UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Análise Perturbativa de Campos Fermiônicos com Auto-Interação Quártica Acoplados a um Campo de Chern-Simons

Van Sérgio Alves

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Farina de Souza (UFRJ)

Prof. Dr. Carlos Eugênio Imbassahy Carneiro (IFUSP)

Prof. Dr. Eduardo Cantera Marino (UFRJ)

Prof. Dr. Josif Frenkel (IFUSP)

Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes (IFUSP)

Sylvio Caminha
Prófa. Sylvio Roberto Accholy Caminha
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

São Paulo

1998

SBI-IFUSP

305M810T2855

530.14

A 474 a

D

ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Alves, Van Sérgio

Análise Perturbativa de Campos Fermiônicos com
Auto-Interação Quártica Acoplados a um Campo de
Chern-Simons. São Paulo, 1998.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes
Área de Concentração: Física de Partículas e Campos

Unitermos: 1. Análise Perturbativa;
2. Teoria de Campos em $2 + 1$ D;
3. Teoria de Chern-Simons; 4. Modelos Fermiônicos;
5. Grupo de Renormalização.

USP/IF/SBI-062/98

ABSTRACT

In this work a theory of fermionic fields coupled through a quartic self interaction and also interacting with a Chern-Simons field (CS) is perturbatively analyzed. Up two loops, renormalization group parameters were calculated using dimensional renormalization as a tool to render finite the Feynman amplitudes. For the theory with just one flavor ($N = 1$), we verified that operators with dimension (d) lower or equal to three have an anomalous dimension which decreases as a function of the CS parameter (α); that indicates a better ultraviolet behavior. The theory presents the origin as the only fixed point which turns out to be infrared stable. For the case $N > 1$, using a method of reduction of coupling parameters, we found, in lowest order, a line of fixed points. We verified that of $\alpha > \alpha_c$ the theory is stable in the infrared. In the renormalization process of operators with $d = 4$, we found a linear combination of $(\bar{\psi}\partial^2\psi)$, $(\bar{\psi}\psi)^2$ and $(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2$ whose dimension also decreases as a function of α .

RESUMO

Neste trabalho fazemos uma análise perturbativa para férmions com auto-interação quártica, acoplados com um campo de Chern-Simons (CS). Calculamos as funções do grupo de renormalização até a ordem de 2-loops, válidas no limite de baixas energias, usando a regularização dimensional para tornar as amplitudes de Feynman finitas. Para a teoria com único sabor ($N = 1$), verificamos que operadores com dimensão (d) três adquirem uma dimensão anômala que é uma função decrescente do parâmetro de CS (α), que indica um melhor comportamento ultra-violeta. Essa teoria apresenta apenas a origem como ponto fixo, que é estável no infra-vermelho. Para o caso ($N > 1$), usando o método de redução das constantes de acoplamento, encontramos, em ordem mais baixa, uma linha de pontos fixos para qualquer valor do acoplamento quártico. Verificamos que para $\alpha > \alpha_c$ a teoria é estável no infra-vermelho. No processo de renormalização de operadores com $d = 4$, encontramos uma combinação linear dos operadores $(\bar{\psi}\partial^2\psi)$, $(\bar{\psi}\psi)^2$ e $(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2$ cuja dimensão também diminui como função de α .

Dedicatória,
A Silvana e Gabriel
minhas fontes de alegria

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes pela orientação e pelas discussões no decorrer deste trabalho,

Ao Prof. Dr. Adilson José da Silva,

Aos meus pais, irmãos e sobrinhos: Manoel Augusto, Maria José, Cláudia Lúcia, Jan Cláudio, Laura Cinthya, Carlos Augusto, Ronaldo Bentes, Danielle, Marcelle, Edésio Júnior, Van Cláudio e Pedro Henrique, pelo apoio e amor que nos une,

A Silvana Perez por estar presente em todos os momentos,

Aos amigos, em especial ao Sérgio Vizeu, Luis Malacarne, Francisco Peña, Rênio Mendes, Luiz Cláudio, Paulo Valente, Paulo Barros, Alexandre, Akira, Kleber, Crispino e Angela,

Aos colegas do Departamento de Física da Universidade Federal do Pará, nas figuras da Profa. Fátima Baraúna, Paulo de Tarso e em especial ao Prof. Dr. José Maria Filardo Bassalo, pelo apoio e confiança.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Conteúdo

Introdução	8
1 O Modelo de Gross-Neveu Acoplado Com um Campo de Chern-Simons	14
1.1 Apresentação do Modelo	14
1.2 Estrutura Geral da Série Perturbativa	15
1.2.1 As Regras de Feynman	15
1.2.2 Contagem de Potência dos Diagramas de Feynman e a Regularização	16
1.3 O Grupo de Renormalização e a Teoria Efetiva	22
1.4 As Funções do Grupo de Renormalização	28
1.4.1 Função de Dois Pontos	32
1.4.2 Funções de Quatro Pontos	45
1.5 Pontos Fixos e Dimensões anômalas de Operadores Compostos	51
2 O Modelo Fermiônico Com Simetria $U(N)$ Acoplado Com um Campo de Chern-Simons	60
2.1 O Modelo Como uma Teoria Efetiva e o Grupo de Renormalização . . .	60
2.2 As Funções do Grupo de Renormalização	63
2.3 Pontos Fixos e Redução das Constantes de Acoplamento	67
2.4 Dimensões Anômalas de Operadores Compostos	71
Discussões	77
A Notação no Espaço de Minkowski	79

A.1	Representação e Propriedades das Matrizes de Dirac	79
A.2	Parâmetros de Feynman e a Regularização Dimensional	81
B	Simetrias do Modelo	83
C	Diagramas de 1-Loop	88
C.1	Função de Dois Pontos	88
C.1.1	Ordem g	88
C.1.2	Ordem α	89
C.2	Tensor de Polarização	91
C.3	Função de Quatro Pontos	93
D	Diagramas de 2-Loops	95
D.1	Funções de Quatro Pontos	95
E	Operadores Compostos	112
F	Geração Dinâmica de Massa no Modelo Gross-Neveu na Expansão $\frac{1}{N}$	122
F.1	Quebra de Paridade	123
	Referências	130

Introdução

Nos últimos anos, teorias efetivas de campos tem sido extensivamente estudadas. Esse interesse deve-se não apenas a suas potenciais aplicações, mas também por nos proporcionar uma nova maneira de se obter informações [1, 2, 3]. Esses estudos têm levado a uma mudança conceitual na teoria quântica de campos [4], e em particular sobre a questão da renormalizabilidade.

Originalmente a idéia da renormalização era remover os infinitos dos cálculos perturbativos e surgiu nos anos quarenta como uma resposta para as dificuldades encontradas no tratamento teórico dos resultados experimentais, obtidos por Lamb [5] e Rabi [6], referentes à estrutura fina e hiperfina do átomo de hidrogênio. No entanto a questão do porque a natureza seria descrita por uma teoria renormalizável não era enfocada [4]. Devemos recordar que anterior ao desenvolvimento da teoria de renormalização, Fermi, na década de trinta, desenvolveu uma teoria de campos, envolvendo uma interação corrente $\times$ corrente, na tentativa de explicar o decaimento beta. Por muitos anos alguns cálculos que envolvem a teoria das interações fracas foram feitos com êxito, usando essa teoria de quatro férmions que é não renormalizável (no sentido de contagem de potências [7]).

Embora a renormalizabilidade não seja um princípio físico fundamental [1], o requerimento de que a natureza deva ser descrita por teorias renormalizáveis impõe restrições sobre uma variedade de teorias físicas que podemos considerar. Essas restrições não seriam todavia necessárias se a teoria fosse considerada como uma teoria efetiva.

Uma teoria efetiva de campos contém um número infinito de termos, incluindo aqueles renormalizáveis, que correspondem aos termos com dimensão menor ou igual a dimensão do espaço-tempo. De fato, considere a ação no espaço-tempo D -dimensional

$$S = \int d^D x \sum_i g_i \mathcal{O}_i(x) ,$$

onde $\mathcal{O}_i(x)$ referem-se a operadores constituídos de campos básicos e suas derivadas. g_i são as respectivas constantes de acoplamento e a soma é sobre todos os operadores que são permitidos por considerações de simetria [2]. A parametrização da forma $S \rightarrow S_\Lambda$, onde Λ é um corte ultravioleta, nos leva a interpretar S_Λ como uma ação efetiva, válida no regime de baixas energias, ou seja, para $E \ll \Lambda$. Podemos então imaginar S_Λ vindo de uma teoria fundamental da seguinte maneira: separamos o campo em partes de baixa (B) e alta (A) frequência, isto é, $\phi = \phi_B + \phi_A$, de modo que podemos escrever

$$\int \mathcal{D}\phi_B \mathcal{D}\phi_A e^{iS(\phi_B, \phi_A)} = \int \mathcal{D}\phi_B e^{iS_\Lambda(\phi_B)} ,$$

onde $e^{iS_\Lambda(\phi_B)} = \int \mathcal{D}\phi_A e^{iS(\phi_B, \phi_A)}$. Como os campos remanescentes em S_Λ pertencem à região onde $E < \Lambda$, podemos expandi-la em termos de operadores locais, ou seja,

$$S_\Lambda = \int d^D x \sum_i g_i \mathcal{O}_i(x) .$$

No sistema de unidades naturais, se um operador $\mathcal{O}_i$ possuir dimensão de massa $[\mathcal{O}_i] = E^{d_i}$, onde d_i é a sua dimensão canônica, então $[g_i] = E^{D-d_i}$. Definindo uma constante de acoplamento adimensional $\lambda_i = \Lambda^{d_i-D} g_i$, podemos estimar, para processos em uma escala de energia E , a magnitude de cada termo contido na ação S_Λ usando apenas argumentos dimensionais. Assim, $\int d^D x \mathcal{O}_i \sim E^{d_i-D}$, de modo que o i -ésimo termo será da ordem $\lambda_i (\frac{E}{\Lambda})^{d_i-D}$. Aqui podemos distinguir três casos: (i) $d_i > D$, este termo torna-se menos importante para baixas energias, e dizemos que este termo é não renormalizável (ou irrelevante); (ii) $d_i = D$ é importante em todas as escalas de energia e é dito renormalizável (ou marginal); (iii) $d_i < D$, o operador correspondente é importante para processos em baixas energias e ele é dito super-renormalizável (ou relevante);

Interações não renormalizáveis se caracterizam por possuírem uma constante de acoplamento com dimensão negativa, em unidades de massa. Se Λ for o parâmetro de escala de massa que caracteriza o acoplamento de um vértice não renormalizável,

então, podemos obter uma teoria efetiva, não como uma expansão nos operadores, como nos referimos acima, mas como uma expansão no inverso da potência Λ . Assim, os contra-termos induzidos pelo processo de renormalização vêm acompanhados de potências da forma $(\frac{(m,p)^{d(\gamma)}}{\Lambda^n})$, onde m é a massa da partícula, p o momento externo, $d(\gamma)$ é o grau de divergência superficial de um gráfico de Feynman e n a n -ésima ordem de perturbação. Embora essas teorias gerem um número infinito de contra-termos, se $(m,p) \ll \Lambda$ o efeito das potências maiores em $\frac{(m,p)}{\Lambda}$ será atenuado.

Partindo desta perspectiva, modelos não renormalizáveis tem adquirido um novo enfoque, pois eles podem tornar-se fisicamente relevantes no regime de baixas energias [1]. O ponto é que se a escala de energia for pequena o bastante, as ambiguidades devido aos estados virtuais de alta energia não são significativos. No intervalo de energia onde isso acontece a teoria é tratada como uma teoria renormalizável.

Em outras situações, onde não há restrições quanto ao número de campos fermiônicos, o comportamento ultravioleta das funções de Green nas interações quárticas pode ser melhorado. Realmente, incorporando os efeitos de polarização de vácuo e reagrupando a série perturbativa em potência de $\frac{1}{\Lambda}$, interações do tipo Gross-Neveu [8, 9] ou tipo Thirring [10, 11, 12] tornam-se renormalizáveis. Na linguagem da mecânica estatística poderíamos dizer que os operadores de quatro férmions tornam-se relevantes. Estes resultados tem motivado uma série de investigações sobre as propriedades dessas teorias [13, 14, 15, 16, 17].

Ao lado da expansão $\frac{1}{\Lambda}$, em $(2+1)$ dimensões tem sido conjecturado [18] que existe uma outra possibilidade de melhorar o comportamento ultravioleta das amplitudes de Feynman, através do acoplamento de férmions com o campo de Chern-Simons. Em parte, esta conjectura vem do fato de que em duas dimensões espaciais o grupo de rotações $SO(2)$ é abeliano, e assim não existem, em princípio, restrições aos valores que o spin pode assumir. A transmutação de spin poderia então ocasionar um melhor comportamento ultravioleta da teoria.

No contexto da mecânica quântica objetos com spin fracionário, denominados de anyons, e sua correspondente estatística foram inicialmente estudadas por Leinaas e Myrheim [19] e posteriormente por Wilczek [20]. Como sabemos, a estatística das partículas tem um papel fundamental na determinação das propriedades de um

sistema de muitos corpos. Partículas convencionais são classificadas em bósons ou férmions, se elas obedecem a estatística de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac, respectivamente. É bem conhecido que a função de onda de muitos corpos é simétrica pela permutação de duas partículas bosônicas e anti-simétrica para férmions idênticos. Esses estudos, referidos anteriormente, sobre as propriedades de partículas imersas num espaço bi-dimensional, tem nos mostrado que existe um mecanismo que pode converter bósons em férmions, quando se acopla uma interação via potencial de Chern-Simons [21, 22]. A título de ilustração, podemos interpretar a interação neste sistema como tubos de fluxos magnéticos, de raio infinitesimal, acompanhando cada partícula. Este mecanismo é baseado no efeito Aharonov-Böhm [23, 26], isto é, a função de onda de dois anyons adquire uma fase $e^{i\pi\alpha}$ quando as duas “partículas” são trocadas. O fator de fase $e^{i\pi\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$) define a estatística fracionária dos anyons, de maneira que existe um tipo de interpolação estatística, ou seja, para $\alpha = 0$ corresponde a férmions livres (de spin $\frac{1}{2}$) e para $\alpha = 1$ corresponde a bósons livres (de spin 0). Uma revisão sobre anyons pode ser encontrada na referência [24].

O conceito de estatística fracionária tem sido útil no estudo da física da matéria condensada, particularmente na tentativa de se obter boas explicações teóricas para o efeito Hall quântico [25], que ocorrem em sistemas que exibem uma geometria planar e podem em princípio ser descritos por modelos de teoria quântica de campos (além de possíveis conexões no entendimento da teoria da supercondutividade com alto valor da temperatura crítica [26, 27, 28, 29, 30, 31]).

No contexto da teoria quântica de campos, a transmutação Fermi-Bose pode ser simulada pela introdução de um campo de gauge de Chern-Simons [32, 33], que interage com a matéria via uma corrente conservada. Deste modo o termo de Chern-Simons (CS) produz uma interação de longo alcance entre as partículas carregadas, que pode ser interpretada como mudando a estatística, transformando bósons e férmions em anyons. Uma outra peculiaridade consiste na existência de campos vetoriais massivos sem a quebra da simetria de gauge [34, 35]. De fato, o termo de CS quando acoplado com um termo de Maxwell fornece uma massa para o fóton, já na aproximação de árvore.

Na ausência do termo de Maxwell, não existem graus de liberdade dinâmicos

associados ao campo de gauge, embora, a interação de longo alcance que muda a estatística persista. Neste caso, o termo de *CS* pode ser interpretado como um campo auxiliar, já que o seu propagador não possui um conteúdo de partícula. Este termo surge naturalmente em sistemas planares, mais especificamente, quando se calcula o tensor de polarização para férmions massivos. Realmente, ao usarmos a representação de duas componentes, surge uma parcela anti-simétrica que corresponde ao termo de Chern-Simons induzido¹ [36]. Como mostrado em [10] o termo de *CS* pode ser gerado dinamicamente, em teorias com férmions de massa nula, quando se acopla minimamente um campo de gauge A_μ com a matéria, apenas se a simetria de paridade é quebrada.

Do que foi dito acima, é natural imaginar que para $0 < \alpha < 1$ exista um α_c na qual quando $\alpha \rightarrow \alpha_c$ ocorra uma transição de fase, de um sistema tipo férmion para tipo bóson, ou vice-versa. Por outro lado, é sabido que operadores de campos adquirem uma dimensão anômala devido às correções radiativas. Podemos então obter informações sobre a influência do termo de *CS*, no que se refere a renormalizabilidade da teoria, através do cálculo das dimensões anômalas dos operadores de campo, incluindo os compostos. Em particular, a dimensão anômala do operador $(\bar{\psi}\psi)^2$ foi calculada em [18], onde foi usado um corte para regularizar as amplitudes de Feynman. O resultado obtido no trabalho acima indica que a dimensão anômala deste operador é uma função decrescente do parâmetro α^2 . Ao mesmo tempo que a função beta do acoplamento de Gross-Neveu possui um ponto fixo não trivial para $\alpha_c^2 = \frac{6}{17}$, o que leva o operador $(\bar{\psi}\psi)^2$ a tornar-se marginal para este valor de α . Nossos resultados, entretanto, confirmam apenas em parte esta conjectura [37].

Parte deste trabalho dedica-se ao estudo de um procedimento perturbativo adequado para modelos com auto-interação quártica fermiônica. Ele está dividido em dois capítulos e seis apêndices. No primeiro capítulo estudaremos o modelo de Gross-Neveu massivo acoplado com um termo de *CS*. Após uma breve apresentação do modelo e suas simetrias, discutiremos a não renormalizabilidade da teoria e a construção da teoria efetiva, assim como o método da regularização utilizada neste trabalho. A seguir encontraremos a equação do grupo de renormalização que as funções de vértices,

¹Veja o cálculo do tensor de polarização que se encontra no apêndice C desta tese.

com N linhas externas do tipo férmion deverão satisfazer. Calcularemos as funções do grupo de renormalização até a ordem de 2-loops, e mostraremos que neste caso (de um único sabor) existe apenas um ponto fixo infravermelho estável, que é o trivial. Obteremos também as dimensões anômalas do campo básico ψ e de alguns operadores compostos. No segundo capítulo estenderemos a discussão para a situação de N ($N > 1$) campos fermiônicos acoplados com o termo de CS . Neste caso teremos duas constantes de acoplamento, e para estudarmos a natureza dos pontos fixos utilizaremos o método da redução das constantes de acoplamento proposto por Zimmermann [38]. Mostraremos que existe uma linha de pontos fixos, além daquele trivial, o que não ocorre para o caso onde $N = 1$. Discutiremos as dimensões anômalas para alguns operadores compostos e seu comportamento como uma função de α . Devemos esperar algumas diferenças qualitativas e quantitativas em relação ao caso de um único sabor, pois como sabemos, quando N torna-se grande, mudanças drásticas ocorrem em teorias quárticas fermiônicas, tais como a questão da renormalizabilidade, e em particular, com uma interação tipo Thirring, haverá geração dinâmica de massa para os férmions [11]. Nas discussões apresentaremos um resumo dos resultados obtidos e possíveis extensões a este trabalho. Nos apêndices encontram-se a notação e tabelas de integrais que utilizaremos no decorrer deste trabalho, assim como os cálculos de alguns diagramas referentes aos modelos considerados.

Capítulo 1

O Modelo de Gross-Neveu Acoplado Com um Campo de Chern-Simons

1.1 Apresentação do Modelo

O modelo de Gross-Neveu massivo em $(2 + 1)$ dimensões acoplado com um campo de Chern-Simons é dado pela seguinte densidade de Lagrangeana.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha} \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\mu\nu} A_\alpha + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu - G(\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (1.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, ψ é um campo fermiônico de massa m com duas componentes, A_μ o campo de Chern-Simons e λ o parâmetro de fixação de gauge. Neste caso, a interação de Gross-Neveu é a mais geral auto-interação quártica fermiônica invariante de Lorentz, uma vez que a interação vetorial tipo Thirring não é independente e satisfaz a relação : $(\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)^2 := -3 : (\bar{\psi}\psi)^2 :$. No próximo capítulo analizaremos o caso de N campos fermiônicos.

Note que em $D = 3$ a teoria acima¹ possui o acoplamento G com dimensão Massa^{-1} , e de acordo com o critério de contagem de potência a teoria é não renormalizável [39, 40, 42]. Isto significa, como veremos na seção 1.4, que o número

¹No sistema de unidades naturais ($c = \hbar = 1$), a dimensão da densidade de Lagrangeana em unidades de massa é $[\mathcal{L}] = D$, onde D é a dimensão do espaço-tempo. Logo, $[\psi] = [\bar{\psi}] = \frac{D-1}{2} = [A_\mu] = \frac{D-1}{2}$. O que implica que $[\alpha] = 3 - D$ e $[G] = 2 - D$.

de contra-termos necessários para tornar as amplitudes de Feynman finitas aumenta com a ordem de perturbação em G .

O modelo descrito por (1.1) é invariante pela simetria de conjugação de carga (C). No entanto, a presença do termo de Chern-Simons, assim como o termo de massa, quebram explicitamente as simetrias de paridade ($\mathcal{P}$) e reversão temporal ($\mathcal{T}$), contrariamente ao caso das simetrias $\mathcal{PT}$ e $\mathcal{CPT}$ que não são violadas [34] (para maiores detalhes veja o apêndice B). O modelo apresenta também uma simetria de gauge local, pois pelas transformações

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Theta(x),$$

e

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\Theta(x)} \psi(x) \ ,$$

a Lagrangeana muda apenas por uma derivada total $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{1}{4\pi\alpha} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\alpha (F_{\mu\nu} \Theta(x))$, mantendo a ação clássica invariante.

1.2 Estrutura Geral da Série Perturbativa

1.2.1 As Regras de Feynman

A teoria de perturbação aproxima as amplitudes de espalhamento por uma série de diagramas de Feynman que mostram sub-processos entre os estados iniciais e finais. Podemos construir a série perturbativa da teoria (1.1) através das regras para os vértices de interação mostradas na figura abaixo. Por conveniência introduzimos a linha tracejada, que chamaremos a partir de agora de linha auxiliar GN , para clarificar a estrutura tensorial do vértice fermiônico.

Os propagadores da teoria livre são obtidos facilmente se aplicarmos a equação de Euler-Lagrange em (1.1). Para o campo de Chern-Simons, obtemos a seguinte equação de movimento

$$\frac{1}{\lambda} \partial_\mu \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{2\pi\alpha} \epsilon_{\mu\lambda\nu} \partial^\lambda A^\nu = j_\mu \ , \quad (1.2)$$

Figura 1.1: Regras de Feynman para os vértice da teoria (1.1). A linha ondulada representa o propagador de CS e a linha cheia o propagador fermiônico.

$$\Delta_F^{\mu\alpha}(k) = 2\pi\alpha \varepsilon^{\mu\alpha\lambda} \frac{k_\lambda}{k^2} - i\lambda \frac{k^\mu k^\alpha}{k^4} . \quad (1.3)$$

o que nos mostra que este propagador não possui um conteúdo de partícula, uma vez que não apresenta pólo. No decorrer deste trabalho iremos adotar o gauge de Landau $\lambda \rightarrow 0$. A escolha deste gauge leva a um melhor comportamento infravermelho das funções de Green [34, 44].

De maneira análoga podemos obter o propagador do férmion, que é dado por

$$S_F(k) = \frac{i}{\not{k} - m} . \quad (1.4)$$

1.2.2 Contagem de Potência dos Diagramas de Feynman e a Regularização

O comportamento ultra-violeta de um gráfico de Feynman γ é governado, de acordo com o critério de contagem de potências, pelo grau de divergência superficial $d(\gamma)$. Os diagramas calculados com as regras de Feynman acima possuem,

$$d(\gamma) = DL - n_A - n_F . \quad (1.5)$$

onde L é o número de loops, n_A e n_F são os números de linhas internas do tipo A_μ e fermiônica, respectivamente, e D é a dimensão do espaço-tempo.

Podemos escrever (1.5) em termos do número de linhas externas dos campos ψ e A_μ , N_F , N_A , respectivamente, usando a relação de Euler e as relações topológicas

$$L = n_A + n_F - V + 1, \quad N_A + 2n_A = \sum_a \nu_a^A, \quad N_F + 2n_F = \sum_a \nu_a^F,$$

onde $V = V_G + V_\alpha$, é o número total de vértices em um diagrama de Feynman, ν_a^A e ν_a^F são os números de linhas do campo A_μ e do campo ψ chegando no vértice a , respectivamente. Usando as relações acima, a equação (1.5) toma a forma

$$\begin{aligned} d(\gamma) &= D - \left(\frac{D-1}{2}\right)[N_A + N_F + \sum_a (\nu_a^A + \nu_a^F)] - DV \\ &= 3 - N_A - N_F + V_G, \end{aligned} \quad (1.6)$$

para $D = 3$.

Os diagramas são ditos superficialmente divergentes quando $d(\gamma) \geq 0$, então, de acordo com (1.6) são superficialmente divergentes, por exemplo, os diagramas mostrados nas figuras 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5. Para remover essas divergências devemos usar algum esquema de renormalização. Por outro lado, os contra-termos são construídos para cancelar as divergências das funções de Green de N pontos, de maneira que sua estrutura está intimamente relacionada com o grau de divergência superficial. Mais precisamente, de acordo com o teorema de Weinberg [45], um contra-termo $C(\gamma)$ de um gráfico γ será um polinômio nos momentos externos, de grau igual ao grau de divergência superficial $d(\gamma)$. Isto é uma propriedade geral da teoria da renormalização, onde os contra-termos induzidos são locais [40, 46].

Portanto até 2-loops, com relação à função de dois pontos para o férmion ($N_A = 0$ e $N_F = 2$), os contra-termos induzidos pelos diagramas de Feynman serão proporcionais a: m e $\not{p}$, que correspondem aos diagramas de ordem α e α^2 (são linearmente divergentes); m^2 , $m \not{p}$ e p^2 , que correspondem aos diagramas de ordem G e $G\alpha$ (são quadraticamente divergentes); m^3 , $m^2 \not{p}$, $m p^2$ e $\not{p} p^2$, referentes aos diagramas de ordem G^2 (são cubicamente divergentes). Com relação à função de quatro pontos²

²Por comodidade adotamos uma representação condensada onde p representa quaisquer dos momentos externos.

Figura 1.2: Diagramas com $N_A = 0$ e $N_F = 2$, que contribuem para a função de dois pontos do férmion. Os diagramas (b), (f), (g), (h), (i) e (j) representam de fato uma família de diagramas.

e $N_F = 4$), os contra-termos induzidos serão proporcionais a: *constante*, que correspondem aos diagramas de ordem $G\alpha$ e $G\alpha^2$ (são logaritmicamente divergentes); m e $\not{p}$, gerados pelos diagramas de ordem G^2 e $G^2\alpha$ (são linearmente divergentes); m^2 , $m \not{p}$ e p^2 , gerados pelos diagramas de ordem G^3 (são quadraticamente divergentes). Como podemos observar, diagramas logaritmicamente divergentes ($d(\gamma) = 0$) induzirão contra-termos constantes, os linearmente divergentes induzirão contra-termos com dimensão de massa e assim por diante. Desta forma, com relação a função de dois pontos para o férmion, os termos sem derivadas poderiam ser absorvidos numa reparametrização da massa, os de uma derivada numa reparametrização do campo, e os com duas e três derivadas são novos contra-termos diferentes das interações já contidas em (1.1). Semelhantemente, para a função de quatro pontos os termos sem

Figura 1.3: Diagramas com $N_A = 0$ e $N_F = 4$, que contribuem para a função de quatro pontos. Os diagramas (c), (d), (e), (f), (g), (h) e (i) representam uma família de diagramas.

derivada poderiam ser absorvidos numa reparametrização da constante de acoplamento G , e os de uma ou mais derivadas são novos contra-termos induzidos, que por sua vez requereriam a introdução de novos tipos de interações da forma $K_1 (\bar{\psi} \not{\partial} \psi)(\bar{\psi} \psi)$, $K_2 (\bar{\psi} \partial^2 \psi)(\bar{\psi} \psi)$, etc... . Note entretanto que como a interação de CS é renormalizável, um aumento na ordem de perturbação no seu acoplamento não altera o grau de divergência superficial dos diagramas. Contrariamente, inserções extras de operadores $(\bar{\psi} \psi)^2$ fazem com que a amplitude se torne mais divergente, nos levando a ter que adicionar, para tornar as amplitudes de Feynman finitas, contra-termos com potência cada vez maiores de momento. Isto é uma característica de teorias não renormalizáveis³, onde necessitamos fazer infinitas medidas para fixar os contra-termos, diminuindo assim o poder de predição da teoria com a ordem de perturbação.

Em teoria quântica de campos precisamos especificar a maneira pela qual as parcelas finitas dos diagramas de Feynman são determinadas, já que existe uma ambiguidade na sua definição. Na teoria de perturbação, a prescrição para remover as divergências corresponde a escolher um esquema de renormalização que regule as

³Se por teoria renormalizável por contagem de potência entendemos aquela, em que todos os contra-termos induzidos pelo procedimento de renormalização, podem ser absorvidos por uma redefinição dos parâmetros originais da teoria, e não pelo fato da constante de acoplamento ser adimensional, a teoria de Yukawa em $(3+1)D$ com acoplamento $\phi \bar{\psi} \psi$ é não renormalizável. Pois em 1-loop há a indução do contra-termo ϕ^4 para cancelar a divergência logaritmica.

Figura 1.4: Diagramas com $N_A = 2$ e $N_F = 0$, que contribuem para a função de dois pontos do campo A_μ .

integrais e que subtraia os infinitos de maneira sistemática.

A questão de qual regulador devemos usar não tem a priori uma resposta em teoria quântica de campos. Em princípio qualquer método para retirar os infinitos pode ser utilizado, entretanto, na prática alguns métodos são mais convenientes que outros. Neste trabalho adotaremos a regularização dimensional [47] juntamente com o esquema de subtração minimal [47] [48]. Em muitas situações este é o método mais conveniente pois não destrói nenhuma relação algébrica entre as funções de Green, em particular as identidades de Ward. Além de preservar a invariância de Poincaré na teoria regularizada e também as simetrias de gauge, nos permite calcular as funções do grupo de renormalização de maneira relativamente simples, como veremos na próxima seção. Outros métodos como o "cut-off" e o de Pauli-Villars destroem a invariância de gauge, embora o segundo preserve as identidades de Ward na *QED*. Entretanto, como observado em [49] a regularização com um simples "cut-off" leva a ambiguidades associado ao fluxo de momento nos gráficos de Feynman. No contexto das teorias efetivas, o uso da regularização dimensional é quase que obrigatório para garantir que contra-terms de ordem mais elevadas possam ser desprezados [50].

A idéia deste esquema é baseada no fato de que as divergências ultravioletas primi-

Figura 1.5: Diagramas com $N_A = 1$ e $N_F = 2$, que contribuem para a função de três pontos.

tivas dos diagramas de Feynman, que advém dos “loops” de integração, são eliminadas quando se vai para uma dimensão D do espaço-tempo pequena o bastante para tornar tal amplitude convergente. As integrais de Feynman são então definidas como funções analíticas do espaço-tempo D -dimensional, e os infinitos aparecem como singularidades da forma $\frac{1}{\epsilon}$, onde $\epsilon = 3 - D$, quando $D \rightarrow 3$ [51]. Assim, numa determinada ordem de perturbação, a função de Green $G(\epsilon)$ conterá pólos em ϵ , de modo que pode ser expandida em série de Laurent

$$G(\epsilon) = \frac{G_i}{\epsilon^i} + \frac{G_{i-1}}{\epsilon^{i-1}} + \dots + \frac{G_1}{\epsilon} + \tilde{G}(\epsilon) \quad , \quad (1.7)$$

onde $\tilde{G}(\epsilon)$ é finito para $\epsilon \rightarrow 0$. Os contra-termos são então construídos de maneira a subtrair os termos de pólo em $G(\epsilon)$, deixando $\tilde{G}(\epsilon)$ como a função de Green subtraída.

Como comentado acima, na regularização dimensional os pólos ocorrem nas integrais de Feynman quando D (dimensão do espaço-tempo na teoria regularizada) for igual a três. Por outro lado, de acordo com [52], os pólos de um gráfico genérico γ aparecem na forma $\Gamma(-\frac{d(\gamma)}{2})$, isto é, para valores onde $-\frac{d(\gamma)}{2} = 0, -1, -2, \dots$. Usando (1.5) para $L = 1$ encontramos $d(\gamma) = 3 - n_A - n_F$. Entretanto, para construirmos um diagrama de 1-loop devemos ter no mínimo $n_A + n_F = 2$, o que nos levaria a $d(\gamma) = 1$.

portanto livre de pólo. Por outro lado, as divergências logaritmicas ($d(\gamma) = 0$), que em geral estão contidas nos gráficos de 1-loop, são ímpares na variável de integração, e portanto, se anulam por integração simétrica. Consequentemente, uma característica desta regularização em três dimensões é o fato que as integrais de Feynman em 1-loop, que são formalmente divergentes por contagem de potência, são de fato finitas uma vez que nenhum pólo ocorre quando $D = 3$. Assim, ao usarmos esta regularização os diagramas efetivamente divergentes são aqueles a partir de 2-loops.

1.3 O Grupo de Renormalização e a Teoria Efetiva

Uma prescrição de renormalização consiste em usarmos um procedimento de regularização que isole os infinitos dos diagramas de Feynman e uma maneira sistemática de remover as divergências e definir os parâmetros renormalizados da teoria, isto é, especificar uma escala de momento μ na qual as subtrações dos infinitos são feitas. Entretanto, quando adotamos o formalismo de contra-termos e subtrações, existe uma liberdade em como separar a Lagrangeana não renormalizada numa parte renormalizada e a outra que contém os contra-termos. Embora esta arbitrariedade não leve a nenhuma consequência física, pois todos os procedimentos deverão levar ao mesmo resultado, eles podem diferir na definição dos parâmetros da teoria. Existe portanto uma simetria associada com a invariância das amplitudes renormalizadas quando se muda o ponto de subtração μ , ou seja, um grupo de transformações envolvendo μ que deixam os resultados físicos inalterados. Essas transformações são chamadas de grupo de renormalização (GR), e dependendo da escolha das condições de renormalização empregada, existe uma variedade de formas de equações do GR [53]. Uma das principais utilidades da equação do GR é na discussão do comportamento assintótico de uma teoria quântica de campos para pequenos e grandes momentos.

Para modelos renormalizáveis, a equação de t'Hooft-Weinberg [45, 48] é a equação do GR que é derivada do esquema de subtração minimal. Esta equação é frequentemente chamada de equação independente da massa, pois as funções do grupo de renormalização que aparecem na equação são independentes dos parâmetros de massa da teoria.

Por simplicidade, ignoremos inicialmente a não renormalizabilidade da teoria, ima-

ginando que a renormalização da massa e das constantes de acoplamento em (1.1) sejam suficientes para tornar as funções de Green bem definidas. Para derivarmos a equação de t'Hooft-Weinberg é conveniente introduzirmos as constantes de acoplamentos e o parâmetro de renormalização μ através das relações $G \rightarrow G\mu^\epsilon$ e $\alpha \rightarrow \alpha\mu^\epsilon$, G possui dimensão de inverso de massa e $\epsilon = 3-D$ é tomado zero no final dos cálculos. Partimos em seguida da relação usual entre as funções de vértice fermiônicas não renormalizadas de N pontos (gráficos 1PI), $\Gamma^{(N)}(p_i, G, \alpha, m, \epsilon)$, com a renormalizada $\Gamma_R^{(N)}(p_i, G_R, \alpha_R, m_R, \mu)$, onde p_i representa os N momentos $p_1, p_2, \dots, p_N$, dada por

$$\Gamma^{(N)}(p_i, G, \alpha, m, \epsilon) = Z_\psi^{-\frac{N}{2}}(\mu, \epsilon) \Gamma_R^{(N)}(p_i, G_R, \alpha_R, m_R, \mu) , \quad (1.8)$$

onde o subscrito R significa uma quantidade renormalizada, e usamos também o fator de renormalização $Z_\psi^{\frac{1}{2}}$ para cada linha externa fermiônica. Obviamente $\Gamma_R^{(N)}$ possui um limite finito quando $\epsilon \rightarrow 0$. A equação do GR é obtida de maneira muito simples se notarmos que $\Gamma^{(N)}$ em (1.8) é independente de μ , para G, α, m e ϵ fixos, isto é

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^{(N)} = 0 = \left(\mu \frac{d}{d\mu} Z_\psi^{-\frac{N}{2}} \right) \Gamma_R^{(N)} + Z_\psi^{-\frac{N}{2}} \mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_R^{(N)} . \quad (1.9)$$

Se expressarmos a derivada total do lado direito em termos de derivadas parciais,

$$\frac{d}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{\partial}{\partial G_R} \frac{\partial G_R}{\partial \mu} + \frac{\partial \alpha_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \alpha_R} + \frac{\partial m_R}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_R} ,$$

obtemos a seguinte equação

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + m_R \delta \frac{\partial}{\partial m_R} + \beta_G \frac{\partial}{\partial G_R} + \beta_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha_R} - N\gamma \right] \Gamma_R^{(N)} = 0 , \quad (1.10)$$

onde⁴

$$\beta_G(G, \alpha) = \mu \frac{\partial G}{\partial \mu} , \quad \beta_\alpha(G, \alpha) = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} , \quad m \delta(G, \alpha) = \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} , \quad \text{e} \quad \gamma(G, \alpha) = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_\psi}{\partial \mu} . \quad (1.11)$$

As expressões acima são chamadas de funções do grupo de renormalização, e nos informam como os parâmetros G, α e m se comportam quando fazemos uma mudança

⁴A partir deste momento, salvo o contrário, para não sobrecarregar a notação, $\Gamma^{(N)}, G, \alpha$ e m referem-se a quantidades renormalizadas.

no ponto de subtração μ . Em (1.11) β_G e β_α são as funções beta do acoplamento G e α , respectivamente.

É fácil verificar que se definirmos $G \rightarrow \frac{g}{\Lambda} \mu^\epsilon$, onde g faz o papel de constante de acoplamento adimensional e Λ é um parâmetro massivo, $\Gamma^{(N)}(p_i, g, \alpha, m, \mu)$ satisfará a equação

$$\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + g \frac{\partial}{\partial g} \right) \Gamma^{(N)}(p_i, g, \alpha, m, \mu) = 0 \quad , \quad (1.12)$$

Somando (1.10) e (1.12) temos

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + m \delta \frac{\partial}{\partial m} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - N \gamma \right] \Gamma^{(N)}(p_i, g, \alpha, m, \mu) = 0 \quad , \quad (1.13)$$

onde agora $\beta \rightarrow \beta + g = \mu \frac{\partial g}{\partial \mu}$. Observe que o que fizemos foi fixar β_g em ordem mais baixa como sendo igual a g . Nenhuma outra implicação ocorre com as funções do GR uma vez que Λ entra na expansão perturbativa apenas na combinação $\frac{g}{\Lambda}$, de maneira que todas as contribuições do termo de derivada em relação a Λ são eliminadas. Entretanto, a introdução do parâmetro massivo Λ nos permitirá construir uma teoria efetiva de uma maneira consistente. Note também que o procedimento acima é dependente da razão entre dois parâmetros massivos $\frac{m}{\Lambda}$, de maneira que as funções do grupo de renormalização terão a forma $\beta = \beta(g, \alpha, \frac{m}{\Lambda})$, $\delta = \delta(g, \alpha, \frac{m}{\Lambda})$ e $\gamma = \gamma(g, \alpha, \frac{m}{\Lambda})$.

Por outro lado, modelos não renormalizáveis requerem uma consideração especial uma vez que a forma da lagrangeana efetiva muda com a ordem de perturbação. Assim, rigorosamente falando, a equação (1.8) e portanto (1.13) só serão verdadeiras no caso onde $g = 0$. Para $g \neq 0$ a teoria é não renormalizável e o lado direito de (1.13) não é de fato verificada em todas as ordens de perturbação, uma vez que existem contribuições para $\Gamma^{(2)}$ e $\Gamma^{(4)}$ que não podem ser absorvidas em redefinições dos parâmetros de massa, função de onda e constante de acoplamento, como vimos na seção 1.4. Neste caso $\Gamma^{(2)}$ receberá contribuições, além daquelas já contidas em (1.8), da forma

$$\Gamma^{(2)} \sim D_1 \frac{g}{\Lambda} \alpha p^2 + \frac{g^2}{\Lambda^2} (D_2 m p^2 + D_3 \not{p} p^2) + \mathcal{O}\left(\frac{g^3}{\Lambda^3}\right) + \dots \quad ,$$

que advêm da contribuição dos diagramas 1.2(f) e 1.2(j) respectivamente (D_1 , D_2 e D_3 contém as divergências $\frac{1}{\epsilon}$). Analogamente, para $\Gamma^{(4)}$ temos

$$\Gamma^{(4)} \sim E_1 \frac{g^2}{\Lambda^2} \alpha \not{p} + E_2 \frac{g^3}{\Lambda^3} (m \not{p} + p^2) + \mathcal{O}(\frac{g^4}{\Lambda^4}) + \dots ,$$

correspondendo aos diagramas 1.3(g), 1.3(i), etc

Portanto, o lado direito de (1.13) seria proporcional a esses novos contra-termos para $N = 2$ e $N = 4$, respectivamente, tornando a equação do *GR* muito difícil de ser analisada. Contudo, se nos limitarmos à análise na região onde o parâmetro massivo Λ seja muito maior que qualquer momento externo e a massa do férmion ($m, p_i \ll \Lambda$), de maneira que os efeitos desses novos contra-termos possam ser efetivamente desprezados, as funções de Green ainda satisfariam (aproximadamente) a seguinte equação

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \delta m \frac{\partial}{\partial m} + \beta g \frac{\partial}{\partial g} + \beta_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - N\gamma \right] \Gamma^{(N)}(p_i, g, \alpha, m, \mu) \approx 0 \quad , \quad (1.14)$$

onde o símbolo $\approx$ significa igualdade na região onde todos os contra-termos diferentes daqueles já contidos em (1.1) podem ser desprezados.

No entanto, é bem conhecido que em 1-loop [21, 43], o acoplamento do campo de *CS* com férmions produz uma parcela ímpar por paridade na correção quântica da função ${}^5\langle 0|T A_\mu(x) A_\nu(y)|0\rangle$ (com ou sem o termo de *CS* presente inicialmente na lagrangeana). Por outro lado, como verificado nas referências [54, 55], em 2-loops não existe correção para a parcela ímpar por paridade, no cálculo do tensor de polarização. A partir desses resultados, Coleman e Hill provaram que em uma ampla classe de teorias⁶ em três dimensões, todas as correções para o termo de *CS* são identicamente nulas [56], a não ser àquela proveniente de 1-loop. Em particular, eles enfatizaram que o resultado é válido mesmo que interações não renormalizáveis estejam presentes na lagrangeana, desde que usemos uma regularização que preserve a invariância de gauge e de Lorentz. Extensões deste teorema podem ser encontradas nas referências [57].

⁵Veja a equação dezoito do apêndice C.

⁶O teorema foi demonstrado em condições bastante gerais, onde o campo abeliano de *CS* interage com campos escalares e espinoriais.

Em outras palavras, o teorema nos diz que a função beta do acoplamento de CS é identicamente nula ($\beta_0 \equiv 0$) de maneira que podemos escrever (1.14) como

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \delta m \frac{\partial}{\partial m} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} - N\gamma \right] \Gamma^{(N)}(p_i, g, \alpha, m, \mu) \approx 0. \quad (1.15)$$

Usando a equação acima juntamente com ajuda da análise dimensional podemos obter o comportamento assintótico de $\Gamma^{(N)}$. Designando por $\dim \Gamma^{(N)}$ a dimensão canônica⁷ de $\Gamma^{(N)}$ e como ela é uma função homogênea nas variáveis dimensionais p_i , m , Λ e μ , então por uma mudança de escala da forma $(p_i, m, \Lambda, \mu) \rightarrow s(p_i, m, \Lambda, \mu)$, temos

$$\Gamma^{(N)}(sp_i, sm, s\Lambda, s\mu, g, \alpha) = s^{\dim \Gamma^{(N)}} \Gamma^{(N)}(p_i, m, \Lambda, \mu, g, \alpha). \quad (1.16)$$

Usando o teorema de Euler para funções homogêneas podemos obter que a equação do GR que $\Gamma^{(N)}$ deverá satisfazer pela mudança de escala acima será

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + s \frac{\partial}{\partial s} + m \frac{\partial}{\partial m} \right] \Gamma^{(N)} = (\dim \Gamma^{(N)}) \Gamma^{(N)}. \quad (1.17)$$

Esta por sua vez pode ser combinada com (1.15) para obtermos uma outra equação que relacione a escala s com uma mudança em m e g (mas não em μ), isto é,

$$\left[-s \frac{\partial}{\partial s} + \dim \Gamma^{(N)} + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} + m (\delta(g) - 1) \frac{\partial}{\partial m} - N \gamma(g, \alpha) \right] \Gamma^{(N)} = 0, \quad (1.18)$$

⁷Por definição,

$$(2\pi)^D \delta(p_1 + p_2 + \dots + p_N) G_{\text{CON}}^{(N)}(p_1, p_2, \dots, p_N) = \int d^D x_1 \dots d^D x_N e^{-i \sum_i x_i p_i} \\ \times \langle 0 | T \psi(x_1) \dots \psi(x_{\frac{N}{2}}) \bar{\psi}(x_{\frac{N}{2}+1}) \dots \bar{\psi}(x_N) | 0 \rangle_{\text{CON}},$$

onde o subscrito CON quer dizer conexa. Por análise dimensional se obtêm facilmente que $\dim G_{\text{CON}}^{(N)} = N d_\psi - DN + D$. Como a dimensão de $\Gamma^{(N)}$ é a mesma que a das função de Green conexas, porém com as linhas externas amputadas, então

$$\dim \Gamma^{(N)} = \dim G_{\text{CON}}^{(N)} + N = D - N d_\psi,$$

com $d_\psi = \frac{D-1}{2}$.

que expressa o fato de que uma mudança em s deve ser compensada por uma mudança em m , g e um fator multiplicativo. A discussão da equação acima é simplificada se introduzirmos a constante de acoplamento efetiva (também chamada de carga generalizada) $\bar{g}(g, s)$ e a massa efetiva $\bar{m}(g, s)$, definidas como

$$s \frac{\partial \bar{g}}{\partial s}(g, s) = \beta(\bar{g}) \quad s \frac{\partial \bar{m}}{\partial s}(g, s) = m(\delta - 1) , \quad (1.19)$$

com as condições

$$\bar{g}(g, 1) = g \quad \bar{m}(g, 1) = m . \quad (1.20)$$

Usando estas definições, a solução de (1.18) pode ser escrita como [8, 40]

$$\Gamma^{(N)}(s p_i, m, g, \alpha, \mu) = s^{\dim \Gamma^{(N)}} e^{-N \int_1^s \frac{dx}{x} \gamma(\bar{g}(x, s), x)} \Gamma^{(N)}(p_i, \bar{m}(m, s), \bar{g}(g, s), \alpha, \mu) . \quad (1.21)$$

Esta forma de solução é às vezes usada para analisar o comportamento assintótico da amplitude de Feynman $\Gamma_R^{(N)}$ quando $s \rightarrow \infty$. Para este propósito devemos conhecer as propriedades de $\bar{g}(g, s)$ e da dimensão anômala como uma função do parâmetro s . Vemos então que a menos do fator multiplicativo, o comportamento assintótico da teoria é governado por $\bar{g}(g, s)$ e $\bar{m}(g, s)$. Note inicialmente que na teoria livre $\beta = \gamma = \delta = 0$, e o efeito sobre $\Gamma^{(N)}$ devido a uma transformação de escala nos parâmetros massivos é dado simplesmente pela dimensão canônica de $\Gamma^{(N)}$. Note também que se partíssemos de uma teoria sem massa, a densidade de lagrangeana seria invariante por essa transformação de escala, no entanto, o mesmo não acontece com as funções de Green uma vez que em geral β não é nulo. Por outro lado, a teoria assintótica será invariante de escala para algum valor de g^* de g se $\beta(g^*) = 0$ (isto é, g^* é um ponto fixo da teoria) e $m = 0$. Neste caso, para momentos não excepcionais⁸, a solução de (1.18) para γ constante e não nulo será

$$\begin{aligned} \Gamma^{(N)}(s p_i, g, \alpha, m, \mu) &= s^{\dim \Gamma^{(N)} - N \gamma(g^*, \alpha)} \Gamma^{(N)}(p_i, g^*, \alpha, m = 0, \mu) \\ &= s^{D - N(d_\psi + \gamma(g^*, \alpha))} \Gamma^{(N)}(p_i, g^*, \alpha, m = 0, \mu) , \end{aligned} \quad (1.22)$$

⁸Numa região euclidiana os momentos são ditos não excepcionais quando nenhuma soma dos p_i for igual a zero [39, 40].

de onde vemos que a dimensão canônica $\dim \Gamma^{(N)}$ é modificada por um fator adicional de $-\gamma(g^*, \alpha)$ para cada N campos, de modo que $\gamma(g^*, \alpha)$ desempenha o papel da dimensão anômala do campo ψ [58].

A solução de (1.19) requer o conhecimento de $\beta(\bar{g})$, que pode ser obtida através da teoria de perturbação. Os pontos fixos da teoria são particularmente importantes uma vez que na criticalidade ($m = 0$) a teoria é invariante de escala, conforme (1.22). Suponha então que o valor da constante de acoplamento efetiva $\bar{g}$ esteja próximo de um dos zeros não trivial de beta (a origem é sempre um zero de beta), então podemos escrever, supondo que beta possua zeros simples

$$s \frac{\partial \bar{g}}{\partial s}(g, s) = \beta(\bar{g}) \approx (\bar{g} - g^*) \beta'(g^*) , \quad (1.23)$$

cujas solução é

$$\bar{g} - g^* = \left(\frac{s}{c} \right)^{\beta'(g^*)} ,$$

sendo c uma constante de integração. Portanto, dependendo do sinal de $\beta'(g^*)$ temos as seguintes situações: 1) para $\beta'(g^*) < 0$, então $\bar{g} \rightarrow g^*$ quando $s \rightarrow \infty$, ou seja, o ponto fixo é estável no ultravioleta; 2) para $\beta'(g^*) > 0$, temos que $\bar{g} \rightarrow g^*$ se $s \rightarrow 0$, e o ponto fixo é estável no infravermelho. A natureza desses pontos fixos estão exemplificadas na figura 1.6.

1.4 As Funções do Grupo de Renormalização

Os coeficientes δ , β e γ na equação (1.14) são obtidos calculando a ação dos operadores diferenciais sobre as funções de vértices de dois e quatro pontos. Para a função de dois pontos, $\Gamma^{(2)}(p) = -[S_F(p)]^{-1} = i(\not{p} - m) + \Sigma$, onde Σ representa as inserções de auto-energia, temos que até a segunda ordem nos acoplamentos

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(p) &= i(\not{p} - m) + \frac{g}{\Lambda} \mu^\epsilon I_1^{(2)} + \alpha \mu^\epsilon I_2^{(2)} + \alpha^2 (1 - \mathcal{T}) \mu^{2\epsilon} I_3^{(2)} \\ &+ \frac{g\alpha}{\Lambda} (1 - \mathcal{T}) \mu^{2\epsilon} I_4^{(2)} + \frac{g^2}{\Lambda^2} (1 - \mathcal{T}) \mu^{2\epsilon} I_5^{(2)} , \end{aligned} \quad (1.24)$$

onde o limite de $\epsilon \rightarrow 0$ está subentendido. Na expressão acima $I_i^{(2)}$, $i = 1, \dots, 5$, denotam amplitudes de Feynman regularizadas. Os diagramas associados a $I_3^{(2)}$, $I_4^{(2)}$,

Figura 1.6: Exemplos da natureza dos pontos fixos. A origem e o ponto g_2 são pontos fixos infravermelho estável, enquanto que g_1 representa um ponto fixo ultravioleta estável.

e $I_5^{(2)}$ estão mostrados nas figuras 1.6, 1.7 e 1.8 respectivamente. $\mathcal{T}$ é um operador que remove o termo de pólo nas amplitudes sobre a qual ele atua. Como mencionado anteriormente, as amplitudes $I_1^{(2)}$ e $I_2^{(2)}$ que estão associadas à diagramas de 1-loop são finitas.

Analogamente, a função de quatro pontos, até a terceira ordem nos acoplamentos é dada por (omitimos aqui as contribuições que por contagem de potência são finitas, assim como os índices espinoriais)

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = & \mu^\epsilon \left[-i \frac{g}{\Lambda} + \frac{g}{\Lambda} \alpha \mu^\epsilon I_1^{(1)} + \frac{g^2}{\Lambda^2} \mu^\epsilon I_2^{(1)} + \frac{g}{\Lambda} \alpha^2 (1 - \mathcal{T}) \mu^{2\epsilon} I_3^{(1)} \right. \\ & \left. + \frac{g^2}{\Lambda^2} \alpha (1 - \mathcal{T}) \mu^{2\epsilon} I_4^{(1)} + \frac{g^3}{\Lambda^3} (1 - \mathcal{T}) \mu^{2\epsilon} I_5^{(1)} \right] \quad (1.25) \end{aligned}$$

sendo novamente que as amplitudes de 1-loop $I_1^{(1)}$ e $I_2^{(1)}$ são finitas devido ao uso da regularização dimensional.

De uma maneira geral, de acordo com (1.7), se $I_i^{(N)}$ representar uma amplitude regularizada de N linhas externas do tipo fermiônica, então, esquematicamente, $I_i^{(N)} = \text{pólo}_i^{(N)} + \text{finita}_i^{(N)}$, de maneira que a operação

$$\begin{aligned}
(1 - \mathcal{T}) \mu^{x\epsilon} I_i^{(N)} &= (1 - \mathcal{T}) e^{x\epsilon \ln \mu} (\text{pólo}_i^{(N)} + \text{finita}_i^{(N)}) \\
&= (1 - \mathcal{T}) (\text{pólo}_i^{(N)} + \text{finita}_i^{(N)} + x \ln \mu \text{Res}_i^{(N)} + \mathcal{O}(\epsilon)) \\
&= \text{finita}_i^{(N)} + x \ln \mu \text{Res}_i^{(N)} ,
\end{aligned} \tag{1.26}$$

onde $\text{Res}_i^{(N)}$ representa o resíduo de diagramas de N pontos, que são dados pelos coeficientes do termo $\frac{1}{\epsilon}$.

Para a função de dois pontos eles possuem a seguinte estrutura

$$\text{Res}_3^{(2)} = m A_3 + \not{p} B_3 , \quad \text{Res}_4^{(2)} = -i (m^2 A_4 + m \not{p} B_4 + \mathcal{O}(p^2)) ,$$

e

$$\text{Res}_5^{(2)} = - (m^3 A_5 + m^2 \not{p} B_5 + \mathcal{O}(p^2)) ,$$

onde A_i^s e B_i^s são constantes numéricas.

Para a função de quatro pontos temos,

$$\text{Res}_3^{(4)} = -i C_3 , \quad \text{Res}_4^{(4)} = -(m C_4 + \mathcal{O}(p)) , \quad \text{e} \quad \text{Res}_5^{(4)} = i(m^2 C_5 + \mathcal{O}(p^2)) , \tag{1.27}$$

onde C_i^s são constantes numéricas.

Deste modo, (1.24) e (1.25) podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}(p) &= i(\not{p} - m) + \frac{g}{\Lambda} \mu^\epsilon I_1^{(2)} + \alpha \mu^\epsilon I_2^{(2)} + \alpha^2 [\text{finita}_3^{(2)} \\
&\quad + 2 \ln \mu (m A_3 + \not{p} B_3)] + \frac{g}{\Lambda} \alpha [\text{finita}_4^{(2)} - 2i \ln \mu (m^2 A_4 + m \not{p} B_4)] + \\
&\quad + \frac{g^2}{\Lambda^2} [\text{finita}_5^{(2)} - 2 \ln \mu (m^3 A_5 + m^2 \not{p} B_5)] .
\end{aligned} \tag{1.28}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \mu^\epsilon \left[-i \frac{g}{\Lambda} + \frac{g}{\Lambda} \alpha \mu^\epsilon I_1^{(4)} + \frac{g^2}{\Lambda^2} \mu^\epsilon I_2^{(4)} + \frac{g}{\Lambda} \alpha^2 [\text{finita}_3^{(4)} - \right. \\
&\quad - 2i C_3 \ln \mu] + \frac{g^2}{\Lambda^2} \alpha [\text{finita}_4^{(4)} - 2m C_4 \ln \mu] \\
&\quad \left. + \frac{g^3}{\Lambda^3} [\text{finita}_5^{(4)} + 2i m^2 C_5 \ln \mu] \right] .
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Usando as expansões

$$\delta = \sum_{i,j} \delta_{i,j} g^i \alpha^j , \quad (1.30)$$

$$\gamma = \sum_{i,j} \gamma_{i,j} g^i \alpha^j , \quad (1.31)$$

e

$$\beta = \sum_{i,j} \beta_{i,j} g^i \alpha^j , \quad (1.32)$$

substituindo (1.28) e (1.29) em (1.14) e agrupando os termos proporcionais a m e $\not p$ obtemos⁹

$$\delta_{1,0} = \delta_{0,1} = \gamma_{1,0} = \gamma_{0,1} = 0 , \quad (1.33)$$

$$\delta_{0,2} = -2i(A_3 + B_3) , \quad \gamma_{0,2} = -iB_3 , \quad (1.34)$$

$$\delta_{1,1} = -2 \frac{m}{\Lambda} (A_4 + B_4) , \quad \gamma_{1,1} = -\frac{m}{\Lambda} B_4 , \quad (1.35)$$

$$\delta_{2,0} = 2i \frac{m^2}{\Lambda^2} (A_5 + B_5) , \quad \gamma_{2,0} = i \frac{m^2}{\Lambda^2} B_5 , \quad (1.36)$$

$$\beta_{1,0} = 1 , \quad \beta_{0,1} = \beta_{1,1} = \beta_{2,0} = \beta_{0,2} = 0 , \quad (1.37)$$

$$\beta_{1,2} = -4i B_3 - 2 C_3 , \quad (1.38)$$

$$\beta_{2,1} = 2i \frac{m}{\Lambda} C_4 - 4 \frac{m}{\Lambda} B_4 , \quad (1.39)$$

e

$$\beta_{3,0} = 2 \frac{m^2}{\Lambda^2} C_5 + 4i \frac{m^2}{\Lambda^2} B_5 . \quad (1.40)$$

⁹Note que até a ordem que estamos indo não existe mistura entre as contribuições de β com γ e δ , ou seja, as funções δ e γ são completamente determinadas pela função de vértice de dois pontos.

Assim, para encontrarmos as funções do grupo de renormalização precisamos dos coeficientes A_i , B_i e C_i ($i = 3, 4, 5$). Isto será feito nas próximas seções.

Figura 1.7: Diagramas de ordem α^2 que contribuem para a auto-energia do férmion.

1.4.1 Função de Dois Pontos

Ordem α^2

Nesta ordem temos três diagramas que contribuem para a auto-energia do férmion, que estão mostrados na figura 1.7. Como eles divergem linearmente no ultra-violeta, podemos usar a seguinte decomposição para a parcela de pólo,

$$\text{Parte de Pólo} = \frac{(A_3(i) \not{m} + B_3(i) \not{p})}{\epsilon}, \quad (1.41)$$

onde $i = a, b, c$ representam as três contribuições para a auto-energia. Para $i = a$, que corresponde ao diagrama (a) da figura 1.7, temos a seguinte forma analítica,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_3^{(2)}(a) &= -4\pi^2 \epsilon_{\rho\mu\lambda} \epsilon_{\nu\theta\alpha} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \left[\gamma^\rho \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\theta \right] \\ &\times \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{i}{\not{k}_2 - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k}_2 - \not{k}_1 - m} \right) \frac{k_2^\lambda}{k_1^2} \frac{k_1^\alpha}{k_1^2}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

onde o sinal negativo refer-se ao "loop" fermiônico, e o símbolo Reg significa que a expressão acima deve estar regularizada. Para obtermos apenas a parcela de pólo podemos escrever (1.42) como.

$$\begin{aligned}
I_3^{(2)}(a) &= 4\pi^2 i \epsilon_{\rho\mu\lambda} \epsilon_{\nu\theta\alpha} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} k_1^\lambda k_1^\alpha \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k}_2 + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 - \not{k}_1 + m)] \\
&\quad \times \frac{[\gamma^\rho (\not{p} - \not{k}_1 + m) \gamma^\theta]}{(k_2^2 - m^2) [(k_2 - k_1)^2 - m^2] [(p - k_1)^2 - m^2] (k_1^2)^2} \\
&= (m A_3(a) + \not{p} B_3(a)) \frac{1}{\epsilon}, \tag{1.43}
\end{aligned}$$

onde no lado direito introduzimos o operador $\mathcal{T}$ que extrai a parte de pólo gerada pela regularização. Os coeficientes A_3 e B_3 são então dados por

$$\begin{aligned}
\frac{A_3(a)}{\epsilon} &= \frac{1}{2m} \text{Tr} I_3^{(2)}(a)|_{p=0} = \frac{2i\pi^2}{m} \epsilon_{\rho\mu\lambda} \epsilon_{\nu\theta\alpha} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} k_1^\lambda k_1^\alpha \\
&\quad \times \frac{\text{Tr} [\gamma^\rho (-\not{k}_1 + m) \gamma^\theta \text{Tr} (\gamma^\mu (\not{k}_2 + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 - \not{k}_1 + m))]}{(k_2^2 - m^2) [(k_2 - k_1)^2 - m^2] (k_1^2 - m^2) (k_1^2)^2}, \tag{1.44}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{B_3(a)}{\epsilon} &= \frac{1}{2p^2} \text{Tr} (I_3^{(2)}(a) \not{p}) = \frac{2i\pi^2}{p^2} \epsilon_{\rho\mu\lambda} \epsilon_{\nu\theta\alpha} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} k_1^\lambda k_1^\alpha \\
&\quad \times \frac{\text{Tr} [\gamma^\rho (\not{p} - \not{k}_1 + m) \gamma^\theta \not{p} \text{Tr} (\gamma^\mu (\not{k}_2 + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 - \not{k}_1 + m))]}{(k_2^2 - m^2) [(k_2 - k_1)^2 - m^2] [(p - k_1)^2 - m^2] (k_1^2)^2}. \tag{1.45}
\end{aligned}$$

A implementação da regularização dimensional adotada por nós se efetua da seguinte maneira: usamos as identidades $\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\beta} \gamma_\beta$ e $\epsilon_{\mu\alpha\beta} \epsilon^{\mu\theta\rho} = \delta_\alpha^\theta \delta_\beta^\rho - \delta_\alpha^\rho \delta_\beta^\theta$ e as propriedades das operações de traço diretamente em $D = 3$, ou seja, todas as possíveis contrações com o tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ e com as matrizes γ_μ serão feitas em três dimensões. Após isso, os integrandos serão promovidos para D dimensões e calculados com as regras usuais [39, 40]. Este procedimento é prático e livre de ambiguidades no que se refere à parcela divergente, pelo menos até a ordem levada em consideração. Dificuldades surgem quando se tenta estender para dimensões arbitrárias um objeto essencialmente tridimensional, como é o caso do tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho}$. Esse problema tem sido discutido sob várias perspectivas por muitos autores [59]. Entretanto, ligeiras mudanças nas regras adotadas neste trabalho não afetam o resultado da parcela de pólo, pois os diagramas de 1-loop são finitos e os de 2-loops apresentam pólos simples.

Por exemplo, o uso de regras estendidas tal como $\gamma^\mu \gamma_\mu = D$, podem induzir apenas termos finitos no cálculo dos diagramas.

Seguindo então este procedimento, as equações (1.44) e (1.45) tomam a forma

$$\begin{aligned} \frac{A_3(a)}{\epsilon} &= \frac{1}{2m} \text{Tr} I_3^{(2)}(a)|_{p=0} = \frac{2i\pi^2}{m} \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \\ &\times \frac{-8m^3 k_1^2 - 8m(k_1^2)^2 - 8mk_1^2(k_1 \cdot k_2) + 8m(k_1 \cdot k_2)^2}{(k_2^2 - m^2) [(k_2 - k_1)^2 - m^2] [k_1^2 - m^2] (k_1^2)^2} . \end{aligned} \quad (1.46)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{B_3(a)}{\epsilon} &= \frac{1}{2p^2} \text{Tr}(I_3^{(2)}(a) \not{p}) = \frac{2i\pi^2}{p^2} \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \\ &\times \frac{\text{Numerador}}{(k_2^2 - m^2) [(k_2 - k_1)^2 - m^2] [(p - k_1)^2 - m^2] (k_1^2)^2} . \end{aligned} \quad (1.47)$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Numerador} &= -16 \epsilon_{\rho\mu\lambda} \epsilon_{\nu\theta\alpha} k_1^\rho k_2^\mu p^\lambda k_1^\nu k_2^\theta p^\alpha - 16m^2 k_1^2 (k_1 \cdot p) - 8k_1^2 (k_1 \cdot k_2) (k_1 \cdot p) \\ &+ 8m^2 (k_1 \cdot p)^2 + 8(k_1 \cdot k_2) (k_1 \cdot p)^2 - 8(k_1 \cdot p)^2 k_2^2 - 8(k_1 \cdot k_2)^2 p^2 \\ &+ 8k_1^2 k_2^2 p^2 + 8(k_1 \cdot k_2)^2 (k_1 \cdot p) . \end{aligned} \quad (1.48)$$

É oportuno neste momento adotarmos o seguinte procedimento para o cálculo do termo de pólo das integrais. O primeiro passo é usar a parametrização (A.20) ou (A.21), dependendo do caso, para reduzir os denominadores contendo a variável de integração em um único denominador. Uma vez feito isto, o denominador será uma função quadrática da variável de integração. Em seguida completamos o quadrado do denominador de modo que o mesmo toma a forma $[(k_2 \pm f_1 \hat{p})^2 - \Delta]$, onde f_1 é uma função dos parâmetros de Feynman e $\hat{p}$ representa o momento externo do primeiro loop, em geral uma função de k_1 . Fazemos a mudança de variável $k_2 \rightarrow k_2 \mp f_1 \hat{p}$ e eliminamos os termos ímpares no numerador, que por integração simétrica são nulos. Após a integração em k_2 , que fazemos com ajuda das fórmulas (A.23), (A.24) e (A.25), combinamos os denominadores que dependem de k_1 usando novamente (A.20), (A.21) ou (A.22). Completamos o quadrado do novo denominador, fazemos uma nova

mudança de variável (caso haja necessidade) da forma $k_1 \rightarrow k_1 \mp f_2 p$, onde f_2 é também uma função dos parâmetros de Feynman e p é o momento externo do segundo loop. Eliminamos os termos ímpares, integramos em k_1 e somente no final fazemos as integrações paramétricas.

Para ilustrar o procedimento acima faremos o cálculo detalhado do presente caso. A primeira parametrização de Feynman para $A_3(a)$ e $B_3(a)$ é

$$\frac{1}{(k_2^2 - m^2) [(k_2 - k_1)^2 - m^2]} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k_2 - xk_1)^2 - \Delta]^2} , \quad (1.49)$$

onde

$$\Delta = m^2 - x(1-x)k_1^2 . \quad (1.50)$$

Fazemos a translação $k_2 \rightarrow k_2 + xk_1$, eliminamos os termos ímpares e fazemos a integração em k_2 usando (A.23) e (A.24), de modo que

$$\begin{aligned} \frac{A_3(a)}{\epsilon} &= \mathcal{T} \frac{\pi^{(2-\frac{D}{2})}}{2^{D-3}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_1^2 - m^2) k_1^2} \\ &\times \left[\Gamma(1 - \frac{D}{2}) \Delta^{\frac{D}{2}-1} + \Gamma(2 - \frac{D}{2}) k_1^2 \Delta^{\frac{D}{2}-2} (2 + x - 2x^2) \right] . \end{aligned} \quad (1.51)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{B_3(a)}{\epsilon} &= -\mathcal{T} \frac{1}{p^2} \frac{\pi^{2-\frac{D}{2}}}{2^{D-1}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{k_1 \cdot p}{[(p - k_1)^2 - m^2] (k_1^2)^2} \\ &\times \left[4\Gamma(1 - \frac{D}{2}) \left((D-2)(k_1 \cdot p) - k_1^2 \right) \Delta^{\frac{D}{2}-1} + 8x(1-x) \right. \\ &\times \left. \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \left((k_1 \cdot p)k_1^2 - (k_1^2)^2 \right) \Delta^{\frac{D}{2}-2} \right] . \end{aligned} \quad (1.52)$$

Prosseguindo o nosso cálculo, poderíamos introduzir duas novas integrais paramétricas uma vez que há agora três denominadores diferentes que dependem de k_1 em cada um dos termos das expressões acima. Entretanto, como o resultado não depende de m e estamos interessados apenas na parte de pólo das amplitudes, podemos modificar a dependência sobre m em alguns denominadores. Por exemplo, no caso de $A_3(a)$ podemos substituir, sem mudar o resultado final, $\frac{1}{(k_1^2 - m^2) k_1^2} \rightarrow \frac{1}{(k_1^2 - m^2)^2}$.

Similarmente para $B_3(a)$ podemos tomar $m = 0$ em (1.50). Isto facilita os cálculos das parcelas de pólo e nos permite usar apenas uma integral paramétrica ao invés de duas. Seguindo esta receita temos que a segunda parametrização para $A_3(a)$ será

$$\frac{1}{\Delta^a (k_1^2 - m^2)^2} = \frac{\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 dy \frac{(1-y) y^{\alpha-1}}{a^{\alpha+2} [k_1^2 - \Delta_1]^{\alpha+2}} , \quad (1.53)$$

onde $a = 1 - x(1-x)y - y$ e $\Delta_1 = \frac{1-2y}{a} m^2$. Fazendo a integração em k_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{A_3(a)}{\epsilon} &= \mathcal{T} \frac{\pi^{2-D}}{2^{2D-3}} \Gamma(3-D) \int_0^1 dx \int_0^1 dy (1-y) \Delta_1^{D-3} \\ &\times \left[\frac{y^{-\frac{D}{2}}}{a^{3-\frac{D}{2}}} + \frac{D}{2} (2+x-2x^2) \frac{y^{1-\frac{D}{2}}}{a^{4-\frac{D}{2}}} \right] . \end{aligned} \quad (1.54)$$

Substituindo o valor de a , usando que $\Gamma(3-D) = \frac{1}{\epsilon} + \text{finito}$, e fazendo as integrações paramétricas obtemos

$$A_3(a) = -\frac{i}{2} . \quad (1.55)$$

Para $B_3(a)$, como dissemos anteriormente, tomamos $m = 0$ em (1.50), de maneira que podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{B_3(a)}{\epsilon} &= -\mathcal{T} \frac{1}{p^2} \frac{\pi^{2-\frac{D}{2}}}{2^{2D-1}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{k_1 \cdot p}{[(p-k_1)^2 - m^2]} \\ &\times \left[\frac{4}{[x(x-1)]^{1-\frac{D}{2}}} \Gamma(1-\frac{D}{2}) [(D-2)(k_1 \cdot p) - k_1^2] (k_1^2)^{\frac{D}{2}-3} \right. \\ &\left. + \frac{8x(1-x)}{[x(x-1)]^{2-\frac{D}{2}}} \Gamma(2-\frac{D}{2}) [(k_1 \cdot p) k_1^2 - (k_1^2)^2] (k_1^2)^{\frac{D}{2}-4} \right] . \end{aligned} \quad (1.56)$$

A segunda parametrização tem a forma

$$\frac{1}{[(p-k_1)^2 - m^2] (k_1^2)^{\alpha+2}} = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(\alpha+2)} \int_0^1 dy \frac{(1-y)^{\alpha+1}}{[(k_1 - yp)^2 - \Delta_1]^{\alpha+3}} , \quad (1.57)$$

onde $\Delta_1 = y m^2 - y(1-y) p^2$. Fazemos a translação $k_1 \rightarrow k_1 + yp$, eliminamos os termos ímpares e fazemos a integração em k_1 obtendo

$$\begin{aligned} \frac{B_3(a)}{\epsilon} &= -\mathcal{T} \frac{\pi^{2-D}}{2^{2D-3}} \Gamma(3-D) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{(1-y)^{2-\frac{D}{2}} \Delta_1^{D-3}}{[x(x-1)]^{1-\frac{D}{2}}} \left[(1-5y) \frac{\Gamma(1-\frac{D}{2})}{\Gamma(3-\frac{D}{2})} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\Gamma(2-\frac{D}{2}) \Gamma(5-\frac{D}{2})}{[\Gamma(4-\frac{D}{2})]^2} (1-y)(1-7y) \right] . \end{aligned} \quad (1.58)$$

Fazendo as integrações paramétricas e retendo apenas a parcela de pólo encontramos

$$B_3(a) = -\frac{i}{24} . \quad (1.59)$$

Para $i = b$, que corresponde ao diagrama (b) da figura 1.7 temos a seguinte forma analítica,

$$\begin{aligned} I_3^{(2)}(b) &= 4\pi^2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\rho} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2 - m} \gamma^\beta \right. \\ &\quad \times \left. \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\nu \right] \frac{k_1^\lambda k_2^\rho}{k_1^2 k_2^2} = -4i\pi^2 \epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\rho} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} k_1^\lambda k_2^\rho \\ &\quad \times \frac{[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma^\beta (\not{p} - \not{k}_1 + m) \gamma^\nu]}{[(p - k_1)^2 - m^2]^2 [(p - k_1 - k_2)^2 - m^2] k_1^2 k_2^2} \\ &= (m A_3(b) + \not{p} B_3(b)) \frac{1}{\epsilon} , \end{aligned} \quad (1.60)$$

onde, como anteriormente, introduzimos o operador $\mathcal{T}$ que retira a parte de pólo gerada pela regularização.

As constantes $A_3(b)$ e $B_3(b)$ são dadas por,

$$\begin{aligned} \frac{A_3(b)}{\epsilon} &= \frac{1}{2m} \text{Tr} I_3^{(2)}(b)|_{p=0} = \frac{-2i\pi^2}{m} \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \\ &\quad \times \frac{8m^3(k_1 \cdot k_2) - 8mk_1^2(k_1 \cdot k_2) - 16mk_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - m^2)^2 [(k_1 + k_2)^2 - m^2] k_1^2 k_2^2} , \end{aligned} \quad (1.61)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{B_3(b)}{\epsilon} &= \frac{1}{2p^2} \text{Tr}(I_3^{(2)}(b) \not{p}) = \frac{-2i\pi^2}{p^2} \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \\ &\quad \times \frac{\text{Numerador}}{[(p - k_1)^2 - m^2]^2 [(p - k_1 - k_2)^2 - m^2] k_1^2 k_2^2} , \end{aligned} \quad (1.62)$$

onde

$$\begin{aligned}
\text{Numerador} = & -2\epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\rho} k_1^\mu k_2^\nu p^\lambda k_1^\alpha k_2^\beta p^\rho - 8k_1^2(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p) + 16(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p)^2 \\
& - 8k_1^2 k_2^2 (k_1 \cdot p) + 14k_2^2 (k_1 \cdot p)^2 + 8k_1^2 (k_1 \cdot p)(k_2 \cdot p) + 4(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p)(k_2 \cdot p) \\
& - 16(k_1 \cdot p)^2 (k_2 \cdot p) - 2k_1^2 (k_2 \cdot p)^2 - 2(k_1 \cdot k_2)^2 p^2 - 8(k_1 \cdot k_2)(k_1 \cdot p)p^2 \\
& + 2k_1^2 k_2^2 p^2 - 8(k_1 \cdot p)k_2^2 p^2 + 8(k_1 \cdot p)(k_2 \cdot p)p^2 .
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Note que o primeiro termo do numerador de (1.61) é finito, de maneira que podemos escrever, seguindo o mesmo procedimento anterior

$$\begin{aligned}
\frac{A_3(b)}{\epsilon} &= 16i\pi^2 \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{(k_1 \cdot k_2) + 2k_2^2}{(k_1^2 - m^2)^2 [(k_1 + k_2)^2 - m^2] k_2^2} \\
&= \mathcal{T} \frac{3\pi^{2-D}}{2^{2D-4}} \Gamma(3-D) \int_0^1 dx \int_0^1 dy (1-y) \\
&\times \Delta_1^{D-3} \left[\frac{y^{-\frac{D}{2}}}{a^{3-\frac{D}{2}}} + \frac{1}{2} x(1-2x) \frac{y^{1-\frac{D}{2}}}{a^{4-\frac{D}{2}}} \right] ,
\end{aligned} \tag{1.64}$$

onde $\Delta_1 = \frac{[1-y(1+x)]}{a} m^2$ e $a = 1 - x(1-x)y - y$. Substituindo o valor de a e fazendo as integrações paramétricas encontramos que o termo de pólo é

$$A_3(b) = -\frac{i}{4} . \tag{1.65}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\frac{B_3(b)}{\epsilon} &= \mathcal{T} \frac{\pi^{2-D}}{2^{2D-4}} \Gamma(3-D) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^y dz (1-y) \Delta_1^{D-3} \left[\frac{z^{-\frac{D}{2}}}{a^{4-\frac{D}{2}}} \left(30 \frac{b}{a} - 12 \right) \right. \\
&+ \left. \frac{\Gamma(5-\frac{D}{2})}{\Gamma(4-\frac{D}{2})} x(1-x) \left(4(D+4) \frac{b}{a} - 16 \right) \frac{z^{1-\frac{D}{2}}}{a^{5-\frac{D}{2}}} \right] ,
\end{aligned} \tag{1.66}$$

onde $\Delta_1 = \frac{z}{a} m^2 - \frac{b}{a} p^2 (1 - \frac{b}{a})$, $a = 1 - zx(1-x) - z$, $b = 1 - y - zx(1-x)$ e $c = 1 - y - xz$. Portanto,

$$B_3(b) = -\frac{i}{12} . \tag{1.67}$$

Para $i = c$, que corresponde ao diagrama (c) da figura 1.7 temos a seguinte forma analítica,

$$\begin{aligned}
I_3^{(2)}(c) &= 4\pi^2 \epsilon_{\mu\beta\lambda} \epsilon_{\alpha\nu\rho} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\alpha \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2 - m} \gamma^\beta \right. \\
&\times \left. \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma^\nu \right] \frac{k_1^\lambda k_2^\rho}{k_1^2 k_2^2} = -4i\pi^2 \epsilon_{\mu\beta\lambda} \epsilon_{\alpha\nu\rho} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} k_1^\lambda k_2^\rho \\
&\times \frac{\left[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}_1 + m) \gamma^\alpha (\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2 + m) \gamma^\beta (\not{p} - \not{k}_2 + m) \gamma^\nu \right]}{[(p - k_1)^2 - m^2] [(p - k_1 - k_2)^2 - m^2] [(p - k_2)^2 - m^2] k_1^2 k_2^2} \\
&= (m A_3(c) + \not{p} B_3(c)) \frac{1}{\epsilon} , \tag{1.68}
\end{aligned}$$

de maneira que as constantes $A_3(c)$ e $B_3(c)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
\frac{A_3(c)}{\epsilon} &= \frac{1}{2m} \text{Tr} I_3^{(2)}(c)|_{p=0} = \frac{2i\pi^2}{m} \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \\
&\times \frac{12 m^2 (k_1 \cdot k_2)^2 - 12 m k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - m^2)^2 [(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2) k_1^2 k_2^2} \tag{1.69}
\end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned}
\frac{B_3(c)}{\epsilon} &= \frac{1}{2p^2} \text{Tr}(I_3^{(2)}(c) \not{p}) = \frac{2i\pi^2}{p^2} \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \\
&\times \frac{\text{Numerador}}{[(p - k_1)^2 - m^2] [(p - k_1 - k_2)^2 - m^2] [(p - k_2)^2 - m^2] k_1^2 k_2^2} , \tag{1.70}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\text{Numerador} &= 2 \epsilon_{\mu\beta\lambda} \epsilon_{\alpha\nu\rho} k_1^\mu k_2^\beta p^\lambda k_1^\alpha k_2^\nu p^\rho - 4 k_1^2 (k_1 \cdot p) k_2^2 + 4 (k_1 \cdot k_2) (k_1 \cdot p) k_2^2 \\
&- 6 (k_1 \cdot p)^2 k_2^2 + 4 k_1^2 (k_1 \cdot k_2) (k_2 \cdot p) + 4 (k_1 \cdot k_2) (k_1 \cdot p) (k_2 \cdot p) \\
&- 4 k_1^2 k_2^2 (k_2 \cdot p) - 6 k_1^2 (k_2 \cdot p)^2 - 2 (k_1 \cdot k_2)^2 p^2 + 10 k_1^2 k_2^2 p^2 . \tag{1.71}
\end{aligned}$$

Seguindo a receita anterior temos,

$$\begin{aligned}
\frac{A_3(c)}{\epsilon} &= \mathcal{T} \frac{9\pi^{2-\frac{D}{2}}}{2^{D-2}} \left(1 - \frac{1}{D}\right) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_1^2 - m^2) \Delta^{2-\frac{D}{2}}} \\
&= \mathcal{T} \frac{9\pi^{2-D}}{2^{2D-2}} \left(1 - \frac{1}{D}\right) \Gamma(3 - D) \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{z^{1-\frac{D}{2}}}{a^{3-\frac{D}{2}}} \Delta_1^{D-3} . \tag{1.72}
\end{aligned}$$

onde $\Delta_1 = \frac{(1-z-zy)}{a} m^2$ e $a = 1 - z - xz(1 - xy)$. Fazendo as integrações paramétricas e retendo apenas a parcela de pólo,

$$A_3(c) = \frac{-3i}{8} . \quad (1.73)$$

Semelhantemente,

$$\begin{aligned} \frac{B_3(c)}{\epsilon} &= -\mathcal{T} \frac{\pi^{2-\frac{D}{2}}}{2^{D-2}} \frac{1}{p^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy y \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{1}{[(p - k_1)^2 - m^2] k_1^2} \\ &\times \left[\frac{1}{4} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \left[(10D - 6 - 4y(D+2)) k_1^2 p^2 + (2(1-3D) + 4y(D+2)) (k_1 \cdot p)^2 \right. \right. \\ &+ \left. \left. 4(1-D) k^2 - 1(k_1 \cdot p) \right] \Delta^{\frac{D}{2}-2} - \frac{1}{2} \Gamma(3 - \frac{D}{2}) 4y^2 x (1 - x(2-y)) \right. \\ &\times \left. \left[(k_1 \cdot p)^2 k_1^2 - (k_1^2)^2 p^2 \right] \Delta^{\frac{D}{2}-3} \right] \\ &= -\mathcal{T} \frac{\pi^{2-D}}{2^{2D-2}} \Gamma(3-D) \int_0^1 dx \int_0^1 y dy \int_0^1 dt \int_0^1 dz \Delta_1^{D-3} \left[\frac{z^{1-\frac{D}{2}}}{a^{4-\frac{D}{2}}} \left(7 - 5\frac{b}{a} - 5y \right) \right. \\ &+ \left. \frac{\Gamma(5 - \frac{D}{2})}{\Gamma(4 - \frac{D}{2})} \frac{z^{2-\frac{D}{2}}}{a^{5-\frac{D}{2}}} (2xy^2 - 4x^2y^2 + 2x^2y^3) \right] . \end{aligned} \quad (1.74)$$

onde $\Delta_1 = \frac{d}{a} m^2 - p^2 [\frac{c}{a} - (\frac{b}{a})^2]$ com $a = 1 - xy(1 - xy)z - z$, $b = 1 - t - xy(1 - y)z$, $c = 1 - t - y(1 - y)z$ e $d = 1 - t - zy$.

Fazendo as integrais paramétricas e retendo apenas a parcela de pólo,

$$B_3(c) = \frac{i}{24} . \quad (1.75)$$

Somando esses resultados temos,

$$A_3 = A_3(a) + A_3(b) + A_3(c) = -\frac{5i}{4} \quad (1.76)$$

e

$$B_3 = B_3(a) + B_3(b) + B_3(c) = -\frac{i}{12} , \quad (1.77)$$

que representam as correções para a massa e função de onda dos férmions na ordem α^2 .

Figura 1.8: Diagramas de ordem $g\alpha$ que contribuem para a auto-energia do f3rmion.

Ordem $g\alpha$

Nesta ordem temos seis diagramas que contribuem para a auto-energia do f3rmion, que est3o mostradas na figura 1.8. Eles divergem quadraticamente no ultravioleta, e portanto, a parcela de p3lo pode ser escrita na forma¹⁰

$$\text{Parte de P3lo} = -i \frac{(A_4(i) m^2 + B_4(i) m \not{p})}{\epsilon}, \quad (1.78)$$

onde $i = a, b, c, d, e, f$.

Para $i = a$, que corresponde ao diagrama (a) da figura 1.8 temos a seguinte express3o

$$I_4^{(2)}(a) = 4\pi \epsilon_{\mu\nu\lambda} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\nu \text{Tr} \left(\frac{i}{\not{k}_2 - m} \right) \right] \frac{k_1^\lambda}{k_1^2}$$

¹⁰Observe que de acordo com a constru3o da teoria efetiva, o contra-termo proporcional a p^2 3 amortecido pelo fator $\frac{1}{\Lambda}$, que na situa3o $p \ll \Lambda$ pode ser desprezado.

$$= -i \left(m^2 A_4(a) + m \not{p} B_4(a) \right) \frac{1}{\epsilon} , \quad (1.79)$$

onde levamos em consideração o sinal negativo referente ao loop fermiônico. Observe que a expressão acima possui uma estrutura de produto, de modo que o uso da regularização dimensional o torna finito. isto é, essa amplitude não contém pólo em $D = 3$. Portanto,

$$A_4(a) = B_4(a) = 0 . \quad (1.80)$$

O mesmo argumento é válido para o diagrama (b) da figura 1.8, ou seja, temos também

$$A_4(b) = B_4(b) = 0 . \quad (1.81)$$

Com relação a figura (c) este também não contribui pois a correspondente expressão analítica é finita. Vejamos como isso ocorre. De acordo com a figura (c) temos

$$I_4^{(2)}(c) = \epsilon_{\mu\nu\rho} \mathcal{T} \frac{\partial}{\partial m} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k}_2 + m) \gamma^\nu (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m)]}{(k_2^2 - m^2) [(k_1 + k_2)^2 - m^2]} \frac{k_1^\rho}{k_1^2} . \quad (1.82)$$

Usando as fórmulas das operações de traço que se encontram no apêndice A temos que

$$\begin{aligned} \text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k}_2 + m) \gamma^\nu (\not{k}_1 + \not{k}_2 + m)] &= -2i m \epsilon^{\mu\nu\lambda} k_{1\lambda} + 2g^{\mu\nu} (m^2 + k_1 \cdot k_2 - k_2^2) \\ &+ 4k_2^\mu k_2^\nu - 2k_2^\mu k_1^\nu - 2k_1^\mu k_2^\nu . \end{aligned} \quad (1.83)$$

Portanto,

$$I_4^{(2)}(c) = -4i \mathcal{T} \frac{\partial}{\partial m} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{m}{(k_2^2 - m^2) [(k_1 + k_2)^2 - m^2]} = 0 , \quad (1.84)$$

uma vez que temos na expressão acima uma estrutura de produto de integrais de 1-loop. Consequentemente,

$$A_4(c) = B_4(c) = 0 \quad . \quad (1.85)$$

O mesmo argumento acima é aplicado no caso do diagrama (d) pois o momento externo não flui através do diagrama. logo

$$A_4(d) = B_4(d) = 0 \quad . \quad (1.86)$$

No caso do diagrama (e). devido ao teorema de Furry, este cancela-se por conjugação de carga. Assim,

$$A_4(e) = B_4(e) = 0 \quad . \quad (1.87)$$

Para o diagrama (f) temos

$$\begin{aligned} I_4^{(2)}(f) &= 4i\pi \epsilon_{\mu\nu\lambda} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \frac{i}{\not{k}_2 - \not{k}_1 - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k}_2 - m} \right] \frac{k_1^\lambda}{k_1^2} \\ &= 4\pi \epsilon_{\mu\nu\lambda} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}_1 + m) (\not{k}_2 - \not{k}_1 + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 + m) k_1^\lambda}{[(p - k_1)^2 - m^2][(k_2 - k_1)^2 - m^2](k_2^2 - m^2) k_1^2} \\ &= -i \left(m^2 A_4(f) + m \not{p} B_4(f) \right) \frac{1}{\epsilon} \quad . \end{aligned} \quad (1.88)$$

Portanto as constantes $A_4(f)$ e $B_4(f)$ são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{A_4(f)}{\epsilon} &= \frac{i}{2m^2} \text{Tr} I_4^{(2)}(f)|_{p=0} = 2i \frac{\pi}{m^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \\ &\times \text{Tr} \frac{[\gamma^\mu (-\not{k}_1 + m) (\not{k}_2 - \not{k}_1 + m) \gamma^\nu (\not{k}_2 + m)]}{(k_1^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)[(k_2 - k_1)^2 - m^2]} \frac{k_1^\lambda}{k_1^2} \\ &= 2i \frac{\pi}{m^2} \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{-8im^2 k_1^2 - 4ik_1^2(k_1 \cdot k_2) + 4i(k_1 \cdot k_2)^2}{(k_1^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)[(k_2 - k_1)^2 - m^2] k_1^2} \\ &= \frac{9}{16\pi} \frac{1}{\epsilon} \quad . \end{aligned} \quad (1.89)$$

e

$$\frac{B_4(f)}{\epsilon} = \frac{i}{2mp^2} \text{Tr}(I_4^{(2)}(f) \not{p}) = 2i \frac{\pi}{mp^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}_1 + m)(\not{k}_2 - \not{k}_1 + m)\gamma^\nu (\not{k}_2 + m) \not{p}] \frac{k_1^\lambda}{k_1^2}}{[(p - k_1)^2 - m^2][(k_2 - k_1)^2 - m^2](k_2^2 - m^2)} \frac{k_1^\lambda}{k_1^2} \\
& = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{\epsilon} .
\end{aligned} \tag{1.90}$$

Figura 1.9: Diagramas de ordem g^2 que contribuem para a auto-energia do frmion.

Ordem g^2

Nesta ordem apenas dois diagramas contribuem. Eles esto mostrados na figura 1.9. Como eles possuem uma divergncia cbica a parcela de plo ter a decomposio¹¹

$$\text{Parte de Plo} = -\frac{(A_5(i) m^3 + B_5(i)m^2 \not{p})}{\epsilon} , \tag{1.91}$$

onde $i = a, b$ representam as duas contribuies para a auto-energia. Assim,

$$\begin{aligned}
I_5^{(2)} &= I_5^{(2)}(a) + I_5^{(2)}(b) \\
&= -4iT \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \frac{\not{p} + \not{k}_1 + m}{[(p + k_1)^2 - m^2](k_2^2 - m^2)[(k_2 - k_1)^2 - m^2]} \\
&\quad \times \{(\not{k}_2 + m)(\not{k}_2 - \not{k}_1 + m) - \text{Tr}[(\not{k}_2 + m)(\not{k}_2 - \not{k}_1 + m)]\} \\
&= -\frac{(A_5 m^3 + B_5 m^2 \not{p})}{\epsilon} .
\end{aligned} \tag{1.92}$$

Aps um longo clculo encontramos que as constantes A_5 e B_5 so dadas por

¹¹Aqui tambm sero desprezados contra-termos do tipo $m p^2$ e $\not{p} p^2$, pois eles so amortecidos pelo fator $\frac{1}{\Lambda^3}$.

$$A_5 = -\frac{1}{2m^3} \text{Tr} I_5^{(2)}|_{p=0} = -\frac{3i}{16\pi^2} , \quad (1.93)$$

e

$$B_5 = -\frac{1}{2m^2 p^2} \text{Tr}(I_5^{(2)} \not{p}) = -\frac{5i}{48\pi^2} . \quad (1.94)$$

1.4.2 Funções de Quatro Pontos

Devido à estrutura tensorial da função de vértice $\Gamma^{(4)}$, adotaremos o seguinte procedimento para o cálculo dos coeficientes C_3 , C_4 e C_5 em (1.29). Como precisamos apenas da parte constante do resíduo, os cálculos serão feitos para momento externo igual a zero. Suponha que temos um gráfico genérico como aquele mostrado na figura abaixo.

Figura 1.10: Gráfico genérico com quatro linhas externas fermiônicas.

A e B referem-se aos propagadores e vértices (escalar ou vetorial) associados às duas linhas de férmions, e C representa os outros fatores. Em dois loops a amplitude antisimetrizada deste diagrama é escrita como

$$I = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (A \otimes B) C = \text{pólo } \delta \otimes \delta + \text{finito} , \quad (1.95)$$

onde explicitamos apenas a estrutura tensorial da parcela divergente e o símbolo $\otimes$ indica produto direto antisimetrizado, isto é,

$$A \otimes B = A_{\alpha_1 \alpha_2} B_{\alpha_3 \alpha_4} - A_{\alpha_1 \alpha_4} B_{\alpha_3 \alpha_2} \quad \text{e} \quad \delta \otimes \delta = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{\alpha_3 \alpha_4} - \delta_{\alpha_1 \alpha_4} \delta_{\alpha_3 \alpha_2} .$$

Multiplicando ambos os lados de (2.17) por $\delta \otimes \delta$ obtemos facilmente que

$$\text{pólo} = \frac{\mathcal{T}}{2} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} [\text{Tr}(A) \text{Tr}(B) - \text{Tr}(AB)] C . \quad (1.96)$$

Observe que até a ordem que estamos indo, terceira ordem nos acoplamentos, existem muitos diagramas. Sistemáticamente, em cada ordem de perturbação separaremos os diagramas em duas classes: com ou sem loop fermiônico. No caso dos diagramas sem loop, agruparemos de acordo com o número de linhas auxiliar de GN ou de CS ligadas nas duas linhas fermiônicas. Muitos diagramas se cancelam pelo teorema de Furry (este é o caso se no loop há um número ímpar de vértice do tipo CS). Outros diagramas apresentam estrutura de produto e portanto são finitos. Em cada ordem de perturbação, a título de exemplo, faremos o cálculo de um diagrama para mostrarmos o procedimento. Os resultados obtidos encontram-se resumidos nas tabelas 1.2 e 1.3, que mostram as contribuições das classes de diagramas para a parcela de pólo, sem e com o loop fermiônico respectivamente.

Ordem $g\alpha^2$

Um dos diagramas que contribuem nesta ordem é o mostrado na figura 1.11.

Figura 1.11: Gráfico que contribue na ordem $g\alpha^2$.

De acordo com a figura acima A , B e C são dados por

$$A = \gamma^\mu (-\not{k}_1 + m) \gamma^\alpha (-\not{k}_1 - \not{k}_2 + m) (-\not{k}_1 + m) \gamma^\nu .$$

$$B = \gamma^\beta (\not{k}_2 + m) .$$

e

$$C = 2 \times 4\pi^2 \frac{\epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\rho} k_1^\lambda k_2^\rho}{(k_1^2 - m^2)^2 [(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2) k_1^2 k_2^2} ,$$

onde 2 é o fator combinatorial¹². Fazendo as operações de traço e usando (1.96), o termo de pólo para este diagrama é

$$\text{pólo} = -4\pi^2 \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{-4(k_1 \cdot k_2)^2 + 4k_1^2 k_2^2}{(k_1^2 - m^2)^2 [(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2) k_1^2 k_2^2} . \quad (1.97)$$

Usando a parametrização

$$\frac{1}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_1^2 - m^2)^2} = 2 \int_0^1 dx \frac{1-x}{[(k_1 + x k_2)^2 - \Delta]^3} , \quad (1.98)$$

onde $\Delta = m^2 - x(1-x)k_2^2$, fazendo a translação $k_1 \rightarrow k_1 - x k_2$, e eliminando os termos ímpares, obtemos, após integrarmos em k_1

$$\begin{aligned} \text{pólo} &= -i \mathcal{T} \frac{2^{4-D}}{\pi^{\frac{D}{2}-2}} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \int_0^1 dx (1-x) \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k_2^2 - m^2) \Delta^{2-\frac{D}{2}}} \\ &= -i \mathcal{T} \frac{2^{4-2D}}{\pi^{D-2}} \Gamma(3-D) \int_0^1 dx (1-x) \int_0^1 dy \frac{y^{1-\frac{D}{2}}}{a^{3-\frac{D}{2}}} \left(\frac{b}{a} m^2\right)^{D-3} , \end{aligned} \quad (1.99)$$

onde $a = 1 - y - yx(1-x)$ e $b = 1 - 2y$. Fazendo as integrações paramétricas e retendo apenas a parcela de pólo, encontramos

$$\text{pólo} = -\frac{1}{4\epsilon} . \quad (1.100)$$

Colecionando esses resultados (veja as tabelas 1.1 e 1.2) para o termo de pólo obtemos

$$C_3 = -\frac{7}{2} . \quad (1.101)$$

Ordem $g^2 \alpha$

Como exemplo de um diagrama que contribui nesta ordem, veja a figura abaixo.

¹²Note que temos ainda o diagrama espelho deste. Veja apêndice D.

Figura 1.12: Gráfico que contribue na ordem $g^2\alpha$.

De acordo com ela A , B e C são dados por

$$A = \gamma^\mu (-\not{k}_2 + m) ,$$

$$B = \gamma^\mu (\not{k}_2 + m) ,$$

e

$$C = 4 \times 2\pi \epsilon_{\mu\nu\lambda} k_2^\lambda \frac{\text{Tr}[(\not{k}_1 + m)(\not{k}_1 + \not{k}_2 + m)]}{(k_1^2 - m^2)[(k_1 + k_2)^2 - m^2](k_2^2 - m^2)^2 k_2^2} ,$$

onde 4 é o fator combinatorial e levamos em consideração o sinal negativo devido ao loop fermiônico. Usando a parametrização

$$\frac{1}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2](k_1^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k_1 + x k_2)^2 - \Delta]^2} ,$$

onde $\Delta = m^2 - x(1-x)k_2^2$, fazendo a translação $k_1 \rightarrow k_1 - x k_2$, eliminando os termos ímpares e fazendo a integração no momento, obtemos

$$\begin{aligned} \text{pólo} &= \mathcal{T} \frac{2^{4-D}}{\pi^{\frac{D}{2}-1}} \int_0^1 dx \left[\frac{D}{2} \Gamma(1 - \frac{D}{2}) \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{m}{(k_2^2 - m^2)^2 \Delta^{1-\frac{D}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{m^3 - x(1-x)k_2^2 m}{(k_2^2 - m^2)^2 \Delta^{2-\frac{D}{2}}} \right] \\ &= m \mathcal{T} \frac{2^{3-2D}}{\pi^{D-1}} D \Gamma(3-D) \int_0^1 dx \left[\int_0^1 dy \frac{y^{-\frac{D}{2}} (1-y)}{a^{3-\frac{D}{2}}} (\frac{b}{a} m^2)^{D-3} \right. \\ &\quad \left. + x(1-x) \int_0^1 dy \frac{y^{1-\frac{D}{2}} (1-y)}{a^{4-\frac{D}{2}}} (\frac{b}{a} m^2)^{D-3} \right] , \end{aligned} \quad (1.102)$$

onde, como anteriormente, $a = 1 - y - yx(1 - x)$ e $b = 1 - 2y$. Fazendo as integrações paramétricas e retendo apenas a parcela de pólo, temos

$$\text{pólo} = \frac{i}{2\pi\epsilon} m . \quad (1.103)$$

Reunindo esses resultados do termo de pólo obtemos

$$C_4 = \frac{11i}{2\pi} . \quad (1.104)$$

Ordem g^3

Um dos diagramas que contribuem nesta ordem é o mostrado na figura 1.13.

Figura 1.13: Gráfico que contribue na ordem g^3 .

De acordo com a figura acima A , B e C são dados por

$$A = (k_2 + m)(-k_1 + m) ,$$

$$B = (k_1 + k_2 + m)(k_1 + m) .$$

e

$$C = 8 \frac{1}{(k_1^2 - m^2)^2 [(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2)} ,$$

onde 8 é o fator combinatorial. Fazendo as operações de traço e usando (1.96), o termo de pólo para este diagrama é

$$\text{pólo} = 4 \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{\text{Numerador}}{(k_1^2 - m^2)^2 [(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2)} , \quad (1.105)$$

onde

$$\text{Numerador} = 2 m^4 - 2 k_1^2 k_2^2 + 6 m^2 k_1^2 - 2 m^2 (k_1 \cdot k_2) - 2 k_1^2 (k_1 \cdot k_2) - 2 m^2 k_2^2 .$$

Novamente utilizando a parametrização (1.98) obtemos, após eliminarmos os termos ímpares em k_1

$$\begin{aligned} \text{pólo} &= i \mathcal{T} \frac{2^{3-D}}{\pi^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx (1-x) \left[\frac{1}{2} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{9 m^2 - k_2^2 (3 - 5x)}{(k_2^2 - m^2) \Delta^{2 - \frac{D}{2}}} \right. \\ &\quad \left. + \Gamma(3 - \frac{D}{2}) \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{-m^4 + m^2 k_2^2 (1 - x - 3x^2) + (k_2^2)^2 (1 - 2x)x^2}{(k_2^2 - m^2) \Delta^{3 - \frac{D}{2}}} \right] \\ &= \frac{7}{8\pi^2} \frac{m^2}{\epsilon} . \end{aligned} \quad (1.106)$$

Somando todas as contribuições encontramos

$$C_5 = -\frac{13}{2\pi^2} . \quad (1.107)$$

Com os resultados obtidos para os coeficientes C_i juntamente com os coeficientes advindos da função de dois pontos, que foram calculados em 1.4.1. as funções do grupo de renormalização δ , γ e β tomam a forma

$$\delta(g, \alpha, \frac{m}{\Lambda}) = -\frac{8}{3} \alpha^2 - \frac{11}{8\pi} \frac{m}{\Lambda} g \alpha + \frac{7}{12\pi^2} \frac{m^2}{\Lambda^2} g^2 , \quad (1.108)$$

$$\gamma(g, \alpha, \frac{m}{\Lambda}) = -\frac{1}{12} \alpha^2 - \frac{1}{8\pi} \frac{m}{\Lambda} g \alpha + \frac{5}{48\pi^2} \frac{m^2}{\Lambda^2} g^2 , \quad (1.109)$$

e

$$\beta(g, \alpha, \frac{m}{\Lambda}) = g + \frac{20}{3} g \alpha^2 - \frac{21}{2\pi} \frac{m}{\Lambda} g^2 \alpha + \frac{161}{12\pi^2} \frac{m^2}{\Lambda^2} g^3 . \quad (1.110)$$

1.5 Pontos Fixos e Dimensões anômalas de Operadores Compostos

Os pontos fixos são obtidos pela condição $\beta = 0$, e de acordo com (1.110) temos as seguintes soluções (para $\alpha \neq 0$)

$$g = 0, \quad \text{e} \quad g = \frac{\Lambda}{m} \left[\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] \quad (1.111)$$

onde $a = \frac{161}{12\pi^2}$, $b = \frac{21}{2\pi}\alpha$, e $c = 1 + \frac{20}{3}\alpha^2$. Vemos portanto que apenas a origem é um ponto fixo, pois pela condição $m \ll \Lambda$, a solução não trivial foge do tratamento perturbativo que estamos adotando. Assim, de acordo com a seção 1.3, a origem é um ponto fixo infra-vermelho estável, já que $\beta'(g=0) = 1 + \frac{20}{3}\alpha^2 > 0$.

Assim, a teoria apresenta apenas a origem como ponto fixo, contrariamente ao observado na referência [18]. Naquele trabalho o autor obteve um valor para α^2 , que ele designou por α_c^2 , no qual a teoria apresenta um ponto fixo diferente do trivial. E ao estudar a influência do termo de CS no operador composto $(\bar{\psi}\psi)^2$, verificou que o mesmo apresenta uma dimensão tal, que para $\alpha^2 = \alpha_c^2$ se tornara marginal. Deve-se notar que em [18] foi considerada a teoria sem massa e usada uma regularização diferente da que temos adotado. Nossos resultados são diferentes porque em ordem mais baixa em g , a influência do acoplamento de CS nas funções de vértice de quatro pontos nos leva a um sinal positivo na função beta, como podemos observar por (1.110).

Vemos de (1.109), que a dimensão do campo básico ψ , no ponto fixo $g = 0$, é $d_\psi = 1 - \frac{\alpha^2}{12}$, onde $-\frac{\alpha^2}{12}$ é a dimensão anômala. Isto indica que as funções de Green de campos fermiônicos possuem um melhor comportamento ultravioleta quando se aumenta α .

Determinaremos agora a dimensão de alguns operadores compostos¹³ no ponto fixo $g = 0$. Como estamos interessados apenas no comportamento de escala das funções de Green com a inserção do operador composto, podemos considerá-los formalmente integrados, isto é, operadores que entram com momento nulo nos diagramas de

¹³Por operador composto queremos dizer um operador construído a partir do produto de campos elementares e suas derivadas no mesmo ponto.

Feynman. Usaremos a notação $\Delta_i = \int d^3x \mathcal{O}_i$ para indicar esta operação, onde $\mathcal{O}_i$ representa o operador composto, e analizaremos os seguintes operadores

$$\Delta_1 = \int d^3x \bar{\psi} \psi, \quad \Delta_2 = \int d^3x \bar{\psi} \not{\partial} \psi,$$

e

$$\Delta_3 = \int d^3x \bar{\psi} D^2 \psi, \quad \Delta_4 = \int d^3x (\bar{\psi} \psi)^2,$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - i\sqrt{\alpha} A_\mu$ é a derivada covariante¹⁴. Para efeitos práticos, vamos fazer a inserção apenas do operador ∂^2 , uma vez que $D^2 = \partial^2 - 2i\sqrt{\alpha} \partial_\mu A^\mu - \alpha A^2$, e o restante do quadrado da derivada covariante deve entrar com o mesmo fator multiplicativo.

O comportamento ultravioleta dos diagramas de Feynman construídos a partir das regras de Feynman mostradas na figura 1.1, com a inserção do operador composto Δ_i , é governado pelo grau de divergência superficial $D_{\Delta_i}(\gamma)$, cuja expressão é

$$D_{\Delta_i}(\gamma) = \dim \mathcal{O}_i - N_F, \quad (1.112)$$

onde $\dim \mathcal{O}_i$ é a dimensão canônica do operador $\mathcal{O}_i$ e N_F é o número de linhas externas do tipo férmion.

Em geral, devido ao processo de renormalização, um operador Δ_i se misturará com outros operadores com dimensão menor ou igual à dimensão canônica de Δ_i . As divergências que surgem nas funções de Green com a inserção do operador Δ_j (j fixo) podem ser eliminadas introduzindo contra-termos da forma $\sum_{i=1}^n D_i \Delta_i$, onde D_i são constantes [8]. Se por tais contra-termos removemos todas as divergências das funções de Green, com inserções dos operadores $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, dizemos que os operadores Δ_i são renormalizados aditivamente [8, 40, 41].

A extensão da discussão realizada na seção 1.4.2, para funções de Green envolvendo a inserção do operador Δ_j , é feita se usarmos a seguinte relação entre as funções de Green

$$\Gamma_{\Delta_i}^{(N)}(p_i, \alpha, m, \epsilon) = Z_\psi^{-\frac{N}{2}}(\mu, \epsilon) Z_{ij}(\mu, \epsilon) \Gamma_{R\Delta_j}^{(N)}(p_i, \alpha_R, m_R, \mu). \quad (1.113)$$

¹⁴ Escalonamos $A_\mu \rightarrow \sqrt{\alpha} A_\mu$.

onde $Z_{ij}(\mu, \epsilon)$ é a matriz de constantes de renormalização de função de onda, definidas como $\Delta_i = Z_{ij} \Delta_{Rj}$. Em analogia com (1.8), temos a seguinte equação do grupo de renormalização

$$\left[\left(\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + m \delta \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial g} - N \gamma \right) \delta_{ij} + \gamma_{ij}(g, \alpha) \right] \Gamma_{R\Delta_j}^{(N)}(p_i, \alpha, m, \mu) = 0 \quad (1.114)$$

onde $\gamma_{ij}(\alpha) = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_{ij}$ é a matriz de dimensões anômalas dos operadores Δ_i .

O comportamento de escala das funções de Green com uma inserção de Δ_i é obtida de maneira semelhante ao feito na seção 1.3. Por uma questão de economia de notação, vamos também aqui eliminar o subscrito R presente no lado direito de (1.114), tendo em mente que estamos trabalhando com quantidades renormalizadas. Como vimos, a teoria assintótica será invariante de escala num zero de beta e para $m = 0$. Nessas condições, e designando por $\dim \Gamma_{\Delta_i}^{(N)}$ a dimensão canônica de $\Gamma^{(N)}$ com uma inserção de Δ_i , temos que pela transformação de escala $(p_i, \Lambda, \mu) \rightarrow s(p_i, \Lambda, \mu)$

$$\Gamma_{\Delta_i}^{(N)}(sp_i, s\Lambda, s\mu, g, \alpha) = s^{\dim \Gamma_{\Delta_i}^{(N)}} \Gamma_{\Delta_i}^{(N)}(\mu_i, \Lambda, \mu, g, \alpha) .$$

Como a dimensão canônica de $\Gamma_{\Delta_i}^{(N)}$ é a mesma que a das funções de Green conexas com uma inserção de Δ_i , porém com as linhas externas amputadas, temos

$$\dim \Gamma_{\Delta_i}^{(N)} = \dim G_{\Delta_i, CON}^{(N)} + N = \dim G_{CON}^{(N)} + \dim \mathcal{O}_i + N = D - N d_\psi + \dim \mathcal{O}_i .$$

Portanto, pela mudança de escala acima $\Gamma_{\Delta_i}^{(N)}$ satisfará a seguinte equação do GR

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + s \frac{\partial}{\partial s} \right] \Gamma_{\Delta_i}^{(N)}(p_i, \alpha, m=0, \mu) = (\dim \Gamma_{\Delta_i}^{(N)}) \Gamma_{\Delta_i}^{(N)} ,$$

que combinada com (1.114) (em um zero de beta) nos leva à seguinte igualdade

$$s \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{\Delta_i}^{(N)} = [(D - N(d_\psi + \gamma)) \delta_{ij} + \dim \mathcal{O}_i \delta_{ij} + \gamma_{ij}] \Gamma_{\Delta_j}^{(N)} , \quad (1.115)$$

de onde vê-se que se γ_{ij} for diagonal, isto é, $\gamma_{ij} = 0$, para $i \neq j$, ele estará relacionado com a dimensão anômala do operador $\mathcal{O}_i$.

Prosseguindo nossa análise dos operadores compostos, vamos inicialmente considerar o mais simples deles, que é o operador de massa $\Delta_1 = \int d^3x \bar{\psi} \psi$, cujo grau de divergência superficial é

$$D_{\Delta_1}(\gamma) = 2 - N_F .$$

Para $N_F = 2$, a inserção deste operador corresponde a introduzi-lo em cada linha interna de férmion nos diagramas de auto-energia (a), (c), (d) e (e) da figura 1.2. Todos possuem uma divergência logaritmica, embora, neste caso, a contribuição para o termo de pólo venha apenas da ordem α^2 , pois na ordem α , o diagrama correspondente é de 1-loop e portanto finito devido ao uso da regularização dimensional. Para $N_F = 4$, todos os diagramas (com $g = 0$) são convergentes. Logo, a inserção do operador Δ_1 nas funções de dois e quatro pontos não produz mistura com outros operadores. Desta forma, a expressão renormalizada para a função de dois pontos com uma inserção de Δ_1 é dada por

$$\Gamma_{\Delta_1}^{(2)}(p, p) = 1 + \alpha \mu^\epsilon I_{2\Delta_1}^{(2)} + \alpha^2 [\text{finita}_{3\Delta_1}^{(2)} + 2 \ln \mu \text{Res}] ,$$

onde usamos (1.26) e Res são os coeficientes do termo $\frac{1}{\epsilon}$ dos diagramas de ordem α^2 com uma inserção de Δ_1 . Substituindo a expressão acima em (1.114) obtemos

$$2 \text{Res} - 2 \gamma(g=0, \alpha) + \tilde{\gamma}_{\Delta_1} = 0 . \quad (1.116)$$

Notando que a derivada com relação à massa corresponde à inserção do operador $\bar{\psi}\psi$ para o momento transferido igual a zero, podemos, para efeitos práticos, calcular o Res usando o resultado obtido na seção 1.4.1, isto é

$$\text{Res} = i \frac{\partial}{\partial m} (A_3 m + B_3 \not{p}) = i A_3 = \frac{5}{4} \alpha^2 .$$

Portanto,

$$d_{\Delta_1} = 2 + \tilde{\gamma}_{\Delta_1} = 2 - \frac{8}{3} \alpha^2 \quad (1.117)$$

é a dimensão do operador Δ_1 , sendo $-\frac{8}{3}\alpha^2$ a dimensão anômala.

O operador $\Delta_2 = \int d^3x \bar{\psi} \not{p} \psi$ possui $D_{\Delta_2}(\gamma) = 3 - N_F$, portanto, os diagramas com quatro linhas externas são convergentes, enquanto que para $N_F = 2$ os gráficos são linearmente divergentes. Isto significa que os diagramas (a), (b) e (c) da figura 1.7,

com uma inserção deste operador em todas as linhas internas fermiônicas, produzirão contra-termos da forma

$$\int d^3x (A_{\Delta_2} m \bar{\psi}\psi + B_{\Delta_2} \bar{\psi} \not{\partial}\psi) ,$$

onde o símbolo A_{Δ_2} e B_{Δ_2} representam as parcelas divergentes das amplitudes mostradas na figura 1.7 com uma inserção de Δ_2 .

Observe que existe uma mistura entre os operadores Δ_1 e Δ_2 . Uma simplificação pode ser feita se considerarmos o caso para $m = 0$. Nesta situação, a partir do cálculo da dimensão anômala do operador ψ , podemos facilmente obter a dimensão de Δ_2 , pois o uso direto de (1.112) fornece

$$\bar{\gamma}_{\Delta_2} = 2 \gamma(g = 0, \alpha) - 2i \text{Res} ,$$

sendo¹⁵ $\text{Res} = B_{\Delta_2} = 3 B_3$, que representa o resíduo dos diagramas de ordem α^2 com uma inserção do operador Δ_2 , com B_3 dado por (1.77). Deste modo,

$$d_{\Delta_2} = 3 - \frac{2}{3}\alpha^2 . \quad (1.118)$$

A determinação da dimensão anômala para operadores quadrilineares em $g = 0$ é mais complicada, pois devido ao processo de renormalização haverá dez coeficientes a serem determinados, isto é

$$\int d^3x N[(\bar{\psi}\psi)^2] = \int d^3x (a_1 (\bar{\psi}\psi)^2 + a_2 \bar{\psi}\partial^2\psi + a_3 m^2 \bar{\psi}\psi + a_4 m \bar{\psi} \not{\partial}\psi) ,$$

$$\int d^3x N[\bar{\psi}\partial^2\psi] = \int d^3x (b_1 (\bar{\psi}\psi)^2 + b_2 \bar{\psi}\partial^2\psi + b_3 m^2 \bar{\psi}\psi + b_4 m \bar{\psi} \not{\partial}\psi) ,$$

sendo que o símbolo N indica a prescrição correspondente à subtração do termo de pólo. Com $m = 0$, precisaremos obter apenas a_1 , a_2 , b_1 e b_2 . Observe entretanto, que a inserção do operador $\Delta_3 = \int d^3x \bar{\psi}\partial^2\psi$ nas funções de quatro pontos são todas finitas (até $\mathcal{O}(\alpha^2)$), portanto $b_1 = 0$. Por um cálculo direto (veja apêndice E) podemos obter as igualdades para os termos de pólo mostradas na figura 1.14. Então, utilizando (1.114) encontramos que as dimensões dos operadores $\Delta_4 = \int d^3x (\bar{\psi}\psi)^2$ e Δ_3 são dadas por

¹⁵Note que este operador "conta" o número de linhas internas fermiônicas. Para maiores detalhes veja apêndice E.

Figura 1.14: Diagramas com $N_F = 2, 4$ com inserções de operadores compostos.

$$d_{\Delta_3} = 4 + 2 \gamma_{02} \alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha^2 = 4 + \frac{\alpha^2}{2}, \quad (1.119)$$

e

$$d_{\Delta_4} = 4 + 4 \gamma_{02} \alpha^2 - 2 C_3 \alpha^2 = 4 + \frac{20}{3} \alpha^2, \quad (1.120)$$

onde o coeficiente C_3 foi calculado na equação (1.101).

Vemos portanto que para os operadores que foram considerados, suas dimensões diminuem com α , se as suas respectivas dimensões canônicas forem menores ou iguais a três, em acordo com [18]. Entretanto, se a dimensão canônica for maior que três, a dimensão dos operadores aumenta com α , de modo que não se verifica um melhor comportamento ultravioleta para esses operadores não renormalizáveis.

No próximo capítulo estenderemos esta discussão para o caso de interações quárticas contendo N sabores. Como mencionada na introdução, devemos esperar algumas mudanças em relação ao caso $N = 1$, já que quando N torna-se grande as teorias quárticas fermiônicas tornam-se renormalizáveis, e em particular, com uma interação tipo Thirring, haverá uma geração dinâmica de massa para os férmions para o valor $N < N_c = \frac{128}{D\pi^2}$, onde $D = 2, 4$ representa o número de componentes do campo espinorial. Isto indica que uma transição de fase ocorre, com quebra de simetria de paridade para férmions de duas componentes, ou de simetria quiral para férmions com quatro componentes, para aquele valor de N_c [11].

Tipo de Diagrama (i,j)	Ordem $g\alpha^2$	Ordem $g^2\alpha$	Ordem g^3
(1,0)	$-\frac{5i}{2\epsilon}$	$\frac{3i}{\pi\epsilon}$	$-\frac{3i}{4\pi^2\epsilon}$
(0,2)	$\frac{i}{2\epsilon}$	—	—
(1,1)	$\frac{8i}{\epsilon}$	$\frac{4i}{\epsilon}$	—
(1,2)	$-\frac{2i}{\epsilon}$	—	—
(2,0)	—	$-\frac{i}{\pi\epsilon}$	$\frac{i}{\pi^2\epsilon}$
(2,1)	—	$-\frac{15i}{2\pi\epsilon}$	—
(3,0)	—	—	$\frac{5i}{4\pi^2\epsilon}$

Tabela 1.1: Diagramas sem o loop fermiônico. A primeira coluna lista diferentes tipos de diagramas (i,j), onde i e j são os números de linhas *GN* e *CS* ligando as duas linhas fermiônicas, respectivamente.

Ordem de Perturbação	Número de Diagramas	Termo de Pólo
$g\alpha^2$	12	$-\frac{i}{2\epsilon}$
$g^2\alpha$	7	$-\frac{4i}{\pi\epsilon}$
g^3	8	$\frac{4i}{\pi^2\epsilon}$

Tabela 1.2: Parte de pólo de diagramas com o loop fermiônico. A segunda coluna lista o número de diagramas que fornecem contribuição para o termo de pólo da função de quatro pontos.

Capítulo 2

O Modelo Fermiônico Com Simetria $U(N)$ Acoplado Com um Campo de Chern-Simons

2.1 O Modelo Como uma Teoria Efetiva e o Grupo de Renormalização

O modelo que descreve a auto-interação quártica fermiônica mais geral, com simetria interna $U(N)$ e invariante de Lorentz, acoplado com um campo de Chern-Simons é dado pela Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi\alpha} \epsilon^{\mu\nu\lambda} F_{\mu\nu} A_\lambda + \bar{\psi}(i \not{\partial} + \not{A})\psi - G_1(\bar{\psi}\psi)^2 - G_2(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 - \frac{1}{2\lambda}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.1)$$

onde uma soma nos índices repetidos de cor está implícita, isto é, $\psi = \psi_i$, com $i = 1, 2, \dots, N$. Como anteriormente, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ onde A_μ é o campo de Chern-Simons e ψ é um campo fermiônico sem massa, agora com N componentes, e λ é o parâmetro de fixação de gauge.

De fato, as interações quárticas contidas em (2.1) representam a mais geral auto-interação invariante de Lorentz com N componentes, uma vez que, como mostrado em [10], as interações $(\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2$ e $(\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda^a\psi)^2$ não são linearmente independentes, devido às identidades de Fierz

$$(1 + \frac{2}{N})(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 = 0 \quad .$$

e

$$2\left(2 + \frac{1}{N}\right)(\bar{\psi}\psi)^2 + \frac{2}{N}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 + (\bar{\psi}\lambda^a\psi)^2 + (\bar{\psi}\gamma^\mu\lambda^a\psi)^2 = 0 ,$$

onde λ^a , $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$, são os geradores do grupo $SU(N)$. Observe que apenas duas dessas interações são linearmente independentes, e estas poderiam ser as definidas em (2.1). Este modelo é invariante por conjugação de carga, apresentando quebra de simetria de paridade e reversão temporal, devido ao termo de Chern-Simons. No entanto, as transformações $\mathcal{PT}$ e $\mathcal{CPT}$ são simetrias do modelo [34].

Analogamente à discussão feita no capítulo anterior, concluímos que a teoria descrita pela Lagrangeana acima possui duas constantes de acoplamento, G_1 e G_2 , com dimensão de Massa^{-1} . Portanto, esta teoria é também não renormalizável perturbativamente. Dai, segue imediatamente que a contagem de potências dos diagramas de Feynman é semelhante a (1.26), isto é,

$$d(\gamma) = 3 - N_A - N_F + V_1 + V_2 , \quad (2.2)$$

onde V_1 e V_2 referem-se ao número de vértices do tipo G_1 e G_2 , respectivamente.

As regras de Feynman para os vértices da teoria (2.1) estão mostradas na figura (2.1), onde adotamos a notação condensada

$$\Delta \otimes \Delta \equiv \delta_{\alpha_1\alpha_3}\delta_{\alpha_2\alpha_4} I_{ac} I_{bd} - \delta_{\alpha_1\alpha_4}\delta_{\alpha_2\alpha_3} I_{ad} I_{bc} , \quad (2.3)$$

e

$$\Gamma \otimes \Gamma \equiv \gamma_{\alpha_1\alpha_3}^\mu \gamma_{\mu\alpha_2\alpha_4} I_{ac} I_{bd} - \gamma_{\alpha_1\alpha_4}^\mu \gamma_{\mu\alpha_2\alpha_3} I_{ad} I_{bc} , \quad (2.4)$$

onde δ com índices gregos e I com índices latinos referem-se às matrizes identidades, no espaço de Lorentz e no espaço de simetria interna, respectivamente. Por conveniência introduzimos a linha tracejada, que chamaremos de linha auxiliar¹ de Gross-Neveu (GN) e Thirring (Th) para clarificar a estrutura tensorial do vértice fermiônico.

¹Designamos a linha tracejada para ambos os vértices tipo Gross-Neveu e Thirring, uma vez que, como veremos, até a terceira ordem de perturbação, não existem gráficos contendo vértices tipo GN e Th simultaneamente, numa teoria efetiva na qual os momentos externos sejam muito menores que um determinado parâmetro massivo Λ . Portanto, não há possibilidade de nos confundirmos sobre qual tipo de vértice estaremos nos referindo.

Figura 2.1: Regras de Feynman para os vértice da teoria (2.1). A linha ondulada representa o propagador de CS e a linha cheia o propagador fermiônico.

A equação do grupo de renormalização para uma teoria contendo várias constantes de acoplamento, como no caso de (2.1), é obtida exatamente da mesma maneira ao feito no capítulo anterior, com a diferença de que agora devemos substituir $\beta(g) \frac{\partial}{\partial g} \rightarrow \sum_i \beta_i(g_1, g_2, \dots) \frac{\partial}{\partial g_i}$. Ou seja, uma mudança na escala μ é compensada por uma mudança em cada um dos parâmetros g_i e na escala dos campos da teoria. Seguindo os passos feitos no primeiro capítulo, podemos mostrar que a equação do grupo de renormalização que as funções de Green devem satisfazer, na região $p_i \ll \Lambda$, é

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_1(g_1, g_2, \alpha) \frac{\partial}{\partial g_1} + \beta_2(g_1, g_2, \alpha) \frac{\partial}{\partial g_2} - N_F \gamma \right] \Gamma^{(N_F)}(p_i, \mu) \approx 0. \quad (2.5)$$

onde, como anteriormente², introduzimos as constantes de acoplamento adimensionais $G_1 \rightarrow \frac{g_1}{\Lambda} \mu^\epsilon$ e $G_2 \rightarrow \frac{g_2}{\Lambda} \mu^\epsilon$, e o símbolo $\approx$ significa igualdade na região onde os contra-termos diferentes dos termos já contidos em (2.1) podem ser desprezados. Como a invariância de $U(N)$ não é quebrada, todos os campos fermiônicos ψ_i possuem a mesma dimensão, e isso explica a presença de um só γ na expressão acima. Note que também usamos o teorema de Coleman-Hill para obtermos (2.5).

2.2 As Funções do Grupo de Renormalização

Os coeficientes β_1 , β_2 e γ da equação (2.5) são obtidos de maneira análoga ao feito na seção 1.4, isto é, calculando a ação dos operadores diferenciais sobre as funções de Green de dois e quatros pontos. Entretanto, observe que neste caso (teoria com massa nula), a função de dois pontos $\Gamma^{(2)}(p)$ não receberá contribuições do termo de pólo para diagramas que possuam pelo menos um vértice quadrilinear³. De fato, os diagramas de “tad-pole” (veja apêndice C) e os resíduos (coeficientes do termo $\frac{1}{\epsilon}$) dos diagramas de ordem⁴ $g\alpha$ e g^2 , são proporcionais à massa do férmion (veja equação (1.28)). Deste modo, a função γ é a mesma obtida no capítulo anterior, se fizermos $m \rightarrow 0$ em (1.109) e introduzirmos um fator N_f devido ao loop fermiônico, no cálculo do diagrama 1.7(a), isto é,

$$B = B_3(a) + B_3(b) + B_3(c) = -i \frac{(N+1)}{24} \quad , \quad (2.6)$$

o que nos leva

$$\gamma(\alpha) = -\frac{(N+1)}{24} \alpha^2 \quad . \quad (2.7)$$

O cálculo das funções $\beta_1(g_1, g_2, \alpha)$ e $\beta_2(g_1, g_2, \alpha)$ é um pouco mais complicado, e requer o conhecimento de $\Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4)$. Inicialmente note que nenhuma contribuição virá da parcela de pólo para as amplitudes de Feynman de ordem $g^2\alpha$ e g^3 .

²Mudamos ligeiramente a notação para as funções de vértices $\Gamma^{(N_F)}$, onde N_F é o número de linhas externas do tipo férmion, para não nos confundirmos com N , que neste caso representa o número de espécies de campos fermiônicos.

³A não ser a contribuição dos termos $g\alpha A \frac{p^2}{\Lambda}$ e $g^2 B \frac{p^2}{\Lambda^2}$, onde A e B são constantes, que são desprezíveis para $p \ll \Lambda$.

⁴Aquí g designa g_1 ou g_2 ou combinações destes.

pois os resíduos desses diagramas são também proporcionais à massa do fêrmion (veja equação (1.29)). Omitindo as contribuições que por contagem de potência são finitas, e usando (1.26), temos que até a terceira ordem nos acoplamentos

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = & \mu^\epsilon \left[-i \frac{g_1}{\Lambda} \Delta \otimes \Delta - i \frac{g_2}{\Lambda} \Gamma \otimes \Gamma + \frac{g_1}{\Lambda} \alpha \mu^\epsilon I_1^{(4)} + \frac{g_2}{\Lambda} \alpha \mu^\epsilon I_2^{(4)} \right. \\ & + \frac{g_1}{\Lambda} \alpha^2 [\text{finito}_1 - 2i \ln \mu (D_1 \Delta \otimes \Delta + D_2 \Gamma \otimes \Gamma)] \\ & \left. + \frac{g_2}{\Lambda} \alpha^2 [\text{finito}_2 - 2i \ln \mu (D_3 \Delta \otimes \Delta + D_4 \Gamma \otimes \Gamma)] \right] , \quad (2.8) \end{aligned}$$

onde explicitamos a estrutura tensorial apenas na aproximação de árvore e nas parcelas divergentes, conforme notação empregada. As amplitudes $I_1^{(4)}$ e $I_2^{(4)}$ correspondem aos diagramas de 1-loop, que são finitos com o uso da regularização dimensional. As constantes D_1 e D_3 , e D_2 e D_4 são os resíduos dos pólos em $\frac{1}{\epsilon}$, proporcionais a $\Delta \otimes \Delta$ e $\Gamma \otimes \Gamma$, respectivamente.

Substituindo (2.8) em (2.5), juntamente com as expansões

$$\beta_1(g_1, g_2, \alpha) = \sum_{i,j,k} \beta_{(1)_{i,j,k}} g_1^i g_2^j \alpha^k , \quad (2.9)$$

e

$$\beta_2(g_1, g_2, \alpha) = \sum_{i,j,k} \beta_{(2)_{i,j,k}} g_1^i g_2^j \alpha^k , \quad (2.10)$$

onde a soma é restrita a $i+j+k \leq 3$, usando (2.7) e agrupando os termos proporcionais a $\Delta \otimes \Delta$ e $\Gamma \otimes \Gamma$, obtemos as seguintes igualdades

$$\Delta \otimes \Delta (1 - \beta_{(1)_{1,0,0}}) - \Gamma \otimes \Gamma \beta_{(2)_{1,0,0}} = 0 ,$$

$$\Gamma \otimes \Gamma (1 - \beta_{(2)_{0,1,0}}) - \Delta \otimes \Delta \beta_{(1)_{0,1,0}} = 0 ,$$

$$\beta_{(1)_{0,0,1}} = \beta_{(2)_{0,0,1}} = 0 .$$

$$\Delta \otimes \Delta (-2i D_1 - i \beta_{(1)_{1,0,2}} + 4 B) + \Gamma \otimes \Gamma (-2i D_2 - i \beta_{(2)_{1,0,2}}) = 0 ,$$

$$\Delta \otimes \Delta (-2i D_3 - i \beta_{(1)0,1,2}) + \Gamma \otimes \Gamma (-2i D_4 - i \beta_{(2)0,1,2} + 4 B) = 0 .$$

Note que como para $N \neq 1$ os produtos diretos antisimetrizados $\Delta \otimes \Delta$ e $\Gamma \otimes \Gamma$ são linearmente independentes, podemos concluir que

$$\beta_{(1)1,0,0} = \beta_{(2)0,1,0} = 1 , \quad (2.11)$$

$$\beta_{(1)0,1,0} = \beta_{(2)1,0,0} = \beta_{(1)0,0,1} = \beta_{(2)0,0,1} = 0 , \quad (2.12)$$

$$\beta_{(1)1,0,2} = -2 D_1 - 4i B , \quad \beta_{(2)1,0,2} = -2 D_2 , \quad (2.13)$$

$$\beta_{(1)0,1,2} = -2 D_3 , \quad \beta_{(2)0,1,2} = -2 D_4 - 4i B . \quad (2.14)$$

Assim, encontramos as seguintes expressões

$$\beta_1(g_1, g_2, \alpha) = g_1 - 2 (D_1 + 2i B) g_1 \alpha^2 - 2 D_3 g_2 \alpha^2 , \quad (2.15)$$

e

$$\beta_2(g_1, g_2, \alpha) = g_2 - 2 D_2 g_1 \alpha^2 - 2 (D_4 + 2i B) g_2 \alpha^2 . \quad (2.16)$$

Para o cálculo dos coeficientes D_1 , D_2 , D_3 e D_4 adotaremos um procedimento⁵ semelhante ao feito na seção 1.4. Suponha que temos um diagrama de Feynman genérico com quatro linhas externas, como aquele mostrado na figura 1.10, com a diferença que agora temos índices de simetria interna. Então, em 2-loops, a amplitude⁶ antisimetrizada é escrita como

$$I = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} (A \otimes B) C = \text{pólo}_1 \Delta \otimes \Delta + \text{pólo}_2 \Gamma \otimes \Gamma + \text{finito} , \quad (2.17)$$

⁵Os cálculos serão feitos para momento externo igual a zero, uma vez que o resíduo é uma constante, isto é, os diagramas divergem logarithmicamente no ultra-violeta.

⁶Lembrando que A e B referem-se aos propagadores e vértices (escalar ou vetorial) associados as duas linhas de férmions, e C representa os outros fatores.

onde, como anteriormente, explicitamos somente a estrutura tensorial da parcela divergente, e o símbolo $\otimes$ indica produto direto antisimetrizado, isto é,

$$A \otimes B = A_{\alpha_1 \alpha_2} B_{\alpha_3 \alpha_4} I_{ac} I_{cd} - A_{\alpha_1 \alpha_3} B_{\alpha_3 \alpha_2} I_{ad} I_{bc} .$$

Multiplicando ambos os lados de (2.17) por $\Delta \otimes \Delta$ obtemos

$$2N(2N-1) \text{pólo}_1 - 6N \text{pólo}_2 = \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} [N^2 \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) - N \text{Tr}(A B)] C , \quad (2.18)$$

onde o traço é somente sobre os índices de Lorentz.

Analogamente, multiplicando ambos os lados de (2.17) por $\Gamma \otimes \Gamma$ encontramos

$$\begin{aligned} -6N \text{pólo}_1 + 6N(2N+1) \text{pólo}_2 &= \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} [N^2 \text{Tr}(A \gamma_\phi) \text{Tr}(B \gamma^\phi) \\ &\quad - N \text{Tr}(A \gamma_\phi B \gamma^\phi)] C . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.18) e (2.19) obtemos

$$\text{pólo}_1 = \frac{1}{8N(N^2-1)} [(2N+1) I_1 + I_2] , \quad (2.20)$$

e

$$\text{pólo}_2 = \frac{1}{24N(N^2-1)} [3 I_1 + (2N-1) I_2] , \quad (2.21)$$

sendo

$$I_1 = \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} [N^2 \text{Tr}(A) \text{Tr}(B) - N \text{Tr}(A B)] C , \quad (2.22)$$

e

$$I_2 = \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} [N^2 \text{Tr}(A \gamma_\phi) \text{Tr}(B \gamma^\phi) - N \text{Tr}(A \gamma_\phi B \gamma^\phi)] C . \quad (2.23)$$

É oportuno ressaltar que as expressões (2.20), (2.21), (2.22) e (2.23) são absolutamente gerais, válidas para todos os diagramas de quatros pontos, quer tenhamos

vértices tipo Gross-Neveu ou Thirring. Obviamente as formas para A , B e C dependem de cada diagrama. Por outro lado, nesta ordem de perturbação, existem muitos diagramas com os dois tipos de vértices quadrilineares, e como anteriormente, separaremos os diagramas em duas classes: com ou sem loop fermiônico. No caso dos diagramas sem o loop, agruparemos de acordo com o número de linhas auxiliares de GN e Thirring ou de CS ligando as duas linhas fermiônicas.

Os resultados obtidos encontram-se resumidos nas tabelas 2.1 e 2.2, que mostram as contribuições das classes de diagramas para a parcela de pólo. Alguns dos diagramas encontram-se listados no apêndice D .

Colecionando os resultados para os coeficientes D_1 , D_2 , D_3 , obtemos

$$D_1 = \frac{7}{2} + 3N \quad e \quad D_2 = \frac{5}{2} + \frac{N}{3}, \quad (2.24)$$

e

$$D_3 = 9 + 3N \quad e \quad D_4 = -\frac{2}{3} - \frac{N}{3}. \quad (2.25)$$

Substituindo esses valores, juntamente com (2.6), as funções betas (2.15) e (2.16) ficam

$$\beta_1(g_1, g_2, \alpha) = g_1 - \left(\frac{43 + 37N}{6}\right) g_1 \alpha^2 - 2(9 + 3N) g_2 \alpha^2, \quad (2.26)$$

e

$$\beta_2(g_1, g_2, \alpha) = g_2 - \left(5 + \frac{2}{3}N\right) g_1 \alpha^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{3} + N\right) g_2 \alpha^2, \quad (2.27)$$

2.3 Pontos Fixos e Redução das Constantes de Acoplamento

Os pontos fixos são obtidos pela condição $\beta_i = 0$, e de acordo com (2.26) e (2.27) a solução $g_1 = g_2 = 0$ é um ponto fixo. A solução não trivial pode ser encontrada pela equação

$$\alpha_{(\pm)}^2 = \frac{(d - a) \pm [(d - a)^2 + 4(ad + bc)]^{\frac{1}{2}}}{2(ad + bc)}, \quad (2.28)$$

onde a , b , c e d são os coeficientes de $g_1\alpha^2$ e $g_2\alpha^2$ das equações (2.26) e (2.27), isto é, $a = \frac{43+37N}{6}$, $b = 2(9+3N)$, $c = 5 + \frac{2}{3}N$ e $d = \frac{1}{2}(\frac{7}{3} + N)$. Como podemos observar por uma substituição direta desses coeficientes, a solução $\alpha_{(-)}^2 < 0$ para qualquer valor de N , o que nos levaria a um α imaginário, o que não é aceitável fisicamente. Enquanto que a solução $\alpha_{(+)}^2$ nos fornece o seguinte resultado

$$\alpha_{(+)}^2 = \frac{6(-17N - 18 + [3865 + 2512N + 544N^2]^{\frac{1}{2}})}{3541 + 1900N + 255N^2}, \quad (2.29)$$

que é positiva para todo N .

Entretanto, a natureza dos pontos fixos requer uma análise cuidadosa, já que ambas as funções beta dependem das duas constantes de acoplamento originais da teoria, o que nos leva a uma estrutura de pontos fixos muito complexa⁷.

Ao invés disso, podemos utilizar o método da redução dos parâmetros de acoplamento proposto por Zimmermann [38], e bastante utilizado na literatura [60, 61, 62]. Este método consiste em expressar as $n+1$ constantes de acoplamento, $g_0, g_1, \dots, g_n$, de uma dada teoria quântica de campos não massiva, como funções de uma única, g_0 , de maneira que se obtém um modelo "reduzido" envolvendo apenas o acoplamento g_0 , que é também invariante pelas transformações do grupo de renormalização. Assim,

$$g_j = g_j(g_0), \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.30)$$

independente do ponto de renormalização μ , sendo que as funções $g_j(g_0)$ são analíticas em g_0 e devem se anular no limite de acoplamento fraco, isto é, $\lim_{g_0 \rightarrow 0} g_j(g_0) = 0$.

Pela invariância das funções de Green da teoria original e da teoria reduzida, perante as transformações do grupo de renormalização, podemos escrever

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_{j=0}^n \beta_j \frac{\partial}{\partial g_j} - N\gamma \right] \Gamma^{(N)}(p_i, g_j, \mu) = 0, \quad (2.31)$$

e

⁷O significado desses pontos fixos pode ser visualizado no espaço das constantes de acoplamento, onde a equação $s \frac{\partial}{\partial s} \vec{g}(\vec{g}, s) = \vec{\beta}(\vec{g}_1, \vec{g}_2)$ descreve as trajetórias no espaço $\vec{g} = (\vec{g}_1, \vec{g}_2)$. Para determinarmos se o ponto fixo $g_1 = g_2 = 0$ é um ponto fixo UV (ou IR) estável, devemos verificar se as trajetórias no espaço $\vec{g}$, em alguma vizinhança em torno de $\vec{g} = 0$, aproximam-se da origem quando $s \rightarrow \infty$ (ou $s \rightarrow 0$).

$$\left[\Lambda \frac{\partial}{\partial \Lambda} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial g_0} - N \tilde{\gamma} \right] \tilde{\Gamma}^{(N)}(\mu_i, g_0, \mu) = 0 , \quad (2.32)$$

onde β_j denotam as funções betas correspondentes aos acoplamentos g_j , que assim como γ dependem dos parâmetros g_j , enquanto que $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ são funções de uma única variável g_0 . A função de Green $\tilde{\Gamma}^{(N)}$ é obtida a partir de $\Gamma^{(N)}$ pela substituição de (2.30). Consequentemente,

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}^{(N)}}{\partial g_0} = \sum_{j=0}^n \frac{\partial \Gamma^{(N)}}{\partial g_j} \frac{dg_j}{dg_0} = \frac{\partial \Gamma^{(N)}}{\partial g_0} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Gamma^{(N)}}{\partial g_j} \frac{dg_j}{dg_0} .$$

Por outro lado,

$$\sum_{j=0}^n \beta_j \frac{\partial \Gamma^{(N)}}{\partial g_j} = \beta_0 \frac{\partial \Gamma^{(N)}}{\partial g_0} + \sum_{j=1}^n \beta_j \frac{\partial \Gamma^{(N)}}{\partial g_j} ,$$

e pela independência linear das funções de Green e suas derivadas, encontramos as seguintes relações

$$\tilde{\beta} = \beta_0 , \quad \tilde{\gamma} = \gamma , \quad (2.33)$$

e

$$\tilde{\beta} \frac{dg_j}{dg_0} = \beta_0 \frac{dg_j}{dg_0} = \beta_j . \quad (2.34)$$

Assim, as funções (2.30) satisfazem o sistema de equações diferenciais ordinárias (2.34), de maneira que elas formam as condições necessárias e suficientes para reduzir o sistema original nas funções $g_j(g_0)$ [38].

Como ilustração deste método, vamos considerar o modelo de Yukawa pseudoescalar, isto é, um campo espinorial interagindo com um campo pseudoescalar em quatro dimensões. Sua dinâmica é descrita pela lagrangeana de interação

$$\mathcal{L}_{int} = g \bar{\psi} \gamma_5 \psi \phi ,$$

que como sabemos é não renormalizável, no sentido de que em 1-loop haverá a indução de um contra-termo proporcional a ϕ^4 para cancelar a divergência logaritmica.

Portanto, para renormalizar o modelo devemos adicionar a interação $-\frac{\lambda}{4!}\phi^4$. O modelo contém agora dois parâmetros independentes g e λ , e a princípio não conhecemos nenhuma simetria que relacione essas duas constantes de acoplamento. Em ordem mais baixa as funções beta são dadas por [38]

$$\beta_1(g) = \frac{5}{16\pi^2} g^4 \quad \text{e} \quad \beta_2(g, \lambda) = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{3}{2} \lambda^2 + 4 \lambda g^2 - 24 g^4 \right).$$

A fim de obtermos uma descrição em termos somente de g aplicamos o princípio da redução, requerendo que

$$\lambda = \lambda(g), \quad \lim_{g \rightarrow 0} \lambda(g) = 0, \quad \text{e} \quad \lambda = \rho_0 g^2 + \rho_1 g^4 + \dots$$

Em ordem mais baixa e utilizando (2.34), ou seja, $\lambda = \rho_0 g^2$ e $\beta(g) \frac{d\lambda}{dg} = \beta(\lambda)$, encontramos as seguintes soluções

$$\rho_0^{(+)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \sqrt{145} > 0 \quad \text{e} \quad \rho_0^{(-)} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \sqrt{145} < 0.$$

No nosso caso, em que temos apenas duas constantes de acoplamento, escolhemos g_1 como sendo a constante de acoplamento do sistema reduzido. Como g_2 deve ser analítica em g_1 , podemos expandi-la em séries de potências

$$g_2 = \rho_0 g_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \rho_j g_1^{j+1}$$

que em ordem mais baixa, juntamente com a equação (2.34) nos leva ao seguinte resultado,

$$b \rho_0^2 + \rho_0 (a + d) - c = 0.$$

Note que a redução para uma descrição em termos de g_1 só é possível, se a equação acima possuir raízes reais, isto é, se o discriminante $\Delta = (a + d)^2 + 4bc \geq 0$. Por substituição dos coeficientes a , b , c e d , vemos que isso é possível para qualquer valor de N . Logo, teremos as seguintes soluções

$$\rho_0^{(\pm)} = \frac{-(a + d) \pm [(a + d)^2 + 4bc]^{\frac{1}{2}}}{2b}. \quad (2.35)$$

Desta forma, a função beta do sistema reduzido será dada por

$$\beta_1(g_1) = g_1[1 - \alpha^2(a + b\rho_0^{(+)})], \quad (2.36)$$

e os pontos fixos da teoria reduzida são facilmente obtidos

$$\beta'(g_1) = 1 - \alpha^2(a + b\rho_0^{(+)}) \begin{cases} \bullet \alpha^2 < \alpha_c^2 \rightarrow 1 - \alpha^2(a + b\rho_0^{(+)}) > 0 \rightarrow \text{I.R. estável} \\ \bullet \alpha^2 > \alpha_c^2 \rightarrow 1 - \alpha^2(a + b\rho_0^{(+)}) < 0 \rightarrow \text{I.R. instável}, \end{cases}$$

onde

$$\alpha_c^2 = \frac{1}{a + b\rho_0^{(+)}} = \frac{2}{a - d + [(a + d)^2 + 4bc]^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.37)$$

e $\rho_0^{(+)}$ é dado por

$$\rho_0^{(+)} = \frac{-25 - 20N + [3865 + 2512N + 544N^2]^{\frac{1}{2}}}{36(N + 3)}.$$

Note que ao substituírmos os valores de a , b , c e d na expressão (2.37), encontraremos a equação (2.29).

2.4 Dimensões Anômalas de Operadores Compostos

A generalização da discussão feita no primeiro capítulo, para operadores compostos, é imediata para o caso de N campos. A diferença ocorre apenas quando tratamos dos operadores com dimensão quatro, ou seja, $\Delta_3 = \int d^3x \bar{\psi} D^2 \psi$, $\Delta_4 = \int d^3x (\bar{\psi} \psi)^2$ e $\Delta_5 = \int d^3x (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2$, como veremos mais adiante. Realmente, com relação ao campo básico ψ , e a inserção do operador $\Delta_2 = \int d^3x \bar{\psi} \not{D} \psi$ nas funções de Green com $N_F = 2, 4$, as equações (2.6) e (2.7) nos levam a (veja apêndice E),

$$d_\psi = 1 - \frac{N+1}{24} \alpha^2, \quad d_{\Delta_2} = 3 - \frac{N+1}{3} \alpha^2. \quad (2.38)$$

No que se refere aos operadores com dimensão quatro, o processo de renormalização nos fornece o seguinte sistema de equações

$$\int d^3x N[(\bar{\psi} \psi)^2] = \int d^3x (a'_1 (\bar{\psi} \psi)^2 + a'_2 \bar{\psi} D^2 \psi + a'_3 (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2),$$

$$\int d^3x N[\bar{\psi}\partial^2\psi] = \int d^3x (b'_1 (\bar{\psi}\psi)^2 + b'_2 \bar{\psi}D^2\psi + b'_3 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2),$$

$$\int d^3x N[(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2] = \int d^3x (c'_1 (\bar{\psi}\psi)^2 + c'_2 \bar{\psi}D^2\psi + c'_3 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2).$$

De acordo com a seção anterior, é imediato verificar que $a'_1 = 1 + D_1 \alpha^2$, $a'_3 = D_2 \alpha^2$, $c'_1 = D_3 \alpha^2$ e $c'_3 = 1 + D_4 \alpha^2$. Paralelamente, os coeficientes $b'_1 = b'_3 = 0$, uma vez que a inserção do operador $\bar{\psi}\partial^2\psi$ nas funções de quatro pontos (para ambos os vértices quadrilineares) são finitas na ordem α^2 , por se tratar de diagramas de 1-loop. Através de um cálculo direto podemos mostrar também que $a'_2 = 0$, $b'_2 = 1 - \frac{\alpha^2}{3}$ e $c'_2 = \frac{\alpha}{6\pi} (1 + \frac{N}{4})$ (para maiores detalhes veja o apêndice E). Deste modo, podemos escrever o conjunto de equações acima na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \Delta_{3R} \\ \Delta_{4R} \\ \Delta_{5R} \end{pmatrix} = (1 - \mathcal{T}) \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3} \alpha^2 a(\epsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1 + D_1 \alpha^2 a(\epsilon) & D_2 \alpha^2 a(\epsilon) \\ \frac{1}{6\pi} (1 + \frac{N}{4}) \alpha a(\epsilon) & D_3 \alpha^2 a(\epsilon) & 1 + D_4 \alpha^2 a(\epsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

onde $a(\epsilon) = \frac{(\mu^{2\epsilon} - 1)}{\epsilon}$. Se preferirmos, podemos usar a notação compacta

$$\mathcal{O}_{jR} = Z_{jk} \mathcal{O}_k = (1 + \bar{Z})_{jk} \mathcal{O}_k, \quad (2.40)$$

sendo que

$$\bar{Z}_{jk} = \frac{(\mu^{2\epsilon} - 1)}{\epsilon} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & D_1 \alpha^2 & D_2 \alpha^2 \\ \frac{1}{6\pi} (1 + \frac{N}{4}) \alpha & D_3 \alpha^2 & D_4 \alpha^2 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

onde D_1 , D_2 , D_3 e D_4 são dados por (2.24) e (2.25). Em (2.39) e (2.40) o subscrito R significa renormalizado.

Para escrevermos (2.39) na forma diagonal precisamos fazer uma mudança de representação. Escolhendo que os novos operadores $\mathcal{O}'_i$ satisfaçam a relação

$$\mathcal{O}'_i = \sum_j C_{ij} \mathcal{O}_j , \quad (2.42)$$

de maneira que eles sejam renormalizados multiplicativamente, isto é,

$$\mathcal{O}'_{iR} = Z_i \mathcal{O}'_i , \quad (2.43)$$

encontramos que

$$(C Z C^{-1})_{ij} = Z_j \delta_{ij} , \quad (2.44)$$

sendo que C_{ij} é a matriz que diagonaliza Z_{ij} . Usando que $Z_{ij} = \delta_{ij} + \bar{Z}_{ij}$, podemos concluir

$$Z_j = \delta_{ij} + \bar{Z}_j , \quad (2.45)$$

com $\bar{Z}_j \delta_{ij} = (C \bar{Z} C^{-1})_{ij}$. Essas operações nos levam aos seguintes resultados

$$\bar{Z}_j = \frac{(\mu^{2\epsilon} - 1)}{\epsilon} \alpha^2 \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} . \quad (2.46)$$

e

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} . \quad (2.47)$$

sendo

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3} , \quad \lambda_2 = \frac{1}{12} [-\sqrt{\Theta} + 17 + 16 N] , \quad \lambda_3 = \frac{1}{12} [\sqrt{\Theta} + 17 + 16 N] , \quad (2.48)$$

$$C_{11} = 1 . \quad C_{12} = 0 , \quad C_{13} = 0 . \quad (2.49)$$

$$C_{21} = \frac{(N+4)(\Psi + 23\sqrt{\Theta} + 18N\sqrt{\Theta})}{2(92 + 95N + 18N^2)} , \quad (2.50)$$

$$C_{22} = \frac{288\pi\alpha^2(3+N)\Omega}{(92 + 95N + 18N^2)\sqrt{\Theta}} . \quad (2.51)$$

$$C_{23} = \frac{-8\pi\alpha^2(25 + 20N + \sqrt{\Theta})\Omega}{(92 + 95N + 18N^2)\sqrt{\Theta}} , \quad (2.52)$$

$$C_{31} = \frac{(N+4)(-\Psi + 23\sqrt{\Theta} + 18N\sqrt{\Theta})}{2(92 + 95N + 18N^2)} , \quad (2.53)$$

$$C_{32} = -C_{22} , \quad C_{33} = \frac{8\pi\alpha^2(25 + 20N - \sqrt{\Theta})\Omega}{(92 + 95N + 18N^2)\sqrt{\Theta}} , \quad (2.54)$$

onde

$$\Theta = 3865 + 2512N + 544N^2 , \quad (2.55)$$

$$\Psi = 2195 + 1666N + 432N^2 . \quad (2.56)$$

e

$$\Omega = 214 + 115N + 18N^2 . \quad (2.57)$$

Na forma diagonal, a inserção dos operadores Δ'_i nas funções de vértices $\Gamma^{(N)}$ nos levam às equações

$$\Gamma_{\Delta'_{iR}}^{(N_F)} = \mathcal{Z}_i \Gamma_{\Delta'_i}^{(N_F)} = \Gamma_{\Delta'_i}^{(N_F)} + \bar{\mathcal{Z}}_i \Gamma_{\Delta'_i}^{(N_F)} , \quad (2.58)$$

de modo que elas obedecem à seguinte equação do grupo de renormalização (para $g_1 = g_2 = 0$)

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} - N_F \gamma + \bar{\gamma}_{\Delta'_i} \right) \Gamma_{\Delta'_{iR}}^{(N_F)} = 0 . \quad (2.59)$$

onde γ é a dimensão anômala do campo básico ψ e $\bar{\gamma}_{\Delta'_i}$ é a dimensão anômala dos campos compostos Δ'_i , obtidos a partir de (2.42). Aplicando o operador $\mathcal{T}$ em (2.58), que extrai a parcela de pólo gerada pela regularização, a equação (2.59) toma a forma

$$2 \text{ Res} - N_F \gamma + \bar{\gamma}_{\Delta'_i} = 0, \quad (2.60)$$

onde Res são os auto-valores da matriz $\bar{\mathcal{M}}_i$, dada por (2.46).

Observe que por (2.42) e (2.47) o operador $\Delta'_3 = \Delta_3$, de modo que (2.60) fica

$$\bar{\gamma}_{\Delta'_3} = -2 \text{ Res} + 2 \gamma = \frac{7-N}{12} \alpha^2, \quad (2.61)$$

onde usamos (2.7). Assim, a dimensão do operador Δ'_3 será $d_{\Delta'_3} = 4 + \frac{7-N}{12} \alpha^2$. e para $N = 1$ o resultado reproduz (1.119).

Para os operadores $\Delta_6 = C_{21} \Delta_3 + C_{22} \Delta_4 + C_{23} \Delta_5$ e $\Delta_7 = C_{31} \Delta_3 + C_{32} \Delta_4 + C_{33} \Delta_5$ a equação (2.60) fica

$$\bar{\gamma}_{\Delta_6} = -2 \text{ Res} + 4 \gamma = \frac{1}{6}(\sqrt{\Theta} - 17 N - 18) \alpha^2, \quad (2.62)$$

e

$$\bar{\gamma}_{\Delta_7} = -2 \text{ Res} + 4 \gamma = -\frac{1}{6}(\sqrt{\Theta} + 17 N + 18) \alpha^2. \quad (2.63)$$

Observe que d_{Δ_6} aumenta para qualquer valor de N . Assim, para $\alpha < \alpha_c$ existem dois operadores Δ_{3R} e Δ_{7R} , cujas dimensões diminuem com N . Eles são portanto os candidatos naturais para implementarmos um esquema de perturbação consistente, em torno da teoria de férmions com invariância conforme, interagindo através de um campo de Chern-Simons.

Tipo de Diagramas (i,j)	pólo ₁ = D ₁	pólo ₂ = D ₂	pólo ₁ = D ₃	pólo ₂ = D ₄
(1, 0)	$\frac{5}{2\epsilon}$	0	0	$-\frac{1}{6\epsilon}$
(0, 2)	$-\frac{1}{\epsilon}$	$-\frac{1}{6\epsilon}$	$\frac{1}{\epsilon}$	$\frac{1}{6\epsilon}$
(1, 1)	0	$\frac{8}{3\epsilon}$	$\frac{8}{\epsilon}$	0
(1, 2)	$\frac{2}{\epsilon}$	0	0	$-\frac{2}{3\epsilon}$

Tabela 2.1: Diagramas sem o loop fermiônico. A primeira coluna lista diferentes tipos de diagramas (i,j), onde i e j são as linhas de *GN* (ou *Th*) e *CS* ligando as duas linhas fermiônicas, respectivamente. A segunda e terceira colunas fornecem a decomposição do termo de pólo relativo ao vértice tipo Gross-Neveu, enquanto que a quarta e quinta coluna fornecem o termo de pólo para o vértice tipo Thirring.

Número de Diagramas	pólo ₁ = D ₁	pólo ₂ = D ₂	pólo ₁ = D ₃	pólo ₂ = D ₄
20	$\frac{3N}{\epsilon}$	$\frac{N}{3\epsilon}$	$\frac{3N}{\epsilon}$	$-\frac{N}{3\epsilon}$

Tabela 2.2: Parte de pólo de diagramas com o loop fermiônico. A primeira coluna lista o número de diagramas que fornecem contribuição para o termo de pólo da função de quatro pontos. A segunda e terceira colunas fornecem a decomposição do termo de pólo relativo ao vértice tipo Gross-Neveu, enquanto que a quarta e quinta coluna fornecem o termo de pólo para o vértice tipo Thirring.

Discussões

Neste trabalho estudamos um procedimento perturbativo adequado para férmions com auto-interações quárticas, e a influência do campo de Chern-Simons sobre as propriedades de renormalizabilidade da teoria, até a ordem de 2-loops. Adotamos o método da regularização dimensional, juntamente com o esquema da subtração minimal. A escolha desta regularização se justifica, pois ela nos garante que contra-termos de ordens mais elevadas possam ser desprezados, de maneira que podemos construir uma teoria efetiva válida no regime de baixas energias.

No caso da teoria massiva com um único sabor, analisamos as funções do grupo de renormalização δ , γ e β . Nossos resultados mostram que a teoria apresenta apenas a origem como ponto fixo, que é estável no infravermelho. Mostramos também que as dimensões de operadores renormalizáveis ou super-renormalizáveis são funções monotonicamente decrescente do parâmetro de Chern-Simons α , indicando que as funções de Green construídas a partir desses operadores possuem um melhor comportamento ultravioleta. Ao contrário, operadores não renormalizáveis adquirem uma dimensão anômala que é uma função crescente com α .

É bem conhecido que no caso onde o número de campos fermiônicos torna-se grande, sensíveis mudanças ocorrem nas propriedades de teorias com interações quárticas, como a questão da renormalizabilidade e geração dinâmica de massa [11]. Esses resultados nos motivaram a estudar a influência do campo de CS em um modelo não massivo, que representa a auto-interação quártica mais geral, com simetria interna $U(N)$ e invariante de Lorentz. Construímos a teoria efetiva e obtivemos as funções do grupo de renormalização γ e β . Neste caso, a teoria apresenta uma estrutura de pontos fixos complexa, pelo fato de haver duas constantes de acoplamentos. Embora o significado dos pontos fixos e a questão da estabilidade possam ser visualizados no

espaço das constantes de acoplamento, onde podemos encontrar uma linha de pontos fixos, utilizamos o método da redução dos parâmetros de acoplamento proposto por Zimmermann [38]. Este método, aplicado em ordem mais baixa de perturbação, nos permitiu expressar a função beta da teoria reduzida como uma função de uma única constante de acoplamento, de maneira que a análise dos pontos fixos tornou-se bastante simples. Essa idéia tem sido adotada em teorias como a gravitação [61], e na teoria ϕ^4 com a inclusão de vértices não renormalizáveis [62]. Mostramos que além do ponto fixo trivial (para $g = 0$), a teoria apresenta uma linha de pontos fixos, para qualquer valor de g , no ponto onde o valor do acoplamento de CS torna-se igual a um valor crítico α_c . Assim, para $\alpha^2 < \alpha_c^2$ temos um ponto infravermelho estável e para $\alpha^2 > \alpha_c^2$ temos um ponto infravermelho instável. Com relação aos operadores de campo, encontramos que para operadores com dimensão menor ou igual a três, suas respectivas dimensões anômalas diminuem com o aumento do parâmetro α , que é um resultado qualitativamente similar ao caso $N = 1$. Com relação aos operadores não renormalizáveis, a situação é mais complicada pois o processo de renormalização faz com que haja uma mistura entre operadores. Após diagonalizarmos a matriz da renormalização de função de onda, encontramos que para uma combinação linear específica dos operadores $\bar{\psi}D^2\psi$, $(\bar{\psi}\psi)^2$ e $(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2$, sua dimensão anômala adquire um sinal negativo sobre a influência do campo de CS . Dado a existência de tal operador, podemos conjecturar que a série perturbativa construída a partir dele pode levar a um melhor comportamento ultravioleta. Deve ser ressaltado que nossos cálculos são de ordem mais baixa e válidos somente para pequenos momentos. Efeitos de correções para valores de momento maior, podem levar a mudanças em nossos resultados (o valor de N para o qual exista um operador quártico com dimensão negativa pode aumentar).

Este trabalho poderia ser estendido incorporando-se efeitos de ordem mais alta em p , na construção da teoria efetiva. Isto nos levaria a adicionar novas interações do tipo $K_1 (\bar{\psi} \not{\partial} \psi)^2$ e $K_2 (\bar{\psi}\psi)(\bar{\psi}\not{\partial}^2\psi)$, por exemplo, que poderiam novamente ser reduzidas, utilizando o formalismo de Zimmermann.

Apêndice A

Notação no Espaço de Minkowski

Neste apêndice resumimos nossa notação e convenções no espaço de Minkowski. Utilizamos o sistema de unidades naturais onde $c = \hbar = 1$.

Nós utilizamos a métrica,

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.1})$$

e o tensor anti-simétrico $\epsilon^{\mu\nu\lambda}$ normalizado de tal maneira que $\epsilon^{012} = 1$. A contração de dois tensores anti-simétricos com um índice repetido é dado por,

$$\epsilon_{\mu\alpha\beta}\epsilon^{\mu\theta\rho} = (\delta_{\alpha}^{\theta}\delta_{\beta}^{\rho} - \delta_{\alpha}^{\rho}\delta_{\beta}^{\theta}) . \quad (\text{A.2})$$

A.1 Representação e Propriedades das Matrizes de Dirac

Em $(2+1)$ dimensões existem duas representações inequivalentes para as matrizes de Dirac [11] com dimensão 2×2 . Na representação de duas componentes a equação de Dirac admite soluções com energia positiva e negativa, sem haver no entanto a degenerescência do spin, isto é, partícula e anti-partícula possuem spins fixos e opostos. Neste trabalho adotamos a seguinte representação ¹: $\gamma^0 = \sigma^3$, $\gamma^1 = i\sigma^1$, $\gamma^2 = i\sigma^2$, onde $\sigma^i = 1, 2, 3$ são as matrizes de spin de Pauli dadas por

¹A outra representação difere das definidas acima apenas por um sinal em uma das matrizes γ .

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad (\text{A.4})$$

e

$$\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.5})$$

As matrizes γ^0 , γ^1 e γ^2 e mais a identidade formam uma base para a família das matrizes 2×2 , isto é, qualquer matriz 2×2 pode ser escrita como uma combinação linear dessas matrizes. Elas obedecem as seguintes relações ²,

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2 g^{\mu\nu} , \quad (\text{A.6})$$

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -2i \epsilon^{\mu\nu\beta} \gamma_\beta , \quad (\text{A.7})$$

$$\gamma^0 = -\gamma^{0^{-1}} = \gamma^{0^t} = \gamma^{0^\dagger} = \gamma^{0^*} , \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma^1 = -\gamma^{1^{-1}} = \gamma^{1^t} = -\gamma^{1^\dagger} = -\gamma^{1^*} , \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma^2 = -\gamma^{2^{-1}} = -\gamma^{2^t} = -\gamma^{2^\dagger} = \gamma^{2^*} , \quad (\text{A.10})$$

ou seja, γ^0 é hermitiano enquanto que γ^1 e γ^2 são anti-hermitianos. Temos ainda as seguintes propriedades:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 3 \mathbf{I} , \quad (\text{A.11})$$

²A notação utilizada aqui é tal que as operações : complexo conjugado, transposta e hermitiano adjunto, de uma matriz A , são representadas respectivamente por, A^* , A^t e $A^\dagger = (A^*)^t$.

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\epsilon^{\mu\nu\beta} \gamma_\beta , \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha = -i\epsilon^{\mu\nu\alpha} + g^{\mu\nu} \gamma^\alpha + g^{\nu\alpha} \gamma^\mu - g^{\mu\alpha} \gamma^\nu , \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} &= g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3} - g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} + g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} + i\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_4} \gamma^{\mu_3} - i\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \gamma^{\mu_4} \\ &- i\epsilon^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \gamma^{\mu_4} - i\epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu_2} \gamma^{\mu_1} + i\epsilon^{\mu_3 \mu_4 \mu_1} \gamma^{\mu_2} , \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Tr}(\mathbf{I}) = 2 , \quad \text{Tr}(\gamma^\mu) = 0 , \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 2 g^{\mu\nu} , \quad \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha) = -2i\epsilon^{\mu\nu\alpha} , \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta) = 2 (g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha}) , \quad (\text{A.17})$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\sigma) = -2i (g^{\mu\nu} \epsilon^{\alpha\beta\sigma} + g^{\alpha\beta} \epsilon^{\mu\nu\sigma} - g^{\alpha\sigma} \epsilon^{\mu\nu\beta} + g^{\beta\sigma} \epsilon^{\mu\nu\alpha}) , \quad (\text{A.18})$$

A.2 Parâmetros de Feynman e a Regularização Dimensional

Para se combinar os propagadores no denominador de um diagrama de Feynman se introduz integrais sobre parâmetros, denominados de parâmetros de Feynman. A seguir apresentamos as integrais paramétricas utilizadas neste trabalho.

$$\frac{1}{A^\alpha B^\beta \dots E^\rho} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \dots + \rho)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta) \dots \Gamma(\rho)} \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \frac{\delta(1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n) x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} \dots x_n^{\rho-1}}{(Ax_1 + Bx_2 + \dots + Ex_n)^{\alpha+\beta+\dots+\rho}} \quad (\text{A.19})$$

No caso de apenas dois denominadores, a fórmula acima se reduz a

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 dx \frac{x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}}{[ax + (1-x)b]^{\alpha+\beta}} . \quad (\text{A.20})$$

São úteis também as parametrizações,

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{[c(1-y) + y[(1-x)b + ax]]^3} . \quad (\text{A.21})$$

e

$$\frac{1}{a^\alpha b^\beta c^\gamma} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)} \int_0^1 dx \int_0^y dy \frac{(1-x)^{\alpha-1} y^{\gamma-1} (x-y)^{\beta-1}}{[a + (b-a)x + (c-b)y]^{\alpha+\beta+\gamma}} . \quad (\text{A.22})$$

Usamos a seguinte tabela de integrais em n dimensões no espaço de Minkowski [39, 40, 42]

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \frac{i^{2\alpha+1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2})}{\Gamma(\alpha)} \Delta^{\frac{D}{2}-\alpha} , \quad (\text{A.23})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \frac{i^{2\alpha+1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(\alpha)} \Delta^{\frac{D}{2}+1-\alpha} , \quad (\text{A.24})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^2}{(k^2 - \Delta)^\alpha} = \frac{i^{2\alpha+1}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{D(D+2)}{4} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{D}{2} - 2)}{\Gamma(\alpha)} \Delta^{\frac{D}{2}+2-\alpha} , \quad (\text{A.25})$$

que são casos particulares da fórmula geral

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^a}{(k^2 - \Delta)^b} = (-1)^{D-a} \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Delta^{\frac{D}{2}+a-b} \frac{\Gamma(b-a-\frac{D}{2}) \Gamma(\frac{D}{2}+a)}{\Gamma(\frac{D}{2}) \Gamma(b)} . \quad (\text{A.26})$$

Apêndice B

Simetrias do Modelo

A transformação ¹ de paridade em $(2 + 1)D$ é a inversão de apenas um eixo espacial, já que a inversão de dois eixos corresponde a uma rotação de π , que é uma transformação contínua. Assim, por paridade

$$x^\mu = (t, x, y) \rightarrow (t, x, y)^P = (t, -x, y) = x'^\mu \ ,$$

$$\mathcal{P}A^0(x^\mu)\mathcal{P}^{-1} = A^0(x'^\mu) \ , \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{P}A^1(x^\mu)\mathcal{P}^{-1} = -A^1(x'^\mu) \ , \quad (\text{B.2})$$

$$\mathcal{P}A^2(x^\mu)\mathcal{P}^{-1} = A^2(x'^\mu) \ , \quad (\text{B.3})$$

e por consequência,

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha}\mathcal{P}(F^{\mu\nu}A^\alpha)\mathcal{P}^{-1} \rightarrow -\epsilon_{\mu\nu\alpha}F^{\mu\nu}A^\alpha \ , \quad (\text{B.4})$$

o que nos mostra que o termo de CS quebra explicitamente a simetria de paridade.

Com relação aos férmions eles se transformam de acordo com

$$\mathcal{P}\psi(x^\mu)\mathcal{P}^{-1} = A\psi(x'^\mu) \ ,$$

¹Note que, com a representação de duas componentes, não há como gerar uma transformação quiral, uma vez que não existe uma outra matriz 2×2 que anticomute com as matrizes de Dirac.

e

$$\mathcal{P} \bar{\psi}(x^\mu) \mathcal{P}^{-1} = -\bar{\psi}(x'^\mu) A^\dagger = \bar{\psi}(x'^\mu) A ,$$

onde $A = \gamma^1$. Portanto, os bilineares se transformam de uma maneira geral como

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \bar{\psi} \Gamma \psi : \mathcal{P}^{-1} &= \mathcal{P} : \bar{\psi}_\alpha \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} \Gamma_{\alpha\beta} \mathcal{P}^{-1} \mathcal{P} \psi : \mathcal{P}^{-1} = - : \bar{\psi}_\nu A_{\nu\alpha}^\dagger \Gamma_{\alpha\beta} A_{\beta\sigma} \psi_{\sigma\beta} : \\ &= - : \bar{\psi} (A^\dagger \Gamma A) \psi : = : \bar{\psi} (A \Gamma A) \psi : , \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

e portanto temos que

$$\mathcal{P} : \bar{\psi} \psi : \mathcal{P}^{-1} \rightarrow - : \bar{\psi} \psi : \quad (\text{B.6})$$

e

$$\mathcal{P} : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : A_\mu \mathcal{P}^{-1} \rightarrow : \bar{\psi} \gamma^\mu \psi : A_\mu . \quad (\text{B.7})$$

Observe que o termo de massa quebra explicitamente a paridade². Contrariamente, a interação trilinear assim como a quártica são invariantes por paridade.

Por conjugação de carga,

$$\mathcal{C} \bar{\psi} \mathcal{C}^{-1} = -C^{-1} \psi = -C^\dagger \psi = -C \psi ,$$

e

$$\mathcal{C} \bar{\psi} \mathcal{C}^{-1} = \bar{\psi} C ,$$

onde $C = \gamma^2$. Com isso os bilineares se transformam como

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : \bar{\psi} \Gamma \psi : \mathcal{C}^{-1} &= \mathcal{C} : \bar{\psi}_\beta \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \Gamma_{\beta\alpha} \mathcal{C}^{-1} \mathcal{C} \psi_\alpha : \mathcal{C}^{-1} = - : C_{\beta\nu}^{-1} \psi_\nu \Gamma_{\beta\alpha} \bar{\psi}_\sigma C_{\sigma\alpha} : \\ &= : \bar{\psi}_\sigma C_{\sigma\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^\dagger C_{\beta\nu}^{-1} \psi_\nu : = : \bar{\psi} (C \Gamma^\dagger C^{-1}) \psi : , \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

²Para que a densidade de Lagrangeana de Dirac seja invariante sob a operação de paridade, devemos dobrar o número de componentes do campo espinorial, ou seja, usar a representação 4×4 para as matrizes γ [11] [39].

onde usamos explicitamente a estatística de Fermi. Assim,

$$C : \bar{\psi}\psi : C^{-1} \rightarrow : \bar{\psi}\psi : \quad e \quad C : \bar{\psi}\gamma^\mu\psi : C^{-1} \rightarrow - : \bar{\psi}\gamma^\mu\psi : , \quad (\text{B.9})$$

de modo que a corrente vetorial adquire um sinal menos pela transformação . Uma consequência disso é que para a teoria ser invariante por conjugação de carga o potencial A^μ também deve ser ímpar, ou seja

$$C A_\mu C^{-1} = - A_\mu , \quad (\text{B.10})$$

e portanto o termo de CS é invariante por esta simetria.

Pela operação de inversão temporal,

$$\psi(\vec{x}, t) \rightarrow T\psi(\vec{x}, t)T^{-1} = B\psi(\vec{x}, -t) ,$$

e

$$\bar{\psi}(\vec{x}, t) \rightarrow T\bar{\psi}(\vec{x}, t)T^{-1} = -\bar{\psi}(\vec{x}, -t) B^\dagger ,$$

onde $B = \gamma^2$. Portanto,

$$T : \bar{\psi}\Gamma\psi : T^{-1} = -\bar{\psi}(B^\dagger\Gamma^*B)\psi . \quad (\text{B.11})$$

Desta forma, as correntes escalar e vetorial se transformam como

$$: \bar{\psi}(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t) : \rightarrow T : \bar{\psi}(\vec{x}, t)\psi(\vec{x}, t) : T^{-1} = - : \bar{\psi}(\vec{x}, -t)\psi(\vec{x}, -t) : ,$$

$$: \bar{\psi}(\vec{x}, t)\gamma^0\psi(\vec{x}, t) : \rightarrow T : \bar{\psi}(\vec{x}, t)\gamma^0\psi(\vec{x}, t) : T^{-1} = : \bar{\psi}(\vec{x}, -t)\gamma^0\psi(\vec{x}, -t) : ,$$

e

$$: \bar{\psi}(\vec{x}, t)\gamma^k\psi(\vec{x}, t) : \rightarrow T : \bar{\psi}(\vec{x}, t)\gamma^k\psi(\vec{x}, t) : T^{-1} = - : \bar{\psi}(\vec{x}, -t)\gamma^k\psi(\vec{x}, -t) : .$$

Temos também que, por inversão temporal,

$$A^0(\vec{x}, t) \rightarrow TA^0(\vec{x}, t)T^{-1} = A^0(\vec{x}, -t) ,$$

e

	$\bar{\psi}\psi$	$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	A_μ	$\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$	$\epsilon_{\mu\nu\alpha}F^{\mu\nu}A^\alpha$	∂_μ
$\mathcal{P}$	-	$(-1)^{\mu+1}$	$(-1)^\mu$	+	-	$(-1)^\mu$
$\mathcal{C}$	+	-	-	+	+	+
$\mathcal{T}$	-	$\text{sign}(\frac{1}{2} - \mu)$	$\text{sign}(\frac{1}{2} - \mu)$	+	-	+
$\mathcal{PT}$	+	$(-1)^{\mu+1}\text{sign}(\frac{1}{2} - \mu)$	$(-1)^\mu\text{sign}(\frac{1}{2} - \mu)$	+	+	+
$\mathcal{CPT}$	+	$(-1)^{\mu+2}\text{sign}(\frac{1}{2} - \mu)$	$(-1)^{\mu+1}\text{sign}(\frac{1}{2} - \mu)$	+	+	+

Tabela B.1: Resumo das simetrias discretas contidas em (1.1). O símbolo $\text{sign}(x)$ representa o sinal de x .

$$\mathbf{A}(\vec{x}, t) \rightarrow \mathcal{T} \mathbf{A}(\vec{x}, t) \mathcal{T}^{-1} = -\mathbf{A}(\vec{x}, -t) \quad .$$

Como podemos ver pelas expressões acima o termo de massa do férmion e o termo de CS quebram explicitamente esta simetria. Note, entretanto, que a interação quártica e a trilinear são invariantes por inversão temporal.

Vimos até então que as simetrias discretas podem ser violadas individualmente. É possível também definir produtos de simetrias que podem ser obtidas por duas ou mais simetrias discretas individualmente. Deste modo a teoria (1.1) é invariante por $\mathcal{CPT}$ e também por $\mathcal{PT}$. A tabela B.1 mostra um resumo das simetrias discretas contidas em (1.1).

Com relação a simetria de gauge, a ação obtida a partir de (1.1) é invariante pela transformação local

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Theta(x), \quad (\text{B.12})$$

e

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\Theta(x)} \psi(x) \quad , \quad (\text{B.13})$$

uma vez que a densidade de Lagrangeana muda apenas por uma derivada total, ou seja,

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} \rightarrow \mathcal{L}_{\text{Dirac}} \quad ,$$

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \rightarrow \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu + \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \Theta \quad ,$$

$$\mathcal{L}_{CS} \rightarrow \mathcal{L}_{CS} + \frac{1}{4\pi\alpha} \epsilon^{\mu\nu\alpha} \partial_\alpha (F_{\mu\nu} \Theta(x)) \quad ,$$

mantendo a ação invariante.

Apêndice C

Diagramas de 1-Loop

Neste apêndice vamos considerar o modelo (2.1) e obter a renormalização de massa, função de onda e das constantes de acoplamento, na ordem de 1-loop. Como veremos, devido ao uso da regularização dimensional esses diagramas são finitos.

C.1 Função de Dois Pontos

C.1.1 Ordem g

Na ordem g os diagramas que contribuem são aqueles mostrados na figura C.1.

Figura C.1: Diagramas de Feynman em 1-loop na ordem g .

Para o vértice tipo Gross-Neveu a figura C.1 nos fornece a seguinte expressão

$$I_{1GN}^{(2)} = I_{1GN}^{(2)}(a) + I_{1GN}^{(2)}(b) = -2i \frac{g_1}{\Lambda} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} [S(k) - \text{Tr}[S(k)]]$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \frac{g_1}{\Lambda} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\not{k} + m - 2N m}{k^2 - m^2} = 2 \frac{g_1}{\Lambda} m(1 - 2N) \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} \\
&= -\frac{2i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{g_1}{\Lambda} m(1 - 2N) \Gamma(1 - \frac{D}{2}) (m^2)^{\frac{D}{2}-1} .
\end{aligned} \tag{C.1}$$

onde usamos as propriedades (A.15) e a expressão (A.23). Para $D \rightarrow 3$ obtemos o seguinte resultado

$$I_{1GN}^{(2)} = i \frac{g_1}{\Lambda} \frac{1}{2\pi} m^2 (1 - 2N) . \tag{C.2}$$

Para o vértice tipo Thirring temos,

$$\begin{aligned}
I_{1Th}^{(2)} &= I_{1Th}^{(2)}(a) + I_{1Th}^{(2)}(b) = -2i \frac{g_2}{\Lambda} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} [\gamma_\mu S(k) \gamma^\mu - \gamma_\mu \text{Tr}[\gamma^\mu S(k)]] \\
&= 2 \frac{g_2}{\Lambda} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\frac{\gamma_\mu (\not{k} + m) \gamma^\mu - N \gamma_\mu \text{Tr}[\gamma^\mu (\not{k} + m)]}{k^2 - m^2} \right] .
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Usando (A.13) e (A.14) com $\alpha \rightarrow \mu$, juntamente com (A.18) obtemos

$$I_{1Th}^{(2)} = 2 \frac{g_2}{\Lambda} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\frac{-\not{k} + 3m - 2N \not{k}}{k^2 - m^2} \right] = i \frac{g_2}{\Lambda} \frac{3}{2\pi} m^2 , \tag{C.4}$$

onde novamente usamos (A.23). Observe que a contribuição do diagrama que contém o traço é nulo. Assim, nesta ordem

$$I_1^{(2)} = I_{1GN}^{(2)} + I_{1Th}^{(2)} = \frac{i}{\Lambda} \frac{m^2}{2\pi} [g_1 (1 - 2N) + 3g_2] . \tag{C.5}$$

C.1.2 Ordem α

Na ordem α o diagrama que contribui é aquele mostrado na figura C.2, cuja expressão analítica é

$$\begin{aligned}
I_2^{(2)}(p, m) &= \frac{4\pi\alpha}{2!} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left[i\gamma^\mu \left(\frac{i}{\not{p} - \not{k} - m} \right) i\gamma^\nu \right] \frac{k^\lambda}{k^2} \\
&= -2i\pi\alpha \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k} + m) \gamma^\nu}{[(p - k)^2 - m^2]} \frac{k^\lambda}{k^2} .
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Figura C.2: Diagrama de Feynman em 1-loop na ordem α .

O numerador da expressão acima pode ser decomposto em duas parcelas como segue,

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda} \gamma^\mu \gamma^\nu m k^\lambda + \epsilon_{\mu\nu\lambda} \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu (p - k)_\alpha k^\lambda.$$

Usando (A.13) e (A.14) para a primeira e a segunda parcela respectivamente, juntamente com (A.2), obtemos

$$I_2^{(2)}(p, m) = 4\pi\alpha \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{p \cdot k - k^2 - m \not{k}}{[(p - k)^2 - m^2] k^2}. \quad (\text{C.7})$$

Usando em seguida a parametrização de Feynman (A.20), fazendo a translação $k \rightarrow k + xp$ e eliminando os termos ímpares, temos

$$I_2^{(2)}(p, m) = 4\pi\alpha \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{x(1-x)p^2 - xm \not{p} - k^2}{[k^2 - \Delta(p, m)]^2}, \quad (\text{C.8})$$

onde $\Delta(p, m) = xm^2 - x(1-x)p^2$.

Fazendo a integração no momento com ajuda de (A.23) e (A.24),

$$\begin{aligned} I_2^{(2)}(p, m) &= i\alpha (4\pi)^{1-\frac{D}{2}} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \int_0^1 dx \left[(x(1-x)p^2 - xm \not{p}) \Delta^{\frac{D}{2}-2}(p, m) \right. \\ &\quad \left. + \frac{D}{2-D} \Delta^{\frac{D}{2}-1}(p, m) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

onde usamos a identidade $\Gamma(1 - \frac{D}{2}) = \frac{2}{2-D} \Gamma(2 - \frac{D}{2})$.

Para $D = 3$ o resultado é finito e vale

$$I_2^{(2)}(p, m) = \frac{i}{2} \alpha \int_0^1 dx \frac{4x(1-x)p^2 - xm(\not{p} + 3m)}{[m^2 x - x(1-x)p^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{i}{2} \alpha (A(m, p) + B(m, p) \not{p}), \quad (\text{C.10})$$

onde

$$\begin{aligned} A(m, p) &= \int_0^1 dx \frac{4x(1-x)p^2 - 3xm^2}{[m^2x - x(1-x)p^2]^{\frac{1}{2}}} \\ &= -|m| + \left(\frac{m^2}{2\sqrt{p^2}} - \frac{\sqrt{p^2}}{2} \right) \log\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2 + 2|m|\sqrt{p^2} + p^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

e

$$B(m, p) = \frac{m}{2(p^2)^{\frac{3}{2}}} \left(-2|m|\sqrt{p^2} + (-m^2 + p^2) \log\left(\frac{m^2 - p^2}{m^2 + 2|m|\sqrt{p^2} + p^2} \right) \right). \quad (\text{C.12})$$

A expressão (C.10) para $m = 0$ nos fornece o seguinte resultado,

$$I_2^{(2)}(p, m = 0) = \frac{\pi}{4} \frac{p^2}{\sqrt{p^2}} \alpha, \quad (\text{C.13})$$

que nos mostra que no caso da teoria sem massa, não existe renormalização de função de onda para este diagrama.

C.2 Tensor de Polarização

O tensor de polarização do vácuo é representado graficamente pela figura C.3, cuja expressão analítica no espaço dos momentos é dada por

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) &= \frac{2}{2!} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{k} - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k} - \not{p} - m} \right] \\ &= - \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\text{Tr} [\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{k} - \not{p} + m)]}{(k^2 - m^2) [(k - p)^2 - m^2]}. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

onde levamos em conta o sinal menos devido ao “loop” fermiônico e o fator dois no numerador é devido à multiplicidade do diagrama.

O cálculo do traço pode ser feito de acordo com as propriedades (A.15), (A.16), e (A.17). Após um pouco de álgebra resulta que

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) &= - \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2 - m^2) [(k - p)^2 - m^2]} \\ &\times \left[2im\epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho + 2g^{\mu\nu}(m^2 - k^2 + k\dot{p}) + 4k^\mu k^\nu - 2p^\mu p^\nu - 2k^\mu p^\nu \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Figura C.3: Tensor de Polarização.

A integral acima é facilitada se usarmos a parametrização de Feynman $\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax+b(1-x)]^2}$, onde $ax + b(1-x) = (k - xp)^2 - \Delta$, com $\Delta = m^2 - p^2 x(1-x)$. Fazemos em seguida a mudança de variável $k \rightarrow k + xp$, de maneira a simplificar o denominador, e eliminamos os termos ímpares no numerador, de maneira que se obtém

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) = & -2 \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} [2k^\mu k^\nu - 2p^\mu p^\nu x(1-x) \\ & - g^{\mu\nu}(k^2 - x(1-x)p^2 - m^2) + im\epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho] . \end{aligned} \quad (C.16)$$

Usando a identidade $2p^\mu p^\nu x(1-x) = p^\mu p^\nu x(1-x) + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}(-\Delta + m^2)$, a invariância de Lorentz $\int_{\text{Reg}} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} f(k^2) k^\mu k^\nu = \frac{g^{\mu\nu}}{D} \int_{\text{Reg}} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} f(k^2) k^2$, e agrupando os termos

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(p) = & -2 \int_0^1 dx \int_{\text{Reg}} \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^2} \left[\left(\frac{2}{D} - 1 \right) g^{\mu\nu} k^2 + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \Delta \right. \\ & \left. + \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) (p^2 x(1-x) + m^2) + im\epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho \right] . \end{aligned} \quad (C.17)$$

Fazemos as integrações em k com ajuda de (A.23) e (A.24) e também da identidade $\Gamma(1 - \frac{D}{2}) = \frac{2}{2-D} \Gamma(2 - \frac{D}{2})$, encontramos

$$\Pi^{\mu\nu}(p) = -i \frac{2^{1-D}}{\pi^{\frac{D}{2}}} \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \left[2(p^2 g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu) \Pi_1(p^2) + im\epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho \Pi_2(p^2) \right] . \quad (C.18)$$

onde,

$$\begin{aligned}
\Pi_1(p^2) &= \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[m^2 - p^2 x(1-x)]^{1/2}} \\
&= \frac{-|m|}{2p^2} - \frac{(4m^2 + p^2)}{8p^{3/2}} \log\left(\frac{2|m|\sqrt{p^2 - p^2}}{2|m|\sqrt{p^2 + p^2}}\right), \tag{C.19}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Pi_2(p^2) &= \int_0^1 dx \frac{1}{[m^2 - p^2 x(1-x)]^{1/2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{p^2}} \log\left(\frac{2|m|\sqrt{p^2 - p^2}}{2|m|\sqrt{p^2 + p^2}}\right). \tag{C.20}
\end{aligned}$$

Observe que, como esperado, o resultado (C.18) é finito para $D = 3$, e para a teoria sem massa toma a forma

$$\Pi'''(p, m = 0) = \frac{1}{16} \frac{p^2}{\sqrt{p^2}} (g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}). \tag{C.21}$$

C.3 Função de Quatro Pontos

Os diagramas que contribuem na ordem $g\alpha$ e g^2 estão mostradas nas figuras C.4 e C.5. Embora eles possuam divergências logaritmica e linear, respectivamente, o uso da regularização dimensional os torna finito. Não faremos aqui o cálculo desses diagramas, uma vez que eles não contribuem para as funções do grupo de renormalização.

Figura C.5: Diagramas de 1-loop de ordem g^2 com $N_F = 4$.

Figura C.6: Diagramas de 1-loop de ordem g^2 com $N_F = 4$.

Apêndice D

Diagramas de 2-Loops

D.1 Funções de Quatro Pontos

Neste apêndice encontram-se exemplos de algumas figuras de quatro pontos na ordem de 2-loops. Introduzimos a linha tracejada, que chamaremos de linha auxiliar de Gross-Neveu (*GN*) ou Thirring (*Th*), para clarificar a estrutura tensorial do vértice fermiônico. A título de exemplo, para a teoria com simetria $U(N)$, faremos o cálculo de dois diagramas (um dos diagramas com o loop fermiônico e o outro e sem o loop), para ambos os vértices quadrilineares, para mostramos o procedimento. Neste caso, as integrais I_1 e I_2 (veja as equações (2.22) e (2.23)) serão feitas simultaneamente uma vez que elas diferem apenas pela forma do numerador, sendo o denominador comum a ambas.

Um dos diagramas que contribuem nesta ordem ($g\alpha^2$) é o mostrado na figura abaixo.

a. Quando a linha tracejada representa o vértice tipo *GN*

Neste caso temos que

$$A^{GN} = - \not{k}_2 \gamma^\mu (\not{k}_1 + \not{k}_2) \gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\beta ,$$

$$B^{GN} = -\gamma^\alpha \not{k}_2 ,$$

e

$$C^{GN} = 2 \times 4\pi^2 \frac{\epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} k_1^\lambda k_2^\rho}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2)^3 k_1^2 k_2^2} ,$$

Figura D.1: Gráfico sem o loop fermiônico que contribue na ordem $g\alpha^2$.

onde 2 é o fator combinatorial, e introduzimos a massa m nos denominadores dos propagadores fermiônicos a fim de evitar possíveis divergências infra-vermelhas nos cálculos intermediários.

Fazendo as operações de traço e contraindo os índices repetidos, as expressões para I_1 e I_2 tomam a forma

$$I_1^{GN} = 64 \pi^2 N \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{(k_1^2 + k_1 \cdot k_2) (k_2^2)^2}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2)^3 k_1^2 k_2^2}, \quad (C.1)$$

e

$$I_2^{GN} = -64 \pi^2 N (1 + 2N) \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{(k_1^2 + k_1 \cdot k_2) (k_2^2)^2}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2)^3 k_1^2 k_2^2}. \quad (C.2)$$

Note que neste caso, $I_2^{GN} = -(1 + 2N) I_1^{GN}$, de modo que faremos apenas o cálculo de I_1^{GN} . Usando a parametrização

$$\frac{1}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] k_1^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k_1 + x k_2)^2 - \Delta]^2}, \quad (C.3)$$

sendo $\Delta = x m^2 - x(1-x) k_2^2$, fazendo a translação $k_1 \rightarrow k_1 - x k_2$ e eliminando os termos ímpares, obtemos, após integrarmos em k_1

$$I_1^{GN} = -i N \mathcal{T} \frac{2^{6-D}}{\pi^{\frac{D}{2}-2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \left[\frac{D}{2} \Gamma(1 - \frac{D}{2}) \frac{k_2^2}{(k_2^2 - m^2)^3 \Delta^{1-\frac{D}{2}}} \right]$$

$$+ x(1-x) \Gamma(2 - \frac{D}{2}) \frac{(k_2^2)^2}{(k_2^2 - m^2)^3 \Delta^{2 - \frac{D}{2}}} \Big] . \quad (\text{D.4})$$

A segunda parametrização será da forma

$$\frac{1}{\Delta^\alpha (k_2^2 - m^2)^\beta} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_0^1 dy \frac{y^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1}}{a^{\alpha+\beta} (k_2^2 - \Delta_1)^{\alpha+\beta}} . \quad (\text{D.5})$$

sendo $a = 1 - x(1-x)y - y$ e $\Delta_1 = \frac{m^2}{a}(1 - xy - y)$, de maneira que

$$\begin{aligned} I_1^{GN} = & -iN \mathcal{T} \frac{2^{6-D}}{\pi^{\frac{D}{2}-2}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy (1-y)^2 \left[\frac{D}{4} \Gamma(4 - \frac{D}{2}) \frac{y^{-\frac{D}{2}}}{a^{4-\frac{D}{2}}} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{k_2^2}{(k_2^2 - \Delta_1)^{4-\frac{D}{2}}} \right. \\ & + \left. \Gamma(5 - \frac{D}{2}) x(1-x) \frac{y^{1-\frac{D}{2}}}{2a^{5-\frac{D}{2}}} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{(k_2^2)^2}{(k_2^2 - \Delta_1)^{5-\frac{D}{2}}} \right] . \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Fazendo as integrações na variável k_2 , com ajuda de (A.27) e (A.28), encontramos

$$\begin{aligned} I_1^{GN} = & N \mathcal{T} \frac{2^{3-2D}}{\pi^{D-2}} (-1)^{3-\frac{D}{2}} \Gamma(3-D) \int_0^1 dx \int_0^1 dy (1-y)^2 \Delta_1^{D-3} \\ & \times \left[D^2 \frac{y^{-\frac{D}{2}}}{a^{4-\frac{D}{2}}} + D(D+2) x(1-x) \frac{y^{1-\frac{D}{2}}}{a^{5-\frac{D}{2}}} \right] . \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Finalmente, fazendo as integrações paramétricas e restando apenas a parcela proporcional a $\frac{1}{\epsilon}$, encontramos

$$I_1^{GN} = -N \quad e \quad I_2^{GN} = -(1+2N) I_1^{GN} = N(1+2N) , \quad (\text{D.8})$$

Substituindo I_1^{GN} e I_2^{GN} em (2.20) e (2.21), obtemos

$$\text{pólo}_1 = 0 \quad e \quad \text{pólo}_2 = \frac{1}{6\epsilon} . \quad (\text{D.9})$$

Deste modo, para este diagrama, a parcela de pólo será dada por

$$\text{pólo}^{GN} = \frac{1}{6\epsilon} \Gamma \otimes \Gamma . \quad (\text{D.10})$$

b. Quando a linha tracejada representa o vértice tipo Th

Neste caso, A , B e C são dadas por

$$A^{Th} = -\gamma^\theta \not{k}_2 \gamma^\mu (\not{k}_1 + \not{k}_2) \gamma^\nu \not{k}_2 \gamma^\beta ,$$

$$B^{Th} = -\gamma^\alpha \not{k}_2 \gamma_\theta ,$$

e

$$C^{Th} = C^{GN} = 2 \times 4\pi^2 \frac{\epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\theta} k_1^\lambda k_2^\theta}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2)^3 k_1^2 k_2^2} .$$

Fazendo as operações de traço e contraindo os índices repetidos, I_1 e I_2 tomam a forma

$$I_1^{Th} = 64 \pi^2 N (3 - 2N) \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{(k_1^2 + k_1 \cdot k_2) (k_2^2)^2}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2)^3 k_1^2 k_2^2} . \quad (D.11)$$

e

$$I_2^{Th} = 64 \pi^2 N (1 - 4N) \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{(k_1^2 + k_1 \cdot k_2) (k_2^2)^2}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2)^3 k_1^2 k_2^2} . \quad (D.12)$$

Observe que as integrais contidas em I_1^{Th} e I_2^{Th} são as mesmas feitas anteriormente,

portanto, podemos concluir facilmente que

$$I_1^{Th} = -N (3 - 2N) \quad e \quad I_2^{Th} = -N (1 - 4N) . \quad (D.13)$$

Substituindo essas expressões em (2.20) e (2.21), temos

$$\text{pólo}_1 = \frac{1}{2\epsilon} \quad e \quad \text{pólo}_2 = \frac{1}{3\epsilon} ,$$

de maneira que a parcela divergente terá a seguinte decomposição

$$\text{pólo}^{Th} = \frac{1}{2\epsilon} \Delta \otimes \Delta + \frac{1}{3\epsilon} \Gamma \otimes \Gamma . \quad (D.14)$$

Com relação aos diagramas com loop fermiônico, um dos que contribuem é o mostrado na figura D.2.

Figura D.2: Gráfico com o loop fermiônico que contribue na ordem $g\alpha^2$.

a. Quando a linha tracejada representa o vértice tipo GN

Para um vértice tipo Gross-Neveu temos

$$A^{GN} = -\gamma^\mu k_2 ,$$

$$B^{GN} = \gamma^\beta k_2 .$$

e

$$C^{GN} = 2 \times 4\pi^2 N \frac{\epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\rho} k_2^\lambda k_2^\rho}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2)^2 (k_1^2 - m^2) (k_2^2)^2} \text{Tr} [\gamma^\nu (k_1 + k_2) \gamma^\alpha k_1] ,$$

onde introduzimos um fator N devido ao loop fermiônico.

Fazendo as operações de traço e contraindo os índices repetidos, obtemos

$$I_1^{GN} = 16 \pi^2 N^2 \mathcal{T} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{-k_{2\alpha} k_{2\nu} k_2^2 + g_{\alpha\nu} (k_2^2)^2}{(k_2^2 - m^2) (k_2^2)^2} \times \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{4 k_1^\alpha k_1^\nu + 2 k_2^\alpha k_1^\nu + 2 k_1^\alpha k_2^\nu - 2 g^{\alpha\nu} (k_1^2 + k_1 \cdot k_2)}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_1^2 - m^2)} . \quad (C.15)$$

Aqui também temos a mesma relação entre I_1^{GN} e I_2^{GN} , isto é, $I_2^{GN} = -(1 + 2N) I_1^{GN}$, de modo que precisamos calcular apenas uma delas. Usando a parametrização

$$\frac{1}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_1^2 - m^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k_1 + x k_2)^2 - \Delta]^2} . \quad (C.16)$$

sendo $\Delta = m^2 - x(1-x)k_2^2$, fazendo a translação $k_1 \rightarrow k_1 - xk_2$, e eliminando os termos ímpares, obtemos, após integrarmos em k_1

$$I_1^{GN} = i N^2 \mathcal{T} \frac{2^{5-D}}{\pi^{\frac{D}{2}-2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \left[\Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \frac{k_2^2}{(k_2^2 - m^2) \Delta^{1-\frac{D}{2}}} + 2x(1-x) \Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \frac{(k_2^2)^2}{(k_2^2 - m^2) \Delta^{2-\frac{D}{2}}} \right]. \quad (D.17)$$

Usando a parametrização (D.5), chegamos a

$$I_1^{GN} = i N^2 \mathcal{T} \frac{2^{5-D}}{\pi^{\frac{D}{2}-2}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[\Gamma\left(2 - \frac{D}{2}\right) \frac{y^{-\frac{D}{2}}}{a^{2-\frac{D}{2}}} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{k_2^2}{(k_2^2 - \Delta_1)^{2-\frac{D}{2}}} + 2 \Gamma\left(3 - \frac{D}{2}\right) x(1-x) \frac{y^{1-\frac{D}{2}}}{2 a^{3-\frac{D}{2}}} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{(k_2^2)^2}{(k_2^2 - \Delta_1)^{3-\frac{D}{2}}} \right]. \quad (D.18)$$

Fazendo as integrações na variável k_2 , com ajuda de (A.27) e (A.28), e em seguida as integrais paramétricas, restando somente a parcela proporcional a $\frac{1}{\epsilon}$, obtemos

$$I_1^{GN} = \frac{N^2}{2} \quad e \quad I_2^{GN} = -(1 + 2N) I_1^{GN} = -\frac{(1 + 2N)}{2} N^2. \quad (D.19)$$

Substituindo esses valores em (2.20) e (2.21), encontramos

$$\text{pólo}_1 = 0 \quad e \quad \text{pólo}_2 = -\frac{N}{2}. \quad (D.20)$$

Portanto, esse diagrama com o vértice tipo Gross-Neveu terá a seguinte decomposição para a parcela de pólo

$$\text{pólo}^{GN} = -\frac{N}{12\epsilon} \Gamma \otimes \Gamma. \quad (D.21)$$

b. Quando a linha tracejada representa o vértice tipo *Th*

Para um vértice tipo Thirring, A , B e C terão a forma

$$A^{GN} = -\gamma^\mu k_2 \gamma^\theta,$$

$$B^{GN} = \gamma^\beta k_2 \gamma^\theta,$$

e

$$C^{Th} = C^{GN} = 2 \times 4\pi^2 N \frac{\epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\rho} k_2^\lambda k_2^\rho}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_2^2 - m^2)^2 (k_1^2 - m^2) (k_2^2)^2} \text{Tr}[\gamma^\nu (\not{k}_1 + \not{k}_2) \gamma^\alpha \not{k}_1] .$$

Seguindo os passos anteriores podemos escrever I_1^{Th} e I_2^{Th} como,

$$\begin{aligned} I_1^{Th} &= -16 \pi^2 N^2 (1 + 2N) \mathcal{T} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{-k_{2\alpha} k_{2\nu} k_2^2 + g_{\alpha\nu} (k_2^2)^2}{(k_2^2 - m^2) (k_2^2)^2} \\ &\times \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{4 k_1^\alpha k_1^\nu + 2 k_2^\alpha k_1^\nu + 2 k_1^\alpha k_2^\nu - 2 g^{\alpha\nu} (k_1^2 + k_1 \cdot k_2)}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_1^2 - m^2)} , \end{aligned} \quad (D.22)$$

e

$$\begin{aligned} I_2^{Th} &= 16 \pi^2 N^2 (5 + 4N) \mathcal{T} \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{-k_{2\alpha} k_{2\nu} k_2^2 + g_{\alpha\nu} (k_2^2)^2}{(k_2^2 - m^2) (k_2^2)^2} \\ &\times \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{4 k_1^\alpha k_1^\nu + 2 k_2^\alpha k_1^\nu + 2 k_1^\alpha k_2^\nu - 2 g^{\alpha\nu} (k_1^2 + k_1 \cdot k_2)}{[(k_1 + k_2)^2 - m^2] (k_1^2 - m^2)} . \end{aligned} \quad (D.23)$$

Como podemos observar, os integrandos nas duas expressões acima são idênticos, além de serem iguais ao integrando contido em (D.15). Desta forma, encontramos facilmente que

$$I_1^{Th} = -\frac{(1 + 2N)}{2} N^2 \quad e \quad I_2^{Th} = \frac{(5 + 4N)}{2} N^2 . \quad (D.24)$$

Substituindo esses valores em (2.20) e (2.21) encontramos,

$$\text{pólo}_1 = -\frac{N}{4\epsilon} \quad e \quad \text{pólo}_2 = \frac{N}{6\epsilon} . \quad (D.25)$$

Logo, o termo de pólo para esse diagrama com o vértice tipo Thirring será dado por

$$\text{pólo}^{Th} = N \left(-\frac{1}{4\epsilon} \Delta \otimes \Delta + \frac{1}{6\epsilon} \Gamma \otimes \Gamma \right) . \quad (D.26)$$

A seguir encontraremos as figuras de 2-loops que contribuem para a função de quatro pontos.

Figura D.3: Diagramas sem o loop fermiônico com troca de uma linha de GV (ou Th) $(1, 0)$, de ordem $g\alpha^2$, $g^2\alpha$ e g^3 , respectivamente.

Figura D.4: Diagramas sem o loop fermiônico com troca de duas linhas de CS (0,2).
de ordem g_a^2 .

Figura D.5: Diagramas sem o loop fermiônico com troca de uma linha de GN (ou Th) e uma linha de CS (1.1), de ordem $g\alpha^2$ e $g^2\alpha$, respectivamente.

Figura D.7: Diagramas sem o loop fermiônico com troca de duas linhas de GV (ou th) (2, 0), de ordem $g^2\alpha$ e g^4 , respectivamente.

Figura D.8: Diagramas sem o loop fermiônico com troca de duas linhas de GV (ou Th) e uma linha de CS (2.1), de ordem $g^2\alpha$.

Figura D.9: Diagramas de ordem g^3 sem o loop fermiônico com troca de três linha de $GN(3,0)$.

Figura D.10: Diagramas de com o loop fermiônico, de ordem $g\alpha^2$.

Figura D.11: Diagramas com o loop fermiônico de ordem $g^2\alpha$.

Figura D.12: Diagramas com o loop fermiônico de ordem g^3 .

Apêndice E

Operadores Compostos

Neste apêndice estudaremos o efeito da inserção de alguns operadores compostos (integrados) nas funções de vértices de dois e quatro pontos. No que segue, usaremos a notação $\Delta_i = \int d^3x \mathcal{O}_i$ para indicar esta operação, onde $\mathcal{O}_i$ representa o operador composto. Analizaremos os operadores:

$$\Delta_1 = \int d^3x \bar{\psi}\psi, \quad \Delta_2 = \int d^3x \bar{\psi} \not{\partial} \psi,$$

$$\Delta_3 = \int d^3x \bar{\psi} D^2 \psi, \quad \Delta_4 = \int d^3x (\bar{\psi}\psi)^2.$$

e

$$\Delta_5 = \int d^3x (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2.$$

Considere o diagrama (a) mostrado na figura 1.7. Suponha inicialmente que inserimos, entre os vértices ρ e θ , o operador Δ_2 . Lembrando que para $N_F = 2$ o grau de divergência superficial é linear, podemos escrever

$$\begin{aligned} I_{3\Delta_2}^{(2)}(a) &= -4\pi^2 \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \epsilon_{\rho\mu\lambda} \epsilon_{\nu\theta\alpha} \left[\gamma^\rho \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} (-i)(\not{p} - \not{k}_1) \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\theta \right] \\ &\times \text{Tr} \left(\gamma^\mu \frac{i}{\not{k}_2 - m} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k}_2 - \not{k}_1 - m} \right) \frac{k_1^\lambda}{k_1^2} \frac{k_1^\alpha}{k_1^2} = (m A_{3\Delta_2}(a) + \not{p} B_{3\Delta_2}(a)) \frac{1}{\epsilon}, \quad (\text{E.1}) \end{aligned}$$

onde o sinal negativo refere-se ao loop fermiônico e $I_{3\Delta_2}^{(2)}(a)$ representa a amplitude $I_3^{(2)}(a)$ com uma inserção do operador composto Δ_2 .

Pela substituição no numerador de $\not{p} - \not{k}_1 \rightarrow (\not{p} - \not{k}_1 - m) + m$, podemos escrever (E.1) como

$$I_{3\Delta_2}^{(2)}(a) = I_3^{(2)}(a) + m \frac{\partial}{\partial m} I_3^{(2)}(a) , \quad (\text{E.2})$$

sendo que a operação $\frac{\partial}{\partial m} I_3^{(2)}(a)$ deve ser entendida como atuando apenas no propagador $S_F(p - k_1)$. Como o nosso objeto de interesse é o termo proporcional a $\not{p}$, e se levarmos ainda em consideração que devemos inserir este operador nas duas linhas do loop fermiônico da figura 1.7(a), chegaremos à conclusão que

$$B_{3\Delta_2}(a) = 3 B_3(a) .$$

O mesmo argumento é válido para os diagramas 1.7(b) e 1.7(c), com uma inserção deste operador. Assim, podemos concluir que o coeficiente da parcela divergente será

$$B_{\Delta_2} = B_{3\Delta_2}(a) + B_{3\Delta_2}(b) + B_{3\Delta_2}(c) = 3 B_3 . \quad (\text{E.3})$$

A inserção do operador $\Delta_3 = \int d^3x \bar{\psi} D^2 \psi$ nas funções de quatro pontos (no ponto fixo $g = 0$) são todas finitas, pois apesar de serem logaritmicamente divergentes (veja (1.110)), todos os diagramas na ordem α^2 são de 1-loop, e portanto, finitos com o uso da regularização dimensional. Para efeitos práticos, vamos fazer a inserção apenas do operador ∂^2 , uma vez que¹ $D^2 = \partial^2 - 2i\sqrt{\alpha} \partial_\mu A^\mu - \alpha A^2$, e o restante do quadrado da derivada covariante deve entrar com o mesmo fator multiplicativo. Com relação as funções de dois pontos, tomemos como exemplo o diagrama (b) da figura 1.7. A inserção de Δ_3 , digamos entre os vértices μ e α , fornecerá a seguinte expressão (veja a figura E.1(a))

$$\begin{aligned} I_{3\Delta_3(\mu\alpha)}^{(2)}(b) &= -4\pi^2 \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} (p - k_1)^2 \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\alpha \\ &\times \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2 - m} \gamma^\beta \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma^\nu \Delta_{\mu\nu}(k_1) \Delta_{\alpha\beta}(k_2) . \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

A equação acima diverge quadraticamente no ultra-violeta, então , o termo de pólo possui a estrutura

¹Escalonamos $A_\mu \rightarrow \sqrt{\alpha} A_\mu$.

$$\text{pólo}_{3\Delta_3}^{(2)}(b) = \left(m^2 A_{\Delta_3(\mu\alpha)}(b) + m \not{p} B_{\Delta_3(\mu\alpha)}(b) + p^2 C_{\Delta_3(\mu\alpha)}(b) \right) \frac{1}{\epsilon}.$$

Para $m = 0$ precisamos apenas do coeficiente $C_{\Delta_3(\mu\alpha)}(b)$, que pode ser obtido através da expressão

$$\begin{aligned} \frac{C_{\Delta_3(\mu\alpha)}(b)}{\epsilon} &= \frac{1}{2p^2} \text{Tr}(I_{3\Delta_3(\mu\alpha)}^{(2)}|_{m=0}) = -\frac{2\pi^2}{p^2} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\beta\rho} k_1^\lambda k_2^\rho \\ &\times \frac{\text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\alpha (\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2) \gamma^\beta (\not{p} - \not{k}_1) \gamma^\nu \right]}{(p - k_1)^2 (p - k_1 - k_2)^2 k_1^2 k_2^2}, \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

onde usamos a identidade $\frac{(q+m)^2 q^3}{(q^2 - m^2)^3}|_{m=0} = \frac{1}{q^2}$. Com relação aos diagramas de Feynman, podemos imaginar a inserção deste operador como o representado na figura E.1(a).

Usando as propriedades das operações de traço, podemos escrever

$$\frac{C_{\Delta_3(\mu\alpha)}(b)}{\epsilon} = -\frac{2\pi^2}{p^2} \mathcal{T} \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{\text{Numerador}}{(p - k_1)^2 (p - k_1 - k_2)^2 k_1^2 k_2^2}, \quad (\text{E.6})$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Numerador} &= -8 k_1^2 (k_1 \cdot k_2) + 8 (k_1 \cdot k_2) (k_1 \cdot p) - 8 k_1^2 k_2^2 + 8 (k_1 \cdot p) k_2^2 \\ &+ 8 k_1^2 (k_2 \cdot p) - 8 (k_1 \cdot p) (k_2 \cdot p). \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Introduzimos a parametrização $\frac{1}{(p-k_1-k_2)^2 k_2^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k_2 - x\hat{p})^2 - \Delta]^2}$, onde $\Delta = x(x-1)\hat{p}^2$ e $\hat{p} = p - k_1$. Fazemos em seguida o deslocamento $k_2 \rightarrow k_2 + x\hat{p}$, eliminamos os termos ímpares e integramos na variável k_2 , obtendo

$$\begin{aligned} \frac{C_{\Delta_3(\mu\alpha)}(b)}{\epsilon} &= -\frac{i}{p^2} \mathcal{T} \frac{2^{3-D}}{\pi^{\frac{D}{2}-2}} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \left[\frac{3\Gamma(1 - \frac{D}{2}) (k_1^2 - k_1 \cdot p)}{[x(x-1)]^{1-\frac{D}{2}} [(p-k_1)^2]^{2-\frac{D}{2}} k_1^2} \right. \\ &+ \left. 2\Gamma(2 - \frac{D}{2}) \frac{x(1-x)}{[x(x-1)]^{2-\frac{D}{2}}} \frac{(k_1^2)^2 - 3k_1^2 (k_1 \cdot p) + 2(k_1 \cdot p)^2 + k_1^2 p^2}{[(p-k_1)^2]^{3-\frac{D}{2}} k_1^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Para a segunda parametrização usamos que $\frac{1}{[(p-k_1)^2]^\alpha k_1^2} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 dy \frac{y^{\alpha-1}}{[(k_1^2 - yp)^2 - \Delta_1]^\alpha}$, onde $\Delta_1 = p^2 y(y-1)$. Fazemos a mudança de variável $k_1 \rightarrow k_1 + yp$, eliminamos os termos ímpares e integramos em k_1 , obtendo

Figura E.1: Diagramas da figura 1.7(b) com uma inserção do operador $\bullet = \Delta_3 = \int d^3x \bar{\psi} \partial^2 \psi$.

$$\begin{aligned}
 \frac{C_{\Delta_3(\mu\alpha)}(b)}{\epsilon} &= \frac{8}{p^2} \mathcal{T} \frac{\pi^{2-D}}{(-1)^{\frac{D}{2}}} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \left[D \frac{\Gamma(1 - \frac{D}{2})}{\Gamma(2 - \frac{D}{2})} \frac{y^{1-\frac{D}{2}}}{[x(x-1)]^{1-\frac{D}{2}}} \left[\frac{D}{2} \Gamma(2-D) \Delta_1^{D-2} \right. \right. \\
 &+ \left. \Gamma(3-D) y(1-y) p^2 \Delta_1^{D-3} \right] + 2 \frac{\Gamma(2 - \frac{D}{2}) \Gamma(4 - \frac{D}{2})}{\Gamma(3 - \frac{D}{2})} \frac{y^{2-\frac{D}{2}}}{[x(x-1)]^{2-\frac{D}{2}}} \left[\frac{D}{2} \frac{\Gamma(2-D)}{\Gamma(3 - \frac{D}{2})} \Delta_1^{D-2} \right. \\
 &- \left. \left. \frac{\Gamma(3-D)}{\Gamma(4 - \frac{D}{2})} \left[\frac{D}{2} \Delta_1^{D-2} + p^2 \left(\frac{5}{2} - \frac{15}{2} y + 5y^2 \right) \Delta_1^{D-3} \right] \right] \right]. \quad (E.9)
 \end{aligned}$$

Finalmente, usando as expansões $\Gamma(3-D) = \frac{1}{\epsilon} + \text{finito}$ e $\Gamma(2-D) = -\frac{1}{\epsilon} + \text{finito}$, fazendo as integrações paramétricas e retendo apenas a parcela divergente, encontramos

$$\frac{C_{\Delta_3(\mu\alpha)}(b)}{\epsilon} = -\frac{1}{12\epsilon}. \quad (E.10)$$

A inserção de Δ_3 no mesmo diagrama, porém entre os vértices α e β , nos leva a um resultado nulo. Isto é porque, neste caso, temos um produto direto de dois diagramas de 1-loop, como podemos observar pela sua forma analítica (veja também a figura E.1(b))

$$I_{3\Delta_3(\alpha\beta)}^{(2)}(b) = -4\pi^2 \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \epsilon_{\rho\mu\lambda} \epsilon_{\nu\theta\alpha} k_1^\lambda k_2^\rho \frac{\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}_1) \gamma^\alpha \gamma^\beta (\not{p} - \not{k}_1) \gamma^\nu}{[(p - k_1)^2]^2 k_1^2 k_2^2} \rightarrow 0, \quad (\text{E.11})$$

após a regularização ter sido efetuada.

Inserindo entre os vértices β e ν (veja a figura E.1(c)) encontramos

$$\begin{aligned} \frac{C_{3\Delta_3(\beta\nu)}(b)}{\epsilon} &= \frac{1}{2p^2} \text{Tr}(I_{3\Delta_3(\beta\nu)}^{(2)}(b)|_{m=0}) = -\frac{2\pi^2}{p^2} \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \epsilon_{\rho\mu\lambda} \epsilon_{\nu\theta\alpha} k_1^\lambda k_2^\rho \\ &\times \frac{\text{Tr}[\gamma^\mu (\not{p} - \not{k}_1) \gamma^\alpha (\not{p} - \not{k}_1 - \not{k}_2) \gamma^\beta \gamma^\nu]}{(p - k_1)^2 (p - k_1 - k_2)^2 k_1^2 k_2^2} = -\frac{1}{12\epsilon}. \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Assim, a introdução do operador Δ_3 na figura 1.7(b) fornece para o termo de pólo, o valor

$$C_{3\Delta_3}(b) = C_{3\Delta_3(\mu\alpha)}(b) + C_{3\Delta_3(\alpha\beta)}(b) + C_{3\Delta_3(\beta\nu)}(b) = -\frac{1}{6}. \quad (\text{E.13})$$

As mesmas argumentações acima são válidas ao inserirmos este operador no diagrama 1.7(c), de modo que (veja a figura E.2)

$$C_{3\Delta_3}(c) = C_{3\Delta_3(\mu\alpha)}(c) + C_{3\Delta_3(\alpha\beta)}(c) + C_{3\Delta_3(\beta\nu)}(c) = -\frac{1}{6}. \quad (\text{E.14})$$

Por outro lado, nenhuma contribuição para o termo de pólo virá da inserção de Δ_3 no diagrama 1.7(a). Realmente, a introdução deste operador entre ρ e θ faz com que a dependência em p desapareça, portanto não há termo de pólo proporcional a p^2 . E a inserção em ambas as linhas do loop nos leva a um resultado finito, por se tratar de um produto direto (veja a figura E.3).

Assim, a inserção do operador Δ_3 nas funções de dois pontos nos leva ao seguinte resultado

Figura E.2: Diagramas da figura 1.7(c) com uma inserção do operador $\tilde{\psi}\partial^2\psi$.

$$b_2 = C_{3\Delta_3} = C_{3\Delta_3}(a) + C_{3\Delta_3}(b) + C_{3\Delta_3}(c) = -\frac{1}{3}. \quad (\text{E.15})$$

Com relação aos operadores quadrilineares fermiônicos, consideraremos inicialmente o caso $N = 1$. O grau de divergência superficial de um diagrama de Feynman com uma inserção do operador $\Delta_4 = \int d^3x (\tilde{\psi}\psi)^2$, no ponto fixo $g = 0$, é dado por $D_{\Delta_4}(\gamma) = 4 - N_F$. Então, para $N_F = 2$, os diagramas divergem quadraticamente no ultra-violeta, enquanto que para $N_F = 4$ a divergência é logarítmica. Os diagramas analisados estão mostrados na figura 1.8, para $N_F = 2$, e nas figuras que se encontram no apêndice D, para $N_F = 4$. Neste ponto podemos visualizar a linha tracejada como representando a inserção do operador Δ_4 , e a linha ondulada o propagador de CS. Deste modo, o processo de renormalização, com uma inserção de Δ_4 , nos diagramas com duas e quatro linhas externas induzem os seguintes contra-termos

Figura E.3: Diagramas da figura 1.7(a) com uma inserção do operador $\bullet = \Delta_3 = \int d^3x \bar{\psi} \partial^2 \psi$.

$$\int d^3x N[(\bar{\psi}\psi)^2] = \int d^3x (a_1 (\bar{\psi}\psi)^2 + a_2 \bar{\psi} \partial^2 \psi + a_3 m^2 \bar{\psi} \psi + a_4 m \bar{\psi} \not{\partial} \psi) . \quad (\text{E.16})$$

onde N indica a prescrição correspondente à subtração do termo de pólo.

É imediato verificar que até a ordem α^2 , $a_1 = 1 + C_3$, conforme resultado obtido na seção 1.4.2. Por outro lado, se nos restringirmos ao caso $m = 0$, precisaremos obter apenas o coeficiente a_2 em (E.16), que advém das funções de dois pontos. Todavia, uma inspeção direta na figura 1.8 nos levam as seguintes conclusões: os diagramas (a) e (b) possuem uma estrutura de produto de integrais de 1-loop, portanto são finitos; nos diagramas (c) e (d) o momento externo p não flui através deles, de maneira que não há possibilidade de serem gerados contra-termos proporcionais a p^2 ; no caso do diagrama (e), devido ao teorema de Furry, este cancela-se por conjugação de carga.

Resta-nos portanto analisar apenas o diagrama (f) da figura 1.8. Seu resultado não é imediato, por isso faremos o cálculo com certo detalhe. A forma analítica deste diagrama, com a inserção de Δ_4 , é dada por

$$\begin{aligned} I_{4\Delta_4}^{(2)}(f)|_{m=0} &= -4\pi\alpha\mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{p}-\not{k}_1} \frac{i}{\not{k}_2-\not{k}_1} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k}_2} \right] \frac{k_1^\lambda}{k_1^2} \\ &= \frac{C_{4\Delta_4}(f)}{\epsilon} p^2, \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

de maneira que

$$\frac{C_{4\Delta_4}(f)}{\epsilon} = \frac{1}{2p^2} \text{Tr}(I_{4\Delta_4}^{(2)}(f)|_{m=0}) = 16 \frac{\pi}{p^2} \alpha \mathcal{T} \int \frac{d^Dk_1}{(2\pi)^D} \frac{d^Dk_2}{(2\pi)^D} \frac{\text{Numerador}}{(p-k_1)^2 (k_2-k_1)^2 k_2^2 k_1^2},$$

onde

$$\text{Numerador} = k_1^2 (k_1 \cdot k_2) - (k_1 \cdot k_2)^2 - (k_1 \cdot k_2) (k_1 \cdot p) + (k_1 \cdot k_2) (k_2 \cdot p).$$

A sequência dos cálculos é semelhante às efetuadas anteriormente, isto é: vamos usar a parametrização $\frac{1}{(k_1-k_2)^2 k_2^2} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(k_2-xk_1)^2 - \Delta]^2}$, onde $\Delta = x(x-1)k_1^2$. Fazemos o deslocamento $k_2 \rightarrow k_2 + xk_1$, eliminando os termos ímpares e integramos na variável k_2 . A seguir combinamos os denominadores que dependem de k_1 usando que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-k_1)^2 k_1^2 \Delta^\alpha} &= \frac{1}{[x(x-1)]^\alpha} \frac{1}{(p-k_1)^2 (k_1^2)^{\alpha+1}} = \frac{1}{[x(x-1)]^\alpha} \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)} \\ &\times \int_0^1 dy \frac{(1-y)^\alpha}{[(k_1-xp)^2 - \Delta_1]^{\alpha+2}}, \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

onde $\Delta_1 = y(y-1)p^2$. Fazemos $k_1 \rightarrow k_1 + yp$, eliminamos os termos ímpares e integramos na variável k_1 . Após, surgirão termos proporcionais a $\Gamma(3-D)$ e usamos a expansão $\Gamma(3-D) = \frac{1}{\epsilon} + \text{finito}$. Por fim, retendo apenas a parcela de pólo e fazendo $D \rightarrow 3$, encontramos

$$C_{4\Delta_4}(f) = a_2 = \frac{\alpha}{2^5 \pi^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dy (1+x) \left(\frac{x}{x-1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{2-7y+5y^2}{(1-y)^{\frac{1}{2}}} = 0. \quad (\text{E.19})$$

Podemos então concluir que

$$\Delta_{4R} = (1 + C_3) \Delta_4 , \quad (\text{E.20})$$

onde o subscrito R significa renormalizado.

No caso da teoria com N campos ($N > 1$), o processo de renormalização, com uma inserção do operador $\Delta_3 = \int d^3x (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2$ nas funções de vértices com duas e quatro linhas externas induzem os seguintes contra-termos

$$\int d^3x N[(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2] = \int d^3x (c'_1 (\bar{\psi}\psi)^2 + c'_2 \bar{\psi}\partial^2\psi + c'_3 (\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2) .$$

É imediato verificar que até a ordem α^2 , $c'_1 = D_3$ e $c'_3 = 1 + D_4$. O coeficiente c'_2 é obtido a partir da inserção de Δ_3 nas funções de dois pontos. Eles divergem quadraticamente no ultra-violeta, contudo, analogamente ao caso $N = 1$, uma inspeção direta na figura 1.8 nos mostra que os diagramas (a), (b), (c) e (d) possuem uma estrutura de produto de integrais de 1-loop, e portanto são finitos. Resta-nos analisar os diagramas (e) e (f). Note que neste caso, o diagrama (e) não se anula por conjugação de carga, pois temos um número par de matrizes γ no loop fermiônico. Por outro lado, os cálculos a serem efetuados são equivalentes aos já realizados quando estudamos a renormalização do operador Δ_4 , por isso, omitiremos os passos intermediários. Assim, de acordo com a figura 1.8(c) temos

$$\begin{aligned} I_{4\Delta_3}^{(2)}(e)|_{m=0} &= 4\pi\alpha N \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \gamma^\mu \frac{i}{\not{p}-\not{k}_1} \gamma^\theta \text{Tr} \left[\gamma^\nu \frac{i}{\not{k}_2} \gamma_\theta \frac{i}{\not{k}_2-\not{k}_1} \right] \frac{k_1^\lambda}{k_1^2} \\ &= \frac{C'_{4\Delta_3}(e)}{\epsilon} p^2 . \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

onde o fator N é devido ao loop fermiônico. O coeficiente $C'_{4\Delta_3}(e)$ pode ser encontrado pela expressão

$$\frac{C'_{4\Delta_3}(e)}{\epsilon} = \frac{1}{2p^2} \text{Tr}(I_{4\Delta_3}^{(2)}(e)|_{m=0}) = -16 \frac{\pi}{p^2} \alpha \mathcal{T} \int \frac{d^Dk_1}{(2\pi)^D} \frac{d^Dk_2}{(2\pi)^D} \frac{\text{Numerador}}{(p-k_1)^2 (k_2-k_1)^2 k_2^2 k_1^2} ,$$

onde

$$\text{Numerador} = -2 k_1^2 (k_1 \cdot k_2) + 2 (k_1 \cdot k_2)^2 + (k_1 \cdot k_2) (k_1 \cdot p) + k_1^2 (k_2 \cdot p) - 2 (k_1 \cdot k_2) (k_2 \cdot p) .$$

Seguindo os passos anteriores, encontramos

$$C'_{4\Delta_5}(e) = \frac{N}{24\pi} \alpha . \quad (\text{E.22})$$

O mesmo se aplica ao diagrama (f) da figura 1.8, ou seja,

$$\begin{aligned} I_{4\Delta_5}^{(2)}(f)|_{m=0} &= -4\pi\alpha N \mathcal{T} \int_{\text{Reg}} \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \left[\gamma^\mu \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma^\theta \frac{i}{\not{k}_2 - \not{k}_1} \gamma^\nu \frac{i}{\not{k}_2} \gamma_\theta \right] \frac{k_1^\lambda}{k_1^2} \\ &= \frac{C'_{4\Delta_5}(f)}{\epsilon} p^2 , \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

de maneira que

$$\frac{C'_{4\Delta_5}(f)}{\epsilon} = \frac{1}{2p^2} \text{Tr}(I_{4\Delta_5}^{(2)}(f)|_{m=0}) = \frac{\alpha}{6\pi} .$$

Desta forma, o coeficiente c'_2 será dado por

$$c'_2 = C'_{4\Delta_5}(e) + C'_{4\Delta_5}(f) = \frac{\alpha}{6\pi} \left(1 + \frac{N}{4} \right) . \quad (\text{E.24})$$

Apêndice F

Geração Dinâmica de Massa no Modelo Gross-Neveu na Expansão $\frac{1}{N}$

1

O modelo de Gross-Neveu massivo, com N campos fermiônicos é dado pela seguinte densidade de Lagrangeana,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi - \frac{g}{2}(\bar{\psi}\psi)^2 . \quad (\text{F.1})$$

O campo fermiônico ψ (e também $\bar{\psi}$) carrega dois índices: $\psi_a^{\underline{a}}$, $\underline{a}$ é o índice de simetria interna ($U(N)$, $a = 1, 2, \dots, N$) e $\underline{a}$ é o índice de Lorentz.

A expansão $\frac{1}{N}$ é feita inicialmente ajustando-se a constante de acoplamento, levando-se em consideração o fato que o campo fermiônico é um multipletto de $U(N)$, i.e, $\frac{g}{2} \rightarrow \frac{g}{2N}$, onde g agora é mantida fixa. A seguir introduz-se um campo auxiliar σ de modo a compensar a interação quártica, sem alterar no entanto o conteúdo físico do modelo. Desta forma podemos reescrever (F.1), equivalentemente, da seguinte maneira

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - M - \frac{\sigma}{\sqrt{N}})\psi + \frac{1}{2g}\sigma^2 , \quad (\text{F.2})$$

onde $\sigma = \frac{g}{\sqrt{N}}\bar{\psi}\psi$.

¹Trabalho publicado no XVI Encontro Nacional de Partículas e Campos [17].

As regras de Feynman para a Lagrangeana (F.2) são dadas abaixo e são mostradas na figura F.1:

$$\text{Propagador Fermiônico} = \langle 0 | \hat{T} \psi_a^b(p) \bar{\psi}_b^a(-p) | 0 \rangle = S_F(p) = \left(\frac{i}{\not{p} - M} \right)_{\alpha\beta} \delta^{ab} \quad (\text{F.3})$$

$$\text{Propagador do Campo Auxiliar} = \langle 0 | \hat{T} \sigma \sigma | 0 \rangle = \Delta_\sigma = \frac{i}{1/g} \quad (\text{F.4})$$

$$\text{Vértice Trilinear} = \left(\frac{-i}{\sqrt{N}} \right)_{\alpha\beta} \delta^{ab} \quad (\text{F.5})$$

F.1 Quebra de Paridade

As equações de Schwinger-Dyson (SD) são dadas pela figura F.2. Os propagadores representados por linhas simples, contínua e tracejada, são os propagadores nús do férmion e do campo σ , respectivamente. Os propagadores representados por linhas cheias são os propagadores completos, com as inserções de auto-energia, como mostrado na figura F.3.

Na ordem dominante em $1/N$, a função de vértice é dada pela contribuição trivial $(\frac{-i}{\sqrt{N}})_{\alpha\beta} \delta_{ab}$. Desta forma as equações de SD relevantes se reduzem às parcelas de auto-energia do férmion e do campo σ , como mostradas na figura F.4, cujas expressões analíticas são ,

$$\begin{aligned} (-i\Xi(p))_{\alpha\beta} \delta_{ad} &= -\frac{1}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_\sigma(p+k) (S(k))_{\alpha\beta} \delta_{ad} \\ &+ (1)_{\alpha\beta} \delta_{ad} \Delta_\sigma(q=0) \text{Tr} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} S(k) \quad , \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

e

$$i\Pi(p) = \text{Tr} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} S(p+k) S(k) \quad , \quad (\text{F.7})$$

onde a operação de traço nas expressões acima são sobre os índices de Lorentz, e S e Δ_σ representam os propagadores completo do férmion e do campo auxiliar² respectivamente.

Usando as propriedades da operação de traço das matrizes de Dirac (veja apêndice A), integrando na variável de momento e finalmente no parâmetro de Feynman, encontra-se que $\Pi(p) = -\frac{D}{2\pi}G(p, M)$, com $G(p, M) = \frac{1M}{2} + \frac{(4M^2 - p^2)}{4\sqrt{p^2}} \text{ArcSinh}\left(\frac{\sqrt{p^2}}{\sqrt{4M^2 - p^2}}\right)$.

Como estamos buscando encontrar a massa gerada dinamicamente para os férmions, devemos partir de uma teoria com $M = 0$. Deste modo, o propagador completo do campo σ se escreve como,

$$\Delta_\sigma(p) = \frac{2i\pi/D}{\frac{2\pi}{Dg} - G(p, 0)} = \frac{16i/D}{i\frac{p^2}{\sqrt{p^2}} + \frac{16}{Dg}}, \quad (\text{F.8})$$

onde D é a dimensionalidade das matrizes de Dirac³.

Escrevemos a auto-energia do férmion como $\Xi(p) = -\not{p}A(p) + \Sigma(p)$, onde $A(p)$ é a renormalização da função de onda e $\Sigma(p)$ a função de massa que queremos encontrar. Como o propagador cheio do férmion pode ser escrito como $S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) + i\Sigma(p)$, temos que $S(p) = i\frac{\not{p}(1+A(p)) + \Sigma(p)}{p^2(1+A(p))^2 - \Sigma^2(p)}$, e após alguns cálculos chega-se a,

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= \frac{1}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Delta_\sigma(p-k)\Sigma(k)}{k^2(1+A(k))^2 - \Sigma^2(k)} \\ &- D\Delta_\sigma(q=0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma(k)}{k^2(1+A(k))^2 - \Sigma^2(k)}. \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Para o regime de N grande, vemos da expressão acima, que em termos de potências de $\frac{1}{N}$, a primeira parcela da expressão é sub-dominante em relação a segunda. Podemos então desprezá-la. Se considerarmos ainda uma situação onde $A(k) = 0$ e $\Sigma(p) = M = \text{cte}$, então $M = -D\Delta_\sigma(q=0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{M}{k^2 - M^2}$, que é a mesma expressão obtida por M. Gomes, V. O. Rivelles e A. J. da Silva [10], para equação de “gap” do modelo Gross-Neveu em 3D (na expansão $1/N$). Tal como discutido pelos autores acima, a expressão acima fixa g como uma função da massa gerada. Conclui-se

²Os propagadores completos referem-se aos propagadores com as inserções de auto-energia, que são dados por $S(p) = \frac{i}{\not{p} - M - \Xi(p)}$ e $\Delta_\sigma = \frac{i}{1/g + \Pi(p)}$.

³No espaço-tempo tridimensional podemos usar uma representação 2×2 ou 4×4 para as matrizes de Dirac.

portanto que no regime de N grande há geração dinâmica de massa para o campo ψ e por consequência há uma quebra de paridade para a representação de férmions de duas componentes.

Para o regime de N pequeno, vamos buscar soluções para a massa gerada dinamicamente com as seguintes condições : $A(k) = 0$ e $\Sigma_i(p) = \Sigma(p)$, para $i = 1, 2, \dots, L$ e $\Sigma_i(p) = -\Sigma(p)$, para $i = L+1, L+2, \dots, N$. Utilizando (F.9) encontramos as seguintes expressões para $i = 1, 2, \dots, L$ e $i = L+1, L+2, \dots, N$, respectivamente

$$\Sigma(p) = \frac{1}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Delta_\sigma(p-k)\Sigma(k)}{k^2 - \Sigma^2(k)} - \frac{D}{N}(2L-N)\Delta_\sigma(q=0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma(k)}{k^2 - \Sigma^2(k)} , \quad (\text{F.10})$$

e

$$\Sigma(p) = \frac{1}{N} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Delta_\sigma(p-k)\Sigma(k)}{k^2 - \Sigma^2(k)} + \frac{D}{N}(2L-N)\Delta_\sigma(q=0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma(k)}{k^2 - \Sigma^2(k)} . \quad (\text{F.11})$$

Observando as duas equações acima notamos que elas são inconsistentes. a não ser no caso em que $L = \frac{N}{2}$, ou seja, metade dos férmions adquirem uma massa positiva e a outra metade uma massa igual e negativa. Com isto em mente, vamos dar prosseguimento à análise da equação (F.10) (ou (F.11)), sobre a possibilidade de geração de massa. Vamos, por comodidade, trabalhar com a expressão (F.10) no espaço euclidiano⁴. Deste modo,

$$\Sigma(p) = \frac{16}{DN} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \frac{1}{|p-k| + \frac{16}{Dg}} . \quad (\text{F.12})$$

A equação integral acima não é fácil de ser tratada. Devemos tentar fazer uma simplificação . Introduzimos inicialmente um parâmetro de escala⁵ $\alpha = \frac{16}{Dg}$, e consideramos apenas a região onde $p \ll \alpha$ (qualquer massa não nula que poderá ser gerada será muito menor que esse corte). Assim, a geração dinâmica de massa nessa situação , se ocorrer, será um fenômeno de pequenos momentos.

⁴Para isso fazemos $p_\mu \rightarrow ip_\mu$ e $d^3k \rightarrow id^3k$.

⁵Este corte é um parâmetro de massa natural da teoria.

O estudo analítico da equação acima é facilitada se separarmos a integração em k em duas regiões, e o resultado fornece, após fazermos a integração nos angulos,

$$\Sigma(p) = \frac{8}{DN\pi^2} \left\{ \int_0^p dk \frac{k^2 \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \frac{1}{p + \alpha} + \int_p^\alpha dk \frac{k^2 \Sigma(k)}{k^2 + \Sigma^2(k)} \frac{1}{k + \alpha} \right\}, \quad (\text{F.13})$$

com $2\alpha \frac{d\Sigma(p)}{dp} \Big|_{p=\alpha} + \Sigma(p) \Big|_{p=\alpha} = 0$, e $0 < \Sigma(p) \Big|_{p=0} < \infty$, que representam as condições de contorno ultra-violeta (UV) e infra-vermelha (IV), respectivamente, a qual $\Sigma(p)$ deve satisfazer. Se impusermos que $\alpha \gg \Sigma(p)$, haverá uma região $p \gg \Sigma(p)$ pertencente ao intervalo $0 \leq p < \alpha$ na qual (F.13) poderá ser linearizada, ou seja,

$$\frac{d}{dp} \left[(p + \alpha)^2 \frac{d\Sigma(p)}{dp} \right] = -\frac{8}{DN\pi^2} \Sigma(p). \quad (\text{F.14})$$

Nesse regime linear, a equação acima é uma equação diferencial que admite a seguinte solução, $\Sigma(p) = A_1(p + \alpha)^{a_+} + A_2(p + \alpha)^{a_-}$, onde $a_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{N_c}{N}}$, com $N_c = \frac{32}{DN^2}$.

Devemos analisar duas situações distintas. Para $N > N_c$, $a_{\pm}$ é real, o que implica em termos a seguinte solução $\Sigma(p) \sim \frac{1}{\sqrt{p+\alpha}} (p + \alpha)^{\pm \frac{1}{2}(1 - \frac{N_c}{N})^{\frac{1}{2}}} = (p + \alpha)^{\frac{\pm \lambda - 1}{2}}$, com $0 < \lambda < 1$. A solução para a potência negativa em λ não satisfaz a condição de contorno IV, enquanto que para a potência positiva esse comportamento não é compatível com a condição de contorno UV, e portanto apenas $\Sigma(p) = 0$ é solução. Por outro lado, para $N < N_c$, $a_{\pm}$ é complexo e admite a seguinte solução oscilatória,

$$\Sigma(p) = \frac{1}{\sqrt{p + \alpha}} \text{Sen} \left(\frac{1}{2} \sqrt{-1 + \frac{32}{DN\pi^2}} \text{Ln} \left[\frac{p + \alpha}{\Sigma(0)} \right] + \delta \right), \quad (\text{F.15})$$

onde δ é uma fase e $\Sigma(0)$ é um fator de escala logaritimico. Vemos da expressão acima que no caso de N ser menor que o valor crítico (< 1.5) haverá geração de massa para os férmions, sem no entanto haver quebra de paridade neste caso.

Entretanto, esta solução não reflete uma situação física aceitável pois N (ou L) deve ser um número inteiro⁶, e a solução encontrada nos leva a termos $L = \frac{1}{2}$. Podemos dizer então que o modelo Gross-Neveu no regime de N pequeno, com a hipótese de

⁶ N representa o número de campos de Dirac.

que metade dos férmions adquirem uma massa positiva e a outra metade uma massa igual e negativa, não gera dinamicamente massa para o campo fermiônico.

Figura F.1. As regras de Feynman para a teoria (F.2).

Figura F.2: As equações de Schwinger-Dyson.

Figura F.3: Propagadores dos campos fermiônico e do campo auxiliar com as inserções de auto-energia.

Figura F.4: Equações de Schwinger-Dyson na ordem dominante em $\frac{1}{N}$.

Bibliografia

- [1] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 1995;
- [2] J. Polchiski, Nucl. Phys. **B231**, 269 (1984);
- [3] G. P. Lepage, Proceedings of TASI-89, 1989; G. P. Lepage *et al.*, Phys. Rev. **D46**, 4052 (1992); M. Luke, A. V. Manohar, Phys. Rev. **D55**, 4129 (1997); D. B. Kaplan, "Effective Field Theories", Nucl-th/9506035;
- [4] "*Renormalization: From Lorentz to Landau (and Beyond)*", edited by Laurie M. Brown, Springer-Verlag, New York Inc., 1995;
- [5] W. E. Lamb Jr. and C. R. Retherford, Phys. Rev. **72**, 241 (1947);
- [6] J. E. Nafe, E. B. Nelson and I. I. Rabi, Phys. Rev. **71**, 914 (1947);
- [7] F. J. Dyson, Phys. Rev. **75**, 486 (1949); Phys. Rev. **75**, 1736 (1949);
- [8] David J. Gross, *Applications of the Renormalization Group to High-Energy Physics*, Proceedings of Les Houches, Session XXVIII, 1975, edited by Roger Balian and Jean Zinn-Justin, North-Holland Publishing Co. 1976;
- [9] G. Parisi, Nucl. Phys, **B100**, 368 (1975); B. Rosenstein, B. J. Warr and S. H. Park, Phys. Rev. Lett. **62** 1433. (1989);
- [10] M. Gomes, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, Phys. Rev.**D41**, 1363 (1990);
- [11] M. Gomes, R. S. Mendes, R. F. Ribeiro and A. J. da Silva, Phys. Rev.**D43**, 3516 (1991);
- [12] N. V. Krasnikov and A. B. Kyatkin, Mod. Phys. Lett. **A6**, (1991) 1315;

- [13] B. Rosenstein, B. J. Warr and S. H. Park, Phys. Rev. **D39** 3088, 1989;
- [14] L. Del Debbio, S. J. Hands and J. C. Mehegan, Nucl. Phys. **B502** (1997) 269;
- [15] S. Hands, "Fixed Point Four-Fermi Theories", hep-lat/9706018;
- [16] T. Appelquist, M. J. Bowick, D. Korabali and L. C. R. Wijewardhana, Phys. Rev. **D33**, 3774, 1986;
- [17] V. S. Alves, M. Gomes, A. J. da Silva e L. C. Malacarne, *Geração Dinâmica de Massa no Modelo Gross-Neveu*. XVI Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, 1995;
- [18] W. Chen, Nucl. Phys. **B435**, 689 (1995); W. Chen and M. Li, Phys. Rev. Lett. 70, 884 (1993);
- [19] J. Leinaas and J. Myrheim, Nuov. Cimen. 1, 37, (1977);
- [20] F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. 48, 1144, (1982); Phys. Rev. Lett. 49, 957, (1982);
- [21] C. R. Hagen, Ann. Phys. (NY) **157** (1984), 342; Phys. Rev **D31**, 848, 2135 (1985);
- [22] D. Arovas, J. Schrieffer, F. Wilczek and A. Zee, Nucl. Phys. **B251**, 177 (1985);
- [23] Y. Aharonov and H. Böhm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959);
- [24] M. Gomes, *Estatísticas Fracionárias e Teorias de Campos de $2 + 1$ Dimensões*, X Encontro Nacional de Partículas e Campos, 1989; A. Lerda, *Anyons*, Springer-Verlag (1992);
- [25] R. E. Prange and S. M. Girvin, *The Quantum Hall Effect*, Springer, Berlin, 1987; T. Chkraborty and P. Pietilainen, *The Fractional Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag, 1988;
- [26] F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, World Scientific, Singapore, 1990;
- [27] B. Halperin, Phys. Rev. **B25**, 2185, (1982);

- [28] R. B. Laughlin, Phys. Rev. **B23** 5632, (1981); Phys. Rev. Lett. 60, 2677 (1988);
- [29] F. Wilczek, E. Witten and B. I. Halperin, Int. J. Mod. Phys. **B3**, 1001 (1989);
- [30] F. Wilczek and A. Zee, Phys. Lett. **51** (1983) 2250; Y. Wu and A. Zee, Phys. Lett. **147B** (1984) 325;
- [31] X. G. Wen and A. Zee, Phys. Rev. **B41**, 240, (1990); J. D. Lykken and J. Sonnenschein and N. Weiss, Int. J. Mod. Phys. **A6**, 5155 (1991);
- [32] A. M. Polyakov, Mod. Phys. Lett. **A3**, 325 (1988); C. H. Tze, Int. J. Mod. Phys. **A3**, 1959 (1988); S. Iso, C. Itoi and H. Mukaida, Nucl. Phys. **B346**, 293 (1990); N. Shaju, R. Shankar and M. Sivakumar, Mod. Phys. Lett. **A5**, 593 (1990);
- [33] A. Foerster and H. O. Girotti, Nucl. Phys. **B342** 680 (1990);
- [34] J. S. Schonfeld, Nucl. Phys. **B185**, 1981; S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. Lett. 48, 975 (1982); Ann. Phys. 140, 372 (1982);
- [35] R. Jackiw, Phys. Rev. **D29**, 2375 (1984);
- [36] A. N. Redlich, Phys. Rev. Lett. 52, 18 (1984); Phys. Rev. **D29**, 2366 (1984);
- [37] V. S. Alves, M. Gomes, S. V. L. Pinheiro and A. J. da Silva, "The Perturbative Gross Neveu Model Coupled to a Chern-Simons Field: A Renormalization Group Study", hep-th/9810106 *aceito para publicação na Phys. Rev. D*;
- [38] Wolfhart Zimmermann, Commun. Math. Phys. 97, 211 (1985);
- [39] M. O. C. Gomes, *Apostila do Curso de Introdução à Teoria Quântica de Campos I e II*, IFUSP, (1997);
- [40] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, (1985);
- [41] N. N. Bogoliobov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley, 1980;
- [42] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, (1996);

- [43] R. Jackiw and S. Templeton, Phys. Rev. **D23**, 2291 (1981);
- [44] I. V. Tyutin and Vad. Yu. Zeitlin, "Gauge Invariance of QED_{2+1} ", hep-th/9711137;
- [45] S. Weinberg, Phys. Rev **D8**, 3497 (1973);
- [46] Y. Hahn and W. Zimmermann, Com. Math. Phys. 10, 330 (1968);
- [47] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Phys. Lett. **40B**, 566 (1972); G. t'Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972); J. F. Ashmore, Lett. Nuovo Cimento **4**, 289 (1972);
- [48] G. t'Hooft, Nucl. Phys. **B61**, 455, (1973);
- [49] R. S. Willey, Phys. Rev. **D48**, 2877 (1993); T. Ghergheta, Phys. Rev. **D50**, 5985 (1994);
- [50] A. V. Manohar, Phys. Rev. **D56**, 230 (1997);
- [51] Speer, E. R., J. Math. Phys. 15, 1, (1974); Collins, J. C. Nucl. Phys. **B92**, 477, (1975);
- [52] E. Speer, *Renormalization Theory*, Proceedings of the International School Ettore Majorana, Erice 1975, edited by G. Velo and A. S. Wightman, D Reidel Publishing Co, 1976.
- [53] T. Muta, *Renormalizations Groups and Critical Phenomena in Quantum Field Theory*, Nagoya Spring School on Dynamical Symmetry Breakink, 1991, Edited by Koichi Yamawaki, World Scientific, 1992;
- [54] Y. Kao and M. Suzuki, Phys. Rev. **D31**, 1213 (1985);
- [55] M. Bernstein and T. Lee, Phys. Rev. **D32**, 1020 (1985);
- [56] S. Coleman and B. Hill, Phys. Lett. **159B**, 184 (1985);

- [57] Gordon W. Semenoff, Pasquale Sodano and Yong-Shi Wu, Phys. Rev. Lett. 62, 715 (1989); V. P. Spiridonov and F. V. Tkachov, Phys. Lett. **B260**, 109 (1991); Avinash Khare, R. MacKenzie and M. B. Paranjape, Phys. Lett. **B343**, 239 (1995); Hsien-Chung Kao, Mod. Phys. Lett. **A12**, 763 (1997);
- [58] K. G. Wilson, Phys. Rev. **D3**, 1818 (1971);
- [59] Warren Siegel, Phys. Lett. **84B**, 193 (1979); Phys. Lett. **94B**, 37 (1980); C. M. Hull and P. K. Townsend, Phys. Lett. **191B**, 115 (1987); Michiel Bos, Ann. Phys. **181**, 177 (1988); C. P. Martin, Phys. Lett. **241B**, 513 (1990); Wei Chen, G. W. Semenoff and Yong-Shi Wu, Mod. Phys. Lett A, Vol.5, 1833, (1990); L. V. Avdeev, G. V. Grigoryev and D. I. Kazakov, Nucl. Phys. **B382**, 561, (1992); G. Giavarini and C. P. Martin, Nucl. Phys. **B381**, 222 (1992); Pang-Ning Tan, Bayram Tekin and Yutaka Hosotani. hep-th/9703121; M. Chaichian and W. F. Chen, hep-th/9806127;
- [60] Reinhard Oehme, Klaus Sibold and Wolfhart Zimmermann, Phys. Lett. **147B**, 115 (1984); Reinhard Oehme and Wolfhart Zimmermann, Commun. Math. Phys. 97, 569 (1985); Klaus Sibold, Acta Physica Polonica, **B19**, 295 (1987); Reinhard Oehme, *Reduction of Coupling Parameters*, hep-th/9511006 (unpublished);
- [61] Mário Atance and José Luis Cortés, Phys. Rev. **D54**, 4973 (1996);
- [62] Mário Atance and José Luis Cortés, Phys. Rev. **D56**, 3611 (1997);