20 ; "compõe"

"compoem"

pag 5 linha 2 ; "falan"

"falam"

pag 10 ;
$$\frac{Q_1}{p \cdot p_1} \frac{p_1 \cdot E}{p_2 \cdot p_3}$$

"
$$Q_1 \frac{p_1 \cdot E}{p \cdot p_1}$$
 "

pag 10 ;
$$\frac{Q_2}{p \cdot p_2} \frac{p_2 \cdot E}{p_1 \cdot p_3}$$

"
$$Q_2 \frac{p_2 \cdot E}{p \cdot p_2}$$
 "

pag 10 ;
$$\frac{Q_3}{p \cdot p_3} \frac{p_3 \cdot E}{p_1 \cdot p_2}$$

"
$$Q_3 \frac{p_3 \cdot E}{p \cdot p_3}$$
 "

pag 11 linha 1 ; "corresponde a
$$p_1 \cdot p_1 + p \cdot p_2 + p \cdot p_3 = 0$$
"

"corresponde à
$$p_1 \cdot E + p_2 \cdot E + p_3 \cdot E = 0$$
"

pag 11 linha 3 ; "corresponde a
$$p_1 \cdot E + p_2 \cdot E + p_3 \cdot E = 0$$
"

"corresponde à
$$p \cdot p_1 + p \cdot p_2 + p \cdot p_3 = 0$$
"

pag 11 linha 11 ; "Temos no cálculo da amplitude de espalhamento as contribuições dos seguintes diagramas:

"Temos no cálculo da amplitude de espalhamento as contribuições dos diagramas com vértices de três pernas abaixo desenhados e mais as contribuições de diagramas contendo um vértice de quatro pernas, que não desentam

ii
Errata (continuação)

onde se lê

leia-se

pag 33 linha 7; "Estes quarenta e cinco gráficos são agrupados em quinze grupos de três gráficos, um de três e dois de dois vértices..."

"Estes quarenta e cinco gráficos são agrupados em quinze grupos de três gráficos, sendo um deles de três vértices e os dois outros de dois vértices..."

pag 61 linha 12; " $\sum_i B_i = 0$ "

" $\sum_{i=1}^4 B_i = 0$ "

pag 127 linha 3: "Physical Review D 20 1.164"

"Physical Review D 20 1.164
1 September 1979"

pag 127 linha 7: "Number 11 746"

"Number 11 746. 10 September 1979"

pag 127 linha 11: "Physical Review D 23 2.682"

"Physical Review D 23 2.68.
1 June 1981"

pag 128 linha 1: "Comunicado de distribuição privada"

"Comunicado de distribuição privada. Universidade de Wisconsin 1981"

pag 128 linha 8: "Yale University"

"Yale University YTP 83-2.
December 1983"

Errata (continuações)

onde se lê

leia-se

pag 129 linha 1; "L. D Faddeev, A. A Slavnov: "L. D. Faddeev, A. A Slavnov
Gauge Fields` Gauge Fields. The Benjamin
Cummings Publishing Com-
pany"

pag 129 linha 5; "D. Lurie: Particles and "D. Lurie: Particles and
Fields" Fields 1968 John Wiley
and Sons Ltd."

pag 129 linha 6; "F. Mandl, G. Shaw: "F. Mandl, G. Shaw: Quantum
Quantum Field Theory" Field Theory 1984 John Wiley
and Sons Ltd"

pag 129 linha 9; "P. Ramond: Field "P. Ramond: Field Theory
Theory" 1981 The Benjamin Cummings
Publishing Company, Inc"

Agradecimentos

Ao professor Frenkel, meu orientador e meu amigo.

À minha esposa Maria Tereza, pelo apoio e dedicação.

Aos colegas do Departamento de Física de Aracajú, pelo incentivo e apoio.

Aos colegas da pós-graduação.

Aos professores do J.F.U.S.P.

À CAPES.

Índice

Resumo pag. 1

Abstract pag. 3

Introdução pag. 5

Capítulo I Processos de espalhamento envolvendo cinco partículas. pag. 16

I1. Generalização do lema matemático pag. 17

I2. A interação fóton-pion pag. 23

I3. A amplitude de um processo de espalhamento gluon-gluon pag. 28

I4. Discussão da forma da amplitude e identidades pag. 36

a) Identidades envolvendo produtos

de constantes de estrutura pag 37

b) Identidades espaciais generaliza-
das pag 40

c) Análise da amplitude pag 47

15. Reorganização da amplitude de
espalhamento gluon-gluon por a-
nalogia com o modelo escalar pag 48

a) Termos de segunda espécie pag 49

b) Termos de primeira espécie pag 65

16. Discussão pag 73

Capítulo II A identidade de Jaco-
bi estudada na aproximação de um
loop pag 84

II 1. Gráficos com uma linha interna

sem carga	pag. 85
II 2. Conjunto simetrizado de gráficos.	pag. 96
II 3. Conclusões	pag. 107
Apêndice 1	pag. 109
Apêndice 2	pag. 111
Apêndice 3	pag. 119
Referências	pag. 127
Bibliografia	pag. 129

Resumo

Estudando o processo $q\bar{q} \rightarrow \gamma W$, Brown, Michaelian, Tahder e Samuel, descobriram um zero na distribuição angular do W quando seu momento magnético tem o valor característico de uma partícula de gauge. Goebel, Halzen e Laveille mostraram que este zero é uma consequência da fatorização da amplitude em um termo que contém a dependência da carga ou outros índices de simetria interna, e outro que contém a dependência dos spins ou índices de polarização. Esta fatorização existe em geral para amplitudes de processos envolvendo quatro partículas na aproximação árvore, quando uma ou mais destas partículas é um campo de gauge. Portanto a existência de um zero na seção de choque é uma prova direta da estrutura de gauge da teoria.

A fatorização baseia-se em uma identidade, identidade de Jacobi espacial generalizada, cuja demonstração ou significado físico ainda não fora elucidado. O objetivo do presente trabalho é estudar esta identidade de

Jacobi espacial generalizada. Para tanto calculamos, no capítulo I, a amplitude de um processo de espalhamento glúon envolvendo cinco partículas e reorganizando esta amplitude por analogia com um processo de interação fóton-píon, mostramos que não existe, no caso de cinco partículas, a identidade de Jacobi espacial generalizada, mas sim uma série de identidades espaciais parciais, que se compõe, no processo de quatro partículas, em uma única identidade. No capítulo II estudamos um processo envolvendo quatro partículas, das quais três campos escalares, porém agora na aproximação de um loop, e mostramos que também não existe a identidade de Jacobi espacial generalizada.

Abstract

Brown, Michaelian, Tahder, and Samuel discovered that the angular distribution of the process $q\bar{q} \rightarrow W\gamma$ in lowest order has a zero, if the magnetic moment of the W has the characteristic value of a gauge field. Goebel, Halzen and Leveille showed that this zero is a consequence of a factorizability of the amplitude into one factor which contains the dependence on the charge or other internal, symmetry indices, and another which contains the dependence on the spin or polarization indices. This factorization is found to hold for any four-particle tree-approximation amplitude, when one or more of the four particles is a gauge-field. Therefore, the study of the angular distribution of the process $q\bar{q} \rightarrow W\gamma$, directly probes the gauge structure of the theory.

The factorization hinges on a "spatial generalized Jacobi identity" obeyed by the polarization-dependent factors

of the vertices, whose physical significance or general demonstration was not known. The purpose of the present work is to study this identity. With this in mind we work out, in chapter I, the amplitude of a scattering gluon-gluon with five particles. Reorganizing this amplitude by analogy with an interaction process photon-pion, we show that does not exist, in this case, the spatial generalized Jacobi identity, but instead many spatial partial identities that compose themselves, in the case of a four particle process, in one single identity. In chapter II, we study a process with four particles, three of them scalar fields, but in the one loop approximation, and show that, in this case too, does not exist the spatial generalized Jacobi identity.

Introdução

A teoria unificada da interação eletro-fraca de Weinberg - Salam, prevê a existência de bósons intermediários carregados, $W^{\pm}$, e neutros, Z^0 , com massas em torno de 83 GeV e 93 GeV respectivamente. Estes bósons foram detectados no C.E.R.N., e os valores experimentais obtidos para as massas estão em bom acordo com os valores previstos pela teoria. Além da massa e do spin dos bósons, uma outra propriedade de extremo interesse, é o momento magnético dos bósons intermediários. R. W. Brown, D. Sahdev e K. O. Mikaelian⁽¹⁾ em artigo de 1979, e K. O. Mikaelian, M. A. Samuel e D. Sahdev⁽²⁾ em outro artigo do mesmo ano, analisaram a distribuição angular do bóson W em reações como $p\bar{p} \rightarrow W^{\pm} \gamma X$ e concluíram que ela é particularmente sensível ao parâmetro κ do momento angular, a saber: $\mu_W = (1 + \kappa) \frac{e}{2M_W}$. Em particular para o valor característico de campos de gauge, $\kappa = 1$, encontraram um zero na seção de choque $\frac{d\sigma(d\bar{u} \rightarrow W^- \gamma)}{d(\cos \theta)}$, calculada em mais baixa ordem, para o valor $\cos \theta = -\frac{1}{3}$.

Podemos escrever esta seção de choque na forma:

$$\frac{d\sigma}{d(\cos \theta)} (d\bar{u} \rightarrow W^- \gamma) = \frac{1}{2} (s - M_W^2) \frac{d\sigma}{dt} (d\bar{u} \rightarrow W^- \gamma)$$

onde $s = (k_1 + k_2)^2$ com k_1 e k_2 momentos dos quarks, θ é o ângulo entre W^- e d (ou entre γ e $\bar{u}$) no referencial do centro de massa e $t = -\frac{1}{2} (s - M_W^2) (1 - \cos \theta)$. Na figura representamos graficamente a distribuição angular de W^- .

Fig Seção de choque diferencial para $d\bar{u} \rightarrow W^- \gamma$ onde θ é o ângulo entre W^- e d ou entre γ e $\bar{u}$, no referencial do C.M., $\sqrt{s} = 200 \text{ GeV}$ e $M_W = 85 \frac{\text{GeV}}{c^2}$

Vemos que o comportamento suave para $\kappa = -1$ ou 0 , é radicalmente alterado quando usamos o valor dado pela teoria de gauge, $\kappa = 1$. Com este valor aparece o mencionado zero para $\cos \theta = -\frac{1}{3}$. A mesma curva é válida para $s\bar{c} \rightarrow W^- \gamma$, e, a menos de um fator global $t_g^2 \theta_c$, continua válida para $s\bar{u} \rightarrow W^- \gamma$ e $d\bar{c} \rightarrow W^- \gamma$

Concluímos que em todos os casos a teoria prevê um anu-
lamenteo de $\frac{d\sigma}{d\tau}$ em um dado ângulo. A localização deste
zero relaciona-se com a carga do quark, por meio de:

$$\cos \theta = - (1 + 2 Q_d)$$

A existência deste zero (que Goebel chama zero
BMSS) é surpreendente porque a seção de choque dife-
rencial do processo $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ é a soma de muitas se-
ções de choque parciais para diferentes estados de spin
e polarização. Estas então teriam que se anular todas ao
mesmo tempo, para que a seção de choque diferencial não
polarizada também se anulasse. C. J. Goebel, F. Halzen,
e J. P. Laveille⁽³⁾ encontraram a seguinte explicação para es-
te zero. A amplitude calculada na ordem mais baixa de
teoria de perturbação (aproximação árvore), pode ser fatori-
zada de tal maneira que todos os índices que contêm a
dependência da carga ou de outros índices de simetria in-
terna estão em um fator, e no outro estão os índices de spin
ou polarização. O zero BMSS acontece devido o anulamen-
to do primeiro fator. No mesmo artigo os autores mes-
traram que esta fatorização se baseia em uma identidade,

que éles batizaram de "Identidade de Jacobi espacial generalizada" obedecida pelos momentos e fatores de polarização, em analogia com a identidade de Jacobi generalizada obedecida pelos índices de simetria interna ou de carga. A existência do zero de BMSS quando se utiliza o valor do parâmetro $\kappa=1$ do momento magnético, é uma verificação direta da estrutura de gauge da teoria.

Apresentaremos em seguida inicialmente um lema matemático conhecido como "Lema de Mikaelian" e que coloca as condições de fatorização para o caso de processos envolvendo quatro partículas, e no restante desta introdução apresentaremos alguns exemplos de fatorização de amplitudes envolvendo quatro partículas, tanto em teorias abelianas como não abelianas, e suscetíveis de fatorização.

x

x

x

A fatorização da amplitude, baseia-se, no caso de um processo envolvendo quatro partículas, em uma propriedade matemática conhecida como Lema de Mikaelian⁽⁴⁾, a saber:

"Sejam A_i, B_i e C_i com $i = 1, 2, 3$ três conjuntos de grandezas com a propriedade:

$$\sum_{i=1}^3 A_i = \sum_{i=1}^3 B_i = \sum_{i=1}^3 C_i = 0 \quad (9-1)$$

Então é possível mostrar que a soma $\sum_{i=1}^3 \frac{A_i B_i}{C_i}$ se decompõe em dois fatores, dos quais um contém a dependência nos A_i e o outro a dependência nos B_i ."

Ou seja:

$$\frac{A_1 B_1}{C_1} + \frac{A_2 B_2}{C_2} + \frac{A_3 B_3}{C_3} = \frac{1}{C_3} \left[A_1 C_2 - A_2 C_1 \right] \left[\frac{B_2}{C_2} - \frac{B_1}{C_1} \right] \quad (9-2)$$

O segundo membro pode ser escrito permutando os índices um, dois e três. Usando a convenção cíclica ($A_{j \pm 3} = A_j$) podemos escrever a expressão simetrizada:

$$\sum \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{1}{9} \frac{1}{C_1 C_2 C_3} \left[\sum_{j=1}^3 C_j (A_{j+1} - A_{j-1}) \right] \left[\sum_{i=1}^3 C_i (B_{i-1} - B_{i+1}) \right]$$

x x x

Vejamos alguns exemplos desta fatorização. Consideremos inicialmente um processo envolvendo três campos escalares e um campo de gauge (por exemplo três pions e um

fóton). Para achar a amplitude de espalhamento acoplamos o fóton a cada um dos pions obtendo os seguintes diagramas com as respectivas contribuições:

$$\frac{Q_1}{p \cdot p_1} \frac{p_1 \cdot \epsilon}{p_2 \cdot p_3}$$

$$\frac{Q_2}{p \cdot p_2} \frac{p_2 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_3}$$

$$\frac{Q_3}{p \cdot p_3} \frac{p_3 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_2}$$

A amplitude de espalhamento, a menos de constantes que são fatores globais, se escreve:

$$Amp = \frac{Q_1}{p \cdot p_1} \frac{p_1 \cdot \epsilon}{p_2 \cdot p_3} + \frac{Q_2}{p \cdot p_2} \frac{p_2 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_3} + \frac{Q_3}{p \cdot p_3} \frac{p_3 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_2}$$

No caso, as igualdades que correspondem as expressões (9-1) são:

$$\sum A_i = 0 \text{ corresponde a } Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \text{ (conservação de carga)}$$

$\sum B_i = 0$ corresponde a $p \cdot p_1 + p \cdot p_2 + p \cdot p_3 = 0$ (conservação de momento, e massa zero do fóton)

$\sum C_i = 0$ corresponde a $p_1 \cdot \epsilon + p_2 \cdot \epsilon + p_3 \cdot \epsilon = 0$ (conservação de energia-momento e condição de transversalidade do fóton)

De acordo com (9.2), podemos escrever:

$$Amp = \frac{1}{p_3 \cdot p} \left[(p_2 \cdot p) Q_1 - (p_1 \cdot p) Q_2 \right] \left[\frac{p_2 \cdot \epsilon}{p_2 \cdot p} - \frac{p_1 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p} \right]$$

A amplitude, e portanto a seção de choque, se anula no ângulo:

$$\frac{p_1 \cdot p}{p_2 \cdot p} = \frac{Q_1}{Q_2}$$

x x x

A presente fatorização é válida também para o caso de uma teoria não Abeliã. Consideremos um processo de espalhamento envolvendo quatro glúons. Temos no cálculo da amplitude de espalhamento as contribuições dos seguintes diagramas:

As letras maiúsculas são os vetores de polarização, as minúsculas os quadrivetores momento-energia e as letras f são as constantes de estrutura do grupo $SU(3)$. A amplitude de espalhamento, a menos de constantes que são fatores globais, é:

$$Amp = \sum_{abc} \frac{f^{sab} f^{scd}}{a.b} \left[-4 A.B C.b D.a + 4 A.B C.a D.b + 4 C.D A.c B.d - 4 C.D A.d B.c - 4 B.C A.b D.c - 4 A.D B.a C.d + 4 A.C B.a D.c + 4 B.D A.b C.d + 2 A.B C.D a.c - 2 A.B C.D b.c - 2 B.C A.D a.b + 2 A.C B.D a.b \right] \quad (12-1)$$

onde $\sum_{abc}$ significa a soma sobre as permutações cíclicas de a, b, c (e naturalmente respectivas maiúsculas)

Para usar o símbolo de soma sobre as permutações cíclicas, a amplitude pode ser escrita também como:

$$Amp = \sum_{i=1}^3 \frac{A_i B_i}{C_i} \quad (12-2)$$

Neste caso a correspondência com as igualdades (9-1) é a seguinte:

$$\sum_{i=1}^3 A_i = 0 \text{ corresponde à: } f^{sab} f^{scd} + f^{sbc} f^{sda} + f^{sca} f^{sbd} = 0$$

(Identidade de Jacobi) (13-1a)

$$\sum_{i=1}^3 B_i = 0 \text{ corresponde à chamada identidade de Jacobi espacial generalizada (Os } B_i \text{ são os termos entre colchetes da expressão (12-1))} \quad (13-1b)$$

$$\sum_{i=1}^3 C_i = 0 \text{ corresponde à: } a.b + b.c + c.a = 0 \text{ (Conservação de energia-momento, realidade e transversalidade dos glúons)} \quad (13-1c)$$

Estando satisfeitas as condições do lema de Michaelian, sabemos que (12-1) é fatorizável, podendo ser escrita, segundo (9-2), como:

$$\text{Amp} = \frac{1}{c.a} \left[f^{sab} f^{scd} b.c - f^{sbc} f^{sad} a.b \right] \left[\frac{B_2}{b.c} - \frac{B_1}{a.b} \right]$$

e se anula no ângulo:

$$\frac{a.b}{c.b} = \frac{f^{sab} f^{scd}}{f^{sbc} f^{sad}}$$

A fatorização da amplitude só é possível devido

as igualdades (13-1). A igualdade (13-1b), chamada por Goebel et al "Identidade de Jacobi Espacial Generalizada" pode ser verificada diretamente examinando a amplitude (12-1). Estes autores observaram que não há uma demonstração desta identidade, bem como uma interpretação de seu significado físico.

Na nossa dissertação de mestrado⁽⁵⁾ apresentamos uma prova desta identidade para uma teoria não abeliana (no caso, espalhamento gluon-gluon envolvendo quatro partículas) estruturada nos seguintes termos:

— A invariância de gauge da teoria implica em $\sum_{i=1}^3 \frac{A_i B'_i}{C_i} = 0$ (14-1) onde B'_i são os termos obtidos das partes entre colchetes da expressão (12-1), quando transformamos o vetor de polarização de uma partícula no correspondente vetor de momento, por exemplo $D \rightarrow d$

— Partindo de (14-1), mostramos uma consequência da invariância de gauge, a saber: $\sum_{i=1}^3 B'_i = 0$ (14-2)

— Analisando a lagrangiana que descreve o processo, concluímos sobre a forma mais geral possível dos termos que compõe os elementos B_i da amplitude de

espalhamento, calculada em ordem mais baixa, levando em conta tão somente as características da teoria (conservação de paridade, condição de realidade de glúons livres com massa de repouso nula, e condição de transversalidade).

— Levando em conta a conservação de momento energia, foi selecionado um conjunto base de termos linearmente independentes, que foi escrito na forma de uma soma, a saber: $\sum_j h_j T_j$ (15-1)

— Impondo a esta soma a propriedade (14-2) decorrente da invariância de gauge, obtivemos condições sobre os coeficientes h_j de (15-1), que redundaram na igualdade $\sum_j h_j T_j = 0$, ou, o que é o mesmo, $\sum_{i=1}^3 B_i = 0$.

Desta maneira obtivemos uma prova da Identidade de Jacobi Espacial Generalizada, no contexto de uma teoria não abeliana, e mostramos que além de todos os dados básicos da teoria e da ordem de aproximação usada no cálculo da amplitude (aproximação árvore), esta identidade depende fundamentalmente da invariância de gauge.

Capítulo I

Processos de espalhamento envolvendo cinco partículas

Para tornar mais claras as condições de existência da chamada Identidade de Jacobi Espacial Generalizada e a questão da fatorização da amplitude, nos propuzemos examinar processos de espalhamento envolvendo cinco partículas. Veremos que estes processos se exprimem por amplitudes que podem ser colocadas na forma $\sum_i \frac{A_i B_i}{C_i}$, onde o índice "i" vai variar de um até valores maiores que três^{§(1)}. Vamos começar portanto estabelecendo uma generalização do lema de Mikaelian, que nos permitirá lidar com estas expressões da amplitude.

Nota §(1) Em teorias abelianas este índice varia de um a quatro. Já em um processo de espalhamento gluon-gluon este índice pode variar de um a quinze, mas é também possível, como veremos, reorganizar a amplitude de outras maneiras.

I 1. Generalização do lema matemático

O lema matemático da introdução tem a seguinte generalização:

"Seja $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i}$ onde A_i, B_i, C_i são grandezas quaisquer, porém tal que: $\sum_{i=1}^{n+1} A_i = \sum_{i=1}^{n+1} B_i = \sum_{i=1}^{n+1} C_i = 0$ e ao mesmo tempo $\sum_{i=1}^n A_i \neq 0$, $\sum_{i=1}^n B_i \neq 0$ e $\sum_{i=1}^n C_i \neq 0$. Neste caso, para $n < 3$ esta expressão se decompõe em dois fatores, um dos quais contém a dependência nos A_i e outro a dependência nos B_i . Para $n \geq 3$, tal fatorização é impossível"

Demonstração:

A expressão $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i}$ pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i B_i}{C_i} + \frac{A_{n+1} B_{n+1}}{C_{n+1}}$$

Como:

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_i = \sum_{i=1}^{n+1} B_i = \sum_{i=1}^{n+1} C_i = 0$$

temos:

$$\frac{A_{n+1} B_{n+1}}{C_{n+1}} = - \frac{(A_1 + \dots + A_n)(B_1 + \dots + B_n)}{C_1 + \dots + C_n}$$

Então:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{1}{C_1 + \dots + C_n} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{A_i B_i}{C_i} \right) (C_1 + \dots + C_n) - (A_1 + \dots + A_n) \times \right. \\ \left. \times (B_1 + \dots + B_n) \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{1}{C_1 + \dots + C_n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{A_i B_i}{C_i} C_j - A_i B_j \right) \quad (18-1)$$

Se existir a fatorização mencionada temos:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i} = \left(\sum_i x_i A_i \right) \left(\sum_j y_j B_j \right) \quad (18-2)$$

Seja $n=3$. Neste caso a expressão (18-1) fica:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{1}{C_1 + C_2 + C_3} \left[\frac{A_1 B_1}{C_1} C_2 - A_1 B_2 + \frac{A_1 B_1}{C_1} C_3 - A_1 B_3 + \right. \\ \left. + \frac{A_2 B_2}{C_2} C_1 - A_2 B_1 + \frac{A_2 B_2}{C_2} C_3 - A_2 B_3 + \frac{A_3 B_3}{C_3} C_1 - A_3 B_1 + \right. \\ \left. + \frac{A_3 B_3}{C_3} C_2 - A_3 B_2 \right]$$

Observemos que os termos da dupla soma da equação

(18-1) em que $i=j$, são nulos. Podemos rearranjar o segundo membro da igualdade anterior, colocando:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{1}{C_1 + C_2 + C_3} \left[A_1 B_1 \left(\frac{C_2 + C_3}{C_1} \right) + A_2 B_2 \left(\frac{C_1 + C_3}{C_2} \right) + A_3 B_3 \left(\frac{C_2 + C_1}{C_3} \right) - A_1 B_2 - A_2 B_1 - A_2 B_3 - A_3 B_2 - A_1 B_3 - A_3 B_1 \right] \quad (19-1)$$

Por outro lado a expressão (18-2) para o caso $n=3$ fica:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i} = (x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3)(y_1 B_1 + y_2 B_2 + y_3 B_3)$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i B_i}{C_i} = x_1 y_1 A_1 B_1 + x_1 y_2 A_1 B_2 + x_1 y_3 A_1 B_3 + x_2 y_1 A_2 B_1 + x_2 y_2 A_2 B_2 + x_2 y_3 A_2 B_3 + x_3 y_1 A_3 B_1 + x_3 y_2 A_3 B_2 + x_3 y_3 A_3 B_3 \quad (19-2)$$

Comparando (19-1) com (19-2) obtemos o seguinte sistema de equações:

$$x_1 y_1 = \frac{1}{C_1 + C_2 + C_3} \left(\frac{C_2 + C_3}{C_1} \right) \quad (19-3)$$

$$x_1 y_2 = \frac{-1}{C_1 + C_2 + C_3} \quad (19-4)$$

$$x_1 y_3 = \frac{-1}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$x_2 y_1 = \frac{-1}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$x_2 y_2 = \frac{1}{C_1 + C_2 + C_3} \left(\frac{C_1 + C_3}{C_2} \right)$$

$$x_2 y_3 = \frac{-1}{C_1 + C_2 + C_3}$$

$$x_3 y_1 = \frac{-1}{C_1 + C_2 + C_3} \quad (20-1)$$

$$x_3 y_2 = \frac{-1}{C_1 + C_2 + C_3} \quad (20-2)$$

$$x_3 y_3 = \frac{1}{C_1 + C_2 + C_3} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_3} \right)$$

Dividindo (19-3) por (19-4) temos:

$$\frac{y_1}{y_2} = - \frac{C_2 + C_3}{C_1} \quad (20-3)$$

Dividindo (20-1) por (20-2) temos:

$$\frac{y_1}{y_2} = 1 \quad (20-4)$$

Comparando (20-3) com (20-4) temos finalmente

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0$$

Este resultado é incompatível com as hipóteses iniciais.

Em outras palavras, a hipótese da fatorização assumida na equação (18-2), leva a uma incompatibilidade com as

condições da soma $\sum_i \frac{A_i B_i}{C_i}$, o que mostra que esta soma não é fatorizável.

Por outro lado, para $n < 3$ não aparece esta incompatibilidade e a fatorização é possível. Por exemplo, para

$n = 1$ como:

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_i = \sum_{i=1}^{n+1} B_i = \sum_{i=1}^{n+1} C_i = 0$$

temos:

$$A_1 + A_2 = 0 \quad ; \quad B_1 + B_2 = 0 \quad ; \quad C_1 + C_2 = 0$$

donde

$$A_1 = -A_2 \quad ; \quad B_1 = -B_2 \quad ; \quad C_1 = -C_2$$

e então:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{A_1 B_1}{C_1} + \frac{A_2 B_2}{C_2} = \frac{A_1 B_1}{C_1} - \frac{A_1 B_1}{C_1} = 0$$

Para $n = 2$, a igualdade (18-1) fica:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{1}{C_1 + C_2} \left(\frac{A_1 B_1}{C_1} C_2 + \frac{A_2 B_2}{C_2} C_1 - A_1 B_2 - A_2 B_1 \right) \quad (21-1)$$

E a igualdade (18-2), que exprime o fato de haver fatorização, fica:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{A_i B_i}{C_i} = (x_1 A_1 + x_2 A_2)(y_1 B_1 + y_2 B_2) \quad (21-2)$$

Comparando (21-1) com (21-2) temos o sistema:

$$x_1 y_1 = \frac{1}{C_1 + C_2} \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \quad (21-3)$$

$$x_1 y_2 = - \frac{1}{C_1 + C_2} \quad (22-1)$$

$$x_2 y_1 = - \frac{1}{C_1 + C_2} \quad (22-2)$$

$$x_2 y_2 = - \frac{1}{C_1 + C_2} \left(\frac{C_1}{C_2} \right) \quad (22-3)$$

Dividindo (21-3) por (22-1) temos:

$$\frac{y_1}{y_2} = - \frac{C_2}{C_1}$$

Dividindo (22-2) por (22-3) temos também:

$$\frac{y_1}{y_2} = - \frac{C_2}{C_1}$$

Vemos assim que não há nenhuma incompatibilidade entre o sistema de equações de (21-3) a (22-3) e a hipótese $\sum_{i=1}^2 C_i \neq 0$. E de fato, a expressão (21-1) é facilmente fatorizada. Partindo (21-1) podemos fazer:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(\frac{A_1 B_1}{C_1^2} + \frac{A_2 B_2}{C_2^2} - \frac{A_1 B_2}{C_1 C_2} - \frac{A_2 B_1}{C_1 C_2} \right)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left[\frac{A_1}{C_1} \left(\frac{B_1}{C_1} - \frac{B_2}{C_2} \right) - \frac{A_2}{C_2} \left(\frac{B_1}{C_1} - \frac{B_2}{C_2} \right) \right]$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \left(\frac{A_1}{C_1} - \frac{A_2}{C_2} \right) \left(\frac{B_1}{C_1} - \frac{B_2}{C_2} \right)$$

Como $C_1 + C_2 = -C_3$ temos:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{A_i B_i}{C_i} = \frac{1}{C_3} (A_1 C_2 - A_2 C_1) \left(\frac{B_2}{C_2} - \frac{B_1}{C_1} \right)$$

que é nossa equação (9-2)

O exame para $n > 3$ está feito no Apêndice 1.

I 2. A interação fóton-pion

Consideremos um processo de interação envolvendo cinco partículas sendo um fóton e quatro pions. A amplitude é calculada computando cinco gráficos. Abaixo desenhemos os gráficos e a amplitude parcial correspondente (a menos de constantes)

$$\frac{Q_1}{p \cdot p_1} \frac{p_1 \cdot \epsilon}{p_3 \cdot p_4}$$

$$\frac{Q_2}{p \cdot p_2} \frac{p_2 \cdot \epsilon}{p_3 \cdot p_4}$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{(Q_1 + Q_2)(p_1 + p_2) \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_2 \quad p_3 \cdot p_4} + \frac{(Q_3 + Q_4)(p_3 + p_4) \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_2 \quad p_3 \cdot p_4} \right]$$

$$\frac{Q_3}{p \cdot p_3} \quad \frac{p_3 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_2}$$

$$\frac{Q_4}{p \cdot p_4} \quad \frac{p_4 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_2}$$

Nestas expressões p_1, p_2, p_3, p_4 são os quadri-vetores momento-energia dos pions, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 são as cargas dos mesmos, p é o momento do fóton e ϵ o vetor de polarização do fóton.

A expressão da amplitude total é:

$$\begin{aligned} \text{Amp} = & \left[\frac{Q_1}{p \cdot p_1} \frac{p_1 \cdot \epsilon}{p_3 \cdot p_4} + \frac{Q_2}{p \cdot p_2} \frac{p_2 \cdot \epsilon}{p_3 \cdot p_4} + \frac{1}{2} \frac{(Q_1 + Q_2)(p_1 + p_2) \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_2 \quad p_3 \cdot p_4} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{(Q_3 + Q_4)(p_3 + p_4) \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_2 \quad p_3 \cdot p_4} + \frac{Q_3}{p \cdot p_3} \frac{p_3 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_2} + \frac{Q_4}{p \cdot p_4} \frac{p_4 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_2} \right] \quad (24-1) \end{aligned}$$

Esta amplitude pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Amp} = & \frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4} \left[\frac{Q_1}{p \cdot p_1} p_1 \cdot p_2 \cdot p_1 \cdot \epsilon + \frac{Q_2}{p \cdot p_2} p_1 \cdot p_2 \cdot p_2 \cdot \epsilon + \right. \\ & + \frac{1}{2} Q_1 (p_1 + p_2) \cdot \epsilon + \frac{1}{2} Q_2 (p_1 + p_2) \cdot \epsilon + \frac{1}{2} Q_3 (p_3 + p_4) \cdot \epsilon + \\ & \left. + \frac{1}{2} Q_4 (p_3 + p_4) \cdot \epsilon + \frac{Q_3}{p \cdot p_3} p_3 \cdot p_4 \cdot p_3 \cdot \epsilon + \frac{Q_4}{p \cdot p_4} p_3 \cdot p_4 \cdot p_4 \cdot \epsilon \right] \end{aligned}$$

É finalmente:

$$\begin{aligned} \text{Amp} = & \frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4} \left[\frac{Q_1}{p \cdot p_1} \left(p_1 \cdot \epsilon \cdot p_1 \cdot p_2 + \frac{1}{2} p_1 \cdot \epsilon \cdot p \cdot p_1 + \frac{1}{2} p_2 \cdot \epsilon \cdot p \cdot p_1 \right) + \right. \\ & + \frac{Q_2}{p \cdot p_2} \left(p_2 \cdot \epsilon \cdot p_1 \cdot p_2 + \frac{1}{2} p_1 \cdot \epsilon \cdot p \cdot p_2 + \frac{1}{2} p_2 \cdot \epsilon \cdot p \cdot p_2 \right) + \frac{Q_3}{p \cdot p_3} \left(p_3 \cdot \epsilon \cdot p_3 \cdot p_4 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} p_3 \cdot \epsilon \cdot p \cdot p_3 + \frac{1}{2} p_4 \cdot \epsilon \cdot p \cdot p_4 \right) + \frac{Q_4}{p \cdot p_4} \left(p_4 \cdot \epsilon \cdot p_3 \cdot p_4 + \frac{1}{2} p_3 \cdot \epsilon \cdot p \cdot p_4 + \frac{1}{2} p_4 \cdot \epsilon \cdot p \cdot p_4 \right) \right] \end{aligned} \quad (25-1)$$

A amplitude, tal como expressa em (25-1) está exatamente na forma da expressão cuja fatorização é decidida pelo lema matemático que vimos em I 1. De fato, podemos escrever (25-1) de forma compacta da seguinte maneira:

$$\text{Amp} = \frac{1}{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4} \sum_{i=1}^4 \frac{A_i \cdot B_i}{C_i} \quad (25-2)$$

Em (25-2) os A_i são os Q_i . Como pela conservação de carga $\sum_{i=1}^4 Q_i = 0$, temos igualmente $\sum_{i=1}^4 A_i = 0$. Por outro lado, quaisquer que sejam as cargas escolhidas, sabemos que $\sum_{i=1}^3 Q_i \neq 0$ e portanto $\sum_{i=1}^3 A_i \neq 0$. Ou seja, os A_i de (25-2) estão nas condições do lema matemático de I.1.

Os C_i de (25-2) são os $p.p_i$ de (25-1). Ora, para estes vale $\sum_{i=1}^4 p.p_i = 0$ por conservação de momento e pela condição de realidade do fóton. Temos ainda $\sum_{i=1}^3 p.p_i \neq 0$ quaisquer que sejam os p_i escolhidos. Logo os C_i também estão nas condições do lema matemático.

Os B_i de (25-2) são os termos entre parênteses de (25-1). É fácil provar que $\sum_{i=1}^4 B_i = 0$. De fato rearranjando a soma dos B_i de (25-1) podemos escrevê-la na forma:

$$\sum_{i=1}^4 B_i = \epsilon \cdot (p_1 + p_2) \left[p_1 \cdot p_2 + \frac{1}{2} p \cdot (p_1 + p_2) \right] + \epsilon \cdot (p_3 + p_4) \left[p_3 \cdot p_4 + \frac{1}{2} p \cdot (p_3 + p_4) \right]$$

Por outro lado temos:

$$p_1 \cdot p_2 + \frac{1}{2} p \cdot (p_1 + p_2) = p_1 \cdot p_2 - \frac{1}{2} (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \cdot (p_1 + p_2)$$

$$p_1 \cdot p_2 + \frac{1}{2} p \cdot (p_1 + p_2) = - \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4) \quad (27-1)$$

E igualmente:

$$p_3 \cdot p_4 + \frac{1}{2} p \cdot (p_3 + p_4) = - \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4) \quad (27-2)$$

Usando as igualdades (27-1) e (27-2) a soma dos B_i fica:

$$\sum_{i=1}^4 B_i = - \epsilon \cdot (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4) \quad (27-3a)$$

$$\sum_{i=1}^4 B_i = \epsilon \cdot p \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4) = 0 \quad (27-3b)$$

Usamos conservação de momento e condição de transversalidade do fóton.

Que a soma $\sum_{i=1}^3 B_i$ seja diferente de zero, resulta claro da própria demonstração que acabamos de levar a cabo. De fato, se escolhêssemos, por exemplo, B_1, B_2 e B_3 e procedêssemos aos mesmos rearranjos que acabamos de efetuar na somatória dos B_i , obteríamos no lugar de (27-3a) a expressão:

$$\sum_{i=1}^3 B_i = - \epsilon \cdot (p_1 + p_2 + p_3) \frac{1}{2} (p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4)$$

que é em geral, e também para qualquer outra escolha dos B_i , diferente de zero

Mostramos assim que a expressão da amplitude do processo de interação fóton-pion, quando convenientemente reorganizada, pode ser posta nas condições do lema I 1 e de acordo com o mesmo não se fatoriza.

I 3. A amplitude de um processo de espalhamento gluon-gluon

Para escrevermos a amplitude de probabilidade de um processo de espalhamento gluon-gluon envolvendo cinco partículas, temos que considerar todos os gráficos de Feynman topologicamente inequivalentes. Temos dois tipos de gráficos: os gráficos de três vértices e os gráficos de dois vértices. A totalidade de gráficos de três vértices pode ser obtida considerando os três gráficos de um processo de interação envolvendo quatro partículas que são:

onde "a", "b", "c" e "d" são os momentos das partículas, e colocando em cada linha externa e no propagador de cada gráfico, uma quinta linha representando o glúon de momento "e". Obtemos assim quinze gráficos topologicamente inequivalentes, que passamos a desenhar:

=

=

=

=

=

=

=

Aplicando as regras de Feynman, podemos calcular as amplitudes parciais correspondentes a cada um destes gráficos. O quarto gráfico, por exemplo, fornece:

$$\begin{aligned}
 Amp^{(4)} = & ig^3 \frac{f^{abs} f^{scr} f^{rde}}{4 a.b d.e} A_\alpha^a B_\beta^b C_\gamma^c D_\delta^d E_\eta^e \left[\delta_{\alpha\beta} (b-a)_\mu + \delta_{\beta\mu} (-2b-a)_\alpha + \right. \\
 & \left. + \delta_{\mu\alpha} (2a+b)_\beta \right] \left[\delta_{\gamma\mu} (a+b-c)_\nu + \delta_{\mu\nu} (d+e-a-b)_\gamma + \delta_{\nu\gamma} (c-d-e)_\mu \right] \times \\
 & \times \left[\delta_{\delta\gamma} (-2d-e)_\eta + \delta_{\nu\eta} (2e+d)_\delta + \delta_{\eta\delta} (d-e)_\nu \right]
 \end{aligned}$$

Associadas a esta amplitude parcial, proveniente de um gráfico de três vértices, temos duas outras amplitudes parciais calculadas a partir de dois gráficos de dois vértices, e que se caracterizam pelo mesmo produto de constantes de estrutura. Assim ao

crever:

$$Amp^{(4.1)} = ig^3 \frac{f^{sdo} f^{scr} f^{eba}}{2 a \cdot b} A_\alpha^a B_\beta^b C_\gamma^c D_\delta^d E_\eta^e \left[\delta_{\alpha\delta} \delta_{\eta\mu} \delta_{\mu\beta} (2b+a)_\alpha + \right. \\ \left. + \delta_{\gamma\delta} \delta_{\eta\mu} \delta_{\beta\alpha} (a-b)_\mu + \delta_{\gamma\delta} \delta_{\eta\mu} \delta_{\alpha\mu} (-2a-b)_\beta - \delta_{\gamma\mu} \delta_{\gamma\eta} \delta_{\mu\beta} (2b+a)_\alpha + \right. \\ \left. - \delta_{\gamma\mu} \delta_{\gamma\eta} \delta_{\beta\alpha} (a-b)_\mu - \delta_{\gamma\mu} \delta_{\gamma\eta} \delta_{\alpha\mu} (-2a-b)_\beta \right] \quad (32-1)$$

$$Amp^{(4.2)} = ig^3 \frac{f^{sab} f^{scr} f^{eed}}{2 d \cdot e} A_\alpha^a B_\beta^b C_\gamma^c D_\delta^d E_\eta^e \left[\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\mu} \delta_{\mu\eta} (2e+d)_\delta + \right. \\ \left. + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\mu} \delta_{\eta\delta} (d-e)_\mu + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\mu} \delta_{\delta\mu} (-2d-e)_\eta - \delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\mu\eta} (2e+d)_\delta + \right. \\ \left. - \delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\eta\delta} (d-e)_\mu - \delta_{\beta\delta} \delta_{\alpha\mu} \delta_{\delta\mu} (-2d-e)_\eta \right] \quad \S (32-1) \quad (32-2)$$

Nota: §(32-1) As parcelas da amplitude escritas em (32-1) e em (32-2) representam um terço dos termos associados a cada

Lembrando que pelas regras de Feynman, temos ainda um fator $(2\pi)^4$ para cada vértice e um fator $\frac{1}{(2\pi)^4}$ para cada propagador, vai resultar um fator global $-g^3 (2\pi)^4$.

Como a cada um dos quinze gráficos de três vértices temos associados dois gráficos de dois vértices, o cálculo da amplitude total do processo implica no cálculo de quarenta e cinco gráficos. Estes quarenta e cinco gráficos são agrupados em quinze grupos de três gráficos, um de três e dois de dois vértices, os quais vão fornecer parcelas da amplitude que podem ser englobadas sob um mesmo produto de constantes de estrutura. A parcela cujo cálculo iniciamos vai resultar, após efetuadas as multiplicações indicadas, após as simplificações e tomando um denominador comum, em uma expressão que tem as constantes de estrutura $f^{sab} f^{scr} f^{rde}$ e o denominador $4 a.b d.e$, multiplicando cinquenta e seis termos. As demais parcelas da amplitude resultantes do cálculo dos outros quatorze grupos, tem a mesma forma, e podem ser obtidas desta por permutações de letras,

Nota: 3(32-1)(continuação) um dos gráficos de dois vértices. O gráfico 4.2, além da parcela escrita em (32-2) tem outras duas parcelas, correspondentes aos produtos de constantes de estrutura $f^{abc} f^{sur}$ $\times f^{rde}$ e $f^{oca} f^{obr} f^{rde}$.

como mostraremos adiante.

Usando a notação compacta da introdução podemos escrever a amplitude total da seguinte maneira:

$$Amp = -g^3 (2\pi)^4 \sum_{i=1}^{15} \frac{A_i B_i}{C_i} \quad \S (34-1) \quad (34-1)$$

Nesta expressão os A_i são os produtos de constantes de estrutura, os B_i são expressões contendo somas de cinquenta e seis termos e os C_i são os denominadores.

Listamos abaixo os produtos de constantes de estrutura que caracterizam cada uma das parcelas da soma (34-1) numerados de acordo com a ordem dos gráficos das páginas vinte e nove, trinta e trinta e um.

$$\begin{aligned} A_1 &= f^{aes} f^{sbr} f^{rbd} ; & A_2 &= f^{cds} f^{sar} f^{rbe} ; & A_3 &= f^{abs} f^{sdr} f^{rce} \\ A_4 &= f^{abs} f^{scr} f^{rde} ; & A_5 &= f^{abs} f^{ser} f^{rbd} ; & A_6 &= f^{bds} f^{scr} f^{rae} \\ A_7 &= f^{ces} f^{sar} f^{rbd} ; & A_8 &= f^{cas} f^{sdr} f^{rbe} ; & A_9 &= f^{cas} f^{sbr} f^{rde} \\ A_{10} &= f^{cas} f^{ser} f^{rbd} ; & A_{11} &= f^{bcs} f^{sdr} f^{rae} ; & A_{12} &= f^{bcs} f^{sar} f^{rde} \\ A_{13} &= f^{ads} f^{sbr} f^{rce} ; & A_{14} &= f^{bes} f^{scr} f^{rad} ; & A_{15} &= f^{bcs} f^{ser} f^{rad} \end{aligned}$$

Nota: §(34-1). No apêndice 2 transcrevemos a amplitude total

Podemos obter cada um dos B_i sem necessidade de calcular novamente a parcela da amplitude associada a três gráficos. Basta efetuar, ao passarmos de B_i para B_j , as mesmas permutações nos cinquenta e seis termos de B_i que são efetuadas nos índices de cor das constantes de estrutura quando passamos de A_i para A_j . Por exemplo, para passar de B_4 (cujo cálculo indicamos) para B_5 , observamos que a transformação de A_4 em A_5 implica nas seguintes permutações sobre os índices de cor: "c" passa a "e", "e" a "d", "d" a "c". Realizando as mesmas permutações nos termos de B_4 , ou seja fazendo os vetores de polarização "C" passarem a "E", "E" a "D" e "D" a "C" e as mesmas transformações nos momentos, obteremos a expressão B_5 . Realizando as mesmas transformações nos momentos do denominador passamos de " C_4 " a " C_5 ", onde quatro e cinco são valores assumidos pelo índice "i" da expressão (34-1). De resto os momentos do denominador podem ser escritos diretamente por mera inspeção dos gráficos das páginas vinte e nove, trinta e trinta e um.

I4. Discussão da forma da amplitude e identidades

A amplitude de probabilidade de um processo de espalhamento gluon-gluon envolvendo cinco partículas tem, como vimos, a forma:

$$\text{Amp} = \sum_{i=1}^{15} \frac{A_i B_i}{C_i} \quad (36-1)$$

que é também a forma da amplitude do processo envolvendo quatro partículas. Temente que no caso de quatro partículas esta soma tem apenas três termos (pag 12). Se atentarmos ainda para a maneira como foram calculadas as amplitudes nos dois casos, somos levados a crer que (36-1) é a generalização "natural" da amplitude do processo envolvendo quatro partículas ((12-1) e página doze).

Podemos levantar então as questões que nos interessam, qual sejam: existe neste caso a identidade de Jacobi espacial generalizada? Qual sua interpretação física? Pode

a amplitude ser colocada na forma do lema matemático apresentado no capítulo I? Existe a fatorização, tal como acontecia no processo envolvendo quatro partículas?

Para responder a estas questões vamos examinar com mais detalhe a amplitude, começando pelos produtos de constantes de estrutura (os A_i de (36-1)) e os termos espaciais (os B_i de (36-1))

a) Identidades envolvendo produtos de constantes de estrutura

Examinando os produtos de constantes de estrutura listados na página trinta e quatro, constatamos que existem dez identidades, envolvendo cada uma, três destes produtos. Temos, por exemplo a identidade:

$$A_4 + A_{12} + A_9 = 0$$

De fato:

$$A_4 + A_{12} + A_9 = f^{abs} f^{scr} f^{rde} + f^{bcs} f^{sar} f^{rde} + f^{cas} f^{sbr} f^{rde}$$

$$A_4 + A_{12} + A_9 = \left(f^{abs} f^{scr} + f^{bcs} f^{sar} + f^{cas} f^{sbr} \right) f^{rde}$$

A soma entre parênteses da última equação nada mais é, que

a Identidade de Jacobi.

Abaixo relacionamos as dez identidades deste tipo:

$$A_4 + A_9 + A_{12} = 0 \quad (1a)$$

$$A_{13} - A_3 + A_7 = 0 \quad (6a)$$

$$A_4 - A_3 + A_5 = 0 \quad (2a)$$

$$A_1 + A_6 - A_{11} = 0 \quad (7a)$$

$$A_{12} - A_{11} + A_{15} = 0 \quad (3a)$$

$$A_1 + A_2 - A_5 = 0 \quad (8a)$$

$$A_9 - A_8 + A_{10} = 0 \quad (4a)$$

$$A_6 + A_7 - A_{10} = 0 \quad (9a)$$

$$A_{13} + A_{14} - A_{15} = 0 \quad (5a)$$

$$A_{14} + A_2 - A_8 = 0 \quad (10a)$$

(38-1)

Destas dez identidades podemos deduzir muitas outras, com quatro, cinco ou mais termos. Particularmente importantes para nós, são as identidades envolvendo quatro termos. Assim, tomando a identidade (1a) e somando com a identidade (2a) multiplicada por menos um, obtemos:

$$A_3 - A_5 + A_9 + A_{12} = 0$$

Como nas dez identidades de três termos, cada produto de constantes de estrutura aparece duas vezes, e como existem quinze produtos diferentes, podemos obter quinze identidades de quatro termos. Abaixo listamos os pares de identidades de três termos e a correspondente identidade de quatro termos:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + A_6 - A_{11} = 0 \\ -A_1 - A_2 + A_5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_6 - A_{11} - A_2 + A_5 = 0 \quad (1b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + A_2 - A_5 = 0 \\ -A_{14} - A_2 + A_8 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 - A_5 - A_{14} + A_8 = 0 \quad (2b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_4 - A_3 + A_5 = 0 \\ -A_{13} + A_3 - A_7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_4 + A_5 - A_{13} - A_7 = 0 \quad (3b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_4 + A_9 + A_{12} = 0 \\ -A_4 + A_3 - A_5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_9 + A_{12} + A_3 - A_5 = 0 \quad (4b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_4 - A_3 + A_5 = 0 \\ A_1 + A_2 - A_5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_4 - A_3 + A_1 + A_2 = 0 \quad (5b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_1 + A_6 - A_{11} = 0 \\ -A_7 - A_6 + A_{10} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_1 - A_7 + A_{10} - A_{11} = 0 \quad (6b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{13} - A_3 + A_7 = 0 \\ A_6 + A_{10} - A_7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_{13} - A_3 - A_6 + A_{10} = 0 \quad (7b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_9 - A_8 + A_{10} = 0 \\ -A_{14} + A_8 - A_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_9 + A_{10} - A_{14} - A_2 = 0 \quad (8b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_4 + A_9 + A_{12} = 0 \\ A_8 - A_9 - A_{10} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_4 + A_{12} + A_8 - A_{10} = 0 \quad (9b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_9 - A_8 + A_{10} = 0 \\ A_6 + A_7 - A_{10} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_6 + A_7 - A_8 + A_9 = 0 \quad (10b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{12} - A_{11} + A_{15} = 0 \\ -A_1 + A_{11} - A_6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_{12} + A_{15} - A_1 - A_6 = 0 \quad (11b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_4 + A_9 + A_{12} = 0 \\ A_{11} - A_{15} - A_{12} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_4 + A_9 + A_{11} - A_{15} = 0 \quad (12b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{13} + A_{14} - A_{15} = 0 \\ -A_{13} + A_3 - A_7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_3 + A_{14} - A_7 - A_{15} = 0 \quad (13b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{13} + A_{14} - A_{15} = 0 \\ -A_2 - A_{14} + A_8 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_{13} - A_{15} - A_2 + A_8 = 0 \quad (14b)$$

$$\left. \begin{array}{l} A_{12} - A_{11} + A_{15} = 0 \\ A_{13} + A_{14} - A_{15} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A_{12} - A_{11} + A_{13} + A_{14} = 0 \quad (15b)$$

(40-1)

Na reorganização da amplitude que faremos em I 5., veremos porque estas identidades são importantes para nós e em I 6 discutiremos sua interpretação física.

b) Identidades espaciais generalizadas:

A questão da existência da "Identidade de Jacobi

espacial generalizada", envolve, antes de mais nada, a interpretação, para o caso do presente processo, do que seria esta identidade. Recordemos que no caso de um processo de espalhamento envolvendo quatro partículas, o que Goebel et al chamaram de "Identidade de Jacobi espacial generalizada" é a identidade $\sum_{i=1}^3 B_i = 0$, obedecida pelos termos constituídos de vetores de polarização e momentos da amplitude de probabilidade, e análoga a identidade de Jacobi, obedecida pelas constantes de estrutura.

Vimos na seção anterior, que no presente caso com cinco partículas, os A_i satisfazem a dez identidades de três termos, que são consequências da identidade de Jacobi. É fácil verificar, baseado nestas identidades que $\sum_{i=1}^{15} A_i \neq 0$. Então, como no caso de cinco partículas não temos uma única identidade envolvendo todos os produtos de constantes de estrutura, mas sim, diversas identidades que são consequências da identidade de Jacobi, a "generalização espacial" destas identidades, caso exista, deveria levar a outras tantas identidades envolvendo os B_i . A per-

gunta que se faz portanto, é se existem para os B_i , identidades análogas as da Tabela (38-1).

Examinando as B_i na expressão da amplitude total transcrita no apêndice dois, vemos que elas contêm termos de dois tipos: aqueles que tem um produto de vetores de polarização, como $8 A.B C.a D.e E.b$ e que chamaremos termos de primeira espécie, e aqueles que tem dois produtos de vetores de polarização, como $4 A.B C.D E.d a.c$ e que chamaremos termos de segunda espécie.

Quando considerarmos os termos de primeira espécie, podemos constatar que de fato existem as identidades espaciais generalizadas, ou seja, temos para os B_i uma lista de identidades como as da Tabela (38-1) dos A_i .^{§ (42-1)} Já quando considerarmos os termos de segunda espécie, constatamos que estas identidades em geral não mais existem. O que acontece com os termos de segunda espécie, é que para

Nota: § (42-1). A verificação destas identidades espaciais é bastante trabalhosa graças ao grande número de termos envolvidos (Apêndice dois). É entretanto um cálculo direto, que se baseia na conservação de momento, e condição de transversalidade e realidade dos glúons.

cada combinação específica de produtos de vetores de polarização, são satisfeitas duas identidades espaciais de três termos e como consequência destas, uma de quatro termos. Por exemplo, os termos de segunda espécie caracterizados pelo produto de vetores de polarização $A.B.C.D$ satisfazem as identidades: $B_4 - B_3 + B_5 = 0$ e $B_1 + B_2 - B_5 = 0$, que são as "generalizações espaciais" de (2a) e (8a) da tabela (38-1). Destas decorre a identidade $B_4 - B_3 + B_1 - B_2 = 0$.

Em outras palavras, se considerarmos entre os termos B_i da amplitude escrita na forma $\sum_{i=1}^{15} \frac{A_i B_i}{C_i}$, os termos de segunda espécie caracterizados por $A.B.C.D$ contidos em B_4 , somarmos a estes, os termos de segunda espécie, também caracterizados por $A.B.C.D$, de B_3 multiplicados por menos um, e finalmente somarmos os termos de segunda espécie que tem $A.B.C.D$ de B_5 , constatamos que esta soma é nula. O mesmo acontece com a soma destes termos, que tem $A.B.C.D$, tomados de B_1 , B_2 e $-B_5$. Se considerarmos porém os termos de segunda espécie caracterizados por $A.C.B.D$, as identidades $B_4 - B_3 + B_5 = 0$ e $B_1 + B_2 - B_5 = 0$ não são verdadeiras. Para estes termos valem as identidades

$B_9 - B_8 + B_{10} = 0$ e $B_6 + B_7 - B_{10} = 0$, e consequentemente a identidade $B_9 - B_8 + B_6 + B_7 = 0$.

Assim a cada um dos quinze diferentes produtos de vetores de polarização dos termos de segunda espécie, correspondem duas identidades de três termos e uma de quatro termos envolvendo os B_i , segundo a seguinte tabela:

$$A.B.C.D \quad \begin{cases} B_4 - B_3 + B_5 = 0 \\ B_1 + B_2 - B_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_1 + B_2 - B_3 + B_4 = 0$$

$$A.C.B.D \quad \begin{cases} B_9 - B_8 + B_{10} = 0 \\ B_6 + B_7 - B_{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow B_6 + B_7 - B_8 + B_9 = 0$$

$$A.D.B.C \quad \begin{cases} B_{13} + B_{14} - B_{15} = 0 \\ B_{12} - B_{11} + B_{15} = 0 \end{cases} \Rightarrow B_{12} - B_{11} + B_{13} + B_{14} = 0$$

$$A.B.C.E \quad \begin{cases} B_4 - B_3 + B_5 = 0 \\ -B_{13} + B_3 - B_7 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_4 + B_5 - B_7 - B_{13} = 0$$

$$A.C.B.E \quad \begin{cases} B_9 - B_8 + B_{10} = 0 \\ -B_2 + B_8 - B_{14} = 0 \end{cases} \Rightarrow B_9 + B_{10} - B_2 - B_{14} = 0$$

$$\text{A.E B.C} \quad \begin{cases} B_{12} - B_{11} + B_{15} = 0 \\ -B_1 + B_{11} - B_6 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_{12} + B_{15} - B_1 - B_6 = 0$$

$$\text{A.B D.E} \quad \begin{cases} B_4 + B_9 + B_{12} = 0 \\ -B_4 + B_3 - B_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_3 - B_5 + B_9 + B_{12} = 0$$

$$\text{A.D B.E} \quad \begin{cases} B_{13} + B_{14} - B_{15} = 0 \\ -B_2 - B_{14} + B_8 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_8 + B_{13} - B_2 - B_{15} = 0$$

$$\text{A.E B.D} \quad \begin{cases} B_1 + B_6 - B_{11} = 0 \\ -B_7 - B_6 + B_{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow B_1 - B_7 + B_{10} - B_{11} = 0$$

$$\text{A.C D.E} \quad \begin{cases} B_4 + B_9 + B_{12} = 0 \\ B_8 - B_9 - B_{10} = 0 \end{cases} \Rightarrow B_4 + B_8 - B_{10} + B_{12} = 0$$

$$\text{A.D C.E} \quad \begin{cases} B_{13} + B_{14} - B_5 = 0 \\ -B_{13} + B_3 - B_7 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_3 - B_7 + B_{14} - B_{15} = 0$$

$$\text{A.E D.C} \quad \begin{cases} B_1 + B_6 - B_{11} = 0 \\ -B_1 - B_2 + B_{15} = 0 \end{cases} \Rightarrow B_5 + B_6 - B_2 - B_{11} = 0$$

$$\text{B.C D.E} \quad \begin{cases} B_4 + B_9 + B_{12} = 0 \\ B_{11} - B_{15} - B_{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow B_4 + B_9 + B_{11} - B_{15} = 0$$

$$\text{B.D C.E} \quad \begin{cases} B_{13} - B_3 + B_7 = 0 \\ -B_6 + B_{10} - B_7 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_{10} + B_{13} - B_3 - B_6 = 0$$

$$\text{B.E D.C} \quad \begin{cases} B_1 + B_2 - B_5 = 0 \\ -B_{14} - B_2 + B_8 = 0 \end{cases} \Rightarrow B_1 + B_8 - B_5 - B_{14} = 0$$

(45-1)

Notemos que ao fazer a soma dos termos espaciais trabalhamos com os quadrimomentos, através da equação de conservação energia-momento. Não temos por isto como somar um termo caracterizado, digamos, pelo produto dos vetores de polarização $A.B$ com um termo caracterizado pelo produto $A.C$. Quando dizemos que as dez identidades espaciais de três termos envolvendo os B_i e consequentemente as quinze identidades de quatro termos, são satisfeitas por todos os termos de primeira espécie, isto significa que, se considerarmos os termos de primeira espécie que contém $A.B$, veremos que eles satisfazem a todas as identidades. Ou seja, se reunirmos os termos com $A.B$ de B_1, B_2, B_4 e os de B_3 multiplicados por menos um, veremos que a soma é nula. Se, por sua vez, reunirmos os termos com $A.B$ de $B_6, B_7, -B_8$ e B_9 teremos novamente uma soma nula, e o mesmo acontecerá com todas as identidades relacionadas nas páginas quarenta e quatro e quarenta e cinco. Se fizermos o mesmo com os termos caracterizados pelos produtos $A.C, A.D$ e enfim por todas as possíveis combinações de vetores de polarização, teremos o mesmo resultado, ou seja, cada um

desses tipos de termos ($A.C$, $A.D$, $B.C$ etc...) satisfazem a todas as identidades espaciais generalizadas.

Com os termos de segunda espécie, como vimos, e como está indicado na tabela das páginas quarenta e quatro e quarenta e cinco, temos algo diferente. Os termos caracterizados por cada combinação de vetores de polarização satisfazem a duas identidades de três e a uma identidade de quatro termos, que é consequência.

A utilização e interpretação destas identidades, bem como a análise do porque todo este conjunto de identidades se resume numa única "identidade de Jacobi espacial generalizada" do processo envolvendo quatro partículas, será feita nos tópicos seguintes.

c) Análise da amplitude

As expressões (12-2) e (36-1) das amplitudes de espalhamento envolvendo quatro e cinco glúons respectivamente, embora análogas são fundamentalmente diferentes. Vimos que no caso da amplitude de um processo com cinco parti-

culas, a soma de todos os produtos de constantes de estrutura, que aparecem em (36-1), é diferente de zero, ou seja: $\sum_{i=1}^{15} A_i \neq 0$. Podemos também verificar, usando conservação de momento, que $\sum_{i=1}^{15} C_i \neq 0$. Quanto aos B_i , vimos em detalhe na seção anterior, como não existe uma única identidade envolvendo todos os termos.

A forma (36-1) da amplitude não se enquadra portanto nas condições do lema matemático de I 1 e não tem, basicamente, estrutura análoga a da amplitude (12-2). Mostraremos porém em seguida, como é possível reorganizar a amplitude em uma soma de quinze termos, cada um dos quais por sua vez é a soma de quatro termos que estão nas condições do lema matemático de I 1, guardando portanto as características da amplitude do processo de quatro partículas.

I 5 Reorganização da ampli-

tude de espalhamento gluon
gluon por analogia com o mo-
delo escalar

a) Termos de segunda espécie

Vimos no cálculo da amplitude de espalhamento
gluon-gluon (escrita no apêndice dois), que a um gráfico
do tipo caracterizado pelo produto de cons-
tantes de estrutura $f^{aes} f^{obr} f^{rce}$ associamos duas parcelas
provenientes dos gráficos e e ca-
racterizados pelo mesmo produto de constantes de estrutu-
ra.

Vamos considerar então o seguinte gráfico básico
e acoplar a linha de momento "e" a cada
uma das linhas externas e ao propagador deste gráfico. Obte-
remos assim os seguintes gráficos e as correspondentes par-
celas da amplitude, lembrando sempre que estamos consi-

derando não somente as parcelas da amplitude provenientes do gráfico de três vértices que vamos desenhar, mas também as parcelas dos dois gráficos de dois vértices associados a cada um:

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A box with external lines } a, b, c, d \text{ and a wavy line } e \text{ attached to } a. \\ \text{Diagram 2: A box with external lines } a, b, c, d \text{ and a vertical line } b \text{ attached to the top. Internal lines are labeled } f_{aes}, f_{sbr}, f_{rzd}. \end{array} = \frac{A_1}{e \cdot a} \frac{B'_1}{c \cdot d}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A box with external lines } a, b, c, d \text{ and a wavy line } e \text{ attached to } b. \\ \text{Diagram 2: A box with external lines } a, b, c, d \text{ and a vertical line } a \text{ attached to the top. Internal lines are labeled } f_{bes}, f_{sar}, f_{rzd}. \end{array} = \frac{A_2}{e \cdot b} \frac{B'_2}{c \cdot d}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A box with external lines } a, b, c, d \text{ and a wavy line } e \text{ attached to the top. \\ \text{Diagram 2: A box with external lines } a, b, c, d \text{ and a vertical line } e \text{ attached to the top. Internal lines are labeled } f_{abs}, f_{ser}, f_{rzd}. \end{array} = \frac{A_5}{a \cdot b} \frac{B'_5}{c \cdot d}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A box with external lines } a, b, c, d \text{ and a wavy line } e \text{ attached to } c. \\ \text{Diagram 2: A box with external lines } a, b, c, d \text{ and a vertical line } d \text{ attached to the top. Internal lines are labeled } f_{ecs}, f_{sdr}, f_{rab}. \end{array} = \frac{A_3}{e \cdot c} \frac{B'_3}{a \cdot b}$$

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A box with external lines } a, b, c, d \text{ and a wavy line } e \text{ attached to } d. \\ \text{Diagram 2: A box with external lines } a, b, c, d \text{ and a vertical line } c \text{ attached to the top. Internal lines are labeled } f_{eds}, f_{scr}, f_{rab}. \end{array} = \frac{A_4}{e \cdot d} \frac{B'_4}{a \cdot b} \quad \S(50-1)$$

Nota: §(50-1) Não estamos escrevendo o fator $-g^3 (2\pi)^4$ que multiplica toda a amplitude.

Como sempre a letra B indica um conjunto de termos "espaciais" (produtos de vetores de polarização, vetores de polarização por momentos e de momentos). O índice inferior das letras B indica, como temos feito até agora, o conjunto destes termos que se seguem ao produto de constantes de estrutura, que indicamos pela letra A com mesmo índice na expressão da amplitude (apêndice dois). O índice superior nas letras B indica que não estamos tomando todos os termos do respectivo conjunto de termos espaciais da amplitude, mas somente os de segunda espécie caracterizados pelos produtos de vetores de polarização A.B C.D (primeiro grupo de termos da lista das páginas quarenta e quatro e quarenta e cinco). Então não estamos escrevendo por enquanto as parcelas reais da amplitude que representam estes gráficos (e as parcelas dos gráficos associados, com dois vértices) mas sim, somente uma parte destas parcelas. Veremos adiante como organizar os termos que não estão sendo, por enquanto, considerados.

Em seguida vamos reelaborar as parcelas já escritas da amplitude. Para tanto retomemos as identidades:

$$\begin{aligned} A_4 - A_3 + A_5 &= 0 \\ A_1 + A_2 - A_5 &= 0 \end{aligned} \quad (52-1)$$

e as correspondentes "generalizações espaciais", válidas para os termos que estamos considerando: (segunda espécie caracterizados pelos produtos de vetores de polarização A.B C.D)

$$\begin{aligned} B'_4 - B'_3 + B'_5 &= 0 \\ B'_1 + B'_2 - B'_5 &= 0 \end{aligned} \quad (52-2)$$

Passamos agora a escrever a parcela da amplitude, reunindo os termos da página cinquenta, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Amp^{(1)} &= \left[\frac{A_1}{e.a} \frac{B'_1}{c.d} + \frac{A_2}{e.b} \frac{B'_2}{c.d} + \frac{1}{2} \frac{(A_1 + A_2)(B'_1 + B'_2)}{a.b \ c.d} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{(A_3 - A_4)(B'_3 - B'_4)}{a.b \ c.d} + \frac{A_3 B'_3}{e.c \ a.b} + \frac{A_4 B'_4}{e.d \ a.b} \right] \quad (52-3) \end{aligned}$$

Trabalhando então esta parcela como fizemos no caso escalar, ficamos:

$$\begin{aligned} Amp^{(1)} &= \frac{1}{a.b \ c.d} \left[\frac{A_1}{e.a} a.b \ B'_1 + \frac{A_2}{e.b} a.b \ B'_2 + \frac{1}{2} A_1 (B'_1 + B'_2) + \right. \\ &+ \frac{1}{2} A_2 (B'_1 + B'_2) + \frac{1}{2} A_3 (B'_3 - B'_4) - \frac{1}{2} A_4 (B'_3 - B'_4) + \frac{A_3}{e.c} c.d \ B'_3 + \\ &+ \left. \frac{A_4}{e.d} c.d \ B'_4 \right] \end{aligned}$$

É finalmente:

$$\begin{aligned} \text{Amp}^{(1)} = & \frac{1}{a.b.c.d} \left\{ \frac{A_1}{e.a} \left[a.b B'_1 + \frac{1}{2} e.a B'_1 + \frac{1}{2} e.a B'_2 \right] + \right. \\ & + \frac{A_2}{e.b} \left[B'_2 a.b + \frac{1}{2} e.b B'_1 + \frac{1}{2} e.b B'_2 \right] - \frac{A_3}{e.c} \left[c.d (-B'_3) \right] + \\ & + \frac{1}{2} (-B'_3) e.c + \frac{1}{2} B'_4 e.c \left. + \frac{A_4}{e.d} \left[c.d B'_4 + \frac{1}{2} e.d (-B'_3) \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} e.d B'_4 \right\} \quad (53-1) \end{aligned}$$

Esta expressão está na forma do lema matemático do primeiro capítulo (I1). De fato:

$$A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 0$$

É ainda:

$$\sum_{i=1}^3 A_i \neq 0$$

para quaisquer três "i" do conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$. Temos também:

$$e.a + e.b + e.c + e.d = -e.e = 0$$

e a soma de qualquer número de elementos menos que quatro do conjunto $\{e.a, e.b, e.c, e.d\}$ é diferente de zero.

Quanto as expressões entre colchetes da $\text{Amp}^{(1)}$ (53-1),

sua soma é também nula. Para compreender isto basta comparar com a expressão (25-1) da amplitude de probabilidade de nosso modelo escalar. Podemos estabelecer entre (25-1) e (53-1) a seguinte correspondência:

$p_1 = a$	$p_1 \cdot \epsilon = B_1'$
$p_2 = b$	$p_2 \cdot \epsilon = B_2'$
$p_3 = c$	$p_3 \cdot \epsilon = -B_3'$
$p_4 = d$	$p_4 \cdot \epsilon = B_4'$
$p = e$	

Ora, as mesmas relações que existem entre as grandezas de (25-1), a saber:

$$p + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \quad (\text{Conservação de momento})$$

$$(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \cdot \epsilon = -p \cdot \epsilon = 0 \quad (\text{Transversalidade do fóton})$$

e que justificam o fato da soma dos termos entre colchetes em (25-1) ser nula, existem também entre as grandezas de (53-1), quais sejam:

$$a + b + c + d + e = 0 \quad (\text{Conservação de momento})$$

$$B_1' + B_2' - B_3' + B_4' = 0 \quad (\text{Identidade espacial generalizada})$$

e explicam de maneira análoga porque a soma dos colchetes em (53-1) é nula.

Para maior clareza, faremos entretanto esta prova em detalhe, trabalhando com as grandezas da interação gluon-gluon, como havíamos trabalhado com as grandezas da interação fóton-pion, e seguindo, quanto ao mais, escatamente os mesmos passos. Queremos calcular a seguinte soma:

$$\begin{aligned} & \left[a.b B_1' + \frac{1}{2} e.a B_1' + \frac{1}{2} e.a B_2' \right] + \left[a.b B_2' + \frac{1}{2} e.b B_1' + \frac{1}{2} e.b B_2' \right] + \\ & + \left[c.d (-B_3') + \frac{1}{2} e.c (-B_3') + \frac{1}{2} e.c B_4' \right] + \left[c.d B_4' + \frac{1}{2} e.d (-B_3') + \frac{1}{2} e.d B_4' \right] \end{aligned} \quad (55-1)$$

Como:

$$a.b + \frac{1}{2} e.(a+b) = a.b - \frac{1}{2} (a+b+c+d).(a+b) = -\frac{1}{2} (a+b)(c+d)$$

e ainda:

$$c.d + \frac{1}{2} e.(c+d) = -\frac{1}{2} (a+b)(c+d)$$

A soma dos colchetes de (53-1) pode ser colocada na forma

$$-(B_1' + B_2' - B_3' + B_4') \frac{1}{2} (a+b)(c+d) = 0$$

Fica também claro, que a soma de qualquer número de colchetes da expressão (55-1) menor que quatro, é diferente de zero. Ou seja, provamos que a parcela da amplitude total representada em (53-1) está realmente na forma do lema matemá-

tico de I 1.

De maneira inteiramente análoga podemos considerar os gráficos formados acoplando o glúon de momento "e" a todas as linhas externas e ao propagador do seguinte gráfico básico:

A fração da amplitude que será calculada nestes gráficos refere-se aos seguintes colchetes de termos espaciais da amplitude: B_6 , B_7 , B_8 , B_9 e B_{10} (sempre com referência à amplitude escrita no apêndice dois). Novamente não consideraremos todos os termos de cada um destes conjuntos "B", mas agora somente os de segunda espécie caracterizados pelos produtos de vetores de polarização A.C.B.D. Neste caso é válida a segunda identidade da tabela da página quarenta e quatro, qual seja: $B_6^2 + B_7^2 - B_8^2 + B_9^2 = 0$ (O índice superior indica que selecionamos em cada conjunto "B" os termos acima mencionados). Trabalhando como fizemos para chegar à forma da $Amp^{(1)}$, podemos escrever diretamente:

$$\begin{aligned}
 Amp^{(2)} = & \frac{1}{a.c \ b.d} \left\{ \frac{A_6}{e.a} \left[a.c \ B_6^2 + \frac{1}{2} e.a \ B_6^2 + \frac{1}{2} e.a \ B_7^2 \right] + \frac{A_7}{e.c} \times \right. \\
 & \times \left[a.c \ B_7^2 + \frac{1}{2} e.c \ B_6^2 + \frac{1}{2} e.c \ B_7^2 \right] + \frac{-A_8}{e.b} \left[b.d \ (-B_8^2) + \frac{1}{2} e.b \ (-B_8^2) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} e.b \ B_9^2 \right] + \frac{A_9}{e.d} \left[b.d \ B_9^2 + \frac{1}{2} e.d \ (-B_8^2) + \frac{1}{2} e.d \ B_9^2 \right] \left. \right\} \\
 & (57-1)
 \end{aligned}$$

Pelas mesmas razões mostradas no caso da $Amp^{(1)}$, (53-1) esta outra parcela da amplitude também está nas condições do lema de I 1.

É da mesma maneira podemos organizar outras treze somas, cada uma contendo termos de segunda espécie caracterizados por dois particulares produtos de vetores de polarização. Ou seja, selecionamos e reorganizamos uma parte da amplitude de probabilidade de um processo de espalhamento glun-glun na forma de uma soma de quinze somas, associadas a cada uma das identidades das páginas quarenta e quatro e quarenta e cinco.

Devemos observar que a maneira como efetuamos, até agora, a seleção e organização de termos da amplitude, não

acarreta a repetição de nenhum termo. Examinando as identidades espaciais citadas, vemos, por exemplo, que os termos indicados pelo símbolo B_1 , aparecem cinco vezes, a saber nas identidades de números "um", "seis", "novê", "doze" e "quinze" (nesta última representados pelos termos $B_{11} - B_6$ e $B_5 - B_2$). Entretanto no B_1 da primeira identidade só estão presentes os termos de segunda espécie caracterizados pelos produtos $A.B.C.D$ (por isto usamos o símbolo B_1'); já o B_1 da sexta identidade contém os termos da forma $A.E.B.C$ (e usariamos a designação B_1'' se quizessemos representar o conjunto destes termos); o B_1 da nona identidade contém os termos $A.E.B.D$; o da décima segunda os termos $A.E.D.C$ e o da décima quinta os termos $B.E.D.C$. Vemos assim que não há nenhuma repetição de termos.

Por outro lado, as quinze parcelas até agora organizadas não contém todos os termos da amplitude e nem mesmo todos os termos de segunda espécie. Tomemos, para iniciar nossa análise, todos os termos de segunda espécie caracterizados pelos produtos de vetores de polarização $B.C.D.E$. Examinando a amplitude escrita no apêndice dois, vemos

que, além deste tipo de termo aparecer nos colchetes indicados por B_4, B_{11}, B_9, B_{15} que constituem a décima terceira soma de nossa organização, correspondente à décima terceira identidade da tabela (45-1), eles aparecem ainda nos colchetes B_1, B_5, B_8, B_{14} e B_3, B_6, B_{10}, B_{13} . Então da maneira como organizamos os termos até aqui, estes termos ainda não foram incluídos. Podemos verificar analogamente, que para qualquer combinação de produtos de vetores de polarização, das quinze possíveis, teremos a mesma situação, ou seja, alguns termos estão incluídos em uma das quinze somas já organizadas, mas além destes existem oito termos, de oito diferentes colchetes, que não estão incluídos em nenhuma das somas.

Voltemos então aos termos B.C D.E que ainda não estão colocados nas nossas quinze somas. Desses especificamente vamos nos concentrar agora naqueles que na expressão original da amplitude (apêndice dois) se encontram distribuídos pelos colchetes B_1, B_5, B_8, B_{14} . Na relação das identidades espaciais da tabela (45-1) vemos que existe uma

identidade envolvendo os termos de segunda espécie caracterizados pelo produto B.E D.C e que é: $B_1 + B_8 - B_5 - B_{14} = 0$.

Existe então na nova organização que estamos procedendo da amplitude, uma soma, nas condições do lema matemático de I 1, contendo termos de segunda espécie caracterizados pelos produtos B.E D.C. Esta soma é:

$$\begin{aligned} Amp^{(15)} = & \frac{1}{b.e d.c} \left\{ \frac{-A_5}{a.b} \left[b.e \left(-B_5^{15} \right) - \frac{1}{2} a.b B_5^{15} + \frac{1}{2} a.b B_1^{15} \right] + \right. \\ & + \frac{A_1}{a.e} \left[b.e B_1^{15} - \frac{1}{2} a.e B_5^{15} + \frac{1}{2} a.e B_1^{15} \right] + \frac{-A_{14}}{a.d} \left[d.c \left(-B_{14}^{15} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} a.d B_8^{15} - \frac{1}{2} a.d B_{14}^{15} \right] + \frac{A_8}{a.c} \left[d.c B_8^{15} + \frac{1}{2} a.c B_8^{15} - \frac{1}{2} a.c B_{14}^{15} \right] \right\} \quad \S (60-1) \\ & (60-1) \end{aligned}$$

Por outro lado podemos constatar que os termos de segunda espécie caracterizados pelos produtos B.C D.E e que na expressão original da amplitude se encontram nos colchetes B_1, B_5, B_8 e B_{14} (apêndice dois) são os seguintes: $4B.C D.E A.e c.d, -4B.C \times$

Nota: § (60-1) Obtivemos esta soma procedendo da mesma maneira que fizemos para obter a soma associada à identidade número um da tabela (45-1)

$\times D.E A.b c.d$, $4 B.C D.E A.c e.b$, $- 4 B.C D.E A.d e.b$. Escrevendo também as respectivas constantes de estrutura (que representamos pelas A_i na expressão compacta da amplitude original) e os produtos de momentos do denominador (que são os C_i da expressão compacta da amplitude) obtemos a seguinte soma:

$$A_1 \frac{4 B.C D.E A.e c.d}{a.e c.d} - A_5 \frac{4 B.C D.E A.b c.d}{a.b c.d} + A_8 \frac{4 B.C D.E A.c e.b}{a.c e.b} +$$

$$- A_{14} \frac{4 B.C D.E A.d e.b}{a.d e.b}$$

Simplificando esta soma pode ser escrita:

$$\frac{A_1}{a.e} 4 B.C D.E A.e + \frac{-A_5}{a.b} 4 B.C D.E A.b + \frac{A_8}{a.c} 4 B.C D.E A.c + \frac{-A_{14}}{a.d} 4 B.C D.E A.d$$

$$(61-1)$$

A soma (61-1) está nas condições do lema matemático de I 1.

De fato $\sum_{i=1}^4 A_i = 0$ pois $A_1 - A_5 + A_8 - A_{14} = 0$ é uma das iden-

tidades envolvendo produtos de constantes de estrutura (2b);

$\sum_{i=1}^4 C_i = 0$, pois $a.e + a.b + a.c + a.d = -a.a = 0$ por conservação de momento e realidade dos glúons; finalmente $\sum B_i = 0$ §(61-1)

Nota: §(61-1) Indicamos aqui por B_i os termos espaciais de (61-1).

pois $4 B.C.D.E A.(e+b+c+d) = -4 B.C.D.E A.a = 0$ por conservação de momento e transversalidade dos glúons. É imediato também que a soma de quaisquer subconjuntos destes termos, com menos elementos que quatro é diferente de zero, quer dizer:

$$\sum_{i=1}^n A_i \neq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n B_i \neq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n C_i \neq 0 \quad \text{se } n < 4$$

Assim sendo, estes termos de segunda espécie contendo os produtos B.C.D.E podem ser acrescentados à soma (60-1), sem alterar sua estrutura, isto é, sua propriedade de se encontrar nas condições do lema I 1. Estamos portanto acrescentando estes termos caracterizados pelos produtos B.C.D.E à soma própria dos termos B.E.C.D. Assim procedendo ficamos com:

$$\begin{aligned} \text{Amp}^{(15)} = & \frac{1}{b.e.c.d} \left[\frac{A_1}{a.e} \left(b.e B_1^{15} - \frac{1}{2} a.e B_5^{15} + \frac{1}{2} a.e B_1^{15} + 4 B.C.D.E A.e \times \right. \right. \\ & \times b.e.c.d) - \frac{A_5}{a.b} \left(-b.c B_5^{15} - \frac{1}{2} a.b B_5^{15} + \frac{1}{2} a.b B_1^{15} + 4 B.C.D.E A.b b.e.c.d) + \right. \\ & + \frac{A_8}{a.c} \left(d.c B_8^{15} + \frac{1}{2} a.c B_8^{15} - \frac{1}{2} a.c B_{14}^{15} + 4 B.C.D.E A.c b.e.c.d) - \frac{A_{14}}{a.d} \times \right. \\ & \left. \left. \times \left(-d.c B_{14}^{15} + \frac{1}{2} a.d B_8^{15} - \frac{1}{2} a.d B_{14}^{15} + 4 B.C.D.E A.d b.e.c.d) \right) \right] \quad (62-1) \end{aligned}$$

Da mesma forma os termos em B.C D.E que estão contidos nos colchetes B_3 , B_6 , B_{10} e B_{13} da amplitude original, podem ser acrescentados à soma parcial associada à identidade $B_{10} + B_{13} - B_3 - B_6 = 0$, que é a soma dos termos de segunda espécie caracterizados pelos produtos B.D.C.E. Podemos, de maneira análoga, constatar que o fato de acrescentar a esta soma, estes termos, não modifica a estrutura básica da soma, estrutura que a coloca nas condições do lema de I1.

Mostramos portanto como os termos de segunda espécie da forma B.C D.E que não estavam na soma associada à sua identidade própria (que é a décima terceira identidade da tabela (45-1)) puderam ser acrescentados a duas outras somas, a saber, a soma associada à décima quarta identidade (dos termos da forma B.D.C.E) e à décima quinta (dos termos da forma B.E.C.D). Desta maneira, estas três somas assim organizadas contêm todos os termos B.C D.E.

Ora, da mesma maneira como colocamos na nova organização da amplitude todos os termos de segunda espécie caracterizados pelos produtos de vetores de polarização B.C D.E,

podemos colocar todos os termos de segunda espécie caracterizados por qualquer produto de vetores de polarização. Se passarmos a analisar, por exemplo, os termos em $B.D.C.E$ que não estão contidos na sua "soma própria" (que é aquela associada à décima quarta identidade da tabela (45-1)), veremos que eles podem ser acrescentados as somas $B.C.D.E$ (que é a associada à décima terceira identidade) e $B.E.D.C$ (décima quinta identidade). O mesmo acontece com os termos $B.E \times D.C$; aqueles que não pertencem à sua soma própria, podem ser acrescentados as somas de $B.C.D.E$ e de $B.D.C.E$. Dado então um certo tipo de termo de segunda espécie, por exemplo os caracterizados pelo produto $A.B.C.D$, os outros termos de segunda espécie também caracterizados por este mesmo produto, mas que não estão distribuídos nos colchetes espaciais da amplitude original que constituem a identidade associada à sua soma própria (no caso a primeira identidade da tabela (45-1)) serão acrescentados as somas de $A.C.B.D$ e de $A.D.B.C$. Em outras palavras, são acrescentados somas de outros produtos de vetores de polarização, obtidos do inicial por permutação de letras. Em suma, acabamos de mostrar como é possível organizar todos os termos de segunda espécie

da amplitude, em quinze somas, todas elas nas condições do lema de I 1.

b) Termos de primeira espécie

Recordemos que estamos chamando de termos de primeira espécie, aqueles que contém um produto de vetores de polarização e três produtos de vetor de polarização por momento (por exemplo $A.B.C.a.D.e.E.b$). Como vimos, estes termos obedecem a todas identidades espaciais. Isto quer dizer que se tomarmos os termos de primeira espécie caracterizados por qualquer particular produto de vetores de polarização, estes termos satisfazem todas as identidades espaciais relacionadas na tabela (45-1).

Isto nos proporciona uma certa liberdade, e ao mesmo tempo nos obriga a uma certa arbitrariedade para organiza-los nas quinze somas nas condições do lema matemático de I 1. Não temos aqui, como tínhamos no caso dos termos de segunda espécie, um tipo de termo carac-

terizado por um certo particular produto de vetores de polarização, associado a uma determinada identidade e por isto mesmo se posicionando necessariamente em uma certa soma. Uma vez que para os termos de primeira espécie todas as identidades são válidas para qualquer tipo de termo, podemos localizar este termo em qualquer soma.

Antes de mostrar em maior detalhe como é possível proceder a esta organização, parece-nos interessante discutir o porque desta diferença entre termos de primeira e termos de segunda espécie. Uma revisão da expressão da amplitude do processo de interação fóton-pion, nos mostrará, que o que correspondia nesta expressão à parte espacial da expressão da amplitude da interação gluon-gluon, era um produto da forma $\epsilon.p_i$, isto é, do vetor de polarização do fóton pelo momento de um dos pions. Ora, os termos de segunda espécie contém também um produto e um único produto de vetor de polarização por momento (por exemplo $A.B C.D E.d a.c$), enquanto os termos de primeira espécie contém tres produtos de vetores de polarização por momentos (por exemplo $A.B C.a D.e E.b$). Assim quando tomamos

os termos de segunda espécie caracterizados por A.B.C.D dos gráficos obtidos acoplando a linha "e" a todas linhas externas e internas do gráfico , a linha "e" tem formalmente o papel do fóton na interação fóton-pion. No caso de um termo de primeira espécie, mesmo proveniente do mesmo gráfico, e construído da mesma maneira, a linha "e" já não tem a analogia formal com o fóton pois além de produtos do tipo E.a (ou seja vetores de polarização E por um dado momento) temos necessariamente, em cada um dos termos, dois outros produtos com dois outros vetores de polarização por momentos. Vemos portanto que, como consequência de sua estrutura, os termos de segunda espécie se ajustam de maneira mais natural na organização que se baseia na analogia com a interação fóton-pion. Isto não impede porém, que possamos organizar também os termos de primeira espécie nesta nova forma que estamos construindo para a amplitude; explica somente o maior grau de liberdade e a relativa arbitrariedade de nossos procedimentos ao fazê-lo.

Passemos agora a proceder a organização dos termos de primeira espécie. Consideremos os gráficos desenhados à pagina cinquenta, e as respectivas parcelas da amplitude associadas a cada gráfico. Temos:

$$Amp = \frac{A_1 B_1^{(1^o)}}{e.a.c.d} + \frac{A_2 B_2^{(1^o)}}{e.b.c.d} + \frac{A_5 B_5^{(1^o)}}{a.b.c.d} + \frac{A_3 B_3^{(1^o)}}{e.c.a.b} + \frac{A_4 B_4^{(1^o)}}{e.d.a.b}$$

O índice superior (primeiro) das letras B, indica que, dos termos espaciais dos conjuntos B_i da amplitude total (apêndice dois) tomamos todos os termos de primeira espécie. Como todos os termos de primeira espécie satisfazem todas as identidades espaciais, podemos trabalhar com esta parcela da amplitude, da mesma maneira como trabalhamos a correspondente parcela com os termos de segunda espécie caracterizados pelos produtos A.B.C.D, e chegar a uma expressão análoga a (53-1). A única diferença é que em lugar do índice superior "um", que indicava os termos da forma A.B.C.D, temos agora o índice superior "primeiro" que indica todos os termos de primeira espécie. Isto significa ainda que podemos tomar conjuntamente com os

termos de segunda espécie da forma A.B.C.D, todos os termos de primeira espécie envolvidos nos respectivos colchetes. Ou seja, podemos considerar associadas aos gráficos desenhados na página cinquenta, as seguintes parcelas da amplitude:

$$\frac{A_1 (B_1' + B_1^{(12)})}{e.a \ c.d} ; \frac{A_2 (B_2' + B_2^{(12)})}{e.b \ c.d} ; \frac{A_5 (B_5' + B_5^{(12)})}{a.b \ c.d} ; \frac{A_3 (B_3' + B_3^{(12)})}{e.c \ a.b} ; \frac{A_4 (B_4' + B_4^{(12)})}{e.d \ a.b}$$

Em seguida, tal como fizemos em (52-3), podemos substituir

$$\frac{A_5 (B_5' + B_5^{(12)})}{a.b \ c.d} \text{ por } \frac{1}{2} \frac{(A_1 + A_2)(B_1' + B_1^{(12)} + B_2' + B_2^{(12)})}{a.b \ c.d} + \frac{1}{2} \frac{A_3 - A_4}{a.b} \times$$

$$\times \frac{B_3' + B_3^{(12)} - B_4' - B_4^{(12)}}{c.d} \text{ e chegar a uma expressão análoga}$$

a (53-1) mas contendo agora também os termos de primeira espécie.

Mostramos então, que é possível colocar na primeira das quinze somas de nossa amplitude reorganizada, todos os termos de primeira espécie que aparecerem nos colchetes B_1, B_2, B_3 e B_4 subentendendo ainda, como mostramos, os termos do colchete B_5 da amplitude original. Da mesma maneira, e pelos mesmos motivos, podemos colo-

car nas outras somas, associadas as outras identidades da tabela (45-1), todos os termos de primeira espécie contidos nos colchetes B que constituem estas somas. Assim procedendo vamos obviamente reorganizar na nossa nova disposição da amplitude, todos os termos de primeira espécie. Vemos porém, que como cada símbolo B_i , com $i = 1, 2, \dots, 15$ representando um colchete de termos espaciais da amplitude original, comparece explicitamente em quatro identidades e subentendidamente em uma, estaremos desta maneira repetindo cinco vezes cada termo de primeira espécie. Por isto, para restituir à amplitude seu real valor, basta acrescentar o fator $\frac{1}{5}$ a todos os termos de primeira espécie. Esta é então uma maneira de colocar também os termos de primeira espécie na nossa nova expressão da amplitude, que fica assim inteiramente reorganizada em quinze somas, cada uma das quais na forma do lema matemático de I 1.

Porém os termos de primeira espécie, como consequência da maior liberdade que apresentam e que ana-

lisamos acima, podem ser organizados ainda de outra maneira. Notemos primeiramente que as três primeiras identidades da tabela (45-1) estão associadas a produtos de quatro vetores de polarização que excluem o vetor E. Este vetor vai estar multiplicado por um momento e tem, como vimos, para o caso destas parcelas da amplitude e para os termos de segunda espécie, o papel formal do fóton na interação fóton-pion. As três seguintes identidades estão associadas a termos de segunda espécie caracterizados por produtos de vetores de polarização que não contém a letra D. As três seguintes são de termos de segunda espécie com produtos de polarização que não contém o vetor C, e assim sucessivamente. Coloquemos então, nas três primeiras somas, associadas as três primeiras identidades, somente os termos de primeira espécie caracterizados pelos produtos, A.B, C.D, A.C, B.D, A.D e B.C. Com isto deixamos de colocar nestas três somas, os termos de primeira espécie caracterizados por E.A, E.B, E.C, E.D. Nas três seguintes somas, associadas as três

seguintes identidades da tabela (45-1) excluimos os termos D.A, D.B, D.C, D.E, e assim sucessivamente de acordo com a seguinte tabela:

Identidades e somas	Termos colocados	Termos excluídos
1, 2, 3	A.B, A.C, A.D, C.D, B.D, B.C	E.A, E.B, E.C, E.D
4, 5, 6	A.B, A.C, A.E, B.C, B.E, C.E	D.A, D.B, D.C, D.E
7, 8, 9	A.B, A.D, A.E, B.D, B.E, D.E	C.A, C.B, C.D, C.E
10, 11, 12	A.C, A.D, A.E, C.D, C.E, D.E	A.B, C.B, D.B, E.B
13, 14, 15	B.C, B.D, B.E, C.D, C.E, D.E	A.B, A.C, A.D, A.E

Esta tabela deixa claro que os termos de primeira espécie organizados desta maneira, não aparecer repetidos três vezes. É necessário portanto, acrescentar a eles o fator $\frac{1}{3}$. Esta outra organização que acabamos de mostrar, guarda maior analogia com a distribuição de termos de segunda espécie.

Com isto, organizando os termos de primeira espécie de uma ou de outra maneira, temos a amplitude de probabilidade do processo de espalhamento gluon-gluon, reorganizada na forma de uma soma de somas, cada uma das quais na forma do lema de I 1, ou seja, temos

a amplitude reorganizada na forma:

$$Amp = \sum_{j=1}^{15} \sum_{i=1}^4 \frac{A_i^j B_i^j}{C_i^j} \quad (73-1)$$

com:

$$\sum_{i=1}^4 A_i^j = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^4 B_i^j = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^4 C_i^j = 0 \quad ; \quad \text{para } \forall j ,$$

$$\sum_{i=1}^n A_i^j \neq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n B_i^j \neq 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n C_i^j \neq 0 \quad ; \quad \text{para } \forall j \text{ com } n < 4$$

I 6 Discussão

Tendo conseguido reorganizar a amplitude em uma soma de parcelas, cada uma das quais na forma do lema de §(73-1) I 1, sabemos, pois é o que nos garante o lema mencionado, que cada uma das quinze somas (índice j na expressão (73-1)) não admite fatorização. Levando em conta que cada uma das quinze somas contém um termo de segunda espécie diferente, e portanto, os termos espaciais (os B_i) das diferentes somas

Nota: §(73-1) Pode-se mostrar que a amplitude como um todo não pode ser colocada na forma do lema de I 1. (Fair Lucinda: tese de doutoramento)⁽⁷⁾

não se compõe, vemos que a reorganização da amplitude que procedemos vem corroborar a hipótese de "Goebel et al", da não fatorização. Estes autores verificaram, para alguns casos particulares de processos envolvendo cinco partículas, sendo uma um campo de gauge, que não há fatorização da amplitude. § (74-1)

Além disto, a reorganização da amplitude que procedemos, permite ainda uma interpretação física das identidades espaciais, correspondentes as identidades das constantes de estrutura, da amplitude do processo com cinco glúons. Consideremos para tanto, a expressão da primeira das quinze somas da amplitude reorganizada. Esta soma tem a forma da expressão (53-1). Comparando esta soma, que é uma parcela da amplitude da interação glúon-glúon, com a expressão (25-1) da interação fóton-píon, vemos que, formalmente, os produtos de constantes de estrutura $A_1, A_2, -A_3, A_4$, tem na expressão (53-1), o mesmo papel que as cargas Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 tem em (25-1). Dizemos formalmente, pois na verdade tratam-se de

Nota: § (74-1) Ver neste sentido o apêndice 3

grandezas de naturezas diversas. Por um lado Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4 são as cargas dos pions, e a identidade $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = 0$ exprime a conservação de carga. Já os produtos de constantes de estrutura A_1, A_2, A_3 e A_4 indicam, em conjunto com os correspondentes termos espaciais, operações entre vetores no espaço das cores e constam do termo da Lagrangiana que descreve a interação entre os gluons. Assim, embora não possamos identificar diretamente a identidade $A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 0$ com conservação de carga, podemos afirmar de uma forma mais genérica, que como a interação entre os gluons existe graças à carga de cor dos mesmos, e como esta carga se conserva, as identidades de constantes de estrutura, juntamente com as respectivas identidades espaciais, estão relacionadas também à conservação de carga dos gluons. § (75-1)

Nota: § (75-1) Tem dúvida, neste sentido genérico, as identidades relacionam-se, ou são devidas, a muitas outras propriedades das partículas e da amplitude. Mostramos, na nossa dissertação de mestrado, como a Identidade de Jacobi espacial generalizada pode ser deduzida da invariância de gauge da amplitude de espalhamento do processo de interação gluon-gluon envolvendo quatro partículas.

Prém o interesse maior da reorganização da amplitude que procedemos está no fato dela ter permitido encontrar uma forma que poderíamos considerar a "generalização natural" da amplitude de espalhamento gluon-gluon de um processo envolvendo quatro partículas. Ou seja, uma forma que guarda algumas propriedades da amplitude de quatro partículas e por isto mesmo vem elucidar a origem da identidade de Jacobi espacial generalizada que existia na-quele processo. Vejamos isto através de uma análise sintética do que foi feito.

Se para construirmos os diagramas do cálculo da amplitude de um processo de espalhamento de gluons envolvendo quatro partículas acrescentarmos ao vértice uma quarta partícula de momento d acoplada a cada uma das linhas obteremos:

resultando os seguintes gráficos, com as respectivas constantes de estrutura:

A soma dos produtos de constantes de estrutura de cada gráfico constitui a identidade de Jacobi, e a soma das correspondentes partes espaciais (os colchetes que designamos por B_i) a identidade de Jacobi espacial generalizada.

Se partirmos do vértice e, usando do mes-

mo procedimento, acoplarmos a partícula de momento "a" a cada uma das linhas obteremos os seguintes gráficos com as respectivas constantes de estrutura

Vemos que resultam os mesmos gráficos: $(1) = (3')$; $(2) = (2')$ $(3) = (1')$ e temos portanto novamente a identidade de Jacobi e a identidade de Jacobi espacial generalizada.

No caso porém de cinco partículas, se partirmos dos três gráficos de quatro partículas (a, b, c, d) e adotarmos o mesmo procedimento de acoplar a partícula de momento "e" a to-

das linhas externas e ao propagador, obteremos os seguintes gráficos com as respectivas constantes de estrutura:

Conjunto C

Partindo agora dos três gráficos de quatro partículas (b, c, d, e) e acoplando a partícula de momento "a" a cada uma das linhas externas e internas obteremos os seguintes gráficos e constantes de estrutura:

Conjunto C'

O conjunto C' pode ser também obtido de C por uma permutação cíclica das letras, quer dizer, fazendo "a" ir em "b", "b" em "c", "c" em "d", "d" em "e" e "e" em "a". Os conjuntos C e C' são coincidentes. § (79-1) Temos então no conjunto C' , todas as identidades que temos em C , tanto no que se refere as constantes de estrutura, como para as correspondentes identidades espaciais, que existem, como vimos, para todos os termos de primeira espécie e para alguns termos de segunda espécie. Entretanto, contrariamente ao que acontecia no caso de quatro partículas, quando uma permutação cíclica nos índices das constantes de estrutura, levava a identidade de Jacobi nela mesma, agora uma permutação cíclica em uma identidade parcial, leva esta identidade em outra. E mais, a correspondente identidade espacial também vai a uma outra, e passa a existir

Nota. § (79-1) Véis sinais de produtos de constantes de estrutura ficaram trocados quando efetuamos a permutação cíclica; esta troca é compensada por uma troca de sinal no correspondente termo espacial.

para outros termos de segunda espécie. Tomemos, por exemplo, em C a identidade: $A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 0$. Esta identidade tem uma correspondente identidade espacial, que é: $B_1 + B_2 - B_3 + B_4 = 0$ válida para os termos de segunda espécie com A.B.C.D, bem como para os termos com A.C.B.D e A.D.B.C que também estão nos colchetes B_1, B_2, B_3 e B_4 , e para todos os termos de primeira espécie. Substituindo A_1, A_2, A_3 e A_4 pelos produtos de constantes de estrutura que representam, temos:

$$f^{aes} f^{sbr} f^{rce} + f^{cds} f^{sar} f^{rbe} - f^{abs} f^{sdr} f^{rce} + f^{abs} f^{sdx} f^{rde} = 0 \quad (80-1)$$

Uma permutação cíclica nos índices leva à seguinte identidade em C':

$$f^{bas} f^{scr} f^{rde} + f^{des} f^{sbr} f^{rca} - f^{bcs} f^{ser} f^{rda} + f^{bcs} f^{sdr} f^{rea} = 0 \quad (80-2)$$

que é a identidade:

$$A'_4 + A'_9 + A'_{11} - A'_{15} = 0 \quad (80-3)$$

Examinando a relação das identidades espaciais das páginas

quarenta e quatro e quarenta e cinco, vemos que a identidade (80-3) tem por correspondente espacial a seguinte identidade: $B'_4 + B'_9 + B'_{11} - B'_{15} = 0$. Esta é satisfeita pelos termos de segunda espécie caracterizados pelos produtos de vetores de polarização B.C.D.E, bem como pelos termos em B.D.C.E e B.E.D.C e por todos os termos de primeira espécie. A analogia com o processo de interação fóton-pions pode explicar melhor esta mudança na identidade e nos termos de segunda espécie que a constituem. De resto, sob a ótica do procedimento que levou a esta mudança, trata-se de um resultado evidente: uma permutação cíclica nos termos de segunda espécie caracterizados por A.B.C.D leva a termos caracterizados por B.C.D.E.

Quando escrevemos o conjunto C de gráficos, o glúon "e" acoplado a todas as linhas tem o papel do fóton na interação fóton-pions. O gráfico básico no qual acrescentamos a linha "e" é: e os termos de segunda espécie que satisfazem as identidades espaciais, contêm os vetores de polarização A, B, C e D nas três possibilidades

quais sejam $A.B.C.D$, $A.C.B.D$ e $A.D.B.C$. Já quando consideramos a identidade correspondente no conjunto C ,

é o gluon "a" que acopla as linhas do gráfico básico

, e que faz o papel do fóton. E então os termos que satisfazem as identidades espaciais são os que contêm os vetores de polarização B, C, D e E nas combinações $B.C.D.E$, $B.D.C.E$ e $B.E.D.C$.

Em suma, no caso de quatro partículas, qualquer que seja a forma com que se construa os gráficos, temos não somente um mesmo e único conjunto de diagramas como também uma mesma e única identidade de constantes de estrutura e sua correspondente identidade espacial. No caso de cinco partículas temos diversas identidades espaciais parecias, que por permutação de partículas dão origem a outras identidades espaciais parciais.

O cálculo da amplitude de probabilidade de um processo de espalhamento gluon-gluon envolvendo cinco partículas, e a reorganização desta amplitude que efetuamos, nos permitiu assim entender a origem da identidade de Jacobi espacial generalizada que existe em um processo envolven-

do quatro partículas: esta identidade nada mais é, que a síntese em uma única identidade, de uma série de identidades espaciais parciais, que existem no caso de um processo com cinco partículas.

Capítulo II

A identidade de Jacobi estudada na aproximação de um loop

Neste capítulo vamos analisar um processo de interação envolvendo quatro partículas, três das quais descritas por campos escalares (por exemplo três mésons e um fóton). E vamos considerar agora o problema não na aproximação árvore, mas tomando também diagramas que contém um loop. Vamos investigar, nesta ordem mais alta de aproximação, a existência da identidade de Jacobi generalizada, ou seja vamos ver se as contribuições para os B_i , provenientes de gráficos contendo um loop, também dão a soma nula.

II 1 Gráficos com uma linha interna sem carga

Sejam os mésons de momentos p_1, p_2 e p_3 e cargas Q_1, Q_2 e Q_3 . Ainda sem acoplar o fóton, temos um diagrama básico para a interação dos mésons que é:

Por conservação de carga $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ e então necessariamente uma das linhas internas não transporta carga. De fato poderíamos, por exemplo, considerar como distribuição de carga nas linhas internas, a seguinte distribuição:

Eu poderíamos imaginar esta outra distribuição de carga nas linhas internas:

Novamente uma linha interna não transporta carga e isto acontecerá sempre, qualquer que seja a distribuição de carga nas linhas internas.

Temos cinco maneiras diferentes de levar em conta a interação fônica nesta estrutura diagramática básica, que consiste em acoplar o fóton a cada uma das linhas externas, que são três, e aos dois propagadores que transportam carga. Obteremos assim cinco gráficos de Feynman que descrevem o processo nesta ordem de aproximação. Tomemos:

Temos a seguinte contribuição proveniente do vértice onde há o acoplamento com o fóton, já levando em conta conservação de carga ($Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$) e a condição de transversalidade do fóton: ($p_4 \cdot \epsilon = 0$)

$$- Q_3 2 (k + p_2) \cdot \epsilon \quad (87-1)$$

A contribuição do diagrama como um todo envolve integração nos momentos internos. Tendo em vista (87-1), obtemos:

$$- 2 Q_3 \left[p_2 \cdot \epsilon I^{(0)} + \epsilon_\mu I_\mu^{(1)} \right] \quad (87-2)$$

onde:

$$I^{(0)} = \int \frac{d_4 k}{(2\pi)^4 k^2 (k + p_2)^2 (k - p_1 - p_3)^2 (k - p_1)^2} \quad (87-3)$$

$$I_\mu^{(1)} = \int \frac{d_4 k k_\mu}{(2\pi)^4 k^2 (k + p_2)^2 (k - p_1)^2 (k - p_1 - p_3)^2} \quad (87-4)$$

Usando o método de regularização dimensional para efetuar as integrais obtemos:⁽⁶⁾

$$I^{(0)} = \frac{-2i \Gamma(2+\epsilon) \Gamma^2(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon} \epsilon \Gamma(1-2\epsilon)} H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) \quad (87-5)$$

$$I^{(1)} = \frac{-\epsilon \Gamma(1+\epsilon) \Gamma^2(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon} \epsilon \Gamma(1-2\epsilon)} \left[(1+\epsilon) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) p_1 + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) p_2 - \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) p_3 \right] \quad (88-1)$$

Onde:

$$s_{12} = -2 p_1 \cdot p_2$$

$$s_{13} = -2 p_1 \cdot p_3 \quad (88-2)$$

$$s_{23} = -2 p_2 \cdot p_3$$

e H é a função que satisfaz a equação diferencial:

$$\left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} + z_3 \frac{\partial}{\partial z_3} \right) H(n, z_1, z_2, z_3) = -(n+\epsilon) H(n, z_1, z_2, z_3)$$

e que se exprime em termos de funções hipergeométricas da seguinte maneira:

$$H(n, z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{(\epsilon+n-2)(\epsilon+n-1)z_1 z_2} \left[(z_1 + z_2 + z_3)^{2-n-\epsilon} \times \right. \\ \times {}_2F_1 \left(1, 2-n-\epsilon, 3-n-\epsilon; \frac{-z_3(z_1+z_2+z_3)}{z_1 z_2} \right) - z_1^{2-n-\epsilon} {}_2F_1 \left(1, 2-n-\epsilon, 3-n+ \right. \\ \left. -\epsilon; -\frac{z_3}{z_2} \right) - z_2^{2-n-\epsilon} {}_2F_1 \left(1, 2-n-\epsilon, 3-n-\epsilon; -\frac{z_3}{z_1} \right) \quad (88-3)$$

Levando em conta os valores de $I^{(0)}$ (87-5) e $I^{(1)}$ (88-1) a expressão (87-2), para a contribuição deste gráfico fica:

$$2 Q_3 \frac{i \Gamma(1+\xi) \Gamma^2(1-\xi)}{(4\pi)^{2-\xi} \Gamma(1-2\xi) \xi} \left[2 p_2 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) + \right. \\ \left. + p_1 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) + p_2 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) + \right. \\ \left. - p_3 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) \right] \quad (89-1)$$

Observemos que, no primeiro termo entre colchetes, o fator $(1+\xi)$ veio da decomposição: $\Gamma(2+\xi) = (1+\xi) \Gamma(1+\xi)$

Consideremos em seguida o gráfico:

A contribuição deste diagrama é:

$$-2 Q_1 \left(p_2 \cdot \epsilon I^{(0)} + \xi_\mu I_\mu^{(1)} \right) \quad (89-2)$$

Onde agora:

$$I^{(0)} = \int \frac{d_4 k}{(2\pi)^4 k^2 (k+p_2)^2 (k-p_1-p_3)^2 (k-p_3)^2} \quad (89-3)$$

$$(90-1)$$

Dará a contribuição:

$$Q_3 \frac{-i \Gamma(1+\xi) \Gamma^2(1-\xi)}{(4\pi)^{2-\xi} \xi^2 \Gamma(1-2\xi)} (s_{12})^{-1-\xi} \frac{p_3 \cdot \epsilon}{p_3 \cdot p_4} \quad (90-2)$$

$$Q_3 \frac{-i \Gamma(1+\xi) \Gamma^2(1-\xi)}{(4\pi)^{2-\xi} \xi^2 \Gamma(1-2\xi)} (s_{12})^{-1-\xi} \frac{p_3 \cdot \epsilon}{p_3 \cdot p_4} \quad (90-2)$$

- 90 -

ternas. Estes vão dar contribuições que podem ser obtidas de (90-2), substituindo o momento p_3 por p_1 e p_2 respectivamente.

Tomando as contribuições de todos os gráficos obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Amp} = & \frac{-i 2 \Gamma(1+\epsilon) \Gamma^2(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon} \Gamma(1-2\epsilon) \epsilon} \left[\frac{Q_3}{2\epsilon} \frac{p_3 \cdot \epsilon}{p_3 \cdot p_4} (s_{12})^{-1-\epsilon} + \frac{Q_2}{2\epsilon} \frac{p_2 \cdot \epsilon}{p_2 \cdot p_4} \times \right. \\ & \times (s_{13})^{-1-\epsilon} + \frac{Q_1}{2\epsilon} \frac{p_1 \cdot \epsilon}{p_1 \cdot p_4} (s_{23})^{-1-\epsilon} - 2 Q_3 p_2 \cdot \epsilon (1+\epsilon) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) + \\ & - Q_3 p_1 \cdot \epsilon (1+\epsilon) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) - Q_3 p_2 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) + \\ & + Q_3 p_3 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) - Q_1 2 p_2 \cdot \epsilon (1+\epsilon) H(2, s_{23}, s_{13}, s_{12}) + \\ & - Q_1 p_3 \cdot \epsilon (1+\epsilon) H(2, s_{23}, s_{13}, s_{12}) - Q_1 p_2 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{23}, s_{13}, s_{12}) + \\ & \left. + Q_1 p_1 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{23}, s_{13}, s_{12}) \right] \quad (91-1) \end{aligned}$$

Usando as igualdades (88-2) esta expressão pode ser colocada na forma:

$$\text{Amp} = \sum_{i=1}^3 \frac{A_i B_i}{C_i}$$

onde A_i são as cargas Q_i ; $C_1 = p_1 \cdot p_4$; $C_2 = p_2 \cdot p_4$; $C_3 = p_3 \cdot p_4$

$$\begin{aligned}
A_{mp} = & \frac{-i \Gamma(1+\xi) \Gamma^2(1+\xi)}{(4\pi)^{2-\xi} \Gamma(1-2\xi) \xi} \left\{ \frac{Q_1}{p_1 \cdot p_4} \left[2 p_2 \cdot \epsilon (1+\xi) s_{23} H(2, s_{23}, \right. \right. \\
& s_{13}, s_{12}) + p_3 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{23}, s_{13}, s_{12}) s_{23} + p_2 \cdot \epsilon s_{23} \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{23}, \\
& s_{13}, s_{12}) - p_1 \cdot \epsilon s_{23} \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{23}, s_{13}, s_{12}) + \frac{1}{\xi} p_1 \cdot \epsilon (s_{23})^{-1-\xi} \Big] + \\
& + \frac{Q_2}{p_2 \cdot p_4} \left[\frac{1}{\xi} p_2 \cdot \epsilon (s_{13})^{-1-\xi} \right] + \frac{Q_3}{p_3 \cdot p_4} \left[2 p_2 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) \times \right. \\
& \times s_{12} + p_1 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) s_{12} + p_2 \cdot \epsilon s_{12} \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) + \\
& \left. \left. - p_3 \cdot \epsilon s_{12} \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) + \frac{1}{\xi} p_3 \cdot \epsilon (s_{12})^{-1-\xi} \right] \right\} \quad (92-1)
\end{aligned}$$

Observemos que o valor da amplitude é obtido fazendo o limite da expressão (92-1) para $\xi \rightarrow 0$

Verifiquemos agora se existe a identidade de Jacobi espacial. Ou seja verifiquemos se $\sum_{i=1}^3 B_i = 0$, onde os B_i são as expressões entre colchetes. Notemos, antes de mais nada que como: $\epsilon \cdot p_1 + \epsilon \cdot p_2 + \epsilon \cdot p_3 = -\epsilon \cdot p_4 = 0$, decorre que $\epsilon \cdot p_3 = -(\epsilon \cdot p_1 + \epsilon \cdot p_2)$. Substituindo então $\epsilon \cdot p_3$ por $\epsilon \cdot p_1$ e $\epsilon \cdot p_2$, a soma $\sum_{i=1}^3 B_i$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 B_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} & \left[2 p_2 \cdot \epsilon (1 + \epsilon) s_{23} H(2, s_{23}, s_{13}, s_{12}) - (p_1 \cdot \epsilon + p_2 \cdot \epsilon)(1 + \epsilon) \times \right. \\
& \times H(2, s_{23}, s_{13}, s_{12}) s_{23} + p_2 \cdot \epsilon s_{23} \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{23}, s_{13}, s_{12}) - p_1 \cdot \epsilon s_{23} \times \\
& \times \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{23}, s_{13}, s_{12}) + \frac{1}{\epsilon} p_1 \cdot \epsilon (s_{23})^{-1-\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} p_2 \cdot \epsilon (s_{13})^{-1-\epsilon} + 2 p_2 \cdot \epsilon \times \\
& \times (1 + \epsilon) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) s_{12} + p_1 \cdot \epsilon (1 + \epsilon) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) s_{12} + p_2 \cdot \epsilon \times \\
& \times s_{12} \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) + (p_1 \cdot \epsilon + p_2 \cdot \epsilon) s_{12} \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) + \\
& \left. - \frac{1}{\epsilon} (p_1 \cdot \epsilon + p_2 \cdot \epsilon) s_{12}^{-1-\epsilon} \right] \quad (93-1)
\end{aligned}$$

Os produtos escalares $\epsilon \cdot p_1$ e $\epsilon \cdot p_2$ são linearmente independentes. Assim se colocarmos a soma $\sum_{i=1}^3 B_i$ na forma: $\epsilon \cdot p_1 S_1 + \epsilon \cdot p_2 S_2$, e se $\sum_{i=1}^3 B_i = 0$, devemos ter necessariamente $S_1 = 0$ e $S_2 = 0$.

Temos a seguinte expressão para S_1 :

$$\begin{aligned}
S_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} & \left[(1 + \epsilon) H(2, s_{23}, s_{13}, s_{12}) s_{23} - s_{23} \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{23}, s_{13}, s_{12}) \right. \\
& + \frac{1}{\epsilon} (s_{23})^{-1-\epsilon} + (1 + \epsilon) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) s_{12} + s_{12} \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{12}, s_{13}, s_{23}) \\
& \left. - \frac{1}{\epsilon} (s_{12})^{-1-\epsilon} \right] \quad (93-2)
\end{aligned}$$

A função H obedece à seguinte identidade:

$$\frac{\partial}{\partial a} H(1, a, b, c) = (1 + \xi) \frac{b}{c} H(2, a, b, c) - \frac{1}{\xi} \frac{b^{-1-\xi} - a^{-1-\xi}}{c} \quad (94-1)$$

Portanto vale:

$$\frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{13}, s_{12}, s_{23}) = (1 + \xi) \frac{s_{12}}{s_{23}} H(2, s_{13}, s_{12}, s_{23}) - \frac{1}{\xi} \frac{(s_{12})^{-1-\xi} - (s_{13})^{-1-\xi}}{s_{23}} \quad (94-2)$$

e analogamente:

$$\frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{13}, s_{23}, s_{12}) = (1 + \xi) \frac{s_{23}}{s_{12}} H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) - \frac{1}{\xi} \frac{(s_{23})^{-1-\xi} - (s_{13})^{-1-\xi}}{s_{12}} \quad (94-3)$$

Examinando a expressão (88-1) (valor de H em termos das funções hipergeométricas) verificamos que como no nosso caso $z_1 + z_2 + z_3 = s_{12} + s_{13} + s_{23} = 0$, o primeiro termo de H em (88-1) é nulo para todas as funções H que comparecem as nossas expressões, e além disto são idênticas quando permutamos a segunda com a terceira variáveis (no caso de (94-3) quando permutamos s_{13} com s_{23}). Levando em conta este fato, e as identidades (94-2) e (94-3) a soma (93-2) fica:

$$\begin{aligned} S_1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} & \left\{ (1 + \xi) H(2, s_{23}, s_{13}, s_{12}) s_{23} - (1 + \xi) \frac{(s_{23})^2}{s_{12}} H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) + \right. \\ & + \frac{1}{\xi} \frac{(s_{23})^{-1-\xi} - (s_{13})^{-1-\xi}}{s_{12}} s_{23} + \frac{1}{\xi} (s_{23})^{-1-\xi} + (1 + \xi) H(2, s_{12}, s_{13}, s_{23}) s_{12} + (1 + \xi) \times \\ & \times \frac{(s_{12})^2}{s_{23}} H(2, s_{13}, s_{12}, s_{23}) - \frac{1}{\xi} \frac{(s_{12})^{-1-\xi} - (s_{13})^{-1-\xi}}{s_{23}} s_{12} - \frac{1}{\xi} (s_{12})^{-1-\xi} \end{aligned} \quad (94-4)$$

De (88-1) tiramos:

$$H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) = \frac{1}{\xi(\xi+1)s_{13}s_{23}} \left[- (s_{13})^{-\xi} {}_2F_1\left(1, -\xi, 1-\xi; -\frac{s_{12}}{s_{23}}\right) + \right. \\ \left. - (s_{23})^{-\xi} {}_2F_1\left(1, -\xi, 1-\xi; -\frac{s_{12}}{s_{13}}\right) \right]$$

E então:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) = \frac{-2}{s_{13}s_{23}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi(\xi+1)} \quad (95-1)$$

e analogamente

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} H(2, s_{13}, s_{12}, s_{23}) = \frac{-2}{s_{13}s_{12}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi(\xi+1)} \quad (95-2)$$

Levando em conta (95-1) e (95-2) a soma S_1 fica:

$$S_1 = \frac{2s_{23}}{s_{13}s_{23}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1+\xi}{\xi(1+\xi)} + \frac{2(s_{23})^2}{s_{12}s_{13}s_{23}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1+\xi}{\xi(1+\xi)} + \\ + \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \left[(s_{23})^{-1-\xi} - (s_{13})^{-1-\xi} \right] \frac{s_{23}}{s_{12}} + \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} (s_{23})^{-1-\xi} - \frac{2s_{12}}{s_{13}s_{12}} \times \\ \times \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1+\xi}{\xi(1+\xi)} - \frac{2(s_{12})^2}{s_{23}s_{12}s_{13}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1+\xi}{\xi(1+\xi)} - \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \left[(s_{12})^{-1-\xi} - (s_{13})^{-1-\xi} \right] \frac{s_{12}}{s_{23}} + \\ - \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} (s_{12})^{-1-\xi}$$

De onde então:

$$S_1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \left[\frac{2 \sigma_{23}}{\sigma_{13} \sigma_{23}} + \frac{2 (\sigma_{23})^2}{\sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{13}} + \frac{1}{\sigma_{12}} - \frac{\sigma_{23}}{\sigma_{12} \sigma_{13}} + \frac{1}{\sigma_{23}} - \frac{2 \sigma_{12}}{\sigma_{13} \sigma_{12}} + \right. \\ \left. - \frac{2 (\sigma_{12})^2}{\sigma_{12} \sigma_{13} \sigma_{23}} - \frac{1}{\sigma_{23}} + \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{13} \sigma_{23}} - \frac{1}{\sigma_{12}} \right]$$

Finalmente, simplificando a expressão entre colchetes obtemos:

$$S_1 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \left(\frac{(\sigma_{23})^2 - (\sigma_{12})^2}{\sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{13}} \right)$$

Como o limite em questão é infinito, e como S_1 ser nulo é a condição necessária para que $\sum_{i=1}^3 B_i$ seja também nula, concluímos que não existe a identidade de Jacobi espacial

II 2 Conjunto simetrizado de gráficos

A soma $\sum_{i=1}^3 B_i$ que calculamos refere-se a um conjunto de gráficos nos quais é sempre a linha interna oposta à linha externa de momento p_2 , que carrega carga nula.

Vamos calcular neste tópico a soma $\sum_{i=1}^3 B_i$ da expressão simetrizada da amplitude, isto é, aquela que levará em conta além dos diagramas já computados, também aqueles em que a linha interna sem carga é oposta à linha externa de mo-

mento p_1 e aqueles em que ela é oposta à de momento p_3 . Temos então mais dez gráficos cujas amplitudes são calculadas de maneira completamente análoga aos cinco gráficos anteriores. A análise da soma $\sum_{i=1}^3 B_i$ obtida desta amplitude global sinse- trizada, nos permitirá resolver a questão da existência da identidade de Jacobi espacial neste processo.

Com a linha interna, que não conduz carga, oposta à linha externa de momento p_1 , temos os seguintes gráficos e as correspondentes frações da amplitude:

$$-2 Q_3 \left(p_1 \cdot \epsilon I^{(0)} + \epsilon_\mu I_\mu^{(1)} \right) \quad (97-1)$$

$$-2 Q_2 \left(p_1 \cdot \epsilon I^{(0)} + \epsilon_\mu I_\mu^{(1)} \right) \quad (97-2)$$

As integrais da expressão (97-1) são:

$$I^{(0)} = \int \frac{d_4 k}{(2\pi)^4 k^2 (k+p_1)^2 (k-p_2-p_3)^2 (k-p_2)^2} \quad (98-1)$$

$$I_\mu^{(1)} = \int \frac{d_4 k k_\mu}{(2\pi)^4 k^2 (k+p_1)^2 (k-p_2-p_3)^2 (k-p_2)^2} \quad (98-2)$$

E as integrais que estão indicadas em (97-2) são:

$$I^{(0)} = \int \frac{d_4 k}{(2\pi)^4 k^2 (k+p_1)^2 (k-p_2-p_3)^2 (k-p_3)^2} \quad (98-3)$$

$$I_\mu^{(1)} = \int \frac{d_4 k k_\mu}{(2\pi)^4 k^2 (k+p_1)^2 (k-p_2-p_3)^2 (k-p_3)^2} \quad (98-4)$$

Além destes gráficos temos mais três obtidos pelo acoplamento do fóton a cada uma das linhas externas. Vão estes os seguintes, com as correspondentes parcelas da amplitude, já efetuadas as integrações:

$$\frac{-i \Gamma(1+\xi) \Gamma^2(1-\xi)}{(4\pi)^{2-\xi} \xi^2 \Gamma(1-2\xi)} \left[\frac{Q_1}{p_1 \cdot p_4} (s_{23})^{-1-\xi} p_1 \cdot \epsilon + \frac{Q_2}{p_2 \cdot p_4} (s_{13})^{-1-\xi} p_2 \cdot \epsilon + \frac{Q_3}{p_3 \cdot p_4} (s_{12})^{-1-\xi} p_3 \cdot \epsilon \right] \quad (99-1)$$

Analisando as integrais (98-1) e (98-2) vemos que elas podem ser obtidas das correspondentes (87-3) e (87-4) por permutação dos momentos p_1 com p_2 . Então levando em conta as expressões das integrais (87-3) e (87-4) podemos escrever o resultado das integrais (98-1) e (98-2) que é:

$$I^{(0)} = \frac{-2i \Gamma(2+\xi) \Gamma^2(1-\xi)}{(4\pi)^{2-\xi} \xi \Gamma(1-2\xi)} H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) \quad (99-2)$$

$$I^{(1)} = \frac{-i \Gamma(1+\xi) \Gamma^2(1-\xi)}{(4\pi)^{2-\xi} \xi \Gamma(1-2\xi)} \left[(1+\xi) H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) p_2 + p_1 \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) - p_3 \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) \right] \quad (99-3)$$

Daqui resulta a seguinte expressão para a parcela (97-1) da amplitude:

$$2 Q_3 \frac{i \Gamma(1+\xi) \Gamma^2(1-\xi)}{(4\pi)^{2-\xi} \Gamma(1-2\xi) \xi} \left[2 p_1 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) + p_2 \cdot \epsilon (1+\xi) \times \right. \\ \left. \times H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) + p_1 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) - p_3 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) \right]$$

De maneira análoga a parcela (97-2) da amplitude é:

$$2 Q_2 \frac{1}{(4\pi)^{2-\epsilon}} \frac{\Gamma(1+\epsilon) \Gamma^2(1-\epsilon)}{\epsilon \Gamma(1-2\epsilon)} \left[2 p_1 \cdot \epsilon (1+\epsilon) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) + p_3 \cdot \epsilon (1+\epsilon) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) + p_1 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{13}, s_{23}, s_{12}) - p_2 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{13}, s_{23}, s_{12}) \right]$$

Para obtermos a amplitude global simetrizada, devemos considerar ainda os diagramas em que a linha interna, que não conduz carga, é oposta à linha externa de momento p_3 . Antes disto porém, vamos completar o cálculo da parcela da amplitude correspondente aos últimos cinco diagramas, e calcular a soma $\sum_{i=1}^3 B_i$ obtida desta parcela da amplitude, tal como fizemos para os primeiros cinco diagramas. Ao final vamos obter três expressões já simplificadas de somatórias do tipo $\sum_{i=1}^3 B_i$, cada uma correspondendo a um conjunto de cinco diagramas, caracterizados por diferentes posições da linha interna que não conduz carga.

Para cada uma das somatórias consideraremos o conjunto dos termos S_i que são os coeficientes de $\epsilon \cdot p_i$ na soma em questão. Vamos nos utilizar então de um índice complementar, para indicar de que soma parcial estamos retirando os termos S_i . Assim o S_i que calculamos acima indicaremos por $S_i^{(1)}$. E vamos agora calcular $S_i^{(2)}$ obtido desta so-

matéria, ou seja, o conjunto de termos da soma $\sum_{i=1}^3 B_i$, correspondentes a este segundo conjunto de cinco diagramas, que são os coeficientes de $\epsilon.p_1$. É a soma global, obtida da soma das três somatórias parciais $\sum_{i=1}^3 B_i$ for nula, então os coeficientes nesta soma de $\epsilon.p_1$ e $\epsilon.p_2$ devem também ser nulos pois $\epsilon.p_1$ e $\epsilon.p_2$ são linearmente independentes. Isto significa que $S_1^{(1)} + S_1^{(2)} + S_1^{(3)} = 0$, é a condição necessária para que a soma global dos B_i seja nula. Procurando não agigantar nossas expressões, calcularemos separadamente $S_1^{(2)}$ e $S_1^{(3)}$ para só então calcularmos a soma $\sum_{i=1}^3 S_1^{(i)}$

Reunindo as parcelas já calculadas deste segundo conjunto de cinco diagramas temos:

$$\begin{aligned} Amp = & \frac{-i 2 \Gamma(1+\epsilon) \Gamma^2(1-\epsilon)}{(4\pi)^{2-\epsilon} \Gamma(1-2\epsilon) \epsilon} \left[\frac{Q_3 p_3 \cdot \epsilon}{2\epsilon p_3 \cdot p_4} (s_{12})^{-1-\epsilon} + \frac{Q_2 p_2 \cdot \epsilon}{2\epsilon p_2 \cdot p_4} (s_{13})^{-1-\epsilon} + \right. \\ & + \frac{Q_1 p_1 \cdot \epsilon}{2\epsilon p_1 \cdot p_4} (s_{23})^{-1-\epsilon} - Q_3 2 p_1 \cdot \epsilon (1+\epsilon) H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) - Q_3 p_2 \cdot \epsilon (1+\epsilon) \times \\ & \times H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) - Q_3 p_1 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) + Q_3 p_3 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) + \\ & - Q_2 2 p_1 \cdot \epsilon (1+\epsilon) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) - Q_2 p_3 \cdot \epsilon (1+\epsilon) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) - Q_2 p_1 \cdot \epsilon \times \\ & \left. \times \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{13}, s_{23}, s_{12}) + Q_2 p_2 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{13}, s_{23}, s_{12}) \right] \end{aligned}$$

Esta expressão pode ser colocada na forma $\sum_{i=1}^3 \frac{A_i B_i}{C_i}$, tal como fizemos com a parcela da amplitude correspondente aos cinco primeiros gráficos. Assim fazendo obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Amp} = & \frac{-i \Gamma(1+\xi) \Gamma^2(1-\xi)}{(4\pi)^{2-\xi} \xi \Gamma(1-2\xi)} \left\{ \frac{Q_1}{p_1 \cdot p_4} \left[\frac{1}{\xi} p_1 \cdot \epsilon (s_{23})^{-1-\xi} \right] + \frac{Q_2}{p_2 \cdot p_4} \left[2 p_1 \cdot \epsilon \times \right. \right. \\ & \times (1+\xi) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) s_{13} + p_3 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) s_{13} + p_1 \cdot \epsilon s_{13} \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{13}, s_{23}, s_{12}) - p_2 \cdot \epsilon s_{13} \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{13}, s_{23}, s_{12}) + p_2 \cdot \epsilon \frac{1}{\xi} (s_{13})^{-1-\xi} \left. \right] + \\ & + \frac{Q_3}{p_3 \cdot p_4} \left[2 p_1 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) s_{12} + p_2 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) s_{12} + \right. \\ & + p_1 \cdot \epsilon s_{12} \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) - p_3 \cdot \epsilon s_{12} \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) + \frac{1}{\xi} \times \\ & \times p_3 \cdot \epsilon (s_{12})^{-1-\xi} \left. \right] \left. \right\} \end{aligned}$$

A somatória parcial $\sum_{i=1}^3 B_i$, correspondente a esta parcela da amplitude, quando colocada em termos de $\epsilon \cdot p_1$ e $\epsilon \cdot p_2$, é:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 B_i = & \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\xi} p_1 \cdot \epsilon (s_{23})^{-1-\xi} + 2 p_1 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) s_{13} + \right. \\ & - (p_1 \cdot \epsilon + p_2 \cdot \epsilon) (1+\xi) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) s_{13} + p_1 \cdot \epsilon \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{13}, s_{23}, s_{12}) s_{13} + \\ & - p_2 \cdot \epsilon s_{13} \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{13}, s_{23}, s_{12}) + p_2 \cdot \epsilon \frac{1}{\xi} (s_{13})^{-1-\xi} + 2 p_1 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{12}, s_{23}, \\ & s_{13}) s_{12} + p_2 \cdot \epsilon (1+\xi) H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) s_{12} + p_1 \cdot \epsilon s_{12} \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) + \end{aligned}$$

$$+ (p_1 \cdot \epsilon + p_2 \cdot \epsilon) \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) s_{12} - \frac{1}{\epsilon} (p_1 \cdot \epsilon + p_2 \cdot \epsilon) (s_{12})^{-1-\epsilon} \Big] \quad (103-1)$$

A expressão (103-1) é da forma:

$$\sum_{i=1}^3 B_i = S_1^{(2)} \epsilon \cdot p_1 + S_2^{(2)} \epsilon \cdot p_2$$

onde, portanto, $S_1^{(2)}$ é dado por:

$$S_1^{(2)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\epsilon} (s_{23})^{-1-\epsilon} + 2(1+\epsilon) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) s_{13} - (1+\epsilon) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) s_{13} + s_{13} \frac{\partial}{\partial s_{13}} H(1, s_{13}, s_{23}, s_{12}) + 2(1+\epsilon) H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) s_{12} + s_{12} \frac{\partial}{\partial s_{12}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) + s_{12} \frac{\partial}{\partial s_{23}} H(1, s_{12}, s_{23}, s_{13}) s_{12} - \frac{1}{\epsilon} (s_{12})^{-1-\epsilon} \right]$$

Expressão esta que se transforma, como fizemos no cálculo de $S_1^{(1)}$ em:

$$S_1^{(2)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\epsilon} (s_{23})^{-1-\epsilon} + 2(1+\epsilon) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) s_{13} - (1+\epsilon) H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) s_{13} + (1+\epsilon) \frac{s_{23} s_{13}}{s_{12}} H(2, s_{13}, s_{23}, s_{12}) - \frac{1}{\epsilon} \frac{s_{13}}{s_{12}} \left[(s_{23})^{-1-\epsilon} - (s_{13})^{-1-\epsilon} \right] + 2(1+\epsilon) H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) s_{12} + (1+\epsilon) \frac{s_{23} s_{12}}{s_{13}} H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) - \frac{1}{\epsilon} \frac{s_{12}}{s_{13}} \times \left[(s_{23})^{-1-\epsilon} - (s_{12})^{-1-\epsilon} \right] + (1+\epsilon) \frac{(s_{12})^2}{s_{13}} H(2, s_{12}, s_{23}, s_{13}) - \frac{1}{\epsilon} \frac{s_{12}}{s_{13}} \left[(s_{12})^{-1-\epsilon} - (s_{23})^{-1-\epsilon} \right] - \frac{1}{\epsilon} (s_{12})^{-1-\epsilon} \right\}$$

Usando as igualdades (95-1) e (95-2) sobre o limite das funções H para $\epsilon \rightarrow 0$ obtemos após as simplificações:

$$S_1^{(2)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left[-\frac{5}{s_{23}} - \frac{2}{s_{12}} - \frac{2}{s_{13}} - \frac{s_{13}}{s_{12} s_{23}} - \frac{2 s_{12}}{s_{13} s_{23}} \right]$$

Para calcularmos $S_1^{(3)}$ devemos obter a amplitude do último conjunto de cinco diagramas, que é aquele em que a linha interna sem carga é a oposta à linha de momento p_3 . Temos os seguintes diagramas e suas correspondentes parcelas da amplitude:

$$-2 Q_1 \left[p_3 \cdot \epsilon I^{(0)} + \epsilon_\mu I_\mu^{(1)} \right] \quad (104-1)$$

$$-2 Q_2 \left[p_3 \cdot \epsilon I^{(0)} + \epsilon_\mu I_\mu^{(1)} \right] \quad (104-2)$$

É mais os tres gráficos obtidos acoplando o fóton as linhas externas e que são idênticos aos anteriormente calculados.

O cálculo da parcela da amplitude correspondente a este último conjunto de gráficos, bem como da soma $\sum_{i=1}^3 B_i$ ligada a esta parcela e dos termos $S_i^{(3)}$, é feito de maneira análoga à mostrada para o conjunto anterior de gráficos. O resultado das integrações é novamente obtido por permutações convenientes dos momentos. § (105-1)

Nota: § (105-1) Colocamos nesta tabela o esquema de permutações referente aos seis diagramas em que o fóton está acoplado as linhas internas.

Momento da linha externa oposta à linha interna sem carga	Permutações	Funções H	Cargas	Momentos das linhas internas (denominadores dos integrandos)
p_2		$H(s_{12}, s_{13}, s_{23})$	$-2Q_3$	$k^2 (k+p_2)^2 (k-p_1-p_3)^2 (k-p_1)^2$
	$H(s_{12}, s_{23}, s_{13})$	$-2Q_1$	$k^2 (k+p_2)^2 (k-p_1-p_3)^2 (k-p_3)^2$
p_1		$H(s_{12}, s_{23}, s_{13})$	$-2Q_3$	$k^2 (k+p_1)^2 (k-p_2-p_3)^2 (k-p_2)^2$
	$H(s_{13}, s_{23}, s_{12})$	$-2Q_2$	$k^2 (k+p_1)^2 (k-p_2-p_3)^2 (k-p_3)^2$
p_3		$H(s_{23}, s_{12}, s_{13})$	$-2Q_1$	$k^2 (k+p_3)^2 (k-p_1-p_2)^2 (k-p_2)^2$
	$H(s_{13}, s_{12}, s_{23})$	$-2Q_2$	$k^2 (k+p_3)^2 (k-p_1-p_2)^2 (k-p_1)^2$

Vamos escrever diretamente a soma $S_1^{(3)}$

$$S_1^{(3)} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \left[\frac{5}{\delta_{12}} + \frac{2}{\delta_{13}} + \frac{2}{\delta_{23}} + \frac{2 \delta_{23}}{\delta_{13} \delta_{12}} + \frac{\delta_{13}}{\delta_{23} \delta_{12}} \right] \quad (106-1)$$

Reunindo nossos resultados podemos escrever:

$$S_1^{(1)} + S_1^{(2)} + S_1^{(3)} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \left[\frac{\delta_{23}}{\delta_{12} \delta_{13}} - \frac{\delta_{12}}{\delta_{13} \delta_{23}} - \frac{5}{\delta_{23}} - \frac{2}{\delta_{12}} - \frac{2}{\delta_{13}} + \right. \\ \left. - \frac{\delta_{13}}{\delta_{12} \delta_{23}} - \frac{2 \delta_{12}}{\delta_{13} \delta_{23}} + \frac{5}{\delta_{12}} + \frac{2}{\delta_{13}} + \frac{2}{\delta_{23}} + \frac{2 \delta_{23}}{\delta_{13} \delta_{12}} + \frac{\delta_{13}}{\delta_{23} \delta_{12}} \right]$$

Simplificando obtemos:

$$\sum_{i=1}^3 S_1^{(i)} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \frac{3}{\delta_{12} \delta_{13} \delta_{23}} \left[\delta_{23} (\delta_{23} + \delta_{13}) - \delta_{12} (\delta_{12} + \delta_{13}) \right] \quad (106-2)$$

Claramente a parte entre colchetes de (106-2) não é nula. (Para certificar-se disto, basta tomar um caso particular não nulo, por exemplo $p_2 = p_3$)

O limite em questão é portanto infinito, e a soma do conjunto de termos $\sum_{i=1}^3 S_1^{(i)}$, que são os coeficientes de $\epsilon.p_1$ na soma $\sum_{i=1}^3 B_i$ obtida da amplitude global simetrizada, não é nula, não sendo também nula, consequentemente, a soma $\sum_{i=1}^3 B_i$. Então a amplitude de probabilidade de um processo envolvendo três campos escalares, calculada na aproximação de um loop, não apresenta a identidade de Jacobi espacial.

II 3 Conclusões

Os zeros na seção de choque encontrados em processos envolvendo quatro partículas, quando pelo menos uma delas é um campo de gauge, (Brown, Michaelian, Tahdev, Samuel) foram explicados pela fatorização da amplitude (Goebel, Halzen e Leveille). Michaelian por sua vez mostrou, através de um lema matemático, como esta fatorização é devida a uma identidade, que foi batizada de identidade de Jacobi espacial generalizada e cuja demonstração ou significado físico não eram conhecidos.

Procurando entender melhor a natureza desta identidade e sua ligação com a fatorização da amplitude, examinamos inicialmente um processo de interação gluon-gluon envolvendo cinco partículas. Tinhamos, para nos guiar, uma generalização do lema matemático de Michaelian (I 1).

Entretanto a amplitude como um todo não pode ser colocada nas condições da generalização do lema de Michaelian. Por isto a questão da fatorização foi enfocada sob o prisma de uma verificação por exaustão, que está indicada no apêndice

três. Concluímos que a amplitude de um processo de interação glúon-glúon envolvendo cinco partículas não se fatoriza.

Constatamos ainda que não existe, para este processo a identidade de Jacobi espacial generalizada. Verificamos porém a existência de inúmeras identidades espaciais parciais, obedecidas, cada uma delas por certos termos da amplitude. Esta última constatação, aliada a uma analogia que fizemos com um processo de interação de quatro píons e um fóton, nos permitiu reorganizar a amplitude em uma soma de quinze parcelas, cada uma das quais nas condições do lema matemático de I1. E esta reorganização, por sua vez, tornou mais clara a natureza da identidade de Jacobi espacial que existe no caso de um processo de quatro partículas, e que vem a ser a conjuinação em uma única identidade, das diversas identidades espaciais parciais que existem na amplitude do processo de cinco partículas.

Somos levados a concluir que esta identidade, que no caso de um processo de quatro partículas implica a fatorização da amplitude e consequentemente os zeros da seção de choque, tem uma natureza menos fundamental: ela só existe neste particular processo. A verificação, no segundo capítulo, da não existência da identidade de Jacobi espacial em um processo com três nêutrons e um fóton, veio corroborar esta conclusão. (na aproximação de um loop)

Apêndice 1

A prova da incompatibilidade da fatorização com as hipóteses básicas, para qualquer número maior que três, é feita de maneira inteiramente análoga à que fizemos para $n \leq 3$. Partindo das equações (18-1) e (18-2) e assumindo $n = 4$, chegamos as seguintes equações:

$$x_1 y_1 = \frac{1}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \left(\frac{C_2 + C_3 + C_4}{C_1} \right) \quad (109-1)$$

$$x_1 y_2 = \frac{-1}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \quad (109-2)$$

$$x_3 y_1 = \frac{-1}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \quad (109-3)$$

$$x_3 y_2 = \frac{-1}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \quad (109-4)$$

Dividindo (109-1) por (109-2) e (109-3) por (109-4) obtemos:

$$\frac{y_1}{y_2} = - \frac{C_2 + C_3 + C_4}{C_1}$$

$$\frac{y_1}{y_2} = 1$$

Comparando as duas últimas igualdades chegamos à:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0$$

contrariando a hipótese inicial.

Assim, para n inteiro qualquer, maior ou igual a três, podemos construir, deduzidas de (18-1) e (18-2) as seguintes equações:

$$x_1 y_1 = \frac{\sum_{i=2}^n C_i}{\sum_{i=1}^n C_i} \quad (110-1)$$

$$x_1 y_2 = \frac{-1}{\sum_{i=1}^n C_i} \quad (110-2)$$

$$x_3 y_1 = \frac{-1}{\sum_{i=1}^n C_i} \quad (110-3)$$

$$x_3 y_2 = \frac{-1}{\sum_{i=1}^n C_i} \quad (110-4)$$

Este sistema nos leva à conclusão de que $\sum_{i=1}^n C_i = 0$, o que é contraditório com as hipóteses assumidas.

Apêndice 2

Transcrevemos as expressões dos B_i e dos $C_i^{S(III)}$ da fórmula (34-1). Os A_i estão listados na página trinta e quatro.

$$\begin{aligned} C_1 &= a.e.c.d ; C_2 = c.d.b.e ; C_3 = a.b.c.e ; C_4 = a.b.d.e ; C_5 = a.b.c.d ; \\ C_6 &= b.d.a.e ; C_7 = c.e.b.d ; C_8 = c.a.b.e ; C_9 = c.a.d.e ; C_{10} = c.a.b.d ; \\ C_{11} &= b.c.a.e ; C_{12} = b.c.d.e ; C_{13} = a.d.c.e ; C_{14} = b.e.a.d ; C_{15} = b.c.a.d ; \end{aligned}$$

B_1

$$\begin{aligned} &-8 A.E.B.a.C.d.D.e + 8 A.E.B.a.C.e.D.c + 8 A.E.B.e.C.d.D.a - 8 A.E.B.e.C.a.D.c + \\ &-8 A.B.E.a.C.d.D.b + 8 A.B.E.a.C.b.D.c + 8 A.C.E.a.B.a.D.c + 8 A.C.E.a.B.e.D.c + \\ &-8 A.D.E.a.B.a.C.d - 8 A.D.E.a.B.e.C.d + 8 E.B.A.e.C.d.D.b - 8 E.B.A.e.C.b.D.c + \\ &-8 E.C.A.e.B.a.D.c - 8 E.C.A.e.B.e.D.c + 8 E.D.A.e.B.a.C.d + 8 E.D.A.e.B.e.C.d + \\ &+8 B.C.A.e.E.b.D.c - 8 B.C.A.b.E.a.D.c - 8 B.D.A.e.E.b.C.d + 8 B.D.A.b.E.a.C.d + \\ &+8 C.D.A.e.E.d.B.c - 8 C.D.A.d.E.a.B.c + 8 C.D.A.c.E.a.B.d - 8 C.D.A.e.E.c.B.d + \\ &+4 A.E.B.C.D.c.a.b - 4 A.E.B.C.D.c.e.b - 4 A.E.B.D.C.d.a.b + 4 A.E.B.D.C.d.e.b + \\ &+4 A.E.D.C.B.a.d.e - 4 A.E.D.C.B.a.e.c + 4 A.E.D.C.B.e.a.c - 4 A.E.D.C.B.e.a.d + \\ &+2 A.E.D.C.B.d.a.b - 2 A.E.D.C.B.d.e.b + 2 A.E.D.C.B.c.e.b - 2 A.E.D.C.B.c.a.b + \\ &+4 E.B.D.C.A.e.b.c - 4 E.B.D.C.A.e.b.d + 4 A.B.D.C.E.a.d.b - 4 A.B.D.C.E.a.b.c + \\ &+4 E.B.A.D.C.d.e.a + 2 E.B.D.C.A.c.e.a - 2 E.B.C.D.A.d.e.a - 4 E.B.A.C.D.c.e.a + \\ &-4 E.D.A.B.C.d.e.a - 2 A.B.D.C.E.c.e.a + 2 A.B.D.C.E.d.e.a + 4 A.B.E.C.D.c.e.a + \\ &+4 E.D.B.C.A.e.c.d + 2 A.E.B.C.D.a.c.d - 2 A.E.B.C.D.e.c.d - 4 D.A.B.C.E.a.c.d + \\ &-4 C.E.B.D.A.e.c.d - 2 A.E.B.D.C.a.c.d + 2 A.E.B.D.C.e.c.d + 4 C.A.B.D.E.a.c.d \end{aligned}$$

Nota: S(III): cada um dos denominadores C_i contém um fator quatro

B₂

$$\begin{aligned}
& -8CDA.cBeEd + 8CDA.cB.dE.b + 8CDA.dBeE.c - 8CDA.dB.cE.b + \\
& -8CAD.cBeE.a + 8CAD.cB.aE.b + 8CBD.cA.cE.b + 8CBD.cA.dE.b + \\
& -8CED.cA.cBe - 8CED.cA.dBe + 8DAC.dBeE.a - 8DAC.dB.aE.b + \\
& -8DBC.dA.cE.b - 8DBC.dA.dE.b + 8DEC.dA.cBe + 8DEC.dA.dBe + \\
& + 8ABC.dDaE.b - 8ABC.aD.cE.b - 8AEC.dDaBe + 8AEC.aD.cBe + \\
& + 8BEC.dDeA.b - 8BEC.eD.cA.b + 8BEC.bD.cA.e - 8BEC.dDbA.e + \\
& + 4CDA.BE.bca - 4CDA.BE.bda - 4CDA.EBe.ca + 4CDA.EBe.da + \\
& + 4CDE.BA.ced - 4CDE.BA.cdb + 4CDE.BA.dcb - 4CDE.BA.dce + \\
& + 2CDE.BA.eca - 2CDE.BA.eda + 2CDE.BA.bda - 2CDE.BA.bca + \\
& + 4DAE.BC.dab - 4DAE.BC.dae + 4CAE.BD.cea - 4CAE.BD.cab + \\
& + 4DA.CEBe.dc + 2DAB.EC.bdc - 2DAB.EC.e dc - 4DAC.BE.bdc + \\
& - 4DEC.ABe.dc - 2CAE.BD.bdc + 2CAE.BDe.dc + 4CAD.BE.bdc + \\
& + 4DEAB.Cdbe + 2CDA.BE.cbe - 2CDA.BE.dbe - 4CEAB.Dcbe + \\
& - 4BDA.EC.dbe - 2CDA.EB.cbe + 2CDA.EB.dbe + 4BCA.ED.cbe
\end{aligned}$$

B₃

$$\begin{aligned}
& -8ABDa.CeE.b + 8ABDa.CbE.c + 8ABD.bCeE.a - 8ABD.bCaE.c + \\
& -8ADBa.CeE.d + 8ADBa.CdE.c + 8ACBa.DaE.c + 8ACBa.DbE.c + \\
& -8AEBa.DaCe - 8AEBa.DbCe + 8BDAb.CeE.d - 8BDAb.CdE.c + \\
& -8BCAb.DaE.c - 8BCAb.DbE.c + 8BEAb.DaCe + 8BEAb.DbCe + \\
& + 8DCAb.BdE.c - 8DCAd.BaE.c - 8DEAb.BdCe + 8DEAd.BaCe + \\
& + 8CEAb.BeDc - 8CEA.eBaDc + 8CEA.cBaDe - 8CEAb.BcDe + \\
& + 4ABDC.E.cad - 4ABDC.E.cbd - 4ABDE.C.ead + 4ABDE.C.ebd + \\
& + 4ABEC.Daeb - 4ABEC.Da.b.c + 4ABEC.D.bac - 4ABEC.D.ba.e + \\
& + 2ABEC.De.ad - 2ABEC.De.bd + 2ABEC.Dc.bd - 2ABEC.Dc.ad + \\
& + 4BDEC.A.bdc - 4BDEC.A.bde + 4ADE.CBaed - 4ADE.CBa.dce + \\
& - 4ADB.EC.eab - 2ADE.CBc.ab + 2ADCE.Beab + 4ADB.CE.cab + \\
& + 4AEB.DCeab + 2BDEC.Ac.ab - 2BDEC.A.eab - 4BDAC.Ec.ab + \\
& - 4BCDE.A.bec - 2ABDE.Ca.ec + 2ABDE.Cb.ec + 4CADE.Ba.ec + \\
& + 4EBDC.A.bec + 2ABDC.Ea.ec - 2ABDC.Eb.ec - 4EADC.Ba.ec
\end{aligned}$$

B₄

$$\begin{aligned}
& -8A.B.C.a.D.e.E.b + 8A.B.C.a.D.b.E.d + 8A.B.C.b.D.e.E.a - 8A.B.C.b.D.a.E.d + \\
& -8A.C.B.a.D.e.E.c + 8A.C.B.a.D.c.E.d + 8A.D.B.a.C.a.E.d + 8A.D.B.a.C.b.E.d + \\
& -8A.E.B.a.C.a.D.e - 8A.E.B.a.C.b.D.e + 8B.C.A.b.D.e.E.c - 8B.C.A.b.D.c.E.d + \\
& -8B.D.A.b.C.a.E.d - 8B.D.A.b.C.b.E.d + 8B.E.A.b.C.a.D.e + 8B.E.A.b.C.b.D.e + \\
& +8C.D.A.b.B.c.E.d - 8C.D.A.c.B.a.E.d - 8C.E.A.b.B.c.D.e + 8C.E.A.c.B.a.D.e + \\
& +8D.E.A.b.B.e.C.d - 8D.E.A.e.B.a.C.d + 8D.E.A.d.B.a.C.e - 8D.E.A.b.B.d.C.e + \\
& +4A.B.C.D.E.d.a.c - 4A.B.C.D.E.d.b.c - 4A.B.C.E.D.e.a.c + 4A.B.C.E.D.e.b.c + \\
& +4A.B.E.D.C.a.e.b - 4A.B.E.D.C.a.b.d + 4A.B.E.D.C.b.a.d - 4A.B.E.D.C.b.a.e + \\
& +2A.B.E.D.C.e.a.c - 2A.B.E.D.C.e.b.c + 2A.B.E.D.C.d.b.c - 2A.B.E.D.C.d.a.c + \\
& +4B.C.E.D.A.b.c.d - 4B.C.E.D.A.b.c.e + 4A.C.E.D.B.a.e.c - 4A.C.E.D.B.a.c.d + \\
& -4A.C.B.E.D.e.a.b - 2A.C.E.D.B.d.a.b + 2A.C.D.E.B.e.a.b + 4A.C.B.D.E.d.a.b + \\
& +4A.E.B.C.D.e.a.b + 2B.C.E.D.A.d.a.b - 2B.C.E.D.A.e.a.b - 4B.C.A.D.E.d.a.b + \\
& +4B.E.C.D.A.b.d.e + 2A.B.C.D.E.a.d.e - 2A.B.C.D.E.b.d.e - 4E.A.C.D.B.a.d.e + \\
& -4D.B.C.E.A.b.d.e - 2A.B.C.E.D.a.d.e + 2A.B.C.E.D.b.d.e + 4D.A.C.E.B.a.d.e
\end{aligned}$$

B₅

$$\begin{aligned}
& -8A.B.E.a.C.d.D.b + 8A.B.E.a.C.b.D.c + 8A.B.E.b.C.d.D.a - 8A.B.E.b.C.a.D.c + \\
& -8A.E.B.a.C.d.D.e + 8A.E.B.a.C.e.D.c + 8A.C.B.a.E.a.D.c + 8A.C.B.a.E.b.D.c + \\
& -8A.D.B.a.E.a.C.d - 8A.D.B.a.E.b.C.d + 8B.E.A.b.C.d.D.e - 8B.E.A.b.C.e.D.c + \\
& -8B.C.A.b.E.a.D.c - 8B.C.A.b.E.b.D.c + 8B.D.A.b.E.a.C.d + 8B.D.A.b.E.b.C.d + \\
& +8E.C.A.b.B.e.D.c - 8E.C.A.e.B.a.D.c - 8E.D.A.b.B.e.C.d + 8E.D.A.e.B.a.C.d + \\
& +8C.D.A.b.B.d.E.c - 8C.D.A.d.B.a.E.c + 8C.D.A.c.B.a.E.d - 8C.D.A.b.B.c.E.d + \\
& +4A.B.E.C.D.c.a.e - 4A.B.E.C.D.c.b.c - 4A.B.E.D.C.d.a.e + 4A.B.E.D.C.d.b.e + \\
& +4A.B.D.C.E.a.d.b - 4A.B.D.C.E.a.b.c + 4A.B.D.C.E.b.a.c - 4A.B.D.C.E.b.a.d + \\
& +2A.B.D.C.E.d.a.e - 2A.B.D.C.E.d.b.e + 2A.B.D.C.E.c.b.e - 2A.B.D.C.E.c.a.e + \\
& +4B.E.D.C.A.b.e.c - 4B.E.D.C.A.b.e.d + 4A.E.D.C.B.a.d.e - 4A.E.D.C.B.a.e.c + \\
& -4A.E.B.D.C.d.a.b - 2A.E.D.C.B.c.a.b + 2A.E.C.D.B.d.a.b + 4A.E.B.C.D.c.a.b + \\
& +4A.D.B.E.C.d.a.b + 2B.E.D.C.A.c.a.b - 2B.E.D.C.A.d.a.b - 4B.E.A.C.D.c.a.b + \\
& +4B.D.E.C.A.b.c.d + 2A.B.E.C.D.a.c.d - 2A.B.E.C.D.b.c.d - 4D.A.E.C.B.a.c.d + \\
& -4C.B.E.D.A.b.c.d - 2A.B.E.D.C.a.c.d + 2A.B.E.D.C.b.c.d + 4C.A.E.D.B.a.c.d
\end{aligned}$$

B₆

-8 B.D.C.b A.e E.d + 8 B.D.C.b A.d E.a + 8 B.D.C.d A.e E.b - 8 B.D.C.d A.b E.a +
 -8 B.C D.b A.e E.c + 8 B.C D.b A.c E.a + 8 B.A D.b C.b E.a + 8 B.A D.b C.d E.a +
 -8 B.E D.b C.b A.e - 8 B.E D.b C.d A.e + 8 D.C B.d A.e E.c - 8 D.C B.d A.c E.a +
 -8 D.A B.d C.b E.a - 8 D.A B.d C.d E.a + 8 D.E B.d C.b A.e + 8 D.E B.d C.d A.e +
 + 8 C.A B.d D.c E.a - 8 C.A B.c D.b E.a - 8 C.E B.d D.c A.e + 8 C.E B.c D.b A.e +
 + 8 A.E B.d D.e C.a - 8 A.E B.e D.b C.a + 8 A.E B.a D.b C.e - 8 A.E B.d D.a C.e +
 + 4 B.D C.A E.a b.c - 4 B.D C.A E.a d.c - 4 B.D C.E A.e b.c + 4 B.D C.E A.e d.c +
 + 4 B.D E.A C.b e.d - 4 B.D E.A C.b d.a + 4 B.D E.A C.d b.a - 4 B.D E.A C.d b.e +
 + 2 B.D E.A C.e b.c - 2 B.D E.A C.e d.c + 2 B.D E.A C.a d.c - 2 B.D E.A C.a b.c +
 + 4 D.C E.A B.d c.a - 4 D.C E.A B.d c.e + 4 B.C E.A D.b e.c - 4 B.C E.A D.b c.a +
 + 4 D.C B.E A.e d.b + 2 D.C A.E B.a d.b - 2 D.C A.E B.e d.b - 4 D.C B.A E.a d.b +
 - 4 D.E B.C A.e d.b - 2 B.C E.A D.a d.b + 2 B.C E.A D.e d.b + 4 B.C D.A E.a d.b +
 + 4 D.E C.A B.d a.e + 2 B.D C.A E.b a.e - 2 B.D C.A E.d a.e - 4 B.E C.A D.b a.e +
 - 4 A.D C.E B.d a.e - 2 B.D C.E A.b a.e + 2 B.D C.E A.d a.e + 4 A.B C.E D.b a.e

B₇

-8 C.E A.c B.d D.e + 8 C.E A.c B.e D.b + 8 C.E A.e B.d D.c - 8 C.E A.e B.c D.b +
 -8 C.A E.c B.d D.a + 8 C.A E.c B.a D.b + 8 C.B E.c A.c D.b + 8 C.B E.c A.e D.b +
 -8 C.D E.c A.c B.d - 8 C.D E.c A.e B.d + 8 E.A C.e B.d D.a - 8 E.A C.e B.a D.b +
 -8 E.B C.e A.c D.b - 8 E.B C.e A.e D.b + 8 E.D C.e A.c B.d + 8 E.D C.e A.e B.d +
 + 8 A.B C.e E.a D.b - 8 A.B C.a E.c D.b - 8 A.D C.e E.a B.d + 8 A.D C.a E.c B.d +
 + 8 B.D C.e E.d A.b - 8 B.D C.d E.c A.b + 8 B.D C.b E.c A.d - 8 B.D C.e E.b A.d +
 + 4 C.E A.B D.b c.a - 4 C.E A.B D.b e.a - 4 C.E A.D B.d c.a + 4 C.E A.D B.d e.a +
 + 4 C.E D.B A.c d.e - 4 C.E D.B A.c e.b + 4 C.E D.B A.e c.b - 4 C.E D.B A.e c.d +
 + 2 C.E D.B A.d c.a - 2 C.E D.B A.d e.a + 2 C.E D.B A.b e.a - 2 C.E D.B A.b c.a +
 + 4 E.A D.B C.e a.b - 4 E.A D.B C.e a.d + 4 C.A D.B E.c d.a - 4 C.A D.B E.c a.b +
 + 4 E.A C.D B.d e.c + 2 E.A B.D C.b e.c - 2 E.A B.D C.d e.c - 4 E.A C.B D.b e.c +
 - 4 E.D C.A B.d e.c - 2 C.A D.B E.b e.c + 2 C.A D.B E.d e.c + 4 C.A E.B D.b e.c +
 + 4 E.D A.B C.e b.d + 2 C.E A.B D.c b.d - 2 C.E A.B D.e b.d - 4 C.D A.B E.c b.d +
 - 4 B.E A.D C.e b.d - 2 C.E A.D B.c b.d + 2 C.E A.D B.e b.d + 4 B.C A.D E.c b.d

B_8

$$\begin{aligned}
 & -8 C.A.D.c B.e E.a + 8 C.A.D.c B.a E.b + 8 C.A.D.a B.e E.c - 8 C.A.D.a B.c E.b + \\
 & -8 C.D.A.c B.e E.d + 8 C.D.A.c B.d E.b + 8 C.B.A.c D.c E.b + 8 C.B.A.c D.a E.b + \\
 & -8 C.E.A.c D.c B.e - 8 C.E.A.c D.a B.e + 8 A.D.C.a B.e E.d - 8 A.D.C.a B.d E.b + \\
 & -8 A.B.C.a D.c E.b - 8 A.B.C.a D.a E.b + 8 A.E.C.a D.c B.e + 8 A.E.C.a D.a B.e + \\
 & + 8 D.B.C.a A.d E.b - 8 D.B.C.d A.c E.b - 8 D.E.C.a A.d B.e + 8 D.E.C.d A.c B.e + \\
 & + 8 B.E.C.a A.e D.b - 8 B.E.C.e A.c D.b + 8 B.E.C.b A.c D.e - 8 B.E.C.a A.b D.e + \\
 & + 4 C.A.D.B E.b c.d - 4 C.A.D.B E.b a.d - 4 C.A.D.E B.e c.d + 4 C.A.D.E B.e a.d + \\
 & + 4 C.A.E.B D.c e.a - 4 C.A.E.B D.c a.b + 4 C.A.E.B D.a c.b - 4 C.A.E.B D.a c.e + \\
 & + 2 C.A.E.B D.e c.d - 2 C.A.E.B D.e a.d + 2 C.A.E.B D.b a.d - 2 C.A.E.B D.b c.d + \\
 & + 4 A.D.E.B C.a d.b - 4 A.D.E.B C.a d.e + 4 C.D.E.B A.c e.d - 4 C.D.E.B A.c d.b + \\
 & - 4 C.D.A.E B.e c.a - 2 C.D.E.B A.b c.a + 2 C.D.B.E A.e c.a + 4 C.D.A.B E.b c.a + \\
 & + 4 C.E.A.D B.e c.a + 2 A.D.E.B C.b c.a - 2 A.D.E.B C.e c.a - 4 A.D.C.B E.b c.a + \\
 & + 4 A.B.D.E C.a e.b - 2 C.A.D.E B.c e.b + 2 C.A.D.E B.a e.b + 4 B.C.D.E A.c e.b + \\
 & + 4 E.A.D.B C.a e.b + 2 C.A.D.B E.c e.b - 2 C.A.D.B E.a e.b - 4 E.C.D.B A.c e.b
 \end{aligned}$$

B_9

$$\begin{aligned}
 & -8 C.A.B.c D.e E.a + 8 C.A.B.c D.a E.d + 8 C.A.B.a D.e E.c - 8 C.A.B.a D.c E.d + \\
 & -8 C.B.A.c D.e E.b + 8 C.B.A.c D.b E.d + 8 C.D.A.c B.c E.d + 8 C.D.A.c B.a E.d + \\
 & -8 C.E.A.c B.c D.e - 8 C.E.A.c B.a D.e + 8 A.B.C.a D.e E.b - 8 A.B.C.a D.b E.d + \\
 & -8 A.D.C.a B.c E.d - 8 A.D.C.a B.a E.d + 8 A.E.C.a B.c D.e + 8 A.E.C.a B.a D.e + \\
 & + 8 B.D.C.a A.b E.d - 8 B.D.C.b A.c E.d - 8 B.E.C.a A.b D.e + 8 B.E.C.b A.c D.e + \\
 & + 8 D.E.C.a A.e B.d - 8 D.E.C.e A.c B.d + 8 D.E.C.d A.c B.e - 8 D.E.C.a A.d B.e + \\
 & + 4 C.A.B.D E.d c.b - 4 C.A.B.D E.d a.b - 4 C.A.B.E D.e c.b + 4 C.A.B.E D.e a.b + \\
 & + 4 C.A.E.D B.c e.a - 4 C.A.E.D B.c a.d + 4 C.A.E.D B.a c.d - 4 C.A.E.D B.a c.e + \\
 & + 2 C.A.E.D B.e c.b - 2 C.A.E.D B.e a.b + 2 C.A.E.D B.d a.b - 2 C.A.E.D B.d c.b + \\
 & + 4 A.B.E.D C.a b.d - 4 A.B.E.D C.a b.e + 4 C.B.E.D A.c e.b - 4 C.B.E.D A.c b.d + \\
 & - 4 C.B.A.E D.e c.a - 2 C.B.E.D A.d c.a + 2 C.B.D.E A.e c.a + 4 C.B.A.D E.d c.a + \\
 & + 4 C.E.A.B D.e c.a + 2 A.B.E.D C.d c.a - 2 A.B.E.D C.e c.a - 4 A.B.C.D E.d c.a + \\
 & + 4 A.E.B.D C.a d.e + 2 C.A.B.D E.c d.e - 2 C.A.B.D E.a d.e - 4 E.C.B.D A.c d.e + \\
 & - 4 D.A.B.E C.a d.e - 2 C.A.B.E D.c d.e + 2 C.A.B.E D.a d.e + 4 D.C.B.E A.c d.e
 \end{aligned}$$

B_{10}

$$\begin{aligned}
 & -8 C A E . c B . d D a + 8 C A E . c B . a D . b + 8 C A E . a B . d D . c - 8 C A E . a B . c D . b + \\
 & -8 C E A . c B . d D e + 8 C E A . c B . e D . b + 8 C B A . c E . c D . b + 8 C B A . c E . a D . b + \\
 & -8 C D A . c E . c B . d - 8 C D A . c E . a B . d + 8 A E C . a B . d D e - 8 A E C . a B . e D . b + \\
 & -8 A B C . a E . c D . b - 8 A B C . a E . a D . b + 8 A D C . a E . c B . d + 8 A D C . a E . a B . d + \\
 & + 8 E B C . a A . e D . b - 8 E B C . e A . c D . b - 8 E D C . a A . e B . d + 8 E D C . e A . c B . d + \\
 & + 8 B D C . a A . d E . b - 8 B D C . d A . c E . b + 8 B D C . b A . c E . d - 8 B D C . a A . b E . d + \\
 & + 4 C A E . B D . b c e - 4 C A E . B D . b a e - 4 C A E . D B . d c e + 4 C A E . D B . d a e + \\
 & + 4 C A D . B E . c d a - 4 C A D . B E . c a b + 4 C A D . B E . a c b - 4 C A D . B E . a c d + \\
 & + 2 C A D . B E . d c e - 2 C A D . B E . d a e + 2 C A D . B E . b a e - 2 C A D . B E . b c e + \\
 & + 4 A E D . B C . a e b - 4 A E D . B C . a e d + 4 C E D . B A . c d e - 4 C E D . B A . c e b + \\
 & - 4 C E A . D B . d c a - 2 C E D . B A . b c a + 2 C E B . D A . d c a + 4 C E A . B D . b c a + \\
 & + 4 C D A . E B . d c a + 2 A E D . B C . b c a - 2 A E D . B C . d c a - 4 A E C . B D . b c a + \\
 & + 4 A D E . B C . a d b + 2 C A E . B D . c b d - 2 C A E . B D . a b d - 4 D C E . B A . c b d + \\
 & - 4 B A E . D C . a b d - 2 C A E . D B . c b d + 2 C A E . D B . a b d + 4 B C E . D A . c b d
 \end{aligned}$$

B_{11}

$$\begin{aligned}
 & -8 B C D . b A . e E . c + 8 B C D . b A . c E . a + 8 B C D . c A . e E . b - 8 B C D . c A . b E . a + \\
 & -8 B D C . b A . e E . d + 8 B D C . b A . d E . a + 8 B A C . b D . b E . a + 8 B A C . b D . c E . a + \\
 & -8 B E C . b D . b A . e - 8 B E C . b D . c A . e + 8 C D B . c A . e E . d - 8 C D B . c A . d E . a + \\
 & -8 C A B . c D . b E . a - 8 C A B . c D . c E . a + 8 C E B . c D . b A . e + 8 C E B . c D . c A . e + \\
 & + 8 D A B . c C . d E . a - 8 D A B . d C . b E . a - 8 D E B . c C . d A . e + 8 D E B . d C . b A . e + \\
 & + 8 A E B . c C . e D . a - 8 A E B . e C . b D . a + 8 A E B . a C . b D . e - 8 A E B . c C . a D . e + \\
 & + 4 B C D . A E . a b d - 4 B C D . A E . a c d - 4 B C D . E A . e b d + 4 B C D . E A . e c d + \\
 & + 4 B C E . A D . b e c - 4 B C E . A D . b c a + 4 B C E . A D . c b a - 4 B C E . A D . c b e + \\
 & + 2 B C E . A D . e b d - 2 B C E . A D . e c d + 2 B C E . A D . a c d - 2 B C E . A D . a b d + \\
 & + 4 C D E . A B . c d a - 4 C D E . A B . c d e + 4 B D E . A C . b e d - 4 B D E . A C . b d a + \\
 & - 4 B D C . E A . e b c - 2 B D E . A C . a b c + 2 B D A . E C . e b c + 4 B D C . A E . a b c + \\
 & + 4 B E C . D A . e b c + 2 C D E . A B . a b c - 2 C D E . A B . e b c - 4 C D B . A E . a b c + \\
 & - 4 C A D . E B . c e a - 2 B C D . E A . b e a + 2 B C D . E A . c e a + 4 A B D . E C . b e a + \\
 & + 4 E C D . A B . c e a + 2 B C D . A E . b e a - 2 B C D . A E . c e a - 4 E B D . A C . b e a
 \end{aligned}$$

B_{12}

$$\begin{aligned}
 & -8 B.C A.b D.e E.c + 8 B.C A.b D.c E.d + 8 B.C A.c D.e E.b - 8 B.C A.c D.b E.d + \\
 & -8 B.A C.b D.e E.a + 8 B.A C.b D.a E.d + 8 B.D C.b A.b E.d + 8 B.D C.b A.c E.d + \\
 & -8 B.E C.b A.b D.e - 8 B.E C.b A.c D.e + 8 C.A B.c D.e E.a - 8 C.A B.c D.a E.d + \\
 & -8 C.D B.c A.b E.d - 8 C.D B.c A.c E.d + 8 C.E B.c A.b D.e + 8 C.E B.c A.c D.e + \\
 & + 8 A.D B.c C.a E.d - 8 A.D B.a C.b E.d - 8 A.E B.c C.a D.e + 8 A.E B.a C.b D.e + \\
 & + 8 D.E B.c C.e A.d - 8 D.E B.c C.b A.d + 8 D.E B.d C.b A.e - 8 D.E B.c C.d A.e + \\
 & + 4 B.C A.D E.d b.a - 4 B.C A.D E.d c.a - 4 B.C A.E D.e b.a + 4 B.C A.E D.e c.a + \\
 & + 4 B.C E.D A.b e.c - 4 B.C E.D A.b c.d + 4 B.C E.D A.c b.d - 4 B.C E.D A.c b.e + \\
 & + 2 B.C E.D A.e b.a - 2 B.C E.D A.e c.a + 2 B.C E.D A.d c.a - 2 B.C E.D A.d b.a + \\
 & + 4 C.A E.D B.c a.d - 4 C.A E.D B.c a.e + 4 B.A E.D C.b e.a - 4 B.A E.D C.b a.d + \\
 & - 4 B.A C.E D.e b.c - 2 B.A E.D C.d b.c + 2 B.A D.E C.e b.c + 4 B.A C.D E.d b.c + \\
 & + 4 B.E C.A D.e b.c + 2 C.A E.D B.d b.c - 2 C.A E.D B.e b.c - 4 C.A B.D E.d b.c + \\
 & + 4 C.E A.D B.c d.e + 2 B.C A.D E.b d.e - 2 B.C A.D E.c d.e - 4 E.B A.D C.b d.e + \\
 & - 4 D.C A.E B.c d.e - 2 B.C A.E D.b d.e + 2 B.C A.E D.c d.e + 4 D.B A.E C.b d.e
 \end{aligned}$$

B_{13}

$$\begin{aligned}
 & -8 A.D B.a C.e E.d + 8 A.D B.a C.d E.c + 8 A.D B.d C.e E.a - 8 A.D B.d C.a E.c + \\
 & -8 A.B D.a C.e E.b + 8 A.B D.a C.b E.c + 8 A.C D.a B.a E.c + 8 A.C D.a B.d E.c + \\
 & -8 A.E D.a B.a C.e - 8 A.E D.a B.d C.e + 8 D.B A.d C.e E.b - 8 D.B A.d C.b E.c + \\
 & -8 D.C A.d B.a E.c - 8 D.C A.d B.d E.c + 8 D.E A.d B.a C.e + 8 D.E A.d B.d C.e + \\
 & + 8 B.C A.d D.b E.c - 8 B.C A.b D.a E.c - 8 B.E A.d D.b C.e + 8 B.E A.b D.a C.e + \\
 & + 8 C.E A.d D.e B.c - 8 C.E A.e D.a B.c + 8 C.E A.c D.a B.e - 8 C.E A.d D.c B.e + \\
 & + 4 A.D B.C E.c a.b - 4 A.D B.C E.c d.b - 4 A.D B.E C.e a.b + 4 A.D B.E C.e d.b + \\
 & + 4 A.D E.C B.a e.d - 4 A.D E.C B.a d.c + 4 A.D E.C B.d a.c - 4 A.D E.C B.d a.e + \\
 & + 2 A.D E.C B.c a.b - 2 A.D E.C B.e d.b + 2 A.D E.C B.c d.b - 2 A.D E.C B.c a.b + \\
 & + 4 D.B E.C A.d b.c - 4 D.B E.C A.d b.e + 4 A.B E.C D.a e.b - 4 A.B E.C D.a b.c + \\
 & + 4 D.B A.E C.e d.a + 2 D.B E.C A.c d.a - 2 D.B C.E A.e d.a - 4 D.B A.C E.c d.a + \\
 & - 4 D.E A.B C.e d.a - 2 A.B E.C D.c d.a + 2 A.B E.C D.e d.a + 4 A.B D.C E.c d.a + \\
 & + 4 D.E B.C A.d c.e + 2 A.D B.C E.a c.e - 2 A.D B.C E.d c.e - 4 E.A B.C D.a c.e + \\
 & - 4 C.D B.E A.d c.e - 2 A.D B.E C.a c.e + 2 A.D B.E C.d c.e + 4 C.A B.E D.a c.e
 \end{aligned}$$

B₁₄

$-8 B.E.C.b A.d D.e + 8 B.E.C.b A.e D.a + 8 B.E.C.e A.d D.b - 8 B.E.C.e A.b D.a +$
 $-8 B.C.E.b A.d D.c + 8 B.C.E.b A.c D.a + 8 B.A.E.b C.b D.a + 8 B.A.E.b C.e D.a +$
 $-8 B.D.E.b C.b A.d - 8 B.D.E.b C.e A.d + 8 E.C.B.e A.d D.c - 8 E.C.B.e A.c D.a +$
 $-8 E.A.B.e C.b D.a - 8 E.A.B.e C.e D.a + 8 E.D.B.e C.b A.d + 8 E.D.B.e C.e A.d +$
 $+8 C.A.B.e E.c D.a - 8 C.A.B.c E.b D.a - 8 C.D.B.e E.c A.d + 8 C.D.B.c E.b A.d +$
 $+8 A.D.B.e E.d C.a - 8 A.D.B.d E.b C.a + 8 A.D.B.a E.b C.d - 8 A.D.B.e E.a C.d +$
 $+4 B.E.C.A D.a b.c - 4 B.E.C.A D.a e.c - 4 B.E.C.D A.d b.c + 4 B.E.C.D A.d e.c +$
 $+4 B.E.D.A C.b d.e - 4 B.E.D.A C.b e.a + 4 B.E.D.A C.e b.a - 4 B.E.D.A C.e b.d +$
 $+2 B.E.D.A C.d b.c - 2 B.E.D.A C.d e.c + 2 B.E.D.A C.a e.c - 2 B.E.D.A C.a b.c +$
 $+4 E.C.D.A B.e c.a - 4 E.C.D.A B.e c.d + 4 B.C.D.A E.b d.c - 4 B.C.D.A E.b c.a +$
 $+4 E.C.B.D A.d e.b + 2 E.C.A.D B.a e.b - 2 E.C.A.D B.d e.b - 4 E.C.B.A D.a e.b +$
 $-4 E.D.B.C A.d e.b - 2 B.C.D.A E.a e.b + 2 B.C.D.A E.d e.b + 4 B.C.E.A D.a e.b +$
 $+4 D.E.C.A B.e a.d + 2 B.E.C.A D.b a.d - 2 B.E.C.A D.e a.d - 4 B.D.C.A E.b a.d +$
 $-4 A.E.C.D B.e a.d - 2 B.E.C.D A.b a.d + 2 B.E.C.D A.e a.d + 4 A.B.C.D E.b a.d$

B₁₅

$-8 B.C.E.b A.d D.c + 8 B.C.E.b A.c D.a + 8 B.C.E.c A.d D.b - 8 B.C.E.c A.b D.a +$
 $-8 B.E.C.b A.d D.e + 8 B.E.C.b A.e D.a + 8 B.A.C.b E.b D.a + 8 B.A.C.b E.c D.a +$
 $-8 B.D.C.b E.b A.d - 8 B.D.C.b E.c A.d + 8 C.E.B.c A.d D.e - 8 C.E.B.c A.e D.a +$
 $-8 C.A.B.c E.b D.a - 8 C.A.B.c E.c D.a + 8 C.D.B.c E.b A.d + 8 C.D.B.c E.c A.d +$
 $+8 E.A.B.c C.e D.a - 8 E.A.B.e C.b D.a - 8 E.D.B.c C.e A.d + 8 E.D.B.e C.b A.d +$
 $+8 A.D.B.c C.d E.a - 8 A.D.B.d C.b E.a + 8 A.D.B.a C.b E.d - 8 A.D.B.c C.a E.d +$
 $+4 B.C.E.A D.a b.e - 4 B.C.E.A D.a c.e - 4 B.C.E.D A.d b.e + 4 B.C.E.D A.d c.e +$
 $+4 B.C.D.A E.b d.c - 4 B.C.D.A E.b c.a + 4 B.C.D.A E.c b.a - 4 B.C.D.A E.c b.d +$
 $+2 B.C.D.A E.d b.e - 2 B.C.D.A E.d c.e + 2 B.C.D.A E.a c.e - 2 B.C.D.A E.a b.e +$
 $+4 C.E.D.A B.c e.a - 4 C.E.D.A B.c e.d + 4 B.E.D.A C.b d.e - 4 B.E.D.A C.b e.a +$
 $-4 B.E.C.D A.d b.c - 2 B.E.D.A C.a b.c + 2 B.E.A.D C.d b.c + 4 B.E.C.A D.a b.c +$
 $+4 B.D.C.E A.d b.c + 2 C.E.D.A B.a b.c - 2 C.E.D.A B.d b.c - 4 C.E.B.A D.a b.c +$
 $+4 C.D.E.A B.c a.d + 2 B.C.E.A D.b a.d - 2 B.C.E.A D.c a.d - 4 D.B.E.A C.b a.d +$
 $-4 A.C.E.D B.c a.d - 2 B.C.E.D A.b a.d + 2 B.C.E.D A.c a.d + 4 A.B.E.D C.b a.d$

Apêndice 3

Vamos mostrar que a amplitude de probabilidade de um processo de espalhamento gluon-gluon, envolvendo cinco partículas, não se fatoriza. A idéia da verificação, cujas linhas gerais estamos apresentando, é a seguinte: se for possível escrever a amplitude como um produto, cujo primeiro fator contém constantes de estrutura e quadrimomentos e o segundo vetores de polarização e quadrimomentos, então deve existir na amplitude não fatorizada, ou seja, quando escrita como uma soma de parcelas, uma proporcionalidade entre as mesmas. Por exemplo, seja no caso de quatro gluons:

$$\text{Amp} = \frac{A_1 B_1}{C_1} + \frac{A_2 B_2}{C_2} + \frac{A_3 B_3}{C_3}$$

onde os A , B e C tem os significados que demos na introdução. Se:

$$B_2 = \lambda_2 B_1 \quad ; \quad B_3 = \lambda_3 B_1$$

onde os λ são coeficientes de proporcionalidade.

Então:

$$Amp = B_1 \left(\frac{A_1}{C_1} + \lambda_2 \frac{A_2}{C_2} + \lambda_3 \frac{A_3}{C_3} \right)$$

e temos a fatorização mencionada.

Outra possibilidade de fatorização vem da seguinte proporcionalidade:

$$\frac{B_2}{C_2} = \alpha_2 \frac{B_1}{C_1} \quad ; \quad \frac{B_3}{C_3} = \alpha_3 \frac{B_1}{C_1}$$

conduzindo também à fatorização:

$$Amp = \frac{B_1}{C_1} \left(A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 \right)$$

A amplitude pode porém ser escrita como soma de parcelas de muitas maneiras. A proporcionalidade entre estas parcelas não é, por isto, uma condição necessária, de vez que pode não haver proporcionalidade quando a amplitude é escrita de uma certa maneira, e passar a haver quando as parcelas são reagrupadas de maneira diferente. Se verificarmos porém, que para qualquer maneira que escrevamos a amplitude, nunca existe a proporcionalidade que constitui condição suficiente para fatorização, então podemos afirmar que a am-

plitude não se fatoriza.

O reagrupamento das parcelas da amplitude, de que estamos falando, se deve à existência de identidades envolvendo as constantes de estrutura. Por exemplo, no caso de quatro glúons temos a identidade: $A_1 + A_2 + A_3 = 0$. Então, substituindo na amplitude, quando escrita como uma soma de parcelas, o produto de constantes de estrutura A_3 por $-A_1 - A_2$ temos:

$$Amp = \frac{A_1 B_1}{C_1} + \frac{A_2 B_2}{C_2} + \frac{A_3 B_3}{C_3} = \frac{A_1 B_1}{C_1} + \frac{A_2 B_2}{C_2} + \frac{(-A_1 - A_2) B_3}{C_3}$$

portanto:

$$Amp = A_1 \left(\frac{B_1}{C_1} - \frac{B_3}{C_3} \right) + A_2 \left(\frac{B_2}{C_2} - \frac{B_3}{C_3} \right)$$

No caso de um processo envolvendo cinco glúons, as identidades envolvendo as constantes de estrutura, permitem, como se pode verificar, expressar os quinze produtos de constantes de estrutura por meio de seis produtos linearmente independentes. Temos assim:

$$A_1 = A_3 - A_4 - A_8 + A_{14}$$

$$A_2 = A_8 - A_{14}$$

$$A_5 = A_3 - A_4$$

(121-1)

$$A_6 = -A_3 + A_8 - A_9 + A_{13}$$

$$A_7 = A_3 - A_{13}$$

$$A_{10} = A_8 - A_9$$

$$A_{11} = A_4 + A_9 - A_{13} - A_{14}$$

$$A_{12} = -A_4 - A_9$$

$$A_{15} = A_{13} + A_{14}$$

Os produtos de constantes de estrutura $A_3, A_4, A_8, A_9, A_{13}$ e A_{14} foram escolhidos de maneira arbitrária, porém constituem o número mínimo de produtos de constantes de estrutura, por meio dos quais é possível expressar todas as demais ^{§ (122-1)}

Além disto, sendo todos os produtos completamente análogos no que concerne à participação na amplitude, qualquer outra escolha levaria a uma reorganização da amplitude que teria as mesmas propriedades.

O cálculo que efetuamos no primeiro capítulo, da amplitude de probabilidade, de um processo de espalhamento gluon-gluon envolvendo cinco partículas, nos levou à uma expressão que podemos apresentar resumidamente como:

$$Ampl = \frac{A_1 B_1}{a.e \ c.d} + \frac{A_2 B_2}{c.d \ b.e} + \frac{A_3 B_3}{a.b \ c.e} + \frac{A_4 B_4}{a.b \ d.e} + \frac{A_5 B_5}{a.b \ c.d} + \frac{A_6 B_6}{b.d \ a.e} +$$

Nota: § (122-1) Ver Jair Lucinda: Tese de doutoramento.

$$+ \frac{A_7 B_7}{c.e b.d} + \frac{A_8 B_8}{c.a b.e} + \frac{A_9 B_9}{c.a d.e} + \frac{A_{10} B_{10}}{c.a b.d} + \frac{A_{11} B_{11}}{b.c a.e} + \frac{A_{12} B_{12}}{b.c d.e} + \frac{A_{13} B_{13}}{a.d c.e} + \frac{A_{14} B_{14}}{b.e a.d} + \frac{A_{15} B_{15}}{b.c a.d}$$

Substituindo os produtos de constantes de estrutura de acordo com as equações (121-1) ficamos com:

$$\begin{aligned} Amp = & \frac{-A_8 + A_{14} + A_3 - A_4}{a.e c.d} B_1 + \frac{A_8 - A_{14}}{c.d b.e} B_2 + \frac{A_3}{a.b c.e} B_3 + \frac{A_4}{a.b d.e} B_4 + \\ & + \frac{A_3 - A_4}{a.b c.d} B_5 + \frac{A_8 + A_{13} - A_3 - A_9}{b.d a.e} B_6 + \frac{A_3 - A_{13}}{c.e b.d} B_7 + \frac{A_8}{c.a b.e} B_8 + \frac{A_9}{c.a d.e} B_9 + \\ & + \frac{A_8 - A_9}{c.a b.d} B_{10} + \frac{A_4 + A_9 - A_{14} - A_{13}}{b.c a.e} B_{11} + \frac{-A_4 - A_9}{b.c d.e} B_{12} + \frac{A_8}{a.d c.e} B_{13} + \frac{A_{14}}{b.e a.d} B_{14} + \\ & + \frac{A_{13} + A_{14}}{b.c a.d} B_{15} \end{aligned}$$

que pode finalmente ser colocada na forma:

$$\begin{aligned} Amp = & A_8 \left(\frac{-B_1}{a.e c.d} + \frac{B_2}{c.d b.e} + \frac{B_6}{b.d a.e} + \frac{B_8}{c.a b.e} + \frac{B_{10}}{c.a b.d} \right) + \\ & + A_{14} \left(\frac{B_1}{a.e c.d} - \frac{B_2}{c.d b.e} - \frac{B_{11}}{b.c a.e} + \frac{B_{14}}{b.e a.d} + \frac{B_{15}}{b.c a.d} \right) + \\ & + A_{13} \left(\frac{B_6}{b.d a.e} - \frac{B_7}{c.e b.d} - \frac{B_{11}}{b.c a.e} + \frac{B_{13}}{a.d c.e} + \frac{B_{15}}{b.c a.d} \right) + \\ & + A_3 \left(\frac{B_1}{a.e c.d} + \frac{B_3}{a.b c.e} + \frac{B_5}{a.b c.d} - \frac{B_6}{b.d a.e} + \frac{B_7}{c.e b.d} \right) + \\ & + A_{14} \left(\frac{-B_1}{a.e c.d} + \frac{B_4}{a.b d.e} - \frac{B_5}{a.b c.d} + \frac{B_{11}}{b.c a.e} - \frac{B_{12}}{b.c d.e} \right) + \\ & + A_9 \left(\frac{-B_6}{b.d a.e} + \frac{B_9}{c.a d.e} - \frac{B_{10}}{c.a b.d} + \frac{B_{11}}{b.c a.e} - \frac{B_{12}}{b.c d.e} \right) \end{aligned}$$

Pondo em evidência o mínimo múltiplo comum dos denominadores das parcelas em cada parêntese obtemos:

$$\begin{aligned}
 Amp = & \frac{A_8}{a.e \ c.d \ b.e \ b.d \ c.a} \left(-B_1 \ b.e \ b.d \ c.a + B_2 \ a.e \ b.d \ c.a + B_6 \ c.d \ b.e \ c.a + \right. \\
 & + B_8 \ a.e \ c.d \ b.d + B_{10} \ a.e \ c.d \ b.e \left. \right) + \frac{A_{14}}{a.e \ c.d \ b.e \ b.c \ a.d} \left(B_1 \ b.e \ b.c \ a.d + \right. \\
 & - B_2 \ a.e \ b.c \ a.d - B_{11} \ a.d \ c.d \ b.e + B_{14} \ a.e \ c.d \ b.c + B_{15} \ a.e \ c.d \ b.e \left. \right) + \\
 & + \frac{A_{13}}{b.d \ a.e \ c.e \ b.c \ a.d} \left(B_6 \ c.e \ b.c \ a.d - B_7 \ a.e \ b.c \ a.d - B_{11} \ b.d \ c.e \ a.d + \right. \\
 & + B_{13} \ b.d \ a.e \ b.c + B_{15} \ b.d \ a.e \ c.e \left. \right) + \frac{A_3}{a.e \ c.d \ a.b \ c.e \ b.d} \left(B_1 \ a.b \ c.e \ b.d + \right. \\
 & + B_3 \ a.e \ c.d \ b.d + B_5 \ a.e \ d.b \ c.e - B_6 \ c.d \ a.b \ c.e + B_7 \ a.e \ c.d \ a.b \left. \right) + \\
 & + \frac{A_4}{a.e \ c.d \ a.b \ d.e \ b.c} \left(-B_1 \ a.b \ d.e \ b.c + B_4 \ a.e \ c.d \ b.c - B_5 \ a.e \ d.e \ b.c + B_{11} \ c.d \ a.b \ d.e + \right. \\
 & - B_{12} \ a.e \ c.d \ a.b \left. \right) + \frac{A_9}{b.d \ a.e \ c.a \ d.e \ b.c} \left(-B_6 \ c.a \ d.e \ b.c + B_7 \ b.d \ a.e \ b.c - B_{10} \ a.e \ d.e \ b.c + \right. \\
 & + B_{11} \ b.d \ c.a \ d.e - B_{12} \ b.d \ a.e \ c.a \left. \right)
 \end{aligned}$$

Esta última expressão tem a forma:

$$Amp = \frac{A_3}{G_3} T_3 + \frac{A_4}{G_4} T_4 + \frac{A_8}{G_8} T_8 + \frac{A_9}{G_9} T_9 + \frac{A_{13}}{G_{13}} T_{13} + \frac{A_{14}}{G_{14}} T_{14}$$

Verificamos que:

$$T_4 \neq \lambda_4 T_3$$

$$T_8 \neq \lambda_8 T_3$$

$$T_9 \neq \lambda_9 T_3$$

$$T_{13} \neq \lambda_{13} T_3$$

$$T_{14} \neq \lambda_{14} T_3$$

(125-1)

ou seja, não existem constantes $\lambda_4, \lambda_8, \lambda_9, \lambda_{13}, \lambda_{14}$, tais que

$$T_4 = \lambda_4 T_3, T_8 = \lambda_8 T_3 \text{ etc...}$$

Verificamos ainda que:

$$\frac{T_4}{G_4} \neq \alpha_3 \frac{T_3}{G_3}$$

$$\frac{T_8}{G_8} \neq \alpha_8 \frac{T_3}{G_3}$$

$$\frac{T_9}{G_9} \neq \alpha_9 \frac{T_3}{G_3}$$

$$\frac{T_{13}}{G_{13}} \neq \alpha_{13} \frac{T_3}{G_3}$$

$$\frac{T_{14}}{G_{14}} \neq \alpha_{14} \frac{T_3}{G_3}$$

(125-2)

Em princípio a inexistência de proporcionalidade entre as parcelas da amplitude, como está expressa pelas relações (125-1) e (125-2) que verificamos, exclui a possibilidade de fatorização da amplitude. Poderíamos escrever a amplitude utilizando um ní-

mero maior de produtos de constantes de estrutura. Isto implicaria em desmembrar os elementos que indicamos pelas letras T (e naturalmente também os respectivos G) distribuindo-os de maneiras diferentes entre as parcelas. E se eventualmente para as parcelas assim distribuídas existissem as proporcionalidades que possibilitassem a fatorização, tais proporcionalidades apareceriam, quando da verificação das proporcionalidades que efetuamos, através de proporcionalidades parciais. Em outras palavras, através de proporcionalidades envolvendo alguns termos das somas T ou das somas $\frac{T}{G}$. Ora, tais proporcionalidades parciais também não foram constatadas.

Referências

- (1) R. W. Brown, D. Sahdev, K.O. Mikaelian:
 " $W^+ Z^0$ and $W^+ \gamma$ pair production in ve , pp , and $\bar{p}p$ collisions " Physical Review D 20 1164
- (2) K.O. Mikaelian, M.A. Samuel, D. Sahdev:
 "Magnetic moment of weak bosons produced in pp and $p\bar{p}$ collisions" Physical Review Letters, Volume 43, Number 11 746
- (3) C. J. Goebel, F. Halzen, J.P. Leveille:
 "Angular zeros of Brown, Mikaelian, Sahdev, and Samuel, and the factorization of tree amplitudes in gauge theories" Physical Review D 23 2.682
- (4) K.O. Mikaelian
 "Trees in Yang-Mills"

Comunicado de distribuição privada

(5) F. M. P. Chaves:

"Investigação sobre a identidade de Jacobi espacial generalizada" Dissertação de mestrado I.F.U.S.P. 1982.

(6) P. Karasinski

"Some useful integrals for evaluation of massless diagrams in Q.C.D." Yale University

(7) J. Lucinda

"Sobre a fatoração de amplitudes em teorias de gauge" Tese de doutoramento IFUSP 1983

Bibliografia

- L. D. Faddeev, A. A. Slavnov: Gauge Fields
- R. P. Feynman: Gauge Theories
- D. B. Lichtenberg: Quantum Chromodynamics
(Contemp. Phys. 1981 Vol 22 No 3 311)
- D. Lurié: Particles and Fields
- F. Mandl, G. Shaw: Quantum Field Theory
- F. Martin: La chromodynamique quantique
(La Recherche n° 123 Juin 1981)
- P. Ramond: Field Theory