UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

**ASPECTOS EM TEORIAS DE CAMPOS A
TEMPERATURA FINITA**

SBI-IFUSP

305M810T2579

André Pereira de Almeida

Tese de doutorado apresentada
ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Doutor em
Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Josif Frenkel

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Josif Frenkel *Josif Frenkel*

Prof. Dr. Marcelo O. Caninha Gomes

Prof. Dr. Carlos Ourívio Escobar

Prof. Dr. Abraham H. Zimerman

Prof. Dr. João Barcelos Neto

Sylvio Cavuto
Prof. Iberê Luiz Caldas
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

SÃO PAULO
1996

05/12/96

530.14
A 447 a
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Almeida, André Pereira de
Aspectos em Teorias de Campos à Temperatura Finita.
São Paulo, 1997.

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Área de Concentração: Teoria de Campos e Partículas
Orientador: Prof. Dr. Josif Frenkel

Unitermos: 1. Teoria de Campos; 2. Cromodinâmica
Quântica; 3. Temperatura Finita.

USP/IF/SBI - 30/97

Resumo

Este trabalho estuda o comportamento de algumas teorias de campos quando a temperatura não é nula. O comportamento infravermelho destas teorias é, em alguns casos, extremamente complicado. No contexto da aproximação ladder, estudamos o cancelamento das divergências infravermelhas para a pressão na teoria escalar com acoplamento $\lambda\phi^3$ e na teoria de Yang-Mills. Nós provamos que as divergências infravermelhas destas teorias que aparecem na série perturbativa se cancelam na aproximação ladder. As massas térmicas que são de fundamental importância para a compreensão destes comportamentos são também estudadas no contexto da gravitação. Nós calculamos algumas propriedades do tensor de polarização do gráviton, em particular calculamos a massa de Jeans que descreve a instabilidade da teoria a temperatura finita.

Abstract

This work studies the behaviour of some fields theories with non-zero temperatures. The infrared behaviour of these theories is, in some cases, quite complicated. In the context of the ladder approximation, we study the cancellation of infrared singularities of the pressure of the scalar theory with a $\lambda\phi^3$ coupling and of the Yang-Mills theory. We prove that the infrared divergencies of these theories that appear in the perturbative expansion cancels out in the ladder approximation. The thermal masses, which are of fundamental importance to understand these behaviours are also studied in the context of gravity. We derive some properties of the graviton's propagator, in particular, we have calculated the Jeans' mass which describe the instability of this theory at finite temperature.

Agradecimentos

Agradeço à minha esposa, Ana Cristina Granado Pereira de Almeida, pelo apoio; ao meu orientador, Josif Frenkel, pela paciência, e à FAPESP pela ajuda financeira.

Conteúdo

1	Fundamentos da teoria de campos a temperatura finita	4
2	Divergências Infravermelhas em teorias de campo a temperatura finita	13
3	Estudo do comportamento infravermelho na aproximação "ladder"	19
4	Efeitos térmicos em um teoria de campos em espaço curvo	29
5	Efeitos de campos térmicos no tensor de polarização do gráviton	37
	Apêndice A	48
	Apêndice B	51

Introdução

O objetivo de teorias de campo a temperatura finita é entender o comportamento da matéria quando a temperatura é extremamente elevada, a tal ponto que os quarks se desconfinam, ou quando a densidade é tão alta que os prótons, nêutrons ou hádrons em geral se sobrepõem, formando um plasma de quarks e glúons. Tais condições extremas ocorrem somente muito longe da experiência humana diária, mas são de importância fundamental para a compreensão de processos que aconteceram no princípio do universo, que o tornaram tal como o conhecemos hoje, ou para o estudo do que acontece no interior de uma estrela de nêutrons onde a matéria nuclear se funde, ou ainda para estudarmos colisões altamente energéticas de núcleos pesados. Para estes estudos precisamos compreender os efeitos coletivos gerados pela associação da teoria de campos usual com a termodinâmica.

Um dos campos mais interessantes da teoria de campos a temperatura finita é o estudo da teoria da interação dos quarks e glúons, a cromodinâmica quântica. Acredita-se que os quarks, a temperatura zero, permanecem confinados. A medida em que a temperatura aumenta, porém, os hádrons devem aumentar de tamanho, pois a energia interna dos quarks aumenta e, a uma determinada temperatura crítica, os quarks devem se desconfinar formando um plasma de quarks e glúons livres. No entanto, o estudo desta teoria é extremamente complicado, pois as divergências infravermelhas que já aparecem a temperatura zero tornam esta teoria impossível de se calcular na prática. Esta divergência, que está intimamente ligada ao fato de os glúons não terem massa, tornam a teoria de perturbações inaplicável além de uma determinada ordem na constante de acoplamento, pois as divergências tornam-se cada vez mais severas. Em alguns modelos, como no caso de uma teoria escalar com acoplamento $\lambda\phi^3$, este problema não aparece a temperatura finita, pois as partículas não massivas ganham uma massa térmica que surge naturalmente

da teoria quando a temperatura não é nula, e esta massa permite eliminar todas as divergências infravermelhas que venham a surgir[1]. Infelizmente isto é apenas em parte aplicável a QCD, pois enquanto os gluons referentes a parte cromoeétrica da teoria efetivamente ganham massa térmica, os gluons cromomagnéticos não apresentam uma massa deste tipo, impossibilitando assim um tratamento simples da teoria.

Entretanto, para que a teoria faça sentido é de se esperar que grandezas físicas mensuráveis como a pressão estejam de alguma forma livres destas divergências, ou seja, que elas se cancelem em um tratamento não perturbativo. A primeira parte desta tese é voltada a este importante problema. Aqui é proposto um mecanismo pelo qual estas divergências podem se cancelar, estudando um modelo simplificado das equações de Schwinger-Dyson para a cromodinâmica. As equações de Schwinger-Dyson são equações não perturbativas que a teoria deve obedecer. Estas equações, no entanto, são extremamente complicadas e, em geral, são um conjunto infinito de equações, o que as tornam impossíveis de lidar. Assim, temos que, de alguma forma, trancar estas equações. Para isto usamos a chamada aproximação "ladder" que consiste em desprezar a contribuição das funções de Green de três e quatro pontos do glúon, de modo semelhante ao proposto por Kajantie e Kapusta[2]. Esta aproximação já foi utilizada por Mandelstam[3] para entender como pode ocorrer o confinamento a temperatura zero, e por Jackiw e Templeton[4] para mostrar como teorias super-renormalizáveis curam as divergências ultravioletas. Com esta aproximação é possível obter um conjunto finito de equações e tentar resolvê-las. Desta forma foi possível mostrar que, apesar de que todos os termos perturbativos divergem a partir de uma determinada ordem de perturbação, o resultado final é finito. Este trabalho foi publicado na Physical Review[5].

O conceito de massas térmicas desempenham também um papel fundamental em outro campo desta teoria, a gravitação a temperatura finita. Em gravitação é notória a dificuldade de se obter uma teoria quântica convincente, porém podemos estudar a gravitação quando esta entra de uma forma semi-clássica, no estudo de teorias de campos em espaços curvo. À temperatura finita isto é possível se supusermos que a temperatura do plasma está bem abaixo da escala de Planck, isto é, após os primeiros segundos da formação do universo. Neste regime, podemos obter uma teoria consistente para um plasma sob ação de um campo gravitacional. Um resultado expressivo desta teoria é que o gráviton apresenta uma massa térmica imaginária

para um determinado modo de vibração do plasma. Isto identifica uma instabilidade do espaço plano, indicando que a qualquer temperatura não nula, o espaço plano não é o estado de mínima energia e vai decair. Este resultado é bem conhecido e foi obtido pela primeira vez por sir James Jeans em 1902 para um fluido sob ação de um campo gravitacional newtoniano. O significado deste resultado é simples: a matéria espalhada uniformemente por uma região grande do espaço é instável, assim ela tende a se fragmentar formando as galáxias tais como as conhecemos hoje. O estudo do propagador do gráviton desempenha, desta forma, um ponto fundamental para entendermos esta teoria. Nesta tese obtivemos este propagador, para o caso de uma partícula escalar conforme sem massa, de forma fechada. Obtivemos também que ele apresenta três modos de vibração distintos, um associado a uma massa imaginária, análoga à massa de Jeans clássica; outro modo associado a uma massa real que atenua as vibrações do plasma, e um terceiro modo que não apresenta massa, análogo à parte magnética e uma teoria e Yang-Mills. O estudo deste propagador que consta nesta tese foi também publicado na *Physical Review*[6].

Esta tese está organizada da seguinte forma: no primeiro capítulo apresento um estudo de teorias de campos a temperatura finita, explicando basicamente as ferramentas teóricas necessárias para compreensão do resto da tese. Para mais detalhes recomendo a referência [7]. O segundo capítulo trata basicamente da colocação do problema das divergências infravermelhas numa teoria de Yang-Mills a temperatura finita, como elas aparecem e quais as dificuldades que surgem partir delas. O terceiro capítulo é uma análise de como estas divergências se cancelam na aproximação ladder. O quarto capítulo descrevo alguns pontos de teorias de campos sobre espaço curvo. Para maiores detalhes recomendo os livros [8] e [9]. Finalmente, no último capítulo estudo como deve se comportar o tensor de polarização do gráviton, calculo de forma fechada este tensor e analiso o surgimento de massas térmicas neste propagador.

Capítulo 1

Fundamentos da teoria de campos a temperatura finita

Vamos considerar um sistema descrito por um operador hamiltoniano $\hat{H}$ em contato com um reservatório de calor a temperatura $T = 1/\beta$, isto é, o chamado *ensemble* canônico. Neste sistema a matriz densidade estatística é expressa da forma:

$$\rho = \exp(-\beta\hat{H}) \quad (1.1)$$

e, a partir dela, podemos calcular a média estatística de um operador $\hat{A}$:

$$A = \frac{\text{Tr}\rho\hat{A}}{\text{Tr}\rho} \quad (1.2)$$

O ponto de partida para estudarmos os efeitos térmicos de uma teoria é a função partição:

$$Z = \text{Tr}\rho \quad (1.3)$$

A partir dela podemos obter todas as propriedades térmicas relevantes do sistema, tais como a pressão, energia ou entropia. Em teoria de campos a função partição pode ser definida como:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \langle \phi | \exp(-\beta\hat{H}) | \phi \rangle \quad (1.4)$$

onde estamos integrando sobre todos os estados possíveis dos campos envolvidos no sistema.

Por outro lado, sabemos da teoria quântica de campos que:

$$\langle \phi_a | \exp(it_1 \hat{H}) | \phi_b \rangle \quad (1.5)$$

é a amplitude de probabilidade de transição de um estado ϕ_a para um estado ϕ_b em um tempo t_1 . Segundo o teorema de Kac-Feynman esta fórmula pode ser escrita na forma de uma integral funcional:

$$\int_{\phi_a(t=0)}^{\phi_b(t=t_1)} \mathcal{D}\phi \exp iS \quad (1.6)$$

onde

$$S = \int_0^{t_1} dt \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi) \quad (1.7)$$

é a ação do sistema neste intervalo de tempo e $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ é a densidade lagrangeana efetiva do sistema. O aparecimento da lagrangeana efetiva em lugar da lagrangeana usual se deve a que, em teorias de sistemas vinculados, necessitamos de termos de fixação de gauge para obtermos o valor correto da integral funcional, como é bem conhecido de teorias quânticas de campos de gauge.

A semelhança das fórmulas (1.4) e (1.5) é clara. Logo gostaríamos de escrever a função partição como uma integral funcional análoga a fórmula (1.6). Para isso observamos que fazendo a substituição $\beta \rightarrow -it_1$ em (1.4) obteremos (1.5) integrado sobre todos os estados iniciais e finais iguais, isto é integrado sobre todas as funções periódicas em it com período β . Por esse motivo é de se esperar que a função partição possa ser escrita da forma:

$$Z = \int_{\phi \text{ periódico}} \mathcal{D}\phi \exp(-S) \quad (1.8)$$

com

$$S = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi) \quad (1.9)$$

Note que fizemos uma rotação de $t \rightarrow i\tau$ no plano complexo (uma rotação de Wick), tornando o tempo imaginário, isto é, fazendo uma continuação analítica da ação e, posteriormente, das funções de Green do espaço de Minkowsky para o espaço Euclidiano. Por este motivo este método é chamado de formalismo de tempo imaginário. É interessante observar que, quando impomos que os campos sejam periódicos no tempo, quebramos parcialmente a

simetria de Lorenz da teoria, o que era de se esperar, pois agora nós temos um referencial privilegiado, o referencial de repouso do plasma.

Como é bem conhecido, nós sabemos resolver exatamente apenas integrais funcionais de funções gaussianas, que correspondem a partículas livres, mas podemos usar a teoria de perturbações no termo de acoplamento. A teoria de perturbações em uma teoria de campo a temperatura finita é basicamente análoga a teoria a temperatura zero, obtendo-se os gráficos e as regras Feynman iguais ao caso de temperatura zero, porém como estamos integrando apenas sobre funções periódicas no tempo, isto é, funções que podem ser descritas por uma série de Fourier no tempo, as componentes temporais do momento das partículas internas de um gráfico de Feynman só poderão ter valores discretos $k_0 = 2\pi nT$ com n sendo um número inteiro, como veremos.

Para prosseguirmos vamos estudar a princípio a teoria escalar sem massa com acoplamento $\lambda\phi^3$ em d dimensões definida pela densidade lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{6}\lambda\phi^3 \quad (1.10)$$

Em 6 dimensões esta teoria é renormalizável e o acoplamento se torna adimensional. Esta teoria é um bom modelo para entendermos a cromodinâmica quântica (QCD), pois, como esta, a teoria escalar é assintoticamente livre, tendo basicamente as mesmas propriedades da QCD sem as complicações desta. Infelizmente esta teoria não é bem definida globalmente, pois a lagrangeana não é limitada inferiormente, como é fácil de ver pelo termo de acoplamento, mas este problema não aparece no tratamento perturbativo que iremos usar.

A função partição neste modelo será:

$$Z = \int_{\phi \text{ periódico}} \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int_0^\beta dt \int d^{d-1}x \mathcal{L} \right] \quad (1.11)$$

onde $\mathcal{L}$ pode ser dividida em duas partes, a parte correspondente a partícula livre:

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \quad (1.12)$$

e a parte de interação:

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{6}\lambda\phi^3 \quad (1.13)$$

Podemos deduzir as regras de Feynman a temperatura finita inserindo fontes externas na lagrangeana, obtendo a função partição da forma:

$$Z = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \int_0^\beta d\tau \int d^{d-1}x \left[\mathcal{L}_1(\phi) + \frac{1}{2} (\phi \nabla^2 \phi + \phi \partial_\tau^2 \phi) + \eta \phi \right] \right\} \quad (1.14)$$

Podemos assim extrair a parte de interação da integral funcional e, fazendo uma transformada de Fourier nas cordenadas espaciais e usando uma série de Fourier nas coordenadas temporais, obtemos:

$$Z(\eta) = \exp \left[-T \sum_{k_0=2\pi i n T} \int \frac{d^{d-1}\vec{k}}{(2\pi)^{d-1}} S_1 \left(\frac{-\delta}{\delta\eta} \right) \right] Z_0(\eta) \quad (1.15)$$

onde $\vec{k}$ são as componentes espaciais do momento e $Z_0(\eta)$ é a função partição de uma partícula livre com fontes externas, isto é:

$$\begin{aligned} Z_0(\eta) &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -T \sum_n \int \frac{d^{d-1}\vec{k}}{(2\pi)^{d-1}} \left[\frac{1}{2} \phi k^2 \phi + \eta \phi \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ T \sum_n \int \frac{d^{d-1}\vec{k}}{(2\pi)^{d-1}} \left[\frac{1}{2} \frac{\eta(k_0, \vec{k})^2}{k^2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Assim vemos claramente que as regras de Feynman a temperatura finita são as mesmas que a temperatura zero com as mudanças:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \rightarrow iT \sum_n \int \frac{d^{d-1}\vec{k}}{(2\pi)^{d-1}} \quad (1.17)$$

para cada loop interno, onde:

$$k_0 = 2\pi i n T \quad (1.18)$$

Como não usamos a forma explícita de $\mathcal{L}_1$, estas regras valem para qualquer teoria bosônica, inclusive a QCD sem fermions, ou bósons sob ação de um campo gravitacional.

Para entender o mecanismo da teoria vamos calcular a função de 2 pontos da teoria escalar em 6 dimensões na ordem de um loop representada pelo gráfico:

Usando as regras de Feynman obtemos:

$$\Pi(p) = \lambda i T \sum_{k_0=2\pi i n T} \int \frac{d^5 \vec{k}}{(2\pi)^5} \frac{1}{k^2} \frac{1}{(k-p)^2} \quad (1.19)$$

A primeira dificuldade é calcular o somatório sobre k_0 [10]. Para isso, podemos utilizar a função $\text{ctgh}(\pi z)$ que tem polos simples com resíduo +1 em todos os pontos $z = in$ onde n é um número inteiro, como é mostrado na figura:

Assim, podemos obter que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(k_0 = 2\pi i n T) = \frac{1}{2\pi i T} \int_C \frac{dz}{2} f(z) \text{ctgh} \left(\frac{z}{2T} \right) \quad (1.20)$$

onde $f(z)$ é qualquer função que não tenha polos no interior do contorno C que envolve o eixo imaginário representado pela figura:

Este contorno pode ser representado por duas retas, uma que vai de $-i\infty + \varepsilon$ a $i\infty + \varepsilon$ e outra que vai de $i\infty - \varepsilon$ a $-i\infty - \varepsilon$, onde ε é arbitrariamente pequeno, e $f(z)$ não tem polos no eixo imaginário. Podemos fazer uma transformação $z \rightarrow -z$ na segunda reta deste contorno, obtendo:

$$T \sum_{k_0} f(k_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dz \frac{1}{2} [f(z) + f(-z)] \text{ctgh} \left(\frac{z}{2T} \right) \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} dz \frac{1}{2} [f(z) + f(-z)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dz [f(z) + f(-z)] N \left(\frac{z}{T} \right) \quad (1.22)$$

onde $N(x)$ é a função distribuição de Bose:

$$N(x) = \frac{1}{e^x - 1} \quad (1.23)$$

Quando substituirmos (1.22) na função de 2 pontos da teoria escalar (1.19) é fácil ver que o primeiro termo de (1.22) nada mais é que o propagador a temperatura zero da teoria euclidianizada, portanto todas as contribuições térmicas são obtidas apenas do segundo termo. O segundo termo pode ser calculado fechando-se o contorno desta forma:

onde $R \rightarrow \infty$.

O resultado desta integral é o valor dos resíduos de $f(z)$ e $f(-z)$ no interior deste contorno. Da fórmula (1.19) vemos que os únicos resíduos provêm dos polos dos propagadores das partículas internas, quando estas estão na "concha" de massa. Isto corresponde a "quebrar" os propagadores nos loops, transformando os gráficos com loops em gráficos de espalhamento por partículas térmicas na "concha" de massa. Desta forma, obtemos para (1.19) a formula:

$$\text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \bigcirc \text{---} \xrightarrow{k} \text{---} =$$

$$= \int \frac{d^5 \vec{k}}{|\vec{k}|} N \left(\frac{|\vec{k}|}{T} \right) \frac{\text{---} \xrightarrow{k} \text{---} \text{---} \xrightarrow{k} \text{---}}{Q \quad Q+k \quad Q} \div (k \leftrightarrow -k) \quad (1.24)$$

Este método é analogo para qualquer teoria de campos. Desta forma,

podemos sempre calcular gráficos de Feynman a temperatura finita como espalhamentos de partículas térmicas.

A função de dois pontos da teoria escalar, usando este método, será:

$$\Pi(p) = -\lambda^2 \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} \frac{1}{2k} N\left(\frac{k}{T}\right) \left[\frac{1}{p^2 + 2k \cdot p} + k \leftrightarrow -k \right]. \quad (1.25)$$

Em termos de $x \equiv \cos\theta$, onde θ é o ângulo entre $\mathbf{k}$ e $\mathbf{p}$ obtemos:

$$\Pi(p) = \lambda^2 \frac{p^2}{64\pi^3} \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{(p_0 - |\vec{p}|x)^2} dx \int_0^\infty k^3 N\left(\frac{k}{T}\right) \frac{dk}{k^2 - \left[\frac{p^2}{2(p_0 - |\vec{p}|x)}\right]^2} \quad (1.26)$$

A partir deste ponto podemos fazer uma expansão para achar os termos dominantes na temperatura ou podemos resolver esta integral exatamente por um método que será explicado mais adiante. Vamos considerar primeiramente o método usual de expandir em termos dominantes em altas temperaturas. Para isto observamos que os momentos das partículas internas nos loops é de ordem T quando $T \gg p$. Assim podemos expandir o denominador da integral radial de (1.26) em potências da forma:

$$\frac{k^2}{k^2 - \left[\frac{p^2}{2(p_0 - |\vec{p}|x)}\right]^2} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (1.27)$$

e usando que[11]:

$$\int_0^\infty N\left(\frac{k}{T}\right) k dk = \frac{\pi^2 T^2}{6} \quad (1.28)$$

obtemos, para o termo dominante:

$$\Pi_d(p) = \lambda^2 \frac{T^2}{96\pi} \left(1 - \frac{p_0^2}{|\vec{p}|^2}\right) \left(1 - \frac{p_0}{2|\vec{p}|} \ln \left| \frac{p_0 + |\vec{p}|}{p_0 - |\vec{p}|} \right| \right) \quad (1.29)$$

e os termos sub-dominantes podem ser obtidos de forma análoga.

A partir da equação (1.26), porém, podemos obter a função de dois pontos de forma fechada, isto é, podemos obter $\Pi(p)$ como uma função de p que envolve todos os termos, dominantes e sub-dominantes na temperatura. Este

método será utilizado posteriormente para o cálculo da função de dois pontos do gráviton e, por isso, será considerado aqui. Para isto usamos a fórmula:

$$J(y) = \int_0^\infty N\left(\frac{k}{T}\right) \frac{kdk}{k^2 - (2\pi Ty)^2} = \ln(y) - \frac{1}{2y} - \psi(y) \quad (1.30)$$

onde $y \equiv \frac{i}{4\pi T} \frac{k^2}{p_0 - |\vec{p}|x}$ e $\psi(y) \equiv \frac{d}{dy} \ln \Gamma(y)$ é a função psi de Euler. É importante notar que para obtermos o limite de tempo real da função de Green devemos fazer uma continuação analítica de nosso resultado com tempo imaginário através de uma prescrição específica. Esta prescrição, porém, vai influir apenas na parte imaginária da função de dois pontos, que não nos interessa neste trabalho.

Utilizando a função J definida na fórmula (1.30), podemos notar que a função de dois pontos pode ser escrita como:

$$\Pi(p) = \Pi_d(p) - \lambda^2 \frac{T^2 p^2}{32\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx(1-x^2)}{(p_0 - |\vec{p}|)^2} y^2 J(y) \quad (1.31)$$

onde $\Pi_d(p)$ é o termo dominante em altas temperaturas dado pela equação (1.29). O segundo termo desta equação envolve apenas integrais da forma:

$$I_n(q) = \int_C y^n J(y) dy \quad (1.32)$$

com $n = 0, 1$ ou 2 . Estas integrais podem ser expressas em termos das funções zeta de Riemann generalizadas e psi de Euler, além de funções elementares. Estas integrais estão computadas no apêndice A. Desta forma, definindo:

$$q(p_0) \equiv i \frac{p_0 + |\vec{p}|}{4\pi T}, \quad (1.33)$$

a função de dois pontos nesta teoria pode ser representada como:

$$\Pi(p) = \Pi_d(p) + F[q(p_0)] - F[-q(-p_0)], \quad (1.34)$$

onde:

$$F(q) = \frac{k^2}{8|\vec{p}|^3} \left[\frac{iT p^2}{16\pi^2} I_0(q) - \frac{T^2 p_0}{2\pi} I_1(q) - iT^3 I_2(q) \right] \quad (1.35)$$

Este resultado fornece uma forma explícita da função de dois pontos desta teoria. Resultado análogo pode ser obtido na teoria de Yang-Mills[12].

Capítulo 2

Divergências Infravermelhas em teorias de campo a temperatura finita

É bem conhecido que os problemas de divergências infravermelhas são muito mais severos em uma teoria que contem acoplamentos entre partículas sem massa, como a QCD, do que numa teoria como a eletrodinâmica quântica. É conhecido que em temperatura finita as divergências infravermelhas tornam impossível descrever a transição de fase de segunda ordem da teoria escalar com acoplamento $\lambda\phi^4$ próxima da temperatura crítica T_c , pois, neste caso, os bósons da teoria deixam de ser massivos. Na teoria de Yang-Mills essas divergências são ainda mais severas, tornando impossível descrever a função partição além da quinta ordem de perturbação a qualquer temperatura[13].

No caso da teoria $\lambda\phi^3$ estas divergências também ocorrem. A temperatura finita, porém, podemos retirar as divergências desta teoria. Para entender este ponto considere uma forma geral de uma integral sobre um loop de um gráfico qualquer que contribua para a função partição:

$$\cong T \sum_{k_0} \int d\vec{k} \mathcal{D}(k_0, \vec{k}) \times \mathcal{D}(k_0 + p_{10}, \vec{k} + \vec{p}_1) \times \mathcal{D}(k_0 + p_{20}, \vec{k} + \vec{p}_2) \times \dots \quad (2.1)$$

onde $\mathcal{D}$ é o propagador.

As divergências infravermelhas surgem apenas quando $k_0 = 0$ no primeiro propagador (ou $k_0 + p_{10} = 0$ nos outros). Além disto, ela vem da região

$\vec{k} \rightarrow 0$ no primeiro propagador (ou $\vec{k} + \vec{p}_i \rightarrow 0$). Em suma, as divergências infravermelhas vem do fato de:

$$\mathcal{D}(k_0 = 0, \vec{k} \rightarrow 0) \rightarrow \infty \quad (2.2)$$

Porém quando calculamos a função de dois pontos da teoria $\lambda\phi^3$ em primeira ordem de perturbação, obtivemos que o termo dominante em altas temperaturas era:

$$\Pi_d(p) = \lambda^2 \frac{T^2}{96\pi} \left(1 - \frac{p_0^2}{|\vec{p}|} \right) \left(1 - \frac{k_0}{2|\vec{p}|} \ln \left| \frac{p_0 + |\vec{p}|}{p_0 - |\vec{p}|} \right| \right) \quad (2.3)$$

e assim podemos observar que:

$$m_i^2 \equiv \Pi(p_0 = 0, \vec{p} \rightarrow 0) = \lambda^2 \frac{T^2}{96\pi} \quad (2.4)$$

Desta formula observamos que m_i representa uma massa térmica que aparece naturalmente da teoria. Por outro lado, o propagador efetivo pode ser obtido por sucessivas inserções da função de dois pontos conforme a figura:

$$\text{---} \bigcirc \text{D} \text{---} = \text{---} + \text{---} \bigcirc \pi \text{---} + \text{---} \bigcirc \pi \text{---} \bigcirc \pi \text{---} + \dots$$

Desta forma, podemos utilizar que:

$$\mathcal{D}(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2} \Pi(p) \mathcal{D}(p) \quad (2.5)$$

onde $\mathcal{D}$ é o propagador desta teoria, obtendo:

$$\mathcal{D}_{eff}(p) = \frac{1}{p^2 - \Pi(p)} \quad (2.6)$$

Este propagador efetivo apresenta naturalmente uma massa térmica m_t e, assim, não diverge quando $p_0 = 0$; $\vec{p} \rightarrow 0$. Este propagador pode então ser utilizado para se calcular as ordens maiores na teoria de perturbações sem termos problemas de divergências infravermelhas.

Na teoria de Yang-Mills, infelizmente, não é isso que acontece. Vamos analisar a estrutura do tensor de polarização de um gluon. Em temperatura zero, devido a simetria de Lorenz da teoria, este tensor só pode depender de dois tensores covariantes simétricos, desta forma:

$$\Pi_{\mu\nu} = a(p^2)g_{\mu\nu} + b(p^2)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (2.7)$$

e, devido a transversalidade (identidade de Ward no gauge de Feynman):

$$p^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0 \quad (2.8)$$

este tensor tem a forma bem conhecida de temperatura zero:

$$\Pi_{\mu\nu} = F(p^2) \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \quad (2.9)$$

A temperatura finita, porém, não temos mais a simetria de Lorenz, pois passamos a ter um referencial privilegiado, o referencial de repouso do plasma. Deste modo, além do quadri-vetor momento p_μ , temos também o quadri-vetor velocidade do plasma u_μ que no referencial de repouso do plasma será $u_\mu = (1, \vec{0})$. O tensor de polarização terá então a forma geral:

$$\Pi_{\mu\nu} = a(p^2)g_{\mu\nu} + b(p^2)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2} + c(p^2)u_\mu u_\nu + d(p^2)\frac{u_\mu p_\nu + p_\mu u_\nu}{p_0} \quad (2.10)$$

que, novamente, pela transversalidade (2.8) pode ser reduzido a:

$$\Pi_{\mu\nu} = F(p^2)A_{\mu\nu} + G(p^2)B_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

onde os tensores A e B são:

$$\begin{aligned} A_{00} &= A_{0i} = A_{i0} = 0 \\ A_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{|\vec{p}|^2} \\ B_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} - A_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.12)$$

E, igualmente para o propagador, teremos que:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2} + M(p^2)A_{\mu\nu} + E(p^2)B_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

Os tensores A e B correspondem a modos de vibração do plasma. O tensor A corresponde à componente espacial Π_{ij} do tensor de polarização, enquanto o tensor B corresponde às componentes temporais $\Pi_{0\mu}$. Desta forma, podemos ver que o modo B é responsável pela propagação da componente G_{0i} do campo cromodinâmico, e, por analogia com o eletromagnetismo, dizemos que este é o modo cromoeletrônico da teoria. Da mesma forma, o modo A é a parte cromomagnética.

Vamos agora calcular o termo dominante em altas temperaturas do tensor de polarização de uma teoria de Yang-Mills. As regras de Feynman desta teoria são dadas no apêndice B. Em ordem de g^2 , no gauge de Feynman, a parte dependente da temperatura do tensor de polarização será:

$$\begin{aligned} \Pi_{\mu\nu}^{ab}(p) = & -\frac{g^2 N \delta^{ab}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2k} N\left(\frac{k}{T}\right) \times \\ & \times \left[\frac{(2p^2 - 4p \cdot k)g_{\mu\nu} + 8k_\mu k_\nu + 4(k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu) - 2p_\mu p_\nu}{p^2 + 2k \cdot p} + (k \leftrightarrow -k) \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

A partir desta equação, podemos observar que os termos dominantes em altas temperaturas, isto é, os termos que envolvem maiores potências do momento interno k serão dados por:

$$\Pi_d^{ab}(p) = \frac{N \delta^{ab}}{4\pi^3} \int \frac{d^3 k}{k} N\left(\frac{k}{T}\right) \left(\frac{p^2 k_\mu k_\nu}{(k \cdot p)^2} - \frac{k_\mu p_\nu + k_\nu p_\mu}{k \cdot p} + g_{\mu\nu} \right) \quad (2.15)$$

Quando $p_0 = 0$ podemos observar que a parte espacial $\Pi_d{}_{ij}$ se anula quando fazemos as integrais angulares, obtendo assim que:

$$\Pi_d^{ab}(p_0 = 0) = N g^2 \delta^{ab} \frac{T^2}{3} \quad (2.16)$$

ou, usando a notação da equação (2.11) temos:

$$F_d = 0 \quad ; \quad G_d = N g^2 \frac{T^2}{3} B_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

O valor de G_d é chamado de massa elétrica do gluon. Isto permite uma ressonagem da parte elétrica do propagador (os termos do propagador proporcionais a $B_{\mu\nu}$) análoga ao que acontece na teoria escalar. Usando-se que:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{1}{p^2} \mathcal{D}_{\mu\rho} \Pi_\rho^\nu \quad (2.18)$$

vemos que a parte elétrica do propagador do gluon não irá contribuir para divergências infravermelhas, porém quando fazemos o mesmo para a parte magnética (proporcionais a $A_{\mu\nu}$) o mesmo não acontece.

A princípio parece que se pudessemos encontrar uma massa magnética em ordem superior na teoria de perturbação este problema estaria resolvido, porém analisemos o que aconteceria apenas nos diagramas de ordem g^{2N} contendo N vértices quárticos de gluons "magnéticos", com uma massa $m_m(T)$. Esta contribuição será da forma:

$$Z(T) \sim (2\pi T)^{N+1} g^{2N} \int d^3 \vec{p}_1 \cdots d^3 \vec{p}_{N+1} \sum_{\text{pois}} \prod_{i=1}^{2N} [q_{0i}^2 + \vec{q}^2 + m_m(T)^2]^{-1} \quad (2.19)$$

onde q_i nada mais é que uma combinação linear de p_i , e podemos assim podemos trocar nas integrais e somatórios p_i por q_i . Novamente a parte mais divergente corresponde a q_{i0} , assim podemos escrever:

$$Z(T) \sim (2\pi T)^{N+1} g^{2N} \int d^3 \vec{p}_1 \cdots d^3 \vec{p}_{N+1} \prod_{i=1}^{2N} [\vec{q}^2 + m_m(T)^2]^{-1} \quad (2.20)$$

$$\sim g^6 T^4 \left(\frac{g^2 T}{m(T)} \right)^{N-3} \quad (2.21)$$

Note que a divergência ultravioleta que aparece em (2.20) é apenas aparente, pois essas divergências não aparecem se considerarmos todos os termos do somatórios, pois como vimos sempre aparece um termo do tipo $N(|\vec{p}_i|/T)$ que cancela todas as divergências ultravioleta que aparecerem. Na fórmula (2.21) percebemos que se tivermos $m(T) < g^2 T$ os termos de ordens maiores em N serão maiores que os de ordem menor, impossibilitando assim a teoria de perturbações. O termo de ordem $g^2 T$ pode aparecer devido a correções de ordem superiores em Π_{mag} , mas por um raciocínio semelhante ao apresentado é fácil ver que todas as ordens contribuirão, isto é, em todas as ordens teremos que:

$$\Pi_{\text{mag}}(k_0, \vec{k} \rightarrow 0) \sim g^2 T \quad (2.22)$$

Devido a isso a função partição em QCD não pode ser calculado perturbativamente além da quinta ordem na constante de acoplamento. Por todos estes motivos, só podemos tentar entender como pode ocorrer o cancelamento de divergências infravermelhas se usarmos métodos não perturbativos.

Capítulo 3

Estudo do comportamento infravermelho na aproximação “ladder”

Como vimos, o estudo da teoria de Yang-Mills a temperatura finita não pode ser feito perturbativamente além da quinta ordem na constante de acoplamento. Para tentar entender o cancelamento das divergências infravermelhas nesta teoria precisamos de alguma forma de tratamento não perturbativo. Para isto usamos as equações de Schwinger-Dyson. É bem conhecido que, em QCD, estas formam um conjunto infinito de equações, pois a equação para a função de n pontos depende das funções de $n + 1$ e $n + 2$ pontos, o que torna o problema extremamente complicado. Para contornar este problema, temos de truncar de alguma forma estas equações. Neste trabalho usamos a aproximação “ladder”, como será explicado mais tarde. Esta aproximação foi utilizada por Mandelstam para entender um mecanismo pelo qual o quark pode ser confinado a temperatura zero, foi utilizado também por Jazicki e Templeton para mostrar como teorias super-renormalizáveis curam as divergências infravermelhas.

Vamos estudar a princípio a teoria escalar com acoplamento $\lambda\phi^3$ em 6 dimensões a temperatura T . Como vimos no capítulo anterior esta teoria não sofre problemas com divergências infravermelhas se fizermos uma ressonância no propagador, mas usaremos aqui o mesmo método que usaremos posteriormente em QCD. Para isso considere as equações de Schwinger-Dyson truncadas da forma:

$$\text{---} \circ_{\pi} \text{---} = \text{---} - \frac{1}{2} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \circ_{\pi} \text{---}$$

(3.1)

Note que para os diagramas terem o mesmo fator combinatorial $\frac{1}{2}$ em todas as ordens, necessitamos do diagrama de um loop. Para deduzirmos a fórmula da pressão dada pelo gráfico:

(3.2)

usamos a fórmula:

$$\left(\frac{\delta P}{\delta D_0} \right)_{\text{1PI}} = -\frac{T}{2} \tilde{P} = -\frac{T}{2} (\Pi(p) + p^2) \quad (3.3)$$

onde $\mathcal{D}$ é o propagador da partícula livre e 1PI indica que somente gráficos irreducíveis por uma partícula contribuem. Pelo gráfico (3.1) vemos que (3.3) implica em:

$$P = P_0 - \frac{T}{2} \frac{1}{4} \sum_{p_0} \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\vec{p}^2 + p_0^2} \left[\tilde{P}(p_0, \vec{p}) + \frac{1}{3} \tilde{P}^{(1)}(p_0, \vec{p}) \right] \quad (3.4)$$

O fator $\frac{1}{4}$ é devido a que há quatro forma de cortar o diagrama (3.2) obtendo $\bar{P}$ na aproximação ladder. A única exceção ocorre na ordem mais baixa onde aparece o fator $\frac{1}{3}$. A fórmula (3.4) pode ser representada graficamente da forma:

$$\frac{1}{T} (P - P_0) = \frac{1}{8} \text{ (diagrama com um círculo e um nó superior rotulado } \pi) + \frac{1}{48} \text{ (diagrama com um círculo e uma linha horizontal)} \quad (3.5)$$

A soma sobre p_0 é feita sobre todas as frequências $p_0 = 2\pi nT$, porém somente os modos com $p_0 = 0$ contribuem para as divergências infravermelhas. Quando calculamos esses modos surge uma divergência ultravioleta aparente, como apareceu no final do capítulo anterior, mas, como vimos, esta divergência é meramente aparente, pois se somássemos sobre todos os modos n apareceria naturalmente um fator de Bose do tipo:

$$N(k) = \frac{1}{\exp(\frac{k}{T}) - 1} \quad (3.6)$$

cancelando essas divergências. O fator de Bose gera, de certa forma, um cut-off ultravioleta de ordem T nas integrais sobre os momentos, que usaremos aqui. Para entender o cancelamento das divergências infravermelhas vamos colocar um cut-off m na região do infravermelho. O cancelamento das divergências infravermelhas implicam que podemos fazer $m \rightarrow 0$. Desta forma podemos escrever (3.4) da forma:

$$P = P_0 - \frac{T}{8} \int_m^T \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \bar{P}(p_0 = 0, p) + \dots \quad (3.7)$$

onde as reticências se referem a termos de ordem inferior e convergentes na região do infravermelho.

Usando as equações de Schwinger-Dyson da forma (3.1) obtemos para a função de dois pontos $\tilde{P}(p_0 = 0, p)$ a equação integral da forma:

$$\tilde{P}(p) = \Pi(p) + p^2 = -\frac{\lambda^2 T}{(2\pi)^5} \int_m^T \frac{d^5 k}{(p+k)^2} \left[\frac{1}{2k^2} + \frac{\Pi(k)}{k^2} \right] \quad (3.8)$$

Esta equação é muito complicada de se resolver exatamente, por isto vamos nos restringir à parte responsável pela divergência infravermelha. Isto é possível se usarmos um procedimento de maximização do tipo:

$$(p+k)_{\max}^2 = \begin{cases} p^2 & \text{se } p > k \\ k^2 & \text{se } k > p \end{cases} \quad (3.9)$$

Usando isto, da equação (3.8) obtemos:

$$\Pi_{\max}(p) = -p^2 + \frac{\lambda^2 T}{12\pi^3} \left[\frac{p}{3} - \frac{T}{2} + \frac{1}{6} \frac{m^3}{p^2} - \frac{1}{p^2} \int_m^p dk \Pi_{\max}(k) - \int_p^T \frac{dk}{k^2} \Pi_{\max}(k) \right] \quad (3.10)$$

Comparando este resultado com a equação original (3.8), vemos que a primeira iteração de (3.10) com $m \rightarrow 0$ é:

$$\Pi_{\max}^{(1)} = -p^2 + \frac{\lambda^2 T}{24\pi^3} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{p}{T} \right] \quad (3.11)$$

que concorda completamente com (3.8) no limite de altas temperaturas. Na próxima ordem, este procedimento leva a resultados que concordam satisfatoriamente com (3.8), que se torna cada vez mais complicado de se manejar. Como estamos interessados no comportamento das divergências infravermelhas em altas temperaturas, será suficiente para nossos objetivos nos restringirmos ao estudo da equação (3.10). A partir deste ponto vamos chamar $\Pi_{\max}$ de Π por simplicidade. Após sucessivas iterações encontramos em (3.8) divergências infravermelhas na série perturbativa de Π :

$$\begin{aligned} \Pi(p) = -p^2 + \frac{\alpha}{2} T^2 & - \alpha^2 T^2 \left(\frac{T}{p} \right) + \alpha^3 T^2 \left(\frac{T}{p} \right)^2 \ln \left(\frac{p}{m} \right) - \frac{7}{6} \alpha^4 T^2 \left(\frac{T}{p} \right)^3 \frac{p}{m} \\ & + \frac{19}{36} \alpha^5 T^2 \left(\frac{T}{p} \right)^4 \left(\frac{p}{m} \right)^2 - \frac{149}{540} \alpha^6 T^2 \left(\frac{T}{p} \right)^5 \left(\frac{p}{m} \right)^3 + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde $\alpha = \frac{\lambda^2}{12\pi^3}$. Esta fórmula, combinada com a equação (3.7), exhibe as divergências infravermelhas da pressão ($m \rightarrow 0$) dadas por:

$$P_{\text{div}} = -\frac{T^6}{96\pi^3} \left[\alpha^3 \ln\left(\frac{T}{m}\right) - \frac{7}{6}\alpha^4 \left(\frac{T}{m}\right) + \frac{16}{36}\alpha^5 \left(\frac{T}{m}\right)^2 - \frac{149}{540}\alpha^6 \left(\frac{T}{m}\right)^3 + \dots \right] \quad (3.13)$$

Vale notar que estas são tem a mesma estrutura das divergências que aparecem em QCD. Apesar de que a equação (3.10) não pode ser resolvida perturbativamente, vamos mostrar que existe uma solução não perturbativa finita em $m \rightarrow 0$. Para isto vamos definir:

$$x = \frac{\alpha T}{p} \quad ; \quad f(x) = \frac{\Pi}{p^2} \quad (3.14)$$

Assim a equação (3.10) se torna (eliminando-se o termo não homogêneo m^3):

$$f(x) = -1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2\alpha} - x^2 \int_{\alpha}^x \frac{dy}{y^2} f(y) - x^4 \int_x^{\frac{\alpha T}{m}} \frac{dy}{y^4} f(y) \quad (3.15)$$

Nesta fórmula a teoria de perturbações corresponde a resolver esta equação por série de potências em x que, como vimos, é divergente na região do infravermelho. Esta equação, porém, pode ser transformada nesta equação diferencial:

$$x^2 f'' - 5x f' + (8 - 2x)f = x - 8 \quad (3.16)$$

Esta equação diferencial pode ser resolvida usando-se as funções de Bessel modificadas. Para a parte homogênea temos a solução:

$$f_H(x) = Ax^3 I_2(\sqrt{8x}) + Bx^3 K_2(\sqrt{8x}) \quad (3.17)$$

Usando métodos usuais de equações diferenciais podemos achar uma solução particular da equação não homogênea, e assim a solução geral:

$$f(x) = \left[A + 2 \int_x^{\frac{\alpha T}{m}} dt \left(\frac{8}{t^4} - \frac{1}{t^3} \right) K_2(\sqrt{8t}) \right] x^3 I_2(\sqrt{8x}) + \left[B + 2 \int_x^{\frac{\alpha T}{m}} dt \left(\frac{8}{t^4} - \frac{1}{t^3} \right) I_2(\sqrt{8t}) \right] x^3 K_2(\sqrt{8x}) \quad (3.18)$$

As constantes A e B podem ser fixadas em termos dos parâmetros $\frac{gT}{m}$ e α substituindo-se (3.18) em (3.15). Como a função $I_2(x)$ cresce exponencialmente com x , nós teremos uma divergência quando $m \rightarrow 0$, a menos que $A = 0$. Na realidade, podemos achar uma solução consistente com a equação integral impondo que A se anula enquanto B vale:

$$B = \frac{1}{K_3(\sqrt{8\alpha})} \left[2I_3(\sqrt{8\alpha}) \int_{\alpha}^{\infty} dt \left(\frac{8}{t^4} - \frac{1}{t^3} \right) K_2(\sqrt{8t}) - \sqrt{\frac{8}{\alpha^7}} \right] \quad (3.19)$$

Como a função $K_2(x)$ decresce exponencialmente para grandes valores de x , é possível observar que $f(x)$ é uma função decrescente em x . Como grandes valores de x correspondem a pequenos momentos [cf. eq. (3.14)], este comportamento implica na convergência da integral (3.7) quando $m \rightarrow 0$. Portanto as divergência infravermelhas da pressão nesta aproximação se cancelam, apesar de aparecerem perturbativamente.

Vamos considerar agora a teoria de Yang-Mills. Como vimos no capítulo anterior, a parte elétrica do tensor de polarização Π_{00} exhibe o surgimento de uma massa térmica que elimina as divergência infravermelhas devidas a este setor, porém a parte magnética não tem esta propriedade. Assim as divergências desta teoria estão relacionadas somente com a parte magnética, que, associado a que estas divergências ocorrem somente quando a componente temporal do momento se anula, permite afirmar que o problema está ligado a parte euclidiana tri-dimensional da teoria, que vamos estudar.

Apesar da análise ser mais complicada que na teoria escalar devido aos acoplamentos quárticos de glúons e a presença de fantasmas, podemos proceder de modo análogo a teoria escalar. Usando uma versão truncada das equações de Schwinger-Dyson representada graficamente para os glúons por:

$$\begin{aligned}
& \text{wavy line with } \pi \text{ in a circle} = \text{wavy line} - \frac{1}{2} \text{wavy line with a blob} + \\
& + \text{wavy line with } \pi \text{ in a blob} + \frac{1}{2} \text{wavy line with } \pi \text{ in a blob} + \\
& + \text{wavy line with a dashed loop} - \text{wavy line with } \Sigma \text{ in a dashed loop} - \text{wavy line with } \Sigma \text{ in a dashed loop}
\end{aligned} \quad (3.20)$$

e para os fantasmas por:

$$\begin{aligned}
& \text{dashed line with } \Sigma \text{ in a circle} = \text{dashed line} - \text{dashed line with a dashed loop} + \\
& + \text{dashed line with } \pi \text{ in a blob} + \text{dashed line with } \Sigma \text{ in a blob}
\end{aligned} \quad (3.21)$$

podemos achar uma expressão para pressão analoga a teoria escalar da forma:

$$P = P_0 - T \int_m \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2} \left[\frac{1}{8} \bar{P}_{ii}^{aa} - \frac{1}{4} \bar{\Sigma}^{aa}(p) + \frac{1}{16} \frac{T^2}{2\pi^2 p^2} V_{ijkl}^{abcd} \bar{P}_{ij}^{ab}(p) + \dots \right] \quad (3.22)$$

onde $\bar{P}$ e $\bar{\Sigma}$ são as funções de dois pontos do glúon e dos fantasmas respectivamente, que precisam ser calculadas nesta aproximação, e V representa o vértice quártico de glúons não perturbado. Note que esta fórmula é muito mais simples do que a fórmula exata para pressão em uma teoria de Yang-Mills encontrada na literatura[15]. Esta expressão pode ser representada graficamente pela figura:

$$\frac{1}{T} (P - P_0) = \frac{1}{8} \text{ (1C) } - \frac{1}{4} \text{ (Σ) } + \frac{1}{16} \text{ (1C) } + \dots$$

(3.23)

É bem conhecido que qualquer aproximação das equações e Schwinger-Dyson impõem grandes vínculos em uma teoria de gauge, pois as identidades de Ward, em especial a transversalidade, só podem ser obtidas quando consideramos o conjunto completo destas equações. Para contornarmos este problema adotamos um procedimento, adotado por Mandelstam, eliminando os termos longitudinais que surgem das equações de Schwinger-Dyson, que são cancelados pelas contribuições das funções de 3 ou mais pontos, que negligenciamos na aproximação "ladder". Este procedimento é plausível e, como veremos, permite acharmos uma solução consistente deste conjunto truncado de equações.

Desta forma podemos escrever os gráficos (3.20) e (3.21) para a parte magnética do tensor de polarização:

$$\tilde{P}_{ij} = \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{p^2} \right) (\Pi + p^2) \quad (3.24)$$

da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Pi(p) = & -p^2 - \frac{g^2 NT}{8\pi^3} \int d^3 k \left[\frac{11}{6} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{k^4} \frac{2(2k^2 + 3p^2)(\vec{p} \cdot \vec{k})^2 - p^2 k^2 (6p^2 + 7^2)}{p^2 (\vec{p} + \vec{k})^2} + \right. \\ & + \frac{1}{3k^4} \Pi(k) - \frac{1}{k^6} \frac{5p^2 k^2 - 3(\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{p^2 (\vec{p} + \vec{k})^2} (p^2 + k^2) \Pi(k) - \\ & \left. - \frac{1}{k^4} \frac{p^2 k^2 - (\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{p^2 (\vec{p} + \vec{k})^2} \Sigma(k) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\Sigma(p) = -p^2 - \frac{g^2 NT}{8\pi^3} \int d^3k \left[\frac{1}{k^4} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{(\vec{p} + \vec{k})^2} - \frac{1}{k^4} \frac{(\vec{p} \cdot \vec{k})}{(\vec{p} + \vec{k})^2} \Sigma(k) + \frac{1}{k^6} \frac{p^2 k^2 - (\vec{p} \cdot \vec{k})^2}{p^2 (\vec{p} + \vec{k})^2} \Pi(k) \right] \quad (3.26)$$

Na primeira iteração este sistema obtemos a primeira ordem de perturbação da função de auto energia do glúon e do fantasma. Em ordens superiores na série perturbativa, em conjunto com a fórmula (3.22), nota-se que aparecem divergências infravermelhas na pressão analogas às apresentadas na teoria escalar. É conveniente definirmos as quantidades adimensionais:

$$\alpha = \frac{g^2 N}{3\pi^2} \quad ; \quad x = \frac{\alpha T}{p}$$

$$F(x) = \frac{\Pi}{p^2} \quad ; \quad G(x) = \frac{\Sigma}{p^2} \quad (3.27)$$

Analogamente ao tratamento da teoria escalar vamos agora utilizar o procedimento de maximização já descrito. Desta forma, após fazermos as integrais angulares obtemos estas equações tipo Volterra:

$$F(x) = -1 - \frac{13}{12} - Hx^2 + x^2 \int_{\alpha}^x \frac{dy}{y^2} G(y) + x^4 \int_x^{\frac{\alpha x}{m}} \frac{dy}{y^4} G(y) \quad (3.28)$$

$$g(x) = -\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) + x - \int_{\alpha}^x dy F(y) - x^2 \int_x^{\frac{\alpha x}{m}} \frac{dy}{y^2} F(y) \quad (3.29)$$

onde

$$H = \frac{1}{2\alpha} + \frac{11}{2} \int_{\alpha}^{\frac{\alpha x}{m}} \frac{dy}{y^2} G(y) \quad (3.30)$$

A teoria de perturbações corresponde a resolver as equações (3.28) e (3.29) em série de x . Por outro lado a região do infravermelho corresponde a região onde $m \rightarrow 0$, isto é, para grandes valores de x . Das equações (3.28) e (3.29) podemos obter as seguintes equações diferenciais:

$$x^2 F'' - 5xF' + 8F + 2xG = -8 - \frac{39}{12}x \quad (3.31)$$

$$xG'' - G' - 2F = -1 \quad (3.32)$$

Para obtermos uma solução deste sistema de equações podemos usar a equação (3.31) para escrevermos G em função de F e suas derivadas, e assim substituir na equação (3.32) obtendo uma equação diferencial de quarta ordem:

$$F'''' - \frac{4}{x} F''' + \frac{12}{x^2} F'' - \frac{24}{x^3} F' + \left(\frac{24}{x^4} + \frac{4}{x^2} \right) F = \frac{2}{x^2} - \frac{24}{x^4} \quad (3.33)$$

que descreve o comportamento infravermelho do sistema.

A solução da parte homogênea desta equação pode ser escrita em termos de funções modificadas de Bessel com argumentos complexos. Usando as propriedades destas funções é possível mostrar que:

$$F_H(x) = ix^2 [C_1 I_2(\sqrt{8ix}) + C_2 K_2(\sqrt{8ix})] + \text{complexo conjugado} \quad (3.34)$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração.

Para obtermos uma solução particular da equação (3.33) usamos o método de variação de constantes, usual em equações diferenciais. A solução geral é dada por:

$$F(x) = ix^2 \left\{ \left[C_1 + \int_x^{\frac{\alpha T}{m}} dt \left(\frac{1}{t^2} - \frac{12}{t^4} \right) K_2(\sqrt{8it}) \right] I_2(\sqrt{8ix}) + \left[C_2 + \int_x^{\frac{\alpha T}{m}} dt \left(\frac{1}{t^2} - \frac{12}{t^4} \right) I_2(\sqrt{8it}) \right] K_2(\sqrt{8ix}) \right\} + \text{c.c.} \quad (3.35)$$

Podemos agora fixar as constantes de integração aplicando esta solução nas equações integrais (3.28) e (3.29). Deste modo obtemos que C_1 se anula no limite $m \rightarrow 0$ e a constante C_2 tem uma forma extremamente complicada, porém convergente. Uma vez que C_1 se anula, das propriedades das funções de Bessel podemos ver que F é uma função decrescente em x . Usando estas soluções podemos calcular o comportamento de Π e Σ para pequenos valores de p :

$$\Pi(p) \cong \frac{1}{2} p^2 ; \quad \Sigma \cong -\frac{39}{24} p^2 \quad \text{para } p \ll \alpha T \quad (3.36)$$

Desta forma a pressão dada pela fórmula (3.22) converge no infravermelho. Para concluir, reforço que estas conclusões estão restritas a aproximação "ladder", mas processos semelhantes de cancelamento das divergências infravermelhas devem ocorrer na teoria de Yang-Mills exata.

Capítulo 4

Efeitos térmicos em um teoria de campos em espaço curvo

O estudo de efeitos térmicos de teorias quânticas associadas com a gravitação é um assunto fundamental para entendermos a formação do universo e a cosmologia tal a conhecemos nos dias de hoje. A gravitação, ao contrário de todas as forças conhecidas da natureza, é puramente atrativa, assim ela não pode ser enfraquecida por um plasma, como acontece no plasma eletromagnético, por exemplo. É devido a esta propriedade que podemos detectar esta força extremamente fraca, mas esta mesma propriedade a torna instável.

Em 1902, Sir James Jeans mostrou, usando a teoria newtoniana clássica, que um fluido estático homogêneo não-relativístico é instável se perturbado por deformações de comprimento de onda suficientemente longos. Considere um fluido com densidade ρ , velocidade $\vec{v}$, pressão p e campo gravitacional $\vec{g}$ que satisfaz a equação de continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (4.1)$$

a equação de Euler:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} \quad (4.2)$$

e as equações newtonianas para o campo gravitacional gerado pelo fluido:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{g} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{g} &= -4\pi G \rho. \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde G é a constante de gravitação universal.

Considendo agora pequenas perturbações $\delta\rho$, $\delta\vec{v}$, $\delta\vec{g}$ e δp em torno da solução estática, isto é, da solução com ρ e p constantes e $\vec{v}$ e $\vec{g}$ nulos obtemos, em primeira ordem, as equações (4.1)-(4.3) da forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{v} &= 0 \\ \frac{\partial\delta\vec{v}}{\partial t} &= -\frac{v_s^2}{\rho}\vec{\nabla}\delta\rho + \delta\vec{g} \\ \vec{\nabla} \times \delta\vec{g} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \delta\vec{g} &= -4\pi G\delta\rho\end{aligned}\quad (4.4)$$

onde v_s^2 é a velocidade do som:

$$v_s^2 = \frac{\delta p}{\delta\rho} \quad (4.5)$$

Estas equações podem ser combinadas para se obter uma equação diferencial para $\delta\rho$ da forma:

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2} - v_s^2\vec{\nabla}^2\delta\rho = 4\pi G\rho\delta\rho \quad (4.6)$$

Note que o segundo membro da equação (4.6) tem a forma de um termo de massa, porém com o sinal trocado. Assim a solução desta equação tem a forma:

$$\delta\rho = C \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t) \quad (4.7)$$

onde

$$\omega = \sqrt{k^2 v_s^2 - 4\pi G\rho} \quad (4.8)$$

Desta forma, para quaisquer condições iniciais e condições contorno, com exceção de um conjunto de medida nula, a solução da equação (4.6) possui uma parcela que cresce exponencialmente quando k for menor que k_J definido da forma:

$$k_J = \sqrt{\frac{4\pi G\rho}{v_s^2}} \quad (4.9)$$

Esta instabilidade reflete que um fluido homogêneo espalhado por uma vasta região do espaço é instável se considerarmos o campo gravitacional.

É importante notar que este resultado se refere a gravitação newtoniana, e, neste contexto, podemos interpretar este resultado como sendo o motivo pelo qual se formam as galáxias, concentrações maiores de matéria espacial, enquanto a região entre elas é praticamente vazia. Esta instabilidade está intimamente ligada ao caráter puramente atrativo da força gravitacional, que faz com que o plasma, em vez de atenuar, acentue a flutuação da densidade de massa, amplificando assim as perturbações. Na formulação de Einstein da gravitação, estas instabilidades são ainda maiores, pois é possível a formação de buracos negros que, uma vez formados, não podem ser destruídos. Realmente, se uma estrela tiver massa maior que o limite de Oppenheimer-Volkoff, atualmente avaliado em 1.4 massas solares, esta estrela colapsará progressivamente até se tornar um buraco negro.

Dada a instabilidade da gravitação, pode-se perguntar qual é o estado fundamental desta teoria, uma vez que a ação de Einstein não é positiva definida mesmo quando euclidianizada, pois a curvatura pode ser arbitrariamente grande, positiva ou negativa. Desta forma a formulação quântica da gravitação não está bem definida, o que pode parecer que o estado fundamental da gravitação quântica simplesmente não existe. Entretanto provou-se que, para espaços assintoticamente planos, a energia total definida em termos do comportamento assintótico dos campos gravitacionais é positiva semidefinida, e o espaço de Minkowsky é o único espaço de energia zero. Isto implica que a temperatura zero o espaço de Minkowsky é estável e não pode decair por nenhum mecanismo. Para qualquer temperatura não nula, entretanto, o espaço de Minkowsky é instável e vai decair.

Outro grande problema da gravitação quântica é que, ao contrário das outras forças básicas da natureza, a gravitação não é renormalizável, pois sua constante de acoplamento G não é adimensional, como nas outras teorias. De fato, podemos obter uma unidade fundamental de comprimento, o comprimento de Planck. Desta forma, se estivermos estudando efeitos gravitacionais abaixo da escala de Planck, não podemos usar a teoria de perturbações. A princípio parece que se estivermos acima da escala de Planck este problema estará resolvido, porém, de acordo com o princípio equivalência, que é um dos princípios básicos desta teoria, todos os tipos de energia interagem de forma igualmente forte com a gravitação, inclusive a própria energia gravitacional. Em linguagem da mecânica quântica, podemos dizer que um gráviton é tão sujeito ao campo gravitacional quanto, por exemplo, um fóton. Apesar destes problemas, podemos proceder de uma forma semi-clássica, impondo

pequenas oscilações em torno de uma métrica clássica[8]. O ponto de partida para o estudo da gravitação é a definição da métrica $g_{\mu\nu}$ do espaço:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (4.10)$$

onde ds é a distância entre dois pontos que possuem uma diferença dx^μ em suas coordenadas. A derivada de um vetor:

$$A_{\mu,\nu} \equiv \frac{dA_\mu}{dx^\nu} \quad (4.11)$$

em geral não se comporta como um tensor por uma mudança de coordenadas, porém a derivada covariante definida como:

$$A_{\mu;\nu} = A_{\mu,\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho A_\rho \quad (4.12)$$

se comporta. Nesta formula Γ é o simbolo de Chistoffel definido como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma}). \quad (4.13)$$

Desta forma podemos definir o tensor de curvatura $R^\sigma{}_{\mu\nu\rho}$ como o comutador das derivadas covariantes, isto é:

$$A_{\mu;\nu\rho} - A_{\mu;\rho\nu} = R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} A_\sigma. \quad (4.14)$$

A partir deste tensor podemos definir o tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu}$ e a curvatura escalar $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Queremos agora obter uma lagrangeana de uma partícula esalar em um espaço curvo, porém esta lagrangeana não é unicamente determinada. De fato, qualquer lagrangeana definida como:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g(x)} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \xi R \phi^2), \quad (4.15)$$

onde ξ é uma constante se reduz a langrangeana de uma partícula esalar sob a métrica de Minkowsky. Porém um caso de interesse especial é quando a teoria é invariante conforme, isto é, quando a teoria é invariante por uma mudança local de escala da forma:

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \Omega^2(x) g_{\mu\nu}. \quad (4.16)$$

Todas as forças básicas da natureza, com exceção da gravitação, são invariantes por esta transformação, quando envolvem partículas não massivas, por isto vamos estudar o caso em que uma teoria escalar pode também ser invariante. Quando aplicamos uma transformação a forma (4.16) pode se mostrar que o tensor de curvatura em 4 dimensões se transforma como:

$$R \rightarrow \Omega^{-2} R + 6\Omega^{-3} \square \Omega, \quad (4.17)$$

onde $\square \Omega$ é definido da forma:

$$\square \Omega \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Omega). \quad (4.18)$$

Se impusermos também que o campo escalar ϕ se transforma da forma:

$$\phi \rightarrow \Omega^{-1} \phi, \quad (4.19)$$

obteremos que a lagrangeana vai se transformar como:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + (6\xi - 1) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu u \Omega \partial_\nu (\Omega^{-1} \phi^2) - 6\xi \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \phi^2 \Omega^{-1} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Omega \right) \quad (4.20)$$

de onde é fácil ver que se quisermos uma teoria invariante conforme temos de impor que $\xi = \frac{1}{6}$, pois desta forma a lagrangeana será acrescida apenas de uma derivada total, o que não altera a ação. Como estamos estudando o caso em que as flutuações a métrica são pequenas variações da métrica clássica de Minkowsky, a métrica de nosso espaço será:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu} \quad (4.21)$$

onde η é a métrica de Minkowsky, h , as flutuações e κ , a densidade de energia do sistema.

Assim como a invariância de gauge do eletromagnetismo impõe as identidades de Ward, a invariância conforme impõem relações entre as funções de Green do gráviton. Para entender isto vamos fazer uma transformação infinitesimal do tipo:

$$\Omega = 1 + \delta\omega. \quad (4.22)$$

Com esta transformação o campo h definido em (4.21) se transformará da forma:

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \delta h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\delta\omega (h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}). \quad (4.23)$$

Assim a ação com as fontes do campo h definida como:

$$S_J = \int d^4x (\mathcal{L} + J^{\mu\nu} h_{\mu\nu}), \quad (4.24)$$

se transformará da forma:

$$S_J \rightarrow S_J + 2 \int d^4x \delta\omega J^{\mu\nu} (h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}). \quad (4.25)$$

Desta forma é fácil ver que o gerador das funções de Green definido como:

$$e^{G(J)} = \int \mathcal{D}h \mathcal{D}\phi e^{iS_J}, \quad (4.26)$$

deverá obedecer à identidade:

$$\left[\eta_{\mu\nu} + \frac{\delta}{\delta J^{\mu\nu}} \right] e^{G(J)}. \quad (4.27)$$

Esta identidade é conhecida como identidade de de Weyl.

Quando a temperatura está suficientemente abaixo da escala de Planck, a teoria de perturbação pode ser aplicada para calcular os efeitos térmicos desta teoria. Com isto podemos obter as regras de Feynman expandindo a ação em série de h , lembrando-se que os vértices desta teoria envolvem duas partículas escalares e um número arbitrário de grávitons. O vértice com um gráviton é dado pela fórmula:

$$V_{\mu\nu}^1(k; p_1, p_2) = \frac{1}{2} \left[p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{1\nu} p_{2\mu} - p_1 \cdot p_2 \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} (k_\mu k_\nu - k^2 \eta_{\mu\nu}) \right] \quad (4.28)$$

onde k é o momento do gráviton e p_i os momentos das partículas escalares. O vértice com dois grávitons é consideravelmente mais complexo:

$$\begin{aligned} V_{\mu\nu,\alpha\beta}^2(k_1, k_2; p_1, p_2) = & \frac{1}{16} [-8p_{1\nu} p_{2\beta} \eta_{\alpha\mu} + 2p_1 \cdot p_2 \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + \\ & 4p_{1\alpha} p_{2\beta} \eta_{\mu\nu} - p_1 \cdot p_2 \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} + \\ & \frac{1}{3} (2k_{1\mu} k_{1\nu} \eta_{\alpha\beta} + 2k_{1\mu} k_{2\nu} \eta_{\alpha\beta} - 2k_{1\beta} k_{1\nu} \eta_{\alpha\mu} - \\ & 3k_{1\beta} k_{2\nu} \eta_{\alpha\mu} - 2k_{1\beta} k_{1\mu} \eta_{\alpha\nu} + k_{1\beta} k_{2\mu} \eta_{\alpha\nu} - \\ & 2k_{1\alpha} k_{1\nu} \eta_{\beta\mu} - k_{1\alpha} k_{2\nu} \eta_{\beta\mu} + k_1 \cdot k_2 \eta_{\alpha\nu} \eta_{\beta\mu} - \\ & 2k_{1\alpha} k_{1\mu} \eta_{\beta\nu} - 4k_{1\mu} k_{2\alpha} \eta_{\beta\nu} + k_{1\alpha} k_{2\mu} \eta_{\beta\nu} + \\ & 4k_1^2 \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + 2k_1 \cdot k_2 \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} + 4k_{1\alpha} k_{1\beta} \eta_{\mu\nu} + \\ & 2k_{1\beta} k_{2\alpha} \eta_{\mu\nu} - 2k_1^2 \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu} - k_1 \cdot k_2 \eta_{\alpha\beta} \eta_{\mu\nu})] \quad (4.29) \end{aligned}$$

Vértices de mais grávitons são extremamente complicados, porém podem ser obtidos por um cálculo sistemático.

O tensor de polarização do gráviton $\Pi^{\mu\nu,\alpha\beta}$ tem uma estrutura tensorial muito mais complexa do que no caso da QCD, pois ele tem de ser simétrico em relação à troca de índices $\mu \leftrightarrow \nu$ ou $\alpha \leftrightarrow \beta$ e à troca de pares de índices $(\mu\nu) \leftrightarrow (\alpha\beta)$. Com isto podemos escrever o tensor de polarização em termos de 14 tensores independentes da forma:

$$\Pi^{\mu\nu,\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{14} \Pi_i T_i^{\mu\nu,\alpha\beta}(k, u) \quad (4.30)$$

onde $T_i^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y)$ são dados pela tabela:

$$\begin{aligned} T_1^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= \eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu} + \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} \\ T_2^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= X^\mu (X^\beta\eta^{\alpha\nu} + X^\alpha\eta^{\beta\nu}) + X^\nu (X^\beta\eta^{\alpha\mu} + X^\alpha\eta^{\beta\mu}) \\ T_3^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= X^\alpha X^\beta X^\mu X^\nu \\ T_4^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= \eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu} \\ T_5^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= X^\mu X^\nu \eta^{\alpha\beta} + X^\alpha X^\beta \eta^{\mu\nu} \\ T_6^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= X^\beta (Y^\nu \eta^{\alpha\mu} + Y^\mu \eta^{\alpha\nu}) + Y^\beta (X^\nu \eta^{\alpha\mu} + X^\mu \eta^{\alpha\nu}) \\ &\quad + X^\alpha (Y^\nu \eta^{\beta\mu} + Y^\mu \eta^{\beta\nu}) + Y^\alpha (X^\nu \eta^{\beta\mu} + X^\mu \eta^{\beta\nu}) \\ T_7^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= Y^\nu X^\alpha X^\beta X^\mu + Y^\mu X^\alpha X^\beta X^\nu + Y^\beta X^\alpha X^\mu X^\nu \\ &\quad + Y^\alpha X^\beta X^\mu X^\nu \\ T_8^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= Y^\beta Y^\nu \eta^{\alpha\mu} + Y^\beta Y^\mu \eta^{\alpha\nu} + Y^\alpha Y^\nu \eta^{\beta\mu} + Y^\alpha Y^\mu \eta^{\beta\nu} \\ T_9^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= Y^\mu Y^\nu X^\alpha X^\beta + Y^\alpha Y^\beta X^\mu X^\nu \\ T_{10}^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= (Y^\beta X^\alpha + Y^\alpha X^\beta) (Y^\nu X^\mu + Y^\mu X^\nu) \\ T_{11}^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= Y^\beta Y^\mu Y^\nu X^\alpha + Y^\alpha Y^\mu Y^\nu X^\beta + Y^\alpha Y^\beta Y^\nu X^\mu \\ &\quad + Y^\alpha Y^\beta Y^\mu X^\nu \\ T_{12}^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= Y^\alpha Y^\beta Y^\mu Y^\nu \\ T_{13}^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= Y^\mu Y^\nu \eta^{\alpha\beta} + Y^\alpha Y^\beta \eta^{\mu\nu} \\ T_{14}^{\mu\nu,\alpha\beta}(X, Y) &= (Y^\nu X^\mu + Y^\mu X^\nu) \eta^{\alpha\beta} + (Y^\beta X^\alpha + Y^\alpha X^\beta) \eta^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (4.31)$$

A identidade de Weyl (4.27) impõe para o tensor de polarização a identi-

dade:

$$\Pi^{\mu\nu,\alpha}{}_{\alpha} = -\Gamma^{\mu\nu} \quad (4.32)$$

onde $\Gamma^{\mu\nu}$ é a função de um ponto do gráviton, o "tadpole". Por construção, esta teoria é invariante, também, por uma transformação geral de coordenadas, fazendo com que o tensor de polarização obedeça também a identidade de Ward:

$$2k_{\nu}\Pi^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) = k^{\mu}\Gamma^{\alpha\beta} - k_{\sigma}(\Gamma^{\alpha\sigma}\eta^{\beta\mu} + \Gamma^{\beta\sigma}\eta^{\alpha\mu}) \quad (4.33)$$

A temperatura finita o tensor de polarização não é invariante por uma reparametrização do campo gravitacional, isto é, se no lugar da parametrização (4.21) usássemos outra, por exemplo:

$$\sqrt{-g}g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \phi^{\mu\nu} \quad (4.34)$$

o tensor de polarização seria diferente. Isto se deve ao fato do tadpole não se anular. Pelas identidades de Ward a função de 1 ponto deve ter traço nulo, que a temperatura zero implica em que seja nulo, porém a temperatura finita implica somente que ele deve ser proporcional a $4\eta^{\mu 0}\eta^{\nu 0} - \eta^{\mu\nu}$. Para entender melhor este ponto, considere a ação efetiva, que gera as funções de Green, em uma parametrização qualquer:

$$S_{\text{eff}} = \Gamma^{\alpha\beta}\phi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \int d^4x \Pi^{\mu\nu,\alpha\beta}(k)\phi_{\mu\nu}(k)\phi_{\alpha\beta}(k) + \mathcal{O}(\phi^3) \quad (4.35)$$

Se fizermos uma reparametrização, o que corresponde a:

$$\phi_{\mu\nu} \rightarrow \pm\phi_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\phi_{\lambda}^{\lambda} + \mathcal{O}(\phi^2) \quad (4.36)$$

obteremos novos termos quadráticos em ϕ , o que corresponde a uma mudança no valor de Π . Porém é fácil ver, usando a identidade de Weyl (4.32), que todos estes novos termos são proporcionais a Γ . Assim, para obtermos a parte invariante de Π devemos retirar a dependência deste com o tadpole. Isto é possível definindo-se:

$$\bar{\Pi}^{\mu\nu,\alpha\beta} = \Pi^{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{1}{4}(\eta^{\mu\alpha}\Pi^{\rho}{}_{\rho}{}^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta}\Pi^{\rho}{}_{\rho}{}^{\nu\alpha} + \eta^{\nu\alpha}\Pi^{\rho}{}_{\rho}{}^{\mu\beta} + \eta^{\nu\beta}\Pi^{\rho}{}_{\rho}{}^{\mu\alpha}) \quad (4.37)$$

Notando que os termos provenientes do tadpole por uma reparametrização são independentes do momento e que devem obedecer a identidade de Ward (4.33), é fácil ver que a ação efetiva não gerará novos termos quadráticos em ϕ que contribuam para $\bar{\Pi}$.

Capítulo 5

Efeitos de campos térmicos no tensor de polarização do gráviton

Vamos calcular o tensor de polarização do gráviton utilizando o método de espalhamento frontal exposto no primeiro capítulo. Independente do campo que pusermos para interagir com o gráviton, em primeira ordem de perturbação este tensor terá a estrutura geral da forma:

$$\Pi^{\mu\nu,\alpha\beta}(p) = \frac{g}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k} N\left(\frac{k}{T}\right) F^{\mu\nu,\alpha\beta}(k,p) \quad (5.1)$$

onde F é a amplitude de espalhamento frontal e g é uma constante que conta os graus de liberdade do campo ($g = 1$ para partículas escalares, $g = 2$ para a radiação, etc.) As simetrias por troca de índices de F são as mesmas que as de Π , porém, por se tratar de uma amplitude de espalhamento ele tem de ser invariante de Lorentz. Assim ele pode ser representado por tensores como os da tabela (4.31) com $(X, Y) \rightarrow (k, p)$. Usando-se esses tensores podemos escrever:

$$F^{\mu\nu,\alpha\beta}(k,p) = \sum F_i(k,p) T_i^{\mu\nu,\alpha\beta}(k,p) \quad (5.2)$$

Vamos primeiramente analisar vínculos que aparecem em F_i se impuermos as identidades de Ward (4.33) e Weyl (4.32). Usando que a estrutura geral

do tadpole é representada por:

$$\Gamma^{\alpha\beta} = \frac{g}{2} \frac{\kappa}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k} N\left(\frac{k}{T}\right) k^\alpha k^\beta \quad (5.3)$$

Desta forma as identidades de Ward e Weyl para F impõem:

$$p_\nu F^{\mu\nu,\alpha\beta}(k,p) = p^\mu k^\alpha k^\beta - p \cdot k (k^\alpha \eta^{\mu\beta} + k^\beta \eta^{\mu\alpha}) \quad (5.4)$$

$$F^{\mu\nu,\alpha}{}_\alpha(k,p) = -2k^\mu k^\nu \quad (5.5)$$

Estas identidades representam um grande vínculo para F_i . A equação (5.4) resulta em 10 vínculos e a equação (5.5) em outros 4. Porém estas relações não são linearmente independentes, de modo que podemos expressar 11 funções F_i em função das outras três desta forma:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{3p^4}{4} F_{12} + p \cdot k F_{14} \\ F_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{p^4}{2p \cdot k} F_{11} + \frac{p^2}{p \cdot k} F_{14} \\ F_3 &= -\frac{p^2}{2(p \cdot k)^2} - \frac{2p^6}{(p \cdot k)^3} F_{11} + \frac{p^4}{(p \cdot k)^3} F_{14} \\ F_4 &= -\frac{p^4}{2} F_{12} - (p \cdot k) F_{14} \\ F_5 &= -\frac{p^2}{(p \cdot k)} F_{14} \\ F_6 &= \frac{p^2}{2} F_{11} - F_{14} \\ F_7 &= \frac{1}{2p \cdot k} + \frac{2p^4}{(p \cdot k)^2} F_{11} - \frac{p^2}{(p \cdot k)^2} F_{14} \\ F_8 &= -\frac{p \cdot k}{2} F_{11} - \frac{3p^2}{4} F_{12} \\ F_9 &= -\frac{2p^2}{p \cdot k} F_{11} + \frac{2}{p \cdot k} F_{14} \\ F_{10} &= -\frac{3p^2}{2p \cdot k} F_{11} \\ F_{13} &= \frac{p^2}{2} F_{12} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Note que as identidades de Ward e Weyl não fixam as funções F_{11} , F_{12} e F_{14} , porém as propriedades da amplitude de espalhamento frontal podem nos fornecer mais vínculos. Como vimos no primeiro capítulo, esta amplitude é simétrica em $p \leftrightarrow -p$ e, na ordem de um loop, tem no máximo um denominador da forma $p^2 \pm 2k \cdot p$. Além disto, por análise dimensional, é fácil ver que $F^{\mu\nu, \alpha\beta}$ tem dimensão de (momento)². Estas condições implicam que o numerador das funções F_3 e F_7 seja apenas uma constante adimensional, pois estas componentes são multiplicadas pelos tensores T_3 e T_7 que têm dimensão de (momento)². Assim podemos escrever:

$$F_3 = c_3 \left(\frac{1}{p^2 + 2p \cdot k} + \frac{1}{p^2 - 2p \cdot k} \right) \quad (5.7)$$

$$F_7 = c_7 \left(\frac{1}{p^2 + 2p \cdot k} - \frac{1}{p^2 - 2p \cdot k} \right) \quad (5.8)$$

onde c_i são constantes. Além disto, notando que:

$$\frac{p \cdot k}{p^2 \pm 2p \cdot k} = \pm \frac{1}{2} \left(1 - \frac{p^2}{p^2 \pm 2p \cdot k} \right) \quad (5.9)$$

podemos escrever F_2 da forma:

$$F_2 = c_2 k \cdot p \left(\frac{1}{p^2 + 2p \cdot k} - \frac{1}{p^2 - 2p \cdot k} \right) + c_2' p^2 \left(\frac{1}{p^2 + 2p \cdot k} + \frac{1}{p^2 - 2p \cdot k} \right) \quad (5.10)$$

Aplicando isto em (5.6) podemos fixar unicamente as constantes c_2 , c_3 e c_7 obtendo:

$$c_2 = -\frac{1}{2}; \quad c_3 = 1; \quad c_7 = \frac{1}{2} \quad (5.11)$$

Estas relações permitem escrevermos:

$$F_{14} = 2p^2 F_{11} + \frac{p^2(p \cdot k)}{2[p^4 - 4(p \cdot k)^2]} \quad (5.12)$$

desta forma sobram apenas duas funções independentes, as funções F_{11} e F_{12} , que tem de ter as estruturas:

$$F_{11} = c_{11} \left(\frac{1}{p^2 + 2p \cdot k} - \frac{1}{p^2 - 2p \cdot k} \right) \quad (5.13)$$

$$F_{12} = c_{12} \left(\frac{1}{p^2 + 2p \cdot k} + \frac{1}{p^2 - 2p \cdot k} \right) \quad (5.14)$$

onde c_{11} e c_{12} que permanecem indeterminadas. Vale ressaltar que estas propriedades valem para qualquer teoria que seja invariante conforme, pois usamos somente as identidades de Ward e Weyl e a estrutura do tadpole.

Os termos dominantes em altas temperaturas serão os termos dominantes na amplitude de espalhamento frontal quando $k \rightarrow \infty$. Com isto, é fácil ver que os únicos termos que irão contribuir são os termos F_2 , F_3 e F_7 . Como vimos a parte dominante destes termos é unicamente determinada, ou seja, é independente da natureza das partículas térmicas a menos de uma constante multiplicativa. Estes termos podem ser integrados expandindo-se os denominadores de F da forma:

$$\frac{1}{p^2 + 2p \cdot k} = \frac{1}{2p \cdot k} - \frac{p^2}{(2p \cdot k)^2} + \mathcal{O}(k^{-4}) \quad (5.15)$$

e usando-se as integrais:

$$\int_0^\infty k^x dk N\left(\frac{k}{T}\right) = T^{x+1} \Gamma(x+1) \zeta(x+1) \quad (5.16)$$

obtendo-se assim:

$$\Pi^{\mu\nu,\alpha\beta}(r, P) = \kappa^2 \frac{\pi^2 T^4}{15} \sum T_i^{\mu\nu,\alpha\beta}(u, P) l_i(r, P) \quad (5.17)$$

onde foram utilizadas as definições :

$$r \equiv \frac{p_0}{|\vec{p}|}; \quad P^\mu \equiv (r, \vec{p}) \quad (5.18)$$

e as funções l_i são dadas por:

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{6} - \frac{P^2}{24} + \frac{P^4 L}{8} \\ l_2 &= -\frac{1}{3} + \frac{P^2}{12} - \frac{5P^4}{24} + \frac{5P^6 L}{8} \\ l_3 &= \frac{-P^2}{3} + \frac{7P^4}{12} - \frac{35P^6}{24} + \frac{35P^8 L}{8} \\ l_4 &= \frac{-P^2}{24} + \frac{P^4 L}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_5 &= \frac{P^2}{12} - \frac{5P^4}{24} + \frac{5P^6L}{8} \\
l_6 &= \left(\frac{-1}{12} + \frac{5P^2}{24} - \frac{5P^4L}{8} \right) r \\
l_7 &= \left(\frac{1}{3} - \frac{7P^2}{12} + \frac{35P^4}{24} - \frac{35P^6L}{8} \right) r \\
l_8 &= -\frac{1}{12} - \frac{5P^2}{24} + \frac{P^2L}{2} + \frac{5P^4L}{8} \\
l_9 &= \frac{1}{6} - \frac{2P^2}{3} - \frac{35P^4}{24} + \frac{15P^4L}{4} + \frac{35P^6L}{8} \\
l_{10} &= \frac{1}{6} - \frac{2P^2}{3} - \frac{35P^4}{24} + \frac{15P^4L}{4} + \frac{35P^6L}{8} \\
l_{11} &= \left(\frac{1}{4} + \frac{35P^2}{24} - \frac{5P^2L}{2} - \frac{35P^4L}{8} \right) r \\
l_{12} &= -\frac{13}{12} - \frac{35P^2}{24} + L + 5P^2L + \frac{35P^4L}{8} \\
l_{13} &= -\frac{1}{12} - \frac{5P^2}{24} + \frac{P^2L}{2} + \frac{5P^4L}{8} \\
l_{14} &= \left(\frac{-1}{12} + \frac{5P^2}{24} - \frac{5P^4L}{8} \right) r
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Vamos estudar agora o caso específico de partículas escalares. Neste caso temos:

$$c_{11} = \frac{1}{12}; \quad c_{12} = \frac{1}{36} \tag{5.20}$$

Vamos calcular o tensor de polarização do gráviton de forma exata para partículas térmicas escalares. O termo dominante em altas temperaturas é a fórmula (5.17), portanto estamos apenas interessados nos termos subdominantes dados pela fórmula:

$$\Pi_{S i} = \kappa^2 |\vec{p}|^2 N_i(r, P) \tag{5.21}$$

Para isto fizemos a contração:

$$\bar{P}_i(r, P) = \frac{1}{8} \Pi^{\mu\nu, \alpha\beta}(k) T_{i, \mu\nu, \alpha\beta}(u, P) \tag{5.22}$$

Após isto, as funções Π_i podem ser determinadas por:

$$\Pi_i(r, P) = 8(T_i^{\mu\nu, \alpha\beta} T_{j, \mu\nu, \alpha\beta})^{-1} \bar{P}_j(r, P) \equiv 8(T_{ij})^{-1} \bar{P}_j(r, P) \quad (5.23)$$

onde $(T_{ij})^{-1}$ representa a matrix inversa a $T_{ij} \equiv T_i^{\mu\nu, \alpha\beta} T_{j, \mu\nu, \alpha\beta}$.

Pode-se observar, usando as identidades de Ward e Weyl, que a contração de Π com os tensores $T_i^{\mu\nu, \alpha\beta}$ com i de 4 a 14 dão termos proporcionais ao tadpole, logo independentes do momento e dominantes a altas temperaturas. Assim os únicos termos sub-dominantes são $\bar{P}_1$, $\bar{P}_2$ e $\bar{P}_3$. Quando calculamos o tensor de polarização observamos que estes termos envolvem integrais da forma:

$$I_S(p, T) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2|\vec{k}|} \frac{|\vec{k}|^S}{\exp(|\vec{k}|/T) - 1} \left(\frac{1}{p^2 + 2p \cdot k} + \frac{1}{p^2 - 2p \cdot k} \right) \quad (5.24)$$

com $S = 0, 2$ ou 4 . Em termos de $x = \cos(\theta)$, onde θ é o ângulo entre $\vec{p}$ e $\vec{k}$, obtemos:

$$I_S(p, T) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \frac{p^2}{4} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(p_0 - |\vec{p}|x)^2} \int_0^\infty dQ \frac{Q^{S+1}}{\exp(Q/T) - 1} \frac{1}{Q^2 + (2\pi T y)^2} \quad (5.25)$$

onde,

$$y \equiv \frac{1}{4i\pi T} \frac{p^2}{p_0 - |\vec{p}|x} \quad (5.26)$$

Além de funções elementares, as integrais da equação (5.25) pode ser reduzida à integral básica da forma[11]:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^\infty \frac{Q dQ}{Q^2 + (2\pi T y)^2} \frac{1}{\exp(Q/T) - 1} \\ &= \frac{1}{2} \Theta[\text{Re}(y)] \left(\ln y - \frac{1}{2y} - \psi(y) \right) + (y \leftrightarrow -y), \end{aligned} \quad (5.27)$$

de forma análoga ao cálculo da teoria escalar com acoplamento $\lambda\phi^3$. Novamente nesta equação $\psi(y) = \frac{d}{dy} \ln \Gamma(y)$ é a função psi de Euler. O limite de tempo real da função de Green pode ser obtido com a continuação analítica do formalismo de tempo imaginário pela prescrição [16] $k_0 = (1 + i\epsilon)K_0$, onde

$\varepsilon \rightarrow 0^+$ e K_0 é real. Com a presença do fator $i\varepsilon$ na equação (5.27), nós temos que $\text{Re}(y) = \varepsilon' \text{Re}(k_0)$, com $\varepsilon' \rightarrow 0^+$.

Muitas das integrais angulares em (5.25) podem facilmente serem resolvidas em termos de funções elementares após uma troca de variáveis de x para y . As integrais mais complicadas envolvem termos contendo $\psi(y)$ multiplicados por potências de y . Estas integrais têm a forma:

$$J_n \equiv \Theta[\text{Re}(k_0)] [J_n(t(k_0)) - J_n(-t(-k_0))] + [k_0 \leftrightarrow -k_0], \quad (5.28)$$

onde

$$J_n(t) = \left(\frac{i\pi T}{|\vec{k}|} \right)^{n-1} \int_C y^n \left[\ln(y) - \frac{1}{2y} - \psi(y) \right] dy, \quad (5.29)$$

de forma totalmente análoga ao resultado do primeiro capítulo. A escolha de C é irrelevante, pois qualquer constante de integração que porventura apareça cancelará na expressão (5.28). Os valores $t(k_0)$ e $-t(-k_0)$ são os limites de integração da integral em y referentes aos valores $x = 1$ e $x = -1$, respectivamente, na equação (5.26). Logo:

$$t(k_0) = \frac{k_0 + |\vec{k}|}{4i\pi T}. \quad (5.30)$$

Estas integrais podem ser expressas de forma fechada em termos de derivadas da função zeta de Riemann generalizada $\zeta(-n, t)$ onde n é um número inteiro de 0 a 4. Por exemplo, podemos obter:

$$\begin{aligned} J_0(t) &= \frac{|\vec{k}|}{i\pi T} \int^t \left[\ln(y) - \frac{1}{2y} - \psi(y) \right] dy \\ &= \frac{|\vec{k}|}{i\pi T} \left[t \ln t - \zeta'(0, t) - t - \frac{1}{2} \ln t \right], \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} J_1(t) &= \int^t y \left[\ln(y) - \frac{1}{2y} - \psi(y) \right] dy \\ &= t\zeta'(0, t) - \zeta'(-1, t) + \frac{t^2}{2} \ln t - \frac{3}{4} t^2. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Nas equações acima, a derivada da função zeta é relativa ao primeiro argumento. As funções $J_n(t)$ são apresentadas no apêndice A. Desta forma,

vemos que as funções P_j ($j = 1, 2, 3$) na equação (5.22) estão relacionadas com J_n definido como (5.28) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\bar{P}_1(r, K) &= -\frac{K^2}{96} - \frac{K^4}{32} J_0, \\ \bar{P}_2 &= \frac{K^2}{48} L(r) - \frac{K^4}{32} J_0 - r \frac{K^2}{4} J_1 - \frac{K^2}{2} J_2, \\ \bar{P}_3 &= -\frac{1}{576} + \frac{K^2}{192} L(r) - \frac{K^4}{256} J_0 - r \frac{K^2}{16} J_1 - \frac{2+3K^2}{8} J_2 - r J_3 - J_4,\end{aligned}\tag{5.33}$$

onde usou-se a definição:

$$L(r) = \frac{r}{2} \ln \frac{r+1}{r-1} - 1.\tag{5.34}$$

Assim, as funções $N_i(r, K)$ podem ser explicitamente determinadas pelas equações (5.21) e (5.23). Fazendo estas contas, obtemos:

$$\begin{aligned}N_1(r, K) &= P_1 + K^2 P_2 + K^4 P_3 \\ N_2(r, K) &= K^2 P_1 + 2K^4 P_2 + 5K^6 P_3 \\ N_3(r, K) &= K^4 P_1 + 5K^6 P_2 + 35K^8 P_3 \\ N_4(r, K) &= -P_1 - K^2 P_2 + K^4 P_3 \\ N_5(r, K) &= -K^2 P_1 - K^4 P_2 + 5K^6 P_3 \\ N_6(r, K) &= -r(P_1 + 2K^2 P_2 + 5K^4 P_3) \\ N_7(r, K) &= -r(K^2 P_1 + 5K^4 P_2 + 35K^6 P_3) \\ N_8(r, K) &= P_1 + (1 + 2K^2) P_2 + (4K^2 + 5K^4) P_3 \\ N_9(r, K) &= (2 + K^2) P_1 + (6K^2 + 5K^4) P_2 + (30K^4 + 35K^6) P_3 \\ N_{10}(r, K) &= K^2 P_1 + (3K^2 + 5K^4) P_2 + (30K^4 + 35K^6) P_3 \\ N_{11}(r, K) &= -r[P_1 + (2 + 5K^2) P_2 + (20K^2 + 35K^4) P_3] \\ N_{12}(r, K) &= P_1 + (4 + 5K^2) P_2 + (8 + 40K^2 + 35K^4) P_3 \\ N_{13}(r, K) &= -P_1 - K^2 P_2 + (4K^2 + 5K^4) P_3 \\ N_{14}(r, K) &= r(P_1 + K^2 P_2 + 5K^4 P_3)\end{aligned}\tag{5.35}$$

Em altas temperaturas, função zeta generalizada pode ser expandida em série de potências de t , como é mostrado na equação (A.11). Desta forma as funções P_j ($j = 1, 2, 3$) podem ser expressas em séries de potências de $(1/T)$. Os termos dominantes destas séries são dados por:

$$P_1 = -\frac{K^2}{96} \quad (5.36)$$

$$P_2 = \frac{K^2}{48} L(r) \quad (5.37)$$

$$P_3 = \frac{1 - 3K^2 L(r)}{576} \quad (5.38)$$

Apesar destas contribuições serem invariantes de gauge, elas não escrevem propriedades físicas do plasma a temperatura finita. Em teoria de campos a temperatura finita, as contribuições irreducíveis por uma partícula dependem, geralmente, da parametrização do campo gravitacional. Isto se deve ao fato da contribuição do "tadpole" não se anular. Entretanto o tensor de traço nulo definido como:

$$\bar{\Pi}^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) \equiv \Pi^{\mu\nu,\alpha\beta}(k) - \frac{1}{4} \left(\eta^{\mu\alpha} \Pi^{\rho}_{\rho, \nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \Pi^{\rho}_{\rho, \nu\alpha} + \eta^{\nu\alpha} \Pi^{\rho}_{\rho, \mu\beta} + \eta^{\nu\beta} \Pi^{\rho}_{\rho, \mu\alpha} \right) \quad (5.39)$$

representa uma quantidade independente da parametrização do gráviton, como vimos no capítulo anterior. Desta forma, podemos estudar as massas térmicas que aparecem no propagador do gráviton, de forma análoga ao estudo do segundo capítulo.

O propagador clássico do gráviton pode ser escrito da forma $k^{-2} P_{\alpha\beta}^{\mu\nu}$, onde:

$$P_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} + \delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\beta}^{\mu} \eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta} \right) \equiv \mathbb{I}_{\alpha\beta}^{\mu\nu} - \frac{\eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\beta}}{2} \quad (5.40)$$

que é invariante por mudança na parametrização dos campos.

O propagador efetivo do gráviton pode ser obtido por sucessivas inserções de $\bar{\Pi}$ no propagador clássico, obtendo-se:

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta}^{\mu\nu}(k) = \frac{1}{k^2} \left[P_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + \Pi_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{k^2} \right)^2 \Pi_{\rho\sigma}^{\mu\nu} \Pi_{\alpha\beta}^{\rho\sigma} + \dots \right]. \quad (5.41)$$

Como este propagador envolve apenas quantidades invariantes por mudança na parametrização dos campos, ele possui significado físico, assim como as grandezas que forem obtidas através dele. A equação (5.41) pode ser

somada como uma série geométrica, obtendo-se:

$$(k^2 P_{\rho\sigma}^{\mu\nu} - \Pi_{\rho\sigma}^{\mu\nu}) D_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu) \quad (5.42)$$

O propagador efetivo satisfaz alguns vínculos fundamentais. Por exemplo, devido ao traço nulo de $\tilde{\Pi}$, a equação (5.41) impõem que:

$$D_\rho^{\rho\mu\nu} = -\frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2} \quad (5.43)$$

Além disso, a identidade de Ward (4.33) impõe que:

$$k_\alpha k_\beta D_{\mu\nu}^{\alpha\beta} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} + \frac{\rho}{12} (\eta^{\alpha\beta} - 4\delta_0^\alpha \delta_0^\beta) (k^2 \mathbb{1} - \tilde{\Pi})_{\alpha\beta, \mu\nu}^{-1} \quad (5.44)$$

onde a densidade de energia ρ é dada por:

$$\rho = \frac{g\pi^2 T^4}{30}. \quad (5.45)$$

Novamente aqui g representa o número total de graus de liberdade das partículas térmicas.

Como vimos no capítulo 2, as massas térmicas surgem quando $k_0 = 0$. Estas massas serão importantes para vermos a absorção do campo pelo plasma térmico. Quando elas são nulas, provocam divergências infravermelhas na teoria, como a parte magnética de uma teoria de Yang-Mills, enquanto se forem negativas denotam instabilidades, como a massa de Jeans clássica. Em $k_0 = 0$, a parte dominante em altas temperaturas de $\tilde{\Pi}$ pode ser escrita da forma:

$$\tilde{\Pi}^{\mu\nu, \alpha\beta}(k_0 = 0) = \kappa^2 \rho \left(T_J^{\mu\nu, \alpha\beta} - \frac{1}{3} T_S^{\mu\nu, \alpha\beta} \right), \quad (5.46)$$

onde T_J e T_S são tensores definidos como:

$$T_J^{\mu\nu, \alpha\beta} = \left[-\frac{4}{3} T_3(u) - \frac{1}{12} T_4(u) + \frac{1}{3} T_5(u) \right]^{\mu\nu, \alpha\beta} \quad (5.47)$$

$$T_S^{\mu\nu, \alpha\beta} = \left[-\frac{1}{2} T_2(u) + 2T_3(u) \right]^{\mu\nu, \alpha\beta}. \quad (5.48)$$

Note que estes tensores são de traço nulo, idempotentes (a menos de um sinal) e ortogonais entre si. Estes tensores são os modos normais de vibração

do plasma. O modo descrito por T_J é espacialmente longitudinal, enquanto o modo descrito por T_S é espacialmente transversal, isto é:

$$k_i k_j T_S^{ij, \mu\nu} = 0; \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (5.49)$$

Desta forma, é fácil inverter a equação (5.46), obtendo para o propagador efetivo do gráviton o resultado:

$$D^{\mu\nu, \alpha\beta}(k_0 = 0) = \frac{1}{\vec{k}^2} T_U^{\mu\nu, \alpha\beta} + \frac{1}{\vec{k}^2 + \frac{\kappa^2 \rho}{3}} T_S^{\mu\nu, \alpha\beta} + \frac{1}{\vec{k}^2 - \kappa^2 \rho} T_J^{\mu\nu, \alpha\beta} \quad (5.50)$$

onde o terceiro modo normal T_U é dado por:

$$T_U^{\mu\nu, \alpha\beta} = \left[-\frac{1}{2} T_1(u) + \frac{1}{2} T_2(u) - \frac{2}{3} T_3(u) + \frac{7}{12} T_4(u) - \frac{1}{3} T_5(u) \right]^{\mu\nu, \alpha\beta}, \quad (5.51)$$

que é normal aos modos T_J e T_S .

Podemos ver que a massa associada ao modo T_U é nula, isto é, o plasma não absorve nem amplifica ondas associadas a este modo, de modo análogo à parte magnética da QCD. Por outro lado, a massa associada ao modo T_S é:

$$m_S^2 = \frac{\kappa^2 \rho}{3} = \frac{32\pi G \rho}{3}, \quad (5.52)$$

equivalente ao modo elétrico de um plasma de QCD, ou ao plasma da teoria escalar com acoplamento $\lambda\phi^3$.

O modo T_J é caracterizado por uma massa imaginária:

$$m_J^2 = -32\pi G \rho \quad (5.53)$$

de forma equivalente à massa de Jeans clássica. Isto implica em instabilidades para flutuações na densidade com comprimentos de onda maiores que $|m_J|^{-1}$. Vale ressaltar que a inclusão de outras partículas internas como grávitons, bósons vetoriais ou férmions mudará este resultado apenas por uma constante multiplicativa g em ρ que conta os graus de liberdade destas partículas.

Apêndice A

Neste apêndice vamos obter as propriedades da função zeta de Riemann generalizada e calcular as integrais do tipo:

$$J_n(t) = \left(\frac{i\pi T}{|\vec{k}|} \right)^{n-1} \int^t dy y^n \left[\ln(y) - \frac{1}{2y} - \psi(y) \right] \quad (\text{A.1})$$

em termos da função ζ definida como:

$$\zeta(z, y) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(l+y)^z}. \quad (\text{A.2})$$

Para isto, expressamos a função ψ como:

$$\psi(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \zeta(1 + \varepsilon, y) \right] \quad (\text{A.3})$$

e usamos a fórmula:

$$\int^t dy \zeta(z, y) = \frac{1}{1-z} \zeta(1-z, t), \quad (\text{A.4})$$

que pode ser verificada facilmente pela equação (A.2) e, integrando por partes, pode ser generalizada para:

$$\int^t dy y^n \zeta(z, y) = \sum_{l=0}^n \frac{(n-l)!}{n!} \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(l+2-z)} t^n \zeta(z-l-1, t). \quad (\text{A.5})$$

Substituindo a equação (A.3) na equação (A.1) e usando a equação (A.5) pode-se verificar que o termo divergente quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se cancela devido as

propriedades da função ζ , como era esperado. Para $n \neq 0$ obtemos:

$$J_n(t) = \left(\frac{i\pi T}{|\vec{k}|} \right)^{n-1} \left\{ \frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t - \frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{t^n}{2n} - \sum_{j=0}^n (-1)^j t^{n-j} \binom{n}{j} \zeta'(-j, t) + \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j+1} \binom{n}{j} \left(\sum_{k=1}^j \frac{1}{k} \right) t^{n-j} B_{j+1}(t) \right\}, \quad (A.6)$$

onde B_n são os polinômios de Bernoulli[11]. Para $J_0(t)$ obtemos:

$$J_0(t) = \frac{|\vec{k}|}{i\pi T} \int^t \left[\ln(y) - \frac{1}{2y} - \psi(y) \right] dy = \frac{|\vec{k}|}{i\pi T} \left[t \ln t - \zeta'(0, t) - t - \frac{1}{2} \ln t \right]. \quad (A.7)$$

Vamos agora discutir o comportamento da função zeta generalizada para pequenos valores do parâmetro $t(k_0) = i \frac{k_0 + |\vec{k}|}{4\pi T}$, que corresponde ao limite de altas temperaturas. Para isto, partimos da representação[11]:

$$\zeta(z, t) = \frac{1}{t^z} + \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{x^{z-1} e^{-tx}}{e^x - 1} dx. \quad (A.8)$$

Expandindo (A.8) em série de potências de t e usando a representação integral da função gama de Euler, obtemos:

$$\zeta(z, t) = \frac{1}{t^z} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma(z+l)}{\Gamma(z)} \frac{(-t)^l}{l!} \zeta(z+l). \quad (A.9)$$

Derivando (A.9) com relação a z , obtemos, em termos da função $\psi(z)$ que:

$$\zeta'(z, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-t)^l}{l!} \frac{\Gamma(z+l)}{\Gamma(z)} \{ [\psi(z+l) - \psi(z)] \zeta(z+l) + \zeta'(z+l) \} - t^z \ln(z). \quad (A.10)$$

Estamos interessados realmente em valores de $\zeta'(z, t)$ com $z \rightarrow -n$ onde n é um número inteiro positivo. Após um cálculo sistemático, obtemos:

$$\zeta'(-n, t) = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \left[\zeta'(l-n) - \zeta(l-n) \sum_{k=n-l+1}^n \frac{1}{k} \right] t^l - t^n \ln(z) - \frac{t^{n+1}}{n+1} \left(\gamma - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) + \sum_{l=n+2}^{\infty} (-1)^{n+1} t^l \frac{n!(l-n-1)!}{l!} \zeta(l-n). \quad (\text{A.11})$$

Desta forma, podemos expandir as funções de dois pontos calculadas neste trabalho em série decrescente de potências de T .

Apêndice B

Neste apêndice apresento as regras de Feynman para uma teoria de Yang-Mills $SU(N)$ sem férmions no gauge de Feynman. Estas regras podem ser deduzidas pelo método usual de teoria quântica de campos a partir da densidade lagrangeana efetiva:

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{FG}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} \quad (\text{B.1})$$

onde $\mathcal{L}_0$ é a lagrangeana clássica dada por:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} \quad (\text{B.2})$$

com F dado por:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + ig f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu \quad (\text{B.3})$$

e f é a constante de estrutura do grupo de gauge; o termo $\mathcal{L}_{\text{FG}}$ em (B.1) corresponde ao termo de fixação de gauge dado por:

$$\mathcal{L}_{\text{FG}} = \frac{1}{2} \partial^\mu A^a_\mu \partial^\mu A^a_\mu \quad (\text{B.4})$$

e finalmente o termo $\mathcal{L}_{\text{FP}}$ corresponde aos fantasmas de Fadeev-Popov:

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = \partial^\mu \bar{C}^a \left(\delta^{ab} \partial_\mu + ig f^{abc} A^c_\mu \right) \partial_\mu C^b \quad (\text{B.5})$$

Assim as regras de Feynman serão, para o propagador de um glúon:

$$\begin{array}{c} a \quad k \quad b \\ \hline p \quad \quad \quad q \end{array} \quad \frac{\delta^{ab} g_{\mu\nu}}{k^2}, \quad (\text{B.6})$$

para o propagador de um fantasma:

$$\text{---} \overset{a}{\text{---}} \overset{k}{\text{---}} \text{---} \overset{b}{\text{---}} \text{---} \quad -\frac{\delta^{ab}}{k^2}, \quad (\text{B.7})$$

para o vértice de três glúons:

$$g(2\pi)^4 \delta^4(p+q+r) f^{abc} [g_{\mu\nu}(p-q)_\sigma + g_{\nu\rho}(q-r)_\mu + g_{\rho\mu}(r-p)_\nu], \quad (\text{B.8})$$

para o vértice de quatro glúons:

$$g^2(2\pi)^4 \delta^4(p+q+r+s) \times \\ [f^{aeb} f^{ecd} (g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} + \\ f^{eac} f^{ebd} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + \\ f^{ead} f^{ebc} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma})] \quad (\text{B.9})$$

e para o vértice entre fantasmas e glúon:

$$-g(2\pi)^4 \delta^4(p-q-k) f^{abc} p_\mu, \quad (\text{B.10})$$

lembrando de computar um sinal menos para cada loop de fantasma.

Para concluir este apêndice queria lembrar algumas propriedades da constante de estrutura do grupo de gauge SU(N):

$$f^{acd} f^{bcd} = N \delta^{ab} \quad (\text{B.11})$$

e

$$f^{ade} f^{bef} f^{cfd} = N f^{abc}. \quad (\text{B.12})$$

Desta forma podemos calcular os gráficos de Feynman desta teoria.

Bibliografia

- [1] E. Braaten e R. D. Pisarski, Nucl. Phys. B337, 569 (1990); *ibid* B339, 310 (1990); Phys. Rev. D45, 1827 (1992).
- [2] K. Kajantie e J. Kapusta, Ann. Phys. (NY) 160, 477 (1985)
- [3] S. Mandelstam, Phys. Rev. D20, 3233 (1990)
- [4] R. Jackiw e S. Templeton, Phys. Rev. D82, 615 (1981)
- [5] A. P. de Almeida e J. Frenkel, Phys. Rev. D47, 640 (1993).
- [6] A. P. de Almeida, F. T. C. Brandt e J. Frenkel, Phys. Rev. D49, 4196 (1994).
- [7] J. I. Kapusta, *Finite Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [8] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, *Quantum Field in Curved Space* (Cambridge University Press, 1982).
- [9] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (John Wiley, 1972)
- [10] J. Frenkel e J. C. Taylor, Nucl. Phys. B334, 199 (1990); *ibid* B374, 156 (1992).
- [11] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals Series and Products* (Academic, New York, 1980).
- [12] A. P. Almeida, J. Frenkel e J. C. Taylor, Phys. Rev D 45, 2081 (1992)

- [13] A. D. Linde, Phys. Lett. B96, 289 (1980)
- [14] O. K. Kalashnikov e V. V. Klimov, Fort. der Physik 31, 615 (1981)
- [15] O. K. Kalashnikov, Fort. der Physik 32, 525 (1984)
- [16] N. P. Landsman and Ch. G. van Weert, Phys. Rep. 145, 141 (1987).