UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP
305M810T1826

RENORMALIZAÇÃO NA QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE TEORIAS DE CAMPOS

José Carlos Brunelli

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1826 ex. 1
INSTITUTO DE FÍSICA

Orientador: Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes

Tese de Doutoramento apresentada no Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

Defesa: 16/09/91

SÃO PAULO
1991

530.143
B894r
D
e.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Brunelli, José Carlos
Renormalização na quantização estocástica de teorias de campos. São Paulo, 1991.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Departamento de Física Matemática.
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares
Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes

Unitermos: 1. Teoria quântica de campos; 2. Quantização estocástica; 3. Renormalização.

USP/IF/SBI - 32/91

AGRADECIMENTOS

— Ao Professor Marcelo O. C. Gomes, pela competente orientação.

— Aos colegas do Departamento de Física Matemática, especialmente ao Farnezio, Rênio e Rubens.

— À FAPESP, pelo apoio financeiro.

RESUMO

Dentro do esquema de quantização estocástica de Parisi e Wu estudamos aspectos ligados a renormalização da teoria estocástica de certos modelos em teoria de campos. No formalismo funcional para processos estocásticos implementamos a expansão $1/N$ para o modelo sigma não linear e usando a identidade de Ward, devida a simetria de BRS da ação efetiva dessa formulação, mostramos a renormalizabilidade do modelo. No formalismo de Langevin para processos estocásticos estudamos a renormalizabilidade do modelo de Thirring massivo e mostramos perturbativamente o anulamento da função beta do grupo de renormalização a tempo fictício finito.

ABSTRACT

In the stochastic quantization scheme of Parisi and Wu we study the renormalization of the stochastic theory of some models in field theory. Following the path integral approach for stochastic process we perform the $1/N$ expansion of the non linear sigma model and, using a Ward identity obtained, from a BRS symmetry of the effective action of this formulation, we show the renormalizability of the model. Using the Langevin approach for stochastic process we study the renormalizability of the massive Thirring model showing perturbativaly the vanishing of the renormalization group's beta function at finite fictitious time.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO 1

CAPÍTULO 1 5

QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE PARISI-WU

1.1–O Método 5

1.2–Função de Dois Pontos na Teoria $\lambda\phi^3$ 8

1.3–Equação de Fokker-Planck 16

1.4–Teorias de Gauge 19

1.5–Regularização 25

1.6–Renormalização 30

1.7–Férmions 33

CAPÍTULO 2 39

QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA
NA REPRESENTAÇÃO INTEGRAL FUNCIONAL

2.1–Funcional Gerador para as Funções de Correlação 40

2.1.1–Representação Integral Funcional para $Z[J]$ 41

2.1.2–Representação Integral Funcional Supersimétrica para $Z[J]$ 45

2.2–Identidades de Ward e Renormalização 50

2.3–Redução Dimensional na Quantização Estocástica 53

CAPÍTULO 3 57

QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DO MODELO
SIGMA NÃO LINEAR NA EXPANSÃO $1/N$
E SUA RENORMALIZABILIDADE

3.1–Quantização do Modelo Sigma Não Linear
em $1/N$ no Formalismo de Langevin 58

3.2–Quantização do Modelo Sigma Não Linear
em $1/N$ no Formalismo Integral Funcional 64

3.2.1–Funcional Gerador 65

3.2.2–Renormalizabilidade 68
3.2.3–Funcional Gerador Efetivo e Expansão Perturbativa 79

CAPÍTULO 4 90
QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DO
MODELO DE THIRRING MASSIVO
4.1–Equação de Langevin e Expansão Perturbativa 91
4.2–Equação do Grupo de Renormalização 94
4.3–Cálculo da Função Beta 98

CONCLUSÃO 106

APÊNDICE 109
NOTAÇÕES

REFERÊNCIAS 110

INTRODUÇÃO

O método de quantização estocástica foi desenvolvido por Parisi e Wu [1], em 1981, como um procedimento alternativo para a quantização de teorias de campos, particularmente apropriado para teorias de gauge. A idéia básica desse método é a de considerar a medida Euclideana da integração de trajetórias de Feynman, $e^{-S[\phi]} / \int \mathcal{D}\phi \; e^{-S[\phi]}$, como a distribuição de equilíbrio de um processo estocástico, cuja dinâmica se dá numa dimensão adicional, chamada de quinto tempo ou tempo fictício, ditada por uma equação de Langevin [2] ou de Fokker-Planck [3], tal qual a de uma partícula executando um movimento Browniano. As funções de Green da teoria quântica são então, sob certas condições, obtidas como o limite de equilíbrio das funções de correlação da teoria estocástica [1,4,5].

Parisi e Wu enfatizaram as vantagens computacionais que tal método oferecia em relação a quantização via integrais de trajetórias, quando aplicado às teorias de gauge. Através de cálculos perturbativos no formalismo de Langevin mostraram que, no caso das quantidades invariantes de gauge, a fixação de gauge não era necessária e argumentaram que para as teorias não abelianas os efeitos dos fantasmas de Faddeev-Popov [6] eram obtidos automaticamente. Esse último resultado foi comprovado posteriormente por cálculos perturbativos, na formulação de Langevin, por Namiki et al [7] e, na formulação de Fokker-Planck, por Baulieu e Zwanziger [8]. Tais resultados indicavam que a formulação estocástica, a princípio, estava livre das ambiguidades de Gribov [9].

Desde a sua introdução muitos desenvolvimentos foram obtidos para o método de quantização estocástica, como por exemplo, a fixação de gauge de Zwanziger [10], o método de regularização estocástica de Breit et al [5], o de regularização estocástica analítica de Alfaro [11], o de regularização contínua de Bern [12], a extensão do método para o uso de férmions [5,13,14], entre muitos outros [15].

Um desenvolvimento particularmente importante da quantização estocástica foi a sua formulação integral funcional obtida independentemente por Bender et al [16], Nakano [17] e Gozzi [18]. Como na quantização usual a existência de uma ação permite que o estudo das simetrias e da renormalizabilidade da teoria sejam feitos sistematicamente. Entretanto, devemos lembrar que a introdução de métodos integrais funcionais na formulação de problemas com dinâmica de Langevin ou Fokker-Planck já eram relativamente bem difundidos para o movimento Browniano, na termodinâmica fora do equilíbrio e principalmente na

investigação da dinâmica de sistemas estatísticos clássicos (mecânica estatística fora do equilíbrio) [19].

Parisi e Sourlas [20], em 1979, ao estudarem sistemas de spins na presença de um campo magnético aleatório mostraram, perturbativamente, que a redução dimensional, uma característica desses modelos, podia ser entendida pela existência de uma supersimetria presente na formulação funcional do mesmo. Posteriormente Cardy [21] como também Klein e Fernando Perez [22] usaram a supersimetria para uma prova não perturbativa da redução dimensional.

As investigações de Parisi e Sourlas, anteriores a formulação da quantização estocástica de Parisi e Wu, mostravam claramente a relação entre um sistema clássico estocástico, em n dimensões, com um sistema quântico, em $n-2$ dimensões. Tal conexão levou naturalmente ao uso dessas idéias na formulação de esquemas de quantização alternativos. Parisi e Sourlas finalizam seu trabalho com a seguinte observação: *"The stochastic differential equation may provide us with a different framework to study the properties of a field theory. It would be quite interesting to see if and how this formalism can be extended to gauge theories"*.

McClain et al [23], em 1982, formularam um esquema de quantização, para as teorias de gauge, considerando os campos clássicos como estocásticos, em $n+2$ dimensões. As funções de correlação dos campos eram então equivalentes, via mecanismo de redução dimensional de Parisi-Sourlas, as funções de Green da teoria quântica em n dimensões.

Na formulação de Parisi e Wu também temos um campo clássico estocástico definido numa dimensão superior. Porém, a diferença fundamental é que o campo evolui dinamicamente na nova dimensão, contrariamente do que ocorre na formulação de McClain et al onde o processo estocástico é estacionário. Entretanto, também aqui existe uma supersimetria, que apenas se torna explícita na formulação integral funcional desse método, e que não foi explorada por Parisi e Wu. Ela só foi redescoberta, em 1983, por Nakazato et al [24] e Egorian e Kalitzin [25], e sua utilização no estabelecimento da redução dimensional, no limite de equilíbrio, foi feita por Kirschner [26] e Gozzi [27], em 1984.

Zinn-Justin [28], em 1986, observou que na formulação integral funcional para processos estocásticos existe, além da supersimetria, uma simetria do tipo BRS, similar a encontrada na formulação funcional das teorias de gauge [29], que garante a invariância de forma da ação efetiva renormalizada da teoria. É essa simetria que faz com que a discussão da renormalização das teorias quantizadas estocasticamente possa ser realizada sistematicamente na formulação integral funcional, apesar de termos que usar uma ação

efetiva que envolve um certo número de campos auxiliares. De fato, é a integração nos campos auxiliares que levam a diferentes formulações funcionais existentes na literatura que, entretanto, são menos eficientes no estudo da renormalizabilidade pois não explicitam o cancelamento de uma série de contratermos.

Desde a sua formulação grande ênfase foi dada às teorias de gauge e aos esquemas de regularização relegando a um segundo plano aspectos importantes, como o da renormalização das teorias quantizadas estocasticamente. Acreditamos que a formulação funcional, especificamente a descrita no trabalho de Zinn-Justin [28], seja a mais natural na discussão desse problema e de outros, como por exemplo a implementação da expansão em potências de $1/N$ [30]. Assim, procuraremos usá-la sempre que for possível, exceto no tratamento de sistemas fermiônicos onde ela ainda não está muito bem desenvolvida.

Encararemos o método de quantização estocástica simplesmente como um "approach" alternativo de quantização ao mesmo nível dos métodos tradicionais. Entretanto, procuraremos entender as suas reais potencialidades, deficiências e mesmo como resultados conhecidos são reobtidos dentro de tal formalismo. Assim, estudando modelos bem estabelecidos na teoria de campos, como o modelo sigma não linear, poderemos entender como se processa a quantização de um sistema vinculado, como é introduzida a expansão $1/N$ e, principalmente, como o modelo é renormalizado nesse contexto. Através do modelo de Thirring massivo poderemos verificar a validade da equação de Langevin usada na quantização de sistemas fermiônicos, particularmente a sua influência no comportamento à curtas distâncias característico do modelo.

No capítulo 1 fazemos um apanhado geral do método de quantização estocástica enfatizando os pontos que necessitaremos nos capítulos seguintes. Ilustramos o método através do cálculo, em um loop, da função de Green de dois pontos do modelo $\lambda\phi^3$. Damos uma prova da equivalência da quantização estocástica com a usual usando o formalismo de Fokker-Planck. Mostramos os aspectos interessantes que o método proporciona na quantização das teorias de gauge tomando um modelo com termo de Chern-Simons como exemplo. Tratamos da regularização e da renormalização no contexto estocástico e finalmente do tratamento dos sistemas fermiônicos. Destaca-se aqui a renormalização da equação de Langevin.

A formulação do método de quantização estocástica em uma representação integral funcional é feita no capítulo 2. Exploramos a representação supersimetrica para o funcional gerador das funções de correlação e mostramos como as identidades de Ward existentes podem nos auxiliar no estudo da renormalizabilidade das teorias quantizadas estocastica-

mente. Também usamos a supersimetria para mostrar, no equilíbrio, a redução dimensional na quantização estocástica.

O tratamento do modelo sigma não linear é feito no capítulo 3. Introduzimos a quantização estocástica para o modelo, dentro da expansão em potências de $1/N$, tanto no formalismo de Langevin como no formalismo funcional, sendo que neste último discutimos a renormalizabilidade da teoria usando os desenvolvimentos do capítulo 2. Concluimos que o modelo é renormalizável em $2 \leq n < 4$ dimensões.

No capítulo 4 quantizamos estocasticamente o modelo de Thirring massivo. Mostramos a renormalização do modelo a nível da equação de Langevin e introduzimos a equação do grupo de renormalização correspondente. Calculamos perturbativamente a função beta, a nível de um loop, e mostramos o seu anulamento a tempo fictício finito.

Finalmente comentamos os resultados obtidos e colocamos alguns problemas em aberto na conclusão.

CAPÍTULO 1

QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE PARISI-WU

Neste capítulo introduziremos o método de quantização estocástica, como feito originalmente por Parisi e Wu [1] em 1981, enfatizando os pontos que usaremos no decorrer do trabalho. Exemplificaremos o método com uma teoria escalar auto-interagente, $\lambda\phi^3$, no formalismo de Langevin e mostraremos perturbativamente, através do cálculo na ordem de um loop, que a função de dois pontos do modelo tende para o resultado usual no limite de equilíbrio. Partindo da equação de Fokker-Planck esboçaremos uma prova, não perturbativa, da equivalência da quantização estocástica com a quantização via integral de trajetórias. A seguir trataremos da quantização estocástica das teorias de gauge, que foi a motivação inicial do método, e ilustraremos os cálculos com um modelo que apresenta um termo de Chern-Simons. Estudaremos aspectos ligados a regularização e renormalização estocástica e finalmente discutiremos a introdução de férmions no formalismo.

Não trataremos de aspectos importantes do método de quantização estocástica, como sua aplicação nas teorias de gravitação, de cordas, de modelos matriciais e de sua formulação no espaço de Minkowski. Também suas aplicações no cálculo de soluções numéricas, nas teorias de campos formuladas na rede, não serão abordados. Detalhes desses desenvolvimentos, bem como dos que discutiremos aqui, podem ser encontrados no abrangente "review" de Damgaard e Hüffel [15]. Os artigos de revisão [31–33] também são muito úteis e as teses [34,35] tratam com detalhe da aplicação do método nas teorias de gauge. Finalmente os conceitos gerais concernentes aos processos estocásticos podem ser encontrados nas referências em [36].

1.1–O MÉTODO

Na teoria quântica de campos os objetos básicos a serem calculados são as funções de Green, dadas no espaço Euclideano, por

$$\langle 0|T\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)|0\rangle \equiv \frac{\int \mathcal{D}\phi\,\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)\,\mathrm{e}^{-S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi\,\mathrm{e}^{-S[\phi]}} \tag{1.1}$$

A idéia de Parisi e Wu [1] para obter tais funções é a de incorporar uma coordenada adicional t, chamada de *quinto tempo* ou *tempo fictício*, nos campos

$$\phi(x) \to \phi(x,t)$$

e postular uma dinâmica para o mesmo, dada por uma equação diferencial estocástica, a equação de Langevin [2,36]

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = -\frac{d}{2}\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x,t)} + \eta(x,t) \tag{1.2}$$

onde S é a ação Euclideana dada por

$$S = \int d^n x\, dt'\, \mathcal{L}\big(\phi(x,t'), \partial_\mu\phi(x,t')\big) \tag{1.3}$$

d é o coeficiente de difusão e $\eta(x,t)$ é um ruído Gaussiano e branco (i.e., descreve um processo Markoviano [36]) com correlações

$$\begin{aligned}
&\big\langle \eta(x,t)\big\rangle_\eta = 0 \\
&\big\langle \eta(x_1,t_1)\,\eta(x_2,t_2)\big\rangle_\eta = d\,\delta^n(x_1-x_2)\,\delta(t_1-t_2) \\
&\qquad\vdots \\
&\big\langle \eta(x_1,t_1)\cdots\eta(x_{2k+1},t_{2k+1})\big\rangle_\eta = 0 \\
&\big\langle \eta(x_1,t_1)\cdots\eta(x_{2k},t_{2k})\big\rangle_\eta = \sum_{\substack{\text{combinação}\\ \text{de pares}}} \prod_{\text{pares}} \big\langle \eta(x_i,t_i)\,\eta(x_j,t_j)\big\rangle_\eta
\end{aligned} \tag{1.4}$$

As correlações são definidas pelas médias sobre o ruído η

$$\big\langle\cdots\big\rangle_\eta = \int \mathcal{D}\eta\cdots P[\eta] \tag{1.5}$$

onde, para um processo Gaussiano e Markoviano, temos que

$$P[\eta] = \frac{\exp\Big\{-1/2d\int d^n x\, dt\, \eta^2(x,t)\Big\}}{\int \mathcal{D}\eta\, \exp\Big\{-1/2d\int d^n x\, dt\, \eta^2(x,t)\Big\}} \tag{1.6}$$

de modo que (1.4) pode ser obtida através do funcional gerador

$$Z[J] = \left\langle \mathrm{e}^{\int d^n x\, dt\, J(x,t)\eta(x,t)} \right\rangle_\eta$$

por

$$\left\langle \eta(x_1,t_1)\cdots\eta(x_n,t_n)\right\rangle_\eta = \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1,t_1)\cdots\delta J(x_n,t_n)}\right|_{J=0}$$

A "receita" consiste em resolver (1.2) para alguma condição inicial

$$\phi(x, t = t_0) = \phi_0(x) \tag{1.7}$$

e construir as funções de correlação com a solução ϕ_η

$$\left\langle \phi_\eta(x_1,t_1)\phi_\eta(x_2,t_2)\cdots\phi_\eta(x_n,t_n)\right\rangle_\eta \tag{1.8}$$

É possível mostrar que fazendo $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = t$ em (1.8) e tomando $t \to \infty$, o chamado *limite de equilíbrio*, recuperamos as funções de Green da teoria

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle \phi_\eta(x_1,t)\phi_\eta(x_2,t)\cdots\phi_\eta(x_n,t)\right\rangle_\eta = \left\langle 0\middle|T\phi(x_1)\phi(x_2)\cdots\phi(x_n)\middle|0\right\rangle \tag{1.9}$$

ou, de modo mais geral, para um funcional qualquer dos campos, $F[\phi]$, calculado estocasticamente por

$$\left\langle F[\phi_\eta(x,t)]\right\rangle_\eta = \int \mathcal{D}\eta\, F[\phi_\eta(x,t)]P[\eta] \tag{1.10}$$

teremos que

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle F[\phi_\eta(x,t)]\right\rangle_\eta = \frac{\int \mathcal{D}\phi\, F[\phi]\,\mathrm{e}^{-S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi\,\mathrm{e}^{-S[\phi]}} \tag{1.11}$$

Por outro lado, é bem conhecido, e mostraremos posteriormente, que podemos obter a correlação de $\left\langle F[\phi_\eta(x,t)]\right\rangle_\eta$ introduzindo uma distribuição de probabilidades, $P[\phi,t]$, que dá a probabilidade do campo estar na configuração ϕ no instante t, de modo que

$$\left\langle F[\phi_\eta(x,t)]\right\rangle_\eta = \int \mathcal{D}\phi\, F[\phi(x)]P[\phi(x),t] \tag{1.12}$$

onde $P[\phi,t]$ satisfaz a equação de Fokker-Planck [3,36]

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{d}{2}\int d^n x\,\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\right)P \tag{1.13}$$

Desse modo fica claro, ao compararmos (1.11) com (1.12), que a medida da integração funcional Euclideana pode ser pensada como a distribuição de equilíbrio de um processo estocástico, ou seja,

$$\lim_{t\to\infty} P[\phi,t] = \frac{\mathrm{e}^{-S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi\ \mathrm{e}^{-S[\phi]}} \tag{1.14}$$

A validade de (1.14) será mostrada mais adiante, porém, vale a pena notar que a solução independente do tempo, $P_0[\phi]$, satisfaz

$$\frac{\delta P_0[\phi]}{\delta\phi} + P_0[\phi]\frac{\delta S}{\delta\phi} = \text{constante}$$

e portanto

$$P_0[\phi] \propto \mathrm{e}^{-S[\phi]}$$

que é a distribuição de probabilidade do equilíbrio.

1.2–FUNÇÃO DE DOIS PONTOS NA TEORIA $\lambda\phi^3$

Vamos exemplificar as idéias acima no caso de uma teoria escalar $\lambda\phi^3$ [1], cuja ação é

$$S = \int d^n x\, dt \left(\frac{1}{2}\,\partial_\mu\phi\,\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\,m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{3!}\phi^3\right) \tag{1.15}$$

e a equação de Langevin (1.2), com $d = 2$, assume a forma

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = (\Box - m^2)\phi(x,t) - \frac{\lambda}{2!}\phi^2(x,t) + \eta(x,t) \tag{1.16}$$

que através de uma transformada de Fourier nas coordenadas (ver o apêndice para as notações usadas) pode ser escrita como

$$\frac{\partial\phi(k,t)}{\partial t} = -(k^2+m^2)\phi(k,t) - \frac{\lambda}{2!}\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\phi(p,t)\phi(k-p,t) + \eta(k,t) \tag{1.17}$$

agora com

$$\left\langle \eta(k,t)\,\eta(k',t')\right\rangle_\eta = 2(2\pi)^n\delta^n(k+k')\,\delta(t-t') \tag{1.18}$$

Primeiramente estudaremos a equação acima para o caso $\lambda = 0$. A função de Green retardada $G(k,t)$ dessa equação diferencial estocástica é

$$G(k,t) = \theta(t)\ \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)t} \tag{1.19}$$

e assim a solução de (1.17), para $\lambda = 0$, resulta em

$$\phi_\eta(k,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, G(k;t-\tau)\,\eta(k,\tau) + C\ \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)t} \tag{1.20}$$

onde o segundo termo é a solução da equação homogênea (1.17). Usando a condição inicial, para $t = t_0$, dada por

$$\phi(k,t_0) = \phi_0(k) \tag{1.21}$$

a solução (1.20) fica

$$\begin{aligned}\phi_\eta(k,t) &= \int_{t_0}^{\infty} d\tau\, G(k;t-\tau)\,\eta(k,\tau) + \phi(k,t_0)\,G(k;t-t_0) \\ &= \int_{t_0}^{t} d\tau\ \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)(t-\tau)}\ \eta(k,\tau) + \phi_0\ \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)(t-t_0)}\end{aligned} \tag{1.22}$$

Podemos calcular agora, por exemplo, a função de correlação de dois pontos, resultando em

$$\begin{aligned}\left\langle \phi_\eta(k,t)\,\phi_\eta(k',t')\right\rangle_\eta &= (2\pi)^n \delta^n(k+k')\,D(k;t,t') \\ +\phi(k,t_0)\,\phi(k',t_0)\ \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)(t-t_0)}\ &\mathrm{e}^{-(k'^2+m^2)(t'-t_0)}\end{aligned} \tag{1.23}$$

com

$$\begin{aligned}D(k;t,t') &= \int_{t_0}^{\min(t,t')} d\tau\ \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)(t+t'-2\tau)} \\ &= \frac{1}{k^2+m^2}\left[\mathrm{e}^{-(k^2+m^2)|\,t-t'\,|} - \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)(t+t'-2t_0)}\right]\end{aligned} \tag{1.24}$$

e que para $t = t' \to \infty$ relaxa para o propagador Euclideano usual, independente da condição inicial ϕ_0, i.e.,

$$\lim_{t\to\infty} \langle \phi_\eta(k,t)\, \phi_\eta(k',t') \rangle_\eta = (2\pi)^n \delta^n(k+k') \frac{1}{k^2+m^2} \tag{1.25}$$

Vamos observar que o mesmo resultado pode ser obtido mais facilmente por uma escolha particular de condições iniciais, i.e., se usarmos o instante inicial no passado remoto

$$\phi(k,t_0) = \phi_0(k) \quad \text{para} \quad t_0 = -\infty \tag{1.26}$$

a expressão (1.24) se simplifica para

$$D(k;t,t') = \frac{1}{k^2+m^2}\, \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)|t-t'|} \tag{1.27}$$

e (1.25) é recuperado apenas tomando $t = t'$. Assim, sempre que usarmos a condição inicial (1.26), teremos um processo estocástico que relaxa para o equilíbrio a tempo fictício finito. Como enfatizado por Gozzi [18] a escolha (1.4) (processo Gaussiano e Markoviano), onde as funções de correlação para η são invariantes por translações no tempo fictício (processo Gaussiano *estacionário*) não garante que as correlações (1.8) também o sejam. Isso só é possível quando usamos a condição inicial (1.26), ao invés da de Parisi e Wu, que é

$$\phi(k,0) = \phi_0(k) = 0 \tag{1.28}$$

Funções de correlação estacionárias podem ser obtidas se observarmos que em (1.23) podemos também tomar médias sobre a condição inicial $\phi(k,t_0) = \phi_0(k)$. Se a distribuição de probabilidades de ϕ_0 é

$$P[\phi_0] = \frac{\mathrm{e}^{-S[\phi_0]}}{\int \mathcal{D}\phi_0\ \mathrm{e}^{-S[\phi_0]}} \tag{1.29}$$

temos que ϕ_0 obedece a distribuição de equilíbrio, portanto

$$\langle \phi(k,t_0)\, \phi(k',t_0) \rangle_{\phi_0} = (2\pi)^n \delta^n(k+k') \frac{1}{k^2+m^2} \tag{1.30}$$

e consequentemente (1.23) toma a forma

$$\langle \phi_\eta(k,t)\, \phi_\eta(k',t') \rangle_{\eta,\phi_0} = (2\pi)^n \delta^n(k+k')\, D(k;t,t') \tag{1.31}$$

com $D(k;t,t')$ dado (1.27). Assim, a escolha (1.29) de $P[\phi_0]$ faz com que as funções de correlação (1.8) sejam estacionárias e como o sistema é preparado em t_0, já no equilíbrio, a dinâmica estocástica não modifica esse fato e o equilíbrio é obtido a tempo finito.

Para a condição inicial (1.28) a expressão (1.24) torna-se

$$D(k;t,t') = \frac{1}{k^2+m^2}\left[e^{-(k^2+m^2)|t-t'|} - e^{-(k^2+m^2)(t+t')}\right] \tag{1.32}$$

e a solução de (1.17), com $\lambda \neq 0$, pode ser escrita como

$$\phi_\eta(k,t) = \int_0^\infty d\tau\, G(k;t-\tau)\left[\eta(k,\tau) - \frac{\lambda}{2!}\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\phi_\eta(p,\tau)\phi_\eta(k-p,\tau)\right] \tag{1.33}$$

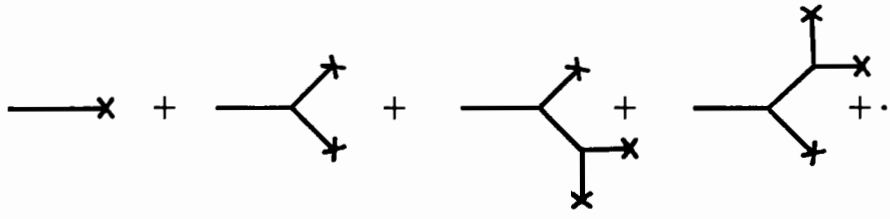
que é uma equação estocástica integral e pode ser resolvida por iteração. Portanto, a solução ϕ_η gerada é uma série de potências na constante de acoplamento λ

$$\phi_\eta(k,t) = \phi_\eta^{(0)}(k,t) + \phi_\eta^{(1)}(k,t) + \phi_\eta^{(2)}(k,t) + \cdots \tag{1.34}$$

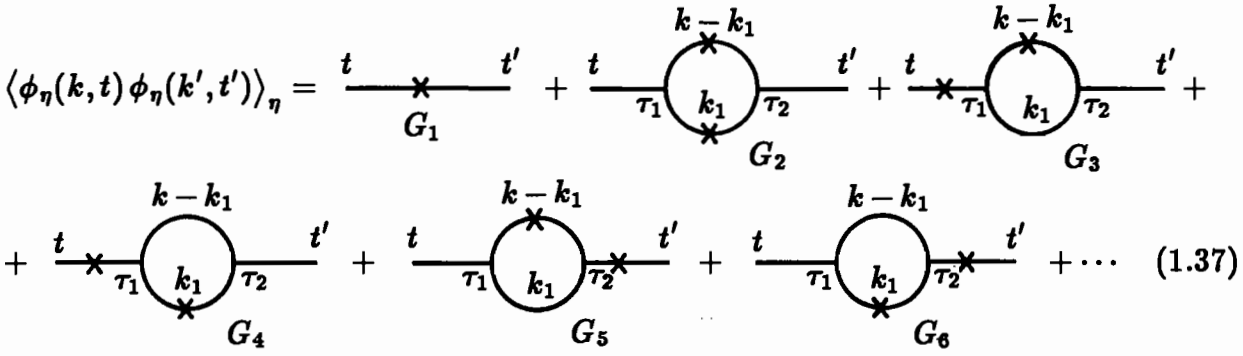
onde os $\phi_\eta^{(\ell)}(k,t)$ são de ordem ℓ em λ e valem

$$\begin{aligned}
\phi_\eta^{(0)}(k,t) &= \int_0^\infty d\tau\, G(k;t-\tau)\eta(k,\tau) \\
\phi_\eta^{(1)}(k,t) &= -\frac{\lambda}{2!}\int_0^\infty d\tau\, G(k;t-\tau)\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\phi_\eta^{(0)}(p,\tau)\phi_\eta^{(0)}(k-p,\tau) \\
\phi_\eta^{(2)}(k,t) &= -\frac{\lambda}{2!}\int_0^\infty d\tau\, G(k;t-\tau)\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\Big[\phi_\eta^{(0)}(p,\tau)\phi_\eta^{(1)}(k-p,\tau) \\
&\quad \vdots \qquad\qquad + \phi_\eta^{(1)}(p,\tau)\phi_\eta^{(0)}(k-p,\tau)\Big]
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Podemos expressar (1.34) graficamente associando uma cruz a η, uma linha lisa a G, a cada vértice um fator $-\lambda/2$ e integrações sobre os tempos e momentos para cada cruz e vértice, obtendo o seguinte diagrama em forma de árvore

$\phi_\eta(k,t) =$  $+\cdots$ (1.36)

Assim, as funções de correlação de n pontos $\langle \phi_\eta(k_1,t_1)\cdots\phi_\eta(k_n,t_n)\rangle_\eta$ têm uma representação gráfica obtida ao substituirmos cada ϕ_η pela correspondente expansão (1.36) e tormarmos a média sobre o ruído η de acordo com (1.4). Geraremos dessa forma uma série de diagramas, chamados *gráficos estocásticos*, que para a função de dois pontos, na ordem de um loop, são

$\langle \phi_\eta(k,t)\,\phi_\eta(k',t')\rangle_\eta =$ 

(1.37)

e onde, a menos de fatores $(2\pi)^n\delta^n(k+k')$, temos as seguintes expressões analíticas associadas a eles

$$G_1 = D(k;t,t') \tag{1.38a}$$

$$G_2 = \lambda^2 \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} G(k;t-\tau_1)\, D(k-k_1;\tau_1,\tau_2) \times D(k_1;\tau_1,\tau_2)\, G(k;t'-\tau_2) \tag{1.38b}$$

$$G_3 = \lambda^2 \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} D(k;t,\tau_1)\, D(k-k_1;\tau_1,\tau_2) \times G(k_1;\tau_2-\tau_1)\, G(k;t'-\tau_2) \tag{1.38c}$$

$$G_4 = \lambda^2 \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} D(k;t,\tau_1)\, G(k-k_1;\tau_2-\tau_1) \times D(k_1;\tau_1,\tau_2)\, G(k;t'-\tau_2) \tag{1.38d}$$

$$G_5 = \lambda^2 \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} G(k;t-\tau_1)\, D(k-k_1;\tau_1,\tau_2) \times G(k_1;\tau_1-\tau_2)\, D(k;t',\tau_2) \tag{1.38e}$$

$$G_6 = \lambda^2 \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} G(k;t-\tau_1)\, G(k-k_1;\tau_1-\tau_2) \times D(k_1;\tau_1,\tau_2)\, D(k;t',\tau_2) \tag{1.38f}$$

e note que

$$\left.\begin{array}{l} G_5 = G_3 \\ G_6 = G_4 \end{array}\right\} \quad \text{com} \quad t \leftrightarrow t' \qquad \left.\begin{array}{l} G_3 = G_4 \\ G_5 = G_6 \end{array}\right\} \tag{1.39}$$

Salientamos que, do ponto de vista topológico, os gráficos estocásticos tem a forma dos diagramas de Feynman usuais para a mesma teoria, diferindo apenas pela presença de cruzes, obtidas pela contração no ruído η. Pode-se mostrar que a soma de todos os gráficos estocásticos com uma dada topologia resulta, no equilíbrio, o diagrama de Feynman com a mesma topologia [4]. Desse modo, podemos obter as expressões (1.38) através de regras de Feynman generalizadas [4,37–39] para o caso estocástico. Assim, dado um gráfico de Feynman com L loops, N linhas (N_E externas e N_I internas) e com V vértices (V_r do tipo r, onde r é o número de linhas que saem de V_r) e que satisfaz a relação topológica

$$\sum_r r V_r = N_E + 2N_I \tag{1.40}$$

e a relação de Euler

$$L = N_I - V + 1 \tag{1.41}$$

construimos os gráficos estocásticos distribuindo cruzes nas linhas do gráfico de Feynman, de modo que se seccionarmos os diagramas nessas cruzes produziremos N_E diagramas de árvore (do tipo (1.36)). Isso implica que todos os diagramas estocásticos devem ter pelo menos uma cruz, que dois vértices externos *não* podem ser conectados por uma trajetória contínua de linhas *sem* cruzes e que qualquer linha cruzada pode ser conectada com uma linha externa por uma trajetória *sem* cruzes.

Portanto, os diagramas estocásticos são formados por $N_\times$ linhas cruzadas ($N_{E\times}$ externas e $N_{I\times}$ internas) e N_L linhas lisas (N_{EL} externas e N_{IL} internas) e que por construção têm

$$V = N_L \tag{1.42}$$

pois precisamos de uma linha lisa para atingir cada vértice do diagrama. De (1.42) e (1.41) obtemos que

$$N_\times = L + N_E - 1 \tag{1.43}$$

que pode também ser reescrita como

$$N_{I\times} = L + N_{EL} - 1 \tag{1.44}$$

Associamos aos vértices externos tempos fixos t_i, $i = 1, \ldots, N_E$ e aos vértices internos tempos a serem integrados, do tempo inicial t_0 ao tempo do vértice vizinho, de modo a termos uma sequência crescente de tempos ao percorrermos a trajetória contínua, sem cruzes, que liga um vértice a uma linha externa. Vamos observar que os vértices ligados por linhas lisas estão naturalmente ordenados de acordo com os valores de seu quinto tempo, por outro lado, se todas as linhas que ligam um par de vértices são linhas cruzadas, então a amplitude para o gráfico decompoem-se na soma dos dois ordenamentos temporais possíveis dos vértices.

A expressão analítica para o gráfico é obtida associando a cada linha ligando dois vértices de tempos t_1 e t_2 $(t_1 > t_2)$, por onde flui momento q, a função de Green $G(q; t_1 - t_2)$ se a linha for lisa e o propagador $D(q; t_1, t_2)$ se a linha for cruzada. Para cada vértice r teremos o fator $-\lambda_r/r!$ (onde λ_r é a constante de acoplamento referente ao vértice V_r) e para cada loop uma integração nos momentos internos k_i, $i = 1, \ldots, L$; bem como as integrações nos tempos internos τ_i, $i = 1, \ldots, V = N_L$. Assim, a expressão analítica para um gráfico estocástico [11,37,38,40], a menos de constantes devido as interações nos vértices e aos pesos combinatoriais, é proporcional a

$$\int \prod_{i=1}^{L} \frac{d^n k_i}{(2\pi)^n} \int \prod_{i=1}^{V} d\tau_i \, I(k_i, q_i, \tau_i, t_i) \tag{1.45}$$

onde q_i e t_i referem-se agora apenas aos momentos e tempos externos. O integrando I tem a forma

$$I = \prod_{\ell=1}^{N_L} G(Q_\ell; \tilde{\tau}_{\ell_1} - \tilde{\tau}_{\ell_2}) \prod_{\ell'=1}^{N_\times} D(Q_{\ell'}; \tilde{\tau}_{\ell'_1}, \tilde{\tau}_{\ell'_2}) \tag{1.46}$$

sendo que na $\ell(\ell')^{\text{ésima}}$ linha lisa (cruzada), que liga os vértices com tempos $\tilde{\tau}_{\ell_1}(\tilde{\tau}_{\ell'_1})$ e $\tilde{\tau}_{\ell_2}(\tilde{\tau}_{\ell'_2})$, onde $\tilde{\tau}$ é τ para tempos internos e t para externos, flue momento $Q_\ell(Q_{\ell'})$. Para linhas internas $Q_\ell(Q_{\ell'})$ é uma combinação de k's e q's enquanto que para linhas externas é simplesmente $q_\ell(q_{\ell'})$. Usaremos essas expressões ao analizarmos o grau de divergência superficial dos gráficos estocásticos.

Podemos agora calcular as integrais temporais em (1.38) e, como estamos no momento interessados no equilíbrio, podemos desprezar o segundo termo de D, dado por (1.32), que decai exponencialmente bem como os termos gerados após a primeira integração temporal, que também decaem exponencialmente. Entretanto, os cálculos podem ser simplificados se usarmos a condição inicial (1.26). Assim, basta utilizarmos a expressão (1.27) para D e também mudar o limite de integração inferior das integrais em τ_1 e τ_2, em (1.38), de

0 para $-\infty$. O equilíbrio é obtido automaticamente, pois como já frizamos, tal escolha corresponde a impor a invariância translacional no quinto tempo nas funções de correlação.

Assim, para $t = t'$, teremos que

$$G_2 = 2\lambda^2 \int_{-\infty}^{t} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2 \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \, e^{-(k^2+m^2)(t-\tau_1)} \, \frac{e^{-[(k-k_1)^2+m^2](\tau_1-\tau_2)}}{(k-k_1)^2+m^2} \times \frac{e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_2)}}{k_1^2+m^2} \, e^{-(k^2+m^2)(t-\tau_2)} \tag{1.47}$$

onde o fator 2 leva em consideração as ordenações temporais $\tau_1 > \tau_2$ e $\tau_1 < \tau_2$. Então, após as integrações temporais obtemos

$$G_2 = \lambda^2 \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k_1^2+m^2)[(k-k_1)^2+m^2][(k-k_1)^2+k_1^2+k^2+3m^2](k^2+m^2)} \tag{1.48}$$

O gráfico G_3 está naturalmente ordenado, $t = t' > \tau_2 > \tau_1$, assim

$$G_3 = \lambda^2 \int_{-\infty}^{t} d\tau_2 \int_{-\infty}^{\tau_2} d\tau_1 \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \, \frac{e^{-(k^2+m^2)(t-\tau_1)}}{k^2+m^2} \, \frac{e^{-[(k-k_1)^2+m^2](\tau_2-\tau_1)}}{(k-k_1)^2+m^2} \times e^{-(k_1^2+m^2)(\tau_2-\tau_1)} \, e^{-(k^2+m^2)(t-\tau_2)} \tag{1.49}$$

e então

$$G_3 = \lambda^2 \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \frac{1}{2(k^2+m^2)^2[(k-k_1)^2+m^2][(k-k_1)^2+k_1^2+k^2+3m^2]} \tag{1.50}$$

Portanto de (1.50), (1.48) e (1.39) teremos que

$$\begin{aligned} G_2 + \cdots + G_6 = \lambda^2 \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \frac{1}{(k^2+m^2)[(k-k_1)^2+k_1^2+k^2+3m^2]} \\ \times \left\{ \frac{1}{[(k-k_1)^2+m^2](k_1^2+m^2)} + \frac{1}{(k^2+m^2)[(k-k_1)^2+m^2]} \right. \\ \left. + \frac{1}{(k^2+m^2)(k_1^2+m^2)} \right\} = \lambda^2 \frac{1}{(k^2+m^2)^2} \int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \frac{1}{[(k-k_1)^2+m^2](k_1^2+m^2)} \end{aligned} \tag{1.51}$$

Assim, mostramos explicitamente a validade de (1.9) para a função de dois pontos, na ordem de um loop. Uma demonstração para todas as ordens de perturbação para

uma teoria escalar pode ser encontrada em Grimus e Hüffel [4], bem como uma maneira sistemática de escrever a expressão analítica de equilíbrio, i.e., independente de quaisquer quinto tempo, dos gráficos estocásticos.

1.3–EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK

Mostraremos agora que a distribuição $P[\phi,t]$ em (1.12) satisfaz a equação de Fokker-Planck (1.13) que, por sua vez, pode ser obtida da equação de Langevin [1,5,16,33]. Antes vamos verificar que para qualquer $F[\phi_\eta]$ vale a igualdade

$$\left\langle F[\phi_\eta]\eta(x,t)\right\rangle_\eta = \frac{d}{2}\left\langle \frac{\delta F[\phi_\eta]}{\delta\phi_\eta(x,t)}\right\rangle_\eta \tag{1.52}$$

Usando (1.5) e (1.6) temos

$$\begin{aligned}\left\langle F[\phi_\eta]\eta(x,t)\right\rangle_\eta &= \int \mathcal{D}\eta\, F[\phi_\eta]\eta(x,t)P[\eta] = -d\int \mathcal{D}\eta\, F[\phi_\eta]\left(\frac{\delta P[\eta]}{\delta\eta(x,t)}\right)\\ &= d\int\mathcal{D}\eta\int d^n y\,\frac{\delta F[\phi_\eta]}{\delta\phi_\eta(y,t)}\frac{\delta\phi_\eta(y,t)}{\delta\eta(x,t)}P[\eta] = d\left\langle\frac{\delta F[\phi_\eta]}{\delta\eta(x,t)}\right\rangle_\eta\end{aligned} \tag{1.53}$$

onde efetuamos uma integração por partes. Agora integrando a equação de Langevin (1.2) temos que

$$\frac{\delta\phi_\eta(y,t')}{\delta\eta(x,t)} = \delta^n(y-x)\theta(t'-t) - \frac{d}{2}\int_t^{t'} d\tau\,\frac{\delta^2 S}{\delta\phi_\eta(y,\tau)\delta\phi_\eta(x,\tau)} + \cdots \tag{1.54}$$

e assim, usando a prescrição de "midpoint" ($\theta(0)=1/2$) obtemos (1.52).

Temos que para $\phi_\eta(x,t)$ satisfazendo a equação de Langevin (1.2)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left\langle F[\phi_\eta(x,t)]\right\rangle_\eta &= \left\langle\int d^n y\,\frac{\delta F[\phi_\eta(x,t)]}{\delta\phi_\eta(y,t)}\frac{\partial\phi_\eta(y,t)}{\partial t}\right\rangle_\eta\\ &= \left\langle\int d^n y\,\frac{\delta F[\phi_\eta(x,t)]}{\delta\phi_\eta(y,t)}\left(-\frac{d}{2}\frac{\delta S}{\delta\phi_\eta(y,t)}+\eta(y,t)\right)\right\rangle_\eta\end{aligned} \tag{1.55}$$

e portanto com auxílio de (1.52) obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle F[\phi(x,t)]\rangle_\eta = \int d^n y \left(-\frac{d}{2}\left\langle \frac{\delta F[\phi(x,t)]}{\delta\phi(y,t)}\frac{\delta S}{\delta\phi(y,t)}\right\rangle_\eta + \frac{d}{2}\left\langle \frac{\delta^2 F[\phi(x,t)]}{\delta\phi^2(y,t)}\right\rangle_\eta \right) \tag{1.56}$$

e em termos de $P[\phi,t]$, introduzido em (1.12), pode ser reescrita

$$\int \mathcal{D}\phi\, F[\phi]\frac{\partial}{\partial t}P[\phi,t] = \frac{d}{2}\int d^n x \int \mathcal{D}\phi \left(-\frac{\delta F}{\delta\phi(x)}\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta^2 F}{\delta\phi^2(x)}\right) P[\phi,t] \tag{1.57}$$

que após integrações por partes fornece

$$\frac{\partial}{\partial t}P[\phi,t] = \frac{d}{2}\int d^n x \,\frac{\delta}{\delta\phi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} + \frac{\delta}{\delta\phi(x)}\right) P[\phi,t] \tag{1.58}$$

que é a equação de Fokker-Planck (1.13).

Agora passaremos a demonstração, não perturbativa, de (1.14), ou seja, que $P[\phi,t]$ tende a distribuição de probabilidade da teoria quântica de campos [1,5,16,33]. Primeiramente vamos reescrever a equação de Fokker-Planck como uma equação do tipo de Schrödinger, através da substituição

$$\Psi[\phi,t] = P[\phi,t]\; \mathrm{e}^{\frac{1}{2}S[\phi]} \tag{1.59}$$

que leva (1.58) a

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi[\phi,t] = -H^{\mathrm{FP}}\Psi[\phi,t] \tag{1.60}$$

onde a Hamiltoniana de Fokker-Planck H^{FP} é

$$H^{\mathrm{FP}} = \int d^n x \left[-\frac{d}{2}\frac{\delta^2}{\delta\phi^2} + \frac{d}{8}\left(\frac{\delta S}{\delta\phi}\right)^2 - \frac{d}{4}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi^2}\right] \tag{1.61}$$

Introduzindo

$$a(x) = -i\left(\frac{\delta}{\delta\phi(x)} + \frac{1}{2}\frac{\delta S}{\delta\phi(x)}\right)$$

(1.61) pode ser escrita na forma

$$H^{\mathrm{FP}} = \frac{d}{2}\int d^n x\, a^\dagger(x) a(x)$$

que explicita a sua hermiticidade e positividade.

A solução de (1.60) pode ser expandida como

$$\Psi[\phi,t] = \sum_n c_n \psi_n \, \mathrm{e}^{-\lambda_n t} \tag{1.62}$$

onde os ψ_n são os autoestados de H^{FP} com autovalores $\lambda_n \geq 0$. Então

$$P[\phi,t] = e^{-\frac{1}{2}S[\phi]} \sum_n c_n \psi_n \, \mathrm{e}^{-\lambda_n t} \tag{1.63}$$

e assumindo que $\lambda_0 = 0$ e $\lambda_1 > \lambda_0$, i.e., que exista um "gap de energia", o único termo que sobrevive para $t \to \infty$ é

$$\lim_{t\to\infty} P[\phi,t] = e^{-\frac{1}{2}S[\phi]} c_0 \psi_0 \tag{1.64}$$

e por substituição direta, em $H^{\mathrm{FP}}\psi_0 = 0$, verificamos que $\psi_0 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}S[\phi]}$. Da condição de normalização

$$\lim_{t\to\infty} \int \mathcal{D}\phi \, P[\phi,t] = 1 \tag{1.65}$$

vem que

$$c_0 = \frac{1}{\int \mathcal{D}\phi \, e^{-S[\phi]}} \tag{1.66}$$

e assim finalmente

$$\lim_{t\to\infty} P[\phi,t] = \frac{\mathrm{e}^{-S[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi \, \mathrm{e}^{-S[\phi]}} \tag{1.67}$$

que é o resultado desejado. Floratos e Iliopoulos [41] também fornecem uma prova de equivalência, só que de maneira perturbativa, dentro do formalismo de Fokker-Planck.

Enfatizamos que a validade de (1.67) depende da positividade da Hamiltoniana de Fokker-Planck e da existência de um "gap de energia" no seu espectro. Na seção 1.7, ao discutirmos a quantização estocástica de sistemas fermiônicos, mostraremos o procedimento a ser seguido quando a Hamiltoniana de Fokker-Planck não é positiva definida.

1.4–TEORIAS DE GAUGE

Vamos agora tratar da quantização estocástica das teorias de gauge, exemplificando os cálculos para uma teoria abeliana com termo de Chern-Simons que, pelo fato de descrever sistemas com estatística fracionária, tem aplicações no estudo do efeito Hall quântico, filmes de hélio superfluído e supercondutividade com alto valor da temperatura crítica. A ação no espaço em três dimensões é

$$S = \int d^3x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{\alpha}{4\pi^2} i \epsilon_{\mu\lambda\nu} A_\mu \partial_\lambda A_\nu \right) \tag{1.68}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

e $\epsilon_{\mu\lambda\nu}$ é o tensor totalmente antisimétrico. Assim, S pode ser reescrita na forma

$$S = \frac{1}{2} \int d^3x \, A_\mu(x) \left(-\Box \delta_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu - \frac{\alpha}{2\pi^2} i \epsilon_{\mu\lambda\nu} \partial_\lambda \right) A_\nu(x) \tag{1.69}$$

A equação de Langevin para o campo A_μ é

$$\frac{\partial A_\mu(x,t)}{\partial t} = -\frac{\delta S[A]}{\delta A_\mu(x,t)} + \eta_\mu(x,t) \tag{1.70}$$

onde

$$\langle \eta_\mu(x,t) \, \eta_\nu(x',t') \rangle_\eta = 2\delta_{\mu\nu} \, \delta^3(x-x') \, \delta(t-t') \tag{1.71}$$

No espaço dos momentos teremos

$$\frac{\partial A_\mu(k,t)}{\partial t} = \left(-k^2 \, T_{\mu\nu} + \mu \, \epsilon_{\mu\nu\lambda} k_\lambda \right) A_\nu(k,t) + \eta_\mu(k,t) \tag{1.72}$$

onde

$$\mu \equiv \frac{\alpha}{2\pi^2} \tag{1.73}$$

com

$$\langle \eta_\mu(k,t) \, \eta_\nu(k',t') \rangle_\eta = 2(2\pi)^3 \, \delta_{\mu\nu} \, \delta^3(k+k') \, \delta(t-t') \tag{1.74}$$

$T_{\mu\nu}$ é o operador de projeção transversal

$$T_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \tag{1.75}$$

que junto com o operador de projeção longitudinal, $L_{\mu\nu}$, dado por

$$L_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} = \delta_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} \tag{1.76}$$

satisfazem

$$\begin{aligned} &T_{\mu\lambda}T_{\lambda\nu} = T_{\mu\nu} && T_{\mu\lambda}k_\lambda = 0 \\ &L_{\mu\lambda}L_{\lambda\nu} = L_{\mu\nu} && L_{\mu\lambda}k_\lambda = k_\mu \\ &T_{\mu\lambda}L_{\lambda\nu} = 0 \end{aligned} \tag{1.77}$$

A função de Green retardada de (1.72) pode ser escrita como

$$G_{\mu\nu}(k,t) = \theta(t)\left[\exp(-k^2T + \mu\,\epsilon\cdot k)t\right]_{\mu\nu} \tag{1.78}$$

onde

$$(\epsilon\cdot k)_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda}k_\lambda \tag{1.79}$$

e com o auxílio das identidades

$$\begin{aligned} T(\epsilon\cdot k) &= \epsilon\cdot k \\ L(\epsilon\cdot k) &= 0 \\ (\epsilon\cdot k)^2 &= -k^2T \end{aligned} \tag{1.80}$$

assume a forma

$$G_{\mu\nu}(k,t) = \theta(t)\left[\frac{1}{\sqrt{k^2}}\,\mathrm{sen}\,(\mu\sqrt{k^2}t)\;\mathrm{e}^{-k^2t}\;\epsilon\cdot k + \cos(\mu\sqrt{k^2}t)\;\mathrm{e}^{-k^2t}\;T + L\right]_{\mu\nu} \tag{1.81}$$

Para a condição inicial

$$A_\mu(k,t_0) = A^0_\mu \tag{1.82}$$

a solução de (1.72) é

$$A_\mu(k,t) = \int_{t_0}^{\infty} d\tau\, G_{\mu\nu}(k,t-\tau)\,\eta_\nu(k,\tau) + G_{\mu\nu}(k,t-t_0)\,A^0_\nu \tag{1.83}$$

e a função de dois pontos para o campo de gauge resulta em

$$\left\langle A_\mu(k,t)\,A_\nu(k',t')\right\rangle_\eta = (2\pi)^3\,\delta^3(k+k')\int_{t_0}^{\min(t,t')} d\tau$$

$$\times\left\{\cos[\mu\sqrt{k^2}(t+t'-2\tau)]\,\mathrm{e}^{-k^2(t+t'-2\tau)}\,T+\frac{1}{\sqrt{k^2}}\,\mathrm{sen}\,[\mu\sqrt{k^2}(t+t'-2\tau)]\,\mathrm{e}^{-k^2(t+t'-2\tau)}\,\epsilon\cdot k+L\right\}_{\mu\nu}$$

$$+G_{\mu\alpha}(k,t-t_0)\,A^0_\alpha\,G_{\nu\beta}(k',t'-t_0)\,A^0_\beta \tag{1.84}$$

De (1.82) e (1.81) verificamos que ao contrário do caso escalar (equação (1.23)) temos uma dependência na condição inicial que sobrevive para valores grandes do quinto tempo, i.e., não decai exponencialmente. Também, tomando $t = t'$ em (1.84), usando que $t_0 = 0$ com $A^0_\mu = 0$ e efetuando a integração temporal obtemos

$$\left\langle A_\mu(k,t)\,A_\nu(k',t)\right\rangle_\eta = (2\pi)^3\,\delta^3(k+k')\left\{\frac{1}{k^2+\mu^2}\,T+\frac{1}{k^2(k^2+\mu^2)}\mu\,\epsilon\cdot k+2tL\right.$$

$$\left.-\frac{\cos(2\mu\sqrt{k^2}t)\,\mathrm{e}^{-2k^2t}}{k^2(k^2+\mu^2)}\,(k^2T+\mu\,\epsilon\cdot k)+\frac{\mathrm{sen}\,(2\mu\sqrt{k^2}t)\,\mathrm{e}^{-2k^2t}}{\sqrt{k^2}(k^2+\mu^2)}\,(\mu T-\epsilon\cdot k)\right\}_{\mu\nu} \tag{1.85}$$

que não converge para o equilíbrio quando $t\to\infty$, devido a presença de um termo com dependência linear na parte longitudinal do propagador. A origem desse termo pode ser vista se projetarmos a equação de Langevin (1.72) em suas componentes longitudinal e transversal, dadas por

$$\frac{\partial A^T_\mu}{\partial t} = \left(-k^2A^T_\mu+\mu\epsilon_{\mu\nu\lambda}k_\lambda\,A^T_\nu\right)+\eta^T_\mu \tag{1.86a}$$

$$\frac{\partial A^L_\mu}{\partial t} = \eta^L_\mu \tag{1.86b}$$

onde

$$\begin{aligned} A^T_\mu &= T_{\mu\nu}A_\nu & \eta^T_\mu &= T_{\mu\nu}\eta_\nu \\ A^L_\mu &= L_{\mu\nu}A_\nu & \eta^L_\mu &= L_{\mu\nu}\eta_\nu \end{aligned} \tag{1.87}$$

de modo que a equação (1.86b) descreve um processo de difusão pura, i.e., não temos o termo de atrito que aparece em (1.86a) e também no caso escalar, responsável pelo decaimento exponencial e consequentemente pela convergência. De acordo com Parisi e Wu

[1] quantidades invariantes de gauge são bem definidas no limite de equilíbrio. Assim, o cálculo de, por exemplo, $\langle F_{\mu\nu}(k,t)F_{\alpha\beta}(k',t')\rangle_\eta$ fornece o resultado usual devido ao cancelamento dos termos longitudinais. Também no caso de teorias de gauge não abelianas o mesmo resultado é válido, como mostrado explicitamente por Namiki et al [7].

Voltando a expressão (1.85), notamos que a menos do termo longitudinal, temos no equilíbrio o resultado usual para o propagador no gauge de Lorentz. Entretanto, até o momento não fixamos nenhum gauge particular. Vamos mostrar agora que a fixação de gauge está ligada com a escolha das condições iniciais do processo estocástico. Sem perda de generalidade vamos tomar $\mu = 0$ em (1.84), que corresponde ao caso da quantização estocástica do campo de Maxwell, e então (1.84) após a integração no quinto tempo fica

$$\langle A_\mu(k,t)\,A_\nu(k',t')\rangle_\eta = (2\pi)^3\,\delta^3(k+k')\left\{\frac{1}{k^2}T_{\mu\nu}\left[e^{-k^2|t-t'|} - e^{-k^2(t+t'-2t_0)}\right]\right.$$
$$\left. +2L_{\mu\nu}\Big(\min(t,t') - t_0\Big)\right\} + A^L_\mu(k,t_0)\,A^L_\nu(k',t_0) \tag{1.88}$$

e onde desprezamos o termo transversal da condição inicial, que decai exponencialmente. Como sugerido por Namiki et al [7] vamos considerar que a condição inicial $A^L_\mu(k,t_0)$ tem a forma

$$A^L_\mu(k,t_0) = \frac{k_\mu}{k^2}\phi(k) \tag{1.89}$$

onde $\phi = \phi^*$ satisfaz a seguinte distribuição de probabilidades

$$P[\phi] = \frac{\exp\left\{-1/2\alpha\int d^3x\,\phi^2\right\}}{\int \mathcal{D}\phi\,\exp\left\{-1/2\alpha\int d^3x\,\phi^2\right\}} \tag{1.90}$$

Como $A_\mu(k,t) = A^*_\mu(-k,t)$ temos que $\phi(-k) = -\phi(k)$ e portanto

$$\langle\phi(k)\phi(k')\rangle_\phi = -\langle\phi(k)\phi(-k')\rangle_\phi = -(2\pi)^3\,\alpha\,\delta^3(k+k') \tag{1.91}$$

assim (1.88) com a média em ϕ, dada por (1.90), fornece

$$\langle A_\mu(k,t)\,A_\nu(k',t')\rangle_{\eta,\phi} \xrightarrow{t=t'\to\infty} (2\pi)^3\,\delta^3(k+k')\left\{\frac{1}{k^2}\left[\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right]\right.$$
$$\left. +2(t-t_0)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right\} \tag{1.92}$$

que a menos do característico termo longitudinal é idêntico ao propagador obtido via integração funcional com a fixação no gauge de Feynman. Apesar de encontrarmos frequentemente na literatura a afirmação de que o método de quantização estocástica está livre da fixação de gauge devemos encará-la como mostrado acima, i.e., a dependência do propagador no parâmetro de gauge α entra através da condição inicial. Também podemos entender a razão da não necessidade da fixação de gauge usual (adição de um termo na Lagrangeana) observando que na equação de Langevin (1.72) o termo $\partial/\partial t\,\delta_{\mu\nu}$ quando adicionado ao operador singular $k^2\delta_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu - \mu\epsilon_{\mu\nu\lambda}k_\lambda$ produz um operador inversível.

No caso não abeliano a fixação de gauge leva a introdução dos campos de fantasmas de Faddeev-Popov [6] na formulação de integrais de trajetória. Na quantização estocástica os efeitos devido aos fantasmas são produzidos automaticamente pela parte longitudinal do propagador do campo de gauge, como também é mostrado explicitamente por Namiki et al [7] através de cálculos perturbativos.

Além do propagador (1.92), apresentar o termo longitudinal que diverge no limite de equilíbrio, também o comportamento ultravioleta, para tempo fictício finito, desse termo não é bom. No que se refere a renormalizabilidade da teoria, o fato de que as contribuições dos gráficos individuais, para os observáveis, não serem invariantes de gauge (mas sim sua soma), e portanto divergirem devido a contribuição longitudinal do propagador, levam a uma teoria não renormalizável por contagem de potências. Estas dificuldades podem ser superadas através da *fixação de gauge* de Zwanziger [10,42] que consiste em modificar a equação de Langevin usual pela adição de um termo, a força de fixação de gauge, de modo que

$$\frac{\partial A^a_\mu(x,t)}{\partial t} = -\frac{\delta S[A]}{\delta A^a_\mu(x,t)} - D^{ab}_\mu \vartheta^b + \eta^a_\mu(x,t) \tag{1.93}$$

onde $\vartheta^a = \vartheta^a[A,x]$, é um funcional arbitrário de A^a_μ não invariante de gauge. Vamos mostrar que para uma quantidade invariante de gauge o termo $D^{ab}_\mu\vartheta^b$ é irrelevante.

Por uma transformação de gauge infinitesimal, com parâmetros $\varepsilon^a(x)$, os campos $A^a_\mu(x)$ transformam-se como

$$\delta A^a_\mu(x) = D^{ab}_\mu \varepsilon^b(x) \tag{1.94}$$

onde

$$D^{ab}_\mu \equiv \delta^{ab}\partial_\mu - f^{abc}A^c_\mu(x)$$

e um funcional $F[A]$ como

$$\delta F[A] = -\int d^n x\, \varepsilon^a(x)\, D^{ab}_\mu \frac{\delta F[A]}{\delta A^b_\mu(x)} \tag{1.95}$$

e assim, para que $F[A]$ seja invariante de gauge, devemos ter então que

$$D_\mu^{ab} \frac{\delta F[A]}{\delta A_\mu^b(x)} = 0 \tag{1.96}$$

Por sua vez, no caso estocástico, a evolução temporal de $F[A]$ é

$$\frac{\partial F[A]}{\partial t} = \int d^n x \, \frac{\delta F[A]}{\delta A_\mu^a(x,t)} \, \frac{\partial A_\mu^a(x,t)}{\partial t}$$

e se substituirmos a equação de Langevin (1.93) e usarmos (1.96) concluimos que o termo proporcional a ϑ^a não contribue. Também a adição do termo $D_\mu^{ab}\vartheta^b$ faz com que as quantidades não invariantes de gauge possam ser calculadas, pois não mais divergem no equilíbrio. Por exemplo, a equação de Langevin (1.72) com termo de fixação de gauge de Zwanziger $\vartheta = 1/\alpha \, \partial_\mu A_\mu$ torna-se

$$\frac{\partial A_\mu(k,t)}{\partial t} = \left[-k^2 \left(T_{\mu\nu} + \frac{1}{\alpha} L_{\mu\nu} \right) + \mu \, \epsilon_{\mu\nu\lambda} k_\lambda \right] A_\nu(k,t) + \eta_\mu(k,t) \tag{1.97}$$

sendo que agora a parte longitudinal da equação acima possui um termo de atrito. O cálculo do propagador para A_μ fornece, para $\mu = 0$, a expressão (1.92) sem o termo divergente.

A média de $F[A]$ pode ser calculada por

$$\langle F \rangle_\eta = \int \mathcal{D}A_\mu \, F[A] \, P_\vartheta[A,t] \tag{1.98}$$

onde P_ϑ é uma distribuição de probabilidades que satisfaz a seguinte equação de Fokker-Planck

$$\frac{\partial P_\vartheta[A,t]}{\partial t} = \int d^n x \, \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} \left(\frac{\delta S}{\delta A_\mu^a(x)} + \frac{\delta}{\delta A_\mu^a(x)} + D_\mu^{ab}\vartheta^b \right) P_\vartheta[A,t] \tag{1.99}$$

obtida, por cálculos análogos ao caso escalar, da equação de Langevin (1.93). Para $F[A]$, invariante de gauge, a distribuição de probabilidades $P_\vartheta[A,t]$, para $\vartheta = 0$, não tem o limite para $t \to \infty$ apesar de (1.98) fornecer o resultado usual. Já para $\vartheta \neq 0$ a média de $F[A]$ independe de ϑ, para quantidades invariantes de gauge, e também as médias para quantidades não invariantes de gauge estão definidas [41].

Baulieu e Zwanziger [8] mostraram que uma escolha particular de ϑ existe de modo ao método reproduzir os resultados obtidos com a quantização de Faddeev-Popov com fixação

de gauge covariante. Floratos et al [43], partindo da equação de Fokker-Planck (1.99) no equilíbrio, $\partial P_\vartheta/\partial t = 0$, desenvolveram uma expansão perturbativa para teorias de Yang-Mills sem a introdução de fantasmas de Faddeev-Popov. Também, Nakagoshi et al [44] interpretam o termo adicional em (1.93) como adivindo de um vínculo não holonômico covariante adicionado as equações clássicas de campo. Finalmente, vamos observar que esse tipo de fixação de gauge não necessita de uma parametrização do espaço das orbitas de gauge e assim, em princípio, evita as ambiguidades de Gribov [9] que existem no caso do método de Faddeev-Popov.

1.5–REGULARIZAÇÃO

Determinaremos agora o grau de divergência superficial dos diagramas estocásticos. Das equações (1.45) e (1.46) a expressão analítica de um gráfico estocástico, desprezando a contribuição das linhas externas, é

$$\int \prod_{i=1}^{L} \frac{d^n k_i}{(2\pi)^n} \int \prod_{i=1}^{V} d\tau_i \prod_{\ell=1}^{N_{IL}} G(Q_\ell; \tau_{\ell_1} - \tau_{\ell_2}) \prod_{\ell'=1}^{N_{I\times}} D(Q_{\ell'}; \tau_{\ell'_1}, \tau_{\ell'_2}) \tag{1.100}$$

rescrevendo $D(k;t,t')$, dado por (1.32), na forma

$$D(k;t,t') = \int_{|t-t'|}^{t+t'} d\alpha \; \mathrm{e}^{-\alpha(k^2+m^2)} = |t-t'| \int_{1}^{\frac{t+t'}{|t-t'|}} d\beta \; \mathrm{e}^{-\beta|t-t'|(k^2+m^2)} \tag{1.101}$$

e usando (1.19) a expressão (1.100) fica

$$\int \prod_{i=1}^{L} \frac{d^n k_i}{(2\pi)^n} \int \prod_{i=1}^{V} d\tau_i \prod_{\ell=1}^{N_{IL}} \theta(\tau_{\ell_1} - \tau_{\ell_2}) \exp\left[-(\tau_{\ell_1} - \tau_{\ell_2})(Q_\ell^2 + m^2)\right]$$
$$\times \prod_{\ell'=1}^{N_{I\times}} |\tau_{\ell'_1} - \tau_{\ell'_2}| \int_{1}^{\frac{\tau_{\ell'_1}+\tau_{\ell'_2}}{|\tau_{\ell'_1}-\tau_{\ell'_2}|}} d\beta_{\ell'} \exp\left[-\beta_{\ell'}|\tau_{\ell'_1} - \tau_{\ell'_2}|(Q_{\ell'}^2 + m^2)\right] \tag{1.102}$$

Rescalonando, como usualmente, os momentos internos $k_i \to \lambda k_i$, com $\lambda \to \infty$, obtemos

que o grau de divergência superficial d é

$$d = nL - 2(V-1) - 2N_{I\times} \tag{1.103}$$

onde os termos $-2(V-1)$ e $-2N_{I\times}$ são obtidos observando que os rescalonamentos dos k_i presentes nas exponenciais (nos termos Q_ℓ e $Q_{\ell'}$) são equivalentes ao reescalonamento das diferenças temporais por $\tau_i - \tau_j \to \lambda^{-2}(\tau_i - \tau_j)$ no integrando e na medida de integração. Usando (1.42) podemos reescrever (1.103) como

$$d = nL - 2N_I - 2N_{EL} + 2 \tag{1.104}$$

mas $nL - 2N_I$ é exatamente o grau de divergência superficial dos gráficos de Feynman da teoria usual. Concluimos então que os diagramas estocásticos tem grau de divergência superficial menor ou igual que os da teoria usual e assim os esquemas de regularização convencionais da teoria quântica de campos podem ser extendidos a quantização estocástica [37]. Discussões acerca da aplicação da regularização dimensional no formalismo estocástico podem ser encontrados em [34] e [45].

Entretanto, o quinto tempo da quantização estocástica sugere novos esquemas de regularização, denominados genericamente de *regularização estocástica.* Um desses esquemas, devido a Breit et al [5], utiliza um processo Gaussiano não Markoviano, i.e., ao invés de usarmos (1.6) para a distribuição de probabilidades do ruído η usamos

$$P[\eta] = \frac{\exp\left\{-1/4 \int d^n x\, dt\, dt'\, \eta(x,t)\alpha_\Lambda^{-1}(t-t')\eta(x,t')\right\}}{\int \mathcal{D}\eta \exp\left\{-1/4 \int d^n x\, dt\, dt'\, \eta(x,t)\alpha_\Lambda^{-1}(t-t')\eta(x,t')\right\}} \tag{1.105}$$

onde agora

$$\left\langle \eta(k,t)\,\eta(k',t')\right\rangle_\eta = (2\pi)^n \delta^n(k+k')\,\alpha_\Lambda(t-t') \tag{1.106}$$

e α_Λ é uma função suave escolhida de modo que

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \alpha_\Lambda(t-t') = 2\delta(t-t') \tag{1.107}$$

e assim Λ faz o papel de regulador. Temos agora que para a teoria escalar

$$D(k;t,t') = \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau'\, G(k;t-\tau)\, G(k;t'-\tau')\, \alpha_\Lambda(\tau-\tau') \tag{1.108}$$

e com a seguinte decomposição de Fourier para α_Λ

$$\alpha_\Lambda(\tau-\tau') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega(\tau-\tau')}\, \rho_\Lambda(\omega) \tag{1.109}$$

com

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \rho_\Lambda(\omega) = 1 \tag{1.110}$$

teremos que

$$D(k;t,t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \frac{\rho_\Lambda(\omega)}{\omega^2+(k^2+m^2)^2}\, e^{i\omega(t-t')} + \mathcal{O}\left(e^{-\omega(t-t')}\right) \tag{1.111}$$

Como todo loop tem pelo menos uma linha cruzada a divergência do gráfico diminui por um fator dois e assim para divergências logarítmicas teremos loops finitos. Entretanto, para divergências quadráticas isso nem sempre é possível. Por exemplo, o "tadpole" da teoria $\lambda\phi^3$, em $n=4$ dimensões, é quadraticamente divergente e tem a expressão analítica

$$-\frac{\lambda}{2!}\delta(k)\int_0^\infty d\tau\, G(k;t-\tau)\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, D(p;\tau,\tau) \tag{1.112}$$

A integral divergente resulta, após substituirmos (1.108), na expressão

$$\begin{aligned}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, D(p;\tau,\tau) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dt'\, G(p;\tau-t)\, G(p;\tau-t')\, \alpha_\Lambda(t-t') \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^\tau dt \int_0^\tau dt'\, e^{-(p^2+m^2)(2\tau-t-t')}\, \alpha_\Lambda(t-t')\end{aligned} \tag{1.113}$$

e divergências ultravioletas surgem quando $2\tau - t - t' = 0$ mas como $\tau \geq t$ e $\tau \geq t'$ teremos que $t = t' = \tau$. Assim, a singularidade estará multiplicada por $\alpha_\Lambda(0)$ e obtemos um resultado finito apenas se

$$\alpha_\Lambda(0) = 0 \tag{1.114}$$

Entretanto de (1.105) vemos que para $P[\eta]$ ser positiva definida devemos ter $\alpha_\Lambda(0) > 0$.

Pode-se trabalhar operacionalmente usando (1.106) como regra, mas a regularização estocástica só terá sentido não perturbativo para teorias sem divergências quadráticas.

Quanto a forma de α_Λ costuma-se usar [5] a série

$$\alpha_\Lambda(t) = \mathcal{D}_n(\Lambda^2)\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\Lambda^2|t|} \tag{1.115}$$

com

$$\mathcal{D}_n(\Lambda^2) = \frac{(\Lambda^2)^n}{(n-1)!}(-1)^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial\Lambda^2}\right)^{n-1}$$

Para $n = 1$ o regulador $\alpha_\Lambda(t)$ não satisfaz (1.114), e portanto não regula divergências quadráticas. Para $n = 2$

$$\alpha_\Lambda(t) = \frac{1}{2}\Lambda^2|t|\,\mathrm{e}^{-\Lambda^2|t|} \tag{1.116}$$

Ao invés de usarmos o comportamento assintótico de $\alpha_\Lambda(t)$ para $\Lambda \to \infty$ podemos introduzir um outro parâmetro ε, ligado a Λ por uma transformada de Mellin, e estudar o comportamento de $\alpha_\varepsilon(t)$ para $\varepsilon \to 0$ através da análise das singularidades de α em ε. Assim, (1.116) resulta em [11]

$$\alpha_\varepsilon(t) = \frac{1}{2}\varepsilon|t|^{\varepsilon-1} \tag{1.117}$$

com

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon(t) = \delta(t) \tag{1.118}$$

ao qual denominaremos de regulador de Alfaro. Esse regulador faz com que as divergências ultravioletas apareçam como polos em ε definindo, portanto, a chamada *regularização analítica estocástica* e permitindo, consequentemente, a introdução de um esquema de subtração minimal. É uma regularização semelhante a regularização analítica de Speer [46], e não tem as limitações da regularização dimensional, quando aplicada a teorias com simetria quiral ou a teorias não massivas, pois não muda as dimensões espaço-temporais e o quinto tempo também funciona como um regulador infravermelho. Na verdade a última afirmação é de natureza geral para o método de quantização estocástica, i.e., não depende de nenhuma regularização. Podemos exemplificar tal fato observando que o propagador estocástico para uma teoria sem massa, em duas dimensões, pode ser escrito como

$$D(x;t,t') = \int_{|t-t'|}^{t+t'} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{ikx-\alpha k^2} \tag{1.119}$$

onde usamos (1.101) e efetuamos uma transformação de Fourier. Após a integração em k e uma mudança de variáveis chegamos facilmente a

$$D(x;t,t') = \frac{1}{4\pi} \int_{x^2/4(t+t')}^{x^2/4|t-t'|} d\alpha \, \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} \tag{1.120}$$

que para $t = t'$

$$D(x,t) = \frac{1}{4\pi} \int_{x^2/8t}^{\infty} d\alpha \, \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{4\pi} \mathrm{Ei}(x^2/8t) \tag{1.121}$$

onde $\mathrm{Ei}(x)$ é a função integral exponencial dada por

$$\mathrm{Ei}(x) = -\gamma - \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n\, n!} \tag{1.122}$$

sendo γ a constante de Euler-Mascheroni. No limite para o equilíbrio teremos

$$D(x,t) \quad \xrightarrow{t\to\infty} \quad -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{x^2\, e^{\gamma}}{8t} \tag{1.123}$$

mostrando a regularização no infravermelho automática, através de t, dentro do formalismo estocástico. Podemos entender esse resultado mais diretamente observando que a equação de Langevin, para uma teoria escalar com massa nula, quando escrita em termos de ω, a transformada de Fourier do quinto tempo t (ver apêndice), fornece

$$\left(i\omega + k^2\right) \phi(k,\omega) = \eta(k,\omega)$$

mostrando que o termo $i\omega$ funciona como uma massa extra, que desaparece no limite de equilíbrio. A regularização infravermelha implícita na quantização estocástica foi explorada no cálculo de expoentes críticos, em dimensões menores que quatro [47,48], pois contrariamente a expansão em ϵ, permite que os cálculos sejam feitos diretamente nos valores físicos da dimensionalidade, devido a ausência de divergências infravermelhas.

A aplicação do método de regularização estocástica para as teorias de gauge abelianas é mostrado por Bern [49], na QED escalar, e por Gavela e Hüffel [50], na QED espinorial; enquanto que, para as teorias não abelianas, por Abdalla et al [39,51], para a QCD escalar,

e por González-Arroyo e Martín [52], para uma teoria de Yang-Mills pura. Para teorias supersimétricas, resultados obtidos por Viana e Abdalla [35,51], indicam que o esquema de regularização estocástica preserva essa simetria. Também, no estudo de anomalias quirais [50,53–61], de paridade [62] e no cálculo de expoentes críticos [47,48] a regularização estocástica foi aplicada.

Como já salientamos o tratamento de divergências quadráticas impoe ao regulador estocástico o vínculo (1.114) que por sua vez não deixa a distribuição de probabilidades do ruído, $P[\eta]$, positiva definida, comprometendo o método de um ponto de vista não perturbativo. Também, Bern e Halpern [63] mostraram que o método de regularização estocástica é incompativel com a fixação de gauge de Zwanziger. Em vista desses dois problemas Bern et al [12] propuseram um esquema de regularização estocástica alternativo, que aparentemente contorna tais incovenientes, baseado na seguinte equação de Langevin regularizada

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(x,t)} + \int d^n y\, R(\triangle)_{xy}\,\eta(y,t) \tag{1.124}$$

com

$$\langle \eta(x,t)\,\eta(x',t')\rangle_\eta = 2\,\delta^n(x-x')\,\delta(t-t')$$

onde R, que depende de um regulador Λ, é uma função de $\triangle = \partial_\mu\partial_\mu$ para teorias escalares, $\triangle = D_\mu D_\mu$ para teorias de gauge e $R = 1$ recai no caso usual. Esse método, como a regularização apresentada anteriormente, faz um "smearing" no ruído, entretanto, de maneira Markoviana pois modifica apenas a parte espaço temporal da teoria. Mais importante ainda é o fato do ruído ser alterado de maneira covariante. Bern et al aplicaram o método para teorias escalares [64] e teorias de gauge [65].

1.6–RENORMALIZAÇÃO

Tendo mostrado que os gráficos estocásticos podem ser regularizados através dos esquemas tradicionais, bem como pelos novos que descrevemos anteriormente, vamos procurar entender como se processa a renormalização da teoria no formalismo de Langevin [11,40,47,48,66], tomando a teoria $\lambda\phi^4$ (em $n = 4$ dimensões) como exemplo. A equação de Langevin é

$$\frac{\partial\phi_0(x,t_0)}{\partial t_0} = (\Box - m_0^2)\phi_0(x,t_0) - \frac{\lambda_0}{3!}\phi_0^3(x,t_0) + \eta_0(x,t_0) \tag{1.125}$$

com

$$\langle \eta_0(x,t_0)\,\eta_0(x',t_0')\rangle_\eta = 2\delta^4(x-x')\,\delta(t_0-t_0')$$

onde ϕ_0, m_0, λ_0, t_0 e η_0 referem-se, como é usual, as grandezas não renormalizadas ou nuas. Da equação (1.104) obtemos para o grau de divergência superficial dos gráficos estocásticos

$$d = 6 - 3N_{EL} - N_{E\times} \tag{1.126}$$

onde usamos que $4L - 2N_I = 4 - N_E$ de acordo com a contagem de potências do caso não estocástico. Assim, os gráficos estocásticos 1PI, irredutíveis, divergentes são os mostrados na figura 1.1, onde (a) e (b) têm grau de divergência quadrática e (c) e (d) logarítmica.

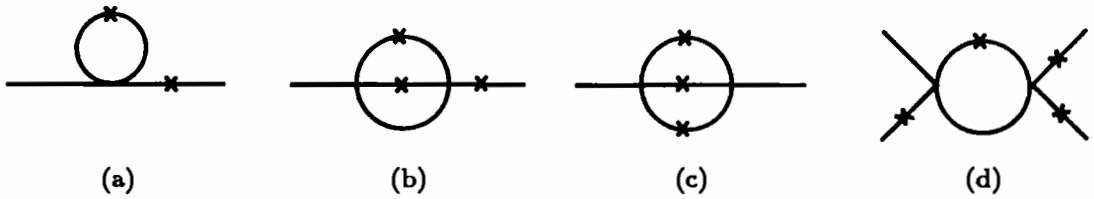


Figura 1.1 – Diagramas 1PI divergentes para a teoria $\lambda\phi^4$. Os gráficos (a) e (b) são quadraticamente divergentes e os (c) e (d) são logaritmicamente divergentes.

Essas divergências podem ser absorvidas se adicionarmos contratermos na equação de Langevin, de modo que ao resolvermos a mesma por iteração, produzamos termos que cancelam as divergências em questão. Obtemos então a seguinte equação de Langevin renormalizada

$$Z_t\frac{\partial\phi_R(x,t_R)}{\partial t_R} = Z_\phi(\Box - m_R^2)\phi_R(x,t_R) - \delta m^2\,\phi_R(x,t_R) - Z_\lambda\frac{\lambda_R}{3!}\phi_R^3(x,t_R) + \eta_R(x,t_R) \tag{1.127}$$

com

$$\langle \eta_R(x,t_R)\,\eta_R(x',t_R')\rangle_\eta = 2Z_\eta^2\delta^4(x-x')\,\delta(t_R-t_R')$$

Os gráficos (a) e (b) têm a divergência quadrática absorvida por δm^2 e a logarítmica por Z_t e Z_ϕ. A divergência logarítmica do gráfico (d) é absorvida por Z_λ e a do gráfico (c) por Z_η.

A equação de Langevin renormalizada (1.127) pode ser obtida de (1.125) através da

seguinte redefinição dos parâmetros e normalização do campo

$$\begin{aligned}
\phi_0(x,t_0) &= Z_\eta^{-1}\, Z_t^{1/2}\, Z_\phi^{1/2}\, \phi_R(x,t_R) \\
\lambda_0 &= Z_\lambda\, Z_\phi^{-2}\, Z_\eta^2\, Z_t^{-1}\, \lambda_R \\
m_0^2 &= m_R^2 + \frac{\delta m^2}{Z_\phi} \\
\eta_0(x,t_0) &= Z_\phi^{-1/2}\, Z_\eta^{-1}\, Z_t^{1/2}\, \eta_R(x,t_R) \\
t_0 &= Z_t^{-1}\, Z_\phi\, t_R
\end{aligned} \tag{1.128}$$

onde Z_t, Z_ϕ, Z_λ, Z_η e δm^2 são as constantes de renormalização.

Podemos calcular o propagador cruzado $D_R(k;t'_R,t_R)$, a partir de (1.127), e que resulta em

$$D_R(k;t'_R,t_R) = \frac{Z_\eta^2}{Z_t\,[Z_\phi(k^2+m^2)+\delta m^2]} \left\{ \mathrm{e}^{-\frac{Z_\phi(k^2+m^2)+\delta m^2}{Z_t}|\,t_R - t'_R\,|} - \mathrm{e}^{-\frac{Z_\phi(k^2+m^2)+\delta m^2}{Z_t}(t_R+t'_R)} \right\} \tag{1.129}$$

sendo o único lugar onde a constante de renormalização do ruído, Z_η, aparece nos cálculos perturbativos. Por outro lado, mostraremos no capítulo seguinte que vale a seguinte identidade de Ward [28]

$$Z_t = Z_\eta^2 \tag{1.130}$$

mostrando que Z_η e Z_t não são independentes. Além do mais as relações (1.128) ficam

$$\begin{aligned}
\phi_0(x,t_0) &= Z_\phi^{1/2}\, \phi_R(x,t_R) \\
\lambda_0 &= Z_\lambda\, Z_\phi^{-2}\, \lambda_R \\
m_0^2 &= m_R^2 + \frac{\delta m^2}{Z_\phi} \\
\eta_0(x,t_0) &= Z_\phi^{-1/2}\, \eta_R(x,t_R) \\
t_0 &= Z_t^{-1}\, Z_\phi\, t_R
\end{aligned} \tag{1.131}$$

onde agora a relação entre as grandezas renormalizadas e nuas para ϕ, λ e m são as usuais (do equilíbrio) e Z_t só entra na definição de t_0, desaparecendo no equilíbio (como sugere a dependência em (1.129) e na função de Green de (1.127)) pois a teoria usual independe dessa constante de renormalização.

No segundo capítulo as funções de Green estocásticas serão obtidas por um funcional gerador expresso em termos de integração por trajetórias. A ação presente nesse formalismo define uma teoria de campos em $n+1$ dimensões e os métodos convencionais de renormalização poderão então ser usados no estudo da teoria de perturbação estocástica. No capítulo 4 voltaremos ao formalismo de Langevin e discutiremos alguns aspectos ligados ao grupo de renormalização.

1.7–FÉRMIONS

Neste ponto generalizaremos o método de quantização estocástica afim de introduzirmos campos fermiônicos de spin 1/2 [5,13,14,67,68]. Trabalharemos com matrizes γ_μ antihermitianas normalizadas por

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu} \tag{1.132}$$

que, por exemplo, em duas dimensões podem ser escolhidas como

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.133}$$

de modo que nossa ação fermiônica Euclideana livre é

$$S[\psi, \overline{\psi}] = -i \int d^2x\, \overline{\psi}(x)(\not{\partial} + im)\psi(x) \tag{1.134}$$

Como, no espaço Euclideano, ψ e $\overline{\psi}$ são variáveis de Grassmann *independentes* teremos duas equações de Langevin, que podemos escolher como

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{\delta S[\psi,\overline{\psi}]}{\delta\overline{\psi}(x,t)} + \theta(x,t) \tag{1.135a}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}(x,t)}{\partial t} = \frac{\delta S[\psi,\overline{\psi}]}{\delta\psi(x,t)} + \overline{\theta}(x,t) \tag{1.135b}$$

onde os ruídos $\theta(x,t)$ e $\overline{\theta}(x,t)$ são também variáveis anticomutantes que, como no caso bosônico, obedecem

$$\begin{gathered} \langle\theta(x,t)\rangle_{\theta\overline{\theta}} = \langle\overline{\theta}(x,t)\rangle_{\theta\overline{\theta}} = 0 \\ \langle\theta_a(x,t)\overline{\theta}_b(x',t')\rangle_{\theta\overline{\theta}} = 2\delta_{ab}\,\delta^2(x-x')\delta(t-t') \end{gathered} \tag{1.136}$$

e os sinais adotados em (1.135) garantem a convergência no limite de equilíbrio. Assim, as equações de Langevin (1.135) para a ação (1.134) fornecem no espaço dos momentos (veja o apêndice)

$$\frac{\partial\psi(k,t)}{\partial t} = -(\not{k}+m)\psi(k,t) + \theta(k,t) \tag{1.137a}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}(k,t)}{\partial t} = -\overline{\psi}(k,t)(\not{k}+m) + \overline{\theta}(k,t) \tag{1.137b}$$

com

$$\langle\theta_a(k,t)\overline{\theta}_b(k',t')\rangle_{\theta\overline{\theta}} = 2(2\pi)^2\delta_{ab}\,\delta^2(k-k')\delta(t-t') \tag{1.138}$$

As funções de Green de (1.137), para as condições iniciais $\psi(k,0) = \overline{\psi}(k,0) = 0$, são

$$G(k,t) = \overline{G}(k,t) = \theta(t)\,\mathrm{e}^{-(\not{k}+m)t} \tag{1.139}$$

de modo que a solução de (1.137) é então

$$\psi_\theta(k,t) = \int_0^t d\tau\, G(k,t-\tau)\theta(k,\tau) \tag{1.140a}$$

$$\overline{\psi}_{\overline{\theta}}(k,t) = \int_0^t d\tau\, \overline{\theta}(k,\tau)\overline{G}(k,t-\tau) \tag{1.140b}$$

Podemos calcular a função de dois pontos usando (1.140), (1.139) e (1.138) o que resulta em

$$\langle\psi_a(k,t)\overline{\psi}_b(k',t')\rangle_{\theta\overline{\theta}} =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau' G_{ac}(k,t-\tau)\,\overline{G}_{eb}(k',t'-\tau')\langle\theta_c(k,\tau)\overline{\theta}_e(k',\tau')\rangle_{\theta\overline{\theta}}$$

$$= (2\pi)^2\delta^2(k-k')\left[\frac{\mathrm{e}^{-(\not{k}+m)\,|\,t-t'\,|} - \mathrm{e}^{-(\not{k}+m)\,(t+t')}}{\not{k}+m}\right]_{ab} \tag{1.141}$$

Fukai et al [13] observaram que não podemos tomar $t = t' \to \infty$, em (1.141), e assegurar que o termo $\mathrm{e}^{-(\not{k}+m)t} \to 0$ no equilíbrio. Isso deve-se ao fato de que o operador $(\not{k}+m)$

não é diagonal, e para verificarmos a convergência devemos primeiramente diagonalizá-lo através de uma matriz unitária $U(k)$. Os autovalores λ de $(\not{k} + m)$ podem ser obtidos facilmente da condição

$$\det[\not{k} + (m - \lambda)I] = 0$$

Por exemplo, em duas dimensões podemos usar γ_0 e γ_1 dados por (1.133) e teremos que

$$\lambda = \pm i\sqrt{k^2} + m$$

e assim

$$(\not{k} + m) = U^\dagger(k) \begin{pmatrix} i\sqrt{k^2} + m & 0 \\ 0 & -i\sqrt{k^2} + m \end{pmatrix} U(k) \tag{1.142}$$

Como $e^{-(\not{k}+m)t}$ também é diagonalizada por $U(p)$ teremos

$$e^{-(\not{k}+m)t} = U^\dagger(k)\, e^{-D(k)t}\, U(k)\, e^{-mt} \tag{1.143}$$

onde $D(k)$ é a matriz diagonal $i\sqrt{k^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, e assim o único fator de convergência vem do termo e^{-mt} de modo que, para teorias não massivas, (1.141) não está definido no limite de equilíbrio . Outro ponto desfavorável é que para teorias com interação os cálculos das funções de correlação serão bem mais complicados devido a não comutatividade dos termos (1.139) e (1.141) que são usados na solução iterativa.

Como salientado por Parisi e Wu [1], podemos resolver esse problema considerando equações de Langevin mais gerais que (1.2), e que levam aos mesmos resultados já obtidos até aqui, através da introdução de um kernel, K, conveniente

$$\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t} = -\int d^n y\, K(x,y) \frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(y,t)} + \eta(x,t) \tag{1.144}$$

e da mudança das correlações do ruido η, dados por (1.4), para

$$\langle \eta(x,t)\, \eta(x',t') \rangle_\eta = 2K(x,x')\, \delta(t - t') \tag{1.145}$$

com a condição de que os kernels K sejam positivos, de modo que (1.145) seja obtido através de uma integração Gaussiana. Obviamente para $K(x,y) = \delta^n(x - y)$ recuperamos o caso usual.

Usando essa liberdade, podemos escrever ao invés de (1.135) as equações

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\int d^2y\, K(x,y)\frac{\delta S}{\delta\overline{\psi}(y,t)} + \theta(x,t) \tag{1.146a}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}(x,t)}{\partial t} = \int d^2y\, \frac{\delta S}{\delta\psi(y,t)}\overline{K}(x,y) + \overline{\theta}(x,t) \tag{1.146b}$$

onde

$$\left\langle\theta_a(x,t)\overline{\theta}_b(x',t')\right\rangle_{\theta\overline{\theta}} = 2K_{ab}(x,x')\delta(t-t') \tag{1.147}$$

e $K(x,x')$ é um operador que cancela os autovalores negativos de $\delta S/\delta\overline{\psi}(x,t)$. Observe que temos

$$P[\theta,\overline{\theta}] = \frac{\exp\left\{-1/4\int d^2x\, d^2y\, dt\, \overline{\theta}(x,t)\, K^{-1}(x,y)\,\theta(y,t)\right\}}{\int \mathcal{D}\theta\,\mathcal{D}\overline{\theta}\,\exp\left\{-1/4\int d^2x\, d^2y\, dt\, \overline{\theta}(x,t)\, K^{-1}(x,y)\,\theta(y,t)\right\}} \tag{1.148}$$

e

$$\left\langle\cdots\right\rangle_{\theta\overline{\theta}} = \int \mathcal{D}\theta\,\mathcal{D}\overline{\theta}\cdots P[\theta,\overline{\theta}] \tag{1.149}$$

que generalizam (1.5) e (1.6)

Os kernels K e $\overline{K}$ que costumam ser usados na literatura [5,14] são

$$\begin{aligned} K(x,y) &= (i\overrightarrow{\not\partial}_x + m)\,\delta^2(x-y) \\ \overline{K}(x,y) &= \delta^2(x-y)\,(-i\overleftarrow{\not\partial}_x + m) \end{aligned} \tag{1.150}$$

e portanto as equações de Langevin, no espaço dos momentos, obtidas são

$$\frac{\partial\psi(k,t)}{\partial t} = -(k^2+m^2)\psi(k,t) + \theta(k,t) \tag{1.151a}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}(k,t)}{\partial t} = -(k^2+m^2)\overline{\psi}(k,t) + \overline{\theta}(k,t) \tag{1.151b}$$

com

$$\left\langle\theta_a(k,t)\overline{\theta}_b(k',t')\right\rangle_{\theta\overline{\theta}} = 2(2\pi)^2(-\not k + m)_{ab}\delta^2(k-k')\delta(t-t') \tag{1.152}$$

Note que as equações (1.151) são as equações de Langevin do caso bosônico cujas funções de Green são

$$G(k,t) = \overline{G}(k,t) = \theta(t)\,\mathrm{e}^{-(k^2+m^2)t} \tag{1.153}$$

Temos agora para a função de dois pontos

$$\left\langle \psi_a(k,t)\overline{\psi}_b(k',t')\right\rangle_{\theta\overline{\theta}} =$$

$$= \int_0^\infty d\tau \int_0^\infty d\tau' G(k,t-\tau)\,\overline{G}(k',t'-\tau')\left\langle \theta_a(k,\tau)\overline{\theta}_b(k',\tau')\right\rangle_{\theta\overline{\theta}}$$

$$= (2\pi)^2\delta^2(k-k')\frac{(-\not{k}+m)_{ab}}{k^2+m^2}\left[\mathrm{e}^{-(k^2+m^2)\,|\,t-t'\,|} - \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)\,(t+t')}\right] \qquad (1.154)$$

que no limite de equilíbrio

$$\lim_{t\to\infty}\left\langle \psi_a(k,t)\overline{\psi}_b(k',t')\right\rangle_{\theta\overline{\theta}} = (2\pi)^2\delta^2(k-k')\left(\frac{1}{\not{k}+m}\right)_{ab} \qquad (1.155)$$

fornece o propagador fermiônico usual do espaço Euclideano.

Seguindo os mesmos passos do caso bosônico podemos obter a equação de Fokker-Planck (partindo das equações de Langevin (1.146) e de (1.149)) para a distribuição de probabilidades $P[\psi,\overline{\psi},t]$

$$\frac{\partial}{\partial t}P[\psi,\overline{\psi},t] = \int d^2x\,d^2y\,K(x,y)\left[\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\psi(y)}+\frac{\delta}{\delta\psi(y)}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{\delta}{\delta\psi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\overline{\psi}(y)}+\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}(y)}\right)\right]P[\psi,\overline{\psi},t] \qquad (1.156)$$

e mostrar que

$$\lim_{t\to\infty}P[\psi,\overline{\psi},t] = \frac{\mathrm{e}^{-S[\psi,\overline{\psi}]}}{\int \mathcal{D}\psi\,\mathcal{D}\overline{\psi}\;\mathrm{e}^{-S[\psi,\overline{\psi}]}}$$

com o kernel dado por (1.150), obtendo assim uma prova não perturbativa do limite de equilíbrio.

Para ações bilineares nos campos fermiônicos

$$S = \int d^nx\,\overline{\psi}(x)\,G(x)\,\psi(x) \qquad (1.157)$$

pode-se usar as equações de Langevin [33,68]

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\,G^\dagger(x)\,G(x)\,\psi(x,t) + \frac{1}{2}G^\dagger(x)\,\theta_1(x,t) + \theta_2(x,t) \qquad (1.158a)$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}(x,t)}{\partial t} = -\left[G(x)\,G^\dagger(x)\right]^{\mathrm{T}}\,\overline{\psi}(x,t) + \overline{\theta}_1(x,t) + \frac{1}{2}G^{\dagger\mathrm{T}}(x)\,\overline{\theta}_2(x,t) \qquad (1.158b)$$

onde temos dois ruídos θ_1 e θ_2 que satisfazem

$$\begin{aligned} \langle \theta_i(x,t) \rangle &= \langle \overline{\theta}_i(x,t) \rangle = 0 \\ \langle \theta_i(x,t) \overline{\theta}_j(x',t') \rangle &= 2\delta_{ij}\, \delta^n(x-x')\delta(t-t') \end{aligned} \tag{1.159}$$

Equivalentemente, as equações (1.158) podem ser expressas com apenas um campo de ruído $\theta(x,t)$ através de

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = -\, G^\dagger(x)\, G(x)\, \psi(x,t) + G^\dagger(x)\, \theta(x,t) \tag{1.160a}$$

$$\frac{\partial \overline{\psi}(x,t)}{\partial t} = -\, \left[G(x)\, G^\dagger(x)\right]^{\mathrm{T}}\, \overline{\psi}(x,t) + \overline{\theta}(x,t) \tag{1.160b}$$

com θ satisfazendo as correlações usuais [33,55].

Também podemos generalizar o esquema de quantização estocástica de modo a tratar teorias supersimétricas [5,69]. Por outro lado, veremos no capítulo 2 que a supersimetria está intimamente ligada ao formalismo estocástico.

CAPÍTULO 2

QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA NA REPRESENTAÇÃO INTEGRAL FUNCIONAL

A quantização estocástica de Parisi e Wu via introdução de integrais funcionais, para o cálculo das funções de correlação, é devida a Bender et al [16], Nakano [17] e Gozzi [18], entre outros. Entretanto, o uso de métodos integrais funcionais no estudo de problemas estocásticos, principalmente ligados ao estudo da dinâmica de sistemas estatísticos clássicos, já eram bem difundidos [19]. Parisi e Sourlas [20,70], estudando uma teoria escalar acoplada a uma fonte externa aleatória (protótipo de um sistema de spins em um campo magnético aleatório), mostraram a redução dimensional do modelo explorando uma supersimetria "escondida" na formulação funcional da teoria. Uma supersimetria similar foi posteriormente obtida por Felgel'man e Tsvelik [71] para sistemas dissipativos descritos por uma dinâmica estocástica de Langevin. Na quantização estocástica, Nakazato et al [24] usaram essa supersimetria em uma prova de equivalência com a quantização usual. Egorian e Kalitzin [25] a explicitaram através de uma formulação em termos de supercampos e também derivaram uma outra prova de equivalência para a quantização estocástica.

Zinn-Justin [28] estudou a formulação integral funcional de processos estocásticos em geral, mostrando que a ação efetiva obtida possui uma simetria de BRS e em alguns casos (como na quantização estocástica) uma outra simetria. Derivou as identidades de Ward correspondentes usando-as no estudo da renormalizabilidade destas teorias. Também mostrou os pontos comuns existentes na formulação funcional da quantização estocástica, do sistema de spins no campo magnético aleatório e das teorias de gauge. Iremos nos basear em tal trabalho no decorrer do presente capítulo e do próximo.

Reformularemos o método de quantização estocástica de Parisi e Wu através da introdução de uma representação funcional, via integrais de trajetória, para as funções de correlação estocásticas. Primeiramente introduziremos um funcional gerador para as funções de correlação e o expressaremos através de uma integração de trajetórias sobre os campos. Obteremos uma ação efetiva num espaço de $n+1$ dimensões e mostraremos a conexão dessa formulação com o formalismo de Fokker-Planck. Posteriormente reescreveremos o funcional gerador numa representação supersimétrica e derivaremos as respectivas identidades de Ward que nos auxiliarão no estudo da renormalizabilidade das teorias quanti-

zadas estocasticamente. Finalmente mostraremos a redução dimensional na quantização estocástica, i.e., a equivalência das funções de correlação estocásticas, no equilíbrio, com as funções de Green obtidas via integração funcional usual.

2.1–FUNCIONAL GERADOR PARA AS FUNÇÕES DE CORRELAÇÃO

Aqui mudaremos um pouco a nossa notação. Representaremos genericamente por q o campo quantizado estocasticamente e usaremos índices maiúsculos para indicar todas as variáveis (exceto o quinto tempo), i.e., $A \equiv \{x, p, \mu, \alpha, a, \ldots\}$ tal que $\phi(x,t) \equiv q_A(t)$. Nas fórmulas que seguem as somas $\sum_A$ denotarão somas em índices $\mu, \alpha, a, \ldots$ e integrais sobre o espaço ou momento. Também usaremos a convenção de Einstein para somas.

Dada a equação de Langevin

$$F_A(q(t)) = \eta_A(t) \tag{2.1}$$

onde

$$F_A(q(t)) \equiv \frac{\partial q_A(t)}{\partial t} + \frac{d}{2}\frac{\delta S[q]}{\delta q_A(t)} \tag{2.2}$$

e d o coeficiente de difusão, derivaremos [16–18,28] um funcional gerador $Z[J]$ para as funções de correlação de q_A^η, solução da equação de Langevin, tal que

$$\left\langle q_{A_1}^\eta(t_1)\cdots q_{A_n}^\eta(t_n)\right\rangle_\eta = \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J_{A_1}(t_1)\cdots\delta J_{A_n}(t_n)}\right|_{J=0} \tag{2.3}$$

que, para um processo Gaussiano e não Markoviano, as correlações do objeto $O(q^\eta)$ são calculadas por

$$\left\langle O(q^\eta)\right\rangle_\eta = \int \mathcal{D}\eta\, O(q^\eta)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int dt\, dt'\, \eta_A(t)\,(K^{-1})_{AB}(t,t')\,\eta_B(t')} \tag{2.4}$$

onde $K_{AB}(t,t')$ é um operador local simétrico que para

$$K_{AB}(t,t') = d\delta_{AB}\delta(t-t') \tag{2.5}$$

descreve um processo Markoviano.

Em termos de (2.4) o funcional gerador pode ser escrito como

$$Z[J] = \left\langle e^{\int dt\, J_A(t) q_A^\eta(t)} \right\rangle_\eta$$

$$= \int \mathcal{D}\eta \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int dt\, dt'\, \eta_A(t) \left(K^{-1}\right)_{AB}(t,t') \eta_B(t') + \int dt\, J_A(t) q_A^\eta(t) \right\} \tag{2.6}$$

e usando a identidade

$$\int \mathcal{D}q\, \delta(F_A(q) - \eta_A) \det M = 1 \tag{2.7}$$

com

$$M_{AB}(t,t') = \frac{\delta F_A(q(t))}{\delta q_B(t')} \tag{2.8}$$

podemos impor explicitamente que q_A^η, em (2.6), é solução da equação de Langevin (2.1), assim

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\eta\, \mathcal{D}q\, \delta(F_A(q) - \eta_A) \det M$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2} \int dt\, dt'\, \eta_A(t) \left(K^{-1}\right)_{AB}(t,t') \eta_B(t') + \int dt\, J_A(t) q_A(t) \right\} \tag{2.9}$$

O determinante (2.8) nada mais é que o Jacobiano da transformação $\eta \to q$ dado pela equação de Langevin (2.1). Dependendo de como o tratarmos seremos levados a diferentes representações para o funcional gerador $Z[J]$. Passaremos agora a descrever duas delas.

2.1.1–REPRESENTAÇÃO INTEGRAL FUNCIONAL PARA $Z[J]$

No caso Markoviano a expressão (2.9) fica após a substituição de (2.5) e integração em η

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \det M \exp\left\{ -\int dt \left[\frac{1}{2d} \left(\frac{\partial q_A}{\partial t} + \frac{d}{2} \frac{\delta S}{\delta q_A} \right)^2 - J_A q_A \right] \right\} \tag{2.10}$$

onde

$$M_{AB}(t,t') = \left\langle t, A \right| \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta q \delta q} \right) \left| B, t' \right\rangle \tag{2.11}$$

e podemos calcular [18,28] o determinante através de

$$\det M = \det \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{2} \frac{\delta^2 S}{\delta q \delta q} \right) = \exp \left[\mathrm{tr} \ln \frac{\partial}{\partial t} \left(1 + \frac{d}{2} \frac{\partial^{-1}}{\partial t} \frac{\delta^2 S}{\delta q \delta q} \right) \right] \tag{2.12}$$

O termo $\exp \mathrm{tr} \ln \partial/\partial t$ fornece uma constante que pode ser absorvida na normalização de $Z[J]$. Calculando o traço e expandindo o logarítimo do segundo termo em (2.12) temos

$$\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{2}\right)^n \frac{(-1)^{n-1}}{n}\int dt\,\langle t,A|\Big(\underbrace{\frac{\partial^{-1}}{\partial t}\frac{\delta^2 S}{\delta q \delta q}}_{\mathcal{O}}\Big)^n|t,A\rangle\right] \tag{2.13}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\int dt\langle t,A|\mathcal{O}^n|t,A\rangle = \int dt\,dt_1\,dt_2\cdots dt_{n-1}\,\langle t,A|\mathcal{O}|t_1,A_1\rangle\langle t_1,A_1|\mathcal{O}|t_2,A_2\rangle\cdots \\ \cdots\langle t_i,A_i|\mathcal{O}|t_j,A_j\rangle\cdots\langle t_{n-2},A_{n-2}|\mathcal{O}|t_{n-1},A_{n-1}\rangle\langle t_{n-1},A_{n-1}|\mathcal{O}|t,A\rangle\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde

$$\begin{aligned}\langle t_i,A_i|\mathcal{O}|t_j,A_j\rangle &= \langle t_i,A_i|\frac{\partial^{-1}}{\partial t}\frac{\delta^2 S}{\delta q\delta q}|t_j,A_j\rangle \\ &= \int d\bar{t}\langle t_i,A_i|\frac{\partial^{-1}}{\partial t}|\bar{t},\overline{A}\rangle\langle\bar{t},\overline{A}|\frac{\delta^2 S}{\delta q\delta q}|t_j,A_j\rangle\end{aligned} \tag{2.15}$$

mas

$$\langle t_i,A_i|\frac{\partial^{-1}}{\partial t}|\bar{t},\overline{A}\rangle = \frac{\partial^{-1}}{\partial t_i}\delta(t_i-\bar{t})\delta_{A_i\overline{A}} = \theta(t_i-\bar{t})\delta_{A_i\overline{A}}$$

pois $\partial^{-1}/\partial t_i \delta(t_i-\bar{t})$ é a função de Green de $\partial/\partial t_i$, i.e., $\partial/\partial t_i G(t_i-\bar{t}) = \delta(t_i-\bar{t})$, que tem $\theta(t_i-\bar{t})$ como solução para condição de contorno retardada. Assim (2.15) resulta

$$\begin{aligned}\langle t_i,A_i|\mathcal{O}|t_j,A_j\rangle &= \int d\bar{t}\,\theta(t_i-\bar{t})\delta_{A_i\overline{A}}\frac{\delta^2 S}{\delta q_{A_j}(t_j)\delta q_{A_j}(t_j)}\delta(\bar{t}-t_j)\delta_{\overline{A}A_j} \\ &= \theta(t_i-t_j)\,\delta_{A_iA_j}\frac{\delta^2 S}{\delta q_{A_j}(t_j)\delta q_{A_j}(t_j)}\end{aligned}$$

que substituida em (2.14) fornece apenas um termo não nulo para $n=1$ (os outros termos contém produtos da função θ com argumento igual a diferença de tempos entre vértices adjacentes, formando um loop), portanto

$$\det M = \exp\left\{\frac{d}{2}\theta(0)\int dt\,\frac{\delta^2 S}{\delta q_A(t)\delta q_A(t)}\right\} \tag{2.16}$$

e substituindo (2.16) em (2.10) obtemos para o funcional gerador

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \, \exp\left\{ - \int dt \left[\frac{1}{2d} \left(\dot{q}_A + \frac{d}{2} \frac{\delta S}{\delta q_A} \right)^2 - \frac{d}{2} \theta(0) \frac{\delta^2 S}{\delta q_A^2} - J_A q_A \right] \right\} \tag{2.17}$$

Note que a contribuição do determinante gera termos proporcionais a $\delta^n(0)$ que devem ser propriamente regularizados, de modo que a expressão acima faça sentido.

O termo $\dot{q}_A \frac{\delta S}{\delta q_A} = \frac{dS}{dt}$, em (2.17), pode ser integrado contribuindo só com termos de superfície. Se usarmos condições periódicas de contorno, além da prescrição de "midpoint" para $\theta(0)$ (i.e., $\theta(0) = 1/2$), podemos reescrever a última expressão como

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \, \exp\left\{ - \int dt \, (\mathcal{L} - J_A q_A) \right\} \tag{2.18}$$

onde a Lagrangeana efetiva

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2d} \dot{q}_A^2 + \frac{d}{8} \left(\frac{\delta S}{\delta q_A} \right)^2 - \frac{d}{4} \frac{\delta^2 S}{\delta q_A^2} \tag{2.19}$$

é invariante por inversão temporal. Essa formulação funcional está conectada com a formulação de Fokker-Planck [18,72]. Podemos ver isso fazendo a transformação de Legendre $(q_A, \dot{q}_A) \to (q_A, p_A)$, com $p_A = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{q}_A}$, tal que

$$\mathcal{H} = p_A \dot{q}_A - \mathcal{L}$$

e portanto

$$\mathcal{H} = \frac{d}{2} p_A^2 - \frac{d}{8} \left(\frac{\delta S}{\delta q_A} \right)^2 + \frac{d}{4} \frac{\delta^2 S}{\delta q_A^2} \tag{2.20}$$

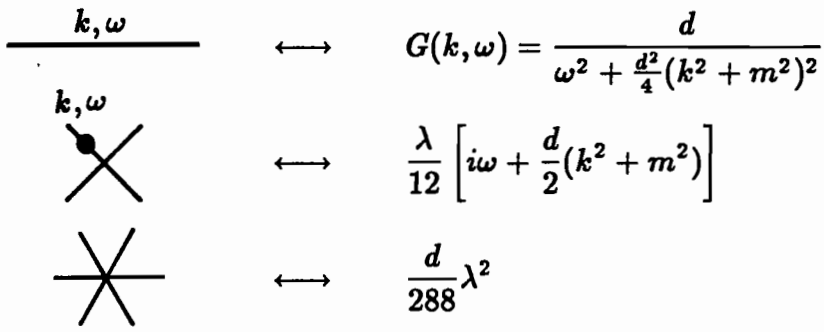
Com a identificação $p_A = \frac{\delta}{\delta q_A}$, $\mathcal{H}$ é simplesmente a Hamiltoniana de Fokker-Planck dada em (1.61).

Podemos a partir de (2.17) desenvolver expansões perturbativas. Para o modelo $\lambda\phi^4$ [72], em $n = 4$ dimensões, obtemos

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2d} \phi \left[-\frac{d^2}{dt^2} + \frac{d^2}{4} (-\Box + m^2)^2 \right] \phi + \frac{d}{4} \Box \delta^4(0) - \frac{d}{4} m^2 \delta^4(0)$$

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \left[\frac{d}{dt} + \frac{d}{2} (-\Box + m^2) \right] \phi + \frac{d}{8} \frac{\lambda^2}{3!^2} \phi^6 - \frac{d}{2} \frac{\lambda}{2!} \theta(0) \delta^4(0) \phi^2$$

cujas regras de Feynman (no espaço de Fourier ω, k) são

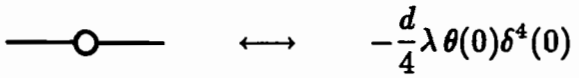


$$\longleftrightarrow \quad G(k,\omega) = \frac{d}{\omega^2 + \frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2}$$

$$\longleftrightarrow \quad \frac{\lambda}{12}\left[i\omega + \frac{d}{2}(k^2+m^2)\right]$$

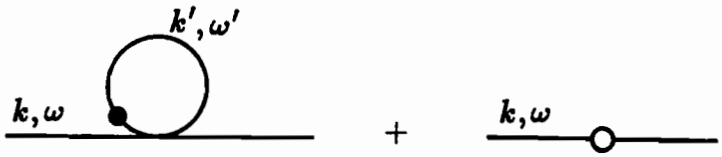
$$\longleftrightarrow \quad \frac{d}{288}\lambda^2$$

e onde a linha com ponto, no vértice quártico, representa o fator $\frac{d}{dt} + \frac{d}{2}(-\Box + m^2)$ aplicado ao campo correspondente. Note que aqui interações adicionais são introduzidas, bem como termos de divergência de volume, que representaremos por



$$\longleftrightarrow \quad -\frac{d}{4}\lambda\,\theta(0)\delta^4(0)$$

Entretanto, devemos notar que a combinação



dá contribuição nula independentemente da prescrição adotada para $\theta(0)$. Assim, o efeito das divergências de volume é eliminar os gráficos como o da figura acima. Portanto, a teoria está livre de divergências de volume e loops fechados do tipo acima. A renormalização da teoria pode ser mostrada nesse esquema, perturbativamente [72]. Também tais contribuições podem ser automaticamente canceladas se usarmos regularização dimensional, pois $\delta^n(0) \equiv \left(\int d^n k\right)_R = 0$ [28,72], onde R indica que a integral está regularizada dimensionalmente.

Teorias de gauge também podem ser estudadas nesse formalismo [73], particularmente Gozzi [74] prova, de modo não perturbativo, como a contribuição do determinante de Faddeev-Popov é naturalmente gerado pela dinâmica de Fokker-Planck usando a formulação integral funcional dada por (2.17).

Usando $\theta(0) = 0$ em (2.16) eliminamos completamente o determinante da teoria. Obtemos então a representação integral funcional de Namiki e Yamanaka [75] se reescrever-

mos (2.17), com $d = 2$, na forma

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\,\exp\left\{-\int dt\left(-p_A^2(t) + p_A(t)\dot{q}_A(t) + p_A(t)\frac{\delta S[q]}{\delta q_A(t)}\right)\right\}$$

que foi usada no estudo e estabelecimento de um programa de renormalização [37,76] para a quantização estocástica. A renormalizabilidade do modelo $\lambda\phi^4$ é tratada em detalhe por Chaturvedi et al [38] e por Namiki e Yamanaka [77], onde estes últimos introduzem as equações do grupo de renormalização. A função beta, na ordem de dois loops, é calculada por Nakazato et al [78]. O modelo sigma não linear também é tratado dentro desse formalismo por Okano e Schülke [79], onde é estudada a renormalização e o grupo de renormalização da teoria perturbada na constante de acoplamento usual. A renormalização das teorias de gauge abelianas é tratada por Chaturvedi et al [80].

A derivação da ação efetiva (2.17) que obtivemos é bastante formal. A equação de Langevin é uma *equação diferencial estocástica* que só é bem definida ao adotarmos uma prescrição de discretização como as do *cálculo estocástico* de Ito ou de Stratonovich [36,81], que apesar de produzirem resultados equivalentes (exceto para ruídos multiplicativos [36]) para as funções de correlação levam a soluções da equação de Langevin dependentes da prescrição usada. O fator $\theta(0)$ aparece em nossa ação efetiva justamente por termos usado a equação de Langevin contínua. Derivações do funcional gerador, na quantização estocástica, usando tanto o cálculo de Stratonovich como o de Ito podem ser encontrados nos trabalhos de Nakazato et al [82] e de Kawara et al [83] e fornecem um maior rigor matemático para as nossas manipulações.

2.1.2–REPRESENTAÇÃO INTEGRAL FUNCIONAL SUPERSIMÉTRICA PARA $Z[J]$

Podemos escrever o funcional gerador $Z[J]$ de uma outra forma [18,25,28]. Usando a representação para o delta de Dirac

$$\delta(F_A(q) - \eta_A) = \int \mathcal{D}p\ \mathrm{e}^{-\int dt\, p_A(t)\,(F_A(q) - \eta_A(t))} \tag{2.21}$$

e expressando o determinante de M, dado por (2.8), em termos das variáveis de Grassman C e $\overline{C}$

$$\det M = \int \mathcal{D}\overline{C}\,\mathcal{D}C\ \mathrm{e}^{\int dt\,dt'\,\overline{C}_A(t)\,M_{AB}(t,t')\,C_B(t')} \tag{2.22}$$

A expressão (2.9) assume a forma

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\,\mathcal{D}\overline{C}\,\mathcal{D}C\,\exp\Big\{W(p) - \int dt\,p_A(t)F_A(q) + \int dt\,dt'\,\overline{C}_A(t)\,M_{AB}(t,t')\,C_B(t') + \int dt\,J_A(t)q_A(t)\Big\} \tag{2.23}$$

onde

$$\begin{aligned}\exp W(p) &= \int \mathcal{D}\eta\,\exp\Big\{-\frac{1}{2}\int dt\,dt'\,\eta_A(t)\,(K^{-1})_{AB}(t,t')\,\eta_B(t') + \int dt\,p_A(t)\eta_A(t)\Big\} \\ &= (\det K^{-1})^{-1/2}\exp\Big\{\frac{1}{2}\int dt\,dt'\,p_A(t)\,K_{AB}(t,t')\,p_B(t')\Big\}\end{aligned} \tag{2.24}$$

Portanto, a menos de constantes irrelevantes, temos

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\,\mathcal{D}\overline{C}\,\mathcal{D}C\;\mathrm{e}^{-\mathcal{S}(q,p,\overline{C},C)+\int dt\,J_A(t)q_A(t)} \tag{2.25}$$

com a ação efetiva

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2}\int dt\,dt'\,p_A(t)\,K_{AB}(t,t')\,p_B(t') + \int dt\,p_A(t)F_A(t) - \int dt\,dt'\,\overline{C}_A(t)\,M_{AB}(t,t')\,C_B(t') \tag{2.26}$$

Essa ação é invariante pela seguinte simetria nilpotente ($\delta^2 = 0$) [28]

$$\begin{aligned}\delta q_A(t) &= \overline{\epsilon}C_A(t) \\ \delta C_A(t) &= 0 \\ \delta\overline{C}_A(t) &= \overline{\epsilon}p_A(t) \\ \delta p_A(t) &= 0\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde $\overline{\epsilon}$ é uma variável de Grassman. É uma simetria similar a de BRS [29] encontrada na quantização das teorias de gauge. Podemos verificar que (2.27) é realmente uma simetria variando cada termo da ação (2.26) e notando que termos do tipo $C_C(t'')C_B(t')$ são antisimétricos pela troca ($Bt' \leftrightarrow Ct''$) e que termos do tipo $\frac{\delta M_{AB}(t,t')}{\delta q_C(t'')}$ são simétricos

pela mesma troca de índices. Vale a pena enfatizar que a simetria (2.27) é exata, sendo satisfeita tanto para processos não Markovianos como Markovianos, e que independe de quaisquer condições de contorno para os campos.

No caso de processos Markovianos K tem a forma dada por (2.5) de modo que a ação efetiva (2.26) torna-se

$$S = -\frac{d}{2}\int dt\, p_A(t)p_A(t) + \int dt\, p_A(t)F_A(t) - \int dt\, dt'\, \overline{C}_A(t)\, M_{AB}(t,t')\, C_B(t') \qquad (2.28)$$

e que ao integrarmos em p fornece a ação efetiva presente em (2.17), agora com o determinante expresso por (2.22) ao invés de (2.16)

A ação efetiva em (2.28) além de ser invariante pela simetria de BRS, também sob certas condições, é invariante pela seguinte simetria do tipo anti-BRS [20,24,25,28]

$$\begin{aligned}
\delta^* q_A(t) &= \overline{C}_A(t)\epsilon \\
\delta^* C_A(t) &= -\left(\frac{2}{d}\,\dot{q}_A(t) - p_A(t)\right)\epsilon \\
\delta^* \overline{C}_A(t) &= 0 \\
\delta^* p_A(t) &= \frac{2}{d}\,\dot{\overline{C}}_A(t)\epsilon
\end{aligned} \qquad (2.29)$$

onde ϵ também é uma variável de Grassmann. Um cálculo direto fornece

$$\delta^* S = -\epsilon \int dt \frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{C}_A\left(\frac{2}{d}F_A - p_A\right)\right] \qquad (2.30)$$

que mostra que a ação é invariante por essa simetria a menos de um termo de superfície. Usando condições *periódicas* (ou *antiperiódicas*) de contorno ela é exata. A simetria (2.29) é manifestação da simetria por inversão temporal em (2.19).

É conveniente introduzir um superespaço, com coordenadas

$$(t, \theta, \overline{\theta})$$

onde θ e $\overline{\theta}$ são variáveis de Grassmann (ver apêndice) e um supercampo

$$Q_A(t,\overline{\theta},\theta) = q_A(t) + \overline{\theta}\, C_A(t) + \overline{C}_A(t)\,\theta + p_A(t)\,\overline{\theta}\theta \qquad (2.31)$$

Desse modo a simetria de BRS é uma translação, do tipo $\overline{\theta} \to \overline{\theta} + \overline{\epsilon}$, no superespaço, tal que (2.27) é obtida de

$$\delta Q_A(t,\overline{\theta},\theta) = Q_A(t,\overline{\theta}+\overline{\epsilon},\theta) - Q_A(t,\overline{\theta},\theta) \tag{2.32}$$

que podemos reescrever como

$$\delta Q_A = \overline{\epsilon} G\, Q_A \tag{2.33}$$

onde

$$G \equiv \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}} \tag{2.34}$$

é o gerador da transformação de BRS. Por outro lado a simetria de anti-BRS é uma translação, do tipo $\theta \to \theta + \epsilon$ e $t \to t - (2/d)\,\overline{\theta}\epsilon$, onde agora (2.29) pode ser expressa como

$$\delta^* Q_A(t,\overline{\theta},\theta) = Q_A(t-(2/d)\,\overline{\theta}\epsilon,\overline{\theta},\theta+\epsilon) - Q_A(t,\overline{\theta},\theta) \tag{2.35}$$

ou na forma

$$\delta^* Q_A = \epsilon \overline{G}\, Q_A \tag{2.36}$$

onde

$$\overline{G} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{2}{d}\,\overline{\theta}\,\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.37}$$

gera as transformações de anti-BRS. Os geradores satisfazem

$$G^2 = \overline{G}^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \{G,\overline{G}\} = \frac{2}{d}\,\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.38}$$

e portanto definem uma supersimetria, apesar de que na literatura costuma-se chamar de supersimétrica apenas a simetria de anti-BRS. Podemos tornar essa supersimetria mais explicita introduzindo as derivadas covariantes

$$D \equiv \frac{d}{2}\,\frac{\partial}{\partial \overline{\theta}} - \theta\,\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.39a}$$

$$\overline{D} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{2.39b}$$

que satisfazem

$$D^2 = \overline{D}^2 = 0 \qquad \text{e} \qquad \{D,\overline{D}\} = -\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.40}$$

e anticomutam separadamente com G e $\overline{G}$.

Vamos observar que

$$D\overline{D} = \frac{d}{2}\frac{\partial^2}{\partial\overline{\theta}\partial\theta} - \theta\frac{\partial^2}{\partial t\partial\theta} \tag{2.41}$$

de modo que a integração nas variáveis de Grassmann θ e $\overline{\theta}$ podem ser obtidas de

$$\int d\theta\, d\overline{\theta}\, F(Q) = -\frac{2}{d}\, D\overline{D}\, F\Big|_{\theta=\overline{\theta}=0} \tag{2.42}$$

Também mostram-se facilmente as seguintes relações úteis em cálculos supersimétricos

$$\begin{aligned}
Q_A(t)\Big|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= q_A(t) \\
D\,Q_A(t)\Big|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= \frac{d}{2}\,C_A(t) \\
\overline{D}\,Q_A(t)\Big|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= -\overline{C}_A(t) \\
D\overline{D}\,Q_A(t)\Big|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= -\frac{d}{2}p_A(t) \\
\overline{D}D\,Q_A(t)\Big|_{\theta=\overline{\theta}=0} &= \frac{d}{2}p_A(t) - \dot{q}_A(t)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Através de (2.31) e (2.39) podemos reescrever a ação (2.28) numa forma supersimétrica

$$\begin{aligned}
S_{\rm SS} &= \int dt\, d\theta\, d\overline{\theta}\, \left(\frac{\partial Q_A}{\partial t}\,\theta\,\frac{\partial Q_A}{\partial\theta} + \frac{d}{2}\,\frac{\partial Q_A}{\partial\theta}\,\frac{\partial Q_A}{\partial\overline{\theta}} + \frac{d}{2}\,S[Q]\right) \\
&= \int dt\, d\theta\, d\overline{\theta}\, \left(-Q_A\,\overline{D}D\,Q_A + \frac{d}{2}\,S[Q]\right)
\end{aligned} \tag{2.44}$$

onde $S[Q]$ é a ação Euclideana usual com q substituido pelo supercampo Q. Usando (2.42) e (2.43) é fácil verificar que (2.44) leva a (2.28).

Como estamos interessados em calcular apenas as correlações de q introduzimos a seguinte fonte

$$\mathcal{J}_A = J_A(t)\delta(\overline{\theta})\delta(\theta) \tag{2.45}$$

e o funcional gerador supersimétrico fica [25]

$$Z_{\rm SS}[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}Q\; e^{-S_{\rm SS} - \int dt\, d\theta\, d\overline{\theta}\, \mathcal{J}_A Q_A} \tag{2.46}$$

Que é o ponto de partida para uma formulação da quantização estocástica diretamente no superespaço. Para o modelo $\lambda\phi^4$, a expansão perturbativa e a renormalização são tratados

por Egoryan e Manvelyan [84] e por Marculescu et al [85]. As teorias de gauge são tratadas por Chaturvedi et al [86] e por Egoryan [87], enquanto que para as teorias fermiônicas por Chaturvedi et al [88].

Vale a pena nessa altura fazer um comentário. É possível mostrar que partindo de uma teoria supersimétrica (nos referimos a supersimetria usual) e integrando os campos fermiônicos, na integração funcional, obtemos um determinante, que por sua vez pode ser cancelado por um outro determinante produzido por uma transformação (geralmente não linear e não local) dos campos bosônicos, resultando uma ação bosônica livre. Tal transformação é denominada de mapeamento de Nicolai [89]. Já a ação supersimétrica S em (2.28) foi obtida de uma teoria livre para o campo de ruído bosônico η através da transformação $\eta \rightarrow \phi$, cujo determinante foi expresso em termos de campos fermiônicos. Assim, o que fizemos foi um mapeamento de Nicolai as avessas e temos portanto uma interpretação estocástica para o mesmo [90,91] e uma realização analítica dada pela equação de Langevin (2.1)

2.2–IDENTIDADES DE WARD E RENORMALIZAÇÃO

As simetrias de BRS (2.27) e de anti-BRS (2.29) têm identidades de Ward-Takahashi associadas [28,92]. Podemos derivá-las adicionando fontes $\overline{\vartheta}_A$, ϑ_A e K_A para os campos C_A, $\overline{C}_A$ e p_A respectivamente, de modo que o funcional gerador fica

$$Z[J,K,\overline{\vartheta},\vartheta] = \int \mathcal{D}q\,\mathcal{D}p\,\mathcal{D}\overline{C}\,\mathcal{D}C\,\exp\Big\{-S(q,p,\overline{C},C) + \int dt\,(J_A q_A + K_A p_A + \overline{\vartheta}_A C_A + \overline{C}_A \vartheta_A)\Big\} \tag{2.47}$$

Primeiramente vamos obter a identidade de Ward associada a simetria de BRS. Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned} q_A &\rightarrow q_A + \delta q_A \\ C_A &\rightarrow C_A + \delta C_A \\ \overline{C}_A &\rightarrow \overline{C}_A + \delta \overline{C}_A \\ p_A &\rightarrow p_A + \delta p_A \end{aligned} \tag{2.48}$$

como os δ's dados por (2.27), na integral funcional em (2.47), teremos que

$$\bar{\epsilon}\int dt\left(J_A\frac{\delta Z}{\delta\bar{\vartheta}_A}+\frac{\delta Z}{\delta K_A}\vartheta_A\right)=0 \tag{2.49}$$

pois a medida de integração e a ação $\mathcal{S}$ são invariantes de BRS e a transformação é linear nos campos. Usando que $Z=\mathrm{e}^{iW}$, onde W é o gerador das funções conexas, e que o gerador das funções 1PI é dado por

$$\Gamma[q,p,\overline{C},C]=W[J,K,\bar{\vartheta},\vartheta]-\int dt\,(J_Aq_A+K_Ap_A+\overline{C}_A\vartheta_A+\bar{\vartheta}_AC_A) \tag{2.50}$$

temos finalmente que

$$\int dt\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta q_A}C_A+p_A\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{C}_A}\right)=0 \tag{2.51}$$

De maneira análoga obtemos para a simetria de anti-BRS

$$\int dt\left[\frac{\delta\Gamma}{\delta q_A}\overline{C}_A+\frac{2}{d}\frac{\delta\Gamma}{\delta p_A}\dot{\overline{C}}_A-\frac{\delta\Gamma}{\delta C_A}\left(p_A-\frac{2}{d}\dot{q}_A\right)\right]=0 \tag{2.52}$$

As expressões (2.52) e (2.52) constituem as identidades de Ward correspondentes a simetria de BRS e anti-BRS respectivamente. Apesar de termos derivado (2.51) para um processo Markoviano, como mostra a ação efetiva (2.28) que usamos, também é possível mostrar que a mesma identidade, inclusive as suas consequências na renormalização, vale para processos não Markovianos [28,93].

As identidades de Ward podem ser usadas para mostrar que a forma da ação efetiva se mantém invariante após a renormalização [28]. Assim, escolhendo um esquema de regularização invariante, i.e., que preserve a simetria de BRS, a identidade (2.51) permanecerá válida sob renormalização e a ação efetiva renormalizada $\mathcal{S}^{\mathrm{R}}$ a satisfazerá. Se for possível mostrar por contagem de potências e conservação de número fermiônico, que $\mathcal{S}^{\mathrm{R}}$ é no máximo quadrática nos campos de "fantasma" C e $\overline{C}$, ou seja,

$$\mathcal{S}^{\mathrm{R}}=-\int dt\,dt'\,\overline{C}_A(t)\,M^{\mathrm{R}}_{AB}(t,t')\,C_B(t')+\Sigma(q,p) \tag{2.53}$$

onde M^{R}_{AB} depende de q e p. A equação (2.51) implicará as identidades

$$\frac{\delta M^{\mathrm{R}}_{AB}(t,t')}{\delta q_C(t'')}-\frac{\delta M^{\mathrm{R}}_{AC}(t,t'')}{\delta q_B(t')}=0 \tag{2.54a}$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta q_A(t)} = \int dt'\, p_B(t')\, M^{\mathrm{R}}_{BA}(t',t) \tag{2.54b}$$

Pode-se ver facilmente $\left(\frac{\delta^2\Sigma}{\delta q_A(t)\delta q_B(t')} = \frac{\delta^2\Sigma}{\delta q_B(t')\delta q_A(t)}\right)$ que a equação (2.54a) é a condição de integrabilidade de (2.54b) e nos leva a

$$M^{\mathrm{R}}_{AB} = \frac{\delta \widetilde{F}^{\mathrm{R}}_A(t)}{\delta q_B(t')} \tag{2.55}$$

que é da forma (2.8). Podemos então escrever a solução de (2.54b) como

$$\Sigma = \int dt\, p_A(t)\, \widetilde{F}^{\mathrm{R}}_A(t) - \widetilde{W}^{\mathrm{R}}(p) \tag{2.56}$$

e se por contagem de potências $M^{\mathrm{R}}_{AB}(q,p)$, em (2.53), é independente de p, então

$$\widetilde{F}^{\mathrm{R}}_A = F^{\mathrm{R}}_A(q) + f(p)$$

e portanto

$$\mathcal{S}^{\mathrm{R}} = -W^{\mathrm{R}}(p) + \int dt\, p_A(t)\, F^{\mathrm{R}}_A(t) - \int dt\, dt'\, \overline{C}_A(t)\, \frac{\delta F^{\mathrm{R}}_A(t)}{\delta q_B(t')}\, C_B(t') \tag{2.57}$$

Para que $\mathcal{S}^{\mathrm{R}}$ tenha a forma de (2.28), com F dado por (2.2), temos que mostrar [28] que F^{R} depende apenas de q na forma

$$F^{\mathrm{R}}_A(q) = Z_t\, \dot{q}_A + \frac{d}{2} G^{\mathrm{R}}_A(q) \tag{2.58}$$

e que

$$W^{\mathrm{R}}(p) = \frac{d}{2} Z_\eta^2 \int dt\, p_A(t) p_A(t) \tag{2.59}$$

A substituição de $\mathcal{S}^{\mathrm{R}}$, com esses valores, na identidade de Ward (2.52) fornecerá

$$Z_t = Z_\eta^2 \tag{2.60}$$

e que $G^{\mathrm{R}}_A(q)$ é uma derivada total, podendo ser escrita como

$$G^{\mathrm{R}}_A(q) = \frac{\delta S^{\mathrm{R}}}{\delta q_A} \tag{2.61}$$

Portanto, a forma da equação de Langevin (2.2) é preservada, pois

$$F_A^{\mathrm{R}}(q(t)) = Z_t\,\dot{q}_A(t) + \frac{d}{2}\,\frac{\delta S^{\mathrm{R}}}{\delta q_A(t)} \tag{2.62}$$

A ação renormalizada pode ser finalmente escrita como

$$S^{\mathrm{R}} = -\frac{d}{2}\,Z_\eta^2 \int dt\, p_A(t) p_A(t) + \int dt\, p_A(t)\, F_A^{\mathrm{R}}(t) - \int dt\, dt'\, \overline{C}_A(t)\,\frac{\delta F_A^{\mathrm{R}}(t)}{\delta q_B(t')}\, C_B(t') \tag{2.63}$$

com F_A^{R} dado por (2.62). Integrando o funcional gerador renormalizado $Z^{\mathrm{R}}[J]$ em p, C e $\overline{C}$ obtemos

$$Z^{\mathrm{R}}[J] = \int \mathcal{D}q\, \det\left(Z_t\,\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d}{2}\frac{\delta^2 S^{\mathrm{R}}}{\delta q \delta q}\right) \times \exp\left\{-\int dt\left[\frac{1}{2d}\,\frac{1}{Z_\eta^2}\left(Z_t\,\frac{\partial q_A}{\partial t} + \frac{d}{2}\,\frac{\delta S^{\mathrm{R}}}{\delta q_A}\right)^2 - J_A q_A\right]\right\} \tag{2.64}$$

de onde podemos recuperar a equação de Langevin renormalizada

$$Z_t\,\frac{\partial q_A}{\partial t} = -\frac{d}{2}\,\frac{\delta S^{\mathrm{R}}}{\delta q_A} + \eta_A \tag{2.65}$$

e a distribuição de probabilidades renormalizada para o ruído

$$P^{\mathrm{R}}[\eta] = \exp\left\{-\frac{1}{2d}\,\frac{1}{Z_\eta^2}\int dt\, \eta_A(t)\eta_A(t)\right\} \tag{2.66}$$

com Z_t e Z_η satisfazendo (2.61). Essas expressões justificam as equações (1.127) e (1.130) para o modelo $\lambda\phi^4$ renormalizado no capítulo 1.

2.3–REDUÇÃO DIMENSIONAL NA QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA

Certas propriedades das transições de fases em sistemas de spin, em n dimensões, na presença de campos magnéticos aleatórios são equivalentes ao de um sistema puro, i.e., sem a influência do campo magnético, em $n-2$ dimensões. Essa é a chamada ***redução***

dimensional e pode ser estudada teoricamente através do seguinte processo estocástico estacionário

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = \eta(x) \tag{2.67}$$

com

$$S = \int d^n x \left[-\frac{1}{2}\phi(x) \triangle \phi(x) + V(\phi(x)) \right]$$

onde $\phi(x)$ faz o papel do parâmetro de ordem e o ruído $\eta(x)$, Gaussiano, o de campo magnético aleatório. Estudos perturbativos de (2.67) culminaram com a observação de Parisi e Sourlas [20] de que as funções de correlação em n dimensões, na presença da fonte aleatória η, são identicas (ordem a ordem em teoria de perturbação) às funções de correlação em $n-2$ dimensões da teoria pura, devido a existência de uma supersimetria para a formulação funcional do processo estocástico. Cardy [21] como também Klein e Fernando Perez [22] estenderam a prova da redução dimensional de maneira não perturbativa utilizando tal supersimetria. McClain et al [23], explorando a redução dimensional, utilizaram a equação (2.67) como o ponto de partida para uma esquema de quantização estocástica alternativo para teorias de campos. Aplicaram-no para as teorias de gauge e posteriormente Niemi e Wijewardhana [94] desenvolveram um esquema de regularização analítico nesse formalismo.

Por sua vez, o método de quantização estocástica de Parisi e Wu é baseado numa equação que descreve um processo estocástico em relaxamento mas, como observado por Zinn-Justin [28], tanto a equação de Langevin como a (2.67) tem a forma

$$F(\phi) = \eta$$

e podem ser estudadas simultaneamente. Em particular o funcional gerador das funções de correlação de ϕ apresenta uma supersimetria, que mostramos explicitamente no caso da quantização estocástica. Assim, podemos explorar a supersimetria para mostrar a redução dimensional na quantização estocástica (redução da dimensão t, i.e., do tempo fictício), analogamente ao que foi feito no caso do sistema de spins na presença do campo magnético aleatório (redução de duas dimensões espaciais). A redução dimensional nesse contexto nada mais é que a prova, não perturbativa, da igualdade das funções de correlação com as funções de Green da teoria Euclideana no equilíbrio e foi demonstrada por Kirschner [26] e Gozzi [27].

Assim, seja o funcional gerador supersimétrico interpolante [21,26,27] obtido de (2.46)

$$Z^{\lambda}_{\rm SS}[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}Q \, \exp\Big\{ - \int dt\, d\theta\, d\bar{\theta} \Big[-Q_{\mathcal{A}}\, \overline{D} D\, Q_{\mathcal{A}} + \{(d/2)\,\lambda + (1-\lambda)\,\delta(t)\,\delta(\bar{\theta})\,\delta(\theta)\}\, S[Q] + \mathcal{J}_{\mathcal{A}} Q_{\mathcal{A}} \Big] \Big\} \tag{2.68}$$

com (2.45) substituido por

$$\mathcal{J}_{\mathcal{A}} = J_{\mathcal{A}}\, \delta(t)\, \delta(\bar{\theta})\, \delta(\theta) \tag{2.69}$$

Como a condição inicial foi posta em $t_0 = -\infty$ podemos obter as funções de correlação de equilíbrio, a qualquer quinto tempo finito, bastando apenas colocar todos os quintos tempos iguais. A escolha (2.69) faz exatamente isso em $t = 0$.

Para $\lambda = 1$ temos que $Z^{\lambda}_{\rm SS}$ é igual a (2.46) e para $\lambda = 0$ é o funcional gerador da teoria quântica, $Z = \int \mathcal{D}q \, \exp -S[q]$, pois q está desacoplado de C, $\overline{C}$ e p.

Vamos mostrar que as funções de correlação obtidas de $Z^{\lambda}_{\rm SS}[\mathcal{J}]$ são independentes de λ. Primeiramente vamos observar que $Z^{\lambda}_{\rm SS}[\mathcal{J}]$ é invariante pela supersimetria (2.29) (anti-BRS) pois $-Q_{\mathcal{A}}\, \overline{D} D\, Q_{\mathcal{A}}$ e $S[Q]$ o são como também

$$\int dt\, d\theta\, d\bar{\theta}\, \delta(t)\, \delta(\bar{\theta})\, \delta(\theta) = \frac{d}{2} \int dt\, d\theta\, d\bar{\theta}\, \Theta(t + (2/d)\,\bar{\theta}\theta) \tag{2.70}$$

onde Θ é a função de Heaviside usual. Seja então

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z^{\lambda}_{\rm SS}[\mathcal{J}] &= \frac{1}{Z^{\lambda}_{\rm SS}} \frac{\partial}{\partial \lambda} Z^{\lambda}_{\rm SS}[\mathcal{J}] \\ &= - \int d\theta\, d\bar{\theta} \int_{-\infty}^{0} dt\, \left[d/2 - \delta(t)\, \delta(\bar{\theta})\, \delta(\theta) \right] \left\langle S[Q] \right\rangle_{\mathcal{J},\lambda} \end{aligned} \tag{2.71}$$

mas, pela simetria (2.29), o integrando deve depender de t, θ e $\bar{\theta}$ através do invariante $t + (2/d)\,\bar{\theta}\theta$ e assim

$$\left\langle S[Q] \right\rangle_{\mathcal{J},\lambda} = f_{\mathcal{J},\lambda}(t + (2/d)\,\bar{\theta}\theta) = f_{\mathcal{J},\lambda}(t) + \frac{2}{d}\, \bar{\theta}\theta\, \frac{\partial}{\partial t} f_{\mathcal{J},\lambda}(t) \tag{2.72}$$

e portanto após a integração em t a expressão (2.71) resulta

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln Z^{\lambda}_{\rm SS}[\mathcal{J}] = f_{\mathcal{J},\lambda}(-\infty) \tag{2.73}$$

mas $f_{\mathcal{J},\lambda}(-\infty)$ não depende de $\mathcal{J}$, pois este só atua em $t = 0$. Para as funções de correlação $\delta^n \ln Z^{\lambda}_{\rm SS}[\mathcal{J}]/\delta\mathcal{J}^n$ temos

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\delta^n \ln Z^{\lambda}_{\rm SS}[\mathcal{J}]}{\delta\mathcal{J}^n}\right) = \frac{\delta^n}{\delta\mathcal{J}^n}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln Z^{\lambda}_{\rm SS}[\mathcal{J}]\right) = 0$$

o que mostra a independência das funções de correlação em λ e portanto fornece uma prova não perturbativa para a equivalência da quantização estocástica com a integração funcional Euclideana.

CAPÍTULO 3

QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DO MODELO SIGMA NÃO LINEAR NA EXPANSÃO $1/N$ E SUA RENORMALIZABILIDADE

Desenvolveremos agora a quantização estocástica do modelo sigma não linear [95]. Nosso objetivo será triplo, pois primeiramente procuraremos entender como se processa a quantização estocástica de um sistema vinculado, em segundo lugar como é introduzida a expansão perturbativa desse modelo em potências de $1/N$ e finalmente como renormalizamos a teoria perturbativa assim obtida. Inicialmente trataremos os dois primeiros pontos utilizando a formulação de Langevin e posteriormente usaremos exclusivamente a formulação funcional, descrita no capítulo 2, que se mostrará muito mais conveniente no estudo da renormalizabilidade da teoria.

O modelo sigma não linear tem uma longa tradição na teoria de campos. Foi proposto no início da década de sessenta no estudo das interações fortes [96] e vem desde então sendo estudado, principalmente devido ao fato de que em duas dimensões espaço temporais compartilhar de propriedades semelhantes às teorias de Yang-Mills no espaço quadridimensional, como por exemplo, a liberdade assintótica [97], renormalizabilidade [98] e a existência de soluções do tipo ínstantons [99]. Também possui infinitas leis de conservação clássicas locais e não locais [100] que possibilitam a fatorização da matriz S [101]. Seu tratamento perturbativo, na chamada expansão em potências de $1/N$, proporcionou um grande desenvolvimento no estudo da estrutura dos modelos sigmas não lineares e de suas generalizações [102].

A densidade de Lagrangeana que descreve classicamente o modelo sigma não linear é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_a)^2 \tag{3.1}$$

onde as variáveis dinâmicas são N campos escalares, ϕ_a, $a = 1, \ldots, N$, sujeitos ao vínculo

$$\phi_a^2 = \frac{N}{2f} \tag{3.2}$$

e a soma nos índices repetidos está implícita. Claramente a teoria é invariante pelo grupo $O(N)$.

A expansão perturbativa usual do modelo sigma não linear, em $1/N$, é feita de maneira sistemática através da formulação integral funcional [30,103]. O funcional gerador das funções de Green Euclideanas é

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\, \delta\left(\phi_a^2 - \frac{N}{2f}\right) \mathrm{e}^{-\int d^n x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_a)^2 - J_a \phi_a\right]} \tag{3.3}$$

onde o vínculo é implementado através da função delta de Dirac. Introduzindo um campo auxiliar $\sigma(x)$, o campo multiplicador de Lagrange, teremos que

$$\delta\left(\phi_a^2 - \frac{N}{2f}\right) = \int \mathcal{D}\sigma\, \mathrm{e}^{-\int d^n x \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\left(\phi_a^2 - \frac{N}{2f}\right)} \tag{3.4}$$

e o funcional gerador (3.3) fica

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\sigma\, \mathrm{e}^{-\int d^n x \left(\mathcal{L}_{\mathrm{ef}} - J_a \phi_a\right)} \tag{3.5}$$

onde a Lagrangeana efetiva $\mathcal{L}_{\mathrm{ef}}$ é

$$\mathcal{L}_{\mathrm{ef}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_a)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi_a^2 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\left(\phi_a^2 - \frac{N}{2f}\right) \tag{3.6}$$

e introduzimos um termo de massa para o campo ϕ_a. Classicamente, devido ao vínculo, esse termo não afeta a dinâmica e quanticamente a massa m é ajustada de modo que o campo σ tenha valor esperado no vácuo nulo.

Passaremos ao estudo da quantização estocástica de (3.6). Consideraremos um espaço tempo de n dimensões mas devemos lembrar que na expansão em $1/N$ o modelo é renormalizável em duas e três dimensões, conforme o caso usual.

3.1–QUANTIZAÇÃO DO MODELO SIGMA NÃO LINEAR EM $1/N$ NO FORMALISMO DE LANGEVIN

Podemos tentar quantizar esse modelo estocasticamente considerando as equações de Langevin para $\phi_a(x,t)$ e $\sigma(x,t)$ obtidas ao usarmos as equações de movimento derivadas

através de (3.6). Obtemos então

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi_a(x,t) = (\Box - m^2)\,\phi_a - \frac{2}{\sqrt{N}}\,\sigma\,\phi_a + \eta_a \tag{3.7a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\sigma(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{N}}\,\phi_a^2 + \frac{\sqrt{N}}{2f} + \eta_\sigma \tag{3.7b}$$

com os ruídos satisfazendo distribuições Gaussianas. Aqui já temos uma inconsistência dimensional pois como, em n dimensões, $[\phi] = \frac{n-2}{2}$ e $[\sigma] = 2$ (em unidades de massa) a equação (3.7a) implica que $[t] = -2$, que são dimensões incompatíveis com (3.7b). Contorna-se tal problema facilmente, usando a liberdade que o coeficiente de difusão, d, na equação de Langevin (1.2) oferece. Assim para o campo ϕ_a usamos uma equação de Langevin com coeficiente de difusão d_ϕ, tal que $[d_\phi] = 0$. Analogamente para o campo σ, usamos um coeficiente de difusão d_σ com $[d_\sigma] = 6-n$, e as duas equações de Langevin ficam dimensionalmente consistentes. Mostraremos explicitamente que no equilíbrio as funções de correlação independem de d_ϕ e d_σ.

Mesmo compatibilizando as dimensões das equações temos que a aproximação linear de (3.7b) não possue o termo correspondente a força de deslocamento, descrevendo portanto, um processo de difusão pura, e levando consequentemente, a divergências no equilíbrio para as correlações do campo σ. O mesmo comportamento é encontrado nas teorias de gauge, onde a equação de Langevin para a parte longitudinal do campo de gauge também não possui um termo de amortecimento e, como vimos no capítulo 1, esse problema é resolvido pelo uso da fixação estocástica de gauge de Zwanziger [10,42]. Podemos solucionar tal dificuldade trabalhando com uma Lagrangeana modificada, proposta por Lowenstein e Speer [104]. O "truque" consiste em adicionar e subtrair um termo em (3.6) de modo que tenhamos $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\rm int}$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\phi_a)^2 + \frac{1}{2}\,m^2\phi_a^2 + \frac{1}{2}\,\sigma\,\Sigma(-\Box,t)\,\sigma \\ \mathcal{L}_{\rm int} &= \frac{1}{\sqrt{N}}\,\sigma\phi_a^2 - \frac{1}{2}\,\sigma\,\Sigma(-\Box,t)\,\sigma \end{aligned} \tag{3.8}$$

e Σ é escolhido de modo que, para cada ordem em $1/N$, apenas um número finito de diagramas contribuam.

Assim, no espaço dos momentos, as equações de Langevin obtidas usando (3.8) ficam

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d_\phi}{2}(k^2+m^2)\right]\phi_a(k,t)=\eta_a(k,t)-\frac{d_\phi}{\sqrt{N}}\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\,\phi_a(p,t)\,\sigma(k-p,t) \tag{3.9a}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\frac{d_\sigma}{2}\,\Sigma(k^2,t)\right]\sigma(k,t)=\eta_\sigma(k,t)+\frac{d_\sigma}{2}\sigma(k,t)\Sigma(k^2,t)$$

$$-\frac{d_\sigma}{2\sqrt{N}}\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\,\phi_a(p,t)\,\phi_a(k-p,t) \tag{3.9b}$$

com ruídos satisfazendo

$$\begin{aligned}\langle\eta_a(k_1,t_1)\,\eta_b(k_2,t_2)\rangle&=d_\phi(2\pi)^n\,\delta_{ab}\,\delta^n(k_1+k_2)\,\delta(t_1-t_2)\\ \langle\eta_\sigma(k_1,t_1)\,\eta_\sigma(k_2,t_2)\rangle&=d_\sigma(2\pi)^n\delta^n(k_1+k_2)\,\delta(t_1-t_2)\end{aligned} \tag{3.10}$$

Em geral $\Sigma(k^2,t)$ tem uma dependência complicada no quinto tempo, entretanto, para valores suficientemente grandes do quinto tempo, Σ tende para o valor de equilíbrio $\Sigma(k^2)$, dado por

$$\Sigma(k^2)=-2\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{(p^2+m^2)\,[(p-k)^2+m^2]} \tag{3.11}$$

Tomaremos como condições iniciais para as equações de Langevin (3.9)

$$\phi(k,t_0)=\phi_0\quad\text{e}\quad\sigma(k,t_0)=\sigma_0\quad\text{para}\quad t_0=-\infty \tag{3.12}$$

de modo que o processo estocástico relaxa ao equilíbrio já a quinto tempo finito, como discutimos no capítulo 1.

Obtemos facilmente as funções de Green de (3.9)

$$G_{ab}(k,t)=\delta_{ab}\;\mathrm{e}^{-\frac{d_\phi}{2}(k^2+m^2)t}\;\theta(t) \tag{3.13a}$$

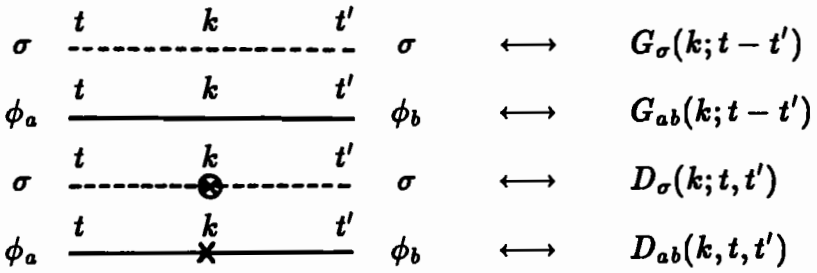
$$G_\sigma(k,t)=\mathrm{e}^{-\frac{d_\sigma}{2}\Sigma(k^2)t}\;\theta(t) \tag{3.13b}$$

e os propagadores, em ordem dominante em $1/N$, são

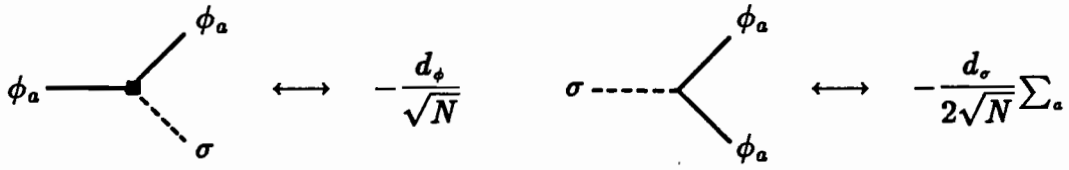
$$D_{ab}(k;t,t')=\langle\phi_a(k,t)\,\phi_b(k',t')\rangle=(2\pi)^n\delta_{ab}\,\delta^n(k+k')\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{d_\phi}{2}(k^2+m^2)|\,t-t'\,|}}{k^2+m^2} \tag{3.14a}$$

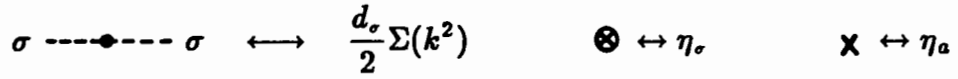
$$D_\sigma(k;t,t')=\langle\sigma(k,t)\,\sigma(k',t')\rangle=(2\pi)^n\delta^n(k+k')\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{d_\sigma}{2}\Sigma(k^2)|\,t-t'\,|}}{\Sigma(k^2)} \tag{3.14b}$$

Graficamente fazemos as associações



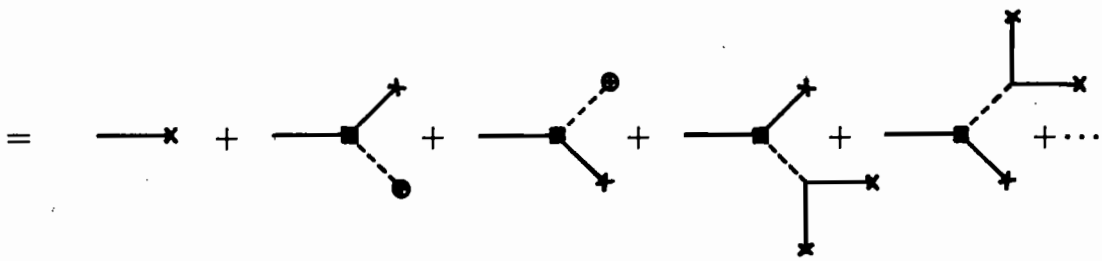
para os propagadores, e





para os vértices e ruídos, de modo que

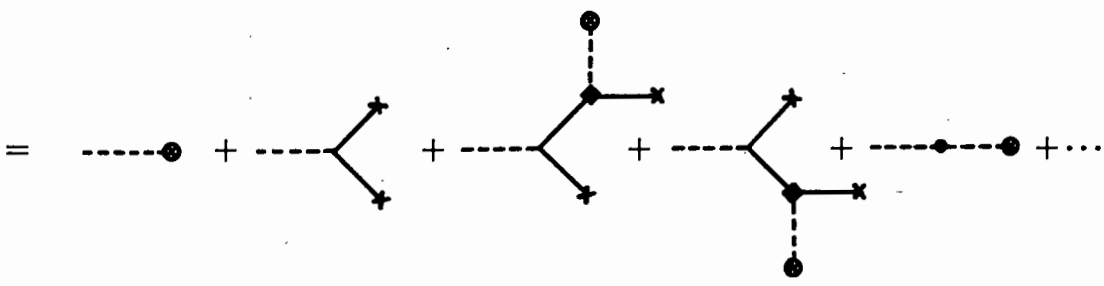
$$\phi_a(k,t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau\ \mathrm{e}^{-\frac{d_\phi}{2}(k^2+m^2)(t-\tau)}\left[\eta_a(k,\tau) - \frac{d_\phi}{\sqrt{N}}\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\,\phi_a(p,\tau)\,\sigma(k-p,\tau)\right] =$$



(3.15*a*)

$$\sigma(k,t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau\ \mathrm{e}^{-\frac{d_\sigma}{2}\Sigma(k^2)(t-\tau)}\left[\eta_\sigma(k,\tau)\right.$$

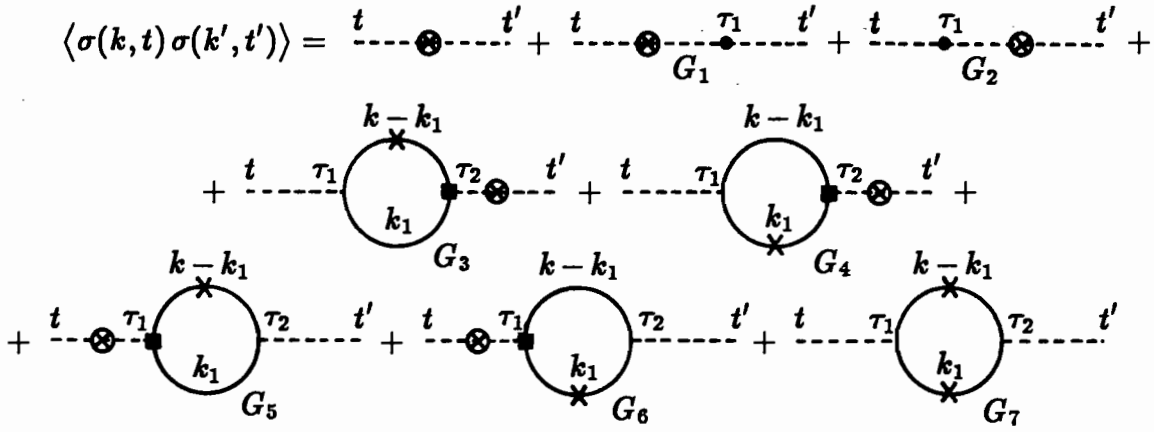
$$\left. + \frac{d_\sigma}{2}\sigma(k,\tau)\Sigma(k^2) - \frac{d_\sigma}{2\sqrt{N}}\int \frac{d^n p}{(2\pi)^n}\,\phi_a(p,\tau)\,\phi_a(k-p,\tau)\right] =$$



(3.15*b*)

Podemos agora calcular a função de correlação de dois pontos para o campo σ e estudar o seu limite de equilíbrio. Graficamente, em ordem dominante de $1/N$, nos temos

$\langle \sigma(k,t)\,\sigma(k',t') \rangle =$



(3.16)

e as expressões analíticas associadas aos gráficos são

$$G_1 + G_2 = \frac{d_\sigma}{2}\Sigma(k^2)\int_{-\infty}^{t'} d\tau_1\; \mathrm{e}^{-\frac{d_\sigma}{2}\Sigma(k^2)(t'-\tau_1)}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{d_\sigma}{2}\Sigma(k^2)|\,t-\tau_1\,|}}{\Sigma(k^2)} \quad + \quad (t \to t') \tag{3.17a}$$

$$G_3 + G_5 = \frac{d_\phi d_\sigma}{2}\int\frac{d^n k_1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{t} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2\; \mathrm{e}^{-\frac{d_\sigma}{2}\Sigma(k^2)(t-\tau_1)}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{d_\sigma}{2}\Sigma(k^2)|\,t'-\tau_2\,|}}{\Sigma(k^2)}$$

$$\times\frac{\mathrm{e}^{-\frac{d_\phi}{2}[(k-k_1)^2+m^2]\,|\,\tau_1-\tau_2\,|}}{(k-k_1)^2+m^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{d_\phi}{2}(k_1^2+m^2)(\tau_1-\tau_2)} \quad + \quad (t \rightleftharpoons t', \tau_2 \rightleftharpoons \tau_1) \tag{3.17b}$$

$$G_4 + G_6 = G_3 + G_5 \quad \text{com} \quad (k_1 \rightleftharpoons k - k_1) \tag{3.17c}$$

$$G_7 = d_\sigma^2\int\frac{d^n k_1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{t} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\tau_1} d\tau_2\; \mathrm{e}^{-\frac{d_\sigma}{2}\Sigma(k^2)(t-\tau_1)}\,\mathrm{e}^{-\frac{d_\sigma}{2}\Sigma(k^2)(t'-\tau_2)}$$

$$\times\frac{\mathrm{e}^{-\frac{d_\phi}{2}(k_1^2+m^2)|\,\tau_1-\tau_2\,|}}{k_1^2+m^2}\,\frac{\mathrm{e}^{-\frac{d_\phi}{2}[(k-k_1)^2+m^2]\,|\,\tau_1-\tau_2\,|}}{(k-k_1)^2+m^2} \tag{3.17d}$$

No limite de equilíbrio $(t = t')$ nos temos então

$$G_1 + G_2 = \frac{1}{\Sigma(k^2)} \tag{3.18a}$$

$$G_3 + \cdots + G_7 = 2\int \frac{d^n k_1}{(2\pi)^n} \frac{1}{\Sigma(k^2)\left[d_\sigma/d_\phi\,\Sigma(k^2) + (k-k_1)^2 + k_1^2 + 2m^2\right]}$$
$$\times\left\{ \frac{d_\sigma/d_\phi}{(k_1^2+m^2)\left[(k-k_1)^2+m^2\right]} + \frac{1}{\Sigma(k^2)\left[(k-k_1)^2+m^2\right]} \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\Sigma(k^2)(k_1^2+m^2)} \right\} = -\frac{1}{\Sigma(k^2)} \qquad (3.18b)$$

onde nos usamos (3.11). Assim, como na quantização usual [104], também para a quantização estocástica, gráficos que contém inserções de vértices bilineares para o campo sigma, como G_1 e G_2 em (3.16), são cancelados por gráficos que contém bolhas como subgráficos, das do tipo existentes em G_3 à G_7 em (3.16). Portanto, as inserções podem ser omitidas inteiramente nos cálculos perturbativos e para cada ordem de $1/N$ um número finito de gráficos contribuem para as funções de Green.

Apesar de ser perfeitamente possível levar adiante a expansão perturbativa em $1/N$ do modelo sigma não linear no formalismo de Langevin a discussão da renormalizabilidade da teoria será demasiadamente intrincada. Abandonaremos essa formulação e exploraremos a representação funcional para processos estocásticos.

3.2–QUANTIZAÇÃO DO MODELO SIGMA NÃO LINEAR EM $1/N$ NO FORMALISMO INTEGRAL FUNCIONAL

Vamos implementar agora a expansão $1/N$, do modelo sigma não linear, no formalismo integral funcional da quantização estocástica. Seguiremos os passos do capítulo 2 na derivação do funcional gerador $Z[J]$ das funções de correlação

$$\left\langle \phi^{\eta}_{a_1}(x_1,t_1)\cdots\phi^{\eta}_{a_n}(x_n,t_n)\right\rangle_{\eta} = \left.\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J_{a_1}(x_1,t_1)\cdots\delta J_{a_n}(x_n,t_n)}\right|_{J=0} \tag{3.19}$$

Para construir $Z[J]$ iremos considerar a equação de Langevin para o campo ϕ_a obtido de (3.6) e o vínculo (3.2). Assim, nos temos

$$\dot{\phi}_a = -\frac{d}{2}\left(\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi_a} + \frac{2}{\sqrt{N}}\sigma\phi_a\right) + \eta_a \tag{3.20a}$$

$$F \equiv \phi_a^2 - \frac{N}{2f} = 0 \tag{3.20b}$$

onde

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_a)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi_a^2 \tag{3.21}$$

Note que a postura que estamos tomando aqui é totalmente diferente da seção anterior, onde naquele caso os campos ϕ_a e σ evoluiam estocasticamente. Consideraremos agora apenas o campo ϕ_a evoluindo estocasticamente, mas vinculado a superfície de uma esfera durante todos os quintos tempos da dinâmica estocástica. De fato, é possível incorporar essa informação diretamente na equação de Langevin. Usando a condição de consistência $\dot{F} = \phi_a\dot{\phi}_a = 0$ podemos obter o valor de σ em (3.20a) multiplicando-a por ϕ_a e somando em a. Substituindo o valor obtido para σ em (3.20a) obtemos a seguinte equação de Langevin

$$\dot{\phi}_a = \left(\delta_{ab} - \frac{2f}{N}\phi_a\phi_b\right)\left(-\frac{d}{2}\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi_b} + \eta_b\right)$$

obtida por Namiki et al [105] no estudo da quantização estocástica de sistemas vinculados. Apesar de ser possível fazer uma teoria de perturbação, em $1/N$, diretamente dessa equação preferimos manter o campo σ no formalismo, pois pela experiência que temos na quantização usual, a introdução do campo auxiliar facilita de sobremaneira a contrução da expansão $1/N$.

3.2.1–FUNCIONAL GERADOR

Vamos introduzir a seguinte notação

$$\xi = \begin{pmatrix} \phi \\ \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} J \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad F(\xi) = \nu \tag{3.22}$$

tal que

$$\begin{cases} \xi_a = \phi_a, & \nu_a = \eta_a, & K_a = J_a & \text{para } a = 1, \ldots, N \\ \xi_a = \frac{1}{\sqrt{N}}\sigma, & \nu_a = 0, & K_a = 0 & \text{para } a = N+1 \end{cases} \tag{3.23}$$

e

$$\begin{cases} F_a(\phi, \sigma) = \dot{\phi}_a + \frac{d}{2}\left(\frac{\delta S}{\delta \phi_a} + \frac{2}{\sqrt{N}}\sigma\phi_a\right) & \text{para } a = 1, \ldots, N \\ F_a(\phi) = \phi_a^2 - \frac{N}{2f} \equiv F & \text{para } a = N+1 \end{cases} \tag{3.24}$$

O funcional gerador é então

$$Z[K] = \left\langle e^{\int_{-\infty}^{+\infty} d^n x dt\, K_a \xi_a^\nu} \right\rangle_\nu \tag{3.25}$$

onde ξ_a^ν é solução de $F(\xi) = \nu$, isto é, satisfaz a equação de Langevin (3.20a) e o vínculo (3.20b). Para um processo Gaussiano e Markoviano

$$Z[K] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\nu \, \exp\left\{ -\frac{1}{2d} \int_{-\infty}^{+\infty} d^n x dt\, \nu_a^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} d^n x dt\, K_a \xi_a^\nu \right\} \tag{3.26}$$

onde a integração deve ser entendida simbolicamente, pois $\mathcal{D}\nu = \mathcal{D}\begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}$. Reescrevendo (3.26) na forma

$$Z[K] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\nu \mathcal{D}\xi \, \delta(\xi_a - \xi_a^\nu) \exp\left\{ -\int d^n x dt \left(\frac{1}{2d}\nu_a^2 - K_a \xi_a \right) \right\} \tag{3.27}$$

e também

$$\delta(\xi_a - \xi_a^\nu) = \delta(F_a(\xi) - \nu_a) \left\| \frac{\delta F_a}{\delta \xi_b} \right\| \tag{3.28}$$

nos obtemos que

$$Z[K] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\nu \mathcal{D}\xi \, \delta(F_a(\xi) - \nu_a) \left\| \frac{\delta F_a}{\delta \xi_b} \right\| \exp\left\{ -\int d^n x dt \left(\frac{1}{2d}\nu_a^2 - K_a \xi_a \right) \right\} \tag{3.29}$$

com $\|\mathcal{O}\| = \det \mathcal{O}$. Usando as identidades

$$\delta(F_a(\xi) - \nu_a) = \int \mathcal{D}\beta \; \mathrm{e}^{-\int d^n x dt \, \beta_a (F_a(\xi) - \nu_a)} \tag{3.30}$$

$$\left\| \frac{\delta F_a}{\delta \xi_b} \right\| = \int \mathcal{D}\overline{D}\mathcal{D}D \; \mathrm{e}^{\int d^n x dt \, d^n x' dt' \, \overline{D}_a(x,t) \frac{\delta F_a(x,t)}{\delta \xi_b(x',t')} D_b(x',t')} \tag{3.31}$$

onde introduzimos

$$\beta = \begin{pmatrix} \lambda \\ \frac{1}{\sqrt{N}}\alpha \end{pmatrix}, \quad \overline{D} = \begin{pmatrix} \overline{C} \\ \frac{1}{\sqrt{N}}\overline{c} \end{pmatrix} \quad \mathrm{e} \quad D = \begin{pmatrix} C \\ \frac{1}{\sqrt{N}} c \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

tal que

$$\begin{cases} \beta_a = \lambda_a, & \overline{D}_a = \overline{C}_a, & D_a = C_a & \text{para } a = 1, \ldots, N \\ \beta_a = \frac{1}{\sqrt{N}}\alpha, & \overline{D}_a = \frac{1}{\sqrt{N}}\overline{c}, & D_a = \frac{1}{\sqrt{N}} c & \text{para } a = N+1 \end{cases} \tag{3.33}$$

teremos (por simplicidade escreveremos x ao invés de (x,τ)) que (3.29) pode ser escrita como

$$Z[K] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\nu \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\beta \mathcal{D}\overline{D}\mathcal{D}D \; \exp\Big\{ - \int dx \Big[\frac{1}{2d}\nu_a^2 - K_a \xi_a + \\ + \beta_a (F_a(\xi) - \nu_a) - \int dy \, \overline{D}_a(x) \frac{\delta F_a(x)}{\delta \xi_b(y)} D_b(y) \Big] \Big\} \tag{3.34}$$

Integrando em $\nu_a = \begin{pmatrix} \eta_a \\ 0 \end{pmatrix}$, no obtemos finalmente

$$Z[K] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\beta \mathcal{D}\overline{D}\mathcal{D}D \; \exp\Big\{ - \int dx \Big[-\frac{d}{2}\widetilde{\beta}_a^2 + \beta_a F_a(\xi) - \\ - \int dy \, \overline{D}_a(x) \frac{\delta F_a(x)}{\delta \xi_b(y)} D_b(y) \Big] + \int dx \, K_a \xi_a \Big\} \tag{3.35}$$

onde

$$\widetilde{\beta} = \mathcal{O}\beta \quad \text{com} \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

As simetrias presentes na ação efetiva

$$\mathcal{S}^{\mathrm{ef}}(\xi, \beta, D, \overline{D}) = -\frac{d}{2} \int dx \, \widetilde{\beta}_a^2 + \int dx \, \beta_a F_a(\xi) - \int dx dy \, \overline{D}_a(x) M_{ab}(x,y) D_b(y) \tag{3.36}$$

com

$$M_{ab}(x,y) = \frac{\delta F_a(x)}{\delta \xi_b(y)} \tag{3.37}$$

são as simetrias nilpotente ($\delta^2 = 0$) do tipo BRS

$$\begin{aligned} \delta\xi_a(x) &= \bar{\epsilon} D_a(x) \\ \delta D_a(x) &= 0 \\ \delta\overline{D}_a(x) &= \bar{\epsilon}\beta_a(x) \\ \delta\beta_a(x) &= 0 \end{aligned} \tag{3.38}$$

e a do tipo anti-BRS

$$\begin{aligned} \delta^*\xi_a(x) &= \overline{D}_a(x)\epsilon \\ \delta^* D_a(x) &= -\left(\frac{2}{d}\dot{\xi}_a(x) - \beta_a(x)\right)\epsilon \\ \delta^*\overline{D}_a(x) &= 0 \\ \delta^*\beta_a(x) &= \frac{2}{d}\dot{\overline{D}}_a(x)\epsilon \end{aligned} \tag{3.39}$$

onde ϵ e $\bar{\epsilon}$ são variáveis de Grassmann. Essas simetrias são as análogas de (2.27) e (2.29) e podem ser verificadas por substituição direta em (3.36).

Em termos das componentes, (3.36) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\text{ef}}(\phi,\sigma,\lambda,\alpha,\overline{C},C,\bar{c},c) = \int d^n x dt \left[-\frac{d}{2}\lambda_a^2 + \lambda_a F_a(\phi,\sigma) + \frac{1}{\sqrt{N}}\alpha F(\phi)\right] - \\ - \int d^n x dt\, d^n x' dt' \left[\overline{C}_a \frac{\delta F_a}{\delta\phi_b} C_b + \overline{C}_a \frac{\delta F_a}{\delta\sigma} c + \frac{1}{\sqrt{N}}\bar{c}\frac{\delta F}{\delta\phi_b} C_b\right] \end{aligned} \tag{3.40}$$

e usando (3.24) nos obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\text{ef}} = \int d^n x dt \left[-\frac{d}{2}\lambda_a^2 + \lambda_a\left(\dot{\phi}_a + \frac{d}{2}\frac{\delta S}{\delta\phi_a} + \frac{d}{\sqrt{N}}\sigma\phi_a\right) + \frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\left(\phi_a^2 - \frac{N}{2f}\right)\right. \\ \left. -\overline{C}_a\left(\delta_{ab}\frac{d}{dt} + \frac{d}{2}\frac{\delta^2 S}{\delta\phi_b\delta\phi_a} + \frac{d}{\sqrt{N}}\sigma\delta_{ab}\right)C_b - \frac{d}{\sqrt{N}}\overline{C}_a\phi_a c - \frac{2}{\sqrt{N}}\bar{c}\phi_a C_a\right] \end{aligned} \tag{3.41}$$

Introduzindo os supercampos

$$\Phi_a(x,t,\overline{\theta},\theta) = \phi_a(x,t) + \overline{\theta}\, C_a(x,t) + \overline{C}_a(x,t)\,\theta + \lambda_a(x,t)\,\overline{\theta}\theta \tag{3.42a}$$

$$\Xi(x,t,\overline{\theta},\theta) = \sigma(x,t) + \overline{\theta}\, c(x,t) + \bar{c}(x,t)\,\theta + \alpha(x,t)\,\overline{\theta}\theta \tag{3.42b}$$

a ação (3.41) (com $d = 2$, por simplicidade) pode ser posta numa forma supersimétrica

$$\mathcal{S}_{\rm SS}^{\rm ef} = \int d^n x\, dt\, d\theta\, d\bar{\theta} \left\{ -\Phi_a\, \overline{D} D\, \Phi_a + \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\Phi_a^2 - \frac{N}{2f} \right) \Xi + S[\Phi] \right\} \tag{3.43}$$

com as derivadas covariantes $\overline{D}$ e D dadas por (2.39). Usando que

$$\delta \left(\Phi_a^2 - \frac{N}{2f} \right) = \int \mathcal{D}\Xi\, \mathrm{e}^{\int d^n x\, dt\, d\theta\, d\bar{\theta}\, \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\Phi_a^2 - \frac{N}{2f} \right) \Xi} \tag{3.44}$$

o funcional gerador (3.35) pode ser escrito na seguinte representação supersimétrica

$$Z_{\rm SS}[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\Phi\, \delta \left(\Phi_a^2 - \frac{N}{2f} \right) \mathrm{e}^{-\mathcal{S}_{\rm SS} - \int d^n x\, dt\, d\theta\, d\bar{\theta}\, \mathcal{J}_a \Phi_a} \tag{3.45}$$

com

$$\mathcal{S}_{\rm SS} = \int d^n x\, dt\, d\theta\, d\bar{\theta}\, \left(-\Phi_a\, \overline{D} D\, \Phi_a + S[\Phi] \right) \tag{3.46}$$

e

$$\mathcal{J}_a = J_a(x,t) \delta(\bar{\theta}) \delta(\theta) \tag{3.47}$$

A expressão (3.45) mostra compactamente a quantização estocástica do modelo sigma não linear e explicita o fato de que o vínculo tem de ser imposto supersimetricamente. Também a supersimetria explícita de (3.45) garante, pela redução dimensional estocástica que mostramos no capítulo 2, que as funções de correlação obtidas tendem as usuais, no equilíbrio. As simetrias (3.38) e (3.39) podem ser derivadas observando que a ação (3.46) é invariante por $\bar{\theta} \to \bar{\theta} + \bar{\epsilon}$ e por $\theta \to \theta + \epsilon$ e $t \to t - \bar{\theta}\epsilon$ respectivamente.

3.2.2–RENORMALIZABILIDADE

As identidades de Ward correspondentes as simetrias (3.38) e (3.39) podem ser derivadas analogamente às do capítulo 2. Adicionamos primeiramente fontes externas $\bar{\vartheta}$, ϑ e M para os campos D, $\overline{D}$ e β respectivamente. Teremos então

$$Z[K, M, \vartheta, \bar{\vartheta}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\beta \mathcal{D}\overline{D} \mathcal{D}D\, \exp\Big\{ -\mathcal{S}^{\rm ef}(\xi, \beta, D, \overline{D}) + \\ + \int dx\, \left(K_a \xi_a + M_a \beta_a + \bar{\vartheta}_a D_a + \overline{D}_a \vartheta_a \right) \Big\} \tag{3.48}$$

Fazendo uma mudança de variáveis compatível com (3.38) e pelo fato da medida de integração, bem como $\mathcal{S}^{\rm ef}$, serem invariantes por essa transformação, obtemos

$$\int dx \left(K_a \frac{\delta Z}{\delta \overline{\vartheta}_a} + \frac{\delta Z}{\delta M_a} \vartheta_a \right) = 0 \tag{3.49}$$

Usando o funcional gerador das funções 1PI

$$\Gamma[\xi, \beta, D, \overline{D}] = W[K, M, \vartheta, \overline{\vartheta}] - \int dx \, \left(K_a \xi_a + M_a \beta_a + \overline{\vartheta}_a D_a + \overline{D}_a \vartheta_a \right) \tag{3.50}$$

onde W é o gerador das funções conexas, (3.49) fica

$$\int dx \left(\frac{\delta \Gamma}{\delta \xi_a} D_a + \beta_a \frac{\delta \Gamma}{\delta \overline{D}_a} \right) = 0 \tag{3.51}$$

que é a identidade de Ward para a simetria de BRS (3.38). Analogamente, obtemos para a simetria (3.39), de anti-BRS, a seguinte identidade de Ward

$$\int dx \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta \xi_a} \overline{D}_a + \frac{2}{d} \frac{\delta \Gamma}{\delta \beta_a} \dot{\overline{D}}_a - \frac{\delta \Gamma}{\delta D_a} \left(\beta_a - \frac{2}{d} \dot{\xi}_a \right) \right] = 0 \tag{3.52}$$

Vamos mostrar agora, usando a identidade de Ward (3.51), que a forma da ação efetiva (3.41), do modelo sigma não linear, se mantém invariante após a renormalização, i.e., que o modelo é renormalizável no contexto estocástico.

Considerando um esquema de regularização invariante, de modo a preservar a simetria de BRS por renormalização, nós teremos que a ação efetiva renormalizada satisfazerá a identidade de Ward (3.51). Agora, supondo que possamos mostrar, por contagens de potências, que a ação efetiva renormalizada tem a forma

$$\mathcal{S}^{\rm ef}_{\rm R} = - \int dx dy \, M^{\rm R}_{ab}(\xi) \overline{D}_a D_b + \Sigma(\xi, \beta) \tag{3.53}$$

com

$$M^{\rm R}_{ab}(\xi) = 0 \quad \text{para} \quad a = b = N + 1 \tag{3.54}$$

a equação (3.51) implica em

$$\frac{\delta M^{\mathrm{R}}_{ab}(x,y)}{\delta\xi_c(z)} - \frac{\delta M^{\mathrm{R}}_{ac}(x,z)}{\delta\xi_b(y)} = 0 \tag{3.55a}$$

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta\xi_a(x)} = \int dy\, \beta_b(y) M^{\mathrm{R}}_{ba}(y,x) \tag{3.55b}$$

e (3.55a) nos fornece

$$M^{\mathrm{R}}_{ab} = \frac{\delta F^{\mathrm{R}}_a(\xi)}{\delta\xi_b} \tag{3.56}$$

A solução de (3.55b) pode então ser escrita como

$$\Sigma = \int dx\, \beta_a F^{\mathrm{R}}_a(\xi) - W^{\mathrm{R}}(\beta) \tag{3.57}$$

e que substituida, junto com (3.56), em (3.53) resulta

$$\mathcal{S}^{\mathrm{ef}}_{\mathrm{R}} = -\int dxdy\, \frac{\delta F^{\mathrm{R}}_a(\xi)}{\delta\xi_b} \overline{D}_a D_b + \int dx\, \beta_a F^{\mathrm{R}}_a(\xi) - W^{\mathrm{R}}(\beta) \tag{3.58}$$

Vamos observar que

$$\begin{cases} F^{\mathrm{R}}_a(\xi) = F^{\mathrm{R}}_a(\phi,\sigma) & \text{para } a = 1,\ldots,N \\ F^{\mathrm{R}}_a(\xi) = F^{\mathrm{R}}_a(\phi) \equiv F^{\mathrm{R}}(\phi) & \text{para } a = N+1 \end{cases} \tag{3.59}$$

sendo que a dependência de F^{R}_a em ϕ apenas, para $a = N+1$, segue de (3.54). Assim, para que a ação efetiva renormalizada $\mathcal{S}^{\mathrm{ef}}_{\mathrm{R}}$ tenha a mesma forma que (3.35) devemos em primeiro lugar garantir, por contagens de potências, que ela pode ser escrita na forma (3.53), de modo que a simetria de BRS nos permite reescreve-la diretamente na forma (3.58), nos restando apenas mostrar que $F^{\mathrm{R}}_a(\xi)$ depende de ξ como em (3.24) e que $W^{\mathrm{R}}(\beta)$ é quadrática em $\widetilde{\beta}$.

Para mostrarmos os requisitos que garantem a invariância da ação efetiva por renormalização devemos fazer contagens de potências compatíveis com a expansão $1/N$. Usando (3.21) e (3.41) teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\mathrm{ef}} = \int d^n x dt \Bigg[& -\frac{d}{2}\lambda_a^2 + \lambda_a\left(\dot{\phi}_a + \frac{d}{2}(-\Box + m^2)\phi_a + \frac{d}{\sqrt{N}}\sigma\phi_a\right) + \frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\left(\phi_a^2 - \frac{N}{2f}\right) \\ & -\overline{C}_a\left(\frac{d}{dt} + \frac{d}{2}(-\Box + m^2) + \frac{d}{\sqrt{N}}\sigma\right)C_a - \frac{d}{\sqrt{N}}\overline{C}_a\phi_a c - \frac{2}{\sqrt{N}}\overline{c}\phi_a C_a\Bigg] \end{aligned} \tag{3.60}$$

As regras de Feynman, no espaço de Fourier ω, k resultam para os propagadores

$$\phi_a \xrightarrow{k,\omega} \phi_b \quad \longleftrightarrow \quad G_\phi(k,\omega) = \frac{d}{\omega^2 + \frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2}\delta_{ab} \tag{3.61a}$$

$$\lambda_a \xrightarrow{k,\omega} \lambda_b \quad \longleftrightarrow \quad G_\lambda(k,\omega) = 0 \tag{3.61b}$$

$$\phi_a \xrightarrow{k,\omega} \lambda_b \quad \longleftrightarrow \quad G_{\phi\lambda}(k,\omega) = \frac{1}{i\omega + \frac{d}{2}(k^2+m^2)}\delta_{ab} \tag{3.61c}$$

$$\alpha \xrightarrow{k,\omega} \alpha \quad \longleftrightarrow \quad G_\alpha(k,\omega) = 0 \tag{3.61d}$$

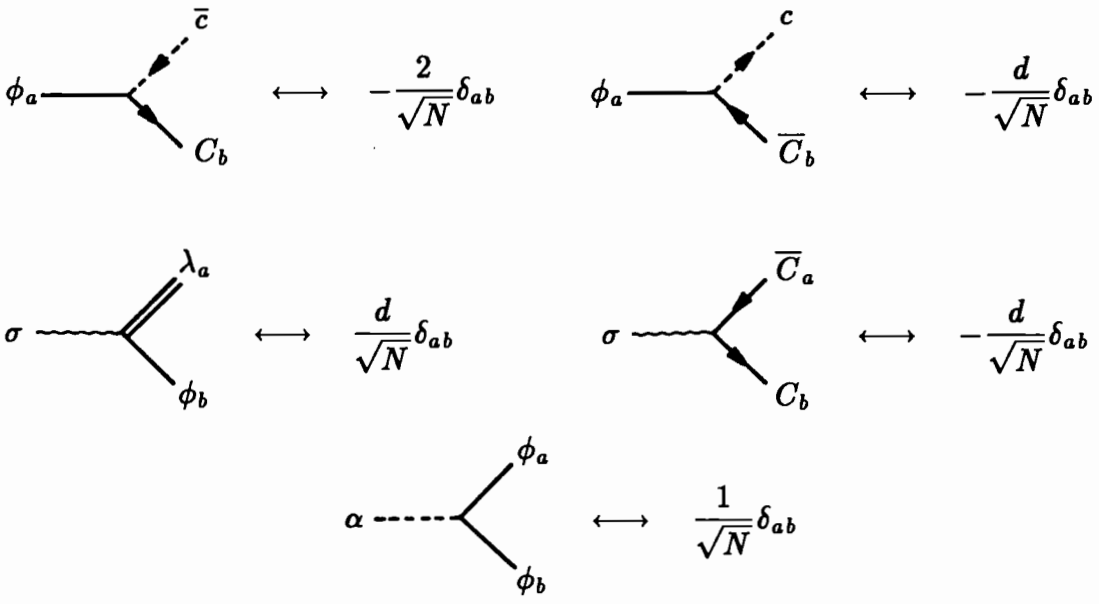
$$\sigma \xrightarrow{k,\omega} \sigma \quad \longleftrightarrow \quad G_\sigma(k,\omega) = -\frac{\Gamma_{\alpha\alpha}}{(\Gamma_{\alpha\sigma})^2} \tag{3.61e}$$

$$\alpha \xrightarrow{k,\omega} \sigma \quad \longleftrightarrow \quad G_{\alpha\sigma}(k,\omega) = \frac{1}{\Gamma_{\alpha\sigma}} \tag{3.61f}$$

$$C_a \xrightarrow{k,\omega} \overline{C}_b \quad \longleftrightarrow \quad G_{C\overline{C}}(k,\omega) = -\frac{1}{i\omega + \frac{d}{2}(k^2+m^2)}\delta_{ab} \tag{3.61g}$$

$$c \xrightarrow{k,\omega} \bar{c} \quad \longleftrightarrow \quad G_{c\bar{c}}(k,\omega) = \frac{1}{\Gamma_{c\bar{c}}} \tag{3.61h}$$

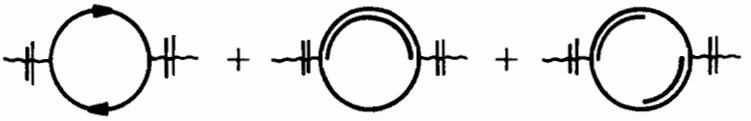
e para os vértices



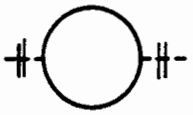
(3.62)

Os propagadores G_ϕ, G_λ, $G_{\phi\lambda}$ e $G_{C\overline{C}}$ foram obtidos pela inversão da matriz que define a forma quadrática nos campos correspondentes, existentes na ação (3.60). Por sua vez os propagadores restantes foram calculados, em ordem dominante de $1/N$, através da inversão da forma quadrática obtida por interação dos campos ϕ, λ, C e $\overline{C}$. Os coeficientes dessa forma quadrática são

$$-\frac{1}{2}\Gamma_{\sigma\sigma}(k,\omega) = \quad + \quad + \quad = 0 \qquad (3.63a)$$

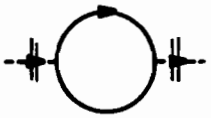


$$-\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\alpha}(k,\omega) = \qquad (3.63b)$$



$$-\frac{1}{2}\Gamma_{\alpha\sigma}(k,\omega) = \qquad (3.63c)$$

$$-\frac{1}{2}\Gamma_{c\bar{c}}(k,\omega) = \qquad (3.63d)$$



onde $\Gamma_{\sigma\sigma}$ é nulo pois loops formandos por linhas fechadas de $C\overline{C}$ ou $\lambda\phi$ dão contrubuição nula. Podemos ver isso mais facilmente através da dependência do propagador em relação ao quinto tempo, obtido da seguinte transformada de Fourier

$$\begin{aligned} G_{C\overline{C}}(k,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, G_{C\overline{C}}(k,\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \mathrm{e}^{i\omega t} \int_0^{\infty} d\alpha\, \mathrm{e}^{-\alpha\left[i\omega+\frac{d}{2}(k^2+m^2)\right]}\, \delta_{ab} \\ &= -\,\theta(t)\, \mathrm{e}^{-\frac{d}{2}(k^2+m^2)t}\, \delta_{ab} \end{aligned} \qquad (3.64)$$

que mostra a causalidade do propagador. O mesmo vale para $G_{\phi\lambda}(k,t)$. Também de (3.63d) obtemos que

$$\Gamma_{c\bar{c}}(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, \mathrm{e}^{i\omega t}\, \Gamma_{c\bar{c}}(k,\omega) \propto \theta(t) \qquad (3.65)$$

de modo que

$$G_{c\bar{c}}(k,t) \propto \delta'(t) \qquad (3.66)$$

Tanto neste esquema como na quantização usual do modelo sigma não linear o vínculo se manifesta quanticamente através das identidades gráficas mostradas na figura 3.1, que

generalizam a identidade de Aref'eva [106]. As identidades das figuras 3.1(a) e 3.1(b) são consequência de

$$\Gamma_{\alpha\sigma}(k,\omega)\, G_{\alpha\sigma}(k,\omega) = 1 \tag{3.67}$$

e as identidades das figuras 3.1(c) e 3.1(d) de

$$\Gamma_{\alpha\sigma}(k,\omega)\, G_{\sigma}(k,\omega) + \Gamma_{\alpha\alpha}(k,\omega)\, G_{\alpha\sigma}(k,\omega) = 0 \tag{3.68a}$$

$$\Gamma_{c\bar{c}}(k,\omega)\, G_{c\bar{c}}(k,\omega) = 1 \tag{3.68b}$$

respectivamente.

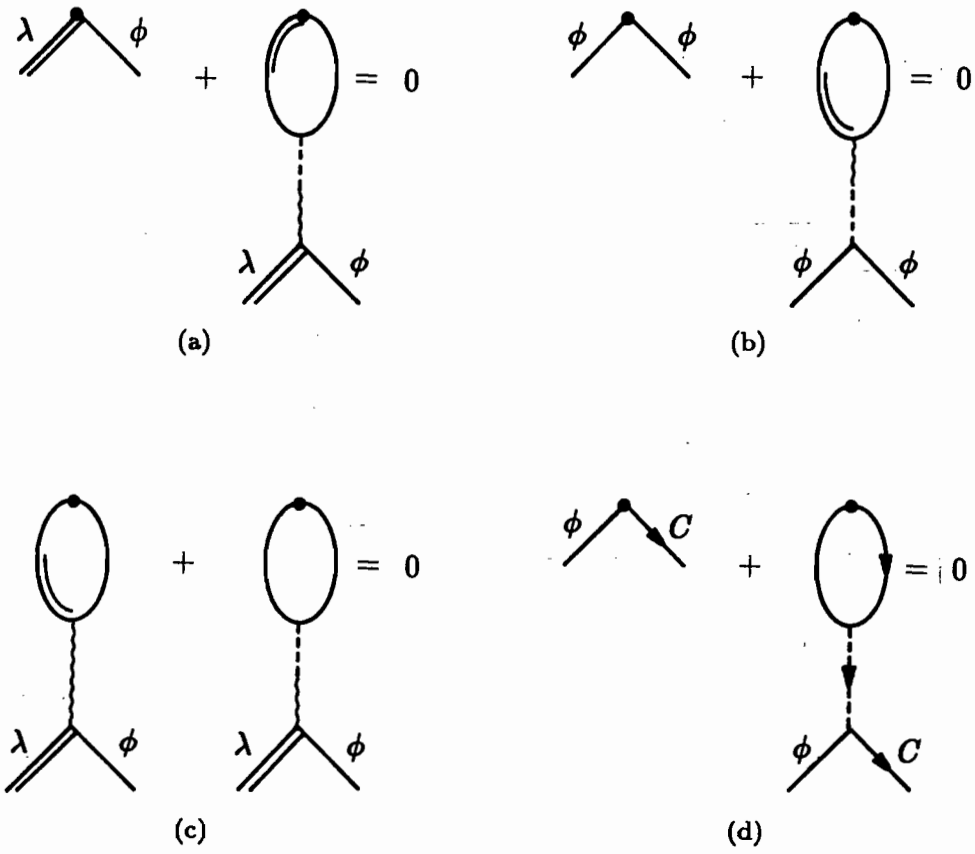


Figura 3.1

Das regras (3.61) e (3.62) podemos construir qualquer gráfico de Feynman $\mathcal{G}$ que será constituido por linhas, que chamaremos *singulares*, associadas aos propagadores G_ϕ, G_λ, G_α, G_σ, $G_{C\overline{C}}$ e $G_{c\bar{c}}$ e por linhas, que chamaremos de *mistas*, associadas aos propagadores $G_{\phi\lambda}$ e $G_{\alpha\sigma}$. Teremos então linhas singulares do tipo ϕ, λ, α, σ, $C\overline{C}$ e $c\bar{c}$ e linhas mistas

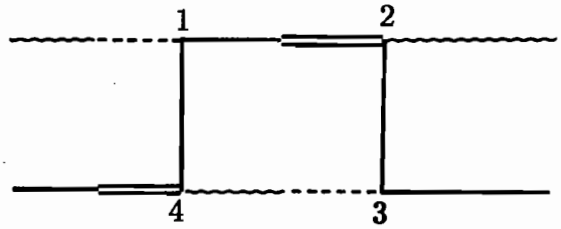
do tipo $\phi\lambda$ e $\alpha\sigma$. O grau de divergência superficial δ desses gráficos, num espaço de D dimensões ($n+2$ em nosso caso, pois $2[x]=[t]$) é dado por

$$\delta = D - \sum_i [A_i] N_{A_i} - \sum_v (D - [\mathcal{L}_v]) \tag{3.69}$$

onde

$$[A_i] = \frac{D - d_{A_i}}{2} \quad \text{e} \quad [\mathcal{L}_v] = D_v + \sum_i [A_i] \nu_v^{A_i} \tag{3.70}$$

com: d_{A_i} = comportamento assintótico do propagador do campo A_i, para grandes momentos e quinto tempo transformado ($G_{A_i}(\beta k, \beta^2 \omega) \to \beta^{-d_{A_i}}$ quando $\beta \to \infty$); N_{A_i} = número de linhas externas associadas ao campo A_i (no caso de uma linha mista externa, A_i é considerado como o campo associado a extremidade da linha diretamente ligada ao vértice); D_v = número de derivadas atuando nos campos no vértice v; $\nu_v^{A_i}$ = número de linhas associadas ao campos A_i ligadas ao vértice v (novamente, no caso de uma linha mista, A_i é considerado como o campo associado a extremidade da linha diretamente ligada ao vértice); $[A_i]$ = dimensão canônica do campo A_i; $[\mathcal{L}_v]$ = dimensão canônica do vértice v e $\sum_{v(i)}$ = soma sob todos os vértices (linhas) do gráfico $\mathcal{G}$. Por exemplo, para o gráfico



que tem uma linha mista externa e uma interna do tipo $\phi\lambda$, bem como do tipo $\alpha\sigma$, consideramos que

$$N_\alpha = N_\lambda = N_\phi = N_\sigma = 1\,,$$
$$[\mathcal{L}_1] = [\mathcal{L}_3] = 2[\phi] + [\alpha] \quad \text{e} \quad [\mathcal{L}_2] = [\mathcal{L}_4] = [\phi] + [\lambda] + [\sigma]$$

na expressão (3.69).

Para obtermos as dimensões canônicas $[A_i]$ dos campos (lembrando que $[x] = -1$ e $[t] = -2$ em unidades de massa) presentes na ação (3.60), devemos obter o comportamento assintótico dos propagadores (3.61), compatíveis com a expansão $1/N$, no ultravioleta.

Usando que em (3.63)

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{\sigma\sigma}(\beta k, \beta^2\omega) = 0 \\
&\Gamma_{\alpha\alpha}(\beta k, \beta^2\omega) \to \beta^{n-6} \\
&\Gamma_{\alpha\sigma}(\beta k, \beta^2\omega) \to \beta^{n-4} \\
&\Gamma_{c\bar{c}}(\beta k, \beta^2\omega) \to \beta^{n-4}
\end{aligned} \tag{3.71}$$

encontramos que

$$\begin{aligned}
&[\phi] = \frac{n-2}{2} && [\sigma] = 2 \\
&[\lambda] = \frac{n+2}{2} && [\alpha] = 4 \\
&[\overline{C}] + [C] = n && [\bar{c}] + [c] = 6
\end{aligned} \tag{3.72}$$

Da expressão (3.70) verificamos que todos os vértices presentes tem $[\mathcal{L}_v] \leq D$ e portanto, nas situações com as maiores divergências, (3.69) assume a forma

$$\delta = D - \sum_i [A_i] N_{A_i} \tag{3.73}$$

Vamos procurar agora satisfazer os requisitos da simetria de BRS. Primeiramente devemos garantir que a ação efetiva renormalizada S_{ef}^{R}, dada por (3.53), não tenha dependência em $\bar{c}c$. Isso só é possível quando gráficos com apenas duas linhas externas desse tipo, uma correspondente a c e outra a $\bar{c}$, tenham $\delta < 0$. Assim, usando (3.73), a dimensão do espaço-tempo deve ser tal que

$$[\bar{c}] + [c] = 6 > n + 2$$

i.e., $n < 4$. Para que S_{ef}^{R} seja apenas quadrática em $\overline{C}C$, $\overline{C}c$ e $\bar{c}C$ devemos ter para o sistema

$$\left.\begin{aligned} 2([\overline{C}] + [C]) &= 2n \\ 2([\overline{C}] + [c]) &= n + 6 \end{aligned}\right\} > n + 2$$

que é satisfeito para $n > 2$. Por sua vez, os coeficientes renormalizados de $\overline{C}C$, $\overline{C}c$ e $\bar{c}C$ dependerão apenas de ϕ e σ se

$$\left.\begin{aligned} [\overline{C}] + [C] + [\lambda] &= \tfrac{3n+2}{2} \\ [\overline{C}] + [C] + [\alpha] &= n + 4 \\ [\overline{C}] + [c] + [\lambda] &= n + 4 \\ [\overline{C}] + [c] + [\alpha] &= \tfrac{n+14}{2} \end{aligned}\right\} > n + 2$$

portanto, para $n > 2$.

Assim, dentro do intervalo $2 < n < 4$ podemos passar da ação efetiva renormalizada (3.53) para a (3.58) sem ter de mostrar o cancelamento de uma série de possíveis contratermos. Por exemplo, contagens de potências mostram a existência de divergências para gráficos com apenas $N_\sigma = 2$ linhas externas do tipo σ ($\delta = n - 2$) levando aparentemente a uma teoria não renormalizável. Entretanto, tal contratermo satisfaz a forma geral (3.53), pois está incluso no termo genérico $\Sigma(\xi, \beta)$, e graças a simetria de BRS a passagem para (3.58) nos garante o cancelamento do mesmo.

Em (3.58) $W^{\mathrm{R}}(\beta)$ deve ser quadrática em λ, tal como em (3.60), o que é possível quando

$$\left.\begin{array}{c} 2[\alpha] = 8 \\ [\alpha] + [\lambda] = \frac{n+10}{2} \end{array}\right\} > n + 2$$

que resulta em $n < 6$, compatível como o intervalo dimensional considerado. Resta mostrar que os termos $\lambda_a F_a^{\mathrm{R}}(\phi, \sigma)$ e $\alpha F^{\mathrm{R}}(\phi)$, em (3.58), são compatíveis com (3.24).

Usando (3.72) e (3.73) os gráficos com $\delta > 0$ e com $N_\lambda = 1$, N_ϕ e N_σ linhas externas como também os com $N_\alpha = 1$ e N_ϕ linhas externas darão origem, na ação renormalizada, aos contratermos

$$(\lambda_a \phi_a)(\phi^2)^\ell \quad \text{para } \ell = 1, 2, 3, \ldots, \ell_{\max} \tag{3.74}$$

onde

$$\ell_{\max} = \frac{2}{n-2}$$

de forma diferente dos presentes na ação inicial (3.60). Porém, como mostra a figura 3.2, esses vértices podem ter duas linhas ϕ_a ou ligadas diretamente no subdiagrama S, figura 3.2(a), ou ligadas a um outro vértice, produzindo os diagramas das figuras 3.2(b) à 3.2(e). Como todos os diagramas têm a mesma odem em $1/N$ e graças a identidade da figura 3.1(b) as contribuições 3.2(a) e 3.2(b) se cancelam, enquanto que as da figura 3.2(d) e 3.2(e) se cancelam pela identidade da figura 3.1(c). Na figura 3.2(c) os campos de fantasmas C e $\overline{C}$ formarão um circuito fechado, devido a conservação do número fermiônico, com outros campos de fantasmas como mostra a figura 3.3. Observando que os propagadores, dos campos de fantasmas, dependem do quinto tempo na forma dada por (3.64) e (3.66) teremos, para o circuito fechado, produtos do tipo

$$\theta(t - t_1)\,\delta'(t_1 - t_2)\,\theta(t_2 - t_3)\cdots\theta(t_i - t_{i+1})\cdots\delta'(t_{n-1} - t_n)\,\theta(t_n - t)$$

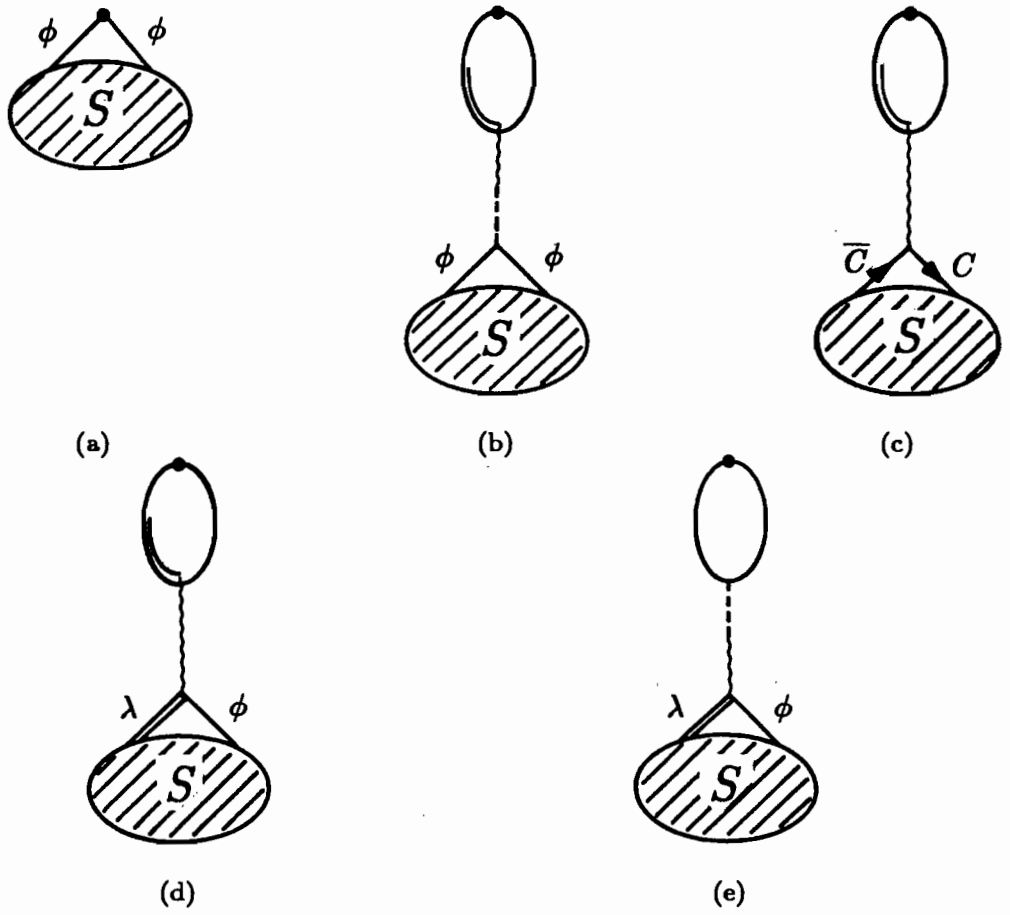


Figura 3.2

que fará com que o gráfico da figura 3.2(c) de contribuição nula [107]. Portanto, para $2+\epsilon \leq n \leq 4-\epsilon$, com $\epsilon \to 0$, os contratermos (3.74) não são necessários e o modelo sigma não linear é renormalizável em $1/N$ no contexto estocástico.

O caso $n = 2$ é delicado pois contagens de potências mostram que gráficos com $N_{C\overline{C}} = 4$ e qualquer número de N_ϕ linhas externas tem $\delta = 0$ e portanto geram os contratermos

$$(C_a\overline{C}_a)^2(\phi^2)^\ell \quad \text{para } \ell = 0,1,2,3,\ldots \tag{3.75}$$

que fazem com que a ação renormalizada não possa ser escrita na forma (3.53). Quando (3.75) é um vértice interno, o gráfico correspondente dá contribuição nula devido ao mecanismo da figura 3.3 e como fisicamente estamos interessados nas funções de correlação que envolvem apenas os campos do tipo ϕ (na verdade basta nos limitarmos ao cálculo de funções de correlação com $N_{C\overline{C}} = 0$) a forma (3.53) da ação renormalizada pode ser mantida nessa situação. Na verdade contagens de potências também mostram a existência

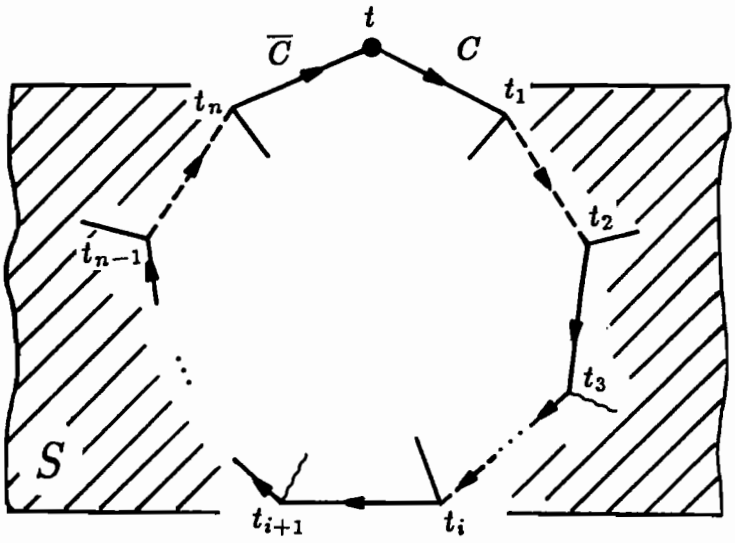


Figura 3.3

de contratermos do tipo

$$(C_a\overline{C}_a)(\lambda_a\phi_a)(\phi^2)^\ell \quad \text{para } \ell = 0,1,2,3,\ldots \tag{3.76}$$

que não são necessários, conforme mostram as figura 3.2 (dá conta dos contratermos com $\ell \neq 0$) e 3.4 (dá conta do contratermo com $\ell = 0$).

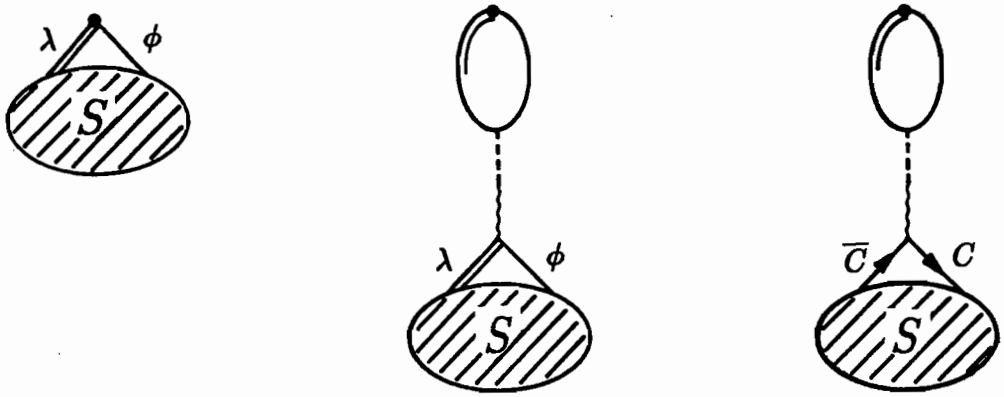


Figura 3.4

Podemos passar a análise da ação renormalizada na forma (3.58), e assim os gráficos com $N_\lambda = 1$, N_ϕ e N_σ linhas externas produzem os contratermos

$$\begin{aligned}&(\lambda_a\phi_a)(\phi^2)^\ell\,, \quad \text{dois } \partial_\mu \text{ distribuidos em } (\lambda_a\phi_a)(\phi^2)^\ell \\ &\text{e} \quad (\lambda_a\phi_a)\sigma(\phi^2)^\ell \quad \text{para } \ell = 1,2,3,\ldots\end{aligned} \tag{3.77}$$

e para $N_\alpha = 1$ e N_ϕ linhas externas

$$\alpha(\phi^2)^\ell \quad \text{para } \ell = 1,2,3,\ldots \tag{3.78}$$

como contratermos. Pelo mesmo mecanismo das figuras 3.2 e 3.4 (dá conta do contratermo $(\lambda_a\phi_a)(\partial_\mu\phi_a\partial_\mu\phi_a)$, obtido de (3.77)) esses contratermos não são necessários. Portanto, para $n = 2$ a teoria é renormalizável desde que nos limitemos ao cálculo de função de correlação que não involvam os campos de fantasmas C e $\overline{C}$.

Apesar da existência dos campos de fantasmas C e $\overline{C}$ ser essencial no explicitamento da simetria de BRS, facilitando a discussão da renormalizabilidade das teorias quantizadas estocasticamente, eles não possuem nenhum papel dinâmico e exploraremos tal fato na seção seguinte ao construirmos um funcional gerador efetivo mais tratável perturbativamente.

3.2.3–FUNCIONAL GERADOR EFETIVO E EXPANSÃO PERTURBATIVA

Pode-se construir uma teoria perturbativa através da ação efetiva (3.60) ou mesmo da ação supersimétrica (3.46), entretanto é preferível derivarmos uma outra ação efetiva que envolva um número menor de campos. Podemos inicialmente efetuar as integrações em $\overline{C}$, C, $\bar{c}$ e c no funcional gerador (3.35), com a ação efetiva (3.60), e obtemos que

$$Z[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\lambda\mathcal{D}\alpha \,\det M \exp\left\{-\int d^n x dt \left[-\frac{d}{2}\lambda_a^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. +\lambda_a\left(\dot{\phi}_a + \frac{d}{2}(-\Box + m^2)\phi_a + \frac{d}{\sqrt{N}}\sigma\phi_a\right) + \frac{1}{\sqrt{N}}\alpha\left(\phi_a^2 - \frac{N}{2f}\right) - J_a\phi_a\right]\right\} \tag{3.79}$$

onde

$$\det M = \begin{vmatrix} \left(\frac{d}{dt} + \frac{d}{2}(-\Box + m^2) + \frac{d}{\sqrt{N}}\sigma\right)\delta_{ab} & d\phi_a \\ 2\phi_b & 0 \end{vmatrix} \tag{3.80}$$

Esse determinante pode ser calculado da mesma maneira que calculamos o determinante (2.12). De fato, o cálculo foi realizado por Okano e Schülke [79] e resulta em

$$\det M \sim \exp\left\{\frac{d}{2\sqrt{N}}\delta^n(0)\int d^n x dt\, \sigma(x,t)\right\} \tag{3.81}$$

que funciona como um contratermo que cancela algumas divergências na teoria de perturbação. Também, se usarmos regularização dimensional podemos simplesmente descartá-lo da ação, já que $\delta^n(0) \equiv \left(\int d^n k\right)_R = 0$ [28,72,79], onde R refere-se a integral regularizada dimensionalmente. Assim, (3.79) após integrarmos em λ, assume a forma

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\alpha \, \det M \exp\left\{ - \int d^n x dt \left[\frac{1}{2d} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \left(\dot{\phi}_a + \frac{d}{2}(-\Box + m^2)\phi_a + \frac{d}{\sqrt{N}}\sigma\phi_a \right)^2 + \frac{1}{\sqrt{N}}\alpha \left(\phi_a^2 - \frac{N}{2f} \right) - J_a\phi_a \right] \right\} \quad (3.82)$$

e descartando a contribuição de (3.81) a expressão acima, após integrações por partes, fica

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\alpha \, \exp\left\{ - \int d^n x dt \left[\frac{1}{2d} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \phi_a \left(K^\dagger K + \frac{d}{\sqrt{N}}\sigma K + \frac{d}{\sqrt{N}} K^\dagger \sigma + \frac{d^2}{N}\sigma^2 + \frac{2d}{\sqrt{N}}\alpha \right) \phi_a - \frac{\sqrt{N}}{2f}\alpha - J_a\phi_a \right] \right\} \quad (3.83)$$

onde

$$\begin{aligned} K &= \frac{d}{dt} + \frac{d}{2}(-\Box + m^2) \\ K^\dagger &= -\frac{d}{dt} + \frac{d}{2}(-\Box + m^2) \end{aligned} \quad (3.84)$$

que é o ponto de partida para a expansão perturbativa em $1/N$.

Note que se tivessemos partido do sistema (3.20) com $\sigma = 0$ chegariamos ao invés de (3.83) a expressão

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\alpha \, \exp\left\{ - \int d^n x dt \left[\frac{1}{2d}\phi_a \left(K^\dagger K + \frac{2d}{\sqrt{N}}\alpha \right) \phi_a - \frac{\sqrt{N}}{2f}\alpha - J_a\phi_a \right] \right\} \quad (3.85)$$

e essa escolha seria a princípio perfeitamente razoável e equivaleria a ter introduzido o vínculo diretamente no funcional gerador, como é feito usualmente, ao invés de ser imposto durante todos os instantes da dinâmica estocástica. Entretanto, os gráficos com N_α linhas externas do tipo α, gerados pela Lagrangeana efetiva correspondente, tem grau de divergência superficial $\delta = 4 - 4N_\alpha$, para $n = 2$, e as subtrações oriundas do método de BPHZ, para a função de quatro pontos, dariam origem a contratermos do tipo $(\phi_a \Box \phi_a)(\phi_b \Box \phi_b)$, não presentes na Lagrangeana. Por sua vez, os mesmos não poderiam ser cancelados (estamos nos referindo a sua divergência) através da utilização do mecanismo de Aref'eva , que

necessita de termos $(\phi_a\phi_a)$ para a sua implementação, levando aparentemente a uma teoria perturbativa não renormalizável, em contraste com a Lagrangeana presente em (3.83) onde o termo quártico em ϕ existe, como pode ser visto realizando a integração em σ. Entretanto, nada impede que existam cancelamentos que impliquem no anulamento desse tipo de contratermo. Por outro lado, a prova da renormalizabilidade usando a simetria de BRS é sem dúvida muito mais direta e a existência da simetria é consequência direta do uso do sistema (3.20). Mais importante ainda é que esse sistema garante que o funcional gerador pode ser escrito na forma supersimétrica (3.45) o que implica o limite de equilíbrio correto para as funções de correlação. Em resumo, apesar de não termos uma prova que garanta a não renormalizabilidade da teoria perturbativa obtida de (3.85) o uso da ação efetiva em (3.83) é a mais conveniente.

Podemos obter as regras de Feynman para a expansão $1/N$ do modelo sigma não linear quantizado estocasticamente. Primeiramente vamos reescrever (3.83) na forma

$$Z[J] = \mathcal{N}\int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\alpha\, \exp\left\{-\int d^n x dt\left(\frac{1}{2d}\phi_a\, D\,\phi_a - \frac{\sqrt{N}}{2f}\alpha - J_a\phi_a\right)\right\} \tag{3.86}$$

onde nós introduzimos a notação

$$D = K^\dagger K + \frac{d}{\sqrt{N}}\sigma K + \frac{d}{\sqrt{N}}K^\dagger\sigma + \frac{d^2}{N}\sigma^2 + \frac{2d}{\sqrt{N}}\alpha \tag{3.87}$$

A integração em ϕ é Gaussiana e resulta em

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\alpha\, \exp\left\{-\frac{N}{2}\,\mathrm{tr}\ln D - \int d^n x dt\left[\frac{d}{2}J_a D^{-1}J_a - \frac{\sqrt{N}}{2f}\alpha\right]\right\} \\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\sigma\mathcal{D}\alpha\, \exp\left\{-\mathcal{A}_{\mathrm{ef}} - \frac{d}{2}\int d^n x dt\, J_a D^{-1}J_a\right\} \end{aligned} \tag{3.88}$$

onde $\mathcal{A}_{\mathrm{ef}}$ é uma ação efetiva dada pela seguinte expansão em potências de $1/\sqrt{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathrm{ef}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\frac{N}{2}\,\mathrm{tr}\left[(K^\dagger K)^{-1}\left(\frac{d}{\sqrt{N}}\sigma K + \frac{d}{\sqrt{N}}K^\dagger\sigma + \frac{d^2}{N}\sigma^2 + \frac{2d}{\sqrt{N}}\alpha\right)\right]^{k+1} \\ -\frac{\sqrt{N}}{2f}\int d^n x dt\,\alpha(x,t) = \sqrt{N}\mathcal{A}^{(1)} + \mathcal{A}^{(2)} + \cdots \end{aligned} \tag{3.89}$$

Em particular, $\mathcal{A}^{(1)}$ é dada por

$$\mathcal{A}^{(1)} = \frac{d}{2}\,\mathrm{tr}\left[(K^{-1}+(K^{\dagger})^{-1})\,\sigma\right] + d\,\mathrm{tr}\left[(K^{\dagger}K)^{-1}\alpha\right] - \frac{1}{2f}\int d^n x dt\,\alpha(x,t) \tag{3.90}$$

com

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[(K^{\dagger}K)^{-1}\alpha\right] &= \int d^n x dt\,\langle x,t|(K^{\dagger}K)^{-1}\alpha|x,t\rangle \\ &= \int d^n x dt \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}}\langle x,t|(K^{\dagger}K)^{-1}|k,\omega\rangle\langle k,\omega|\alpha|x,t\rangle \\ &= \int d^n x dt \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}}\frac{1}{\omega^2+\frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2}\alpha(x,t)\end{aligned} \tag{3.91}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[(K^{-1}+(K^{\dagger})^{-1})\,\sigma\right] &= \int d^n x dt\,\langle x,t|\left(K^{-1}+(K^{\dagger})^{-1}\right)\sigma|x,t\rangle \\ &= \int d^n x dt \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}}\langle x,t|\left(K^{-1}+(K^{\dagger})^{-1}\right)|k,\omega\rangle\langle k,\omega|\sigma|x,t\rangle \\ &= \int d^n x dt \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}}\frac{d(k^2+m^2)}{\omega^2+\frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2}\sigma(x,t)\end{aligned} \tag{3.92}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{(1)} = \widehat{\alpha}(0,0)\left[\int\frac{d^n k\,d\omega}{(2\pi)^{n+1}}\,\frac{d}{\omega^2+\frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2}-\frac{1}{2f}\right]+ \\ +\frac{1}{2}\widehat{\sigma}(0,0)\int\frac{d^n k\,d\omega}{(2\pi)^{n+1}}\,\frac{d^2(k^2+m^2)}{\omega^2+\frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2}\end{aligned} \tag{3.93}$$

onde

$$\widehat{f}(k,\omega) = \int d^n x\,dt\;\mathrm{e}^{-ikx-i\omega t}\,f(x,t) \tag{3.94}$$

é a transformada de Fourier de $f(x,t)$ com respeito a x e ao quinto tempo t, conforme as definições do apêndice. A integração em ω é trivial e fornece

$$\mathcal{A}^{(1)} = \widehat{\alpha}(0,0)\left[\int\frac{d^n k}{(2\pi)^n}\,\frac{1}{k^2+m^2}-\frac{1}{2f}\right]+\frac{1}{2}d\widehat{\sigma}(0,0)\delta^n(0) \tag{3.95}$$

Devemos observar que para $n = 2$ a integral presente no resultado acima, a qual chamaremos de I, diverge logaritmicamente. Podemos regularizá-la através de um corte de Pauli–Villars Λ de modo que

$$I(\Lambda) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{m^2} \tag{3.96}$$

A divergência em $\Lambda \to \infty$ pode ser absorvida definindo a constante de acoplamento renormalizada $f_r(\mu)$, onde μ é o ponto de renormalização, tal que

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\Lambda^2}{\mu^2} + \frac{1}{f_r(\mu)} \tag{3.97}$$

e portanto

$$\mathcal{A}^{(1)} = \widehat{\alpha}(0,0)\left[\frac{1}{4\pi} \ln \frac{\mu^2}{m^2} - \frac{1}{2f_r(\mu)}\right] + \frac{1}{2} d\widehat{\sigma}(0,0)\delta^n(0) \tag{3.98}$$

Assumindo que a teoria está regularizada dimensionalmente o termo $\frac{1}{2} d\widehat{\sigma}(0,0)\delta^n(0)$ é nulo. Tomando $\mathcal{A}^{(1)} = 0$, a fim de mantermos a estabilidade, temos a geração dinâmica de massa caracteristica do modelo.

Para obter os propagadores calculamos os termos quadráticos nos campos presentes em $\mathcal{A}^{(2)}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{(2)} = &-\frac{d^2}{4} \operatorname{tr}\left[K^{-1}\sigma K^{-1}\sigma\right] - \frac{d^2}{4} \operatorname{tr}\left[(K^\dagger)^{-1}\sigma(K^\dagger)^{-1}\sigma\right] - d^2 \operatorname{tr}\left[K^{-1}\sigma(K^\dagger K)^{-1}\alpha\right] \\ &-d^2 \operatorname{tr}\left[(K^\dagger K)^{-1}\sigma(K^\dagger)^{-1}\alpha\right] - d^2 \operatorname{tr}\left[(K^\dagger K)^{-1}\alpha(K^\dagger K)^{-1}\alpha\right]\end{aligned} \tag{3.99}$$

onde

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left[K^{-1}\sigma K^{-1}\sigma\right] &= \int d^n x dt \int d^n x' dt' \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{d^n k' d\omega'}{(2\pi)^{n+1}} \\ &\times \langle x,t|K^{-1}|k,\omega\rangle\langle k,\omega|\sigma|x',t'\rangle\langle x',t'|K^{-1}|k',\omega'\rangle\langle k',\omega'|\sigma|x,t\rangle \\ &= \int d^n x dt \int d^n x' dt'\, \sigma(x,t) \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{d^n k' d\omega'}{(2\pi)^{n+1}} \\ &\times \frac{e^{ik(x-x')+i\omega(t-t')}}{-i\omega + \frac{d}{2}(k^2+m^2)} \frac{e^{-ik'(x-x')-i\omega'(t-t')}}{-i\omega' + \frac{d}{2}(k'^2+m^2)} \sigma(x',t')\,,\end{aligned} \tag{3.100}$$

$$\mathrm{tr}\left[(K^\dagger)^{-1}\sigma(K^\dagger)^{-1}\sigma\right] = \int d^n x dt \int d^n x' dt' \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{d^n k' d\omega'}{(2\pi)^{n+1}}$$
$$\times \langle x,t|(K^\dagger)^{-1}|k,\omega\rangle\langle k,\omega|\sigma|x',t'\rangle\langle x',t'|(K^\dagger)^{-1}|k',\omega'\rangle\langle k',\omega'|\sigma|x,t\rangle$$
$$= \int d^n x dt \int d^n x' dt'\, \sigma(x,t) \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{d^n k' d\omega'}{(2\pi)^{n+1}}$$
$$\times \frac{\mathrm{e}^{ik(x-x')+i\omega(t-t')}}{i\omega + \frac{d}{2}(k^2+m^2)} \frac{\mathrm{e}^{-ik'(x-x')-i\omega'(t-t')}}{i\omega' + \frac{d}{2}(k'^2+m^2)} \sigma(x',t')\,, \tag{3.101}$$

$$\mathrm{tr}\left[K^{-1}\sigma(K^\dagger K)^{-1}\alpha\right] = \int d^n x dt \int d^n x' dt' \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{d^n k' d\omega'}{(2\pi)^{n+1}}$$
$$\times \langle x,t|K^{-1}|k,\omega\rangle\langle k,\omega|\sigma|x',t'\rangle\langle x',t'|(K^\dagger K)^{-1}|k',\omega'\rangle\langle k',\omega'|\alpha|x,t\rangle$$
$$= \int d^n x dt \int d^n x' dt'\, \alpha(x,t) \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{d^n k' d\omega'}{(2\pi)^{n+1}}$$
$$\times \frac{\mathrm{e}^{ik(x-x')+i\omega(t-t')}}{-i\omega + \frac{d}{2}(k^2+m^2)} \frac{\mathrm{e}^{-ik'(x-x')-i\omega'(t-t')}}{\omega'^2 + \frac{d^2}{4}(k'^2+m^2)^2} \sigma(x',t')\,, \tag{3.102}$$

$$\mathrm{tr}\left[(K^\dagger K)^{-1}\sigma(K^\dagger)^{-1}\alpha\right] = \int d^n x dt \int d^n x' dt' \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{d^n k' d\omega'}{(2\pi)^{n+1}}$$
$$\times \langle x,t|(K^\dagger K)^{-1}|k,\omega\rangle\langle k,\omega|\sigma|x',t'\rangle\langle x',t'|(K^\dagger)^{-1}|k',\omega'\rangle\langle k',\omega'|\alpha|x,t\rangle$$
$$= \int d^n x dt \int d^n x' dt'\, \alpha(x,t) \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{d^n k' d\omega'}{(2\pi)^{n+1}}$$
$$\times \frac{\mathrm{e}^{ik(x-x')+i\omega(t-t')}}{\omega^2 + \frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2} \frac{\mathrm{e}^{-ik'(x-x')-i\omega'(t-t')}}{i\omega' + \frac{d}{2}(k'^2+m^2)} \sigma(x',t')\,, \tag{3.103}$$

e

$$\mathrm{tr}\left[(K^\dagger K)^{-1}\alpha(K^\dagger K)^{-1}\alpha\right] = \int d^n x dt \int d^n x' dt' \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{d^n k' d\omega'}{(2\pi)^{n+1}}$$
$$\times \langle x,t|(K^\dagger K)^{-1}|k,\omega\rangle\langle k,\omega|\alpha|x',t'\rangle\langle x',t'|(K^\dagger K)^{-1}|k',\omega'\rangle\langle k',\omega'|\alpha|x,t\rangle$$
$$= \int d^n x dt \int d^n x' dt'\, \alpha(x,t) \int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \int \frac{d^n k' d\omega'}{(2\pi)^{n+1}}$$
$$\times \frac{\mathrm{e}^{ik(x-x')+i\omega(t-t')}}{\omega^2 + \frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2} \frac{\mathrm{e}^{-ik'(x-x')-i\omega'(t-t')}}{\omega'^2 + \frac{d^2}{4}(k'^2+m^2)^2} \alpha(x',t')\,. \tag{3.104}$$

Portanto, temos que

$$\mathcal{A}^{(2)} = \int d^n x\, dt \int d^n x'\, dt' \left\{ \frac{1}{2}\sigma(x,t)\Gamma_{\sigma\sigma}(x-x',t-t')\sigma(x',t') \right.$$
$$+\frac{1}{2}\sigma(x,t)\Gamma_{\sigma\alpha}(x-x',t-t')\alpha(x',t') + \frac{1}{2}\alpha(x,t)\Gamma_{\alpha\sigma}(x-x',t-t')\sigma(x',t')$$
$$\left. + \frac{1}{2}\alpha(x,t)\Gamma_{\alpha\alpha}(x-x',t-t')\alpha(x',t') \right\} \tag{3.105}$$

onde

$$\Gamma_{\sigma\sigma}(q,\Omega) = -\frac{d^2}{2}\int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \frac{1}{-i\omega + \frac{d}{2}(k^2+m^2)} \frac{1}{-i(\omega-\Omega) + \frac{d}{2}[(k-q)^2+m^2]}$$
$$-\frac{d^2}{2}\int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \frac{1}{i\omega + \frac{d}{2}(k^2+m^2)} \frac{1}{i(\omega-\Omega) + \frac{d}{2}[(k-q)^2+m^2]} = 0 \tag{3.106a}$$

$$\Gamma_{\alpha\alpha}(q,\Omega) = -2\int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \frac{d}{\omega^2 + \frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2} \frac{d}{(\omega-\Omega)^2 + \frac{d^2}{4}[(k-q)^2+m^2]^2} \tag{3.106b}$$

$$\Gamma_{\alpha\sigma}(q,\Omega) = -2d\int \frac{d^n k d\omega}{(2\pi)^{n+1}} \frac{1}{-i\omega + \frac{d}{2}(k^2+m^2)} \frac{d}{(\omega-\Omega)^2 + \frac{d^2}{4}[(k-q)^2+m^2]^2} \tag{3.106c}$$

$$\Gamma_{\sigma\alpha}(q,\Omega) = \Gamma_{\alpha\sigma}(q,\Omega) \tag{3.106d}$$

e

$$\Gamma(q,\Omega) = \int d^n(x-x')d(t-t')\, e^{-iq(x-x')-i\Omega(t-t')}\, \Gamma(x-x',t-t')$$

O comportamento assintótico para grandes momentos e quinto tempo (no espaço de Fourier), em duas dimensões, é facilmente obtido, e é para $\beta \to \infty$

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\sigma\sigma}(\beta q, \beta^2\Omega) = 0 \\ &\Gamma_{\alpha\alpha}(\beta q, \beta^2\Omega) \to \beta^{n-6} \\ &\Gamma_{\alpha\sigma}(\beta q, \beta^2\Omega) \to \beta^{n-4} \end{aligned} \tag{3.107}$$

que obviamente coincidem com os resultados (3.71).

De fato, as integrais (3.106) podem ser calculadas explicitamente. Vamos exemplificar

esse cálculo com a integral (3.106*b*). Sejam então as identidades

$$\begin{aligned}\frac{d}{\omega^2+\frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t}\, \frac{e^{-\frac{d}{2}(k^2+m^2)|t|}}{k^2+m^2} \\ \frac{d}{(\omega-\Omega)^2+\frac{d^2}{4}[(k-q)^2+m^2]^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, e^{i(\omega-\Omega)t'}\, \frac{e^{-\frac{d}{2}[(k-q)^2+m^2]|t'|}}{(k-q)^2+m^2}\end{aligned} \tag{3.108}$$

Usando-as em (3.106*b*) a integracão em ω é facilmente realizada fornecendo um $\delta(t-t')$. Após a integração em t' teremos

$$-4\int \frac{d^nk}{(2\pi)^n} \int_0^\infty dt\, \cos(\Omega t) \frac{e^{-\frac{d}{2}(k^2+m^2)\,t}}{k^2+m^2}\, \frac{e^{-\frac{d}{2}[(k-q)^2+m^2]\,t}}{(k-q)^2+m^2} \tag{3.109}$$

que pode ser reescrita em termos dos parâmetros α e β como

$$-d^2\int \frac{d^nk}{(2\pi)^n} \int_0^\infty dt\, \cos(\Omega t) \int_t^\infty d\alpha\, e^{-\frac{d}{2}(k^2+m^2)\alpha} \int_t^\infty d\beta\, e^{-\frac{d}{2}[(k-q)^2+m^2]\beta} \tag{3.110}$$

A integração em k é Gaussiana e resulta em

$$\begin{aligned}-\frac{d^2}{(2\pi d)^{n/2}} \int_0^\infty dt\, \cos(\Omega t) \int_0^1 dx \int_0^\infty da\, \theta(a-t/x)\,\theta(a-t/(1-x)) \\ \times \frac{e^{-\frac{d}{2}a[x(1-x)q^2+m^2]}}{a^{n/2-1}}\end{aligned} \tag{3.111}$$

onde fizemos a mudança de variáveis $\alpha = xa$ e $\beta = (1-x)a$. A integração em x pode ser dividida em duas regiões: $(0,1/2)$ e $(1/2,1)$ onde $t < ax$ e $t < a(1-x)$, respectivamente; assim após a integração em t teremos

$$-\frac{d^2}{(2\pi d)^{n/2}} \frac{1}{\Omega} \int_0^{1/2} dx \int_0^\infty da\, \mathrm{sen}\,(\Omega a x)\, \frac{e^{-\frac{d}{2}a[x(1-x)q^2+m^2]}}{a^{n/2-1}} \tag{3.112}$$

Para $n = 2$ a integração em a é facilmente realizada e resulta

$$-\frac{d}{2\pi}\frac{1}{\Omega}\int_0^{1/2} dx\,\frac{\Omega x}{\Omega^2 x^2 + \frac{d^2}{4}[x(1-x)q^2 + m^2]^2} \tag{3.113}$$

que pode ser reescrita na forma

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\Omega}\int_0^{1/2} dx\,\left\{\frac{1}{\frac{2\Omega}{d}x - i[x(1-x)q^2 + m^2]} + \frac{1}{\frac{2\Omega}{d}x + i[x(1-x)q^2 + m^2]}\right\} \tag{3.114}$$

e que quando integrada em x fornece a seguinte expressão para o inverso do propagador do campo α

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha\alpha}(q,\Omega) = -\frac{1}{2\pi}\frac{i}{\Omega}\Bigg\{ \\ \frac{1}{\sqrt{A^2+4q^2m^2}}\ln\left[\frac{A - q^2 - \sqrt{A^2+4q^2m^2}}{A - q^2 + \sqrt{A^2+4q^2m^2}}\,\frac{A + \sqrt{A^2+4q^2m^2}}{A - \sqrt{A^2+4q^2m^2}}\right] \\ -\frac{1}{\sqrt{B^2+4q^2m^2}}\ln\left[\frac{B + q^2 + \sqrt{B^2+4q^2m^2}}{B + q^2 - \sqrt{B^2+4q^2m^2}}\,\frac{B - \sqrt{B^2+4q^2m^2}}{B + \sqrt{B^2+4q^2m^2}}\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.115}$$

onde

$$\begin{aligned} A &\equiv\ q^2 + \frac{2\Omega}{d}i \\ B &\equiv -q^2 + \frac{2\Omega}{d}i \end{aligned} \tag{3.116}$$

Note que o comportamento assintótico é obtido fazendo $q \to \beta q$ e $\Omega \to \beta^2\Omega$ em (3.115) de modo que $\Gamma_{\alpha\alpha}(\beta q, \beta^2\Omega) \overset{\beta\to\infty}{\longrightarrow} \beta^{-4}$, coincidindo com (3.107).

Nessa formulação para obtermos o limite de equilíbrio devemos apenas tomar todos os quintos tempos iguais (devido as condições iniciais (3.12)), assim

$$F(q, t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega\ e^{i\Omega(t-t')}\,F(q,\Omega) \tag{3.117}$$

que para $t = t'$ resulta

$$F^{\mathrm{E}}(q) \equiv F(q,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega\, F(q,\Omega) \tag{3.118}$$

Por exemplo, para (3.106*b*) obtemos

$$\Gamma^{\mathrm{E}}_{\alpha\alpha}(q) = -2\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n}\frac{1}{k^2+m^2}\frac{1}{(k-q)^2+m^2} \tag{3.119}$$

o que é muito mais fácil de ser feito do que se tivessemos partido de (3.115).

Cálculos perturbativos baseados em (3.86) têm o inconveniente de possuir um propagador misto, como mostra a expressão (3.105). Podemos contornar o problema diagonalizando a forma quadrática (3.105) através da transformação

$$\begin{cases} \sigma \to \sigma \\ \alpha \to \alpha - \dfrac{\Gamma_{\alpha\sigma}}{\Gamma_{\alpha\alpha}}\sigma \end{cases} \tag{3.120}$$

de modo que os propagadores passam a ser escritos como

$$G_\phi(k,\omega) = \frac{d}{\omega^2 + \frac{d^2}{4}(k^2+m^2)^2}\delta_{ab} \tag{3.121a}$$

$$G_\alpha(k,\omega) = \frac{1}{\Gamma_{\alpha\alpha}} \tag{3.121b}$$

$$G_\sigma(k,\omega) = -\frac{\Gamma_{\alpha\alpha}}{(\Gamma_{\alpha\sigma})^2} \tag{3.121c}$$

cujo comportamento assintótico pode ser obtido usando (3.107) e resulta, para $\beta \to \infty$, em

$$\begin{aligned} G_\phi(\beta k, \beta^2\omega) &\to \beta^{-4} \\ G_\alpha(\beta k, \beta^2\omega) &\to \beta^{-(n-6)} \\ G_\sigma(\beta k, \beta^2\omega) &\to \beta^{-(n-2)} \end{aligned} \tag{3.122}$$

Através de (3.69) e (3.70) obtemos para o grau de divergência superficial, δ, dos gráficos de Feynman, a expressão

$$\delta = (n+2) - \frac{n-2}{2}N_\phi - 2N_\sigma - 4N_\alpha \tag{3.123}$$

onde N_ϕ, N_σ e N_α referem-se às linhas externas dos campos do tipo ϕ, σ e α respectivamente. Note que aqui também temos divergências quárticas que levam a produção de contratermos que não podem ser cancelados pelas identidades de Aref'eva. Devemos ter portanto algum mecanismo de cancelamento para esses contratermos, pois a teoria perturbativa foi obtida de (3.83) que por sua vez foi derivada da ação efetiva (3.60), cuja expansão perturbativa em $1/N$ foi mostrada ser renormalizável. Enfatizamos novamente que a formulação estocástica baseada em (3.60) é a mais natural na discussão da renormalizabilidade do modelo sigma não linear expandido em $1/N$.

CAPÍTULO 4

QUANTIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DO MODELO DE THIRRING MASSIVO

Como discutimos no capítulo 1 a implementação do método de quantização estocástica para sistemas fermiônicos é feita de maneira um pouco mais elaborada do que no caso escalar, a fim de assegurar que o limite de equilíbrio exista e forneça os resultados usuais. Mostramos, para uma teoria livre, que a utilização de um kernel na equação de Langevin leva aos resultados corretos. Entretanto, no caso de uma teoria em interação a validade do uso do kernel é verificada apenas a nível perturbativo pois uma prova geral para o limite de equilíbrio da teoria estocástica não existe nessa situação. Assim, uma questão que surge naturalmente é se o kernel altera de alguma maneira a estrutura da teoria, particularmente se introduz anomalias adicionais na mesma quando tomamos o limite de equilíbrio. Se bem que a resposta a tal indagação seja um problema complexo verificaremos explicitamente o papel do kernel na quantização estocástica de um sistema fermiônico, especificamente estudaremos a invariância de escala assintótica do modelo de Thirring massivo.

O modelo de Thirring [108] foi proposto em 1958 como protótipo de um modelo exatamente solúvel, que descreve um campo espinorial autointeragente sem massa num espaço tempo bidimensional. Sua formulação num esquema matemático mais satisfatório foi feita por Johnson [109] e Klaiber [110]. Uma propriedade interessante é o seu comportamento peculiar a curtas distâncias, refletido no anulamento de sua função beta do grupo de renormalização, que contrariamente a uma teoria escalar não massiva autointeragente, apresenta invariância de escala. Mais surpreendente ainda é que a função beta continua sendo nula no caso do modelo de Thirring massivo como mostrado perturbativamente em [111,112].

Neste capítulo derivaremos a equação do grupo de renormalização para o modelo de Thirring massivo no contexto estocástico e calcularemos perturbativamente a função beta, a nível de um loop, utilizando uma regularização analítica para o modelo. Mostraremos que a função beta é nula mesmo a quinto tempo finito, i.e., fora do limite de equilíbrio, indicando que o uso do kernel não altera a anomalia.

Desenvolveremos nossos cálculos exclusivamente no formalismo de Langevin, já que a formulação funcional da quantização estocástica, para processos fermiônicos [88], ainda não está muito bem estabelecida.

4.1–EQUAÇÃO DE LANGEVIN E EXPANSÃO PERTURBATIVA

O modelo de Thirring massivo é dado, no espaço Euclideano, pela seguinte Lagrangeana

$$\mathcal{L} = -i\overline{\psi}(\not{\partial} + im)\psi - \frac{1}{2}g\left(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi\right)^2 \tag{4.1}$$

onde ψ e $\overline{\psi}$ são variáveis de Grassmann independentes. Usaremos a representação onde as matrizes γ_μ são anti-hermitinas e obedecem

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu} \tag{4.2}$$

Estudaremos o modelo em duas dimensões onde adotaremos as seguintes matrizes γ_μ

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \qquad \gamma_5 = \gamma_0\gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

Antes de prosseguirmos devemos observar que, em duas dimensões, vale a igualdade facilmente demonstrável

$$\left(\overline{\psi}\gamma_\mu\psi\right)^2 = 2\left(\overline{\psi}\psi\right)^2 \tag{4.4}$$

Assim, a Lagrangeana do modelo de Thirring pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = -i\overline{\psi}(\not{\partial} + im)\psi - g\left(\overline{\psi}\psi\right)^2 \tag{4.5}$$

Como no espaço Euclideano ψ e $\overline{\psi}$ são variáveis de Grassmann independentes devemos então considerar um par de equações de Langevin. De acordo como os resultados do capítulo 1 usaremos as equações (1.146)

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\int d^2y\, K(x,y)\frac{\delta S}{\delta\overline{\psi}(y,t)} + \theta(x,t) \tag{4.6a}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}(x,t)}{\partial t} = \int d^2y\, \frac{\delta S}{\delta\psi(y,t)}\overline{K}(x,y) + \overline{\theta}(x,t) \tag{4.6b}$$

com

$$\left\langle\theta_a(x,t)\overline{\theta}_b(x',t')\right\rangle_{\theta\overline{\theta}} = 2K_{ab}(x,x')\delta(t-t') \tag{4.7}$$

$K(x,x')$ é um kernel que assegura o limite de equilíbrio correto, conforme mostramos explicitamente para a parte livre de (4.1) ao usarmos

$$\begin{aligned} K(x,y) &= (i\overrightarrow{\not\partial}_x + m)\,\delta^2(x-y) \\ \overline{K}(x,y) &= \delta^2(x-y)\,(-i\overleftarrow{\not\partial}_x + m) \end{aligned} \tag{4.8}$$

que também será nossa escolha no que se segue.

As equações de Langevin para essa Lagrangeana, no espaço de momentos (usando as transformadas de Fourier dadas no apêndice), são

$$\frac{\partial\psi(k,t)}{\partial t} = -(k^2+m^2)\psi(k,t) + \frac{2g}{(2\pi)^4}\int d^2p\,d^2q\,\overline{\psi}(p,t)\,\psi(q,t) \times(-\not k + m)\,\psi(k+p-q,t) + \theta(k,t) \tag{4.9a}$$

$$\frac{\partial\overline{\psi}(k,t)}{\partial t} = -(k^2+m^2)\overline{\psi}(k,t) + \frac{2g}{(2\pi)^4}\int d^2p\,d^2q\,\overline{\psi}(p,t)\,\psi(q,t) \times\overline{\psi}(k-p+q,t)\,(-\not k + m) + \overline{\theta}(k,t) \tag{4.9b}$$

e onde

$$\left\langle\theta(k,t)\overline{\theta}(k',t')\right\rangle_{\theta\overline{\theta}} = 2(2\pi)^2(-\not k + m)\delta^2(k-k')\delta(t-t') \tag{4.10}$$

As funções de Green de (4.9), para $\psi(k,0) = \overline{\psi}(k,0) = 0$, são

$$G(k,t) = \overline{G}(k,t) = \theta(t)\,\mathrm{e}^{-(k^2+m^2)t} \tag{4.11}$$

Introduzindo a notação

$$\Gamma(k,t) = \theta(t)\,\mathrm{e}^{-(k^2+m^2)t}(-\not k + m) \tag{4.12}$$

teremos as seguintes soluções para (4.9)

$$\psi_a(k,t) = \int_0^t d\tau\ \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)(t-\tau)}\,\theta_a(k,\tau) + 2g\int_0^t d\tau \int \frac{d^2p\,d^2q}{(2\pi)^4}$$
$$\times\Gamma_{ab}(k;t-\tau)\psi_b(k+p-q,\tau)\overline{\psi}(p,\tau)\psi(q,\tau) \qquad (4.13a)$$

$$\overline{\psi}_a(k,t) = \int_0^t d\tau\ \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)(t-\tau)}\,\overline{\theta}_a(k,\tau) + 2g\int_0^t d\tau \int \frac{d^2p\,d^2q}{(2\pi)^4}$$
$$\times\overline{\psi}(p,\tau)\psi(q,\tau)\overline{\psi}_b(k-p+q,\tau)\Gamma_{ba}(k;t-\tau) \qquad (4.13b)$$

Podemos calcular a função de dois pontos (para $g=0$) obtendo

$$\left\langle \psi_a(k,t)\overline{\psi}_b(k',t')\right\rangle_{\theta\overline{\theta}} = (2\pi)^2\delta^2(k-k')D_{ab}(k;t,t') \qquad (4.14)$$

com

$$D_{ab}(k;t,t') = \frac{(-\not{k}+m)_{ab}}{k^2+m^2}\left[\mathrm{e}^{-(k^2+m^2)\,|\,t-t'\,|} - \mathrm{e}^{-(k^2+m^2)\,(t+t')}\right] \qquad (4.15)$$

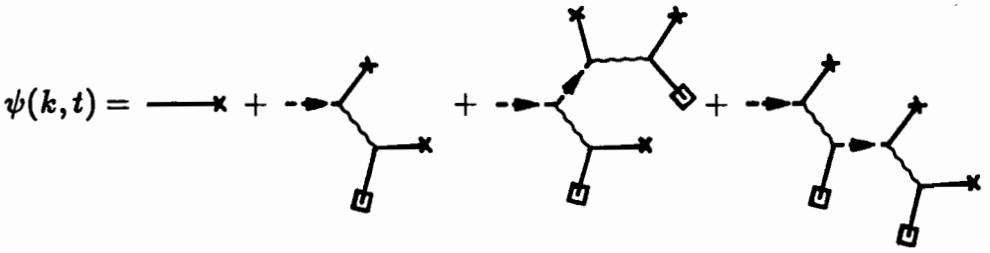
que no limite de equilíbrio se reduz ao propagador fermiônico usual do espaço Euclideano.

Neste estágio faremos as seguintes associações gráficas

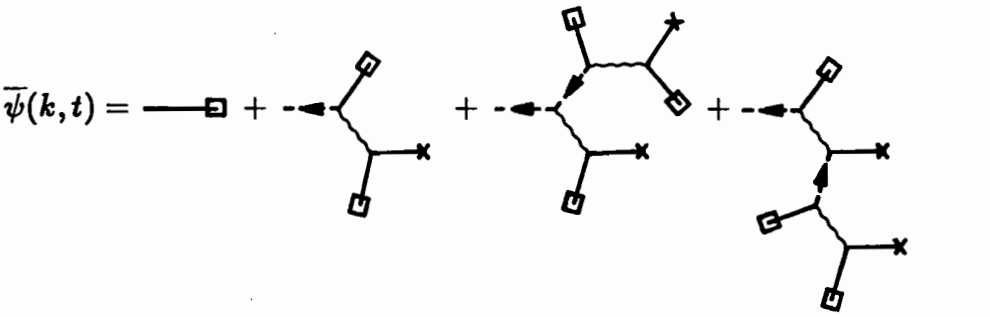
$$\begin{aligned}
D(k;t,t') &\longleftrightarrow \quad t \quad k \quad t' \\
G(k;t-t') &\longleftrightarrow \quad t \quad k \quad t' \\
\Gamma(k;t-t') &\longleftrightarrow \quad t \quad k \quad t' \\
\theta(k,t) &\longleftrightarrow \quad \times \\
\overline{\theta}(k,t) &\longleftrightarrow \quad \square
\end{aligned} \qquad (4.16)$$

e para tornar mais claro a estrutura tensorial dos vértices introduziremos uma linha ondulada, que servirá para enfatizar a separação do termo $\Gamma\psi$ ou $\overline{\psi}\Gamma$ do termo $\psi\overline{\psi}$ (a expressão analítica correspondente a linha ondulada é a indentidade). Assim, as soluções, obtidas

por iteração das equações (4.13a) e (4.13b), podem ser representadas graficamente como



(4.17a)



(4.17b)

Temos agora todos os elementos necessários para o cálculo das funções de correlação do modelo de Thirring massivo.

4.2–EQUAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO

As funções de correlação de $2N$ pontos são obtidas ao substituirmos os N campos ψ e os N campos $\overline{\psi}$ pelas expansões (4.17a) e (4.17b) respectivamente, fornecendo uma série de diagramas estocásticos. A forma analítica geral dos diagramas é obtida por uma generalização da do caso escalar (1.100), e pode ser escrita, sem nos preocuparmos com os índices matriciais, como

$$\int \prod_{i=1}^{L} \frac{d^2k_i}{(2\pi)^2} \int \prod_{i=1}^{V} d\tau_i \prod_{\ell=1}^{N_{IT}} \Gamma(Q_\ell; \tau_{\ell_1} - \tau_{\ell_2}) \prod_{\ell'=1}^{N_{I\times}} D(Q_{\ell'}; \tau_{\ell'_1}, \tau_{\ell'_2}) \tag{4.18}$$

onde L é o número de loops, V é o número de vértices, N_{IT} é o número de linhas internas tracejadas que representam o termo $\Gamma(k; t-t')$, dado por (4.12), e $N_{I\times}$ é o número de linhas internas cruzadas que representam o propagador $D(k; t, t')$ dado por (4.15). De resto as notações em (4.18) seguem a mesma convenção descrita após a expressão (1.46), substituindo-se apenas as linhas lisas daquele caso pelas tracejadas deste, pois as linhas lisas $G(k; t-t')$, dadas por (4.11), não aparecem nos loops em (4.18).

Reescrevendo

$$D_{ab}(k;\tau,\tau') = \int_{|\tau-\tau'|}^{\tau+\tau'} d\alpha\,(-\not{k}+m)_{ab}\,\mathrm{e}^{-\alpha(k^2+m^2)}$$
$$= |\tau-\tau'| \int_{1}^{\frac{\tau+\tau'}{|\tau-\tau'|}} d\beta\,(-\not{k}+m)_{ab}\,\mathrm{e}^{-\beta|\tau-\tau'|(k^2+m^2)} \tag{4.19}$$

e usando (4.12) a expressão (4.18) assume a forma

$$\int \prod_{i=1}^{L} \frac{d^2k_i}{(2\pi)^2} \int \prod_{i=1}^{V} d\tau_i \prod_{\ell=1}^{N_{IT}} \theta(\tau_{\ell_1}-\tau_{\ell_2}) \exp\left[-(\tau_{\ell_1}-\tau_{\ell_2})(Q_\ell^2+m^2)\right](-\not{Q}_\ell+m)$$
$$\times \prod_{\ell'=1}^{N_{I\times}} |\tau_{\ell'_1}-\tau_{\ell'_2}| \int_{1}^{\frac{\tau_{\ell'_1}+\tau_{\ell'_2}}{|\tau_{\ell'_1}-\tau_{\ell'_2}|}} d\beta_{\ell'}\,(-\not{Q}_{\ell'}+m) \exp\left[-\beta_{\ell'}|\tau_{\ell'_1}-\tau_{\ell'_2}|(Q_{\ell'}^2+m^2)\right] \tag{4.20}$$

Reescalonando os momentos internos $k_i \to \lambda k_i$, com $\lambda \to \infty$, obtemos para o grau de divergência superficial d, dos gráficos estocásticos, a expressão

$$d = 2L - 2(V-1) + N_{IT} - N_{I\times} \tag{4.21}$$

Usando a relação análoga a (1.42)

$$V = N_T \tag{4.22}$$

onde N_T é o número total de linhas do tipo tracejada, e a relação topológica

$$4V = N_E + 2N_I \tag{4.23}$$

com N_E e N_I sendo o número de linhas externas e internas, respectivamente; a expressão (4.21) fica

$$d = 4 - \frac{5}{2}N_{ET} - \frac{1}{2}N_{E\times} \tag{4.24}$$

onde N_{ET} e $N_{E\times}$ são o número total de linhas externas do tipo tracejado e cruzado, respectivamente. Portanto, observando que para todos os gráficos com loops existe no

mínimo uma linha externa tracejada (i.e., $N_{ET} \neq 0$) temos então os seguintes gráficos divergentes

N_{ET}	$N_{E\times}$	d
1	1	1
1	3	0

(4.25)

Como discutimos no capítulo 1, as divergências, uma vez a teoria tendo sido regularizada, podem ser absorvidas por uma equação de Langevin renormalizada que para o sistema (4.9) é obtida pela seguinte redefinição dos parâmetros e normalização do campo

$$\begin{aligned} \psi(k,t) &= Z_\psi^{1/2}\,\psi_R(x,t_R) \\ g &= Z_g\,Z_\psi^{-2}\,g_R \\ m^2 &= m_R^2 + \frac{\delta m^2}{Z_\psi} \\ \theta(k,t) &= Z_\psi^{-1/2}\,\theta_R(x,t_R) \\ t &= Z_t^{-1}\,Z_\psi\,t_R \end{aligned} \tag{4.26}$$

onde $\psi(k,t)$, g, m, $\theta(k,t)$ e t referem-se às grandezas não renormalizadas ou nuas e Z_ψ, Z_g, δm e Z_t são as constantes de renormalização. As relações (4.26) são análogas, agora no espaço dos momentos, as relações (1.131) do caso escalar.

Os contratermos e portanto as constantes de renormalização são determinadas, ordem a ordem em teoria de perturbação, pelas condições de renormalização. Assim, as constantes de renormalização são funções adimensionais da constante de acoplamento g_R, dos parâmetros dimensionais t_R, m_R e do ponto de renormalização μ. Entretanto, no que se segue, assumiremos o uso de um esquema de subtração minimal [113], onde a parte finita dos contratermos é tomada como sendo igual a zero (mais precisamente, os Z's só contém as partes de pólos simples), de modo que as constantes de renormalização $Z = \{Z_\psi, Z_g, \delta m, Z_t\}$ não dependem de parâmetros dimensionais, i.e.,

$$Z = Z(g_R, \lambda) \tag{4.27}$$

onde λ é um regulador, pois agora estamos considerando uma teoria regulada analiticamente o que implica na introdução de uma constante arbitrária μ, com dimensão de massa,

para podermos considerar g_R como adimensional. Assim, nos cálculos com a teoria regularizada dessa maneira devemos fazer a substituição $g_R \to \mu^\lambda g_R$ em (4.26). Enfatizamos que Z não depende nem de m_R e nem de t_R pois todas as partes finitas dos contratermos toram tomadas como nulas.

Usando (4.26) as funções de correlação de $2N$ pontos nuas e renormalizadas estão relacionadas por

$$G^{(N)}(\widetilde{p}, g, m, \widetilde{t}, \lambda) = Z_\psi^{N/2} G_R^{(N)}(\widetilde{p}, g_R, m_R, \widetilde{t}_R, \lambda, \mu) \tag{4.28}$$

onde $\widetilde{p}$ e $\widetilde{t}$ referem-se ao conjunto de momentos e quinto tempos externos. A equação do grupo de renormalização é derivada do modo usual observando que as funções de correlação não renormalizadas independem do ponto de renormalização μ e que as funções de correlação renormalizadas dependem de μ explicitamente, como também implicitamente através de g, m e t (estamos considerando as grandezas não renormalizadas como independentes na equação (4.28)). Assim, derivando (4.28) em relação a $\frac{\partial}{\partial \mu}$, obtemos

$$\left(\frac{N}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_\psi}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial g_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial g_R} + \mu \frac{\partial m_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_R} + \mu \frac{\partial \widetilde{t}_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \widetilde{t}_R} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) G_R^{(N)} = 0 \tag{4.29}$$

que é a generalização da equação do grupo de renormalização para o caso estocástico.

Dimensionalmente resulta que

$$G_R^{(N)}(\rho \widetilde{p}, g_R, \rho m_R, \rho^{-2} \widetilde{t}_R, \lambda, \rho \mu) = \rho^D G_R^{(N)}(\widetilde{p}, g_R, m_R, \widetilde{t}_R, \lambda, \mu) \tag{4.30}$$

com

$$D = 2 - \frac{3}{2} N$$

que pelo teorema de Euler, para funções homogêneas de grau D, nos fornece

$$\left(s \frac{\partial}{\partial s} + m_R \frac{\partial}{\partial m_R} - 2 \widetilde{t}_R \frac{\partial}{\partial \widetilde{t}_R} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - D \right) G_R^{(N)}(s \widetilde{p}, g_R, m_R, \widetilde{t}_R, \lambda, \mu) = 0 \tag{4.31}$$

sendo que s é uma escala para os momentos. Podemos usar essa expressão para eliminar $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ em (4.29), resultando

$$\left[-s\frac{\partial}{\partial s}+(N\gamma_\psi+D)+\beta(g_R)\frac{\partial}{\partial g_R}+(\gamma_m-1)m_R\frac{\partial}{\partial m_R}\right.$$
$$\left.+2(\gamma_t-\gamma_\psi+1)\tilde{t}_R\frac{\partial}{\partial \tilde{t}_R}\right]G_R^{(N)}(s\tilde{p},g_R,m_R,\tilde{t}_R,\lambda,\mu)=0 \quad (4.32)$$

onde

$$\begin{aligned}\beta(g_R,\lambda)&=\mu\frac{\partial g_R}{\partial\mu} & \gamma_\psi(g_R,\lambda)&=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \ln Z_\psi}{\partial\mu}\\ \gamma_t(g_R,\lambda)&=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \ln Z_t}{\partial\mu} & \gamma_m(g_R,\lambda)&=\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \ln m_R^2}{\partial\mu}\end{aligned} \quad (4.33)$$

As equações (4.29) e (4.32), chamadas de equações do grupo de renormalização, mostram o comportamento das funções de correlação quando é feita uma mudança no ponto de renormalização ou um reescalonamento nos momentos, respectivamente. O estudo das soluções dessas equações, bem como a generalização das mesmas para o caso de processos não Markovianos, podem ser encontrados no trabalho de Pugnetti [66].

4.3–CÁLCULO DA FUNÇÃO BETA

Passaremos agora ao cálculo perturbativo da função $\beta(g_R)$ do modelo de Thirring massivo. Na quantização usual, que corresponde a situação de equilíbrio no nosso caso, é possível mostrar a nível perturbativo [111,112] e em todas as ordens [111] que a função beta do modelo de Thirring massivo é nula, ou colocando em outros termos, que não há necessidade de renormalização da constante de acoplamento. Mostraremos agora, no contexto da quantização estocástica, esse resultado em ordem g^2 e fora do equilíbrio.

A função beta, num esquema de subtração minimal, é dada por

$$\beta(g_R)=\lim_{\lambda\to 0}\beta(g_R,\lambda)=\lim_{\lambda\to 0}\mu\frac{\partial g_R}{\partial\mu}\Big|_{g,\lambda} \quad (4.34)$$

onde usamos (4.33). A relação (4.26) entre a constante de acoplamento nua e renormalizada

pode ser escrita perturbativamente como

$$g = \mu^{\lambda} Z_g Z_{\psi}^{-2} g_R = \mu^{\lambda} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(g_R)}{\lambda^n} \right) g_R \tag{4.35}$$

onde os coeficientes a_n são séries de potências em g_R. Diferenciando $g_R = \mu^{-\lambda}(Z_g Z_{\psi}^{-2})^{-1} g$ em relação μ obtemos que

$$\beta(g_R, \lambda) + \lambda g_R + g_R \beta(g_R, \lambda) \frac{\partial \ln(Z_g Z_{\psi}^{-2})}{\partial g_R} = 0$$

Usando a série em (4.35) e procurando uma solução em série de potências para $\beta(g_R, \lambda)$ obtém-se [113] que

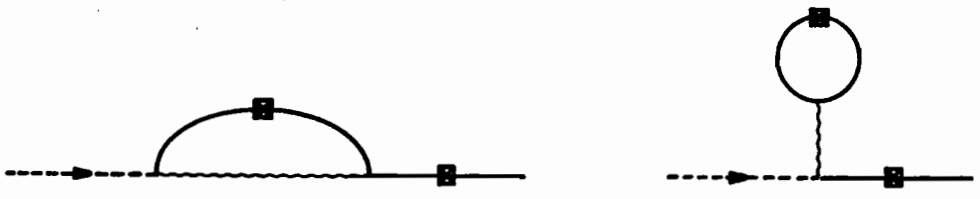
$$\beta(g_R) = g_R^2 \frac{da_1}{dg_R} \tag{4.36}$$

mostrando que $\beta(g_R)$ é totalmente determinada pelo resíduo dos pólos simples em λ de $(Z_g Z_{\psi}^{-2})$.

Nos cálculos que seguem omitiremos completamente o índice R das grandezas renormalizadas.

Como queremos determinar β na ordem de g^2 devemos obter Z_{ψ} e Z_g em ordem g. Entretanto, como mostra a figura 4.1 os gráficos (a) e (b) não contribuem para a renormalização da função de onda, pois os loops existentes nesses gráficos não dependem dos momentos externos. Portanto, podemos escrever

$$Z_{\psi} = 1 + \mathcal{O}(g^2) \tag{4.37}$$



(a) (b)

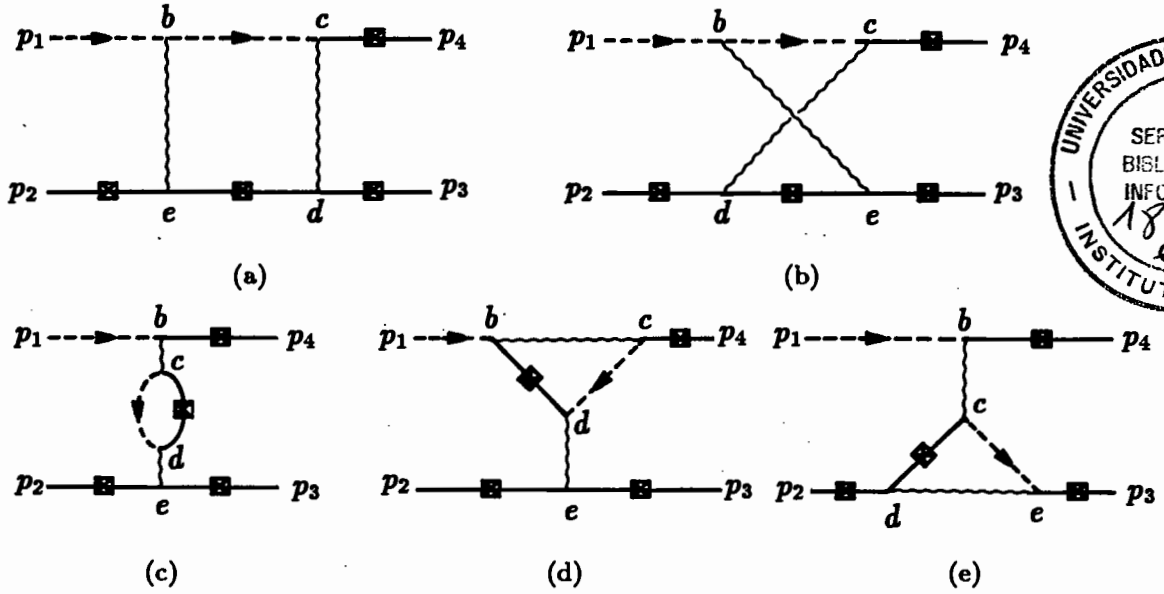
Figura 4.1 – Diagramas estocásticos, em ordem g, com grau de divergência superficial linear.

ou seja, não temos renormalização da função de onda em ordem g. Passaremos agora ao cálculo de Z_g.

Os gráficos de Feynman estocásticos, para as funções de correlação com quatro linhas externas, podem ser obtidos em ordem g^2 substituindo (4.17a) e (4.17b) em

$$\langle \psi_{a_1}(p_1,t_1)\psi_{a_2}(p_2,t_2)\overline{\psi}_{a_3}(p_3,t_3)\overline{\psi}_{a_4}(p_4,t_4)\rangle_{\theta\bar{\theta}} \tag{4.38}$$

e assim todos os diagramas gerados podem ser separados em classes, como a mostrada na figura 4.2, que diferem apenas pela distribuição dos tipos de linhas no gráfico.



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
1826
ex. 1
INSTITUTO DE FÍSICA

Figura 4.2 – Uma classe de diagramas estocásticos em ordem g^2, divergentes logaritmicamente, para a função de correlação de quatro linhas externas.

Os gráficos presentes na figura 4.2 apresentam grau de divergência logarítimica, conforme mostra (4.25), mas mostraremos que tais divergências se cancelam. Primeiramente vamos escrever as expressões analíticas que correspondem a cada um dos gráficos

$$\text{(a)} = -4g^2 \int_0^{t_1} d\tau \int_0^{\tau} d\tau' \int d^2k \left[\Gamma(p_1;t_1-\tau)\,\Gamma(p_1+p_2-k;\tau-\tau')D(p_4;\tau',t_4)\right]_{a_1a_4}$$
$$\times \left[D(p_2;t_2,\tau)\,D(k;\tau,\tau')\,D(p_3;\tau',t_3)\right]_{a_2a_3} \tag{4.39a}$$

$$(\mathrm{b}) = -4g^2 \int_0^{t_1} d\tau \int_0^{\tau} d\tau' \int d^2k \left[\Gamma(p_1;t_1-\tau)\,\Gamma(p_1-p_3+k;\tau-\tau')D(p_4;\tau',t_4)\right]_{a_1a_4}$$
$$\times\left[D(p_2;t_2,\tau')\,D(k;\tau',\tau)\,D(p_3;\tau,t_3)\right]_{a_2a_3} \qquad (4.39b)$$

$$(\mathrm{c}) = -4g^2 \int_0^{t_1} d\tau \int_0^{\tau} d\tau' \int d^2k \left[\Gamma(p_1;t_1-\tau)\,D(p_4;\tau,t_4)\right]_{a_1a_4}$$
$$\times \mathrm{Tr}\Big(\Gamma(k;\tau-\tau')D(k-p_2+p_3;\tau,\tau')\Big)\left[D(p_2;t_2,\tau')\,D(p_3;\tau',t_3)\right]_{a_2a_3} \qquad (4.39c)$$

$$(\mathrm{d}) = 4g^2 \int_0^{t_1} d\tau \int_0^{\tau} d\tau' \int d^2k \left[\Gamma(p_1;t_1-\tau)\,D(k-p_2+p_3;\tau,\tau')\right.$$
$$\left.\times\Gamma(k;\tau-\tau')\,D(p_4;\tau,t_4)\right]_{a_1a_4}\left[D(p_2;t_2,\tau')\,D(p_3;\tau',t_3)\right]_{a_2a_3} \qquad (4.39d)$$

$$(\mathrm{e}) = 4g^2 \int_0^{t_1} d\tau \int_0^{\tau} d\tau' \int d^2k \left[\Gamma(p_1;t_1-\tau)\,D(p_4;\tau,t_4)\right]_{a_1a_4}$$
$$\times\left[D(p_2;t_2,\tau')\Gamma(k+p_2-p_3;\tau-\tau')\,D(k;\tau,\tau')\,D(p_3;\tau',t_3)\right]_{a_2a_3} \qquad (4.39e)$$

O próximo passo é regularizar cada um dos gráficos e extrair a sua parte divergente. Dentre os vários métodos de regularização existentes utilizaremos o analítico [46], descrito no contexto estocástico por Chaturvedi et al [38], que se mostra mais sistemático nessa situação.

Seja o gráfico (a) da figura 4.2, cuja expressão (4.39a) pode ser reescrita como

$$-4g^2 \int_0^{\infty} d\tau \int_0^{\infty} d\tau'\,\Gamma_{a_1b}(p_1;t_1-\tau)\,D_{ca_4}(p_4;\tau',t_4)\,D_{a_2d}(p_2;t_2,\tau)\,D_{ea_3}(p_3;\tau',t_3)$$
$$\times \int d^2k\,\theta(\tau-\tau')\left[-(\not{p}_1+\not{p}_2-\not{k})+m\right]_{bc} \mathrm{e}^{-[(p_1+p_2-k)^2+m^2]\,|\,\tau-\tau'\,|}$$
$$\times \int_{|\,\tau-\tau'\,|}^{\tau+\tau'} d\alpha\,(-\not{k}+m)_{de}\,\mathrm{e}^{-\alpha(k^2+m^2)} \qquad (4.40)$$

onde usamos a representação (4.19) para $D_{ab}(k;\tau,\tau')$. Fazendo as mudanças de variáveis

$$\begin{cases} a = \tau - \tau' \\ b = \frac{1}{2}(\tau + \tau') \end{cases} \tag{4.41a}$$

$$\alpha = a\beta \tag{4.41b}$$

temos que (4.40) assume a forma

$$-4g^2 \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_{0}^{+\infty} db\, \Gamma_{a_1 b}(p_1; t_1 - a/2 - b)\, D_{ca_4}(p_4; -a/2 + b, t_4)$$

$$\times D_{a_2 d}(p_2; t_2, a/2 + b)\, D_{ea_3}(p_3; -a/2 + b, t_3)\, \theta(a)\, a \int_{1}^{2b/a} d\beta\ \mathrm{e}^{-a(p^2 + m^2 + \beta m^2)}$$

$$\times \int d^2k \left[-(\not{p} - \not{k}) + m\right]_{bc} (-\not{k} + m)_{de}\, \mathrm{e}^{-a[k^2(1+\beta) - 2pk]} \tag{4.42}$$

onde introduzimos a notação

$$p \equiv p_1 + p_2 \tag{4.43}$$

Uma divergência do integrando aparecerá, como um polo em $a = 0$, após a integração do termo $\not{k}\not{k}$ na integral (4.42). Isolando esse termo, teremos então

$$4\pi g^2 \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_{0}^{+\infty} db\, \Gamma_{a_1 b}(p_1; t_1 - a/2 - b)\, D_{ca_4}(p_4; -a/2 + b, t_4)\, D_{a_2 d}(p_2; t_2, a/2 + b)$$

$$\times D_{ea_3}(p_3; -a/2 + b, t_3) \left[(\gamma_\mu)_{bc} (\gamma_\mu)_{de}\right] \theta(a)\, a^{-1} \int_{1}^{2b/a} d\beta\, \frac{\mathrm{e}^{-am^2(1+\beta) - \frac{ap^2\beta}{1+\beta}}}{2(1+\beta)^2} \tag{4.44}$$

Para integrais do tipo

$$I = \int_{0}^{\infty} dx\, x^{-n} \varphi(x), \quad n > 0 \tag{4.45}$$

o método de regularização analítica consiste em substituir a integral acima por uma dependente de um parâmetro complexo λ

$$I(\lambda) = \int_{0}^{\infty} dx\, x^{\lambda - n} \varphi(x) \tag{4.46}$$

de tal modo que a integral, inicialmente divergente, torne-se uma função analítica no parâmetro λ, para $\mathrm{Re}\lambda > n-1$, podendo ser calculada formalmente. Continuando analiticamente o resultado para $\lambda = 0$, a divergência surge como um polo para $\lambda = 0$. Assim, se $\varphi(x)$ é uma função cujas $(n-1)$ derivadas existem em $x = 0$ a integral em (4.46) converge para $\mathrm{Re}\,\lambda > n-1$ e pode ser continuada analiticamente escrevendo

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} \varphi^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!} + \varphi_{k+1}(x) \tag{4.47}$$

que substituida em (4.46) resulta em

$$I(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!\,(k+\lambda-n+1)} + \int_0^1 dx\, x^{\lambda-n}\varphi_{k+1}(x) + \int_1^\infty dx\, x^{\lambda-n}\varphi(x) \tag{4.48}$$

que é uma continuação analítica de $I(\lambda)$, válida para $\mathrm{Re}\,\lambda > n-(k+1)$, e o polo em $\lambda = 0$ é dado para o termo $k = n-1$

$$\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\frac{1}{\lambda} \tag{4.49}$$

Podemos também considerar que a distribuição generalizada [114]

$$x_+^{\lambda-n} = \begin{cases} x^{\lambda-n} & \text{p/ } x \geq 0 \\ 0 & \text{p/ } x < 0 \end{cases} \tag{4.50}$$

dada por (4.46), pode ser escrita no intervalo $0 \leq x \leq 1$ na forma

$$x_+^{\lambda-n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta^k(x)}{k!\,(k+\lambda-n+1)} + \text{ termo analítico para } \mathrm{Re}\,\lambda > n-(k+1) \tag{4.51}$$

e cujo resíduo, no polo $\lambda = 0$, é

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x) \tag{4.52}$$

Assim, após regularizar a integral em a, o termo com polo da expressão (4.44) será

$$4\pi g^2 \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_{0}^{+\infty} db\, \Gamma_{a_1 b}(p_1; t_1 - a/2 - b)\, D_{ca_4}(p_4; -a/2 + b, t_4)\, D_{a_2 d}(p_2; t_2, a/2 + b)$$

$$\times D_{ea_3}(p_3; -a/2 + b, t_3)\, [(\gamma_\mu)_{bc}(\gamma_\mu)_{de}]\, \frac{1}{\lambda}\delta(a) \int_{1}^{2b/a} d\beta\, \frac{e^{-am^2(1+\beta) - \frac{ap^2\beta}{1+\beta}}}{2(1+\beta)^2} \qquad (4.53)$$

onde, após a integração em a, a integração em β fica trivial. Assim, o resultado final para a parte divergente do gráfico (a), da figura 4.2, é dado por

$$-\pi g^2 \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty db \left[\Gamma(p_1; t_1 - b)\gamma_\mu D(p_4; b, t_4)\right]_{a_1 a_4} \left[D(p_2; t_2, b)\gamma_\mu D(p_3; b, t_3)\right]_{a_2 a_3} \qquad (4.54)$$

Podemos proceder da mesma maneira para o gráfico (b) e acharemos que a parte divergente cancela exatamente a contribuição do gráfico (a) dada por (4.60). Também, por cálculos similares, encontraremos para os gráficos (c), (d) e (e) os seguintes termos divergentes

$$-4\pi g^2 \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty db \left[\Gamma(p_1; t_1 - b)\, D(p_4; b, t_4)\right]_{a_1 a_4} \left[D(p_2; t_2, b)\, D(p_3; b, t_3)\right]_{a_2 a_3} \qquad (4.55a)$$

$$2\pi g^2 \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty db \left[\Gamma(p_1; t_1 - b)\, D(p_4; b, t_4)\right]_{a_1 a_4} \left[D(p_2; t_2, b)\, D(p_3; b, t_3)\right]_{a_2 a_3} \qquad (4.55b)$$

$$2\pi g^2 \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty db \left[\Gamma(p_1; t_1 - b)\, D(p_4; b, t_4)\right]_{a_1 a_4} \left[D(p_2; t_2, b)\, D(p_3; b, t_3)\right]_{a_2 a_3} \qquad (4.55c)$$

que obviamente se cancelam quando somados.

Concluimos então, que na ordem g^2, todos os termos divergentes da função de quatro pontos se anulam a tempo finito. Assim, a constante de renormalização Z_g resulta nessa ordem

$$Z_g = 1 + \mathcal{O}(g^2) \qquad (4.56)$$

e finalmente de (4.36)

$$\beta(g) = \mathcal{O}(g^3) \qquad (4.57)$$

A extensão deste resultado, para todas as ordens em g, depende de uma análise que explicite o mecanismo de cancelamento das divergências entre todos os gráficos numa dada ordem, tal qual o que ocorreu com os da figura 4.2. Entretanto, como observado em [11], a conservação assintótica das correntes vetorial e quiral no limite de massa zero é o elemento responsável pelo anulamento da função beta, no caso de equilíbrio. Talvez a generalização de tal propriedade, para o caso estocástico, possa ser usada na prova, para todas as ordens da teoria de perturbação, da manutenção da invariância de escala assintótica do modelo de Thirring massivo. Todavia, mesmo o resultado (4.57) nos dá uma indicação da validade do sistema (4.6), com kernels (4.8) na preservação invariância de escala assintótica do modelo em consideração.

Apesar de termos usado um esquema de subtração minimal o resultado (4.56) independe de tal escolha, como mostra (4.54) e (4.55), e podemos na verdade considerar que $\beta(g, tm^2, t\mu) = \mathcal{O}(g^3)$, explicitando a dependência no quinto tempo. O fato de que $\beta(g) = 0$, até a ordem g^2, é um resultado muito interessante pois, aparentemente, a dependência explicita da teoria num parâmetro dimensional, o quinto tempo, poderia ter fornecido uma função beta que anula-se apenas no limite de equilíbrio e não durante toda a dinâmica estocástica. Mas devemos observar que nossos resultados estão fortemente relacionados com a estrutura peculiar que temos em duas dimensões. Nesse sentido a análise da função β para outros modelos, a quinto tempo finito, seria um cálculo muito interessante no sentido de um maior entendimento da relação entre o quinto tempo e a invariância de escala das teorias quantizadas estocasticamente.

CONCLUSÃO

Aplicamos o método de quantização estocástica de Parisi e Wu no estudo de modelos tradicionais em teorias de campos. Nosso objetivo foi o de obter uma maior compreensão desse esquema alternativo de quantização, particularmente nos aspectos ligados a renormalização.

Nos dois primeiros capítulos descrevemos as propriedades gerais do método utilizando as formulações de Langevin, Fokker-Planck e integral funcional. Demos especial destaque a formulação integral funcional, onde a renormalização das teorias quantizadas estocasticamente pode ser tratada sistematicamente.

No capítulo 3 implementamos a quantização estocástica do modelo sigma não linear, onde o tratamento perturbativo foi feito em potências de $1/N$. Inicialmente usamos o formalismo de Langevin e posteriormente usamos, exclusivamente, o formalismo integral funcional.

No formalismo de Langevin a ausência de um termo de deslocamento, para a equação que descreve a dinâmica estocástica do campo auxiliar, nos levou a adicionar e subtrair um termo bilinear, no campo auxiliar, na parte livre e na parte de interação da Lagrangeana do modelo, respectivamente. O kernel desse termo foi fixado impondo que, no limite de equilíbrio e em cada ordem de $1/N$, apenas um número finito de diagramas contribuissem. Assim, pudemos implementar com sucesso a expansão $1/N$ no formalismo de Langevinn, entretanto, não prosseguimos na discussão da renormalizabilidade da teoria, pois a mesma tornar-se-ia complicada, devido a estrutura dos diagramas estocásticos. Preferimos fazer esse estudo no contexto funcional para processos estocásticos, onde a existência de uma ação efetiva nos permitiu usar os procedimentos tradicionais da teoria de campos.

A ação efetiva da formulação funcional está definida num espaço de $n+2$ dimensões, onde n é a dimensão do espaço tempo, de modo que divergências adicionais, às do caso usual, estão presentes. Entretanto, uma simetria do tipo BRS, que é uma característica da formulação funcional em questão, implica na invariância de forma da ação efetiva renormalizada e consequentemente impede a existência de uma série de contratermos, obtidos por contagens de potências. Tal simetria, além de indentidades adicionais, devida ao vínculo do modelo, nos permitiram mostrar a renormalizabilidade da teoria em $2 \leq n < 4$ dimensões.

Além da simetria de BRS uma simetria de anti-BRS garante, via mecanismo análogo ao da redução dimensional de Parisi-Sourlas, o limite de equilíbrio correto da teoria quantizada estocasticamente.

Campos de fantasma, que explicitam a simetria de BRS e anti-BRS, não têm nenhum papel dinâmico, fato que exploramos na construção de uma teoria efetiva que envolve um menor número de campos sendo, portanto, mais apropriada para cálculos perturbativos.

A formulação funcional para processos estocásticos mostrou ser o formalismo ideal para a discussão da renormalizabilidade das teorias quantizadas dessa maneira. Mais interessante ainda é que sempre podemos recuperar a formulação de Langevin, inclusive a versão renormalizada, retrocedendo os passos que nos levaram a representação funcional, i.e., efetuando as integrações nos campos auxiliares. Entretanto, a possibilidade de apresentar a quantização estocástica numa forma supersimétrica, como discutimos em detalhe no capítulo 2 e, no contexto do modelo sigma não linear, no capítulo 3 permite ainda uma maior eficiência na utilização desse esquema de quantização, pois a manutenção da supersimetria do funcional gerador, expresso agora em termos de supercampos, serve como guia durante a implementação da quantização estocástica para sistemas vinculados, na introdução da expansão $1/N$ e na garantia do limite de equilíbrio correto. Particularmente, nossos cálculos para o modelo sigma não linear, com auxílio da tecnologia dos supergráficos, podem ser reproduzidos compactamente através da teoria perturbativa no superespaço, tomando como ponto de partida o funcional gerador (3.45). Nessa situação a expansão $1/N$ do modelo sigma não linear, bem como outros modelos, é feita generalizando os passos usuais para o superespaço. Esses cálculos são a sequência natural desse trabalho.

O modelo de Thirring massivo foi tratado no capítulo 4 onde a quantização estocástica, no formalismo de Langevin, foi usada. Derivamos a equação do grupo de renormalização no contexto estocástico e calculamos perturbativamente, a nível de um loop, a função beta para esse modelo. Usando um esquema de regularização analítica obtivemos que os termos divergentes da função de quatro pontos se anulam a quinto tempo finito, levando consequentemente ao anulamento da função beta, pelo menos a nível de um loop, mostrando que a invariância de escala assintótica é preservada neste esquema de quantização. Como consequência, esse resultado nos dá uma certa garantia de que o kernel usado nas equações de Langevin para sistemas fermiônicos não introduzem anomalias adicionais.

O "approach" integral funcional para a quantização estocástica, como descrevemos nesse trabalho, merece maiores investigações de modo a ser usado para um espectro maior de situações. No caso de sistemas fermiônicos acreditamos que uma melhor compreensão

da formulação integral funcional seja necessária, particularmente no que se referem as simetrias da ação efetiva, i.e., as simetrias de BRS e anti-BRS. A quantização estocástica através de processos não Markovianos merece investigação na formulação integral funcional, seja no entendimento da supersimetria como na implementação da regularização estocástica.

APÊNDICE

NOTAÇÕES

Utilizamos o método de quantização estocástica exclusivamente no espaço-tempo Euclideano, apesar de também ser possível formulá-lo no espaço-tempo de Minkowski [115].

A transformada de Fourier dos campos, na variável espacial x, é

$$\phi(x,t) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n}\, \mathrm{e}^{ikx}\, \phi(k,t) \tag{A.1}$$

e a transformada inversa é

$$\phi(k,t) = \int d^n x\, \mathrm{e}^{-ikx}\, \phi(x,t) \tag{A.2}$$

Para campos fermiônicos usamos $(A.1)$ para $\psi(x,t)$ enquanto que para $\overline{\psi}(x,t)$ usamos

$$\overline{\psi}(x,t) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n}\, \mathrm{e}^{-ikx}\, \overline{\psi}(k,t) \tag{A.3}$$

Também ao efetuarmos a transformada de Fourier com respeito ao quinto tempo t, adotamos

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= \int \frac{d^n k\, d\omega}{(2\pi)^{n+1}}\, \mathrm{e}^{ikx+i\omega t}\, \phi(k,\omega) \\ \phi(k,\omega) &= \int d^n x\, dt\, \mathrm{e}^{-ikx-i\omega t}\, \phi(x,t) \end{aligned} \tag{A.4}$$

Nos cálculos efetuados no superespaço, de coordenadas $(t,\theta,\overline{\theta})$, as variáveis de Grassmann θ e $\overline{\theta}$ obedecem

$$\theta^2 = \overline{\theta}^2 = \{\theta,\overline{\theta}\} = 0 \tag{A.5}$$

e

$$\int d\theta d\overline{\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \theta \\ \overline{\theta} \\ \overline{\theta}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

REFERÊNCIAS

[1] G. Parisi e Y. Wu, *Sci. Sinica* **24**, 483(1981).

[2] P. Langevin, *C. R. Acad. Sci. Paris* **146**, 530(1908).

[3] A. D. Fokker, *Ann. Physik* **43**, 810(1914).
M. Planck, *Sitzber. Pr. Akad. Wiss.*, pg. 324(1917).

[4] W. Grimus e H. Hüffel, *Z. Phys.* **C18**, 129(1983).

[5] J. D. Breit, S. Gupta e A. Zaks, *Nucl. Phys.* **B233**, 61(1984).

[6] L. D. Faddeev e V. N Popov, *Phys. Lett.* **25B**, 29(1967).

[7] M. Namiki, I. Ohba, K. Okano e Y. Yamanaka, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 1580(1983).

[8] L. Baulieu e D. Zwanziger, *Nucl. Phys.* **B193**, 163(1981).

[9] V. N. Gribov, *Nucl. Phys.* **B139**, 1(1978).

[10] D. Zwanziger, *Nucl. Phys.* **B192**, 259(1981).
D. Zwanziger, *Stochastic Quantization of Gauge Fields*, NATO Advanced Study Institute on Fundamental Problems of Gauge Field Theory, Erice Lectures (1985).

[11] J. Alfaro, *Nucl. Phys.* **B253**, 464(1985).
J. Alfaro, *Preprint* , LPTENS 84/8(1984).

[12] Z. Bern, M. B. Halpern, L. Sadun e C. Taubes, *Phys. Lett.* **165B**, 151(1985).

[13] T. Fukai, H. Nakazato, I. Ohba, K. Okano e Y. Yamanaka, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 1600(1983).

[14] P. H. Damgaard e K. Tsokos, *Nucl. Phys.* **B235[FS11]**, 75(1984).

[15] P. H. Damgaard e H. Hüffel, *Phys. Rep.* **152**, 227(1987).

[16] C. M. Bender, F. Cooper e B. Freedman, *Nucl. Phys.* **B219**, 61(1983).

[17] Y. Nakano, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 361(1983).

[18] E. Gozzi, *Phys. Rev.* **D28**, 1922(1983).

[19] B. Mühlschlegel, *Path Integral Associated with the Fokker-Planck Equation*, in Path Integral and Their Applications in Quantum, Statistical and Solid-State Physics – Ed. G. J. Papadopoulos e J. T. Devreese – Plenum, New York (1978).

R. Graham, *Path-Integral Methods in Nonequilibrium Thermodynamics and Statistics*, *Lecture Notes in Physics* **84**, 82(1978).

G. J. Papadopoulos, *Functional Integrals in Brownian Motion*, in Quantum Theory and Statistical Physics, 1967 – Boulder Lectures in Theoretical Physics, Vol. XA – Ed. A. O. Barut e W. E. Brittin – Gordon and Breach, New York (1968).

G. J. Papadopoulos, *Path Integral in Quantum and Statistical Physics*, in Path Integral and Their Applications in Quantum, Statistical and Solid-State Physics – Ed. G. J. Papadopoulos e J. T. Devreese – Plenum, New York (1978).

R. V. Jensen, *Functional Integral Approach to Classical Statistical Dynamics*, *J. Stat. Phys.* **25**, 183(1981).

[20] G. Parisi e N. Sourlas, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 744(1979).

[21] J. L. Cardy, *Phys. Lett.* **125B**, 470(1983).

[22] A. Klein e J. F. Perez, *Phys. Lett.* **125B**, 473(1983).

[23] B. McClain, A. Niemi e C. Taylor, *Ann. Phys. (N.Y.)* **140**, 232(1982).

B. McClain, A. Niemi, C. Taylor e L. C. R. Wijewardhana, *Nucl. Phys.* **B217**, 430(1983).

[24] H. Nakazato, M. Namiki, I. Ohba e K. Okano, *Prog. Theor. Phys.* **70**, 298(1983).

[25] E. Egorian e S. Kalitzin, *Phys. Lett.* **129B**, 320(1983).

[26] R. Kirschner, *Phys. Lett.* **139B**, 180(1984).

[27] E. Gozzi, *Phys. Lett.* **B143**, 183(1984).

[28] J. Zinn-Justin, *Nucl. Phys.* **B275[FS17]**, 135(1986).

[29] C. Becchi, A. Rouet e R. Stora, *Phys. Lett.* **52B**, 344(1974).

C. Becchi, A. Rouet e R. Stora, *Ann. Phys. (N.Y.)* **98**, 287(1976).

[30] S. Coleman, *1/N*, Pointlike Structures Inside and Outside Hadrons (Ed. Zichichi), Plenum, New York (1981).

[31] J. R. Klauder, *Acta Phys. Austriaca* **Suppl. XXV**, 251(1983).

[32] A. A. Migdal, *Sov. Phys. Usp.* **29**, 389(1986).

[33] B. Sakita, *Stochastic Quantization*, in Proc. 7^{th} Johns Hopkins Workshop (Ed. Domokos), World Scientific, Singapore (1983).

B. Sakita, *Quantum Theory of Many-Variable Systems and Fields*, World Scientific, Singapore (1985).

[34] U. L. Van Kolck, Tese de Mestrado apresentada no IFT (1987), *Quantização Estocástica e Teorias de Gauge*.

[35] R. L. Viana, Tese de Mestrado apresentada no IFUSP (1987), *Quantização Estocástica e a Invariância de Gauge*.

[36] N. G. van Kampem, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North-Holland (1981).

C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods*, Spring-Verlag (1983).

N. Wax, *Selected Papers on Noise and Stochastic Processes*, Dover (1954).

H. Haken, *Synergetics*, Spring-Verlag (1978).

H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Spring-Verlag (1984).

[37] S. Chaturvedi, A. K. Kapoor e V. Srinavasan, *Phys. Rev.* **D34**, 3846(1986).

[38] S. Chaturvedi, A. K. Kapoor e V. Srinavasan, *Int. J. Mod. Phys.* **A3**, 163(1988).

[39] E. Abdalla, M. Gomes, M. C. Abdalla e A. Lima-Santos, *Analytic Stochastic Regularization and Gauge Theories*, IFUSP/P–635 (1987).

[40] A. Gonzáles-Arroyo, *Lecture Notes in Physics* **216**, 171(1985).

[41] E. G. Floratos e J. Iliopoulos, *Nucl. Phys.* **B214**, 392(1983).

[42] E. Seiler, *Acta Phys. Austriaca* **Suppl. XXVI**, 259(1984).

[43] E. G. Floratos, J. Iliopoulos e D. Zwanziger, *Nucl. Phys.* **B241**, 221(1984).

[44] H. Nakagoshi, M. Namiki, I. Ohba e K. Okano, *Prog. Theor. Phys.* **70**, 326(1983).

[45] B. M. Pimentel e U. L. van Kolck, *Can. J. Phys.* **66**, 700(1988).

[46] E. R. Speer, *Seminars on Renormalisation Theory, Volume 1: Lectures on Analytic Renormalisation* – University of Maryland – Technical Report **73-067** (1972).

E. R. Speer, *Dimensional and Analytic Renormalization*, in Renormalization Theory, eds. G. Velo e A. S. Wightman, D. Reidel Pub. Co. (1976).

[47] J. Alfaro, R. Jengo e N. Parga, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 369(1985).

[48] R. Iengo e S. Pugnetti, *Nucl. Phys.* **B300[FS22]**, 109(1988).

[49] Z. Bern, *Nucl. Phys.* **B251[FS13]**, 633(1985).

[50] M. B. Gavela e H. Hüffel, *Nucl. Phys.* **B275[FS17]**, 721(1986).

[51] E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, M. Gomes, R. L. Viana e A. Lima-Santos, *Rev. Bras. Fis.* **19**, 307(1989).
E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, M. Gomes e A. Lima-Santos, *Mod. Phys. Lett.* **A2**, 499(1987).

[52] A. González-Arroyo e C. P. Martín, *Nucl. Phys.* **B286**, 306(1987).

[53] J. Alfaro e M. B. Gavela, *Phys. Lett.* **158B**, 473(1985).

[54] E. S. Egoryan, E. R. Nissimov e S. Pacheva, *Theor. Math. Phys.* **73**, 1274(1987).

[55] R. Tzani, *Phys. Rev.* **D33**, 1146(1986).

[56] M. B. Gavela e N. Parga, *Phys. Lett.* **B174**, 319(1986).

[57] M. B. Gavela e N. Parga, *Nucl. Phys.* **B275[FS17]**, 546(1986).

[58] R. Kirschner, E. R. Nissimov e S. J. Pacheva, *Phys. Lett.* **B174**, 324(1986).

[59] S. Aramaki, H. Kase e K. Morita, *Prog. Theor. Phys.* **78**, 654(1987).

[60] K. Morita e H. Kase, *Phys. Rev.* **D41**, 553(1990).

[61] H. Montani e F. A. Schaposnik, *Ann. Phys. (N.Y.)* **181**, 161(1988).
H. Montani, *Phys. Rev.* **D38**, 3178(1988).

[62] M. Reuter, *Phys. Rev.* **D35**, 3076(1987).

[63] Z. Bern e M. B. Halpern, *Phys. Rev.* **D33**, 1184(1986).

[64] Z. Bern, M. B. Halpern, L. Sadun e C. Taubes, *Nucl. Phys.* **B284**, 1(1987).

[65] Z. Bern, M. B. Halpern, L. Sadun e C. Taubes, *Nucl. Phys.* **B284**, 35(1987).

[66] S. Pugnetti, *Nucl. Phys.* **B300[FS22]**, 143(1988).

[67] Y. Kakudo, Y. Taguchi, A. Tanaka e K. Yamamoto, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 1225(1983).

[68] R. Horsley e W. Schoenmaker, *Phys. Rev.* **D31**, 822(1985).

[69] K. Ishikawa, *Nucl. Phys.* **B241**, 589(1984).

[70] G. Parisi e N. Sourlas, *Nucl. Phys.* **B206**, 321(1982).,

[71] M. V. Felgel'man e A. M. Tsvelik, *Sov. Phys. JETP* **56**, 823(1982).

[72] A. Muñoz Sudupe e R. F. Alvarez-Estrada, *J. Phys.* **A16**, 3049(1983).

[73] R. F. Alvarez-Estrada e A. Muñoz Sudupe, *J. Phys.* **A20**, 733(1987).
A. Muñoz Sudupe e R. F. Alvarez-Estrada, *Phys. Lett.* **164B**, 102(1985).
A. Muñoz Sudupe e R. F. Alvarez-Estrada, *Phys. Lett.* **166B**, 186(1986).

[74] E. Gozzi, *Phys. Rev.* **D31**, 1349(1985).

[75] M. Namiki e Y. Yamanaka, *Prog. Theor. Phys.* **69**, 1764(1983).

[76] M. Namiki e Y. Yamanaka, *Hadronic J.* **7**, 594(1984).

[77] M. Namiki e Y. Yamanaka, *Prog. Theor. Phys.* **75**, 1447(1986).

[78] H. Nakazato, G. Takada, H. Soshi e Y. Yamanaka, *Prog. Theor. Phys.* **80**, 559(1988).

[79] K. Okano e L. Schülke, *Nucl. Phys.* **B295[FS21]**, 105(1988).

[80] S. Chaturvedi, A. K. Kapoor e V. Srinavasan, *Z. Phys.* **C36**, 235(1987).

[81] N. G. Van Kampen, *J. Stat. Phys.* **24**, 175(1981).

[82] H. Nakazato, K. Okano, L. Schülke e Y. Yamanaka, *Nucl. Phys.* **B346**, 611(1990).

[83] H. Kawara, M. Namiki, H. Okamoto e S. Tanaka, *Prog. Theor. Phys.* **84**, 749(1990).

[84] E. Sh. Egoryan e R. P. Manvelyan, *Theor. Math. Phys.* **68**, 762(1986).

[85] S. Marculescu, K. Okano e L. Schülke, *Nucl. Phys.* **B349**, 463(1991).

[86] S. Chaturvedi, A. K. Kapoor e V. Srinavasan, *J. Phys.* **A17**, 2037(1984).

[87] E. Egorian, *Theor. Math. Phys.* **63**, 473(1985).

[88] S. Chaturvedi, A. K. Kapoor e V. Srinavasan, *Phys. Lett.* **B140**, 56(1984).

[89] H. Nicolai, *Phys. Lett.* **B89**, 341(1980).
H. Nicolai, *Nucl. Phys.* **B176**, 419(1980).

[90] P. H. Damgaard e K. Tsokos, *Lett. Math. Phys.* **8**, 535(1984).

[91] S. Cecotti e L. Girardello, *Ann. Phys. (N.Y.)* **145**, 81(1983).

[92] S. Chaturvedi, A. K. Kapoor e V. Srinavasan, *Z. Phys.* **C57**, 249(1984).

[93] R. Iengo e S. Pugnetti, *Nucl. Phys.* **B300[FS22]**, 128(1988).

[94] A. Niemi e L. C. R. Wijewardhana, *Ann. Phys. (N.Y.)* **140**, 247(1982).

[95] J. C. Brunelli e M. Gomes, *$1/N$ Expansion of the Non-Linear σ Model and its Renormalization through Stochastic Quantization*, IFUSP/P- (1991).

[96] M. Gell-Mann e M. Lévy, *Nuovo Cimento* **16**, 705(1960).

[97] A. M. Polyakov, *Phys. Lett.* **59B**, 79(1975).

[98] E. Brézin, J. C. Le Guillou e J. Zinn-Justin , *Phys. Rev.* **D14**, 2615(1975).

[99] A. Belavin e A. Polyakov, *JEPT Letters* **22**, 245(1975).

[100] K. Pohlmeyer, *Commun. Math. Phys.* **46**, 207(1976).
M. Lüscher e K. Pohlmeyer, *Nucl. Phys.* **B137**, 46(1978).

[101] Al. B. Zamolodchikov e A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* **B133**, 525(1978).

[102] M. C. Batoni Abdalla, Tese de Doutorado apresentada no IFUSP (1981), *Leis de Conservação não Locais, Anomalias e Matrizes-S Exatas de Modelos Bidimensionais.*

[103] B. B. Cobra, Tese de Mestrado apresentada no IFUSP (1982), *Cancelamento de Divergências Infravermelhas nos Modelos CP^{N-1}.*

[104] J. H. Lowenstein e E. R. Speer, *Nucl. Phys.* **B158**, 397(1979).

[105] M. Namiki, I. Ohba e K. Okano, *Prog. Theor. Phys.* **72**, 350(1984).

[106] I. Ya. Aref'eva, *Teor. Mat. Fiz.* **36**, 24(1978).

[107] J. Zinn-Justin e D. Zwanziger, *Nucl. Phys.* **B295[FS21]**, 297(1988).

[108] W. Thirring, *Ann. Phys. (N.Y.)* **3**, 91(1958).

[109] K. Johnson, *Nuovo Cimento* **20**, 773(1961).

[110] B. Klaiber, *The Thirring Model*, in Quantum Theory and Statistical Physics, 1967 – Boulder Lectures in Theoretical Physics, Vol. XA, p. 141 – Ed. A. O. Barut e W. E. Brittin – Gordon and Breach, New York (1968).

[111] M. Gomes e J. H. Lowenstein, *Nucl. Phys.* **B45**, 252(1972).

[112] A. H. Mueller e T. L. Trueman, *Phys. Rev.* **D4**, 1635(1971).

[113] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B61**, 455(1973).
J. C. Collins e A. J. Macfarlane, *Phys. Rev.* **D10**, 1201(1974).
J. C. Collins, *Nucl. Phys.* **B80**, 341(1974).

[114] I. M. Gel'fand e G. E. Shilov, *Generalized Functions Vol. 1*, Academic Press, New York (1964).

[115] H. Hüffel e H. Rumpf, *Phys. Lett.* **B148**, 104(1984).
E. Gozzi, *Phys. Lett.* **B150**, 119(1985).